

**UNIVERSIDAD DE VALENCIA**  
**Facultad de Ciencias Físicas**

**Asimetría de carga en la colisión de  
Leptones Positivos y Negativos con Núcleos:  
Efecto del intercambio de dos Fotones**

**Memoria presentada por**

**José M.<sup>a</sup> Bordes Villagrasa**

**para optar al grado de  
Doctor en Física**

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
Biblioteca



80001606525

UMI Number: U603076

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U603076

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.  
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against  
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC  
789 East Eisenhower Parkway  
P.O. Box 1346  
Ann Arbor, MI 48106-1346



**OBRA DE CONSULTA**  
**EXCLOSA DE PRÉSTEC**  
NO SE PRESTA



ASIMETRIA DE CARGA EN LA COLISION DE LEPTONES  
POSITIVOS Y NEGATIVOS CON NUCLEOS: EFECTO DEL  
INTERCAMBIO DE DOS FOTONES

José M. Bordes Villagrana

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

BIBLIOTECA

N.º Registro 3318

Fecha 27.10.1986

SIGNATURA T.D/104

C. D. U.

616874158


, 19172114

JOSE BERNABEU ALBEROLA, Catedrático de Física Teórica de la Facultad de Física de la Universidad de Valencia,

CERTIFICA: Que la presente memoria "ASIMETRIA DE CARGA EN LA COLISION DE LEPTONES POSITIVOS Y NEGATIVOS CON NUCLEOS: EFECTO DEL INTERCAMBIO DE DOS FOTONES", ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Física Teórica de la Facultad de Física de la Universidad de Valencia, por D. JOSE BORDES VILLAGRASA, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Física.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presenta ante la Facultad de Física de la Universidad de Valencia la referida Tesis, firmando el presente certificado en

Burjassot, 3 de Diciembre de 1.984

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Bernabéu', with a long horizontal stroke extending to the left and a smaller flourish to the right.

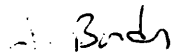
Fdo. José Bernabéu Alberola

El presente trabajo ha sido realizado en el Departamento de Física Teórica de la Facultad de Física de la Universidad de Valencia bajo la dirección del Profesor D. José Bernabéu Alberola a quien deseo agradecer la orientación y estímulo prestados en el desarrollo del mismo.

Así mismo deseo agradecer también a todos los compañeros del Departamento de Física Teórica la ayuda prestada y el constante interés mostrado durante las diversas etapas del desarrollo del mtrabajo.

Finalmente deseo hacer constar mi agradecimiento a la Srta. Carmen Sánchez por su labor mecanográfica.

Burjassot, 20 de Noviembre de 1984



Fdo. José M. Bordes Villlagrasa



# INDICE

	Pág
Introducción	I
CAPITULO 1.	
Relaciones de dispersión sobre las Amplitudes de colisión .....	1
1.1 Propiedades analíticas de las Amplitudes de colisión .....	3
1.2 Relaciones de dispersión de u- na variable.....	
1.3 Sustracciones en las relaciones de dispersión.....	
1.4 Relaciones de dispersión en la dirección hacia adelante.....	13
CAPITULO 2.	
Interacción mediada por dos fotones: situación actual.....	17
2.1 Física de intercambio de dos - fotones en la colisión leptón-- hadrón.....	17
2.2 Teorema a bajas transferencias de momento para la amplitud de intercambio de dos fotones en - la colisión elástica leptón-ha- drón.....	22

2.2.1 Amplitudes de helicidad y amplitudes invariantes.....	25
2.2.2 Relación de dispersión sobre las amplitudes invariantes....	28
2.2.3 Relación de unitariedad de las amplitudes invariantes.....	31
2.2.4 Cálculo de las amplitudes Compton .....	32
2.2.5 Cálculo de las partes absorptivas.....	36
2.2.6 Amplitud a bajos t. Teorema.....	38
2.3 Colisión leptón-hadrón mediada por dos fotones a energía umbral del leptón.....	42
2.3.1 Problema planteado por el teorema a bajas transferencias de momento.....	42
2.3.2 Contribución de la polarizabilidad a los niveles de energía del $(1-^4\text{He})^-$ .....	44
2.3.3 Atomos muónicos .....	48
2.3.4 Atomos electrónicos .....	49

### CAPITULO 3.

Amplitud de colisión  $T_c(2\gamma)_{\lambda\lambda}^c$  en la -

dirección hacia adelante en términos  
de las funciones de estructura.....53

3.1 Expresión de  $T_c(2\gamma)_{\lambda\lambda}^c$  .....58

3.2 Tensor hadrónico  $T_{\mu\nu}(p,q)$  y relaciones de dispersión: funciones de estructura hadrónica.....63

3.3 La amplitud  $T_c(2\gamma)_{\lambda\lambda}^c$  en términos de las funciones de estructura: -- contribución del continuo hadrónico....72

4.4 Integración en  $T_c(2\gamma)_{\lambda\lambda}^c$  . Rotación de Wick.....74

CAPITULO 4.

Colisión inelástica leptón-hadrón. --  
Funciones de estructura hadrónica .....78

4.1 Tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}(P,q)$  y funciones de estructura.....81

4.2 Sección eficaz diferencial  $lh \rightarrow lx$ ....85

4.2.1 Caso particular: colisión elástica leptón-hadrón en la aproximación de intercambio de un fotón.....86

4.3 Relación entre las funciones de estructura y la sección eficaz de fotoabsorción para hadrones.....87

4.3.1 Sección eficaz de fotoabsorción de fotones reales.....	89
4.3.2 Sección eficaz de fotoabsorción de fotones virtuales .....	90
4.4 Funciones de estructura en términos de elementos de matriz de operadores de corriente hadrónica.....	93
4.5 Funciones de estructura para un núcleo atómico. Aproximación dipolar no retardada.....	95
4.5.1 Tratamiento de los operadores de corriente hadrónica en el caso nuclear. Descripción no relativista del núcleo.....	96
4.5.2 Aproximación dipolar no retardada.....	100

CAPITULO 5.

Cálculo de $T_c(2\chi)_{\lambda\lambda}^{\xi}$ para núcleos en la aproximación dipolar no retardada.....	107
5.1 Integración sobre el cuadrimomento q.....	109
5.2 Integración de las variables auxiliares.....	112
5.2.1 Integración de la variable "y".....	112

5.2.2 Integración de la variable -  
"x"....114

CAPITULO 6.

$T_e(2f)_{\lambda\lambda}^c$  : Aproximación para la colisión  $\mu^-$  y  $e^-$  núcleo...121

6.1 Colisión muón-núcleo .....124

6.2 Colisión electrón-núcleo.....128

6.3 Teorema a bajas transferencias de momento para la colisión leptón-hadrón....131

CAPITULO 7.

Consideraciones sobre el tamaño nuclear.....135

7.1 Caso muónico .....140

7.2 Caso electrónico .....142

CAPITULO 8.

Resultados para  $^{12}\text{C}$  y  $^4\text{He}$  .....143

8.1 Modelo de las funciones de estructura nuclear....144

8.2 Sección eficaz de fotoabsorción .....149

8.3 Sección eficaz de fotoabsorción - para ${}^4\text{He}$ .....	150
8.4 Resultados para la amplitud muón- núcleo.....	151
8.4.1 Amplitud $\mu^- - {}^{12}\text{C}$ .....	151
8.4.2 Amplitud $\mu^- - {}^4\text{He}$ .....	154
8.4.3 Amplitud $e^- - {}^{12}\text{C}$ y $e^- - {}^4\text{He}$ .....	156
8.4.4 Comentarios .....	156
8.4.5 Asimetría $\mu^+ - \mu^-$ núcleo.....	161

CAPITULO 9.

Conclusiones .....	166
--------------------	-----

APENDICE I

Método de integración de Feynman y ro- tación de Wick .....	172
--	-----

APENDICE II

Algunas integrales que aparecen en el cálculo de $T_c(2\frac{1}{2})^c$ .....	177
---	-----

APENDICE III

Resultados numéricos de la amplitud.....	182
--	-----

BIBLIOGRAFIA .....189

# INTRODUCCION

Son abundantes las situaciones en que el estudio de las interacciones electromagnéticas puede permitir obtener un mayor conocimiento de estructuras de las que no se les considera directamente responsables. Tal es el caso de las interacciones fuertes y, por tanto, de propiedades de objetos compuestos como los hadrones.

Consideremos, por ejemplo, el caso de la colisión de dos fotones para dar hadrones ( $\gamma\gamma \rightarrow \text{had}$ ), el estudio de la colisión de dos  $\gamma$ , producidos a partir de electrones, permite estudiar el modelo VDM (dominancia de mesones vectoriales) (OL82), así como parámetros relacionados con la estructura en quarks de los mesones neutros y de sistemas hadrónicos producidos (SA82).



Colisiones de fotones con alto  $q^2$ , por otra parte, permiten estudiar las funciones de estructura de los hadrones predichos por la cromodinámica cuántica (BE82) (NO83) y la naturaleza puntual de los quarks como constituyentes de los hadrones.

En otro contexto, procesos de este tipo se han utilizado en la búsqueda de partículas supersimétricas, obteniéndose cotas a la masa y a la constante de acoplamiento de los fotinos (SA82).

Vemos con ello que el completo conocimiento de las interacciones electromagnéticas puede considerarse fundamental, no sólo en sí mismo, sino como herramienta para estudiar otro tipo de procesos.

En procesos mediados por interacciones electromagnéticas, se observa muy buen acuerdo entre experiencia y teoría si consideramos para su cálculo la aproximación de intercambio de un fotón (G074). Sin embargo la Electrodinámica Cuántica predice órdenes más altos en la constante de acoplamiento electromagnética.

Así, por ejemplo, en la interacción  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  además del término dominante de intercambio de un fotón, y por tanto  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , otros diagramas contribuyen también a la sección eficaz. A órdenes  $\alpha^3$  intervienen estados inicial de bremsstrahlung, así como las interferencias de las correcciones del vértice, la polarización del vacío y los diagramas de intercambio de dos fotones con la amplitud de un fotón.

El estudio de la amplitud de dos fotones

será el tema que nos ocupe. Notemos que, al tener dos fotones intermedios tienen C (conjugación de carga) positiva, mientras que el término dominante, con un fotón intermedio, tiene C negativa. Por tanto, a energías intermedias, la interferencia de ambos, que será  $\mathcal{O}(\alpha^3)$ , dará lugar a una asimetría angular en  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  para las direcciones  $\theta$  y  $\pi - \theta$ , que será proporcional a la amplitud mediada por dos  $\gamma$  y cuya medida podrá darnos información de ésta (SA82).

Téngase en cuenta que a altas energías la asimetría angular vendrá dominada por la interferencia de los términos de intercambio de  $1\gamma$  y de un bosón  $Z^0$ .

En un contexto similar, pero en la interacción entre leptones y hadrones, planteamos los objetivos de esta memoria. El estudio de la contribución de intercambio de dos fotones se enfoca a partir de la construcción de observables impares bajo conjugación de carga del leptón. La contribución de los diagramas de intercambio de dos fotones da lugar a una distribución angular de la asimetría al comparar las secciones eficaces de leptones y antileptones con hadrones:

$$R = \frac{d\sigma^+ - d\sigma^-}{d\sigma^+ + d\sigma^-} \propto 2 \operatorname{Re} f(2\gamma) \quad (1)$$

donde  $d\sigma^+$  y  $d\sigma^-$  se refieren a las secciones eficaces para leptones positivos y negativos.

Un estudio de este observable permitiría un conocimiento de la amplitud de dos fotones y las cantidades características de la estructura hadrónica involucradas en ella.

El cálculo teórico de estos observables, a partir de las amplitudes, se realiza en dos etapas. En primer lugar, a partir del teorema a bajos momentos transferidos para la amplitud de dos fotones (BP81), y en segundo lugar a partir del estudio directo de la amplitud en la dirección hacia adelante.

El teorema a bajas transferencias de momento permite, mediante consideraciones generales de analiticidad, covarianza Lorentz, invarianza gauge y unitariedad, obtener un desarrollo de la amplitud en términos del momento transferido ( $t$ ) y controlar los primeros términos no analíticos en  $\sqrt{-t}$  y  $\ln(-t)$  provenientes de la interacción de largo alcance. Nada puede decir, sin embargo, del primer término, independiente del momento transferido, por contener información acerca de la interacción de corto alcance.

El teorema prueba que las amplitudes invariantes, libres de problemas cinemáticos, se obtienen a partir de sus partes absorptivas mediante relaciones de dispersión sobre la variable  $t$  a energía ( $s$ ) en el centro de masas fija. Estas partes absorptivas se relacionan, mediante unitariedad en el canal  $t$  para  $t \geq 0$ , con las amplitudes Compton a baja energía para leptones y hadrones cuya estructura es conocida. A los órdenes  $t$  considerados, la contribución del continuo depende únicamente de las polarizabilidades eléctrica y magnética del hadrón mientras que la llamada contribución polo queda determinada por su carga y momento magnético.

Con ello la contribución del continuo a las amplitudes de helicidad y, en definitiva al observable (1) tiene el desarrollo:

$$f(2\gamma)^c \propto k_1(s) + k_2(s) \sqrt{-t} + k_3(s) t \ln(-t) \quad (2)$$

donde  $k_2$  y  $k_3$  dependen de las características electromagnéticas del hadrón y son controladas por el teorema mientras que  $k_1$ , puesto que contiene información acerca de la interacción de corto alcance, no puede obtenerse por este procedimiento y su cálculo debe abordarse por un camino distinto.

Es el cálculo de este primer término el problema central abordado en esta memoria. Para su estudio consideramos que si en la amplitud (2) tomamos la dirección hacia adelante ( $t=0$ ), el único término no nulo, puesto que es independiente de  $t$ , es  $-k_1$ . El estudio de la amplitud en la dirección hacia adelante permitiría, por tanto, completar la información en el desarrollo (2) y, por tanto, obtener el observable (1) a los órdenes en  $t$  considerados.

En líneas generales, el procedimiento que se seguirá consiste en escribir dicha amplitud en términos de la colisión Compton virtual para hadrones en la dirección hacia adelante cuya parte real se relaciona, mediante relaciones de dispersión sobre la energía del fotón, a masa virtual fija, con las funciones de estructura hadrónica medibles en procesos de colisión inelástica leptón-hadrón y de fotoabsorción por hadrones.

El plan de redacción de la memoria es el siguiente:

Los capítulos uno y dos podemos considerarlos como introductorios. En el primero estudiamos las relaciones de dispersión aplicadas a las amplitudes

de dispersión, en particular se estudian en la dirección hacia adelante. Mientras que en el capítulo dos se revisa la situación actual de la física de intercambio de dos fotones estudiando principalmente el teorema para bajos momentos transferidos.

El cálculo de la amplitud de dos fotones en la dirección hacia adelante se inicia en el capítulo tres para, después de obtener las relaciones entre el tensor Compton y las funciones de estructura hadrónica en el capítulo cuatro, llegar a una expresión analítica para dicha amplitud en la aproximación dipolar no retardada en el capítulo cinco.

Casos particulares de muones y electrones son considerados en el capítulo seis y el cálculo se completa en el capítulo siguiente introduciendo consideraciones acerca del tamaño finito del núcleo.

El capítulo ocho se dedica a calcular los resultados numéricos de la amplitud de dos fotones para muones y electrones sobre blancos de  ${}^4\text{He}$  y  ${}^{12}\text{C}$ . Con estos resultados y el teorema discutido en el capítulo dos, se construye la distribución angular de la asimetría (1).

Las conclusiones del trabajo efectuado se recopilan en el capítulo nueve.

Por último, con objeto de no interrumpir la discusión del problema con cálculos matemáticos farragosos, recopilamos en los apéndices uno y dos las integrales más importantes usadas en el trabajo así como - las propiedades más importantes de la función dilogarítmica, que aparece frecuentemente en los cálculos efectuados.

En el apéndice tres damos los resultados numéricos de la amplitud de dos fotones que dieron lugar a las gráficas uno a cuatro del capítulo ocho.

# CAPITULO 1

## Relaciones de Dispersión sobre las Amplitudes de Colisión

En el tratamiento de procesos de colisión entre partículas puede suceder que, al margen de la interacción fundamental que estamos interesados en estudiar, intervengan otro tipo de interacciones no implicadas directamente en el estudio del proceso. Tal es el caso, por ejemplo, de un proceso electromagnético donde alguna de las partículas no es fundamental y su estructura viene gobernada por interacciones fuertes. Estas interacciones, aunque afectan directamente al proceso no es de interés tratarlas desde un punto de vista microscópico. Por otra parte su estudio puede resultar demasiado complicado y es aconsejable buscar algún método que nos proporcione información global de este problema sin necesidad de un tratamiento detallado del mismo.

Para el estudio de la amplitud Compton de hadrones, las relaciones de dispersión permiten relacionar la parte real de las amplitudes invariantes que surgen de este proceso y cuya estructura viene

gobernada por interacciones fuertes, con las funciones de estructura hadrónica, medibles mediante otros procesos de colisión inelástica leptón-hadrón o fotoabsorción de fotones.

La idea de este capítulo se centra precisamente en el estudio de las relaciones de dispersión, método que será utilizado a lo largo de este trabajo en el estudio de la colisión leptón-hadrón en la dirección hacia adelante.

Fundamentalmente, las relaciones de dispersión, aplicadas a amplitudes de colisión, permiten a partir de propiedades generales de analiticidad, simetría de cruce y unitariedad, relacionar sus partes real e imaginaria.

Puesto que el uso que haremos de las relaciones de dispersión será en este contexto, centraremos el estudio en ello, aunque sus aplicaciones sean de carácter mucho más general. En particular estudiaremos su aplicación a la amplitud elástica de dos cuerpos para el caso de la colisión en la dirección hacia adelante, que será objeto de posterior tratamiento. La razón de centrarnos en la amplitud de colisión a  $t=0$  ha sido comentada en la Introducción.

