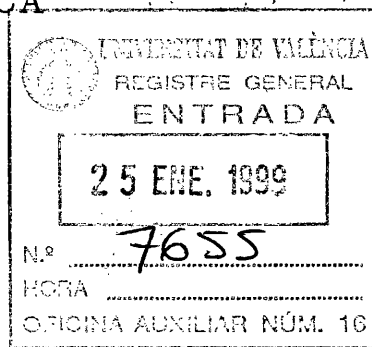


UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
(ESTUDI GENERAL)

DEPARTAMENT D'ÒPTICA



MÉTODO MODAL VECTORIAL
PARA GUÍAS DE ONDAS:
TEORÍA Y APLICACIONES

TESIS DOCTORAL
ENRIQUE SILVESTRE MORA
MARZO 1999

UMI Number: U607792

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607792

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

FISICA

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Nº Registre 13289

DATA 14-4-99

SIGNATURA T. D. 348

Nº LIBRE: j20007759

FÍSICAS - TESTS DOCTORAL n° 348

12-3-1999

Universitat de València
(Estudi General)

Departament d'Òptica



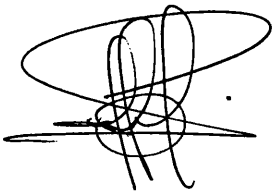
Método modal vectorial para guías
de ondas: Teoría y aplicaciones

Memoria presentada por
ENRIQUE SILVESTRE MORA
para optar al grado de
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS
Marzo 1999

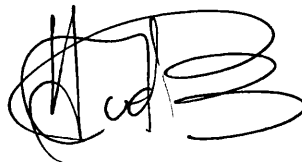
D. Pedro ANDRÉS BOU, Catedrático de Óptica de la Universitat de València y
D. Miguel V. ANDRÉS BOU, Profesor Titular de Física Aplicada de la Universitat
de València

CERTIFICAN que la presente memoria: "Método modal vectorial para guías de
ondas: Teoría y aplicaciones", resume el trabajo de investigación
realizado, bajo su dirección, por D. Enrique SILVESTRE MORA y
constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste y en cumplimiento de la legislación vigente, firman el presen-
te certificado en Valencia, a veinticinco de enero de mil novecientos noventa y nueve.



Fdo.: Dr. Pedro Andrés Bou



Fdo: Dr. Miguel V. Andrés Bou

Del rigor en la ciencia

... En aquel Imperio, el Arte de la Cartografía logró tal Perfección que el Mapa de una sola Provincia ocupaba toda una Ciudad, y el Mapa del Imperio toda una Provincia. Con el tiempo, estos Mapas Desmesurados no satisficieron y los Colegios de Cartógrafos levantaron un Mapa del Imperio, que tenía el tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él. Menos Adictas al Estudio de la Cartografía, las Generaciones Sigüientes entendieron que ese dilatado Mapa era Inútil y no sin Impiedad lo entregaron a las Inclemencias del Sol y de los Inviernos. En los Desiertos del Oeste perduran despedazadas Ruinas del Mapa habitadas por Animales y por Mendigos; en todo el País no hay otra reliquia de las Disciplinas Geográficas.

(Suárez Miranda: *Viajes de Varones Prudentes*, libro cuarto, cap. XIV, Lérida, 1658.)

[Jorge Luis Borges: *Historia Universal de la Infamia*, Buenos Aires, 1954]

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a los directores de este trabajo, Pedro y Miguel Andrés. Casi todo lo que sé en el campo de la Óptica se lo debo a sus enseñanzas y a su estímulo. Muy especialmente he de agradecerle a Pedro el apoyo que me ha brindado durante estos años, así como la confianza que, desde el principio, depositó en mí y en el trabajo que estaba realizando.

La colaboración con los compañeros y amigos del grupo de Óptica de Fourier ha sido fundamental para llevar a cabo la mayor parte del trabajo que he realizado desde que comencé esta tesis. Aunque finalmente sólo han quedado recogidos en este resumen los últimos resultados, quiero agradecerles la gran ayuda que ha supuesto para mí haber podido trabajar con ellos, ya que me permitió adentrarme en materias que, entonces, me eran ajenas. La acogida que me dieron todos ellos y su constante apoyo han sido muy importantes para mí.

Especialmente intensa ha sido, en la última etapa, la colaboración con Albert Ferrando. Muchos de los problemas que han ido surgiendo en los trabajos aquí recogidos fueron despejados en conversaciones con él. Tampoco quiero dejar pasar la gran ayuda que ha supuesto el trabajo de los más jóvenes.

Me gustaría, también, dar las gracias a Philip Russell por su atención y hospitalidad durante mi estancia en la Universidad de Bath (Reino Unido) y por sus comentarios y sugerencias, que invariablemente plantean nuevos problemas siempre interesantes.

Finalmente, quiero hacer público mi reconocimiento a Damián Ginestar. Su auxilio matemático fue crucial para la resolución del problema básico tratado en esta memoria.

Este trabajo ha sido financiado principalmente por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (Proyecto PB93-0354-C02-01). También es de agradecer la ayuda económica parcial brindada por la Conselleria de Cultura, Educació i Ciència, a través del Proyecto Coordinado GV96-D-CN-05141.

Lista de Publicaciones

Esta tesis doctoral está basada en los siguientes artículos:

- I. Enrique Silvestre, Miguel V. Andrés y Pedro Andrés, “Biorthonormal-basis method for the vector description of optical-fiber modes”, *Journal of Lightwave Technology*, **16**, pp. 923–928 (1998).
- II. E. Silvestre, P.St.J. Russell, T.A. Birks y J.C. Knight, “Analysis and design of an endlessly single-mode finned dielectric waveguide”, *Journal of the Optical Society of America A*, **15**, pp. 3067–3075 (1998).
- III. A. Ferrando, E. Silvestre, J.J. Miret, P. Andrés y M.V. Andrés, “Full-vector analysis of a realistic photonic crystal fiber”, *Optics Letters*, **24** (5), (1999).
- IV. A. Ferrando, J.J. Miret, E. Silvestre, P. Andrés y M.V. Andrés, “Vector description of a realistic photonic crystal fiber”, *Optics and Photonics News*, vol. 9, n. 12, pp. 33–34 (1998).
- V. A. Ferrando, E. Silvestre, J.J. Miret, J.A. Monsoriu, M.V. Andrés y P.St.J. Russell, “Designing a photonic crystal fibre with flattened chromatic dispersion”, *Electronics Letters* (enviado).
- VI. E. Silvestre, M.A. Abián, B. Gimeno, A. Ferrando, M.V. Andrés y V. Boria, “Analysis of inhomogeneously filled waveguides using a biorthogonal-basis modal method”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* (enviado).

Índice

1	Introducción	1
2	Método modal vectorial	7
2.1	Teoría básica	7
2.2	Verificación. Fibra de perfil en W	13
2.3	Ejemplificación de las posibilidades. Guías de microondas con elementos dieléctricos	18
2.4	Degeneración de los modos auxiliares	22
3	Guías con envoltura de cristal fotónico	25
3.1	Introducción. Un modelo preliminar unidimensional	25
3.2	Método modal vectorial con condiciones de frontera periódicas . . .	30
3.3	Descripción vectorial de una fibra realista de cristal fotónico	33
3.4	Dispersión de la velocidad de grupo. Fibra acromática	36
4	Conclusiones	39
	Referencias	43

Capítulo 1

Introducción

El estudio del espectro de modos de estructuras dieléctricas complejas es de vital importancia para el análisis y diseño de dispositivos y guías de ondas electromagnéticas, ya sean estructuras dieléctricas abiertas, como las fibras ópticas y los dispositivos basados en ellas o las guías y dispositivos de óptica integrada, o estructuras cerradas, como son las guías y componentes utilizados en sistemas de microondas.

Estos elementos son de gran interés tecnológico al ser los componentes físicos básicos de sistemas de comunicaciones de gran capacidad, ya sea en la faceta de guiado, como de procesamiento optoelectrónico de las señales o su detección. Por ello, todo desarrollo que permita una modelización más precisa de los diferentes dispositivos y de los sistemas guías conlleva la posibilidad de un diseño más ajustado de los diferentes elementos o, incluso, una descripción más general que permita predecir posibles nuevos comportamientos de potencial interés.

Podemos encontrar en la bibliografía estudios razonablemente completos de los diversos métodos disponibles para obtener el espectro de modos de una guía de ondas [1, 2]. El abanico de métodos abarca desde los métodos analíticos exactos y simples hasta los métodos puramente numéricos y los métodos perturbativos. Los primeros permiten abordar las guías de geometría y condiciones de contorno más simples y los otros permiten estudiar estructuras relativamente complejas.

Los métodos analíticos para obtener los modos de una guía de ondas se fundamentan en la resolución de las ecuaciones de onda en regiones cuyas soluciones analíticas sean conocidas, para entonces aplicar las condiciones de contorno adecuadas. Éste es el método común, por ejemplo, para estudiar guías cilíndricas multicapa de salto de índice, ya sean fibras ópticas [3, 4] o guías de microondas [5, 6].

En el caso de que las soluciones de que se dispone no empalmen adecuadamente en las interfases entre los diferentes medios que forman la estructura —como es

el caso, por ejemplo, de guías rectangulares de microondas parcialmente rellenas de dieléctricos [7] o de guías ópticas integradas [8]— se puede expandir el campo en cada una de las regiones en términos de funciones analíticas. La imposición de condiciones frontera a estas combinaciones arbitrarias de funciones en las interfases entre los diferentes medios da lugar a un problema de valores propios cuya diagonalización proporciona las constantes de propagación y los modos buscados. Sin embargo, cuando la guía tiene una estructura mínimamente no trivial, la determinación de las constantes de propagación —y de las propias ecuaciones trascendentes involucradas— se convierte en una tarea difícil. Además, esta técnica exige replantear el problema cada vez que se modifica la estructura de la guía.

Otras aproximaciones al problema utilizan el cálculo variacional [9, 10], formuladas normalmente en base a expresiones de validez no general —guías sin pérdidas, aproximación escalar, *etc.*— y empleando funciones prueba específicas del caso tratado. Así mismo, podemos encontrar diversos métodos, como los llamados “matriciales” [11–14] cuya formulación es compleja, por lo que las bases físicas en las que se fundamentan son difíciles de apreciar. Además, estos diferentes métodos se basan en ideas difíciles de relacionar entre sí y son sólo aplicables a familias limitadas de estructuras —por ejemplo, guías cerradas, o sin pérdidas, o formadas por medios homogéneos—.

Una alternativa a los métodos comentados hasta ahora son los puramente numéricos, como son los métodos de diferencias finitas [15, 16], los de elementos finitos [17, 18] y los de propagación del haz [19]. Estos métodos pueden ser aplicados a estructuras muy diversas, y algunos de ellos incluso a guías carentes de simetría de traslación. En los últimos años los métodos de elementos finitos se reconocen como más ventajosos que los de diferencias finitas por su mayor versatilidad y menor tiempo de cómputo. Estos métodos son adecuados para analizar una estructura guiadora dada, pero resultan insuficientes para abordar eficientemente una tarea de diseño de guías y dispositivos dado el tiempo de cómputo que precisan. El diseño de dispositivos sencillos, como sería una guía rectangular de longitud finita con un par de paralelepípedos dieléctricos insertados en cascada en su interior a modo de resonadores acoplados, no puede abordarse en la práctica con los métodos numéricos mencionados. Además, estos métodos numéricos tienden a difuminar la perspectiva física del problema que un diseño eficiente suele requerir y que en parte conservan los métodos modales que seguidamente comentamos.

Los métodos de representación modal son ampliamente utilizados cuando el problema puede tratarse en el marco de la teoría escalar —es decir, en la aproximación de guiado débil— [20]. Los modos de una guía auxiliar —no física en general, pero con unas características adecuadas— constituyen una base que puede ser utilizada para representar en forma matricial la ecuación de ondas escalar. Cabe comentar

que los métodos de representación modal, al mantener la perspectiva física del problema, permiten con facilidad aprovechar las simetrías del problema planteado, lo que resulta más difícil en los métodos puramente numéricos.

El desarrollo de los métodos de representación modal se basa en las propiedades de ortogonalidad y completitud de los modos de una guía auxiliar, es decir, de su capacidad para representar cualquier función física y cualquier operador que actúe sobre ellas mediante vectores y matrices, respectivamente. Estos vectores y matrices son de dimensión infinita aunque, con las condiciones de frontera adecuadas, numerable. La aproximación en estos métodos consiste precisamente en la utilización de un número finito de modos —para que el problema sea tratable numéricamente—, aunque lo suficientemente grande como para poder dar una aproximación adecuada de la solución buscada. De esta forma, la ecuación diferencial pasa a ser una ecuación algebraica que puede ser diagonalizada con las técnicas habituales. Sin embargo, los métodos de representación modal más convencionales no contemplan la naturaleza vectorial del campo electromagnético y el empleo de medios materiales con absorción y con saltos del índice de refracción arbitrariamente grandes —salvo como una perturbación de los resultados escalares [21, 22]—, lo que representa una enorme restricción a la hora de afrontar múltiples problemas físicos.

La aplicación de estas técnicas a sistemas en los que el carácter vectorial de la luz juega un papel importante presenta problemas técnicos debido a la no hermiticidad¹ del operador responsable de la evolución del sistema —definido éste por las ecuaciones diferenciales que actúan sobre las componentes transversales de los campos—, lo que implica que el conjunto de modos propios del sistema no forman una base ortogonal del conjunto de posibles soluciones.

Problemas formalmente semejantes se plantean en campos muy diferentes de la física y, en particular, dentro de la óptica en el estudio de resonadores laser —utilizando una teoría escalar para describir la luz— [26] y de guías de ondas planas biisotrópicas [27], por ejemplo.

El proyecto de tesis doctoral se orientó, en un principio, al estudio de la propagación de la luz en el espacio libre en la región de Fresnel [28–32]. Posteriormente, nos adentramos en la propagación guiada en la aproximación escalar y, finalmente, nos propusimos abordar el estudio modal de la propagación en sistemas guías con un tratamiento rigurosamente vectorial que superase las limitaciones propias de las aproximaciones escalares. Además, este estudio estaba motivado por el interés tecnológico de múltiples guías y dispositivos cuyo estudio es inabordable o insuficiente mediante la aproximación escalar.

¹En general, no todo operador hermitico — $\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle \forall x, y$ — es, necesariamente, auto-adjunto — $T = T^\dagger$ — [23–25]. Sin embargo, si el operador en cuestión es acotado ambos conceptos son equivalentes [23, sec. 12.3b]. Éste es el caso de los operadores con los que vamos a tener que tratar a lo largo de la presente tesis.

En esta memoria se resume el trabajo realizado en esta última fase del proyecto —desarrollo de un método de representación modal vectorial—, cuyos resultados constituyen un conjunto con coherencia interna propia. El método de representación modal general desarrollado, y aquí recogido, permite describir de manera natural y completa las propiedades de polarización de la luz en estructuras guidoras con perfiles de índice de refracción arbitrarios, abiertas o cerradas, tanto sin pérdidas como con pérdidas —índices de refracción reales o complejos—, preservando en toda la formulación la naturaleza vectorial de los campos electromagnéticos propagados. El punto clave es el reconocimiento de que las conocidas relaciones de “ortogonalidad” que exhiben los modos de una guía, no son sino las relaciones de *biortogonalidad* que, de forma general, satisfacen los vectores propios de un operador no autoadjunto con los vectores propios de su operador adjunto [33, 34]. Esta propiedad está ligada con el hecho de que el sistema de ecuaciones que rige las componentes transversales del campo eléctrico es, básicamente, el sistema adjunto del que rige las componentes transversales del campo magnético.

La propiedad de biortogonalidad nos permite definir un método completamente general para calcular los elementos de matriz de cualquier operador de interés en términos de los modos de un problema auxiliar arbitrario, sin importar si vienen descritos como un operador autoadjunto o no. De esta forma, podemos transformar el problema de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de las componentes transversales del campo electromagnético —incluyendo condiciones de frontera altamente no triviales— en un problema algebraico.

La generalidad de la técnica desarrollada le concede una versatilidad que no poseen otros métodos alternativos. El sólido formalismo matemático en el que se sustenta lo dota de una gran autoconsistencia, lo que evita la aparición de ambigüedades innecesarias aun cuando se tratan problemas aparentemente muy diferentes.

Hemos aplicado este método con notable éxito a diferentes tipos de fibras y guías, abarcando desde el rango óptico hasta la región de las microondas. Una aplicación que ha despertado un interés particular es el caso de las fibras de cristal fotónico. Estas nuevas estructuras guidoras poseen una estructura material muy compleja, por lo que resulta prácticamente inabordable con los métodos usuales. Algunas propiedades de estas fibras son totalmente diferentes respecto a las convencionales. En concreto, en lo que respecta a la dependencia del número de modos con la frecuencia, resultando que se pueden diseñar fácilmente para que sean monomodo en un amplísimo rango de frecuencias, idealmente infinito. La alta precisión numérica de nuestro método ha permitido, por primera vez, determinar la dispersión de la velocidad de grupo de estas estructuras y, ajustando convenientemente los parámetros estructurales que las definen, moldear, a voluntad, estas curvas de dispersión.

A continuación, en el capítulo 2 se expone las bases teóricas del método propuesto

(sección 2.1, Publicación I), así como algunos casos en los que se hace hincapié en consideraciones relativas a su aplicación práctica (sección 2.2, Publicación I) y se ejemplifica su versatilidad (sección 2.3, Publicación VI). Ese capítulo se concluye (sección 2.4) mencionando el efecto de las simetrías del sistema auxiliar en las bases que proporciona.

El capítulo 3 recoge la adaptación y aplicación de las ideas mostradas en el capítulo anterior al caso de fibras con envoltura de cristal fotónico. En la primera sección (3.1), se introduce brevemente este nuevo tipo de guías y se resumen sus características fundamentales con la ayuda de un modelo simplificado (Publicación II); en la sección 3.2 (Publicaciones III y IV) se plantea la aplicación del método modal vectorial al estudio de fibras con envoltura de cristal fotónico. En las siguientes secciones se presentan los primeros resultados obtenidos, tanto en la descripción de sus relaciones de dispersión y sus modos (sección 3.3, Publicaciones III y IV), como en el diseño de fibras de cristal fotónico con dispersión acromática (sección 3.4, Publicación V).

Finalmente, en el capítulo 4, se incluyen las conclusiones finales de la tesis junto con un esbozo de las posibilidades que abre la aplicación en diferentes ámbitos del método desarrollado, así como sus posibles extensiones.

Capítulo 2

Método modal vectorial

A lo largo de este capítulo se expone la base teórica para el desarrollo de un método modal vectorial general que permite describir la propagación del campo electromagnético en guías de onda arbitrarias (Publicación I). Para ello, las ecuaciones de ondas vectoriales que determinan el comportamiento de los campos electromagnéticos se escriben en términos de un par de operadores adjuntos entre sí. Como consecuencia de esto, sus vectores propios satisfacen relaciones de *biortogonalidad*. La constatación de este hecho es crucial para el desarrollo de nuestro método.

Nuestra aproximación se apoya, además, en la transformación de este sistema de ecuaciones diferenciales lineales —que puede incluir condiciones de frontera no triviales— en un sistema de ecuaciones algebraico. Para ello, el operador definido por el sistema de ecuaciones diferenciales, L , se representa matricialmente en la base formada por los vectores propios de un operador auxiliar, \tilde{L} , es decir, en los modos de un sistema auxiliar conocido.

Esta técnica puede aplicarse a guías de cualquier perfil, incluyendo a guías con pérdidas, cuyos materiales se describirán con índices de refracción complejos. Para ejemplificar la versatilidad del método, se muestra su aplicación a varios sistemas muy distintos entre sí (Publicaciones I y VI), lo que, a su vez, permite hacer hincapié en los aspectos numéricos que surgen en su aplicación.

2.1 Teoría básica

La dinámica del campo electromagnético está determinada clásicamente por las ecuaciones de Maxwell. En medios estacionarios se puede escribir cualquier solución de estas ecuaciones como superposición de campos armónicos en el tiempo. Si, además, nos restringimos a medios sin propiedades magnéticas y sin cargas libres

ni corrientes — $\mu = \mu_0$, $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$, respectivamente—, estas ecuaciones pueden escribirse para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} como [2]

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= iZ_0 k_0 \mathbf{H}, & \nabla \times \mathbf{H} &= -ik_0 n^2 / Z_0 \mathbf{E}, \\ \nabla \cdot (n^2 \mathbf{E}) &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde n es el índice de refracción del medio, $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$ el número de ondas en el espacio libre y $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ la impedancia intrínseca del vacío.

En medios invariantes bajo traslaciones a lo largo de una cierta dirección, p. ej. del eje z —es decir, con $n = n(\mathbf{x}_t)$ — la solución más general posible será una combinación lineal de campos con una dependencia también armónica en z ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{x}_t) \exp(i\beta z), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) \exp(i\beta z), \quad (2.2)$$

donde β es la constante de propagación y \mathbf{e} y \mathbf{h} representan la dependencia de los campos con las coordenadas transversales $\mathbf{x}_t = (x, y)$. Estos campos armónicos en t y z son los modos de la guía, en términos de los cuales se podrá en general describir la propagación del campo electromagnético. En estas condiciones el campo queda completamente determinado por sólo dos de sus componentes ligadas por un sistema acoplado de dos ecuaciones diferenciales lineales. Para el propósito que perseguimos, esto es, la obtención de los modos de sistemas guías con distribuciones arbitrarias del índice de refracción, nos interesa centrarnos en las ecuaciones de ondas que satisfacen las componentes transversales del campo eléctrico, \mathbf{e}_t , y el magnético, \mathbf{h}_t , [2]

$$\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n^2 + \left(\frac{\nabla_t n^2}{n^2} \right) \times (\nabla_t \times \circ) \right] \mathbf{h}_t = \beta^2 \mathbf{h}_t, \quad (2.3)$$

$$\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n^2 + \nabla_t \cdot \left(\left(\frac{\nabla_t n^2}{n^2} \right) \cdot \circ \right) \right] \mathbf{e}_t = \beta^2 \mathbf{e}_t, \quad (2.4)$$

que pueden obtenerse fácilmente a partir de (2.1) y (2.2). Por supuesto, en las ecuaciones anteriores ∇_t^2 y ∇_t representan, respectivamente, el laplaciano y el gradiente transversales. En estas ecuaciones podemos identificar entre los corchetes los operadores responsables de la evolución de las componentes transversales del campo a lo largo del eje z . Diagonalizando cualquiera de estos dos operadores, junto con las condiciones de frontera adecuadas y las ligaduras que imponen las ecuaciones de Maxwell entre las componentes del campo, se obtiene la solución completa del problema.

Sin embargo, el hecho fundamental que diferencia la representación modal en el caso vectorial frente a la aproximación escalar es que, incluso para índices de refracción reales, los operadores definidos en las ecs. (2.3) y (2.4) no son autoadjuntos, mientras que en la teoría escalar —y para índices de refracción reales— el

correspondiente operador de evolución es autoadjunto. Esto impide que se pueda aplicar directamente las técnicas usadas en la aproximación escalar al caso vectorial debido, básicamente, a que en esta última situación los modos de un sistema auxiliar adecuado no son, en general, ortogonales.

La solución para el caso vectorial se basa en una propiedad satisfecha por los vectores propios θ_i de un operador no autoadjunto A y los vectores propios χ_j de su operador adjunto A^\dagger , es decir, los vectores que satisfacen las ecuaciones de valores propios

$$A\theta_i = \alpha_i\theta_i, \quad (2.5)$$

$$A^\dagger\chi_j = \alpha_j^*\chi_j, \quad (2.6)$$

donde α_i y α_j^* son los correspondientes valores propios. Esta propiedad establece que ambos conjuntos de vectores cumplen una relación de *biortogonalidad* [33, 34], a saber,

$$\langle \chi_i, \theta_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (2.7)$$

donde $\langle \circ, \circ \rangle$ es el producto escalar ordinario del espacio de Hilbert de las funciones de un cierto subconjunto S de \mathbb{R}^2 en \mathbb{C}^2 de cuadrado integrable, $\mathcal{L}^2(S \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$. Los valores propios de cada uno de estos dos operadores resultan ser conjugados, uno a uno, de los del otro.

Si reescribimos la ec. (2.4) en terminos de $\bar{\mathbf{e}}_t \equiv \epsilon \mathbf{e}_t^*$, donde ϵ es el tensor completamente antisimétrico en dos dimensiones —es decir, $\bar{\mathbf{e}}_t = (e_y^*, -e_x^*)$ en coordenadas cartesianas y $\bar{\mathbf{e}}_t = (e_\phi^*, -e_r^*)$ en coordenadas polares—, las ec. (2.3) y (2.4) pueden reescribirse como

$$L\mathbf{h}_{t(i)} = \beta_i^2 \mathbf{h}_{t(i)}, \quad L^\dagger \bar{\mathbf{e}}_{t(j)} = (\beta_j^2)^* \bar{\mathbf{e}}_{t(j)}, \quad (2.8)$$

poniéndose de manifiesto que los operadores que rigen la evolución de $\mathbf{h}_{t(i)}$ y $\bar{\mathbf{e}}_{t(j)}$ son adjuntos uno del otro¹ y, por lo tanto, que sus vectores propios satisfacen una relación de biortogonalidad, ec. (2.7),

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_{t(i)}, \mathbf{h}_{t(j)} \rangle = \delta_{ij}. \quad (2.9)$$

Si se restaura la notación tridimensional original, se ve inmediatamente que esta propiedad no es sino la relación satisfecha por los campos electromagnéticos conocida habitualmente como de “ortogonalidad” [2],

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_{t(i)}, \mathbf{h}_{t(j)} \rangle = \int_S (\bar{\mathbf{e}}_{t(i)}^* \cdot \mathbf{h}_{t(j)}) ds = \int_S (\mathbf{e}_{(i)} \times \mathbf{h}_{(j)}) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds = \delta_{ij}. \quad (2.10)$$

¹Esto puede obtenerse fácilmente realizando el cálculo explícito, es decir, comprobando que

$$\langle L^\dagger \chi, \theta \rangle = \langle \chi, L\theta \rangle,$$

siendo χ y θ funciones arbitrarias del espacio de funciones en el que están definidos L y L^\dagger .

La falta de ortogonalidad en sentido estricto de los vectores propios de un operador no autoadjunto podría llevar a pensar que no se puede expandir una función arbitraria en términos de estos autovectores, pero, de hecho, para realizar una expansión en modos sólo se requiere una base completa así como los proyectores en cada uno de sus subespacios unidimensionales. El producto escalar de un campo arbitrario Ξ y los vectores propios χ_i del problema adjunto nos selecciona las diferentes componentes de Ξ en términos de θ_i , es decir,

$$\Xi = \sum_i \langle \chi_i, \Xi \rangle \theta_i. \quad (2.11)$$

En otras palabras, el proyector sobre el subespacio generado por θ_i , $P_i(\circ)$, viene dado por $\langle \chi_i, \circ \rangle$.² De esta forma, por el mero hecho de tener un problema no autoadjunto existe una relación de biortogonalidad que permite calcular las componentes de un vector en la base de los vectores propios del operador en cuestión. Una vez se han identificado cuáles son los proyectores que nos permiten realizar las descomposiciones modales, se puede seguir análogamente los mismos pasos que se dan en el caso escalar, es decir, representar matricialmente cada operador en una cierta base, resolver la ecuación de valores propios resultante diagonalizando la matriz obtenida y, utilizando los modos calculados, estudiar cualquier observable que se desee, como puede ser la dispersión cromática o la dependencia con la longitud de onda de la transmitancia de un dispositivo.

En el caso particular de que L sea autoadjunto, es decir, $L = L^\dagger$, los vectores propios θ_i y χ_i coinciden y, por lo tanto, la relación de biortogonalidad se reduce a una relación de ortogonalidad, $\langle \theta_i, \theta_j \rangle = \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$. En este caso, los valores propios β_i^2 son necesariamente números reales.

Los resultados expuestos definen el marco en el que se fundamenta nuestro método vectorial. La idea última es poder encontrar los modos de una guía de ondas arbitraria caracterizada por una distribución de índice de refracción $n = n(x_t)$. Como se ha indicado, la propagación electromagnética en esta guía está descrita por un par de sistemas de ecuaciones análogo al descrito en las ecs. (2.8). Pues bien, sea L el operador diferencial matricial correspondiente al problema que pretendemos resolver, $\mathbf{h}_{t(i)}$ y $\bar{\mathbf{e}}_{t(j)}$ los vectores propios de L y L^\dagger , respectivamente, y β_i la

² Alternativamente, este campo arbitrario Ξ también puede descomponerse en términos de los vectores χ_i proyectando sobre los vectores θ_i , es decir,

$$\Xi = \sum_i \langle \theta_i, \Xi \rangle \chi_i.$$

Esto es equivalente a afirmar que tenemos dos posibles resoluciones de la identidad,

$$I = \sum_i |\theta_i\rangle \langle \chi_i| = \sum_i |\chi_i\rangle \langle \theta_i|.$$

constante de propagación del i -ésimo modo; entonces, los sistemas de ecuaciones que describen esta guía son

$$L\mathbf{h}_{t(i)} = \beta_i^2 \mathbf{h}_{t(i)}, \quad L^\dagger \bar{\mathbf{e}}_{t(j)} = (\beta_j^2)^* \bar{\mathbf{e}}_{t(j)}. \quad (2.12)$$

Ahora definamos un *problema auxiliar* como el de una guía caracterizada por una distribución de índice de refracción \tilde{n} de la cual conocemos sus vectores propios, $\tilde{\mathbf{h}}_{t(p)}$ y $\tilde{\mathbf{e}}_{t(q)}$, y sus respectivas constantes de propagación, $\tilde{\beta}_p$. Las ecuaciones que describen el problema auxiliar son, pues,

$$\tilde{L}\tilde{\mathbf{h}}_{t(p)} = \tilde{\beta}_p^2 \tilde{\mathbf{h}}_{t(p)}, \quad \tilde{L}^\dagger \tilde{\mathbf{e}}_{t(q)} = (\tilde{\beta}_q^2)^* \tilde{\mathbf{e}}_{t(q)}, \quad (2.13)$$

y, por tanto, el conjunto de sus vectores propios, $\tilde{\mathbf{h}}_{t(p)}$ y $\tilde{\mathbf{e}}_{t(q)}$, forman una base biortonormal. Como ya se ha dicho, estos modos pueden utilizarse para representar matricialmente cualquier operador lineal que actúe sobre funciones de nuestro espacio de Hilbert, y, en particular, el operador L . Es decir, expandiendo los vectores propios de L y L^\dagger en términos de los vectores propios de \tilde{L} y \tilde{L}^\dagger ,

$$\mathbf{h}_{t(i)} = \sum_p c_{(i)p} \tilde{\mathbf{h}}_{t(p)}, \quad \bar{\mathbf{e}}_{t(j)} = \sum_q d_{(j)q} \tilde{\mathbf{e}}_{t(q)}, \quad (2.14)$$

y proyectando convenientemente, podemos representar las ecuaciones de onda asociadas a la distribución n , ec. (2.12), en forma matricial. En particular, para L queda

$$\sum_q L_{pq} c_{(i)q} = \beta_i^2 c_{(i)p}. \quad (2.15)$$

Cada uno de los elementos de matriz L_{pq} se puede calcular mediante la expresión

$$L_{pq} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_{t(p)}, L\tilde{\mathbf{h}}_{t(q)} \rangle = \tilde{\beta}_p^2 \delta_{pq} + \langle \tilde{\mathbf{e}}_{t(p)}, \Delta\tilde{\mathbf{h}}_{t(q)} \rangle, \quad (2.16)$$

donde se ha descompuesto el operador L de la forma $L = \tilde{L} + \Delta$. El operador diferencia Δ viene dado por³

$$\Delta = k_0^2 (n^2 - \tilde{n}^2) + \left(\frac{\nabla_t n^2}{n^2} - \frac{\nabla_t \tilde{n}^2}{\tilde{n}^2} \right) \times (\nabla_t \times \circ). \quad (2.17)$$

La diagonalización de la ec. (2.15) proporciona los valores propios β_i^2 y los vectores propios $\mathbf{h}_{t(i)} = \sum_p c_{(i)p} \tilde{\mathbf{h}}_{t(p)}$, es decir, las constantes de propagación y los modos. Además, con esta forma de abordar el problema, y dado que la solución es una superposición lineal de los modos auxiliares, podemos asegurar que los modos

³ Nótese que el término $\nabla_t n^2/n^2$ no puede reescribirse como $\nabla_t \ln n^2$, ya que n^2 no es diferenciable en las discontinuidades y, por lo tanto, no se puede aplicar la regla de la cadena. Lo mismo sucede para \tilde{n} .

del sistema problema satisfacen las ligaduras entre componentes de los campos derivadas de las ecuaciones de Maxwell a la vez que las mismas condiciones de frontera exteriores que el sistema auxiliar.

Alternativamente, podríamos resolver el problema centrándonos en las componentes e_t . En este caso, a partir también de las ecs. (2.12) y (2.14) puede escribirse

$$\sum_q L_{pq}^\dagger d_{(i)q} = (\beta_i^2)^* d_{(i)p}, \quad (2.18)$$

con

$$L_{pq}^\dagger = \langle \tilde{h}_{t(p)}, L^\dagger \tilde{e}_{t(q)} \rangle = (\tilde{\beta}_p^2)^* \delta_{pq} + \langle \tilde{h}_{t(p)}, \Delta^\dagger \tilde{e}_{t(q)} \rangle, \quad (2.19)$$

y $L^\dagger = \tilde{L}^\dagger + \Delta^\dagger$.

De todas formas, cuando se ha de representar la densidad de flujo en la estructura guiadora, o calcularse los coeficientes de acoplo entre dos guías diferentes, es necesario disponer simultáneamente de las componentes transversales del campo eléctrico y del magnético. Si se ha obtenido $h_{t(i)}$ podría calcularse el resto de las componentes del campo, y en particular $\bar{e}_{t(i)}$, utilizando directamente las ecuaciones de Maxwell, aunque, en general, ésta no es la manera más eficiente de hacerlo.

También puede calcularse $\bar{e}_{t(i)}$ aprovechando que es biortogonal a $h_{t(j)}$. Es decir, si desarrollamos la relación de biortogonalidad satisfecha por estos campos, $\langle \bar{e}_{t(i)}, h_{t(j)} \rangle = \delta_{ij}$, en términos de los campos auxiliares, $\tilde{e}_{t(p)}$ y $\tilde{h}_{t(q)}$, que también son biortogonales, se obtiene, haciendo uso de las ecs. (2.14), que

$$\langle \bar{e}_{t(i)}, h_{t(j)} \rangle = \sum_{pq} d_{(i)p}^* c_{(j)q} \langle \tilde{e}_{t(p)}, \tilde{h}_{t(q)} \rangle = \sum_p d_{(i)p}^* c_{(j)p}, \quad (2.20)$$

o lo que es lo mismo, que las matrices formadas por los coeficientes de los desarrollos de los vectores propios de L y L^\dagger están ligadas por la relación

$$[d^*]^T = [c]^{-1}. \quad (2.21)$$

Por último, otra forma de calcularlos es utilizar el hecho de que la representación matricial de L^\dagger es, como matriz, la *adjunta* de la de L , esto es,

$$(L^\dagger)_{pq} = (L_{qp})^*, \quad (2.22)$$

por lo que no es necesario recurrir a la ecuación (2.19) para calcular los elementos de la matriz adjunta. Los vectores propios obtenidos diagonalizando la ec. (2.18) son biortogonales respecto de los resultantes de la diagonalización de la ec. (2.15), pero no estarán normalizados. Este problema se puede subsanar fácilmente por medio de la ec. (2.20), es decir, imponiendo que

$$\sum_p d_{(i)p}^* c_{(i)p} = 1. \quad (2.23)$$

Sin embargo, los modos calculados mediante la ec. (2.21) —o por las ecs. (2.22) y (2.23)—, aun siendo biortonormales, no satisfacen exactamente las ecuaciones de Maxwell al quedar indeterminada una constante por cada modo, que multiplica a $\mathbf{h}_{t(i)}$ y divide a $\bar{\mathbf{e}}_{t(i)}$. Para determinar estas constantes basta con calcular explícitamente a través de las ecuaciones de Maxwell una —o, mejor, algunas, si estamos pensando en un problema que hemos de resolver numéricamente y deseamos minimizar los errores de redondeo— de las componentes de cada uno de los vectores; si bien esto no es necesario para, p. ej., calcular la transmitancia de dispositivos o representar la distribución de densidad de flujo puesto que en las expresiones involucradas aparecen siempre emparejados $\mathbf{h}_{t(i)}$ y $\bar{\mathbf{e}}_{t(i)}$, cancelándose en estos casos las constantes mencionadas.

