

77 204

UNIVERSITAT DE VALENCIA

FACULTAT DE FISICA

Departament de Física Aplicada



Diferencias Finitas en el Dominio del  
Tiempo (DFDT) para el Análisis de  
Dispositivos Pasivos de Microondas

Memoria presentada por  
ENRIQUE A. NAVARRO CAMBA

para optar al grado de  
DOCTOR EN FISICA

Junio de 1992



UMI Number: U607741

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607741

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.  
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against  
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC  
789 East Eisenhower Parkway  
P.O. Box 1346  
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Nº Registre 1793

DATA 27-7-82

SIGNATURA T.D. 204

BIBLIOTÈCA

Nº LIBIS: 119485359

29 cms.

DEPARTAMENTO DE FISICA APLICADA

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

C/. Doctor Moliner, 50

46100 BURJASSOT (VALENCIA) ESPAÑA

Tels. (9) \*386 43 00/386 43 45

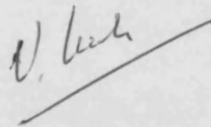
Fax (6) 364 23 45

VICENTE SUCH BELENGUER, Catedrático de Física Aplicada de la Universitat de València.

CERTIFICA: que D. Enrique A. Navarro Camba, Licenciado en Física, ha realizado el presente trabajo: "Diferencias finitas en el dominio del tiempo (DFDT) para el análisis de dispositivos pasivos de microondas" bajo su dirección en el Departamento de Física Aplicada de la Universitat de València.

Y para que así conste a efectos de presentación para optar al grado de Doctor en Física, se expide el presente certificado.

València, 18 de Junio de 1992.



Fdo.: Vicente Such Belenguer



*Per als meus iais*



*« hacer una tesis significa divertirse  
y la tesis es como un cerdo, todo  
tiene provecho.»*

UMBERTO ECO, *Cómo se hace una Tesis.*





Quiero hacer constar mi reconocimiento a todas las personas e instituciones con cuya colaboración ha sido posible la realización de esta memoria.

Por ello, deseo expresar mi agradecimiento, en primer lugar, a mi director de tesis, el Profesor Vicente Such Belenguer, que me animó para que viniese a la Universidad. A Vicente Muñoz que como director del Departamento de Física Aplicada prestó todo su apoyo. A todos los compañeros del Departamento de Física Aplicada, especialmente a Miguel V. Andrés por su estímulo y sus consejos. A Francisco Pomer por sus valiosos comentarios y a Benito, José Luis, José Miguel y Oswaldo con quienes empecé, y departí los agradables minutos del café. También a Victoria y a quienes con su presencia han hecho mi labor más agradable: Eduardo, Juan, Domingo, Alberto y Ana.

Quiero agradecer el apoyo recibido desde el Servei d'Informàtica de la Universitat de València. Sin sus ordenadores, primero un IBM 3090/150E 1VF y un HP 9000/370, y luego el IBM 9021/500 2VF, este trabajo hubiese sido totalmente impensable.

A la empresa RYMSA, y en particular a J.M. Montero por proporcionarme las medidas experimentales. A la Universitat de València por la beca con la que me inicié. A la Consellería D'Educació i Ciència y al Ministerio de Educación y Ciencia que continuaron con la financiación.

Por último, con entrañable cariño, a mis padres, hermanos y Bea, que han tenido que aguantar mis estadios de mal humor, y también a mis amigos que siempre han valorado mi labor.

Para todos mi más sincera gratitud, esperando que la memoria presentada colme sus atenciones y sea de su agrado. A todos ellos espero no defraudar.



# INDICE

	<u>pag</u>
<b>Capítulo 1: Introducción</b>	
1.1. Introducción.	1
1.2. Métodos aplicables a dispositivos pasivos.	2
1.3. Orígenes del método y limitaciones del pasado.	9
1.4. Antecedentes.	10
1.5. Posibilidades futuras de DFDT.	20
1.6. Organización de esta tesis.	22
<b>Capítulo 2: Fundamentos matemáticos</b>	
2.1. Introducción.	25
2.2. Las ecuaciones de Maxwell.	26
2.3. Diferencias finitas.	28
2.3.1. Aproximación del operador derivada.	28
2.3.2. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.	31
2.3.3. Estabilidad y convergencia.	32
2.3.4. El algoritmo de Yee.	33
2.3.5. Estabilidad del algoritmo de Yee.	40
2.3.6. Modelado.	45
2.3.7. Dispersión del algoritmo de Yee.	45
2.4. Excitación.	52
2.4.1. Separación entre zona de campo total y zona de campo dispersado.	53
2.5. Condiciones de contorno de radiación o condiciones de contorno absorbentes.	67
2.5.1. Ecuación de onda de un solo camino.	68
2.5.2. Implementación numérica de las CCA.	78
2.5.3. CCA de Mur de primer orden.	82

	<u>pag</u>
2.5.4. Análisis de la reflexión (CCA).	84
2.6. Simplificaciones computacionales.	89
2.6.1. Numeración de los vectores.	90
2.6.2. Medios con pérdidas.	96
2.6.3. Región del espacio con un n° finito de medios distintos.	98

## Capítulo 3: Modos TE y TM en guías de onda. Análisis con DFDT

3.1. Introducción.	101
3.2. Modos en una guía de ondas cerrada.	103
3.3. Modos en una guía de ondas cerrada. Análisis por DFDT.	104
3.3.1. Esquema numérico.	105
3.3.2. Numeración de los modos.	109
3.4. Análisis del algoritmo. Resultados numéricos y discusión.	109
3.4.1. Análisis de la excitación. Guía rectangular con sección $b = 2a$ .	110
3.4.2. Análisis de la convergencia. Guía rectangular $b = 2a$ .	121
3.4.3. Adaptación del mallado y convergencia. Guía circular.	126
3.5. Guía coaxial de sección rectangular. Resultados numéricos.	133
3.5.1. Guía coaxial de sección cuadrada.	134
3.5.2. Guía coaxial de sección rectangular.	139
3.5.3. Análisis de una guía con dos conductores rectangulares con centros no coincidentes.	141
3.6. Conclusiones.	144

	<u>pag</u>
Capítulo 4: Aplicación de DFDT al análisis de discontinuidades en el plano H	
4.1. Introducción.	147
4.2. Formulación.	149
4.2.1. Modelado.	151
4.3. Excitación.	151
4.3.1. Señales monocromáticas.	152
4.3.2. Señales temporales de duración finita.	154
4.3.3. Señales sintéticas de banda limitada.	158
4.4. Condiciones de Contorno Absorbentes.	160
4.4.1. CCA de Mur de 1 <sup>er</sup> orden.	160
4.4.2. CCA de Mur de 2 <sup>a</sup> orden.	163
4.4.3. Discusión.	165
4.4.4. CCA de Mur de primer orden modificadas para una señal monocromática en guía de onda.	166
4.5. Análisis de discontinuidades en el plano H. Resultados numéricos.	170
4.5.1. Codo recto en guía de onda.	170
4.5.2. Unión T en el plano H.	172
4.5.3. Filtro.	175
4.5.2. Guía de planos paralelos abierta.	178
4.6. Conclusiones.	183

## Capítulo 5: Extensión de DFDT al análisis de discontinuidades en tres dimensiones

5.1. Introducción.	185
5.2. Planteamiento general. Diseño computacional.	188
5.2.1. Bloques de cálculo de los campos eléctrico y magnético.	189
5.3. Análisis de la guía coaxial rectangular.	195
5.3.1. Modos TE y TM en guía coaxial.	196

	<u>pag</u>
5.3.2. Modo fundamental (TEM).	197
5.3.3. Modelización de la guía coaxial cuadrada (DFDT).	207
5.3.4. Comportamiento de las CCA con el modo fundamental.	208
5.3.5. Estudio de la atenuación de los modos de orden superior por debajo del corte.	212
5.3.6. Excitación con señal temporal sintética con estructura espacial TEM. Separación campo total-campo reflejado.	224
5.3.7. Mallado variable en la modelización del coaxial.	229
5.4. Análisis de una guía coaxial rellena de dieléctrico.	231
5.5. Análisis de una unión T simétrica en guía coaxial cuadrada.	235
5.5.1. Modelado.	236
5.5.2. Esquema del programa principal.	242
5.5.3. Resultados numéricos.	244
5.6. Conclusiones.	262
APENDICES.	265
CONCLUSIONES Y PRINCIPALES APORTACIONES.	269
BIBLIOGRAFIA.	275

# Capítulo 1: Introducción

## 1.1. Introducción.

Mucho de lo que vulgarmente llamamos moderna tecnología depende en gran parte del análisis y síntesis de sistemas de radiofrecuencia. Esta ha sufrido en los últimos tiempos un gran desarrollo en campos tan diversos como pueden ser telecomunicaciones, radar, geofísica, medicina y defensa. La posibilidad de comprender, conocer y controlar los efectos de la radiación electromagnética se ha revelado de gran importancia. Todo el conocimiento adquirido y todo el futuro a generar en este campo se basan en la construcción de soluciones precisas de las ecuaciones de Maxwell.

El grado de complejidad de los sistemas analizados en nuestros días hace que, incluso después de tediosos análisis teóricos, siempre se tenga que recurrir al uso del ordenador. Con esto, una nueva área de trabajo de reciente nacimiento empuja al desarrollo de las nuevas tecnologías, es el Electromagnetismo Computacional. Este nuevo conocimiento envuelve tanto el desarrollo de algoritmos y métodos numéricos, como su aplicación para resolver las Ecuaciones de Maxwell.

Hay un gran número de alternativas numérico-analíticas para tratar la interacción de ondas electromagnéticas en tres dimensiones. Dentro de estas encontramos que, tanto la forma como el material constituyentes de la estructura, juegan un importante papel en el momento de decidir el tipo de tratamiento. Este trabajo tiene que ver con la implementación y aplicación de uno de los mayores avances del Electromagnetismo Computacional contemporáneo: Las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo para resolver las ecuaciones de Maxwell del rotacional. En este capítulo se describen sus antecedentes, sus ventajas sobre otros métodos, y también sus limitaciones. Se verá que los recientes avances en arquitectura informática han contribuido en gran parte a su desarrollo, extensión y rapidez, de modo





que actualmente es el método preferido para el análisis de estructuras cuyo estudio no es fácil con los métodos convencionales.

## 1.2. Métodos aplicables a dispositivos pasivos y viabilidad.

La modelización numérica de componentes pasivos de microondas ha sido una importante área de trabajo en las últimas dos décadas. La necesidad de esa actividad se ha visto incrementada en los últimos años. Esto ha sido debido al aumento de la investigación y el desarrollo en la integración de circuitos de onda milimétrica y en los circuitos integrados monolíticos.

En la mayoría de los casos es imposible tratar estos sistemas mediante métodos analíticos, y esto ha generado la necesidad de desarrollar métodos numéricos como una herramienta básica para su caracterización.

Estos métodos numéricos deben de ser eficientes en el uso de recursos informáticos por sus limitaciones en el tiempo de CPU y en el uso de memoria, de todos modos los avances actuales en grandes ordenadores están limando estas restricciones y se toleran algoritmos poco eficientes, aunque no son deseables. Otro aspecto importante en la elección y desarrollo de un método numérico, es su versatilidad. Aunque a la hora de elegir el método se pide precisión, velocidad, ahorro de memoria y versatilidad, al final se observa que con frecuencia este depende de la estructura a analizar. Muchos de los métodos utilizados en nuestros días para el análisis de dispositivos pasivos de microondas han sido desarrollados con un propósito específico, otros sin embargo proceden de otras áreas y se han refinado y adaptado a estas estructuras.

Cuando una determinada estructura va a analizarse, se debe de elegir el método más apropiado. La elección no es única, y entonces se deben de ir evaluando críticamente las posibles alternativas. A continuación se describen brevemente algunos métodos numéricos, y se presenta una valoración crítica de los mismos. Estos se han elegido entre los más

representativos de los utilizados normalmente en la caracterización de dispositivos pasivos de microondas.

### Diferencias Finitas.

Es bien conocido, ha sido ampliamente utilizado en análisis de estructuras y dinámica de fluidos. Es el menos analítico de todos. El preprocesado matemático es mínimo y puede ser aplicado a cualquier estructura. El precio que se paga es el de la imprecisión en el modelado de contornos no planos. Otro problema que presenta es el del modelado de regiones abiertas que se han de cortar para tratar "computacionalmente" una zona de tamaño finito.

### Elementos Finitos.

El método de Elementos Finitos [1-5] es similar al de Diferencias Finitas. Sin embargo presenta características variacionales y es más flexible en la modelización de contornos. En lugar de tratar ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno, trata Funcionales obtenidos a partir de dichas ecuaciones con sus correspondientes condiciones de contorno. Se construyen con ellos formulaciones variacionales, que finalmente son aplicadas a cada una de las pequeñas áreas o volúmenes en que se subdivide la región problema en las que la solución se aproxima como combinación lineal de unas funciones base. La división se efectúa en elementos poligonales en dos o tres dimensiones de tamaño variable. Por esta razón, el método no sufre ninguna restricción, independientemente de la forma de la estructura que se modela.

El problema que presentan los Elementos Finitos es el de la aparición de las llamadas "soluciones espúreas". Son soluciones que se obtienen con el método, pero que no se corresponden con una solución física del problema. Estas soluciones son generadas por el método numérico en sí mismo. Recientemente se han intentado eliminar introduciendo una nueva restricción en la formulación inicial, esta es  $\bar{\nabla} \bar{H} = 0$  [6].

También recientemente, se ha desarrollado el método de los Elementos de Contorno [7,8] . Este es una combinación del método de la Ecuación Integral de Contorno y de una discretización similar a la que se efectúa con elementos finitos, pero siempre en dos dimensiones (solo se discretiza el contorno).

La ventaja de este último método, esta en la notable reducción de necesidades de memoria y de tiempo de cálculo. Todo ello como consecuencia de la disminución de las dimensiones del problema.

El método de Elementos Finitos requiere mucho tiempo de cálculo y consume muchas posiciones de memoria, además es muy compleja su programación y se precisa muchos meses de trabajo que no se rentabilizan a no ser que el programa final sea muy versátil [9].

#### Método de la Matriz de línea de Transmisión (TLM).

Con este método [10,11] , la región a estudiar es simulada con una red tridimensional de líneas de transmisión. Con este método se simula en el dominio del tiempo el fenómeno de la propagación de ondas. Es muy versátil. Es similar al método de Diferencias Finitas en el Dominio del tiempo con sus mismas ventajas e inconvenientes, salvo que en lugar de simular campos con diferencias divididas, se simulan corrientes en líneas de transmisión [12].

#### Método de la ecuación integral.

Se construye una ecuación integral que envuelve en la superficie del dispositivo al campo incidente, al campo tangencial, y las corrientes [13]. Esta es transformada en un sistema lineal de ecuaciones. La transformación se puede efectuar por varios métodos, entre ellos el método de los Momentos.

## Método de los Momentos.

Es muy utilizado para la discretización de ecuaciones con operadores así como en la discretización de ecuaciones integrales [14]. La solución se desarrolla en unas funciones base. En el proceso se utilizan también unas funciones de prueba que para el método de Galerkin son idénticas a las funciones base.

Dada una ecuación integral, el primer paso consiste en desarrollar la función desconocida como una combinación lineal de  $N$  funciones base. En el segundo paso, se efectúa el producto escalar de la ecuación integral resultante del primer paso por unas funciones de prueba ( $N$  funciones de prueba).

Hay muchas posibles elecciones tanto para las funciones de prueba como para las funciones base. La elección más sencilla da lugar al llamado método "point-matching".

En este método, las funciones base son pulsos cuadrados de altura unidad definidos sobre subdominios y las funciones de prueba son deltas de Dirac.

Con esta elección no hay que efectuar ninguna operación de integración, siendo el preprocesado muy simple. El precio que se paga por esta simplicidad es que hay que invertir matrices muy grandes si se desea obtener una solución suficientemente precisa.

Para mejorar resultados con matrices más reducidos hay que recurrir a funciones base más complicadas, por ejemplo polinómios o funciones trigonométricas.

Otro método muy usado es el de Galerkin. En éste, las funciones prueba y base son las mismas y están definidas sobre todo el dominio. El problema que envuelve este algoritmo es la tarea de doble integración que hay que efectuar para obtener cada elemento de matriz. Sin embargo, la dimensión de la matriz  $N$  es substancialmente inferior a la que se obtiene por "point-matching". En muchos casos con  $N=1$  y con una adecuada función base se obtienen resultados razonables. Se mejora la precisión



aumentando el número  $N$  de funciones base (y por lo tanto de la matriz), siendo la elección de estas muy importante. Si estas se aproximan a la solución, el algoritmo converge con pocas funciones, de lo contrario hay que tomar muchas funciones con lo cual la matriz es demasiado grande.

### "Mode matching".

Este se aplica típicamente cuando hay una discontinuidad entre dos sistemas guidores diferentes. El campo en ambos lados de la discontinuidad es desarrollado como combinación lineal de los modos propios de las respectivas regiones [15]. Los coeficientes de los desarrollos son indeterminados. Estos se hallan exigiendo la continuidad de los campos en la superficie de separación que define la discontinuidad.

La dependencia en la variable espacial se elimina usando relaciones de ortogonalidad entre los modos. Esto da lugar a un sistema lineal de ecuaciones en que las incógnitas son los coeficientes del desarrollo del campo a ambos lados de la discontinuidad [16].

### Resonancia transversal.

Esta técnica es similar a la de "mode matching". Primero se sitúan cortocircuitos a unas distancias de la discontinuidad que permitan asegurar que los modos de orden superior en corte son despreciables. Solo el modo dominante se propaga en la estructura. El objetivo del estudio es encontrar las frecuencias resonantes de las cuales se puede extraer información de la discontinuidad [17].

### Método de las líneas.

En este método, dos de las tres dimensiones son discretizadas. El problema se resuelve analíticamente en la tercera dimensión y numéricamente en las otras dos [18]. Se suele utilizar para el análisis de los modos en guías de sección complicada.

### Método de la matriz de dispersión generalizada.

Se utiliza para estudiar discontinuidades complicadas [19]. Se suele usar para caracterizar discontinuidades en cascada. Con este método se combina la interacción entre dos discontinuidades con los modos fundamental y de orden superior. Este método debe usarse combinado con otra técnica cuya aplicación permita caracterizar cada discontinuidad por separado.

### Método del domino espectral.

Es el método de la Ecuación Integral en el que se aplica la transformada de Fourier para transformar la ecuación integral. Se suele aplicar a microcintas y otras estructuras impresas. El método es eficiente pero se restringe a estructuras regulares con conductores infinitamente delgados [20].

Las técnicas espectrales son numéricamente eficientes, pero su rango de aplicación es limitado. A continuación se muestra en la table 1.I. varios aspectos comparados de los métodos numéricos más usuales. La evaluación que se efectúa de estos es cualitativa no habiendo una clara separación entre "moderado" y "mucho". Dentro de cada método hay muchas variaciones, siendo muy importante la experiencia del investigador para generar trucos, y acelerar la obtención de resultados. Por esa razón la tabla 1.I. sólo sirve de un modo grosero para tal comparación.

TABLA 1.I

Método	Necesidades de memoria	Tiempo CPU	Versatilidad	Preprocesado
Diferencias Finitas	G	G	MB	Nulo
Elementos Finitos	G	MG	MB	P
Elementos de Contorno	M	M	MB	P
Matriz de línea de transmisión (TLM)	MG	MG	MB	P
Ecuación integral	PM	PM	G	M
"Mode matching"	M	PM	G	M
Resonancia transversal	PM	PM	Ma	M
Método de las líneas	M	P	B	G
Método de dominio espectral	P	P	Ma	G

G = Grande.

M = Moderado.

P = Poco.

MB = Muy Bueno.

B = Bueno.

Ma = Marginal.

### 1.3. Orígenes del Método y limitaciones del pasado.

A mediados de los años 60, K.S. Yee [21] introduce un nuevo algoritmo para resolver las ecuaciones de Maxwell del rotacional, en el dominio del tiempo. Con este método el campo electromagnético en el continuo, es muestreado en distintos puntos de un mallado espacial y en puntos distintos pero equiespaciados de un mallado temporal. La evolución del campo electromagnético es modelizada de una forma autoconsistente, calculando sucesivamente paso a paso temporal, siguiendo la analogía numérica de las ecuaciones de Maxwell en cada nodo de la red. El algoritmo así construido simula el avance de las ondas mediante el avance del campo inicial -muestreado- en la memoria del ordenador. En este esquema, el incremento de espacio y tiempo en el muestreo son escogidos para evitar el "aliasing" de la distribución continua de campo, y garantizar la estabilidad numérica del algoritmo.

El algoritmo de Yee, ahora conocido como método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT), permite en principio modelizar la interacción electromagnética con un alto nivel detalle y con un bajo consumo de recursos informáticos, su potencia es comparable a la del método de los momentos. A pesar de todo esto el método de DFDT a permanecido aletargado desde su nacimiento hasta los años ochenta, la causa de esto se achaca a varios problemas:

a) La formulación inicial de Yee no simulaba el espacio de interacción hasta el infinito. Sucedió que la simulación de la onda incidente, después de interaccionar con la estructura en estudio se reflejaba en el final del mallado -que era finito- e interaccionaba de nuevo con el modelo. Esto, obviamente, invalidaba los cálculos del campo desde el instante en que las reflexiones llegaban a la estructura.

b) No se podía simular el avance de una onda de duración arbitraria y con cualquier ángulo de incidencia y polarización. El algoritmo estaba limitado a cortos pulsos que se propagaban paralelamente a alguno de los ejes del mallado.



c) No se podían describir estructuras mas pequeñas que una celda. Esto no permitía modelizar con suficiente precisión estructuras de alambres delgados, pequeñas hendiduras etc... Esto daba lugar a gruesas modelizaciones que en caso de contornos curvos tenía aspecto escalonado.

d) El algoritmo solo permitía obtener el campo cercano.

e) La disponibilidad de recursos informáticos no hacía posible abordar problemas con la suficiente minuciosidad.

## 1.4. Antecedentes.

Yee [21] en 1966 propone discretizar las ecuaciones de Maxwell del rotacional para resolverlas por diferencias finitas. Para ello define un cubo unidad en el que en cada nodo hay definida una componente del campo. En su algoritmo, las componentes del campo eléctrico y magnético se calculan sucesivamente en intervalos de tiempo alternativos. En el mismo trabajo, a modo de ejemplo, muestra el "scattering" de un pulso sobre un cilindro cuadrado presentando los perfiles del campo dispersado en varios instantes temporales.

El primer uso a que se destina DFDT es al cálculo del campo dispersado por blancos. El primer trabajo encontrado en la bibliografía que se ocupa de esto es de Allen Taflove y Morris E. Brodwin, (año 1975) [22]. En él se describe el proceso DFDT para el análisis del "scattering" sobre objetos bi- y tri-dimensionales. En este trabajo se hace uso de Condiciones de Contorno Absorbentes (CCA) para limitar el mallado. Las CCA presentadas absorben una onda plana que incide normalmente sobre el borde del mallado, otras de las expuestas intentan minimizar la reflexión para un cierto rango de ángulos de incidencia de la onda plana, promediando sobre el campo en las cercanías, pero la reflexión en este último caso es superior a un 10%. Se explica el modo de introducir una excitación en el campo y se demuestra la relación entre el paso espacial y temporal para que el proceso de cálculo sea estable, esto es, para evitar la acumulación de errores en el paso a paso

temporal. Finalmente el esquema es aplicado para analizar el campo dispersado por un cilindro dieléctrico de sección circular.

Otros autores aplican DFDT para investigar la interacción de pulsos sobre medios inhomogéneos de características variables en el tiempo [23], y objetos metálicos de revolución [24]. Kunz, y Lee, (1978), [25], validan el método DFDT en el análisis de las corrientes y cargas inducidas en un avión expuesto al efecto transitorio de un pulso electromagnético (EMP). Se introducen unas condiciones de contorno de radiación -utilizando el campo radiado a grandes distancias- para limitar el dominio de cálculo, pero estas son corregidas con un supuesto coeficiente de reflexión dependiente del tiempo y modelizado a priori (inicialmente un 75%) que se comporta como un filtro de alta frecuencia. El trabajo implica el desarrollo de un programa: THREDE, desarrollado para el AFWL (Air Force Weapons Laboratory - USA) que solo analiza EMP. El trabajo concluye indicando que la precisión en los resultados viene limitada por la finura del mallado -dimensiones de la celda unidad- siendo también importante el modo en que se modelizan las conductividades.

Taflove replantea la aplicación del método para otro tipo de problemas no asociados a los campos de radiación. En 1980 publica un trabajo, [26], en el que evalúa la efectividad del método en el análisis de acoplos en aberturas y cavidades conductoras para analizar la interacción del campo sobre la circuitería electrónica. Introduce pérdidas en los dieléctricos para mejorar las condiciones de contorno absorbentes presentadas anteriormente [22]. Establece dos tipos de excitación posible, mediante señales armónicas -obteniendo la información en el estado estacionario- ó haciendo uso de pulsos -efectuando la transformada de Fourier del campo dispersado-, además describe un modo de introducir la excitación que evita reflexiones espúreas. En el caso de utilizar un pulso, indica la necesidad de realizar un filtraje para eliminar el ruido acumulado por "overshoot" y "undershoot" (previo a la transformada de Fourier), este fenómeno que consiste en la formación de sobreoscilaciones en los picos y depresiones del campo incidente, se debe a que el algoritmo DFDT hace una aproximación de segundo orden en los operadores diferenciales. En cuanto a la posibilidad de trabajar con el campo total o el dispersado exclusivamente, comenta la

ventaja de utilizar el campo total por el ruido que queda al efectuar la resta. Valida el algoritmo tratando una esfera dieléctrica y una cavidad cilíndrica conductora con una abertura. Finalmente analiza la penetración del campo en la carcasa de la cabeza guiadora de un misil. La conclusión es un nivel de precisión en los resultados de mas menos 1dB.

Las condiciones de contorno absorbentes utilizadas hasta el momento servían como una primera aproximación puesto que solo eran realmente útiles cuando la onda incidía en una determinada dirección, causando grandes reflexiones en otros casos. Además no presentaban posibilidades de mejorar. Gerrit Mur en 1981 [27] presenta unas nuevas condiciones de contorno absorbentes, que en realidad son una extensión de las derivadas por Engquist y Majda [28] para la ecuación de onda escalar. La mejora de las primeras con respecto a las segundas esta en que pueden aplicarse mas cerca de los vértices del mallado, esto permite que sea menor el consumo de memoria. Por otro lado establece la ventaja de separar el dominio de cálculo en dos zonas: zona de campo total, y zona de campo dispersado. Esta división hace que las CCA actuen sobre el campo dispersado -cuya orden es sensiblemente inferior a la del campo total- disminuyendo notablemente la magnitud de las reflexiones. El criterio de separación, consiste en la suma y resta del campo incidente en la "línea" de introducción de la excitación, de modo que a un lado queda el campo total (incidente mas dispersado) y del otro lado queda solo el campo dispersado, siendo el algoritmo consistente en todo momento.

El problema que presenta DFDT es la dificultad de tratar estructuras enormes comparadas con la longitud de onda que presentan detalles pequeños , del orden de una longitud de onda. Esto es resuelto por Allen Taflove y Korada Umashankar. En 1982 [29] presentan un método mixto Momentos/DFDT. El algoritmo se basa en un nuevo uso del teorema de equivalencia de Schelkunoff que permite analizar problemas de penetración a pasos, tratando la relativamente simple región externa y la relativamente compleja región interna. El método es útil para tratar alambres y pequeños objetos materiales en el interior de grandes zonas, o fuertemente acoplados a aberturas.

Con otros trabajos de Umashankar y Taflove [30,31] (1982), [32] (1983), se continúa con la aplicación de DFDT para el cálculo del campo dispersado y RCS (sección recta radar) de objetos en dos y tres dimensiones. En estos se hace uso de las innovaciones introducidas por Mur, pero con una novedad, calculan el campo dispersado en el infinito a partir de las corrientes equivalentes que se obtienen del campo dispersado próximo. De esta forma calculan la RCS y las corrientes inducidas en los blancos comparando con resultados que obtienen por el método de los Momentos. En el último de estos trabajos hacen cálculos para objetos de hasta nueve longitudes de onda y dan resultados de tiempo de cálculo en varios ordenadores [32] (1985). La conclusión de todos es que la precisión que da DFDT es al menos comparable a la que da el método de los momentos o cualquier otro de los métodos existentes.

Britt [33], (1989), hace un planteamiento en coordenadas polares y da la expresión para calcular el campo lejano en problemas de dispersión en dos dimensiones.

Strickel y Taflove [34], (1990), utilizan DFDT en un algoritmo de diseño de cubiertas absorbentes para blancos. Después de caracterizado el blanco y su cubierta, se le lanza un pulso calculando su RCS biestática en todo el ancho de banda del pulso. Utilizan un lazo de realimentación que intenta minimizar la respuesta variando todos los grados de libertad disponibles.

Furse, Mathur y Gandhi [35], (1990), mejoran los algoritmos DFDT para ahorrar recursos de memoria. También eliminan los efectos de las corrientes de "offset" generadas en los conductores perfectos mediante un promediado en el postproceso. Estas corrientes aparecen inducidas en los conductores por el campo incidente, al ser modelados como conductores perfectos las corrientes no decaen durante la simulación, con lo cual generan un campo magnético estático que perturba la transformación campo próximo- campo lejano.

A partir de 1986 se observa un creciente desarrollo de aplicaciones y de mejoras en DFDT. Borup, Sullivan y Gandhi [36], (1986), comparan el método del gradiente conjugado FFT con DFDT en el tratamiento de

problemas de absorción de campo por tejidos biológicos (SAR: Specific Absortion Rate). Analizan cilindros con pérdidas en dos dimensiones y encuentran que FFT-CGM da errores con polarización TE mientras que DFDT da excelentes resultados con TE y TM. Su conclusión es que DFDT es mejor que FFT-CGM.

Wang y Gandhi [37] (1989), usan DFDT para simular en tres dimensiones baterías de antenas controladas por fase con estructura anular, ("annular phased array", APA), utilizados en hipertermia.

Sullivan [38] (1990) hace una detallada simulación de aplicaciones en hipertermia profunda con modelos de pacientes humanos, comparando con resultados experimentales. Planea el diseño de nuevos aplicadores, nuevos tratamientos y compara prototipos. Mas tarde describe una serie de algoritmos para agilizar la simulación en un aplicador específico [39], (1991).

Chen y Gandhi [40], (1991), calculan las corrientes inducidas y el campo en el cuerpo humano bajo la acción de pulsos de campo electromagnético (EMP).

Uno de los primeros trabajos que aborda antenas con DFDT se debe a Reineix y Jecko [41], (1989). En este se estudian antenas de parche, analizando ciertos parámetros en función de la frecuencia: corrientes, impedancia de entrada y diagramas de radiación.

Maloney, Smith y Scott [42], (1990) estudian un monopolo cilíndrico y otro cónico mostrando la evolución del campo en las aberturas de las antenas y la variación de las admitancias con la frecuencia.

Es reciente la aplicación de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo al análisis de dispositivos cerrados de microondas. En un trabajo de 1985, [43], De Pourcq aplica DFDT al análisis de guías de onda, haciendo uso de técnicas anteriormente utilizadas en el "scattering" en campo abierto. Otra novedad es el tratamiento de las interfases entre dieléctricos, aquí se propone una corrección que mejora los resultados. Utiliza señales armónicas, esperando al estacionario para extraer la componente continua del campo, la amplitud y la fase. Calcula la potencia disipada en una guía de

ondas para modos TE<sub>10</sub> y TM<sub>11</sub>, comparando con resultados analíticos (precisión de alrededor de un 1%), aplica luego el algoritmo a un caso no trivial sin solución analítica (aplicador en guía de ondas cargado con dieléctrico) y compara con resultados obtenidos por elementos finitos.

Choi y Hoefler, [44] (1986), aplican DFDT para estudiar problemas de valores propios. En su formulación solo consideran condiciones de contorno "duras" (conductores), introduciendo excitaciones de tipo armónico y pulsos. En este último caso se hace necesario el uso de la transformada de Fourier para calcular el campo en el régimen estacionario. También indican la conveniencia de estimar a priori la distribución de campo del modo, para imponer la excitación y sólo favorecer a este. Calculan frecuencias de resonancia en cavidades resonantes con dieléctrico, comparando con resultados obtenidos mediante el método de la matriz de línea de transmisión (TLM).

Zhang, Fang y Mei, [45] (1988), aplican DFDT para analizar la impedancia característica y la constante dieléctrica efectiva de microcintas en función de la frecuencia. Explican la poca utilización de pulsos dada la sensibilidad de la TF al error numérico, que se incrementa notablemente por la imperfección de las condiciones de contorno absorbentes. En su trabajo, utilizan pulsos gaussianos como excitación, efectuando la transformada de Fourier (TF), para ello mejoran las condiciones de contorno absorbentes usando una técnica de corto-circuito/circuito-abierto, de todos modos insisten en que hay que limitar el tiempo de cálculo para evitar que crezcan las reflexiones múltiples que no se pueden cancelar. El trabajo concluye en que es más rentable en tiempo de CPU utilizar pulsos abruptos que pulsos suaves, indicando el futuro de este método en el modelizado de componentes pasivos de microondas a altas frecuencias y en mm-MMIC's.

Gwarek, [46], (1988), utiliza una formulación diferente a la tradicional DFDT para estudiar circuitos que permiten un tratamiento bidimensional. Su tratamiento modeliza el circuito con una red en la que en cada nodo hay una carga, siendo la tensión y la intensidad las magnitudes que evolucionan en el tiempo. La ventaja de este análisis es el reducido consumo de recursos

de ordenador, con lo que puede efectuar cálculos con un simple ordenador IBM PC-AT. Concluye que la excitación mas conveniente es una delta temporal y que el método es insensible a los errores de redondeo, con lo que puede usar numeros reales de baja precisión ahorrando mas recursos.

Zhang y Mei, [47] (1988), completan su trabajo inicial [45] tratando discontinuidades en microcinta. En este trabajo, después de hacer una revisión de los métodos aplicables al tratamiento de discontinuidades en microcinta, plantean los métodos de valor inicial como buenas alternativas (TLM, método de Bergeron, DFDT) considerando DFDT como la mas directa, matemáticamente. El trabajo es muy detallado en el procedimiento, introduciendo como novedad un nuevo tipo de condición de contorno absorbente. Esta considera que el campo en el límite del mallado es igual al campo en el nodo anterior un cierto numero de pasos temporales antes, este número es la relación que se establece entre el paso espacial y temporal en el proceso de simulación -condición de Courant-. Esta condición es mejorada con un nuevo algoritmo basado en la cancelación local de los errores principales [45], por otro lado comentan que la dispersión numérica es despreciable frente a la dispersión física propia del dispositivo, [47]. Se estudia un microcinta con terminación en circuito abierto, microcinta sobreensanchada, gaps, uniones cruzadas y uniones T, calculando los parámetros de "scattering"-módulo y fase en el caso de la unión T-, sobre el amplio rango de frecuencias que permiten los pulsos utilizados.

Olivier y McNamara, [48] (1989), exponen un tipo de condición de contorno absorbente para usar con pulsos, derivada a partir de la constante de propagación. Utilizan sinusoides moduladas por pulsos, de modo que la banda de frecuencia solo contenga al modo dominante, con ello efectuan el análisis de una guía con un iris, comparando con resultados experimentales. En su análisis, primero calibran el algoritmo, calculando la transmisión en la guía de onda cuando no hay discontinuidad. Estos resultados los utilizan posteriormente para corregir los obtenidos considerando la presencia de la discontinuidad.

Liang, Liu y Mei, [49], (1989), hacen un análisis de onda completa de una guía de onda coplanar y una guía ranurada. Comentan que es

interesante lanzar la excitación con la estructura del modo fundamental para hacer que este alcance antes una estructura estable, pero que en cualquier caso esto no afecta a la distribución del campo. Utilizan las condiciones absorbentes de Mur modificadas con el tratamiento de Fang [50] -para minimizar reflexiones que introducen error, esta es la causa según los autores de que el método del dominio del tiempo sólo se utilice para obtener datos cualitativos y no parámetros en función de la frecuencia y datos de diseño-, y hacen el mismo tratamiento que De Pourq en las interfases dieléctricas. Calculan densidades de corriente, constantes dieléctricas efectivas, impedancias características y la relación entre componentes del campo transversales y longitudinales para ver a que frecuencia desaparece la estructura cuasi-TEM.

Sheen, Ali, Abouzahra y Kong, [51], (1990), efectúan también un análisis de onda completa de componentes en microcinta, una línea de alimentación de antenas de parche, un filtro pasa-baja y una rama secundaria de acoplador. Utilizan condiciones absorbentes de Mur de primer orden que consideran suficientes, con pulsos gaussianos, y un mallado con diferente discretización en los distintos ejes. El pequeño error en los resultados numéricos lo achacan a la ausencia de pérdidas en los dieléctricos así como a la dificultad de modelizar los pequeños detalles de la estructura. La exposición del procedimiento y el análisis es detallado.

Shibata y Sano, [52], (1990), estudian estructuras MIS (estructuras con capas metal-semiconductor) haciendo un análisis de onda completa con pérdidas. Se compara con medidas experimentales en estas líneas variando la resistividad del substrato desde 1 a 1000  $\Omega$ .cm en un rango de hasta 40 GHz.

Navarro, Nuñez y Martín, [53], (1990), [54], (1991), aplican DFDT en combinación con la transformada rápida de Fourier (FFT) para calcular las frecuencias de resonancia en dispositivos con simetría de revolución, calculando también la estructura del modo fundamental. Comparan con resultados analíticos para resonadores huecos [53], y con dieléctrico [54].

A finales de 1990, Bi, Wu y Litva, [55], aplican DFDT para analizar una discontinuidad en guía de onda rectangular. Se trata de un codo recto con



un truncamiento. Utilizan señales monocromáticas y señalan la dificultad en la obtención de buenos resultados en estructuras conductoras cerradas. La justificación de esto la atribuyen a su elevado factor de calidad, y en la modelización con DFDT como estructuras conductoras perfectas.

Jarem [56], (1991), calcula por el método de los momentos y con DFDT la impedancia de entrada de una sonda de alimentación de una guía rectangular que ha sido cortocircuitada por un lado. Hace uso del programa de DFDT, TSARS (Temporal Scattering and Reflectance Software- Lawrence Livermore National Laboratory, USA) y compara resultados obtenidos por ambos métodos.

Koike, Yoshida y Fukai, utilizan un método basado a la vez en un circuito equivalente de las ecuaciones de Maxwell y el método de Bergeron [57], (1985). El primero tiene interés por utilizar todas las componentes del campo y el segundo tiene la ventaja de efectuar un análisis del campo en el dominio del tiempo. El método, que permite un tratamiento en tres dimensiones, lo aplican para analizar en el dominio del tiempo el campo eléctrico en una línea microcinta y en un "gap" entre microcintas, dando sólo dibujos del campo en varios instantes temporales. En un trabajo posterior estudian la evolución temporal del vector de Poynting en dos líneas cruzadas [58], (1987), sin efectuar tampoco ningún cálculo de parámetros. Mas tarde aplican la técnica al estudio de líneas microcinta anisótropas, [59], (1988), esta vez si efectúan cálculos de la impedancia característica. Otro trabajo de Kukutsu, Yoshida y Fukai trata la propagación en ferrita magnetizada en tres dimensiones y en el dominio del tiempo [60], (1988). La evolución temporal del campo eléctrico en un plasma (giroeléctrico, anisótropo y con dispersión) es el tema de otro trabajo de Kashiwa, Yoshida y Fukai [61], (1988). Shibata, Hayashi y Kimura, [62], (1990), también utilizando el método de Bergeron hacen un análisis onda completa de circuitos microcinta, comparando resultados de parámetros con medidas experimentales.

Por otro lado se ha intentado mejorar las condiciones de contorno absorbentes y crear nuevos algoritmos de modelado que permitan adaptar el mallado a todos los tipos de geometrías posibles. Esto se hace para conseguir

una mayor precisión, sin necesidad de efectuar un mallado excesivamente túpido cuando se desea tener en cuenta todos los detalles de la estructura. Blaschak, [63], (1988), hace un estudio comparativo de las condiciones de contorno absorbentes utilizadas en la simulación de ondas por diferencias finitas. En particular las concernientes a la implementación numérica de ecuaciones de onda unidireccional ("one-way wave equations"). Investiga la efectividad de las condiciones de segundo y tercer orden obtenidas de ecuaciones de onda unidireccional mediante diferentes aproximaciones. La conclusión es que la aproximación de Padé es la que mejor se comporta. Moore, Blaschak, Taflove y Kriegsmann hace una revisión similar [64], (1988).

Fusco [65], (1990), formula el método DFDT en coordenadas curvilíneas generalizadas, aplicando técnicas ya utilizadas anteriormente en hidrodinámica. Trata un cilindro de sección circular y otro con sección cuadrada, comparando con resultados obtenidos por el método de los momentos, por DFDT (con formulación en cartesianas) y analíticos.

Kim y Hoefer, [66], (1990) diseñan un algoritmo para efectuar un mallado local más refinado dentro de un mallado grueso. La formulación que presentan es un caso particular de una formulación mas general de Berger y Oliger [67], (1984). La continuidad fino-grueso es asegurada exigiendo la suavidad en la transición de las componentes normales y tangenciales del campo. Comentan que una variación gradual en las dimensiones espaciales del mallado debe de ir acompañada de un idéntico cambio en la condición de estabilidad (condición de Courant). Presentan un procedimiento recursivo para refinar el mallado de modo que la condición de Courant se mantiene localmente. Los resultados que obtienen son al menos esperanzadores, pues el abrupto cambio de la celda produce reflexiones espúreas que deben ser eliminadas con una interpolación adecuada con el tipo de solución. Por otro lado la velocidad de fase de la onda aumenta al pasar de la región de mallado grueso a la fina, con lo que hay peligro de que parte de esta onda regrese al mallado grueso interactuando con la onda que queda fuera, esto se evita haciendo que el tamaño de la celda gruesa sea mucho mas pequeño que la mas pequeña longitud de onda bajo estudio.

Chu y Chaudhuri [68], (1990), estudian discontinuidades en guía de ondas combinando el algoritmo de Yee con análisis modal. Esto permite una presentación modal (elegante) de resultados numéricos con DFDT.

Riley y Turner, [69], (1990), introducen una técnica para caracterizar aberturas muy estrechas en cálculos de DFDT. La técnica establece una evolución del cálculo independiente para la abertura dentro del algoritmo DFDT, para ello hace uso de una ecuación integral para caracterizar la hendidura y que transmite la radiación al otro medio espacio.

Zivanovic, Yee y Mei , [70] (1991), proponen un refinamiento del mallado para tratar discontinuidades con pequeños detalles sin necesidad de un mallado uniforme y excesivo. El método mantiene constante la relación entre los pasos espacial y temporal, sin necesidad de efectuar un segundo cálculo [71].

## 1.5. Posibilidades futuras de DFDT.

La investigación en DFDT se abre camino por dos vertientes , por un lado mejorando y extendiendo la teoría, y por otro, desarrollando nuevas aplicaciones. Las nuevas tendencias en DFDT se pueden resumir en los siguientes puntos:

a) Se sigue trabajando en la ecuación de ondas unidireccional ("one-way wave equation") para mejorar las condiciones de contorno absorbentes ("Absorbing Boundary Conditions") que en realidad son condiciones de contorno de radiación ("Radiation Boundary Conditions" o "RBC"). El objetivo es reducir las reflexiones en los bordes del mallado, esto reduciría el nivel de ruido en la simulación y mejoraría el rango dinámico.

b) Se trabaja en el modelado de contornos curvos en conductores y dieléctricos. También se estudia la utilización de mallados variables para ahorrar recursos de ordenador, se intenta también de este modo unificar las especificaciones y los cálculos para dar agilidad y rapidez a los programas.

c) Se trabaja en algoritmos de generación de mallado para efectuar el modelado, puesto que este en ciertos casos implica el manejo de decenas de millones de puntos.

d) Es importante efectuar los cálculos con rapidez, y en estos se manejan cantidades inmensas de memoria. La aparición de los ordenadores multiproceso han potenciado la investigación en el desarrollo de códigos informáticos que tratan de optimizar al máximo los algoritmos DFDT .

e) Se investigan las posibilidades del análisis armónico y del uso de pulsos con un gran ancho de banda.

f) Se esta trabajando en retro-scattering utilizando DFDT. Se trata de reconstruir blancos a partir del campo que dispersan, observado desde un solo punto. El proceso utiliza códigos DFDT con un lazo de realimentación. Se genera un pulso sobre un blanco de prueba, la respuesta a este pulso es comparada con la medida experimental, generando una señal de error. Esta señal, a través del lazo de realimentación, perturba la forma del blanco que es de nuevo sometido a la acción del pulso. Esto ejecutado repetidas veces, hace que el blanco de prueba converja al blanco real.

g) Dado que el análisis que se efectua con DFDT es un análisis temporal, éste se está aplicando estudio de fenómenos transitorios.

h) Se investiga la aplicación de DFDT al modelado y análisis de dispositivos pasivos de circuitería.

Como se ve, la aproximación por Diferencias Finitas de las ecuaciones de Maxwell del rotacional es una potente formulación. Esta metodología es capaz de simular cualquier estructura que sea demasiado grande o excesivamente pequeña como para poder ser abordada por otro método numérico de los usados habitualmente.

## 1.6. Organización de esta tesis.

En esta tesis se abordan una serie de problemas en principio distintos, pero todos inherentes al tratamiento mediante Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo de dispositivos pasivos de microondas.

En el capítulo 2, se hace una profunda revisión de la base matemática del algoritmo DFDT. Se deduce el factor de estabilidad del algoritmo. Se establece el modo de modelar la región problema. Se describe la dispersión de tipo numérico generada por el método, y se indica el modo de separar la región problema en dos zonas, una de campo total y otra de campo reflejado. El diseño e implementación de las Condiciones de Contorno Absorbentes se aborda en el apartado 2.5, la importancia de este apartado es obvia, según como se consiga simular la adaptación se conseguirán mejores o peores resultados. Por último, se dan un conjunto de técnicas que van dirigidas al aprovechamiento de los recursos de ordenador, tanto de memoria como de tiempo de CPU.

En el capítulo 3, se aplica DFDT al análisis de los modos TE y TM en una guía conductora. Primeramente se describe el procedimiento y su base teórica. Se describe el tratamiento numérico, y a continuación se procede al análisis de resultados en casos conocidos, para depurar y definir el algoritmo. Se estudia la influencia del tipo de excitación, la convergencia en función de la densidad de mado, de la adaptación al contorno y el tiempo de simulación. Finalmente todo el bagaje técnico desarrollado, se aplica al análisis de una guía coaxial cuadrada, comparando con resultados procedentes de la bibliografía. También se aplica a una guía coaxial rectangular y a otra con los ejes de los conductores no coincidentes. En los cálculos se trabaja con doble precisión (reales\*8).

En el capítulo 4 se aplica DFDT al tratamiento de discontinuidades en el plano H. En estos tipos de discontinuidad es posible efectuar una reducción a dos dimensiones. Se discute el tipo de excitación señalando las ventajas de una señal sintética. Se analiza el comportamiento de las CCA y se deducen unas nuevas CCA solamente aplicables al caso armónico. Finalmente se obtienen resultados numéricos para los parámetros de

dispersión de varias discontinuidades que son contrastados con datos procedentes de la bibliografía. En particular, se trata un codo recto en guía rectangular, una unión T en el plano H, un filtro dieléctrico, y por último una guía de planos paralelos abierta al espacio libre. En este último caso se trata un problema de radiación, pero que se aborda desde el punto de vista circuital calculando el coeficiente de reflexión. Los cálculos de este capítulo se llevan a cabo en simple precisión (reales\*4).

El capítulo 5 muestra la metodología a seguir en el análisis de discontinuidades en tres dimensiones. En particular se trata la guía coaxial rectangular en la banda de 1 a 6 GHz. Después de un planteamiento general, se modeliza la guía coaxial cuadrada. Se obtiene la estructura del modo fundamental TEM y se calcula la impedancia característica. A continuación se estudia el comportamiento de las CCA de primer orden. Se estudia la atenuación del campo con componentes axiales como un paso previo a la determinación de los planos de referencia tras una discontinuidad. Luego se estudia la posibilidad de utilizar un mallado variable, y finalmente se abordan dos discontinuidades. Primero se analiza una guía coaxial rellena de dieléctrico (comparando con resultados teóricos) para "chequear" la metodología, y segundo y por último, se simula la evolución de una excitación sintética de 1 a 6 GHz a través de una T en guía coaxial cuadrada. En este último caso se comparan los cálculos de DFDT con resultados experimentales y teóricos (caso cuasiestático). La simulación en este capítulo también se efectúa con simple precisión.



# Capítulo 2: Fundamentos Matemáticos

## 2.1. Introducción.

El método numérico de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT ó FD-TD), cuya base matemático-computacional se describe en este capítulo, proporciona una solución directa de las ecuaciones de Maxwell del rotacional. El algoritmo que se describe discretiza las ecuaciones del rotacional empleando diferencias divididas para aproximar las derivadas. El resultado final es un sistema completamente explícito de modo que no es necesario resolver un sistema de ecuaciones y la necesidad de memoria y tiempo de cálculo es proporcional al tamaño eléctrico del modelo.

El algoritmo soluciona el sistema de ecuaciones en diferencias como un problema de valor inicial, en el que en el instante inicial se supone que se "enciende" la excitación. En el instante inicial se asume que el campo en todo el espacio es nulo, luego, una onda incidente aparece entrando en la región a partir de este instante. La propagación de esta onda se simula con la iniciación del paso a paso temporal del algoritmo DFDT, el cual es simplemente la implementación mediante diferencias finitas de las ecuaciones de Maxwell del rotacional. El proceso soluciona paso a paso temporal las ecuaciones, simulando la evolución del campo electromagnético.

El método DFDT efectúa en realidad una simulación de la propagación de las ondas mediante una simulación análoga de la propagación en los datos almacenados en la memoria del ordenador.

Primeramente se introducirán las ecuaciones de Maxwell del rotacional en el caso más general y su simplificación para modos TE y TM. Luego, en el apartado 2.3, se hace una ligera introducción al uso de





diferencias finitas para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El algoritmo de Yee o método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT), se explica detalladamente en el apartado 2.3.4, mostrando también las restricciones de estabilidad y dispersión impuestas por el tratamiento numérico. El tipo de excitación a utilizar y el modo de introducirla se analizan en el apartado 2.4; se contempla la separación entre zona de campo total y zona de campo dispersado y su implementación para casos en dos dimensiones. Las Condiciones de Contorno Absorbentes que deben de absorber las ondas para simular un medio indefinido, se tratan en el apartado 2.5. La disponibilidad de recursos informáticos es la principal limitación al método, por ello en el último apartado se abordan una serie de técnicas computacionales que a la postre permitirán el ahorro tanto de memoria como de tiempo de cálculo (CPU).

## 2.2. Las ecuaciones de Maxwell.

Consideremos una región del espacio libre de fuentes de campo y que tiene parámetros eléctricos independientes del tiempo.

Entonces, usando el sistema de unidades MKS, y en coordenadas cartesianas, las ecuaciones de Maxwell del rotacional son:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \wedge \vec{H} - \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{E} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \wedge \vec{E} - \frac{\rho}{\mu} \vec{H} \quad (2.2)$$

donde E es el campo eléctrico en volts/metro; H es el campo magnético en amperios/metro;  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica en faradios/metro;  $\sigma$  es la conductividad eléctrica en mhos/metro ;  $\mu$  es la permeabilidad magnética en henrys/metro, y  $\rho$  es la resistividad magnética equivalente en ohms/metro (este último factor es introducido para dar simetría a las ecuaciones y permitir la posibilidad de introducir pérdidas en el campo magnético). Suponiendo que el medio es lineal, isótropo y homogéneo, el

siguiente sistema de ecuaciones escalares es equivalente -en coordenadas cartesianas (x, y, z)- a las ecuaciones del rotacional:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho H_x \right) \quad (2.3.a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \rho H_y \right) \quad (2.3.b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho H_z \right) \quad (2.3.c)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (2.4.a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (2.4.b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (2.4.c)$$

El sistema de seis ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas (2-3) y (2-4) forma la base del algoritmo FD-TD para el análisis de cualquier problema electromagnético en tres dimensiones.

Antes de continuar con los detalles del algoritmo, es interesante considerar una importante simplificación del caso tridimensional. Supongamos que tanto la onda incidente como la geometría del modelo no presentan variación alguna con respecto al eje z, esto hace que todas las derivadas parciales con respecto a z sean cero. Las ecuaciones de Maxwell del rotacional se reducen entonces a dos sistemas desacoplados de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Estos sistemas, dan lugar a los llamados modo Transversal Magnético (TM) y modo Transversal Eléctrico (TE) [16]. En estos casos es posible un tratamiento bidimensional de la propagación, siendo necesarias solamente tres componentes del campo electromagnético. Considerando que el medio no presenta pérdidas, estas ecuaciones son:

### caso TM

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (2.5.a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.5.b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.5.c)$$

### caso TE

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (2.6.a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.6.b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.6.c)$$

## 2.3. Diferencias Finitas.

### 2.3.1. Aproximación del Operador derivada.

Dada una función  $F(x)$ , de la cual se conoce su valor en  $N$  puntos  $x_j$ , el modo lógico de calcular su derivada en un punto  $x$  cualquiera de su dominio, es el que sigue:

- Primero: calcular el polinomio de interpolación que aproxime la función  $F$  en un punto cualquiera,
- Segundo: calcular la derivada del polinomio de interpolación en el punto dado.

Este proceso puede simplificarse considerablemente para el caso frecuente de que el paso  $x_j - x_{j-1} = h$  sea constante y de que la derivada haya de efectuarse en los puntos de interpolación. A continuación se describe el

modo de calcular la derivada en uno de dichos puntos. La derivada se puede calcular por la derecha, por la izquierda y haciendo uso de diferencias centradas [9].

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  por la derecha, aproximación de primer orden: Al desarrollar  $F(x+h)$  en serie de Taylor entorno a  $x$ , tenemos:

$$F(x+h) = F(x) + h F'(x) + \frac{h^2}{2} F''(x) + \dots$$

de donde

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{h}{2} F''(x) + \dots = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + O(h)$$

que usando la notación  $x=x_j$ ,  $x+h=x_{j+1}$  permite escribir la siguiente expresión que nos da la derivada en  $x_j$  con un error de orden uno en  $h$ .

$$F'(x_j) = \frac{F(x_{j+1}) - F(x_j)}{h} + O(h)$$

Derivada segundas de  $F(x)$  en  $x_j$  por la derecha, aproximación de primer orden: En este caso se desarrolla en serie de Taylor  $F(x+h)$  y  $F(x+2h)$ . La combinación lineal de las dos expresiones permite escribir

$$F''(x_j) = \frac{F(x_j) - 2 F(x_{j+1}) + F(x_{j+2}))}{h^2} + O(h)$$

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  por la derecha, aproximación de segundo orden: Se puede obtener una mayor precisión desarrollando  $F(x+h)$  en serie de Taylor, y sustituyendo la expresión anterior obtenida para la derivada segunda. El resultado tiene una precisión de segundo orden ( $O(h^2)$ )

$$F'(x_j) = \frac{-3 F(x_j) + 4 F(x_{j+1}) - F(x_{j+2}))}{2h} + O(h^2)$$

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  por la izquierda, aproximación de primer orden: Se desarrolla  $F(x-h)$  en serie de Taylor, con lo cual:

$$F(x-h) = F(x) - h F'(x) + \frac{h^2}{2} F''(x) + \dots$$

de donde

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + \frac{h}{2} F''(x) + \dots = \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + O(h)$$

que usando la notación  $x=x_j$ ,  $x-h=x_{j-1}$  permite escribir la siguiente expresión que nos da la derivada en  $x_j$  con un error de orden uno en  $h$ .

$$F'(x_j) = \frac{F(x_j) - F(x_{j-1})}{h} + O(h)$$

Derivada segunda de  $F(x)$  en  $x_j$  por la izquierda, aproximación de primer orden: Análogamente al caso homólogo por la derecha, se desarrolla en serie de Taylor  $F(x-h)$  y  $F(x-2h)$ ; y se obtiene la siguiente expresión para la derivada segunda por la izquierda.

$$F''(x_j) = \frac{F(x_j) - 2F(x_{j-1}) + F(x_{j-2}))}{h^2} + O(h)$$

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  por la izquierda, aproximación de segundo orden: Siguiendo un procedimiento parecido al caso precedente por la derecha, se obtiene la siguiente fórmula.

$$F'(x_j) = \frac{-3F(x_j) + 4F(x_{j+1}) - F(x_{j+2}))}{2h} + O(h^2)$$

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  utilizando diferencias centradas: Si consideramos los desarrollos de  $F(x+h)$  y de  $F(x-h)$ , efectuando una simple resta de ambos, podemos despejar  $F'(x)$  :

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} F'''(x) + \dots = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

que nos da la derivada en  $x_j$  con un error de orden dos en  $h$ .

$$F'(x_j) = \frac{F(x_{j+1}) - F(x_{j-1}))}{2h} + O(h^2)$$

Derivada segunda de  $F(x)$  en  $x_j$  utilizando diferencias centradas: Se suman los desarrollos de  $F(x+h)$  y  $F(x-h)$ . La expresión que se deduce permite despejar  $F''(x)$  con un error de orden dos en  $h$ .

$$F''(x_j) = \frac{F(x_{j+1}) - 2F(x_j) + F(x_{j-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

### 2.3.2. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

En general, una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden con dos variables independientes, se podrá escribir:

$$G(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}) = 0$$

donde  $u$  es la función incógnita, que ha de convertir la expresión anterior en una identidad. La ecuación diferencial anterior es lineal, si depende linealmente de todos sus argumentos. Es decir, si la podemos escribir como sigue:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = f(x, y)$$

en donde los coeficientes  $A, B, C, a, b, c$ , sólo dependen de las variables independientes. En el caso de que no hubiese tal dependencia, es decir, que fuesen constantes independientes de  $x$  e  $y$ ; entonces la ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

Supongamos ahora que tenemos el caso lineal de la ecuación diferencial anterior, y consideremos la cantidad

$$D = AC - B^2$$

según el signo de  $D$ , la ecuación anterior será de los siguientes tipos:

$D > 0$ , de tipo elíptico,

$D = 0$ , de tipo parabólico,

$D < 0$ , de tipo hiperbólico,

si  $D$  cambia de signo en el correspondiente dominio de definición, se dice que es de tipo Mixto [72], [73].

Según Hadamard, [73], un problema físico, descrito por una ecuación diferencial con sus correspondientes condiciones de contorno, es un problema bien planteado ("well posed") si su solución es única y depende continuamente de las condiciones de contorno.

El procedimiento numérico usual para resolver una ecuación diferencial -con condiciones de contorno- (un problema bien planteado) es el discretizarla en diferencias finitas, haciendo uso de las expresiones anteriormente deducidas. Posteriormente se procede a la solución del sistema. Dependiendo del tipo de ecuación diferencial (clasificación anterior), se suelen seguir unos determinados procedimientos para calcular la solución. Esta solución se podrá obtener siguiendo un procedimiento, que en los sistemas hiperbólicos y parabólicos puede ser implícito o explícito. En las ecuaciones elípticas los métodos que suelen ser más utilizados son los directos y los iterativos (método de Gauss--Seidel) [9], [74].

Las ecuaciones de Maxwell del rotacional, constituyen un sistema de ecuaciones de tipo hiperbólico.

### 2.3.3. Estabilidad y convergencia.

Se dice que el método es implícito cuando se despeja de un sistema de ecuaciones, en este caso se obtiene a la vez la solución en todos los puntos de la discretización. El método es explícito cuando el sistema se soluciona de forma iterativa en cada punto, haciendo uso de la solución obtenida en puntos anteriores. La ventaja del primero sobre el último radica en que es estable, independientemente de la relación que guarden las dos discretizaciones (la espacial y la temporal). La desventaja que presenta un algoritmo implícito es que, dependiendo del problema físico modelado, se genera un gran sistema de ecuaciones; esto conlleva como problema el procesado de enormes matrices, y por lo tanto mayores recursos de memoria que en un tratamiento explícito.

Los errores que se cometen cuando se soluciona un sistema, ya sea siguiendo un esquema u otro, son de dos tipos:

- De redondeo: que son inevitables e inherentes al ordenador utilizado ya que dependen de la longitud de la palabra (bytes).

- De truncamiento: Se deben a la diferencia entre el valor analítico de las operaciones indicadas en la ecuación diferencial original, y las numéricas obtenidas mediante la discretización de la misma.

Un método numérico es convergente, si suponiendo los errores de redondeo nulos, la solución numérica tiende a la solución analítica cuando el paso de discretización tiende a cero.

El algoritmo explícito se dice que es inestable cuando los errores de redondeo junto con los errores de truncamiento se amplifican. Esto sucede porque el valor de la función en cada punto se obtiene con los valores en otros puntos de la discretización.

#### 2.3.4. El algoritmo de Yee.

En 1966, Yee introduce un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Maxwell del rotacional. Una parte importante del algoritmo de Yee (DFDT) es la situación de los puntos donde se efectúa el muestreo del campo, que se sustituye en las ecuaciones. El mallado del espacio mediante la celda unidad de Yee, establece los puntos fijos donde se va a muestrear cada componente del campo en los sucesivos instantes temporales. La situación de las componentes en cada celda permite además una natural satisfacción de las condiciones de contorno en las interfases. La fig. 2.1 muestra las posiciones del campo eléctrico y magnético en la celda unidad usada en su algoritmo, en coordenadas cartesianas. Cada componente del campo magnético está rodeada de cuatro componentes del campo eléctrico, y viceversa. Esta disposición, permite el uso de diferencias centradas en la resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell del rotacional. Pero además establece una disposición natural para implementar



la forma integral de las leyes de Faraday y Ampere al nivel de la celda unidad.

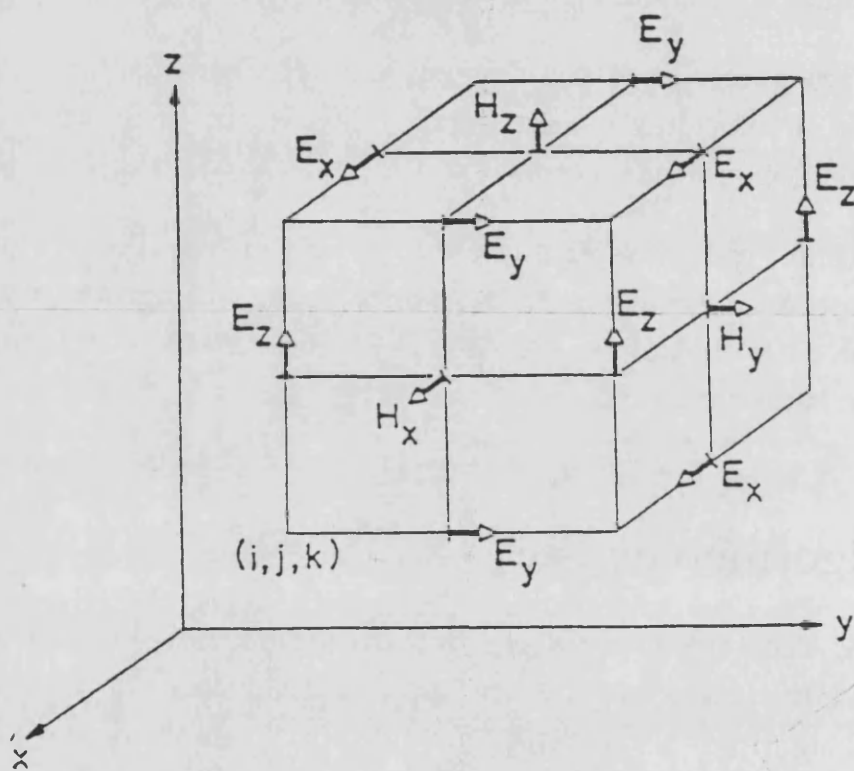


Figura 2.1. Posición de las componentes del campo en la celda unidad de Yee (DFDT) en tres dimensiones.

Cada punto del espacio se denota como:

$$(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) = (i, j, k) \quad (2.7.a)$$

y cualquier función del espacio y tiempo se expresa como:

$$F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = F^n(i, j, k) \quad (2.7.b)$$

donde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , y  $\Delta z$  son respectivamente las dimensiones del cubo unidad usado en el mallado en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\Delta t$  es el paso temporal (incremento del tiempo) e  $i$ ,  $j$ ,  $k$ ,  $n$  son enteros. Yee usaba diferencias finitas centradas para las derivadas espaciales y temporales, que son fácilmente programadas y tienen una precisión de segundo orden con respecto a los incrementos espacial y temporal.

$$\frac{\partial F^n}{\partial x} = \frac{F^n(i+\frac{1}{2}, j, k) - F^n(i-\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \quad (2.8.a)$$

$$\frac{\partial F^n}{\partial t} = \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} \quad (2.8.b)$$

Para conseguir la precisión de (2.8.a) y efectuar las derivadas de las ecuaciones de Maxwell (sistema (2.3) y (2.4)), Yee situó las componentes del campo eléctrico y magnético alternativamente en la celda unidad que se muestra en la figura 2.1. Para obtener la precisión de 2º orden en la derivación temporal de (2.8.b), las componentes de E y H eran evaluadas en intervalos de tiempo alternativos. El resultado de todo ello es el siguiente sistema explícito de ecuaciones en diferencias finitas, que es una discretización de las ecuaciones de Maxwell del rotacional para medios lineales  $E_x^{(n+1)}(i, j, k) = E_x^{(n)}(i, j, k) +$  in pérdidas.

$$E_x^{(n+1)}(i, j, k) = E_x^{(n)}(i, j, k) + \quad (2.9.a)$$

$$\frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right]$$

$$E_y^{(n+1)}(i,j,k) = E_y^{(n)}(i,j,k) + \quad (2.9.b)$$

$$\frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k+\frac{1}{2}) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i+\frac{1}{2},j,k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} \right]$$

$$E_z^{(n+1)}(i,j,k) = E_z^{(n)}(i,j,k) + \quad (2.9.c)$$

$$\frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i+\frac{1}{2},j,k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} - \frac{H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j+\frac{1}{2},k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y} \right]$$

$$H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = H_x^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) - \quad (2.10.a)$$

$$\frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_z^{(n)}(i,j+\frac{1}{2},k) - E_z^{(n)}(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y} - \frac{E_y^{(n)}(i,j,k+\frac{1}{2}) - E_y^{(n)}(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right]$$

$$H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = H_y^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) - \quad (2.10.b)$$

$$\frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_x^{(n)}(i,j,k+\frac{1}{2}) - E_x^{(n)}(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{E_z^{(n)}(i+\frac{1}{2},j,k) - E_z^{(n)}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} \right]$$

$$H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = H_z^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) - \quad (2.10.c)$$

$$\frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_y^{(n)}(i+\frac{1}{2},j,k) - E_y^{(n)}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} - \frac{E_x^{(n)}(i,j+\frac{1}{2},k) - E_x^{(n)}(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y} \right]$$

El sistema en diferencias finitas (2.9) y (2.10), puede reducirse para los casos bidimensionales TE y TM de (2.5) y (2.6).

En el caso TM la discretización se efectúa mediante la celda unidad que se muestra en la figura 2.2. Las ecuaciones en diferencias a las que da lugar el sistema (2.5), son:

$$Ez^{(n+1)}(i,j) = Ez^{(n)}(i,j) + \quad (2.11.a)$$

$$\frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{Hy^{(n+\frac{1}{2})}(i+\frac{1}{2},j)-Hy^{(n+\frac{1}{2})}(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta x} - \frac{Hx^{(n+\frac{1}{2})}(i,j+\frac{1}{2})-Hx^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right]$$

$$Hx^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) = Hx^{(n-\frac{1}{2})}(i,j) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{Ez^{(n)}(i,j+\frac{1}{2})-Ez^{(n)}(i,j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (2.11.b)$$

$$Hy^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) = Hy^{(n-\frac{1}{2})}(i,j) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{Ez^{(n)}(i+\frac{1}{2},j)-Ez^{(n)}(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta x} \right] \quad (2.11.c)$$

En el caso TE la discretización se efectúa mediante la celda unidad que se muestra en la figura 2.3. Las ecuaciones en diferencias se generan a partir de (2.6) y son:

$$Hz^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) = Hz^{(n-\frac{1}{2})}(i,j) - \quad (2.12.a)$$

$$\frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{Ey^{(n)}(i+\frac{1}{2},j)-Ey^{(n)}(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta x} - \frac{Ex^{(n)}(i,j+\frac{1}{2})-Ex^{(n)}(i,j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right]$$

$$E_x^{(n+1)}(i,j) = E_x^{(n-1)}(i,j) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j+\frac{1}{2}) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (2.12.b)$$

$$E_y^{(n+1)}(i,j) = E_y^{(n-1)}(i,j) - \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i+\frac{1}{2},j) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta x} \right] \quad (2.12.c)$$

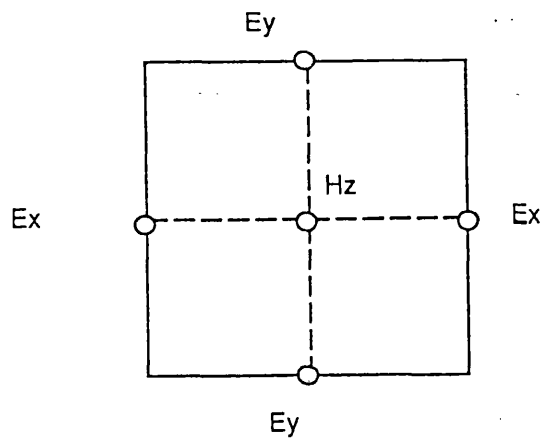


Figura 2.2. Posición de las componentes del campo en la celda unidad DFDT para un modo TM .

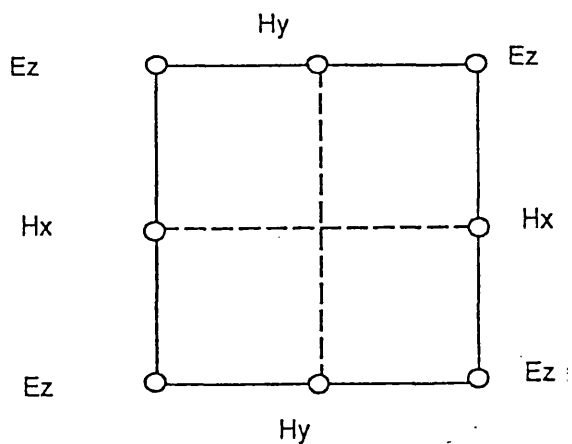


Figura 2.3. Posición de las componentes del campo en la celda unidad DFDT para un modo TE .

Con el sistema (2.9) y (2.10), el valor de cada nueva componente del campo en cada punto depende únicamente de su valor anterior y de los valores anteriores de las otras componentes del campo en puntos adyacentes. De esa forma, en un tiempo dado, el cálculo de una componente del campo puede calcularse en un punto a la vez o en  $p$  puntos a la vez (si se utilizan  $p$  procesadores trabajando en paralelo). El algoritmo es como sigue:

- Inicialmente el campo en todo el dominio es nulo.
- Lo siguiente se repite hasta que finaliza la simulación.
  - Se impone la excitación.
  - Se calcula campo magnético  $H^{(n+\frac{1}{2})}$  según 2.10.
  - Se aplican las condiciones de contorno sobre las componentes de  $H$ .
  - Se calcula campo eléctrico  $E^{(n+1)}$  según 2.9.
  - Se aplican las condiciones de contorno sobre las componentes de  $E$ .
  - Se incrementa el tiempo ,  $t=t+\Delta t$ .

La excitación se impone situando una condición de contorno que simula una fuente de campo con una estructura espacial y temporal. Esta estructura vendrá condicionada por el problema que se ha de resolver.

El paso a paso se sigue hasta que se ha obtenido la respuesta a la excitación introducida (pulso temporal), o se ha alcanzado el estado estacionario (en el caso de utilizar una señal sinusoidal como excitación). Se llega al estacionario cuando se observa una variación periódica en las componentes del campo que se muestrean.

En este paso a paso hay que asegurar la estabilidad del algoritmo para que no se acumulen los errores, que se irían incrementando

progresivamente durante toda la simulación. Por ello la discretización espacial y temporal son elegidas según una relación, para acotar errores en el proceso de muestreo y evitar cualquier posible inestabilidad.