En primer lugar estudiaremos brevemente las propiedades de analiticidad de las amplitudes de colisión derivadas de unitariedad y simetría de cruce, ambas independientes del "modelo de interacción", para conectar después con las relaciones de dispersión.



## 1.1 PROPIEDADES ANALITICAS DE LAS AMPLITUDES DE COLISION

Consideraremos un proceso de colisión elástica de dos cuerpos con espín cero. En este caso existen dos variables cinemáticas independientes sobre las que tenemos libre elección. En estudios de este tipo es útil escoger éstas en términos de tres variables interdependientes  $s$ ,  $t$  y  $u$  de forma que una de ellas representa la energía total en el centro de masa mientras que las otras dos se refieren al cuadrado del cuadrimomento transferido.

La relación que liga estas variables, si  $m_i$  son las masas de las cuatro partículas que interaccionan es:

$$s + t + u = 2(m_1^2 + m_2^2) = \sum_i^4 m_i^2 \quad (1)$$

La elección de estas variables viene motivada por el hecho de que para cualquier proceso elástico existen otros dos relacionados, obtenidos eligiendo diferentes pares de partículas como salientes e incidentes. Para un proceso general de dos cuerpos:

$$\begin{array}{lll} 1 + 2 \rightarrow 3 + 4 & s = p_1 + p_2 & : \text{canal } s \\ 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 & t = p_1 - p_3 & : \text{canal } t \\ 1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2} & u = p_1 - p_4 & : \text{canal } u \end{array}$$

$s$ ,  $t$ ,  $u$  representan la energía total en el centro de masa para cada proceso.

Así, estas tres variables son adecuadas para la descripción de uno cualquiera de los tres

procesos o canales: los determinados valores reales de estas variables vendrán definidos por la cinemática de estos procesos de forma que, para cada canal las amplitudes de colisión se definirán sobre el dominio de  $s$ ,  $t$ ,  $u$  que corresponda a la región física del proceso.

Puesto que las tres regiones físicas no se solapan, podemos definir una amplitud genérica  $T(s,t,u)$  sobre las tres regiones físicas que toma los valores apropiados en cada una de ellas y que, por hipótesis, posee una prolongación analítica que permite interconectarlas y definir  $T(s,t,u)$  sobre el plano complejo de las tres variables.

Esta propiedad, conocida como simetría de cruce, permite definir una función de las variables  $s,t,u$ , complejas que describe los tres procesos tomando los valores de las variables en la región física adecuada.

La simetría de cruce junto con la información específica de las singularidades de  $T(s,t,u)$  es lo que se conoce como "Hipótesis de Mandelstam". En ella se postula que las amplitudes así construidas sean analíticas en todo el plano complejo de sus variables salvo cuando existe alguna razón física para que aparezcan singularidades.

Supondremos por tanto que en la amplitud  $T(s,t,u)$ , con la que queremos describir el proceso, hemos aislado las singularidades cinemáticas que puedan aparecer al escribir energías y ángulos en términos de las variables invariantes. De esta forma

su estructura analítica viene dictada exclusivamente por la dinámica del proceso de la que en un contexto general, sólo conocemos la relación de unitariedad.

En términos de las amplitudes invariantes unitariedad conduce al resultado (MS):

$$\text{Im } T(s,t,u) = - \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_n) \cdot \langle 34 | T^+ | n \rangle \langle n | T | 12 \rangle \quad (2)$$

donde hemos supuesto invarianza bajo inversión temporal para relacionar  $\langle 12 | T | 34 \rangle = \langle 34 | T | 12 \rangle$ .

La elección de esta representación es clara: al no poseer la amplitud  $T(s,t,u)$  singularidades cinemáticas las relaciones de cruce con ella son las más sencillas posibles.

Esta relación se refiere estrictamente a los valores  $s,t,u$  en las regiones físicas de los 3 canales, no obstante puesto que el espectro de estados intermedios viene caracterizado por la variable energía, podemos obtener los umbrales de energía para los estados intermedios en los distintos canales independientemente de los umbrales físicos para cada canal.

De la expresión (2) podemos decir que en un canal determinado la parte  $\text{Im}T(s,t,u)$  será distinta de cero para aquellos valores de  $s$  donde existan estados intermedios. Extendido este razonamiento a los tres canales,  $\text{Im}T(s,t,u)$  será distinto de cero para los valores <sup>de las</sup> variables  $s,t,u$  tales que contribuyan estados intermedios en alguno de los tres canales a la relación de unitariedad.

Con esto y con el principio de reflexión de Schwarz podemos realizar la hipótesis más sencilla acerca de la analiticidad de  $T(s,t,u)$  diciendo que será analítica en los planos complejos de sus variables con polos para los valores aislados donde contribuya unitariedad y con cortes debidos al espectro continuo en alguno de los tres canales.

Por ello, puesto que las regiones físicas reposarán sobre los cortes de unitariedad es necesario dar alguna prescripción para obtener el valor de la amplitud física ya que  $T(s,t,u)$  tiende a diferentes valores según nos aproximamos por arriba o por debajo del corte.

La convención que se adopta es dar una pequeña parte imaginaria  $i\epsilon$  positiva a la variable que representa la energía en el centro de masas para el canal considerado. Entonces, si  $s,t,u$  toman valores reales sobre la región física del canal  $s$ , el valor de la amplitud física es:

$$T^{(s)}(s,t,u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(s+i\epsilon, t, u) \quad (3)$$

También, si  $s,t,u$  se refieren a algún punto de la región física del canal  $u$ , la amplitud física es:

$$T^{(u)}(s,t,u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(s, t, u+i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(s-i\epsilon, t, u) \quad (4)$$

Con lo que la amplitud física para el canal  $s$  es el valor de la amplitud justo encima del corte en el plano Res-Ims para  $t$  fijo, mientras que en el canal  $u$  es justo debajo de este corte.

## 1.2 RELACIONES DE DISPERSIÓN DE UNA VARIABLE

Las propiedades analíticas de las amplitudes invariantes  $T(s,t,u)$  pueden ser explotadas planteando relaciones de dispersión sobre ellas. Haremos el estudio para procesos en el canal  $s$ .

Supongamos, para un  $t$  fijo y un valor de  $s$  dado,  $s_p$ , la función, relacionada con la amplitud en el canal  $s$ :

$$\tilde{T}_1(s,t,u) = \frac{T^{(s)}(s,t,u)}{s - s_p} \quad (5)$$

esta función poseerá la misma estructura analítica que  $T(s,t,u)$  salvo un polo adicional en  $s=s_p$ .

Si mediante la relación de unitariedad (2) conocemos la estructura analítica de la amplitud  $T(s,t,u)$ , podemos realizar la integración de  $T_1$  a lo largo de algún contorno en el plano Res-Ims.

Supongamos, como suele ocurrir, que en el canal  $s$  existen estados intermedios de una partícula

(valores aislados de  $s$  que contribuyen a unitariedad) para  $s=M^2$  mientras que el espectro continuo de estados intermedios (corte) presentará un umbral que indicaremos por  $S_0$ . Si suponemos que el canal  $u$  tiene el mismo espectro que el canal  $s$ , obtenemos, relacionando ambos canales, otro polo en  $S = \sum_{i=1}^4 m_i^2 - M^2 - t$  y un corte a partir de  $S = \sum_{i=1}^4 m_i^2 - S_0 - t$ . En general el canal  $u$  dará informaciones en los valores negativos de  $s$ .

Con el estudio de la relación de unitariedad en los canales  $s$  y  $u$  obtenemos la estructura analítica de  $T(s,t,u)$  en el plano complejo de la variable  $s$ .

Si escogemos el contorno de la figura 1, podemos plantear la integral:

$$\oint_C \frac{T^s(s,t,u)}{s - s_p} ds =$$

$$= 2\pi i \left\{ T^s(s_p, t, u) + \right.$$

$$\left. + \frac{r_+}{M^2 - s_p} + \frac{r_-}{\sum_{i=1}^4 m_i^2 - M^2 - t - s_p} \right\} \quad (6)$$

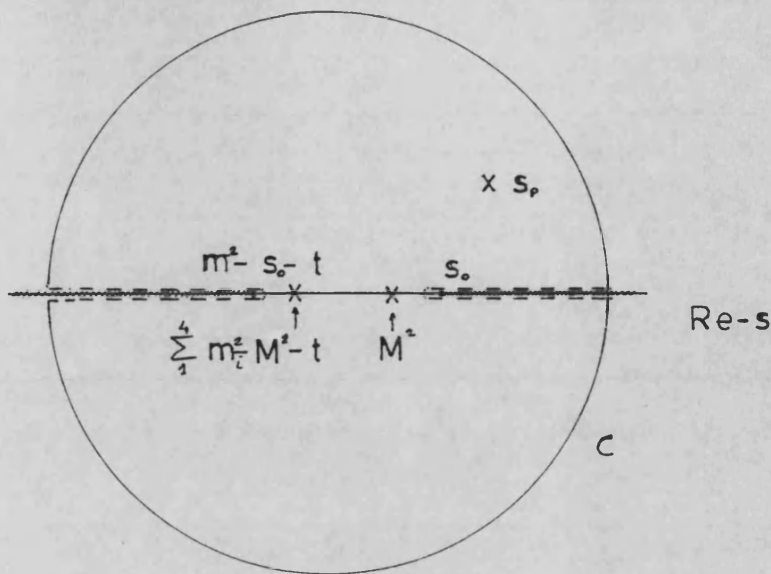


Fig 1: Integración de contorno en el plano complejo de la variable  $s$ .

Donde  $r_+$  y  $r_-$  son los residuos de la amplitud en los polos  $M^2$  y  $\sum_1^4 m_i^2 - M^2 - t - S_p$ .

Si admitimos que la amplitud se comporta como:

$$|T^{(s)}(s,t,u)| \rightarrow \frac{1}{|s|} \quad ; \quad |s| \rightarrow \infty \quad (7)$$

podemos descomponer la integración sobre el contorno en la parte correspondiente al círculo, que se anulará cuando hagamos tender el radio a infinito, y la parte correspondiente al eje  $\text{Re}-S$ , de forma que:

$$\int_{-\infty}^{\sum_1^4 m_i^2 - s_0 - t} ds \frac{\text{Im } T^s(s,t,u)}{s - S_p} + \int_{s_0}^{+\infty} ds \frac{\text{Im } T^s(s,t,u)}{s - S_p} =$$

$$= \pi \left\{ T^{(s)}(s, t, u) + \frac{r_+}{M^2 - s_p} + \frac{r_-}{\sum_i m_i^2 - M^2 - t - s_p} \right\} \quad (8)$$

Donde, para valores reales de s:

$$\text{Im } T^{(s)}(s, t, u) = \frac{1}{2i} \left[ T^{(s)}(s+i\epsilon, t, u) - T^{(s)}(s-i\epsilon, t, u) \right] \quad (9)$$

y en la región no física de S se obtiene por prolongación analítica de la amplitud en la región física.

Si queremos usar la relación (7) para valores de S en la región física del canal s, es decir reales y mayores que  $S_0$ , recordando la relación (3), podemos escribir la parte real de la amplitud como (relación de dispersión):

$$\begin{aligned} \text{Re } T^{(s)}(s, t) &= \frac{r_+}{s - M^2} + \frac{r_-}{s - \sum_i m_i^2 + M^2 + t} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{s_0}^{+\infty} ds' \frac{\text{Im } T^{(s)}(s', t)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\sum_i m_i^2 - s_0 - t} ds' \frac{\text{Im } T^{(s)}(s', t)}{s' - s} \end{aligned} \quad (10)$$

Donde P simboliza la parte principal de Cauchy para las integrales, definida como:



$$P \int_a^b ds' \frac{f(s')}{s-s'} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{s-\delta} ds' \frac{f(s')}{s-s'} + \int_{s+\delta}^b ds' \frac{f(s')}{s'-s} \right\}; \quad a < s' < b \quad (11)$$

Como se observa, la relación (9) permite encontrar la parte real de la amplitud de dispersión en términos de la parte imaginaria únicamente a partir de la hipótesis de analiticidad de la amplitud que surge de unitariedad y simetría de cruce.

### 1.3 SUSTRACCIONES EN LAS RELACIONES DE DISPERSION

El desarrollo de la relación de dispersión anterior reposaba en el supuesto (7) que, en muchos casos de interés físico, no tiene validez. En el caso de que esta condición no se cumpla también pueden encontrarse relaciones de dispersión construyendo funciones similares a (5) que cumplan las condiciones adecuadas para poder aplicar el razonamiento anterior. El precio a pagar en estos casos será la aparición de nuevos parámetros, en principio desconocidos, y que será necesario encontrar por otros procedimientos.

Es decir, construiremos una función de tipo  $(s - s_1)^{-\alpha} T^{(\alpha)}(s, t)$ , siendo  $s_1$  una constante arbitraria, de forma que se comporta:

$$|(s - s_1)^{-\alpha} T^{(\alpha)}(s, t)| \rightarrow \frac{1}{|s|}; \quad |s| \rightarrow \infty$$

Supondremos por simplicidad el caso  $\alpha = 1$  para lo cual construiremos la función, a  $t$  fijo:

$$T_2(s,t) = \frac{T^s(s,t)}{s-s_1} \cdot \frac{1}{s-s_p}$$

a la que podemos aplicar el mismo procedimiento al realizar la integración sobre el contorno de la fig. 1 para obtener, con las mismas condiciones acerca de la analiticidad de  $T(s,t,u)$  que en 1.2:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T^s(s,t) &= \operatorname{Re} T^s(s_1,t) + \frac{s-s_1}{M^2-s_1} \cdot \frac{r_+}{s-M^2} + \\ &+ \frac{s-s_1}{\sum_1^4 m_i^2 - M^2 - t - s_1} \cdot \frac{r_-}{s - \sum_1^4 m_i^2 + M^2 + t} + \\ &+ \frac{s-s_1}{\pi} \mathcal{P} \int_{s_0}^{+\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} T^s(s',t)}{(s'-s_1)(s'-s)} + \\ &+ \frac{s-s_1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\sum_1^4 m_i^2 - s_0 - t} ds' \frac{\operatorname{Im} T^s(s',t)}{(s'-s_1)(s'-s)} \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $\mathcal{P}$  significa valor principal de Cauchy en la integral en el caso de que sea necesario considerarlo respecto a los polos  $s$ ,  $s_p$  y  $s_1$  según estén sobre los cortes de unitariedad en los canales  $s$  y  $u$ .

Una relación del tipo (13) se denomina "relación de dispersión con una sustracción" debido a la presencia del término adicional  $\operatorname{Re} T^s(s,t)$  desconocido, siendo  $s_1$  el punto de sustracción.

Naturalmente, cuando tengamos una relación de este estilo debemos escoger cuidadosamente el valor de  $s$ , de forma que la amplitud para ese punto pueda calcularse mediante algún otro procedimiento o esté relacionada con alguna cantidad física relevante.

### 1.3 RELACIONES DE DISPERSION EN LA DIRECCION HACIA ADELANTE

Considerar las relaciones de dispersión en el caso de la colisión hacia adelante representa principalmente dos ventajas en el tratamiento de las ecuaciones (10) y (13).

Dirección hacia adelante en el canal  $s$  implica  $t=0$ , por tanto es el único valor de  $t$  para el que la amplitud  $T(s,t,u)$  sobre las semirrectas del eje  $\text{Re}-s$ ,  $(-\infty, \sum_i m_i^2 - S_0)$ ,  $(S_0, +\infty)$  es una amplitud física, por tanto las partes imaginarias que intervienen en (10) y (13) corresponden a valores físicos de la amplitud.

Por otra parte estas partes imaginarias pueden relacionarse mediante el teorema óptico con la sección eficaz total en los canales  $s$  y  $u$ .

Notemos aquí que esta relación surge inmediata en el caso de partículas sin espín mientras que requiere mayor elaboración para el caso de que queramos considerar separadamente las contribuciones de las componentes de espín. Así, por ejemplo, en el caso de la colisión Compton, aparecen dos amplitudes invariantes referidas a la transversalidad o longitudinalidad de los fotones,

el razonamiento hecho aquí se hace por separado para cada una de ellas relacionándose al final sus partes imaginarias con secciones eficaces correspondientes a cada tipo de fotones o bien sobre combinaciones concretas de ellas.

Una notación usual para estudiar este tipo de relaciones de dispersión, consiste en tomar la variable energía del haz en el sistema de laboratorio de la partícula 1 en lugar de la variable  $s$ .

Si suponemos la partícula "1" en reposo la relación entre ambas es:

$$P_2^0(s) = \frac{s - (m_1^2 + m_2^2)}{2 m_1}$$

Realizar relaciones de dispersión sobre  $s$  equivale a realizarlas sobre  $P_2^0(s)$  manteniendo la masa de las partículas del haz  $m_2^2 = p_2^2$  fija.

En términos de esta variable las relaciones de dispersión podemos simbolizarlas de esta manera:

$$\begin{aligned} \text{Re } T^s(P_2^0, m_2^2) = & \text{Polos} + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{P_2^0(\sum_i m_i^2 - s_0)}^{+\infty} dP_2^{10} \frac{\text{Im } T(P_2^{10}, m_2^2)}{P_2^{10} - P_2^0} + \\ & + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{P_2^0(s_0)} dP_2^{10} \frac{\text{Im } T(P_2^{10}, m_2^2)}{P_2^{10} - P_2^0} \end{aligned} \quad (14)$$

donde el cambio efectuado ha sido  $P_2^0 = \frac{s^{(1)} - (m_1^2 + m_2^2)}{2 m_1}$

de forma que

$$P_2^0(s_0) = \frac{s_0 - (m_1^2 + m_2^2)}{2m_1} = -P_2^0\left(\sum_i^4 m_i^2 - s_0\right); m_1 = m_3, m_2 = m_4$$

Del mismo modo podría operarse con la relación (13).