El método que se ha presentado generaliza los métodos modales ordinarios, aplicables a la propagación escalar en guías $-L = L^\dagger-$, al caso completamente vectorial $-L \neq L^\dagger-$ utilizando propiedades matemáticas de los operadores no autoadjuntos que definen sin ambigüedades el problema algebraico asociado.

Es interesante resaltar que el carácter no autoadjunto de L está presente incluso cuando el medio no tiene pérdidas —es decir, siendo n una función real—. Este carácter es inherente a la propagación electromagnética en un medio no homogéneo, ya que es precisamente el segundo sumando de la ec. (2.17), el responsable del acoplamiento de las diferentes componentes del campo, el que no es autoadjunto —aun siendo n real—. Este hecho pone en evidencia la relación que hay entre el carácter no autoadjunto de L y la descripción completamente vectorial dada por sus vectores propios.

Por último decir que se ha realizado un desarrollo alternativo al de la primera parte de esta sección basado en una formulación lagrangiana de la propagación del campo electromagnético en un medio con invariancia traslacional. Ese desarrollo ha sido presentado recientemente y no se ha incluido en este resumen por brevedad [35].

2.2 Verificación. Fibra de perfil en W

El sistema auxiliar ha de proporcionarnos una base en la que representar el sistema problema. Sin embargo, si el sistema que se pretende describir es abierto, como es el caso de las fibras ópticas o de las guías ópticas integradas, el espectro del operador que describe el sistema problema, y por ende también el del auxiliar, tendrá una parte continua, cuyo tratamiento es siempre una cuestión delicada. La forma más sencilla de evitar este inconveniente es discretizar los espectros rodeando ambos sistemas con un blindaje perfecto, es decir, introduciéndolos en una caja confinante. El hecho de blindar ambos sistemas nos permite tener una base auxiliar

con un número discreto de modos.

Claro está, los modos del sistema problema encerrado dentro de la caja notarán, en general, el efecto de la frontera confinante situada a una distancia finita. Sin embargo, la perturbación que sufrirán será menor cuanto mayor sea el tamaño de la caja, por lo que el sistema real estará representado más fielmente por sistemas blindados con cajas mayores. Este efecto debido al volumen finito del espacio es más significativo para longitudes de onda grandes como se puede ver en los ejemplos numéricos mostrados en la Publicación I, que ya comentaremos más adelante.

Por otra parte, la matriz $[L_{pq}]$ es de dimensión infinita, por lo que, para poder desarrollar un método realista, se ha de trabajar con un número finito de modos auxiliares, descartando los menos significativos. En general, los modos del sistema problema estarán mejor descritos cuanto mayor sea el número de modos auxiliares utilizados. De la misma forma, una base auxiliar que comparta las características más relevantes del sistema problema convergerá más rápidamente.

Sin embargo, para el caso con simetría de revolución que estamos tratando, el número de modos auxiliares necesarios para alcanzar una cierta precisión crece, aproximadamente, de forma lineal con el cociente entre el radio del blindaje y el radio de la estructura guidora. Por esta razón, necesitamos un compromiso entre estos dos parámetros para poder minimizar el tiempo de cómputo. Eligiendo adecuadamente el radio del blindaje y el número de modos auxiliares podemos obtener resultados con una precisión mayor que un valor previamente establecido.

Por último, si el sistema auxiliar y el sistema problema poseen una misma simetría, el operador Δ no mezclará los subespacios generados por modos del mismo orden respecto a esa simetría. Esto implica que simplemente ordenando los índices de los modos de forma que queden contiguos los del mismo orden, la matriz Δ_{pq} —y, por tanto, también L_{pq} — aparecerá estructurada en submatrices dispuestas a lo largo de la diagonal asociadas a cada uno de los órdenes de esa simetría, pudiéndose entonces diagonalizar cada una de ellas por separado.

Una fibra monomodo de perfil en W

El método propuesto se ha aplicado a modo de ejemplo a una fibra multicapa constituida por el núcleo, una envoltura interior y otra exterior, de forma que el índice de la capa intermedia es menor que el de las dos restantes. Esta fibra posee una dispersión cromática que se anula para dos longitudes de onda en el rango de trabajo [36], o equivalentemente presenta un extremo local, por lo que posee un comportamiento acromático. Los detalles de nuestros cálculos se pueden encontrar en la Publicación I y en la ref. [35].

Este problema tiene la ventaja tanto de ser no trivial como, simultáneamente, de tener una solución exacta, lo que nos permite contrastar nuestros resultados y al

mismo tiempo hacer hincapié en la importancia de la elección del sistema auxiliar y del número de modos necesarios para trabajar con una precisión previamente establecida. La elección del problema auxiliar se basa, en primer lugar, en la posibilidad de disponer de sus soluciones —lo cual es una condición necesaria— y, en segundo lugar, en su parecido con el problema real. En este caso se ha elegido como sistema auxiliar un medio homogéneo blindado de radio R (véase fig. 2.1).

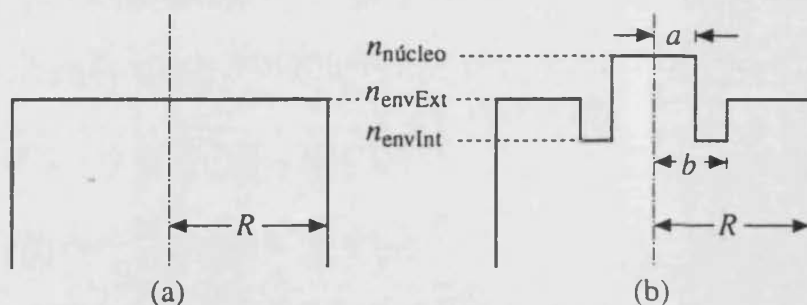


Figura 2.1. Perfil radial del índice de refracción para (a) la fibra auxiliar y (b) la fibra de perfil en W. R es el radio del blindaje, y a y b los radios del núcleo y de la envoltura interior, respectivamente. En todos los casos considerados $a = 3,4 \mu\text{m}$ y $b/a = 1,73$.

Hemos calculado la constante de propagación β del modo fundamental para diferentes valores de los dos únicos parámetros libres del problema, a saber, el número de modos auxiliares para cada polarización, M , y el radio de la fibra auxiliar, R . Con ellos hemos efectuado diferentes pruebas que evidencian las propiedades de convergencia de nuestros resultados. Así, en la fig. 2.2 se muestra la evolución del error

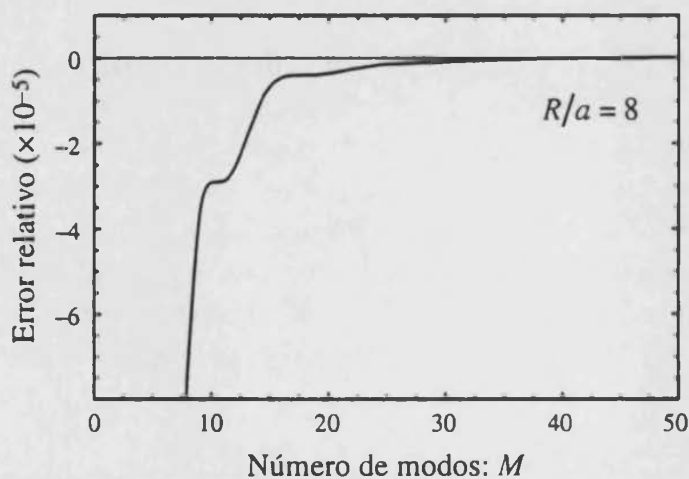


Figura 2.2. Error relativo de la constante de propagación del modo fundamental en función del número de modos, M , para un valor fijo del radio del blindaje del sistema auxiliar, R .

relativo de la constante de propagación del modo fundamental con el número de modos auxiliares M manteniendo el volumen del sistema auxiliar constante ($R/a = 8$). Como puede verse, los valores propios se acercan rápidamente a un valor asintótico —ligeramente menor que el valor teórico— al aumentar el número de modos.

Sin embargo, para un valor fijado de M , puede resultar que con un radio R relativamente pequeño se obtengan mejores resultados que con uno mayor. Este hecho aparece ilustrado en la fig. 2.3, donde se pone de manifiesto la importancia

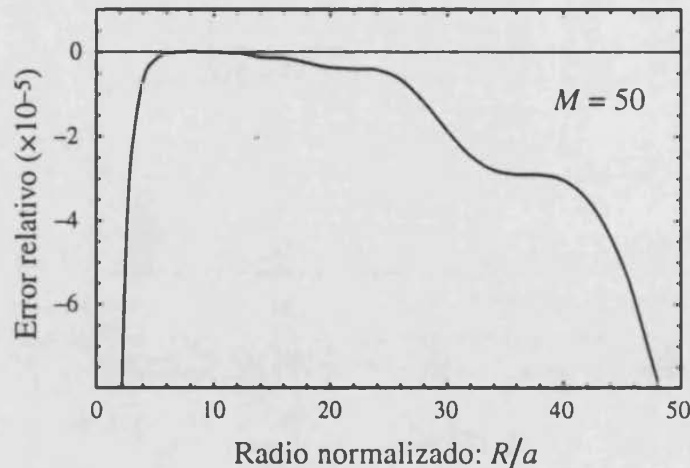


Figura 2.3. Error relativo de la constante de propagación del modo fundamental en función del radio del blindaje del sistema auxiliar, R , para un valor fijo del número de modos, M .

de la resolución espacial. En ella se muestra la evolución del error relativo con el radio R , manteniendo esta vez el número de modos constante ($M = 50$). La curva presenta un crecimiento suave hasta que alcanza un valor crítico. A partir de este punto se pierde, de nuevo, precisión. Esto es debido a que al aumentar el volumen sin incrementar simultáneamente el número de modos, empobrecemos la precisión con la que describimos las estructuras espaciales del sistema en cuestión. Cuando una estructura espacial fundamental del problema no se describe adecuadamente, aparece una brusca pérdida de precisión. Para tratar este problema, recurrimos al concepto de resolución espacial, definida como el número máximo de periodos espaciales de la base auxiliar que pueden acomodarse en la estructura que hemos de resolver, $M/(R/a)$.

En la fig. 2.4 se muestra de nuevo la evolución del error relativo con R , pero manteniendo ahora una resolución espacial fija, elegida para describir adecuadamente el detalle más pequeño del perfil del índice de refracción del ejemplo. Puesto que la resolución espacial es constante en esa curva, sólo aparecen los efectos debidos al volumen finito. Para valores pequeños de R , los efectos del volumen resultan apre-

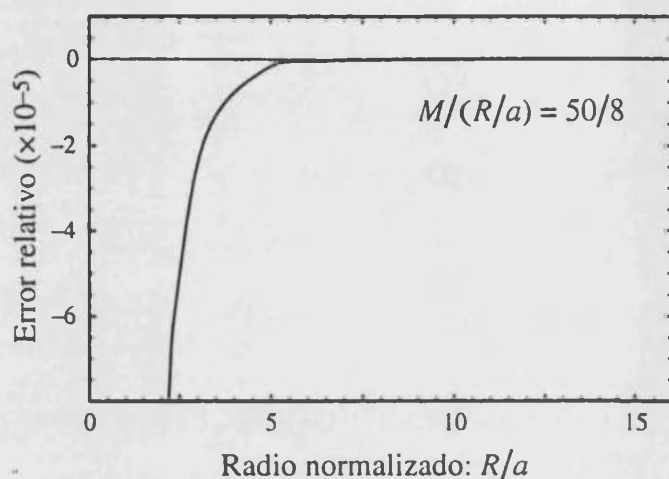


Figura 2.4. Error relativo de la constante de propagación del modo fundamental en función del radio del sistema auxiliar, R , manteniendo fija la resolución espacial, $M/(R/a)$.

ciables. Sin embargo, debido al comportamiento suave de esta curva, los efectos de volumen se pueden eliminar fácilmente, sin pérdida de precisión, mediante una adecuada extrapolación. Nótese también que en la fig. 2.3 aparecen simultáneamente los efectos del volumen finito y de la baja resolución espacial.

Las figs. 2.3 y 2.4 ilustran el procedimiento que se ha seguido para poder determinar los valores de R y M que nos dan la solución buscada con un tiempo de cómputo realista.

Para un valor fijo de R , se va incrementando M hasta alcanzar un valor suficientemente próximo al valor asintótico. Esto asegura que se tiene suficientes modos en la base auxiliar para resolver adecuadamente los detalles del perfil del índice. Ha de tenerse en cuenta que la mejora de la precisión se produce a saltos al ir resolviéndose las diferentes subestructuras (véase fig. 2.2). El valor asintótico del que se ha conseguido una buena aproximación está afectado por el efecto del volumen finito utilizado. Si ahora se aumenta el tamaño de la caja manteniendo fija la resolución espacial alcanzada, se verá cómo evolucionan las asíntotas de la fig. 2.4 al ir eliminando el efecto de volumen.

Para poder calcular la dispersión cromática se requiere una precisión relativamente grande ya que ésta depende de la segunda derivada de $\beta(\omega)$. La fig. 2.5 demuestra que nuestro método puede proporcionar con precisión este parámetro, siempre que se elijan unos valores adecuados para el radio del blindaje y el número de modos auxiliares. Nótese que el comportamiento acromático de la dispersión característico de este tipo de fibras se describe correctamente con nuestro método modal. Se puede observar que existe todavía una ligera discrepancia entre la curva teórica, A , y la correspondiente a $R = 8a$ que, como ya hemos nombrado, sólo es

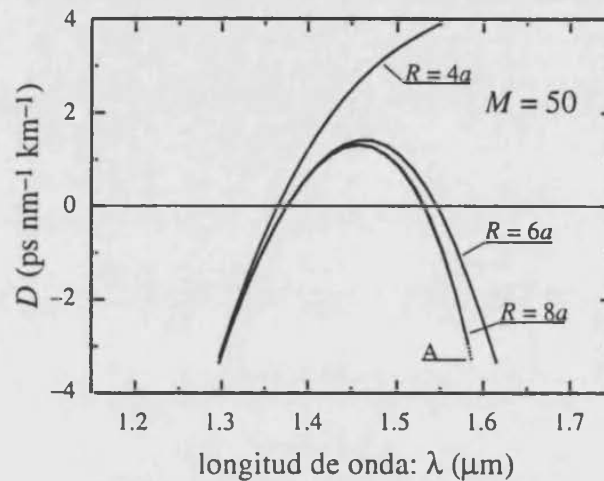


Figura 2.5. Dispersión cromática D de la fibra de perfil en W en función de la longitud de onda. Se muestra la solución analítica A en línea discontinua y la solución numérica obtenida con $M = 50$ y tres radios del blindaje diferentes. La precisión alcanzada con $R = 4a$ y $R = 6a$, incluso con $M = 50$, es pequeña debido a que el efecto de volumen finito depende fuertemente de la longitud de onda.

perceptible para las longitudes de onda más grandes.

2.3 Ejemplificación de las posibilidades. Guías de microondas con elementos dieléctricos

Con la idea de mostrar la generalidad del método expuesto en la sección 2.1, lo hemos aplicado a un campo tan distinto del de la sección anterior como es el de las guías de microondas rellenas con elementos dieléctricos (Publicación VI).

El análisis de estos problemas resulta ser más sencillo ya que, al estar los sistemas confinados, su espectro es discreto, no apareciendo el problema del efecto de volumen inherente a la utilización de una frontera artificial a distancia finita discutido en la sección 2.2. En otras palabras, en este caso la frontera es *física*. Por otra parte, el hecho de que sean comparables las dimensiones de las paredes que definen la guía y de los elementos dieléctricos introducidos conlleva que el número de modos auxiliares necesarios para alcanzar una determinada resolución espacial sea mucho menor que en el caso abierto.

Por contra, las dimensiones macroscópicas de las guías de microondas permiten la realización práctica de distribuciones de índice de refracción mucho más complejas que las abordables, en general, en el caso de guías ópticas. Como se ha indicado en la Introducción, los muchos métodos desarrollados para resolver estos problemas adolecen de un excesivo carácter *ad hoc*, siendo necesario replantear el problema o rededucir las ecuaciones involucradas por el mero hecho de introducir un nuevo

elemento en la guía, aun siendo igual a otro ya existente.

La generalidad de la aproximación propuesta en la sección 2.1 permite el desarrollo de programas de cálculo muy versátiles y flexibles. En nuestro caso, la adición de un nuevo elemento a la estructura guiadora se resuelve con la suma de algunos términos a los elementos de matriz ya conocidos.

Además, dado que todas las integrales que han de calcularse para evaluar los elementos de matriz L_{pq} , ecs. (2.16) y (2.17), pueden ser resueltas analíticamente en la mayoría de los casos de utilidad práctica, la técnica propuesta resulta ser extremadamente eficiente desde el punto de vista computacional.

Guías de microondas con elementos dieléctricos

En la Publicación VI se ha aplicado nuestro método a una amplia gama de guías de microondas con estructuras dieléctricas en su interior, estudiadas previamente por diferentes autores. Estas geometrías, siempre descritas más adecuadamente en coordenadas cartesianas, comprenden estructuras con rotura de simetría e incluso con variaciones continuas del índice de refracción. En la fig. 2.6 se muestran los

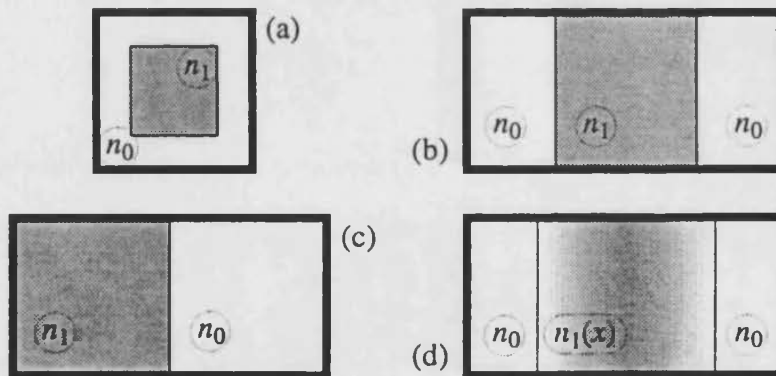


Figura 2.6. Secciones transversales de las guías de microondas rectangulares rellenas de elementos dieléctricos tratadas en esta sección.

perfiles de las guías tratadas, donde n_0 y n_1 son los diferentes índices de refracción de los elementos insertados. En todos los casos presentados se ha tomado como sistema auxiliar una guía de ondas cuyas dimensiones coinciden con las de la guía problema rellena de un medio homogéneo de índice n_0 , cuyos valores y vectores propios son bien conocidos (véase, por ejemplo, ref. [1]).

En el primer caso se muestra la aplicación trivial del método a una guía dieléctrica apantallada [15]. La razón entre los lados de la región dieléctrica central es la misma que entre los lados del blindaje e igual a 0,99, siendo las dimensiones de éste un factor 1,88 superior a las del núcleo. El medio que rodea al núcleo es aire. Es inmediato reconocer que partiendo de este caso (a), pero tomando la caja confinan-

te suficientemente grande como para poder despreciar los efectos de la frontera a distancia finita, como se ha visto en la sección 2.2, se puede tratar, con la precisión que se desee, cualquiera de los problemas con simetría rectangular que surgen en óptica integrada.

La estructura tratada en el ejemplo (b) representa una guía utilizada en un horno de curado de resinas, analizada en la ref. [37]. En este tipo de aplicaciones es importante la distribución del campo electromagnético ya que interesa focalizar la energía en determinadas regiones de la estructura —en este caso, en el centro de la guía—. Por ello, la guía posee un rectángulo dieléctrico centrado de índice de refracción n_1 mayor que el del medio que queda a ambos lados, n_0 . De esta forma se consigue focalizar, más o menos, el campo variando la diferencia entre los índices de refracción y la anchura relativa de la barra central. A modo de ejemplo, mostramos en la fig. 2.7 las distribuciones de la componente longitudinal del vector de Poynting

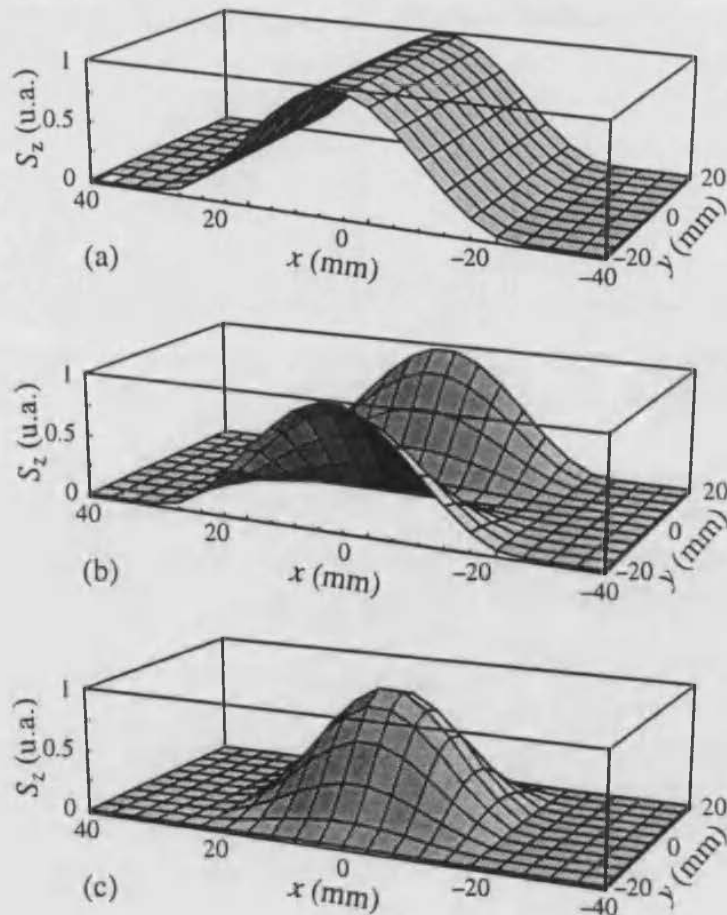


Figura 2.7. Componente longitudinal del vector de Poynting para los modos (a) TE_{01} , (b) TE_{02} y (c) TE_{03} , respectivamente, para una de las configuraciones del caso (b) de la fig. 2.6.

para los primeros modos propagantes.

El caso (c) presenta un sistema en el que hay una cierta rotura de la simetría respecto al sistema auxiliar —en este caso, la paridad respecto al eje x —. Está formado por dos elementos dieléctricos de sección cuadrada que rellenan completamente la guía de microondas. Además, este problema tiene solución analítica [9] con la que podemos contrastar nuestros resultados. En el caso presentado, la región de menor índice de refracción está formada, simplemente, por aire.

Finalmente, la aplicabilidad de la técnica propuesta a sistemas con regiones con índices de refracción inhomogéneos se presenta en el caso (d), en el que la zona central, de anchura c , está constituida por un material cuyo índice de refracción tiene una dependencia cuadrática con la coordenada x ,

$$n_1(x) = n_0 + (n_{1(max)} - n_0) \left(1 - \left(\frac{x}{c/2} \right)^2 \right).$$

De nuevo, el medio a los lados de la barra central es aire.

Mediante esta batería de casos, tratados en la Publicación VI, se ha ejemplificado la versatilidad del método propuesto. En el trabajo se demuestra cómo, en todos ellos, nuestro método proporciona la precisión requerida para reproducir los resultados reportados anteriormente con unos requerimientos de cálculo muy reducidos —número de modos, ...—. La versatilidad y la eficiencia computacional del método pone de manifiesto la bondad e interés de la técnica expuesta.

Por último, resaltar que en ningún momento se ha requerido que las distribuciones del índice de refracción fuesen reales; de hecho, el que el medio descrito tenga pérdidas —o ganancias—, que es un inconveniente para los métodos modales usuales al dejar de ser autoadjunta la ecuación diferencial correspondiente, no lo es en nuestra aproximación ya que eso forma parte consustancial de la técnica utilizada para resolver cualquier sistema.

En resumen, el método algebraico descrito a lo largo de este capítulo permite abordar de manera rigurosa el problema del cálculo de los modos de un sistema guiador arbitrario. En un futuro próximo, es nuestra intención aplicar el método vectorial desarrollado al estudio de diversos sistemas de interés tecnológico inmediato, como es el caso de dispositivos de fibra cilíndrica con capas metálicas asimétricas adosadas. Recientemente se han publicado algunos resultados experimentales relativos a dispositivos de este tipo en los que se muestra su potencial uso como polarizadores o como filtros selectivos para una cierta banda de frecuencias [38]. La posibilidad de poder describir con precisión el efecto de sus diferentes elementos permitirá diseñarlos más eficientemente y aprovechar al máximo sus posibilidades para el mejor control de la luz en fibras ópticas.

2.4 Degeneración de los modos auxiliares

En los ejemplos mostrados en las secciones 2.2 y 2.3, las soluciones usuales de los sistemas auxiliares utilizados han proporcionado las bases biortogonales en las que representar los diferentes sistemas problema. Estos sistemas auxiliares pueden emplearse en la resolución de la mayoría de las estructuras dieléctricas guidoras. Sin embargo, de forma general, hay una cuestión que no se ha mencionado hasta ahora y que es relevante para la comprensión de la aplicación del método propuesto a los sistemas descritos en el siguiente capítulo. Esta cuestión es la existencia de modos degenerados en la base auxiliar.

En la relación de biortogonalidad, ec. (2.9), satisfecha por los vectores propios de un operador L y los de su adjunto L^\dagger , ha de entenderse que se han ordenado convenientemente los vectores de cada uno de los dos conjuntos. Si no existen soluciones degeneradas —es decir, la dimensión de cada uno de los subespacios asociados a los diferentes valores propios posibles es la unidad— esta ordenación es trivial, teniendo que emparejarse los vectores con valor propio complejo conjugado uno del otro.

En caso de que existan soluciones degeneradas, el problema es, en general, más complicado. Si partimos de una base dentro de uno de los subespacios degenerados,⁴

$$L\mathbf{h}_{t(i,\mu)} = \beta_i^2 \mathbf{h}_{t(i,\mu)}, \quad L^\dagger \bar{\mathbf{e}}_{t(i,\nu)} = (\beta_i^2)^* \bar{\mathbf{e}}_{t(i,\nu)}, \quad (2.24)$$

cuyos elementos satisfacen la relación de biortogonalidad,

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_{t(i,\mu)}, \mathbf{h}_{t(i,\nu)} \rangle = \delta_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

y se hace un cambio de base arbitrario en el subespacio,

$$\mathbf{h}'_{t(i,\mu)} = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} \mathbf{h}_{t(i,\nu)}, \quad \bar{\mathbf{e}}'_{t(i,\mu)} = \sum_{\nu} A_{\mu\nu}^* \bar{\mathbf{e}}_{t(i,\nu)}, \quad (2.26)$$

las proyecciones entre los vectores de la base, dadas por la ec. (2.25), pasan a ser

$$\langle \bar{\mathbf{e}}'_{t(i,\mu)}, \mathbf{h}'_{t(i,\nu)} \rangle = \sum_{\rho\sigma} A_{\mu\rho} A_{\nu\sigma} \langle \bar{\mathbf{e}}_{t(i,\rho)}, \mathbf{h}_{t(i,\sigma)} \rangle = \sum_{\rho} A_{\mu\rho} A_{\nu\rho}. \quad (2.27)$$

Es decir, los vectores de la nueva base no serán, en general, biortogonales.

La propia ec. (2.27) nos indica los pasos a seguir para conseguir una base biortogonal. Si partimos ahora de una base en el mismo subespacio con proyecciones

⁴En realidad, los espacios vectoriales en los que están definidos \mathbf{e}_t y \mathbf{h}_t son diferentes, aunque a un subespacio generado por vectores \mathbf{h}_t degenerados con valor propio β_i^2 le corresponde otro subespacio generado por vectores $\bar{\mathbf{e}}_t$ degenerados con valor propio $(\beta_i^2)^*$ y de la misma dimensión. Así pues, si suponemos que elegimos elementos en cada uno de los respectivos subespacios ligados por las ecuaciones de Maxwell podemos, abusando del lenguaje, identificarlos.

$\langle \bar{\mathbf{e}}_{t(i,\mu)}, \mathbf{h}_{t(i,\nu)} \rangle = \Pi_{\mu\nu}$ no diagonales, mediante un proceso semejante al de ortogonalización de Gram-Schmidt [25, sec. 9.3], podremos cambiar a una base en la que la matriz Π sea triangular, es decir,

$$\langle \bar{\mathbf{e}}'_{t(i,\mu)}, \mathbf{h}'_{t(i,\nu)} \rangle = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu \leq \nu, \quad (2.28)$$

pero como la matriz de proyecciones ha de ser simétrica (véase ec. 2.27) y el cambio de base se lleva a cabo mediante una matriz y su traspuesta, $\Pi' = A\Pi A^T$, la matriz así obtenida ha de ser también simétrica, es decir, la matriz de proyecciones es diagonal en la nueva base — $\Pi' = I$ —.

Sin embargo, la aparición de modos degenerados es debido a la existencia de simetrías en el sistema [24], lo que, en la práctica, nos reduce drásticamente la complejidad del problema. Por ejemplo, en cualquier sistema auxiliar con simetría de rotación, como es el caso presentado en la sección 2.2, los modos han de tener orden azimutal l definido, y de éstos, los de $l > 0$ aparecen en parejas degeneradas. La base en la que la dependencia azimutal viene dada por las funciones $\cos(l\phi)$ y $\sin(l\phi)$ resulta ser biortogonal y, por contra, la base de “polarización circular”, $e^{\pm il\phi}$, no lo es.

De todas formas, el hecho de que una base no sea biortogonal no implica necesariamente que no pueda ser útil para nuestros fines en determinadas circunstancias. En el caso comentado, si la distribución del índice de refracción es real, la dependencia radial de los modos puede tomarse también real [2, p. 593] y, entonces, los modos descritos en la base de “polarización circular” satisfacen la relación

$$\langle \bar{\mathbf{e}}^*_{t(i,\mu)}, \mathbf{h}_{t(j,\nu)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{\mu\nu}, \quad (2.29)$$

que también puede ser utilizada para realizar las descomposiciones modales.

Esta aparición de simetrías —y degeneraciones— es máxima en el sistema descrito en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Guías con envoltura de cristal fotónico

3.1 Introducción. Un modelo preliminar unidimensional

Los cristales fotónicos han suscitado un creciente interés en los últimos años por su potencial importancia en el desarrollo de nuevos dispositivos optoelectrónicos [39–41]. La relevancia de estos nuevos materiales se deriva de la posibilidad que brindan de controlar la luz de una manera totalmente nueva y de gran utilidad práctica. Estas estructuras dieléctricas poseen una modulación periódica tridimensional del índice de refracción, siendo su periodo del orden de la longitud de onda del campo electromagnético en el rango óptico. Esta disposición periódica provoca un comportamiento de los fotones en su interior similar al de los electrones libres en la estructura cristalina de un semiconductor [42, 43]. La propiedad más relevante de los cristales fotónicos es, pues, la posibilidad de presentar bandas de frecuencia prohibidas —*photonic band gaps*— [44–46], es decir, rangos de frecuencias en los que la propagación de la radiación electromagnética no está permitida. Su existencia conduce a un gran número de interesantes y útiles propiedades, incluyendo la localización de luz en defectos [47–51] y la inhibición de radiación [52, 53].

Alterando la perfecta simetría traslacional de un cristal fotónico se pueden obtener estados localizados, en los que sus frecuencias caen sobre una banda prohibida. Esta rotura de la periodicidad se puede llevar a cabo sustituyendo todo o parte del material de una cierta celda unidad de la estructura por otro de índice mayor o menor que el original. En el primer caso, esta modificación genera un estado permitido en el interior de la banda prohibida próximo a su límite superior, de forma similar a

la inyección de átomos dadores en un semiconductor; mientras que la segunda situación conlleva la aparición de un estado ligeramente por encima de su límite inferior, análogamente a lo que sucede en un semiconductor cuando lo dopamos con átomos aceptores. Variaciones en la cantidad de material sustituido y en la diferencia de índice permiten seleccionar la frecuencia del modo localizado.

Aunque este fenómeno de confinamiento de la luz ha sido observado y analizado en diferentes estructuras, existe un efecto relacionado, de alto interés, relativo a la propagación de luz en cristales dieléctricos que tienen una periodicidad bidimensional en el plano (x,y) rota por la presencia de un defecto, pero son continuos en la dirección z . La realización física de tales estructuras constituye lo que se denomina una fibra de cristal fotónico (véase fig. 3.1). Recientemente se han publicado

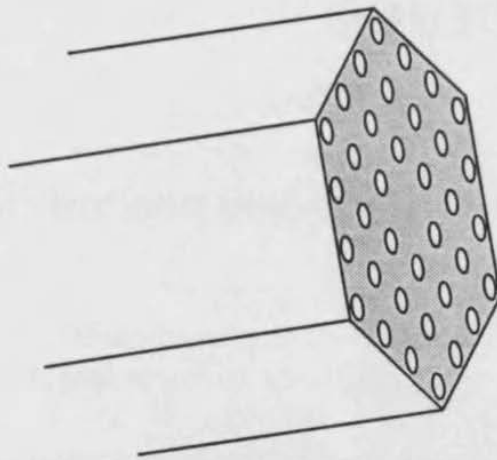


Figura 3.1. Esquema de una fibra de cristal fotónico.

los primeros resultados que demuestran la viabilidad experimental de este tipo de fibras [54, 55]. Así pues, estas estructuras están formadas por una fibra delgada de sílice que presenta una alineación de agujeros de aire en forma hexagonal que se extienden a lo largo de toda su longitud. La periodicidad transversal está rota por la ausencia de uno de estos agujeros, lo que supone un *defecto* en la red. El hecho de que la luz pueda ser localizada en los defectos se convierte aquí en unas propiedades guidoras muy particulares exhibidas por este tipo de fibras, y así, los estados ligados de la estructura transversal —los estados localizados— se convierten en los modos guiados a lo largo de la fibra. Estas fibras presentan propiedades que las diferencian y las hacen únicas en relación a las fibras convencionales, en términos de la estabilidad del espectro de modos guiados. En concreto, pueden ser diseñadas para ser monomodo para cualquier longitud de onda, sin importar el radio de la fibra [54, 56]. Este notable resultado se debe a la fuerte dependencia con la longitud de onda que presenta el índice de refracción efectivo de la envoltura formada por el cristal fotónico.

Por todo lo expuesto, y dado el gran interés despertado por estos dispositivos, hemos abordado el estudio de los mecanismos teóricos que describen sus propiedades. Como un primer paso, y debido a la complejidad estructural de las fibras de envoltura de cristal fotónico, hemos empezado estudiando un modelo simplificado unidimensional de las fibras de cristal fotónico, resoluble analíticamente utilizando técnicas convencionales, que permitiera la comprensión de las bases físicas de sus propiedades (Publicación II). Este modelo comparte con las fibras de cristal fotónico reales sus propiedades más características, por lo que ha sido de gran ayuda en el posterior estudio de éstas.

A continuación, se exponen los resultados más interesante de este modelo simplificado. En las siguientes secciones se presenta la adaptación que se ha realizado del método modal vectorial descrito en el capítulo anterior para la resolución exacta de las fibras de cristal fotónico (Publicación III), así como los resultados obtenidos hasta la fecha con él (Publicaciones III-V).