### 2.3.5. Estabilidad del algoritmo de Yee.

El algoritmo numérico propuesto en la sección anterior para resolver las ecuaciones de Maxwell, requiere que el paso temporal guarde una relación de proporcionalidad con los incrementos espaciales. Esta relación es necesaria para evitar la inestabilidad numérica, ésta es una posibilidad presente en todos los esquemas explícitos y hace que los errores de cálculo se incrementen de forma incontrolada a la vez que se sigue con el proceso de iteración. En este apartado se va a mostrar la forma en que se obtiene el criterio de estabilidad.

Consideramos por simplicidad un medio lineal, isótropo, homogéneo y libre de pérdidas. Efectuamos a continuación la normalización que permite que la permeabilidad magnética y la constante dieléctrica sean la unidad, ( $\epsilon=1$ ,  $\mu=1$ ). Entonces las ecuaciones de Maxwell (2.1) y (2.2) las podemos reescribir como sigue:

$$j \nabla \wedge (\vec{H} + j\vec{E}) = \frac{\partial (\vec{H} + j\vec{E})}{\partial t} \quad (2.13)$$

o definiendo:

$$\vec{V} = \vec{H} + j\vec{E}$$

se convierten en:

$$j \nabla \wedge \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (2.14)$$

Para analizar la estabilidad del método es conveniente descomponer el algoritmo en diferencias finitas en dos problemas de valores propios, uno para la variable espacial y otro para la variable temporal. Se estudiará la propagación de ondas planas propias del espacio numérico de datos, es decir, de la ecuación (2.13) discretizada. Se determinarán los modos propios de la diferenciación espacial y los modos propios de la diferenciación temporal. La estabilidad numérica del algoritmo será posible si exigimos que el espectro de valores propios espaciales este contenido en el dominio de estabilidad de la red, esto es de los valores propios temporales, de esta forma evitaremos el crecimiento sucesivo de los errores en cada iteración [22]. El objetivo de este análisis es buscar una relación entre las discretizaciones temporal y espaciales que permita tal estabilidad.

#### Valores propios temporales.

La descomposición del algoritmo empieza por determinar el rango estable de valores propios temporales. Para ello consideramos el lado derecho de la ecuación (2.14) como un problema de valores propios:

$$\frac{\partial}{\partial t} |_{\text{numérico}} \vec{V} = \lambda \vec{V} \quad (2.15)$$

Usando la derivación temporal de (2.8), se deduce la siguiente ecuación en un punto cualquiera del mallado:

$$\frac{\vec{V}^{(n+\frac{1}{2})} - \vec{V}^{(n-\frac{1}{2})}}{\Delta t} = \lambda \vec{V} \quad (2.16)$$

Ahora, se define el "factor de crecimiento":



$$q = \frac{\vec{V}^{(n+\frac{1}{2})}}{\vec{V}^{(n)}} \quad (2.17)$$

y se desea que  $|q_i| \leq 1$  para todos los posibles modos espaciales en la red DFDT, para evitar tener cualquier modo cuya dependencia temporal sea divergente (esto es, que crezca el valor del campo sin límite). Esta es esencialmente la condición de estabilidad. Sustituyendo  $q_i$  en (2.16) y sacando factor común, obtenemos la siguiente ecuación para  $q_i$ ,

$$q_i^2 - \lambda q_i \Delta t - 1 = 0 \quad (2.18)$$

cuya solución es

$$q_i = \frac{\lambda \Delta t}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2} = 0 \quad (2.19)$$

De (2.19) se observa que la condición  $|q_i| = 1$  automáticamente se verifica si:

$$\text{Real}(\lambda) = 0 \quad (2.20.a)$$

$$-\frac{2}{\Delta t} \leq \text{Imag}(\lambda) \leq \frac{2}{\Delta t} \quad (2.20.b)$$

Para asegurar la estabilidad del algoritmo, todos los posibles modos espaciales deben tener valores propios que cumplan estas dos últimas condiciones (2.20).

### Valores propios espaciales.

Ahora consideramos el lado izquierdo de la ecuación (2.14) como un problema de valores propios:

$$j \nabla |_{\text{numérico}} \wedge \vec{V} = \lambda \vec{V} \quad (2.21)$$

A continuación, suponemos los siguientes modos de ondas planas:

$$\vec{V}(l,m,n) = \vec{V}_0 \exp[j(k_x l \Delta x + k_y m \Delta y + k_z n \Delta z)] \quad (2.22)$$

Donde  $k_x$  y  $k_y$  son respectivamente las componentes del vector  $\vec{k}$  (número de ondas). Sustituyendo la expresión anterior (2.22) en (2.21), y efectuando las derivaciones espaciales numéricamente como en (2.8), obtenemos la siguiente relación:

$$-2 \left( \frac{\sin(\frac{1}{2}k_x \Delta x)}{\Delta x}, \frac{\sin(\frac{1}{2}k_y \Delta y)}{\Delta y}, \frac{\sin(\frac{1}{2}k_z \Delta z)}{\Delta z} \right) \wedge \vec{V}(l,m,n) = \lambda \vec{V}(l,m,n) \quad (2.23)$$

Tras efectuar el producto vectorial, e identificar las componentes x, y, z, se obtiene un sistema de ecuaciones del cual se puede despejar  $\lambda^2$ :

$$\lambda^2 = -4 \left( \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_x \Delta x)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_y \Delta y)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_z \Delta z)}{\Delta z^2} \right) \quad (2.24)$$

Donde, teniendo en cuenta que un seno al cuadrado es a lo sumo 1, independientemente de su argumento, se deduce que

$$\text{Real}(\lambda) = 0 \quad (2.25.a)$$

$$|\text{Imag}(\lambda)| \leq 2 \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \quad (2.25.b)$$

Como se ha comentado anteriormente, estos valores propios espaciales deben de pertenecer al rango de estabilidad definido en el problema de valores propios temporal. Para ello, se establece que la acotación dada en (2.20.b) sea menor o igual que la dada en (2.25.b),

$$2 \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \leq \frac{2}{\Delta t} \quad (2.26)$$

para todos los posibles valores de  $k_x$ ,  $k_y$ , y  $k_z$ .

Esta ecuación nos da la restricción que debe verificar el paso temporal con respecto a los incrementos espaciales, que desnormalizada es:

$$c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (2.27.a)$$

siendo  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  la velocidad de la luz en el medio.

Es curioso el resultado que se obtiene, la interpretación que se desprende es evidente. La onda, cuya propagación se simula numéricamente, debe avanzar en el ordenador de modo que a lo sumo en un paso temporal se recorra un arco espacial infinitesimal. Este arco infinitesimal está determinado por las unidades de discretización en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Si esta restricción no se cumple, durante la simulación en cada iteración temporal el algoritmo iría avanzado con respecto al avance de la onda real. Esto induciría un error irreparable que se acumularía y daría lugar al fenómeno de inestabilidad.

Análogamente para los casos en que se analiza un modo TE ó TM, y la geometría del problema permite un análisis bidimensional, el criterio de estabilidad es

El análisis de la estabilidad efectuado para el caso bidimensional TM puede extenderse al caso tridimensional completo del algoritmo DFDT, siguiendo un proceso análogo. En este caso se puede fácilmente deducir que el criterio de estabilidad es

$$c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \quad (2.27.b)$$

### 2.3.6. Modelado.

El modelado se efectúa mediante el establecimiento de las matrices del campo ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ ). Estas matrices en la práctica realizan el mallado de la región, de modo que las características del medio son interpretadas por el programa de DFDT como coeficientes locales en el algoritmo (para cada punto). Las especificaciones del medio en este algoritmo y la situación de las componentes del campo en la celda unidad hacen que trabaje celda a celda, de modo que el modelado de contornos curvos se aproxime por contornos en escalera. La continuidad de las componentes tangenciales del campo en la interfase de distintos medios se asegurará con sencillez como se muestra mas adelante en el apartado 2.6.3 , y la aproximación de los contornos curvos por contornos en escalera se ha demostrado adecuada en multitud de problemas de scattering [32].

### 2.3.7. Dispersión del algoritmo de Yee.

El algoritmo numérico definido en los sistemas DFDT generan la dispersión de las ondas que son simuladas numéricamente en la red de cálculo. Esto es, la velocidad de fase de todo modo puede variar con la longitud de onda, la dirección de propagación y las dimensiones de la celda unidad utilizadas en el mallado. Esta dispersión que es de tipo numérico es debida al algoritmo DFDT, y puede dar lugar a resultados sin realidad física, tales como dispersión de pulsos, anisotropía artificial y pseudorefracción. La dispersión numérica es un importante factor a tener en cuenta para comprender la operatividad del algoritmo y sus limitaciones.

En esta parte se explicará cómo se deduce la relación de dispersión. El procedimiento seguido en el análisis de la dispersión consistirá en sustituir una onda plana monocromática en las ecuaciones (2.14). Después de algunas manipulaciones se obtiene una ecuación, que relaciona el vector numérico de ondas, la frecuencia de la onda y los incrementos espaciales y temporal. Esta ecuación con la relación de dispersión, será resuelta numéricamente en varios casos, variación de la discretización, variación de  $k$  y variación de la

frecuencia para ilustrar los fenómenos sin realidad física asociados a esta dispersión.

Consideremos la normalización efectuada anteriormente en (2.14), y supongamos la siguiente onda plana, monocromática

$$\vec{V}(i,j,k,n) = \vec{V}_0 \exp j(k_x i \Delta x + k_y j \Delta y + k_z k \Delta z - \omega n \Delta t) \quad (2.28)$$

donde  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  es el vector número de ondas, y  $\omega$  es la frecuencia temporal de la onda, y  $n, k, j, i$  enteros.

Sustituyendo la expresión (2.28), en la ecuación de Maxwell normalizada (2.14) y efectuando las derivaciones espaciales y temporales numéricamente (2.8); se desarrolla una relación vectorial de modo que identificando los términos de componentes  $x, y, z$ , se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\omega\Delta t)}{\Delta t^2} = \left( \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_x\Delta x)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_y\Delta y)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_z\Delta z)}{\Delta z^2} \right) \quad (2.29)$$

desnormalizando se deduce:

$$\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\omega\Delta t)}{(c\Delta t)^2} = \left( \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_x\Delta x)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_y\Delta y)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_z\Delta z)}{\Delta z^2} \right) \quad (2.30.a)$$

siendo  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  la velocidad de la luz.

La relación (2.30) es la relación de dispersión numérica del algoritmo DFDT para el caso general en tres dimensiones. Siguiendo un procedimiento análogo, se deduce la relación para los casos bidimensionales (TE y TM, (2.11), (2.12)):

$$\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\omega\Delta t)}{(c\Delta t)^2} = \left( \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_x\Delta x)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_y\Delta y)}{\Delta y^2} \right) \quad (2.30.b)$$

En contraste con la relación de dispersión numérica, para el caso tridimensional, la relación de dispersión para una onda plana en un continuo libre de pérdidas es:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.31)$$

A primera vista presenta poco parecido la relación (2.30.a) con el caso ideal (2.31). Se puede fácilmente demostrar que (2.30.a) se reduce a (2.31) en el límite en que  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  tiendan a cero, esto sugiere que la dispersión numérica puede reducirse al caso ideal simplemente con utilizar un mallado más fino.

Para efectuar un análisis cuantitativo retomaremos el caso bidimensional TM, suponiendo por simplicidad celdas cuadradas ( $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ ) y propagación con ángulo  $\alpha$  con respecto al eje x positivo ( $\vec{k} = (k \cos \alpha, k \sin \alpha)$ )).

Entonces la relación (2.30.b) se reduce a

$$\frac{\Delta h^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{(c\Delta t)^2} = \sin^2\left(\frac{1}{2}k \cos \alpha \Delta h\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}k \sin \alpha \Delta h\right) \quad (2.32)$$

que puede resolverse para calcular el módulo del vector  $n^\circ$  de ondas  $k$  aplicando el método iterativo de Newton:

$$k_{i+1} = k_i - \frac{\sin^2(Ak_i) + \sin^2(Bk_i) - C}{A \sin(2Ak_i) + B \sin(2Bk_i)} \quad (2.33)$$

donde  $k_{i+1}$  es el valor mejorado de  $k$ ;  $k_i$  es la estimación previa de  $k$ ; y  $A$ ,  $B$  y  $C$  son coeficientes determinados por el ángulo de propagación de la onda con el mallado.

$$A = \frac{\Delta h \cos \alpha}{2} \quad (2.34.a)$$

$$B = \frac{\Delta h \sin \alpha}{2} \quad (2.34.b)$$

$$C = \frac{\Delta h^2 \sin^2(\frac{1}{2}\omega\Delta t)}{(c\Delta t)^2} \quad (2.34.c)$$

Si normalizamos a la longitud de onda, (esto es hacer  $\lambda=1$ ), es una buena elección empezar los cálculos con  $k_0=2\pi$ , la longitud de onda en el espacio libre. En este caso es fácil ver que la velocidad de fase numérica es:

$$\frac{v_p}{c} = \frac{2\pi}{k_{\text{final}}} \quad (2.35)$$

siendo  $k_{\text{final}}$  el valor final de  $k$  obtenido con (2.33) (usualmente partiendo de  $k_0=2\pi$  bastan dos o tres iteraciones).

La figura 2.4 muestra los resultados obtenidos para la velocidad numérica de fase con respecto al ángulo de propagación ( $\alpha$  respecto al eje  $x$ ). Tres tipos de resolución son examinados: gruesa (1/5 de la longitud de onda); normal (1/10 de la longitud de onda); y fina (1/20 de la longitud de onda). Para cada resolución, la relación  $c\Delta t = \Delta h/2$  se mantiene fija, y cumple con la condición de estabilidad. Se observa que la velocidad de fase es máxima para  $45^\circ$  (incidencia oblicua), y mínima para  $0^\circ$  y  $90^\circ$  (incidencia a lo largo de los ejes coordenados) para todas las resoluciones. Se observa que en el peor de los casos el error para la resolución normal es solamente de un 1'3% y tan sólo de un 0'31% en el caso de alta resolución (1/20 de la longitud de onda).

La fig. 2.5 presenta las curvas de variación de la velocidad máxima de fase con la resolución para un ángulo de incidencia de  $45^\circ$  y  $0^\circ$  ( $90^\circ$ ). La relación  $c\Delta t = \Delta h/2$  se mantiene como antes. Se observa que la velocidad de fase numérica para cada ángulo de incidencia disminuye al utilizar un malla más gruesa, alcanzándose un umbral a partir del cual la velocidad de fase numérica se anula y la onda no se propaga. El efecto que se produce es el de un filtrado pasa-baja que es inherente al algoritmo de Yee, en el que los modos propagantes tienen una longitud de onda de al menos dos o tres

celdas, dependiendo del ángulo de propagación. Como resultado de esto, el modelado mediante DFDT de pulsos de corta duración y como consecuencia de banda infinita, da lugar a una progresiva distorsión de estos; las altas frecuencias espaciales, se propagan con mayor lentitud que las bajas, y las que tienen muy altas frecuencias espaciales con longitudes de onda inferiores a dos o tres celdas no se propagan. La dispersión numérica hace que los pulsos de duración finita se ensanchen y dejen un residuo numérico de alta frecuencia espacial en los bordes del pulso. Para tener un control de la dispersión es conveniente efectuar la transformada de Fourier espacial del pulso deseado, entonces o la vista del espectro, se seleccionan las dimensiones de la celda, de modo que las componentes principales del espectro sean resueltas con al menos diez celdas por longitud de onda. Esta medida limitaría la dispersión a menos de un 1% a pesar de la debida al ángulo de propagación con la red.

Otro efecto adicional a los comentados anteriormente, inherentes a la dispersión numérica del algoritmo, es la pseudo-refracción de la onda si el tamaño de la celda es función de la posición. La variación de la finura del mallado, varía la resolución de la onda que se propaga y en consecuencia perturba la distribución de velocidades de fase. Esto da lugar a reflexiones sin significado físico y refracción de las ondas en las interfases entre zonas con distinto tamaño de las celdas, incluso aunque estas representan zonas del espacio libre, es como si las ondas se reflejaran y refractaran en las interfases de medios dieléctricos que tienen diferentes índices de refracción. El grado de refracción depende de lo abrupto que sea el cambio en la velocidad de fase y puede ser estimado mediante la teoría convencional de reflexión y refracción de ondas en interfases.



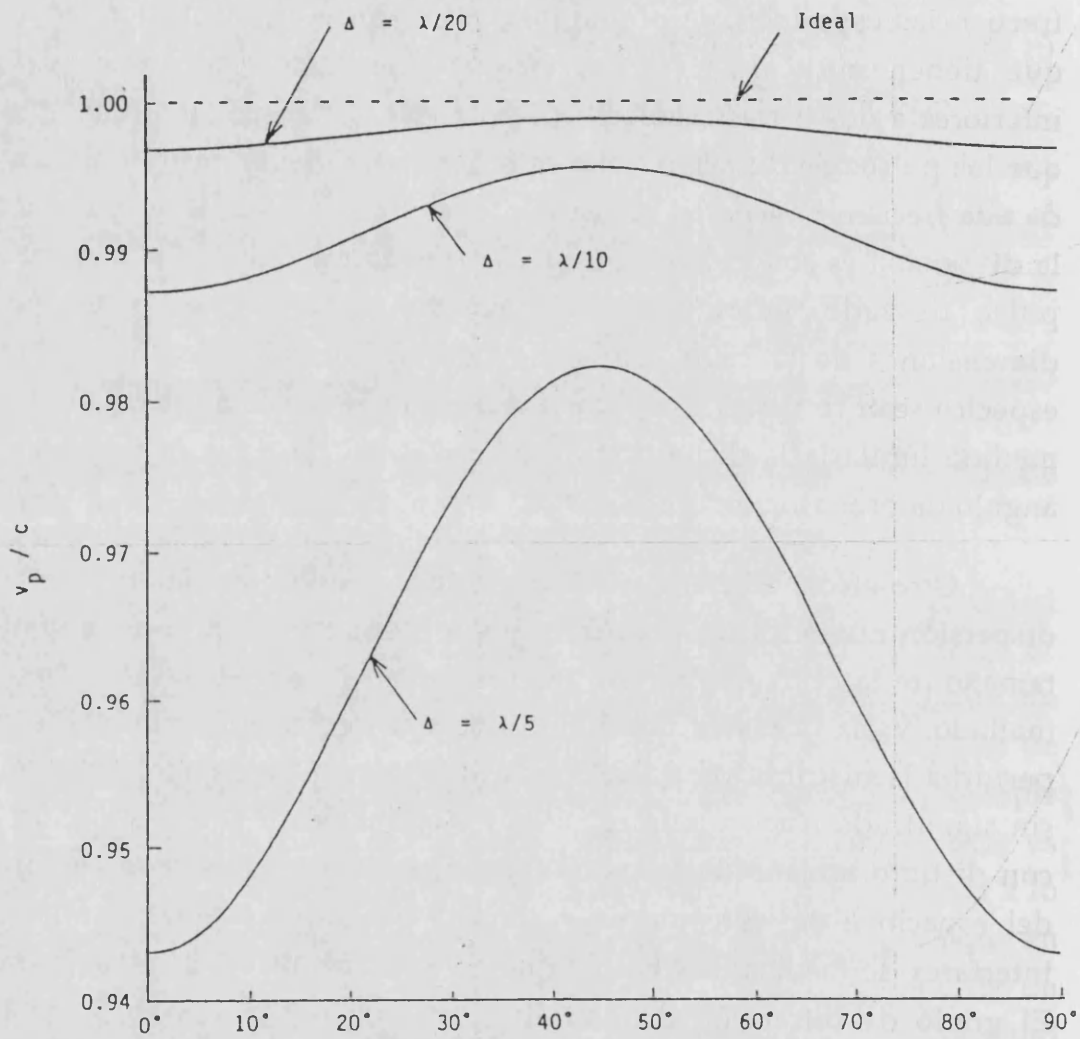


Figura 2.4. Variación de la velocidad de fase con el ángulo de propagación en un mallado DFDT para tres discretizaciones diferentes.

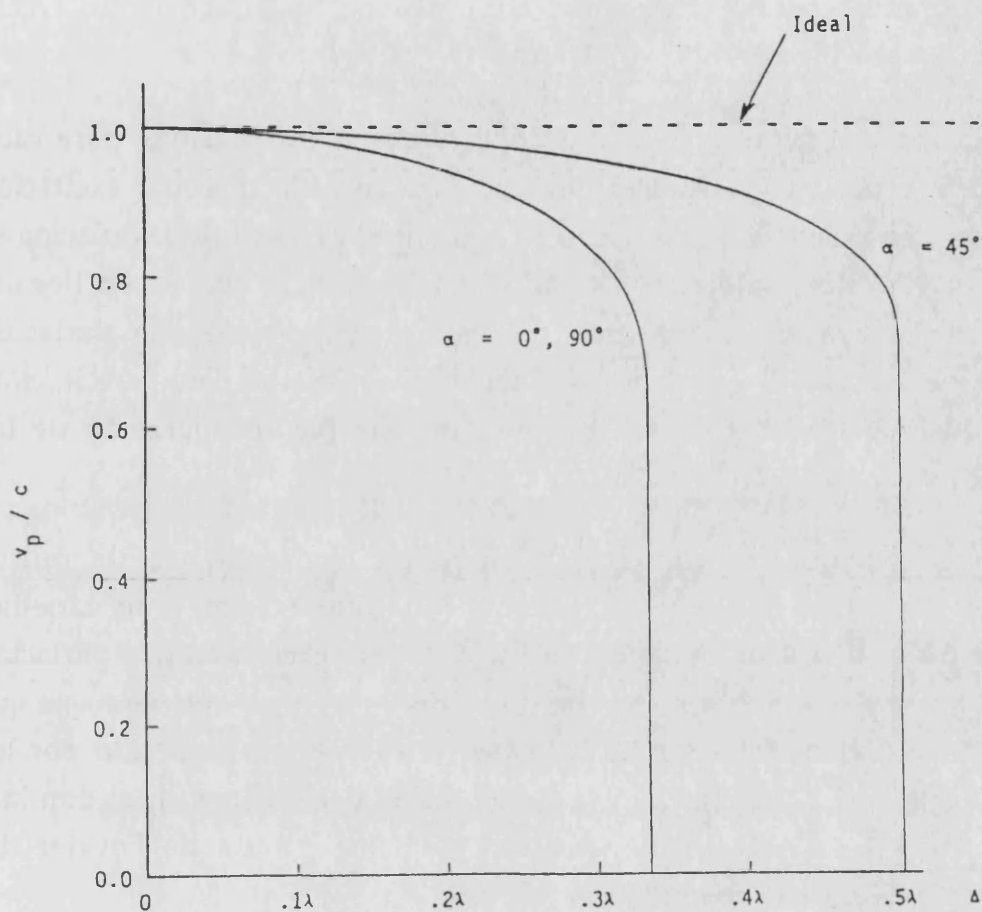


Figura 2.5. Variación de la velocidad de fase con la resolución del mallado DFDT para dos ángulos de propagación.

## 2.4. Excitación.

Los parámetros que caracterizan un sistema, se obtienen con DFDT mediante dos posibles vías:

- La modelización del proceso de "scattering" (dispersión), para cada una de las frecuencias de interés. En este caso se utilizan como excitación señales con dependencia armónica en el tiempo. El proceso de simulación se prolonga hasta que se alcanza el estado estacionario, al cual se ha llegado cuando se observa en el muestreo del campo dispersado una variación temporal periódica. El empleo de señales sinusoidales como excitación, permite que los parámetros se obtengan por simple comparación de las amplitudes del campo dispersado.

- Se modeliza el proceso de dispersión haciendo uso de pulsos temporales. Este tipo de excitación permite experimentar con gran variedad de pulsos finitos. La única exigencia a estos, es que presenten una variación temporal finita y suave. El proceso de iteración DFDT se mantiene hasta que todo el campo introducido en el pulso se ha dispersado, saliendo por los contornos abiertos al exterior. Las características del sistema en el dominio de la frecuencia se obtienen efectuando la transformada de Fourier del campo dispersado en el dominio del tiempo.

El uso de pulsos tiene la ventaja de permitir obtener resultados en un amplio rango de frecuencias mediante una sola simulación. Con señales armónicas hay que repetir la simulación para cada frecuencia. Sin embargo en los pulsos, el fenómeno de dispersión numérica no está tan controlado como en el caso monocromático. En una señal temporal finita hay superpuestas infinitas señales armónicas de las cuales sólo nos interesarán un reducido intervalo, el resto contiene frecuencias que no se propagan o que sufren una gran dispersión numérica. Estas señales indeseadas generan un cierto nivel de ruido numérico, para cuya eliminación es necesario recurrir al uso de filtros. El uso de señales temporales de variación suave tiene que ver con esto último, hay que evitar señales abruptas con armónicos cuya longitud de onda sea de baja resolución en celdas y que

luego generan sobreoscilaciones artificiales en la señal que se propaga ("overshoot" y "undershoot"), [26].

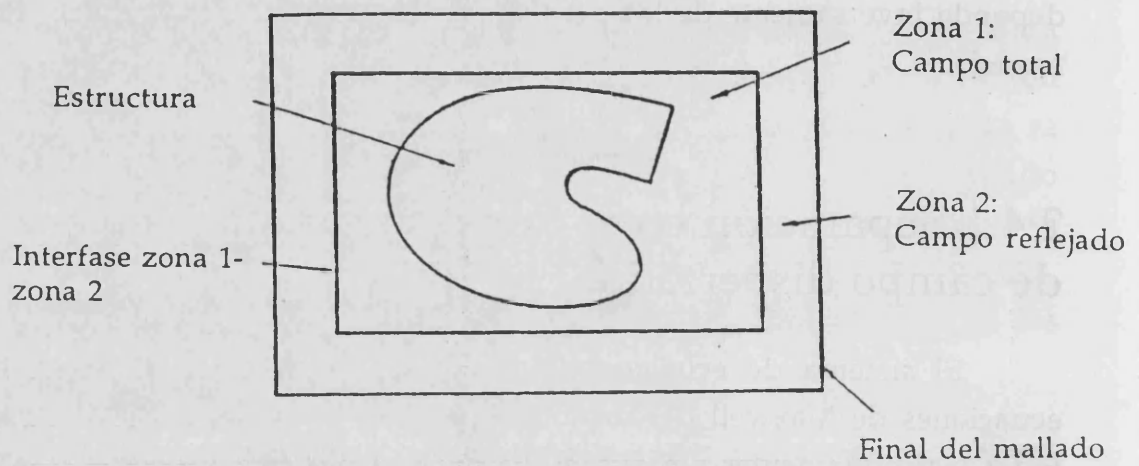
Trabajos recientes con DFDT, [55], han mostrado que el número de ciclos que requiere la onda incidente para alcanzar el estado estacionario depende inversamente de las pérdidas de la estructura o fenómeno que se modela.

### 2.4.1. Separación entre zona de campo total y zona de campo dispersado.

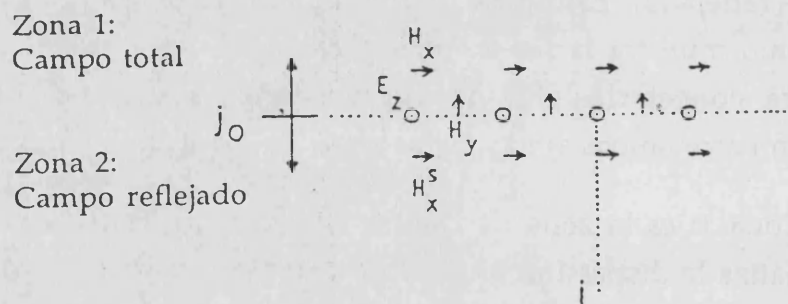
El sistema de ecuaciones en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Maxwell del rotacional, presenta una dependencia lineal en todas las componentes del campo. Entonces, el sistema se puede aplicar de forma indistinta a las componentes del campo incidente, a las componentes del campo reflejado, o las componentes del campo total (suma de incidente+reflejado). Esto permite que en el cálculo, se puedan separar dos zonas, como muestra la fig. 2.6.a, separadas por una superficie virtual que sirve para conectarlas. En dos dimensiones sería una línea virtual la separación entre ambas zonas. Estas zonas se explican a continuación:

- Zona 1: es la zona de campo total, y contiene la estructura sobre la que se analiza la dispersión.

- Zona 2: es la región exterior a la estructura, y se llama zona de campo dispersado. En esta zona no hay campo incidente y las ecuaciones en diferencias sólo trabajan con el campo dispersado.



(a)



(b)

Figura 2.6. División de la red DFDT en zona de campo total y zona de campo reflejado: (a) División de zonas. (b) Componentes del campo en el plano de conexión.

La conexión entre ambas zonas, debe asegurar la consistencia de las derivadas espaciales a través de la interfase de separación.

La separación campo total-campo dispersado da una mayor flexibilidad al algoritmo DFDT. Permite introducir en la interfase de separación una onda incidente con dependencia temporal, ángulo de incidencia y polarización arbitrarios, a gusto del experimentador. La zona 1 queda confinada como zona de campo total (incidente mas dispersado), siendo transparente al campo reflejado que pasa a la zona 2. El tratamiento es mas cómodo y menos complejo que con un posible análisis con sólo el campo reflejado. Este último tratamiento haría necesario un cálculo del campo incidente en todos los puntos de la estructura, mientras que con la separación en dos zonas sólo hay que efectuar el cálculo en la interfase de separación. El trabajo con campo total en la zona 2, donde esta la estructura a analizar, permite un rango dinámico mejor que el que se obtendría considerando únicamente el campo dispersado. Esto sucede porque no hay una total cancelación de errores al sumar el campo reflejado con el campo incidente para calcular el campo total y el resultado de esta operación da lugar a una indeseada contaminación con ruido numérico [75]. Efectuando directamente los cálculos sobre el campo total, se evita el ruido numérico generado en estas operaciones, mejorando el rango dinámico en más de 30 dB sobre un tratamiento con solo campo dispersado, (el rango dinámico es la razón entre el máximo y el mínimo del campo que pueden obtenerse con el método).

La definición de la zona 2 establece una zona bien definida de campo reflejado, que permite la aplicación de las llamadas "Condiciones de Contorno Absorbentes" (CCA) en los bordes exteriores del mallado. Estas CCA simulan un mallado infinito, lo cual se consigue mediante la absorción de las ondas que se propagan hacia fuera de la red de cálculo (zona 2). La absorción se consigue en un 95% a 99%, quedando un pequeño residuo que reflejado en el borde regresa a la zona 2. La separación anterior hace que a los bordes donde estan definidas las CCA's llegue sólo el campo reflejado en la estructura, el cual se supone que posee una intensidad

bastante inferior a la de la onda incidente (esto se supone, pero depende del problema). Puesto que el campo incidente sobre los bordes del mallado con las CCA sería pequeño, bastante mas pequeño sería el residuo de campo no absorbido, con lo cual se mejorarían los resultados.

El establecimiento de una zona de campo dispersado bien definida, permite fijar un borde entorno a la estructura donde procesar el campo reflejado. A partir de este, y de la función de Green del espacio libre, se puede calcular la sección recta de radar de la estructura modelada haciendo uso de una transformación campo cercano-campo lejano [30-32], [33], independientemente de la estructura inmersa en la zona 1.

Separación campo total-campo reflejado: Las superficies o líneas de separación (caso bidimensional), entre zonas de campo total y reflejado, contienen componentes del campo eléctrico y magnético. Esto hace que cuando se toman derivadas espaciales en estos puntos, se llega a un problema de consistencia. En la zona 1, el campo utilizado es el total, mientras que en la 2, al otro lado de la superficie de separación, se usa el campo dispersado. Sería inconsistente efectuar diferencias entre valores del campo total y valores del campo reflejado. El problema de consistencia puede resolverse usando los valores del campo incidente, que es conocido en cada punto del mallado.

Consideremos por simplicidad el caso bidimensional TM de las ecuaciones (2.11) y la figura 2.6.b. Supondremos que las componentes  $E_z$  y  $H_y$  del campo total están situadas en la interfase zona1/zona2 caracterizadas por  $y = j_0 \Delta h$ . Para calcular  $E_z^{n+1}{}_{\text{total}}(i, j_0)$ , es necesario conocer el valor de  $H_x^{n+1/2}{}_{\text{total}}(i, j_0+1/2)$ , y  $H_x^{n+1/2}{}_{\text{total}}(i, j_0-1/2)$ . Es obvio que  $H_x^{n+1/2}{}_{\text{total}}(i, j_0+1/2)$  es conocida y almacenada, puesto que  $(i, j_0+1/2)$  es un punto de la zona de campo total. Sin embargo  $H_x^{n+1/2}{}_{\text{total}}(i, j_0-1/2)$  no está en memoria porque el punto  $(i, j_0-1/2)$  es un punto de la zona de campo reflejado, es decir  $H_x^{n+1/2}{}_{\text{total}}(i, j_0-1/2)$  en la memoria del ordenador corresponde al campo reflejado. Como resulta que el campo total es suma del incidente más el reflejado

$$H_x^{n+1/2}{}_{\text{total}}(i, j_0-1/2) = H_x^{n+1/2}{}_{\text{ref}}(i, j_0-1/2) + H_x^{n+1/2}{}_{\text{inc}}(i, j_0-1/2) \quad (2.36)$$

podemos modificar el algoritmo para conseguir consistencia en los cálculos cuando estos se efectúen en la interfase de separación entre las dos zonas. Para ello supongamos que la onda avanza en la dirección "y". Consideremos ahora el punto  $(i, j_0 - 1/2)$ , en la zona de separación:

$$E_Z^{n+1}{}_{\text{total}}(i, j_0) = E_Z^n{}_{\text{total}}(i, j_0) + C \left( H_Y^{n+1/2}{}_{\text{total}}(i+1/2, j_0) + H_Y^{n+1/2}{}_{\text{total}}(i-1/2, j_0) + H_X^{n+1/2}{}_{\text{ref}}(i, j_0 - 1/2) - H_X^{n+1/2}{}_{\text{total}}(i, j_0 + 1/2) \right) + C H_X^{n+1/2}{}_{\text{inc}}(i, j_0 - 1/2) \quad (2.37)$$

siendo  $C = \Delta t / (\epsilon \Delta h)$

En esta ecuación, la adición al final del término  $C H_X^{n+1/2}{}_{\text{inc}}(i, j_0 - 1/2)$ , convierte, a efectos de cálculo, el valor almacenado en memoria  $H_X^{n+1/2}{}_{\text{ref}}(i, j_0 - 1/2)$  en el campo total  $H_X$  en el punto  $(i, j_0 - 1/2)$ . Esta es la única modificación que hay que efectuar en el algoritmo de Yee para que este adquiera consistencia a ambos lados de la interfase campo total-campo dispersado. Esta se puede resumir en la siguiente ecuación:

$$E_Z^{n+1}(i, j_0) = E_Z^{n+1}(i, j_0) |_{\text{yee}} + C H_X^{n+1/2}{}_{\text{inc}}(i, j_0 - 1/2) \quad (2.38.a)$$

En esta ecuación se han eliminado los subíndices total ó reflejado de  $E_Z$  para dar énfasis al hecho de que el algoritmo trabaja con las matrices del campo almacenadas en la memoria, sin hacer distinción entre campo total y campo reflejado. El subíndice Yee indica que esta componente del campo se calcula previamente haciendo uso de las ecuaciones (2.11). La ecuación (2.37) se aplicará a todos los  $E_Z(i, j)$  situados en la frontera entre las dos zonas ( $i=i_0 \dots i_1, j=j_0$ ) (figura 2.7.a).



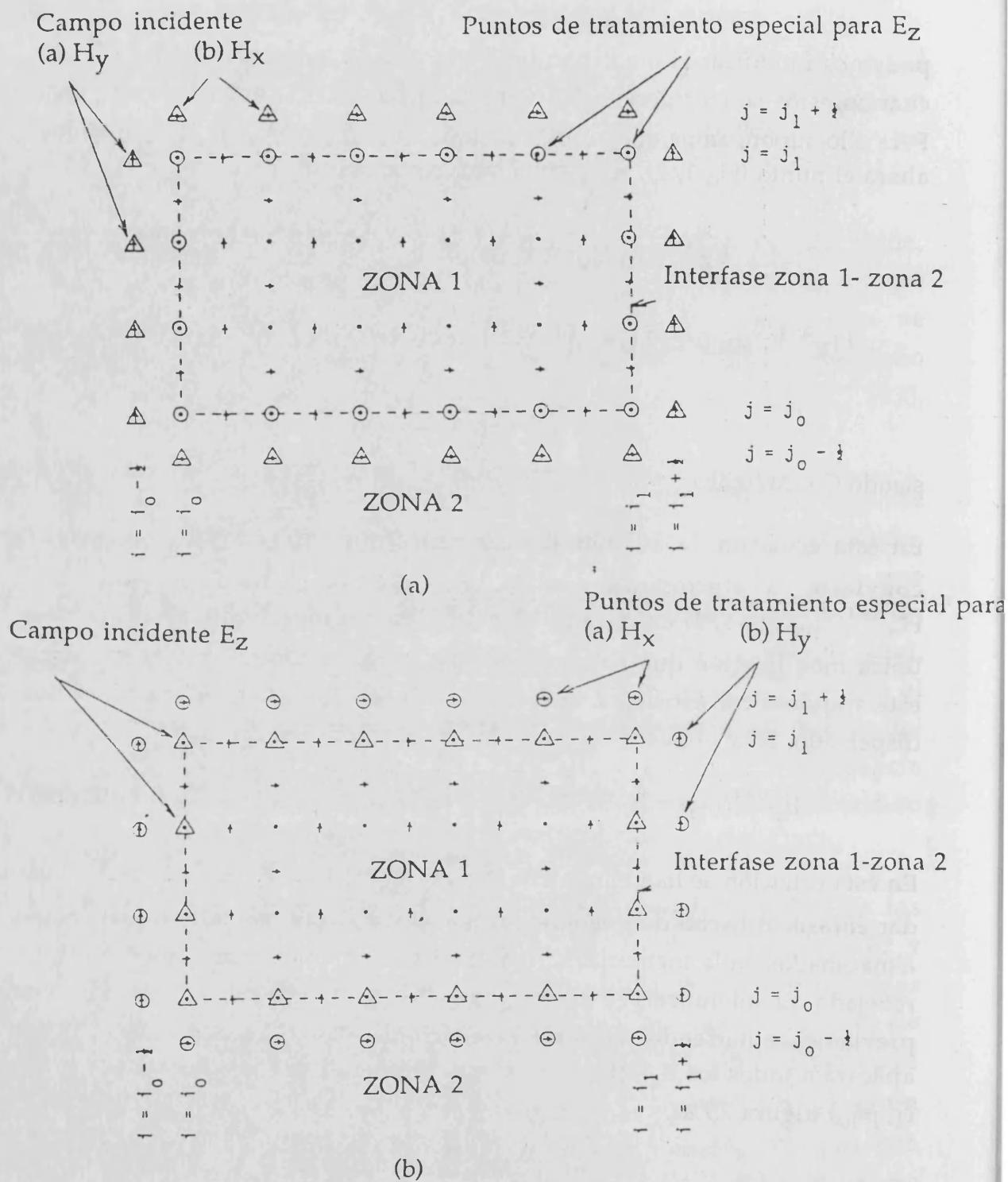


Figura 2.7. Nodos especiales en la interfase de conexión zona1-zona2, caso TM.

Las componentes  $E_z$  situadas en las otras interfases de la figura 2.7.a son tratadas análogamente.

- lado superior ( $i=i_0 \dots i_1, j=j_1$ )

$$E_Z^{n+1}(i,j_1) = E_Z^{n+1}(i,j_1) |_{y_{ee}} - C H_X^{n+1/2}_{inc}(i,j_1+1/2) \quad (2.38.b)$$

- lado izquierdo ( $i=i_0, j=j_0 \dots j_1$ )

$$E_Z^{n+1}(i_0,j) = E_Z^{n+1}(i_0,j) |_{y_{ee}} - C H_Y^{n+1/2}_{inc}(i_0-1/2,j) \quad (2.38.c)$$

- lado derecho ( $i=i_1, j=j_0 \dots j_1$ )

$$E_Z^{n+1}(i_1,j) = E_Z^{n+1}(i_1,j) |_{y_{ee}} + C H_Y^{n+1/2}_{inc}(i_0+1/2,j) \quad (2.38.d)$$

Los puntos de especial tratamiento son los situados en las esquinas. En estos puntos la condición de conexión se obtiene superponiendo la de los dos lados perpendiculares que concurren en esa esquina.

Observando las figuras 2.6.b y 2.7.b, vemos que aparece otro problema de consistencia para las componentes del campo reflejado  $H_{X\ ref}$  y  $H_{Y\ ref}$ , que están situadas justo medio paso espacial fuera de la interfase zona1-zona2. Para calcular de forma adecuada el campo magnético reflejado, es necesario conocer el campo eléctrico reflejado,  $E_{Z\ ref}$ , medio paso espacial a ambos lados de la componente del campo magnético. Pero justo al lado de la posición del campo magnético reflejado, está el campo eléctrico total situado sobre la zona de separación. Esta inconsistencia, se resuelve de un modo análogo a la del caso anterior. Sabemos que en la interfase de separación el campo total es suma del incidente más el reflejado

$$E_Z^n_{total}(i,j) = E_Z^n_{ref}(i,j) + E_Z^n_{inc}(i,j) \quad (2.39)$$

entonces se modifican (2.11.b) y (2.11.c) para calcular  $H_{X\ ref}$  y  $H_{Y\ ref}$  justo un punto fuera de la interfase. Para  $H_{X\ ref}$  queda:

$$H_X^{n+1/2}_{ref(i,j_0-1/2)} = H_X^{n+1/2}_{ref(i,j_0-1/2)} + D \left( E_Z^n_{ref(i,j_0-1)} - E_Z^n_{total(i,j_0)} \right) + D E_Z^n_{inc(i,j_0)} \quad (2.40)$$

siendo  $D = \Delta t / (\mu \Delta h)$

El término  $D E_Z^n_{inc(i,j_0)}$ , añadido en el lado derecho de (2.40) transforma el valor en memoria de  $E_Z^n_{total(i,j_0)}$  en campo reflejado ( $E_Z^n_{ref(i,j_0)}$ ). El algoritmo se modifica del siguiente modo :

$$H_X^{n+1/2}(i,j_0-1/2) = H_X^{n+1/2}(i,j_0-1/2) |_{yee} + D E_Z^n_{inc(i,j_0)} \quad (2.41.a)$$

$j=j_0-1/2, i= i_0 \dots i_1$

donde no se hace distinción entre  $H_X$ , reflejado y  $H_X$  total, puesto que esta disparidad no se efectúa en la memoria del ordenador. Análogamente se procede con las otras caras del cuadrado:

- lado superior ( $i=i_0 \dots i_1, j=j_1+1/2$ )

$$H_X^{n+1/2}(i,j_0+1/2) = H_X^{n+1/2}(i,j_0+1/2) |_{yee} - D E_Z^n_{inc(i,j_1)} \quad (2.41.b)$$

- lado izquierdo ( $i=i_0-1/2, j=j_0 \dots j_1$ )

$$H_Y^{n+1/2}(i_0-1/2,j) = H_Y^{n+1/2}(i_0-1/2,j) |_{yee} - D E_Z^n_{inc(i_0,j)} \quad (2.41.c)$$

- lado derecho ( $i=i_1+1/2, j=j_0 \dots j_1$ )

$$H_Y^{n+1/2}(i_1+1/2,j) = H_Y^{n+1/2}(i_1+1/2,j) |_{yee} + D E_Z^n_{inc(i_1,j)} \quad (2.41.d)$$

En resumen, (2.38) y (2.41) son modificaciones al algoritmo de Yee, que son utilizadas a la vez para definir una zona rectangular con el campo total (zona1) inmersa en otra zona rectangular con el campo reflejado (zona2). Para calcular  $E_Z$  en puntos situados en la frontera se recurre a las ecuaciones (2.38), para lo cual es necesario introducir como datos los valores

del campo incidente para  $H_x$  y  $H_y$ , en puntos del mallado medio paso espacial fuera de la interfase (indicados por triangulos en la figura 2.7.a)

Las ecuaciones (2.41) se aplican solamente a  $H_x$  y  $H_y$ , que estan medio paso espacial fuera de la interfase (indicados por círculos en la figura 2.7.b). Para aplicar (2.41) se debe introducir el valor del campo incidente para  $E_z$  en los puntos del mallado situados justamente sobre la interfase (indicados por triangulos en la figura 2.7.b).

Las ecuaciones (2.38) y (2.41) aplicadas conjuntamente, establecen la conexión apropiada entre zona de campo total y zona de campo reflejado para el caso bidimensional TM.

Esta discusión se puede extender con todas sus consecuencias al caso mas general en tres dimensiones (figuras 2.8, 2.9 y 2.10), dando las siguientes ecuaciones. El subíndice Yee, indica que las componentes marcadas han sido previamente calculadas con las ecuaciones (2.9) y (2.10):

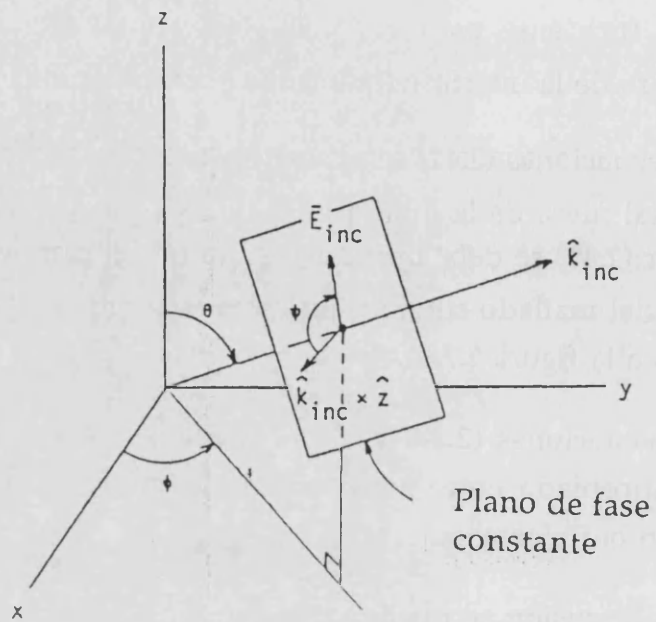


Figura 2.8. Dirección de propagación y polarización de la onda incidente.

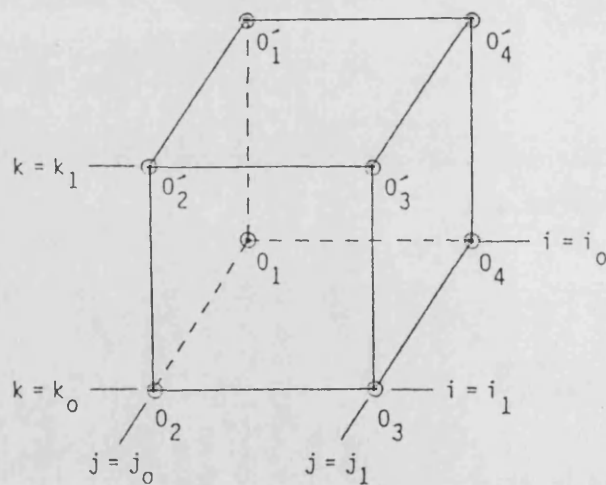
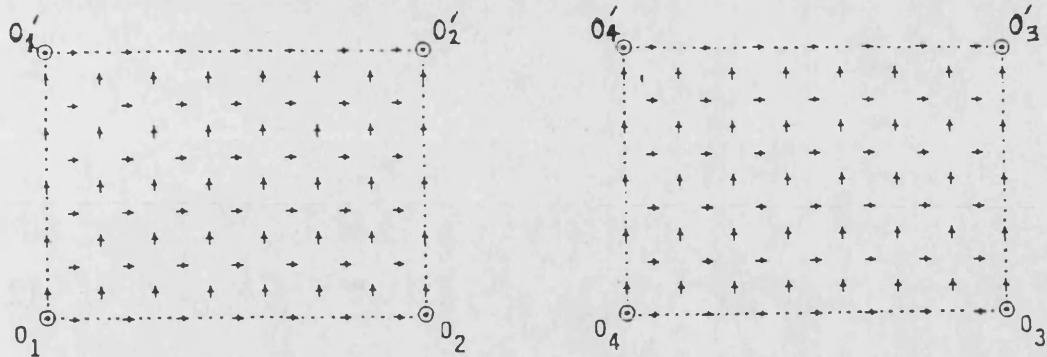
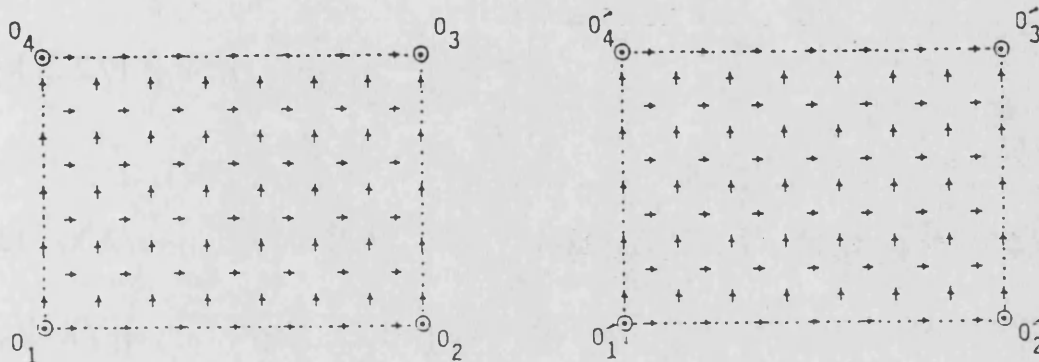


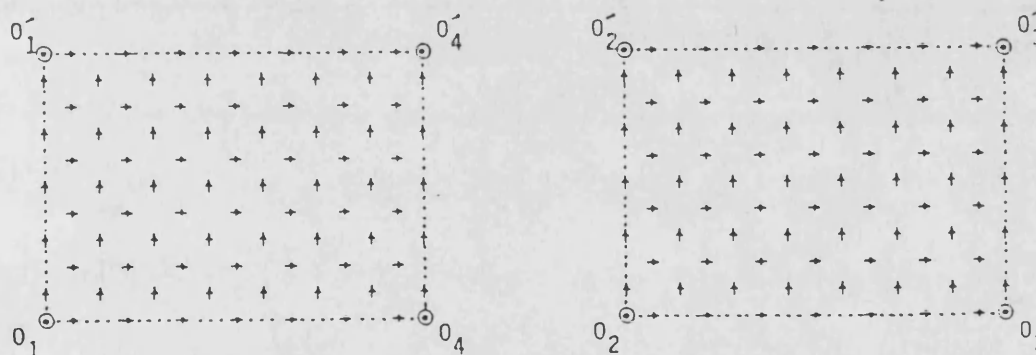
Figura 2.9. Origen de coordenadas para el cálculo del campo en tres dimensiones.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.10. Localización de las componentes del campo en la interfase zona1-zona2 en tres dimensiones.

(a) Componentes  $E_x$  ( $\rightarrow$ ) y  $E_y$  ( $\uparrow$ ) en los planos  $j=j_0$  y  $j=j_1$  de la interfase zona1-zona2.

(b) Componentes  $E_x$  ( $\rightarrow$ ) y  $E_y$  ( $\uparrow$ ) en los planos  $k=k_0$  y  $k=k_1$  de la interfase zona1-zona2.

(c) Componentes  $E_y$  ( $\rightarrow$ ) y  $E_z$  ( $\uparrow$ ) en los planos  $i=i_0$  y  $i=i_1$  de la interfase zona1-zona2.

- cara de delante:

$$E_X^{n+1}(i, j_0, k) = E_X^{n+1}(i, j_0, k) |_{y_{ee}} - C H_Z^{n+1/2}_{inc}(i, j_0-1/2, k) \quad (2.42.a)$$

$$i=i_0+1/2 \dots i_1-1/2, j=j_0, k=k_0 \dots k_1$$

$$E_Z^{n+1}(i, j_0, k) = E_Z^{n+1}(i, j_0, k) |_{y_{ee}} + C H_X^{n+1/2}_{inc}(i, j_0-1/2, k) \quad (2.42.b)$$

$$i=i_0 \dots i_1, j=j_0, k=k_0+1/2 \dots k_1-1/2$$

- cara de detras:

$$E_X^{n+1}(i, j_1, k) = E_X^{n+1}(i, j_1, k) |_{y_{ee}} + C H_Z^{n+1/2}_{inc}(i, j_1+1/2, k) \quad (2.43.a)$$

$$i=i_0+1/2 \dots i_1-1/2, j=j_1, k=k_0 \dots k_1$$

$$E_Z^{n+1}(i, j_1, k) = E_Z^{n+1}(i, j_1, k) |_{y_{ee}} - C H_X^{n+1/2}_{inc}(i, j_1+1/2, k) \quad (2.43.b)$$

$$i=i_0 \dots i_1, j=j_1, k=k_0+1/2 \dots k_1-1/2$$

- cara de abajo:

$$E_X^{n+1}(i, j, k_0) = E_X^{n+1}(i, j, k_0) |_{y_{ee}} + C H_Y^{n+1/2}_{inc}(i, j, k_0-1/2) \quad (2.44.a)$$

$$i=i_0+1/2 \dots i_1-1/2, j=j_0 \dots j_1, k=k_0$$

$$E_Y^{n+1}(i, j, k_0) = E_Y^{n+1}(i, j, k_0) |_{y_{ee}} - C H_X^{n+1/2}_{inc}(i, j, k_0-1/2) \quad (2.44.b)$$

$$i=i_0 \dots i_1, j=j_0+1/2 \dots j_1-1/2, k=k_0$$

- cara de arriba:

$$E_X^{n+1}(i, j, k_1) = E_X^{n+1}(i, j, k_1) |_{y_{ee}} - C H_Y^{n+1/2}_{inc}(i, j, k_1+1/2) \quad (2.45.a)$$

$$i=i_0+1/2 \dots i_1-1/2, j=j_0 \dots j_1, k=k_1$$

$$E_y^{n+1}(i, j, k_1) = E_y^{n+1}(i, j, k_1) |_{y_{ee}} + C H_x^{n+1/2}{}_{inc}(i, j, k_1+1/2) \quad (2.45.b)$$

$$i=i_0 \dots i_1, j=j_0+1/2 \dots j_1-1/2, k=k_1$$

- cara izquierda:

$$E_y^{n+1}(i_0, j, k) = E_y^{n+1}(i_0, j, k) |_{y_{ee}} + C H_z^{n+1/2}{}_{inc}(i_0-1/2, j, k) \quad (2.46.a)$$

$$i=i_0, j=j_0+1/2 \dots j_1-1/2, k=k_0 \dots k_1$$

$$E_z^{n+1}(i_0, j, k) = E_z^{n+1}(i_0, j, k) |_{y_{ee}} - C H_y^{n+1/2}{}_{inc}(i_0-1/2, j, k) \quad (2.46.b)$$

$$i=i_0, j=j_0 \dots j_1, k=k_0+1/2 \dots k_1-1/2$$

- cara derecha:

$$E_y^{n+1}(i_1, j, k) = E_y^{n+1}(i_1, j, k) |_{y_{ee}} - C H_z^{n+1/2}{}_{inc}(i_1+1/2, j, k) \quad (2.47.a)$$

$$i=i_1, j=j_0+1/2 \dots j_1-1/2, k=k_0 \dots k_1$$

$$E_z^{n+1}(i_1, j, k) = E_z^{n+1}(i_1, j, k) |_{y_{ee}} + C H_y^{n+1/2}{}_{inc}(i_1+1/2, j, k) \quad (2.47.b)$$

$$i=i_1, j=j_0 \dots j_1, k=k_0+1/2 \dots k_1-1/2$$

Las relaciones de conexión para las componentes del campo magnético situadas medio paso espacial fuera de la interfase son:

- cara de delante (exterior):

$$H_x^{n+1/2}(i, j_0-1/2, k) = H_x^{n+1/2}(i, j_0-1/2, k) |_{y_{ee}} + D E_z^n{}_{inc}(i, j_0, k) \quad (2.48.a)$$

$$i=i_0 \dots i_1, j=j_0-1/2, k=k_0+1/2 \dots k_1-1/2$$

$$H_z^{n+1/2}(i, j_0-1/2, k) = H_z^{n+1/2}(i, j_0-1/2, k) |_{y_{ee}} - D E_x^n{}_{inc}(i, j_0, k) \quad (2.48.b)$$

$$i=i_0+1/2 \dots i_1-1/2, j=j_0-1/2, k=k_0 \dots k_1$$



- cara de detras (exterior):

$$H_X^{n+1/2}(i, j_1+1/2, k) = H_X^{n+1/2}(i, j_1+1/2, k) |_{y_{ee}}^{-D} E_Z^n \text{inc}(i, j_1, k) \quad (2.49.a)$$

$$i=i_0 \dots i_1, j=j_1+1/2, k=k_0+1/2 \dots k_1-1/2$$

$$H_Z^{n+1/2}(i, j_1+1/2, k) = H_Z^{n+1/2}(i, j_1+1/2, k) |_{y_{ee}}^{+D} E_X^n \text{inc}(i, j_1, k) \quad (2.49.b)$$

$$i=i_0+1/2 \dots i_1-1/2, j=j_0+1/2, k=k_0 \dots k_1$$

- cara de abajo (Exterior):

$$H_X^{n+1/2}(i, j, k_0-1/2) = H_X^{n+1/2}(i, j, k_0-1/2) |_{y_{ee}}^{-D} E_Y^n \text{inc}(i, j, k_0) \quad (2.50.a)$$

$$i=i_0 \dots i_1, j=j_0+1/2 \dots j_1-1/2, k=k_0-1/2$$

$$H_Y^{n+1/2}(i, j, k_0-1/2) = H_Y^{n+1/2}(i, j, k_0-1/2) |_{y_{ee}}^{+D} E_X^n \text{inc}(i, j, k_0) \quad (2.50.b)$$

$$i=i_0+1/2 \dots i_1-1/2, j=j_0 \dots j_1, k=k_0-1/2$$

- cara de arriba (Exterior):

$$H_X^{n+1/2}(i, j, k_1+1/2) = H_X^{n+1/2}(i, j, k_1+1/2) |_{y_{ee}}^{+D} E_Y^n \text{inc}(i, j, k_1) \quad (2.51.a)$$

$$i=i_0 \dots i_1, j=j_0+1/2 \dots j_1-1/2, k=k_1+1/2$$

$$H_Y^{n+1/2}(i, j, k_1+1/2) = H_Y^{n+1/2}(i, j, k_1+1/2) |_{y_{ee}}^{-D} E_X^n \text{inc}(i, j, k_1) \quad (2.51.b)$$

$$i=i_0+1/2 \dots i_1-1/2, j=j_0 \dots j_1, k=k_1+1/2$$

- cara izquierda (Exterior):

$$H_Y^{n+1/2}(i_0-1/2, j, k) = H_Y^{n+1/2}(i_0-1/2, j, k) |_{y_{ee}}^{-D} E_Z^n \text{inc}(i_0, j, k) \quad (2.52.a)$$

$$i=i_0-1/2, j=j_0 \dots j_1, k=k_0+1/2 \dots k_1-1/2$$

$$H_Z^{n+1/2}(i_0-1/2, j, k) = H_Z^{n+1/2}(i_0-1/2, j, k) |_{y_{ee}}^{+D} E_Y^n \text{inc}(i_0, j, k) \quad (2.52.b)$$

$$i=i_0-1/2, j=j_0+1/2 \dots j_1-1/2, k=k_0 \dots k_1$$

- cara derecha (Exterior):

$$H_y^{n+1/2}(i_1+1/2, j, k) = H_y^{n+1/2}(i_1+1/2, j, k) |_{y_{ee}} + D E_z^n \text{inc}(i_1, j, k) \quad (2.53.a)$$

$$i=i_1+1/2, j=j_0 \dots j_1, k=k_0+1/2 \dots k_1-1/2$$

$$H_z^{n+1/2}(i_1+1/2, j, k) = H_z^{n+1/2}(i_1+1/2, j, k) |_{y_{ee}} - D E_y^n \text{inc}(i_1, j, k) \quad (2.53.b)$$

$$i=i_1+1/2, j=j_0+1/2 \dots j_1-1/2, k=k_0 \dots k_1$$

## 2.5. Condiciones de Contorno de Radiación ó Condiciones de Contorno Absorbentes.

Muchos problemas modelizados con DFDT son de sistemas que usualmente presentan algún contorno abierto y que idealmente darían lugar a dominios de cálculo para el campo no acotados. Obviamente los ordenadores no pueden almacenar un número ilimitado de datos, y por esa razón el dominio de cálculo debe de limitarse en tamaño. El procedimiento en la modelización consistirá en definir una zona de cálculo suficientemente grande como para incluir la estructura a analizar. En los contornos abiertos se definirá una condición de contorno que simule que estos contornos están conectados a una región ilimitada. Las condiciones de contorno que efectúan esa función hacen el efecto de absorber las ondas que llegan a los puntos en que están definidas. Esta propiedad que surte su efecto durante todo el proceso de simulación DFDT, hace que a estas condiciones de contorno se las conozca en la bibliografía como Condiciones de Contorno Absorbentes (CCA), [63], [27], [45]. Aunque también se las define como Condiciones de Contorno de Radiación, (CCR), [64], [22], porque simulan la propagación de las ondas hacia el exterior del dominio de cálculo.

Estas CCA ó CCR, aplicadas sobre los contornos abiertos, dejan todavía un nivel de reflexión residual. Este nivel de reflexión se puede

reducir suficientemente como para permitir que los resultados numéricos mediante DFDT sean fiables durante todas las iteraciones temporales de la simulación.

### 2.5.1. Ecuación de onda de un solo camino.

Una ecuación diferencial en derivadas parciales que sólo permite la propagación de una onda en una determinada dirección se la llama "ecuación de onda de un solo camino", ("one-way equation"[63]). La figura 2.11 muestra un dominio bidimensional  $\Omega$  donde se simula el avance de una onda. La condición de contorno definida sobre  $\partial\Omega$  que simula la propagación hacia el exterior de  $\Omega$  como si este dominio fuese infinito, establece algo similar a una ecuación de un solo camino en  $\partial\Omega$ . Se dice entonces que esa condición de contorno es una Condición de Contorno Absorbente (CCA) ó Condición de Contorno de Radiación (CCR).

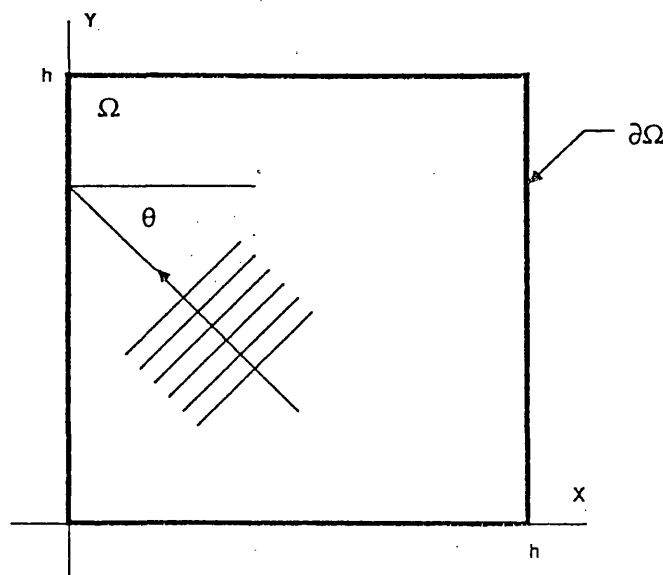


Figura 2.11. Simulación numérica de la incidencia de una onda plana sobre el borde izquierdo de un dominio de cálculo bidimensional.

En este apartado se va a tratar la implementación numérica de ecuaciones de onda de un solo camino, para utilizarlas como CCA en la resolución mediante DFDT de las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones que se consideran se pueden derivar por dos caminos diferentes [64]:

- caso A: Por aproximación de operadores pseudodiferenciales que se obtienen por la factorización de la ecuación de ondas.

- caso B: A partir de la factorización de la relación de dispersión.

caso A: Aproximación de operadores pseudodiferenciales

Consideremos la ecuación de onda en coordenadas cartesianas en dos dimensiones,

$$U_{xx} + U_{yy} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0 \quad (2.54)$$

donde U es un campo escalar, los subíndices xx, yy, tt indican derivadas parciales segundas en x, y, t, y c es la velocidad de propagación. Se construye el operador L:

$$L \equiv D_x^2 + D_y^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2 \quad (2.55.a)$$

donde se utiliza la notación

$$D_x^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad ; D_y^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad ; D_t^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.55.b)$$

de modo que la ecuación de onda (2.54) se puede escribir de una forma mas compacta:

$$L U = 0 \quad (2.56)$$

El operador L se puede descomponer del siguiente modo

$$L U = L^+ L^- U = 0 \quad (2.57.a)$$

siendo  $L^-$  definido

$$L^- \equiv D_x - \frac{D_t}{c} \sqrt{1 - S^2} \quad (2.57.b)$$

con

$$S = \frac{c D_y}{D_t} \quad (2.57.c)$$

El operador  $L^+$  es idénticamente definido, la diferencia con  $L^-$  esta en que en lugar de un signo +, presenta un signo - en el interior del radical.

Engquist y Majda demuestran [28] que la aplicación del operador  $L^-$  a la onda  $U$ , en una línea del mallaado  $x=\text{constante}$ , absorbe perfectamente una onda plana que se propaga desde la derecha hasta ese borde. Y esto es independientemente del ángulo de incidencia. Es decir ,

$$L^- U = 0 \quad (2.58)$$

aplicado en  $x=0$ , produce una CCA exacta que absorbe cualquier onda procedente del interior de  $\Omega$ . El operador  $L^+$  efectúa la misma función en un contorno a la derecha del dominio de cálculo, absorbiendo cualquier onda procedente de  $\Omega$  que se propague hacia la derecha.

Los operadores  $L^+$  y  $L^-$  son pseudoperadores debido a la presencia del radical. Son no-lineales en las derivadas temporal y espacial lo cual impide su utilización directa como CCA en esquemas numéricos.

La aproximación mediante desarrollos de Taylor de estos operadores genera CCA que pueden implementarse en diferencias finitas y que son muy útiles en DFDT. Puesto que el desarrollo en serie se corta por un número finito de términos, estas CCA en la práctica no son perfectas, por esa razón el resultado de su aplicación no es ideal, y generan pequeñas reflexiones (desde el punto de vista computacional) cuando la onda llega al borde en que están definidas. De todos modos, dependiendo del desarrollo

que se haga, la reflexión puede minimizarse sobre un amplio rango de ángulos de incidencia. Las CCA que utiliza Mur [27], son aproximaciones de Taylor de segundo orden de (2.57.b). Estas se van a deducir a continuación.

$$\sqrt{1 - S^2} \approx 1 - \frac{1}{2} S^2 \quad (2.59.a)$$

sustituyendo la expresión anterior (2.59.a) en (2.58), se obtiene

$$\left( D_x - \frac{D_t}{c} + \frac{c D_y^2}{2 D_t} \right) U = 0 \quad (2.59.b)$$

tras multiplicar por  $D_t$ , e identificar los operadores diferenciales, se obtiene la siguiente aproximación a la CCA analítica (2.58), que sí se puede implementar numéricamente en el borde  $x=0$ .

$$U_{xt} - \frac{1}{c} U_{tt} + \frac{c}{2} U_{yy} = 0 \quad (2.60.a)$$

La ecuación (2.60.a) es una buena aproximación de la CCA exacta (2.58) para valores pequeños de  $S = c D_y / D_t$ . Esto es equivalente a decir que (2.60.a) presenta una baja reflexión para ondas numéricas planas que inciden sobre el borde  $x=0$  para pequeños valores del ángulo de incidencia. Análogamente se derivan las CCA para los otros bordes del mallado (figura 2.11):

$$U_{xt} + \frac{1}{c} U_{tt} - \frac{c}{2} U_{yy} = 0 \quad x = H \quad (2.60.b)$$

$$U_{yt} - \frac{1}{c} U_{tt} + \frac{c}{2} U_{xx} = 0 \quad y = 0 \quad (2.60.c)$$

$$U_{yt} + \frac{1}{c} U_{tt} - \frac{c}{2} U_{xx} = 0 \quad y = H \quad (2.60.d)$$

Estas CCA se aplican en DFDT sobre las componentes del campo  $\vec{E}$  ó  $\vec{H}$  que descansan sobre los bordes o son tangentes a ellos.

Para el análisis DFDT en tres dimensiones, las CCA se desarrollan de un modo análogo. Partiendo de la ecuación de onda

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0 \quad (2.61.a)$$

Se construye el operador L:

$$L \equiv D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2 \quad (2.61.b)$$

que se puede factorizar como en (2.57.a) para dar el operador  $L^-$ , que es una CCA exacta con la misma forma analítica que (2.57.b) pero con otra expresión para S :

$$S = \sqrt{\left(\frac{cD_y}{D_t}\right)^2 + \left(\frac{cD_z}{D_t}\right)^2} \quad (2.61.c)$$

La aplicación del operador  $L^-$  sobre la función de onda escalar U en  $x=0$ , absorbe perfectamente una onda plana que incida sobre ese contorno con cualquier ángulo.

Usando el desarrollo de Taylor de segundo orden de (2.59.a), se obtiene la siguiente aproximación para  $L^-$  en función de operadores diferenciales en  $x=0$ ,

$$\left(D_x - \frac{D_t}{c} + \frac{cD_y^2}{2D_t} + \frac{cD_z^2}{2D_t}\right) U = 0 \quad (2.62)$$

tras multiplicar por  $D_t$ , e identificar los operadores diferenciales, se obtiene la siguiente aproximación a la CCA analítica en tres dimensiones, que sí se puede implementar numéricamente en el borde  $x=0$ .

$$U_{xt} - \frac{1}{c} U_{tt} + \frac{c}{2} U_{yy} + \frac{c}{2} U_{zz} = 0 \quad (2.63.a)$$

La aproximación es muy buena para valores pequeños de  $S$ , lo cual es equivalente a decir que absorben muy bien una onda con incidencia próxima a la normal sobre el contorno  $x=0$ .

Analogamente se derivan las CCA para los otros bordes del mallado tridimensional:

$$U_{xt} + \frac{1}{c} U_{tt} - \frac{c}{2} U_{yy} - \frac{c}{2} U_{zz} = 0 \quad x = H \quad (2.63.b)$$

$$U_{yt} - \frac{1}{c} U_{tt} + \frac{c}{2} U_{xx} + \frac{c}{2} U_{zz} = 0 \quad y = 0 \quad (2.63.c)$$

$$U_{yt} + \frac{1}{c} U_{tt} - \frac{c}{2} U_{xx} - \frac{c}{2} U_{zz} = 0 \quad y = H \quad (2.63.d)$$

$$U_{zt} - \frac{1}{c} U_{tt} + \frac{c}{2} U_{xx} + \frac{c}{2} U_{yy} = 0 \quad z = 0 \quad (2.63.e)$$

$$U_{zt} + \frac{1}{c} U_{tt} - \frac{c}{2} U_{xx} - \frac{c}{2} U_{yy} = 0 \quad z = H \quad (2.63.f)$$

Las ecuaciones (2.63) se aplican a las componentes del campo situadas en los bordes del mallado.

Las ecuaciones (2.60) se aplican a DFDT en casos bidimensionales (2D), y las (2.63) para situaciones en que es necesario un análisis en tres dimensiones (3D).