Esta ecuación exhibe simetría entre las dos integrales que, recordemos, provenían de los cortes de unitariedad en los canales s y u. Por tanto si podemos relacionar estas amplitudes, obtendremos simplificaciones en ella.

Estas simplificaciones se obtienen en un caso simple cuando en una colisión elástica  $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ , una de las partículas es su propia antipartícula. Entonces los procesos:

$$1 + 2 \rightarrow 1 + 2$$

$$1 + \bar{2} \rightarrow 1 + \bar{2}$$

son idénticos si  $2 = \bar{2}$  y, por tanto:

$$T(s, t = 0, u) = T(u, t = 0, s)$$

puesto que el término de la izquierda representa la amplitud en la dirección hacia adelante para el canal s con energía s y el de la derecha para el proceso idéntico en el canal u, también con energía s. Por tanto la relación (4) se traduce en:

$$\text{Im } T(s+i\epsilon, t=0, u) = \text{Im } T(u, t=0, s+i\epsilon)=$$

$$= \text{Im } T(u-i\epsilon, t=0, s) = - \text{Im } T(u+i\epsilon, t=0, s)$$

$$(\text{con } u = \sum_i^4 m_i^2 - s)$$

que, llevado a la ecuación (14) reduce la relación de dispersión a la forma:

$$\text{Re } T^S(p_2^0, m_2^2) = \text{Polos} + \frac{2}{\pi} \int_{p_2^0(s_0)}^{+\infty} dp_2^{10} p_2^{10} \frac{\text{Im } T(p_2^{10}, m_2^2)}{(p_2^{10})^2 - (p_2^0)^2} \quad (15)$$

Esta es por tanto la forma de la relación de dispersión para las amplitudes invariantes libres de ceros cinemáticos en la colisión elástica de dos partículas en el caso de que una de ellas tenga todas sus cargas nulas.

Esta relación será aplicable, por tanto al caso de la colisión virtual Compton de hadrones en la dirección hacia adelante. El fotón tiene sus cargas nulas y por lo tanto hará el papel de partícula "2" siendo  $p_2^0$  su energía sobre la que realizamos relaciones de dispersión considerando su masa -  $q^2 = m_i^2$  fija.

Una expresión análoga a (15) puede construirse para el caso de que sean necesarias sustracciones.

De la ecuación (13) obtenemos:

$$\text{Re } T^S(p_2^0, m_2^2) = \text{Re (sustracción)} + \text{polos} +$$

$$+ \frac{2 p_2^0}{\pi} P \int_{p_2^0(s_0)}^{+\infty} \frac{dp_2^{10}}{p_2^{10}} \cdot \frac{\text{Im } T(p_2^{10}, m_2^2)}{(p_2^{10})^2 - (p_2^0)^2} \quad (16)$$

## CAPITULO 2

### Interacción Electromagnética Mediada por dos fotones: Situación actual

#### 2.1 FISICA DE INTERCAMBIO DE DOS FOTONES EN LA COLISION LEPTON-HADRON

El éxito de la amplitud de intercambio de un fotón en la predicción de resultados en procesos electromagnéticos, reflejado en los diagramas de Rosenbluth (G074) es debido sin duda al pequeño valor de la constante de acoplamiento electromagnética a las energías características de estos procesos. La electrodinámica cuántica predice sin embargo, a órdenes superiores en la constante de acoplamiento, la existencia de términos en los que interviene un mayor número de fotones, tales como polarización del vacío, intercambio de dos fotones... En particular en esta memoria estaremos interesados en el estudio de la amplitud mediada por dos fotones.

La construcción de observables impares bajo conjugación de cargas de leptones que dependen directamente de esta amplitud (BP80), así como el estudio de las co---rrecciones dispersivas a las amplitudes de colisión lep---tón-hadrón y los efectos de la polarizabilidad en la sepa

ración entre niveles energéticos de átomos muónicos deben conducir a un mayor entendimiento de la estructura de la amplitud mediada por dos fotones.

Estudios de esta contribución fueron hechos en un primer momento en el marco de la mecánica cuántica relativista para obtener correcciones a la amplitud leptón-hadrón debidas al efecto de excitaciones virtuales intermedias del hadrón (Efectos dispersivos) (BC72), en el mismo contexto se investigó la parte coulombiana de estos efectos con gran detalle (FR77), (FR76). Estos análisis no dan la respuesta satisfactoria al problema planteado por electrodinámica cuántica al no enfocarse desde el punto de vista de una teoría de campos relativista lo que lleva a ignorar en muchos casos la interacción con fotones transversos, realizar un tratamiento no relativista de la física concerniente al hadrón, introducir parámetros con significado físico poco preciso...

Por otra parte, el estudio de la diferencia de niveles energéticos en átomos muónicos, entre la gran variedad de ingredientes teóricos necesarios para su cálculo, se encuentra con la necesidad de estudiar este tipo de interacción. Así, por ejemplo, una medida de la diferencia de energía  $\Delta E(2P_{3/2} - 2S_{1/2})$  requiere un estudio en términos de la contribución debida a la estructura fina ( $\sim 10\%$  de  $\Delta E$ ), polarización del vacío ( $\sim 110\%$ ), efecto del tamaño finito ( $\sim -20\%$ ), efecto Lamb ( $\sim 1\%$ ) y efectos de la polarizabilidad nuclear ( $\sim 1\%$ ) (FR77). Puesto que la polarización del vacío es calculada con precisión, los límites de la incertidumbre teórica vienen dados por el tamaño nuclear finito (caracterizado por el radio cuadrático medio) y las correcciones debidas a la polarización



nuclear . Rinker (RI76) encuentra un resultado teórico  $\Delta E = 1813.1 - 102.0 \langle r^2 \rangle \pm 1$  eV que predice un  $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 1.674 \pm 0.004$  fm en completo acuerdo con los datos por Shick, Mc Carthy y Whitney (SM76) obtenidos analizando datos de colisión de electrones. La mayor incertidumbre en el resultado de Rinker proviene de la corrección debido a la polarizabilidad nuclear  $\Delta E_p$ , lo que muestra la necesidad del entendimiento de esta corrección en este contexto. Fundamentalmente está basado en todos los procesos donde el hadrón es virtualmente excitado y desexcitado por intercambio de fotones con el leptón, es decir, correcciones a la interacción leptón-hadrón debidas al intercambio de dos fotones.

Normalmente este tipo de correcciones se hace teniendo en cuenta sólo la fuerza de Coulomb dominante (RI76), (EH72), (HKW76), puesto que para átomos muónicos ligeros las energías de enlace son del orden del kilovoltio, al comparar con la masa del muón de 105 MeV, puede realizarse la aproximación no relativista de forma que los efectos de distorsión sobre la función de onda no son grandes y en consecuencia pueden ignorarse. En general, estos estudios, además de no realizarse una descripción detallada del proceso mediado por dos fotones, tienen los mismos defectos que los apuntados en el caso de las correcciones dispersivas. Estudios de las discrepancias entre estos puntos de vista y un tratamiento covariante del tema para el caso concreto de  ${}^4\text{He}$  muónico pueden encontrarse en (BJ76) donde se comparan los resultados obtenidos por (HKW76) y (BJ74), mostrándose que la contribución debida a la interacción mediada por fotones transversos puede ser de un 20% de la correspondiente a longitudinales y discutiéndose los resultados

en términos del tratamiento realizado sobre el propagador hadrónico (estados nucleares intermedios).

Un estudio riguroso de los efectos debidos al intercambio de dos fotones a las amplitudes de colisión deberá enfocarse en el marco de la teoría cuántica de campos relativista para las interacciones electromagnéticas (electrodinámica cuántica).

Trabajos de Bernabéu y Jarlskog para encontrar las correcciones debidas a la polarizabilidad del neutrón en la amplitud leptón-neutrón a energía umbral del leptón (BJ73) apuntan en este sentido, efectuando un estudio detallado de la relación entre la amplitud mediada por dos fotones ( $T(2\gamma)$ ) a dicha energía y la amplitud Comptón en la dirección hacia adelante para la dispersión de fotones por neutrones, los resultados obtenidos permiten conectar con los límites relativistas y las aproximaciones clásicas discutidas en la literatura. En la misma línea de un tratamiento covariante de la amplitud utilizan este procedimiento en el cálculo de la contribución de la polarizabilidad nuclear a la separación entre niveles de energía en el Helio muónico (BJ74) mediante la aproximación de la función de onda conectan dicha diferencia de energía con la amplitud  $T(2\gamma)$  en la dirección hacia adelante, el resultado encontrado da una corrección debida a la polarizabilidad de  $\Delta\lambda \sim 16 \text{ \AA}$  para niveles 2S-2P, tres veces más grande que la precisión experimental esperada y, por tanto, susceptible de ser medida.

Un estudio que puede considerarse riguroso de la amplitud  $T(2\gamma)$  y que, en cierta manera, marca

la situación actual en la física de dos fotones, ha sido realizado recientemente por Bernabéu y Peñarrocha (BP81) el cual analizaremos con detalle puesto que da el punto de partida para el problema planteado en esta memoria. Este estudio, realizado bajo supuestos generales de covarianza Lorentz, unitariedad, analiticidad e invarianza gauge, da lugar a un teorema de validez general para las amplitudes leptón-hadrón mediadas por dos fotones a bajas transferencias de momento.

A su vez permite construir el siguiente observable impar bajo conjugación de carga del leptón

$$\mathcal{R}(s, t) = \frac{d\sigma^- - d\sigma^+}{d\sigma^+ + d\sigma^-} =$$

$$= 2 \frac{T_{++}^{(s)}(1\gamma) \operatorname{Re} T_{++}^{(s)}(2\gamma) + T_{+-}^{(s)}(1\gamma) \operatorname{Re} T_{+-}^{(s)}(2\gamma)}{T_{++}^{(s)}(1\gamma)^2 + T_{+-}^{(s)}(1\gamma)^2} \quad (1)$$

donde  $\sigma^-$  ( $\sigma^+$ ) es la sección eficaz para la colisión de leptón negativo (positivo) sobre un hadrón.  $\mathcal{R}(s, t)$  da evidencia directa de la existencia de la amplitud mediada por dos fotones.

Las variables  $s$  y  $t$  son los invariantes de Mandelstam del proceso mientras que  $T(1\gamma)$  representa las amplitudes de helicidad en el canal  $s$  del proceso mediada por un fotón (estrictamente contendrá los

diagramas con dos fotones y un número impar de vértices leptónicos).

La aplicación del teorema (BP81) a este observable muestra que la contribución del continuo hadrónico virtual a él tiene el siguiente desarrollo en términos del momento transferido  $t$ :

$$\mathcal{R}^c(s,t) = t \left[ a_1(\omega) + a_2(\omega) \sqrt{-t} + a_3(\omega) t \ln \frac{-t}{\Lambda} \right] + \mathcal{O}(t^2) \quad (2)$$

siendo  $\omega = \frac{E_{LAB}}{m}$  y  $\Lambda$  un parámetro característico de la estructura hadrónica.

El teorema proporciona los valores de  $a_2(\omega)$  y  $a_3(\omega)$  ambos dependientes de las polarizabilidades hadrónicas de forma que  $a_1(\omega)$  es el único término no predicho y dependiente de  $\Lambda$ .

## 2.2 TEOREMA A BAJAS TRANSFERENCIAS DE MOMENTO PARA LA AMPLITUD DE INTERCAMBIO DE DOS FOTONES EN LA COLISION ELASTICA LEPTON-HADRON

En el estudio de la amplitud para la colisión leptón-hadrón mediada por dos fotones ( $T(2\gamma)$ ), la principal dificultad se encuentra en el tratamiento del propagador hadrónico entre los fotones intercambiados: la contribución de la colisión Compton virtual, fuera de la dirección hacia adelante, no puede ser teóricamente controlada. Un método de abordar el problema consiste en obtener las amplitudes invariantes del proceso a partir de establecer relaciones de dispersión sobre ellas, de forma que, sus partes absorptivas se consiguen por medio de una relación de unitariedad en términos de las amplitudes Compton reales de hadrones y leptones a baja energía. Esto requerirá estudiar las partes absorptivas de las amplitudes en el canal  $t$  debidas a la contribución al corte

de unitariedad correspondiente a estados intermedios de dos fotones reales. Este estudio se realiza en la zona no física del canal  $t$  ( $t \gtrsim 0$ ) por la posibilidad de conectar con los resultados rigurosos de los teoremas a baja energía para la amplitud Compton de hadrones.

Es conocido, de hecho, que la amplitud Compton de hadrones consta de una contribución "polo" determinada por su carga y momento magnético y una contribución del "continuo" que a los órdenes que estamos interesados viene descrita por las polarizabilidades hadrónicas eléctrica y magnética. Esta contribución será suficiente para controlar los términos no analíticos en el momento transferido  $t$ , tales como  $\sqrt{-t}$  y  $-t \log(-t)$  para la amplitud  $T(2\gamma)$ .

Puesto que es conocido que los potenciales de interacción de corto alcance dan lugar a contribuciones analíticas a la amplitud de colisión (serie de potencias enteras de la transferencia de momento), el método expuesto permitirá encontrar el comportamiento de largo alcance de la amplitud  $T(2\gamma)$ .

Este resultado, obtenido bajo supuestos generales de unitariedad, analiticidad, invarianza gauge y covarianza Lorentz es, por tanto, de validez general y puede presentarse como un teorema que expresa la amplitud de intercambio de dos fotones, a cualquier energía y bajo momento transferido, en función de los parámetros electromagnéticos de la estructura hadrónica.

- El problema planteado tratará del cálculo de las amplitudes de helicidad en el canal  $s$  para un proceso de colisión electromagnético elástico

leptón-hadrón:

$$l + h \rightarrow l + h$$

con leptón de espín  $\frac{1}{2}$  y masa  $m$  y hadrón de espín cero y masa  $M$ , debidos al intercambio de dos fotones:  $T_{\lambda\lambda'}^{(s)}(2\gamma)$ , cuyo diagrama representamos:

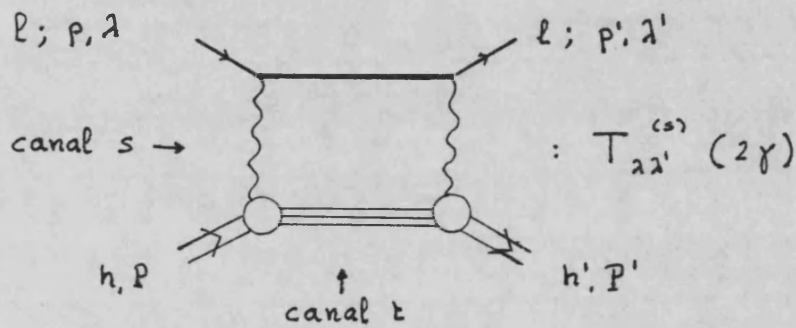


Fig 1: Amplitud de colisión mediada por dos fotones.

Un cálculo directo del diagrama implicaría el conocimiento del propagador hadrónico o, como se dijo, el estudio de la amplitud Compton virtual para hadrones fuera de la dirección hacia adelante. En lugar de ello, el procedimiento seguido (BP81) consiste en considerar el proceso asociado en el canal t:

$$l + \bar{l} = h + \bar{h}$$

cuyas amplitudes de helicidad  $T_{\lambda\lambda'}^{(t)}(2\gamma)$  pueden relacionarse con las correspondientes en el canal  $s$ , por medio de una rotación de Wigner (MS) y, obteniendo información acerca de las amplitudes en el canal  $t$ , trasladarla mediante hipótesis de analiticidad y propiedades de cruce de las amplitudes de colisión, (MA58), a las correspondientes del canal  $s$ .