Un modelo unidimensional

El modelo simplificado estudiado es el de una estructura guiadora consistente en un apilamiento de láminas paralelas de sílice separadas por aire y dispuestas perpendicularmente a ambos lados de una lámina central, también de sílice, a modo de radiador de calor (véase fig. 3.2). La lámina central actúa como un defecto en

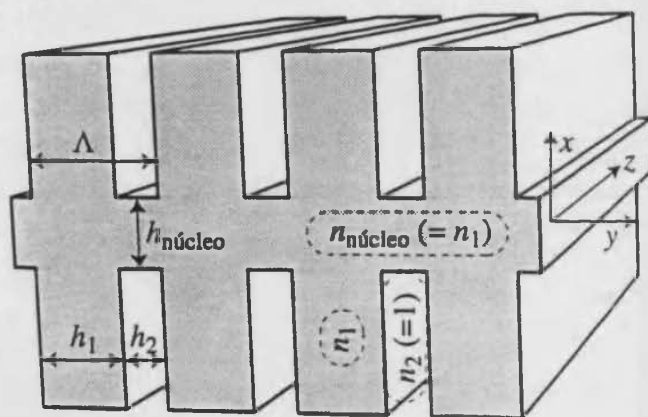


Figura 3.2. Guía plana con envoltura de cristal fotónico unidimensional. Las láminas que forman la envoltura están dispuestas perpendicularmente al núcleo, como las aletas de un radiador de calor.

el cristal fotónico unidimensional formado por las láminas transversales y el aire que las separa. Para que el modelo pueda dar cuenta de propiedades de guiado equivalentes a las de las fibras de cristal fotónico, se trata el caso en el que la luz se propaga a lo largo de la dirección para la cual el sistema presenta la simetría de

traslación continua —el eje z —.

A diferencia de las fibras de cristal fotónico, esta estructura es tratable analíticamente mediante una versión convenientemente adaptada del método de la matriz de transferencia [57], que, en última instancia, supone la imposición de las condiciones de frontera adecuadas entre una combinación de ondas de Bloch inhomogéneas en la envoltura periódica, que decaen exponencialmente al alejarse de la lámina central, y de campos armónicos en el medio homogéneo que forma el núcleo. Los detalles de estos cálculos se encuentran recogidos en la Publicación II.

A pesar de la reducción dimensional, esta guía plana posee las principales características de las fibras de cristal fotónico. Así, soporta un número constante de modos para cualquier frecuencia por encima de un umbral (véase fig. 3.3), lo que contrasta con las guías convencionales. Además, el rango de parámetros geométricos donde actúa para cada polarización como una guía monomodo a lo largo de todo el espectro electromagnético —ignorando la absorción y la dispersión cromática del material— es muy amplio. Esto confirma cualitativamente el hecho observado experimentalmente de que las fibras de cristal fotónico pueden, fácilmente, comportarse como estructuras monomodo en un rango amplísimo de frecuencias.

El parámetro V ($= k_0 h_{\text{núcleo}} / 2 \sqrt{n_{\text{núcleo}}^2 - n_{\text{env}}^2}$, siendo n_{env} el índice de refracción efectivo de la envoltura) controla el número de modos que una guía puede soportar [2]. A medida que V se hace más grande, el “volumen óptico” —o espacio de fases— de la guía crece, aumentando el número de modos soportados. Este parámetro varía explícitamente con la inversa de la longitud de onda, de forma que, en general, aumenta fuertemente con la frecuencia de la luz en las guías usuales. En la estructura estudiada, sin embargo, el índice de refracción efectivo de la envoltura varía como $n_{\text{env}}^2 \rightarrow n_1^2 - (\pi / (h_1 k_0))^2$ cuando $k_0 \rightarrow \infty$, cancelando la dependencia usual del parámetro V con la longitud de onda de forma que éste tiende asintóticamente hacia un valor constante,

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} V = \frac{\pi h_{\text{núcleo}}}{2h_1}, \quad (3.1)$$

lo que contrasta con las guías de salto de índice, en las que V tiende a infinito cuando k_0 hace lo propio. Es decir, el número de modos que soporta esta estructura en el límite de longitudes de onda cortas está controlado únicamente por el grosor relativo de las aletas respecto al de la lámina central, $h_{\text{núcleo}}/h_1$ (véase fig. 3.4). Naturalmente, el modo de alcanzar ese límite depende del periodo de la envoltura y de los índices de refracción de los materiales.

Además, se ha podido comprobar que este especial comportamiento se mantiene cuando la diferencia de índices de refracción entre las aletas y el medio que las separa se reduce arbitrariamente, lo que abre la posibilidad de construir fibras de cristal fotónico según técnicas más habituales en la fabricación de fibras ópticas.

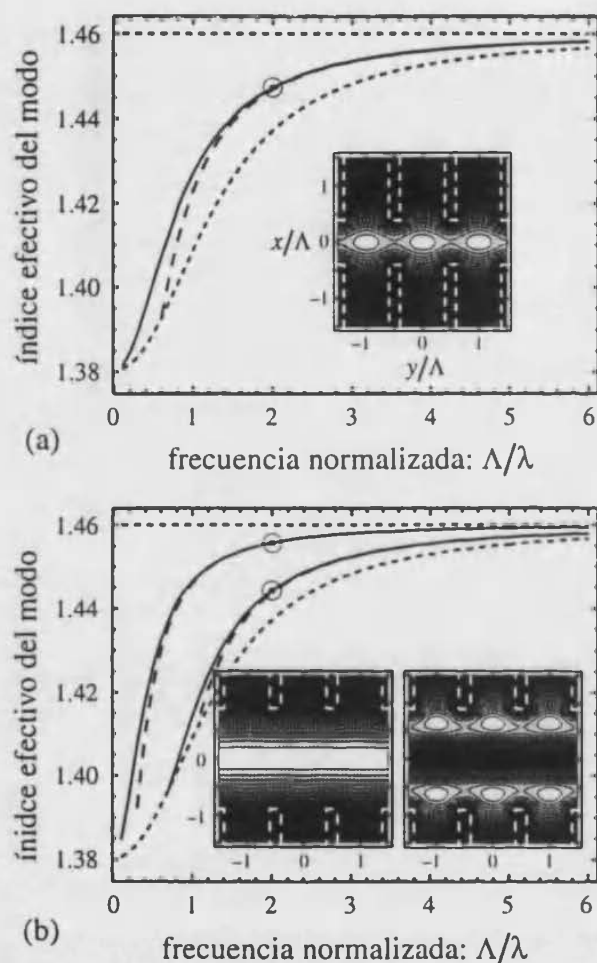


Figura 3.3. Relaciones de dispersión para dos configuraciones diferentes del “radiador”. En el primer caso, (a) $h_1/\Lambda = 0,8$ y $h_{\text{núcleo}}/\Lambda = 0,8$, la estructura soporta un par de modos. En el segundo caso, (b) $h_1/\Lambda = 0,8$ y $h_{\text{núcleo}}/\Lambda = 1,8$, soporta dos pares de modos. Los modos están casi polarizados linealmente —cuasi-TE: líneas a trazos, cuasi-TM: líneas continuas—. Las líneas punteadas representan el índice de refracción del núcleo y el valor efectivo del índice que presenta la envoltura. En los recuadros, se muestran las distribuciones de potencia de los modos cuasi-TM para $\Lambda/\lambda = 2$.

Por último, creemos que, a parte de su utilización como un “modelo de juguete” que muestra las principales características de una estructura mucho más compleja como es la de una fibra de cristal fotónico, esta guía también puede resultar útil por sí misma; por ejemplo, podría tener aplicación como guía plana monomodo en láseres de alta potencia.

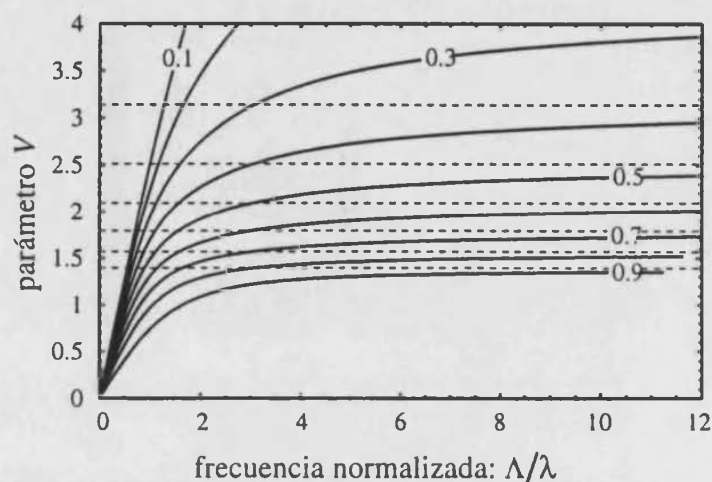


Figura 3.4. Parámetro V frente a Λ/λ para $h_{\text{núcleo}}/\Lambda = 0,8$ y diferentes valores de h_1/Λ entre 0,1 y 0,9 (curvas continuas). Las líneas horizontales a trazos representan los límites asintóticos para cortas longitudes de onda predichos por la ec. (3.1).

3.2 Método modal vectorial con condiciones de frontera periódicas

En este punto nos hemos centrado en adaptar convenientemente la técnica modal general que hemos desarrollado en el capítulo anterior al problema de una fibra de cristal fotónico realista, modelizando y resolviendo eficientemente su compleja estructura transversal bidimensional (Publicación III).

Para realizar una simulación realista de una fibra de cristal fotónico se debe tener en cuenta cerca de un centenar de escalones —los agujeros de aire— distribuidos periódicamente en la estructura transversal del índice de refracción. Debido a esta rica estructura espacial, los métodos habituales, aún sin considerar el carácter vectorial de la luz, tienen un grave problema de pérdida de precisión numérica.

Dado que el sistema a resolver es básicamente periódico, se podría pensar en tomar un sistema auxiliar estrictamente periódico, es decir, que la base fuese el conjunto de ondas de Bloch de la estructura periódica transversal sin el defecto. Sin embargo, ésta no es una elección muy adecuada por la complejidad de esta base, que, usualmente, ha de acabar expandiéndose en series de Fourier para poder operar con ella. Nosotros hemos abordado este problema insertando el sistema en una caja finita bidimensional, como en los otros casos del capítulo anterior, pero exigiendo ahora a los campos condiciones de contorno periódicas en ambas direcciones del plano (x, y) . Así creamos una red artificial, replicando la estructura original casi periódica —incluyendo el defecto central— en las direcciones x e y (véase fig. 3.5). El sistema auxiliar es, simplemente, un medio homogéneo, con las

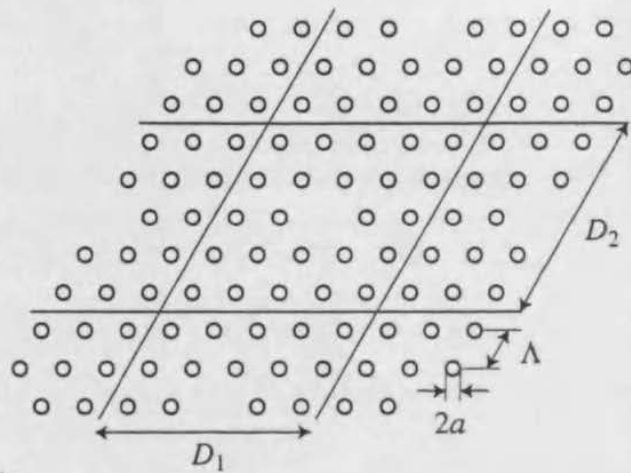


Figura 3.5. Esquema de la fibra de cristal periódica introducida en una caja romboidal con condiciones de frontera periódicas.

mismas condiciones de frontera que el problema. La ventaja de utilizar un medio auxiliar homogéneo es que éste es invariante a traslaciones, lo que se va a mostrar como un hecho fundamental para poder encontrar expresiones analíticas compactas para los elementos de matriz del operador L .

Un primer efecto asociado a la invariancia bajo traslaciones, al igual que sucede en el caso de los sistemas invariantes bajo rotaciones (véase sec. 2.4), es la aparición de degeneración entre las soluciones. En el caso que estamos tratando ahora, el sistema es invariante a traslaciones según las direcciones de los ejes coordenados y, por tanto, habrán dos soluciones degeneradas para la dependencia de los campos en cada una de las coordenadas transversales. Las dos elecciones usuales para esta dependencia son senos y cosenos, o exponenciales imaginarias. Para satisfacer las condiciones de frontera, el periodo de estas funciones debe ser un submúltiplo de las dimensiones de la caja según los ejes coordenados, (D_1, D_2) . Es decir, el hecho de imponer condiciones de frontera periódicas —o lo que es lo mismo, de replicar periódicamente el defecto— y utilizar un medio auxiliar homogéneo nos permite expandir el campo electromagnético en series de Fourier. De estas dos posibilidades, es la base de senos y cosenos la que satisface la relación de biortogonalidad, ec. (2.9).

Sin embargo, podemos darnos cuenta que este sistema auxiliar es autoadjunto —es decir, $\tilde{L} = \tilde{L}^\dagger$ —, lo que abre la posibilidad de tomar a los vectores propios de \tilde{L} —que forman una base *ortogonal*¹— como base del problema que estamos intentando resolver, pudiendo realizarse las proyecciones de una forma absolutamente convencional. De esta manera, los elementos de matriz se pueden calcular mediante

¹Incluso cuando existe degeneración entre modos, se puede tomar una base en cada de los subespacios degenerados —mediante el procedimiento de ortogonalización de Gram y Schmidt [25, sección 9.3]— de manera que la base de todo el espacio sea ortogonal.

la expresión

$$L_{pq} = \langle \tilde{\mathbf{h}}_{t(p)}, L\tilde{\mathbf{h}}_{t(q)} \rangle = \tilde{\beta}_p^2 \delta_{pq} + \langle \tilde{\mathbf{h}}_{t(p)}, \Delta\tilde{\mathbf{h}}_{t(q)} \rangle. \quad (3.2)$$

Por tomar un sistema auxiliar homogéneo se dispone de bases de funciones especialmente simples, y por ser este sistema autoadjunto, se pueden utilizar las técnicas de representación modal usuales. Esto nos lleva a elegir como base, para este sistema en particular, las exponenciales imaginarias ya que, entre las dos opciones, es la que proporciona expresiones más sencillas. Además, al estar desacoplada la dependencia espacial de la polarización, se puede tomar para este grado de libertad interno una base trivial. Es decir, tomamos los elementos de la base de la forma

$$\tilde{\mathbf{h}}_{t(\mathbf{n},s)} = \exp(i\mathbf{k}_{t(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{x}_t) \mathbf{u}_{t(s)}, \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{k}_{t(\mathbf{n})} = 2\pi(n_1/D_1, n_2/D_2)$, siendo $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ una pareja de números enteros que clasifican la dependencia espacial transversal de las soluciones, y $\mathbf{u}_{t(s)}$ ($s = 1, 2$) son los elementos de la base ortogonal de polarización $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Nótese que, con esta base, realmente se ha renunciado a atribuir un estricto sentido físico a los campos de la base —en cada subespacio degenerado— ya que no nos preocupamos de que satisfagan la condición de transversalidad respecto a la dirección de propagación.

Por otra parte, la invariancia a traslaciones de la base nos permite relacionar fácilmente los elementos de matriz del operador que representa un agujero en una posición arbitraria, $V(\mathbf{x}_{t(a)})$, con los que representan a uno que se encuentre en el origen de coordenadas, $V(0)$, es decir,

$$\langle \tilde{\mathbf{h}}_{t(\mathbf{m},r)}, V(\mathbf{x}_{t(a)})\tilde{\mathbf{h}}_{t(\mathbf{n},s)} \rangle = \exp(i(\mathbf{k}_{t(\mathbf{n})} - \mathbf{k}_{t(\mathbf{m})}) \cdot \mathbf{x}_{t(a)}) \langle \tilde{\mathbf{h}}_{t(\mathbf{m},r)}, V(0)\tilde{\mathbf{h}}_{t(\mathbf{n},s)} \rangle. \quad (3.4)$$

Además, los elementos de la matriz de este agujero centrado, $\langle \tilde{\mathbf{h}}_{t(\mathbf{m},r)}, V(0)\tilde{\mathbf{h}}_{t(\mathbf{n},s)} \rangle$, tienen una expresión analítica en esta base —hemos supuesto que los agujeros son circulares—. Y, por último, debido a las propiedades de simetría de la red hexagonal centrada que representa la distribución de agujeros, la suma sobre todos los agujeros en una celda unidad —con defecto incluido— tiene una expresión especialmente sencilla cuando se toma una caja romboidal de lados iguales, $D_1 = D_2 = N\Lambda$, siendo N un número natural impar,

$$\sum_{a \in \text{celda}} \exp(i(\mathbf{k}_{t(\mathbf{n})} - \mathbf{k}_{t(\mathbf{m})}) \cdot \mathbf{x}_{t(a)}) = \begin{cases} N^2 - 1 & , \quad (\mathbf{n} - \mathbf{m})/N \in \mathbb{Z}^2 \\ -1 & , \quad \text{resto de casos} \end{cases}, \quad (3.5)$$

lo que nos proporciona una expresión analítica muy compacta para el cálculo de los elementos de matriz, sin importar el número de subestructuras que componen la celda unidad elegida.

Como se dijo en la sección 2.2, la elección del sistema auxiliar es una cuestión muy importante para la viabilidad de la resolución práctica de un problema. En

este caso se ha optado por uno que no posee ninguno de los rasgos característicos del problema a resolver pero que, por contra, es extremadamente simple. Esto, ligado a su invariancia a traslaciones y a que el problema está formado por réplicas de una subestructura elemental, conlleva una simplificación crucial que permite finalmente superar el problema de la pérdida de precisión numérica motivada por la complicada estructura espacial de la fibra.

En las dos secciones siguientes se exponen los primeros resultados obtenidos de la aplicación a las fibras de cristal fotónico de la técnica aquí expuesta.

3.3 Descripción vectorial de una fibra realista de cristal fotónico

Recientemente, y tras la publicación de los primeros resultados experimentales relativos a fibras ópticas con envoltura de cristal fotónico [54], han aparecido varios trabajos en los que, a través de diferentes modelos, se intenta explicar las muy particulares características de este tipo de guías.

El grupo del Prof. Russell de la Universidad de Bath (Reino Unido) justifica, mediante un modelo con un índice de refracción efectivo para la envoltura, el comportamiento de las fibras de cristal fotónico fabricadas [56, 55, 58]. Posteriormente a esos trabajos, y en colaboración con ellos, se estudió la estructura reducida dimensionalmente descrita en la sección 3.1 (Publicación II) que, por medio del análisis riguroso del modelo propuesto, aclara las bases físicas en que descansan las propiedades clave de estos sistemas guías. Por último, utilizando la nueva aproximación al problema expuesta en la sección anterior, hemos conseguido describir la propagación en una fibra de cristal fotónico realista en el marco, además, de la teoría vectorial. Los primeros resultados obtenidos han sido recogidos en las Publicaciones III y IV, que vamos a resumir a continuación.

Pues bien, primeramente nos hemos centrado en una configuración (véase fig. 3.5) en la que el radio de los agujeros de aire es $a = 0,3 \mu\text{m}$ y la distancia entre los centros de dos agujeros consecutivos es $\Lambda = 2,3 \mu\text{m}$, ya que la distribución de intensidad para el modo guiado de esta estructura ha sido medida recientemente para $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ [54].

La estructura monomodo resultante está formada por un doblete de polarización casi degenerado en un amplísimo rango de longitudes de onda —al menos de 300 a 1600 nm— (véase fig. 3.6). Estos resultados confirman plenamente los resultados experimentales ya que implican la existencia de una robusta estructura monomodo para los valores de los parámetros de la fibra reseñados anteriormente. Además, nuestros cálculos reproducen con excelente precisión la distribución transversal de intensidad experimental. El resultado correspondiente a una de las polarizaciones

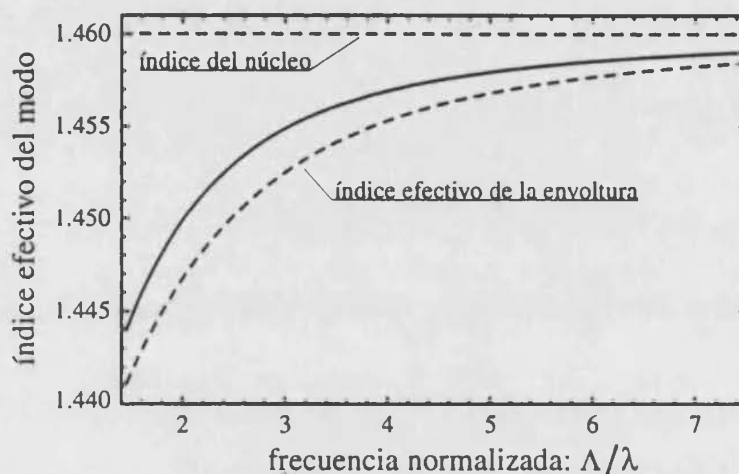


Figura 3.6. Relaciones de dispersión modal para una fibra de cristal fotónico monomodo con $a = 0,3\mu\text{m}$ y $\Lambda = 2,3\mu\text{m}$. La envoltura de los modos de radiación determina el índice de refracción efectivo de la envoltura de cristal fotónico.

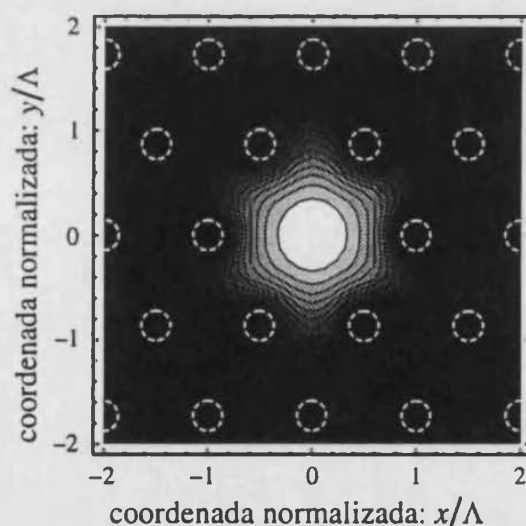


Figura 3.7. Distribución transversal de intensidad para el modo guiado polarizado según el eje x de la fibra de cristal fotónico descrita en la fig. 3.6 para $\lambda = 632,8\text{ nm}$.

se muestra en la fig. 3.7 para $\lambda = 632,8\text{ nm}$ (*cf.* fig. 1 en la ref. [54]). También hemos calculado la distribución de intensidad transversal del modo guiado para otras longitudes de onda y para ambas polarizaciones. En todos los casos, el perfil de intensidades es muy similar al que aparece en la fig. 3.7, lo que demuestra el carácter robusto de la estructura monomodo tratada. Este hecho confirma el comportamiento de las relaciones de dispersión descritas anteriormente.

Además de simular esta singular estructura, hemos estudiado también un conjunto de diferentes fibras diseñadas variando el periodo de la red, Λ , y el radio de los

agujeros de aire, a . Al analizar las curvas de dispersión de este conjunto de fibras, hemos encontrado en algunas de ellas una estructura modal más rica. Así, en el ejemplo de la fig. 3.8 vemos que, además del doblete fundamental, aparecen otros

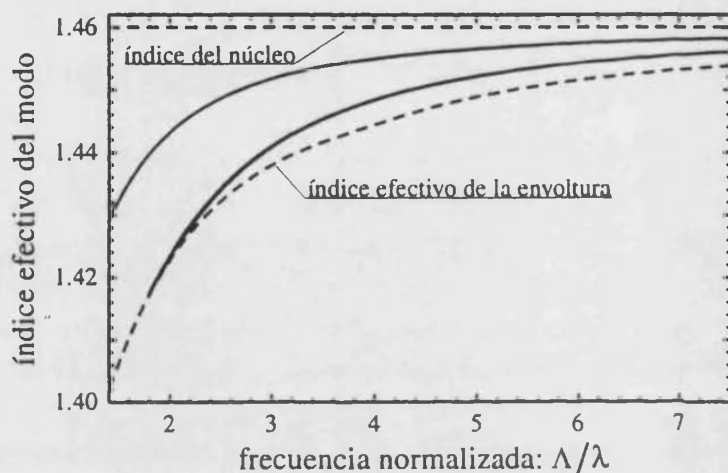


Figura 3.8. Igual que en la fig. 3.6 pero con $a = 0,6 \mu\text{m}$. Los dos dobletes de polarización excitados están sólo ligeramente separados, y esta separación se reduce a medida que aumenta la frecuencia.

dos dobletes de polarización. A diferencia de lo que ocurre en las fibras convencionales, el número de modos no aumenta con el número de ondas k_0 . El número de modos guiados en función de k_0 se estabiliza por encima de un cierto umbral, o lo que es lo mismo, permanece constante para longitudes de onda menores que una cierta longitud de onda umbral. Para diseños particulares se consiguen estructuras guíadoras en las que este número constante es precisamente la unidad. De este modo se obtiene una fibra absolutamente monomodo como la que se presenta en la fig. 3.6. Ésta es una propiedad nada convencional que exhiben las fibras de cristal fotónico.

En una fibra usual, el índice de refracción de la envoltura es casi constante y por ello el valor del parámetro V —el “volumen óptico” de la fibra— crece casi linealmente con k_0 . Esto permite acomodar un número creciente de modos guiados en el interior de la fibra a medida que la longitud de onda disminuye. Por contra, como ya se pudo adelantar con el modelo simplificado mostrado en la sección 3.1, en una fibra de cristal fotónico la estructura periódica responsable del atrapamiento de la luz en el defecto central crea una dependencia con k_0 en el índice de refracción efectivo de la envoltura de forma que el parámetro V varía mucho más suavemente con k_0 . El “volumen óptico” se vuelve así prácticamente independiente de la longitud de onda para valores grandes de k_0 y, en consecuencia, también el número de modos guiados.

En la actualidad se encuentra en fase de redacción un trabajo en el que se

recoge en extenso la técnica expuesta en la sección anterior junto a un análisis más exhaustivo de la influencia de los parámetros estructurales de las fibras de cristal fotónico en sus capacidades guiadoras [59].

3.4 Dispersión de la velocidad de grupo. Fibra acromática

Por último, y gracias a la elevada precisión de nuestra técnica de cálculo, hemos podido evaluar también la dispersión cromática de estas fibras de cristal fotónico para distintos valores de sus parámetros estructurales. Algunos de los resultados numéricos obtenidos con un modelo bidimensional de la fibra de cristal fotónico, pero en la aproximación escalar, fueron presentados por D. Mogilevtsev *et al.* [60].

En la Publicación V no sólo hemos sido capaces de calcular rigurosamente —vectorialmente— las curvas de dispersión sino que además presentamos, por primera vez, ciertos diseños que poseen una dispersión de la velocidad de grupo prácticamente nula para un amplio rango de longitudes de onda. Este resultado se ha alcanzado haciendo que la curva de dispersión cromática, $D(\lambda)$, que en general es una función monótona creciente, posea un máximo, cuyo valor es positivo y próximo a cero. Este plegamiento de la curva produce un efecto acromático en torno a la longitud de onda para la que la dispersión posee el extremo relativo.

Para poder realizar eficazmente este estudio se ha separado, en una primera aproximación, la contribución a la dispersión producida por la estructura particular de la fibra de cristal fotónico de la debida a la dependencia con la frecuencia del índice de refracción del sílice. Esta separación aditiva de ambos efectos está basada en la invariancia bajo cambios de escala que presentan las estructuras guiadoras si se considera que los materiales que las constituyen no son dispersivos. La manipulación por separado de estas contribuciones permite, de forma sencilla, analizar diferentes posibilidades. Posteriormente, y para un cálculo ya exacto, se determina, primero, las relaciones de dispersión para las configuraciones estimadas, incluyendo directamente en el cómputo la dependencia con la longitud de onda de los materiales —en este caso, del sílice puro— (véase fig. 3.9), para, a continuación, y mediante el cálculo de su segunda derivada respecto a la frecuencia, obtener las curvas de dispersión buscadas, las cuales son ajustadas a los valores deseados mediante pequeñas variaciones de los parámetros estructurales, a y Λ .

En la fig. 3.10 presentamos algunos ejemplos de diseños acromáticos y mostramos el efecto sobre la dispersión de escalar simultáneamente el periodo y el radio del agujero conservando constante la razón a/Λ . Podemos observar cómo las curvas de dispersión se desplazan hacia arriba, y al mismo tiempo se ensanchan suavemente, a medida que el factor de escala aumenta —es decir, aumentando simultáneamente

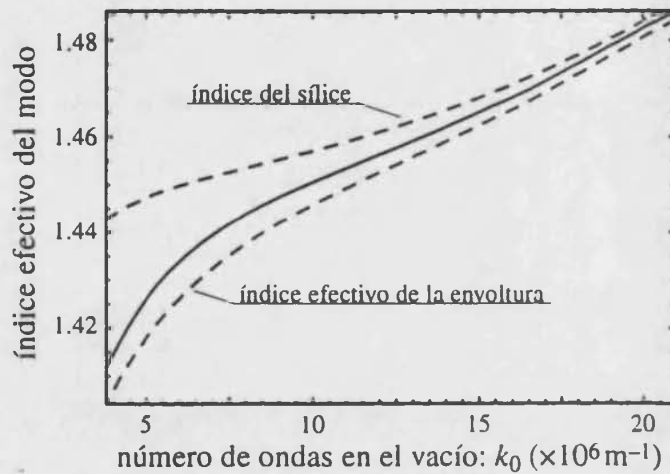


Figura 3.9. Relaciones de dispersión modal para una fibra de cristal fotónico de razón $a/\Lambda = 0,42/2,3$ y $\Lambda = 1,776 \mu\text{m}$. Para ambas polarizaciones, las curvas se funden en una sola.

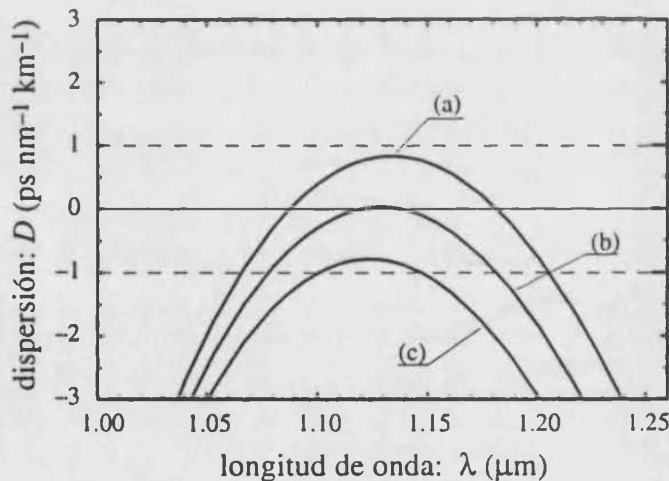


Figura 3.10. Dispersión de la velocidad de grupo frente a λ para una razón $a/\Lambda = 0,42/2,3$ fija y (a) $\Lambda = 1,74 \mu\text{m}$, (b) $1,73 \mu\text{m}$ y (c) $1,72 \mu\text{m}$.

a y Λ —. Si, por el contrario, cambiamos la razón a/Λ manteniendo fijo el periodo, producimos también un desplazamiento vertical pero obtenemos simultáneamente un desplazamiento sustancial, a lo largo del eje de las longitudes de onda, de las curvas de dispersión. Un ajuste de ambos efectos permite un excelente control sobre la ventana de longitudes de onda con dispersión “aplanada” próxima a cero, como muestra la fig. 3.11. Nótese cómo la anchura de la ventana de frecuencias en la que el módulo de la dispersión de la velocidad de grupo es menor de $1 \text{ ps}/(\text{nm km})$ es mayor que 140 nm , pudiéndose, además, controlar su posición.

Estos resultados muestran cómo, con parámetros estructurales realizables física-

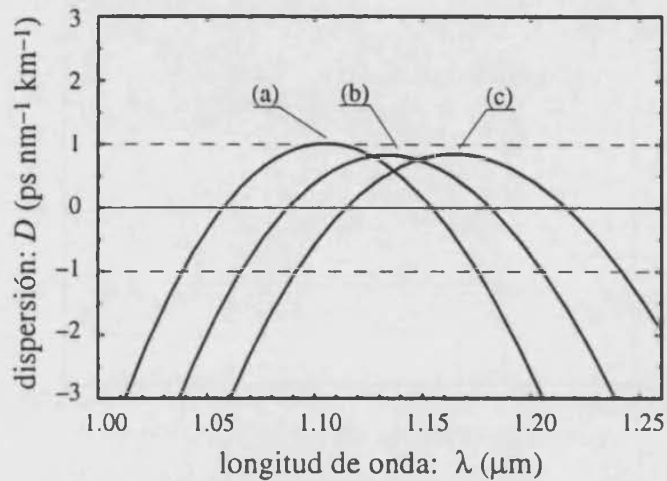


Figura 3.11. Dispersión de la velocidad de grupo frente a λ para algunas combinaciones seleccionadas de a/Λ y Λ : (a) $a/\Lambda = 0,44/2,3$, $\Lambda = 1,65 \mu\text{m}$, (b) $a/\Lambda = 0,42/2,3$, $\Lambda = 1,74 \mu\text{m}$ y (c) $a/\Lambda = 0,40/2,3$, $\Lambda = 1,84 \mu\text{m}$.

mente y sin tener que recurrir a materiales distintos del sílice puro, se puede tener un control preciso sobre las propiedades de dispersión de este tipo de fibras ópticas.

En conclusión, hemos sido capaces de reconocer fibras de cristal fotónico que además de su carácter monomodo presentan también un comportamiento acromático para un intervalo relativamente amplio de longitudes de onda, el cual es sintonizable. Todo ello en el marco de la teoría vectorial de la luz y gracias a la buena precisión numérica que nuestro método alcanza.

Actualmente estamos realizando un estudio en el que se muestra cómo maximizar la anchura de la ventana de frecuencias con dispersión cromática prácticamente nula por medio de configuraciones de fibra con dispersión apocromática [61].

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado un método modal vectorial para la obtención del espectro de modos de guías de ondas electromagnéticas, extendiendo las técnicas de representación modal utilizadas en teoría escalar al marco de la teoría vectorial. El método está basado en la propiedad de biortogonalidad asociada a los vectores propios de cualquier operador no autoadjunto y de su operador adjunto. En nuestro caso, los operadores vienen determinados por las ecuaciones diferenciales vectoriales que verifican las componentes transversales del campo electromagnético. Esta propiedad abre el camino para aplicar las técnicas algebraicas estándares al caso vectorial, una vez escritas las ecuaciones en forma matricial y reducidas a un problema algebraico de valores propios.

El método propuesto permite calcular los modos de guías de ondas con cualquier perfil, sean abiertas o cerradas, incluso de aquéllas con un índice de refracción complejo, incluyendo, de forma natural, el carácter vectorial de las ondas electromagnéticas en la descripción de los modos.

Con él, y gracias a la alta precisión que puede proporcionar, se ha podido reproducir el comportamiento acromático de una fibra multicapa de perfil en W ; esto ha servido para tratar las cuestiones prácticas que surgen en la aplicación del método, como son el efecto de una frontera artificial en el estudio de sistemas abiertos y el efecto del número finito de modos de la base auxiliar que en cualquier caso se utilizan. También se ha aplicado a diferentes problemas de microondas; de nuevo, nuestros resultados han descrito perfectamente los casos que ya habían sido estudiados anteriormente. De esta forma, se ha evidenciado la generalidad de la técnica propuesta, que, efectivamente, ha mostrado poder tratar, tanto sistemas abiertos como cerrados, con medios homogéneos o no, o con distribuciones del índice de refracción sin ninguna simetría definida.

En una segunda etapa, se ha obtenido, por primera vez en el marco de una

teoría vectorial, los modos de estructuras guadoras tan complejas como son las fibras de cristal fotónico. Además, hemos identificado diferentes diseños para los que la dispersión de la velocidad de grupo de estas fibras posee un comportamiento acromático, estableciendo, simultáneamente, un procedimiento operativo para controlar las propiedades de dispersión de las fibras de cristal fotónico en términos de sus parámetros estructurales. En este sentido, actualmente estamos realizando un estudio en el que se muestra cómo maximizar la anchura de la ventana de frecuencias con dispersión cromática prácticamente nula por medio de una configuración apocromática.