### Formulación generalizada

Trefethen y Halpern presentan en [76] una generalización de (2.59.a). En su trabajo muestran que es posible la construcción de CCA, aproximando el radical  $\sqrt{1 - S^2}$  en el intervalo  $[-1,1]$  por la función racional,



$$r(s) = \frac{p_m(s)}{q_n(s)} \quad (2.64)$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones polinómicas de grados  $n$  y  $m$ , y la función racional  $r$  se dice que es de tipo  $(m,n)$ . Especificando  $r(s)$  como una aproximación de tipo  $(2,0)$ , el radical se puede escribir [63], [64],

$$\sqrt{1 - S^2} \approx p_0 + p_2 S^2 \quad (2.65)$$

que se transforma en la siguiente CCA, que es una aproximación de segundo orden de la CCA analítica (2.58) (en dos dimensiones).

$$U_{xt} - \frac{p_0}{c} U_{tt} - c p_2 U_{yy} = 0 \quad (2.66)$$

La elección de las constantes  $p_0$  y  $p_2$ , se determina por el tipo de aproximación. Expresiones similares a la (2.66) pueden derivarse para los otros tres contornos del mallado bidimensional. Trefethen y Halpern proponen una aproximación de mayor orden para el radical, para conseguir una mayor precisión en las CCA. Mediante una aproximación de tipo  $(2,2)$ ,

$$r(s) = \frac{p_0 + p_2 S^2}{q_0 + q_2 S^2} \quad (2.67)$$

que da la siguiente CCA de tercer orden,

$$q_0 U_{xtt} + c^2 q_2 U_{xyy} - \frac{p_0}{c^2} U_{ttt} - c p_2 U_{tyy} = 0. \quad (2.68)$$

La elección de los coeficientes  $p$  y  $q$  en (2.67) da lugar a varias familias de Condiciones de Contorno Absorbentes. Por ejemplo, la aproximación de Mur de segundo orden (2.59.a) es una aproximación de Padé de tipo  $(2, 0)$  [63]. Si se elije  $p_0 = q_0 = 1$ ,  $p_2 = -3/4$ ,  $q_2 = -1/4$ , entonces es una aproximación de Padé  $(2,2)$  y el resultado es la CCA de tercer orden de Engquist y Majda [28]. La familia de interpolación de Padé interpola  $\sqrt{1 - S^2}$  de forma exacta en

$S=0$ , por esa razón las correspondientes CCA absorben perfectamente una onda que incide normalmente al contorno donde están definidas.

Trefethen y Halpern presentan otras seis técnicas de aproximación del tipo (0,0), (2,0), (2,2), (4,2) y (4,4). Además de la técnica de Padé, pueden utilizarse otras técnicas de aproximación tales como: mínimos cuadrados (o  $L^2$ , que minimiza la norma  $L^2$  del error de aproximación en [-1,1]), interpolación por puntos de Chebyshev, por puntos de Newman, Chebyshev (o  $L^\infty$  que minimiza la norma  $L^\infty$ ), Chebyshev-Padé (C-P), y la Chebyshev en un subintervalo (o  $L^\infty_\alpha$  que minimiza la norma  $L^\infty$  en un subintervalo  $|S| \leq \alpha$ ). Los coeficientes y los ángulos de perfecta absorción para siete familias de tipo (2,0) y (2,2) se presentan en las tablas 2.I y 2.II (ver apartado 2.5.4) procedentes del trabajo de comparación de Blaschak y Kriegsmann [63]. La derivación de estas aproximaciones se encuentra en el trabajo de Trefethen y Halpern [76].

Higdon [77], [78], presenta una formulación mas general, que permite el diseño de CCA para ondas planas con un ángulo de incidencia cualquiera. Para ello desarrolla la siguiente condición de contorno,

$$\left( \prod_{j=0}^n \left( \cos \alpha_j \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) U = 0 \tag{2.69}$$

donde  $n$  es el orden de la CCA y  $\alpha_j$  son los ángulos de absorción perfecta. La ecuación (2.66) puede obtenerse en el caso de  $n=2$ , dando

$$P_0 = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + 1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} \tag{2.70.a}$$

$$P_2 = \frac{-1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} \tag{2.70.b}$$



### caso B: factorización de la relación de dispersión

Trefethen y Halpern [76], presentan otro modo de derivar las CCA diferente al expuesto anteriormente. En este análisis se parte de la relación de dispersión generada por la ecuación diferencial.

Si una onda plana

$$U(x,y,t) = \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) = \exp(j(\omega t - k_x x - k_y y)) \quad (2.71)$$

se sustituye en la ecuación de onda bidimensional (2.54), se obtiene la siguiente relación entre  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $\omega$ , y  $c$ :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 = k^2 \quad (2.72)$$

La ecuación (2.72) es la relación de dispersión para la ecuación de onda bidimensional. En el plano  $\vec{k}$ , las curvas de  $|\vec{k}| = \text{constante}$ , son círculos concéntricos. La velocidad de fase y grupo de la onda de (2.71) es:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = \left( \frac{c k_x}{k}, \frac{c k_y}{k} \right) = (c \cos\phi, c \sin\phi) \quad (2.73)$$

siendo  $\phi$  el ángulo en el sentido del reloj que forma el vector  $\vec{k}$ , con  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . La ecuación (2.54) permite entonces como solución una onda plana propagándose en todas direcciones.

Consideremos ahora la situación de unas CCA situadas en el borde del mallado en  $x=0$ . Habría que pedir una ecuación para estas, que admitiese como solución sólo la mitad de todas las soluciones comentadas en el párrafo anterior, solamente aquellas que tuviesen  $v_x \leq 0$  (o también  $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$ ). El objetivo es por tanto tener ondas planas que no se reflejen en el borde del mallado independientemente del ángulo de incidencia. Si se despeja  $k_x$  de (2.72),

$$k_x = \pm \sqrt{k^2 - k_y^2} = \pm k \sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k}\right)^2} \quad (2.74)$$

definiendo  $S = (k_y/k) = \text{sen}\phi$ , la ecuación (2.74) puede escribirse,

$$k_x = \pm k \sqrt{1 - S^2}, \quad -1 \leq S \leq 1 \quad (2.75)$$

donde los signos "+" y "-", corresponden a la onda viajera en la dirección +x y -x, respectivamente. Eligiendo la que va en dirección -x, se deduce la siguiente relación de dispersión :

$$k_x = -k \sqrt{1 - S^2}, \quad -1 \leq S \leq 1 \quad (2.76)$$

En el plano  $(k_x, k_y)$ , las curvas de  $|\vec{k}| = \text{constante}$ , son semicírculos concéntricos. Para construir una CCA que sea implementable en diferencias finitas, se aproxima el radical en el intervalo  $-1 \leq S \leq 1$  del mismo modo que en (2.64). Después de esto la relación de dispersión aproximada es

$$k_x = -k r(S), \quad -1 \leq S \leq 1. \quad (2.77)$$

Suponiendo  $r(S) = 1 - S^2/2$ , la ecuación (2.77) se transforma en,

$$k_x = -k \left(1 - \frac{1}{2} S^2\right) = -k \left(1 - \frac{k_y^2}{2k^2}\right) \quad (2.78)$$

ó

$$k_x k = -k^2 + \frac{k_y^2}{2}. \quad (2.79)$$

Para una onda plana como la definida en (2.71) se deducen las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{c} U_{xt} = \frac{(-jk_x)(j\omega)}{c} U = k_x \frac{\omega}{c} = k_x k U \quad (2.80.a)$$

$$\frac{1}{c^2} U_{tt} = \frac{(j\omega)(j\omega)}{c^2} U = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 U = -k^2 U \quad (2.80.b)$$

$$\frac{-1}{2} U_{yy} = -\frac{(-jk_y)(-jk_y)}{2} U = \frac{k_y^2}{2} U \quad (2.80.c)$$

La ecuación (2.79) es la relación de dispersión de la siguiente ecuación diferencial, que permite establecer una CCA en  $x=0$ :

$$\frac{1}{c} U_{xt} = \frac{1}{2} U_{tt} - \frac{1}{2} U_{yy} \quad (2.81)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación (2.60.a) obtenida con la factorización de la ecuación de onda y el uso de operadores diferenciales. La misma aproximación para el radical de (2.64) puede usarse para el de (2.76). Las siguientes variables son análogas en los dos radicales:

$$S_{|(2.76)} = \frac{k_y}{k} \quad \leftrightarrow \quad S_{|(2.64)} = \frac{cD_y}{D_t} \quad (2.82)$$

## 2.5.2. Implementación numérica de las CCA.

La implementación numérica de las CCA es efectuada mediante el empleo de diferencias finitas. La implementación deberá adaptarse al borde del mallado de modo que al acoplarse al algoritmo DFDT no produzca ninguna inestabilidad. Las aproximaciones que se realizan han sido usadas por otros autores, que han demostrado su estabilidad en la práctica [63], [64], [27]. Primero se establecerá de forma general la implementación numérica para las CCA de segundo orden de la ecuación (2.66), y luego se derivarán las CCA de Mur de segundo orden (aproximación de Padé (2,0)), y primer orden. Estas son las que utilizan la mayoría de los autores, la razón de ello está en su sencillez de aplicación, el reducido uso de recursos de ordenador que conllevan, y su efectividad.

Las derivadas parciales en (2.66) y (2.68) son aproximadas en los puntos del contorno del dominio de cálculo. Para calcular las derivadas normales al contorno con diferencias centradas es necesario conocer los valores del campo en puntos exteriores al mallado. Esto último se evita expandiendo las ecuaciones en diferencias para puntos ficticios que se sitúan a medio camino entre el borde del mallado y la primera columna de puntos del interior. La situación de estos puntos se muestra en la figura 2.12,

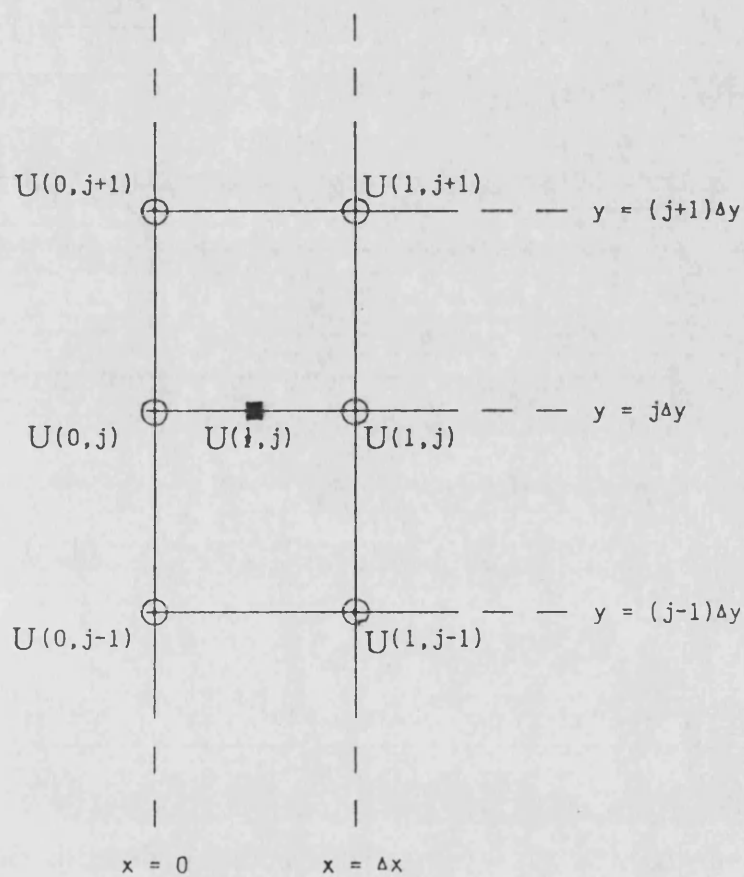


Figura 2.12. Puntos del mallado cerca del borde  $x=0$ , que son utilizados en la derivación de las CCA de Mur.

para el caso de que el borde este en  $x=0$ . Para el punto  $(0, j)$ , las derivadas para establecer las CCA se efectúan en el punto  $(1/2, j)$ . El campo en el punto  $(1/2, 0)$  se pone como promedio del campo en los puntos vecinos,

$$U\left(\frac{1}{2}, j\right) = \frac{U(0, j) + U(1, j)}{2} \quad (2.83)$$

la derivadas parciales cruzadas en  $x, t$  se calculan con diferencias centradas

$$U_{xt}|(1/2, j) = \frac{\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x}(1/2, j) - \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x}(1/2, j)}{2\Delta t} \quad (2.84.a)$$

$$= \frac{\left(\frac{U^{n+1}(1, j) - U^{n+1}(0, j)}{\Delta x}\right) - \left(\frac{U^{n-1}(1, j) - U^{n-1}(0, j)}{\Delta x}\right)}{2\Delta t}$$

La derivada temporal en  $(1/2, j)$  se pone como promedio de las derivadas temporales en  $(0, j)$  y  $(1, j)$ :

$$U_{tt}^n|(1/2, j) = \frac{\frac{\partial^2 U^n}{\partial t^2}(0, j) + \frac{\partial^2 U^n}{\partial t^2}(1, j)}{2} \quad (2.84.b)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{U^{n+1}(0, j) - 2U^n(0, j) + U^{n-1}(0, j)}{\Delta t^2} + \frac{U^{n+1}(1, j) - 2U^n(1, j) + U^{n-1}(1, j)}{\Delta t^2} \right)$$

La derivada segunda en  $y$  se calcula como promedio de las derivadas segundas en  $(0, j)$  y  $(1, j)$ :

$$U_{yy}^n|(1/2, j) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U^n}{\partial y^2}(0, j) + \frac{\partial^2 U^n}{\partial y^2}(1, j) \right) \quad (2.84.c)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{U^n(0, j+1) - 2U^n(0, j) + U^n(0, j-1)}{\Delta y^2} + \frac{U^n(1, j+1) - 2U^n(1, j) + U^n(1, j-1)}{\Delta y^2} \right)$$

Sustituyendo las expresiones (2.84) en (2.66) (aproximación de Padé de tipo (2,0)) y despejando  $U^{n+1}(0, j)$ , se obtiene la CCA para calcular el campo U a lo largo del borde  $x=0$ .

Para el caso de  $p_0 = 1$ , y  $p_2 = -1/2$ , se obtienen las CCA de Mur:

$$\begin{aligned}
 U^{n+1}(0, j) = & -U^{n-1}(1, j) + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \left( U^{n+1}(1, j) + U^{n-1}(0, j) \right) \quad (2.85.a) \\
 & + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \left( U^n(0, j) + U^n(1, j) \right) \\
 & + \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2\Delta y^2 (c\Delta t + \Delta x)} \left( U^n(0, j+1) - 2U^n(0, j) + U^n(0, j-1) + U^n(1, j+1) - 2U^n(1, j) + \right. \\
 & \left. U^n(1, j-1) \right)
 \end{aligned}$$

En  $x=0$ .

Para las restantes caras son:

- En  $x = H$ :

$$\begin{aligned}
 U^{n+1}(H, j) = & -U^{n-1}(H-1, j) \quad (2.85.b) \\
 & + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \left( U^{n+1}(H-1, j) + U^{n-1}(H, j) \right) \\
 & + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \left( U^n(H, j) + U^n(H-1, j) \right) \\
 & + \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2\Delta y^2 (c\Delta t + \Delta x)} \left( U^n(H, j+1) - 2U^n(H, j) + U^n(H, j-1) + U^n(H-1, j+1) \right. \\
 & \left. - 2U^n(H-1, j) + U^n(H-1, j-1) \right),
 \end{aligned}$$



- En  $y = 0$ :

$$\begin{aligned}
 U^{n+1}(i,0) = & -U^{n-1}(i,1) + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U^{n+1}(i,1) + U^{n-1}(i,0)) \quad (2.85.c) \\
 & + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U^n(i,0) + U^n(i,1)) \\
 & + \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2\Delta y^2 (c\Delta t + \Delta x)} (U^n(i+1,0) - 2U^n(i,0) + U^n(i-1,0) + U^n(i+1,1) \\
 & \qquad \qquad \qquad - 2U^n(i,1) + U^n(i-1,1))
 \end{aligned}$$

- En  $y = H$ :

$$\begin{aligned}
 U^{n+1}(i,H) = & -U^{n-1}(i,H-1) \quad (2.85.d) \\
 & + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U^{n+1}(i,H-1) + U^{n-1}(i,H)) \\
 & + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U^n(i,H) + U^n(i,H-1)) \\
 & + \frac{(c\Delta t)^2 \Delta x}{2\Delta y^2 (c\Delta t + \Delta x)} (U^n(i+1,H) - 2U^n(i,H) + U^n(i-1,H) + U^n(i+1,H-1) \\
 & \qquad \qquad \qquad - 2U^n(i,H-1) + U^n(i-1,H-1))
 \end{aligned}$$

### 2.5.3. CCA de Mur de primer orden.

Aunque una aproximación de segundo orden para las CCA siempre dará mejores resultados que una de primer orden, también en su implementación numérica consume mas recursos de memoria y mas cálculo. A veces se presentan problemas en los que la incidencia de la onda sobre el contorno es normal, o se desvía muy poco de la incidencia normal. En esos casos es suficiente con hacer una aproximación de primer orden del radical (2.65), o lo que es lo mismo, diseñar unas CCA de Higdon para un

sólo ángulo de incidencia ( $n=1$  en la fórmula (2.69)). Supongamos la siguiente aproximación:

$$\sqrt{1 - S^2} \approx 1, \quad (n=1, \text{ y } \alpha = 0 \text{ en (2.69)}) \quad (2.86)$$

Sustituyendo en (2.58) queda,

$$U_x - \frac{1}{c} U_t = 0 \quad (2.87)$$

que son las CCA de Mur de primer orden [27] para una onda que se propaga en dirección  $-x$ . Para poder utilizar diferencias centradas, la ecuación (2.87) es aplicada a un punto ficticio que dista medio paso espacial de la frontera y esta a medio paso temporal de dos instantes consecutivos de tiempo (ver figura 2.12).

Para calcular  $U_x^{n+1/2}(1/2, j)$ , calcula el promedio de esta derivada en  $t=n\Delta t$  y  $(n+1)\Delta t$ :

$$\begin{aligned} U_x^{n+1/2}(1/2, j) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x}(1/2, j) + \frac{\partial U^n}{\partial x}(1/2, j) \right) \quad (2.88.a) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{U^{n+1}(1, j) - U^{n+1}(0, j)}{\Delta x} + \frac{U^n(1, j) - U^n(0, j)}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

Para calcular  $U_t^{n+1/2}(1/2, j)$ , calcula el promedio de esta derivada en  $i=0$ , y  $i=1$ :

$$\begin{aligned} U_t^{n+1/2}(1/2, j) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U^{n+1/2}}{\partial t}(0, j) + \frac{\partial U^{n+1/2}}{\partial t}(1, j) \right) \quad (2.88.b) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{U^{n+1}(1, j) - U^n(1, j)}{\Delta t} + \frac{U^{n+1}(0, j) - U^n(0, j)}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.87), (2.88.a) y (2.88.b), se puede despejar  $U^{n+1}(0, j)$ .

- En  $x = 0$ :

$$U^{n+1}(0, j) = U^n(1, j) + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U^{n+1}(1, j) - U^n(0, j)) \quad (2.89.a)$$

Analogamente se procede con los restantes contornos:

- En  $x = H$ , (se usa el pseudoperador  $L^+$ ):

$$U^{n+1}(H, j) = U^n(H-1, j) + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U^{n+1}(H-1, j) - U^n(H, j)) \quad (2.89.b)$$

- En  $y = 0$ :

$$U^{n+1}(i, 0) = U^n(i, 1) + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U^{n+1}(i, 1) - U^n(i, 0)) \quad (2.89.c)$$

- En  $y = H$ , (se usa el pseudoperador  $L^+$ ):

$$U^{n+1}(i, H) = U^n(i, H-1) + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (U^{n+1}(i, H-1) - U^n(i, H)) \quad (2.89.d)$$

## 2.5.4. Análisis de la reflexión (CCA) .

Las CCA implementadas numéricamente en los apartados anteriores no son exactas puesto que proceden de aproximaciones. Si durante la simulación con DFDT una onda plana incide sobre el borde del mallado sobre el que están definidas las CCA, un cierto porcentaje de campo se reflejará, y esta reflexión dependerá del ángulo de incidencia de la onda. En un problema de dispersión generalizado las ondas que inciden sobre los contornos proceden de complejas reflexiones y transmisiones, y por lo tanto inciden sobre estos en un amplio intervalo de ángulos. Llegados a este punto, será conveniente comprobar la eficacia de una determinada CCA. Moore, Blaschak, Taflove y Kriegsmann [64], efectúan dicho análisis calculando el coeficiente de reflexión generado por una CCA definida sobre un contorno, cuando sobre este incide una onda plana.

Consideremos la onda plana que se aleja del dominio de cálculo de la figura 2.11. La expresión de esta es:

$$U(x,y,t) = \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) = \exp(j(\omega t + k x \cos\theta - k y \sin\theta)) \quad (2.90)$$

El campo total en el borde del mallado, deberá satisfacer las CCA definidas en este. Entonces, considerando la existencia de una onda reflejada, generada en el contorno, el campo total en  $x=0$  tendrá la forma,

$$U(x,y,t) = \exp(j(\omega t + k x \cos\theta - k y \sin\theta)) \quad (2.91) \\ + R \exp(j(\omega t - k x \cos\theta - k y \sin\theta))$$

siendo  $R$  el coeficiente de reflexión. Sustituyendo esta expresión (2.91) en la ecuación que define las CCA (cualquiera de las deducidas con anterioridad), y que debe verificar el campo total, se puede despejar el coeficiente de reflexión.

La sustitución en (2.66) y (2.68) permite obtener  $R$  en función del ángulo de incidencia para una CCA general de segundo orden (ecuación (2.66)) y para una de tercer orden. Estas son respectivamente:

$$R = \frac{\cos\theta - p_0 - p_2 \sin^2\theta}{\cos\theta + p_0 + p_2 \sin^2\theta} \quad (2.92)$$

$$R = \frac{q_0 \cos\theta + q_2 \cos\theta \sin^2\theta - p_0 - p_2 \sin^2\theta}{q_0 \cos\theta + q_2 \cos\theta \sin^2\theta + p_0 + p_2 \sin^2\theta} \quad (2.93)$$

Donde los coeficientes  $p$  y  $q$ , son los correspondientes usados en la derivación de cada CCA. De la relación (2.92) fácilmente se deduce  $R$  para la CCA de Mur de primer orden, para  $p_2 = 0$ , y  $p_0 = 1$ :

$$R = \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 1} \quad (2.94)$$

En el trabajo de Trefethen y Halpern, [76], se desarrollan siete técnicas de aproximación (siete familias de coeficientes  $p$  y  $q$ ). Estas técnicas ya han sido

comentadas anteriormente en la formulación generalizada de obtención de CCA (apartado 2.5.1). Las tablas I y II muestran los ángulos de incidencia para los cuales cada CCA absorbe perfectamente la onda incidente ( $R=0$ ).

TABLA 2.I : Coeficientes para las CCA de tercer orden

$q_0 = 1.00000$  en todas

Aproximación	$P_0$	$P_2$	$q_2$	Angulo
Padé	1.00000	-0.75000	-0.25000	0.00
$L_\alpha^\infty$	0.99973	-0.80864	-0.31657	11.7, 31.9, 43.5
puntos-Chebyshev	0.99650	-0.91296	-0.47258	15.0, 45.0, 75.0
$L^2$	0.99250	-0.92233	-0.51084	18.4, 51.3, 76.6
C-P	0.99030	-0.94314	-0.55556	18.4, 53.1, 81.2
puntos-Newman	1.00000	-1.00000	-0.66976	0.0, 60.5, 90.0
$L^\infty$	0.95651	-0.94354	-0.70385	26.9, 66.6, 87.0

TABLA 2.II : Coeficientes para las CCA de segundo orden

$q_0 = 1.00000$  en todas

Aproximación	$P_0$	$P_2$	Angulo
Padé	1.00000	-0.50000	0.00
$L_\alpha^\infty$	1.00023	-0.51555	7.6, 18.7
puntos-Chebyshev	1.03597	-0.76537	22.5, 67.5
$L^2$	1.03084	-0.73631	22.1, 64.4
C-P	1.06103	-0.84883	25.8, 73.9
puntos-Newman	1.00000	-1.00000	0.0, 90.0
$L^\infty$	1.12500	-1.00000	31.4, 81.6

Las figuras 2.13 y 2.14 muestran el comportamiento de algunas CCA (las mejores) en el intervalo de ángulos  $[0, \pi/2]$ .

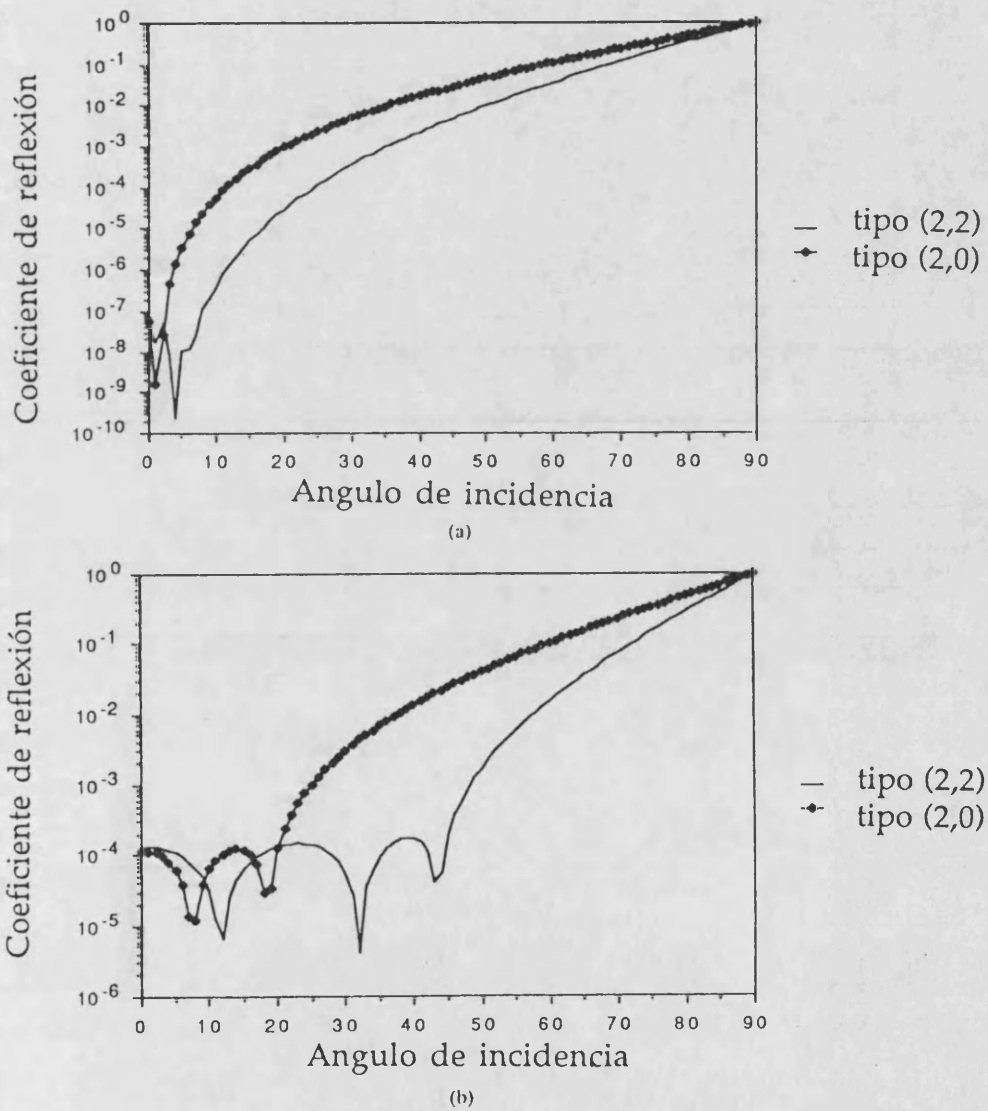


Figura 2.13. Coeficiente de reflexión en función del ángulo de incidencia.

(a) CCA de Padé.

(b) CCA de Chebyshev en un subintervalo.

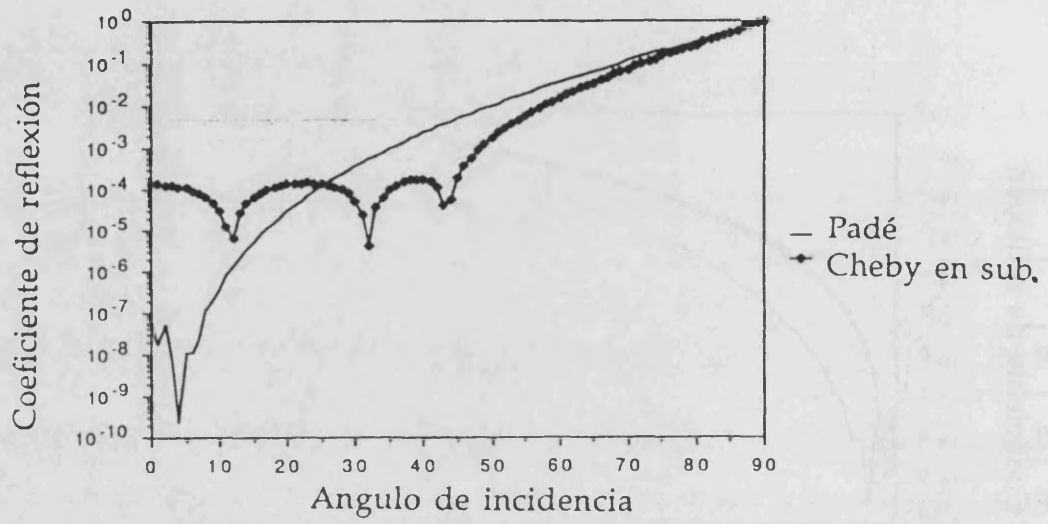


Figura 2.14. Comparación de CCA de tercer orden.

## 2.6. Simplificaciones Computacionales.

El desarrollo del método DFDT ha ido muy ligado a la evolución de los grandes ordenadores. El modelado de problemas electromagnéticos complicados implica la utilización de cantidades masivas de memoria que deben ser accedidas con rapidez en la ejecución de las operaciones para que el algoritmo sea atractivo. La simplicidad de las operaciones que se ejecutan y el hecho de que el grueso de los cálculos resida en bucles hace que el algoritmo de Yee sea altamente vectorizable. Los ordenadores que poseen procesadores vectoriales permiten efectuar las operaciones entre vectores calculando en bloques en lugar de calcular de elemento en elemento (procesadores escalares). La vectorización (compilación con el procesador vectorial) es efectiva cuando da lugar a un programa ejecutable mucho más rápido que el obtenido con el tradicional compilado escalar. Esto sólo es posible cuando el número de iteraciones en los bucles vectorizados es el óptimo ó próximo a este, y se debe a que coincide con el número de elementos de los bloques que calcula el procesador vectorial. Por otro lado, para conseguir efectividad es necesario que las matrices involucradas sean grandes. Aunque el procesado vectorial maneja bloques de datos, es más lento que el procesado escalar, y para conseguir rentabilidad del primero respecto del segundo es conveniente trabajar con muchos "bloques". La vectorización del código informático le da a la técnica DFDT una gran rapidez a la hora de obtener visualización de fenómenos y datos de diseño pero las consideraciones anteriores indican que la efectividad de la vectorización no es absoluta, y depende en gran parte del problema analizado y de sus correspondientes condiciones de contorno. Las operaciones se repiten en el interior de las zonas modeladas siguiendo el esquema de Yee (apartado 2.3.4) hasta que se llegan a los contornos, donde las condiciones de contorno "cortan" la vectorización.

Otra de las posibilidades del algoritmo es la paralelización de los cálculos. Ello implica la utilización de máquinas que trabajan con muchos procesadores en paralelo (la Conexion Machine (CM) es un ordenador de nueva generación que tiene alrededor de 2000 procesadores trabajando en paralelo). En estas el trabajo se reparte entre los procesadores, de modo que a



cada uno, o a cada grupo de procesadores les puede corresponder una porción del dominio total. Pero la elaboración de un programa para trabajar sobre una máquina paralela es todavía un trabajo complejo y delicado ["2<sup>o</sup> Symposium on High Performance Computing", Montpellier, 7-9 de Octubre, 1991].

Aunque la rapidez depende del modelo para el problema que se presente, hay algunas simplificaciones que independientemente del problema se pueden aplicar y que redundan en un mayor aprovechamiento de los recursos. Estas se comentan en las líneas siguientes.

### 2.6.1. Numeración de los vectores.

El primer paso en la aplicación del algoritmo DFDT es el proceder al mallado del dominio de cálculo. Con este, se establecen los puntos del espacio donde se muestrea cada una de las componentes del campo y se efectúa simplemente definiendo las matrices con sus índices de variación. Cada combinación de índices indica la situación en el espacio del punto de muestreo. Como se ve en los sistemas (2.9) y (2.10) generados directamente por el algoritmo DFDT cuando el origen de referencia es el mismo en todas las componentes, los índices de variación de las matrices (correspondientes a cada componente) presentan "huecos" en su ubicación en la memoria del ordenador. Para ilustrar la última afirmación, observese la figura 2.1 que muestra la celda de Yee. Esta se puede descomponer en tres tramas transversales a la dirección +x, una delantera, una central y otra trasera, que se muestran en la figura 2.15.a. En esta figura se comprueba que la componente  $E_z$  sólo se muestrea en los puntos  $(0, 0, 1/2)$ ,  $(0, 1, 1/2)$ ,  $(1, 0, 1/2)$  y  $(1, 1, 1/2)$  de la celda. Los otros 23 puntos que constituyen la celda y que son posiciones de memoria del vector  $E_z(i,j,k)$ , se desperdician porque no son utilizadas en el algoritmo. Lo mismo sucede con los vectores  $E_y(i,j,k)$ ,  $E_x(i,j,k)$  y  $H_x(i,j,k)$ ,  $H_y(i,j,k)$ ,  $H_z(i,j,k)$ . El modo de aprovechar todos los índices de los vectores consiste en definir orígenes de referencia distintos para cada uno de ellos.

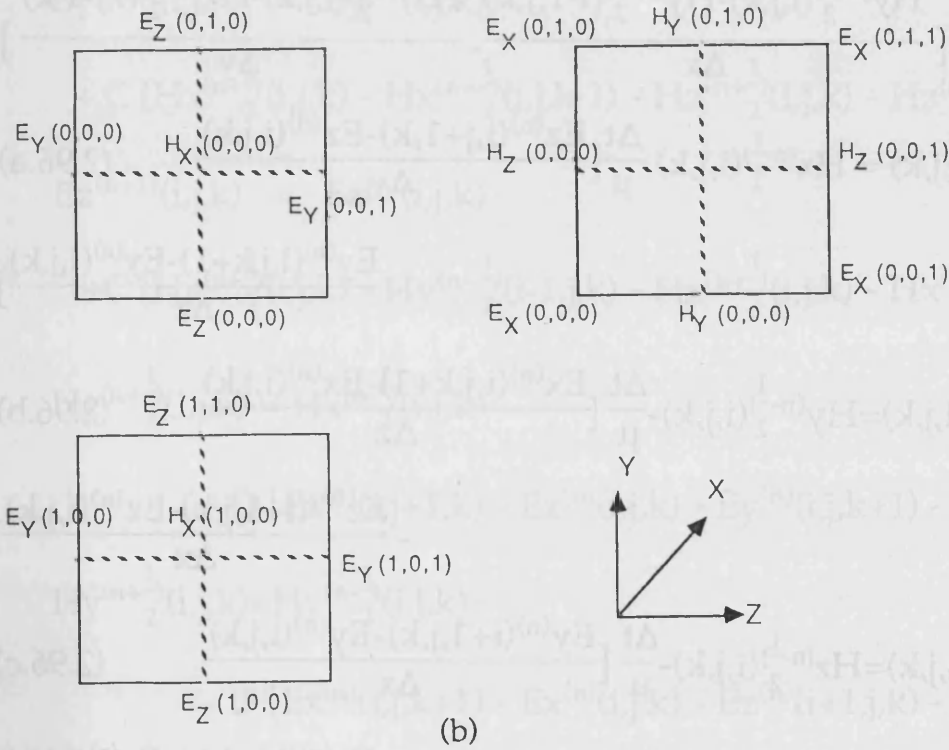
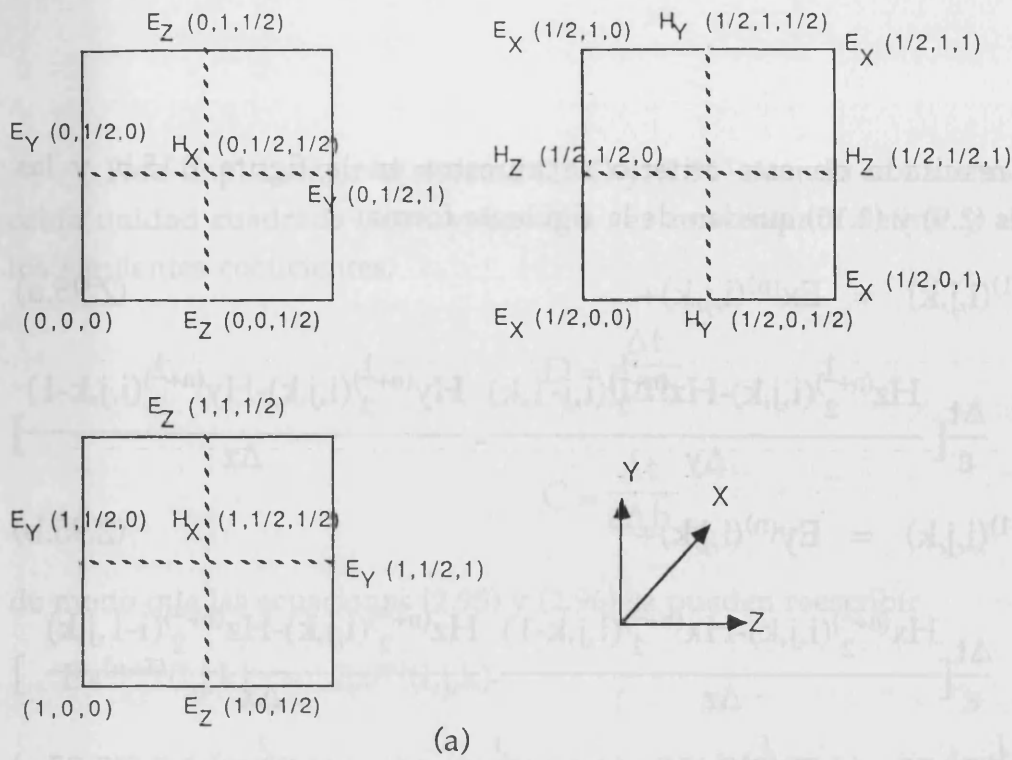


Figura 2.15. Numeración de las componentes en la celda unidad DFTD. Tramas delantera, central y trasera.

(a) Con un mismo origen.

(b) Con distinto origen.

El resultado de este criterio se muestra en la figura 2.15.b, y las ecuaciones (2.9) y (2.10) quedan de la siguiente forma:

$$E_x^{(n+1)}(i,j,k) = E_x^{(n)}(i,j,k) + \quad (2.95.a)$$

$$\frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-1,k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k-1)}{\Delta z} \right]$$

$$E_y^{(n+1)}(i,j,k) = E_y^{(n)}(i,j,k) + \quad (2.95.b)$$

$$\frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k-1)}{\Delta z} - \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i-1,j,k)}{\Delta x} \right]$$

$$E_z^{(n+1)}(i,j,k) = E_z^{(n)}(i,j,k) + \quad (2.95.c)$$

$$\frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i-1,j,k)}{\Delta x} - \frac{H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-1,k)}{\Delta y} \right]$$

$$H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = H_x^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_z^{(n)}(i,j+1,k) - E_z^{(n)}(i,j,k)}{\Delta y} \right. \quad (2.96.a)$$

$$\left. - \frac{E_y^{(n)}(i,j,k+1) - E_y^{(n)}(i,j,k)}{\Delta z} \right]$$

$$H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = H_y^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_x^{(n)}(i,j,k+1) - E_x^{(n)}(i,j,k)}{\Delta z} \right. \quad (2.96.b)$$

$$\left. - \frac{E_z^{(n)}(i+1,j,k) - E_z^{(n)}(i,j,k)}{\Delta x} \right]$$

$$H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = H_z^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_y^{(n)}(i+1,j,k) - E_y^{(n)}(i,j,k)}{\Delta x} \right. \quad (2.96.c)$$

$$\left. - \frac{E_x^{(n)}(i,j+1,k) - E_x^{(n)}(i,j,k)}{\Delta y} \right]$$

La memoria que se consume es del orden de  $6N$ , siendo  $N$  el número de celdas que se utilizan en el modelado.

Para implementar el sistema (2.95) y (2.96) cuando se hace uso de una celda unidad cuadrada ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta h$ ), es conveniente definir y almacenar los siguientes coeficientes:

$$D = \frac{\Delta t}{\mu \Delta h} \quad (2.97.a)$$

$$C = \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta h} \quad (2.97.b)$$

de modo que las ecuaciones (2.95) y (2.96) se pueden reescribir

$$E_x^{(n+1)}(i,j,k) = E_x^{(n)}(i,j,k) \quad (2.98.a)$$

$$+ C [H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-1,k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k-1)]$$

$$E_y^{(n+1)}(i,j,k) = E_y^{(n)}(i,j,k) + \quad (2.98.b)$$

$$+ C [H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k-1) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i-1,j,k)]$$

$$E_z^{(n+1)}(i,j,k) = E_z^{(n)}(i,j,k) \quad (2.98.c)$$

$$+ C [H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i-1,j,k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-1,k)]$$

$$H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = H_x^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) \quad (2.99.a)$$

$$- D [E_z^{(n)}(i,j+1,k) - E_z^{(n)}(i,j,k) - E_y^{(n)}(i,j,k+1) - E_y^{(n)}(i,j,k)]$$

$$H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = H_y^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) \quad (2.99.b)$$

$$- D [E_x^{(n)}(i,j,k+1) - E_x^{(n)}(i,j,k) - E_z^{(n)}(i+1,j,k) - E_z^{(n)}(i,j,k)]$$

$$H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = H_z^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) \quad (2.99.c)$$

$$- D [E_y^{(n)}(i+1,j,k) - E_y^{(n)}(i,j,k) - E_x^{(n)}(i,j+1,k) - E_x^{(n)}(i,j,k)]$$

### Reducción a casos bidimensionales

Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso general en tres dimensiones, es posible ordenar los vectores para no desaprovechar posiciones de memoria. Para el caso bidimensional TM la ordenación se muestra en la celda de la figura 2.16, y el sistema de ecuaciones (2.11) queda:

$$Ez^{(n+1)}(i,j) = Ez^{(n)}(i,j) \quad (2.100.a)$$

$$+ C [Hy^{(n+\frac{1}{2})}(i,j)-Hy^{(n+\frac{1}{2})}(i-1,j) - Hx^{(n+\frac{1}{2})}(i,j)-Hx^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-1)]$$

$$Hx^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) = Hx^{(n-\frac{1}{2})}(i,j) - D [Ez^{(n)}(i,j+1)-Ez^{(n)}(i,j)] \quad (2.100.b)$$

$$Hy^{(n+\frac{1}{2})}(i,j)=Hy^{(n-\frac{1}{2})}(i,j) + D [Ez^{(n)}(i+1,j)-Ez^{(n)}(i,j)] \quad (2.100.c)$$

Para el caso TE se sigue la numeración de la figura 2.17 y el sistema (2.12) queda:

$$Hz^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) = Hz^{(n-\frac{1}{2})}(i,j) \quad (2.101.a)$$

$$+ D [Ey^{(n)}(i,j)-Ey^{(n)}(i-1,j) - Ex^{(n)}(i,j)-Ex^{(n)}(i,j-1) ]$$

$$Ex^{(n+1)}(i,j) = Ex^{(n)}(i,j) - C [Hz^{(n+\frac{1}{2})}(i,j+1)-Hz^{(n+\frac{1}{2})}(i,j)] \quad (2.101.b)$$

$$Ey^{(n+1)}(i,j)=Ey^{(n)}(i,j) + C [Hz^{(n+\frac{1}{2})}(i+1,j)-Hz^{(n+\frac{1}{2})}(i,j)] \quad (2.101.c)$$

En ambos casos TE y TM el uso de memoria para los vectores es de  $3N$ , siendo  $N$  el número de celdas del mallado. Se pueden efectuar mas simplificaciones con vistas a optimizar el uso de recursos de memoria y de tiempo de cálculo, por ejemplo se puede definir:

$$\vec{E} = D \vec{E} \quad (2.102.a)$$

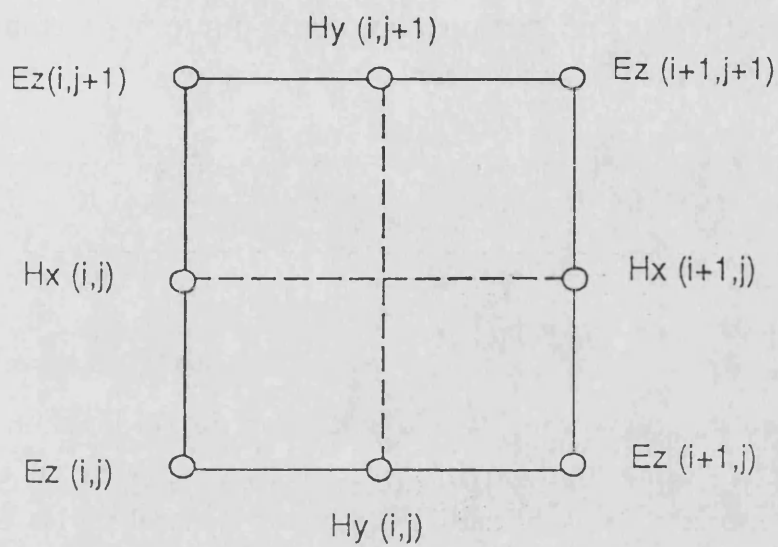


Figura 2.16. Numeración de las componentes en la celda unidad DFDT para un caso bidimensional TM.

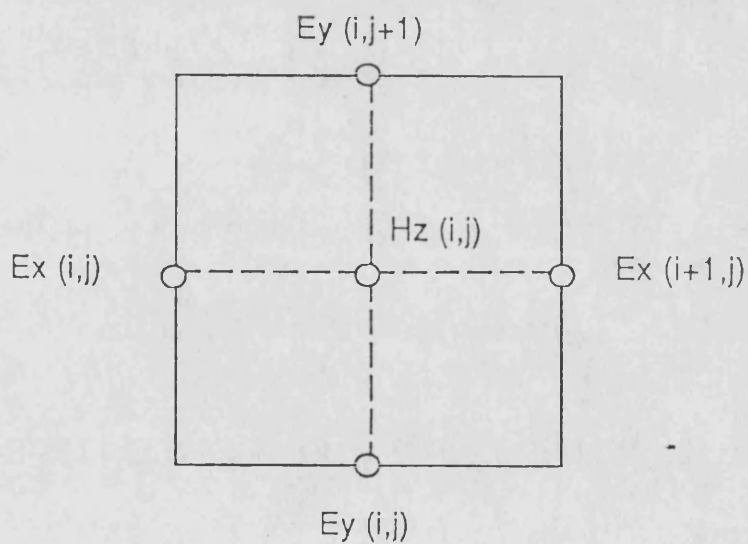


Figura 2.17. Numeración de las componentes en la celda unidad DFDT para un caso bidimensional TE.

Introduciendo esta nueva variable en las ecuaciones (2.98) a (2.100) se ahorra al ordenador efectuar una multiplicación en cada punto, y en cada iteración. Sin embargo para el caso TE, es conveniente el cambio:

$$\vec{\mathcal{H}} = D \vec{H} \quad (2.102.b)$$

## 2.6.2. Medios con pérdidas.

En el caso de que se considere la existencia de pérdidas en el medio, pérdidas asociadas a una conductividad eléctrica y magnética, las ecuaciones anteriores son modificadas siguiendo el esquema general de las ecuaciones de Maxwell en un medio lineal isótropo y homogéneo (2.1) y (2.2)

$$E_x^{(n+1)}(i,j,k) = C_a E_x^{(n)}(i,j,k) \quad (2.103.a)$$

$$+ C_b [H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-1,k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k-1)]$$

$$E_y^{(n+1)}(i,j,k) = C_a E_y^{(n)}(i,j,k) \quad (2.103.b)$$

$$+ C_b [H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k-1) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i-1,j,k)]$$

$$E_z^{(n+1)}(i,j,k) = C_a E_z^{(n)}(i,j,k) \quad (2.103.c)$$

$$+ C_b [H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i-1,j,k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-1,k)]$$

$$H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = D_a H_x^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) \quad (2.104.a)$$

$$- D_b [E_z^{(n)}(i,j+1,k) - E_z^{(n)}(i,j,k) - E_y^{(n)}(i,j,k+1) - E_y^{(n)}(i,j,k)]$$

$$H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = D_a H_y^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) \quad (2.104.b)$$

$$- D_b [E_x^{(n)}(i,j,k+1) - E_x^{(n)}(i,j,k) - E_z^{(n)}(i+1,j,k) - E_z^{(n)}(i,j,k)]$$

$$\begin{aligned} H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j,k) = & Da H_z^{(n-\frac{1}{2})}(i,j,k) \\ & -Db [E_y^{(n)}(i+1,j,k) - E_y^{(n)}(i,j,k) - E_x^{(n)}(i,j+1,k) - E_y^{(n)}(i,j,k)] \end{aligned} \quad (2.104.c)$$

Para el caso bidimensional TM queda:

$$\begin{aligned} E_z^{(n+1)}(i,j) = & Ca E_z^{(n)}(i,j) \\ & + Cb [H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i-1,j) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j-1) ] \end{aligned} \quad (2.105.a)$$

$$H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) = Da H_x^{(n-\frac{1}{2})}(i,j) - Db [E_z^{(n)}(i,j+1) - E_z^{(n)}(i,j)] \quad (2.105.b)$$

$$H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) = Da H_y^{(n-\frac{1}{2})}(i,j) + Db [E_z^{(n)}(i+1,j) - E_z^{(n)}(i,j)] \quad (2.105.c)$$

Para el caso TE se sigue la numeración de la figura 2.17 y el sistema (2.12) queda:

$$\begin{aligned} H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j) = & Da H_z^{(n-\frac{1}{2})}(i,j) \\ & + Db [E_y^{(n)}(i,j) - E_y^{(n)}(i-1,j) - E_x^{(n)}(i,j) - E_x^{(n)}(i,j-1) ] \end{aligned} \quad (2.106.a)$$

$$E_x^{(n+1)}(i,j) = Ca E_x^{(n)}(i,j) - Cb [H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j+1) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j)] \quad (2.106.b)$$

$$E_y^{(n+1)}(i,j) = Ca E_y^{(n)}(i,j) + Cb [H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i+1,j) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i,j)] \quad (2.106.c)$$

Siendo los coeficientes :

$$Ca = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2 \epsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2 \epsilon}} \quad (2.107.a)$$



$$C_b = \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta h} \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2 \varepsilon}} \quad (2.107.b)$$

$$D_a = \frac{1 - \frac{\rho' \Delta t}{2 \mu}}{1 + \frac{\rho' \Delta t}{2 \mu}} \quad (2.107.c)$$

$$D_b = \frac{\Delta t}{\mu \Delta h} \frac{1}{1 + \frac{\rho' \Delta t}{2 \mu}} \quad (2.107.d)$$

Se pueden efectuar mas simplificaciones redefiniendo las variables campo de un modo análogo a como se ha comentado anteriormente con las expresiones (2.102). De todos modos las simplificaciones que se puedan hacer y que realmente sean efectivas en cuanto a la optimización de los recursos informáticos, dependerán en gran medida del problema que se analice y de las prestaciones del ordenador que se vaya a utilizar.

### 2.6.3. Región del espacio con un n<sup>o</sup> finito de medios distintos.

Para una región del espacio con un número finito de zonas con características eléctricas distintas, el tratamiento de los punto interiores de cada zona homogenea se realiza con las ecuaciones anteriores, con constantes definidas en cada una. Los puntos de las interfases entre zonas homogeneas requieren un tratamiento especial puesto que en ellos las constantes son discontinuas. El procedimiento seguido hasta ahora por varios autores, y que ha dado buenos resultados, [43], [47], es el de considerar que en estos puntos fronterizos el valor de las constantes es el valor medio de las de cada zona concurrente.

Esto puede hacerse definiendo vectores de constantes, con tantos elementos como zonas,

$$C_a = C_a(m) \quad (2.108.a)$$

$$C_b = C_b(m) \quad (2.108.a)$$

$$D_a = D_a(m) \quad (2.108.a)$$

$$D_b = D_b(m) \quad (2.108.a)$$

$m = 1, \dots$ , numero de zonas homogeneas

en las interfases entre dos zonas se utiliza un valor especial para estas que se obtiene de las ecuaciones (2.107); haciendo uso del valor medio de los parámetros electricos. Por ejemplo en los puntos de la interfase entre dos medios de constantes  $\epsilon_1, \epsilon_2, \mu_1, \mu_2$  se aplica:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \quad (2.109.a)$$

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \quad (2.109.b)$$



# Capítulo 3: Modos TE y TM en guías de onda. Análisis con DFDT

## 3.1. Introducción.

Las líneas de transmisión y las guías de ondas son sistemas guiadores que se utilizan para transportar energía a la frecuencia de microondas [79], [16]. Las características deseables para estos sistemas son principalmente el que permitan la transmisión de un sólo modo con una baja atenuación sobre un amplio rango de frecuencias. La estructura es llamada línea de transmisión cuando el modo dominante es un modo Transversal ElectroMagnético (TEM), y se denomina guía de ondas cuando el modo dominante es un Transversal Eléctrico (TE) ó un Transversal Magnético (TM). Es importante esta distinción dado que hay una diferencia conceptual y matemática en el tratamiento de ambos casos. En el caso de una línea de transmisión la frecuencia de corte es nula para el modo fundamental, y la estructura del campo se obtiene resolviendo la ecuación de Laplace [80], que es una ecuación de tipo elíptico. Los modos TE y TM si presentan frecuencias de corte y su estudio puede derivarse por dos vías alternativas. Una posibilidad es la de resolver la ecuación de Helmholtz en la sección transversal de la guía para las componentes longitudinales del campo. La ecuación que se resuelve es una ecuación de valores propios y es de tipo elíptico también. Los valores propios están relacionados con las frecuencias de corte y los vectores propios permiten obtener la estructura de campo en la sección transversal de la guía de los respectivos modos. Otra posibilidad de análisis equivalente que se introduce en este capítulo es la de considerar la sección transversal de la guía como un resonador bidimensional. Supuesta una dependencia armónica con la variable espacial en la dirección de propagación (simetría traslacional), sólo hay que resolver la estructura del campo en la sección transversal de la guía. Hasta aquí el planteamiento es idéntico al análisis convencional [79],[80], la diferencia está en que en lugar de resolver la ecuación de Helmholtz bidimensional, se resuelven las

ecuaciones de Maxwell del rotacional (2.5), (2.6), en la sección transversal de la guía. Previa imposición de una excitación, la evolución temporal del campo está determinada por las ecuaciones (2.5) y (2.6). Las condiciones de contorno en las paredes de la guía solamente permitirán unas determinadas estructuras de campo que serán propias de la sección transversal de la guía. Estas son los modos y las frecuencias de estos se corresponderán con las frecuencias de corte de estos.

D. H. Choi y W. J.R. Hoefer son los primeros en aplicar DFDT a problemas de valores propios [44]. En su trabajo, analizan cavidades paralelepípedicas inhomogéneas. Aplican una señal sinusoidal en ciertos nodos, elegidos según la "habilidad del experimentado investigador", y la hacen evolucionar al estado estacionario. El campo en el estacionario en cada nodo de la malla lo calculan como el promedio sobre su valor en cada instante de la simulación. El tiempo de CPU consumido en sus cálculos es menos de la mitad del que consume el método de TLM bajo idénticas condiciones [44]. Hay una cierta similitud entre DFDT y el método de la Matriz de Línea de Transmisión (TLM). Este último ha sido ampliamente utilizado para resolver problemas de valores propios en el dominio del tiempo, y se basa en calcular la respuesta a un impulso en una gran red de líneas de transmisión. Las ventajas de DFDT sobre TLM residen en un menor consumo de recursos de ordenador, tanto de memoria como de tiempo de cálculo. Para cada celda unidad tridimensional en TLM se precisan 26 posiciones de reales en memoria, 12 para almacenar el pulso y 14 para parametros de la red [44]. En DFDT cada celda en 3D solo precisaría 18 posiciones de reales, esto suponiendo que las constantes del medio variasen de una celda a otra.

A. Navarro, M. J. Nuñez y E. Martín aplican DFDT al estudio de resonadores con simetría de revolución huecos [81] , [53] y con dieléctrico [54]. La simetría les permite un análisis bidimensional del resonador efectuando un tratamiento con coordenadas cilíndricas. Su formulación es mas clara que la indicada por Choi y Hoefer, principalmente cuando definen la excitación y el modo de extraer las frecuencias de resonancia. En el trabajo de Choi las frecuencias propias de la cavidad se determinan de una forma oscura, y la transformada discreta de Fourier aparece en el trabajo sin indicar

con claridad su utilidad. Navarro, Nuñez y Martin hacen una exposición breve y concisa de su algoritmo, de la excitación que eligen y del uso que hacen de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), para determinar las frecuencias de resonancia y la geometría de los modos.

El modo usual de estudiar los modos de propagación en una guía ha sido tradicionalmente en el dominio de la frecuencia, resolviendo la ecuación de Helmholtz con las correspondientes condiciones de contorno [82] [83], recurriendo con preferencia -la mayoría de los autores- a elementos finitos [1], [84]. En este capítulo se describe una formulación alternativa y rápida de analizar los modos propios de una guía de ondas de sección arbitraria. El análisis se efectúa en el dominio del tiempo partiendo de las ecuaciones de Maxwell del rotacional que se resuelven por diferencias finitas (DFDT), este planteamiento es formalmente equivalente al seguido en el dominio de la frecuencia puesto que para dependencias temporales armónicas estas ecuaciones dan lugar a la ecuación de Helmholtz. El algoritmo numérico que se describe, permite determinar las frecuencias de corte de los modos de propagación así como la distribución del campo longitudinal en la sección transversal de la guía. En particular se estudian dos guías con resultados analíticos conocidos para contrastar los resultados. Por último se estudia un caso de solución analítica inexistente y no resuelto en la bibliografía.

### 3.2. Modos en una guía de ondas cerrada.

Son solución de la ecuación vectorial de Helmholtz homogénea,

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0 \quad (3.1)$$

descomponiendo los campos en sus componentes axiales y transversales, y suponiendo una dependencia en  $z$  del tipo  $\exp(-j\beta z)$  (onda que viaja hacia la izquierda) [79] tendremos:

(a) Modo Transversal eléctrico (TE) o modo H. Las soluciones tienen  $E_z=0$  pero  $H_z \neq 0$ . Todas las componentes del campo se pueden derivar de la

componente axial  $H_z$  del campo magnético. La ecuación a resolver con las correspondientes condiciones de contorno es la ecuación escalar de Helmholtz para las coordenadas transversales,

$$\{\nabla_t^2 + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2\} H_z = 0 \quad (3.2.a)$$

siendo  $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

(b) Modo Transversal magnético (TM) o modo E. Las soluciones tienen  $H_z=0$  pero  $E_z \neq 0$ . Todas las componentes del campo se pueden derivar de la componente axial  $E_z$  del campo eléctrico. Análogamente al caso anterior, la ecuación a resolver es,

$$\{\nabla_t^2 + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2\} E_z = 0 \quad (3.2.b)$$

(3.3.a) y (3.3.b) constituyen dos ecuaciones de valores propios para las componentes del campo  $E_z$  (TM) y  $H_z$  (TE) con los valores propios que determinan sus respectivas frecuencias de corte. Estas ecuaciones son de tipo elíptico y el procedimiento de solución que generalmente se ha seguido ha dependido fundamentalmente de la geometría de la sección transversal y del posible relleno dieléctrico.

### 3.3. Modos en una guía de ondas cerrada. Análisis por DFDT.

Partiendo del dominio del tiempo se puede efectuar un planteamiento físicamente diferente. Las ecuaciones a resolver son las ecuaciones de Maxwell del rotacional (2.3) y (2.4). Tomando el eje  $z$  como eje de la guía y asumiendo simetría traslacional, la dependencia en  $z$  puede ser eliminada de dichas ecuaciones, y para los casos TE y TM es suficiente un análisis con tres componentes del campo, las ecuaciones a resolver en el dominio del tiempo son finalmente las ecuaciones (2.5) para un modo TE y (2.6) para un modo TM, (el criterio TE/TM para propagación en guías es

opuesto al de propagación en el espacio libre). Estas ecuaciones, junto con las condiciones de contorno del sistema permitirá obtener la evolución temporal de las componentes del campo a partir de su distribución inicial en el origen de tiempo ( $t=0$ ).

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) se definirán sobre la sección transversal de la guía de ondas. De este modo, habremos pasado de un problema de propagación en tres dimensiones -volumen de la guía- a un problema bidimensional. En este último caso, al aplicar el esquema de DFDT a las ecuaciones anteriores (apartado 2.3.4), sobre la sección transversal de la guía, obtendremos una evolución temporal del campo que respondiendo a las condiciones de contorno solo podrá tener unas frecuencias permitidas. Las frecuencias permitidas, que son las frecuencias propias de la cavidad bidimensional, se corresponden entonces con las frecuencias que se obtienen al resolver la ecuación de Helmholtz para  $H_z$  ó  $E_z$  sobre la sección transversal de la guía (resonancia transversal). Estas frecuencias son las frecuencias de corte de los modos de campo permitido TE ó TM, en orden creciente.

### 3.3.1. Esquema numérico.

Las ecuaciones de Maxwell del rotacional son discretizadas, estableciendo un mallado que modela la sección transversal de la guía (2.5), (2.6), en el que en cada nodo se define una componente del campo de forma alternada (apartado 2.3.4). Para el caso TM viene constituido por la celda unidad que se muestra en la figura 2.3. Para el caso TE hay que utilizar la celda de la figura 2.2.

En lo que sigue vamos a centrarnos en el caso TE, puesto que para el caso TM el procedimiento es análogo, cambiando sólo la celda unidad y las condiciones de contorno. Para extraer los modos TM la condición de contorno en las paredes conductoras es  $E_z=0$  (celda 2.3) y para los TE es  $H_z=0$  (la celda es la 2.2).

Supongamos que el campo del modo  $m$  se puede escribir



$$e_{zm}(x,y,t) = g_m(x,y) \exp(j2\pi f_m t) \quad (3.3)$$

donde  $g_m(x,y)$  es una función que depende exclusivamente de la sección de la guía y  $f_m$  es la frecuencia propia del modo. Si se dispone de una excitación que sea lo bastante abrupta como para contener el mas amplio rango de frecuencias que sea posible, de todas las frecuencias excitadas obviamente solo permanecerán las propias del sistema. Estas daran lugar a un campo resonante o propio del dominio. Cada una de las frecuencias resonantes está ligada a un modo o varios en caso de degeneración, coexistiendo todos en el dominio del tiempo. Entonces, el campo total tras la excitación se podrá escribir -en el caso mas general [83]- como una combinación líneal de todos los modos propios,

$$e_z(x,y,t) = \sum_m c_m g_m(x,y) \exp(j2\pi f_m t) \quad (3.4)$$

siendo  $c_m$  coeficientes complejos.

Siguiendo el esquema de cálculo por DFDT reducido para el caso TE (bidimensional), se simula la evolución del campo, generando en cada punto  $(i\Delta x, j\Delta y)$  del mallado una serie temporal que se corresponde con el valor del campo en cada instante discreto  $n\Delta t$ ,

$$e_z^n(i,j) = e_z(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \quad (3.5)$$

$$n=0,1,2,\dots, N-1$$

siendo el tiempo total de simulación  $T=N\Delta t$ .

#### Aplicación de la Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La aplicación de la Trasformada Discreta de Fourier a la serie temporal (3.5) dará como resultado una función discreta de la frecuencia,

$$F_k(i,j) = \sum_{n=0}^{N-1} e_Z^n(i,j) \exp(-j\omega_k n \Delta t) \quad (3.6)$$

siendo  $\omega_k = 2\pi k / N\Delta t$ ,

haciendo uso de la expresión (3.4) tendremos que

$$F_k(i,j) = \sum_m c_m g_m(x,y) \frac{1 - \exp(j2\pi f_m N\Delta t)}{1 - \exp j2\pi(f_m - f_k)} \quad (3.7)$$

siendo  $f_k = k / N\Delta t$ ,

relacionando la TDF con la Transformada de Fourier de la señal continua, [85], [86], tenemos ,

$$F_k(i,j) = \sum_m \frac{j c_m g_m(x,y)}{2\pi\Delta t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{f_m - (f_k + \frac{r}{\Delta t})} \quad (3.8)$$

que es periodica de periodo  $N$ , puesto que  $f_{k+N+\frac{r}{\Delta t}} = f_k + \frac{r+1}{\Delta t}$  ,

entonces podemos escribir con muy buena aproximación (siempre que se cumpla el teorema del muestreo [85]),

$$F_k(i,j) = \sum_m \frac{j c_m g_m(x,y)}{2\pi\Delta t} \frac{1}{f_m - f_k} \quad (3.9)$$

para  $k=0,1,2,\dots,N/2$ .

### Calculo de las frecuencias de corte

Si las frecuencias de corte de los modos estan lo suficientemente espaciadas, los valores de  $f_k$  que den lugar a un máximo relativo de  $|F_k(i,j)|$  serán las mas próximas a  $f_m$  y por consiguiente se corresponderán con estas. El error cometido en esta aproximación para el cálculo  $f_m$  de es:

$$\Delta f = 1/N\Delta t \quad (3.10.a)$$

Navarro, [81], propone en su trabajo un modo de aumentar la precisión de la aproximación. Si  $f_{k1}$  y  $f_{k2}$  son la frecuencia del máximo y la mas cercana al máximo tendremos que

$$F_{k1} = |F_{k1}(i,j)| \approx C/(f_m - f_{k1})$$

$$F_{k2} = |F_{k2}(i,j)| \approx C/(f_m - f_{k2})$$

de modo que dividiendo ambas expresiones se deduce:

$$f_m \approx \frac{f_{k1} F_{k1} - f_{k2} F_{k2}}{F_{k1} - F_{k2}} \quad (3.10.b)$$

### Determinación de las líneas de campo

Conocida la frecuencia del modo resonante  $m$  (frecuencia de corte del modo  $TE_m$ ), se determinan los valores de  $F_k(x,y)$  en toda la seccion transversal de la guía para la  $f_k$  mas próxima a  $f_m$ . Si el espectro en frecuencia esta lo suficientemente espaciado, escogiendo un  $F_k(x_0, y_0)$  para normalizar tendremos:

$$\frac{g_m(x,y)}{g_m(x_0, y_0)} \approx \frac{F_k(x,y)}{F_k(x_0, y_0)} \quad (3.11)$$

Esta relación nos permite obtener las líneas de campo en la sección transversal de la guía.

### 3.3.2. Numeración de los modos.

El algoritmo DFDT permite la obtención de las frecuencias de corte en orden creciente y la distribución de campo en la sección transversal de la guía para cada modo, pero no establece ninguna forma de numerar los modos. La numeración se podría hacer a posteriori, observando las estructuras del campo y su distribución en torno a ciertas líneas de simetría de la guía. De todos modos no se va a entrar en esta discusión. En los casos que se tratan, se compara con la bibliografía existente utilizando su misma notación. En cualquier otro caso simplemente se ordenaran en orden creciente sin efectuar clasificaciones.

### 3.4. Análisis del algoritmo. Resultados numéricos y discusión.

Primero, para establecer y verificar el algoritmo, se estudian dos guías con solución analítica conocida. Se efectúa un análisis del tipo de excitación, (suave ó abrupta) y de la convergencia. Esto se lleva a cabo con la guía rectangular para los modos TE y para la circular en los modos TM. Se tratan estos casos por ser los de frecuencia de corte mas baja en los respectivos sistemas guidores. La convergencia en la guía rectangular se analiza desde dos puntos de vista, el numérico asociado al algoritmo DFDT y la densidad de mallado y el inherente a la precisión con la Transformada de Fourier. Con la guía circular se analiza la influencia mallado y su adaptación mediante celdas cuadradas a contornos curvos. En el siguiente apartado, el 3.6, se aplica el mismo esquema numérico para obtener las frecuencias de corte y la distribución de campo en un sistema guiador cuyos modos de orden superior no se pueden obtener analíticamente.

### 3.4.1. Análisis de la excitación. Guía rectangular con sección $b=2a$ .

El modelado de la sección transversal se efectúa con un mallado de  $40 \times 20$  celdas cuadradas. Las dimensiones de la celda que se utiliza en el mallado de la guía son  $\Delta x = \Delta y = \Delta h = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  y el paso temporal -siguiendo la condición de estabilidad de Courant [22] - se elige  $\Delta t = \Delta h / 2c$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Se simula la evolución del campo durante 8000 pasos temporales sobre los cuales se efectúa la TDF, esta elección es heurística y da lugar a una precisión en la TDF de 0.149896 GHz. Los resultados en función del tipo de excitación se analizan a continuación.

#### Excitación temporal cuadrada

La primera excitación ensayada es una señal cuadrada:

$$e_z^n(i,j) = \begin{cases} 100.0 & n < 50 \\ 0.0 & n \geq 50 \end{cases} \quad (3.12)$$

Esta se distribuye de forma alternada -nodo con excitación rodeado de nodos sin excitación- sobre toda la sección transversal de la guía.

La figura 3.1 muestra la Transformada Discreta de Fourier en los puntos (20,10) y (15,15) del mallado, indicando la posición de los máximos que se corresponden con las frecuencias de corte de los modos. El muestreo efectuado en el punto (20,10) no llega a detectar el modo  $TE_{31}$  sin embargo en el punto (15,15) si se detecta. La explicación a esta disparidad habría de atribuirse a la distribución del campo, que para este modo no tiene un valor significativo en el primer punto. Las frecuencias de corte de los modos se recogen de la figura anterior y con su desviación respecto de los resultados analíticos se muestran en la tabla 3.I.

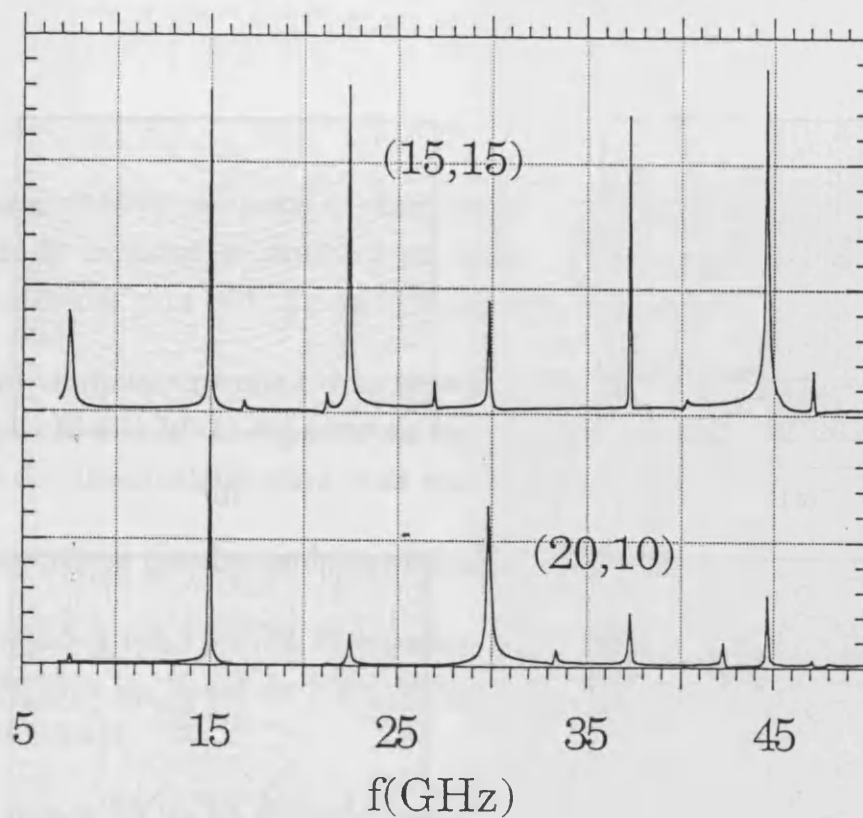


Figura 3.1. Espectro en los puntos (20,10) y (15,15) del mallado.

TABLA 3.I. Frecuencias de corte de los cuatro primeros modos TE en guía rectangular hueca. Desviación respecto de los resultados analíticos. Dimensiones de la guía  $a/b=2$ ,  $a=2\text{cm}$ .

modo	frec. anal. (GHz)	frec.numerica (GHz)	desviación(%)
TE <sub>10</sub>	7.4948	7.4948	0.00
TE <sub>20</sub>	1.4989	1.4989	0.00
TE <sub>11</sub>	1.6759	1.6788	0.17
TE <sub>21</sub>	2.1198	2.1285	0.40

La distribución del campo para cada modo se obtiene haciendo uso de la TDF en todos los nodos, como se ha explicado anteriormente. Las líneas de campo Hz constante se muestran en la figura 3.2.a-d para los modos TE<sub>10</sub>, TE<sub>20</sub>, TE<sub>11</sub>, y TE<sub>21</sub>, respectivamente.