### 2.2.1. Amplitudes de helicidad y amplitudes invariantes.

Las amplitudes  $T_{\lambda\lambda'}^{(t)}(2\gamma)$  no están libres de problemas cinemáticos pero siempre podemos encontrar una base de tensores invariantes cinemáticos en función de la cual en un proceso de este tipo puedan escribirse (CG57) las amplitudes:

$$T_{++}^{(t)}(s,t) = -2(m^2 - t/4)^{1/2} A(s,t) - 2m(M^2 - t/4)^{1/2} B(s,t) \cos \varphi \quad (3)$$

$$T_{+-}^{(t)}(s,t) = \sqrt{t} (M^2 - t/4)^{1/2} B(s,t) \sin \varphi$$

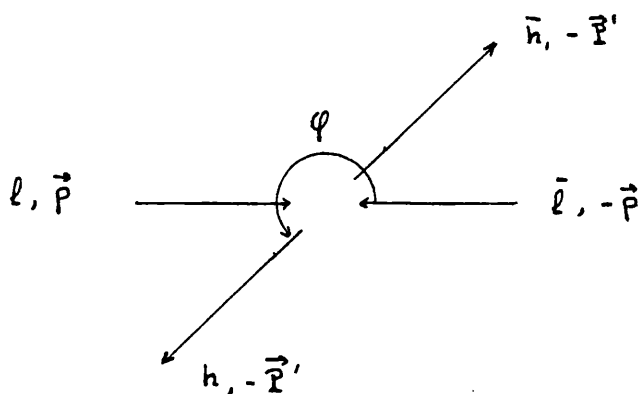


Fig. 2: Cinemática en el sistema centro de masas del canal  $t$ .

siendo  $s$  y  $t$  los invariantes de Mandelstam en el canal  $s$ :

$$S = (p+P)^2, \quad t = (p'-p)^2$$

que determinan las regiones físicas de  $A(s,t)$  y  $B(s,t)$  en los distintos canales  $s$  y  $t$ :

$$\text{canal } s: \quad s > (m+M)^2, \quad t < 0$$

$$\text{canal } t: \quad t > 4M^2, \quad s < 0$$

Las amplitudes invariantes  $A(s,t)$ ,  $B(s,t)$  están libres de singularidades y ceros cinemáticos y su estructura analítica la determina la hipótesis de Mandelstam, es decir, depende sólo de las contribuciones de unitariedad en los tres canales. Por ello estas amplitudes describen un proceso en cualquiera de sus canales sin más que realizar una prolongación analítica de las mismas con sus variables  $s$  y  $t$  en las zonas físicas correspondientes. Puesto que las zonas físicas reposan sobre los cortes de unitariedad, necesitamos una prescripción para realizar la prolongación analítica de un canal a otro: consideramos la hoja física a partir de dar una pequeña parte imaginaria  $i\epsilon$  a la variable asociada a la energía en cada canal, la amplitud física se encontrará tomando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Con estas propiedades y la rotación de Wigner encontramos la relación de las amplitudes invariantes con las amplitudes de helicidad en el canal  $s$ :



$$T_{++}^{(s)}(s,t) = [2m A(s,t) + (s - M^2 - m^2) B(s,t)] \cos \theta_s/2$$

$$T_{+-}^{(s)}(s,t) = - \left[ \frac{s + m^2 - M^2}{\sqrt{s}} A(s,t) + \frac{m(s - m^2 + M^2)}{\sqrt{s}} B(s,t) \right] \sin \theta_s/2 \quad (4)$$

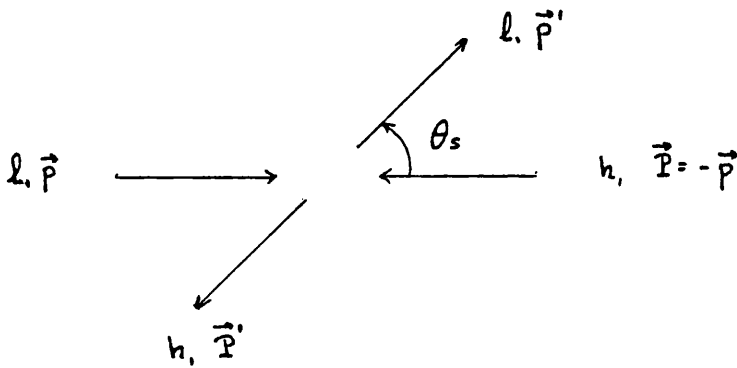


Fig. 3: Cinemática en el sistema centro de masas del canal s.

Notar que las amplitudes de helicidad  $T_{--}^{(s)}$  y  $T_{++}^{(s)}$  se relacionan directamente con las anteriores para un proceso invariante bajo paridad:

$$T_{--} = T_{++} , \quad T_{-+} = - T_{+-}$$

como es el caso de los procesos electromagnéticos.

### 2.2.2. Relaciones de dispersión sobre las amplitudes invariantes.

Como apuntamos en la introducción del capítulo y comentaremos en el apartado siguiente, a partir de las amplitudes Compton para hadrones y leptones y la relación de unitariedad podemos obtener información sobre las partes imaginarias de las amplitudes invariantes.

Puesto que conocemos la estructura analítica de estas amplitudes, podemos establecer relaciones de dispersión sobre ellas de manera que, para valores fijos de  $s$  y en la zona no física (fig 4) delimitada por los umbrales de las zonas físicas en los tres canales para poder asegurar que al realizar la prolongación analítica del canal  $t$  al  $s$  estemos en la zona física, obtenemos para  $A(s,t)$ :

$$\begin{aligned}
 A(s,t) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dt' \frac{Abs A(s,t')}{t'-t} \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{(m-m)^2-s} dt' \frac{Abs A(s,t')}{t'-t}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

y una relación análoga para  $B(s,t)$ .

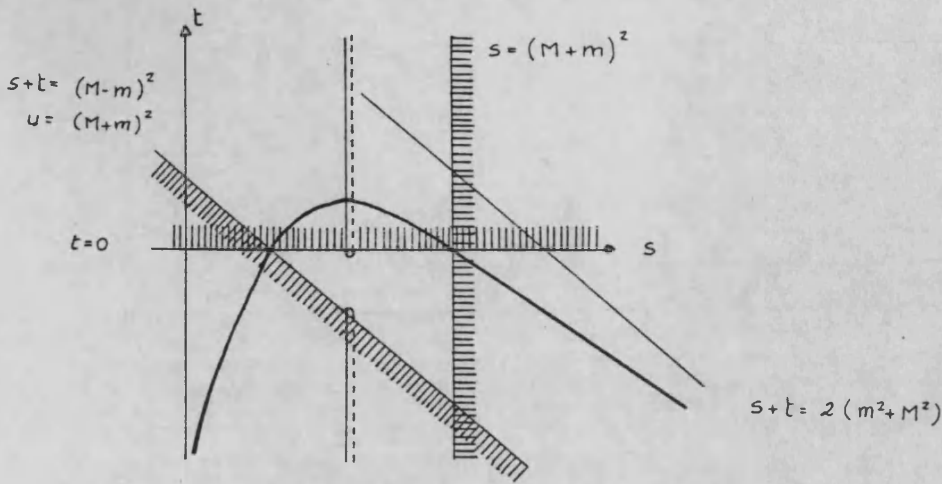


Fig. 4: Relaciones de dispersión a  $s$  fijo.

El límite superior de la segunda integral viene dado por el umbral absoluto de unitariedad en el canal  $u$ :

$$t = (M-m)^2 - s \text{ a } u = u_0 = (m+M)^2$$

mientras que la primera integral está determinada por el corte de unitariedad en el canal  $t$  (umbral de producción de dos fotones reales intermedios).

Estudiamos el comportamiento de ambas integrales a pequeños valores de  $t$  para poder conectar con las amplitudes Compton a bajas energías. Si  $(M-m)^2 - s < t < 0$ , podemos desarrollar la segunda integral en serie de potencias enteras de  $t$  de forma que dé una contribución analítica a la amplitud invariante (i.e. corresponde a interacción de corto alcance que no será predicha por el teorema). En la primera integral, debido al límite inferior, el valor de  $t'$  puede ser arbitrariamente pequeño y no podemos seguir el mismo procedimiento. Sin embargo podemos

introducir un corte  $\Lambda$  de forma que la integral sea dividida en:

$$\int_0^{\Lambda} dt' \frac{\text{Abs } A(s, t')}{t' - t} + \int_{\Lambda}^{+\infty} dt' \frac{\text{Abs } A(s, t')}{t' - t}$$

y un tratamiento similar al anterior sobre la segunda integral para valores de  $|t| < \Lambda$  dará lugar a nuevos términos analíticos en los que no estamos interesados. Por tanto, la amplitud invariante puede escribirse:

$$A(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Lambda} dt' \frac{\text{Abs } A(s, t')}{t' - t} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (6)$$

Y la parte no analítica, correspondiente a la interacción de largo alcance, en un entorno de  $t=0$ , proviene de la contribución del corte de unitariedad en el canal  $t$  a las relaciones de dispersión.

Por otra parte, posibles sustracciones en la relación de dispersión (5) no preocuparán puesto que son debidas al comportamiento de la amplitud a grandes  $t$ , es decir a cortas distancias.

Las partes de  $A(s, t)$  que serán controladas por este procedimiento dependerán del parámetro

$\Lambda$  introducido que juega el papel de una escala en la estructura hadrónica.

2.2.3. Relación de unitariedad de las amplitudes invariantes.

La información que queremos obtener sobre las amplitudes de helicidad la obtenemos a través de sus partes imaginarias mediante la relación de unitariedad en el canal  $t$  que, considerando la contribución de los dos fotones intermedios y teniendo en cuenta que el proceso es electromagnético y, por tanto, invariante bajo inversión temporal, se escribe:

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \bar{h} h | T_p(2\gamma) | \bar{l} l \rangle = \\ = \frac{-1}{128 \pi^2} \sum_{\lambda \bar{\lambda}} \int d\Omega \langle \gamma \bar{\gamma} | T_p | h \bar{h} \rangle^* \langle \gamma \bar{\gamma} | T_p | h \bar{h} \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $d\Omega$  es el elemento de volumen de espacio físico referido a los ángulos de los dos fotones intermedios en el centro de masas. Por medio de esta relación se obtiene la parte imaginaria de la amplitud de helicidad a partir de las amplitudes Compton para hadrones y leptones con dos fotones reales.

En este punto es preciso hacer dos comentarios respecto a la relación de unitariedad:

La ecuación (7) es estrictamente válida para valores de  $t$  en la zona física del canal  $t$ :  $t > 4 M^2 > 4m^2$ , para los cuales el término de la

derecha toma valores reales. Sin embargo, para conectar con las partes absorptivas escritas en las relaciones de dispersión (6) es necesario ir a la zona no física  $t \gtrsim 0$  lo cual requiere realizar una prologación analítica de la ecuación (7) en la que en general obtendremos valores no reales; de todos modos los factores cinemáticos que aparecen en (3) tampoco serán reales en esas zonas de forma que las partes absorptivas de las amplitudes invariantes, en las que estamos interesados, serán reales. De esta forma, la relación de unitariedad puede entenderse sobre las amplitudes invariantes y una comparación directa de (3) y (7) nos proporcionará las partes absorptivas de dichas amplitudes.

Por otra parte, si calculásemos  $t$  en la zona física no podríamos obtener la deseada conexión con las amplitudes Compton a bajas energías que es la parte controlada por los parámetros electromagnéticos del hadrón, de aquí que sea conveniente la prolongación analítica de (7) y tratar directamente la relación en el canal  $t$  no físico. Con esto se consigue determinar, a bajas  $t$ , la parte del propagador hadrónico que incluía el conocimiento de la amplitud Compton virtual para los hadrones fuera de la dirección hacia adelante con las amplitudes Compton para fotones reales a bajas energías (término de la derecha de la ecuación 7).

#### 2.2.4. Cálculo de las amplitudes Compton.

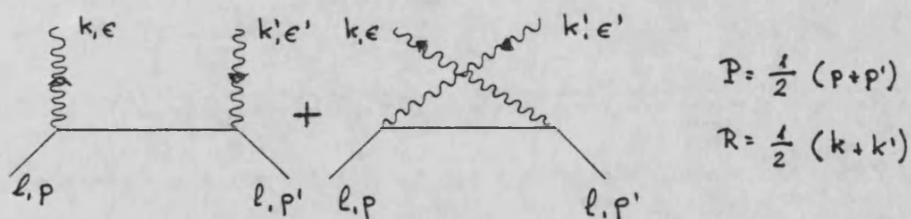
El primer paso será por tanto preparar, a partir de las amplitudes Compton, el término de la integral de unitariedad.

Para el caso de las amplitudes Compton, la descomposición en amplitudes invariantes, similar a la realizada en (3) tiene un problema adicional debido a la masa nula de fotones: sobre las amplitudes espinoriales aparecen nuevas condiciones en virtud de la invarianza gauge. Una forma sistemática de tratar el problema fue dada por Bardeen y Tung (BT68) cuyo método seguiremos en la descomposición de las amplitudes.

En el caso del cálculo de la amplitud  $\langle \gamma \bar{l} | T_p | l \bar{l} \rangle$ , recurrimos al proceso Compton para leptones de espín  $\frac{1}{2}$ :

$$l + \gamma \rightarrow l + \gamma$$

y, debido a la naturaleza puntual de los leptones, los diagramas que contribuyen a la amplitud son calculados directamente a partir de las reglas de Feynman de la electrodinámica cuántica para fermiones. Los diagramas que contribuyen son:



y el tensor leptónico se escribe:

$$L^{\mu\nu} \epsilon'_\mu \epsilon_\nu^* = 4 D_s^{(l)} D_u^{(l)} \left\{ m \tilde{J}_1^{\mu\nu} + \tilde{J}_2^{\mu\nu} + \tilde{J}_3^{\mu\nu} \right\} \quad (8)$$

siendo  $D_s^{(\ell)} = \frac{1}{2k^2 + 2PK}$  ,  $D_u^{(\ell)} = \frac{1}{2k^2 - 2PK}$  los propagadores

fermiónicos con cuádrimomentos totales en los canales s y u, y los covariantes cinemáticos  $\mathcal{J}_n^{\mu\nu}$  son tres de los que aparecen en la referencia (BT68).

Para estudiar la colisión Compton con hadrones de espín cero, ( $\gamma + h \longrightarrow \gamma + h$ ) consideramos las dos contribuciones que la constituyen: una parte polo, esencialmente coherente, que depende de la carga eléctrica del hadrón, y una parte debida al continuo que depende de las polarizabilidades eléctrica y magnética del hadrón y describe la respuesta de la estructura hadrónica a los campos eléctricos y magnéticos inducidos por el fotón. Puesto que las diferencias entre las dos contribuciones únicamente se deben a la dinámica del proceso, podemos realizar para ambas la misma descomposición invariante gauge:

$$H^{\mu\nu} \epsilon'_\mu \epsilon_\nu = [B_1 \mathcal{L}_1^{\mu\nu} + B_2 \mathcal{L}_2^{\mu\nu}] \epsilon'_\mu \epsilon_\nu \quad (9)$$

Siendo  $\mathcal{L}_{1,2}^{\mu\nu}$  los covariantes cinemáticos invariantes gauge sugeridos por Bardeen y Tung (BT68):

$$\mathcal{L}_1^{\mu\nu} = k \cdot k' g^{\mu\nu} - k^\mu k'^\nu \quad ; \quad K = \frac{1}{2} (k + k')$$

$$\mathcal{L}_2^{\mu\nu} = k \cdot k' R^\mu R^\nu - K \cdot R (R^\mu k'^\nu + k^\mu R^\nu) + (K \cdot R)^2 g^{\mu\nu} \quad ; \quad R = \frac{1}{2} (k - k')$$

y  $B_{1,2}$  las amplitudes invariantes libres de problemas cinemáticos.

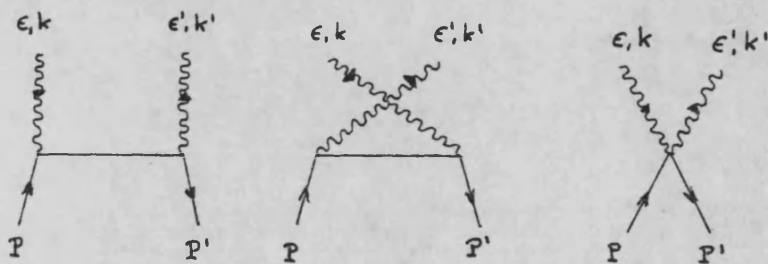
El cálculo de la contribución polo (idéntica



a la contribución de Born para el caso de hadrones de espín cero) se realiza directamente mediante las reglas de Feynman de la electrodinámica cuántica para bosones de espín cero.

Los diagramas que contribuyen son:

$$q = k - k' \quad , \quad R = \frac{1}{2} (P + P') \quad , \quad K = \frac{1}{2} (k + k')$$



dando lugar a una contribución a la amplitud debida a la parte polo:

$$\begin{aligned} B_1^P &= -z^2 (D_s^{(h)} + D_u^{(h)}) e^4 \\ B_2^P &= 8z^2 D_s^{(h)} D_u^{(h)} e^4 \end{aligned} \quad (10)$$

siendo  $D_s^{(h)} = \frac{1}{2K^2 + 2RK}$  ,  $D_u^{(h)} = \frac{1}{2K^2 - 2RK}$  , los propagadores hadrónicos con cuádrimomentos totales en los canales s y u.

La contribución a la amplitud debida a la parte del continuo se introduce mediante dos amplitudes invariantes, analíticas en un entorno de  $q^2 = 0$  y relacionadas con las polarizabilidades hadrónicas (BEF74), a  $q^2 = 0$  por:

$$B_1^C = -2M \frac{4\pi}{e^2} e^4$$

$$B_2^c = \frac{2M}{R^2} \frac{4\pi}{e^2} (\alpha + \beta) e^4 \quad (11)$$

La estructura analítica de  $B_{1,2}^c$ , pares bajo cruce, requiere que los términos desconocidos sean  $\mathcal{O}(t)$  respecto de las polarizabilidades hadrónicas. Como se verá será suficiente para los propósitos del teorema con los términos  $q^2 = 0$ .

### 2.2.5. Cálculo de las partes absorptivas.

Con los resultados (8), (9), (10) y (11), puede plantearse la integral de unitariedad. Sumando sobre las polarizaciones de los fotones:

$$\text{Im} \langle \bar{h} h | T_p(z\gamma) | \bar{\ell} \ell \rangle = \frac{-i}{128\pi^2} \int d\Omega H^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \quad (12)$$

La obtención de las partes absorptivas requiere la contracción de los tensores Compton y la realización de la integral sobre ángulos (BP81).

Para obtener una expresión manejable que conduzca a un resultado analítico en las integrales de dispersión, realizamos un desarrollo en serie según  $t/4m^2$  para la contribución del continuo, lo que llevará a expresiones válidas en el caso de muones, y nos quedamos con el término dominante en  $M$  frente a cualquier otro parámetro en la contribución polo. Esto conducirá a que el resultado obtenido para esta contribución sea válido tanto para muones como para electrones. Estas restricciones, si bien

afectan a la validez de los resultados analíticos obtenidos, no merman la generalidad del teorema final.