La elección adecuada del sistema auxiliar es muy importante para una eficiente aplicación de un método de representación modal. En el caso de sistemas guadores cerrados, lo más conveniente será elegir un sistema auxiliar con las mismas fronteras exteriores confinantes que el sistema problema.

Por contra, para sistemas guadores abiertos, dado que la frontera —de cualquier tipo— ha de tomarse siempre lo suficientemente alejada de forma que no se note su presencia, cualquier elección es, en principio, válida. Sin embargo, ha de tenerse en cuenta dos factores: por una parte, si el sistema problema posee una cierta simetría o rasgo característico, la utilización de un sistema auxiliar que comparta esa simetría o rasgo reduce notablemente el número de modos requeridos para describir el sistema; por otra parte, un sistema auxiliar muy complejo requerirá un mayor tiempo de cómputo, tanto en la obtención de la propia base, como en el cálculo de los elementos de la matriz y su diagonalización. De forma general se puede decir que si el sistema problema abierto tiene simetría circular —o aproximadamente circular— será conveniente utilizar un sistema auxiliar también circular, y por tanto confinado necesariamente; por contra, para sistemas con simetría rectangular, o sin simetría definida, podrá utilizarse, indistintamente, una caja rectangular confinante o una caja periódica —rectangular o romboidal—.

Es interesante reconocer que cuando el sistema auxiliar es autoadjunto, como son los casos de un medio auxiliar homogéneo con frontera confinante o periódica, también puede elegirse una base asociada ortogonal.

El método presentado se ha mostrado como una herramienta de análisis y diseño tan poderosa que en la actualidad tenemos varias posibilidades en desarrollo. A continuación, paso, muy brevemente, a comentar algunas de ellas.

Resultará de gran interés práctico poder establecer, a priori, cotas para el error producido por la presencia de la frontera —confinante o periódica— o por la truncación de la serie de modos auxiliares.

Respecto a las fibras con envoltura de cristal fotónico, junto a aspectos de importancia experimental, como son el estudio de la atenuación de los modos por la extensión no infinita de la red cristalina o el efecto de irregularidades en la forma

de los agujeros de aire o en su distribución, pretendemos seguir profundizando en el estudio de los mecanismos teóricos que describen sus propiedades. En particular, es de gran interés el estudio de posibles modos guiados intrabanda. A diferencia de los modos descritos hasta ahora, que aparecen por encima de la primera banda permitida, tenemos la convicción de que la inserción de un defecto de signo opuesto al estudiado hasta ahora generará modos guiados *exclusivamente* entre dos bandas permitidas. Un defecto de este tipo puede conseguirse aumentando el tamaño de uno de los agujeros de la red periódica original. Estos modos intrabanda tendrían la peculiaridad de ser los únicos modos guiados de la fibra, ya que la existencia de un defecto como el ahora propuesto impediría la presencia de modos guiados por encima de la primera banda de conducción.

Para estudiar el efecto de artefactos de fabricación, como son las irregularidades mencionadas anteriormente en la estructura de las fibras de cristal fotónico, u otros, ya estamos planteando, en el marco de la técnica aquí desarrollada, el cálculo de correcciones perturbativas de orden superior.

También tenemos la intención de analizar con nuestro método vectorial toda una nueva familia de dispositivos de fibra cilíndrica multicapa con capas metálicas asimétricas adosadas, capaces de actuar como filtros de longitud de onda, polarizadores o sensores. Debido a la fuerte rotura de la simetría provocada por la delgada capa metálica depositada sobre la fibra, el análisis de estos dispositivos resulta extremadamente difícil, o incluso imposible, con técnicas convencionales.

Además, vamos a extender el método expuesto a situaciones no apuntadas hasta ahora en esta tesis, que representan un salto conceptual cualitativo en su rango de aplicabilidad. Pensamos adaptar nuestro método para tratar sistemas con una variación periódica del índice de refracción a lo largo de la dirección de propagación. Podremos así estudiar el comportamiento de filtros y sensores de fibra basados en redes de Bragg. En estos casos, la aproximación usual es la perturbativa, lo que limita su validez a sistemas en los que la modulación longitudinal del índice de refracción sea pequeña. Nosotros pretendemos tratar con la máxima generalidad el problema; es decir, permitiendo variaciones cualesquiera del índice de refracción.

Finalmente, estamos convencidos que los desarrollos mencionados en el párrafo anterior nos van a permitir abordar el estudio de diferentes tipos de cavidades resonantes —ya que son dispositivos cuyo comportamiento es análogo al de una estructura repetida periódicamente a lo largo del eje— con vistas especialmente a su aplicación al estudio de microláseres y láseres de fibra.

Referencias

- [1] Robert E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. IEEE Press, 1991.
- [2] Allan W. Snyder y John D. Love, *Optical Waveguide Theory*. Chapman and Hall, 1983.
- [3] S.J. Al-Bader y M. Imtaar, "Optical fiber hybrid-surface plasmon polaritons", *Journal of the Optical Society of America B*, **10**, pp. 83–88 (1993).
- [4] Federico Dias Nunes, Cláudia Adriana de Souza Melo y Humberto Filomeno da Silva Filho, "Theoretical study of coaxial fibers", *Applied Optics*, **35**, pp. 388–399 (1996).
- [5] Kawthar A. Zaki y Chunming Chen, "Intensity and distribution of hybrid-mode fields in dielectric-loaded waveguides", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **33**, pp. 1442–1447 (1985).
- [6] M.V. Andrés y V. Such, "Cylindrical surface waveguide modes using a surface impedance dyadic method", *IEE Proceedings H*, **134**, pp. 130–138 (1987).
- [7] Jürgen Strube y Fritz Arndt, "Rigorous hybrid-mode analysis of the transition from rectangular waveguide to shielded dielectric image guide", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **33**, pp. 391–401 (1985).
- [8] Masanori Koshiya y Michio Suzuki, "Vectorial wave analysis of dielectric waveguides for optical-integrated circuits using equivalent network approach", *Journal of Lightwave Technology*, **4**, pp. 656–664 (1986).
- [9] Cheng-Cheh Yu y Tah-Hsiung Chu, "Analysis of dielectric-loaded waveguide", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **38**, pp. 1333–1338 (1990).
- [10] Enakshi K. Sharma, Mukesh P. Singh y Anurag Sharma, "Variational analysis of optical fibers with loss or gain", *Optics Letters*, **18**, pp. 2096–2098 (1993).

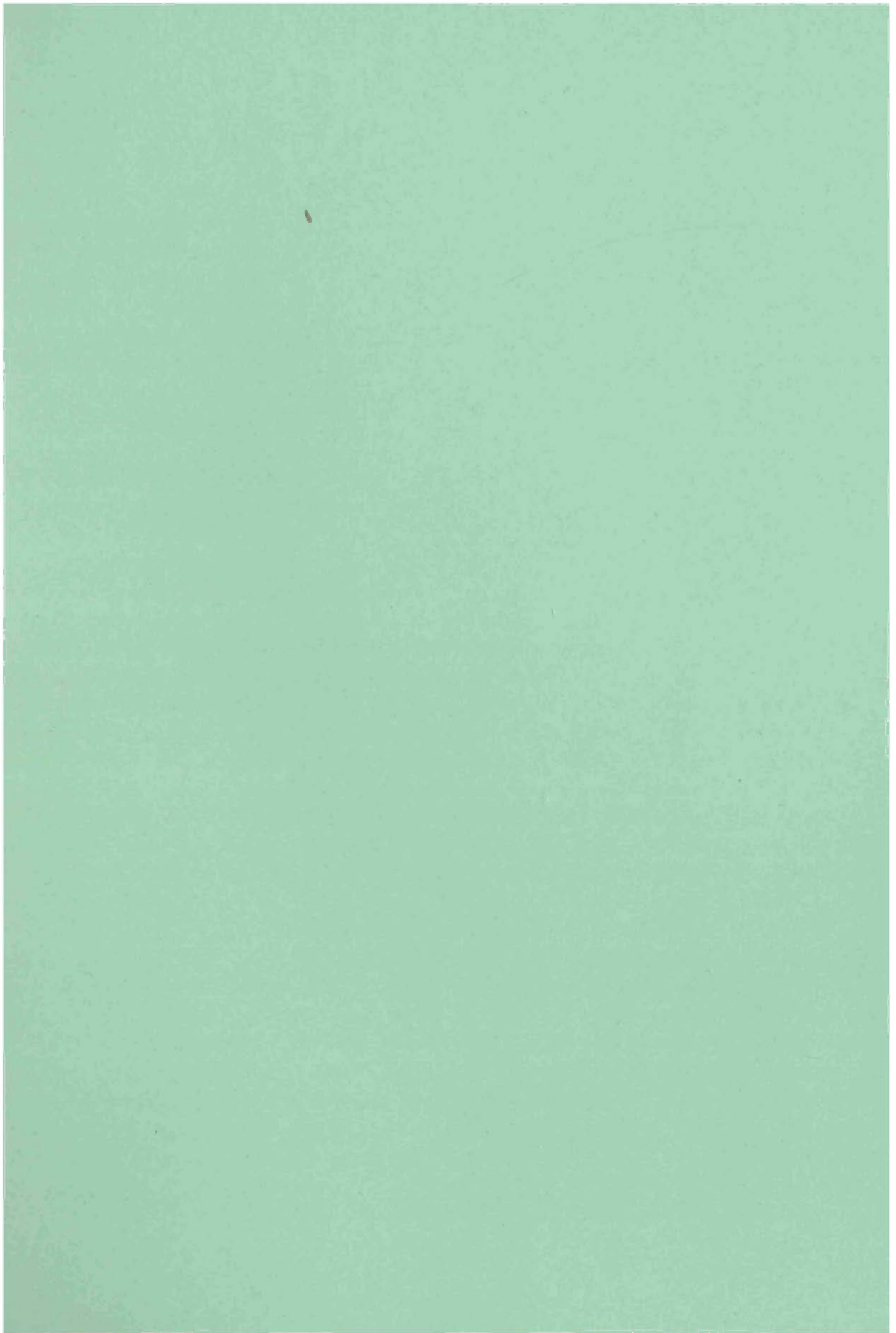
- [11] Abbas Sayed Omar y Klaus Schünemann, "Scattering by material and conducting bodies inside waveguides, Part I: Theoretical formulations", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **34**, pp. 266–272 (1986).
- [12] Abbas Sayed Omar y Klaus F. Schünemann, "Complex and backward-wave modes in inhomogeneously and anisotropically filled waveguide", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **35**, pp. 268–275 (1987).
- [13] Tullio Rozzi, Luca Pierantoni y Marco Farina, "Eigenvalue approach to the efficient determination of the hybrid and complex spectrum of inhomogeneous, closed waveguide", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **45**, pp. 345–353 (1997).
- [14] Zion Menachem y Eli Jerby, "Transfer matrix function (TMF) for wave propagation in dielectric waveguides with arbitrary transverse profiles", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **46**, pp. 975–982 (1998).
- [15] Edgard Schweig y William B. Bridges, "Computer analysis of dielectric waveguides: a finite-difference method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **32**, pp. 531–541 (1984).
- [16] Norbert Schulz, Karlheinz Bierwirth, Fritz Arndt y Uwe Köster, "Rigorous finite-difference analysis of coupled channel waveguides with arbitrarily varying index profile", *Journal of Lightwave Technology*, **9**, pp. 1244–1253 (1991).
- [17] B.M. Azizur Rahman y J. Brian Davies, "Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **32**, pp. 922–928 (1984).
- [18] Luis Nuño, Juan V. Balbastre y Héctor Castañé, "Analysis of general lossy inhomogeneous and anisotropic waveguides by the finite-element method (FEM) using edge elements", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **45**, pp. 446–449 (1997).
- [19] Weiping Huang, Chenglin Xu, Sai-Tak Chu y Sujeet K. Chaudhuri, "The finite-difference vector beam propagation method: Analysis and assessment", *Journal of Lightwave Technology*, **10**, pp. 295–305 (1992).
- [20] Wei-Yu Lee y Sung-Yuen Wang, "Guided-wave characteristics of optical graded-index planar waveguides with metal cladding: A simple analysis method", *Journal of Lightwave Technology*, **13**, pp. 416–421 (1995).
- [21] B. Costantini, C. De Angelis, A. Galtarossa y C.G. Someda, "Second-order perturbation theory of rectangular waveguides and directional couplers", *Applied Optics*, **33**, pp. 407–413 (1994).

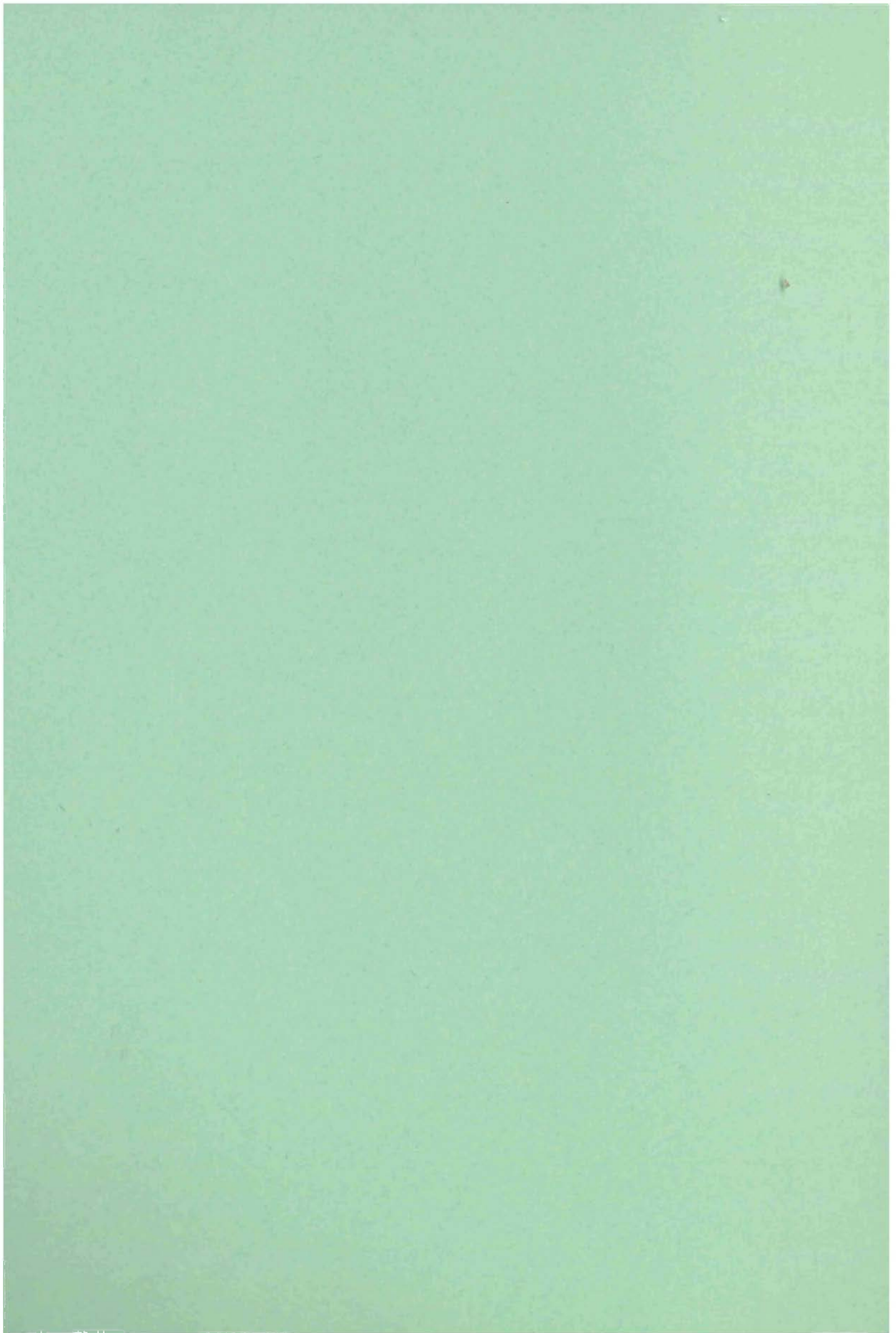
- [22] Hagen Renner, "Optical fiber couplers: Scalar supermodes and polarization corrections", *Journal of Lightwave Technology*, **10**, pp. 728–734 (1992).
- [23] Paul Roman, *Some Modern Mathematics for Physicists and Other Outsiders*, vol. 2. Pergamon Press, 1975.
- [24] A. Galindo y P. Pascual, *Mecánica Cuántica*. Ed. Alhambra, 1978.
- [25] George Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 1985, 3a. edición.
- [26] Anthony E. Siegman, *Lasers*. Mill Valley (California): University Science Books, 1986, pp. 847–856.
- [27] Carlos R. Paiva y Afonso M. Barbosa, "A linear-operator formalism for the analysis of inhomogeneous biisotropic planar waveguides", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **40**, pp. 672–678 (1992).
- [28] Genaro Saavedra, Walter D. Furlan, Enrique Silvestre y Enrique E. Sicre, "Analysis of the irradiance along different paths in the image space using the Wigner distribution function", *Optics Communications*, **139**, pp. 11-16 (1997).
- [29] Walter D. Furlan, Genaro Saavedra, Enrique Silvestre, Pedro Andrés y María J. Yzuel, "Polychromatic axial behavior of aberrated optical systems: Wigner distribution function approach", *Applied Optics*, **36**, pp. 9146–9151 (1997).
- [30] Walter D. Furlan, Genaro Saavedra, Enrique Silvestre y Manuel Martínez-Corral, "On-axis irradiance for spherically aberrated optical systems with obscured rectangular apertures: a study using the Wigner distribution function", *Journal of Modern Optics*, **45**, pp. 69–77 (1998).
- [31] Manuel Martínez-Corral, Carlos J. Zapata-Rodríguez, Pedro Andrés y Enrique Silvestre, "Effective Fresnel-number concepts for evaluating the relative focal shift in focused beams", *Journal of the Optical Society of America A*, **15**, pp. 449–455 (1998).
- [32] M. Kowalczyk, C.J. Zapata-Rodríguez, E. Silvestre, M. Martínez-Corral, "Phase pupil filters for improvement of the axial resolution in confocal scanning microscopy", *Optica Applicata*, **28**, pp. 127–138 (1998).
- [33] Philip M. Morse y Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, parte I. MacGraw-Hill, 1953, pp. 884–886.
- [34] F.R. Gantmacher, *Théorie des Matrices*, vol. 1. París: Dunod, 1966, pp. 268–271.

- [35] A. Ferrando, J.J. Miret, E. Silvestre y P. Fernández de Córdoba, "Computer simulation of the electromagnetic propagation in optical fibers using a novel biorthogonal-basis modal method". Conference on Computational Physics (Granada, Septiembre 1998), *Europhysics Conference Abstracts*, **22F**, P76 pp. 208-209 (1998).
- [36] J.J. Bernard, C. Brehm, J.-Y. Boniort, Ph. Dupont, J.-M. Gabriagues, C. Le Sergent, M. Liegois, P. François, M. Monerie y P. Sansonetti, "Étude des propriétés des fibres unimodales à gaine interne déprimée", *Annales de Télécommunications*, **38**, pp. 47-52, (1983).
- [37] Lhoussain Outifa, Michel Delmotte y Henri Jullien, "Dielectric and geometric dependence of electric field and power distribution in a waveguide heterogeneously filled with lossy dielectrics", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **45**, pp. 1154-1161 (1997).
- [38] A. Díez, M.V. Andrés y D.O. Culverhouse, "In-line polarizers and filters made of metal-coated tapered fibers: Resonant excitation of hybrid plasma modes", *IEEE Photonics and Technology Letters*, **10**, pp. 833-835 (1998).
- [39] P.L. Gourley, "Microstructured semiconductor lasers for high-speed information processing", *Nature*, **371**, pp. 571-577 (1994).
- [40] John D. Joannopoulos, Robert D. Meade y Joshua N. Winn, *Photonic Crystals: Molding the flow of light*. Princeton University Press, 1995.
- [41] Attila Mekis, J.C. Chen, I. Kurland, Shanhui Fan, Pierre R. Villeneuve y J.D. Joannopoulos, "High transmission through sharp bends in photonic crystal waveguides", *Physical Review Letters*, **77**, pp. 3787-3790 (1996).
- [42] E. Yablonovitch, "Photonic band-gap structures", *Journal of the Optical Society of America B*, **10**, pp. 283-295 (1993).
- [43] A.A. Maradudin y A.R. McGurn, "Out of plane propagation of electromagnetic waves in a two-dimensional periodic dielectric medium", *Journal of Modern Optics*, **41**, pp. 25-284 (1994)
- [44] K.M. Ho, C.T. Chan y C.M. Soukoulis, "Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures", *Physical Review Letters*, **65**, pp. 3152-3155 (1990).
- [45] Robert D. Meade, Karl D. Brommer, Andrew M. Rappe y J.D. Joannopoulos, "Existence of a photonic band gap in two dimensions", *Applied Physics Letters*, **61**, pp. 495-497 (1992).

- [46] Pierre R. Villeneuve y Michel Piché, "Photonic band gaps in two-dimensional square and hexagonal lattices", *Physical Review B*, **46**, pp. 4969–4972 (1992).
- [47] Sajeev John, "Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices", *Physical Review Letters*, **58**, pp. 2486–2489 (1987).
- [48] E. Yablonovitch, T.J. Gmitter, R.D. Meade, A.M. Rappe, K.D. Brommer y J.D. Joannopoulos, "Donor and Acceptor Modes in Photonic Band Structures", *Physical Review Letters*, **67**, pp. 3380–3383 (1991).
- [49] Robert D. Meade, Karl D. Brommer, Andrew M. Rappe y J.D. Joannopoulos, "Photonic bound states in periodic dielectric materials", *Physical Review B*, **44**, pp. 13772–13774 (1991).
- [50] R.D. Meade, A.M. Rappe, K.D. Brommer, J.D. Joannopoulos y O.L. Alerhand, "Accurate theoretical analysis of photonic band-gaps materials", *Physical Review B*, **48**, pp. 8434–8437 (1993).
- [51] Joshua N. Winn, Robert D. Meade y J.D. Joannopoulos, "Two-dimensional photonic band-gap materials", *Journal of Modern Optics*, **41**, pp. 257–273 (1994).
- [52] Eli Yablonovitch, "Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics", *Physical Review Letters*, **58**, pp. 2059–2062 (1987).
- [53] Robert D. Meade, Karl D. Brommer, Andrew M. Rappe y J.D. Joannopoulos, "Electromagnetic Bloch waves at the surface of a photonic crystal", *Physical Review B*, **44**, pp. 10961–10964 (1991).
- [54] J.C. Knight, T.A. Birks, P.St.J. Russell y D.M. Atkin, "All-silica single-mode fiber with photonic crystal cladding", *Optics Letters*, **21**, 1547–1549 (1996); Errata, *Optics Letters*, **22**, pp. 484–485 (1997).
- [55] J.C. Knight, T.A. Birks, P.St.J. Russell y J.P. de Sandro, "Properties of photonic crystal fiber and the effective index model", *Journal of the Optical Society of America A*, **15**, pp. 748–752 (1998).
- [56] T.A. Birks, J.C. Knight y P.St.J. Russell, "Endlessly single-mode photonic crystal fiber", *Optics Letters*, **22**, pp. 961–963 (1997).
- [57] Philip St.J. Russell, Timothy A. Birks y F. Dominic Lloyd-Lucas, "Photonic Bloch waves and photonic band gaps", en *Confined Electrons and Photons: New Physics and Applications*, E. Burstein y C. Weisbuch (editores). Plenum Press, 1995.

- [58] Jonathan C. Knight, Tim A. Birks, Philip St.J. Russell y John G. Rarity, "Bragg scattering from an obliquely illuminated photonic crystal fiber", *Applied Optics*, **37**, pp. 449–452 (1998).
- [59] A. Ferrando, J.J. Miret, E. Silvestre, P. Andrés y M.V. Andrés, "Vector description of higher-order modes in photonic crystal fibers", (en redacción).
- [60] D. Mogilevtsev, T.A. Birks y P.St.J. Russell, "Group-velocity dispersion in photonic crystal fibers", *Optics Letters*, **23** pp. 1662–1664 (1998).
- [61] A. Ferrando, J.J. Miret, E. Silvestre y P. Andrés, "Nearly zero wavelength-independent group velocity dispersion: Photonic crystal fiber guiding", (en redacción).





Anexo

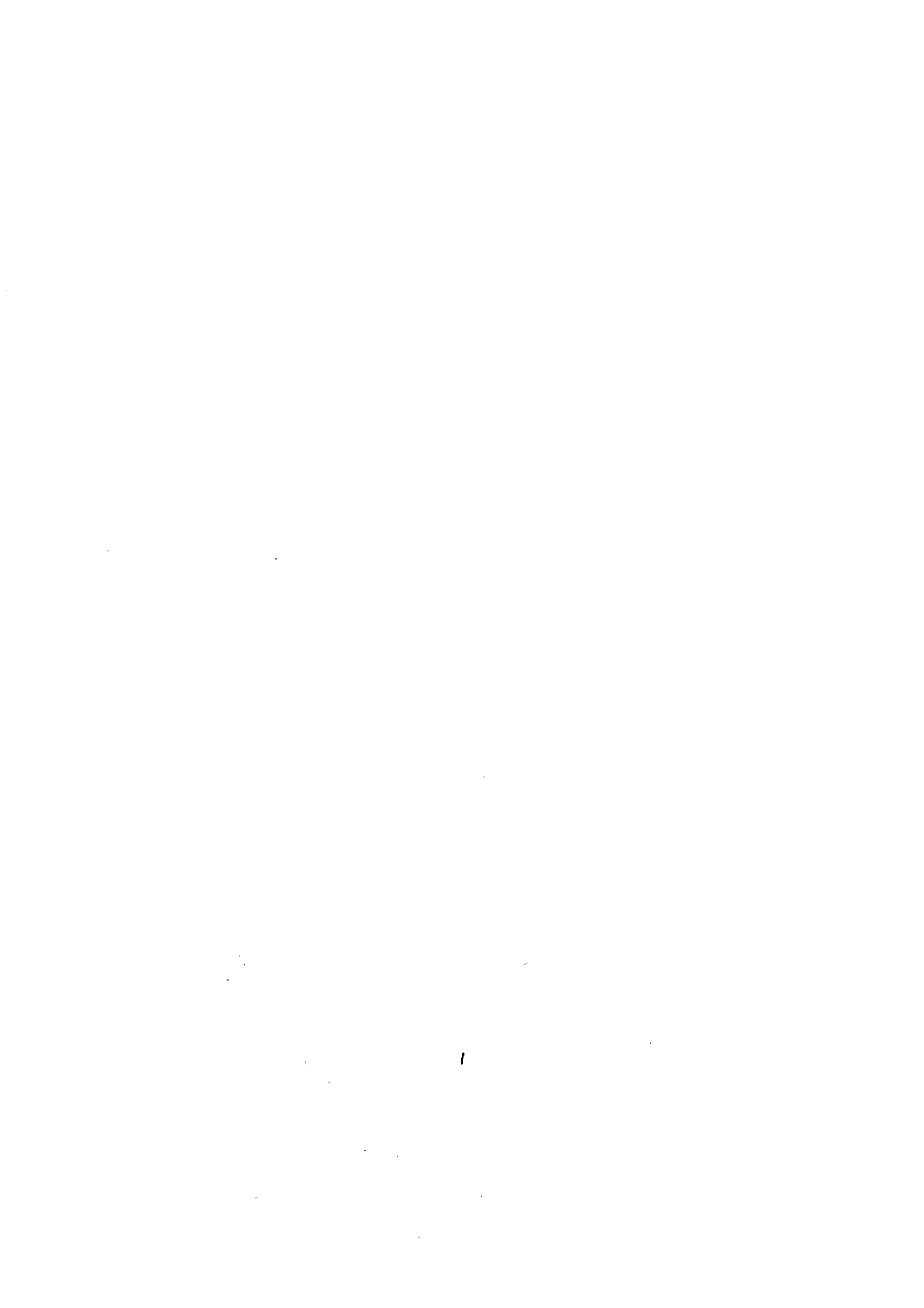
Publicaciones

I

Publicación I

Biorthonormal-basis method for the vector description of optical-fiber modes

Journal of Lightwave Technology, 16, pp. 923–928 (1998)



Biorthonormal-Basis Method for the Vector Description of Optical-Fiber Modes

Enrique Silvestre, Miguel V. Andrés, and Pedro Andrés, *Member, OSA*

Abstract—This paper gives the theoretical basis for the development of real vector modal methods to describe optical-fiber modes. To this end, the vector wave equations, which determine the electromagnetic fields, are written in terms of a pair of linear, nonself-adjoint operators, whose eigenvectors satisfy biorthogonality relations. The key of our method is to obtain a matrix representation of the vector wave equations in a basis that is defined by the modes of an auxiliary system. Our proposed technique can be applied to fibers with any profile, even those with a complex refractive index. An example is discussed to illustrate our approach.

Index Terms—Biorthogonality, biorthonormal basis, vector modal methods, waveguide modes.

I. INTRODUCTION

THE preferable way to obtain the modes of optical fibers with cylindrical symmetry is to solve the wave equations in regions or layers with previously known analytical solutions and then to apply the appropriate boundary conditions. This approach is the usual one for step-profile waveguides. When such analytical solutions are not available, we should employ modal, perturbative or numerical methods.

Modal methods are widely used when the problem can be handled in the framework of the scalar theory [1], [2]. The modes of an appropriate auxiliary waveguide form a basis that is used to represent the scalar wave equation in matrix form and the modes of the system under consideration. The development of scalar modal methods is based on the orthogonality properties of the modes of the auxiliary system and the solution is obtained after the diagonalization of the system matrix. Additionally, polarization effects can be included in the scalar analysis as a perturbation (see, for instance, in [3]). However, to the best of our knowledge, a modal method fully integrated in the vector theory framework has not yet been described.

In this paper, we describe a novel modal method to calculate the bounded modes of optical fibers with any real or complex index profile, which takes into account the vector nature of the electromagnetic fields. The method we present here is based on the biorthogonality property associated with the eigenvectors

Manuscript received September 3, 1997. This work was supported in part by the Generalitat Valenciana under Grant GV96-D-CN-05-141 and the Dirección General de Investigación Científica y Técnica under Grant PB93-0354-C02-01, Ministerio de Educación y Ciencia, Spain.

E. Silvestre and P. Andrés are with the Departament d'Òptica, Universitat de València, 46100 Burjassot (Valencia), Spain.

M. V. Andrés is with the Institut de Ciència dels Materials, Universitat de València, 46100 Burjassot (Valencia), Spain.

Publisher Item Identifier S 0733-8724(98)03326-X.

of a nonself-adjoint operator. Biorthogonality relations have also been used successfully in other different contexts, such as biisotropic planar waveguides [4] and laser resonators [5]. Our final interest is to deal with asymmetric metal-coated fiber devices [6].

First, we give the theoretical bases of the method, and second, we focus on some practical considerations when implementing it. Finally, in order to show the capability of our method, we analyze a double-clad single-mode fiber (also called a W-fiber) and test our results by comparing them against the analytical solution.

II. BASIC THEORY

Let us consider a medium translationally invariant along the z axis. We assume that the electric and magnetic fields in this medium are expressible as a linear superposition of fields with the separable form

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{x}_t) \exp[i(\beta z - \omega t)]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) \exp[i(\beta z - \omega t)]$$

where ω is the angular frequency and β is the propagation constant. Subscript t denotes transverse components. The transverse components of these fields, \mathbf{e}_t and \mathbf{h}_t , when there are no sources present, satisfy the vector wave equations [7]

$$\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n^2 + \left(\frac{\nabla_t n^2}{n^2} \right) \wedge (\nabla_t \wedge \circ) \right] \mathbf{h}_t = \beta^2 \mathbf{h}_t \quad (1)$$

$$\left\{ \nabla_t^2 + k_0^2 n^2 + \nabla_t \left[\left(\frac{\nabla_t n^2}{n^2} \right) \cdot \circ \right] \right\} \mathbf{e}_t = \beta^2 \mathbf{e}_t \quad (2)$$

being $n = n(\mathbf{x}_t)$ the refractive index profile and $k_0 = 2\pi/\lambda$ the free-space wave number. In these equations, we can identify in square brackets the operators responsible for the evolution of the transverse components along the z axis.

Once a matrix representation is provided, we shall obtain the modes of the system by diagonalizing these operators, together with the appropriate boundary conditions and the constraints between field components given by Maxwell's equations.

It is important to point out, however, that in the vector theory, even for real refractive indexes, these operators are nonself-adjoint (in fact, the operators defined by (1) and (2) are adjoint to each other), whereas in the scalar theory (and for real indexes) both operators are self-adjoint. This is the key question that distinguishes both cases and prevents blind application of the techniques used in the scalar approximation to the vector case.

At this point, we need to outline a basic property satisfied by the eigenvectors θ_i of a nonself-adjoint operator, L , and the eigenvectors χ_j of its adjoint, L^\dagger , i.e., the eigenvectors that fulfill the eigensystems

$$L\theta_i = l_i\theta_i \quad (3)$$

$$L^\dagger\chi_j = l_j^*\chi_j \quad (4)$$

where l_i and l_j^* are the corresponding eigenvalues and $*$ denotes the complex conjugate. This property states that both sets of eigenvectors satisfy a relation named biorthogonality [8], [9]

$$\langle \chi_i, \theta_j \rangle = \delta_{ij} \quad (5)$$

where $\langle \circ, \circ \rangle$ is the ordinary scalar product in the Hilbert space of the square-integrable complex functions on \mathcal{R}^2 , $L^2(\mathcal{R}^2, \mathcal{C})$.

So, if we identify those eigenvectors with the transverse components of the magnetic field and the electric field, respectively

$$\theta = \begin{pmatrix} h_r \\ h_\phi \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} -e_\phi^* \\ e_r^* \end{pmatrix} \quad (6)$$

and their respective eigenvalues, $l_i = \beta_i^2$, we can recognize the biorthogonality relation as the well-known "orthogonality" relation satisfied by the electromagnetic fields [7]

$$\langle \chi_i, \theta_j \rangle = \int_{\mathcal{R}^2} (\chi_i^* \cdot \theta_j) ds = \int_{\mathcal{R}^2} (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds. \quad (7)$$

Because of the symmetry of the example shown in the next section, we choose, with no loss of generality, polar coordinates for representing electric and magnetic field components.

Now, in order to perform a modal expansion, only a complete basis and the corresponding projector onto the one-dimensional subspace generated by each eigenvector are required. The scalar product of a field θ and the eigenmodes χ_i of the adjoint problem selects the different components and gives the modal expansion of θ in terms of the eigenmodes θ_i , i.e., $\theta = \sum_i \langle \chi_i, \theta \rangle \theta_i$. In other words, the projector onto the subspace generated by θ_i , $P_i(\circ)$, is given by $\langle \chi_i, \circ \rangle$. So, when we have a nonself-adjoint problem, there is a biorthogonality relation given by (5) that allows us to obtain the coefficients of the modal expansion in terms of the eigenvector basis of such a nonself-adjoint operator.

In the case of L being self-adjoint, i.e., $L = L^\dagger$, the eigenvectors θ_i and χ_i are the same, and therefore the biorthogonality relation (5) simplifies into the usual orthogonality relation $\langle \theta_i, \theta_j \rangle = \delta_{ij}$, and the eigenvalues β_i^2 become real numbers.

Once we have shown the relation between the properties of nonself-adjoint operators and the vector wave equations of the electromagnetic field, we can represent (1) and (2) in matrix form in the basis provided by an auxiliary system. With this aim, we need an appropriate auxiliary system, described by an index profile \bar{n} , that provides the auxiliary basis

$$\bar{L}\bar{\theta}_i = \bar{\beta}_i^2\bar{\theta}_i, \text{ and } \bar{L}^\dagger\bar{\chi}_j = (\bar{\beta}_j^2)^*\bar{\chi}_j. \quad (8)$$

Of course, the eigenvectors of \bar{L} and \bar{L}^\dagger satisfy the biorthogonality relation (5), $\langle \bar{\chi}_i, \bar{\theta}_j \rangle = \delta_{ij}$, and they are the modes of the auxiliary system when this system is regarded as a waveguide.