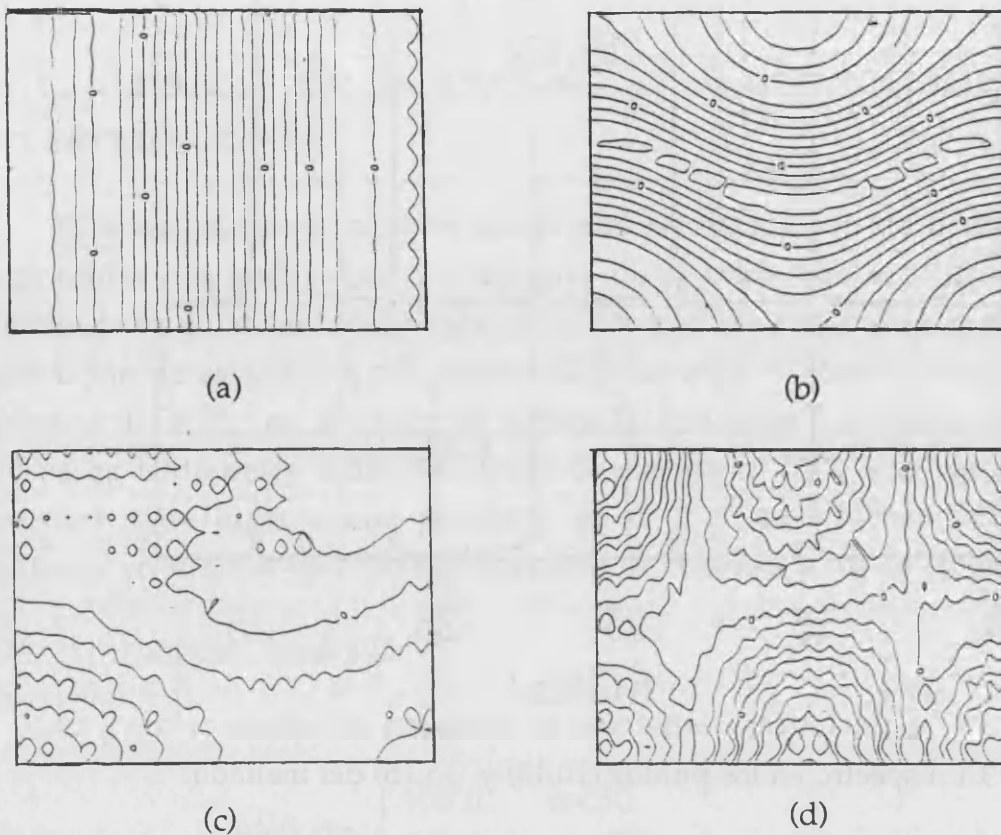


Figura 3.2 Líneas de campo magnético constante para los modos: (a)TE<sub>10</sub>; (b)TE<sub>20</sub>; (c)TE<sub>11</sub>; (d)TE<sub>21</sub>.

### Excitación temporal gaussiana

Se analiza el efecto de una excitación suave. En este caso de una excitación temporal de tipo gaussiano:

$$e_z^n(i,j) = \begin{cases} A_0 \exp\left(-\frac{(n\Delta t - n_0\Delta t)^2}{A}\right) & n < 2n_0 \\ 0.0 & n \geq 2n_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

con  $A_0=100.0$ ,  $n_0=350$  y  $A=40\Delta t$ .

Con este tipo de excitación se efectúan los siguientes experimentos numéricos:

a) Esta excitación temporal es distribuida a lo largo de la línea  $i=20$  desde  $j=5$  a  $j=15$ . El espectro se muestra en línea "a" de la figura 3.3. Las líneas de  $H_z=\text{constante}$  para cada modo se muestran en las figuras 3.4.a-d.

b) Para comparar resultados se ensaya también la excitación en la línea  $j=10$  desde  $i=10$  a  $i=30$ . El espectro se muestra en línea "b" de la figura 3.3. Las líneas de  $H_z=\text{constante}$  para cada modo se muestran en las figuras 3.5.a-d

c) También se prueba también excitando dos segmentos:

$i=10, j=0..5$  y  $j=5, i = 0..10$ . El espectro se muestra en línea "c" de la figura 3.3. En este caso las líneas de  $H_z=\text{constante}$  para cada modo se muestran en las figuras 3.6.a-d.

En la figura 3.3. se ha incluido también el espectro que se obtiene cuando se usa una excitación temporal gaussiana en puntos alternos (línea d).

La última y mas fructífera prueba efectuada en la guía rectangular ha consistido en excitar un pulso gaussiano en un solo punto -el (5,2)- alejado todas las posibles líneas de simetría de la sección. Con esto se ha tratado de evitar un posible beneficio de unos modos en detrimento de otros que pudieran presentar un mínimo del campo en este punto. El espectro en el punto (12,2) se muestra en la figura 3.7. La tabla 3.II muestra las frecuencias de corte obtenidas para los 11 primeros modos y su desviación respecto de las obtenidas analíticamente. Las líneas de campo  $H_z$  constante para los cuatro primeros modos se muestran en las figuras 3.8.a-d. Por comodidad, se representan para los modos TE las líneas de  $H_z$  constante, éstas se corresponden con las líneas de campo eléctrico. Por la misma razón, para los modos TM se representarán las curvas de nivel de  $E_z$ , que se corresponden con las líneas de campo magnético.



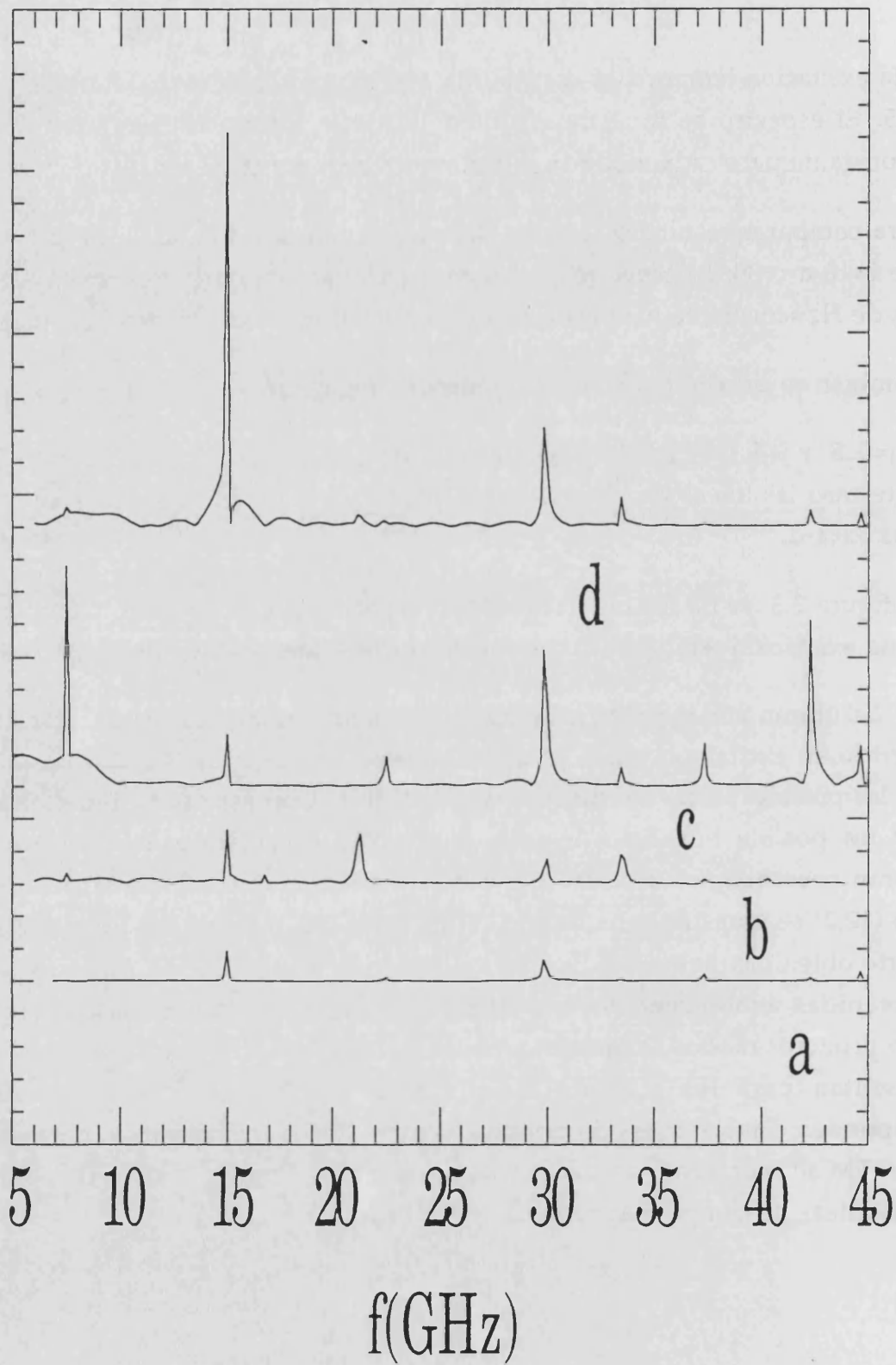
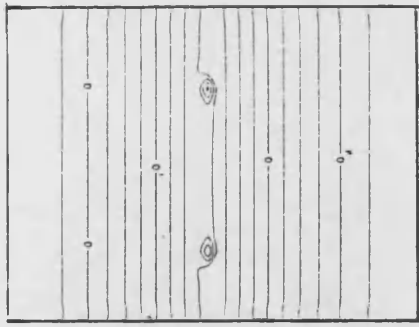
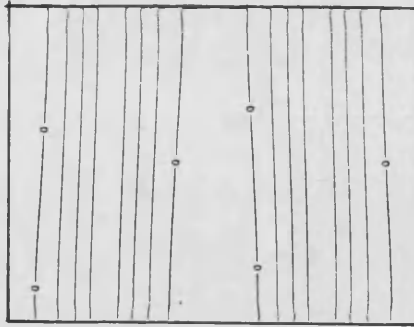


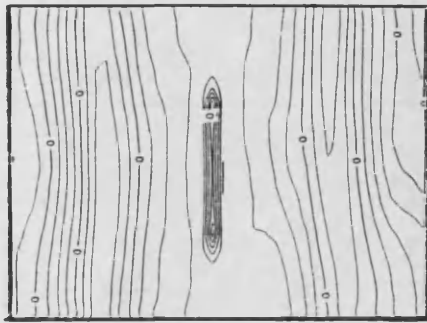
Figura 3.3. Espectro para cuatro tipos de excitación en el mismo punto.



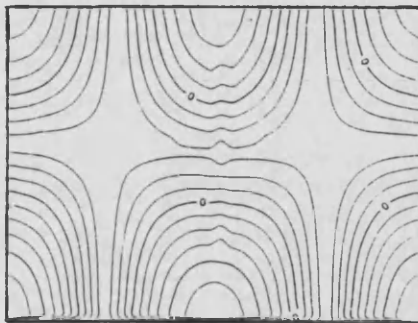
(a)



(b)

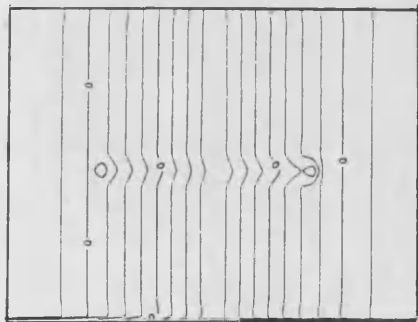


(c)

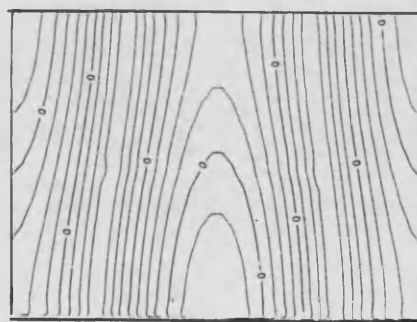


(d)

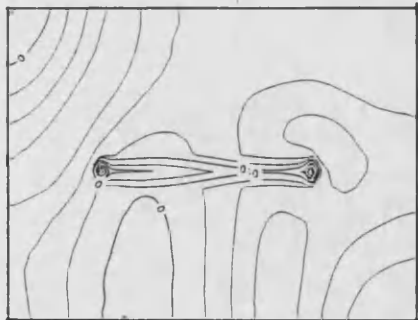
Figura 3.4. Líneas de campo magnético constante para los modos con excitación a): (a)TE<sub>10</sub>; (b)TE<sub>20</sub>; (c)TE<sub>11</sub>; (d)TE<sub>21</sub>.



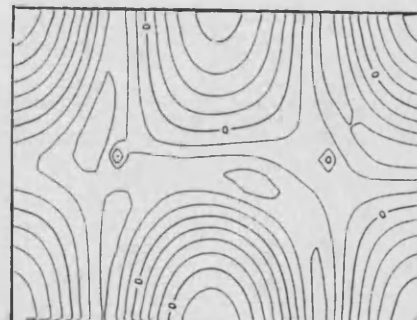
(a)



(b)

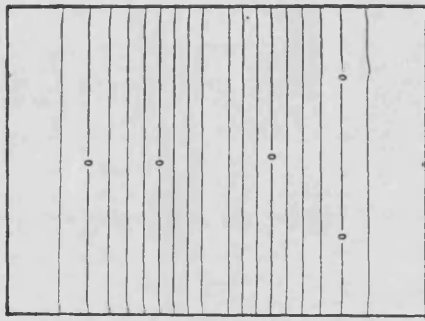


(c)

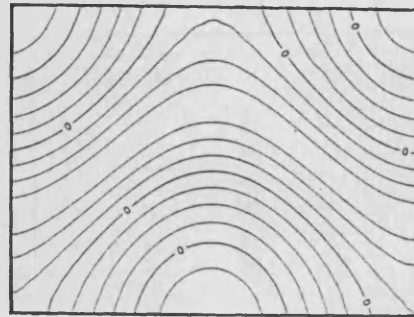


(d)

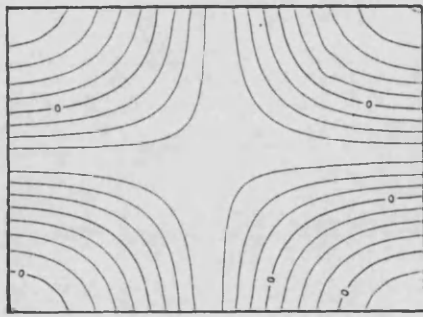
Figura 3.5. Líneas de campo magnético constante para los modos con excitación b): (a)TE<sub>10</sub>; (b)TE<sub>20</sub>; (c)TE<sub>11</sub>; (d)TE<sub>21</sub>.



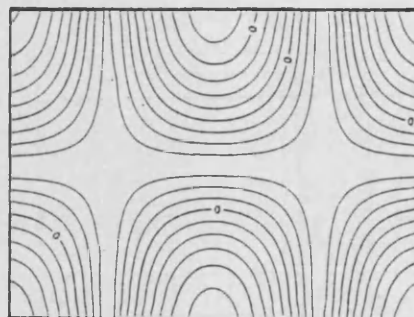
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.6. Líneas de campo magnético constante para los modos con excitación c): (a)TE<sub>10</sub>; (b)TE<sub>20</sub>; (c)TE<sub>11</sub>; (d)TE<sub>21</sub>.

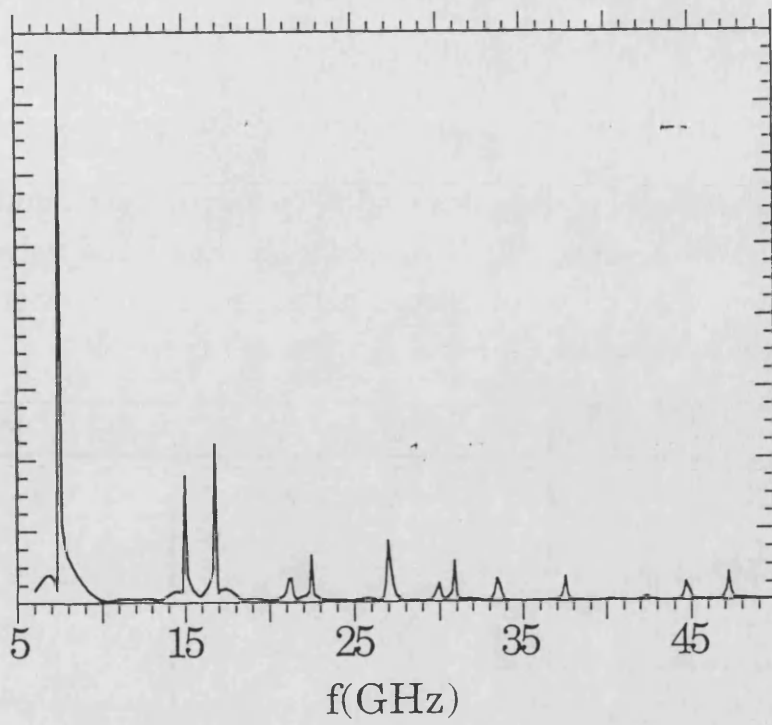
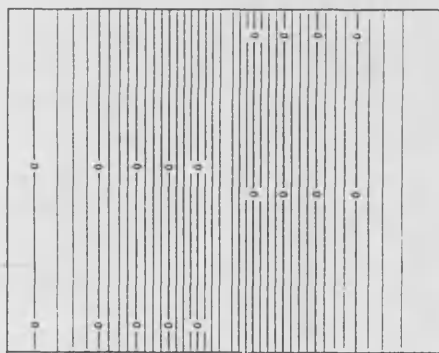
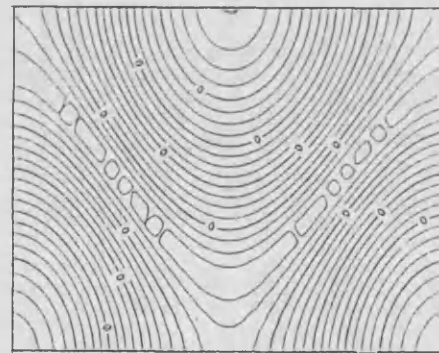


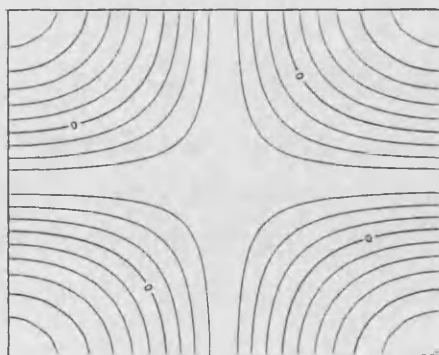
Figura 3.7.



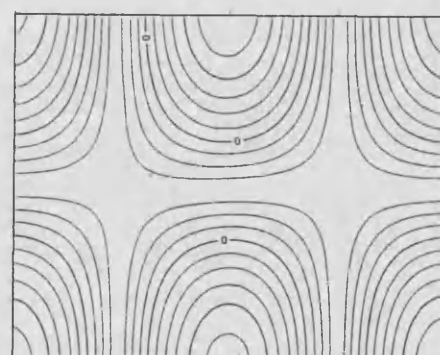
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.8. Líneas de campo magnético constante, modos : (a)TE<sub>10</sub>; (b)TE<sub>20</sub>;  
(c)TE<sub>11</sub>; (d)TE<sub>21</sub>.

TABLA 3.II. Frecuencias de corte de los modos TE en guía rectangular hueca. Desviación respecto de los resultados analíticos y tiempo de CPU consumido en el cálculo del espectro. Dimensiones de la guía  $a/b=2$ ,  $a=2\text{cm}$ .

modo	frec. anal. (GHz)	frec. numerica (GHz)	desviación(%)
TE10	7.4948	7.4948	0.00
TE20	1.4989	1.4989	0.00
TE11	1.6759	1.6788	0.17
TE21	2.1198	2.1285	0.40
TE30	2.2484	2.2484	0.00
TE31	2.7023	2.6981	0.16
TE12	3.0902	3.0879	0.07
TE22	3.3518	3.3427	0.27
TE32	3.7474	3.7474	0.00
TE13	4.5590	4.4669	2.00
TE23	4.7402	4.7217	0.40

Tiempo de CPU para espectro hasta 120 GHz= 37 secs

### Análisis de los resultados

Los resultados muestran que las frecuencias correspondientes a los máximos del espectro no sufren cambios apreciables con respecto a variaciones en el tipo de excitación. Sin embargo las líneas de campo varían ostensiblemente, llegando a no parecerse en absoluto a los modos propios correspondientes a esas frecuencias.

Examinando las figuras que representan la geometría de los modos, se observa que las líneas de campo se ven afectadas por la presencia de las "sondas" de excitación, hasta el punto de que en el caso de la excitación

cuadrada no se identifican apenas con las líneas que se obtienen analíticamente (figuras 3.2.a-d) [87]. La situación de las "sondas" crea fuentes de campo estacionarias que distorsionan la "imagen de Fourier"-transformada de Fourier del campo- para las frecuencias de corte.

La justificación a la distorsión se encuentra en la excitación que se introduce para producirlos, en el poco espaciamiento del espectro y en la baja resolución del mallado para modos con estructuras complicadas. La excitación en la sección transversal de la guía es una fuente de campo, y como tal tiene que aparecer en el dominio de Fourier. Por otro lado es obvio que según la posición de las sondas de excitación se favorecen mas unos modos en detrimento de otros. Estos últimos -no favorecidos por la excitación- aparecen poco remarcados y además estan afectados por la distorsión que producen las sondas excitadoras y los modos vecinos. La baja resolución de la TDF y del mallado espacial influyen también en los malos resultados de las figuras asi como en la determinación de las frecuencias de corte. Esto último sobre todo con modos de orden elevado con estructura complicada (modo TE<sub>13</sub>).

El problema de la vecindad en las frecuencias de resonancia se resuelve efectuando una simulación mas prolongada y en consecuencia aumentando la precisión de la TDF. Se podría intentar excitar primero unos modos y luego otros, pero esto no se puede hacer bien si no se conoce a priori la geometría y la frecuencia de corte de cada modo, en cuyo caso no sería necesario efectuar el análisis numérico. Se puede actuar intuitivamente como lo hacen D. H. Choi y W. J.R. Hoefer, haciendo uso del "savoir faire" del experimentado investigador, pero es arriesgado cuando se analizan geometrías complicadas. En cuanto al mallado, obviamente cuanto mas denso sea, mejores serán de esperar los resultados. De todos modos esto se verá con mas detalle en el análisis de la convergencia en los siguientes apartados.

De los casos estudiados se ha llegado a las siguientes conclusiones:

a) Su distribución espacial debe de ser lo mas reducida posible.

- b) Su situación espacial no debe de favorecer a ningún modo en particular, por lo que debe de estar situada fuera de líneas de simetría.
- c) La determinación del espectro se efectuará también sobre puntos fuera de líneas de simetría, para evitar posibles nulos del campo.
- d) Efectuar el espectro sobre el mayor rango de frecuencias posible. Identificando los polos de la TDF como máximos muy acentuados (picos del espectro).
- e) Cuando el pico del espectro sea dudoso (poco acentuado). Comprobar la validez de las frecuencias de resonancia mediante la observación de la geometría. Esto es la TDF para esa frecuencia sobre toda la sección transversal de la guía.
- f) Repetir el proceso anterior excitando en otro punto para comprobar las frecuencias y las geometrías obtenidas con la excitación anterior. En caso de no coincidir los resultados, esto permite descubrir otros modos no generados con la primera prueba

La efectividad de este procedimiento a quedado patente en la ultima prueba. Tanto en la precisión obtenida en las frecuencias de corte (tabla 3.II) como en la distribución del campo para cada modo (figuras 3.8.a-d).

Otro detalle observado es la no coincidencia de la estructura del modo TE<sub>20</sub> obtenida con la que se muestra en la bibliografía [87]. Lo curioso es que esta geometría se repite para otros tres tipos de excitación. No hay nada de extraño en esa estructura. Lo que sucede es que el modo TE<sub>20</sub> y el TE<sub>01</sub> son degenerados en la guía  $b=2a$ , tienen la misma frecuencia de corte, y por lo tanto aparecen juntos a esa frecuencia.

Por último cabe comentar la "curiosidad" de las estructuras obtenidas aunque en algunos caso no se correspondan exactamente con los modos. Se podría entablar una especie de juego, el de generar figuras en el dominio de la frecuencia (TDF) variando tipos de excitación y dejando evolucionar el campo en el dominio del tiempo. Se abren las puertas del juego Excitación- Dominio del Tiempo- Dominio de Fourier, haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell del rotacional (bonito).

### 3.4.2. Análisis de la convergencia. Guía rectangular con sección $b=2a$ .

El algoritmo numérico descrito en el apartado 3.3.1, permite efectuar cualquier tipo de mallado y simular la evolución del campo durante un número arbitrario de intervalos temporales. La única restricción es la condición de estabilidad que relaciona los pasos espaciales y temporal. En este apartado se analizará la influencia de la densidad de mallado. Conservando la condición de estabilidad se analizará la convergencia al usar celdas mas pequeñas con mallados mas densos. También se estudiará la convergencia en función de la precisión de la Transformada Discreta de Fourier mediante la simulación con un mayor número de intervalos temporales.

#### Influencia del mallado

En la guía de ondas de sección rectangular, el mallado con celdas cuadradas siempre se adapta perfectamente a los contornos. Aquí se analiza la influencia del mallado en la determinación de las frecuencias de corte, conservando la condición de estabilidad y la sensibilidad de la Transformada de Fourier. Al efectuar un mallado con mas celdas, estas deben ser de dimensiones mas reducidas por lo que también disminuye el incremento temporal. Para conservar la sensibilidad de la TDF, se aumenta proporcionalmente el número de pasos de simulación de modo que se compense la disminución del paso de tiempo (ver ecuación (3.10.a)). La tabla 3.III muestra las frecuencias de corte de los cuatro primeros modos y su desviación respecto de las obtenidas analíticamente en función de las dimensiones del mallado. En el mallado  $10 \times 5$  se han simulado 4000 pasos temporales, en el  $20 \times 10$  8000, en el  $30 \times 15$  12000, hasta el  $60 \times 30$  donde se han efectuado 24000 iteraciones temporales. La resolución en frecuencia de la TDF es en todos los casos de 0.07494825 GHz.



TABLA 3.III. Frecuencias de corte de los modos TE en guía rectangular hueca obtenidos con DFDT. Desviación respecto de los resultados analíticos para varios mallados. Dimensiones de la guía  $a/b=2$ ,  $a=2\text{cm}$ .

modo	TE10	%	TE20	%	TE11	%	TE21	%
10x5	7.494825	0.00	14.839754	1.00	16.638512	0.70	21.360251	0.80
20x10	„	0.00	14.914702	0.50	16.713460	0.27	21.135407	0.30
30x15	„	0.00	14.989650	0.00	16.713460	0.27	21.135407	0.30
40x20	„	0.00	„	0.00	16.788408	0.17	21.135407	0.30
50x25	„	0.00	„	0.00	16.788408	0.17	21.210355	0.06
60x30	„	0.00	„	0.00	16.788408	0.17	21.210355	0.06

Los resultados obtenidos indican una mejora con mallados mas densos. Pero los resultados aunque mejoran, no lo hacen ostensiblemente. Es de notar que los mallados groseros para los modos de orden mas alto dan resultados que son mas pobres con respecto a los de orden mas bajo. La razón de ello se debe a la sencillez en la estructura de los primeros modos que permite un modelado numérico con menos puntos. Aqui cabe añadir que en el caso de 10x5 celdas, los máximos correspondientes a los modos TE11 y TE12 no aparecen muy marcados con relación a los otros dos primeros modos. Esto se debe a la estructura mas complicada de estos modos con respecto a los primeros que precisa de una mayor resolución en el mallado. Dada la poca mejora en los resultados con un mallado mas túpido, habrá que buscar un compromiso entre precisión y consumo de recursos informáticos que en este caso se decanta por el mallado 20x10. En este caso se consumen 14 segundos de tiempo de CPU usando la mitad de memoria que en el mallado 60x30 en el que el consumo es de 56 segundos.

### Influencia del tiempo de simulación

Otro análisis a efectuar a continuación es el de ver como influye en los resultados el aumento del tiempo de simulación. El efecto de aumentar el tiempo de simulación se observa rápidamente en la ecuación (3.10.a), a mayor duración temporal, mayor precisión en la TDF y en consecuencia mayor precisión en la determinación de las frecuencias de corte ( $\Delta f=1/N\Delta t$ ) numéricas. En la guía de ondas de sección rectangular se estudian dos casos concretos, el del mallado 20x10 y el de 40x20. El paso espacial en el caso 20x10 es de 0.25mm y en el caso 40x20 es de 0.5mm. La condición de estabilidad es la misma en todas las pruebas, y lo único que se varía es el número de iteraciones temporales. Los resultados obtenidos para 20x10 se muestran en la tabla 3.IV.

TABLA 3.IV. Frecuencias de corte de los modos TE en guía rectangular hueca obtenidos con DFDT. Desviación respecto de los resultados analíticos para distinto número de iteraciones temporales ( $N\Delta t$ ). Dimensiones de la guía  $a/b=2$ ,  $a=2\text{cm}$ . Mallado  $20\times 10$ .

	TE10	%	TE20	%	TE11	%	TE21	%
500	-		-		-		-	
1000	7.794618	4.00	14.989650	0.00	17.387994	3.75	21.585096	1.82
2000	7.494825	0.00	14.989650	0.00	16.788408	0.17	21.285303	0.41
4000	7.494825	0.00	14.989650	0.00	16.788408	0.17	21.135407	0.30
6000	7.494825	0.00	14.989650	0.00	16.688477	0.42	21.185372	0.06
8000	7.494825	0.00	14.914702	0.50	16.713460	0.27	21.135407	0.30
10000	7.494825	0.00	14.929691	0.40	16.728449	0.18	21.165386	0.15
12000	7.494825	0.00	14.939684	0.33	16.738443	0.12	21.135407	0.30
30000	7.494825	0.00	14.949678	0.27	16.728449	0.18	21.145400	0.25
40000	7.494825	0.00	14.944681	0.30	16.728449	0.18	21.150396	0.23
50000	7.494825	0.00	14.941683	0.32	16.716458	0.25	21.153394	0.21
60000	7.484832	0.13	14.939685	0.33	16.718456	0.24	21.155393	0.20
70000	7.486259	0.11	14.946822	0.28	16.719884	0.23	21.156820	0.19
80000	7.487330	0.10	14.946822	0.28	16.720955	0.23	21.157891	0.19
100000	7.488829	0.08	14.941683	0.32	16.722454	0.22	21.153394	0.21
1000000	7.488829	0.08	14.943482	0.31	16.721854	0.22	21.154593	0.21
2000000	7.489129	0.08	14.943482	0.31	16.721854	0.22	21.154893	0.21

Una nota importante a tener en cuenta es que el hecho de aumentar el número de pasos temporales aumenta la resolución de la TDF en la determinación de las frecuencias de resonancia numéricas. Estas frecuencias de resonancia numéricas van asociadas a la estructura de campo resonante numérico que se genera en la simulación, por lo tanto una mayor tiempo de simulación no supondrá un mayor acercamiento a las frecuencias reales sino a las numéricas. Este análisis sólo nos permite comprobar a partir de que número de iteraciones temporales ya no se consigue mejorar una determinada frecuencia. Para  $500\Delta t$  no se aprecia ningún máximo significativo en el espectro. La sensibilidad de la TDF para  $10000\Delta t$  es de 0.06 GHz, para  $100000\Delta t$  es de 0.006 GHz, y para  $1000000\Delta t$  es de 0.0006 GHz sin embargo no se llega a mejorar la desviación de un 0.08% en el primer modo, 0.31% del segundo, 0.22% del tercero y 0.21% del cuarto. Para conseguir una mayor precisión con respecto a las frecuencias reales, con lo cual una mayor aproximación a la estructura de campo real, será necesario efectuar un mallado mas denso. Paradojicamente, el error introducido en el cálculo de la TDF para un numero bajo de N corrige la desviación inherente al proceso de simulación ("un clavo saca a otro clavo") y para pocas iteraciones temporales se consiguen mejores resultados.

El comentario a efectuar en este análisis es que el tiempo de CPU que se consume en una simulación mas larga no compensa con mejores resultados. Unas mejores aproximaciones se pueden obtener con un mallado mas denso con las correspondientes iteraciones temporales. Se analiza a continuación el caso del mallado  $40 \times 20$  cuyos resultados se muestran en la tabla 3.V.

TABLA 3.V. Frecuencias de corte de los modos TE en guía rectangular hueca obtenidos con DFDT. Desviación respecto de los resultados analíticos para distinto número de iteraciones temporales ( $N\Delta t$ ). Dimensiones de la guía  $a/b=2$ ,  $a=2\text{cm}$ . Mallado  $40\times 20$ .

	TE10	%	TE20	%	TE11	%	TE21	%
12000	7.494825	0.00	14.989650	0.00	16.788408	0.17	21.185372	0.06
16000	"	0.00	"	0.00	16.713460	0.27	21.135407	0.30
20000	"	0.00	"	0.00	16.728449	0.18	21.165386	0.16
24000	"	0.00	"	0.00	16.738443	0.12	21.185372	0.06
28000	"	0.00	"	0.00	16.745580	0.08	21.199648	0.01
80000	"	0.00	14.974660	0.10	16.743439	0.09	21.180375	0.08
160000	"	0.00	"	0.10	16.750934	0.05	21.187870	0.05

Con el mallado  $40\times 20$ , que es mas fino y tiene mayor resolución, se consiguen mas precisión con los cuatro primeros modos. Al aumentar el tiempo de simulación mejoran los resultados para los de mayor orden (TE11, TE21),y empeora el segundo modo. Según la tabla 3.V las frecuencias de corte tampoco mejoran globalmente con mas iteraciones, esto implica un mayor consumo de tiempo de CPU que no se ve correspondido con mejores resultados.

### 3.4.3. Adaptación del mallado y convergencia. Guía circular .

El problema que aparentemente presenta el algoritmo descrito es el de adaptar el mallado con celdas cuadradas a la geometría impuesta por la sección transversal de la guía. La adaptación cuando el sistema presenta contornos curvos no es perfecta. A continuación con el análisis de una guía circular se va a ver que esto no es una limitación y que en todo caso la

precisión en los resultados pasan por efectuar un mallado mas denso que se adapte mejor a los contornos. Se va a analizar una guía circular con radio de 0.5 cm para los modos Transversales Magnéticos (TM). Se compararan los resultados obtenidos con DFDT con los resultados que se derivan analíticamente [87] y se observará como varían estos al efectuar mallados mas densos.

### Mallado

El mallado efectuado es DIMxDIM, donde DIM es la anchura en celdas del cuadrado donde se inscribe la sección circular. Por exigencias del algoritmo de mallado, DIM debe de ser un número entero multiplo de dos.

Se modela una circunferencia con centro en (DIM/2,DIM/2) y radio (DIM/2). Los bordes conductores superior e inferior en la dirección 'y' vienen definidos por el algoritmo :

$$R2 = (\text{FLOAT}(\text{DIM}/2))^{**2}$$

$$ATI1 = \text{DIM} - 1$$

$$ATI2 = (\text{DIM}/2) - 1$$

$$ATI3 = (\text{DIM}/2)$$

$$ATI4 = (\text{DIM}/2) + 1$$

$$RR = \text{FLOAT}(ATI3)$$

C

```
DO 12 J12=0,ATI1,1
```

$$AUR1 = \text{SQRT}(R2 - (\text{FLOAT}(J12) - RR)^{**2})$$

$$AUR2 = \text{SQRT}(R2 - (\text{FLOAT}(J12+1) - RR)^{**2})$$

$$AUI3 = \text{NINT}((AUR2 + AUR1) / 2.0)$$

```
IF(DIM.EQ.20)THEN
```

```
IF((J12.EQ.0).OR.(J12.EQ.19))THEN
```

```
    AUI3=3
```

```
END IF
```

```
END IF
```

```
TOI1(J12)= ATI3-AUI3
```

```
TOI2(J12)= ATI3+AUI3
```

C

12 CONTINUE

TOI2(J12) y TOI1(J12) son los bordes superior e inferior de la circunferencia correspondientes a la abscisa  $x=J12 \Delta h$ . El algoritmo se corrige para el caso de DIM=20 para obtener un modelado completamente simétrico. El mallado correspondiente a este caso se muestra en la figura 3.9.

### Convergencia

El estudio se lleva a cabo para los modos Transversales Magnéticos (TM). Previamente al análisis de la convergencia se trata el caso DIM=20, para ver como se comporta el algoritmo con un mallado intermedio. Se introduce una excitación gaussiana en el punto (10,15). La sonda detectora se situa en (15,15). La tabla 3.VI muestra las frecuencias de corte obtenidas numéricamente y su desviación respecto de las calculadas analíticamente. Las figuras 3.10.a-d muestran las líneas de Ez constante para estos modos. Los modos TM22 y TM41 se muestran en las figuras 3.10.e,f.

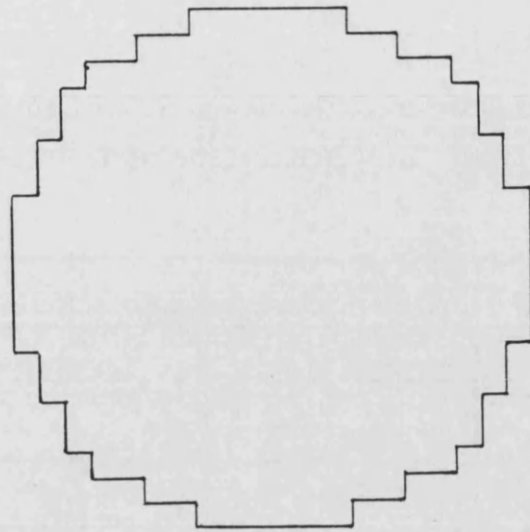


Figura 3.9 Mallado de la guía circular hueca.

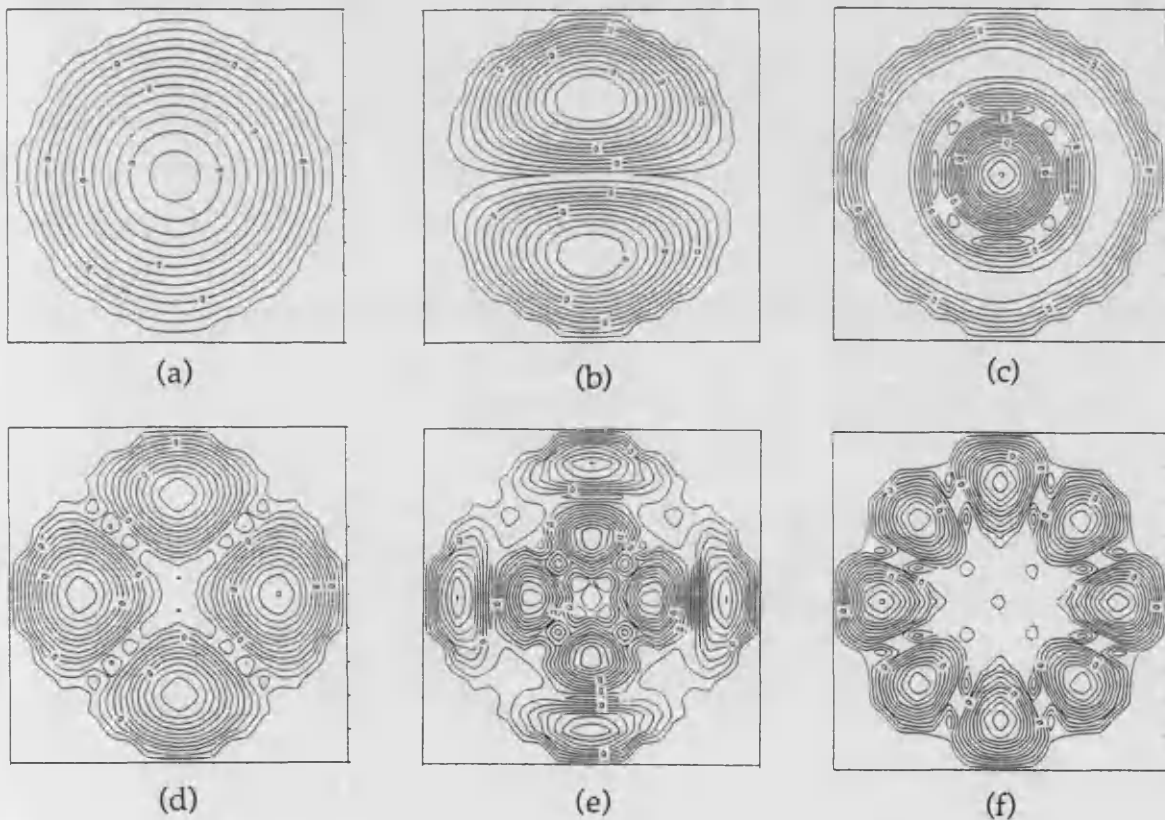


Figura 3.10. Modos TM en la guía circular hueca, radio = 0.5 cm. Líneas de  $E_z$  constante. (a)  $TM_{01}$ ; (b)  $TM_{11}$ ; (c)  $TM_{21}$ ; (d)  $TM_{02}$ ; (e)  $TM_{22}$ ; (f)  $TM_{41}$ .

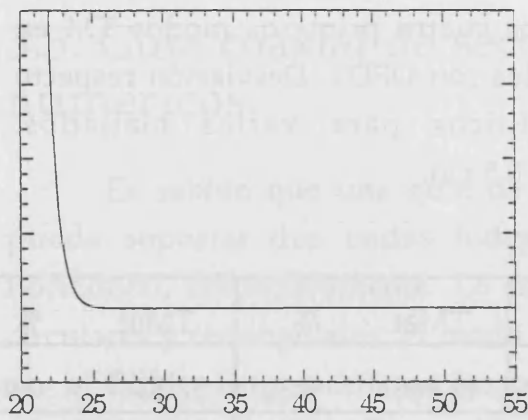


TABLA 3.VI. Frecuencias de corte de los modos TM en guía circular hueca, radio = 0.5 cm. Desviación respecto de los resultados analíticos.

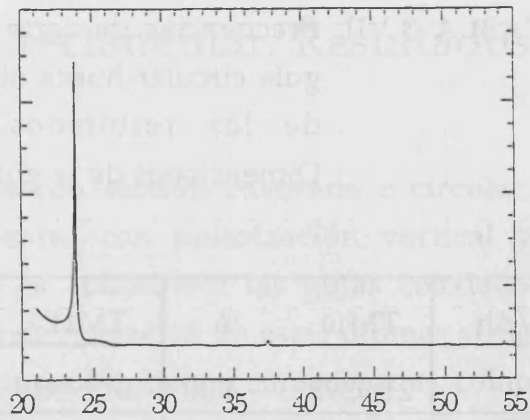
modo	teórica (GHz)	numérica (GHz)	desviación(%)
TM01	22.9486	23.5337	2.50
TM11	36.5651	37.4741	2.50
TM21	49.0078	49.6157	1.20
TM02	52.5837	53.8128	2.30

Los resultados obtenidos son buenos si se tiene en cuenta la sencillez del mallado. Para mejorar resultados habrá que efectuar un mallado mas fino que se adapte mejor a los contornos de la guía circular.

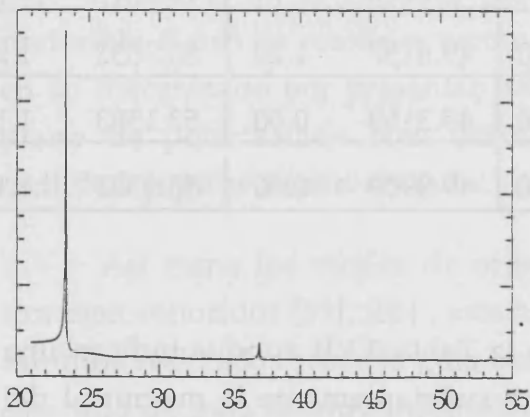
Para estudiar la convergencia con el mallado se ha procedido con varias discretizaciones: 10x10, 20x20, 30x30, 40x40, 50x50 y 60x60. La tabla 3.VII muestra las frecuencias de corte obtenidas numéricamente y su desviación respecto de las calculadas analíticamente aumentando la densidad de celdas y conservando la resolución de la TDF que en todos los casos es de 0.07494825 GHz. La figura 3.11 muestra el espectro obtenido con cada discretización.



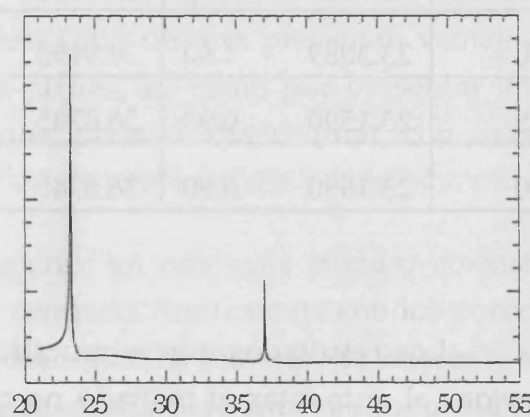
(a)



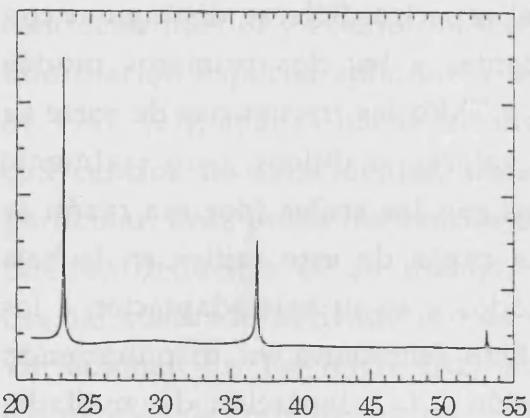
(b)



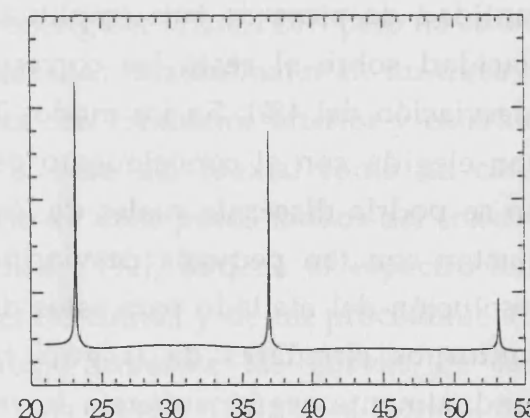
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.11. Espectro para cada discretización,  $r = 0.5$  cm, frecuencia en GHz:

(a)  $r/10$ , (b)  $r/20$ , (c)  $r/30$ , (d)  $r/40$ , (e)  $r/50$ , (f)  $r/60$ .

TABLA 3.VII. Frecuencias de corte de los cuatro primeros modos TM en guía circular hueca obtenidos con DFDT. Desviación respecto de los resultados analíticos para varios mallados. Dimensiones de la guía  $r = 0.5$  cm.

$r/\Delta h$	TM10	%	TM11	%	TM21	%	TM02	%
5	21.9598	4.00	37.9988	4.00	49.1661	0.30	52.5387	0.09
10	23.5337	2.50	37.4741	2.50	49.6157	1.20	53.8128	2.30
15	23.3838	1.90	37.0244	1.30	49.5408	1.10	53.5131	1.80
20	23.3089	1.60	36.9495	1.10	49.6157	1.20	53.3632	1.50
25	23.1590	0.90	36.8745	0.80	49.3159	0.60	53.1383	1.10
30	23.1590	0.90	36.8745	0.80	49.3909	0.80	53.1383	1.10

Los resultados que se muestran en la Tabla 3.VII aunque indican una mejora al aumentar el mallado no reflejan suficientemente la magnitud del efecto. Para ello basta ver la figura 3.11 con los espectros. En el caso de  $r/\Delta h=5$  que es quizás el más llamativo en la tabla, se observa una gran cantidad de picos de baja amplitud en el espectro. Sólo se distinguen con claridad sobre el resto los correspondientes a los dos primeros modos (desviación del 4%). En los modos TM21 y TM02 las frecuencias de corte se han elegido con el conocimiento de los valores analíticos, pero realmente no se podría discernir cuáles de los picos son los reales (por esa razón se ajustan con tan pequeña desviación). La razón de esto radica en la baja resolución del mallado para estos dos modos y en su baja adaptación a los contornos circulares de la guía real. Este fenómeno va disminuyendo gradualmente según aumenta la resolución y la adaptación del mallado, como se ve en la figura 3.11 para los sucesivos mallados 20x20, 30x30-60x60.

### 3.5. Guía coaxial de sección rectangular. Resultados numéricos.

Es sabido que una guía de ondas con sección cuadrada o circular, puede soportar dos ondas independientes con polarización vertical y horizontal, respectivamente. Lo mismo es aplicable a las guías coaxiales circulares y rectangulares. El modo usual de operación de estas últimas suele ser el TEM. Esto sucede en las microcintas blindadas consideradas como coaxiales rectangulares. Pero se dan situaciones en que los modos de tipo TE y TM deben tenerse en cuenta [88]. Las guías coaxiales circulares han sido las más utilizadas en el pasado, pero se observan aplicaciones en que es preferible el uso de coaxiales rectangulares. Estas últimas presentan ventajas en su mecanizado por presentar paredes planas, así como por presentar un plano de polarización bien definido que permita discriminar con más facilidad la polarización cruzada.

Así como los modos de orden superior en una guía circular coaxial son bien conocidos [89], [88], este hecho contrasta fuertemente con los pocos estudios realizados sobre la guía coaxial cuadrada. La bibliografía referente a este tipo de guía es muy incompleta e inadecuada para muchos propósitos. En un trabajo de Bezlyudova de 1963, [90], se describe un método para la determinación de los modos propios más bajos de líneas de transmisión con conductor interior y exterior de sección rectangular ( $TE_{10}, TE_{01}$ ) pero no se da información explícita aplicable a las cuadradas. Brackelmann en un trabajo de 1967, [91], analiza líneas rectangulares con conductor interior y exterior con centros no coincidentes, tratando el caso del coaxial como un caso particular, unas pocas frecuencias de corte de unos pocos modos del coaxial pueden deducirse de su trabajo. Tourneur, [92], obtiene el espectro del coaxial cuadrado haciendo uso de elementos finitos y de un procedimiento variacional de Rayleigh-Ritz, su trabajo muestra las curvas de las frecuencias de corte de los modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{11}$ ,  $TE_{20}$  y  $TM_{11}$  para razones de  $b/a$  desde 0 a 0.3 (dimensiones de conductor interior y exterior respectivamente). Finalmente, Gruner [88], [93], [94], [95] describe de forma independiente una técnica similar a la utilizada por Bezlyudova y Brackelmann pero con una diferente implementación aplicable a líneas coaxiales rectangulares. Gruner obtiene el espectro de una guía coaxial

cuadrada con conductor interior y exterior de dimensiones arbitrarias extrapolando resultados desde  $b/a=0$  hasta  $b/a=1$ .

En este apartado se van a analizar varios casos de guías coaxiales. El análisis se efectuará mediante la técnica con DFDT formulada en 3.4 y validada en 3.5. La ventaja de este tratamiento sobre los de otros autores esta en la sencillez de la técnica. Además no requiere ningún tratamiento especial de las esquinas lo cual es una ventaja sobre cualquier otro esquema numérico que haga uso de diferencias finitas. Los contornos cuadrados de este sistema guiador permitirán un ajuste perfecto del mallado, y esto garantizará buenos resultados incluso con mallados poco densos.

### 3.5.1. Guía coaxial de sección cuadrada.

Primero se efectúa el cálculo del espectro ante una excitación puntual suave para encontrar las frecuencias de corte y así comparar con los resultados de Gruner [88]. Este cálculo se efectúa para el caso cuadrado por lo que aparece una degeneración impuesta por la geometría entre los modos  $TE_{10}$  y  $TE_{01}$ . La notación que se sigue en la numeración de los modos es la dada por Gruner siguiendo el standard de las guías rectangulares con una cresta [93].

El mallado utilizado en este caso es de  $100 \times 100$  elementos cuadrados que definen el borde del conductor exterior. Los elementos son idénticos a los utilizados en los casos anteriores ( $\Delta h = 0.5 \text{ mm}$ ), con la misma condición de estabilidad ( $\Delta t = \Delta h / 2c$ ). La excitación se introduce en (25,2) y la sonda detectora del espectro en (80,95) en todos los casos excepto cuando  $b/a=0.9$ , que se ponen en (30,2) y (70,98) respectivamente. La simulación se efectúa sobre 32000 pasos temporales dando una resolución en frecuencia de 0.037474125 GHz.

La tabla 3.VIII muestra los resultados obtenidos para distintas razones  $b/a$  ( $a =$  anchura conductor exterior,  $b =$  anchura conductor interior). En la misma tabla se muestran los resultados de Gruner.

TABLA 3.VIII. Longitudes de onda de corte normalizadas en coaxial cuadrado para los modos TE<sub>10</sub>/TE<sub>01</sub>, TE<sub>11</sub> para varias relaciones de b/a. Resultados por field matching de Gruner, y desviación de los resultados por DFDT con respecto a los de "field matching".

b/a	$\lambda_c$ TE <sub>10</sub> /a (field matching)	$\lambda_c$ TE <sub>10</sub> /a (FD-TD)	desviacion(%)
0.1	2.044	2.051	0.30
0.3	2.351	2.353	0.09
0.5	2.793	2.807	0.50
0.7	3.268	3.265	0.09
0.9	3.755	3.721	0.90

b/a	$\lambda_c$ TE <sub>11</sub> /a (field matching)	$\lambda_c$ TE <sub>11</sub> /a(FD-TD)	desviacion(%)
0.1	1.415	1.416	0.07
0.3	1.438	1.429	0.60
0.5	1.540	1.538	0.13
0.7	1.706	1.702	0.23
0.9	1.900	1.905	0.30

La tabla 3.IX muestra las longitudes de onda de corte normalizadas para los ocho primeros modos TE en coaxial cuadrado para varias relaciones de b/a, la tabla 3.X es para los cinco primeros modos TM.

TABLA 3.IX. Longitudes de onda de corte normalizadas  $\lambda_c/a$  en coaxial cuadrado para los ocho primeros modos TE en coaxial cuadrado para varias relaciones de  $b/a$ .

b/a	TE10	TE11	TE20	TE21	TE22	TE30	TE31	TE32
0.1	2.051	1.416	1.000	0.899	0.982	0.678	0.630	0.565
0.2	2.162	1.416	1.013	0.914	0.690	0.630	0.571	0.528
0.3	2.353	1.429	1.067	0.925	0.672	0.632	0.618	0.559
0.4	2.540	1.468	1.168	0.941	0.650	0.643	0.557	0.542
0.5	2.807	1.538	1.290	0.970	0.672	0.637	0.618	0.498
0.6	3.019	1.616	1.429	1.026	0.724	0.640	0.595	0.497
0.7	3.265	1.702	1.569	1.096	0.788	0.664	0.588	0.528
0.8	3.478	1.798	1.702	1.168	0.856	0.705	0.604	0.571
0.9	3.721	1.905	1.860	1.250	0.925	0.751	0.632	0.618

TABLA 3.X. Longitudes de onda de corte normalizadas  $\lambda_c/a$  en coaxial cuadrado para los cinco primeros modos TM en coaxial cuadrado para varias relaciones de  $b/a$ .

b/a	TM11	TM12	TM22	TM13	TM32
0.1	0.988	0.851	0.696	0.623	0.542
0.2	0.851	0.780	0.678	0.611	0.535
0.3	0.727	0.693	0.637	0.578	0.519
0.4	0.613	0.597	0.569	0.523	0.488
0.5	0.502	0.495	0.485	0.452	0.434

Las figuras 3.12.a-h muestran para el caso  $b/a = 0.5$ , la geometría de los ocho primeros modos TE (líneas de  $H_z$  constante) y las 3.13.a-h los ocho primeros TM (líneas de  $E_z$  constante). Dado que el primer modo de orden superior aparece degenerado [88], ( $TE_{10}$  con el  $TE_{01}$ ), la figura 3.12.a representa la superposición de los dos modos.

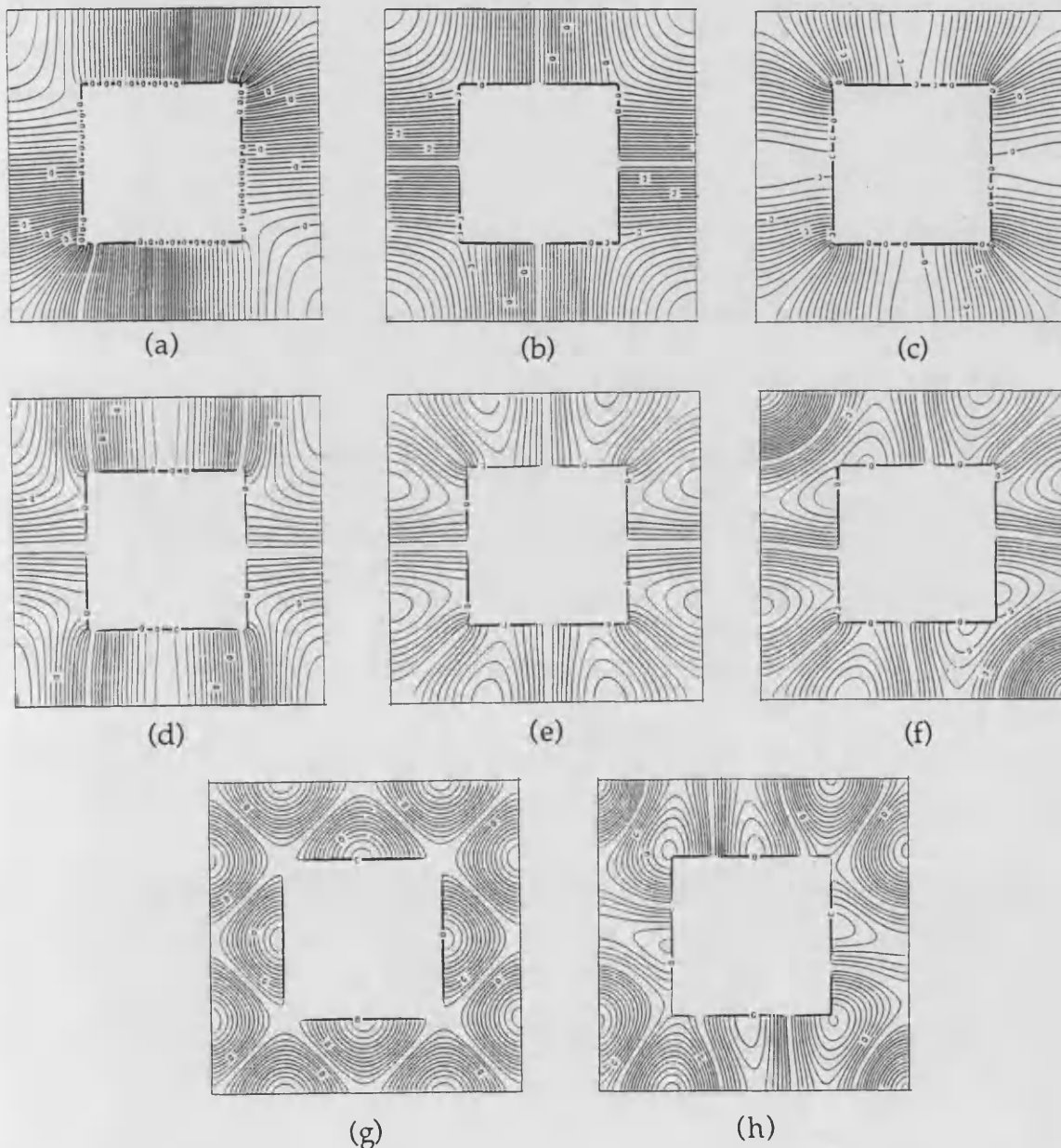


Figura 3.12. Modos TE, líneas de  $H_z$  constante, caso  $b/a = 0.5$ , coaxial cuadrado: (a) $TE_{10}$ ; (b) $TE_{11}$ ; (c) $TE_{20}$ ; (d) $TE_{21}$ ; (e) $TE_{22}$ ; (f) $TE_{30}$ ; (g) $TE_{31}$ ; (h) $TE_{32}$ .



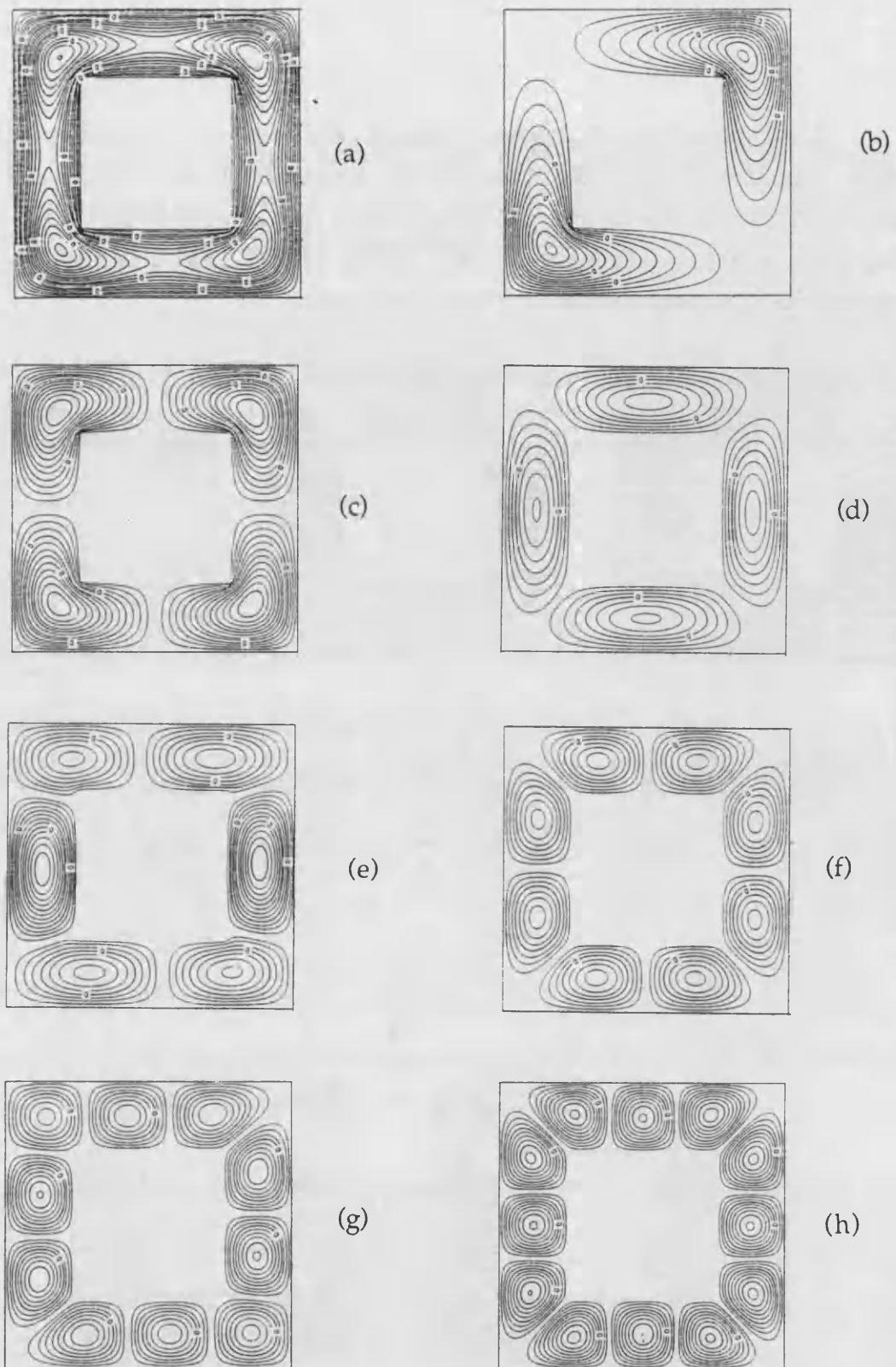


Figura 3.13. Distribución de campo, modos TM, (líneas de Hz constante) caso  $b/a = 0.5$ , coaxial cuadrado: (a)TM<sub>11</sub>; (b)TM<sub>12</sub>; (c)TM<sub>22</sub>; (d)TM<sub>13</sub>; (e)TM<sub>32</sub>; (f) 6º TM; (g) 7º TM; (h) 8º TM.

### 3.5.2. Guía coaxial de sección rectangular.

La geometría de la guía con sección cuadrada es simétrica respecto de cuatro ejes, lo cual hace lógico el hecho de que aparezcan degeneraciones. Una forma de romper la degeneración es analizar un caso en que la sección no es cuadrada. A continuación se efectúa un breve análisis del caso rectangular. En particular el modo TE<sub>10</sub> aparece en solitario. La guía analizada presenta unas relaciones entre dimensiones:

$$a/a' = 2$$

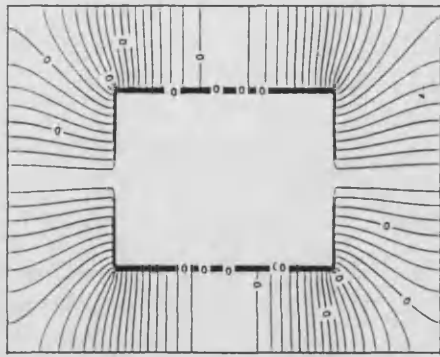
$$b/b' = 2$$

$$b/a = 0.5$$

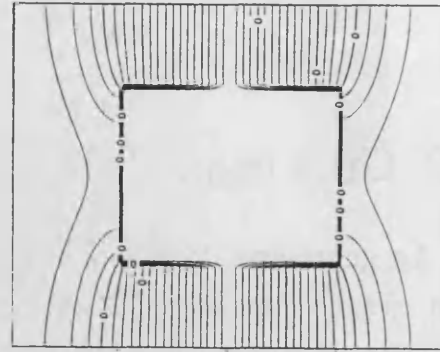
siendo  $a$  y  $a'$  las dimensiones horizontal y vertical del conductor exterior, y  $b$  y  $b'$  las dimensiones horizontal y vertical del conductor interior.

El mallado efectuado es 96x48, que define el borde del conductor exterior. Las dimensiones de las celdas espacial y temporal son las mismas que se han utilizado en el caso cuadrado, con el mismo tiempo de simulación.

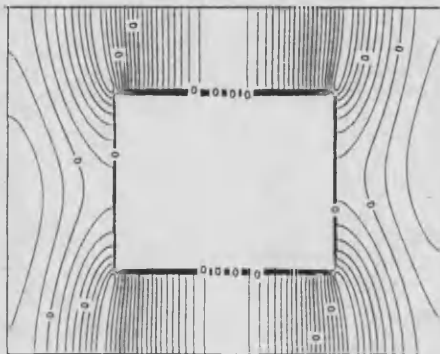
Las figuras 3.14.a-d muestran la distribución de  $H_z$  para los cuatro primeros modos TE con sus correspondientes frecuencias de corte. Las líneas de  $E_z$  constante para los cuatro primeros modos TM con sus frecuencias de corte se muestran en las figuras 3.15.a-d



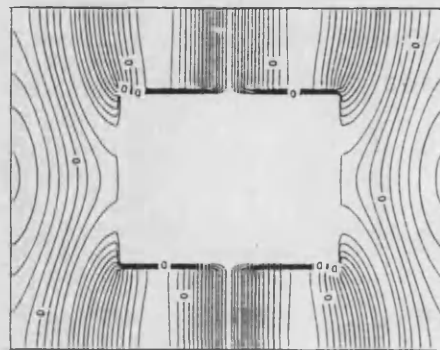
(a)



(b)

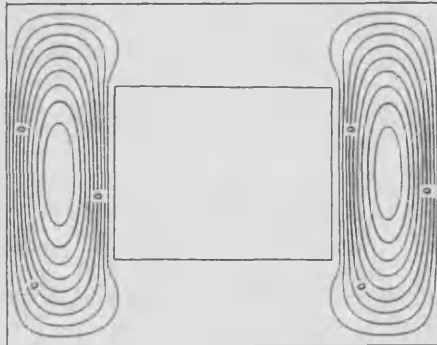


(c)

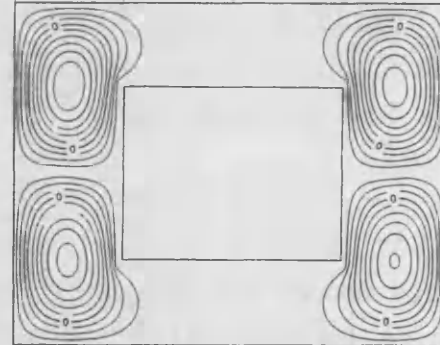


(d)

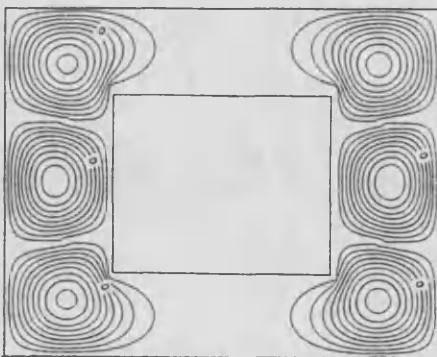
Figura 3.14. Modos TE, líneas de Hz constante, coaxial rectangular: (a)  $a/\lambda c(1) = 0.378$ , (b)  $a/\lambda c(2) = 0.606$ , (c)  $a/\lambda c(3) = 0.918$ , (d)  $a/\lambda c(4) = 1.008$ .



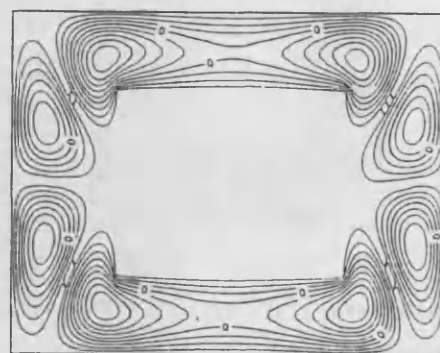
(a)



(b)



(c)



(d)

Figuras 3.15. Modos TM, líneas de Ez constante, coaxial rectangular: (a)  $a/\lambda c(1) = 0.384$ , (b)  $a/\lambda c(2) = 0.594$ , (c)  $a/\lambda c(3) = 0.726$ , (d)  $a/\lambda c(4) = 0.852$ .

### 3.5.3. Análisis de guías con dos conductores rectangulares con centros no coincidentes.

La implementación en el ordenador del algoritmo numérico DFDT es lo suficientemente rápida como para permitir la obtención de resultados de forma iterativa. Esta posibilidad ha sido explotada analizando una guía con dos conductores rectangulares con centros no coincidentes. Se calcula la distribución de campo así como las frecuencias de corte de varios de los primeros modos de tipo TE. Se evalúan estas características en el segundo caso, variando la posición del conductor interior.

#### Dos conductores rectangulares con centros no coincidentes

La guía analizada presenta unas relaciones entre dimensiones:

$$a'/a = 0.5$$

$$b'/b = 0.5$$

$$b/a = 0.25$$

Siendo  $a$  y  $a'$  las dimensiones horizontal y vertical del conductor exterior, y  $b$  y  $b'$  las dimensiones horizontal y vertical del conductor interior. El conductor interior esta situado a una altura  $X$  en el centro del conductor exterior, esto se ve en la figura 3.16.

El mallado efectuado es  $96 \times 48$ , que define el borde del conductor exterior. Las dimensiones de las celdas espacial y temporal son las mismas que se han utilizado en el caso cuadrado, con el mismo tiempo de simulación. Los resultados obtenidos para las frecuencias de corte de los cuatro primeros modos se muestran en la tabla 3.XI.

TABLA 3.XI. Longitudes de onda de corte normalizadas ( $\lambda_c/a$ ) en guía rectangular con un conductor rectangular insertado (figura 3.16), para los cuatro primeros modos TE para varias alturas  $X$ ,  $a'/a=0.5$ ,  $b'/b=0.5$ , y  $b/a=0.25$ .