La comparación de (12) y (3) proporciona las partes absortivas de las amplitudes invariantes, para las contribuciones polo y continuo se obtienen:

$$\text{Abs } A^p(2\gamma) = - \frac{M Z^2 e^4}{4\sqrt{E} (1-\omega^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2m(1-\omega^2)^{1/2} + \sqrt{E}}$$

$$\text{Abs } B^p(2\gamma) = \frac{\omega Z e^4}{4t (1-\omega^2)^{1/2}} \left[ \frac{\sqrt{E}}{2m(1-\omega^2)^{1/2} + \sqrt{E}} - 2 \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Abs } A^c(2\gamma) = & - \frac{m M e^4}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{e^2} \left\{ \left[ \alpha(1-\omega^2) + \beta(3+\omega^2) \right] \frac{\pi\sqrt{E}}{16m} + \right. \\ & \left. + \left[ \alpha(1+4\omega^2) + \beta(7+4\omega^2) \right] \frac{t}{24m^2} \right\} + \mathcal{O}(t\sqrt{E}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Abs } B^c(2\gamma) = & - \frac{m e^4}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{e^2} \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} \omega \left\{ \frac{\pi\sqrt{E}}{2m} - \right. \\ & \left. - \frac{4t}{3m^2} \right\} + \mathcal{O}(t\sqrt{E}) \end{aligned} \tag{12}$$

donde  $\omega = E_{\text{Lab}}/m = \frac{1}{2Mm} (S-m^2-M^2)$  y, para valores de  $S < S_0$ , en la zona no física donde se ha realizado la relación de dispersión (fig 4), corresponden valores

de  $\omega < 1$ .

### 2.2.6. Amplitudes a bajos t. Teorema.

El primer paso para obtener las amplitudes de helicidad será realizar la integral de dispersión (6), para lo cual consideramos la variable  $t$  en la región física del canal  $s$  ( $t < 0$ ) pero mantendremos la variable  $\omega$  fuera de ella,  $|\omega| < 1$ , como corresponde al contorno escogido al realizar la relación de dispersión. El resultado final se obtendrá realizando una prolongación analítica de las amplitudes sobre la hoja física de la variable  $s$ : la región del canal  $s$  físico corresponde a valores de  $s$  con una parte imaginaria, esto significa que el punto final de la continuación analítica debe tener una parte imaginaria de  $\omega$  y, en consecuencia, es apropiada:

$$(1 - \omega^2)^{1/2} \rightarrow i (\omega^2 - 1)^{1/2}$$

cuando vamos de  $|\omega| < 1$  a la región física  $\omega > 1$ .

Realizando las integrales de dispersión (BP81 ecs. V.5 a V.9) obtendremos las contribuciones de las amplitudes invariantes debidas al polo y al continuo

$$A^p(2\gamma) = \frac{M z^2 e^4}{4\pi (\omega^2 - 1)^{1/2}} \left[ \frac{\pi}{\sqrt{-t}} \cdot \frac{1}{2m (\omega^2 - 1)^{1/2} + \sqrt{-t}} + \frac{2i}{4m^2 (\omega^2 - 1) + t} \ln \frac{2m (\omega^2 - 1)^{1/2}}{\sqrt{-t}} \right]$$

$$B^p(2\gamma) = -\frac{\omega}{M} A^p(2\gamma) - \frac{i z^2 e^4}{2\pi t (\omega^2 - 1)^{1/2}} \ln O_+ \quad (13)$$

La divergencia infrarroja puede tratarse dando una masa no nula al fotón, su efecto sin embargo no es relevante para los observables que dependen de la parte real de las amplitudes ec. (1).

$$\begin{aligned}
 A^c(2\gamma) = & - \frac{m M e^4}{4\pi^2} \cdot \frac{4\pi}{e^2} \left\{ a(\omega, \Lambda) - [\alpha(1-\omega^2) - \beta(3+\omega^2)] \frac{\pi^2 \sqrt{-t}}{16m} - \right. \\
 & \left. - [\alpha(1+4\omega^2) + \beta(7+4\omega^2)] \frac{t}{24m^2} \ln \frac{-t}{\Lambda} \right\} + \mathcal{O}(t) \\
 B^c(2\gamma) = & - \frac{m e^4}{4\pi^2} \cdot \frac{4\pi}{e^2} \left\{ b(\omega, \Lambda) - \omega(\alpha+\beta) \frac{\pi^2 \sqrt{-t}}{4m} + \right. \\
 & \left. + \omega(\alpha+\beta) \frac{t}{3m^2} \ln \frac{-t}{\Lambda} \right\} + \mathcal{O}(t) \tag{14}
 \end{aligned}$$

donde los términos  $a(\omega, \Lambda)$  y  $b(\omega, \Lambda)$ , dependientes de  $\Lambda$ , no podrán conocerse a través de este estudio, mientras que los primeros términos no analíticos  $\sqrt{-t}$  y  $t \ln \frac{-t}{\Lambda}$  quedan totalmente determinados.

Las ecuaciones (14) pueden resumirse diciendo que la contribución del continuo a las amplitudes invariantes tiene un desarrollo a bajos momentos transferidos:

$$c_1(\omega) + c_2(\omega) \sqrt{-t} + c_3(\omega) \ln \frac{-t}{\Lambda}$$

donde sólo el primer término  $C_1(\omega)$  contiene información acerca de la interacción de corto alcance y, por tanto, no puede ser predicho por el procedimiento empleado.

Obtenidas las amplitudes invariantes es inmediato construir las amplitudes de helicidad en el canal  $s$  cuyas partes reales son apropiadas para la construcción de observables (BP80).

Recurriendo a las ecs. (4) se encuentran las contribuciones del polo y del continuo:

$$T_{++}^p(2\gamma) = - \frac{m M z^2 e^4}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{\sqrt{-t}} \frac{\sqrt{\omega^2-1}}{2m\sqrt{\omega^2-1} + \sqrt{-t}} + \right. \\ \left. + \frac{2i\sqrt{\omega^2-1}}{4m^2(\omega^2-1) + t} \ln \frac{2m\sqrt{\omega^2-1}}{\sqrt{-t}} + \frac{2i\omega^2}{t\sqrt{\omega^2-1}} \ln O_+ \right] \cos \frac{\theta_s}{2}$$

$$T_{+-}^p(2\gamma) = i \frac{m M z^2 e^4}{\pi t \sqrt{\omega^2-1}} \left[ \ln O_+ \right] \sin \frac{\theta_s}{2} \quad (15)$$

$$T_{++}^c(2\gamma) = - \frac{e^2}{4\pi} m^2 M g \left[ c(\omega, \lambda) - \right. \\ \left. - [\alpha(1+7\omega^2) + \beta(-3+5\omega^2)] \frac{\pi\sqrt{-t}}{16m} - \right. \\ \left. - [\alpha(1-12\omega^2) + \beta(7-12\omega^2)] \frac{t}{24m^2} \ln \frac{-t}{\lambda} \right] \cos \frac{\theta_s}{2}$$

$$T_{+-}^c(2\gamma) = \frac{e^2}{4\pi} m^2 M \omega g \left[ d(\omega, \lambda) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \alpha (5 - \omega^2) + \beta (1 - \omega^2) \frac{\pi^2 \sqrt{-t}}{16 m} + \right. \\
& \left. + \left[ \alpha (15 - 4\omega^2) + \beta (9 - 4\omega^2) \frac{t}{24 m^2} \ln \frac{-t}{\Lambda} \right] \right] \sin \frac{\theta_s}{2} \quad (16)
\end{aligned}$$

como antes, los términos  $d(\omega, \Lambda) = a(\omega, \Lambda) + \frac{1}{\omega} b(\omega, \Lambda)$  y  $C(\omega, \Lambda) = a(\omega, \Lambda) + \omega b(\omega, \Lambda)$  permanecen desconocidos por contener información acerca de la interacción de corto alcance.

Este resultado, ecs. 15 y 16, constituye la expresión analítica del teorema para la amplitud mediada por dos fotones a bajos momentos transferidos en la colisión elástica leptón-hadrón en el caso particular del muón. Dicho teorema se expresa como sigue:

"Sea  $T_{\lambda\lambda}(s,t)$  las amplitudes de helicidad para la colisión leptón-hadrón debida al intercambio de 2 fotones. Bajo supuestos de covarianza Lorentz, invarianza gauge, unitariedad y analiticidad, tales amplitudes, escritas como  $T_{\lambda\lambda}^P(s,t) + T_{\lambda\lambda}^C(s,t)$  están dadas por la ecuación (15) para la contribución polo mientras  $T_{\lambda\lambda}^C(s,t)$  tiene el desarrollo en  $t$  dado por la ec.(16)".

Las expresiones explícitas, como se indicó, son apropiadas para muones (término del continuo) y en el término del polo se tomó el límite  $M \rightarrow \infty$ .

El hecho más relevante del teorema es que las contribuciones del continuo a las amplitudes de helicidad tienen el desarrollo:

$$k_1(\omega) + k_2(\omega) \sqrt{-t} + k_3(\omega) t \log(-t) + \mathcal{O}(t) \quad (17)$$

donde el término independiente de  $t$  no puede obtenerse por este procedimiento.

### 2.3 COLISION LEPTON-HADRON MEDIADO POR DOS FOTONES A ENERGIA UMBRAL DEL LEPTON.

#### 2.3.1. Problema planteado por el teorema a bajas transferencias de momento.

El teorema anterior deja abierto el problema relativo al primer término, independiente del momento transferido, que, puesto que contiene información acerca de la contribución a la amplitud de la interacción de corto alcance, a partir de la ecuación (6) hemos renunciado a su cálculo. El procedimiento para ello tendrá que ser por tanto, totalmente distinto al empleado en el teorema y constituirá la parte central de la discusión en esta memoria.

De la conclusión del teorema (17), puede observarse sin embargo que este término permanece aún cuando consideremos la colisión entre leptón y hadrón en la dirección hacia adelante mientras que los restantes términos se anulan al considerar el caso en el que el momento transferido sea cero i.e.  $t = 0$ .



De las expresiones (16) tomando  $t = 0$ , y por tanto  $\sin \theta_s/2 = 0$ ,  $\cos \theta_s/2 = 1$  se obtiene el resultado de las contribuciones del continuo a las amplitudes de helicidad en la dirección hacia adelante:

$$T_0^c(2\gamma)_{++} = - \frac{m^2 M e^4}{2 \pi^2} c(\omega) \quad (18)$$

$$T_0^c(2\gamma)_{+-} = 0$$

(El subíndice cero indica dirección hacia adelante)

La amplitud con cambio de helicidad se anula cinemáticamente en la dirección hacia adelante debido a la conservación de la componente del momento angular en la dirección del momento leptón, mientras que la componente sin cambio de helicidad podría proporcionar conocimiento acerca del término independiente del momento, no predicho por el teorema. Con esto vemos que el cálculo de dicho término podría plantearse en términos del cálculo de la amplitud en la dirección hacia adelante para la colisión elástica leptón-hadrón mediado por dos fotones a cualquier energía del leptón.

Como se comentó al principio del capítulo, tratamientos dados en la literatura al cálculo de esta amplitud pueden encontrarse en (BJ73) y (BJ74) donde debido a los requerimientos de los problemas planteados en estas referencias se toma el leptón

con energía umbral. Es interesante, sin embargo, considerar algunos aspectos del segundo de los citados trabajos puesto que en capítulos posteriores podremos comparar resultados que vayamos obteniendo con los límites calculados en él.

2.3.2. Contribución de la polarizabilidad a los niveles de energía del Helio ( $1^{-4}\text{He}$ ) .

El problema se plantea en términos del cálculo de la contribución a la separación de niveles energéticos ( $2s-2p$ ) debida a la polarizabilidad hadrónica, es decir, debida a excitaciones virtuales del núcleo. Estas excitaciones virtuales se interpretan como la interacción entre leptón-núcleo mediada por dos fotones y por ello pueden calcularse relacionando la energía de separación con el elemento de matriz correspondiente a dicha interacción:  $T(2\gamma)$ .

Esta cantidad puede expresarse a partir de los diagramas:

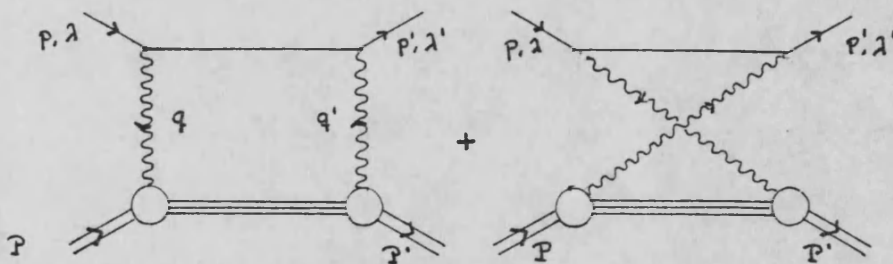


Fig 5: Diagramas de intercambio de dos fotones para la colisión leptón-núcleo.

Y por tanto contendrá una integral de cuatro dimensiones sobre las amplitudes Compton virtuales, para el núcleo, en particular  ${}^4\text{He}$ . En física atómica, sin embargo, puede simplificarse en muchos casos el problema considerando primero que el rango de interacción es muy pequeño comparado con las dimensiones atómicas, el núcleo puede considerarse muy pesado y tratarlo en reposo y por último, puesto que la velocidad típica de los leptones es del orden de  $Z e^2/4\pi$ , a bajos  $Z$  puede considerarse una buena aproximación ignorar los trimomentos  $p, p'$  del leptón comparados con su masa.

Con estas aproximaciones, la separación de los niveles energéticos aparece relacionada a la amplitud de interacción leptón-núcleo mediada por dos fotones en la dirección hacia adelante y a la función de onda del leptón en el origen:

$$\Delta E_{nl} = |\psi_{nl}(0)|^2 \frac{T_0(2\gamma)}{4mM} \quad (19)$$

donde la amplitud  $T(2\gamma)$  se calcula a energía umbral del leptón <sup>se</sup> puede desarrollar en términos del tensor hadrónico proveniente de la parte inferior de los diagramas (fig.5) que contiene la amplitud Compton virtual sobre el núcleo considerada en la dirección hacia adelante y por otra parte el tensor leptónico proveniente de la parte superior de los diagramas. El resultado, si  $m$  ( $M$ ) es la masa del leptón (núcleo), puede escribirse:

$$\Delta E_{nl} = \frac{-ie^4}{2mM} |\psi_{nl}(0)|^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \cdot \frac{T_{\mu\nu} L^{\mu\nu}}{(q^2)^2 (q^2 - 2mq^0)} \quad (20)$$

con  $L^{\mu\nu} = p^\mu (p^\nu - q^\nu) + p^\nu (p^\mu - q^\mu) + g^{\mu\nu} m q^0$ ,  $p^\mu = (m, 0)$   
 y  $T_{\mu\rho}$  el tensor hadrónico en el que es usual realizar la  
 descomposición invariante gauge (ZE72)

$$T_{\mu\rho} = \left( g_{\mu\rho} - \frac{q_\mu q_\rho}{q^2} \right) T_L(q^0, q^2) +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{M^2} \left( P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( P_\rho - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\rho \right) - \left( g_{\mu\rho} - \frac{q_\mu q_\rho}{q^2} \right) \left( 1 - \frac{q^0^2}{q^2} \right) \right\} T_2(q^0, q^2)$$

(21)

siendo  $P^\mu = (M, 0)$ .

Omitiendo detalles del desarrollo puesto que -  
 serán dados en capítulos sucesivos, relacionamos las am-  
 plitudes  $T_2(q^0, q^2)$  y  $T_L(q^0, q^2)$  con cantidades medi-  
 bles: realizamos relaciones de dispersión sobre la varia-  
 ble  $q^0$ , a  $q^2$  fijo, y escribimos la parte  $\text{Im}T_{L,L}(q^0, q^2)$  en  
 términos de las funciones de estructura  $W_{i,L}(q^0, q^2)$  medi-  
 bles en la colisión inelástica de leptones con núcleos.

Si llamamos  $\nu'$  a la variable introducida en las  
 relaciones de dispersión y sustraemos las contribuciones  
 "polo" de dichas relaciones, se obtiene la expresión pa-  
 ra  $\Delta E_{ne}$ .

$$\Delta E_{ne} = -2 \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{|\psi_{ne}(0)|^2}{mM} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \int_{\nu_0}^\infty \nu' d\nu' \left\{ C_L W_L(\nu', -t) + \right.$$

$$\left. + C_2 W_2(\nu', -t) \right\}$$

$$C_L = -2 - \frac{4m^2 t}{t^2 - 4m^2 \nu'^2} \left[ \left( 1 - \frac{t}{2m^2} \right) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{t}} - \right.$$

$$\left. - \left( 1 - \frac{2\nu'^2}{t} \right) \sqrt{1 + \frac{t}{4\nu'^2}} \right] \quad (22)$$

$$C_2 = 2 \left\{ \frac{3}{2} + \frac{t}{4m^2} + \frac{\nu'^2}{t} - \frac{4m^2 t}{t^2 - 4m^2 \nu'^2} \left[ \frac{t(1 + t/4m^2)}{4m^2} \sqrt{1 + 4m^2/t} - \frac{\nu'^2}{t} \left(1 + \frac{\nu'^2}{t}\right) \sqrt{1 + \frac{t}{\nu'^2}} \right] \right\}$$

siendo  $\nu_0 = \nu_0(q^2)$  el umbral del continuo en las relaciones de dispersión para  $T_{2,L}(q^0, q^2)$ .