By breaking down the problem under consideration to $L = \bar{L} + \Delta$, and expanding the eigenvectors of L and L^\dagger in terms of the auxiliary eigenvectors

$$\theta_i = \sum_k c_{ik}\bar{\theta}_k, \quad \chi_i = \sum_k d_{ik}\bar{\chi}_k \quad (9)$$

we can represent the vector wave equations in matrix form. Each element L_{ij} of the matrix can be calculated by means of the expression

$$L_{ij} = \langle \bar{\chi}_i, L\bar{\theta}_j \rangle = \bar{\beta}_j^2\delta_{ij} + \langle \bar{\chi}_i, \Delta\bar{\theta}_j \rangle. \quad (10)$$

As an example, in the case of circular symmetry [$n = n(r)$], the Δ operator becomes

$$\Delta = k_0^2[n^2 - \bar{n}^2] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \left[\frac{(n^2)'}{n^2} - \frac{(\bar{n}^2)'}{\bar{n}^2} \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial_\phi & -\partial_r(r\phi) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

In this way, (1), for instance, can be written for an arbitrary eigenvector θ_i , as the algebraic eigensystem

$$\sum_k L_{jk}c_{ik} = \beta_i^2c_{ij}. \quad (12)$$

Its diagonalization provides the eigenvalues β_i^2 and the eigenvectors $\theta_i = \sum_k c_{ik}\bar{\theta}_k$, i.e., the propagation constants and the modes.

With this approach, we can ensure that the eigenvectors of the system under study satisfy the links between field components derived from Maxwell's equations and also the outer boundary conditions of the auxiliary system. This is true as the solution is a linear superposition of auxiliary modes.

We can also solve the problem by paying attention to components e_r . In this case, (2) can be written for an arbitrary eigenvector χ_i as

$$\sum_k L_{jk}^\dagger d_{ik} = (\beta_i^2)^*d_{ij} \quad (13)$$

with

$$L_{jk}^\dagger = \langle \bar{\theta}_j, L^\dagger\bar{\chi}_k \rangle = (\bar{\beta}_k^2)^*\delta_{jk} + \langle \bar{\theta}_j, \Delta^\dagger\bar{\chi}_k \rangle \quad (14)$$

and $L^\dagger = \bar{L}^\dagger + \Delta^\dagger$.

III. IMPLEMENTATION OF THE METHOD

A. General Considerations

The auxiliary system must provide a basis to represent the system under consideration. However, the treatment of the continuous part of the spectrum is a tricky question in surface

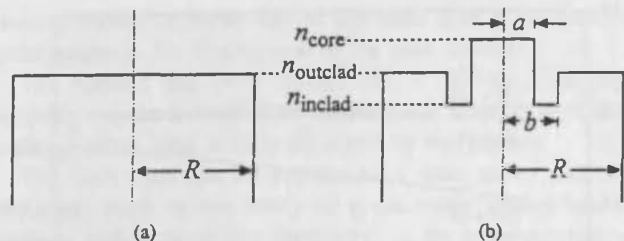


Fig. 1. Index profile for (a) the auxiliary fiber and (b) the W-fiber. R : shield radius; a and b : core and inner cladding radii, respectively.

waveguides. The simplest way to solve this problem is to surround both systems with a shield (a perfect conductor). This allows us to have an infinite but discrete basis.

It is noteworthy that the wider the shield is, the closer spaced are the modes of the shielded and unshielded versions. Therefore the unshielded system will be represented more accurately by a larger shield. This effect, introduced by the finite volume, is worse for larger wavelengths as will be illustrated by the numerical example in the following section. On the other hand, the number of required auxiliary modes to achieve a given precision goes up roughly as the ratio between the radius of the shield and the radius of the guiding structure. For this reason, we need a compromise between these two parameters in order to minimize the computing time. By choosing properly both the value for the shield radius and the number of auxiliary modes, we can obtain results with an accuracy higher than a previously fixed value.

B. A Double-Clad Single-Mode Fiber

With the aim of testing our method, we have applied it to a double-clad single-mode fiber (i.e., a W-fiber) using a shielded homogeneous medium as auxiliary fiber (see Fig. 1). Note that the W-fiber can be solved using the standard method and this fact provides a way of checking the performance of our method.

The modes of the auxiliary fiber define the auxiliary basis, $\tilde{\theta}_i$, and are the well-known TM and TE modes of an homogeneous circular waveguide. We give some details on this mode spectrum in the Appendix, but we do not include its derivation since it can be found in different textbooks, as for example in [10].

Once $\tilde{\theta}_i$ and $\tilde{\beta}_i$ are known, we have to work out, following (10), the matrix coefficients L_{ij} of the vector wave equation corresponding to the W-fiber. Again, we give some mathematical details in the Appendix.

We have focused our attention on solving the algebraic eigensystem (12), changing the radius R of the shield and the number of auxiliary modes, M (we take always 50% of TM type and 50% of TE type). In order to compute the dispersion of the W-fiber, we have taken into account the Sellmeier constants for pure silica [11], and thus, the material dispersion has been directly included in the calculations. All the numerical results that we give throughout the following discussion correspond to the case of a W-fiber whose outer cladding is pure silica, $n_{core} = n_{outclad} + 0.0055$, $n_{inclad} =$

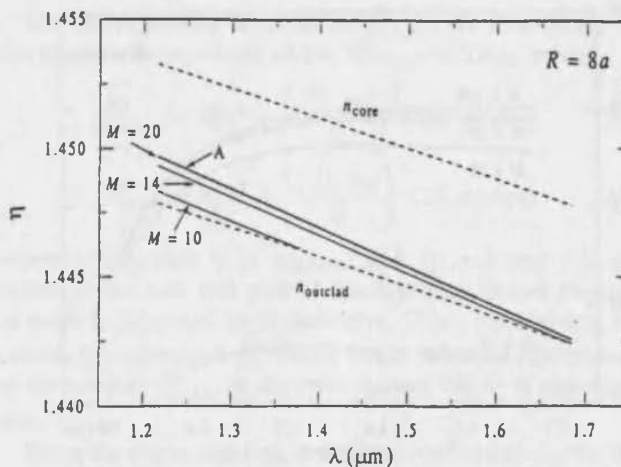


Fig. 2. Effective refractive index of the fundamental mode η as a function of wavelength. Analytical solution A and numerical solution obtained with $R = 8a$ and three different numbers of auxiliary modes, $M = 10$, $M = 14$, and $M = 20$.

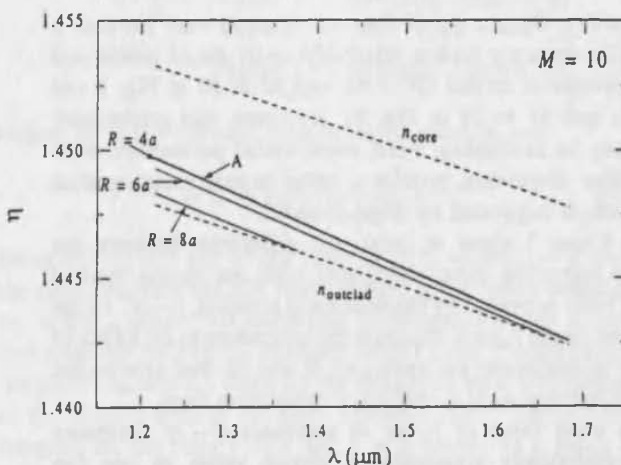


Fig. 3. Effective refractive index of the fundamental mode η as a function of wavelength. Analytical solution A and numerical solution calculated with 10 auxiliary modes and three shield radii $R = 4a$, $R = 6a$, and $R = 8a$.

$n_{outclad} = 0.0051$, $a = 3.4\mu\text{m}$, and $b/a = 1.73$, as is considered in [12].

Fig. 2 gives the effective refractive index of the fundamental mode as a function of wavelength for a fixed value of R and for three different numbers of modes M . This figure also includes the exact (i.e., the analytical) solution for comparison. From the above figure we can conclude that, in principle, we need to increase the number of modes to come close to the exact solution, which is what one would expect.

Instead, for a fixed value of M , a relatively small radius R can provide a better result than a larger value of R . This fact is illustrated in Fig. 3. The above situation is equivalent to describing a feature of a periodic function by adding only a finite number of terms of its Fourier series expansion. If the size of the detail is not too small with respect to the period, a relatively small number of terms will be enough (this is the case of $R = 4a$). In contrast, if the characteristic to be reproduced is quite small respect to the period, a higher number of terms will be needed (this is the case of $R = 8a$).

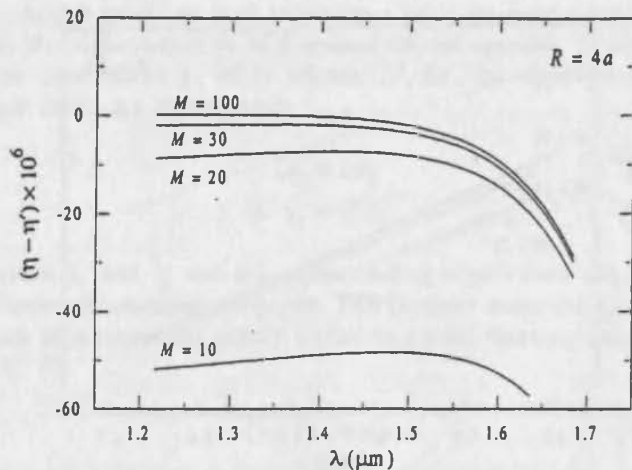


Fig. 4. Difference between the effective refractive index obtained with the numerical solution η and the analytical solution η' versus wavelength for $R = 4a$ and for four different values of the number of auxiliary modes $M = 10$, $M = 20$, $M = 30$, and $M = 100$.

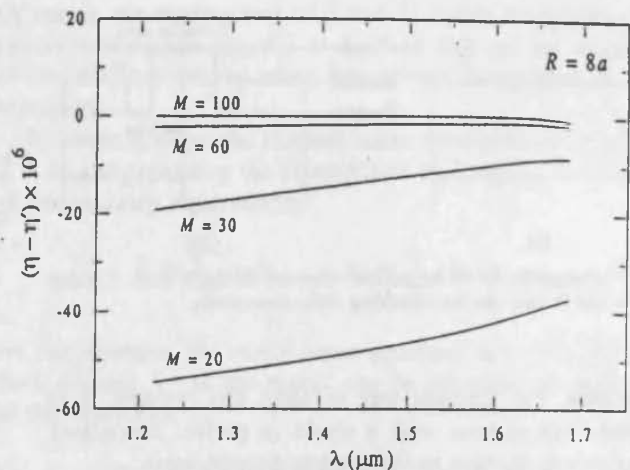


Fig. 5. Difference between the effective refractive index obtained with the numerical solution η and the analytical solution η' versus wavelength for $R = 8a$ and for four different values of the number of auxiliary modes $M = 20$, $M = 30$, $M = 60$, and $M = 100$.

The above figures show that our method may provide a reasonable accuracy with a relatively small shield radius and a low number of modes ($R = 8a$ and $M = 20$ in Fig. 2 and $R = 4a$ and $M = 10$ in Fig. 3). However, this preliminary result may be misleading since some useful parameters, such as the fiber dispersion, require a rather higher accuracy than that which is suggested by Figs. 2 and 3.

Figs. 4 and 5 show in detail the difference between the effective refractive index calculated with our modal method and the value provided by the analytical solution, $\eta - \eta'$. At the same time, these figures illustrate the procedure to be followed in order to determine the values of R and M that give us the required solution with a realistic computation time.

For a fixed value of R , as M increases $\eta - \eta'$ decreases and asymptotically approaches a certain value, as one can see in Figs. 4 and 5. However, examination of the curves in Fig. 4 reveals that if R is too small, the asymptotic value of the difference is relatively large. Consequently, the calculated solution with our method and the exact solution are rather different. The previous procedure must then be repeated with a larger value of R . When R is large enough (see Fig. 5), $\eta - \eta'$ is, for all wavelengths, smaller than a value that could be fixed in advance. We conclude that the error of our method may be smaller than a few parts per million, for example, if we consider $R = 8a$ and $M = 100$ in this particular W-fiber.

Such a relatively high accuracy is necessary to compute the dispersion correctly since it depends on the second derivative. Fig. 6 demonstrates that our method is suitable to compute accurately such a parameter, provided the right shield radius and the proper number of modes are chosen. Note that the achromatic dispersion effect typical in this type of fiber is well reproduced.

When the analytical solution is not known, the above reasoning still holds. The conventional manner to act is to calculate the asymptotic value of the effective refractive index for increasing values of R . The convergence of these asymptotic values will establish when the solution has been achieved. Actually, it is not necessary to make this calculation

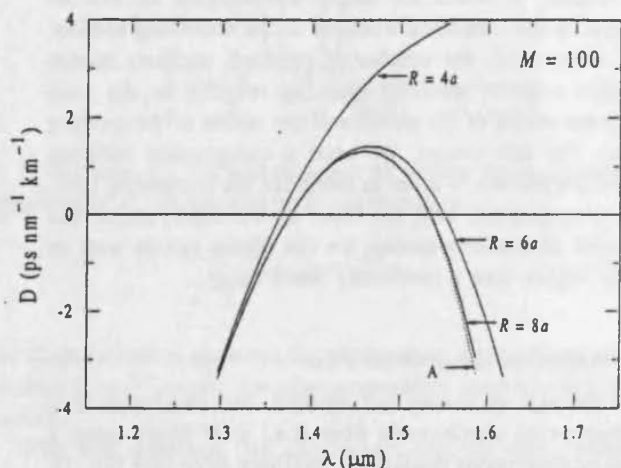


Fig. 6. Dispersion of the W-fiber, D , as a function of wavelength. Analytical calculation A and numerical calculation with $M = 100$ and three different shield radii. The accuracy reached with $R = 4a$ and $R = 6a$, even with $M = 100$, is low. So, in these two cases the computed dispersion is far away from the theoretical curve.

for the whole wavelength range of interest. It will be enough to study the convergence for the most unfavorable case (in general, the larger wavelengths).

IV. CONCLUSIONS

This paper presents a method that extends the modal techniques used in scalar theory to the framework of the vector theory. This method is based on the biorthogonality property associated with the eigenvectors of any nonself-adjoint operator. In our case, the nonself-adjoint operators are those defined by the vector wave equations of the transverse components of the electromagnetic field. This property clears the way for applying standard algebraic techniques to the vector case, once the equations are written in matrix form and reduced to an algebraic eigenvalue problem.

The proposed method allows us to calculate the bounded modes of optical fibers with any profile, even those with a

nonreal refractive index, and at the same time it includes the polarization in the description of the fiber modes.

The method has been tested with a W-fiber. The high accuracy required to calculate correctly the dispersion of such a single-mode fiber is fully achieved by our method.

This technique can be applied to a wide set of different problems, such as the study of grade-index waveguides or systems with a nontrivial symmetry, or the understanding of the effect of a given layer in multilayer waveguides. The method could be applied, as well, to solve diffractive optical problems, such as the calculation of the modal structure in diffractive subwavelength gratings.

At present we are paying attention to some of the above problems, focusing, in particular, our interest on the effects of an asymmetric metallic layer onto the mode spectrum of a dielectric waveguide, what will be discussed elsewhere.

APPENDIX

The auxiliary basis $\bar{\theta}_i$ is constituted by the TM_{lm} and TE_{lm} modes of an homogeneous circular waveguide properly normalized to fulfill (5). In order to specify which mode corresponds to the θ_i eigenvector, we have established a four-subscript nomenclature, θ_{plqm} . The first subscript p has only two values, ± 1 , and is determined by the degeneration of the whole mode spectrum ($l \geq 1$); $p = +1$ corresponds to the case in which the axial component of the electric field depends on $\cos(l\phi)$ and $p = -1$ to the case in which it depends on $\sin(l\phi)$. The second subscript l is the standard azimuthal order. The third subscript q has only two values: 1 and 2 where 1 corresponds to TM modes and 2 corresponds to TE modes. Finally, the fourth subscript m is equal to the second subscript of the standard TM_{lm} and TE_{lm} notation.

However, because of the symmetry of the waveguide, it may happen that the auxiliary modes with different values of p and l generate separate families of modes. In other words, the matrix of coefficients L_{ij} may split into separate matrices. In the case of a W-fiber, the matrices for modes with $p = +1$ and $p = -1$ (and $l \geq 1$) are identical and give rise to the well-known degeneration related to the circular symmetry. Hence, in this particular case we have only needed to consider modes with $p = +1$.

If the modes θ_{plqm} are arranged in sequence according to the number formed by the four subscripts from lower to higher values, then the subscript i used to specify the auxiliary mode $\bar{\theta}_i$ will be the positive integer that specifies the position in the above sequence. We start from 1 for the first mode, $\bar{\theta}_{-1011}$ in the general case, or $\bar{\theta}_{+1011}$ in our case since we only consider $p = +1$.

The corresponding eigenvalues, $\bar{\beta}_{plqm}^2$, are determined by the propagation constants of the TM_{lm} and TE_{lm} modes

$$\bar{\beta}_{pl1m}^2 = k_0^2 \bar{n}^2 - \left[\frac{j(l, m)}{R} \right]^2 \quad (\text{TM modes}) \quad (A1)$$

$$\bar{\beta}_{pl2m}^2 = k_0^2 \bar{n}^2 - \left[\frac{j'(l, m)}{R} \right]^2 \quad (\text{TE modes}) \quad (A2)$$

where in this case $\bar{n} = n_{\text{outclad}}$ and $j(l, m)$ and $j'(l, m)$ represent the m th real root of the first-kind Bessel function of order l , $J_l(z)$ and of its derivative, $J'_l(z)$, respectively. Of course, the eigenvalue $\bar{\beta}_i^2$ with a single subscript corresponds to the constant $\bar{\beta}_{plqm}^2$, in the same manner that $\bar{\theta}_i$ is associated with $\bar{\theta}_{plqm}$.

Using the above criterion, the matrix coefficients L_{ij} for the W-fiber, derived from (10), are given by

$$L_{ij} = \bar{\beta}_j^2 \delta_{ij} + k_0^2 \int_{\mathcal{R}^2} ds (n^2 - \bar{n}^2) \hat{z} \cdot (\bar{e}_{it} \wedge \bar{h}_{jt}) + i \frac{k_0}{Z_0} \bar{n}^2 \left[a g(a) \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \bar{e}_{jz}(a, \phi) \bar{e}_{ir}(a, \phi) + b g(b) \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \bar{e}_{jz}(b, \phi) \bar{e}_{ir}(b, \phi) \right] \quad (A3)$$

where Z_0 is the intrinsic impedance of vacuum and

$$g(r) = \frac{n^4(r+) - n^4(r-)}{2n^2(r+)n^2(r-)} \quad (A4)$$

being $n(r+)$ and $n(r-)$ the limit of $n(\xi)$ when $\xi \rightarrow r$ from the right and from the left, respectively. In the above equation, \bar{e}_{it} and \bar{h}_{jt} denote the transverse components of the electric and magnetic field of the auxiliary modes i and j , respectively. Similarly, \bar{e}_{ir} and \bar{e}_{jz} stand for the radial and axial components of the electric field of the same modes i and j . The last two integrals on the rims $r = a$ and $r = b$ appear as a result of the second term of the operator Δ in (11). Note that the step-index profile of the W-fiber reduces $(n^2)'$ to two Dirac's delta functions and, thus, the surface integral of the scalar product in (10) splits into two one-dimensional integrals.

Once the field components of our auxiliary basis are inserted into (A3), all the radial integrals can be reduced to a single type, for which we have worked out an analytical solution, as shown in (A5) at the bottom of the page where the functions Ξ_i^k and $\hat{\Xi}_i^k$ are defined by

$$\Xi_i^k(r) = \alpha_i^k J_l(kr) + \beta_i^k Y_l(kr) \quad (A6)$$

$$\hat{\Xi}_i^k(r) = \alpha_i^k J_{l+1}(kr) + \beta_i^k Y_{l+1}(kr) \quad (A7)$$

J_l and Y_l denote the first- and the second-kind Bessel functions of integer order l and α_i^k and β_i^k are two arbitrary constants.

$$\int r dr \left\{ \frac{d}{dr} [\Xi_i^k(r)] \frac{d}{dr} [\Xi_i^{k'}(r)] + \frac{l^2}{r^2} \Xi_i^k(r) \Xi_i^{k'}(r) \right\} = \begin{cases} \left\{ \left[l + \frac{(kr)^2}{2} \right] [\Xi_i^k(r)]^2 - (1+l)kr \Xi_i^k(r) \hat{\Xi}_i^k(r) + \frac{(kr)^2}{r^2} [\hat{\Xi}_i^k(r)]^2 \right\} & (k = k') \\ \left\{ l \Xi_i^k(r) \Xi_i^{k'}(r) - \frac{kk'}{k^2 - k'^2} r [k \Xi_i^k(r) \hat{\Xi}_i^{k'}(r) - k' \hat{\Xi}_i^k(r) \Xi_i^{k'}(r)] \right\} & (k \neq k') \end{cases} \quad (A5)$$

REFERENCES

- [1] W.-Y. Lee and S.-Y. Wang, "Guided-wave characteristics of optical graded-index planar waveguides with metal cladding: A simple analysis method," *J. Lightwave Technol.*, vol. 13, pp. 416-421, Mar. 1995.
- [2] E. K. Sharma, M. P. Singh, and A. Sharma, "Variational analysis of optical fibers with loss or gain," *Opt. Lett.*, vol. 18, pp. 2096-2098, Dec. 1993.
- [3] H. Renner, "Optical fiber couplers: Scalar supermodes and polarization corrections," *J. Lightwave Technol.*, vol. 10, pp. 728-734, June 1992.
- [4] C. R. Paiva and A. M. Barbosa, "A linear-operator formalism for the analysis of inhomogeneous biisotropic planar waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 49, pp. 672-678, Apr. 1992.
- [5] A. E. Siegman, *Lasers*. Mill Valley, CA: University Science Books, 1986, pp. 847-856.
- [6] A. Diez, M. V. Andrés, D. O. Culverhouse, and T. A. Birks, "Cylindrical metal-coated optical fiber devices for filters and sensors," *Electron. Lett.*, vol. 32, pp. 1390-1392, July, 1996.
- [7] A. W. Snyder and J. D. Love, *Optical Waveguide Theory*. London, U.K.: Chapman and Hall, 1983, pp. 595-606.
- [8] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953, pt. 1, pp. 884-886.
- [9] F. R. Gantmacher, *Théorie des Matrices*. Paris, France: Dunod, 1966, vol. 1, pp. 268-271.
- [10] R. E. Collin, *Foundation for Microwave Engineering*. New York: McGraw-Hill, 1966, pp. 107-111.
- [11] M. J. Adams, *An Introduction to Optical Waveguides*. New York: Academic, 1974, pp. 244-245.
- [12] J. J. Bernard *et al.*, "Étude des propriétés des fibres unimodales à gaine interne déprimée," *Ann. Télécommun.*, vol. 38, pp. 47-52, Jan./Feb. 1983.

Enrique Silvestre was born in Valencia, Spain, in 1962. He received the Licenciado degree in physics in 1986, the Master's degree in theoretical physics in 1989, and the Master's degree in optics in 1997, all of them from the Universitat de Valencia (UV), Spain. He is currently working towards the Ph.D. degree in the Department of Optics at UV.

His research interests are in the area of modal techniques for electromagnetic wave propagation in nonsymmetrical structures and periodical structures.



Miguel V. Andrés was born in Valencia, Spain, in 1957. He received the "Licenciado en Física" degree in 1979 and the "Doctor en Física" (Ph.D.) degree in 1985, both from the Universidad de Valencia, Spain.

Since 1983, he has served successively as Assistant Professor and Lecturer in the Departamento de Física Aplicada de the Universidad de Valencia. From 1984 to 1987, he was a Visiting Research Fellow at the Department of Physics, University of Surrey, U.K. Until 1984, he was engaged in research on microwave surface waveguides. His current research areas are optical fiber devices and systems for signal processing, high-frequency modulation, short-pulse generation, and sensor applications.



Pedro Andrés was born in Valencia, Spain, in 1954. He received the B.S., M.S., and Ph.D. degrees in physics from the Universidad de Valencia, Spain, in 1976, 1978, and 1983, respectively.

His research work has been performed at the Universidad de Valencia, and as a Visiting Scientist, at the Laboratoire P.M. Duffieux, Besançon, France, the Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (Puebla, Mexico), the National Physical Laboratory, Teddington, U.K., the Universitat Jaume I, Castellón, Spain, and the Pennsylvania State University, University Park. Since 1985, he has served successively as Assistant Professor, Associate Professor, and presently as Professor of Optics in the Departamento de Óptica of the Universidad de Valencia. His research interests are diffraction, white-light optical information processing, diffractive optical elements, conventional and confocal imaging formation, and more recently propagation in optical waveguides and fiber devices. He has published more than 40 original papers in peer-reviewed journals.

Dr. Andrés is a member of SPIE, EOS, and the Optical Society of America (OSA).

Publicación II



II

**Analysis and design of an
endlessly single-mode finned
dielectric waveguide**

Journal of the Optical Society of America A, 15, pp. 3067–3075 (1998)

Analysis and design of an endlessly single-mode finned dielectric waveguide

E. Silvestre,* P. St. J. Russell, T. A. Birks, and J. C. Knight

Optoelectronics Group, Department of Physics, University of Bath, Bath BA2 7AY, UK

Received March 18, 1998; revised manuscript received June 8, 1998; accepted August 21, 1998

We report what is to our knowledge a novel dielectric waveguiding structure consisting of periodic arrays of parallel planar fins placed on both sides of and perpendicular to a central planar core. This structure is analyzed, and the behavior of its bound modes is investigated. This finned guide exhibits many of the same features as a recently reported all-silica photonic crystal fiber. For example, it can be designed to support only the fundamental transverse bound mode over the entire electromagnetic frequency spectrum. This new class of endlessly single-mode waveguide may prove to have important applications in many areas of optoelectronics.

© 1998 Optical Society of America [S0740-3232(98)00712-1]

OCIS codes: 230.7390, 350.2770, 310.2790.

1. INTRODUCTION

A new form of optical fiber—the photonic crystal fiber—has recently been reported.¹⁻³ This fiber has a hexagonal array of submicrometer air holes running along its length and a filled-in air hole (or line defect) in its center. The filled-in air hole acts as a core, confining light, which travels along the fiber axis as a guided mode. This structure can be designed to be endlessly single mode, i.e., never to support more than one confined mode regardless of the diameter of the fiber or the wavelength of the light.^{1,2} This remarkable result is due to the strong wavelength dependence of the effective refractive index in the two-dimensional photonic crystal cladding, which is in turn caused by the unusual properties of photonic crystals when these crystals are excited in the cutoff band beyond the critical angle, i.e., by evanescent fields. It turns out that the effective refractive index of the cladding rises as the wavelength decreases, in such a manner as to cancel the normal dependence of the V parameter on reciprocal wavelength. Indeed, the V parameter tends to a constant asymptotic value that itself depends on the air-filling fraction of the photonic crystal cladding.

Having discovered this effect experimentally and provided the above qualitative explanation for the observed behavior, we have asked the question whether a similar effect could exist in a simpler structure such as a multilayer stack with a structural defect. The most obvious example of such a structure is a straightforward one-dimensional multilayer stack, with an enlarged high-index layer as the defect or core; however, this lacks an important distinctive feature of the photonic crystal fiber: The core is not directly connected to extended cladding material of the same refractive index. Moreover, a one-dimensional multilayer stack will also support Bragg waveguide modes and thus cannot be single mode at all frequencies.⁴ In this paper we discuss the guidance properties of a finned dielectric waveguide structure (Fig. 1) that displays many of the same features as the photonic crystal fiber. We consider only propagation in the z

direction, along which the structure is invariant. The analysis of this structure is analytically tractable by a specially adapted transfer-matrix method, which has some features in common with that employed to treat planar photonic crystal waveguides.^{5,6} Briefly, the method involves matching the Bloch wave fields of the cladding to plane waves within the defect layer.

This paper is organized as follows. In Section 2 we present a mathematical description of the structure and give expressions for the Bloch wave fields in an infinite periodic medium with the same properties as the finned cladding regions. Three-dimensional wave-vector diagrams are used to illustrate wave-vector matching along the boundaries and how it gives rise to guided modes. In Section 3 we show how to match the fields at the waveguide boundaries and derive the guided mode indices. In Section 4 the V value of the structure is obtained and compared with the V value of a nonperiodic planar waveguide with the appropriate (polarization-dependent) average cladding refractive index at low frequencies. Section 5 contains results and some discussion, and conclusions are drawn in Section 6.

2. BLOCH FIELDS IN INFINITE MULTILAYER STACK

A. Transfer-Matrix Formalism

In this subsection we follow closely the development in Ref. 7. The cladding of our guiding system is made of a dielectric stack of alternating layers of refractive indices n_1 and n_2 and widths h_1 and h_2 , with the stack period being $\Lambda = (h_1 + h_2)$. When a stack extends infinitely in all three spatial directions, the easiest way to write its Bloch modes is to choose one axis (e.g., y) oriented normal to the layer boundaries and the others (x and z) in the plane of the layers. These other axes can be chosen in such a way that the field has no variation with one of them, e.g., x , and is harmonic in the other one, which allows separation of the fields into transverse-electric (TE: $H_x = E_y = E_z = 0$) and transverse-magnetic (TM: $E_x = H_y = H_z$

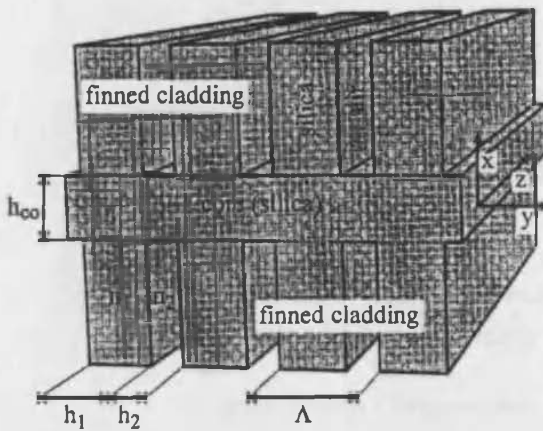


Fig. 1. Finned structure. The thickness of the central waveguiding layer (the core) is h_{co} . The fins have width h_1 and extend to $x = \pm\infty$, and the pitch in the multilayer cladding regions is Λ . The y axis points normal to the fins, the x axis points perpendicular to the core layer, and propagation along the z axis is considered. To mimic the photonic crystal fiber, $n_{co} = n_1$ throughout this paper.

$= 0$) states with respect to the planes of the stack. (NB: The quasi-TE and quasi-TM polarization states in the guiding core are defined differently; see Section 5.) In each case all the field components can be written in terms of the surviving x component through the expressions

$$\text{TE: } \mathbf{E} = (1, 0, 0)f_e, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{ik_0 z_0} (0, -i\beta_0, -\partial_y)f_e,$$

$$\text{TM: } \mathbf{E} = \frac{-z_0}{ik_0 n^2(y)} (0, -i\beta_0, -\partial_y)f_m,$$

$$\mathbf{H} = (1, 0, 0)f_m, \quad (1)$$

where k_0 is the vacuum wave vector, $z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ is the vacuum impedance, and $n(y)$ is the periodic refractive index of the stack. In each case the function f may be expressed as

$$f_t(\beta_0, k_y; x, y, z) = \exp(-i\beta_0 z) \exp(-ik_y y) B_t[\beta_0^2, \text{sign}(k_y); y], \quad (2)$$

where β_0 is the propagation constant along the z axis, k_y is the reduced Bloch wave vector (i.e., the one in the first Brillouin zone), and $B_t[\beta_0^2, \text{sign}(k_y); y]$ is a periodic function of y with period Λ . The TE and TM states are identified by $t = e, m$, respectively. The β_0 and k_y parameters are related by the equation

$$A^{(t)}(\beta_0^2) = \cos(k_y \Lambda), \quad (3)$$

where $A^{(t)}(\beta_0^2)$ is the (1, 1) element of the transfer matrix M . (See Appendix A for the elements and properties of M .) Only when $k_y^2 \geq 0$ can we have an intensity pattern that is periodic along the y direction, which implies that $|A^{(t)}(\beta_0^2)| \leq 1$. In a similar way, since the fields thus far are defined in an infinite periodic space, the physical ones must be restricted to the case in which $\beta_0^2 \geq 0$.

B. Graphical Representation of Our Approach

Equation (3) can be graphically represented as a wave-vector diagram (Fig. 2), which is a plot of all real-valued

wave vectors permitted in the infinite periodic medium. The Brillouin zone repeats in the k_y direction at intervals of K , which is the grating vector $2\pi/\Lambda$, where Λ is the pitch. In the $(k_x, k_z = \beta_0)$ plane the loci of the edges of the various stop bands are plotted and appear as circles.

In the finned waveguide, the guided modes that interest us occur between the maximum possible real value of β_0 in the z direction in the periodic regions and the maximum value in the defect layer, $k_0 n_{co}$. This ensures that, while the Bloch waves in the periodic cladding regions are evanescent, the plane waves in the defect layer are propagating; these are the correct conditions for the appearance of guided modes. There is in fact an infinite number of evanescent Bloch waves for a fixed value of β ; furthermore, the finned structure requires that all of these are inhomogeneous in the (x, z) plane, i.e., evanescent in the x direction and propagating in the z direction. This requires a slight modification to the transfer-matrix formalism, as described in Subsection 2.C.

C. Inhomogeneous Bloch Waves

As our system is a planar guiding structure, in which we expect the energy flow to be directed along the z axis, we are interested only in Bloch waves, which neither decay nor grow, in the y direction. For this reason we can restrict ourselves to the situation in which not only the field intensity but also its amplitude is periodic in the y direction. In the case of a mode of the finned waveguide, with core rays zigzagging in the (x, z) plane, this implies that $k_y = 0$, in which case the y component of the group velocity of the Bloch waves, $v_y^{(g)}$, turns out to be 0. Under these conditions, the function in Eq. (2) takes the simpler form

$$f_t(\beta_0; x, y, z) = \exp(-i\beta_0 z) B_t(\beta_0^2; y), \quad (4)$$

where the possible values of β_0 are now the roots of the equation

$$A^{(t)}(\beta_0^2) = 1. \quad (5)$$

Equations (1), (4), and (5) describe Bloch waves propagating along the z axis, being periodic along the y axis and constant along the x axis. It is clear that any rotation in the coordinate system in the plane (x, z) will give us a Bloch wave propagating in a given direction in that plane.

Now, to obtain the field expression in the cladding, we must impose two conditions. First, the field in the core and in both cladding regions must have the same value of propagation constant along the z axis, β , since we are interested in the propagating modes in this direction. Second, since we are looking for guided modes, we require confinement of the fields in a region in and around the core. Both conditions are satisfied when we make a rotation, through a purely imaginary angle, around the y axis in the reference system of the cladding regions. This rotation allows us to obtain fields in the cladding with a previously fixed value of β , the propagation constant of the mode, and a purely imaginary x component of the wave vector, k_x . As the transformation is a rotation, the

modulus of the wave-vector projection in the (x, z) plane must be conserved, satisfying the relation

$$\beta_0^2 = k_x^2 + \beta^2. \quad (6)$$

The electric and magnetic fields for the previously TE and TM Bloch waves can now be expressed as

TE: $\mathbf{E} = (\beta, 0, -k_x)f_e,$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ik_0z_0} (-k_x\partial_y, -i\beta_0^2, -\beta\partial_y)f_e,$$

TM: $\mathbf{E} = \frac{-z_0}{ik_0n^2(y)} (-k_x\partial_y, -i\beta_0^2, -\beta\partial_y)f_m,$

$$\mathbf{H} = (\beta, 0, -k_x)f_m, \quad (7)$$

and the f functions become

$$f_i(k_x, \beta; x, y, z) = \exp[-i(k_x x + \beta z)]B_i(\beta_0^2; y). \quad (8)$$

It is straightforward to verify that these expressions satisfy the field equations for the periodic medium.