$X/a$	0.000	0.031	0.063	0.094	0.125	0.156	0.188
$a/\lambda_c(1)$	0.444	0.456	0.456	0.456	0.456	0.456	0.456
$a/\lambda_c(2)$	0.696	0.936	0.900	0.864	0.840	0.828	0.816
$a/\lambda_c(3)$	1.080	1.092	1.044	1.044	1.032	1.032	1.032
$a/\lambda_c(4)$	1.452	1.368	1.320	1.308	1.308	1.308	1.308

Las figuras 3.17.a-d muestran las líneas  $H_z=\text{constante}$ , para los cuatro primeros modos TE siendo  $X/a=0$ . Si  $X/a=0.094$  la distribución de campo es la que muestran las figuras 3.18.a-d.

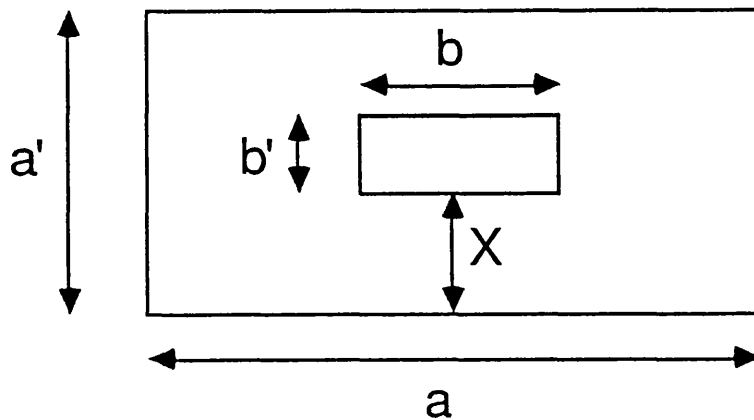


Figura 3.16. Guía hueca con dos conductores rectangulares.

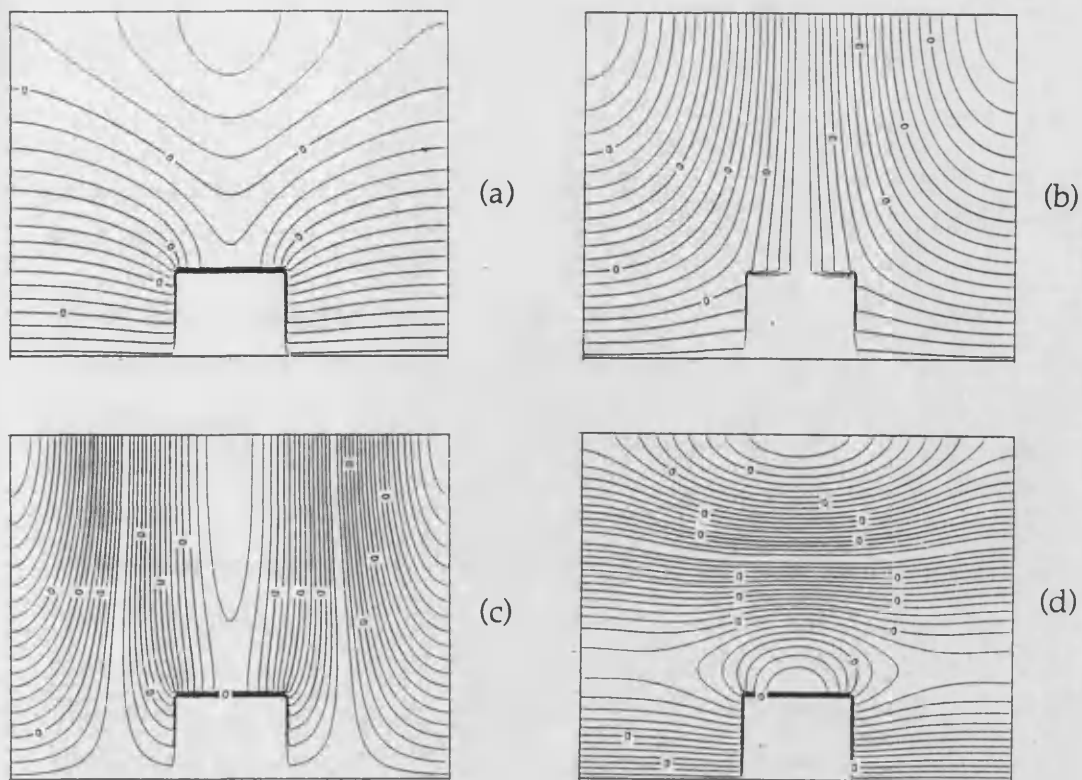


Figura 3.17. Modos TE, líneas de Hz constante,  $X/a=0$ : (a) 1º TE; (b) 2º TE; (c) 3º TE; (d) 4º TE.

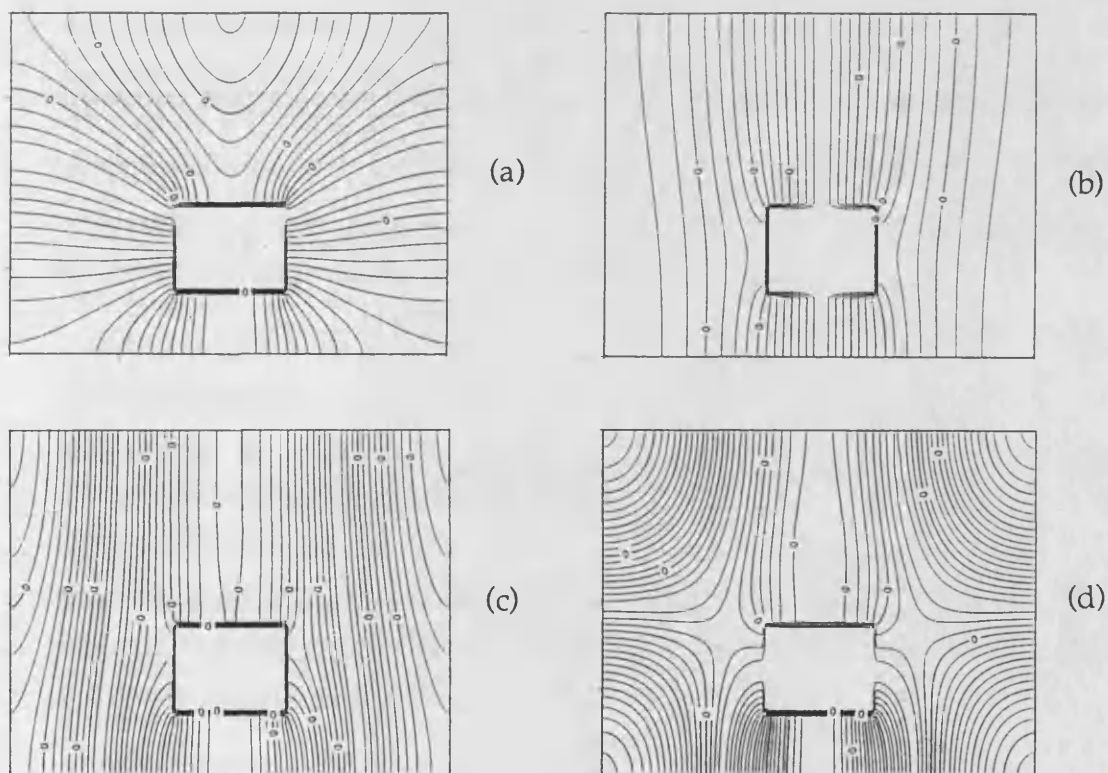


Figura 3.18. Modos TE, líneas de Hz constante,  $X/a=0.094$ : (a) 1º TE; (b) 2º TE; (c) 3º TE; (d) 4º TE.

### 3.6. Conclusiones.

Se ha hecho una extensa revisión de la labor efectuada por otros autores en la aplicación del método DFDT a problemas de valores propios.

Se ha mostrado la técnica a seguir en el análisis por DFDT de los modos TE y TM en una guía homogénea de sección arbitraria.

Se desarrollado un algoritmo capaz de analizar los modos propios de propagación de una guía hueca de sección arbitraria y se ha elaborado una librería de subrutinas para el análisis por DFDT con un alto grado de Optimización. Esto permite vectorizar (dependiendo de la geometría tratada) hasta casi un 100% los procesos de cálculo. Los programas de análisis desarrollados para cada geometría solo han sido ralentizados por el cálculo de la TDF que sumaba para cada paso de simulación. Aunque se puede aumentar la velocidad haciendo uso de la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Se ha demostrado la efectividad en dos casos simples con solución analítica conocida (guía cuadrada y circular).

Se ha estudiado la influencia del tipo de excitación, esta no influye en la determinación de las frecuencias de corte, pero si en la determinación de las líneas de campo.

Se mostrado la flexibilidad del método en la definición de condiciones de contorno. Cuando el mallado se ajusta a la geometría, utilizando mallados poco finos (20x10), los resultados para las frecuencias de corte son muy buenos con errores en su determinación del orden del 0.1% (guía rectangular). Para geometrias curvas los resultados también son buenos, habida cuenta de que en la guía circular las imprecisiones son del orden de un 2% con un mallado  $r/\Delta h=10$ , si se desea una mayor exactitud basta con efectuar un mallado mas denso.

Se ha analizado la convergencia en función de la densidad de mallado en un caso en que independientemente de este, siempre se

consigue un ajuste perfecto con la sección de la guía. En estos casos se ha visto que no tiene demasiada influencia la variación del tamaño de la celda.

Se ha analizado la convergencia según el tiempo de simulación, manteniendo fija la discretización espacial y la condición de estabilidad. Se ha observado que la resolución de la TDF nos da la desviación en la determinación de las frecuencias de corte numéricas, las cuales están afectadas a su vez de errores inherentes al algoritmo DFDT, esto es, la discretización espacio-temporal y errores de redondeo.

Se ha estudiado la convergencia en función de la densidad de mado en un caso en que la finura de este lleva aparejada una mayor adaptación al contorno. Se ha observado una gran mejora que se debe fundamentalmente a una mejor concordancia con los contornos reales de la guía.

Se han analizado casos poco estudiados (guías coaxiales) de los cuales se ha efectuado una extensa revisión bibliográfica. Se ha dado la variación de las frecuencias de corte con la geometría para un gran número de modos de orden superior (no presentes en la literatura), mostrando asimismo la distribución del campo para cada caso.

Se ha mostrado la eficacia del programa analizando una guía rectangular con una inserción metálica. Primero en un caso de sección cuadrada con una posición arbitraria del conductor interior y luego en el caso rectangular cuando el conductor interior está en el centro del lado horizontal. Se han calculado las frecuencias de corte de los cuatro primeros modos para varias alturas del conductor interior, mostrando su estructura en dos casos.

Por último y como conclusión final cabe decir que: El reducido costo en memoria y el poco consumo de tiempo de CPU unido a la flexibilidad del método DFDT y su precisión hacen que en nuestra opinión sea un serio rival al método de Elementos Finitos en el tratamiento de estos problemas. En primer lugar por el tratamiento de las puntas y demás singularidades del campo que mientras que con FE requieren un mado especial, en el caso de DFDT pasan inadvertidas, incluso con mados groseros. En segundo lugar



porque los Elementos Finitos dan soluciones falsas (modos espúeos [84]) que proceden exclusivamente del método numérico empleado, esto no se ha encontrado en ningún momento aplicando DFDT. Por último cabe añadir que resulta mucho mas fácil confeccionar un programa de Diferencias Finitas que uno de Elementos Finitos. Además consideramos que el método DFDT no está lo suficientemente explotado, y con esta nueva aplicación pretendemos mostrar una potencialidad hasta ahora no manifestada por otros autores, y es la de utilizar DFDT para el análisis de los modos TM y TE en guías de onda de sección arbitraria.

# Capítulo 4: Aplicación de DFDT al análisis de discontinuidades en el plano H

## 4.1. Introducción.

A lo largo de los últimos veinte años el análisis de circuitos se extendió a las frecuencias de microondas. Esto se hizo mediante la incorporación de modelos que explicasen el funcionamiento de determinados elementos pasivos del circuito. Algunos de los modelos empleados en el diseño se obtenían de la teoría. Otros eran combinaciones híbridas entre teoría y medidas experimentales. Sin embargo pocos circuitos eran completamente modelizados haciendo uso exclusivo de las ecuaciones de Maxwell. Esto ha hecho que casi toda la tecnología desarrollada en radiofrecuencia haya sido conseguida con aproximaciones estáticas o cuasiestáticas. Por otro lado según el diseño se ha ido complicando, ya no resulta rentable la técnica de fabricar y probar para obtener un prototipo que funcione bien.

Dado el alto coste de diseño y la situación actual en que es necesario obtener con rapidez dispositivos de microondas fiables, se plantea la necesidad de elaborar una técnica de análisis que permita la simulación electromagnética. En este sentido se ha trabajado con la técnica de elementos finitos [85], recorriendo un largo camino no exento de problemas [96], [97]. También se está empezando a utilizar el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (ver antecedentes en el capítulo 1). Indudablemente, para la mayor parte de las estructuras pasivas que se puedan presentar, los métodos espectrales dan programas mas rápidos y eficientes. Obviamente el preprocesado analítico reduce el esfuerzo numérico y simplifica los procedimientos de entrada y salida de datos. De todos modos estos métodos presentan los siguientes inconvenientes:

- a) Como se basan en el principio de superposición, no pueden aplicarse a problemas no-lineales, problemas en que las características electromagnéticas dependen de la amplitud del campo aplicado.
- b) Como operan en el dominio de la frecuencia, no tienen directamente en cuenta la dependencia temporal de las propiedades de la estructura.
- c) Si emplean la Transformada de Fourier espacial, no pueden aplicarse a estructuras complejas con estructura transversal irregular.

En todas estas situaciones es donde muestran su gran potencial los métodos que trabajan en el dominio del tiempo, y se convierten en valiosas herramientas para el análisis de circuitos de microondas. Estos métodos son el método de la Matriz de Línea de Transmisión (TLM) y el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT). Aunque se ha dicho que el método DFDT presenta un mayor ahorro de recursos de ordenador [75], esto no es del todo cierto y depende fundamentalmente del problema analizado [98]. En realidad es más conveniente afirmar que los dos métodos son complementarios, siendo la única diferencia entre ambos la filosofía con la que se abordan los problemas, [99], [46]. En TLM se hace un modelo físico mediante líneas de transmisión y en DFDT se hace un modelo matemático usando diferencias finitas.

De Pourcq en un trabajo de 1985, [43], analiza con DFDT estructuras cerradas de microondas, pero estas son de una sola puerta. Modeliza pérdidas en los dieléctricos y se dedica sólo al cálculo de potencias. Zhang, Fang y Mei, [45], (1988), analizan impedancias características y dispersión en líneas microcinta, y en otro trabajo de 1988, [47], calculan los parámetros de dispersión de varias discontinuidades también en microcinta. Luego hay trabajos más recientes (ver antecedentes en el capítulo 1), también dedicados al análisis de la propagación y uso del algoritmo DFDT en sistemas guías. Pero no se ha encontrado en la bibliografía ningún trabajo que analice discontinuidades en guía de onda en el plano H, con más de dos puertas, aplicando DFDT. Olivier y McNamara aplican su CCA a una guía con un iris, haciendo incluso una corrección de los resultados. Más tarde Bi, Wu y Litva, [55], 1990, estudian un codo truncado en guía rectangular. Estos hacen uso de señales monocromáticas y señalan la dificultad a la hora de

obtener buenos resultados, acusan de ello al elevado factor de calidad de la estructura modelada.

En este capítulo se describe un algoritmo muy eficiente con DFDT para el análisis de discontinuidades en el plano H. Se introducen mejoras con respecto a trabajos anteriores, tanto en el planteamiento bidimensional como en el modo de introducir la excitación y obtener resultados. El uso de señales sintéticas permite un ahorro de recursos, y el uso de la TDF para obtener resultados en el dominio de la frecuencia compensa las oscilaciones del campo transmitido. De ese modo, las resonancias generadas por la modelización del conductor perfecto se ven destruidas por el carácter promediador de la TDF.

Primeramente se formulará el problema. Se indicará la modelización, el tipo de excitación y la forma de introducirla, así como el modo de extraer resultados en el dominio de la frecuencia. Se analizará el comportamiento de las CCA que en estos problemas son indispensables para simular la adaptación. Todo este planteamiento se aplicará luego al estudio de varias discontinuidades de uso bastante común. Por último, la validez del algoritmo así como su eficacia se chequeará comparando los resultados numéricos obtenidos con resultados experimentales y procedentes de la bibliografía.

## 4.2. Formulación.

Las discontinuidades en guía de onda en el plano H, son discontinuidades en las que se rompe la simetría traslacional sin cambiar el plano de propagación del campo eléctrico (que contiene al eje longitudinal). Este plano continua siendo el mismo, solo que cambia la dirección de la guía (eje longitudinal). El modo con el que se trabaja es con frecuencia el modo fundamental. La figura 4.1 muestra una discontinuidad con tres puertas en el plano H, aunque en general pueden tener cualquier número de puertas. Las paredes de la guía son conductores perfectos y el dieléctrico de relleno tiene constantes eléctricas  $\epsilon$ ,  $\mu$ . Las ecuaciones de Maxwell del rotacional gobiernan la evolución del campo en estas estructuras, y puesto que la banda

de operación suele ser la del modo fundamental (TE<sub>10</sub> en una guía rectangular), es suficiente con efectuar un análisis para el caso de que se propague un modo tipo TE en dos dimensiones (ecuaciones (2.5), el criterio en las guías de onda esta cambiado con respecto a la propagación en el espacio libre).

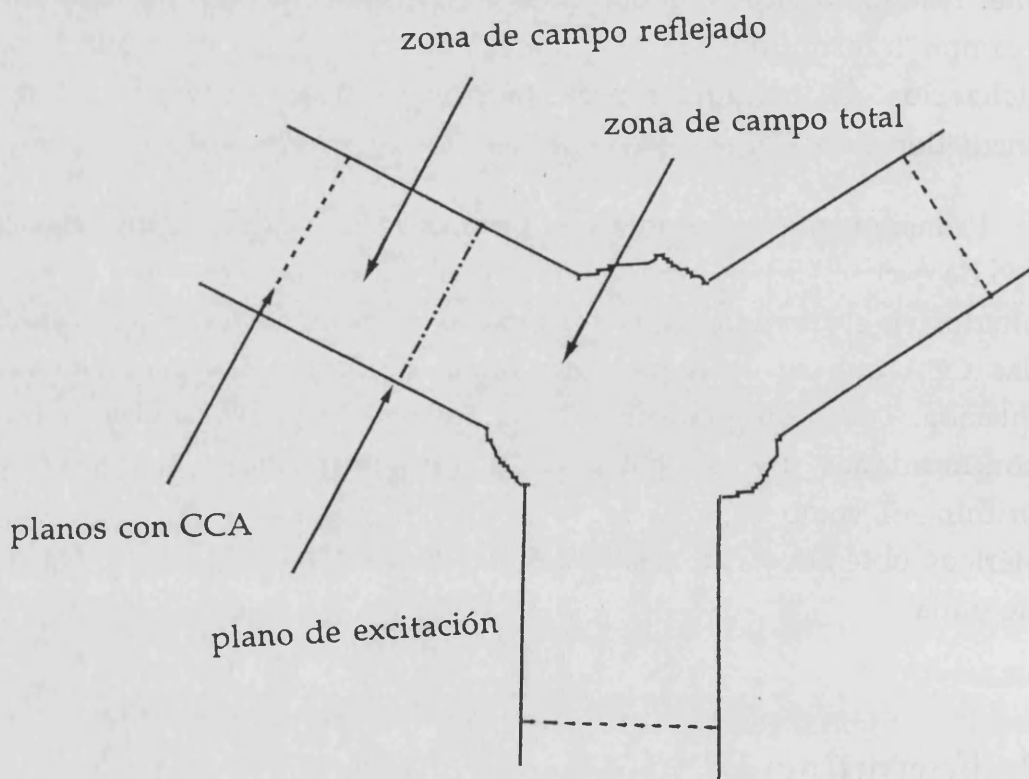


Figura 4.1. Discontinuidad en el plano H.

### 4.2.1. Modelado.

El mallado de la discontinuidad se efectúa utilizando la celda de la figura 2.16, (TM en el espacio libre, TE en guía), y las ecuaciones en diferencias a resolver (DFDT) son las (2.11). Se utilizarán celdas cuadradas de lado  $\Delta h=W/20$ , siendo  $W$  la anchura de la guía. Esta discretización permitirá simular con suficiente resolución la evolución del modo fundamental, (apartado 2.3.7). La relación de estabilidad que relaciona el paso temporal con el espacial (ecuación 2.27.b) se fija:

$$c \Delta t= \Delta h/2 \quad (4.1)$$

Las condiciones de contorno son las propias de una pared conductora: Campo eléctrico tangencial y campo magnético normal nulos.

Para simular la adaptación a la entrada de cada una de las puertas que confluyen a la discontinuidad se hace uso de las Condiciones de Contorno Absorbentes, (CCA) (apartado 2.5). Estas se definen en el mallado a la salida de cada puerta, y durante la simulación DFDT absorben las ondas procedentes del interior del dominio de cálculo, que en este caso es la modelización de la discontinuidad.

### 4.3. Excitación.

Como se ha comentado con anterioridad la banda usual de operación de las guías de onda es la del modo fundamental. Por esa razón, para evitar reflexiones indeseadas y simular el comportamiento real del dispositivo, se introduce la excitación temporal con la estructura transversal espacial del modo TE<sub>10</sub>. Considerando el eje  $x$  como el eje a lo largo del cual se prolonga la guía, esto es:

$$E_z(x,y) = f(t) e_{TE_{10}}(y) \quad (4.2)$$

siendo  $f(t)$  la dependencia temporal, y  $e_{TE_{10}}(y)=\sin(\pi y/W)$ , [16].

La dependencia temporal, como se ha explicado en 2.4 puede ser de dos tipos, armónica (CW en la bibliografía anglosajona) ó mediante el uso de pulsos temporales.

### 4.3.1. Señales monocromáticas.

#### Excitación

Se trabaja en el dominio del tiempo con una sola frecuencia temporal  $f$ , (CW en la bibliografía). Si la excitación se sitúa en  $x=i_0\Delta h$ , el campo  $E_z$  incidente en esta línea es:

$$E_z^{n, inc}(i_0, j) = e_{TE10}(j\Delta h) V_0 \text{sen}(2\pi f n \Delta t) \quad (4.3)$$

para  $j=0,1,\dots,L$ ;  $n=0,1,\dots,N$

siendo  $L\Delta h=W$  la anchura de la guía,  $N\Delta t=T$  el tiempo de simulación, y  $V_0$  la amplitud del campo incidente.

Medio paso espacial hacia atrás, el campo  $H_y$  incidente (ver figura 2.16 con la celda unidad renumerada) es:

$$H_y^{n+1/2, inc}(i_0-1, j) = -Y_{TE10} e_{TE10}(j\Delta h) V_0 \text{sen}(2\pi f(n+1/2)\Delta t + \beta_{TE10}\Delta h/2) \quad (4.4)$$

siendo

$$Y_{TE10} = \beta_{TE10} / (2\pi f \mu) \quad (4.5.a)$$

$$\beta_{TE10} = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1-(f_c/f)^2} \quad (4.5.b)$$

y  $f_c$  la frecuencia de corte del modo fundamental,  $f_c = c / 2W$ , ( $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ ).

De este modo, la introducción de la señal en  $x=i_0\Delta h$  se realiza según la ecuación (2.38.c), con la reenumeración comentada en el apartado 2.6

$$(C = \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta h}),$$

$$E_Z^{n+1}(i_0,j) = E_Z^{n+1}(i_0,j) |_{yee} - C H_Y^{n+1/2}_{inc}(i_0-1,j) \quad (4.6)$$

y para eliminar la señal incidente a la izquierda de  $i_0$ , (zona de campo reflejado) se usa la ecuación (2.41.c),  $(D = \frac{\Delta t}{\mu \Delta h})$ ,

$$H_Y^{n+1/2}(i_0-1,j) = H_Y^{n+1/2}(i_0-1,j) |_{yee} - D E_Z^n_{inc}(i_0,j) \quad (4.7)$$

### Parámetros de dispersión

Los parámetros de dispersión de un dispositivo, se obtienen de la ecuación,

$$[V]^r = [S] [V]^i \quad (4.8)$$

donde  $[V]^r$  y  $[V]^i$  son los vectores de tensión incidente y dispersada, [16]. Cada componente de estos vectores, es la tensión incidente/reflejada en cada puerta, y  $[S]$  es la matriz de dispersión del dispositivo.

Se extraen los parámetros de dispersión a partir de los valores de la amplitud del campo en el estado estacionario. Suponiendo que el campo es proporcional en cada punto a la tensión, para obtener los parámetros  $S_{ij}(f)$ , es necesario conocer la amplitud del campo incidente en la puerta "i" ( $V_i = V_0$ , de la ecuación (4.3)), y la del transmitido a la puerta "j", ( $V_j$ ), para cada frecuencia  $f$ . Para ello se aplica el algoritmo DFDT en el modelado del circuito, aplicando la excitación con la ecuación (4.6) en la puerta i y separándola del campo reflejado con la ecuación (4.7). Se efectúa un muestreo del campo a lo largo de la simulación en la puerta j, y cuando en este se observa una variación sinusoidal, se puede afirmar que se ha alcanzado el estado estacionario. Entonces se determina la amplitud del



campo transmitido  $V_j$ , y el parámetro  $S_{ij}(f)$  se obtiene por simple división de las amplitudes transmitida/incidente:

$$S_{ij}(f) = \frac{V_j(f)}{V_i(f)} \quad (4.9.a)$$

La fase de  $S_{ij}(f)$  se obtiene sabiendo que para el instante de simulación en el que se muestrea el máximo, ( $t_m$ ),

$$S_{ij}(f) V_i(f) \cos(2\pi f t_m + \varphi - \pi/2) = V_j(f) \quad (4.9.b)$$

con lo cual

$$\varphi = \pi/2 - 2\pi f t_m \quad (4.9.c)$$

Un detalle muy importante a tener en cuenta es el punto donde se realiza el muestreo del campo. Tanto para el campo transmitido como para el campo reflejado, el muestreo debe efectuarse en puntos lo suficientemente alejados de la discontinuidad como para asegurarnos de que se ha reestablecido la estructura del modo fundamental, esto es, los planos de referencia. De lo contrario las amplitudes de los campos ahí obtenidas no tienen ninguna relación con las tensiones de la ecuación (4.9).

### 4.3.2. Señales temporales de duración finita.

#### Excitación

Se trabaja en el dominio del tiempo haciendo uso de pulsos temporales y calculando los parámetros de dispersión mediante la aplicación de la Transformada de Fourier del campo dispersado. Una posibilidad es usar una excitación temporal de tipo Gaussiano,

$$f(t) = \begin{cases} A_0 \exp -\left(\frac{t-t_0}{A}\right)^2 & t < 2t_0 \\ 0.0 & t \geq 2t_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

siendo  $t_0$  el centro temporal de la Gaussiana,  $A_0$  su amplitud y  $A$  su anchura. Esta se introduciría en  $i_0\Delta h$ , a la entrada de guía ( $i_0 = 0$ ), de la forma,

$$E_Z^n(i_0,j) = e_{TE_{10}}(j\Delta h) f(n\Delta t) \quad (4.11)$$

para  $j=0,1,\dots,L$ ;  $n=0,1,\dots,N$

Al ser introducida la señal en la entrada de la guía, en el borde del mallado, habrá que aplicar inmediatamente después de su lanzamiento ( $t > 2t_0$ ), en dicho borde, las CCA. Además, en el modelado, deberemos asegurarnos de que la longitud de la puerta de entrada a la discontinuidad es lo suficientemente larga como para que el campo reflejado no llegue a la línea de excitación antes de terminar el pulso. De lo contrario el campo reflejado se encontraría con una pared conductora en la línea de excitación (borde del mallado  $i_0 = 0$ ), y se reflejaría de nuevo hacia la discontinuidad, falseando los resultados. Este tipo de excitación se discutirá de nuevo en el capítulo 5.

### Parámetros de dispersión

Los parámetros de dispersión se calculan haciendo uso de la ecuación (4.9.a), pero en este caso la amplitud y la fase del campo se calcula mediante la aplicación de la Transformada Discreta de Fourier (TDF) durante todo el proceso de simulación, y la división en (4.9.a) es de números complejos. Es obvio que la simulación se debe prolongar el tiempo necesario ( $T=N\Delta t$ ) para que todo el campo introducido por la puerta "i" se disperse por el dispositivo y salga por todas las puertas. No debe quedar campo dentro de la región modelada en el último paso temporal de la simulación, o si lo queda, este debe ser despreciable. La TDF se aplica a los valores muestreados del

campo en puntos suficientemente alejados de la discontinuidad, por las mismas razones que se comentan en 4.3.1 para el caso de señales armónicas.

Suponiendo el punto  $(i_j, j_j)$  de la puerta de salida  $j$ , cumple los requisitos anteriores, la amplitud del campo para cada frecuencia discreta  $f_k$  en este punto se calcularía como sigue:

$$V_j(f_k) = \frac{2}{Ne_{TE_{10}}(j_j \Delta h)} \sum_{n=0}^{N-1} E_z^n(i_j, j_j) \exp(-j2\pi f_k n \Delta t) \quad (4.12)$$

$$f_k = k/N\Delta t \quad V_j(f_k) = \frac{2}{Ne_{TE_{10}}(j_j \Delta h)} \sum_{n=0}^{N-1} E_z^n(i_j, j_j) \exp(-j2\pi f_k n \Delta t) \quad (4.12)$$

La amplitud del campo incidente es conocida, muy aproximadamente (porque no es en realidad una Gaussiana, sino una Gaussiana truncada) es:

$$V_i(f_k) = F(f) = 2A_0 \sqrt{\pi} A \exp(-\pi^2 A^2 f_k^2) \exp(-j2\pi f_k t_0) \quad (4.13)$$

La ventaja que presenta el uso de pulsos es doble, por un lado permiten obtener resultados sobre un amplio rango de frecuencias (mediante el uso de la transformada de Fourier) (TF), y por otro, no es necesaria la separación campo total-campo dispersado y se reducen cálculos; aunque ésta es una ventaja sólo en apariencia, pues se pierde en precisión (ver 2.4). Se lanza el pulso sobre el dispositivo y se espera a calcular la TF sobre el campo reflejado y transmitido.

El uso de pulsos en la excitación presenta el inconveniente de contener un amplio rango de frecuencias temporales, y de éstas un cierto intervalo no se propagan. El rango de frecuencias que no se propagan, va desde cero hasta la frecuencia de corte del modo fundamental y puesto que no se propagan en la guía real, tampoco lo harán en una modelización de esta. El campo incidente no avanza por razones de tipo físico y se queda en la zona de excitación, generando ruido numérico. Otro inconveniente de esta excitación tiene que ver con el sistema guiador. Dado el carácter altamente dispersivo de la guía de ondas, cada una de las frecuencias temporales entre la frecuencia de corte del modo fundamental y el siguiente, dan lugar a una estructura de campo que se propaga con una

velocidad de fase diferente. Según nos acercamos al corte, esta velocidad de fase disminuye hasta anularse en el corte. A la vista de esto nunca podremos esperar a que el campo se vaya del dispositivo a través de las puertas. Siempre quedara campo con una frecuencia próxima al corte pues no hay pérdidas en el modelado. De aquí se deduce que al efectuar la TF del campo en las puertas de salida no lo estamos haciendo sobre una señal temporal finita, sino sobre un conjunto infinito de armónicos cada uno de ellos saliendo del dispositivo con una velocidad. Además si el pulso excede en frecuencia la frecuencia de corte del segundo modo, se estarán propagando otras frecuencias que no son de interés para el análisis. El último problema que se ha visto que presenta el uso de pulsos, es el fenómeno de Gibbs que nos obliga a hacer uso de señales temporales suaves de duración finita .

Todos estos inconvenientes hacen que en las guías de onda sea preferible el uso de señales sinusoidales como excitación, a pesar de lo tedioso que resulta repetir los cálculos para cada una de las frecuencias.

Ante esto, se propone otra forma de obtener resultados en un número finito de frecuencias con un solo proceso de simulación. Consistirá en utilizar una excitación que este constituida por un conjunto finito de armónicos. Estos tendrán frecuencias comprendidas entre la de corte del modo fundamental y la frecuencia del siguiente modo superior. El conocimiento de la estructura de cada uno de los armónicos permitirá definir a ambos lados de la línea de excitación dos zonas perfectamente definidas, una de campo total y otra de campo dispersado (apartado 2.4), con todas las ventajas que ello comporta. Esta es una alternativa mixta entre las señales temporales de duración finita y las señales monocromáticas. Los resultados en el dominio de la frecuencia se obtendrán mediante la aplicación de la TF sobre señales armónicas temporales con duración no-finita, tanto sobre el campo transmitido como sobre el campo reflejado.

### 4.3.3. Señales sintéticas de banda limitada.

#### Excitación

Se trabaja en el dominio del tiempo utilizando como excitación una combinación lineal de armónicos temporales,

$$f(n\Delta t) = \sum_{l=1}^m V_l \text{sen}(2\pi f_l n\Delta t) \quad (4.14)$$

donde  $m$  es el número de frecuencias consideradas, y  $V_l$  es su amplitud.

El campo incidente se introduce del mismo modo que en el caso armónico. Si la excitación se sitúa en  $x=i_0\Delta h$ , el campo  $E_z$  incidente en esta línea es:

$$E_{z \text{ inc}}^n(i_0, j) = e_{\text{TE}_{10}}(j\Delta h) \sum_{l=1}^m V_l \text{sen}(2\pi f_l n\Delta t) \quad (4.15)$$

para  $j=0,1,\dots,L$ ;  $n=0,1,\dots,N$

Medio paso espacial hacia atrás, el campo  $H_y$  incidente (ver figura 2.16 con la celda unidad reenumerada) es:

$$H_y^{n+1/2} \text{ inc}(i_0-1, j) = \quad (4.16)$$

$$-Y_{1, \text{TE}_{10}} e_{\text{TE}_{10}}(j\Delta h) \sum_{l=1}^m V(f_l) \text{sen}(2\pi f_l (n+1/2)\Delta t + \beta_{1, \text{TE}_{10}} \Delta h / 2)$$

siendo,

$$Y_{1,TE10} = \beta_{1,TE10} / (2\pi f \mu) \quad (4.17.a)$$

$$\beta_{1,TE10} = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1-(f_c/f_1)^2} \quad (4.17.b)$$

Del mismo modo que en el caso monocromático, la introducción de la señal en  $x=i_0\Delta h$  se realiza según la ecuación (4.6), y para eliminar la señal incidente a la izquierda de  $i_0$  (zona de campo reflejado) se usa la ecuación (4.7). En ambos casos con las nuevas expresiones de los campos (4.15) y (4.16).

### Parámetros de dispersión

Los parámetros de scattering del dispositivo, se obtienen como en el caso de un pulso. La diferencia esta en que la TDF ahora se aplica sobre una señal temporal no-finita, y solamente para las frecuencias empleadas en la excitación. La TDF se efectúa sobre una señal de banda limitada y debería calcularse sobre un intervalo de tiempo que fuese múltiplo del mínimo común múltiplo de los periodos (correspondientes a cada uno de los armónicos), de esta forma se evita el error de "goteo" en una señal de banda limitada, [85]. Por otro lado la aplicación de la TDF sobre varios periodos asegura un adecuado promediado de la señal, corrigiendo las oscilaciones generadas en una estructura cerrada entre conductores perfectos [55]. Esto es,

$$V_j(f_1) = \frac{2}{Ne_{TE10}(j_j\Delta h)} \sum_{n=0}^{N-1} E_z^n(i_j, j_j) \exp(-j2\pi f_1 n\Delta t) \quad (4.18)$$

siendo  $f_1$  las frecuencias utilizadas en la excitación.

Los parámetros de dispersión se calculan haciendo uso de la ecuación (4.9),

$$S_{ij}(f_1) = \frac{V_j(f_1)}{V_i(f_1)} \quad (4.19)$$

## 4.4. Condiciones de Contorno Absorbentes.

La adaptación en las guías se simula mediante la aplicación de Condiciones de Contorno Absorbentes. Estas se definen en el borde del mallado correspondiente al final de la guía para simular que esta se prolonga hasta el infinito. La elección de las CCA, ante tantas posibilidades, parece complicada, sin embargo teniendo en cuenta la relación prestaciones-economía (memoria y tiempo de cálculo), la decisión se decanta por la condición de Mur de primer orden y las CCA de segundo orden. Además son las usadas por la mayoría de los autores, [75], [27], [43], [51]. Las CCA de primer y segundo orden absorben perfectamente una onda plana que incide normalmente sobre la pared en la que están definidas, pero en la simulación del avance por una guía de ondas no tenemos una onda plana propagándose a lo largo de su eje. La propagación del modo fundamental en una guía de ondas rectangular se puede descomponer como combinación de dos ondas planas viajando cada una con un ángulo. Por esa razón, previamente a la aplicación de las CCA en la simulación de circuitos más complicados, se va a estudiar su comportamiento en el caso sencillo de la simulación de un pedazo de guía.

### 4.4.1. Condiciones de Contorno Absorbentes de Mur de primer orden.

#### Modelado

Se modela un pedazo de guía con un mallado 400X20 de celdas cuadradas con  $\Delta h = W/20$  (figura 2.16), y el paso temporal dado por la ecuación (4.1) (apartado 4.2.1). La adaptación en las dos puertas de la guía se simula con las CCA de Mur de primer orden. Se aplica a las componentes del campo  $E_z$  y  $H_x$ , la ecuación (2.89.a) en  $i=0$ , y la ecuación (2.89.b) en  $i=400$ . Como campo incidente se emplea una excitación sintética (apartado 4.3.3) con nueve frecuencias equiespaciadas en la banda del modo fundamental, de  $K_0 W / \pi = 1.1$  a  $K_0 W / \pi = 1.9$ , siendo  $K_0 = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  y  $\omega = 2\pi f$ , (frecuencias

normalizadas), la amplitud se toma la misma para todas ( $V_j(f_1)=100.0$ ). La excitación se sitúa según la ecuación (4.6) en  $i=200$ , y para eliminar la señal incidente a la izquierda de  $i=200$  (zona de campo reflejado) se usa la ecuación (4.7). En ambos casos con las expresiones de los campos (4.15) y (4.16) para las frecuencias de trabajo comentadas antes.

### Resultados numéricos

Se sigue el Algoritmo DFDT durante 4000 pasos temporales calculando la TDF en los puntos situados en el centro de la guía. La amplitud del campo en estos puntos se representa en función de la posición "i" en las figura 4.2 para  $K_0W/\pi = 1.5$ .

Si las CCA fuesen perfectas, absorberían todo el campo incidente, entonces la amplitud del campo en todos los puntos a la derecha de  $i=200$  sería de 100.0. Por la misma razón la amplitud del campo a la izquierda de la excitación sería cero. Esto se observa en la figura 4.2, las CCA no son perfectas y ahí se pone de manifiesto. Las ondas reflejadas junto con la incidente dan lugar a una estructura de ondas estacionarias a lo largo de la guía.

La reflexión se produce sobre el campo que incide sobre las CCA situadas a la derecha y a la izquierda de la excitación. Pero la zona de la izquierda es la zona de campo reflejado y por lo tanto la magnitud del campo incidente sobre las CCA de la izquierda se puede suponer sensiblemente inferior a su correspondiente de la parte derecha. Con esta suposición se construye la tabla 4.I, que muestra para cada una de las frecuencias anteriores el valor mínimo y máximo del campo entre la excitación y las CCA de la derecha. También se muestra en la tabla 4.I la relación de ondas estacionarias y el coeficiente de reflexión en las CCA para cada una de las frecuencias utilizadas. En la tabla se usa la frecuencia normalizada  $K_0W/\pi$ .



TABLA 4.I. Máximos y mínimos del campo entre la excitación y las CCA de Mur de primer orden. Relación de ondas estacionarias y módulo del coeficiente de reflexión y fase en función de la frecuencia de la onda.

$K_0W/\pi$	mínimo	máximo	ROE	$\rho$	$\theta^\circ$
1.1	63.110	149.592	2.370	0.407	16.647
1.2	69.962	126.018	1.801	0.286	24.000
1.3	75.600	115.754	1.531	0.209	30.000
1.4	80.474	114.470	1.422	0.174	22.086
1.5	84.396	110.913	1.314	0.136	4.022
1.6	89.275	113.559	1.272	0.120	45.236
1.7	88.794	109.027	1.228	0.102	24.828
1.8	91.802	109.655	1.194	0.089	37.457
1.9	91.990	106.620	1.159	0.074	58.477

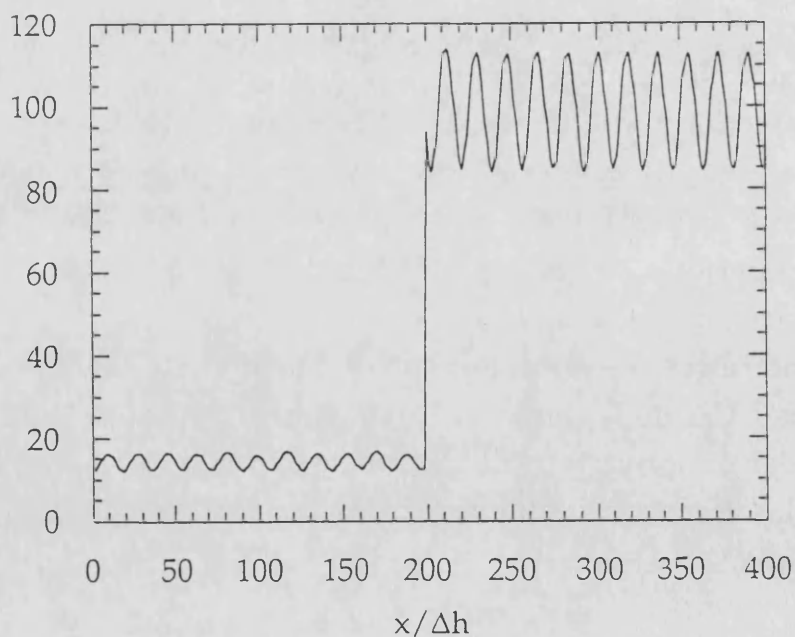


Figura 4.2. Amplitud  $V$  del campo a lo largo de la guía en función de  $i$ . CCA de primer orden, frecuencia  $K_0W/\pi = 1.5$ .

## 4.4.2. Condiciones de Contorno Absorbentes de Mur de segundo orden.

Estas CCA son también llamadas de tipo Padé (2,0), (ver apartado 2.5).

### Modelado

El modelado es idéntico al caso anterior (apartado 4.4.1.), la diferencia está en la adaptación en las dos puertas que en este caso se simula con las CCA de Mur de segundo orden (Padé (2,0)). Se aplica a las componentes del campo  $E_z$  y  $H_x$ , la ecuación (2.85.a) en  $i=0$ , y la ecuación (2.85.b) en  $i=400$ . Como campo incidente se emplea una excitación sintética (apartado 4.3.3) con nueve frecuencias equiespaciadas en la banda del modo fundamental, de  $K_0W/\pi = 1.1$  a  $K_0W/\pi = 1.9$ , siendo  $K_0 = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  y  $\omega = 2\pi f$ , (frecuencias normalizadas), la amplitud se toma la misma para todas ( $V_j(f_1) = 100.0$ ). La excitación se sitúa según la ecuación (4.6) en  $i=200$ , y para eliminar la señal incidente a la izquierda de  $i=200$  (zona de campo reflejado) se usa la ecuación (4.7). En ambos casos con las expresiones de los campos (4.15) y (4.16).

### Resultados numéricos

Se sigue el Algoritmo DFDT durante 4000 pasos temporales calculando la TDF en los puntos situados en el centro de la guía. La amplitud del campo en estos puntos se representa en función de la posición "i" en la figura 4.3 para  $K_0W/\pi = 1.5$ .

Los resultados obtenidos son mejores que con las CCA de primer orden. A pesar de ello se observa todavía una apreciable reflexión para frecuencias muy bajas.

Con la misma suposición que en el apartado anterior 4.4.1 para las CCA de primer orden, suponiendo que el campo que se refleja en las CCA de la derecha es sensiblemente inferior a su correspondiente de la parte derecha, se construye la tabla 4.II. En esta tabla se muestra para cada una de las frecuencias anteriores el valor mínimo y máximo del campo entre la

excitación y las CCA de la derecha, la relación de ondas estacionarias y el coeficiente de reflexión en las CCA.

TABLA 4.II. Máximos y mínimos del campo entre la excitación y las CCA de Mur de segundo orden. Relación de ondas estacionarias y módulo del coeficiente de reflexión y fase en función de la frecuencia de la onda.

$K_0W/\pi$	mínimo	máximo	ROE	$\rho$	$\theta^\circ$
1.1	83.968	117.444	1.399	0.166	16.647
1.2	91.659	107.766	1.176	0.081	24.134
1.3	95.008	104.006	1.095	0.045	30.000
1.4	96.867	102.835	1.062	0.030	26.667
1.5	97.865	101.703	1.039	0.019	4.022
1.6	98.637	101.314	1.027	0.013	45.000
1.7	99.107	100.819	1.017	0.009	20.571
1.8	99.363	100.601	1.012	0.006	46.316
1.9	99.545	100.372	1.008	0.004	58.776

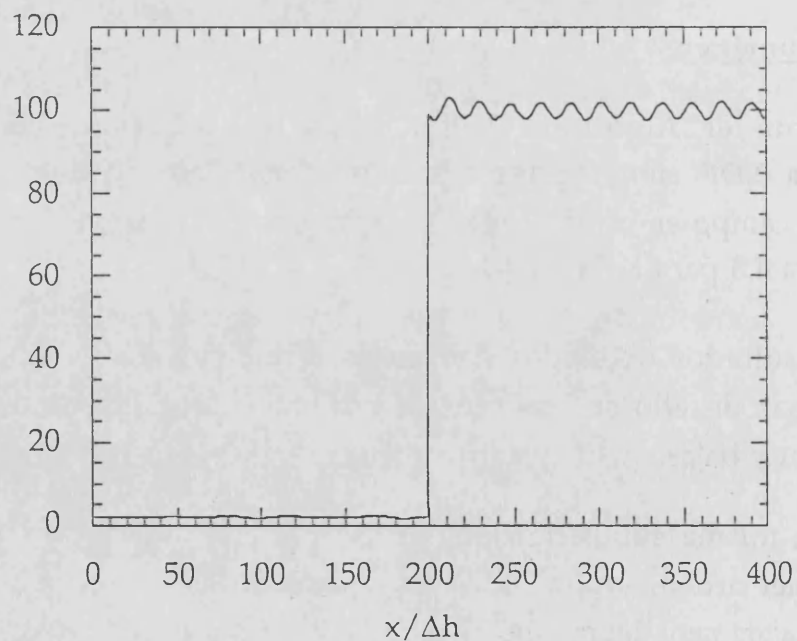


Figura 4.3. Amplitud  $V$  del campo a lo largo de la guía en función de  $x/\Delta h$ . CCA de segundo orden, frecuencia  $K_0W/\pi = 1.5$ .

### 4.4.3. Discusión.

Las CCA son necesarias en la modelización de un circuito, y su introducción debe simular en todo lo posible la realidad física. Esto no es posible, las Condiciones de Contorno Absorbentes no son perfectas y generan una cierta reflexión. Se refleja mucho campo en las de primer orden, en las de segundo orden la reflexión es sensiblemente inferior, y en ambos casos se observa que esta aumenta hacia la parte baja de la banda de operación. En este sentido cabe decir que las de mayor orden se comportan muy bien en la zona alta de la banda de operación TE<sub>10</sub>.

Ante estos resultados la elección obviamente se decanta por las de segundo orden, Padé (2,0). Pero se podrían analizar otro tipo de CCA de segundo orden que posiblemente se comportarían mejor. Otra posibilidad es utilizar los datos obtenidos en la guía como una calibración del campo sin discontinuidad. Esta amplitud se puede utilizar luego para corregir los resultados cuando hay presente una discontinuidad. Pero entonces, como en una discontinuidad arbitraria tendremos al menos dos puertas, los resultados numéricos serán aproximados cuando analizemos un dispositivo con mas de dos.

Otro detalle importante que se observa es la variación de la reflexión con la frecuencia. Esta se puede justificar con la diferente estructura espacial del campo incidente. Para cada frecuencia hay una estructura de campo diferente (dentro del modo fundamental), y esta se puede interpretar como una superposición de dos ondas planas que avanzan con distintos ángulos de incidencia [16]. Para cada frecuencia los ángulos de las dos ondas planas constituyentes también es diferente y eso justifica dicha variación.

Desde el punto de vista circuital, las CCA se comportan como una impedancia. Una forma de corregir su efecto sería determinar su impedancia equivalente, y tenerla en consideración cuando se calculan los parámetros de dispersión de un dispositivo.

Por último cabe añadir la explicación de porque la TDF no se ha calculado sobre un múltiplo del mínimo común múltiplo de los periodos.

Este último da un número de pasos temporales muy elevado, excesivo ( $3.98 \times 10^{15} \Delta t$ ), (por el escaso espaciamiento en frecuencia de la señal). Ante esto se ha optado por tomar un número de pasos de simulación lo suficientemente grande como para contener varios periodos de cada señal monocromática. Además como se efectúa una comparación frecuencia a frecuencia, esto no tiene ninguna influencia en el análisis de la reflexión.

#### 4.4.4. CCA de primer. orden modificadas para señal monocromática en guía de onda.

La propagación del modo fundamental (TE<sub>10</sub>) en una guía de ondas rectangular se puede asimilar a la composición de dos ondas planas que se propagan reflejándose sobre las paredes de la guía con un ángulo  $\gamma$ , (ver figura 4.4), este ángulo  $\gamma$  es [16],

$$\gamma = \begin{cases} \cos^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} & f_c < f < \infty \\ 0^\circ & f = \infty \\ 90^\circ & f = f_c \end{cases} \quad (4.20)$$

siendo  $f$  la frecuencia, y  $f_c$  la frecuencia de corte en la guía.

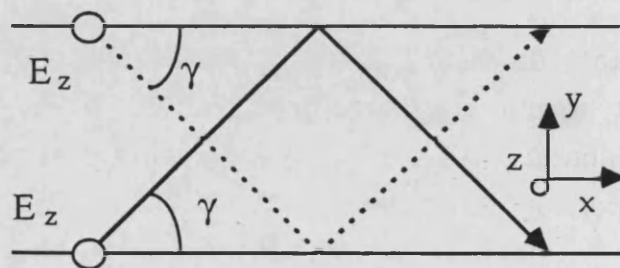


Figura 4.4

Esto indica que dada una frecuencia de trabajo dentro de la banda TE<sub>10</sub> en una guía de ondas rectangular, se conoce el ángulo con que las dos ondas planas incidirían sobre una hipotética pared transversal a la guía. Y esto nos permitirá diseñar unas CCA exactas para cada frecuencia. Nos remitimos al apartado 2.5.1, en particular a la formulación general de Higdon [77], [78], para desarrollar unas CCA para ondas planas con ángulo de incidencia cualquiera.

Para el caso de un sólo ángulo de incidencia  $\gamma$  la ecuación (2.69) queda:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{\cos\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \right) U = 0 \quad (4.21)$$

Siendo  $U$  las componentes del campo en la sección transversal de la guía.

La ecuación (4.21) es una CCA exacta para una señal monocromática en una guía de ondas rectangular. Su implementación numérica da las mismas ecuaciones en diferencias que ya teníamos, (ecuación (2.89.a) para una onda que viaja hacia la izquierda y (2.89.b) para una que va hacia la derecha) con una ligera modificación, la nueva velocidad de fase es  $c/\cos\gamma$ .

- En  $x = 0$ :

$$U^{n+1}(0, j) = U^n(1, j) + \frac{c\Delta t/\cos\gamma - \Delta x}{c\Delta t/\cos\gamma + \Delta x} (U^{n+1}(1, j) - U^n(0, j)) \quad (4.22.a)$$

- En  $x = H$ :

$$U^{n+1}(H, j) = U^n(H-1, j) + \frac{c\Delta t/\cos\gamma - \Delta x}{c\Delta t/\cos\gamma + \Delta x} (U^{n+1}(H-1, j) - U^n(H, j)) \quad (4.22.b)$$

$$U^{n+1}(H, j) = U^n(H-1, j) + \frac{c\Delta t/\cos\gamma - \Delta x}{c\Delta t/\cos\gamma + \Delta x} (U^{n+1}(H-1, j) - U^n(H, j)) \quad (4.22.b)$$

siendo  $\cos\gamma = \sqrt{1 - (f/f_c)^2} = \sqrt{1 - (2Wf)^2}$

## Resultados numéricos

En este caso es necesario efectuar un análisis frecuencia a frecuencia con señales monocromáticas. Se sigue el algoritmo DFDT como en los casos anteriores pero con una sola frecuencia cada vez. Para efectuar un adecuado promedio, se aplica también en este caso la TDF. Esta se efectúa durante 25 periodos de cada señal después de 1000 iteraciones temporales (estacionario). La amplitud del campo en puntos del centro de la guía se representa en función de la posición "i" en la figura 4.5 para  $K_0W/\pi = 1.5$ . Los resultados obtenidos son incluso mejores que con las CCA de segundo orden, estos se muestran en la tabla 4.III. La única desventaja que presenta esta CCA es que sólo sirve para una frecuencia dada, con lo cual hay que efectuar una simulación DFDT monocromática frecuencia a frecuencia.

El coeficiente de reflexión debería de dar lo mismo para todas las frecuencias. La ligera variación que presenta se debe a que la velocidad de propagación de las ondas planas simuladas numéricamente no coincide con la velocidad de la luz (ver apartado 2.3.7), sino que depende del ángulo  $\gamma$ , que es el ángulo que forma con los ejes del mallado. Se podría afinar todavía más calculando la velocidad numérica (ecuación (2.35.a) del apartado 2.3.7), esta se hallaría para cada  $\gamma$  y se sustituiría en las ecuaciones (4.22.a) y (4.22.b).

TABLA 4.III. Máximos y mínimos del campo entre la excitación y las CCA de primer orden modificadas. Relación de ondas estacionarias y módulo del coeficiente de reflexión en función de la frecuencia de la onda.

$K_0W/\pi$	mínimo	máximo	ROE	$\rho$
1.1	99.191	100.387	1.0121	0.0060
1.2	99.595	100.155	1.0056	0.0028
1.3	99.775	100.110	1.0034	0.0017
1.4	99.853	100.086	1.0023	0.0012
1.5	99.854	100.115	1.0026	0.0013
1.6	99.846	100.131	1.0028	0.0014
1.7	99.804	100.164	1.0036	0.0018
1.8	99.787	100.201	1.0042	0.0021
1.9	99.725	100.273	1.0055	0.0027

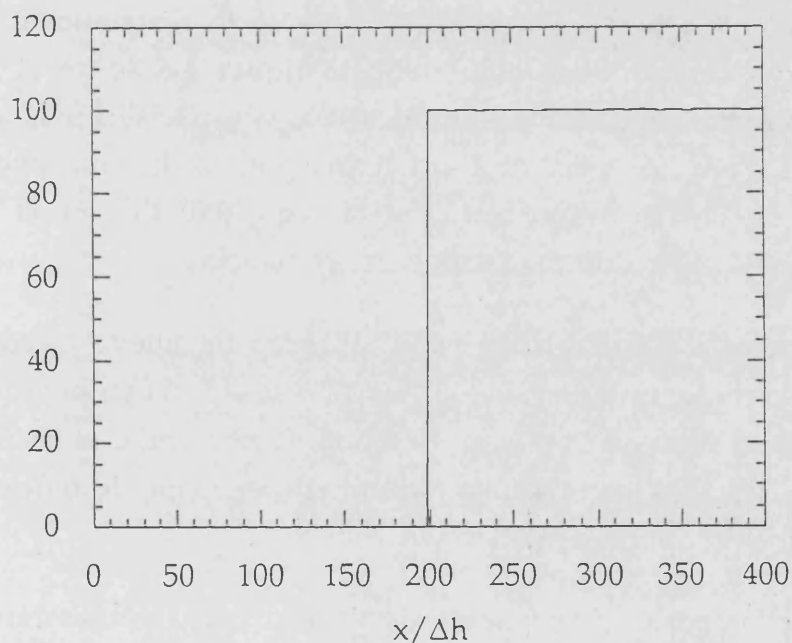


Figura 4.5. Amplitud  $V$  del campo a lo largo de la guía en función de  $x/\Delta h$ . CCA de primer orden modificadas, frecuencia  $K_0W/\pi = 1.5$ .



## 4.5. Análisis de discontinuidades en el plano H. Resultados numéricos.

El método DFDT se aplica a la simulación y análisis de varias discontinuidades en guía de ondas.

### 4.5.1. Codo recto en guía de onda.

Se utiliza un mallado 200x200 donde cada brazo de guía (uno perpendicular al otro) viene dado por un mallado 200x20. Se usan las CCA de Mur de primer orden, con celdas cuadradas de lado  $\Delta h=W/20$  y la relación de estabilidad que relaciona el paso temporal con el espacial viene dada por la ecuación (4.1), (apartado 4.2).

Primero se lleva a cabo una simulación con una señal monocromática. La frecuencia en este caso es la mas baja del rango de interés. La simulación se lleva a cabo sobre 4000 pasos temporales y la excitación se realiza en  $i=5$ . La figura 4.6 muestra la distribución de la componente  $E_z$  del campo para  $4000\Delta t$ . En la figura 4.6 se ve el modo fundamental perfectamente reconstruido pocos pasos espaciales mas allá de la discontinuidad. Esto nos permitirá situar los puntos de muestreo a 10 pasos espaciales de la discontinuidad, con la seguridad de que el modo fundamental se ha reconstruido para todas las frecuencias.

A continuación se utiliza una señal sintética de nueve frecuencias situada cerca de la discontinuidad ( $i=160$ ). La TDF se efectúa en puntos de la mitad de la guía a lo largo de la puerta de salida. Para calcular el coeficiente de transmisión se corrigen estos resultados con el coeficiente de reflexión en las CCA deducido en el apartado 4.4.1.

Los resultados para el coeficiente de transmisión se muestran en la figura 4.7 donde también se muestran los resultados procedentes de la bibliografía, [100], obtenidos con Análisis Modal y Elementos Finitos. En la figura se representa en función de la frecuencia normalizada  $K_0=\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ .

El cálculo de las 6000 iteraciones consume un minuto y diez segundos de tiempo de CPU en un IBM 6000/520, este tiempo se incrementa a treinta minutos en un Apollo 400t.

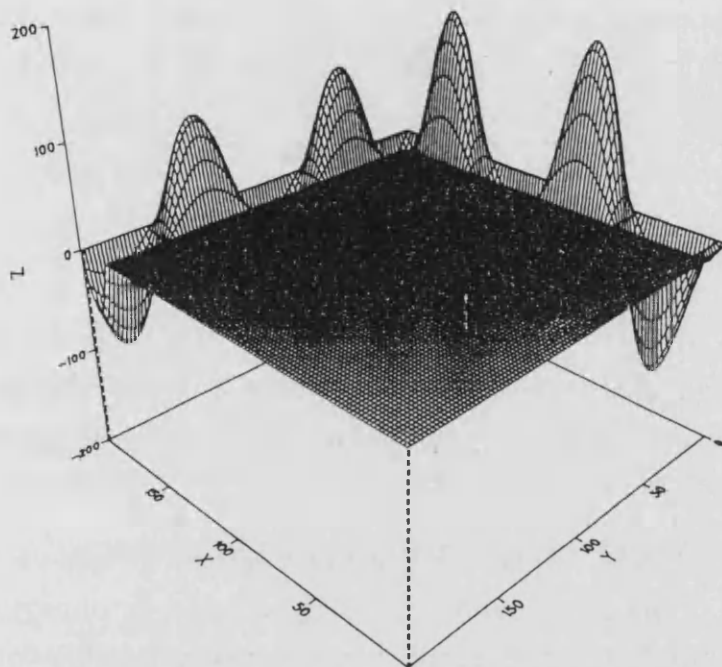


Figura 4.6. Distribución de  $E_z$  en el codo recto para  $4000\Delta t$ ,  $K_0W/\pi = 1.1$ .

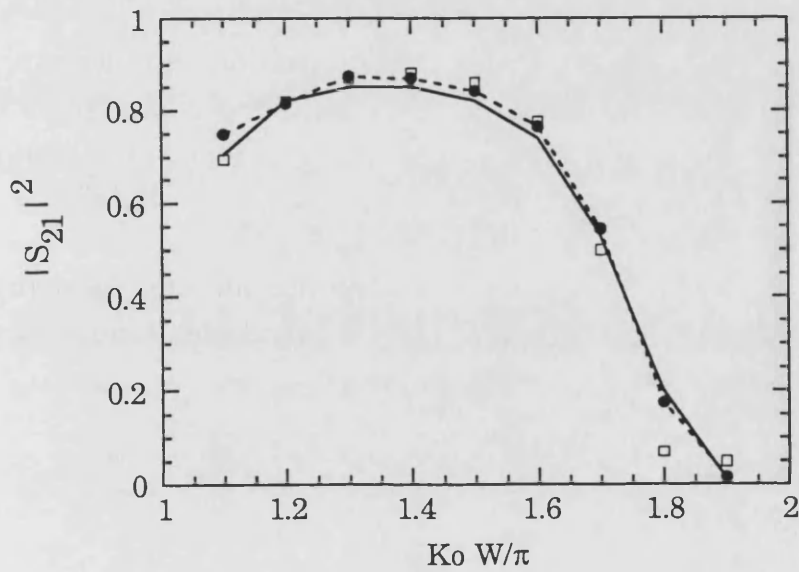


Figura 4.7. Coeficiente de transmisión de potencia del codo recto.

● DFDT; — EF; □ Análisis modal

## 4.5.2. Unión T en el plano H.

Se utiliza un mallado  $400 \times 200$  donde cada brazo (uno perpendicular al otro) viene dado por un mallado  $200 \times 20$ . En este caso por tener el sistema tres puertas y por lo tanto confluir las reflexiones de tres paredes con CCA, se recurre a las CCA de Mur de segundo orden por su mejor comportamiento. Las características del modelado son idénticas a las del caso anterior.

Primero se lleva a cabo una simulación con una señal monocromática. La frecuencia es la mas baja del rango de interés y la simulación se lleva a cabo sobre 4000 pasos temporales. La excitación se realiza en  $i=5$ . La figura 4.8 muestra la distribución de la componente  $E_z$  del campo para  $4000 \Delta t$ .

A continuación se utiliza una señal sintética de nueve frecuencias situada cerca de la discontinuidad. La TDF se efectúa en puntos de la mitad de la guía a lo largo de las puertas de salida. Para calcular los parámetros de dispersión se corrigen estos resultados con el coeficiente de reflexión en las CCA deducido en el apartado 4.4.2.

Los resultados para los parámetros de dispersión se muestran en la figura 4.9 donde también se muestran los resultados procedentes de la bibliografía [100-102], experimentales y obtenidos con Elementos Finitos. La fase se muestra en la figura 4.10.

El cálculo de las 6000 iteraciones consume dos minutos de tiempo de CPU en un IBM 6000/520, este tiempo se reduce a cincuenta segundos en un IBM 3090/150E 1VF.

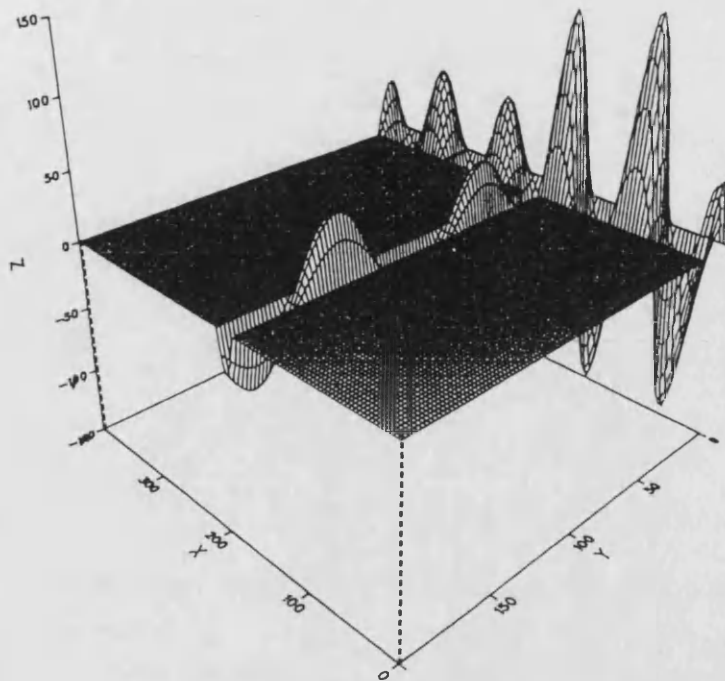


Figura 4.8. Distribución de  $E_z$  en la unión T para  $4000\Delta t$ ,  $K_0W/\pi = 1.1$ .

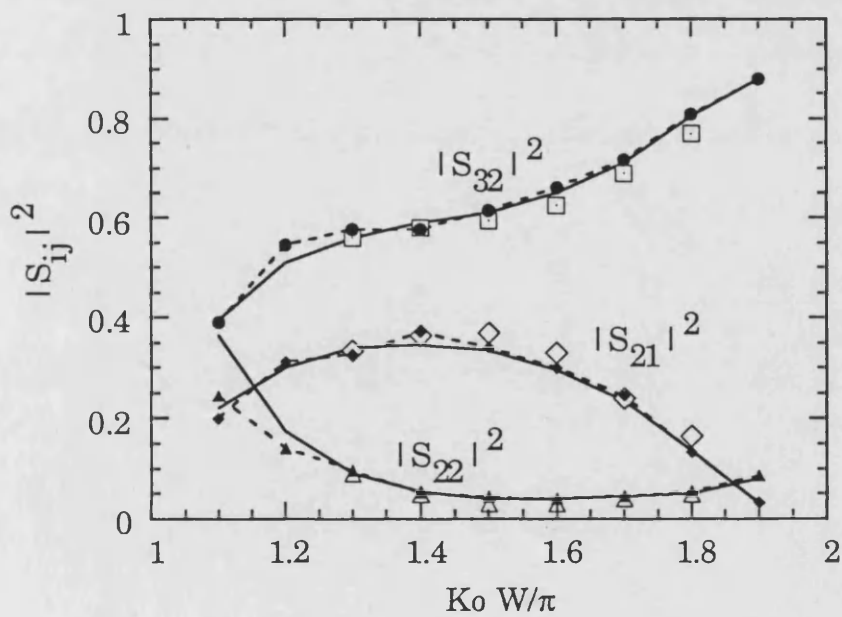


Figura 4.9. Parámetros de reflexión y transmisión de potencia de la union T:

● ◆ ▲ DFDT; — EF; □ ◇ △ Experimental

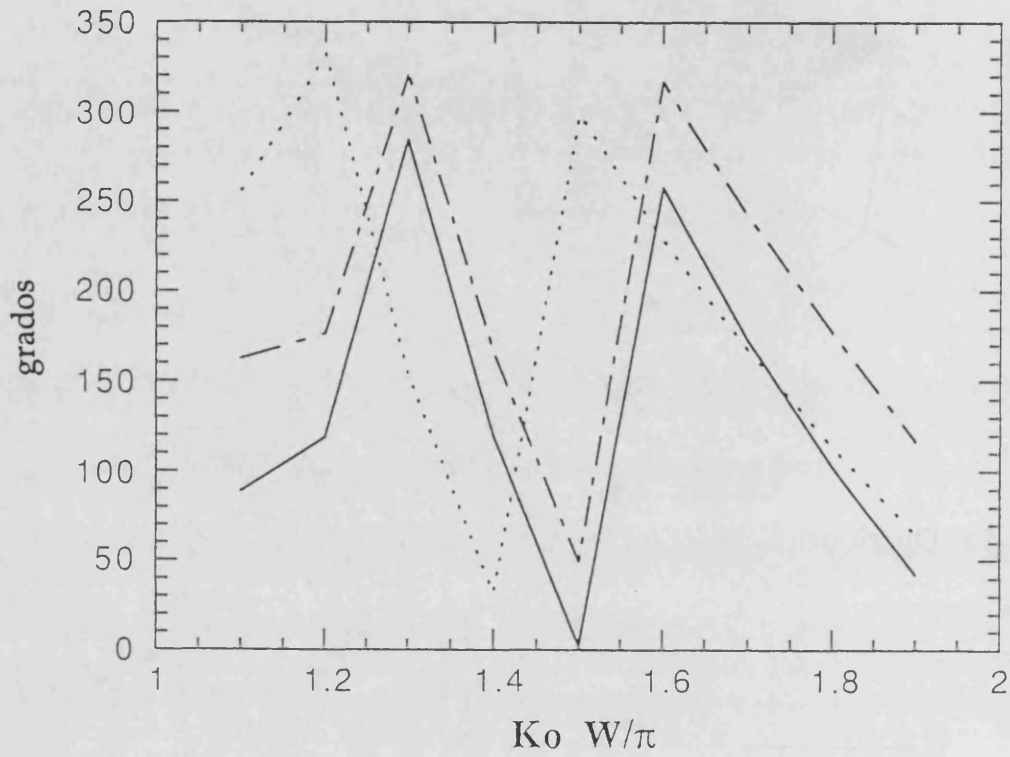


Figura 4.10. Fase de los parámetros de reflexión y transmisión de potencia de la union T.

—  $S_{22}$       ·····  $S_{21}$       - - - -  $S_{23}$

### 4.5.3. Filtro.

Se muestra en la figura 4.11. El dieléctrico de relleno tiene  $\epsilon_r=2.62$ . Se utiliza un mallado  $400 \times 40$ , con  $\Delta h=W/40$ , esto se hace así para dar una mejor resolución espacial a la estructura.

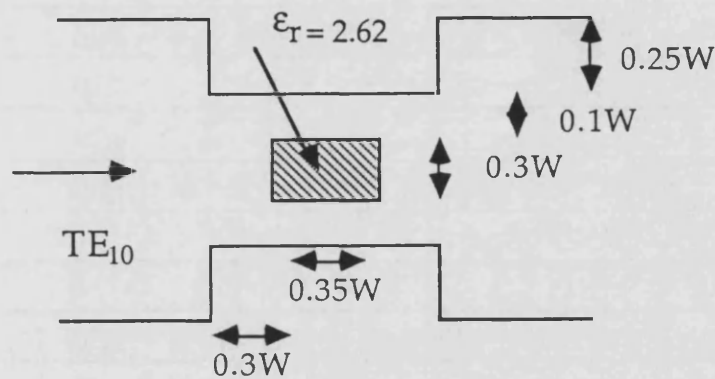


Figura 4.11.

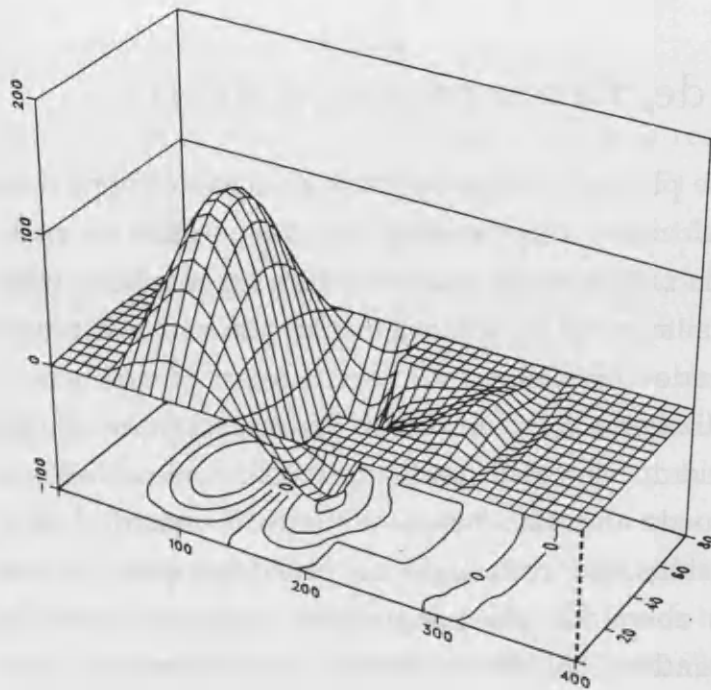
En este caso se hace un análisis frecuencia a frecuencia, usando las CCA de primer orden modificadas del apartado 4.4.4. Con éstas no es necesaria ninguna corrección, con lo cual se calcula el coeficiente de transmisión y reflexión a partir de la amplitud del campo transmitido y reflejado en un solo punto de la puerta de salida y otro de la de entrada. De todos modos para evitar las oscilaciones, se promedia la amplitud sobre varios periodos tras el estado estacionario (del orden de diez periodos), para ello se hace uso de la TDF.