Para poder obtener una expresión manejable que podamos utilizar para casos realistas de muones y electrones, trataremos las excitaciones nucleares, reflejadas en las funciones de estructura  $W_{2,L}(q^0, q^2)$ , en la aproximación dipolar no retardada (BE83) en la que:

$$\begin{aligned} \frac{W_L}{-q^2} &\approx \frac{W_2}{-q^2} \approx \frac{W_1}{(q^0)^2} \approx \\ &\approx M \sum_{N \neq 0} |\langle N | D_z | 0 \rangle|^2 \delta(q^0 - q_N^0) \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $D_z$  es el operador dipolar. Esta aproximación, aunque es evidentemente incorrecta a grandes  $-q^2$ , garantiza el comportamiento al umbral  $-q^2 \rightarrow 0$ . En este límite, las funciones de estructura pueden relacionarse con la sección eficaz de fotoabsorción nuclear de forma que:

$$\sigma_\gamma(q^0) = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{M} \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{q^0 W_2(q^0, q^2)}{-q^2} \quad (24)$$

Con esto, la ec. (22) puede escribirse:

$$\Delta E_{n\ell} = - \left( \frac{e^2}{4\pi} \right) |\psi_{n\ell}(0)|^2 \frac{4m}{\pi^3} \cdot \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \sigma_{\gamma}(\nu')$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \int_0^{\sqrt{t}} d\xi (1-\xi^2)^{1/2} \frac{t + 2\xi^4/t}{(\nu'^2 + \xi^2)(t^2 + 4m^2\xi^2)} \quad (25)$$

Debido a la invarianza del integrando respecto del cambio  $t' = 4m^2\nu'^2/t$ , la integral sobre  $t$  vendrá dominada por la zona  $t \sim (2m\nu')^2$ , para un valor de  $\nu'$  fijo. Siendo  $m$  la masa del leptón, la física del problema cambiará totalmente al pasar de electrones a muones. Si aceptamos que las excitaciones virtuales del núcleo cumplen la relación  $2m_e < \nu' < 2m_{\mu}$ , en cada caso los valores de  $t$  a considerar serán:  $4m_e^2 \lesssim t \lesssim \nu'^2$  para electrones mientras que para muones  $\nu'^2 \lesssim t \lesssim 4m_{\mu}^2$ . Estudiamos el comportamiento de la ecuación (25) en estas condiciones:

### 2.2.2. Atomos muónicos.

En el límite no relativista, apropiado para muones, la separación de energía (25) se convierte en:

$$\Delta E_{n\ell} = - \left( \frac{e^2}{4\pi} \right) |\psi_{n\ell}(0)|^2 (2m_{\mu})^{1/2} \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'^{3/2}} \sigma_{\gamma}(\nu') \quad (26)$$

resultado dado en función de la regla de suma  $\sigma_{-3/2}$  para fotones.

Hay que hacer notar en este caso que, puesto que la masa del fotón virtual  $t^{1/2} \approx (2m_\mu \cdot \nu')^{1/2}$  no es mucho menor que la inversa del tamaño del sistema nuclear y habíamos tomado la aproximación dipolar no retardada (23), se esperan desviaciones respecto a este límite de fotones reales. Si introducimos un factor de forma distinto de la unidad, para estudiar la contribución de fotones virtuales, el resultado se aproxima más a la regla de suma  $\sigma_{-2}$  (BE83) cuyo significado físico está dado por la polarizabilidad eléctrica hadrónica:  $\alpha = \frac{1}{2} \pi^2 \sigma_{-2}$ .

#### 2.3.4. Átomos electrónicos.

En el caso de electrones, con  $t^{1/2} \approx (2m_e \nu')^{1/2}$ , el límite apropiado es el relativista de forma que la ec. (25) en este límite se convierte en:

$$\Delta E_{n\ell} \approx - \left( \frac{e^2}{4\pi} \right) |\psi_{n\ell}(0)|^2 5 m_e \frac{1}{2 \pi^2}$$

$$\int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \frac{\sigma_f(\nu')}{\nu'^2} \left[ \ln \frac{2\nu'}{m_e} + \frac{19}{30} + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^2}{\nu'^2} \ln \frac{\nu'}{m_e}\right) \right] \quad (27)$$

que, aparte del logaritmo es la regla de suma  $\sigma^{-2}$  asociada a la polarizabilidad eléctrica. La interpretación de este aspecto, puesto que  $t_e \sim 2m_e\nu'$  es pequeño respecto de la escala nuclear y de  $\nu'^2$ , es que la física nuclear contenida en este caso es la correspondiente a fotones reales. Por tanto es de esperar que este resultado (27) sea excelente para átomos electrónicos. Mientras que el resultado obtenido en (26) presente desviaciones en los casos de átomos muónicos.

La física contenida en los resultados obtenidos en (26) y (27) está relacionada con el término  $c(\omega)$  de la ec. (16) para el caso de energía umbral de los leptones, es decir  $\omega = 1$ , si se hubiese aplicado el tratamiento a un problema de colisión.

Comparando las ecuaciones (18), (19) con los resultados obtenidos en (26), (27), se obtienen los siguientes valores de  $C(1)$ :

$$C(1) = \frac{4\pi}{e^2} \frac{1}{\pi\sqrt{2}\eta_\mu} \sigma^{-3/2} \quad (28)$$

para el caso de muones.



mientras que

$$c(1) = \frac{4\pi}{e^2} \frac{5}{4} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \frac{\sigma_T(\nu')}{\nu'^2} \left[ \ln \frac{2\nu'}{m_e} + \frac{19}{30} + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^2}{\nu'^2} \ln \frac{\nu'}{m_e}\right) \right] \quad (28)$$

para el caso de electrones.

A efectos de poder comparar este límite con resultados que se obtendrán más tarde, será útil tener presente los resultados de la contribución del continuo a la amplitud sin cambio de helicidad calculada en la dirección hacia adelante:

para el caso de muones:

$$T_0^c(2\gamma)_{++} = -\frac{e^2}{4\pi} (2m_\mu)^{3/2} \frac{2M}{\pi} \sigma_{-3/2} \quad (29a)$$

y para el caso de electrones:

$$T_0^c(2\gamma)_{++} = -\frac{e^2}{4\pi} \frac{10 m_e^2 M}{\pi^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'^2} \sigma_T(\nu') \cdot \left[ \ln \frac{2\nu'}{m_e} + \frac{19}{30} + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^2}{\nu'^2} \ln \frac{\nu'}{m_e}\right) \right] \quad (29b)$$

Recordemos que estos resultados, a energía umbral del leptón en términos de reglas de suma para fotones reales, sólo son válidos en la aproximación dipolar no retardada para las funciones de estructura hadrónica.

## CAPITULO 3

Amplitud de colisión  $T_0(2\gamma)_{\lambda\lambda}^c$  en la  
dirección hacia adelante en términos  
de las funciones de estructura

Según comentamos en el capítulo anterior, el método para encontrar información acerca del término no predicho por el teorema a bajas transferencias de momento para la colisión elástica leptón-núcleo con dos fotones intermedios (ecs. 2.2 y 2.16), consistiría en resolver el problema del cálculo de dicha amplitud para la dirección hacia adelante. La contribución debida al continuo hadrónico en este caso permitiría obtener relaciones análogas a (2.29) para cualquier energía del leptón incidente, es decir, calcular  $C_1(\omega)$  de (2.18) con  $\omega = E_{\text{Lab}}/m$ .

El cálculo de las amplitudes de helicidad para el proceso de colisión electromagnética entre el leptón (partícula de espín  $\frac{1}{2}$ ) y el hadrón (partícula de espín 0) se plantea en el contexto de la electrodinámica cuántica. Es decir, consideramos que la dinámica del proceso viene totalmente descrita a partir del

Lagrangiano de interacción entre materia y radiación que tiene la forma:

$$\mathcal{L}_I(x) = A_\mu(x) J^\mu(x)$$

Siendo  $A_\mu(x)$  el campo del bosón mediador de la interacción, es decir el fotón, y  $J_\mu(x)$  la corriente que describe los campos de materia y que, en nuestro caso la haremos constar de dos partes: una parte leptónica,  $j_{lep}^\mu(x)$ , cuya forma explícita conocemos puesto que, en virtud de la naturaleza puntual de los leptones, puede ser descrita mediante campos de Dirac (partículas de spin  $\frac{1}{2}$ ), y otra parte hadrónica,  $j_{had}^\mu(x)$ , de estructura en principio compleja ya que, al no ser los hadrones partículas elementales, no puede describirse en función de campos fundamentales, su determinación explícita debe recurrir a un modelo determinado de interacciones fuertes lo cual va más allá de los propósitos de este trabajo y por ello mantendremos la estructura compacta de esta corriente sobre la que realizaremos un tratamiento general en términos de invarianza gauge, covarianza Lorentz y simetría de paridad para obtener información acerca de su estructura.

Con esto, el lagrangiano de interacción electromagnética entre materia y radiación lo escribiremos como:

$$\mathcal{L}_I(x) = e A_\mu(x) [j_{lep}^\mu(x) + j_{had}^\mu(x)] =$$

$$= e A_{\mu}(x) \left[ \bar{\Psi}(x) \gamma^{\mu} \Psi(x) + j_{had}^{\mu}(x) \right]$$

siendo  $\Psi(x)$  el campo del leptón, solución de la ecuación de Dirac libre, y "e" su carga en unidades de carga del protón.

Mediante este Lagrangiano, el diagrama de Feynman con 'n' vértices de interacción entre los campos de materia y el campo del fotón, viene descrito a partir del término  $S_n$  del desarrollo perturbativo del operador de colisión S:

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T(d_I(x_1) \dots d_I(x_n))$$

donde T (...) representa el producto ordenado en el tiempo de los campos que constituyen su argumento.

Así, mediante el término  $S_2$  podremos describir el proceso de colisión entre leptón y hadrón mediado por un fotón:

$$S_2 = \frac{(-i)^2}{2!} e^2 \int dx_1 dx_2 T(j_{lep}^{\mu}(x_1) A_{\mu}(x_1) j_{had}^{\lambda}(x_2) A_{\lambda}(x_2))$$

(1)

que corresponderá al diagrama de Feynman de la fig 1.

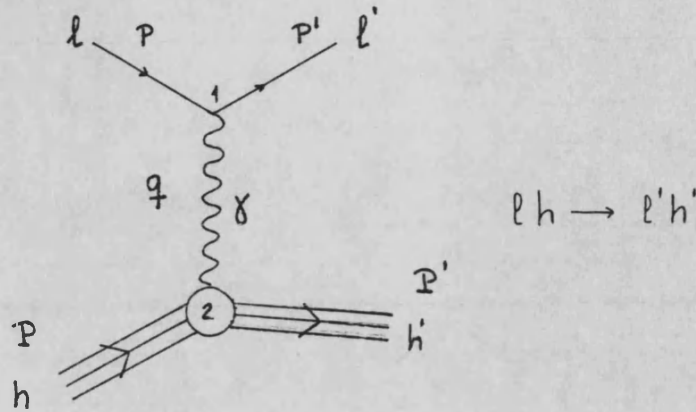


Fig 1: Interacción leptón-hadrón mediada por un fotón.

la estructura del vértice 2 del diagrama indica nuestro desconocimiento acerca de la corriente hadrónica.

Del mismo modo, el término  $S_4$  describirá los diagramas con cuatro vértices de interacción materia-radiación: polarización del vacío, corrección del vértice, corrección del propagador leptónico e interacción leptón-hadrón mediada por dos fotones. La parte del término  $S_4$  que describe este último tipo de interacción en el que estaremos interesados podemos escribirla como:

$$S_4 = (-i)^4 \frac{e^4}{4!} \int dx_1 \dots dx_4$$

$$T (j_{lep}^\mu (x_1) A_\mu (x_1) j_{had}^\lambda (x_2) A_\lambda (x_2)).$$

$$j_{lep}^\nu(x_3) A_\nu(x_3) j_{had}^\sigma(x_4) A_\sigma(x_4) \quad (2)$$

cuya interpretación en términos de diagramas de Feynman la describimos en la fig. 2.

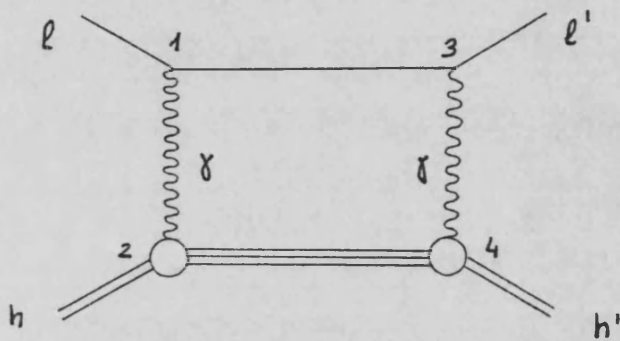


Fig 2: Interacción leptón-hadrón mediada por dos fotones.

De la misma forma que antes, la parte inferior del diagrama indica nuestro desconocimiento de la estructura de la corriente hadrónica que enlaza los vértices 2 y 4.

A partir de este término (2) del desarrollo perturbativo del operador de colisión, planteamos el cálculo de las amplitudes de helicidad para la colisión elástica leptón-hadrón con intercambio de dos fotones en la dirección hacia adelante.

### 3.1. EXPRESION DE $T_0(2\gamma)_{\lambda'\lambda}$ :

Considerando el término  $S_4$ , (2), planteamos el cálculo del elemento de matriz conexo  $\langle S_4 \rangle_c$  entre estados iniciales y finales de leptón y hadrón. En términos de estados producto directo de estado de una partícula de cuadrimento y helicidad definidos, recordemos que particularizamos para el caso leptón de spín  $\frac{1}{2}$  (con lo que la helicidad será  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ ) mientras que el hadrón tiene spín cero, escribimos el inicial y final como  $|p, \lambda; P\rangle$ , donde  $p$  es el cuadrimento del leptón y  $P$  del hadrón. El elemento de matriz  $\langle S_4 \rangle_c$  tiene la forma:

$$\langle S_4 \rangle_c = \frac{(-i)^4}{4!} e^4 \int dx_1 \dots dx_4 \langle p', \lambda'; P' | T(j_{lep}^\mu(x_1) A_\mu(x_1) j_{had}^\lambda(x_2) A_\lambda(x_2) j_{lep}^\nu(x_3) A_\nu(x_3) j_{had}^\sigma(x_4) A_\sigma(x_4)) | p, \lambda; P \rangle$$

(3)

Las cantidades sin prima representan los cuadrimentos y helicidad antes de la colisión mientras que las cantidades con prima se refieren a los estados finales.

Para el proceso que estamos interesados, los diagramas de Feynman que, a partir de la aplicación del teorema de Wick, surgen de este elemento matriz son:



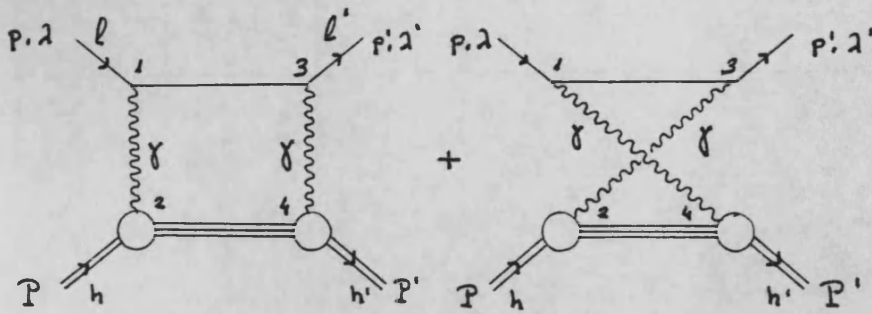


Fig. 3: Diagramas de Feynman para el proceso de colisión leptón-hadrón mediado por dos fotones. En el caso elástico,  $l=l'$ ,  $h=h'$ .

y, considerando los diagramas topológicamente equivalentes, la expresión (3) toma la forma:

$$\langle S_4 \rangle_c = i(-i)^4 \frac{e^4}{2} \int dx_1 \dots dx_4 \langle P' | T ( j_\mu^{(had)}(x) j_\nu^{(had)}(0) ) | P \rangle.$$

$$\left\{ D_F(x_3-x_4) D_F(x_1-x_2) \bar{U}(\vec{p}', \lambda') \gamma^\mu S_F(x_1-x_3) \gamma^\nu U(\vec{p}, \lambda) + D_F(x_1-x_4) D_F(x_2-x_3) \bar{U}(\vec{p}', \lambda') \gamma^\nu S_F(x_1-x_3) \gamma^\mu U(\vec{p}, \lambda) \right\} \cdot \exp i(p'x_1 - px_3) \quad (4)$$

siendo  $D_F(x_i - x_j)$  el propagador del fotón que une los vértices  $i-j$  y  $S_F(x_1, -x_3)$  el propagador leptónico que une los vértices 1 y 3.

Si escribimos los propagadores en forma integral, transformamos el tensor hadrónico mediante invarianza traslacional y, después de realizar las integrales de los propagadores, relacionamos el resultado con la expresión del término conexo de la matriz S en función de las amplitudes de helicidad, obtenemos estas últimas para el proceso de colisión considerado.

Es decir, con:

$$\langle S_c \rangle = i (2\pi)^4 \delta(p + P - p' - P') T(2\gamma)$$

y la ec. (4):

$$i T(2\gamma)_{\lambda'\lambda} = (-i)^4 \frac{e^4}{2 \cdot 4 \pi^2} \int \frac{d^4 q}{q^2 - m^2} \frac{1}{(q - P')^2} \frac{1}{(P - q)^2} \cdot$$

$$\int d^4 x \langle P' | T(j_{\mu}(\text{had})(x) j_{\nu}(\text{had})(0)) | P \rangle \cdot$$

$$\cdot \left\{ e^{i(P'-q)x} L_{(\lambda'\lambda)}^{\mu\nu}(q) + e^{-i(P-q)x} L_{(\lambda'\lambda)}^{\mu\nu}(q) \right\} \quad (5)$$

$$\text{con } L_{(\lambda'\lambda)}^{\mu\nu}(q) = \bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma^{\mu} (\not{q} + m) \gamma^{\nu} u(\vec{p}, \lambda)$$

los índices  $\lambda'$  y  $\lambda$  indican las helicidades del leptón y surgen de los cuadrispinores que representan sus estados inicial y final. Puesto que estamos

interesados en obtener la amplitud (5) en la dirección hacia adelante, esto implica la igualdad:  $p=p'$ ,  $P = P'$ .