From Eq. (6) we can infer that the fields in the cladding will not be described by only one rotated Bloch wave but by a linear superposition of an infinite number of Bloch waves. Each of these waves is associated with one of the infinite number of roots of Eq. (5), even those nonphysical in a purely periodic medium ($\beta_0^2 < 0$). Applying an appropriate rotation to each Bloch wave, we will be able to have a field in the cladding with a defined value of β . Therefore, using the index i to mark the different values of β_0 , we obtain the x component of the wave vector of the i th Bloch wave with polarization t as

$$k_x(t, i) = \pm[\beta_0^2(t, i) - \beta^2]^{1/2}, \quad (9)$$

where the sign of $k_x(t, i)$ must be selected in such a way that the field decays away from the core.

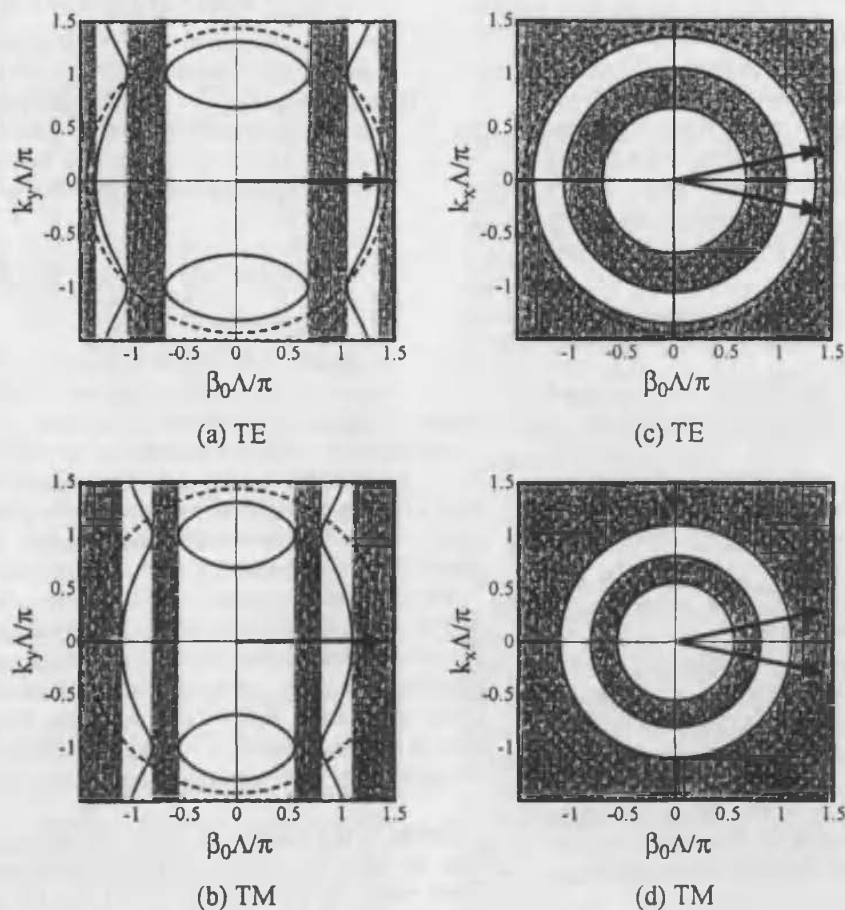


Fig. 2. Wave-vector diagrams for a finned structure with $h_1/\Lambda = 0.8$, $h_{co}/\Lambda = 0.8$, and $\Lambda/\lambda = 0.25$. The diagrams have been calculated for a value of n_1 equal to twice the refractive index of silica. n_2 remains equal to 1. The left-hand plots show all the allowed real wave vectors in the (k_y, β_0) plane for (a) TE Bloch modes, electric field in the x direction; (b) TM Bloch modes, magnetic field in the x direction. The right-hand plots (systems of concentric circles) show the stop-band edges for the periodic cladding regions for (c) TE and (d) TM. In all the figures the outermost dashed circle represents the locus of maximum wave vectors in the pure silica core. The two arrows in (c) and (d) represent the real-valued components of the wave vectors of the two fundamental zigzag rays (i.e., those with a zero k_y component) of the guided mode.

Now we can write the most general form of the modal fields in the cladding as

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \exp(-i\beta z) \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ V_{e,i} \exp[-ik_x(e, i)x] \right. \\ & \times [\beta, 0, -k_x(e, i)] B_e(i; y) \\ & + V_{m,i} \exp[-ik_x(m, i)x] \left[\frac{z_0}{ik_0 n^2(y)} \right] \\ & \left. \times [k_x(m, i)\partial_y, i\beta_0^2(m, i), \beta\partial_y] B_m(i; y) \right\}, \\ \mathbf{H} = & \exp(-i\beta z) \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ V_{m,i} \exp[-ik_x(m, i)x] \right. \\ & \times [\beta, 0, -k_x(m, i)] B_m(i; y) \\ & + V_{e,i} \exp[-ik_x(e, i)x] \\ & \left. \times \left(\frac{-1}{ik_0 z_0} \right) [k_x(e, i)\partial_y, i\beta_0^2(e, i), \beta\partial_y] B_e(i; y) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

where $B_t(i; y) = B_t[\beta_0^2(t, i); y]$ and $V_{t,i}$ are constants to be determined.

To facilitate the matching procedure between the fields in the cladding and in the core, we note that $B_t(i; y)$ is a periodic function of y with period Λ and expand the fields in the cladding in a Fourier series along the y direction. These expansions will break the fields down into a sum of terms whose y dependence is ruled by linear phase factors of the form $\exp(-inKy)$. The y component of the wave vector of the n th elementary plane wave of all the Bloch waves can be defined as $k_y(n) = nK$.

3. GUIDED MODES

To obtain the guided modes of the system, we now need only to describe the fields in the core and match them to the fields in the cladding, applying the proper boundary conditions. Since the core is a homogeneous medium, its field can be described easily as a linear superposition of plane waves. The wave vectors of each of these plane waves, $\bar{\mathbf{k}} = (\bar{k}_x, \bar{k}_y, \bar{k}_z)$, would, in principle, be restricted only by the relation $|\bar{\mathbf{k}}|^2 = k_0^2 n_{co}^2$, where n_{co} is the refractive index of the core layer. In the following sections we set $n_{co} = n_1$, the refractive index of the silica fins. But matching along the y direction with the elementary plane waves of the Bloch waves of the cladding will now restrict the y component of the wave vectors to be equal to some of the $k_y(n)$, and, of course, all components in the mode must share the same propagation constant along z , β . These two conditions fix completely the allowed wave vectors in the core through the equation

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}} &= [\pm\kappa(n), k_y(n), \beta], \\ \kappa(n) &= +[k_0^2 n_{co}^2 - k_y^2(n) - \beta^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

At this point, we can make use of one of the symmetries shown by the system. In addition to the translational discrete symmetry of the cladding (and, therefore, of the

whole system), which allows Bloch waves to exist, the system is symmetric with respect to the central plane of the core, the plane $x = 0$. This discrete symmetry forces the mode components to be symmetric or antisymmetric, allowing us to focus our attention on only one interface. Of course, Maxwell's equations fix the relative symmetries among the field components. When the component of the electric field normal to the interface E_x is symmetric, the transverse components of the magnetic field H_y and H_z will also be symmetric, and the other components E_y , E_z , and H_x will be antisymmetric. The opposite is the case when E_x is antisymmetric.

Now we can write the most general form of the modal fields in the core as

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \exp(-i\beta z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-ik_y(n)y] \left(g_{+p,n}(x) \right. \\ & \times \left\{ U_{e,n}[0, \beta, -k_y(n)] + U_{m,n} \left[\frac{z_0 \kappa(n)}{k_0 n_{co}^2} \right] \right. \\ & \times [0, k_y(n), \beta] \left. \right\} + g_{-p,n}(x) U_{m,n} \left(\frac{-z_0}{k_0 n_{co}^2} \right) \\ & \left. \times [\beta^2 + k_y^2(n), 0, 0] \right), \\ \mathbf{H} = & \exp(-i\beta z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-ik_y(n)y] \left(g_{-p,n}(x) \right. \\ & \times \left\{ U_{m,n}[0, \beta, -k_y(n)] + U_{e,n} \left[\frac{-\kappa(n)}{k_0 z_0} \right] \right. \\ & \times [0, k_y(n), \beta] \left. \right\} + g_{+p,n}(x) U_{e,n} \left(\frac{1}{k_0 z_0} \right) \\ & \left. \times [\beta^2 + k_y^2(n), 0, 0] \right), \end{aligned} \quad (12)$$

where $g_{+1,n}(x) = \cos[\kappa(n)x]$ and $g_{-1,n}(x) = -i \times \sin[\kappa(n)x]$, with the parameter p taking the value $p = +1$ when the transverse components of the electric field are symmetric with respect to the plane $x = 0$ and $p = -1$ when they are antisymmetric. $U_{t,n}$ are constants to be determined.

We are now in a position to obtain the dispersion relation of the guided modes of the system by applying boundary conditions between the different field regions. These conditions require continuity of the transverse components of the total electric and magnetic fields in each region at both interfaces, $x = \pm h_{co}$, or only at $x = +h_{co}$, if the symmetry of the system is taken into account (see Fig. 1).

Owing to the manner in which we have posed the problem, we have four identities relating an infinite series of Bloch waves in the cladding ($i = 1, 2, \dots$) to an infinite series of plane waves in the core ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). To solve the problem numerically, we need to discard the least significant terms of the different series, keeping a finite number of terms. Of course, the truncation accuracy of the results will increase with the number of kept terms, but, in most cases, very few terms are enough to obtain a

good description of the system properties. Calling N_{BW} the number of used Bloch waves of each polarization and N_{PW} the maximum order kept in the Fourier expansions, we can reckon up the unknowns and equations in the problem. On the one hand, we have $2N_{\text{BW}}$ Bloch waves in the cladding ($V_{t,i}$, $t = e, m$, $i = 1, \dots, N_{\text{BW}}$) and $2(2N_{\text{PW}} + 1)$ plane waves in the core ($U_{t,n}$, $t = e, m$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N_{\text{PW}}$). On the other hand, if we break down the four boundary conditions at the plane $x = +h_{\text{co}}$ by means of a Fourier expansion and keep $2N_{\text{PW}} + 1$ terms, we obtain $4(2N_{\text{PW}} + 1)$ equations. With all these elements, we can build up a homogeneous matrix system, choosing $N_{\text{BW}} = 2N_{\text{PW}} + 1$. The elements of this matrix depend not only on the geometrical dimensions and the refractive indices but also on the vacuum wave vector, k_0 , and the propagation constant, β . The modes of the system will be given by the values of k_0 and β , making the matrix singular, and the implicit relation between these parameters, which we obtain by setting the matrix determinant to zero, defines the dispersion relation.

4. EFFECTIVE REFRACTION INDEX OF THE CLADDING AND THE V VALUE

In this section we present the results of numerical calculations that illustrate why the finned waveguide is able, if its geometry is appropriately chosen, to support only one guided mode independently of the wavelength of the light and the absolute physical size of the structure. The V parameter governs the number of modes that a waveguide can support:

$$V = \frac{k_0 h_{\text{co}}}{2} \sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{cl}}^2},$$

where n_{cl} is the cladding refractive index. As V becomes larger, the optical volume (or phase space) of the waveguide increases, and the number of modes rises. V itself depends on the reciprocal wavelength and thus normally increases strongly with the optical frequency. In the finned structure, however, the periodic cladding regions act to counterbalance this increase, allowing the V parameter to tend asymptotically to a constant in the short-wavelength limit.

As previously stated, the value of the propagation constant β is bounded by the core refractive index and the (effective) refractive index of the cladding:

$$k_0 n_{\text{cl}} < \beta \leq k_0 n_{\text{co}}. \quad (13)$$

A value greater than $k_0 n_{\text{co}}$ would represent a phase velocity smaller than the smallest possible phase velocity within the system. A value smaller than $k_0 n_{\text{cl}}$, even if it were possible, would imply that the mode spreads out into the whole of space, i.e., it will not be confined. Of course, in our system, the effective refractive index of the cladding is given by the highest value of β_0 that allows a freely traveling Bloch wave to exist in the periodic structure in any direction in the (x, z) plane.

As has been shown above, all possible values of β_0 are given by Eq. (5). These values correspond to roots of the

elements B_{21} or C_{21} of the partial transfer matrix M_{21} , which relates the field amplitudes in layer 2 to those in layer 1 (see Appendix A). The roots of B_{21} and C_{21} correspond to Bloch waves for which f is, respectively, anti-symmetric and symmetric with y about $y = 0$. These symmetry properties are due, of course, to other symmetries of the finned structure that are not described above. For example, the structure is symmetric with respect to the middle plane of every layer, which implies that field components will have definite symmetry—even or odd—with respect to these planes. It can be verified that the greater value of β_0 corresponds to a TE Bloch wave of the stack (function f symmetric), and that, for large values of k_0 , β_0 has a lower bound of $[k_0^2 n_1^2 - (\pi/h_1)^2]^{1/2}$. It is then straightforward to prove, by expansion of the equation $C_{21} = 0$ in a power series, that this lower bound is indeed the limit of the β_0 maximum when $k_0 \rightarrow \infty$.

This discussion shows that the effective refractive index of the cladding goes as

$$n_{\text{cl}}^2 \rightarrow n_1^2 - \left(\frac{\pi}{h_1 k_0} \right)^2 \quad (14)$$

when $k_0 \rightarrow \infty$. With this result we can see that the V parameter, $V = k_0(h_{\text{co}}/2)[n_{\text{co}}^2 - n_{\text{cl}}^2(k_0)]^{1/2}$, rises asymptotically to a constant value

$$V_{\infty} = \frac{\pi h_{\text{co}}}{2 h_1}. \quad (15)$$

This contrasts with a step-index waveguide, where $V \rightarrow \infty$ as $k_0 \rightarrow \infty$. The optical volume of the waveguide thus tends to a constant in the short-wavelength limit, the value of this constant depending on the ratio of defect layer thickness h_{co} to silica fin thickness h_1 , and not on the refractive indices or the pitch Λ . Otherwise expressed, the number of modes that the guide will support in the short-wavelength limit is controlled solely by h_{co}/h_1 . Of course, the manner in which this limit is approached will depend on the pitch and the refractive indices of the materials. Plots illustrating this behavior are presented in Section 5.

5. RESULTS AND DISCUSSION

Throughout this section the parameters have been chosen to match approximately those of our photonic crystal fiber. The refractive index of silica is taken to be 1.46. Note that throughout this section (and indeed throughout the paper) quasi-TE and quasi-TM polarization states refer to modes of the guiding layer (not to the Bloch modes of the multilayer stacks).

Two illustrative power-density plots for quasi-TM guided modes are given in Fig. 3. The silica filling fraction is $h_1/\Lambda = 0.8$, the relative core width is $h_{\text{co}}/\Lambda = 0.3$, and the power densities are plotted for $\Lambda/\lambda = 2$ and $\Lambda/\lambda = 6$. We can see that there is a strong concentration of modal power in the silica fins and that the mode spreads out quite far into the cladding along the fins. At no value of Λ/λ does the structure support any higher-order transverse modes. The modal shape does not depend strongly on optical frequency over this range of Λ/λ , i.e., that modal area does not change significantly. It is

interesting that, in this particular case, the finned structure supports only a quasi-TM mode with respect to the core (i.e., electric field parallel to the x axis). This mode remains as the core thickness is reduced, merely spreading out farther into the cladding.

In Fig. 4 the effective phase indices of the guided modes are plotted against Λ/λ for a structure in which $h_1/\Lambda = 0.8$ and $h_{co}/\Lambda = 0.8$, i.e., the silica fins have the same width as the core. The upper limit of the index is that of pure silica, and the lower limit is highly dispersive, being given by the limiting value of β_0 beyond which there are no propagating Bloch waves in the periodic cladding. It is instructive to notice that the position of the mode indices relative to these limits stays approximately constant for $\Lambda/\lambda > 1.4$. The fact that the cladding index increases strongly with frequency (i.e., the lower limit rises as Λ/λ increases) is the substantive reason for the endlessly single-mode behavior of the structure.

For the configuration analyzed in the previous figure, a power-density plot is given for $\Lambda/\lambda = 2$ and for the quasi-TM polarization state (Fig. 4, inset). The modal power distributions are very similar for the quasi-TE mode and for all other values of Λ/λ . Note that the modes are more tightly confined than in Fig. 3, which is related to the fact that the modal indices lie much farther away from the cladding index. In fact, the decay length of the evanescent fields in the cladding stays more or less constant at values of Λ/λ greater than approximately 1.

Next, in Fig. 5, we compare the behavior shown in Fig.

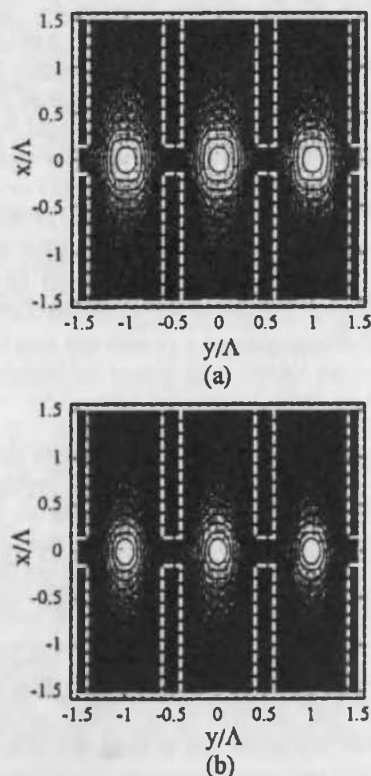


Fig. 3. Power-density plots for quasi-TM guided modes in two cases: (a) $\Lambda/\lambda = 2$ and (b) $\Lambda/\lambda = 6$. The silica filling fraction is $h_1/\Lambda = 0.8$; the relative core width is $h_{co}/\Lambda = 0.3$. The white dashed lines represent the outline of the finned structure. Note that, despite a factor of 3× increase in frequency, the mode patterns are very similar.

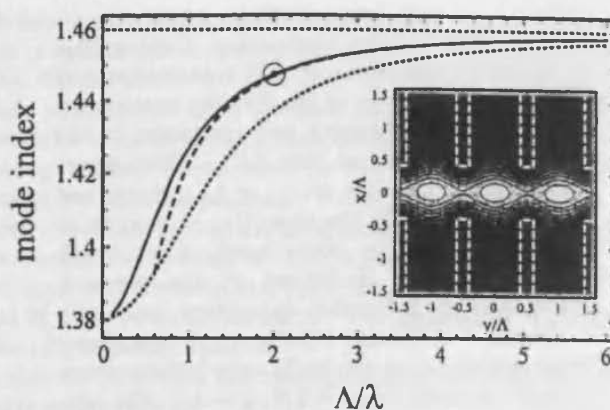


Fig. 4. Plot of effective refractive index versus Λ/λ for a situation in which the finned waveguide supports a pair of fundamental modes with quasi-TE (dashed curve) and quasi-TM (solid curve) polarization states. The silica filling fraction is $h_1/\Lambda = 0.8$, and the relative core width is $h_{co}/\Lambda = 0.8$. The upper and lower (dotted) curves represent the refractive index of the core and of the cladding, respectively; note the strong dispersion of the effective index of the periodic cladding. Inset, power-density plot of the quasi-TM mode for $\Lambda/\lambda = 2$ (encircled point gives mode index). Note that the fields are much more tightly confined to the vicinity of the core than in Fig. 3.

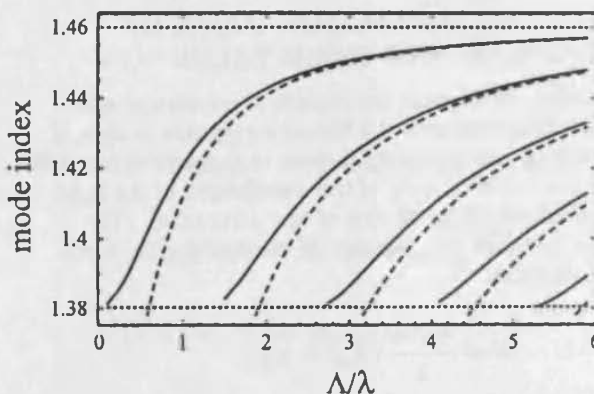


Fig. 5. Plots of effective refractive index versus Λ/λ for a step-profile planar waveguide with the same core index and thickness as the finned structure in Fig. 4, but with cladding indices given by the appropriate low-frequency average values (see text) for quasi-TM and quasi-TE modes. These values represent the mean cladding indices in the long-wavelength limit; unlike for the finned structure, they are independent of frequency. As expected, more and more guided modes are supported as the wavelength falls. The dashed curves represent the quasi-TE modes; the solid curves, the quasi-TM modes. Except for the different cutoff line (lower dotted line), the lowest-order pair of modes has characteristics quite similar to those for the higher-order pair in the equivalent finned guide (Fig. 4).

4 with that of a step-profile planar waveguide whose cladding regions have a refractive index equal to the appropriate low-frequency average in the stack for each polarization, i.e.,

$$n_{cl}^{qTM} = [(n_1^2 h_1 + n_2^2 h_2)/\Lambda]^{1/2},$$

$$n_{cl}^{qTE} = [\Lambda/(h_1 n_1^{-2} + h_2 n_2^{-2})]^{1/2}$$

where qTM and qTE refer, respectively, to the quasi-TM and the quasi-TE modes of the guiding layer (not the fins). As expected, more and more modes appear as the optical frequency increases, with the range of optical frequencies being the same as in Fig. 4. At $\Lambda/\lambda = 6$ there

are five pairs of transverse modes compared with one in the finned structure. As $\Lambda/\lambda \rightarrow \infty$ the number of modes will tend to infinity, whereas the finned structure will continue to support only a pair of modes.

When the defect layer thickness is increased to $h_{co}/\Lambda = 1.8$, a second pair of higher-order transverse modes appears (Fig. 6). These modes appear at the approximate values $\Lambda/\lambda = 0.7$ and $\Lambda/\lambda = 1.0$, below which limit they are cutoff. As $\Lambda/\lambda \rightarrow \infty$, the structure never supports more than these two pairs of transverse modes. This illustrates another feature of the finned structure, namely, that it can be designed to support any desired number of transverse modes in the short-wavelength limit.

The insets in Fig. 6 show two power-density plots at $\Lambda/\lambda = 2$ for one quasi-TM mode from each pair. Note the expected two-lobe transverse profile for the second-order mode.

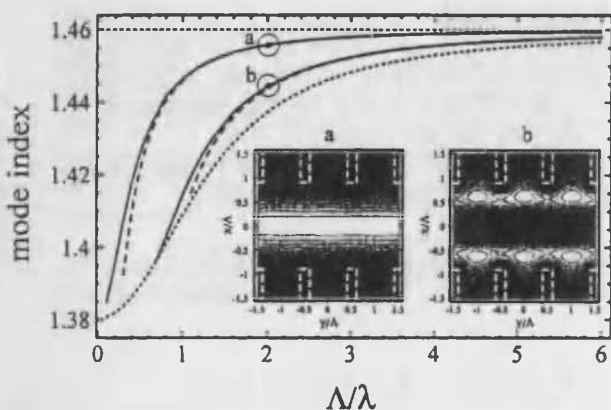


Fig. 6. Plot of effective refractive index versus Λ/λ for a situation in which the finned waveguide supports two pairs of spatial modes with quasi-TE (dashed curve) and quasi-TM (solid curve) polarization states. The silica filling fraction is $h_1/\Lambda = 0.8$, and the relative core width is $h_{co}/\Lambda = 1.8$. Once again, the upper and the lower (dotted) curves represent the refractive index of the core and of the cladding. In the limit of infinite frequency, the structure supports only two pairs of spatial modes. Insets, power-density plots at $\Lambda/\lambda = 2$ of the fundamental and first-order spatial quasi-TM modes (encircled points give mode indices). Once again, the white dashed lines represent the structure.

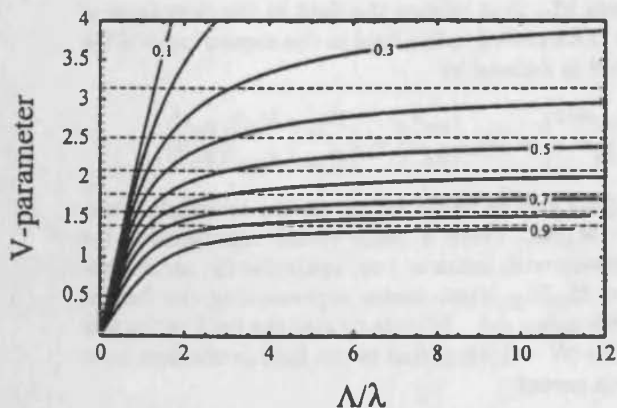


Fig. 7. Plots of the V parameter against Λ/λ for $h_{co}/\Lambda = 0.8$ and discrete values of h_1/Λ between 0.1 and 0.9 (solid curves). The dashed horizontal lines represent the short-wavelength asymptotic limits of the V parameter predicted by Eq. (15) for each value of h_1/Λ .

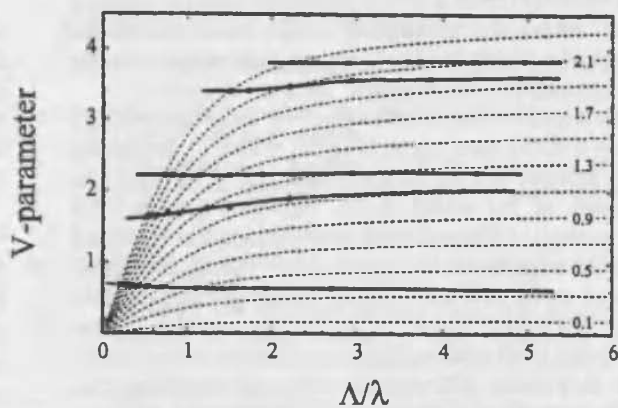


Fig. 8. Plot of the V parameter against Λ/λ for fixed fin width $h_1/\Lambda = 0.8$ and discrete values of core width h_{co}/Λ between 0.1 and 2.3 (dashed curves). The solid curves represent the values of V at which each successive guided mode cuts off.

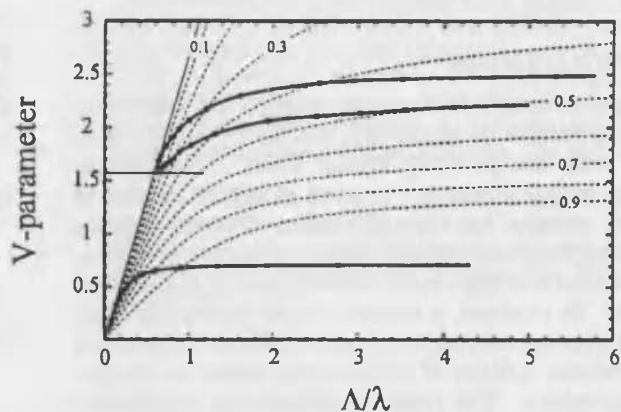


Fig. 9. Plot of the V parameter against Λ/λ for fixed core width $h_{co}/\Lambda = 0.8$ and discrete values of fin width h_1/Λ between 0.1 and 0.9 (dashed curves, as in Fig. 7). The solid curves passing through the filled points represent the parameter values at which each guided mode cuts off. We can see how pairs of quasi-TE and quasi-TM modes appear at the same frequency and at the same V parameter in the limit $h_1/\Lambda \rightarrow 0$, as expected. The intersection of the thin solid lines [defined, respectively, by $V = k_0(h_{co}/2)\sqrt{n_{co}^2 - 1^2}$ (the long, slanting line) and $V = m\pi/2$, $m = 1$ (the short, horizontal line)] marks the cutoff of the $m = 1$ mode pair in a step-profile waveguide with nonperiodic air cladding (i.e., zero silica fin width $h_1 = 0$).

We now explore the behavior of the V value in a number of different situations. First, we illustrate how the V parameter approaches the asymptotic limit predicted by Eq. (14) for filling fractions of silica h_1/Λ between 0.1 and 0.9 (Fig. 7). Note the good agreement between the values theoretically predicted in Eq. (15) and the numerical results. Second, we address the question as to whether the usual result—that higher-order modes cut off at specific values of V —still holds for the finned structure. In Fig. 8, for a fixed fin thickness $h_1/\Lambda = 0.8$, the V value is plotted for several values of h_{co}/Λ between 0.1 and 2.3. The filled points show the values of V at which successive higher modes cut off. It is clear that each higher-order mode cuts off at a specific value of V , almost independently of the optical frequency Λ/λ and the width of the core h_{co}/Λ . What is interesting is the remarkable result that the finned structure has extremely broad ranges of

optical frequency (from a lower threshold value to infinite frequency) where the number of modes does not change. In the case of a single-mode structure, this range extends from zero to infinite frequency.

Finally, we examine the effects of an increasing filling fraction at a fixed core width (Fig. 9). The V parameter is plotted against Λ/λ for core width $h_{co}/\Lambda = 0.8$ and discrete values of fin width h_1/Λ between 0.1 and 0.9 (dashed curves). The solid curves passing through the filled points represent the parameter values at which each guided mode cuts off. As the filling fraction of silica increases, the cutoff moves to higher frequencies. Conversely, in the limit of zero silica fin width $h_1/\Lambda \rightarrow 0$ (i.e., a planar step-index silica guide with air cladding), the m th-order pair of quasi-TE and quasi-TM modes appears at the intersection of the lines $V = k_0(h_{co}/2)\sqrt{n_{co}^2 - 1^2}$ and $V = m\pi/2$. These lines are drawn on the diagram for the $m = 1$ mode pair.

6. CONCLUSIONS

The finned structure is a planar photonic crystal waveguide that, despite its simplicity, has many properties in common with the photonic crystal fiber. In the high-frequency optical limit the number of guided modes is controlled simply by the core-to-fin thickness ratio, h_{co}/h_1 , and does not depend either on the refractive index of the low- and high-index materials or on the pitch of the stack. In contrast, a normal planar waveguide with the same average substrate and cover indices supports an ever-increasing number of higher-order modes as the frequency increases. The range of geometrical parameters at which single-mode operation is theoretically guaranteed across the entire electromagnetic frequency spectrum (ignoring material absorption and dispersion) is wide. This qualitatively confirms our experimental observation that endlessly single-mode behavior is quite easy to obtain in the photonic crystal fiber. The power-density profiles of the modes are to a large degree (and particularly in the short-wavelength limit) independent of the optical frequency, which means that a superposition of modes covering the entire visible spectrum will appear white in color. It is possible to design a single-mode single-polarization guide in the form of a finned structure that supports only the quasi-TM fundamental mode at all frequencies.

In this paper we have restricted our discussion to propagation along the z axis. If propagation at an angle to the z axis is considered, then there will be a finite range of angles [in the (y, z) plane] within which bound modes exist. Clearly, modes propagating in the y direction will always be leaky owing to the presence of a continuous cylindrical dispersion surface, which allows real values of k_z and β to exist at all values of k_y . It is also worth noting that the endlessly single-mode character of the finned waveguide is preserved when the index contrast is reduced to arbitrarily small values. This implies that standard chemical vapor deposition could be used to form a photonic crystal fiber, with low-index cores of glass being incorporated in the center of higher-index tubes in the starting preform.

Finally, we believe that, quite apart from its use as a toy model displaying most of the same characteristics as the much more complex photonic crystal fiber, the finned structure may turn out to have some important uses in waveguide optics. For example, it could have applications as a large-area single-transverse-mode waveguide for high-power lasers.

APPENDIX A: TRANSFER-MATRIX ELEMENTS

The y dependence $g_t(y)$ of the fields in a multilayer stack oriented with its planes normal to the y axis can be written in the general form⁷ [following the notation in Eq. (2)]

$$g_t(y) = f_t(\beta_0, k_y; x, y, z) \exp(i\beta_0 z) \\ = a_j^N \cos[p_j(y - y_j^N)] + b_j^N \frac{\sin[p_j(y - y_j^N)]}{\xi_j p_j \Lambda},$$

where y_j^N is the value of y at the center of the j th layer of the N th period; a_j^N and b_j^N are the arbitrary amplitudes of the even and the odd parts, respectively, of $g_t(y)$; $p_j = (k_0^2 n_j^2 - \beta_0^2)^{1/2}$; and $\xi_j = 1$ for TE polarization ($t = e$) and $1/n_j^2$ for TM polarization ($t = m$).

The matrix M_{21} that relates the field in the second layer to the field in the first layer is defined by

$$\begin{pmatrix} a_2^N \\ b_2^N \end{pmatrix} = M_{21} \begin{pmatrix} a_1^N \\ b_1^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21} & B_{21} \\ C_{21} & D_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^N \\ b_1^N \end{pmatrix},$$

where

$$A_{21} = c_1 c_2 - (\xi_1 p_1 \Lambda / \xi_2 p_2 \Lambda) s_1 s_2, \\ B_{21} = s_1 c_2 / (\xi_1 p_1 \Lambda) + c_1 s_2 / (\xi_2 p_2 \Lambda), \\ C_{21} = -\xi_1 p_1 \Lambda s_1 c_2 - \xi_2 p_2 \Lambda c_1 s_2, \\ D_{21} = c_1 c_2 - (\xi_2 p_2 \Lambda / \xi_1 p_1 \Lambda) s_1 s_2, \\ \det(M_{21}) = 1,$$

where the terms s_j and c_j are shorthand for

$$c_j = \cos(p_j h_j / 2), \quad s_j = \sin(p_j h_j / 2).$$

The matrix M_{12} that relates the field in the first layer of the $(N + 1)$ th period to the field in the second layer of the N th period is defined by

$$\begin{pmatrix} a_1^{N+1} \\ b_1^{N+1} \end{pmatrix} = M_{12} \begin{pmatrix} a_2^N \\ b_2^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{21} & B_{21} \\ C_{21} & A_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^N \\ b_2^N \end{pmatrix}.$$

The analysis can be based either on the translation matrix $M = M_{12} M_{21}$ (with a state vector representing the field in layers with index n_1) or, equivalently, on the matrix $M' = M_{21} M_{12}$ (state vector representing the field in layers with index n_2). M thus relates the field in the first layer of the $(N + 1)$ th period to the field in the first layer of the N th period:

$$\begin{pmatrix} a_1^{N+1} \\ b_1^{N+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1^N \\ b_1^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^N \\ b_1^N \end{pmatrix},$$

where

$$A = D = A_{21}D_{21} + B_{21}C_{21}, \quad B = 2D_{21}B_{21},$$

$$C = 2A_{21}C_{21}.$$

A can be rearranged as

$$A = \cos(p_1 h_1) \cos(p_2 h_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{p_1 \xi_1}{p_2 \xi_2} + \frac{p_2 \xi_2}{p_1 \xi_1} \right) \\ \times \sin(p_1 h_1) \sin(p_2 h_2),$$

but B and C are most conveniently expressed as the product of two factors, as above. The elements of the alternative matrix M' are

$$A' = D' = A, \quad B' = 2A_{21}B_{21}, \quad C' = 2D_{21}C_{21}.$$

ACKNOWLEDGMENTS

E. Silvestre's work was supported by the Dirección General de Investigación Científica y Técnica (grant PB93-0354-C02-01), Ministerio de Educación y Ciencia, Spain. Partial financial support from the Generalitat Valenciana (grant GV-96-D-CN-05-141, Spain) is also acknowledged. The work was also partly supported by the UK Engineering and Physical Sciences Research Council and by the Royal Society.

*On leave from the Department d'Òptica of the Universitat de València, Spain.