La tabla 4.IV muestra los resultados obtenidos para el coeficiente de transmisión dentro de la banda de operación del modo fundamental, estos son comparados con los obtenidos por Koshiha, [102], usando la técnica de Elementos Finitos.

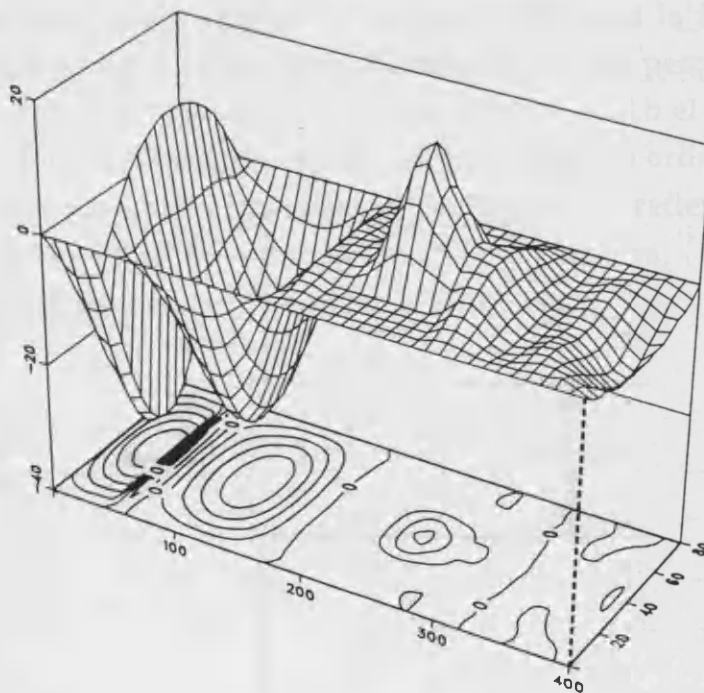
TABLA 4.IV. Potencia transmitida para cada frecuencia a través del filtro dieléctrico de la figura 4.11. Resultados con DFDT comparados con los obtenidos por Koshiba, [102], con Elementos Finitos.

$K_0W/\pi$	$-20 \log  S_{12} $ (DFDT)	$-20 \log  S_{12} $ (EF)	d %	$ S_{11} ^2 +  S_{12} ^2$ (DFDT)
1.1	48.457	-	-	0.887
1.2	40.751	40.0	1.90	0.873
1.3	33.545	33.5	0.13	0.930
1.4	25.548	25.5	0.19	0.953
1.5	11.610	11.5	1.00	0.890
1.547	0.876	0.0	-	0.977
1.553	3.025	3.0	0.80	1.069
1.6	11.903	11.5	3.50	0.966
1.7	16.739	16.0	4.60	1.000
1.8	17.062	16.5	3.40	1.011
1.9	15.447	15.0	3.00	1.017

Cabe añadir la dificultad que se ha encontrado en el cálculo del coeficiente de transmisión para la frecuencia de corte del filtro ( $K_0W/\pi=1.547$ ). La forma de corroborar la coherencia de los resultados por DFDT, ha sido mediante visualización del campo y comprobando la conservación de la potencia ( $\sum S_{ij}^2=1$ ). Esta no se conservaba para dicha frecuencia, calculando el parámetro de transmisión de un modo análogo al resto de las frecuencias. Se pensó que podía deberse a la escasa resolución del mallado y se efectuó un análisis exclusivo para dicha frecuencia con  $\Delta h=W/80$ ; pero los resultados no mejoraban. Después de varios experimentos numéricos, se observó que lo que realmente sucedía era que el estado estacionario tardaba mucho tiempo en alcanzarse. Esto era alrededor de 50 periodos después iniciada la excitación, (la onda tardaba 2 en llegar a la puerta de salida). La figura 4.12.a,b muestra la distribución de la componente del campo  $E_z$  en dos instantes temporales, dando asimismo los contornos de  $E_z$  constante.



(a)



(b)

Figura 4.13. Distribución de  $E_z$  en el filtro,  $K_0W/\pi=1.547$ : (a)  $t=200\Delta t$ ;  
(b)  $t=400\Delta t$ .



#### 4.5.4. Guía de planos paralelos abierta.

La guía de planos paralelos abierta al espacio libre ("flanged parallel-plate waveguide" en la literatura anglosajona) se muestra en la figura 4.13. El problema de la radiación de esta estructura no es nueva, y ha sido tratada usando varios métodos [113]. Esto ha generado cierta discusión entorno a cual de los métodos empleados da resultados mas precisos [114]. En este apartado se analiza esta discontinuidad. Se concluye que el algoritmo DFDT es bastante adecuado para el tratamiento de discontinuidades en el plano H y que incluso puede abordar optimamente problemas de radiación con una aceptable precisión. Por otro lado se confirma que los resultados mas precisos son los obtenidos por Lee y Grun [114] que coinciden con los de Leong, Koi y Chandra [113] por el método de los Momentos.

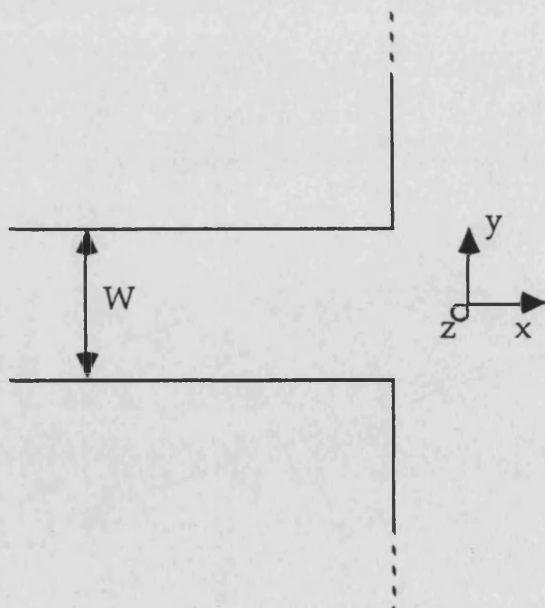


Figura 4.13. Guía de planos paralelos abierta al espacio libre.

Esta estructura en el plano H es idéntica a una guía rectangular que se abre al espacio abierto, y el modo fundamental el TE<sub>1</sub> tiene la misma distribución que el TE<sub>10</sub> en la guía. Ante esta similitud se efectúa el modelado como el de una guía que se abre en el plano H con un mallado 400x220, siendo  $\Delta h=W/20$ . También se efectúa un análisis frecuencia a frecuencia. Se usan las CCA de primer orden modificadas del apartado 4.4.4 para el interior de la guía y las de Mur de segundo orden para el espacio abierto exterior. En las esquinas del mallado del espacio abierto exterior, se usan unas CCA de primer orden. En estas últimas se supone que la onda incide sobre las esquinas siguiendo la diagonal de las celdas, y se asigna en este punto para cada instante el campo que había dos pasos temporales antes en la línea de la diagonal un paso espacial antes [63], estas se detallan en el apéndice 4.A.

Las figuras 4.14.a,b muestran la distribución de campo en la discontinuidad para dos instantes de la simulación para la frecuencia mas baja. En la figura 4.14.a el campo está saliendo de la guía pero todavía no ha llegado a los bordes del mallado exterior, en la figura 4.14.b el campo alcanza los bordes exteriores del mallado con las CCA de segundo orden. La tabla 4.V muestra los resultados obtenidos para el coeficiente de reflexión, estos son comparados con los obtenidos por Leong, Koi y Chandra, [113], usando el método de los Momentos.

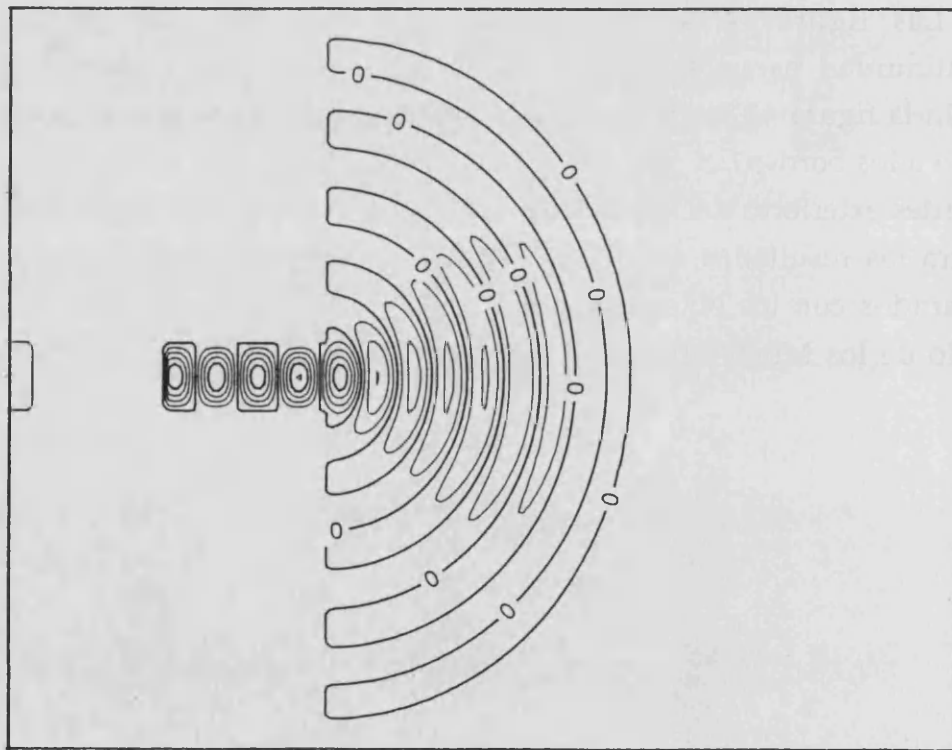
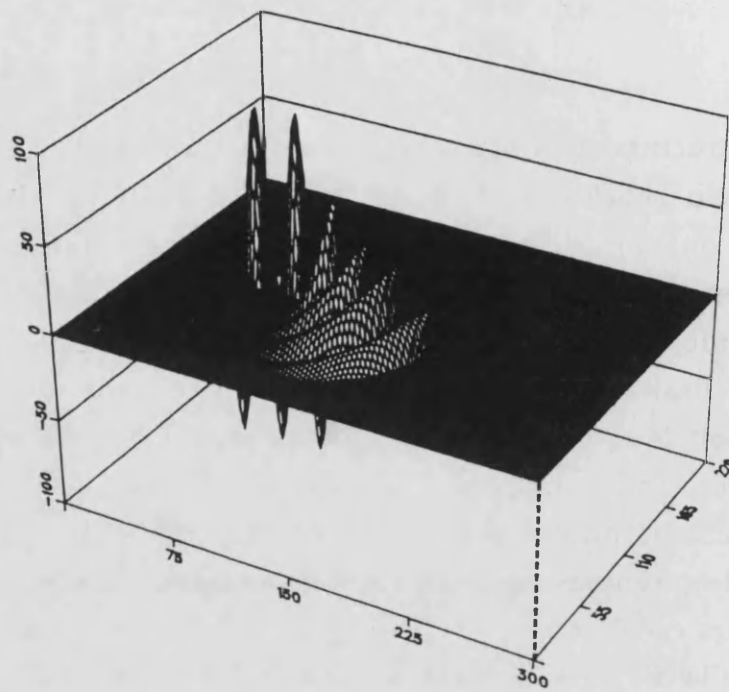


Figura 4.14.a. Distribución de campo  $E_z$  en la guía de planos paralelos abierta, instante  $400\Delta t$ . Vista en perspectiva y líneas de  $E_z$  constante.

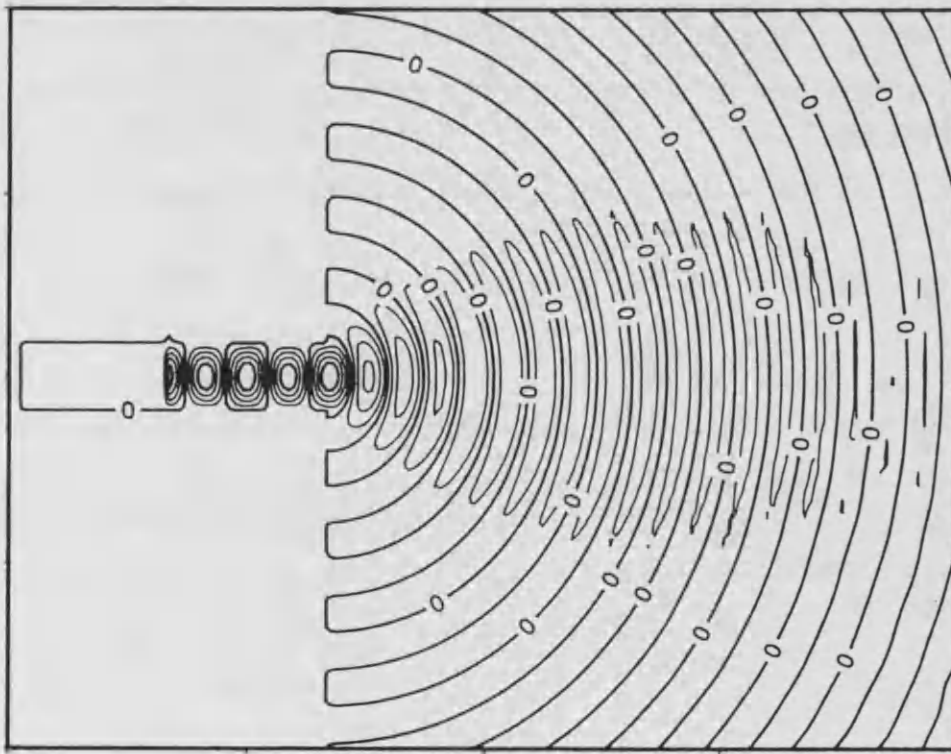
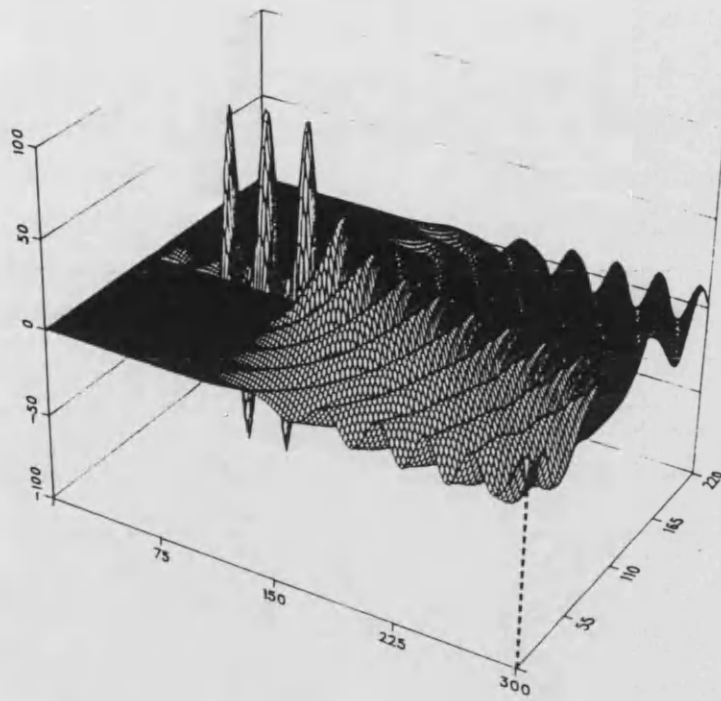


Figura 4.14.b. Distribución de campo  $E_z$  en la guía de planos paralelos abierta, instante  $800\Delta t$ . Vista en perspectiva y líneas de  $E_z$  constante.

TABLA 4.V. Coeficiente de reflexión para cada frecuencia en la guía de planos paralelos abierta al espacio libre (figura 4.13). Resultados con DFDT comparados con los obtenidos por Leong, Koi y Chandra, [113], usando el método de los Momentos.

$K_0W/2\pi$	$\rho$ (DFDT)	$\rho$ (MM)	d %
0.5001	0.152500	0.149700	1.9
0.6201	0.063950	0.064500	0.9
0.7401	0.034400	0.032590	6.0
0.8601	0.019300	0.017780	8.0
0.9801	0.009600	0.010150	5.0
1.1001	0.005847	0.005967	2.0
1.2201	0.003990	0.003587	11.0
1.3401	0.002168	0.002192	1.1

La desviación en los resultados se puede achacar a las CCA utilizadas para limitar el espacio libre. Las CCA utilizadas dentro de la guía funcionan muy bien como se ha visto en el apartado 4.4.4, pero las definidas en el espacio exterior funcionan de modo aproximado y generan reflexión. Esta reflexión es captada en la zona de campo reflejado en el interior de la guía enmascarando la reflexión propia de la discontinuidad. Si la TDF se efectúa antes de que llegue el campo reflejado en las CCA exteriores los resultados arrojan una gran precisión, de lo contrario aparecen desviaciones elevadas. Esto sucede para  $K_0W/2\pi=1.2201$  donde la desviación es del 11%. Para que la reflexión en los bordes exteriores no influya, es necesario un mallado lo suficientemente amplio como para que la onda recorra varias longitudes de onda en la zona de campo lejano sin que la reflexión en los bordes exteriores llegue al interior de la guía.

## 4.6. Conclusiones.

Se ha presentado un algoritmo alternativo y eficiente para el análisis de discontinuidades en el plano H. Esto ha sido posible con el uso de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, el tratamiento bidimensional, y la utilización de señales sintéticas obtenidas como combinación lineal de señales monocromáticas. Las Condiciones de Contorno Absorbentes han sido analizadas con detalle en este tipo de aplicaciones, y se han desarrollado unas nuevas CCA que funcionan perfectamente, pero para una sólo frecuencia. Se observa que con este tratamiento y la separación campo total-campo dispersado, la excitación puede situarse todo lo cerca que se desee de la discontinuidad. La variación de su situación no influye sobre los resultados. Se observa que el uso de señales sintéticas es ventajoso por permitir la obtención de parámetros para varias frecuencias con una sola simulación, pero hay que hacer las puertas de la de la discontinuidad con una longitud de varias longitudes de onda de la frecuencia mas baja para discernir la estructura de ondas estacionarias, a la que luego hay que aplicar la corrección de las CCA. Además hay que hacer la TDF sobre muchos puntos. Por otro lado con la aplicación de las CCA de primer orden modificadas son necesarias varias simulaciones pero la TDF se calcula en un solo punto en cada puerta; las puertas no deben ser necesariamente tan largas, y basta una longitud de onda de la frecuencia mas baja. Por último añadir que estas CCA no precisan de corrección alguna.

El método ha sido chequeado comparando los resultados numéricos para un codo recto, una T en guía de onda, un filtro, y una guía de planos paralelos abierta al espacio libre. Los parámetros obtenidos han sido comparados con resultados experimentales y por Elementos Finitos y Análisis Modal procedentes de la bibliografía, arrojando desviaciones aceptables.

Por otro lado, con los últimos casos abordados, se demuestra que los cálculos son siempre susceptibles de mejora, pero a costa de un mayor consumo de recursos de ordenador, por lo tanto hay que ajustarse a un compromiso recursos-precisión. Cuando se presenta una resonancia hay que

esperar mucho tiempo de simulación al estado estacionario antes de aplicar la TDF. Y cuando se presenta un problema de radiación, hay que procurar que las CCA del espacio exterior se comporten bien, lo cual es difícil dado que el frente de ondas que usualmente incidirá sobre éstas no es plano (apartado 2.5.4); otra solución consistiría en hacer un mallado lo suficientemente grande de la zona exterior para que se pueda calcular el efecto de la discontinuidad antes de que llegue la onda reflejada en las CCA exteriores.

Por último, añadir que para comprobar la veracidad y la coherencia de los cálculos con DFDT, cuando no se disponen de resultados de otra procedencia con los que comparar, hay que recurrir a la visualización de la estructura de campo, y una vez obtenidos los parámetros característicos, comprobar la conservación de la potencia. Este modo de trabajar con DFDT se ha demostrado bastante adecuado.

# Capítulo 5: Extensión de DFDT al análisis de discontinuidades en tres dimensiones

## 5.1. Introducción.

Todo lo comentado en el apartado 4.1 del capítulo anterior se podría repetir en este apartado. Habría que añadir que todos los análisis circuitales encontrados hasta el momento en la bibliografía han sido efectuados mediante un tratamiento tridimensional que es más general. Este tipo de tratamiento es absolutamente necesario cuando no hay ningún tipo de simetría que pueda simplificar el problema y que pudiera permitir un análisis en dos dimensiones. Esta reducción es posible en algunas discontinuidades, como es el caso de las discontinuidades en el plano H (ver capítulo anterior), pero en general es casi siempre necesario un análisis en tres dimensiones.

En este capítulo se va a mostrar la utilidad de la técnica DFDT, ya validada por otros autores [43], [45], [47], [55], [51], [52] así como en el capítulo anterior en el tratamiento de dispositivos pasivos de microondas. En particular se aplicará la técnica DFDT al análisis de discontinuidades en un sistema guiador poco difundido: La línea coaxial rectangular. Se analiza la modelización de este sistema guiador con sus discontinuidades. Las frecuencias de corte de los modos de orden superior al TEM se han calculado en el capítulo 3. Se analiza la atenuación de estos modos en función de la frecuencia para determinar aproximadamente donde se pueden situar los planos de referencia tras una discontinuidad. Para introducir la excitación en el sistema de modo que no se generen reflexiones numéricas, se hace necesario introducir la excitación temporal con el perfil espacial TEM. Con este objetivo se halla la estructura del modo fundamental. Para esto no se aplica DFDT puesto que el problema se reduce a resolver la ecuación de



Laplace numéricamente usando diferencias finitas con un algoritmo de relajación. Se extienden los algoritmos DFDT aplicados con anterioridad al estudio de discontinuidades en el plano H . Las CCA, excitación, y demás algoritmos se aplican en tres dimensiones (3D), pero con una salvedad, ahora se trata de abordar un problema en 3D. La disponibilidad de recursos en este caso no es trivial, y se hace necesaria una optimización exhaustiva de todos los algoritmos. Se estudia la utilización de un mallado variable que permita ahorrar recursos informáticos. Se simula un caso con resultados analíticos conocidos para chequear el programa, y finalmente se aplica la metodología, con toda la información generada en apartados anteriores, al estudio de una unión T en línea coaxial cuadrada.

La línea coaxial cuadrada o coaxial con conductores rectangulares tiene un elevado factor de calidad [103] que está combinado con una alta integrabilidad para el diseño de dispositivos pasivos [103]. Una aplicación típica es la construcción de redes formadoras de haces para comunicaciones con satélites. Comparada con las guías de ondas, la línea coaxial presenta una notable reducción. Esto es debido a que el modo dominante es un modo TEM. Por otro lado en comparación con el coaxial circular usual, el coaxial rectangular es más fácil de mecanizar y de integrar en circuitos. El uso en el pasado de líneas de transmisión de sección rectangular ha estado limitado por la escasez de datos de diseño y por la no existencia de un tratamiento analítico sencillo [104]. Como excepción tendríamos el caso de la línea coaxial cuadrada [105], [106].

L. Gruner [88], [93] estudia los modos TE y TM en este tipo de líneas mediante la técnica de "mode matching" [107]. Es obvio que la banda usual de operaciones la del modo TEM, pero hay situaciones en que el efecto de modos de orden superior debe tenerse en cuenta. Esto es en las cercanías de discontinuidades.

H.J. Riblet [105] resuelve el problema de un condensador constituido por dos conductores rectangulares concéntricos. En su análisis, aplica una transformación de Schwarz-Cristoffel (transformación conforme) [108] para convertir un cuadrante del coaxial (región en forma de L) en el semiplano complejo superior. Con esta transformación le resulta muy fácil obtener la

impedancia de dicha línea de transmisión en función de los parámetros que determinan la sección transversal. La transformación que efectúa Riblet da como un caso particular la situación de conductores cuadrados, ya resuelta por Bowman [106].

R. Terakado [109] resuelve el caso particular del coaxial rectangular en que los conductores interior y exterior tienen una altura y anchura que están en relación 2 a 1. En un trabajo posterior [110], Riblet da una aproximación para calcular la impedancia característica de una coaxial rectangular con más rapidez. En el trabajo da también una acotación superior para el error cometido en la aproximación. Más tarde [111] aplica lo mismo al caso especial resuelto anteriormente por Terakado.

Continuando con las utilidades de las extrañamente poco utilizadas líneas coaxiales rectangulares, cabe decir que pueden ser utilizadas en la construcción de muy satisfactorios acopladores direccionales de 3 a 6 db [104]. Estos a su vez se pueden utilizar de base en el diseño de mezcladores de balanceo a 610 MHz.

Una característica curiosa de la línea de transmisión coaxial rectangular, es la alta variación del campo (modo TEM) en el dieléctrico cerca de las esquinas del conductor interior. En estos puntos la energía almacenada (relacionada con la capacitancia e impedancia característica, apartado 5.3.2) es muy alta e influye mucho sobre la impedancia característica de la línea, que varía mucho para relaciones entre las dimensiones de sus conductores entre 0'2 y 0'4. Esta característica es muy útil en el diseño de adaptadores de impedancia. Si se sitúan tornillos capacitivos a lo largo de la línea en medio de las caras ancha y estrecha, según se undan más o menos estarán en una zona de mucha o poca intensidad de campo con una mayor o menor influencia (figura 5.3) [104].

Cuando es necesario introducir una discontinuidad en una línea de transmisión, las líneas coaxiales rectangulares son más fáciles de utilizar y adaptar a nuestras exigencias. Esto es porque la discontinuidad física se puede situar en una zona de bajo campo, y por lo tanto influir poco en la estructura de ondas estacionarias inherente al circuito donde está inmersa.

La unión T es un elemento básico en la realización de muchos elementos pasivos como por ejemplo acopladores direccionales. Se han efectuado intentos de analizar esta discontinuidad haciendo uso del método de la resonancia transversal [103]. El método de la resonancia transversal permite obtener datos de diseño a partir de las longitudes resonantes de la línea que contienen la discontinuidad [107]. Sorrentino [17] calcula las longitudes resonantes mediante la aplicación de análisis modal [112], [16], al conjunto de cavidades paralelepípedicas que constituyen la cavidad total que encierra la discontinuidad. Sin embargo el procedimiento es tedioso. En este capítulo se aborda el mismo problema con otra técnica, DFDT. El método es sencillo de implementar, rápido en la obtención de datos, y más general, puesto que el análisis en el dominio del tiempo permite resolver situaciones con dieléctricos anisótropos, no lineales y con estructuras arbitrarias que no son fáciles de resolver con métodos espectrales [107], además posee el atractivo adicional de la simulación temporal, de permitir la visualización del fenómeno de propagación en el dispositivo, tal y como sucede en la realidad.

## 5.2. Planteamiento general. Diseño computacional.

Las ecuaciones que resuelven la evolución temporal del campo son las ecuaciones de Maxwell del rotacional en tres dimensiones para las tres componentes del campo (2.1), (2.2). Estas para los casos particulares de un medio lineal, isótropo, homogéneo, y sin pérdidas dan lugar a las ecuaciones (2.3) y (2.4), que discretizadas según el cubo de Yee dan (2.9) y (2.10). Para ahorrar memoria de ordenador se procede a la reenumeración de los nodos que conduce al sistema (2.95), (2.96), tal como se ha visto en el capítulo 2.

El esquema general de cálculo en la simulación con DFDT es el introducido en el apartado 2.3.4, pero es conveniente una sistematización del algoritmo. Esta sistematización deberá permitir un fácil modelado de cualquier estructura tridimensional y ahorrar recursos informáticos. La estructuración del programa deberá ser asimismo transparente, y este aspecto

es importante con vista a posibles ampliaciones futuras. La idea es que el programa conste de un conjunto de subprogramas en principio independientes, que permitan abordar cualquier problema electromagnético en tres dimensiones. Los bloques principales del programa son los de cálculo del campo eléctrico y magnético. En estos dos bloques es donde se consumirá la prácticamente totalidad de recursos de memoria y tiempo de CPU. Otros bloques con menos consumo de recursos, pero no menos importantes son los de las CCA, los de introducción de la excitación, los de extracción de la excitación (para separación campo-total/campo-dispersado) y los de cálculo de la Transformada Discreta de Fourier (TDF).

### 5.2.1. Bloques de cálculo de los campos eléctrico y magnético.

Partiendo de la reenumeración de los nodos (puntos de muestreo del campo) introducida en el apartado 2.6.1, y de la celda unidad de Yee (figura 2.1) se define un paralelepípedo de dimensiones  $L_1\Delta x$ ,  $L_2\Delta y$ ,  $L_3\Delta z$ , siendo  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  las dimensiones de la celda. Este paralelepípedo está constituido por celdas elementales, por lo que el número total de estas empleado será  $L_1 \times L_2 \times L_3$ . Como se advierte de la figura 2.1, las componentes del campo eléctrico están compartidas por cuatro celdas y las del campo magnético por dos. Hay cuatro puntos de la celda donde se muestrea cada componentes del campo eléctrico y dos del campo magnético. Según esto, el número de posiciones de memoria total consumida en la modelización del paralelepípedo será del orden de  $L_1 \times L_2 \times L_3 \times 6$ , y la memoria total consumida será esta cifra multiplicada por cuatro en caso de usar simple precisión, o por ocho en caso de usar doble.

#### Condiciones de contorno en el paralelepípedo y límites de cálculo

Las condiciones de contorno, en el paralelepípedo, se podrán aplicar sobre las componentes tangenciales o sobre las componentes del campo normales a las paredes. Según se apliquen las condiciones de contorno sobre las primeras o sobre las últimas, en cada cara, habrá unos límites en los bucles de cálculo (apartado 2.3.4). En este paralelepípedo, para cada cara,

solamente se considerarán dos posibles condiciones de contorno, que son las más frecuentes, estas son pared eléctrica (campo eléctrico tangencial y magnético normal nulos) y pared magnética (campo eléctrico normal y magnético tangencial nulos). Para diferenciar estas dos posibilidades en cada cara (seis caras), se define un vector con seis componentes, cada una de ellas referida a una de las caras,  $btipo(1:6)$ , ver figura 5.1, en la que se ha considerado la propagación en el eje x. Las posibilidades que se barajan para la cara "i" (figura 5.1) son sólo dos:

- a)  $btipo(i)=0$ . Establece una pared eléctrica en la cara i del paralelepípedo.
- b)  $btipo(i)=1$ . Establece una pared magnética en la cara i del paralelepípedo.

Previamente al cálculo del campo, el vector  $btipo$  habrá fijado que condiciones de contorno deberán aplicarse a cada una de las caras del paralelepípedo. En caso de que las condiciones de contorno en una cara no sean específicamente las de paredes eléctrica y magnética, el vector  $btipo$  habrá dejado sin calcular las componentes del campo en dicha cara, permitiendo establecer en esta cualquier otro tipo de condición.

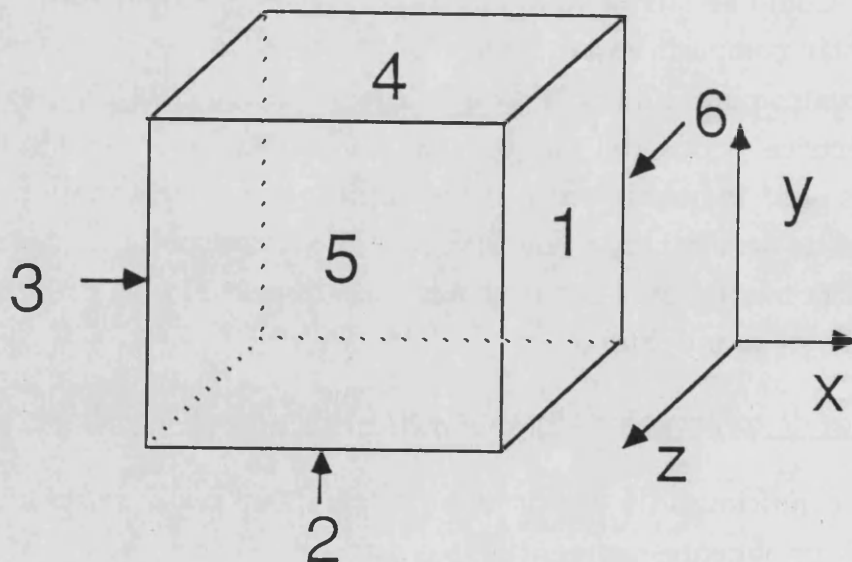


Figura 5.1. Paralelepípedo de cálculo.

### Límites en el cálculo del campo eléctrico

A continuación se indican los índices inferior y superior de los vectores de las componentes del campo eléctrico sobre los que se efectúa el cálculo según las ecuaciones del apartado 2.6.1:

a) Cálculo de la componente  $E_z$ .

si  $b_{\text{tipo}(1)}=1$ , se calcula hasta  $i=L_1$

si  $b_{\text{tipo}(1)}=0$ , se calcula hasta  $i=L_1-1$

si  $b_{\text{tipo}(3)}=1$ , se calcula desde  $i=0$

si  $b_{\text{tipo}(3)}=0$ , se calcula desde  $i=1$

si  $b_{\text{tipo}(2)}=1$ , se calcula desde  $j=0$

si  $b_{\text{tipo}(2)}=0$ , se calcula desde  $j=1$

si  $b_{\text{tipo}(4)}=1$ , se calcula hasta  $j=L_2$

si  $b_{\text{tipo}(4)}=0$ , se calcula hasta  $j=L_2-1$

Independientemente de  $b_{\text{tipo}(5)}$  y  $b_{\text{tipo}(6)}$ , en el eje  $z$  se calcula desde  $k=0$  hasta  $k=L_3-1$

b) Cálculo de la componente  $E_y$ .

si  $b_{\text{tipo}(1)}=1$ , se calcula hasta  $i=L_1$

si  $b_{\text{tipo}(1)}=0$ , se calcula hasta  $i=L_1-1$

si  $b_{\text{tipo}(3)}=1$ , se calcula desde  $i=0$

si  $b_{\text{tipo}(3)}=0$ , se calcula desde  $i=1$

Independientemente de  $b_{\text{tipo}(2)}$  y  $b_{\text{tipo}(4)}$ , en el eje  $y$  se calcula desde  $j=0$  hasta  $j=L_2-1$

si  $b_{\text{tipo}(6)}=1$ , se calcula desde  $k=0$

si  $b_{\text{tipo}(6)}=0$ , se calcula desde  $k=1$

si  $b_{\text{tipo}(5)}=1$ , se calcula hasta  $k=L3$

si  $b_{\text{tipo}(5)}=0$ , se calcula hasta  $k=L3-1$

c) Cálculo de la componente Ex.

Independientemente de  $b_{\text{tipo}(1)}$  y  $b_{\text{tipo}(3)}$ , en el eje x se calcula desde  $i=0$  hasta  $i=L1-1$

si  $b_{\text{tipo}(4)}=1$ , se calcula hasta  $j=L2$

si  $b_{\text{tipo}(4)}=0$ , se calcula hasta  $j=L2-1$

si  $b_{\text{tipo}(2)}=1$ , se calcula desde  $j=0$

si  $b_{\text{tipo}(2)}=0$ , se calcula desde  $j=1$

si  $b_{\text{tipo}(6)}=1$ , se calcula desde  $k=0$

si  $b_{\text{tipo}(6)}=0$ , se calcula desde  $k=1$

si  $b_{\text{tipo}(5)}=1$ , se calcula hasta  $k=L3$

si  $b_{\text{tipo}(5)}=0$ , se calcula hasta  $k=L3-1$

### Límites en el cálculo del campo magnético

A continuación se indican los índices inferior y superior de los vectores de las componentes del campo magnético sobre los que se efectúa el cálculo según las ecuaciones del apartado 2.6.1:

a) Cálculo de la componente Hz.

Independientemente de  $b_{\text{tipo}(1)}$  y  $b_{\text{tipo}(3)}$ , en el eje x se calcula desde  $i=0$  hasta  $i=L1-1$

Independientemente de  $b_{\text{tipo}(2)}$  y  $b_{\text{tipo}(4)}$ , en el eje y se calcula desde  $j=0$  hasta  $j=L2-1$

si  $b_{\text{tipo}}(5)=1$ , se calcula hasta  $k=L3$

si  $b_{\text{tipo}}(5)=0$ , se calcula hasta  $k=L3-1$

si  $b_{\text{tipo}}(6)=1$ , se calcula desde  $k=0$

si  $b_{\text{tipo}}(6)=0$ , se calcula desde  $k=1$

b) Cálculo de la componente  $H_y$ .

Independientemente de  $b_{\text{tipo}}(1)$  y  $b_{\text{tipo}}(3)$ , en el eje  $x$  se calcula desde  $i=0$  hasta  $i=L1-1$

si  $b_{\text{tipo}}(4)=1$ , se calcula hasta  $j=L2$

si  $b_{\text{tipo}}(4)=0$ , se calcula hasta  $j=L2-1$

si  $b_{\text{tipo}}(2)=1$ , se calcula desde  $j=0$

si  $b_{\text{tipo}}(2)=0$ , se calcula desde  $j=1$

Independientemente de  $b_{\text{tipo}}(5)$  y  $b_{\text{tipo}}(6)$ , en el eje  $z$  se calcula desde  $k=0$  hasta  $k=L3-1$

c) Cálculo de la componente  $H_x$ .

si  $b_{\text{tipo}}(1)=1$ , se calcula hasta  $i=L1$

si  $b_{\text{tipo}}(1)=0$ , se calcula hasta  $i=L1-1$

si  $b_{\text{tipo}}(3)=1$ , se calcula desde  $i=0$

si  $b_{\text{tipo}}(3)=0$ , se calcula desde  $i=1$

Independientemente de  $b_{\text{tipo}}(2)$  y  $b_{\text{tipo}}(4)$ , en el eje  $y$  se calcula desde  $j=0$  hasta  $j=L2-1$

Independientemente de  $b_{\text{tipo}}(5)$  y  $b_{\text{tipo}}(6)$ , en el eje  $z$  se calcula desde  $k=0$  hasta  $k=L3-1$ .



### Conexión entre bloques

Definidos los bloques de cálculo de los campos eléctrico y magnético, la modelización de cualquier zona donde se pretenda estudiar la propagación del campo consistirá en "trocearla" en paralelepípedos. Cada uno de ellos constituirá un bloque con unas condiciones de contorno en el que se calcularán los campos eléctrico y magnético alternativamente. La continuidad del campo entre dos bloques contiguos con una pared común se establecerá de forma natural definiendo esta pared como eléctrica para el bloque izquierdo y como magnética para el derecho (siendo el índice superior de uno igual al inferior del otro en la pared común, por supuesto). De este modo se evitan duplicidades a la hora de calcular las componentes del campo comunes a los dos bloques, que generarían inestabilidades.

### Problemas computacionales. Seccionamiento de matrices

La modelización de la región en la que se estudia la propagación del campo se puede llevar a cabo desde dos planteamientos diferentes, pero siempre según el esquema del apartado anterior. Se puede considerar toda la región problema con una sola matriz para cada una de las componentes del campo. Dentro de esta matriz, se modelizaría la discontinuidad mediante pequeños paralelepípedos, que computacionalmente estarían incluidos dentro del enorme paralelepípedo que definiría la matriz global. En este caso la división en pequeños bloques facilitaría el establecimiento de las condiciones de contorno que modelarían la discontinuidad. Por otro lado, también sería factible definir pequeñas matrices locales que definiesen cada bloque y que estuviesen conectados entre sí. En este último caso la conexión debería efectuarse mediante el solapamiento de una celda de ambos bloques. El modo de asignar las componentes del campo para dicho solapamiento se explicará con más detalle más adelante.

La elección de un tipo de modelización u otro dependerá de los recursos disponibles. Obviamente mediante el uso de matrices locales se ahorra memoria, puesto que sólo se declaran posiciones de memoria que luego se van a utilizar. Con una matriz global quedarían posiciones de memoria declaradas sin utilizar, esto sucedería en las posiciones correspondientes al interior de un conductor perfecto o que nunca son

accesibles al cálculo por ser exteriores a la discontinuidad que se modela. La ventaja que sin embargo presenta el uso de una matriz global está en un menor número de cálculos y en consecuencia una mayor rapidez en la simulación. Además como los cálculos que se efectúan con las matrices son enteramente vectorizables, cuanto mayor es la matriz mayor es el rendimiento que se obtiene del procesador vectorial.

Estas dos posibilidades no son tan radicales y por lo tanto no generan una fácil elección. Esta dependerá del ordenador que se disponga y del problema que se presente. Si la región problema es completamente englobable en un paralelepípedo salvo pequeños recovecos, la solución computacionalmente más rentable es sin duda la de una matriz global, salvo que sea muy grande y no quepa en la memoria central del ordenador, entonces es necesario el seccionamiento.

### 5.3. Análisis de la guía coaxial rectangular.

En este apartado se utiliza DFDT así como el método tradicional de Diferencias Finitas (DF-método de relajación) para efectuar un análisis exhaustivo de la línea coaxial rectangular. Primeramente se muestran las frecuencias de corte para los modos TE y TM, deducidas con anterioridad en el capítulo 3. Luego se resuelve la estructura del modo fundamental TEM, obteniendo asimismo la impedancia característica. Previo al análisis con DFDT, se analiza el comportamiento de las CCA para efectuar las correcciones pertinentes en caso de presentar estas un funcionamiento errático. Se analizan diferentes tipos de excitación. Es obvio que si la incidencia se efectúa con frecuencias dentro de la banda de operación TEM y la estructura espacial del campo es TEM, la reflexión numérica en la zona de excitación será mínima. Sin embargo tras una discontinuidad no se sabe con seguridad donde los modos con componente axial son despreciables. Por esa razón se investiga la atenuación de las componentes axiales del campo cuando se excitan por debajo del corte (de los modos TE y TM). Esto facilitará luego la tarea de situar los planos de referencia [16], planos en los que sólo

persiste el modo fundamental y donde se determina la amplitud del campo transmitido.

### 5.3.1. Modos TE y TM en la guía coaxial.

Las frecuencias de corte así como la distribución de campo en la sección transversal de la guía se obtienen siguiendo el esquema del capítulo 3. En particular para el caso de conductores cuadrados, en el apartado 3.5.1. se dan las frecuencias de corte y las distribuciones de campo longitudinal. En la tabla 3.IX se muestran las frecuencias de corte de los ocho primeros modos TE para diferentes relaciones de los lados de los conductores, y en la tabla 3.X se dan las de los cinco primeros TM. Las líneas de componente axial del campo se muestran para los cuatro primeros modos TE en las figuras 3.12.a-d para el caso de  $b/a=0.5$  (siendo  $b$  y  $a$  las dimensiones de los conductores interior y exterior respectivamente), (figura 5.2). También se muestran en un caso rectangular,  $a/a'=2$ ,  $b/b'=2$ , y  $b/a=0.5$ , siendo  $a$ ,  $a'$  las dimensiones horizontal y vertical del conductor exterior y  $b$ ,  $b'$  las respectivas del interior. Las distribuciones de campo y las frecuencias de corte para los cuatro primeros TE y TM se muestran en las figuras 3.14.a-d (TE) y 3.15.a-d (TM), apartado 3.5.2.

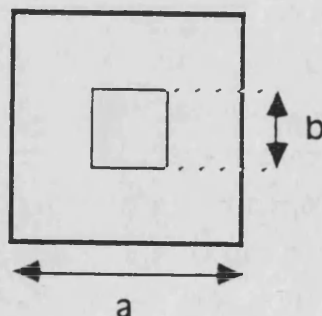


Figura 5.2. Coaxial cuadrado.

### 5.3.2. Modo Fundamental (TEM).

Como se comenta en la introducción del capítulo 3, hay una diferencia epistemológica entre una línea de transmisión y una guía de ondas. Las primeras se caracterizan por ser el modo TEM el modo dominante. Estos modos no presentan componente axial de los campos, de modo que recurriendo a las ecuaciones de Maxwell, se llega a que el campo eléctrico transversal puede expresarse como el gradiente (gradiente transversal) de una función potencial [16], que contiene la dependencia del campo en las coordenadas transversales. La dependencia en la variable axial es de la forma  $\exp(j\beta x)$ , siendo  $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ , y "x" la variable axial,

$$\vec{E}_t = -\nabla_t \Phi \quad (5.1)$$

siendo  $\nabla_t = \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ .

Recurriendo de nuevo a las ecuaciones de Maxwell, se deduce que  $\Phi$  es solución de la ecuación bidimensional de Laplace, definida sobre la sección transversal de la guía.

$$\nabla_t^2 \Phi = 0 \quad (5.2)$$

El campo magnético se calcula a partir del eléctrico,

$$\vec{H}_t = +\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{u}_x \times \vec{E}_t \quad (5.3)$$

siendo  $\vec{u}_x$  el vector unitario en la dirección de propagación.

Para ello es necesario que el sistema guiador presente al menos dos conductores independientes. Este es el caso de la línea coaxial, que presenta dos conductores, el interior y el exterior.

### Solución de la ecuación de Laplace en el coaxial

Puesto que se han elegido  $y, z$  como componentes axiales, la ecuación a resolver es la (5.2) que queda

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.4)$$

con las condiciones de contorno

$$\Phi(y,z) = \begin{cases} 1 & \text{en el conductor interior} \\ 0.0 & \text{en el conductor exterior} \end{cases} \quad (5.5)$$

la ecuación (5.4) es de tipo elíptico, y la forma de resolverla depende del método que se elija. Por transformación conforme la resuelven Bowman [106], Riblet [105] y Terakado [109] dando la impedancia característica. En este apartado se resuelve la ecuación del potencial, discretizándola con Diferencias Finitas (DF) y solucionando el sistema resultante mediante un método explícito, el método iterativo de Gauss-Seidel. La ecuación (5.4) se expresa en diferencias finitas (ver apartado 2.3), para lo cual es necesario definir un mallado con los puntos donde se efectúa el muestreo del potencial. Dada la simetría en dos planos de la guía coaxial rectangular, es suficiente con resolver la ecuación en un cuadrante de su sección. Esta se muestra en la figura 5.3, donde asimismo se indican los puntos que donde se establecen las condiciones de contorno, y los que requieren un tratamiento especial.

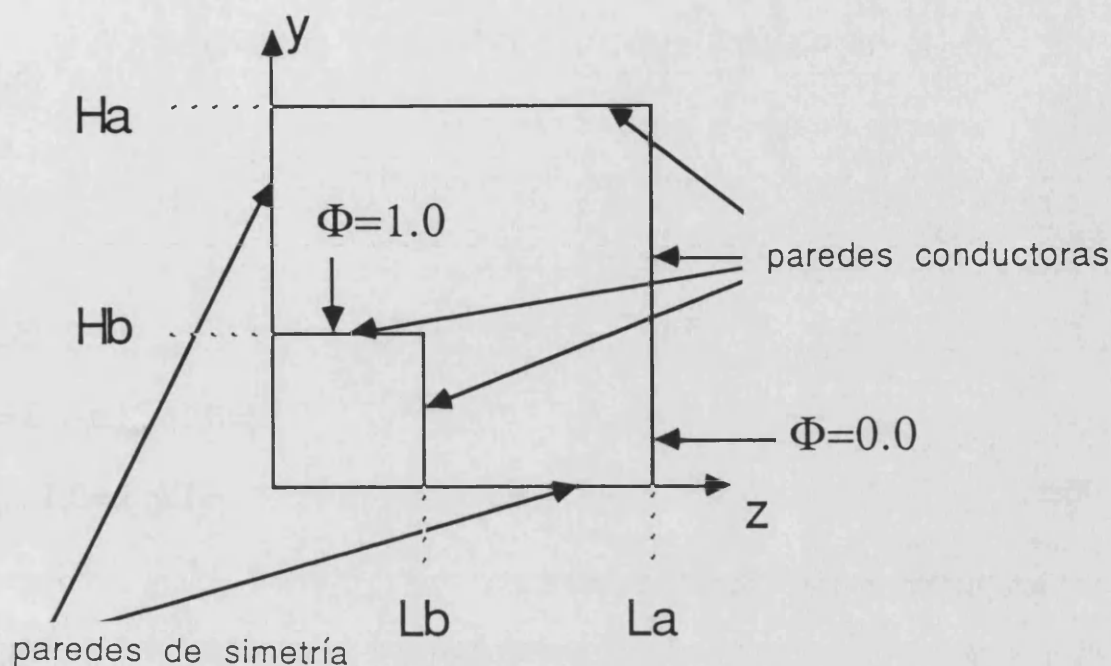


Figura 5.3. Cuadrante del coaxial, dimensiones y condiciones de contorno a aplicar

Aplicación de Diferencias Finitas a la ecuación de Laplace sobre el dominio definido por la sección transversal (figura 5.3)

En las derivadas segundas se utilizan diferencias centradas, lo cual da una precisión de segundo orden en la aproximación. De esta forma, la ecuación (5.4) para un punto situado entre los dos conductores, queda:

$$\frac{\Phi(y+\Delta y,z)-2\Phi(y,z)+\Phi(y-\Delta y,z)}{\Delta y^2} + \frac{\Phi(y,z+\Delta z)-2\Phi(y,z)+\Phi(y,z-\Delta z)}{\Delta z^2} = 0 \quad (5.6)$$

Tomando los mismos incrementos espaciales,  $\Delta y=\Delta z=\Delta h$  y con la notación discreta  $(y+\Delta y,z)=(j+1,k)$ , queda,

a) para un punto interior entre los dos conductores,

$$\Phi(j,k) = \frac{\Phi(j+1,k) + \Phi(j-1,k) + \Phi(j,k+1) + \Phi(j,k-1)}{4} \quad (5.7.a)$$

los puntos que requieren un tratamiento especial son:

b) Los puntos sobre el conductor exterior,

$$\Phi(j,k) = 0 \quad (5.7.b)$$

$$j=0,1,\dots,L_a-1; k=H_a$$

$$j=L_a; k=0,1,\dots,H_a$$

c) los puntos sobre el conductor interior,

$$\Phi(j,k) = 1 \quad (5.7.c)$$

$$j=0,1,\dots,L_b-1; k=H_b$$

$$j=L_b; k=0,1,\dots,H_b$$

d) los puntos sobre la pared magnética vertical. La simetría  $\Phi(j+1,k)=\Phi(j-1,k)$ , hace que la ecuación (5.7.a) deba ser modificada en estos puntos,

$$\Phi(j,k) = \frac{2\Phi(j+1,k) + \Phi(j,k+1) + \Phi(j,k-1)}{4} \quad (5.7.d)$$

$$j=0; k=H_b,\dots,H_a$$

e) los puntos sobre la pared magnética horizontal. La simetría  $\Phi(j,k+1) = \Phi(j,k-1)$ , permite escribir,

$$\Phi(j,k) = \frac{\Phi(j+1,k) + \Phi(j-1,k) + 2\Phi(j,k+1)}{4} \quad (5.7.e)$$

$$j=L_b,\dots,L_a; k=0$$

### Algoritmo para resolver el sistema en diferencias finitas

El sistema de ecuaciones (5.7.a-e) se resuelve mediante el método iterativo de Gauss-Seidel [9]. Se dan unos valores iniciales al potencial en cada uno de los puntos del dominio, y luego se recalcula el valor del potencial  $\Phi(j,k)$  mediante las ecuaciones (5.7.a-e). Tras este cálculo, se compara el valor  $\Phi(j,k)$  con su valor anterior (previo al cálculo). Si la diferencia entre ambos es superior a una determinada cota de error, entonces se vuelve recalcular el potencial en todos los puntos. Este proceso se repite hasta que se alcanza el grado de convergencia deseado que se introduce en la cota de error. El algoritmo se expresa en las siguientes líneas.

Bloque de entradas:

- Entradas

-Dimensiones normalizadas al incremento espacial  $\Delta h$

-Cota de error,  $\epsilon_r$

-Numero máximo de iteraciones

Bloque de cálculo:

-  $\Phi(j,k) = 0.0$  en todos los puntos

- Se repite lo siguiente desde  $n=1$  hasta  $n=\text{numero máximo de iteraciones}$ , mientras el error sea afirmativo

- error=negativo

- Para cada punto  $(j,k)$  se hace

-  $\Phi_a = \Phi(j,k)$

- Se calcula  $\Phi(j,k)$  (ecuaciones (5.7.a-e))

- Se calcula  $\epsilon = |\Phi_a - \Phi(j,k)|$

- Se compara  $\epsilon$  con  $\epsilon_r$



- Si  $\varepsilon > \varepsilon_r$ , entonces

-error=afirmativo

- Final repetición

- Si error=afirmativo, el algoritmo no converge con el número de iteraciones máximo

- Si error=negativo, el algoritmo converge con n iteraciones

### Cálculo de los campos eléctrico y magnético transversales

El campo eléctrico transversal se calcula aplicando la ecuación (5.1), aproximando las derivadas por diferencias finitas. En puntos interiores entre los dos conductores se aplican diferencias centradas, y para puntos de las paredes conductoras diferencias laterales. En ambos casos con aproximación de segundo orden.

a) puntos interiores entre los dos conductores

$$E_y(j,k) = -\frac{\Phi(j+1,k) - \Phi(j-1,k)}{2\Delta h} \quad (5.8.a)$$

$$E_z(j,k) = -\frac{\Phi(j,k+1) - \Phi(j,k-1)}{2\Delta h} \quad (5.8.b)$$

b) Los puntos sobre el conductor exterior,

b.1) pared horizontal

$$E_y(j,k) = 0.0 \quad (5.9.a)$$

$$E_z(j,k) = -\frac{3\Phi(j,k) - 4\Phi(j,k-1) + \Phi(j,k-2)}{2\Delta h} \quad (5.9.b)$$

$$j=0,1,\dots,La-1; k=Ha$$

b.2) pared vertical

$$E_y(j,k) = -\frac{3\Phi(j,k) - 4\Phi(j-1,k) + \Phi(j-2,k)}{2\Delta h} \quad (5.9.c)$$

$$E_z(j,k) = 0.0 \quad (5.9.d)$$

$$j=L_a; k=0,1,\dots,H_a-1$$

c) los puntos sobre el conductor interior,

c.1) pared horizontal

$$E_y(j,k) = 0.0 \quad (5.10.a)$$

$$E_z(j,k) = -\frac{-3\Phi(j,k) + 4\Phi(j,k+1) - \Phi(j,k+2)}{2\Delta h} \quad (5.10.b)$$

$$j=0,1,\dots,L_b-1; k=H_b$$

c.2) pared vertical

$$E_y(j,k) = -\frac{-3\Phi(j,k) + 4\Phi(j+1,k) - \Phi(j+2,k)}{2\Delta h} \quad (5.10.c)$$

$$E_z(j,k) = 0.0 \quad (5.10.d)$$

$$j=L_b; k=0,1,\dots,H_b-1$$

d) los puntos sobre la pared magnética vertical.  $\Phi(j+1,k) = \Phi(j-1,k)$ ,

$$E_x(j,k) = 0.0 \quad (5.11.a)$$

$$E_z(j,k) = -\frac{\Phi(j,k+1) - \Phi(j,k-1)}{2\Delta h} \quad (5.11.b)$$

$$j=0; k=H_b,\dots,H_a$$

e) los puntos sobre la pared magnética horizontal.  $\Phi(j,k+1) = \Phi(j,k-1)$ ,

$$E_y(j,k) = -\frac{\Phi(j+1,k) - \Phi(j-1,k)}{2\Delta h} \quad (5.12.a)$$

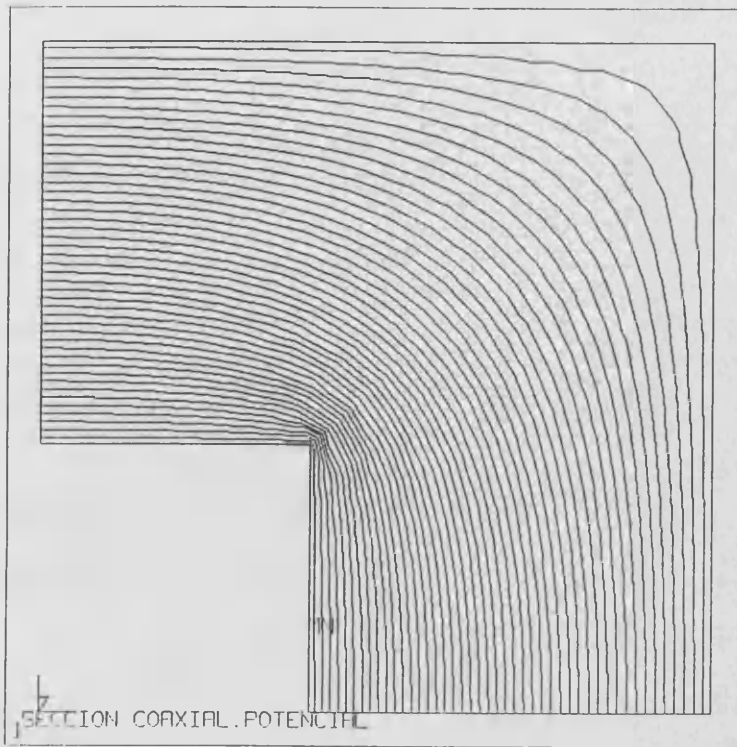
$$E_z(j,k) = 0.0 \quad (5.12.b)$$

$$j=L_b, \dots, L_a ; k=0$$

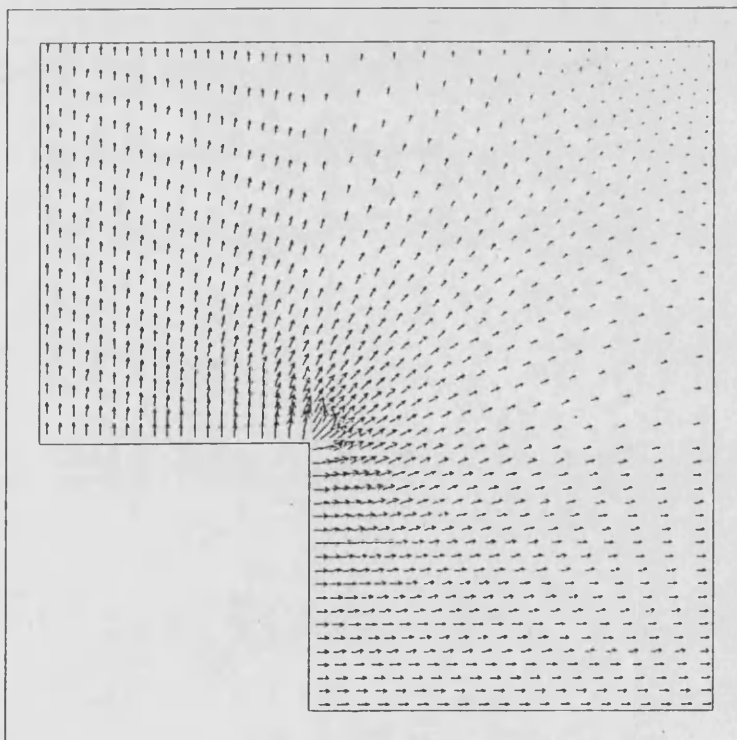
El campo magnético en la sección transversal de la guía se calcula con la ecuación (5.3).

#### Resultados numéricos.

Se aplica a una guía coaxial cuadrada con relación entre dimensiones  $b/a=0.4$ , tomando  $L_a=H_a=50\Delta h$  y  $L_b=H_b=20\Delta h$ , (coaxial cuadrado). Las curvas de potencial  $\Phi$  constante se muestran en la figura 5.4.a. La figura 5.4.b muestra el campo transversal.



(a)



(b)

Figura 5.4. (a) Curvas equipotenciales; (b) Campo transversal.

Considerando que la energía eléctrica almacenada por unidad de longitud ( $W_e$ ) se calcula haciendo uso de la siguiente expresión,

$$W_e = \frac{1}{2} \int_s \epsilon |\nabla_t \Phi|^2 ds$$

siendo  $s$  la sección de la línea. Como también  $W_e = \frac{1}{2} C V^2$ , siendo  $V$  la diferencia de potencial entre los conductores y  $C$  la capacidad por unidad de longitud. Esto permitirá calcular la capacidad por unidad de longitud de la línea, así como su impedancia característica.

La impedancia es,

$Z = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{CC_0}}$  donde  $c$  es la velocidad de la luz ( $2.99793 \cdot 10^8 \text{m/s}$ ), y  $C_0$  la capacidad sin dieléctrico ( $\epsilon_r=1$ ).

En el caso analizado los resultados obtenidos para la capacitancia y la impedancia característica son,

$$C = 68.107 \text{ pF/m}$$

$$Z = 48.976 \Omega$$

lo cual arroja un error de un 2% respecto del valor exacto para este tipo de línea ( $50 \Omega$ ).

### 5.3.3. Modelización de la guía coaxial cuadrada (DFDT).

La modelización de un pedazo de guía coaxial cuadrada se efectúa con una sólo matriz para cada componente del campo en el mallado. Se aprovecha uno de los dos planos de simetría, el horizontal, y se establecen tres bloques, que se muestran en la figura 5.5. El plano inferior por ser de simetría, se modela con una pared magnética. La discretización se efectúa con celdas cuadradas  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta h$ , y el paso temporal de simulación se elige según la condición de Courant (apartado 2.3.5 (2.27.a))

$$\Delta t = 0.5 \Delta h / c \quad (5.13)$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz en el espacio libre.

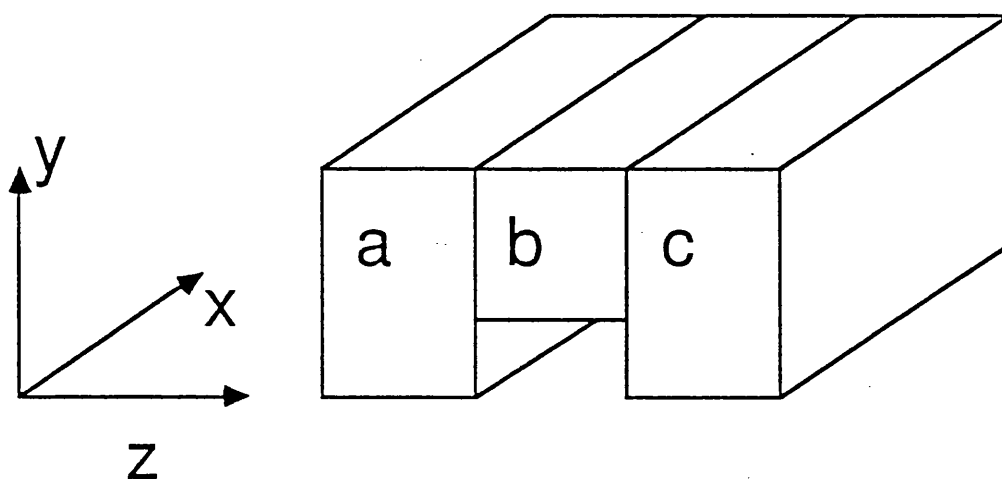


Figura 5.5. Paralelepípedos de cálculo para la guía coaxial.

### 5.3.4. Comportamiento de las CCA con el modo fundamental.

Un paso previo al análisis en el dominio del tiempo debe ser necesariamente el estudio del comportamiento de las Condiciones de Contorno Absorbentes. Sin estas es imposible la simulación de la propagación, y se consideran adecuadas en la medida en que estas sean capaces de simular una línea infinita. Si las elegidas no funcionan bien este paso las delatará, y nos permitirá tomar otras más adecuadas. En la elección se tienen en cuenta dos importantes factores, su uso de recursos informáticos y su funcionamiento como CCA y en consecuencia la precisión de los resultados que queremos obtener.

#### Modelización

Se modela un pedazo de una línea de transmisión coaxial cuadrada por la que se propaga el modo fundamental. La guía coaxial elegida para la modelización es la de relación  $b/a=0.4$ . Se modela la línea con un mallado tridimensional como se ha comentado en el apartado 5.3.3, con una longitud  $L=4a$ . La celda se toma  $\Delta h=a/50$  que garantiza un buen modelado de la estructura, y el paso temporal se deriva del espacial según la ecuación (5.13). Al principio y al final de la guía se sitúan las CCA de Mur de primer orden (apartado 2.5.2).

#### Excitación con un pulso temporal Gaussiano

Se introduce en el campo eléctrico una excitación de tipo Gaussiano con la estructura espacial del modo fundamental en  $x_0=0$ , ( $i=0$ ), que se propaga en la dirección  $+x$ . Esta tiene la siguiente expresión,

$$\vec{E}(x_0,y,z,t)=A_0 \exp - \left( \frac{t-t_0}{A} \right)^2 \vec{E}_t(y,z) \quad (5.14)$$

la transformada de Fourier del pulso es como en la ecuación (4.13),

$$\vec{E}(x_0, y, z, f) = F(f) \vec{E}_t(y, z) \quad (5.15)$$

siendo

$$F(f) = 2A_0 \sqrt{\pi} A \exp(-\pi^2 A^2 f^2) \exp(-j2\pi f t_0) \quad (5.16)$$

donde  $A$  es la anchura temporal, y  $t_0$  el centro temporal del pulso.

La elección de los parámetros  $A$  y  $t_0$ , esta sujeta a varias prescripciones. La primera es que partiendo de la condición de estabilidad (5.13), el pulso en su avance por la guía tenga una anchura suficiente como para presentar una buena resolución espacial. Por otro lado el espectro en frecuencia del pulso debe de ser lo suficientemente amplio como para mantener un valor substancial a las frecuencias que son de interés. Por último, para establecer  $t_0$ , habrá que imponer que el "encendido" inicial de la excitación sea pequeño y suave.

Definimos la anchura de la Gaussiana  $W$  como la anchura entre dos puntos simétricos respecto del centro  $t_0$  que tienen el 5% del valor máximo del pulso.

$$\exp - \left( \frac{W/2}{Ac} \right)^2 = \exp -3 \approx 5\% \quad (5.17)$$

Si la elegimos de aproximadamente 20 pasos espaciales ( $L/5$ ).

$$A = \frac{10\Delta x}{\sqrt{3c}} \approx 12\Delta t \quad (5.18)$$

Con esta elección la máxima frecuencia que se puede extraer del espectro es [47],

$$f_{\max} = \frac{1}{2A} = \frac{1}{24\Delta t}, \quad (F(f_{\max}) \approx 0.1) \quad (5.19)$$

El centro temporal de la Gaussiana se toma en  $t_0 = 200\Delta t$ .



### Introducción de la excitación y CCA

La excitación se introduce durante  $t=2t_0$  sobre la sección transversal  $i=0$ . Durante este tiempo de simulación la estructura de campo de la ecuación (5.14) es impuesta sobre esta pared. Después de este tiempo, inmediatamente se sitúan las CCA en dicha sección. De este modo cualquier posible reflexión es inmediatamente absorbida después de la excitación. Por esa razón, en el modelado debemos asegurarnos de que la puerta de entrada sea suficientemente larga para que la reflexión en la discontinuidad llegue posteriormente al establecimiento de las CCA. Si esto no se hace así, el campo reflejado en la discontinuidad se encontraría con una pared eléctrica en la zona de la excitación, reflejándose de nuevo a la discontinuidad. Esto falsearía los resultados. En el caso simulado la onda necesita dos pasos temporales para recorrer un paso espacial (ecuación (5.13)), por lo tanto, la parte inicial del pulso tarda  $200 \times 2 \times 2 = 800$  pasos temporales en regresar a la zona de excitación cuando ya se han situado las Condiciones de Contorno Absorbentes.

### Generación de Modos de orden superior y justificación de la excitación

Puesto que el pulso introduce una apreciable magnitud de campo para frecuencias comprendidas entre 0 y  $f_{\max}=1/24\Delta t$ , es obvia la posibilidad de que se generen modos de orden superior. En el dominio del tiempo no se pueden separar los modos, a no ser que se simule una única frecuencia (apartado 4.3.1) o un rango de frecuencias dentro de la banda de operación de un sólo modo (apartado 4.3.3). Se ha elegido en este tipo de excitación porque es suave (evitando el fenómeno de Gibbs), y porque contiene un amplio espectro en frecuencia en el que se pretende analizar el comportamiento de las CCA. Por otro lado, al tener estructura espacial TEM, en principio no se generarán modos de orden superior y no habrá dispersión por razones físicas, (hay dispersión asociada al método numérico pero se desprecia, ver apartado 2.3.7). Por último cabe explicar el énfasis en el modo TEM, por ser éste el modo usual de operación del sistema guiador.

## Resultados numéricos

En la figura 5.6.a se muestra el avance del pulso a lo largo del pedazo de línea modelado para varios instantes temporales. La figura 5.6.b muestra el coeficiente de reflexión, desde frecuencia casi nula a la máxima calculable (ecuación (5.19)).

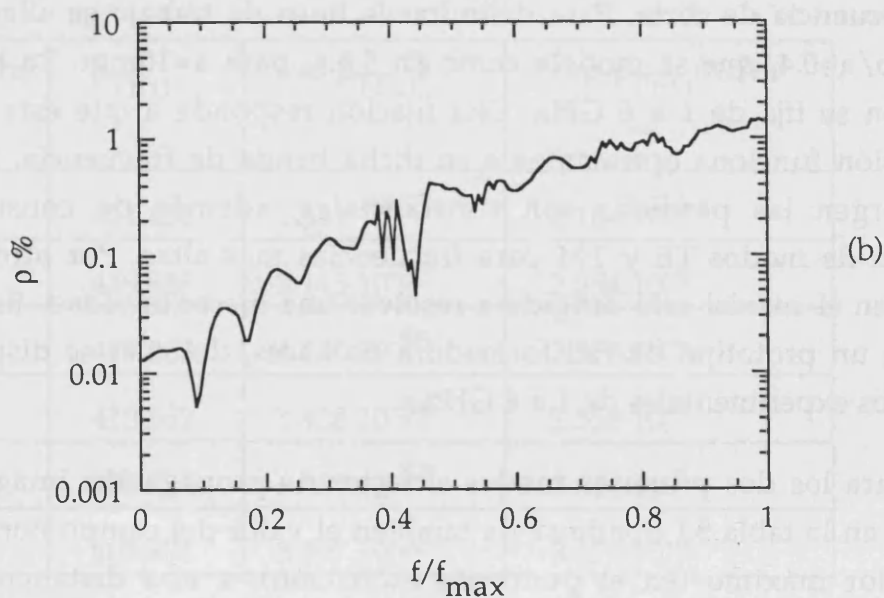
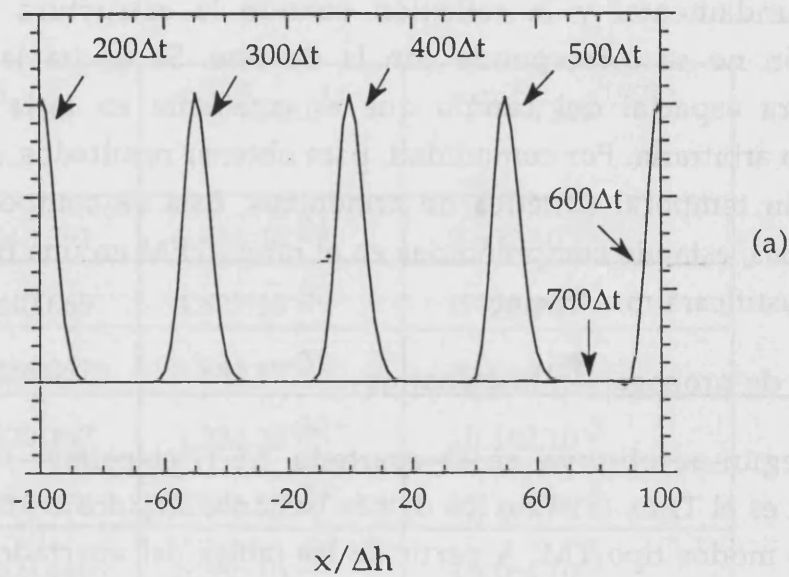


Figura 5.6. (a) Pulso Gaussiano a lo largo de la guía en varios instantes temporales; (b) Coeficiente de reflexión debido a las CCA.

### 5.3.5. Estudio de la atenuación de los modos de orden superior por debajo del corte.

En este apartado se va a proceder al análisis de la evolución de los modos TE y TM cuando estos se generan por debajo de la frecuencia de corte, en la banda de operación TEM. Asimismo se analizará la reconstrucción del modo fundamental y la reflexión cuando la estructura espacial de la excitación no se corresponde con la de este. Se excita la guía con una estructura espacial del campo que es constante en toda la sección, en principio arbitraria. Por comodidad, para obtener resultados, se opta por una excitación temporal sintética de armónicos. Esta se compondrá de varias frecuencias, estando comprendidas en el rango TEM en una banda de interés que se justificará mas adelante.