La parte leptónica en este caso es fácilmente calculable mediante uso de las técnicas corrientes de cálculo de trazas, obteniéndose:

$$L_{(\lambda\lambda)}^{\mu\nu} = \delta_{\lambda\lambda} \left\{ 2 [ p^\mu (p-q)^\nu + p^\nu (p-q)^\mu + pq g^{\mu\nu} ] + \right. \\ \left. + 2 \lambda i m \epsilon^{\alpha\mu\rho\nu} S_\alpha q_\rho \right\} \quad (6)$$

siendo  $S_\alpha = \frac{1}{m} (|\vec{p}|, \frac{p^0}{|\vec{p}|} \vec{p})$  el cuadvivector de polarización del leptón incidente.

Mientras que la parte relativa del hadrón, en términos de las corrientes hadrónicas, es la misma que aparece en la colisión Compton virtual de hadrones tomada en la dirección hacia adelante:

$$T_{\mu\nu}(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle P | T(j_\mu^{(had)}(x) j_\nu^{(had)}(0)) | P \rangle \quad (7)$$

y el resultado obtenido para (5) introduciendo (6) y (7) es:

$$i T_0(2\gamma)_{\lambda\lambda} = \delta_{\lambda\lambda} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{d^4q}{(q^2)^2} \left\{ \frac{L_{(\lambda\lambda)}^{\mu\nu}(+q)}{(p-q)^2 - m^2} + \right.$$

$$+ \left. \frac{L^{\mu\nu}{}_{(\lambda\lambda)}(-q)}{(p+q)^2 - m^2} \right\} T_{\mu\nu}(P, q) \quad (8)$$

Antes de desarrollar esta expresión realizamos dos comentarios acerca de la estructura y la información obtenida para esta amplitud de helicidad, comparando con los procedimientos empleados en el teorema (2.2).

Observamos primero que con este procedimiento no podemos obtener las amplitudes de helicidad en términos de las amplitudes invariantes (ecs. 2.4), lo que podría resultar útil dado el conocimiento que tenemos de su estructura analítica. Por el contrario, obtenemos directamente la combinación de ellas que proporcionan las amplitudes de helicidad en función del tensor de colisión Compton virtual que, como veremos, puede relacionarse en su parte imaginaria con las funciones de estructura hadrónica que aparecen en la colisión inelástica leptón-hadrón.

Por otra parte, la amplitud con cambio de helicidad se anula en la dirección hacia adelante como ya se esperaba de (2.3.1). Este cero, que podemos garantizar que es cinemático si atendemos a las relaciones (2.4) tomadas a energía umbral del leptón, hará que, al no poder aislarlo, por este procedimiento sólo podamos encontrar una combinación lineal de las amplitudes invariantes. Esto llevará a que cuando queramos comparar resultados obtenidos por este método con las predicciones del teorema (2.2), tengamos que hacerlo globalmente en términos de las amplitudes

de helicidad. Este hecho no deberá preocupar por cuanto estas últimas son las que aparecen en la construcción de observables.

### 3.2. TENSOR HADRONICO $T_{\mu\nu}(P, q)$ Y RELACIONES DE DISPERSION: FUNCIONES DE ESTRUCTURA HADRONICA.

Hemos comentado al principio del capítulo que un conocimiento explícito del tensor Compton virtual implicará conocer la estructura del vértice inferior de la (fig. 1) o del propagador hadrónico, (fig. 2), regidos por interacciones fuertes, lo que haría necesario introducir un modelo de ellas. Sin embargo, por medio de propiedades generales de simetría de las interacciones electromagnéticas y fuertes podemos realizar una descomposición del tensor hadrónico  $T_{\mu\nu}(P, q)$  en términos de dos funciones escalares Lorentz, pares bajo cruce como requiere la colisión Compton, de forma que la expresión más general compatible con covarianza Lorentz, invarianza gauge y bajo paridad, como será necesario en cualquier modelo de interacciones electromagnéticas y fuertes, permite la siguiente descomposición de  $T_{\mu\nu}(P, q)$  para un hadrón sin spin (Z<sup>E</sup> 72):

$$T_{\mu\nu}(P, q) = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) T_1(\nu, q^2) + \frac{1}{M^2} \left( P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) T_2(\nu, q^2) \quad (9)$$

siendo  $q$  el cuadrimomento del fotón y  $\nu = \frac{P \cdot q}{M}$  .

Notemos de (9) que para conocer completamente el tensor Compton virtual debemos centrar nuestra atención en las dos funciones escalares Lorentz  $T_i(\nu, q^2)$  que contienen toda la información acerca de la física del hadrón.

Sustituyendo la expresión (9) en (8) y realizando la contracción con el tensor leptónico, llegamos a la siguiente expresión para la amplitud de helicidad  $T_0(2\gamma)_{\lambda'\lambda}$ , calculada en el sistema laboratorio  $P = (M, 0)$ :

$$i T_0(2\gamma)_{\lambda'\lambda} = e^2 \int_{\lambda'\lambda} m^2 \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(q^2)^2} \cdot$$

$$\left[ \frac{1}{q^2 - 2pq} + \frac{1}{q^2 + 2pq} \right] \left\{ -T_1(\nu, q^2) \left( 1 + 2 \frac{(pq)^2}{m^2} \right) + \right.$$

$$\left. + T_2(\nu, q^2) \left( \frac{p^0{}^2}{m^2} - 2\nu \frac{p^0}{m} \frac{pq}{m^2} \frac{(pq)^2}{m^2 q^2} \right) \right\} \quad (10)$$

donde se ha usado simetría de cruce de la colisión Compton traducida en la propiedad  $T_{1,2}(\nu, q^2) = T_{1,2}(-\nu, q^2)$ .

El siguiente paso será tratar de conseguir

información acerca de las funciones  $T_i(\nu, q^2)$ , en particular estaremos interesados en relacionarlas con cantidades medibles. En principio la aplicación del teorema óptico a la amplitud Compton virtual de hadrones en la dirección hacia adelante, permite obtener relación entre su parte imaginaria y el tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}(P, q)$ :

$$\text{Im } T_{\mu\nu}(P, q) = (2\pi) W_{\mu\nu}(P, q)$$

que se traduce en:

$$W_i(\nu, q^2) = \frac{1}{2\pi} \text{Im } T_i(\nu, q^2) \quad (11)$$

estas funciones  $W_i(\nu, q^2)$  (función de estructura hadrónica) aparecen en la colisión inelástica leptón hadrón y están, por tanto, sujetas a medidas experimentales directas. Sin embargo nada puede decirse acerca de sus partes reales y es usual en estos casos obtenerlas a partir de relaciones de dispersión sobre la variable  $\nu$  tomando  $q^2$  fijo. Esto llevará a la necesidad de hacer consideraciones sobre la estructura analítica de las funciones  $T_i(\nu, q^2)$  en el plano de la variable  $\nu$  compleja.

La primera información acerca de ello proviene de la descomposición invariante realizada en (9) sobre el tensor Compton virtual de hadrones. El límite de fotones reales impone la cancelación

de posibles divergencias con  $q^2 \rightarrow 0$  de forma que:

$$T_1(\nu, q^2 \rightarrow 0) = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{\nu^2}{-q^2} T_2(\nu, q^2) \quad (12)$$

y a partir del teorema a baja energía para la amplitud Compton obtenemos el límite Thomson:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} T_1(\nu, q^2 = 0) = -e Z^2 \quad (13)$$

donde  $Z$  es la carga del hadrón en unidades naturales.

Estas relaciones indican la necesidad de una sustracción en las relaciones de dispersión sobre  $T_1(\nu, q^2)$  a  $q^2$  fijo mientras que permiten una relación de dispersión no restada para  $T_2(\nu, q^2)$ . Resultado que está de acuerdo con el análisis de Elitzur y Harari (EH70) hecho en base a un modelo de Regge. Resulta curioso notar que un hecho en principio dependiente de la estructura analítica de las funciones a grandes valores de  $\nu$ , como es la necesidad o no de una función de sustracción en las relaciones de dispersión, viene controlada por su comportamiento a bajas  $\nu$  (12). Con esto es preciso introducir una nueva función desconocida, usualmente  $T_1(\nu = 0, q^2)$  sobre la que el límite Thomson (13) sólo da información en el punto  $q^2 \rightarrow 0$ . Debemos hacer notar que los límites  $\nu \rightarrow 0, q^2 \rightarrow 0$ , en este caso de spín cero, conmutan;



no ocurre así si el spin es  $\frac{1}{2}$  debido a la presencia del momento magnético anómalo del hadrón (BJ74).

Para evitar la complicación adicional de tener que introducir la función de sustracción  $T_1(\nu = 0, q^2)$ , es usual construir una nueva función  $T_L(\nu, q^2)$  que obedecerá una relación de dispersión sin sustracción. Su definición es:

$$T_L(\nu, q^2) = \left(1 - \frac{\nu^2}{q^2}\right) T_2(\nu, q^2) - T_1(\nu, q^2) \quad (14)$$

y este supuesto se basa en la posible cancelación de los términos dominantes a altas energías del fotón,  $\nu^2 T_2(\nu, q^2)$  y  $T_1(\nu, q^2)$ . Podemos encontrar en la literatura (BT75) una restricción independiente del modelo hadrónico que relaciona la polarizabilidad hadrónica con una regla de suma sobre la sección eficaz longitudinal, su acuerdo con datos experimentales indicará la necesidad de sustracción o no en la relación de dispersión sobre  $T_L(\nu, q^2)$ .

Admitiendo que  $T_{2,L}(\nu, q^2)$  no necesitan sustracción mientras que  $T_1(\nu, q^2)$  precisa de una, postulamos además la máxima analiticidad posible para las funciones  $T_{i,L}(\nu, q^2)$  en el plano complejo de la variable  $\nu$  compatible con unitariedad. En este caso concreto el teorema óptico puede dar información acerca de las regiones no analíticas de  $T_{i,L}(\nu, q^2)$ . Relacionando la parte imaginaria de la amplitud Compton virtual en la dirección hacia adelante con la sección eficaz de fotoabsorción de fotones, que podemos simbolizar por:

$$\text{Im} \left[ \left[ \begin{array}{c} q \\ \gamma \\ h \\ P \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} r \\ q \\ h \\ P \end{array} \right] \right] = \lambda^2(s, q^2, M^2) \left| \begin{array}{c} q \\ \gamma \\ h \\ P \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} X \end{array} \right|^2$$

donde "x" significa cualquier estado físico final posible; las regiones no analíticas de  $T_{\mu\nu}(P, q)$  y, por consiguiente de  $T_i(\nu, q^2)$ , vendrán dadas por las contribuciones de la sección eficaz de fotoabsorción a la parte imaginaria de la amplitud Compton. Tendremos, por tanto, un término polo, correspondiente a la colisión elástica  $\gamma h$  y que, en el caso del hadrón de espín cero coincide con el término Born y viene controlado totalmente por la carga hadrónica; y un corte correspondiente a estados excitados del hadrón: umbral de producción de piones, estados energéticos excitados ... según sea la naturaleza del hadrón, que proporcionará la contribución del continuo a la parte imaginaria de la amplitud Compton.

Por otra parte, puesto que las zonas en las que estaremos interesados en obtener las funciones  $T_i(\nu, q^2)$  reposan sobre los cortes de unitariedad, es decir  $\nu \in \mathbb{R}$ , tomaremos la siguiente prescripción para los casos físicos:

$$T_i(\nu, q^2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_i(\nu + i\epsilon, q^2) \quad (15)$$

Obsérvese que todo el análisis realizado en términos de la sección eficaz de fotoabsorción, podría haberse hecho conectando directamente la

amplitud  $T_0(2\gamma)$  con la sección eficaz total inelástica para el proceso leptón-hadrón mediado por un fotón.

Hechos estos comentarios y con las consideraciones hechas en el capítulo 1.3 acerca de la colisión en la dirección hacia adelante, planteamos relaciones de dispersión para las amplitudes invariantes  $T_i(\nu, q^2)$ , relacionando sus partes imaginarias con las funciones de estructura según (11). El teorema de Cauchy para funciones complejas se plantea según:

$$\frac{T_i(\nu, q^2)}{(\nu - \nu_1)^a} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{T_i(\nu', q^2)}{(\nu' - \nu)(\nu' - \nu_1)^a} d\nu' ; q^2 \text{ fijo} \quad (16)$$

siendo  $C$  un contorno de integración en cuyo interior  $T_i(\nu, q^2)$  es analítica y el exponente "a" determina el comportamiento de  $T_i(\nu, q^2)$  a valores grandes de  $\nu$ :  $T_i(\nu, q^2) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \text{cte} \times (\nu - \nu_1)^a$  y, por tanto, indica la necesidad o no de sustracción en la relación de dispersión; el punto  $\nu_1$  es aquél donde realizamos la sustracción.

Con las consideraciones hechas acerca de la analiticidad de  $T_i(\nu, q^2)$  tomamos el contorno de integración indicado en la figura 4:

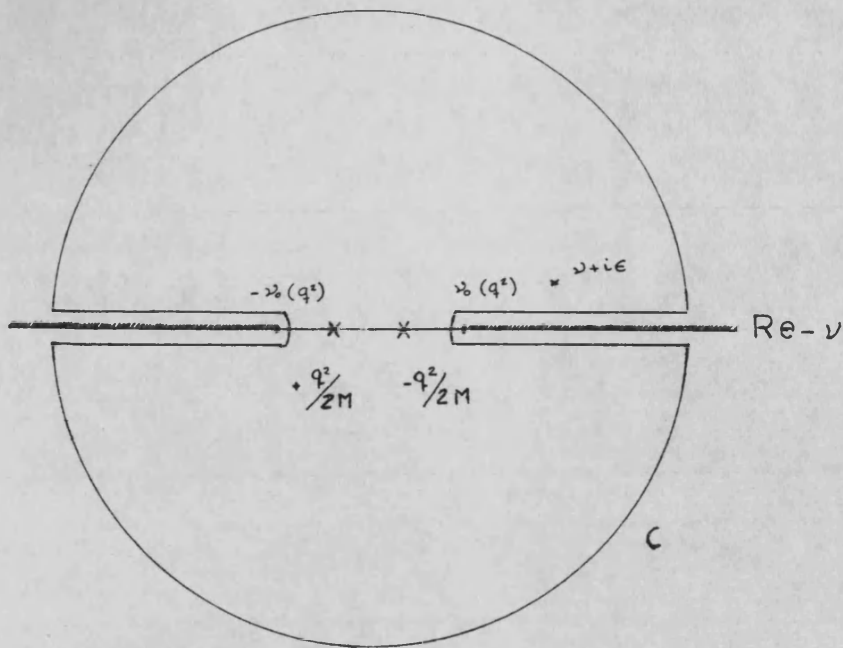


fig 4: Contorno de integración para la ecuación (16).

$\nu_0$  representa el umbral de unitariedad dado por la contribución del continuo, (es dependiente del valor de  $q^2$ ), el polo del eje positivo  $\nu$  viene dado por el proceso elástico en  $\nu = -q^2/2M$  y, por otra parte, simetría de cruce en este caso proporciona el corte y el polo para valores  $\nu < 0$ , (polo en  $q^2/2M$  y corte en  $-\nu_0$ ).

Relacionando las partes imaginarias de  $T_i(\nu, q^2)$  con las funciones de estructura hadrónica  $W_i(\nu, q^2)$  (11), obtenemos de (16) las siguientes expresiones:

$$T_i(\nu, q^2) = 4 \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\nu' \frac{\nu' W_i(\nu', q^2)}{\nu'^2 - \nu^2} + 2\pi i W_i(\nu', q^2)$$

$$i = 2, L \quad (17)$$

cuando no es necesaria sustracción [a=0 en (16)]

Mientras que:

$$T_1(\nu, q^2) = T_1(0, q^2) + 4\nu^2 \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{d\nu'}{\nu'} \frac{W_1(\nu', q^2)}{\nu'^2 - \nu^2} + 2\pi i W_1(\nu, q^2) \quad (18)$$

donde hemos realizado la sustracción en el punto  $\nu = 0$  [a=1,  $\nu = 0$  en (16)].

De estos resultados es interesante para nosotros considerar la parte real de las funciones, dada por la parte principal de las integrales escritas. Estas integrales contienen el término polo en  $\nu' = -\frac{q^2}{2M}$  y la contribución del continuo. Calculadas las funciones de estructura para los casos de colisión elástica leptón-hadrón y recordando el carácter escalar del hadrón, obtenemos:

$$W_1^{el}(\nu, q^2) = 0$$

$$W_2^{el}(\nu, q^2) = M Z^2 |F(q^2)|^2 \delta(\nu + \frac{q^2}{2M}) \quad (19)$$

$$W_L^{el}(\nu, q^2) = M Z^2 |F(q^2)|^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{q^2}\right) \delta(\nu + \frac{q^2}{2M})$$

siendo  $F(q^2)$  el factor de forma del hadrón y  $Z, M$  su carga y su masa respectivamente.