REFERENCES AND NOTES

1. J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russell, and D. M. Atkin, "All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding," *Opt. Lett.* **21**, 1547-1549 (1996); errata, *Opt. Lett.* **22**, 484-485 (1997).
2. T. A. Birks, J. C. Knight, and P. St. J. Russell, "Endlessly single-mode photonic crystal fiber," *Opt. Lett.* **22**, 961-963 (1997).
3. J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russell, and J. G. Rarity, "Bragg scattering from an obliquely illuminated photonic crystal fiber," *Appl. Opt.* **37**, 449-452 (1998).
4. Although the photonic crystal fiber can support modes trapped by Bragg scattering, this requires a full two-dimensional photonic bandgap, which is possible only at air-filling fractions $>40\%$. [See T. A. Birks, P. J. Roberts, P. St. J. Russell, D. M. Atkin, and T. J. Shepherd, "Full 2-D photonic band gaps in silica/air structures," *Electron. Lett.* **31**, 1941-1942 (1995).] Thus Bragg modes in photonic crystal fibers with smaller air-filling fractions will always be leaky.
5. D. M. Atkin, P. St. J. Russell, T. A. Birks, and P. J. Roberts, "Photonic band structure of guided Bloch modes in high index films fully etched through with periodic microstructure," *J. Mod. Opt.* **43**, 1035-1053 (1996).
6. P. St. J. Russell, D. M. Atkin, and T. A. Birks, "Bound modes of photonic crystal waveguides," in *Quantum Optics in Wavelength Scale Structures*, J. G. Rarity and C. Weisbuch, eds. (Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1996).
7. P. St. J. Russell, T. A. Birks, and F. D. Lloyd-Lucas, "Photonic Bloch waves and photonic band gaps," in *Confined Electrons and Photons: New Physics and Applications*, E. Burstein and C. Weisbuch, eds. (Plenum, New York, 1995), pp. 585-633.

Publicación III

**Full-vector analysis of a
realistic photonic crystal
fiber**



Optics Letters, 24 (5), (1999)

Full-vector analysis of a realistic photonic crystal fiber

A. Ferrando, E. Silvestre, J. J. Miret, and P. Andrés

Departament d'Òptica, Universitat de València, E-46100 Burjassot (València), Spain

M. V. Andrés

Institut de Ciència dels Materials, Universitat de València, E-46100 Burjassot (València), Spain

Received June 22, 1998

We analyze the guiding problem in a realistic photonic crystal fiber, using a novel full-vector modal technique, a biorthogonal modal method based on the non-self-adjoint character of the electromagnetic propagation in a fiber. Dispersion curves of guided modes for different fiber structural parameters are calculated, along with the two-dimensional transverse intensity distribution of the fundamental mode. Our results match those achieved in recent experiments in which the feasibility of this type of fiber was shown. © 1999 Optical Society of America

OCIS codes: 060.2270, 060.2280, 060.2430.

Periodic dielectric structures (photonic crystals) have engendered growing interest in recent years because they exhibit interesting optical features. The most relevant property of a photonic crystal is the possibility that it can generate photonic bandgaps for certain geometries.¹ This effect has been observed in both two- and three-dimensional structures in the form of the absence of light propagation for a specific set of frequencies (see Ref. 2 and references therein). A related phenomenon that occurs in photonic crystal structures is light localization at defects.³ The breakdown of dielectric periodicity at a defect generates a local variation of the effective refractive index that can cause the localization of light in its vicinity. Although the previous phenomenon of light confinement at defects has already been analyzed for two-dimensional (2D) structures,⁴ a rigorous study of the guiding properties of dielectric crystals that have a 2D periodicity in the x - y plane interrupted by the presence of a defect but that are continuous and infinitely long in the z direction (so-called photonic crystal fibers) has not been performed. Our aim is to describe accurately the propagation of guided modes, including their nontrivial dispersion relations and amplitudes, in this new kind of fiber. To our knowledge, this is the first report of the dispersion characteristics of a photonic crystal fiber.

The physical realization of photonic crystal fiber is a thin silica fiber that has a regular structure of holes that extend along the whole fiber length. If one of these holes is absent, the transverse dielectric periodicity is broken, and a defect appears. The fact that light may be trapped at defects becomes a propagation feature. Consequently, the bound states of the 2D transverse problem (2D trapped states of light) become the guided modes of the fiber propagation problem. The experimental feasibility of these fibers was proved recently.⁵ A robust single-mode structure was observed for an unusually wide range of wavelengths, a remarkable property that is not present in ordinary fibers. A preliminary interpretation of their behavior involving the concept of effective refractive index is presented in

Ref. 6. The confinement mechanisms can be thought of as being produced by the existence of a homogeneous material with a specific average index.⁷

Our interest lies in formulating an appropriate treatment of the realistic problem of a photonic crystal fiber by modeling and solving efficiently the transverse 2D structure of the crystal. We present an approach in which the full-vector character of light propagation in fibers is taken into account. It is an adapted version of our biorthonormal-basis modal method.⁸ In this way, a realistic 2D periodic structure with a central defect is properly implemented, allowing us to analyze different fiber designs. As we shall see, our results agree with those experimentally measured and at the same time predict different interesting behaviors for some designs.

Guided modes in an inhomogeneous fiber verify a set of dimensionally reduced equations involving the transverse coordinates x and y exclusively.⁹ We obtain this set of equations from Maxwell's equations by assuming that the electromagnetic field is monochromatic in time and has a harmonic dependence on z (i.e., the field has a well-defined propagation constant β). In terms of transverse components of the magnetic and electric field $h_t = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$ and $e_t = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$, these equations can be rewritten as⁸

$$Lh_t = \beta^2 h_t, \quad L^\dagger \bar{e}_t = \beta^{*2} \bar{e}_t, \quad (1)$$

where $\bar{e}_t = \begin{pmatrix} e_x^* \\ -e_y^* \end{pmatrix}$, L^\dagger is the adjoint operator of L , $*$ denotes the complex-conjugate operation, and each element $L_{\alpha\gamma}$ of the matrix differential operator L has the form

$$L_{\alpha\gamma} = (\nabla^2 + k^2 n^2) \delta_{\alpha\gamma} - \left(\epsilon_{\alpha\eta} \frac{\nabla_\eta n^2}{n^2} \right) (\epsilon_{\gamma\zeta} \nabla_\zeta), \quad (2)$$

$$\alpha, \gamma, \zeta, \eta = x, y,$$

where $\epsilon_{\alpha\gamma}$ is the completely antisymmetric tensor in two dimensions, n is the refractive index of an isotropic

medium, and k is the free-space wave number. Of course, ∇^2 is the Laplacian operator and ∇_a are the transverse components of the gradient operator. Not that the general problem of light propagation in a fiber, even for nonabsorbing materials (when n^2 is real), involves the non-Hermitian operator L .

The most relevant property of Eqs. (1) is that they constitute a system of eigenvalue equations for the L operator and its adjoint L^\dagger (something that it is far from obvious when one starts from the reduced equations written in terms of h_i and e_i instead of \bar{e}_i ; see, for instance, Ref. 9). Because h_i and \bar{e}_i are the eigenfunctions of the L and L^\dagger operators, respectively, they are closely related. In fact, they verify what is called the biorthogonality relation, $\langle \bar{e}_i | h_j \rangle = \delta_{ij}$. This property is crucial in our approach to the full-vector problem, as explained in detail in Ref. 8.

The main goal of our approach is to transform the problem of solving the system of differential equations (1) (sometimes including highly nontrivial boundary conditions) into an algebraic problem involving the diagonalization of the L matrix. The spectrum of the L matrix will be formed in general by 2D bound states and continuum states. In terms of fiber propagation, the bound states of the L spectrum are guided modes because, despite the finite width of the fiber, the fields exhibit a strong decay in the transverse direction. States from the continuum, however, radiate radially, and thus they are not guided by the fiber.

The choice of an appropriate auxiliary basis is important for efficient implementation of our method. In the particular case of a photonic crystal fiber this electron must be especially accurate. The main reason for this is that the complicated spatial structure of the refractive index in a realistic case can transform the actual computation of the L -matrix elements into an impossible task. Realistic simulations must include almost 100 2D step-index individual structures (the air holes of the photonic crystal fiber). Therefore a brute force computation of the matrix elements becomes useless in practice because of a critical loss of precision.

One carries out the implementation of the dielectric structure by putting the system into a finite 2D box (of dimensions D_x and D_y) and requiring the fields to fulfill periodic boundary conditions in the x and y directions. So we create an artificial lattice by replicating the original almost periodic structure, including the central defect, in both transverse directions. This new superlattice is made of copies of the original cell covering the entire 2D transverse plane. Although the original cell is not periodic, the entire superlattice really is. The periodicity requirement implies that we can expand the 2D electromagnetic fields in a discrete Fourier series in terms of plane waves determined by the exponential functions $f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_t) = \exp(i\mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}_t)$, where $\mathbf{k}_{\mathbf{n}} = 2\pi(n_x/D_x, n_y/D_y)$ is the discretized transverse wave vector.

A crucial property of this plane-wave basis is that, because of the periodicity of the superlattice and despite the fact that it is defined in a finite volume—the unit cell of the superlattice of size D_x times D_y —it is translationally invariant. The presence of this symmetry shown by our auxiliary basis turns out critical

for the feasibility of the method. The advantage of the translation of the symmetry is twofold: On the one hand, it allows us to relate easily any matrix element of the operator that represents a hole at an arbitrary position to that which represents a hole at the origin of coordinates. Because the whole matrix of the photonic crystal fiber structure can be written as a sum over all matrices that represent each one of the substructures (holes), and because these substructures are identical (although they are differently located), it is possible to reduce the problem to the calculation of one single matrix. On the other hand, the calculation of one element of this single matrix can be worked out analytically in this basis (we assume a circular step-index profile for the hole). In addition, and because of the symmetry properties of a realistic hexagonally centered configuration of holes, the sum over the set of points where the holes are located can also be analytically solved. Consequently, the choice of periodic plane waves of the superlattice as a basis for defining the matrix elements of the realistic photonic fiber operator L leads to a crucial simplification. The problem of a critical loss of precision owing to the complex spatial structure of the photonic crystal fiber is, in this way, overcome.

We simulated a realistic photonic crystal fiber characterized by a hexagonal distribution of air holes with a central defect. Hole radius a , horizontal distance between the center of two consecutive holes—or pitch— Λ , and wavelength of light λ are free parameters that we have changed at will. The height of the refractive-index step is also free, although we have kept it constant for comparison purposes. We first simulated a realistic air-filled fiber with parameters $a = 0.3 \mu\text{m}$ and $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$. The dimensions of the superlattice unit cell are $D_x = 8\Lambda$ and $D_y = 5\sqrt{3}\Lambda$, and the number of modes of the auxiliary basis considered is 1224. We focused on this particular design because the intensity distribution for the guided mode in this structure has been measured experimentally for a wavelength of $\lambda = 632.8 \text{ nm}$. Experimental measures also show that the guided mode in this fiber remains single in a remarkably wide wavelength range, extending from 337 to 1550 nm.⁵ Our simulation allows us to evaluate the eigenvalues of the L operator at any wavelength and thus to calculate the modal dispersion curves for the fiber under consideration in an even wider range of wavelengths (see Fig. 1). The single-mode structure is formed by a polarization doublet. Our results completely agree with the previous experimental results, as they account for the existence of a robust single-mode structure at nearly all wavelengths for the above fiber parameters. We include in Fig. 1 the envelope of the radiation modes, which is referred to as the cladding index (i.e., the effective refractive index of the photonic crystal).

Inasmuch as diagonalization procedure of the full-vector operator L generates not only the set of eigenvalues but also their respective eigenvectors, we can also evaluate the transverse intensity distribution of the electromagnetic field for the guided mode. The result for one of the polarizations is shown in Fig. 2 for $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ and reproduces, with excellent accuracy,

(ms #11501a(tmp))

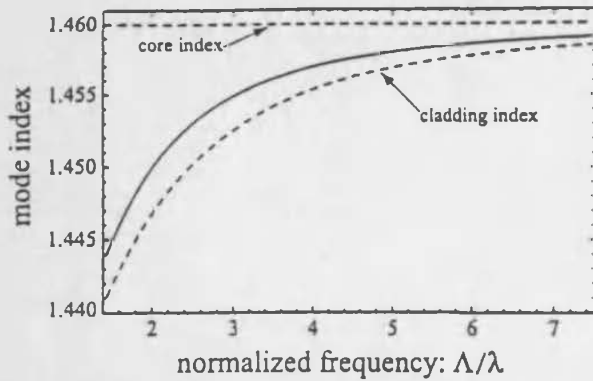


Fig. 1. Modal dispersion curves extending from $\lambda = 300$ nm to $\lambda = 1600$ nm for a single-mode photonic crystal fiber structure with $a = 0.3$ μm and $\Lambda = 2.3$ μm . Here the variations of the mode index for both polarizations coalesce in a single curve.

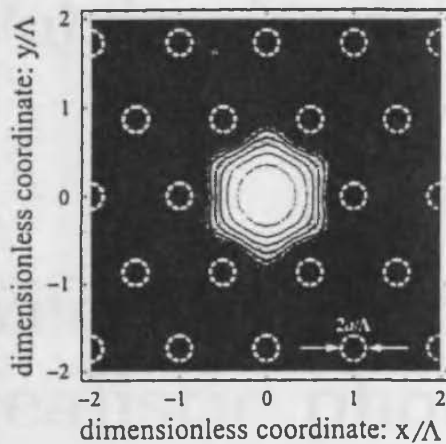


Fig. 2. Transverse intensity distribution for the x -polarized guided mode of the photonic crystal fiber described in Fig. 1 for $\lambda = 632.8$ nm.

that which was experimentally measured.⁵ We also calculated the transverse intensity of the guided mode at widely different wavelengths and for both polarizations. In all cases the intensity profile is similar to that shown in Fig. 2. In this way, we verified the robust character of the single-mode structure to changes in the wavelength of light. This fact agrees with the behavior of the dispersion curves mentioned above.

Besides simulating this remarkable structure, we also simulated a number of different fiber designs by changing pitch Λ and hole radius a . By analyzing the dispersion curves of these different fibers, we found a richer modal structure in some of them. In the example shown in Fig. 3 there are, besides the fundamental doublet, two other polarization doublets. Unlike for conventional fibers, the number of modes does not increase with the light-wave number k . The number of guided modes becomes stabilized above a k threshold, or, equivalently, it remains constant for wavelengths smaller than a threshold wavelength. For particular designs one can get guiding structures in which this constant number is just 1. In such a case

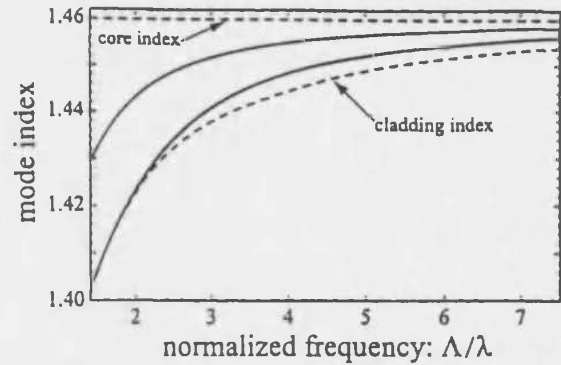


Fig. 3. Same as in Fig. 1 but with $a = 0.6$ μm . Here the two higher-order polarization doublets are slightly shifted.

one obtains an “endlessly” single-mode fiber such as the one reported in Ref. 5. This is an unconventional property of photonic crystal fibers.

In a conventional fiber the cladding refractive index is nearly constant; its V value, the optical volume (or phase space) of the fiber, grows with k . This fact permits us to accommodate an increasing number of guided modes inside the fiber as the wavelength is reduced. In a photonic crystal fiber the periodic structure responsible for light trapping at the central defect creates a dependence on the effective refractive index of the cladding such that a much more weakly k -dependent V value is generated. The optical volume then becomes practically independent of the wavelength for large values of k , and, consequently, so do the number of guided modes.

This research was financially supported by the Generalitat Valenciana (grant GV96-D-CN-05141), Spain. J. J. Miret gratefully acknowledges financial support from this institution. P. Andrés's e-mail address is pedro.andres@uv.es.

References

1. E. Yablonovitch, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 283 (1993).
2. P. St. J. Russell, T. A. Birks, and F. D. Lloyd-Lucas, in *Confined Electrons and Photons*, E. Burstein and C. Weisbuch, eds. (Plenum, New York, 1995), p. 585.
3. S. John, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2486 (1987); E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, R. D. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer, and J. D. Joannopoulos, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3380 (1991).
4. R. D. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer, J. D. Joannopoulos, and O. L. Alerhand, *Phys. Rev. B* **48**, 8434 (1993); J. N. Winn, R. D. Meade, and J. D. Joannopoulos, *J. Mod. Opt.* **41**, 257 (1994).
5. J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russell, and D. M. Atkin, *Opt. Lett.* **21**, 1547 (1996); **22**, 484 (1997).
6. T. A. Birks, J. C. Knight, and P. St. J. Russell, *Opt. Lett.* **22**, 961 (1997).
7. J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russell, and J. P. de Sandro, *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 748 (1998).
8. E. Silvestre, M. V. Andrés, and P. Andrés, *J. Lightwave Technol.* **16**, 923 (1998).
9. A. W. Snyder and J. D. Love, *Optical Waveguide Theory* (Chapman & Hall, London, 1983), pp. 595–606.

(ms #11501a(tmp))

Publicación IV

Vector description of a
realistic photonic crystal
fiber



IV

Optics and Photonics News, vol. 9, n. 12, pp. 33-34 (1998)

PHOTONIC STRUCTURES

Vector Description of a Realistic Photonic Crystal Fiber

A. Ferrando, J.J. Miret, E. Silvestre, and P. Andrés, Dept. d'Òptica, Universitat de València, Spain; M.V. Andrés, Institut de Ciència dels Materials, Universitat de València, Spain.

The most relevant property of periodic dielectric structures (*i.e.*, photonic crystals) is the possibility of generating photonic bandgaps.¹ A related phenomenon occurring in photonic crystal structures is light localization at defects. Although the previous phenomenon of light confinement at defects has already been analyzed in 2-D structures,² the study of the guiding properties of dielectric crystals that have a 2-D periodicity in the $x - y$ plane broken by the presence of a defect, but are continuous and infinitely long in the z direction—the so-called photonic crystal fibers (PCFs)—has not yet been performed. However, the experimental feasibility of these fibers has been recently proven.³ A robust single-mode structure was observed for an unusually wide range of wavelengths, a remarkable property not present in ordinary fibers.

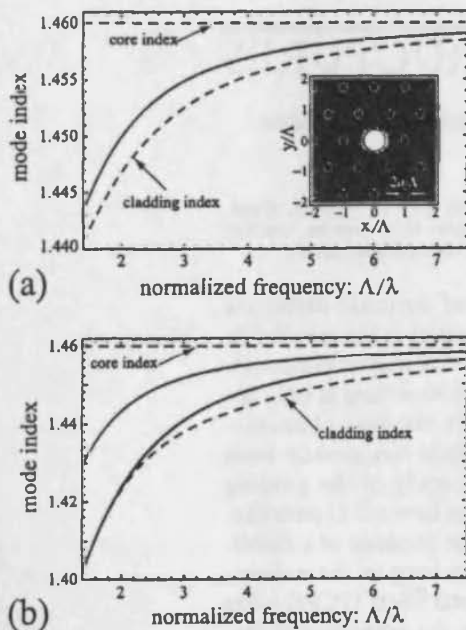
Our aim is to analyze the guiding properties of a realistic PCF in an accurate and rigorous way. We used a novel full-vector modal technique, an adapted version of our biorthogonal-basis modal method⁴ in which the vector character of electromagnetic propagation is thoroughly taken into account. This method is based on the mathematical properties of the nonself-adjoint operator describing the dynamics of electromagnetic propagation in a fiber. We have simulated a realistic PCF, characterized by a hexagonal distribution of air holes with a central defect, by using periodic boundary conditions for the electromagnetic field.⁵ The hole radius, a , the horizontal distance between the center of two consecutive holes, Λ , and the wavelength of light, λ , are free parameters that we change at will. We first simulated a realistic air-filled fiber with parameters $a = 0.3 \mu\text{m}$ and $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$. Our simulation allowed us to calculate the modal dispersion curves for the fiber under consideration in a wavelength range extending from 300–1600 nm (see Fig. 1a, page 34). In that remarkably wide wavelength window, it revealed a single-mode structure,

formed by a polarization doublet. The transverse intensity distribution of these guided modes for a wavelength of $\lambda = 632.8$ nm was also calculated and the result for one of the polarizations is shown in Figure 1a.

Our work proves that electromagnetic propagation in a realistic PCF can support a robust single-mode structure nearly at all wavelengths for certain fiber parameters. It is notable that this approach is based on a full-vector method, so that polarization effects are incorporated in an exact manner. Our results for both dispersion curves and intensity distributions completely agree with those experimentally measured. This method provides a powerful tool for a better understanding of

the PCF's properties because it allows us to fully determine the dispersion curves of their guided modes, as well as their electromagnetic field and intensity distributions.

The flexibility of our approach also permits the simulation of a great variety of fiber designs. By analyzing the dispersion curves of these different fibers, we have already discovered a richer modal structure in some of them. In the example shown in Figure 1b there exists, besides the fundamental doublet, two other polarization doublets. Similarly, we can use this tool to optimize the design of PCFs with unconventional dispersion relations, of potential interest for pulse propagation.



Ferrando Figure 1. (a) Modal dispersion curves from $\lambda = 300$ nm to $\lambda = 1600$ nm for a PCF structure with $a = 0.3$ μm and $\Lambda = 2.3$ μm . The variations of the single-mode index for both polarizations coalesce in a single curve. In this figure we also plot the transverse intensity distribution of the x -polarized guided mode for $\lambda = 632.8$ nm; (b) $a = 0.6$ μm and $\Lambda = 2.3$ μm . Here, the two higher-order polarization doublets are slightly shifted.

Acknowledgment

This work was financially supported by the Generalitat Valenciana (grant GV96-D-CN-05141), Spain.

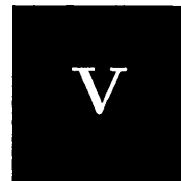
References

1. E. Yablonovitch, "Photonic band-gap structures," *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 283 (1993).
2. J.N. Winn *et al.*, "Two-dimensional photonic band-gap materials," *J. Mod. Opt.* **41**, 257 (1994).
3. J.C. Knight *et al.*, "All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding," *Opt. Lett.* **21**, 1547 (1996).
4. E. Silvestre *et al.*, "Biorthonormal-basis method for the vector description of optical-fiber modes," *J. Lightwave Technol.* **16**, 923 (1998).
5. A. Ferrando *et al.*, "Full-vector analysis of a realistic photonic crystal fiber," *Opt. Lett.*, (to be published).

Publicación V

Designing a photonic crystal fibre with flattened chromatic dispersion

Electronics Letters (enviado)



Designing a photonic crystal fibre with flattened chromatic dispersion

A. Ferrando, E. Silvestre, J.J. Miret, J.A. Monsoriu, M.V. Andrés*, and P.St.J. Russell†

Departament d'Òptica, Universitat de València. E-46100 Burjassot (València), Spain

** Institut de Ciència dels Materials, Universitat de València. E-46100 Burjassot (València), Spain*

† Optoelectronics Group, Department of Physics, University of Bath. Bath BA2 7AY, U.K.

Abstract

Using a full-vector modal method, we have identified a region of nearly zero flattened chromatic dispersion in a specially designed photonic crystal fibre. Our approach permits an accurate control of the dispersion features of these fibres in terms of their structural parameters.

Indexing Terms: Optical Fibres, Photonic Crystals, Chromatic Dispersion

Introduction

Photonic crystal fibres (PCF's) were first proposed in 1995 [1]. They are thin silica glass fibres having a regular array of microscopic holes that extend along the whole fibre length. Any transverse section of the fibre has an identical periodic 2D structure. If one of these holes is absent, the transverse dielectric periodicity is broken and a defect appears. The known fact that light can be trapped at defects [2, 3] turns here into a propagation feature. The experimental feasibility of these fibres has been proven recently [4]. A robust single-mode structure was observed for an unusually wide range of wavelengths, a very remarkable property not present in ordinary fibres [5]. Our interest in this letter is twofold. First, we give an appropriate treatment of the realistic problem of a PCF by modeling and solving efficiently its transverse 2D field structure. We consider a new approach in which the full-vector character of light propagation in fibres is taken into account. It is an adapted version of our biorthonormal-basis modal method [6]. And second, the dispersion properties of guided modes for different fibre structural parameters are calculated for the first time. In particular, several specially designed PCFs with nearly zero dispersion over a broad spectral range are presented.

The Method

The modes of an inhomogeneous fibre verify a set of dimensionally reduced equations involving the transverse coordinates x and y exclusively. In terms of the transverse magnetic field, $h_t = (h_x, h_y)$, and a certain combination of components of the transverse electric field, $\bar{e}_t = (e_y^*, -e_x^*)$, these equations can be written as an eigensystem for the evolution operator L and its adjoint L^\dagger , namely, $Lh_t = \beta^2 h_t$,

and $L^\dagger \bar{e}_t = \beta^{*2} \bar{e}_t$ [6]. It can be proven that the transverse fields h_t and \bar{e}_t verify what it is called the biorthogonal condition, $\langle \bar{e}_t^m | h_t^n \rangle = \delta_{nm}$. Because of this property the matrix elements of the L -operator can always be unambiguously defined in terms of the eigenvectors of an arbitrary $\{L', L^\dagger\}$ system describing the wave propagation in an auxiliary fibre. The main goal of this approach is to transform the problem of solving the system of differential equations for h_t and \bar{e}_t into an algebraic problem involving the diagonalization of the L -matrix. Of course, the choice of an appropriate auxiliary basis is very important for an efficient implementation of the method. In the particular case of a PCF, realistic simulations can contemplate as much as nearly one hundred 2D step index individual structures (the air holes of the photonic crystal fibre). Therefore, a *brute force* computation of matrix elements can become useless in practice due to losses in numerical precision. This loss of precision can be critical in dispersion calculations, where results are extremely sensitive to error accumulation and, consequently, a very high accuracy in the numerical procedure is required. The implementation of the dielectric structure is carried out by putting the system into a finite 2D rhomboid box (of dimensions l_1 and l_2) and requiring the fields to fulfill periodic boundary conditions in the x_1 - and x_2 -directions defined by the rhomboid sides. This is equivalent to say we are choosing periodic plane waves in these two directions, as the auxiliary basis of our Hilbert space. The calculation of the matrix elements corresponding to a single hole can be worked out analytically. Moreover, in this basis the sum over all the holes, and consequently the L -matrix of the whole dielectric structure, can also be analytically calculated due to the symmetry properties of the hexagonally-centered configuration of the PCF. In this way, the problem of critical loss of numerical precision in the calculation of the dispersion characteristics of the PCF can be overcome.

Results and discussion

We have simulated a PCF characterized by a triangular distribution of air-filled holes with a central defect. The hole radius a , the horizontal distance between the center of two consecutive holes, or pitch Λ , and the wavelength of light λ are free parameters we have changed at will. The dimensions of the rhomboid box are fixed by the pitch, $l_1 = l_2 = 7\Lambda$. Our simulation allows us to calculate the

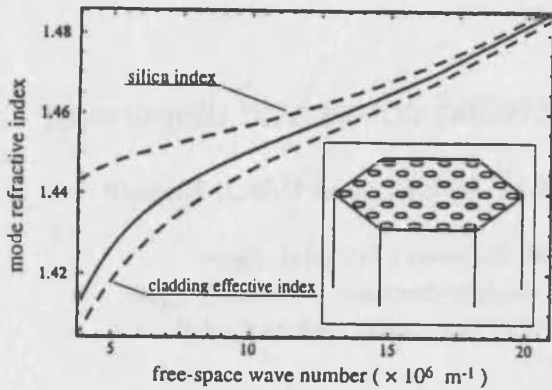


Figure 1: Modal dispersion relation for a PCF of ratio $a/\Lambda = 0.42/2.3$ and $\Lambda = 1.776 \mu\text{m}$. The dispersion curves for both polarizations coalesce in a single plot.

modal dispersion relations for the fibre under consideration over a wide range of wavelengths extending from $\lambda = 300 \text{ nm}$ to $\lambda = 1600 \text{ nm}$. The dispersion of modal refractive index in an experimentally realisable structure is given in Fig. 1. The dispersion of the pure silica has been directly included in the calculation. In general terms, our results agree with previous experimental results as they account for the existence of a robust single-mode structure at all wavelengths. We have also simulated a number of different fibre designs by changing the pitch Λ and the hole radius a . The high accuracy required to calculate the group velocity dispersion of such single-mode fibres is fully provided by our method. In this way, by analyzing the dispersion curves of these differently-designed fibres, we have found that it is possible to control their dispersion characteristics. In fact, a proper selection of the above geometrical parameters can yield frequency-independent, i.e., flattened, group velocity dispersion. In Fig. 2 we present some examples of such flattened dispersion designs and show the effect of scaling simultaneously the pitch and the hole radius while keeping the a/Λ ratio constant. We can appreciate how the dispersion curves shift upwards and broaden slightly as the scaling factor increases (notice that this is equivalent to increasing Λ). If, instead, we change the a/Λ ratio while fixing the pitch, we also produce a vertical shift but we get

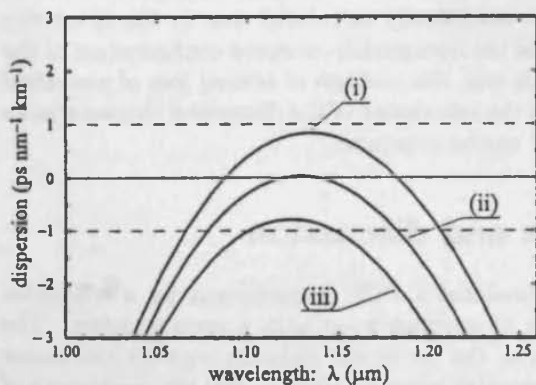


Figure 2: Plot of dispersion vs. λ for a fixed ratio $a/\Lambda = 0.42/2.3$ (equivalent filling fraction of air, $f = 13.97\%$) and (i) $\Lambda = 1.74 \mu\text{m}$, (ii) $1.73 \mu\text{m}$, and (iii) $1.72 \mu\text{m}$.

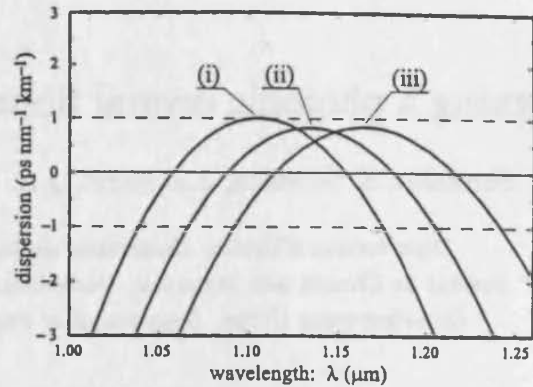


Figure 3: Plot of dispersion vs. λ for some selected combinations of a/Λ (with equivalent filling fraction of air f) and Λ , (i) $a/\Lambda = 0.44/2.3$ ($f = 15.33\%$), $\Lambda = 1.65 \mu\text{m}$, (ii) $a/\Lambda = 0.42/2.3$ ($f = 13.97\%$), $\Lambda = 1.74 \mu\text{m}$, (iii) $a/\Lambda = 0.40/2.3$ ($f = 12.67\%$), $\Lambda = 1.84 \mu\text{m}$.

simultaneously a substantial displacement of the flattened dispersion curves along the wavelength axis. An appropriate fine-tuning of both effects permits excellent control over the wavelength window within which we can obtain nearly zero flattened dispersion structures, as shown in Fig. 3.

Conclusions

In this contribution we have identified PCF designs with an achromatic dispersion behaviour. Simultaneously, we have established an operative procedure to control the dispersion properties of PCFs in terms of their structural parameters. The high accuracy needed to guarantee the fine control of these properties is achieved because the vector character of light propagation is fully and properly taken into account by our numerical procedure. In this way, we have at our disposal a very efficient tool to exploit the wide set of potentially interesting features shown by PCFs.

Acknowledgment

This work was financially supported by the Generalitat Valenciana (grant GV96-D-CN-05141), Spain. J. J. Miret gratefully acknowledges financial support from this institution.

References

- [1] P. St. J. Russell, T. A. Birks and F. D. Lloyd-Lucas, "Photonic Bloch Waves and Photonic Band Gaps," in *Confined Electrons and Photons: New Physics and Applications*, E. Burstein and C. Weisbuch (editors), Plenum Press, New York, 1995.
- [2] S. John, "Strong Localization of Photons in Certain Disordered Dielectric Superlattices," *Phys. Rev. Lett.*, 1987, 58, pp. 2486-2489.
- [3] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, R.D. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer and J. D. Joannopoulos,

- “Donor and Acceptor Modes in Photonic Band Structures,” *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**, pp. 3380-3383.
- [4] J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russell and D. M. Atkin, “All-silica single-mode fiber with photonic crystal cladding,” *Opt. Lett.*, 1996, **21**, 1547-1549; Errata, *Opt. Lett.*, 1997, **22**, pp. 484-485.
- [5] T. A. Birks, J. C. Knight and P. St. J. Russell, “Endlessly single-mode photonic crystal fiber,” *Opt. Lett.*, 1997, **22**, pp. 961-963.
- [6] E. Silvestre, M. V. Andrés and P. Andrés, “Biorthonormal-basis method for the vector description of optical-fibre modes,” *J. Lightwave Technol.*, 1998, **16**, 923-928, 1998.

Publicación VI

Analysis of inhomogeneously filled waveguides using a biorthogonal-basis modal method

IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1998

Publicación VI

**Analysis of inhomogeneously
filled waveguides using a
biorthogonal-basis modal
method**

IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques (enviado)

VI

Analysis of inhomogeneously filled waveguides using a biorthonormal-basis method

E. Silvestre, M.A. Abián*, B. Gimeno*, A. Ferrando, M.V. Andrés*, V. Boria†

Departamento de Óptica, Universidad de Valencia. 46100 Burjassot (Valencia), Spain

* *Departamento de Física Aplicada-ICMUV, Universidad de Valencia. 46100 Burjassot (Valencia), Spain*

† *Departamento de Comunicaciones, Universidad Politécnica de Valencia. 46022 Valencia, Spain*

Abstract

A general theoretical formulation to analyse inhomogeneously filled waveguides with lossy dielectrics is presented. The wave equations for the transverse field components are written in terms of a nonself-adjoint linear operator and its adjoint. The eigenvectors of this pair of linear operators define a biorthonormal basis, allowing for a matrix representation of the wave equations in the basis of an auxiliary waveguide. Thus, the problem of solving a system of differential equations is transformed into a linear matrix eigenvalue problem. This formulation is applied to rectangular waveguides loaded with an arbitrary number of dielectric slabs centered at arbitrary points. The comparison with theoretical results available in the literature gives a good agreement.

1 Introduction

Inhomogeneously filled waveguides have received considerable attention in the last decades because of their applications in a variety of waveguide components. The modes of propagation of such waveguides are not, in general, TM or TE modes, but hybrid modes. The boundary value method has been used to calculate the modal solutions for concentric [1, 2] and eccentric [3] dielectric-loaded circular guides, as well as for rectangular guides filled with dielectric slabs [4, 5]. In that method, the electromagnetic field is expanded in terms of analytical functions in the relevant regions of the waveguide, and a linear eigenvalue problem is obtained after imposing the boundary conditions in the corresponding interfaces. When the guide is filled with two or more dielectrics, the determination of the propagation constants and the mode fields becomes difficult, because of the transcendental equations involved. Alternatively, a variational method is used in [6] to calculate the eigenvalues in rectangular waveguides loaded with lossless dielectric slabs. The finite-element method has been extensively applied to find the eigenvalues and modal fields in dielectric loaded guides [7, 8, 9, 10]. There are, as well, a number of matrix formulation methods to analyze inhomogeneously filled waveguides in which the fields are expanded in a set of basis functions [11, 12, 13], and based on Laplace and Fourier transforms techniques [14].