#### Factores de propagación imaginarios

Según se observa en el apartado 3.5.1, el primer modo de orden superior es el TE<sub>10</sub>, estando los demás bastante alejados en frecuencia, sobre todo los modos tipo TM. A partir de las tablas del apartado 3.5.1 se puede deducir el factor de propagación de estos modos, para frecuencias por debajo de la frecuencia de corte. Para delimitar la línea de trabajo se elige la guía coaxial  $b/a=0.4$ , que se modela como en 5.3.4, para  $a=10\text{mm}$ . La banda de operación se fija de 1 a 6 GHz. Esta fijación responde a que esta línea de transmisión funciona optimamente en dicha banda de frecuencia. Fuera de esta margen las pérdidas son substanciales, además de considerar la aparición de modos TE y TM para frecuencias mas altas. Por otro lado, el análisis en el coaxial está dirigido a resolver una discontinuidad. Esta forma parte de un prototipo de red formadora de haces, del cual se disponen de resultados experimentales de 1 a 6 GHz.

Para los dos primeros modos el factor de propagación imaginario se muestra en la tabla 5.I donde se da también el valor del campo normalizado a su valor máximo (en el punto de excitación), a una distancia de una longitud de onda del punto de introducción de la excitación, y a una distancia de  $100\Delta h=2a$  de su valor máximo, ( $\Delta h=a/50$ ), ( $100\Delta h=0.07\lambda_1=0.4\lambda_6$ ).

TABLA 5.I. Factor de propagación de los dos primeros modos TE para las seis frecuencias del análisis. Valor del campo normalizado a su valor máximo (valor en la excitación), a una distancia de una longitud de onda del punto de introducción de la excitación para la frecuencia mas baja ( $\lambda_1=2.99793.10^8(\text{m/s})/1\text{GHz}$ ), y a una distancia de  $100\Delta h$  de su valor máximo ( $\Delta h=a/50$ ), ( $100\Delta h=0.07\lambda_1=0.4\lambda_6$ ).

f (GHz)	$\beta_{\text{TE10}}$	$\exp-\beta_{\text{TE10}}\lambda_1$	$\exp-\beta_{\text{TE10}}0.07\lambda_1$
1.0	243.391	$2.046.10^{-34}$	$7.690.10^{-3}$
2.0	240.669	$4.627.10^{-32}$	$8.120.10^{-3}$
3.0	236.062	$1.841.10^{-31}$	$8.904.10^{-3}$
4.0	229.457	$1.334.10^{-30}$	$10.162.10^{-3}$
5.0	220.674	$1.856.10^{-29}$	$12.113.10^{-3}$
6.0	209.440	$5.385.10^{-28}$	$15.164.10^{-3}$

f (GHz)	$\beta_{\text{TE11}}$	$\exp-\beta_{\text{TE11}}\lambda_1$	$\exp-\beta_{\text{TE11}}0.07\lambda_1$
1.0	421.453	$1.341.10^{-55}$	$2.184.10^{-4}$
2.0	419.886	$2.145.10^{-55}$	$2.254.10^{-4}$
3.0	417.263	$4.710.10^{-55}$	$2.375.10^{-4}$
4.0	413.562	$1.428.10^{-54}$	$2.558.10^{-4}$
5.0	408.755	$6.037.10^{-54}$	$2.816.10^{-4}$
6.0	402.801	$3.597.10^{-53}$	$3.172.10^{-4}$

Los resultados de la tabla anterior son claramente indicativos de la rápida atenuación de que son objeto los modos TE y TM. Pero no hay que olvidar que la atenuación de los modos de orden superior depende en gran medida de la estructura espacial del campo inicial utilizado en la excitación. Por esa razón aunque la tabla 5.I da una orientación, esta no es suficiente, y para determinar con seguridad donde los modos de orden superior son insignificantes habrá que analizar la evolución de las componentes del campo bajo distintas distribuciones espaciales de la excitación. A continuación se efectúa un análisis de la evolución de las componentes del campo mediante la simulación DFDT.

#### Modelado para análisis con DFDT

Se analiza la guía ya modelizada en el apartado anterior (apartados 5.3.3 y 5.3.4), con la misma longitud  $L=4a=200\Delta h$ . La excitación se introduce en el centro de la línea, en  $x=2a=100\Delta h$ , o siguiendo la notación introducida con la discretización en  $i=100$ . Puesto que se va trabajar con el campo que se propaga hacia la derecha de la excitación, se cree oportuno efectuar un corrimiento de índices, de modo que los resultados que se presentaran desde  $i=0$  a  $i=100$  se corresponderán con los del campo de  $x=2a$  a  $x=4a$ .

#### Resultados numéricos con DFDT para la evolución del campo con excitación transversal

Primeramente se usa una distribución de campo con dirección paralela al eje  $y$ , suma de seis armónicos de 1 a 6 GHz, (ecuación (4.14)). Esta excitación se introduce sobre toda la sección de la guía en la componente "y" del campo eléctrico:

$$E_{y \text{ inc}}^n(i_0, j, k) = \sum_{l=1}^m V_l \text{sen}(2\pi f_l n \Delta t) \quad (5.20)$$

$i_0=0; j=0, 1, \dots, 2La; k=0, 1, \dots, La,$

$La=a/2\Delta h=25, m=6, f_l=1.1 \text{ GHz}, \text{ y } V_l=1.0.$

Para valorar la atenuación de los modos TE, se observa la evolución de la componente axial del campo magnético  $H_x$ , a lo largo de la guía. La figura 5.7 muestra  $H_x$  en función de la posición en los puntos  $(i,0,45)$ , para cada una de las frecuencias de la simulación (1 a 6 GHz). La figura 5.8 muestra  $H_x(i,0,45)/H_x(0,0,45)$ , y la 5.9  $H_x(i,20,25)/H_x(0,20,25)$ .

Si la atenuación es grande para la componente  $H_x$  (TE) mayor será la atenuación para  $E_x$ , pues vendría asociada a la generación de un modo TM, y estos modos presentan una frecuencia inferior de corte mucho mayor (apartado 3.5.1) que les infiere una constante de propagación imaginaria mas grande [16]. La figura 5.10 muestra la amplitud  $E_x(i,20,25)/E_y(0,20,25)$  a lo largo de la guía desde la excitación.

El modo fundamental presenta  $E_y(i,0,z)=0$ . La excitación no presenta esta característica por lo que estas componentes del campo se atenuaran (a estas frecuencias) en estos puntos en beneficio de las componentes  $E_z$ . La figura 5.11 muestra la evolución de  $E_y(i,0,45)/E_z(i,0,45)$  a lo largo de la guía para las seis frecuencias del análisis.

La reconstrucción del modo fundamental se analiza también estudiando la evolución de la componentes del campo  $E_y(i,20,25)$ ,  $E_z(i,0,5)$  y  $E_z(i,0,45)$ . Los puntos del sondeo son puntos de simetría para estas componentes del campo con la estructura TEM. En la medida en que se vayan aproximando entre sí sus valores, nos indican el grado de convergencia a la estructura TEM del campo total que se propaga. La figura 5.12 muestra  $E_z(i,0,45)/E_y(i,20,25)$  que es igual que  $E_z(i,0,5)/E_y(i,20,25)$  dadas las características de simetría transversal de la excitación. Los resultados se dan para las frecuencias de 1 a 6 GHz.

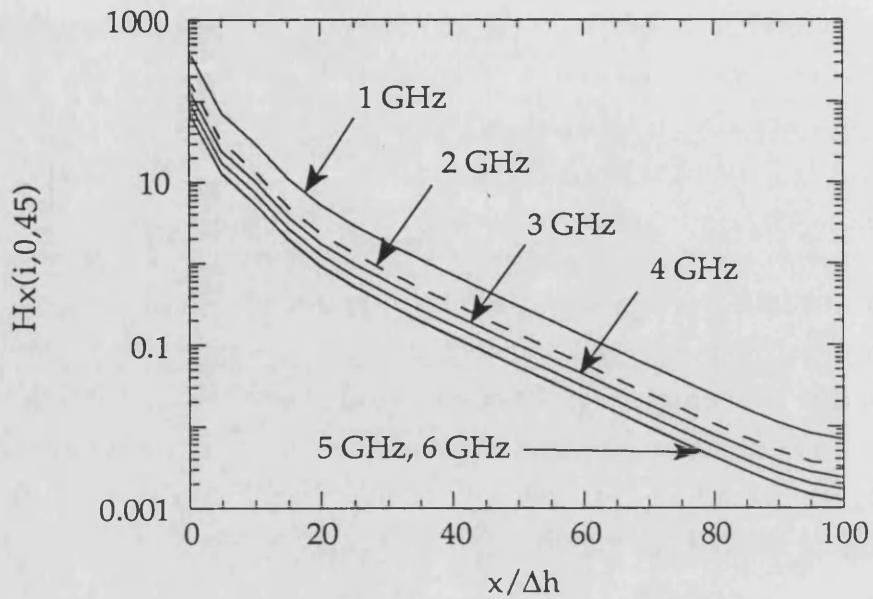


Figura 5.7. Amplitud de la componente axial del campo magnético normalizada,  $H_x(i,0,45)$ . Resultados de 1 a 6 GHz. ( $i=x/\Delta h$ ). Excitación transversal.

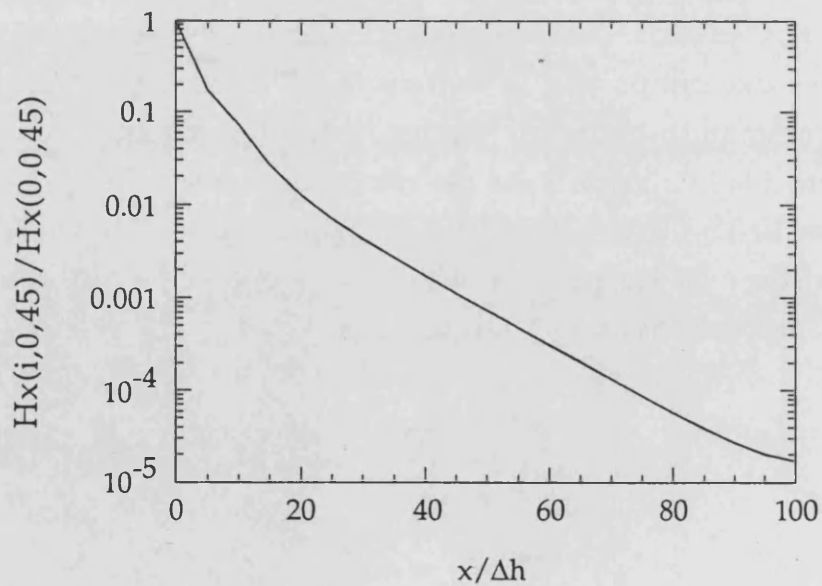


Figura 5.8. Amplitud de la componente axial del campo magnético normalizada,  $H_x(i,0,45)/H_x(0,0,45)$ . Resultados de 1 a 6 GHz. ( $i=x/\Delta h$ ). Excitación transversal.

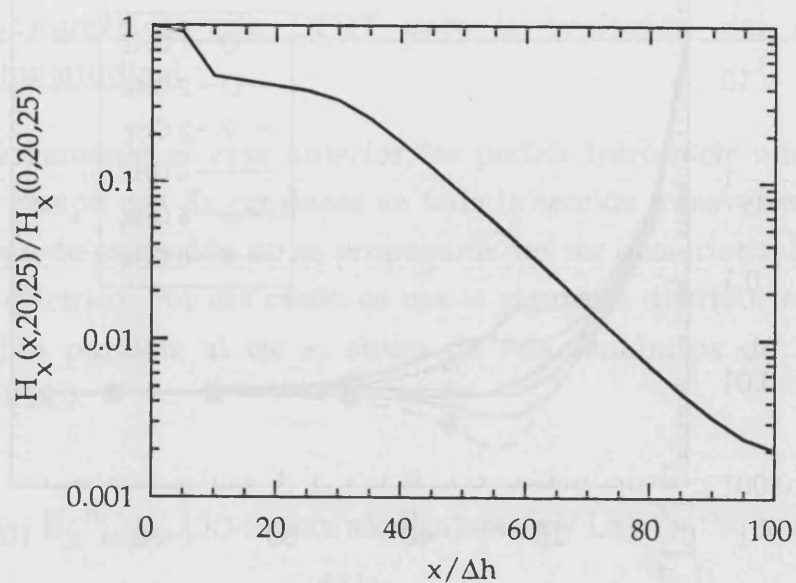


Figura 5.9. Amplitud de la componente axial del campo magnético normalizada,  $H_x(i,20,25)/H_x(0,20,25)$ . Resultados de 1 a 6 GHz. ( $i=x/\Delta h$ ). Excitación transversal.

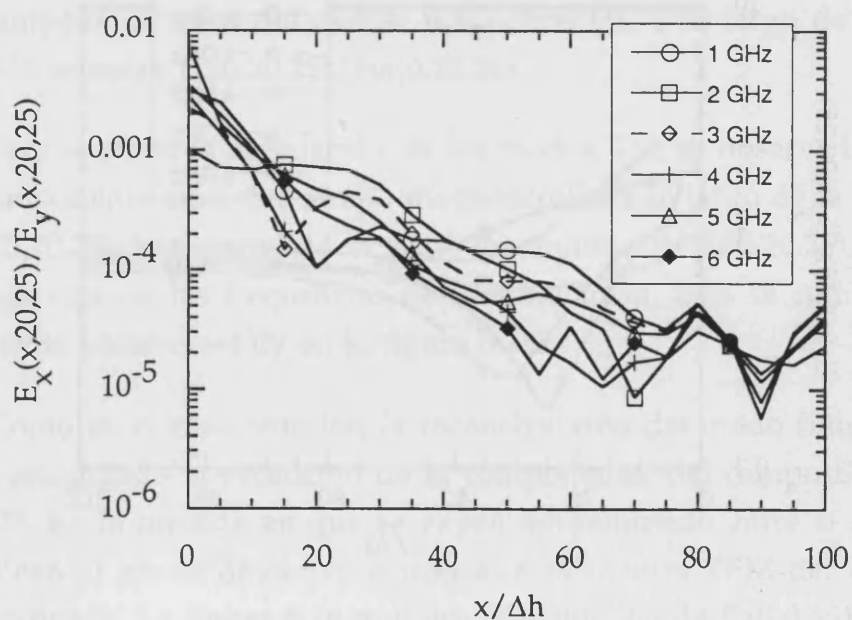


Figura 5.10. Amplitud  $E_x(i,20,25)/E_y(0,20,25)$ . Resultados de 1 a 6 GHz. ( $i=x/\Delta h$ ). Excitación transversal.



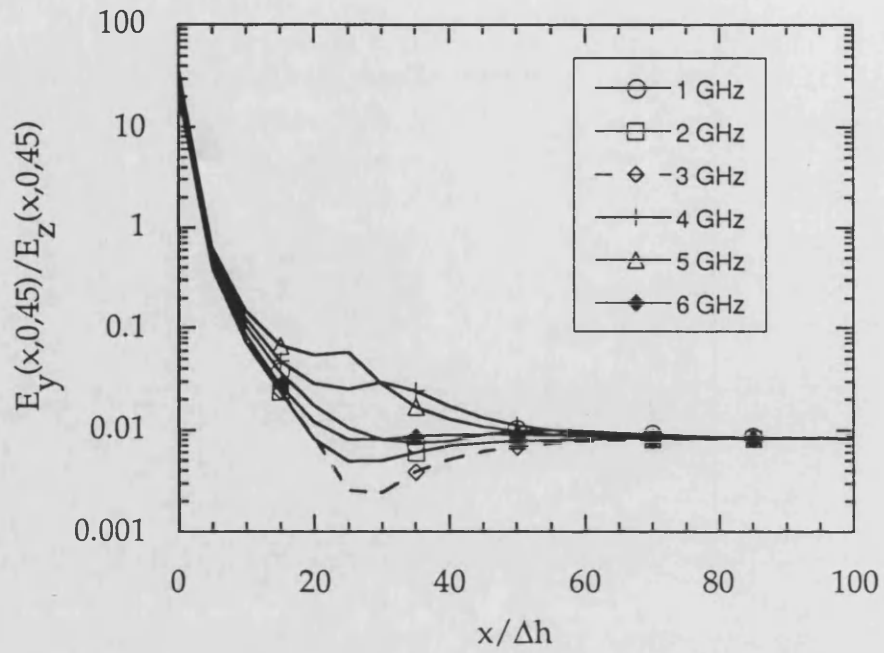


Figura 5.11.  $E_y(i,0,45)/E_z(i,0,45)$ . Resultados de 1 a 6 GHz. Excitación transversal.

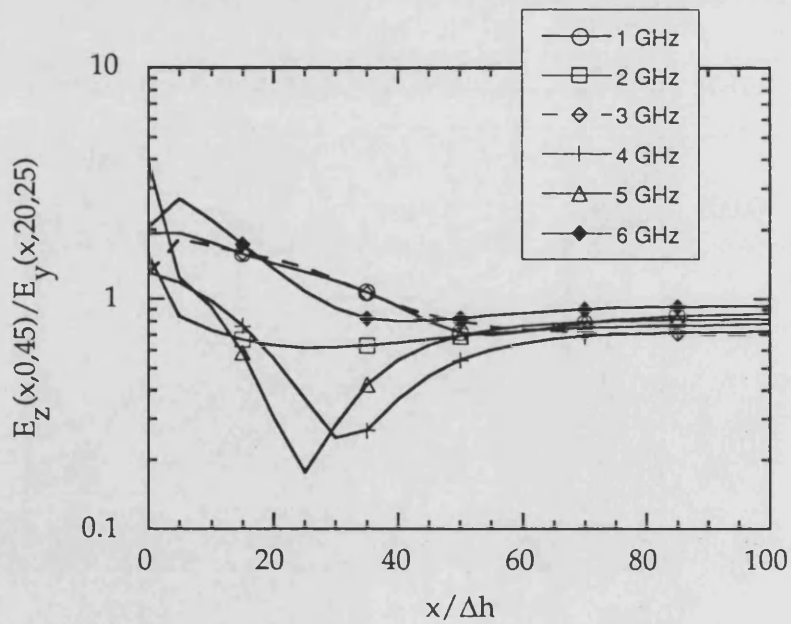


Figura 5.12.  $E_z(i,0,45)/E_y(i,20,25)$  en función de la posición  $x$  ( $i=x/\Delta h$ ) para frecuencias de 1 a 6 GHz. Excitación transversal.

## Resultados numéricos con DFDT para la evolución del campo con excitación longitudinal

Análogamente al caso anterior, se podría introducir una estructura espacial de campo con  $E_x$  constante en toda la sección transversal de la guía, pero este tipo de excitación no se propagaría por ser irrotacional la estructura del campo eléctrico. Por esa razón se usa la siguiente distribución de campo con dirección paralela al eje  $x$ , suma de seis armónicos de 1 a 6 GHz, (ecuación (4.14)).

$$E_{x \text{ inc}}^n(i_0, j, k) = \text{sen}(\pi k / La) \text{sen}(\pi j / La) \sum_{l=1}^m V_l \text{sen}(2\pi f_l n \Delta t) \quad (5.21)$$

siendo  $La = a / 2\Delta h = 25$ ,  $m = 6$ ,  $f_l = 1.0.l \text{ GHz}$ ,  $V_l = 1.0$ , y

$i_0 = 0$ ;  $j = 0, 1, \dots, 2La$ ;  $k = 0, 1, \dots, La$ ,

Para valorar la atenuación de los modos TE, se observa la evolución de la componente axial del campo magnético  $H_x$ , a lo largo de la guía. La figura 5.13 muestra  $H_x(i, 20, 25) / H_x(0, 20, 25)$ .

Para analizar la atenuación de los modos TM, se observa la evolución de la componente axial del campo magnético  $E_x$ , a lo largo de la guía, en los puntos  $(i, 20, 25)$ . La figura 5.14 muestra la amplitud de  $E_x(i, 20, 25) / E_x(0, 20, 25)$  para cada una de las frecuencias de la simulación. Esta se compara con la componente transversal  $E_y$  en la figura 5.15.

Como en el caso anterior, la reconstrucción del modo fundamental se analiza estudiando la evolución de la componentes del campo  $E_y(i, 20, 25)$ , y  $E_z(i, 0, 45)$ . En la medida en que se vayan aproximando entre sí sus valores, nos indican el grado de convergencia a la estructura TEM del campo total que se propaga. La figura 5.16 muestra la evolución de  $E_z(i, 0, 45) / E_y(i, 20, 25)$  para las frecuencias de 1 a 6 GHz.

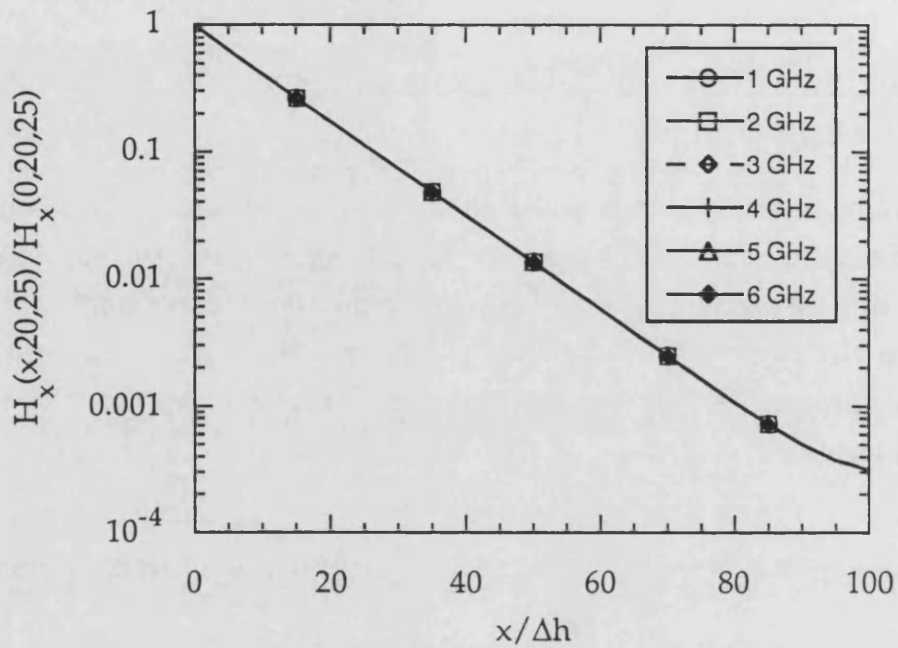


Figura 5.13. Amplitud de la componente axial del campo magnético normalizada,  $H_x(i,20,25)/H_x(0,20,25)$ . Resultados de 1 a 6 GHz. ( $i=x/\Delta h$ ). Excitación longitudinal.

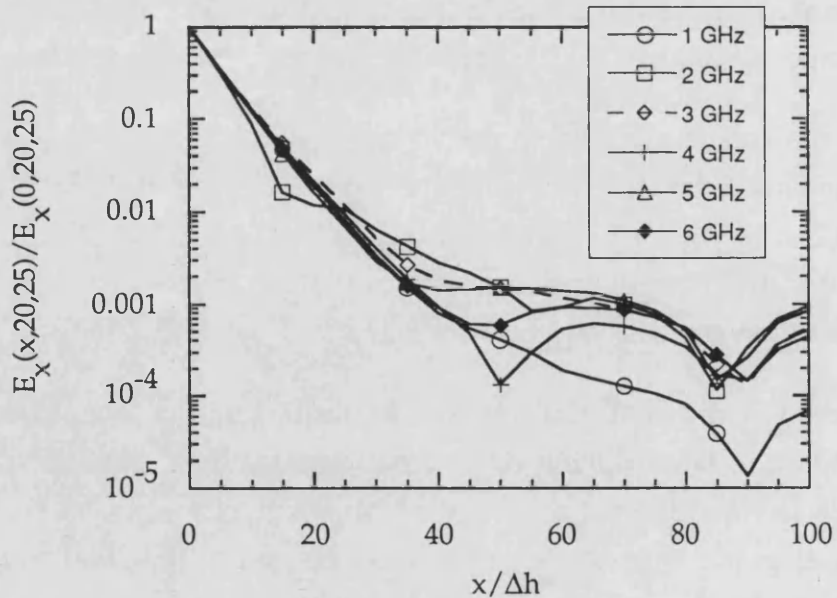


Figura 5.14. Amplitud  $E_x(i,20,25)/E_x(0,20,25)$  en función de la distancia a la pared de excitación en los puntos  $(i,20,25)$ . Los resultados se dan para las frecuencias de 1 a 6 GHz. Excitación longitudinal.

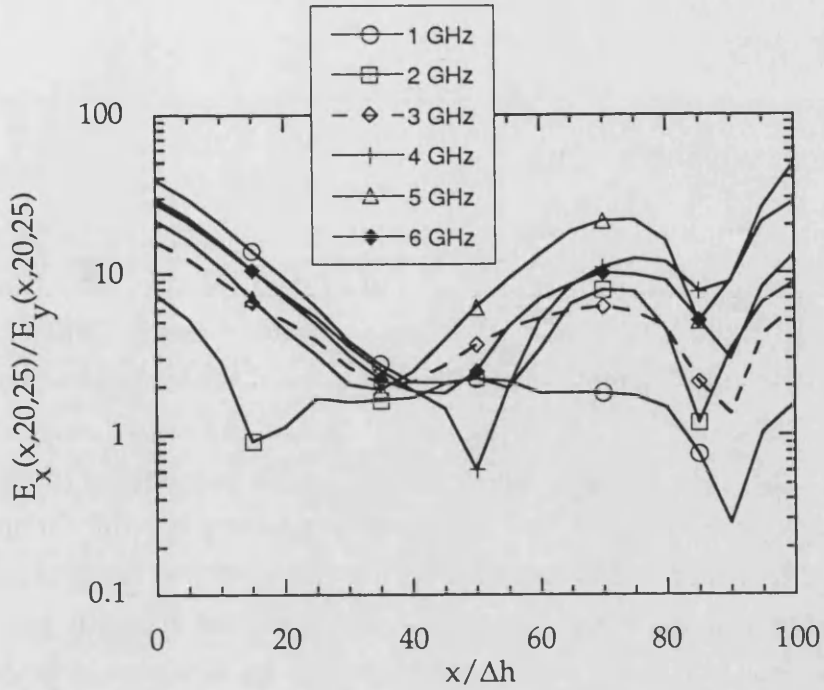


Figura 5.15. Amplitud  $E_x(i,20,25)/E_y(i,20,25)$  en función de la distancia a la pared de excitación en los puntos  $(i,20,25)$ . Los resultados se dan para las frecuencias de 1 a 6 GHz. Excitación longitudinal.

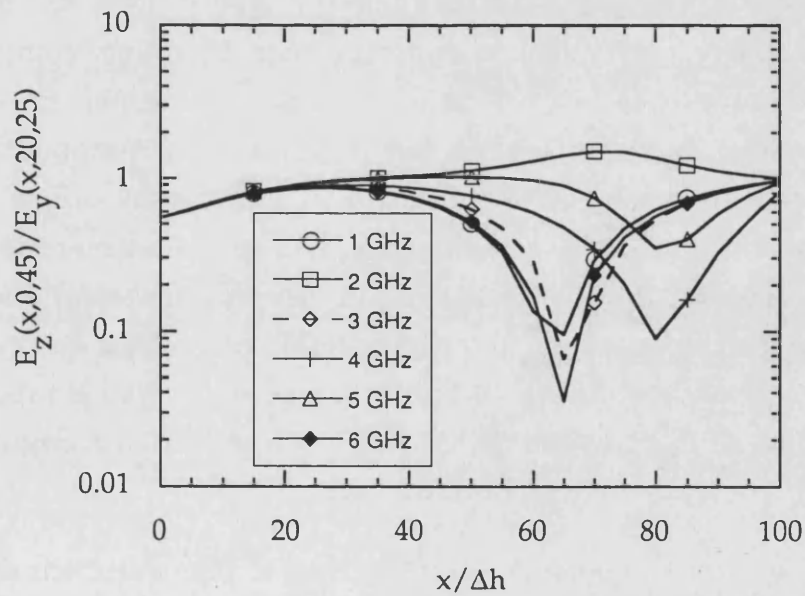


Figura 5.16. Amplitud  $E_z(i,0,45)/E_y(i,20,25)$  en función de la distancia a la pared de excitación. Frecuencias de 1 a 6 GHz. Excitación longitudinal.

## Análisis de resultados

Es obvio que el modo fundamental no se generará en la guía coaxial de modo directo. Este se construye de modo natural tras una transición con una guía cuadrada. En la guía cuadrada se excita el modo TE<sub>10</sub> a la frecuencia deseada, y tras una transición con la guía coaxial, el campo se propaga con la estructura TEM. No se ha simulado tal fenómeno, sino otros similares en los que la excitación en una banda de frecuencia presentaba unas estructuras sencillas del campo, pero sin ninguna semejanza con la estructura TEM. Con estas simulaciones no sólo se ha observado la evolución de las componentes axiales del campo para ver como se atenúan por debajo del corte, también se ha analizado la propagación del campo a lo largo de la guía en su evolución hacia la estructura fundamental. Esto nos permite saber a que distancia de la excitación tenemos el modo fundamental con excitaciones de este tipo. Tras la discontinuidad, también nos permite establecer la distancia a la que situar los planos de referencia.

Se observa que con una distancia a la discontinuidad de alrededor  $2a$ , ( $a$  es la anchura de la guía coaxial) se recupera la estructura del modo fundamental y se atenúan las componentes axiales. Esto se observa en la excitación transversal y en la longitudinal. El único comportamiento anómalo se observa en el caso de excitación longitudinal. En este caso se observa un extraño crecimiento en la evolución de la componente axial con respecto a la transversal, (ver figura 5.16), al avanzar en  $x$ . Este crecimiento carece de sentido físico, y su justificación está en la no generación de campo transversal con este tipo de excitación. El campo transversal que se genera, se debe al ruido numérico del algoritmo DFDT, siendo casi despreciable. Esto se puede corroborar con la figura 5.14 en la que se observa el rápido y brusco decrecimiento de la componente axial del campo eléctrico. Según esto en la figura 5.16, se está comparando ruido numérico.

En cuanto al factor de propagación, que se puede deducir de las figuras 5.8, 5.9, 5.13 y 5.14, este cae dentro del rango de los valores teóricos, pero no se puede asociar a ningún modo particular, porque al efectuar la Transformada Discreta de Fourier no se pueden separar los modos. Otra observación a efectuar, es la misma tendencia que presenta el campo para

todo el rango de frecuencias del estudio. Esta se puede justificar en las altas frecuencias de corte de los modos con componente axial y la escasa variación en frecuencia. Esto hace que los factores de propagación sean aproximadamente iguales. Por otro lado la longitud de la guía es muy reducida, con lo cual también se contribuye con este factor a una menor diferenciación en este comportamiento.

Los resultados obtenidos aconsejan la excitación sintética con estructura TEM. Este tipo de excitación no genera ninguna reflexión en la pared de excitación, por ser el modo propio a estas frecuencias, y permite una fácil separación entre zonas de campo total y de campo reflejado. La excitación con estructuras distintas a la TEM generan discontinuidades del campo, con las correspondientes reflexiones que se agravan por el elevado factor de calidad de la estructura guiadora. Obligan a modelar un pedazo de guía, previo a la discontinuidad, mas largo para asegurar la incidencia de un TEM sobre la discontinuidad. Si las paredes con las CCA no estan suficientemente alejadas, estas estructuras de campo no son TEM al incidir sobre las CCA con lo cual no se absorben bien generando mas reflexiones. Además el procesado de la señal para extraer el campo final incidente y el reflejado se complican mucho mas porque no es posible separar dos zonas de cálculo con campo total y reflejado. El uso de estructuras espaciales no TEM sólo sería posible en caso de utilizar señales temporales de duración finita (pulsos) puesto que en estos casos no se efectúa tal separación. Pero incluso con pulsos, es ventajosa la estructura TEM porque no genera reflexiones. Estas reflexiones en la pared de excitación podrían mezclarse con las del dispositivo llegando a falsear los resultados numéricos.

### 5.3.6. Excitación con señal temporal sintética con estructura espacial TEM. Separación campo total-campo reflejado.

A continuación se describen los campos incidentes TEM y el modo de introducir la excitación separando las zonas de cálculo de campo total y de campo reflejado. Para ello se hace uso del campo transversal TEM deducido del esquema en diferencias finitas del apartado anterior 5.3.2.

En el apartado 5.3.2 se resuelve la estructura espacial TEM. En la celda de Yee (figura 2.1) las componentes del campo están situadas en nodos alternados. Por esa razón se resuelve la ecuación de Laplace, y se calcula el campo transversal (apartado 5.3.2) utilizando el doble de celdas en Diferencias Finitas que en DFDT. De ese modo cada nodo de muestreo de campo en DF se corresponde con un nodo en DFDT. Así se estará calculando el campo en más puntos de los necesarios, porque en DFDT se muestrea el campo en nodos alternados, pero esto nos evitará tener que recurrir a la interpolación, que sería necesaria para calcular el campo si usáramos menos celdas en DF.

El campo eléctrico incidente en  $i_0$  es,

$$\vec{E}_{inc}^n(i_0, j, k) = \sum_{l=1}^m V_l \sin(2\pi f_l n \Delta t) \vec{E}_t(j, k) \quad (5.22)$$

y el campo magnético incidente, media celda espacial por delante es:

$$\vec{H}_{inc}^{n+\frac{1}{2}}(i_0-1, j, k) = \sum_{l=1}^m V_l \sin\left(2\pi f_l \left(n \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\beta \Delta h}{2}\right) \vec{u}_x \wedge \vec{E}_t(j, k) \quad (5.23)$$

siendo  $\vec{E}_t(j, k)$  el campo transversal TEM deducido en 5.3.2.

En las expresiones para  $\vec{H}_{inc}^{n+1/2}$  y  $\vec{E}_{inc}^n$  hay que tener en cuenta que el

origen de su numeración es distinto (ver apartado 2.6.1).

Haciendo uso de las ecuaciones (2.46.a) y (2.46.b) la excitación se introduce en  $i_0$ :

$$E_y^{n+1}(i_0, j, k) = E_y^{n+1}(i_0, j, k) \Big|_{yee} + C H_z^{n+\frac{1}{2}} \text{inc}(i_0-1, j, k) \quad (5.24.a)$$

$$E_z^{n+1}(i_0, j, k) = E_z^{n+1}(i_0, j, k) \Big|_{yee} - C H_y^{n+\frac{1}{2}} \text{inc}(i_0-1, j, k) \quad (5.24.b)$$

siendo  $C = \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta h}$

y  $H_z^{n+\frac{1}{2}} \text{inc}$ ,  $H_y^{n+1} \text{inc}$  las componentes del campo magnético incidente.

La eliminación del campo incidente medio paso espacial antes de  $i_0$  se hace con las expresiones (2.52.a) y (2.52.b) con la reordenación del apartado 2.6.1.

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_0-1, j, k) = H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_0, j, k) \Big|_{yee} - D E_z^n \text{inc}(i_0, j, k) \quad (5.25.a)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i_0-1, j, k) = H_z^{n+\frac{1}{2}}(i_0, j, k) \Big|_{yee} + D E_y^n \text{inc}(i_0, j, k) \quad (5.25.b)$$

siendo  $D = \frac{\Delta t}{\mu \Delta h}$ ,

y  $E_z^n \text{inc}$  y  $E_y^n \text{inc}$  las componentes del campo eléctrico incidente.



### Resultados numéricos

La figura 5.17 muestra  $H_x(x,20,25)/H_z(x,20,25)$ , la figura 5.18  $E_x(x,20,25)/E_y(x,20,25)$  y la figura 5.19  $E_y(x,20,25)/E_z(x,0,45)$  de  $i = x/\Delta h = -100$  a  $i = 100$ . La figura 5.20 muestra la amplitud de  $E_y(x,20,25)$  de  $i = -100$  a  $i = 100$  donde asimismo se aprecia la amplitud del campo reflejado.

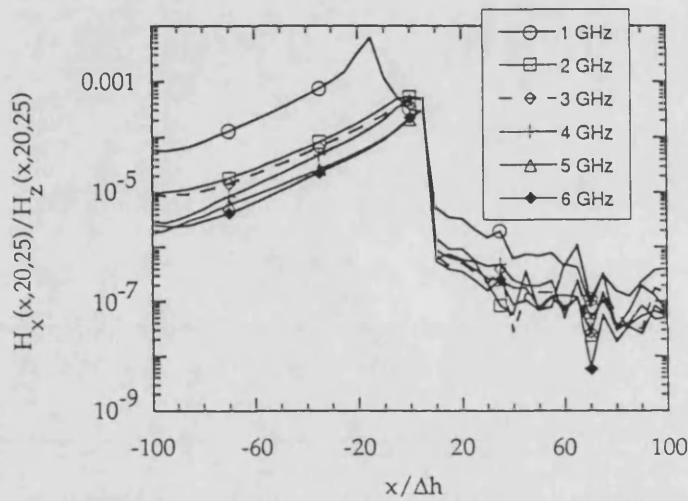


Figura 5.17. Amplitud  $H_x(i,20,25)/H_z(i,20,25)$ , de  $i=-100$  a  $i=100$ , ( $i=x/\Delta h$ ).  
Excitación con estructura espacial TEM en  $i=0$ .

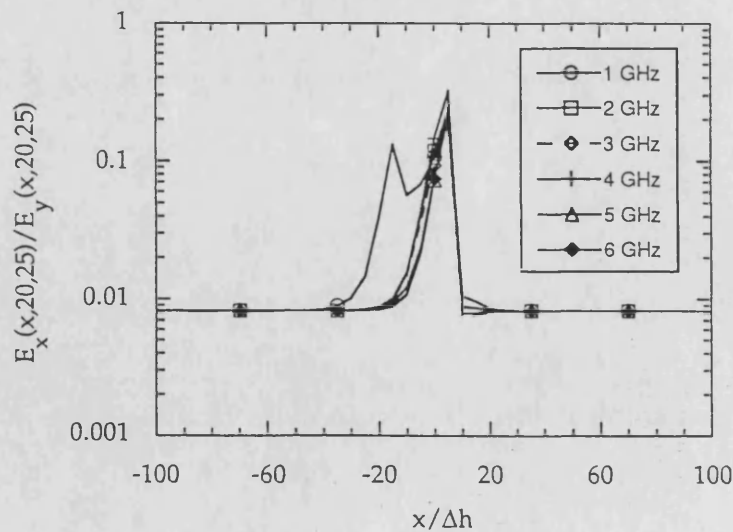


Figura 5.18. Amplitud  $E_x(i,20,25)/E_y(i,20,25)$ , de  $i=-100$  a  $i=100$ , ( $i=x/\Delta h$ ).  
Excitación con estructura espacial TEM en  $i=0$ .

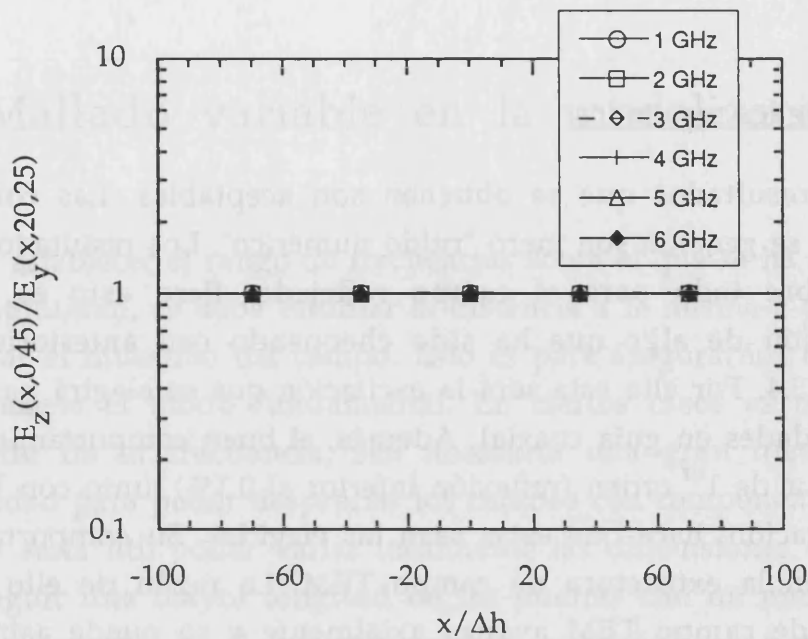


Figura 5.19. Amplitud  $E_z(i,0,45)/E_y(i,20,25)$ , de  $i=-100$  a  $i=100$ , ( $i=x/\Delta h$ ). Excitación con estructura espacial TEM en  $i=0$ . Resultados para frecuencias de 1 a 6 GHz.

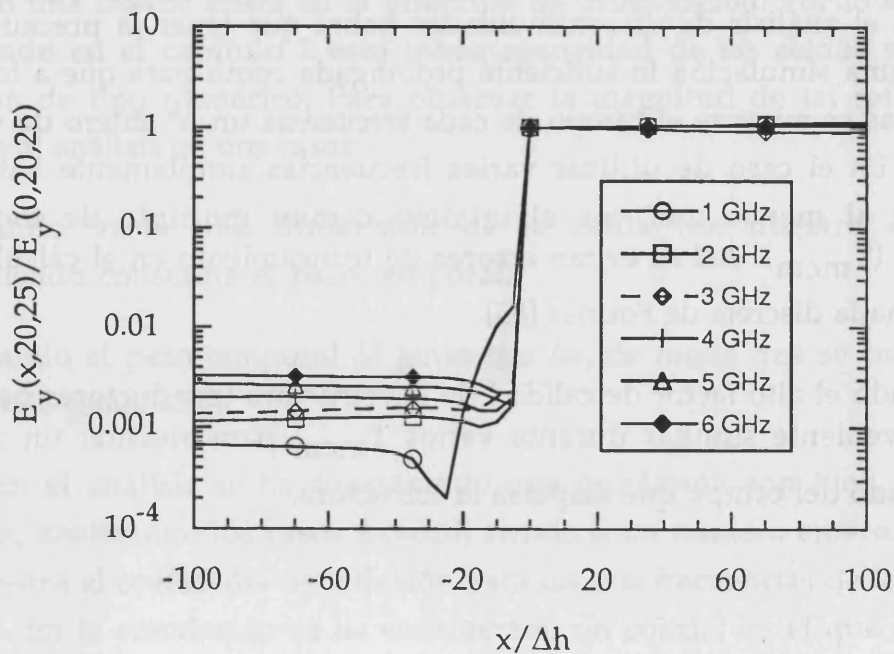


Figura 5.20. Amplitud  $E_y(i,20,25)/E_y(0,20,25)$  de  $i=-100$  a  $i=100$ , ( $i=x/\Delta h$ ). Excitación con estructura espacial TEM en  $i=0$ . Resultados para frecuencias de 1 a 6 GHz.

## Discusión de los resultados

Los resultados que se obtienen son aceptables. Las componentes axiales que se generan son mero "ruido numérico". Los resultados son muy buenos sobre todo para el campo reflejado. Pero esto es una mera comprobación de algo que ha sido chequeado con anterioridad, en el apartado 5.3.4. Por ello esta será la excitación que se elegirá para analizar discontinuidades en guía coaxial. Además, el buen comportamiento de las CCA de Mur de 1<sup>er</sup> orden (reflexión inferior al 0.1%) junto con la sencillez de su aplicación, hace que estas sean las elegidas. Su comportamiento es perfecto con la estructura de campo TEM. La razón de ello es que la estructura de campo TEM avanza axialmente y se puede asimilar a un conjunto de ondas planas que viajan en la dirección de la guía. Si las CCA se definen transversalmente a la guía, y sobre estas incide una estructura TEM perfecta, entonces la absorbe perfectamente porque serán ondas planas que inciden normalmente, y en este caso las CCA de Mur de 1<sup>er</sup> orden funcionan a la perfección.

En el análisis de discontinuidades habrá que tener la precaución de efectuar una simulación lo suficiente prolongada como para que a todas las frecuencias se muestre el campo de cada frecuencia un  $n^{\circ}$  entero de veces el periodo. En el caso de utilizar varias frecuencias simplemente habrá que mostrar al menos una vez el mínimo común múltiplo de todos sus periodos ( $T_{mcm}$ ). Así se evitan errores de truncamiento en el cálculo de la transformada discreta de Fourier [85].

Dado el alto factor de calidad de la estructura (conductores perfectos) será conveniente simular durante varios  $T_{mcm}$  para efectuar un correcto promediado del campo que dispersa la estructura.

### 5.3.7. Mallado variable en la modelización del coaxial.

Tras establecer el rango de frecuencias sobre el que se ha de analizar una discontinuidad, se debe estudiar la distancia a la misma a partir de la cual efectuar el muestreo del campo. Esto es para asegurarnos que en este punto ya existe el modo fundamental. En ciertos casos es posible que dependiendo de la frecuencia, sea necesaria una gran distancia a la discontinuidad para poder despreciar los campos con componente axial. En estos casos sería útil poder variar localmente las dimensiones de la celda para conseguir una mayor longitud de las puertas con un menor uso de recursos de memoria. En el presente apartado se analiza esta posibilidad, la de variar la dimensión  $\Delta x$  de la celda unidad, que es la que corresponde a la dirección de propagación. Se definiría la zona de la discontinuidad con un mallado uniforme con celdas cúbicas que se prolongaría por las puertas, luego este conectaría con otro mallado con celdas paralelepípedicas que conservarían la resolución en la sección transversal de la guía; éstas sólo tendrían una mayor arista en la dirección de propagación. Por lo que se ha comentado en el capítulo 2 esta inhomogeneidad de las celdas producirá reflexión de tipo numérico. Para observar la magnitud de tal reflexión se procede al análisis en dos casos:

- a) Cuando varía una dimensión de la celda (en nuestro caso  $\Delta x$ ) manteniendo constante el paso temporal.
- b) Variando el paso temporal  $\Delta t$  junto con  $\Delta x$ , de modo que se conserve la relación de estabilidad.

En el análisis se ha considerado que  $\Delta y = \Delta z = \Delta h$  son fijos, y que se varía  $\Delta x$ , analizando los casos  $\Delta x = \alpha \Delta h$  siendo  $\alpha$  un número entero. La tabla 5.II muestra el coeficiente de reflexión para las seis frecuencias de los análisis previos. En la simulación se ha considerado un coaxial en el que el primer tramo de  $40\Delta x$  se ha mallado con  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta h$  y el último pedazo de longitud  $10\Delta x$  se ha mallado con  $\Delta y = \Delta z = \Delta h$  y  $\Delta x = \alpha \Delta h$ , variando  $\alpha$  desde 1 hasta 5.

TABLA 5.II. Coeficiente de reflexión por cambio de mallado en %.

f (GHz)	$\alpha$				
	1	2	3	4	5
1.0	0.2488	1.36	2.61	3.94	4.27
2.0	0.1240	1.34	2.54	3.85	4.16
3.0	0.0826	1.51	2.45	3.75	4.07
4.0	0.0616	1.45	2.38	3.69	4.07
5.0	0.0487	1.40	2.35	3.74	4.21
6.0	0.0399	1.38	2.40	3.90	4.48

El tratamiento b) con la correspondiente modificación del paso temporal mejora estos resultados en aproximadamente un 1%. Los detalles de cálculo en este caso se muestran en el Apéndice 5.A.

La conclusión de estos números es que el error introducido con un mallado variable es aceptable. El uso de mallado variable en la modelización de discontinuidades en coaxial y el factor multiplicativo  $\alpha$  a utilizar dependerá de las dimensiones de la discontinuidad y de la precisión que deseemos obtener. En los siguientes análisis no se usa; la razón de ésta decisión estriba en que se disponen de suficientes recursos informáticos, por otro lado se desean obtener resultados numéricos que gocen de las máximas garantías de precisión.

## 5.4. Análisis de una guía coaxial rellena de dieléctrico.

Una forma de comprobar la validez del modelado del coaxial y del algoritmo DFDT en tres dimensiones, es la de abordar un problema simple con solución analítica. La geometría del caso que se trata es simple, se considera un coaxial cuadrado de los modelados con anterioridad, en el que se introduce una sección de longitud finita con constante dieléctrica distinta. La figura 5.21 muestra la geometría del problema.

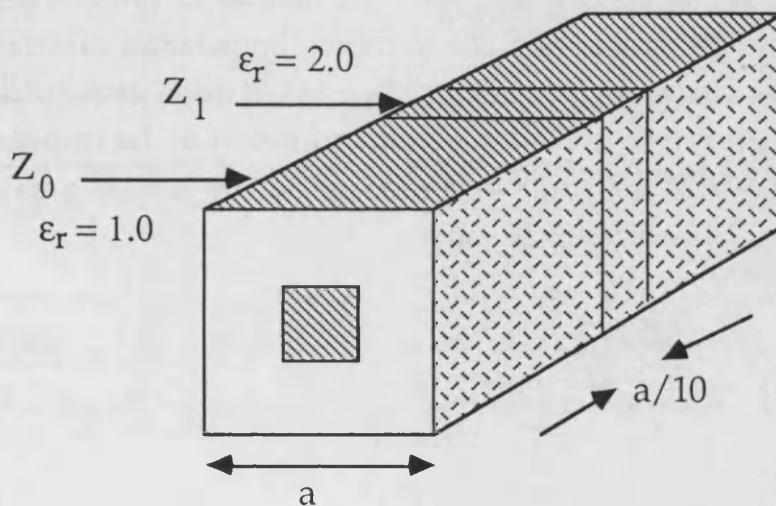


Figura 5.21. Problema de prueba.

El modelado se efectúa para una guía coaxial cuadrada de impedancia característica  $50 \Omega$ , y el grosor de la sección dieléctrica se toma  $a/10$ , siendo  $a=10$  mm la dimensión del conductor exterior. La constante dieléctrica relativa en la sección se considera  $\epsilon_r=2.0$ . El estudio se lleva a cabo para frecuencias de 1 a 6 GHz, (banda usual de operación de esta línea), por esa razón se toma una excitación sintética de 1 a 6 GHz, con estructura espacial transversal TEM.

La longitud de guía simulada es  $2a$ . La discretización con celdas cúbicas con  $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta h=a/50$  permite situar la excitación en  $x=20\Delta h$ . La sección dieléctrica estará entre  $x=50\Delta h$  y  $x=70\Delta h$ , tomando como constante  $\epsilon_r$

en estas láminas de separación la media de la de ambos lados (ver apartado 2.6.3 del capítulo 2).

Se efectúan dos simulaciones, una para un periodo de la frecuencia mas baja (que serán seis de la mas alta) y otra para cuatro periodos. La Transformada de Fourier se lleva a cabo a partir del instante en que la onda a llegado al final del pedazo de guía simulado. Para ello se considera que la onda avanza un paso espacial en dos pasos temporales (ya que la relación entre ambos es  $\Delta t = \Delta h / 2c$  ).

Los parámetros de dispersión se pueden calcular directamente usando técnicas clásicas de teoría de circuitos [115]. Se modela la estructura como una cascada de líneas de transmisión con la misma impedancia característica y con las longitudes eléctricas que tiene cada pedazo de la estructura (con cada  $\epsilon_r$ ). Los parámetros S se pueden deducir en función de las impedancias características y del retraso temporal en la propagación de la onda a través de la sección dieléctrica. Las expresiones son :

$$|S_{11}(f)|^2 = \frac{\left(\frac{Z_0}{Z_1} - \frac{Z_1}{Z_0}\right)^2 \text{sen}^2(2\pi f\tau)}{4 + \left(\frac{Z_0}{Z_1} - \frac{Z_1}{Z_0}\right)^2 \text{sen}^2(2\pi f\tau)} \quad (5.26)$$

$$|S_{12}(f)|^2 = 1 - |S_{11}(f)|^2 \quad (5.27)$$

En nuestro caso  $Z_0 = 50 \Omega$  ( $\epsilon_r = 1.0$ ),  $Z_1 = 50/\sqrt{2} \Omega$  ( $\epsilon_r = 2.0$ ), y  $\tau = 20\Delta h/c$ .

La tabla 5.III.a muestra los resultados numéricos comparados con los analíticos para la simulación durante un periodo de 1 GHz. La tabla 5.III.b muestra los resultados calculando la TDF durante cuatro periodos.

TABLA 5.III.a. Resultados para TDF durante un periodo de  $f=1\text{GHz}$ .

f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{12}$ (numérico)	0.9994	0.9965	0.9926	0.9873	0.9815	0.9752
$S_{12}$ (analítico)	0.9984	0.9937	0.9864	0.9770	0.9660	0.9546
desv %	0.10	0.28	0.60	1.10	1.60	2.20
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{11}$ (numérico)	0.0415	0.0827	0.1222	0.1595	0.1939	0.2250
$S_{11}$ (analítico)	0.0565	0.1116	0.1642	0.2133	0.2580	0.2979
desv %	26.00	26.00	26.00	25.00	25.00	24.00
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$ S_{12} ^2 +  S_{11} ^2$	1.0005	0.9999	0.9999	1.0002	1.0009	1.0016



TABLA 5.III.b. Resultados para TDF durante cuatro periodos de  $f=1\text{GHz}$ .

f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{12}$ (numérico)	0.9966	0.9922	0.9870	0.9828	0.9791	0.9748
$S_{12}$ (analítico)	0.9984	0.9937	0.9864	0.9770	0.9660	0.9546
desv %	0.17	0.15	0.06	0.60	1.30	2.10
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{11}$ (numérico)	0.0418	0.0829	0.1223	0.1595	0.1937	0.2244
$S_{11}$ (analítico)	0.0565	0.1116	0.1642	0.2133	0.2580	0.2979
desv %	26.00	26.00	25.00	25.00	25.00	25.00
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$ S_{12} ^2 +  S_{11} ^2$	0.9950	0.9913	0.9892	0.9914	0.9962	1.0006

La conclusión de este apartado es que el algoritmo es coherente (se conserva muy bien la potencia) y que la modelización es adecuada. Los resultados para el coeficiente de transmisión son aceptables, la desviación respecto resultados analíticos es inferior al 2% siendo en algunos casos del 0.6 0/00. Para el coeficiente de reflexión la desviación es mayor debido a que se comparan numeros muy pequeños, en los cuales influyen errores de truncamiento, discretización, y la pequeña reflexión de las CCA situadas en  $x=0$  y en  $x=100\Delta h$ . Los resultados empeoran alargando el cálculo de la TDF durante cuatro periodos. La causa se encuentra en la acumulación en la Transformada de Fourier del ruido numérico comentado antes.

## 5.5. Análisis de una unión T simétrica en guía coaxial cuadrada.

La figura 5.22 muestra la discontinuidad. El brazo principal (puerta 1 a puerta 2) es coaxial de relación  $\frac{b_1}{a} = 0'4$  con  $a = 10$  mm. La impedancia característica de esta línea es  $50 \Omega$  (apartado 5.3.2). El brazo secundario (puerta 3) es una línea coaxial de relación  $\frac{b_2}{a} = 0'29$  con  $a = 10$  mm y con impedancia característica de  $70'4 \Omega$ .

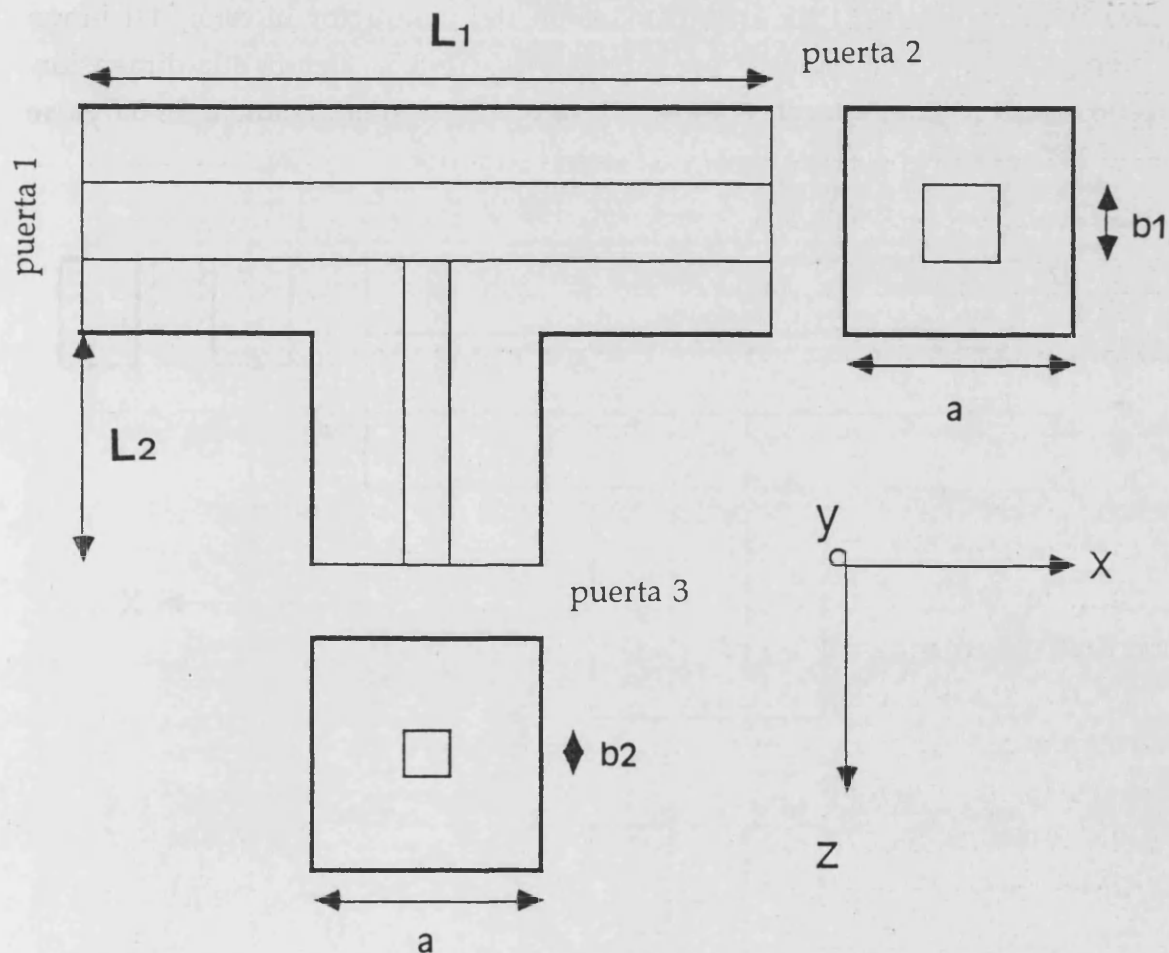


Figura 5.22. Unión T simétrica en guía coaxial cuadrada.

### 5.5.1. Modelado.

Se usan dos matrices, una para el pedazo de guía que va de la puerta 1 a la puerta 2 (brazo principal) y otro para la puerta 3. La estructura es simétrica en el plano horizontal que pasa por el centro de las guías, esto permite seguir con el modelado introducido en el apartado 5.3.3 para un pedazo de guía, estableciendo una pequeña variación para efectuar la conexión entre los dos brazos. El modelado de la unión T se muestra en la figura 5.23. Se definen ocho zonas paralelepípedicas, A, B, C, D, E, F, G. Las paredes magnéticas se han indicado con líneas discontinuas y las eléctricas con líneas continuas. Las caras en el plano x-z superiores son eléctricas y las inferiores magnéticas, exceptuando las zonas B,F y H que también tienen la cara inferior eléctrica.  $b_1$  es la dimensión del conductor interior del brazo principal y  $b_2$  del secundario y se toma  $L_1=7a$ ,  $L_2=3.5a$ , siendo  $a$  la dimensión del conductor exterior, pues se considera que para una distancia de  $3a$  ya se han disipado los posibles modos de orden superior.

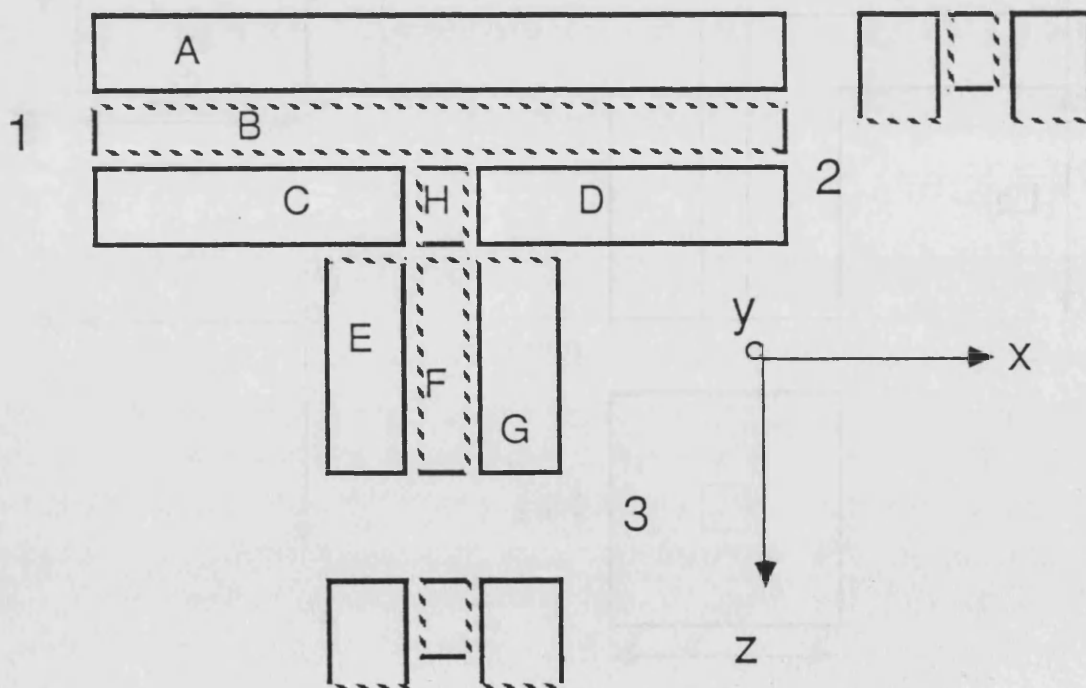


Figura 5.23. Modelado de la T simétrica.

Con esto, los límites de cada zona son los siguientes, con sus correspondientes códigos de paredes:

C

C DIMENSIONAMIENTO

C

$$BTIACEX=a/\Delta h$$

$$BTIHCEX=a/2\Delta h$$

$$BTIACI1=b1/\Delta h$$

$$BTIHCI1=b1/2\Delta h$$

$$BTIACI2=b2/\Delta h$$

$$BTIHCI2=b2/2\Delta h$$

$$BTILOP1=L1$$

$$BTILOP2=L2$$

C

C ZONA A

C

$$BTIIXAA=0$$

$$BTISXAA=BTILOP1$$

$$BTIIYAA=0$$

$$BTISYAA=BTIHCEX$$

$$BTIIZAA=0$$

BTISZAA=(BTIACEX-BTIACI1)/2

C

C        ZONA B

C

BTIIXBB=0

BTISXBB=BTILOP1

BTIYYBB=BTIHCI2

BTISYBB=BTIHCEX

BTIIZBB=((BTIACEX-BTIACI1)/2)

BTISZBB=((BTIACEX+BTIACI1)/2)

C

C        ZONA C

C

BTIIXCC=0

BTISXCC=(BTILOP1-BTIACI2)/2

BTIYYCC=0

BTISYCC=BTIHCEX

BTIIZCC=(BTIACEX+BTIACI2)/2

BTISZCC=BTIACEX

C

C        ZONA D

C

$$BTIXDD=(BTILOP1+BTIACI2)/2$$

$$BTISXDD=BTILOP1$$

$$BTIYDD=0$$

$$BTISYDD=BTIHCEX$$

$$BTIIZDD=(BTIACEX+BTIACI2)/2$$

$$BTISZDD=BTIACEX$$

C

C        ZONA H

C

$$BTIXHH=(BTILOP1-BTIACI2)/2$$

$$BTISXHH=(BTILOP1+BTIACI2)/2$$

$$BTIYHH=BTIHCI1$$

$$BTISYHH=BTIHCEX$$

$$BTIIZHH=(BTIACEX+BTIACI2)/2$$

$$BTISZHH=BTIACEX$$

C

C        ZONA E

C

$$BTIXEE=0$$

$$BTISXEE=BTILOP2$$

BTIYEE=0

BTISYEE=BTIHCEX

BTIIZEE=(BTIACEX+BTIACI1)/2

BTISZEE=BTIACEX

C

C       ZONA F

C

BTIIXFF=0

BTISXFF=BTILOP2

BTIYFF=BTIHCI1

BTISYFF=BTIHCEX

BTIIZFF=(BTIACEX-BTIACI1)/2

BTISZFF=(BTIACEX+BTIACI1)/2

C

C       ZONA G

C

BTIIXGG=0

BTISXGG=BTILOP2

BTIYGG=0

BTISYGG=BTIHCEX

BTIIZGG=0

$$BTISZGG=(BTIACEX-BTIACI1)/2$$

C

### Conexión brazo principal-brazo secundario

La conexión entre las matrices de los dos pedazos de guía (matrices 1 y 2) se efectúa solapando un conjunto de celdas tal como muestra la figura 5.24. En este dibujo se han utilizado índices con subíndices para diferenciar los índices de cada matriz. Las componentes tangenciales del campo eléctrico están situadas en las caras del cubo de Yee (líneas continuas de la figura 5.24), y las componentes tangenciales del campo magnético en el interior del cubo (líneas discontinuas de la figura 5.24).

La conexión dentro del algoritmo DFDT se explica a continuación:

- Se hace  $E_{\text{tangencial } 2} \big|_{\text{en A}} = E_{\text{tangencial } 1} \big|_{\text{en A}}$  (conexión 1-> 2)
- Se calcula  $\vec{H}$  en todas partes
- Se hace  $H_{\text{tangencial } 1} \big|_{\text{en B}} = H_{\text{tangencial } 2} \big|_{\text{en B}}$  (conexión 2-> 1)
- Se calcula  $\vec{E}$  en todas partes

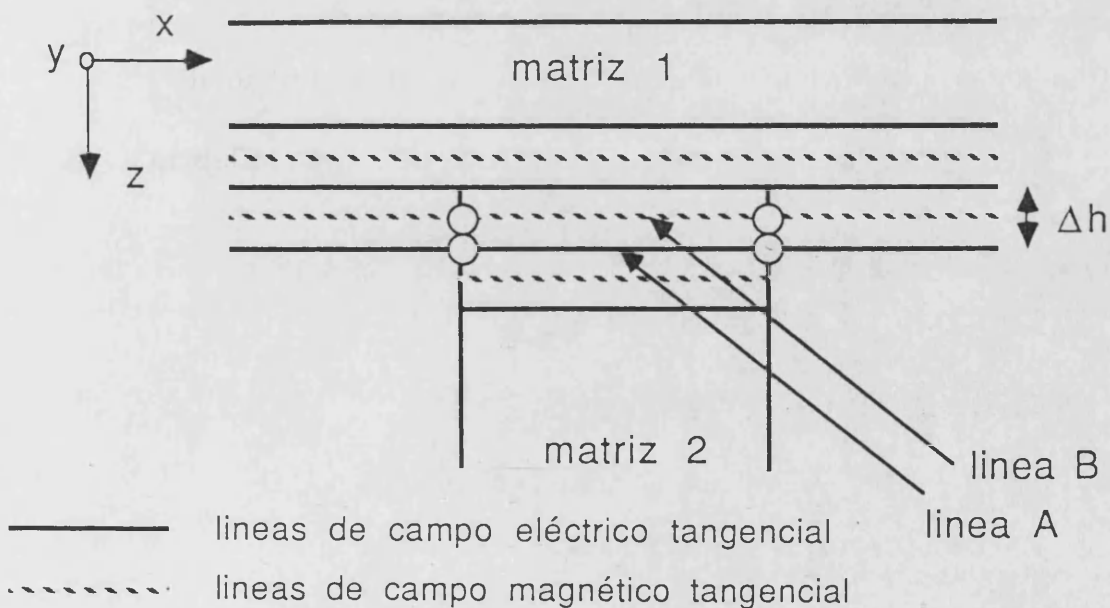


Figura 5.24. Conexión de matriz 1 a matriz 2.



## 5.5.2. Esquema del programa principal.

El programa principal fluye con los siguientes bloques:

### Entradas

- Entrada de datos referentes a dimensiones de las guías y distancias.
- Cálculo de los bordes de cada zona.
- Entrada de las frecuencias temporales de que consta la excitación ( $f_1$  de la ecuación (5.22))
- Distancia de la excitación a la puerta de entrada.

### Bloque DF

- Obtención del modo fundamental en la guía con la excitación.
- Cálculo de la impedancia característica de cada guía.

### Bloque DFDT

- Desde  $n=1$  hasta  $n=N$ 
  - se introduce la excitación en zona de campo total
  - se elimina la excitación en zona de campo reflejado
  - Cálculo del campo eléctrico en matriz 2
    - $b_{tipo}=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ .
    - se efectúa conexión 1- $\rightarrow$  2.
    - se calcula el campo eléctrico en A,C,D
    - $b_{tipo}=(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)$ .
    - se calcula el campo eléctrico en B

- $b_{\text{tipo}}=(1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$ .
- se calcula el campo eléctrico en H
- CCA sobre  $E_z, E_y$  en puerta 1
- CCA sobre  $E_z, E_y$  en puerta 2
- Cálculo del campo eléctrico en matriz 1
  - se efectúa conexión 2- $\rightarrow$  1.
  - $b_{\text{tipo}}=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ .
  - se calcula el campo eléctrico en E,G
  - $b_{\text{tipo}}=(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)$ .
  - se calcula el campo eléctrico en F
  - $b_{\text{tipo}}=(1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$ .
  - se calcula el campo eléctrico en H
  - CCA sobre  $E_z, E_y$  en puerta 3
- Cálculo del campo magnético en matriz 2
  - $b_{\text{tipo}}=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ .
  - se efectúa conexión 1- $\rightarrow$  2.
  - se calcula el campo magnético en A,C,D
  - $b_{\text{tipo}}=(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)$ .
  - se calcula el campo magnético en B
  - $b_{\text{tipo}}=(1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$ .
  - se calcula el campo magnético en H

- CCA sobre Hx en puerta 1
- CCA sobre Hx en puerta 2
- Cálculo del campo magnético en matriz 1
  - se efectúa conexión 2-> 1.
  - btipo=(0 0 0 0 0 0).
  - se calcula el campo magnético en E,G
  - btipo=(0 0 0 0 1 1).
  - se calcula el campo magnético en F
  - btipo=(1 0 1 0 0 0).
  - se calcula el campo magnético en H
  - CCA sobre Hx en puerta 3
- TDF sobre las componentes del campo en los puntos de interés.
- Fin de la simulación DFDT.

### 5.5.3. Resultados numéricos.

#### Evolución de un pulso temporal

Se introduce por la puerta 1 un pulso temporal Gaussiano con estructura transversal TEM idéntico al utilizado en el apartado 5.3.4 y con el mismo esquema. Las figuras 5.25.a-f muestran la evolución del pulso a lo largo de la unión T en varios instantes temporales. Estas figuras representan  $E_y(i,20,k)$  en varios instantes temporales. Se observa la disipación del pulso a través de las tres puertas de la discontinuidad. Tras la desaparición de la parte principal del pulso por las puertas queda un cierto nivel de campo que

tarda mucho tiempo en salir de la estructura. Esto es debido a la ausencia de pérdidas en el modelado. Las reflexiones sucesivas en el conductor tardan mucho en atenuarse ya que la única forma de que se pierda potencia es a través de las puertas de salida donde están definidas las condiciones de contorno absorbentes (figuras 5.25.e-f).