In this paper we develop a rigorous and computationally efficient method to obtain the modal spectrum in inhomogeneously filled waveguides with lossy dielectric of arbitrary profiles. Starting with the differential equations governing the propagation of the transverse electric and magnetic fields, we identify a pair of linear nonself-adjoint operators, whose eigenvectors satisfy a biorthogonality relationship. The key element of our approach is to transform the system of differential equations into a linear matrix eigenvalue problem by means of the Galerkin method, using the eigenvectors of an auxiliary problem. From a computational point of view this method is very efficient, because the integrals involved in the matrix elements are, in principle, frequency independent, so they have to be evaluated only once to obtain the dispersion curves, thus generating a robust and efficient code. This method has been applied to study open dielectric waveguides, as reported in [15, 16]. Comparisons between our results and the available numerical published data fully validate the theory here presented.

2 Theoretical formulation

Our starting point are Maxwell's equations for uniform cross-section waveguides partially or totally filled with a lossy dielectric media defined by its dielectric permittivity $\epsilon(x, y) = \epsilon_0 \epsilon_r(x, y)$. We assume that the considered media does not have magnetic properties, $\mu = \mu_0$. Thus, the solution of the problem can be obtained as a superposition of fields with explicit harmonic dependence on z (we assume that the time dependence is always implicit and has a harmonic form $e^{j\omega t}$ for all vector fields)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{e}(x, y) \exp(-j\beta z), \\ \mathbf{H}(x, y, z) &= \mathbf{h}(x, y) \exp(-j\beta z), \end{aligned} \quad (1)$$

where β is the propagation constant and \mathbf{e} and \mathbf{h} represent the transverse-dependent (depending on x and y only) three-dimensional vector amplitudes of the electric and magnetic field, respectively. We are interested in rewriting Maxwell's equations in terms of the transverse components of the electric and magnetic fields, $\mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix}$ and $\mathbf{h}_t = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}$. Following reference [17] we can obtain a set

of equations for them,

$$\{\nabla_t^2 + \varepsilon_r(x, y)k_0^2 - \beta^2\} \mathbf{h}_t = (\nabla_t \times \mathbf{h}_t) \times \frac{\nabla_t \varepsilon_r(x, y)}{\varepsilon_r(x, y)}, \quad (2a)$$

$$\{\nabla_t^2 + \varepsilon_r(x, y)k_0^2 - \beta^2\} \mathbf{e}_t = \nabla_t(\mathbf{e}_t \cdot \frac{\nabla_t \varepsilon_r(x, y)}{\varepsilon_r(x, y)}), \quad (2b)$$

where $\varepsilon_r(x, y)$ is the relative dielectric permittivity, k_0 is the free-space wavenumber ($k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$), and the operator ∇_t is the transverse gradient operator. The axial components e_z and h_z are determined by \mathbf{e}_t and \mathbf{h}_t through constraint relations given by Maxwell's equations.

For our purposes, it is more interesting to rewrite Eqs. (2) in a different way. We will express the two previous equations in a two-dimensional matrix form. Both \mathbf{e}_t and \mathbf{h}_t are two-dimensional vector fields that are represented by two components vectors. Thus, the differential operators acting on them can be expressed as 2×2 matrices. Eq. (2b) involves transverse two-dimensional vectors only. However, Eq. (2a) includes the three-dimensional axial vector $(\nabla_t \times \mathbf{h}_t)$ in its right hand side. On the one hand, it is easy to check that the double three-dimensional vector product in Eq. (2a) can be rewritten in terms of a 2×2 matrix acting on \mathbf{h}_t , (using, for example, the completely antisymmetric tensor in two-dimensions $\epsilon_{\alpha\gamma}$). On the other hand, for reasons that will become clear later, it is more convenient to rewrite Eq. (2b) not in terms of \mathbf{e}_t but in terms of the closely related vector field $\bar{\mathbf{e}}_t \equiv \begin{bmatrix} e_y^* \\ -e_x^* \end{bmatrix}$ (* is the conjugation operation). After manipulating Eq. (2b) in a suitable way, one can obtain the following equivalent set of equations in matrix form,

$$\begin{aligned} L \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} &= \beta^2 \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}, \\ L^\dagger \begin{bmatrix} e_y^* \\ -e_x^* \end{bmatrix} &= (\beta^*)^2 \begin{bmatrix} e_y^* \\ -e_x^* \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

where L and L^\dagger are 2×2 matrix differential operators given by

$$L = \begin{bmatrix} \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r(x, y) & 0 \\ 0 & \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r(x, y) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_y \nabla_y & -F_y \nabla_x \\ -F_x \nabla_y & F_x \nabla_x \end{bmatrix}, \quad (4a)$$

$$L^\dagger = \begin{bmatrix} \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r^*(x, y) & 0 \\ 0 & \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r^*(x, y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_y F_y^* & -\nabla_y F_x^* \\ -\nabla_x F_y^* & \nabla_x F_x^* \end{bmatrix}, \quad (4b)$$

where $\mathbf{F}_t \equiv (\nabla_t \varepsilon_r(x, y))/\varepsilon_r(x, y)$, and the derivative appearing in the second matrix of L^\dagger acts both on the components of \mathbf{F}_t^* and on the vector field $\bar{\mathbf{e}}_t$. The operator L^\dagger is called the *formal adjoint* to the linear operator L , and is defined as follows (see Ref. [18]),

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, L\mathbf{u} \rangle &= \langle L^\dagger \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \Leftrightarrow \\ \int_S \mathbf{v}^*(\mathbf{r}) \cdot L\mathbf{u}(\mathbf{r}) dS &= \int_S (L^\dagger \mathbf{v}(\mathbf{r}))^* \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) dS, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ and $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ are two-dimensional vector complex functions defined on a two-dimensional closed and bounded region S , with boundary C . They are members of a Hilbert space \mathcal{H} with inner product

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle &= \int_S \mathbf{v}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) dS \\ &= \int_S (v_x^*(\mathbf{r})u_x(\mathbf{r}) + v_y^*(\mathbf{r})u_y(\mathbf{r})) dS \end{aligned} \quad (6)$$

for all $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$. When $L^\dagger = L$ we say that L is *formally self-adjoint*.

The set of equations (3) is a system of eigenvalue equations for the nonself-adjoint operator L and its adjoint L^\dagger ,

$$L\mathbf{u}_n = \beta_n^2 \mathbf{u}_n, \quad L^\dagger \mathbf{v}_m = (\beta_m^*)^2 \mathbf{v}_m, \quad (7)$$

where $\mathbf{u} \equiv \mathbf{h}_t$ and $\mathbf{v} \equiv \bar{\mathbf{e}}_t$.

The eigenvectors of a nonself-adjoint operator do not satisfy a orthogonality relation. The same applies to the eigenvectors of its adjoint. In our case, this means that $\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n'} \rangle \neq \delta_{nn'}$ and $\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m'} \rangle \neq \delta_{mm'}$, δ_{mn} being the Kronecker Delta symbol. Apparently, the impossibility of using the standard orthogonality relations associated to a self-adjoint operator would prevent us from expanding arbitrary functions in terms of its eigenvectors. However, since we are considering a $\{L, L^\dagger\}$ system, this is not so because we can take advantage of what it is called the *biorthogonality relation* [19],

$$\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_m \rangle = \delta_{nm}. \quad (8)$$

The biorthogonality relations were successfully used by Paiva and Barbosa to analyze inhomogeneous bisotropic planar guides [20]. Despite its apparently formal character, this relation has a very clear physical meaning. If we write the inner product in its integral form and restore the original three-dimensional notation, Eq. (8) reads,

$$\int_S (\mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_m) \cdot \bar{\mathbf{z}} dS = \delta_{nm}, \quad (9)$$

where $\bar{\mathbf{z}}$ represents the unitary vector along the z direction. In the waveguide literature, the relation (9) is known as the orthogonality condition for the waveguide modes [17].

The previous relation allows us to expand any vector function \mathbf{f} of \mathcal{H} in terms of either the L eigenvectors, $\{\mathbf{u}_n\}$, or those of its adjoint L^\dagger , $\{\mathbf{v}_m\}$,

$$\mathbf{f} = \sum_n c_n \mathbf{u}_n = \sum_m d_m \mathbf{v}_m, \quad (10)$$

where the complex expansion coefficients are given by the inner products $c_n = \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{f} \rangle$ and $d_m = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_m \rangle$. Notice the c 's and d 's coefficients are not trivially related, unless when L is self-adjoint, in that case $c_n = d_n^*$ and $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n$.

The previous results define the framework where our method is developed. Our aim is to find the propagation modes of a realistic waveguide characterized by a complex relative dielectric permittivity $\varepsilon_r(x, y)$. As we have proven, the electromagnetic propagation in this waveguide is described by the system of eigenvalue equations (7). Let L

be the matrix differential operator (4a) representing the waveguide we are interested in, u_n and v_m the eigenmodes of L and L^\dagger respectively, and β_n the propagation constant of the n th mode. Then, the system of equations describing this waveguide and that we want to solve is,

$$L u_n = \beta_n^2 u_n, \quad L^\dagger v_m = (\beta_m^*)^2 v_m. \quad (11)$$

Now we define an *auxiliary problem* as a waveguide characterized by a relative dielectric permittivity $\bar{\epsilon}_r(x, y)$ and with the same boundary conditions as the waveguide described by Eq. (11). The eigenmodes of the auxiliary problem, $\{\tilde{u}_p, \tilde{v}_q\}$, and thus their respective propagation constants, are supposed to be perfectly known. The equations describing the auxiliary problem constitute another $\{\tilde{L}, \tilde{L}^\dagger\}$ system,

$$\tilde{L} \tilde{u}_p = \tilde{\beta}_p^2 \tilde{u}_p, \quad \tilde{L}^\dagger \tilde{v}_q = (\tilde{\beta}_q^*)^2 \tilde{v}_q, \quad (12)$$

and, consequently, all the properties of a biorthogonal basis apply to the $\{\tilde{u}_p, \tilde{v}_q\}$ set. In particular, the $\{\tilde{u}_p, \tilde{v}_q\}$ modes can be used as a basis to represent any arbitrary vector, thus following (10)

$$u_n = \sum_p c_{(n)p} \tilde{u}_p, \quad v_m = \sum_q d_{(m)q} \tilde{v}_q. \quad (13)$$

Certainly, we are concerned in the matrix representation of the linear operator of the real problem L . Then, the matrix elements of the L operator in the $\{\tilde{u}_p, \tilde{v}_q\}$ basis will be easily obtained by applying the standard Galerkin moments-method [18]. By inserting the first equation of (13) into the first equation of (11), and applying the linear properties of L , we find

$$\sum_p c_{(n)p} L \tilde{u}_p = \beta_n^2 \sum_p c_{(n)p} \tilde{u}_p. \quad (14)$$

The next step in the application of the Galerkin procedure is to choose a set of weighting functions $\{\tilde{v}_q\}$, and to take the inner product for each \tilde{v}_q , yielding

$$\sum_p c_{(n)p} \langle \tilde{v}_q, L \tilde{u}_p \rangle = \beta_n^2 \sum_p c_{(n)p} \langle \tilde{v}_q, \tilde{u}_p \rangle = \beta_n^2 c_{(n)q}. \quad (15)$$

The above system can be written in a matrix form as

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1q} & \cdots \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2q} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ L_{p1} & L_{p2} & \cdots & L_{pq} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(n)1} \\ c_{(n)2} \\ \vdots \\ c_{(n)p} \\ \vdots \end{bmatrix} = \beta_n^2 \begin{bmatrix} c_{(n)1} \\ c_{(n)2} \\ \vdots \\ c_{(n)p} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (16)$$

where the elements of the matrix $[L]$ are obtained as

$$L_{pq} = \langle \tilde{v}_q, L \tilde{u}_p \rangle. \quad (17)$$

For practical purposes, it is convenient to introduce the difference operator $\Delta \equiv L - \tilde{L}$,

$$\Delta = k_0^2 (\epsilon_r(x, y) - \bar{\epsilon}_r(x, y)) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_y - \bar{F}_y) \nabla_y & -(F_y - \bar{F}_y) \nabla_x \\ -(F_x - \bar{F}_x) \nabla_y & (F_x - \bar{F}_x) \nabla_x \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Thus, the elements of the operator $L = \tilde{L} + \Delta$ in the auxiliary basis $\{\tilde{u}_p, \tilde{v}_q\}$ are trivially obtained by means of (17),

$$L_{pq} = \tilde{\beta}_p^2 \delta_{pq} + \langle \tilde{v}_p, \Delta \tilde{u}_q \rangle, \quad (19)$$

where the first summand is diagonal because the operator \tilde{L} is expressed in its own biorthogonal basis. At this point, it is important to remark that we have transformed the differential operator system (11) into a linear matrix eigenvalue problem defined in (16). An analogous equation for its adjoint matrix, $[L^\dagger][d_{(m)}] = (\beta_m^*)^2 [d_{(m)}]$ can be also derived. Thus, the information contained in the above matrix equations is the same as in the differential equations for the L and L^\dagger operators (11). Diagonalization of the $[L]$ matrix yields the squared of the n th-mode propagation constant—the n th eigenvalue of $[L]$ —and also its transverse magnetic amplitude, h_t , through the knowledge of the n th eigenvector $[c_{(n)}]$ (recall its components constitute the expansion coefficients of the unknown mode $u_n(r)$ in terms of the auxiliary modes $\{\tilde{u}_p(r)\}$). It is important to stress that the diagonalization of the $[L]$ not only provides us with the propagation constants and transverse magnetic amplitudes of the modes, but also with their whole three-dimensional magnetic and electric field structure. Both the axial component of the magnetic field and the transverse and axial components of the electric field are related to h_t through constraints given by Maxwell's equations [17]. This fact is very important from a computational point of view, because only the diagonalization process for the $[L]$ matrix is requested in the numerical implementation of this method.

However, the matrix $[L]$ is infinitely-dimensional. In order to develop a realistic method, we have to work with a finite set of auxiliary fields. Unfortunately, there are no general conditions that guarantee the convergence of the expansions. This convergence will depend both on the nature of the L operator and on the auxiliary problem chosen to define the biorthogonal basis. In general, we observe that the real modes are better described by increasing the number of auxiliary modes. In the same way, auxiliary basis encompassing the most relevant features of the real problem produce faster convergences. In any case, numerical convergence tests must be done by sweeping the number of auxiliary modes over meaningful ranges and studying the stability of the solutions.

The method we have just presented involves no restriction on the vector character of the electromagnetic fields. The key eigenvalue equations (7) are completely general and involve the nonself-adjoint operator L . It is remarkable that the nonself-adjoint character of L is present even when the medium is lossless ($\epsilon_r(x, y)$ is a real function) showing the inherent nonself-adjoint character of the electromagnetic propagation. It is also interesting to notice that it is precisely the nonself-adjoint piece of L , the second matrix in Eq. (4a), the one responsible of polarization mixing. The diagonal, and thus nonpolarization mixing, piece is self-adjoint in lossless media. This fact makes evident the close relation between the nonself-adjoint character of L and the full-vector description given by its eigenvectors. Indeed, a cylindrical waveguide uniformly loaded with a

homogeneous dielectric is described by the first matrix of (4a) (the second matrix is zero), and only TM and TE modes appear. However, when it is filled with an inhomogeneous dielectric, due to the second matrix of (4a), most of the modes are hybrid. To end, we emphasize the unambiguous and rigorous character of the matrix construction and of the mode expansions here presented, based on the biorthogonality property (8) satisfied by the auxiliary basis.

3 Numerical results

The present method can be applied to a large variety of waveguides. In fact, it has been demonstrated its suitability to deal with open guides as optical fibers [15, 16]. Now, we will focus on dielectric loaded rectangular waveguides. We have developed a FORTRAN code to analyze a rectangular waveguide partially loaded with arbitrarily placed lossy dielectrics of rectangular cross-section, as it is shown in Fig. 1. Thus, the relative dielectric permittivity $\epsilon_r(x, y)$ of this guide is expressed as follows

$$\epsilon_r(x, y) = \epsilon_{ra} + \sum_{i=1}^N (\epsilon_{ri} - \epsilon_{ra}) \times \left(H\left(x - x_i + \frac{c_i}{2}\right) - H\left(x - x_i - \frac{c_i}{2}\right) \right) \times \left(H\left(y - y_i + \frac{d_i}{2}\right) - H\left(y - y_i - \frac{d_i}{2}\right) \right), \quad (20)$$

where $H(x)$ is the Heaviside function, N is the number of dielectric slabs, and the i th dielectric is centered at the point (x_i, y_i) , its size being c_i by d_i . In our case, the auxiliary problem is chosen to be a homogeneously filled rectangular waveguide, characterized by $\bar{\epsilon}_r(x, y) = \epsilon_{ra}$, whose eigenvalues and eigenvectors are well known, see for instance [21]. Following the theoretical formulation, the matrix elements of $[L]$, derived from (19), are given by

$$L_{pq} = \beta^2 \delta_{pq} + k_0^2 \int_S (\epsilon_r(x, y) - \bar{\epsilon}_r(x, y)) (\bar{e}_p \times \bar{h}_q) \cdot \bar{z} dS$$

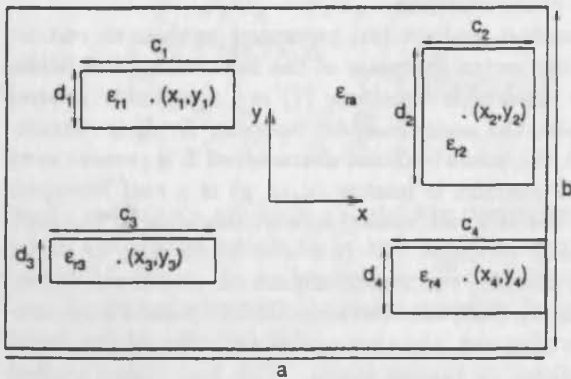


Figure 1: Cross-section of an inhomogeneously filled rectangular waveguide with arbitrarily placed lossy dielectric slabs.

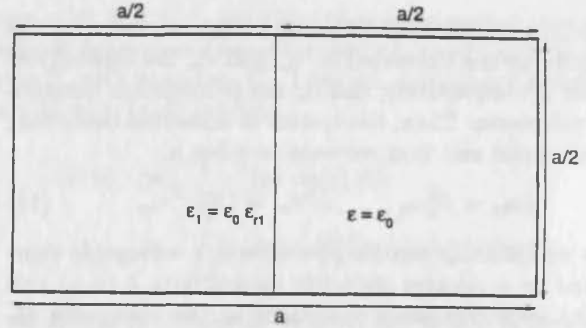


Figure 2: Rectangular waveguide loaded with a dielectric slab along the side wall.

$$+ \int_S \left[\bar{e}_p \times \left(\left(\frac{\nabla_t \epsilon_r(x, y)}{\epsilon_r(x, y)} - \frac{\nabla_t \bar{\epsilon}_r(x, y)}{\bar{\epsilon}_r(x, y)} \right) \times (\nabla_t \times \bar{h}_q) \right) \right] \cdot \bar{z} dS. \quad (21)$$

After some algebraic manipulations, these integrals have been analytically calculated. As a consequence, only a numerical diagonalization process has to be performed for each frequency point, thus resulting in a fast code implementation.

We have compared the results of our approach with existing ones for five different dielectric-slab-loaded rectangular guides. The first case is a rectangular waveguide of width a and height $a/2$, with a dielectric slab along the side wall, as shown in Fig. 2. Half of the waveguide is filled with dielectric material whose relative permittivity is $\epsilon_{r1} = 2.25$, and the other half is vacuum. This case is particularly interesting because the analytical solution does exist [17]. To solve this simple case, we have properly located one dielectric rectangle, and we have taken the vector mode functions of an empty rectangular guide as the auxiliary basis. In Table 1 we compare our results with the exact solution, and also with results calculated in [9] using the finite-element method. For the comparison, we present the normalized propagation constant of the first modes, β/k_0 , calculated for the working frequency given by $k_0 a = 3$. Only 200 auxiliary modes have been used, taking 31 seconds on a CrayOrigin2000 machine. The results agree with each other accurately.

The second case is again a rectangular waveguide of width a and height $a/2$ with a centered dielectric slab, as shown in Fig. 3. In Table 2 we present the normalized propagation constant, βa , for the LSE and LSM modes calculated for the operating frequency defined by $k_0 a = 4\pi$. We compare our results with those provided by a variational approach in [6]. The dielectric region size is $a/2$ by $a/2$,

Table 1: Normalized propagation constant β/k_0 of a rectangular waveguide loaded with a dielectric slab along the side wall.

Mode order	Exact solution	Ref. [9]	This method	Rel. diff (%)
1	1.27576	1.27327	1.27574	0.002
2	0.97154	0.97101	0.97159	0.005
3	0.72865	0.72539	0.72863	0.003
4	0.59390	0.59280	0.59388	0.003

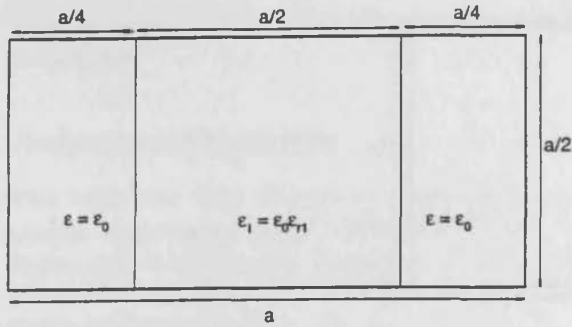


Figure 3: Rectangular waveguide loaded with a centered dielectric slab.

being its relative permittivity $\epsilon_{r1} = 2$. As in the previous case, the auxiliary problem is an empty rectangular guide. The results of Table 2 have been obtained using 400 basis functions, the computation time being 103 seconds on a CrayOrigin2000 machine. The agreement between both methods is good.

The third example is a rectangular waveguide loaded with three dielectric slabs (see Fig. 4a). This structure is used to model a microwave cure applicator in [5]. In this problem, we locate a dielectric slab of relative permittivity $\epsilon_{r1} = 10.0$, at the center of a standard WR-340 guide which was homogeneously filled with a dielectric of relative permittivity $\epsilon_{ra} = 1.5$, whose modes are the auxiliary basis. In Table 3 we give the cutoff frequencies for four different widths of the central dielectric region, and we compare our results with those obtained by solving a transcendental equation [5]. The number of basis functions employed in this case is 300. The distribution of the electromagnetic field is important in the applications of this kind of structures in order to focus the energy in the central region of the guide. Our method provides the propagation constants and the fields of the modes. As an example, we show the Poynting vector profiles for the first propagative modes in Figs. 4b-d. In these plots the operating frequency is 5 GHz, and the relative width of the central dielectric region is $c/a = 0.6$. One of the most attractive features of

Table 2: Normalized propagation constant βa of a rectangular waveguide loaded with a centered dielectric slab.

Mode	Ref. [6]	This method	Rel. difference (%)
LSE ₁₀	17.127	17.127	< 0.006
LSE ₂₀	15.147	15.147	< 0.007
LSE ₃₀	11.821	11.820	0.008
LSE ₄₀	7.602	7.602	< 0.013
LSE ₁₁	15.933	15.932	0.006
LSE ₂₁	13.783	13.782	0.007
LSE ₃₁	10.013	10.012	0.01
LSE ₄₁	4.280	4.278	0.05
LSE ₁₂	11.637	11.637	< 0.009
LSE ₂₂	8.457	8.456	0.01
LSM ₁₁	15.739	15.723	0.1
LSM ₂₁	13.203	13.161	0.3
LSM ₃₁	9.450	9.491	0.4
LSM ₄₁	4.989	4.858	2.6
LSM ₁₂	11.369	11.348	0.2
LSM ₂₂	7.476	7.401	1.0

Table 3: Cutoff frequencies (GHz) of a rectangular waveguide loaded with three dielectric slabs for different values of the relative width of the central dielectric region, c/a .

$c/a = 0.2$			
Mode	Ref. [5]	This method	Rel. difference (%)
TE ₀₁	0.778	0.775	0.4
TE ₀₂	2.362	2.360	0.08
TE ₀₃	3.372	3.371	0.03
$c/a = 0.4$			
Mode	Ref. [5]	This method	Rel. difference (%)
TE ₀₁	0.625	0.624	0.2
TE ₀₂	1.550	1.553	0.2
TE ₀₃	2.668	2.670	0.007
$c/a = 0.6$			
Mode	Ref. [5]	This method	Rel. difference (%)
TE ₀₁	0.569	0.570	0.2
TE ₀₂	1.224	1.221	0.2
TE ₀₃	1.984	2.001	0.9
$c/a = 0.8$			
Mode	Ref. [5]	This method	Rel. difference (%)
TE ₀₁	0.556	0.558	0.4
TE ₀₂	1.121	1.122	0.1
TE ₀₃	1.681	1.701	1.2

our method is the versatility and flexibility for the analysis and design of complex dielectric structures filling a rectangular guide, thus becoming a powerful and effective CAD tool. That is, the inclusion of other slabs inside the guide is a very simple task employing this algorithm, while other techniques require to recalculate the full problem in order to find the new transcendental equation.

The fourth example is a shielded rectangular dielectric waveguide. In Fig. 5 we present the dispersion curves for the first two modes, comparing our results with those obtained with a finite-difference method [22]. The relative permittivity of the core is $\epsilon_{r1} = 2.22$, and the dimensions of the rectangular rod are c_1 and d_1 , $c_1/d_1 = 0.99$. The dielectric rectangular rod is shielded by a metallic rectangular guide of dimensions $a = 1.88c_1$ and $b = 1.88d_1$. Only 200 basis functions are necessary to obtain the first modes. The computation time required to obtain the results shown

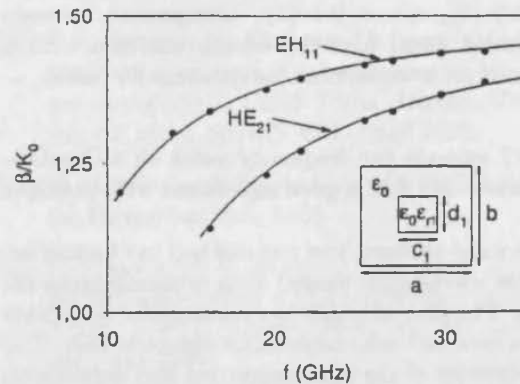


Figure 5: Dispersion curves for the EH₁₁ and HE₂₁ modes of a shielded rectangular dielectric waveguide. Comparison between our results (solid lines) and the results obtained with the finite-difference method [22] (dots).

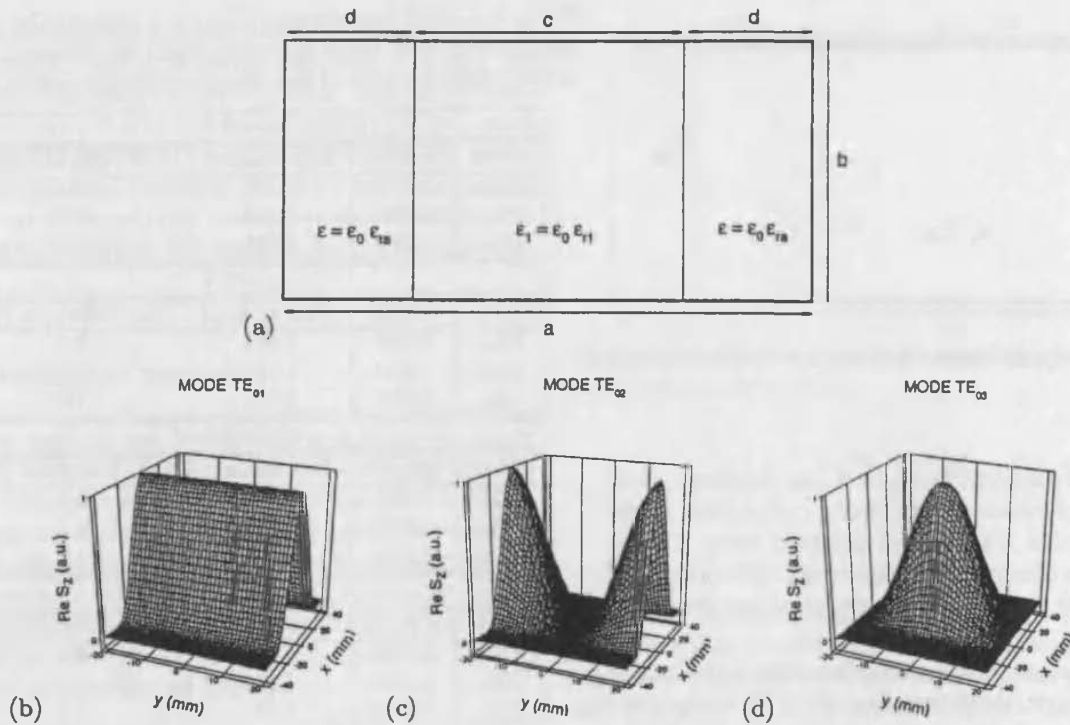


Figure 4: (a) Rectangular waveguide loaded with three dielectric slabs. Plots of the real part of the Poynting vector (z -component) for the: (b) TE_{01} , (c) TE_{02} , (d) TE_{03} modes, respectively.

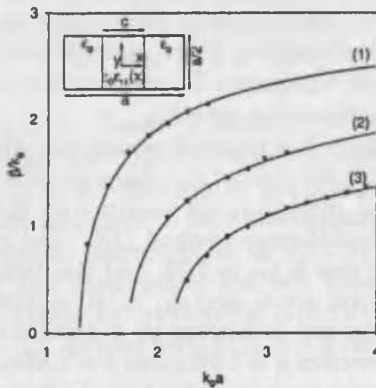


Figure 6: Dispersion curves for the fundamental mode of a rectangular guide loaded with a centered inhomogeneous dielectric slab, as a function of the thickness: $c/a = 0.5$ (1), $c/a = 0.2$ (2), $c/a = 0.1$ (3). Comparison between our results (solid lines) and the results obtained with a technique based on a variational formulation [6] (dots).

in Fig. 5 is 12 seconds per frequency point on a CrayOrigin2000 machine. We find a good agreement with previous results.

Finally, we want to show how our method can be applied also to analyze waveguides loaded with inhomogeneous dielectric slabs. The fifth example is a rectangular waveguide loaded with a centered inhomogeneous dielectric slab. The relative permittivity of the inhomogeneous slab depends on the coordinate x in the form (see Fig. 6)

$$\epsilon_{r1}(x) = 1 + (\epsilon_{r1(max)} - 1) \left(1 - \left(\frac{x}{c/2} \right)^2 \right) \quad (22)$$

with $\epsilon_{r1(max)} = 9$ and where the origin of the x -axis is at the centre of the waveguide. We have computed the dispersion curves of the fundamental mode for three different values of c/a , using 300 auxiliary modes. In Fig. 6 we compare our results with those presented in [6] using a variational formulation.

4 Conclusions

In this paper we have developed a method for the analysis of inhomogeneously filled waveguides with lossy dielectrics. Once Maxwell's equations are written in terms of the transverse components of the fields of guided modes, we have shown that they can be rewritten as a system of eigenvalue equations for a nonself-adjoint operator and its adjoint, L and L^\dagger , respectively. The eigenvectors of the system $\{L, L^\dagger\}$ define a biorthonormal-basis and allow to transform the differential operator system into a linear matrix eigenvalue problem, using the eigenvectors of an auxiliary problem to expand the modes of the original problem.

We have developed a FORTRAN code to obtain the modal spectrum of rectangular waveguides filled with dielectric slabs. In principle, our program can deal with any number of lossy dielectric slabs with arbitrary size and position within the rectangular waveguide. We have tested it by comparison with theoretical results found in the technical literature. We demonstrate that it can be used to work out the modal spectrum of a great variety of dielectric guides.

Finally, we showed that our method can deal with inhomogeneous dielectrics. Furthermore, our method can be easily used to analyze dielectric rods with non-rectangular

cross-sections and inhomogeneously magnetic media filled waveguides.

Acknowledgement

This work has been financially supported by the Generalitat Valenciana (Grant GV96-D-CN-05141), Valencia, Spain, and the Dirección General de Investigación Científica y Técnica (Grant TIC97-1153), Ministerio de Educación y Ciencia, Spain.

References

- [1] K.A. Zaki, A.E. Atia, "Modes in dielectric-loaded waveguides and resonators", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 31, no. 12, pp. 1039-1045, Dec. 1983.
- [2] K.A. Zaki, C. Chen, "Intensity and distribution of hybrid-mode fields in dielectric-loaded waveguides", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 33, no. 12, pp. 1442-1447, Dec. 1985.
- [3] H. A. Ragheb, A. Sebak, L. Shafai, "Cutoff frequencies of circular waveguide loaded with eccentric dielectric cylinder", *IEE Proc.-Microw. Antennas Propagat.*, vol. 144, no. 1, pp. 7-12, Febr. 1997.
- [4] J. Strube, F. Arndt, "Rigorous hybrid-mode analysis of the transition from rectangular waveguide to shielded dielectric image guide", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 33, no. 5, pp. 391-401, May 1985.
- [5] L. Outifa, M. Delmotte, H. Jullien, "Dielectric and geometric dependence of electric field and power distribution in a waveguide heterogeneously filled with lossy dielectrics", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 45, no. 8, pp. 1154-1161, Aug. 1997.
- [6] C.-C. Yu, T.-H. Chu, "Analysis of dielectric-loaded waveguide", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 38, no. 9, pp. 1333-1338, Sept. 1990.
- [7] B.M. Azizur, J. B. Davies, "Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 32, no. 8, pp. 922-928, Aug. 1984.
- [8] T. Angkaew, M. Matsuhara, N. Kumagai, "Finite-element analysis of waveguide modes: a novel approach that eliminates spurious modes", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 35, no. 2, pp. 117-123, Febr. 1987.
- [9] M. Israel, R. Miniowitz, "Hermitian finite-element method for inhomogeneous waveguides", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 38, no. 9, pp. 1319-1327, Sept. 1990.
- [10] L. Nuño, J.V. Barbastre, H. Castañé, "Analysis of general lossy inhomogeneous and anisotropic waveguides by the finite-element method (FEM) using edge elements", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 45, no. 3, pp. 446-449, March 1997.
- [11] A.S. Omar, K.F. Schunemann, "Scattering by material and conducting bodies inside waveguides, Part I: Theoretical formulations", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 34, pp. 266-272, 1986.
- [12] A.S. Omar, K.F. Schunemann, "Complex and backward-wave modes in inhomogeneously and anisotropically filled waveguide", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 35, no. 3, pp. 268-275, March 1987.
- [13] T. Rozzi, L. Pierantoni, M. Farina, "Eigenvalue approach to the efficient determination of the hybrid and complex spectrum of inhomogeneous, closed waveguide", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 45, no. 3, pp. 345-353, March 1997.
- [14] Z. Menachem, E. Jerby, "Transfer matrix function (TMF) for wave propagation in dielectric waveguides with arbitrary transverse profiles", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 46, no. 7, pp. 975-982, July 1998.
- [15] E. Silvestre, M.V. Andrés, P. Andrés, "Biorthonormal-basis method for vector description of optical-fiber modes", *J. Lightwave Technol.*, vol. 16, no. 5, pp. 923-928, May 1998.
- [16] A. Ferrando, E. Silvestre, J.J. Miret, P. Andrés, M.V. Andrés, "Full-vector analysis of a realistic photonic crystal fiber", *Opt. Lett.* (in press).
- [17] R.E. Collin, *Field theory of guided waves*, 2nd edition, New York, USA: IEEE Press, 1991.
- [18] D.G. Dudley, *Mathematical foundations for electromagnetic theory*, 1st edition, New York, USA: IEEE Press, 1994.
- [19] P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, vol. I, 1st edition, New York, USA: McGraw Hill, 1953.
- [20] C.R. Paiva, A.M. Barbosa, "A linear-operator formalism for the analysis of inhomogeneous biisotropic planar waveguides", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 40, no. 4, pp. 672-678, April 1992.
- [21] N. Marcuvitz, *Waveguide handbook*, London, UK: Peter Peregrinus Ltd., 1986.
- [22] E. Schweig, W.B. Bridges, "Computer analysis of dielectric waveguides: a finite-difference method", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 32, no. 5, pp. 531-541, May 1984.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAT DE CIÈNCIES FÍSQUES

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data,
acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral
d'En/ Na/ N' Enrique Silvestre Mora
la qualificació de Sobresaliente cum laude

València a 12 de Març de 1999

El Secretari,

El President,



[Handwritten signature in blue ink]

[Handwritten signature in blue ink]