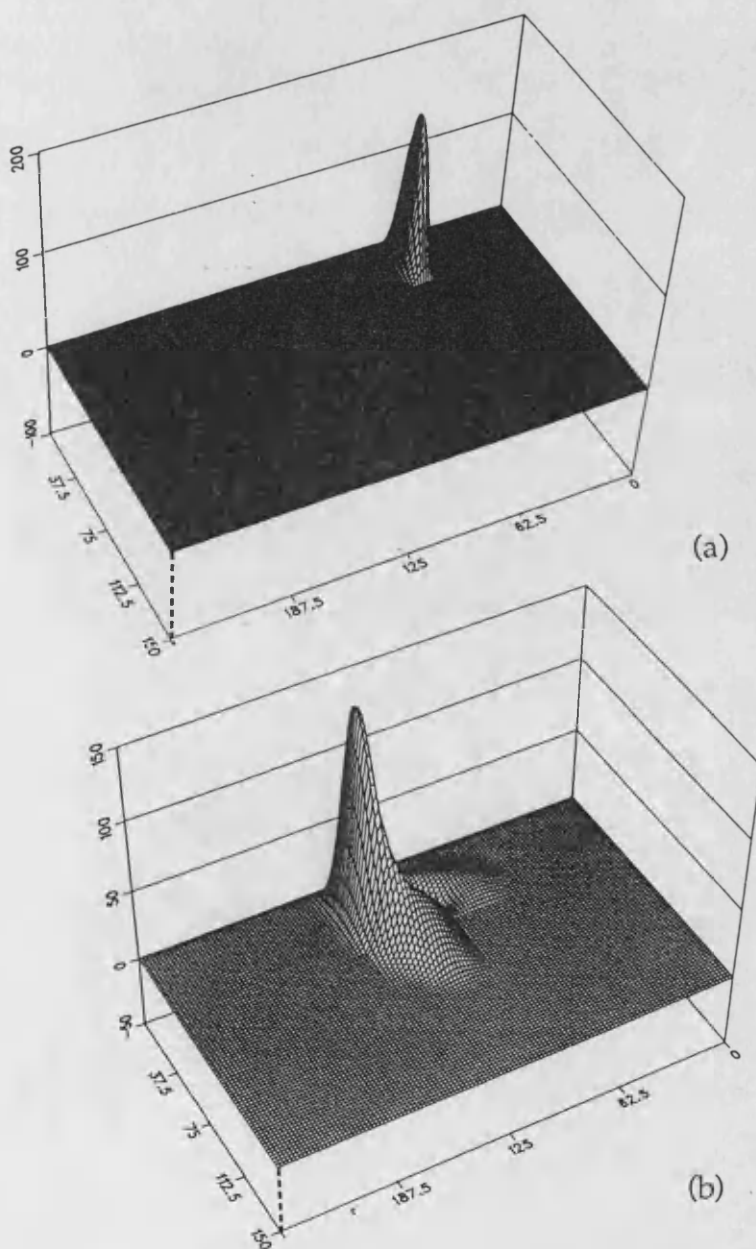
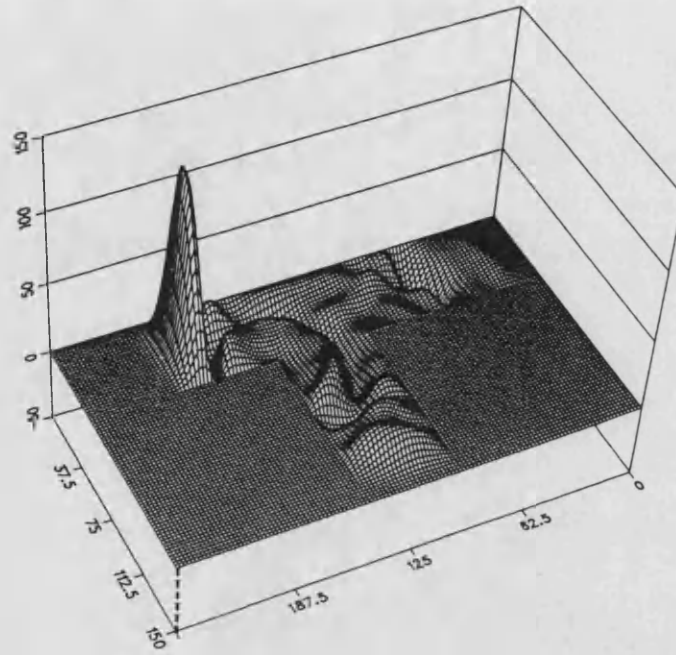
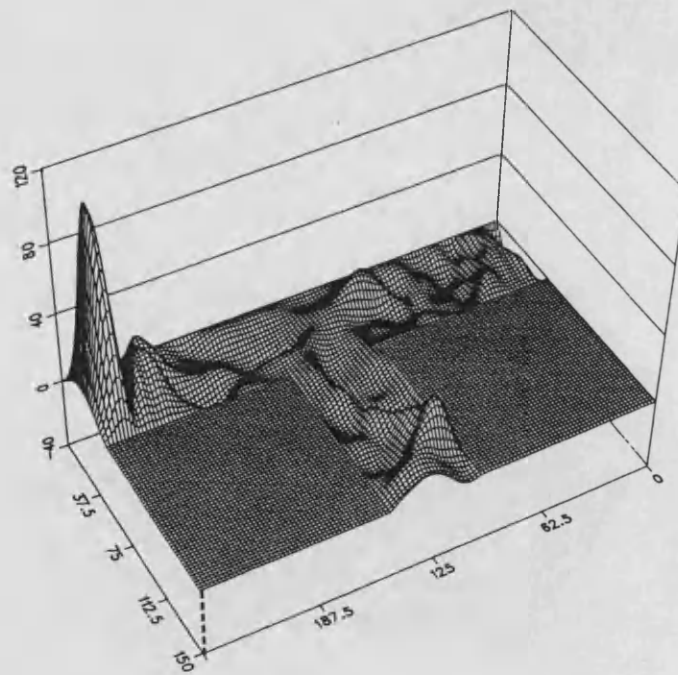


Figura 5.25.a)  $t = 400\Delta t$ ; b)  $t = 500\Delta t$ .

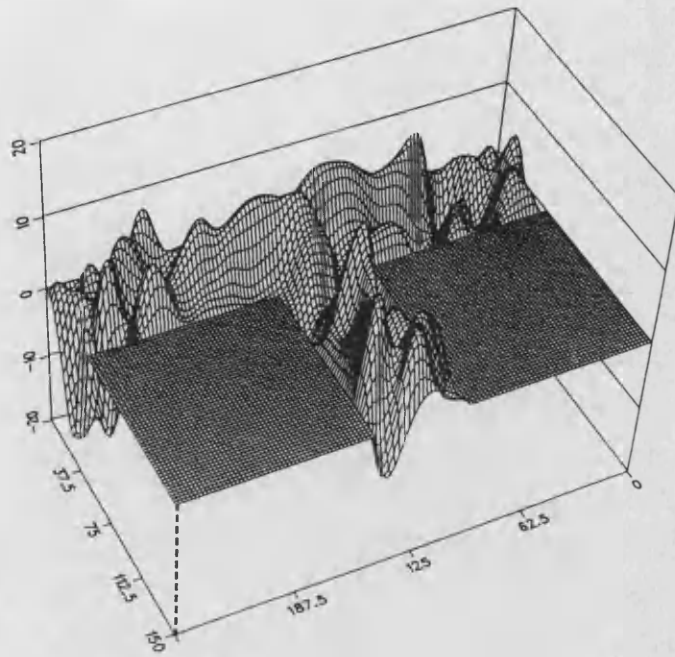


(c)

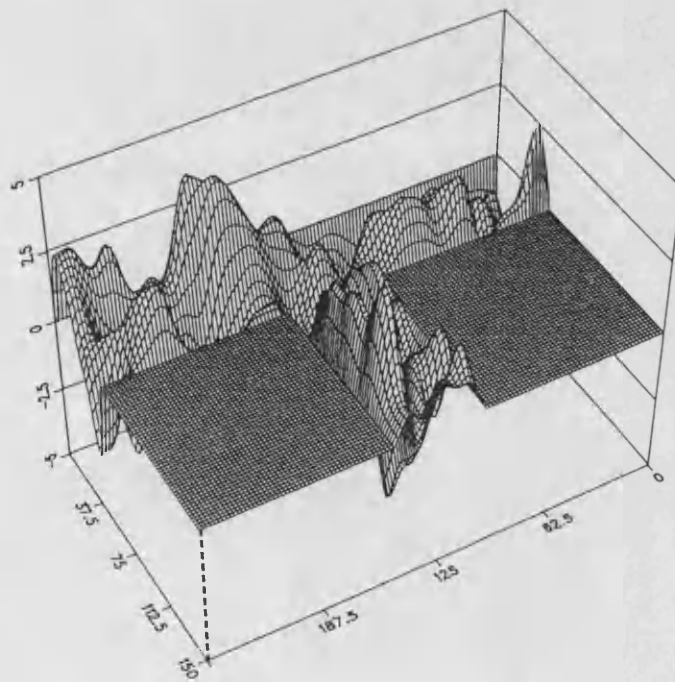


(d)

Figura 5.25.c)  $t = 600\Delta t$ ; d)  $t = 700\Delta t$ .



(e)



(f)

Figura 5.25.e)  $t = 800\Delta t$ ; f)  $t = 1800\Delta t$ .

### Parámetros de dispersión de la T

Para la simulación se usan seis matrices, tres para las puertas 1-2 de  $270 \times 25 \times 50$  de reales de 4 bytes, y otras tres de  $100 \times 25 \times 50$  para la puerta 3.

Se introduce por la puerta 1, en  $i=50$ , una señal temporal sintética de seis armónicos de 1 a 6 GHz con estructura transversal TEM idéntica a la utilizada en el apartado 5.3.6. Se elige este tipo de excitación por comodidad, no habrá reflexiones de tipo numérico porque estas frecuencias tienen una alta resolución espacial, y por otro lado son suficientes para comparar con las medidas experimentales para un prototipo de estas características. La Transformada Discreta de Fourier (TDF) se efectúa sobre el campo transmitido a las puertas 2 y 3 así como sobre el reflejado en la puerta 1. Para verificar la reconstrucción del modo fundamental tras la discontinuidad (de la cual no se duda por los análisis efectuados con anterioridad en el apartado 5.3.5), se visualiza  $E_y(i,20,k)$  en varios instantes temporales para una excitación con una sola frecuencia. Las figuras 5.26.a-d son para la frecuencia más baja (1 GHz) y las figuras 5.27.a-d para la más alta (6 GHz).

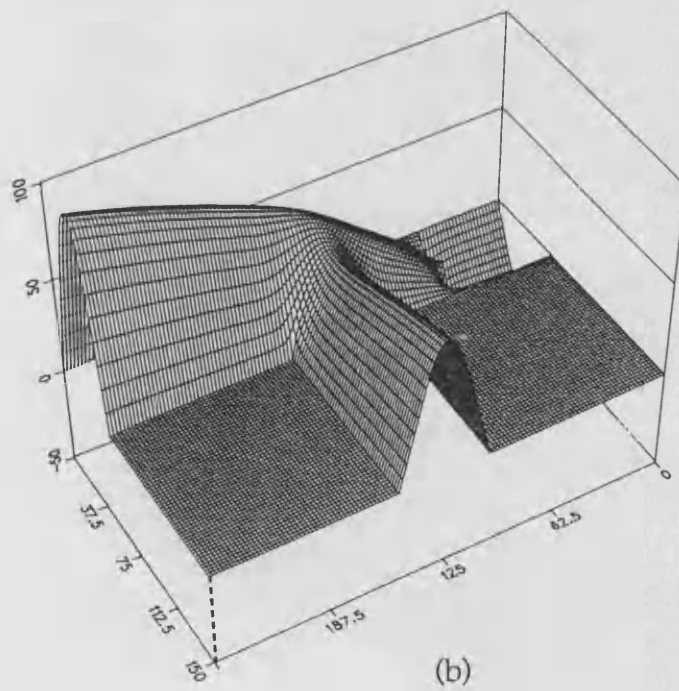
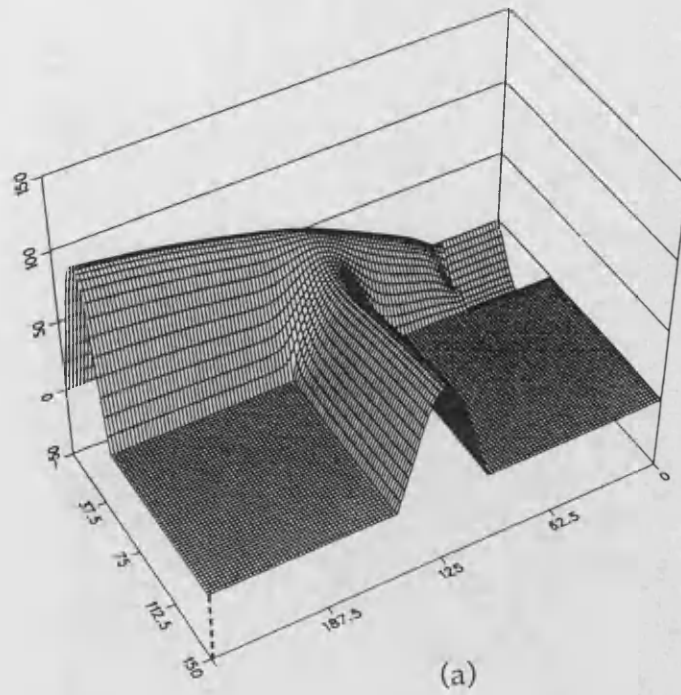


Figura 5.26.a)  $t = 1200\Delta t$ , b)  $t = 1300\Delta t$ .



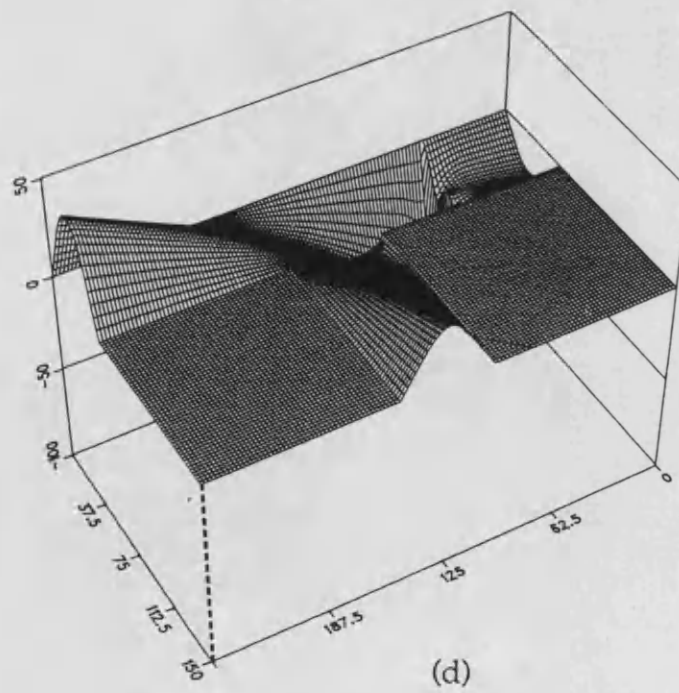
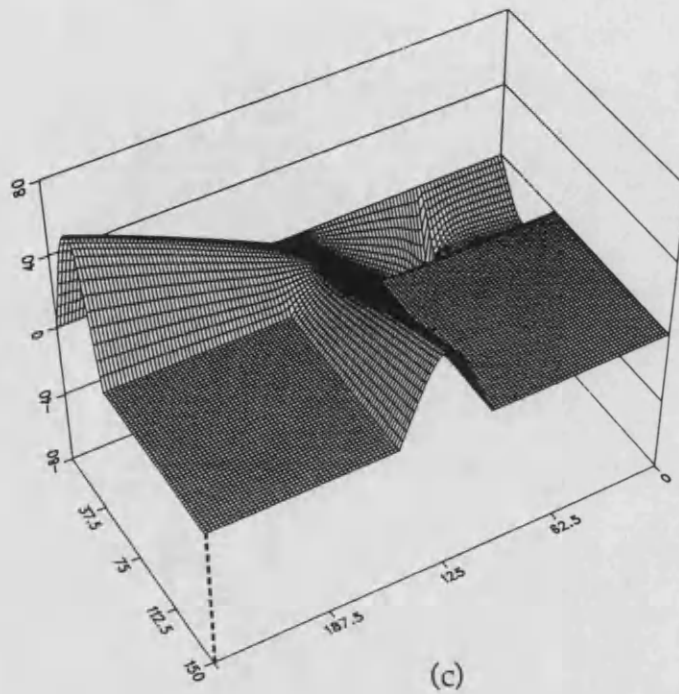


Figura 5.26.c)  $t = 1500\Delta t$ , d)  $t = 1600\Delta t$ .

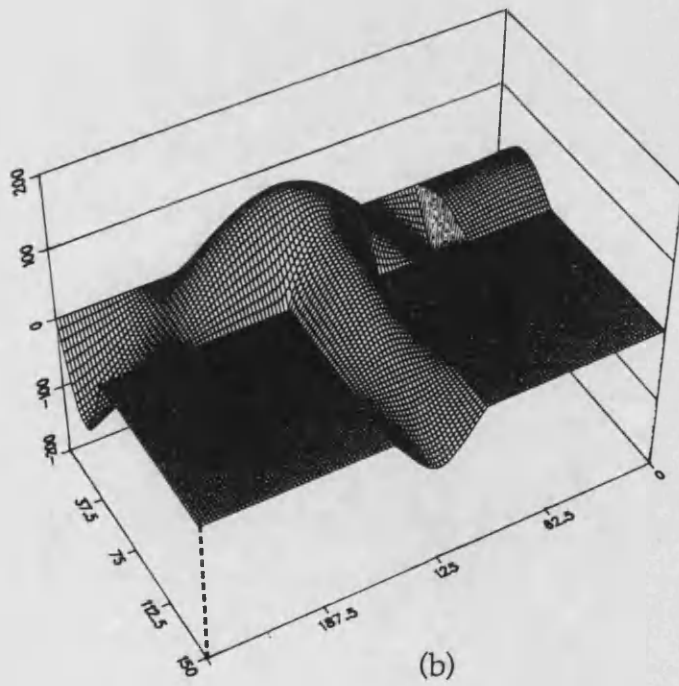
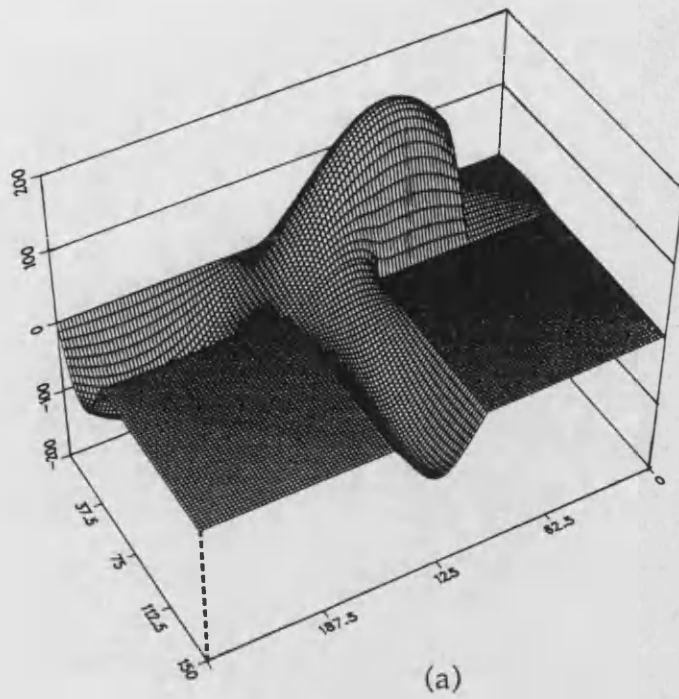


Figura 5.27.a)  $t = 1100\Delta t$ , b)  $t = 1200\Delta t$ .

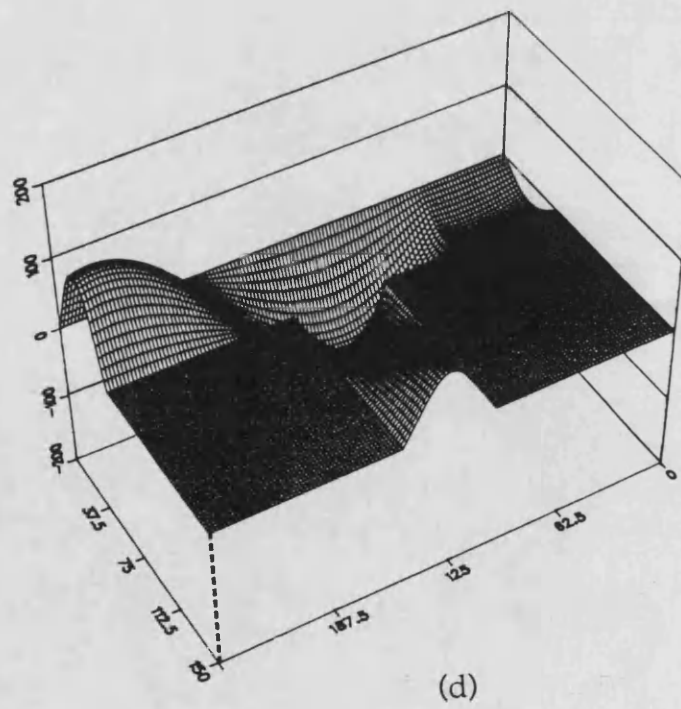
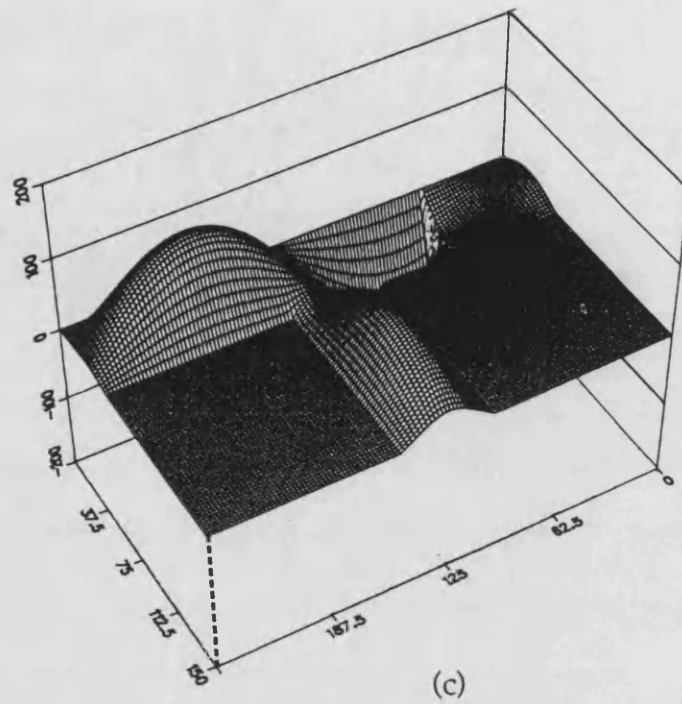


Figura 5.27.c)  $t = 1300\Delta t$ , d)  $t = 1400\Delta t$ .

Los parámetros de dispersión se calculan por simple división de las amplitudes del campo calculadas con la TDF para cada frecuencia, como en el apartado 4.3.3. Los resultados se comparan con medidas obtenidas experimentalmente en la empresa Radiación y Microondas S.A., [116].

Las tablas 5.IV.a-b muestran los resultados obtenidos simulando la evolución de la excitación sintética durante aproximadamente un periodo de  $f=1$  GHz. Dado que  $\Delta h=a/50$  y que  $\Delta t=\Delta h/2c$ , este periodo equivale a  $2998\Delta t$ . La simulación en este caso se lleva a cabo durante  $3998 \Delta t$ , calculando la TDF a partir de  $1000 \Delta t$  (para  $700\Delta t$  la onda ya ha llegado a las puertas).

La tabla 5.V.a-b muestra los resultados obtenidos simulando la evolución de la excitación sintética durante  $10994\Delta t$ , calculando la DFT a partir de  $2000\Delta t$  (tres periodos de 1 GHz), y por último las tablas 5.VI.a-b dan los cálculos para una simulación durante  $45969\Delta t$  con TDF desde  $1000\Delta t$  (15 periodos de 1 GHz).

En todos los casos el punto de muestreo para el campo reflejado en la puerta 1, se sitúa en  $x=5\Delta h$  ( $155\Delta h$  antes de la discontinuidad). El del campo transmitido a la puerta 2, en  $x=365\Delta h$  ( $160\Delta h$  después de la discontinuidad); y el del campo transmitido a la puerta 3, a  $96\Delta h$  de la conexión con las puertas 1 y 2. Similarmente se procede cuando se introduce la excitación por la puerta 3.

La excitación sintética se introduce a una distancia  $50\Delta h$  de la discontinuidad. Otras simulaciones han demostrado que la situación de esta no influye en los resultados. Por otro lado, el hacer las puertas mas largas, para alejar de la discontinuidad la situación de las CCA, tampoco modifica los resultados, porque el modo fundamental se reconstruye a  $100\Delta h$  de la discontinuidad.

TABLA 5.IV.a. Resultados para TDF durante un periodo de  $f=1\text{GHz}$ .  
Excitación por la puerta 1.

f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
S <sub>11</sub> (numérico)	0.2605	0.2608	0.2607	0.2600	0.2585	0.2555
S <sub>11</sub> (experim.)	0.3270	0.3190	0.3090	0.2990	0.2870	0.2750
desv %	20.0	18.0	16.0	13.0	10.0	7.0
fase S <sub>11</sub> (grados)	24.66	-40.76	-106.12	-171.38	123.41	58.11
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
S <sub>12</sub> (numérico)	0.7406	0.7424	0.7463	0.7520	0.7595	0.7694
S <sub>12</sub> (experim.)	0.6730	0.6810	0.6910	0.7020	0.7130	0.7260
desv %	10.00	9.00	8.00	7.00	7.00	6.00
fase S <sub>12</sub> (grados)	-151.73	146.62	84.95	23.25	-38.49	-100.23
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
S <sub>13</sub> (numérico)	0.6235	0.6215	0.6183	0.6124	0.6028	0.5897
S <sub>13</sub> (experim.)	0.6630	0.6590	0.6540	0.6470	0.6390	0.6310
desv %	6.00	6.00	5.00	5.00	6.00	7.00
fase S <sub>13</sub> (grados)	-132.61	-175.21	142.00	98.89	55.51	11.80
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$\sum  S_{ij} ^2$	1.0052	1.0055	1.0072	1.0081	1.0070	1.0049

TABLA 5.IV.b. Resultados para TDF durante un periodo de  $f=1\text{GHz}$ .  
Excitación por la puerta 3.

f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{33}$ (numérico)	0.4844	0.4895	0.4980	0.5129	0.5349	0.5620
$S_{33}$ (experim.)	0.3460	0.3620	0.3820	0.4040	0.4270	0.4510
desv %	40.0	35.0	30.0	27.0	25.0	25.0
fase $S_{33}$ (grados)	48.54	6.83	-34.77	-76.40	-118.52	-161.28
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{31}$ (numérico)	0.6165	0.6144	0.6103	0.6040	0.5949	0.5828
$S_{31}$ (experim.)	0.6630	0.6590	0.6540	0.6470	0.6390	0.6310
desv %	7.00	7.00	7.00	7.00	7.00	7.00
fase $S_{31}$ (grados)	-146.75	156.40	99.41	42.21	-15.27	-73.15
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{32}$ (numérico)	0.6165	0.6144	0.6103	0.6040	0.5949	0.5828
$S_{32}$ (experim.)	0.6630	0.6590	0.6540	0.6470	0.6390	0.6310
desv %	7.00	7.00	7.00	7.00	7.00	7.00
fase $S_{32}$ (grados)	-147.94	154.00	95.80	37.40	-21.26	-80.34
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$\sum  S_{ij} ^2$	0.9950	0.9950	0.9930	0.9924	0.9938	0.9951

TABLA 5.V.a. Resultados para TDF durante tres periodos de  $f=1\text{GHz}$ .  
Excitación por la puerta 1.

f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{11}$ (numérico)	0.2600	0.2602	0.2604	0.2600	0.2587	0.2555
$S_{11}$ (experim.)	0.3270	0.3190	0.3090	0.2990	0.2870	0.2750
desv %	20.0	18.0	16.0	13.0	10.0	7.0
fase $S_{11}$ (grados)	24.61	-40.71	-106.07	-171.29	123.39	58.03
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{12}$ (numérico)	0.7408	0.7426	0.7461	0.7510	0.7585	0.7691
$S_{12}$ (experim.)	0.6730	0.6810	0.6910	0.7020	0.7130	0.7260
desv %	10.00	9.00	8.00	7.00	6.00	6.00
fase $S_{12}$ (grados)	-151.72	146.60	84.90	23.21	-38.46	-100.17
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{13}$ (numérico)	0.6238	0.6215	0.6175	0.6113	0.6027	0.5901
$S_{13}$ (experim.)	0.6630	0.6590	0.6540	0.6470	0.6390	0.6310
desv %	6.00	6.00	5.00	5.00	6.00	6.00
fase $S_{13}$ (grados)	-132.58	-175.28	141.95	98.91	55.61	11.81
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$\sum  S_{ij} ^2$	1.0056	1.0055	1.0057	1.0053	1.0054	1.0049

TABLA 5.V.b. Resultados para TDF durante tres periodos de f=1GHz.  
Excitación por la puerta 3.

f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
S <sub>33</sub> (numérico)	0.4827	0.4888	0.4985	0.5137	0.5333	0.5602
S <sub>33</sub> (experim.)	0.3460	0.3620	0.3820	0.4040	0.4270	0.4510
desv %	40.0	35.0	30.0	27.0	25.0	24.0
fase S <sub>33</sub> (grados)	48.49	6.99	-34.68	-76.52	-118.63	-161.24
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
S <sub>31</sub> (numérico)	0.6160	0.6138	0.6098	0.6036	0.5951	0.5828
S <sub>31</sub> (experim.)	0.6630	0.6590	0.6540	0.6470	0.6390	0.6310
desv %	7.00	7.00	7.00	7.00	7.00	7.00
fase S <sub>31</sub> (grados)	-146.78	156.42	99.42	42.26	-15.27	-73.19
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
S <sub>32</sub> (numérico)	0.6160	0.6138	0.6098	0.6036	0.5951	0.5828
S <sub>32</sub> (experim.)	0.6630	0.6590	0.6540	0.6470	0.6390	0.6310
desv %	7.00	7.00	7.00	7.00	7.00	7.00
fase S <sub>32</sub> (grados)	-147.99	154.02	95.82	37.46	-21.27	-80.37
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$\sum  S_{ij} ^2$	0.9920	0.9923	0.9923	0.9925	0.9927	0.9933



TABLA 5.VI.a. Resultados para TDF durante quince periodos de  $f=1\text{GHz}$ .  
Excitación por la puerta 1.

f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{11}$ (numérico)	0.2621	0.2622	0.2626	0.2634	0.2639	0.2625
$S_{11}$ (experim.)	0.3270	0.3190	0.3090	0.2990	0.2870	0.2750
desv %	20.0	18.0	15.0	12.0	8.0	5.0
fase $S_{11}$ (grados)	25.88	-39.06	-104.19	-169.44	125.56	60.73
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{12}$ (numérico)	0.7464	0.7514	0.7571	0.7644	0.7723	0.7824
$S_{12}$ (experim.)	0.6730	0.6810	0.6910	0.7020	0.7130	0.7260
desv %	11.00	10.00	10.00	9.00	8.00	8.00
fase $S_{12}$ (grados)	-150.18	148.40	87.01	25.62	-35.91	-97.44
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{13}$ (numérico)	0.6369	0.6417	0.6429	0.6363	0.6253	0.6064
$S_{13}$ (experim.)	0.6630	0.6590	0.6540	0.6470	0.6390	0.6310
desv %	4.00	3.00	2.60	1.70	2.10	4.00
fase $S_{13}$ (grados)	-129.98	-172.86	143.78	100.34	56.50	12.67
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$\sum  S_{ij} ^2$	1.0313	1.0452	1.0554	1.0586	1.0570	1.0488

TABLA 5.VI.b. Resultados para TDF durante quince periodos de  $f=1\text{GHz}$ .  
Excitación por la puerta 3.

f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{33}$ (numérico)	0.4835	0.4889	0.5023	0.5170	0.5357	0.5600
$S_{33}$ (experim.)	0.3460	0.3620	0.3820	0.4040	0.4270	0.4510
desv %	40.0	35.0	30.0	28.0	25.0	24.0
fase $S_{33}$ (grados)	48.66	7.77	-33.50	-75.25	-117.19	-159.26
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$S_{32}$ (numérico)	0.6108	0.6028	0.5972	0.5958	0.5925	0.5863
$S_{32}$ (experim.)	0.6630	0.6590	0.6540	0.6470	0.6390	0.6310
desv %	8.00	9.00	9.00	8.00	7.00	7.00
fase $S_{32}$ (grados)	-146.75	156.40	99.41	42.21	-15.27	-73.15
f (GHz)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$\sum  S_{ij} ^2$	0.9799	0.9658	0.9656	0.9772	0.9891	1.0010

### Discusión de los resultados

Lo primero que se puede comentar es que los resultados son coherentes, pues la potencia se conserva con un pequeño error. A la vista de las tablas 5.IV.a-b, 5.V.a-b y 5.VI.a-b cabe decir que los resultados óptimos se consiguen para la simulación mas corta, en el sentido de que se obtienen mas rápidamente y no presentan una gran variación con respecto a los obtenidos con una simulación mas prolongada. Es arriesgado efectuar la

TDF prácticamente después de llegada la señal, sin esperar al estacionario, (el cual se alcanza relativamente pronto), por eso se ha calculado también durante tres y quince periodos, para comparar resultados. Por otro lado una simulación mucho mas prolongada introduce mucho error en el cálculo de la TDF, por eso los resultados para quince periodos tienen un error en la conservación de la potencia de alrededor del 5%. Hay que añadir que los puntos de muestreo para las puertas 1 y 2 no estan simétricamente situados respecto de la discontinuidad, por esa razón el defase de la señal en estos puntos con excitación en la puerta 3 es ligeramente distinto.

Por último, hay que justificar la enorme desviación de los coeficientes de reflexión numéricos respecto de los experimentales. Para la frecuencia de 1 GHz, la longitud de onda es treinta veces mayor que la dimensión de la discontinuidad. Entonces es lícito calcular teóricamente los parámetros de dispersión suponiendo el caso cuasiestático, [115] . Estos son para una unión T en línea coaxial con impedancias características  $Z_{01}=Z_{02}=50.0 \Omega$  y  $Z_{03}=70.4 \Omega$ :

$$\begin{aligned}
 |S_{11}| &= 0.2621, & |S_{12}| &= 0.7379, & |S_{13}| &= 0.6219, \\
 |S_{21}| &= 0.7379, & |S_{22}| &= 0.2621, & |S_{23}| &= 0.6219, \\
 |S_{31}| &= 0.6219, & |S_{32}| &= 0.6219, & |S_{33}| &= 0.4759,
 \end{aligned}$$

estos parámetros comparados con los obtenidos en las tablas 5.V.a-b, arrojan un error de un 0.8% para  $|S_{11}|$ , un 0.2% para  $|S_{12}|$ , un 0.3% para  $|S_{13}|$  y un 1.4% para  $|S_{33}|$ . Cabría añadir también como conclusión, que efectivamente, como afirma el autor, estas medidas experimentales no son demasiado afortunadas [116].

La simulación se ha efectuado en un ordenador IBM 9021/500 2VF. El diseño y estructuración de los programas ha sido optimizado para el uso de los dos procesadores vectoriales del ordenador; esto ha permitido que en funcionamiento, por cada 100 segundos de CPU consumidos, 80 han sido de procesador vectoriale. El tiempo de CPU consumido en la primera simulación (tablas 5.IVa-b) ha sido de 2880 segundos en total, de los cuales 2280 lo han sido de procesador vectorial. Este tiempo incluye el que se ha

empleado en el cálculo de la TDF, la cual se efectuaba para cada una de las frecuencias de las excitación para una componente del campo a lo largo de las líneas que unían cada puerta con la discontinuidad. Los dibujos han sido efectuados en un Apollo 400t y un HP 9000/375 haciendo uso de las librerías gráficas Disspla.

## 5.6. Conclusiones.

El método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo se ha aplicado al análisis de discontinuidades en tres dimensiones.

Se ha presentado el algoritmo a seguir en la modelización de grandes discontinuidades. Se ha expuesto el modo de seccionar las grandes regiones en dominios paralelepípedicos, conexos entre sí, sobre los que es fácil establecer las condiciones de contorno.

Se ha modelizado la línea coaxial cuadrada.

Se ha resuelto la estructura del modo fundamental TEM en la guía coaxial cuadrada. Se ha confeccionado un programa para resolver por Diferencias Finitas (DF) la estructura del modo TEM, así como para calcular la impedancia característica, de cualquier guía coaxial rectangular. Este se ha aplicado a una línea de coaxial cuadrado de  $50 \Omega$ , dando resultados aceptables.

Se ha analizado el comportamiento de las Condiciones de Contorno Absorbentes en la línea coaxial para una excitación temporal Gaussiana con estructura espacial TEM.

Se ha estudiado la atenuación de los campos con componente axial en la banda 1 a 6 GHz, (por debajo del corte de los modos TE y TM), estableciendo la distancia a la excitación a la que las componentes axiales se pueden despreciar.

Se ha utilizado la estructura de campo TEM para introducir una excitación sintética compuesta por varios armónicos en la banda 1 a 6 GHz, separando zonas de campo total y campo reflejado.

Se ha estudiado la posibilidad de efectuar un mallado variable en la dirección de propagación.

Se ha aplicado la metodología al análisis de una guía coaxial rellena de dieléctrico. Esta aplicación sirve de chequeo. Los resultados obtenidos son comparados con resultados teóricos dando una precisión aceptable.

Por último se ha modelizado una discontinuidad en guía coaxial cuadrada. Se han calculado sus parámetros de dispersión en seis frecuencias de la banda C, que se han comparado con los obtenidos experimental y teóricamente para el caso cuasiestático. Los resultados también son aceptables.

Para la consecución de todos los puntos anteriores ha sido necesaria la elaboración de una extensa librería de subrutinas en fortran. Estas librerías permiten la modelización de cualquier estructura tridimensional de microondas para el análisis espacio-temporal del campo electromagnético. La construcción del programa ha sido enfocada a la optimización en el uso de recursos de ordenador, así como al uso de procesadores vectoriales, contemplando en su estructuración la posibilidad de crecimiento así como de futuras modificaciones.



## APENDICES

### Apéndice 4.A

#### Condiciones de contorno absorbentes en esquinas al espacio libre

Se supone que en las esquinas, la onda se sale en la dirección de la bisectriz de la celda. Consideraremos un punto A situado un paso espacial antes del borde en la dirección de la bisectriz. Si además tenemos en cuenta que  $\Delta t = \Delta h / 2c$ , (la onda avanza un paso espacial cada dos pasos temporales), podremos asignar en el punto B de la esquina, que tendrá coordenadas (H,K), el valor del campo hace dos pasos temporales en el punto A.

Entonces para cada instante de tiempo calcularemos el valor del campo en el punto A. Este lo almacenaremos en memoria, y después de un paso temporal, lo asignaremos al punto B.

El punto  $C=(H-1,K-1)$  es el punto del mallado anterior a la esquina, en la dirección de la bisectriz, y el punto  $A=(H-1+(\frac{2-\sqrt{2}}{2}), K-1+(\frac{2-\sqrt{2}}{2}))$  es un punto inexistente en el mallado que está un paso espacial previo a la esquina, también en la dirección de la bisectriz (ver la figura 4.A.1).

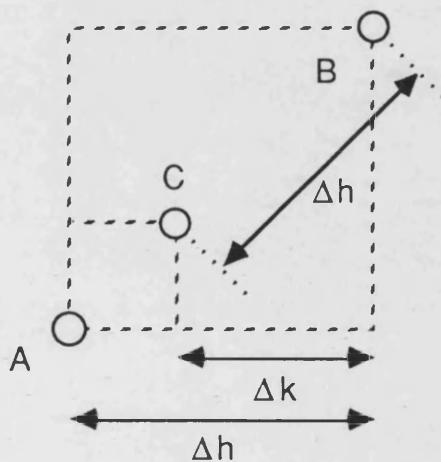


Figura 4.A.1



Para calcular el campo en el punto A, se aproxima por un desarrollo de Taylor de primer orden,

$$U^n(H-1+\Delta k, K-1+\Delta k) \approx U^n(H-1, K-1) + \frac{\partial U^n(H-1, K-1)}{\partial x} \Delta k + \frac{\partial U^n(H-1, K-1)}{\partial y} \Delta k$$

siendo  $\Delta k = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Entonces se puede escribir,

$$U^n(H-1+\Delta k, K-1+\Delta k) = U^n(H-\Delta k, K-\Delta k) \approx$$

$$U^n(H-1, K-1) + \frac{U^n(H, K-1) - U^n(H-2, K-1)}{\Delta x} \Delta k + \frac{U^n(H-1, K) - U^n(H-1, K-2)}{\Delta y} \Delta k$$

y finalmente la CCA aplicable en el punto B, será,

$$U^n(H, K) = U^{n-2}(H-\Delta k, K-\Delta k)$$

## Apéndice 5.A

### Interfase de cambio mallado fino-mallado grueso

En los puntos comunes a las dos zonas (fina y gruesa) hay que llevar cuidado en el uso de las diferencias centradas. Hay que modificar el algoritmo para que sea coherente a ambos lados. Suponiendo que estos puntos están en  $x_0 = i_0 \Delta h$ , que a la izquierda tenemos el mallado fino ( $\Delta x = \Delta h$ ) y a la derecha el grueso ( $\Delta x = \alpha \Delta h$ ), podremos aproximar,

$$f(x_0 - \Delta h) = f(x_0) - \frac{df(x_0)}{dx} \Delta h + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} \Delta h^2 + O(\Delta h^3)$$

$$f(x_0 + \alpha \Delta h) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \alpha \Delta h + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} (\alpha \Delta h)^2 + O(\Delta h^3)$$

restando ambas expresiones, queda:

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + \alpha \Delta h) - f(x_0 - \Delta h)}{\Delta h \left( \frac{1 + \alpha}{2} \right)}$$

El algoritmo se modificará del siguiente modo:

- En la zona fina  $\Delta x = \Delta h$ .
- En la superficie limítrofe entre ambas zonas,  $\Delta x = \Delta h \left( \frac{1 + \alpha}{2} \right)$ .
- En la zona gruesa,  $\Delta x = \alpha \Delta h$ .

### Conservación de la relación de estabilidad

La relación entre los incrementos espaciales y temporal en la zona de mallado con celdas cúbicas es:

$$c \Delta t \leq \frac{\Delta h}{\sqrt{3}}$$

tomándose,

$$c\Delta t = \frac{\Delta h}{2}$$

siendo  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  la velocidad de la luz en el medio.

Si se utilizan celdas paralelepípedicas de dimensiones  $\Delta y = \Delta z = \Delta h$  y  $\Delta x = \alpha\Delta h$ , se deberá establecer una nueva relación (ver ecuación (2.27.a)),

$$c\Delta t' \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\alpha\Delta h)^2} + \frac{1}{\Delta h^2} + \frac{1}{\Delta h^2}}}$$

que queda,

$$c\Delta t' \leq \frac{\alpha \sqrt{3}}{\sqrt{2\alpha^2 + 1}} \frac{\Delta h}{\sqrt{3}}$$

que se verifica si se toma

$$c\Delta t' = \frac{\alpha \sqrt{3}}{\sqrt{2\alpha^2 + 1}} \Delta t$$

## CONCLUSIONES Y PRINCIPALES APORTACIONES

El objetivo de esta tesis ha sido el de desarrollar una metodología coherente y eficaz, capaz de abordar cualquier problema de radiofrecuencia en el que se vea implicada circuitería pasiva de microondas. Una profunda revisión bibliográfica ha puesto de manifiesto por una parte la posible efectividad y versatilidad del método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT); y por otra, una escasa (casi apenas) atención de DFDT hacia los sistemas guidores cerrados. Entre las causas que justifican esta escasa atención cabe citar fundamentalmente las siguientes:

Las características altamente dispersivas de las guías cerradas: Esto provoca la dispersión de los pulsos usualmente utilizados como excitación. Los armónicos de frecuencias inferiores al corte del modo fundamental no se propagan por razones físicas y los de baja resolución en celdas espaciales tampoco por motivos numéricos, todos éstos se quedan en la estructura modelizada generando ruido numérico. Entonces se hace necesario un filtrado a posteriori en la transformada de Fourier.

El elevado factor de calidad de las estructuras que se modelan: La otra alternativa al uso de pulsos es la utilización de señales monocromáticas. La simulación de conductores perfectos en estructuras cerradas genera resonancias que no son amortiguadas por ningún mecanismo numérico, excepto las Condiciones de Contorno Absorbentes. En consecuencia las fluctuaciones del campo dificultan la determinación de los parámetros característicos.

La necesidad de adecuar la estructura espacial del campo utilizado en la excitación con la del modo propagante en el dispositivo, para evitar la aparición de reflexiones y acoplos que dificultarían o podrían impedir la determinación del campo transmitido y reflejado.

En este trabajo se estudia la forma de resolver estas dificultades. En particular y con mayor profundidad, se ha estudiado el caso de una guía coaxial cuadrada, que luego se ha dirigido al análisis de una discontinuidad, una T simétrica construida en coaxial cuadrado. El motivo del estudio radica tanto en su utilidad para la implementación de redes formadoras de haces, como por la inexistencia de modelos para la misma. A continuación y como resumen del trabajo realizado, se enumeran las principales aportaciones y conclusiones del mismo:

- 1.- Se ha realizado una profunda revisión de las bases matemáticas del algoritmo DFDT, que ha permitido deducir el factor de estabilidad del algoritmo, establecer el modo de modelar la región problema. Describir la dispersión de tipo numérico generada por el método. Obtener el modo de separar la región problema en dos zonas, una de campo total y otra de campo reflejado; y por último, diseñar e implementar las Condiciones de Contorno Absorbentes.
- 2.- Se ha desarrollado la teoría que justifica el análisis temporal combinado con la Transformada Discreta de Fourier (TDF), para determinar las frecuencias de corte de los modos en un sistema guiador cerrado. Este se ha tratado como un problema resonancia transversal, permitiendo un análisis en dos dimensiones.
- 3.- Con el fin de desarrollar y verificar la metodología que permita aplicar DFDT al análisis de modos, se ha aplicado a una guía rectangular y a una guía circular, cuyas soluciones analíticas son perfectamente conocidas. Se ha analizado la convergencia tanto en función del mallado como del tiempo de simulación, lo cual ha puesto de manifiesto una escasa influencia del tamaño de la celda cuando el mallado se ajusta bien a la geometría. Aumentando el tiempo de simulación se ha podido discernir el error asociado a discretización espacio temporal de DFDT del error introducido por la aplicación de la TDF. Por último, se ha mostrado que los contornos curvos no son una limitación.
- 4.- Se han calculado las longitudes de onda de corte de los ocho primeros modos TE y los cinco primeros TM en una guía coaxial de sección cuadrada, para distintas relaciones entre las dimensiones de sus conductores interior y

exterior. También se ha estudiado una guía coaxial con conductores rectangulares. En ambos casos se ha mostrado la distribución del campo longitudinal para varios de estos modos.

5.- Se ha analizado una guía rectangular con una inserción metálica. Se han calculado las frecuencias de corte de los cuatro primeros modos para varias alturas del conductor interior, mostrando su estructura en dos casos.

6.- Se ha presentado un algoritmo eficiente para el análisis de discontinuidades en el plano H. Este es un paso previo al análisis de discontinuidades en tres dimensiones. Se ha resuelto el problema de la dispersión mediante el empleo de señales sintéticas obtenidas como combinación lineal de señales monocromáticas. Se han evitado las fluctuaciones en el campo mediante la aplicación de la TDF.

7.- Se ha analizado el comportamiento de las Condiciones de Contorno Absorbentes (CCA) de primer y segundo orden, y se han desarrollado unas nuevas CCA de primer orden que funcionan perfectamente para una señal monocromática.

8.- Se calcula el coeficiente de transmisión de potencia en una codo recto. Las CCA de primer orden se muestran adecuadas para una discontinuidad de dos puertas. Los resultados son buenos con un mallado  $W/20$ , siendo  $W$  la anchura de la guía.

9- Se han obtenido los parámetros de dispersión de una T en guía de onda en el plano H. En este caso se observa que ante la presencia de mas de dos puertas, es necesaria la utilización de CCA de segundo orden.

10- Se ha caracterizado un filtro. En este caso se usan las CCA de primer orden corregidas efectuando una simulación para cada frecuencia. Los resultados demuestran la necesidad de esperar mas tiempo al estacionario, antes de aplicar la TDF cuando la estructura presenta resonancia.

11.- Con el fin de modelizar situaciones en las que se pierde potencia por radiación, se ha estudiado una guía de planos paralelos abierta. Este es un problema de radiación que se aborda desde el punto de vista circuital. Se calcula el coeficiente de reflexión, se analiza la influencia de la distancia a las

CCA que describen el espacio libre y como interviene el tiempo de simulación.

12.- La visualización del campo así como la conservación de la potencia se han revelado de gran importancia, permitiendo comprobar la veracidad de la modelización así como la coherencia y la validez de la situación de los planos de referencia.

13.- Se ha planteado la forma de modelizar grandes discontinuidades en tres dimensiones. Se extienden las técnicas ya validadas en el tratamiento de las discontinuidades en el plano H. En este sentido se ha expuesto el modo de seccionar las grandes regiones en dominios paralelepípedicos, conexos entre sí, sobre los que es fácil establecer las condiciones de contorno.

14.- Se ha resuelto la estructura del modo fundamental TEM en la guía coaxial cuadrada. Se ha confeccionado un programa para resolver por Diferencias Finitas (DF) la estructura del modo TEM, así como para calcular la impedancia característica de cualquier guía coaxial rectangular.

15.- Se ha analizado el comportamiento de las Condiciones de Contorno Absorbentes en la línea coaxial para una excitación temporal Gaussiana con estructura espacial TEM. Asimismo, se ha estudiado la atenuación de los campos con componente axial en la banda de operación, (por debajo del corte de los modos TE y TM), estableciendo la distancia a la excitación a la que las componentes axiales se pueden despreciar.

16.- Para dar mas flexibilidad a la modelización, permitiendo un menor uso de recursos, se ha estudiado la posibilidad de efectuar un mallado variable en la dirección de propagación.

18.- Para chequear la modelización en tres dimensiones, se ha aplicado la metodología al análisis de una guía coaxial rellena de dieléctrico. Por último se ha modelizado una unión T simétrica en guía coaxial cuadrada con líneas de impedancia  $50\Omega$  (puertas 1 y 2) y  $70.4\Omega$  (puerta 3). Se han calculado sus parámetros de dispersión en seis frecuencias (1 a 6 GHz), que se han comparado con datos obtenidos experimental y teóricamente, habiendo obtenido resultados aceptables.

Para la consecución de todos los puntos anteriores ha sido necesaria la elaboración de una extensa librería de subrutinas en fortran. Estas librerías permiten la modelización de cualquier estructura de microondas en dos o tres dimensiones para el análisis espacio-temporal del campo electromagnético. La construcción de los programas ha sido enfocada a la optimización en el uso de recursos de ordenador así como al uso de procesadores vectoriales, contemplando en su estructuración la posibilidad de crecimiento así como de futuras modificaciones. El grado de vectorización alcanzado en el caso de la unión T en coaxial, conseguía que el 80% de tiempo de CPU consumido fuese de procesador vectorial, porcentaje que aumentaba al prescindir del cálculo de la TDF. En el análisis de modos TE y TM la vectorización de los procesos de cálculo se ha acercado al 100%, pero en geometrías rectangulares.





## BIBLIOGRAFIA

- [1]. SILVESTER, P., *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, New York, 1983.
- [2]. DALY, P. "Hybrid-mode analysis of microstrip by finite element method," *IEEE Trans.*,1971,MTT-19, pp. 19-25.
- [3]. THOMSON, A. F. and GOPINATH, A., "Calculation of microstrip discontinuity inductances," *IEEE Trans.*, 1975,MTT-23, pp. 648-655.
- [4]. RAHMAN B. M. A. and DAVIES J. B., "Finite element analysis of optical and microwave waveguide problems," *IEEE Trans.*,1984, MTT-32, pp. 20-28.
- [5]. SILVESTER, P., "Finite element analysis of planar microwave networks," *IEEE Trans.* , 1973, MTT-21, pp. 104-108.
- [6]. RAHMAN, B. M. A. and DAVIES, J. B., "Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements," *IEEE Trans.*,1984, MTT-32, pp.922-928.
- [7]. BREBBIA, C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, 1978.
- [8]. KAGAMI, S. and FUKAI, I., "Application of boundary element method to electromagnetic field problems," *IEEE Trans.*, 1984, MTT-32, pp. 455-461.
- [9]. NOUGIER, J.P., *Méthodes de calcul numérique*, Masson, Paris 1983.
- [10]. HOEFER, W. J. R. and ROS, A. "Fin line parameters calculated with the TLM-method," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, pp. 341-343, Apr.-May, 1979.



- [11]. AKHTARZAD, S. and JOHNS, P. B., "Three-dimensional transmission-line matrix computer analysis of microstrip resonators," IEEE Trans.,1985, MTT-33, pp. 882-893.
- [12]. HOEFER, W. J. R, "The transmission-line matrix method-theory and applications," IEEE Trans., 1985,MTT-33, pp. 882-893.
- [13]. CHEW,W. C. and KONG, J. A., "Resonance of the axial-symmetric modes in microstrip disk resonators," J. Math. Phys.,1980, 21, pp. 582-591.
- [14]. HARRINGTON, R. F.,*Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York, 1968.
- [15]. SHIH, Y. C. and GRAY, K. G.,"Convergency of numerical solutions of step-type waveguide discontinuity problems by modal analysis," IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig., pp. 233-235, May 1983.
- [16]. COLLIN, R.E., *Foundations for Microwave Engineering*., McGraw-Hill, New York, 1960.
- [17]. SORRENTINO, R. and ITOH, T., "Transverse resonance analysis of finline discontinuities," IEEE Trans., MTT-32, 1984, pp. 1633-1638.
- [18]. SCHULZ, U. and PREGLA, R., "A new technique for the analysis of the dispersion characteristics of planar waveguides and its application to microstrips with tuning septums," Radio Sci., 1981, 16, pp. 1173-1178.
- [19]. SHIH, Y. C., ITOH, T. and BUI, L. Q., "Computer-aided design of millimeter-wave E-plane filters," IEEE Trans., 1983., MTT-31, pp. 135-142.
- [20]. ITOH, T., "Analysis of microstrip resonators," IEEE Trans., 1974, MTT-22, pp. 946-952.
- [21]. YEE, K.S., "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", IEEE Trans., 1966, AP-14,pp.302-307.

- [22]. TAFLOVE, A. and BRODWIN, M.E.: "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time dependent Maxwell's equations", IEEE Trans., 1975, MTT-23, pp.623-630.
- [23]. TAYLOR, C.D., LAM, D.H. and SHUMPERT, T.H, "electromagnetic pulse scattering in time-varying in homogeneous media, IEEE Trans. 1969, AP-17.
- [24]. MEREWETHER D.E. "Transient currents induced on a metallic body of revolution by an electromagnetic pulse", IEEE trans, 1971, EMC-13, pp. 41-44.
- [25]. KUNZ, K.S. and LEE, K.M. : "A three-dimensional finite-difference solution of the external response of an aircraft to a complex transient EM environment: Part 1 the method and its implementation", IEEE Trans., 1978, EMC-20, pp.328-333.
- [26]. TAFLOVE, A. : "Application of the finite difference time domain method to sinusoidal steady-state electromagnetic penetration problems", IEEE Trans., 1980, EMC-22, pp.191-202.
- [27]. MUR, G. : "Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time domain electromagnetic field equations", IEEE Trans., 1981, EMC-23, pp.377-382.
- [28.a]. ENQUIST, B. and MAJDA, A. : "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves", Math. Comput., 1977, 31, pp.629-651.
- [28.b] ENQUIST, B., MAJDA, A., "Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations", Comm. Pure and Appl. Math. Vol. XXXII, pp. 313-357, 1979.
- [29]. UMASHANKAR, K.R. and TAFLOVE, A. : "A Novel Method to Analyze Electromagnetic Scattering of Complex Objects", IEEE Trans., 1982, EMC-24, pp.397-405.

- [30]. TAFLOVE, A. and UMASHANKAR, K.R. : "A Hybrid Moment Method/Finite-Difference Time Domain Approach to Electromagnetic Coupling and Aperture Penetration into Complex Geometries", IEEE Trans.,1982, AP-30, pp.617-627.
- [31]. TAFLOVE, A. and UMASHANKAR, K.R. : "Radar Cross Section of General Three-Dimensional Scatterers", IEEE Trans.,1983, EMC-25, pp.433-440.
- [32]. TAFLOVE, A., UMASHANKAR, K.R. and JURGENS, T.G.:"Validation of FD-TD Modeling of the Radar Cross Section of Three-Dimensional Structures Spanning Up to Nine Wavelengths", IEEE Trans.,1985, AP-33, pp.662-666.
- [33]. BRITT, C.L., : " Solution of electromagnetic scattering problems using time domain techniques", IEEE Trans.,1989, AP-37, pp.1181-1192.
- [34]. STRICKEL M.A. and TAFLOVE, A.:"Time-Domain synthesis of broadband absorptive coatings for two-dimensional conducting targets", IEEE Trans.,1990, AP-38, pp.1084-1091.
- [35]. FURSE C.M., MATHUR, S.P. and GHANDI, O.P.:"Improvements to the Finite-Difference Time-Domain method for calculating the radar cross section of a perfectly conducting target", IEEE Trans.,1990, MTT-38, pp.919-927.
- [36]. BORUP, T.D., SULLIVAN, D.M. and GHANDI, O.P.:"Comparison of the FFT Conjugate Gradient method and the Finite-Difference Time-Domain method for the 2-D absorption problem", IEEE Trans.,1987, MTT-35, pp.383-395.
- [37]. WANG, C-Q. and GANDHI, O.P.:"Numerical simulation of annular Phased arrays for anatomically based models 3D using the FD-TD method", IEEE trans, 1989,MTT-37, pp. 118-126
- [38]. SULLIVAN, D., "Three-dimensional computer simulation in deep regional hyperthermia using the finite-difference Time-Domain method", IEEE Trans., 1990, MTT-38, pp.204-211.

- [39]. SULLIVAN, D., "Mathematical methods for treatmentn planing in deep regional hyperthermia", IEEE Trans.,1991, MTT-39, pp. 864-874.
- [40]. CHEN J.Y. and GHANDI, O.P.: "Currents induced in an anatomically based model of a human for exposure to vertically polarized electromagnetic pulses", IEEE Trans.,1991, MTT-39, pp.31-39.
- [41]. REINEIX A. and JECKO, B.: "Analysis of microstrip patch antennas using Finite-Difference Time-Domain method", IEEE Trans.,1989, AP-37, pp.1361-1369.
- [42]. MALONEY, J.G., SMITH, G.S., and SCOTT, W.R.: "Accurate computation of the radiation from simple antennas using the Finite-Difference Time-Domain method", IEEE Trans.,1990, AP-38, pp.1059-1068.
- [43]. DE POURCQ, M., : "Field and power-density calculations in closed microwave systems by three-dimensional finite differences", Proc. IEE,1985, 132, pp.360-368.
- [44]. CHOI, D.H. and HOEFER, W.J.R., "The finite-difference-time-domain method and its applications to eigenvalue problems", IEEE Trans., 1986, MTT-34, (12), pp.1464-1470.
- [45]. ZHANG, X., FANG, J., MEI, K.K. and LIU, Y. : "Calculations of the dispersive characteristics of microstrip by the time-domain finite difference method", IEEE Trans.,1988, MTT-36, pp.263-267.
- [46]. GWAREK, W.K.: "Analysis of arbitrarily shaped two-dimensional microwave circuits by Finite-Difference Time-Domain method", IEEE Trans.,1988, MTT-36, pp.738-744.
- [47]. ZHANG, X., and MEI, K.K. : "Time domain finite difference approach to the calculation of the frequency dependent characteristics of microstrip discontinuities", IEEE Trans.,1988, MTT-36, pp.1775-1787.

- [48]. OLIVIER, J.C. and McNAMARA, D.A.: "Finite-Difference Time-Domain (FD-TD) analysis of discontinuities in homogeneous dispersive waveguides", *Electronics Letters*, Vol.25, 1989, pp.1006-1007.
- [49]. LIANG, G.C., LIU, Y.W. and MEI, K.K.: "Full wave analysis of coplanar waveguide and slotline using the Time-Domain Finite-Difference method", *IEEE Trans.*, 1989, MTT-37, pp.1949-1957.
- [50]. FANG, J. and MEI, K.K.: "A super-absorbing boundary algorithm for solving electromagnetic problems by time-domain finite-difference method", *IEEE AP-S Int.Symp'.Dig*, June 1988 pp. 472-475.
- [51]. SHEEN, D.M., ALI, S.M., ABOUZAHRA, M.D. and KONG, J.A.: "Application of the three-dimensional Finite-Difference Time-Domain method to the analysis of planar microstrip circuits", *IEEE Trans.*, 1990, MTT-38, pp.849-857.
- [52]. SHIBATA, T., and SANO, E.: "Characterization of MIS structure coplanar transmission lines for investigation of signal propagation in integrated circuits", *IEEE Trans.*, 1990, MTT-38, pp.881-890.
- [53]. NAVARRO, A., NUÑEZ, M.J., and MARTIN, E.: "Finite difference time domain FFT method applied to axially symmetrical electromagnetic resonant devices", *IEE Proc. H*, 1990, 137, (3), pp193-196.
- [54]. NAVARRO, A., NUÑEZ, M.J., and MARTIN, E.: "Study of TE<sub>0</sub> and TM<sub>0</sub> Modes in dielectric resonators by a finite difference time-domain method coupled with the discrete fourier transform", *IEEE Trans.*, 1991, MTT-39, (1), pp.14-17.
- [55]. BI, Z.-Q., WU, K.-L., and LITVA, J., : "Application of the FD-TD method to the Analysis of H-plane Waveguide Discontinuities", *Electronics Letters*, 1990, vol.26, pp.1897-1898.
- [56]. JAREM, J.M.: "A method of moments analysis and a Finite-Difference Time-Domain analysis of a probe-sleeve fed rectangular waveguide cavity", *IEEE Trans.*, 1991, MTT-39, (1), pp.444-451.

- [57]. KOIKE, S., YOSHIDA, N. and FUKAI, I.: "Transient analysis of microstrip gap in three-dimensional space". IEEE Trans., 1985, MTT-33, pp.726-730.
- [58]. KOIKE, S., YOSHIDA, N. and FUKAI, I.: "Transient analysis of coupling between crossing lines in three-dimensional space". IEEE Trans., 1987, MTT-35, pp.67-71.
- [59]. KOIKE, S., YOSHIDA, N. and FUKAI, I.: "Transient analysis of microstrip line on anisotropic substrate in three-dimensional space", IEEE Trans., 1988, MTT-36, pp.34-43.
- [60]. KUKUTSU, N., YOSHIDA, N. and FUKAI, I.: "Transient analysis of ferrite in three-dimensional space", IEEE Trans., 1988, MTT-36, pp.114-125.
- [61]. KASHIWA, T., YOSHIDA, N. and FUKAI, I.: "Transient analysis of a magnetized plasma in three-dimensional space", IEEE Trans., 1988, MTT-36, pp.1096-1105.
- [62]. SHIBATA, T., HAYASHI, T. and KIMURA, T.: "Analysis of microstrip circuits using three-dimensional full-wave electromagnetic field analysis in the time domain", IEEE Trans., 1988, MTT-36, pp.1064-1070.
- [63]. BLASCHAK, J.G. and KRIEGSMANN, G.A. : "A Comparative Study of Absorbing Boundary Conditions", J. Comput. Phys, 1988, 77, pp.109-139.
- [64]. MOORE, T.G., BLASCHAK, J.G., TAFLOVE, A. and KRIEGSMANN, G.A. : "Theory and Application of Radiation Boundary Operators", IEEE Trans., 1988, AP-36, pp.1797-1812.
- [65]. FUSCO, M.: "FD-TD algorithm in curvilinear coordinates", IEEE Trans., 1990, MTT-38, pp.76-89.
- [66]. KIM, I.S. and HOEFER, W.J.R., : "A local mesh refinement algorithm for the Time Domain-Finite Difference method using Maxwell's curl equations", IEEE Trans., 1990, MTT-38, pp.812-815.



- [67]. BERGER, M.J. and OLIGER, J.R.: "Adaptative mesh refinement for hyperbolic partial differential equation", J. Comput. Phys., 1984, vol.53, pp.484-512.
- [68]. CHU, S.T. and CHAUDHURI, S.K., : "Combining Modal Analysis and the Finite-Difference Time-Domain method in the study of dielectric waveguide problems", IEEE Trans., 1990, MTT-38, pp.1755-1760.
- [69]. RILEY, D.J. and TURNER, D., : "Hibrid thin-slot algorithm for the analysis of narrow apertures in Finite-Difference Time-Domain calculations", IEEE Trans., 1990, AP-38, pp.1943-1950.
- [70]. ZIVANOVIC, S.S., YEE, K.S. and MEI, K.K., : "A subgridding method for the Time-Domain Finite-Difference method to solve Maxwell's equations", IEEE Trans., 1991, MTT-39, pp.471-479.
- [71]. KUNZ, K.S. and SIMPSON, L., : "A technique for increasing the resolution of finite-difference solution of the Maxwell equation", IEEE Trans., Nov. 1981, EMC-23.
- [72]. DEMIDOWITSCH, B.P., MARON, I.A., SCHUWALOWA, E.S., *Métodos numéricos de análisis*, Paraninfo, Madrid, 1980.
- [73]. FORSYTHE, G.E., WASOW, W.R., *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [74]. RALSTON, A., *Introducción al Análisis Numérico*, Limusa-Wiley S.A., Mexico, 1970.
- [75]. TAFLOVE, A. and UMASHANKAR, K.R. : "Review of FD-TD Numerical Modeling of Electromagnetic Wave Scattering and Radar Cross Section", Proc. of the IEEE , 1989, 77, pp.682-699.
- [76]. TREFETHEN, L.N. and HALPERN, L.: "Well-posedness of one-way equations and A.B.C.", Math. Comput., 1986, 47, pp.421-435.
- [77]. HIGDON, R.L., Math, Comput., 1986, 47, pp.437-448 .
- [78]. HIGDON, R.L., Math, Comput., 1987, 49, pp.65-79

- [79]. COLLIN, R.E., *Field theory of Guided Waves* : McGraw-Hill 1966.
- [80]. GARDIOL, F., *Hiperfrecuencias, Volume XIII*, Editions Georgi, Suisse, 1981.
- [81]. NAVARRO, A., NUÑEZ, M.J., and MARTIN, E.: "Estudio de dispositivos resonantes con simetría de revolución mediante acople de un tratamiento por diferencias finitas en el dominio del tiempo con transformada rápida de fourier(DFDT)", Proc. VII Reunión Comité Español URSI (Cuenca), September 1988, pp.423-427.
- [82]. GHOSE, R.N., *Microwave Circuit Theory and Analysis* : McGraw-Hill 1963.
- [83]. JOHNSON, C.C., *Field and Wave Electrodynamics*: McGraw-Hill 1960.
- [84]. ANGKAEW, T., MATSUHARA, M. and KUMAGAI, N. "Finite-Element Analysis of Waveguide Modes: A Novel Approach that eliminates Spurious Modes". IEEE Trans.,1987, MTT-35, pp.117-123.
- [85]. BRIGHAM, E.O., *The Fast Fourier Transform and its Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 1988.
- [86]. ARACIL SANTONJA, R., JIMENEZ AVELLO, A., *Sistemas Discretos de Control*, Cátedra de Automática, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1982.
- [87]. WALDRON, R.A., *Theory of Guided Electromagnetic Waves*, Van Nostrand Reinhold Company LTD, London, 1969.
- [88]. GRUNER, L., "Higher order modes in square coaxial lines", IEEE Trans.,1983, MTT-31,pp.770-772.
- [89]. MARCUVITZ, N., *Waveguide Handbook* , Dover, New York, 1965.
- [90]. BEZLYUDOVA, M.M., "Cutoff wavelength of waveguide-type oscillations in transmission lines having internal and external conductors of rectangular cross-section", Radio Eng. Electron. Phys. (USA), 8, pp.1727-1733.

- [91]. BRACKELMANN, W. et al, "Die Grenzfrequenzen von höheren Eigenwellen in Streifenleitungen", Arch. Elek. Übertragung, 21, pp.112-120.
- [92]. TOURNEUR, J., "A dual polarization broadband waveguide", Proc. 1979 IEEE AP-S Int. Symp., pp.789-792.
- [93]. GRUNER, L., "Characteristics of crossed rectangular coaxial structures", IEEE Trans.,1980, MTT-28, pp.622-627.
- [94]. GRUNER, L., "Estimating rectangular coax cutoff", Microwave J., 1979,22,pp.88-92.
- [95]. GRUNER, L., "Higher order modes in rectangular coaxial waveguides", IEEE Trans.,1967, MTT-15, pp.483-485.
- [96]. HAYATA, K., MIURA, K. and KOSHIBA, M., "Finite-Element formulation for lossy waveguides", IEEE Trans., 1988, MTT-36,pp.268-275.
- [97]. PINCHUP, A.R., CROWLEY, C.W. and SILVESTER, P.P., "Spectrally correct finite element operators for electromagnetic vector fields", J.Appl. Phys.,1988, 63, pp.3025-3027.
- [98]. JOHNS, P.B.: "On the relationship between TLM and Finite-Difference methods for Maxwell's equations", IEEE Trans.,1987, MTT-35, pp.60-61.
- [99]. GWAREK, W.K.: Comments on "On the relationship between TLM and Finite-Difference methods for Maxwell equations", IEEE Trans., 1987, MTT-35, pp.872-873.
- [100]. KOSHIBA, M., SATO, M. and SUZUKI, M.: "Finite-Element Analysis of Arbitrarily Shaped H-Plane Waveguide Discontinuities",Trans. IECE Japan, 1983,E66,pp.82-87..
- [101]. KOSHIBA, M., SATO, M. and SUZUKI, M.: "Application of finite-element method to E-plane waveguide discontinuities ", Trans. IECE Japan,1983,E66,pp.457-458.

- [102]. KOSHIBA, M. and SUZUKI, M.: "Application of boundary-element method to waveguide discontinuities", IEEE Trans.,1986, MTT-34,pp.301-307.
- [103]. ALESSANDRI, F., and SORRENTINO, R., "Analysis of T-junction in square coaxial cable",artículo de congreso (desconocido),pp.162-167.
- [104]. METCALF, W.S., "Why not use rectangular coax?", Microwaves, 1968, April, pp.52-56.
- [105]. RIBLET, J.R., "The exact dimensions of a family of rectangular coaxial lines with given impedance", IEEE Trans.,1972, MTT-20, pp.538-541.
- [106]. BOWMAN, F., "Notes on two-dimensional electric field problems", Proc. London Math. Soc.,1935, 39, pp.211-214.
- [107]. ITOH, T., *Numerical Techniques For Microwave And Millimeter-Wave Passive Structures* , John Wiley & Sons, USA, 1989.
- [108] DURAN,E., *Electrostatique*, vol. II, Masson et cie, París, 1964.
- [109]. TERAKADO, R., "The characteristic impedance of rectangular coaxial line with ratio 2:1 of the outer-to-inner conductor side length", IEEE Trans.,1976, February, pp.124-125.
- [110]. RIBLET, J.R., "Upper limit on the error of an improved approximation for the characteristic impedance of rectangular coaxial line", IEEE Trans.,1980, MTT-28, pp.666-667.
- [111]. RIBLET, J.R., "An expansion of the Terakado solution with an application", IEEE Trans.,1982, MTT-30, pp.2036-2039.
- [112]. HARRINGTON, R.F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, USA, 1961.
- [113]. LEONG, M.S., KOOI, P.S. and CHANDRA, : "Radiation from a flanged parallel-plate waveguide: solution by moment method with inclusion of edge condition", Proc IEE, Pt. H, 1988, 135, pp.249-255.

- [114]. LEE, S.-W., and GRUN, L., : "Radiation from a flanged parallel-plate waveguide: Comparison of solutions", IEEE Trans., 1982, AP-30, pp.147-148.
- [115]. SAZONOV, D.M., GRIDIN, A.N. and MISHUSTIN, B.A., *Microwave Circuits*, Mir Publishers, Moscu, 1982.
- [116]. MONTERO, J.M., "Medidas experimentales sobre uniones en T simétricas en coaxial cuadrado", proyecto banda C. Documento interno de la empresa Radiación Y Microondas S.A. nº TNO/AF2/003/RYM, Julio 1989.



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAT DE CIÈNCIES FÍSQUES

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data,  
acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral  
d'En/ Na/ N' Enrique A Navano Carbe  
la qualificació d' Apto Cum laude

València a 7 d' Junio de 19 92

El Secretari,

El President,