Con esto, las contribuciones "polo" de las relaciones de dispersión (17) y (18) vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 T_1^P(\nu, q^2) &= 0 \\
 T_2^P(\nu, q^2) &= -\frac{8M^2 q^2}{(q^2)^2 - 4M^2 \nu^2} Z^2 |F(q^2)|^2 \\
 T_L^P(\nu, q^2) &= -\frac{8M^2 q^2}{(q^2)^2 - 4M^2 \nu^2} \left(1 - \frac{q^2}{4M^2}\right) Z^2 |F(q^2)|^2
 \end{aligned} \tag{20}$$

Estas funciones proporcionarán la contribución de Born al proceso mediado por dos fotones, en el caso de hadrón con spin cero.

Las contribuciones del continuo se determinan mediante la integración de las funciones de estructura a partir de un valor umbral ( $\nu_0$ ) para la energía del fotón proporcionado por el teorema óptico.

$$\begin{aligned}
 T_1^C(\nu, q^2) &= T_1(0, q^2) + 4\nu^2 P \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'} \frac{W_1(\nu', q^2)}{\nu'^2 - \nu^2} \\
 T_i^C(\nu, q^2) &= 4P \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \frac{W_i(\nu', q^2)}{\nu'^2 - \nu^2} \quad i = 2, L
 \end{aligned} \tag{21}$$

### 3.3 LA AMPLITUD $T_0(2\gamma)_{\lambda'\lambda}$ EN TERMINOS DE LAS FUNCIONES DE ESTRUCTURA: CONTRIBUCION DEL CONTINUO HADRONICO

Con los resultados obtenidos en la sección

anterior estamos en condiciones de encontrar la contribución del continuo hadrónico a la amplitud  $T_0(2\gamma)$ . Recuperando la ecuación (10) sustituimos  $T_1(\nu, q^2)$  en función de  $T_L(\nu, q^2)$  para obtener el resultado:

$$i T_0(2\gamma)_{\lambda\lambda} = \int_{\lambda\lambda} 2m^2 \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d^4q}{(q^2)^2} \cdot$$

$$\left[ \frac{1}{q^2 + 2pq} + \frac{1}{q^2 - 2pq} \right] \left\{ \left(1 + 2 \frac{(pq)^2}{m^2 q^2}\right) T_L(\nu, q^2) + \right.$$

$$\left. + \left( -\frac{(pq)^2}{m^2 q^2} - 2\nu \frac{p^0}{m} \frac{pq}{mq^2} + \frac{\nu^2}{q^2} + 2\nu^2 \frac{(pq)^2}{m^2 (q^2)^2} + \frac{p^0{}^2 - m^2}{m^2} \right) \cdot T_2(\nu, q^2) \right\} \quad (22)$$

en el que introducimos las expresiones (17), (18) y (20) tomando las contribuciones del continuo en las relaciones de dispersión:

$$i T_0(2\gamma)_{\lambda\lambda} = \int_{\lambda\lambda} \frac{8m^2}{\pi^2} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \int \frac{d^4q}{(q^2)^2} \cdot$$

$$\cdot \mathcal{P} \int d\nu' \frac{\nu'}{(\nu'^2 - \nu^2)} \left[ \frac{1}{q^2 + 2pq} + \frac{1}{q^2 - 2pq} \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left(1 + 2 \frac{(pq)^2}{m^2 q^2}\right) W_L(\nu', q^2) + \left( -\frac{(pq)^2}{q^2 m^2} - 2\nu \frac{p^0}{m} \frac{pq}{mq^2} + \right. \right.$$

$$+ \frac{\nu^2}{q^2} + 2\nu^2 \frac{(Pq)^2}{m^2(q^2)^2} + \frac{P^{\mu 2} - m^2}{m^2} \left. \right) W_2(\nu, q^2) \quad (23)$$

Con ello obtenemos la expresión de la contribución del continuo hadrónico a la amplitud de colisión elástica leptón-hadrón mediada por dos fotones, en la dirección hacia adelante. El cálculo de esta expresión será abordado en capítulos posteriores para poder comparar con los resultados obtenidos en la sección (2.2).

En algunos puntos del tratamiento del tensor Compton  $T_{\mu\nu}(P, q)$  y de las funciones  $T_i(\nu, q^2)$ , hemos omitido los detalles puesto que serán similares a los que comentaremos en el capítulo siguiente acerca del tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}(P, q)$  y las funciones de estructura  $W_i(\nu, q^2)$  que aparecen en el proceso de colisión inelástica leptón-hadrón mediado por un fotón.

### 3.4 INTEGRACION EN $T_0(2\gamma)_{\lambda'\lambda}$ . ROTACION DE WICK

Puesto que en la ecuación (23) los únicos términos desconocidos son las funciones de estructura  $W_{2,L}$ , dependientes de las variables  $\nu$  y  $q^2$ , cabría pensar en la posibilidad de realizar la integración analítica de las tres variables restantes en el espacio de cuadrimomentos. Integrar, por tanto, la variable  $q^0$  y las dos variables angulares esféricas  $\theta$  y  $\varphi$ .



En problemas de integración de este tipo es usual hacer uso del método de la rotación de Wick en el plano complejo de la variable  $q^0$ , manteniendo  $|\vec{q}|$  constante, cálculos de este tipo están realizados por ejemplo en (BJ73) y (EH70), en cualquier caso los detalles de este método se dan en el Apéndice I aunque en un contexto algo diferente. Tras esta rotación la variable  $q^0$  aparece integrada entre  $-i\infty$  e  $i\infty$  de forma que si realizamos el cambio de variable  $ik_0 = q^0$  y aprovechamos las propiedades de simetría de las funciones de estructura  $W_i(\nu', q^2)$  (ec.4,8), podemos escribir la expresión (23) de la forma:

$$i T_0(2\gamma)_{\lambda\lambda} = \delta_{\lambda\lambda} 2\pi i \int_{\nu_0}^{\infty} \nu' d\nu' \int_{-\infty}^0 dq^2 \int_0^{\sqrt{-q^2}} dk_0 \mathcal{F}'(ik_0, q^2) \quad (24)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(q^0, q^2) = & \int_{x_A}^{x_B} d(pq) \frac{8m^2 \alpha^2}{M |\vec{p}| \pi^2} \frac{1}{(q^0)^2} \frac{1}{\nu'^2 - \nu^2} \left( \frac{1}{q^2 - 2pq} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{q^2 + 2pq} \right) \left\{ \left( 1 + 2 \frac{(pq)^2}{m^2 q^2} \right) W_1(\nu', q^2) + \left( - \frac{(pq)^2}{m^2 q^2} + \frac{(pq)^2}{M^2 q^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{p^0 - m^2}{m^2} - 2 \frac{(Pq)(pq)}{M m q^2} + 2 \frac{(Pq)^2 (pq)^2}{m^2 M^2 (q^2)^2} \right) W_2(\nu', q^2) \right\} \\ x_{A,B} = & p^0 q^0 \pm |\vec{p}| [q^0{}^2 - q^2]^{1/2} \quad (25) \end{aligned}$$

La ventaja de realizar la rotación de Wick se basa en que si consideramos los límites de la variable  $q^2$  vemos que sólo es necesario conocer las funciones de estructura hadrónica en la región de fotones espaciales ( $q^2 < 0$ ), es decir, en la zona de colisión inelástica leptón-hadrón. Con esto podríamos relacionarlas con cantidades medibles en dicho proceso.

La ecuación (25) puede ser integrada analíticamente de forma que se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, -t) = & \frac{1}{x^2 + t x^2} \left\{ W_L(\nu', -t) \left[ \ln \frac{(\sqrt{t} - 2x_A)(\sqrt{t} + 2x_B)}{(\sqrt{t} - 2x_B)(\sqrt{t} + 2x_A)} \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \left( 1 - \frac{t}{2m^2} \right) + \frac{2\sqrt{t}}{m^2}(x_B - x_A) \right] + \right. \\ & + W_2(\nu', -t) \left[ \ln \frac{(\sqrt{t} - 2x_A)(\sqrt{t} + 2x_B)}{(\sqrt{t} - 2x_B)(\sqrt{t} + 2x_A)} \left( \frac{p^0 - m^2}{m^2} + \frac{t}{4m^2} - \frac{t x^2}{4m^2} + x^2 \right) - \right. \\ & \left. \left. - (1 - 2x^2) \frac{\sqrt{t}}{m^2} (x_B - x_A) - i\sqrt{t} x \frac{p^0}{m^2} \ln \frac{t - 4x_B^2}{t - 4x_A^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= -q^2 \\ x &= k_0/\sqrt{t} \quad ; \quad x_{A,B} = i x p^0 \pm |\vec{p}| (1 - x^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Sin embargo, la complejidad de esta expresión hace que sea improbable conseguir una integración analítica sobre la variable  $k_0$  de la ecuación (25). Esto se traduce en la necesidad de realizar una integración numérica en la ec. (25) y por

tanto, introducir algún modelo para las funciones de estructura.

Otro camino a seguir, y será el que adoptaremos en capítulos sucesivos, consistirá en restringir el cálculo de la ecuación (23) a determinados tipos de hadrones, en particular nos restringiremos a núcleos atómicos para los que la física nuclear da modelos concretos del comportamiento de las funciones de estructura. Destinaremos el capítulo siguiente a estudiar con detalle las funciones de estructura, destacando en particular los casos en que el hadrón sea un núcleo atómico. Con las conclusiones que extraigamos de este estudio podremos avanzar en el cálculo de la expresión (23).

## CAPITULO 4

### Colisión inelástica Leptón-Hadrón.

#### Funciones de estructura hadrónica

Como vimos en el capítulo anterior, la amplitud de colisión con intercambio de dos fotones (3.23) aparecía relacionada con las funciones de estructura hadrónica  $W_i(\nu, q^2)$  que aparecen en la colisión inelástica leptón-hadrón tomada en la aproximación de intercambio de un fotón. Dedicamos este capítulo al estudio de dicho proceso, por una parte con el fin de justificar algunas relaciones introducidas en secciones anteriores, y por otra para intentar conocer la forma de las funciones de estructura en casos físicos concretos que, más adelante, permitirán avanzar en el desarrollo de la ecuación (3.23).

Según se explicó en la introducción del capítulo anterior, el proceso de colisión mediado por un fotón se describe a partir del término  $S_2$  de la serie perturbativa del operador de colisión  $S$ . Siguiendo un procedimiento análogo al usado en

el cálculo de  $T(2\gamma)_{\lambda'\lambda}$  (ecs. 3.2 a 3.5) llegamos a la amplitud de helicidad para este proceso:

$$T(2\gamma)_{\lambda'\lambda} = \frac{e^2}{q^2} \bar{U}(\vec{p}', \lambda') \gamma^\mu U(\vec{p}, \lambda) \langle P'_x | J_\mu(0) | P \rangle \quad (1)$$

correspondiente al diagrama de Feynman de la fig. 1.

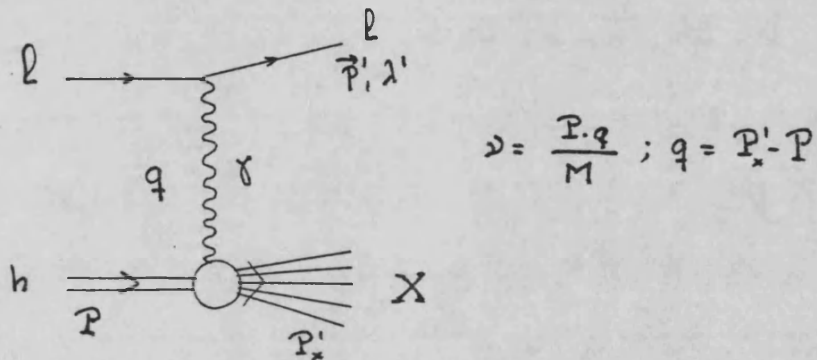


Fig 1: Diagrama de Feynman que ilustra el proceso de colisión inelástica leptón-hadrón en la aproximación de un fotón.

(con X representamos uno cualquiera de los estados finales posibles).

El elemento matriz que aparece en el sector hadrónico, como comentamos, no es calculable de una forma independiente del modelo hadrónico. Su estudio se realizará a partir de propiedades generales de las interacciones implicadas y conducirá a resultados análogos a los obtenidos en (3.9).

Por una parte, en el caso elástico, el vértice hadrónico puede describirse en su forma más general a partir de los factores de forma del hadrón (basta con uno si su espín es cero), funciones que, debido a covarianza Lorentz sólo pueden depender de  $q^2$ . Sin embargo, en el caso inelástico, al haber dependencia del estado final será necesario introducir un mayor número de ingredientes.

Construyamos la sección eficaz diferencial para el proceso inclusivo indicado en la figura 1:

$$d^3\sigma = \frac{4}{\lambda^2 (s, q^2, M^2)} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{d^3p'}{2p'^0} \frac{1}{(q^2)^2} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (2)$$

El tensor leptónico  $L^{\mu\nu}$ , proveniente del vértice superior, es conocido explícitamente:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left( (\not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu \right) = \\ &= 2 \left[ p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu + g^{\mu\nu} (m^2 - p p') \right] \end{aligned} \quad (3)$$

El tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}$  contiene toda la información del vértice hadrónico y de (1) puede escribirse explícitamente:

$$W_{\mu\nu}(P, q) = \frac{1}{2} \sum_n \mathcal{J}(P + p - p' - P'_n).$$

$$\cdot \langle P_n | J_\mu(0) | P \rangle \langle P_n | J_\nu(0) | P \rangle^* \quad (4)$$

La suma sobre estados "n" incluye todos los posibles estados finales X (fig1) así como integración sobre los momentos de estos estados con el correspondiente elemento de medida en el espacio de momentos:  $d^3P/2p^0$ .

Para ampliar nuestro conocimiento sobre esta segunda parte, sin tener que recurrir a un modelo concreto de interacciones fuertes, haremos uso de principios de simetría generales que observan las interacciones electromagnéticas y fuertes. Este tipo de razonamientos, que daremos a continuación, es igualmente válido para la descomposición del tensor Compton virtual en la dirección hacia adelante que apareció en (3.9).

#### 4.1 TENSOR HADRONICO $W_{\mu\nu}(P, q)$ Y FUNCIONES DE ESTRUCTURA

Puesto que la contracción entre el tensor leptónico y el hadrónico debe proporcionar un escalar bajo transformaciones de Lorentz, es evidente que  $W_{\mu\nu}$  es un tensor de segundo orden y por tanto podremos descomponerlo según un conjunto completo de tensores de segundo orden que podamos formar con las cantidades que intervienen en el vértice hadrónico. Estos serán los cuádrimomentos del hadrón  $P$ , y del fotón  $q$ , y el conjunto completo constará de:

$$g_{\mu\nu}, q_\mu q_\nu, P_\mu P_\nu, P_\mu q_\nu, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha q^\beta$$

Con esto obtenemos la descomposición más general posible, por construcción covariante Lorentz, dada por:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} = & -g_{\mu\nu} W_1(\nu, q^2) + \frac{P_\mu P_\nu}{M^2} W_2(\nu, q^2) - \\ & - \frac{i}{2M^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha q^\beta W_3(\nu, q^2) + \\ & + \frac{1}{M^2} (P_\mu q_\nu + P_\nu q_\mu) W_4(\nu, q^2) + \\ & + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} W_5(\nu, q^2) + \frac{i}{M^2} (P_\mu q_\nu - P_\nu q_\mu) W_6(\nu, q^2) \quad (5) \end{aligned}$$

Donde las funciones  $W_i(\nu, q^2)$  dependen de los invariantes que podamos construir en el vértice hadrónico:  $\nu = \frac{P \cdot q}{M}$ ,  $q^2$ .

A partir de esta descomposición general, haremos uso de propiedades de simetría observadas por interacciones electromagnéticas y fuertes:

i) Hermiticidad de la corriente electromagnética implica sobre el tensor hadrónico que:  $W_{\mu\nu}^* = W_{\nu\mu}$  y se traduce en el carácter real de las funciones de estructura:  $W_i(\nu, q^2) \in \mathbb{R}$ .



ii) La conservación de la corriente electromagnética:  $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$  se expresa sobre el tensor hadrónico como  $q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0$  que, explícitamente lleva a las relaciones:

$$W_6(\nu, q^2) = 0$$

$$W_5(\nu, q^2) = \frac{M^2}{q^2} W_1(\nu, q^2) + \frac{\nu^2 M^2}{(q^2)^2} W_2(\nu, q^2) \quad (6)$$

$$W_4(\nu, q^2) = -\nu \frac{M}{q^2} W_2(\nu, q^2)$$

iii) Considerando por último que los procesos electromagnéticos son invariantes bajo paridad e inversión temporal, el tensor hadrónico debe ser simétrico, por tanto:

$$W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu} \implies W_3(\nu, q^2) = 0 \quad (7)$$

Además de estas relaciones es interesante considerar la propiedad de cruce:

$$W_{\mu\nu}(P, q) = -W_{\mu\nu}^*(P, -q) \quad (8)$$

que, sobre las funciones de estructura se traduce en:

$$W_i(\nu, q^2) = -W_i(-\nu, q^2)$$

es decir, serán funciones impares de la variable  $\nu$ .

Con todo esto, la forma definitiva del tensor hadrónico, compatible con covarianza Lorentz, invarianza gauge y simetría bajo paridad e inversión temporal; para el caso de espín cero (en general, si consideramos promedio y suma sobre espín del hadrón el resultado sería el mismo) es:

$$W_{\mu\nu}(P, q) = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) W_1(\nu, q^2) + \frac{1}{M^2} \left(P_\mu - \frac{M\nu}{q^2} q_\mu\right) \left(P_\nu - \frac{M\nu}{q^2} q_\nu\right) W_2(\nu, q^2) \quad (9)$$

(similar a la descomposición del tensor Compton (3.9)).

Podemos destacar dos cosas de este tensor hadrónico: su carácter tensorial meramente refleja la naturaleza del espín 1 del fotón e incorpora automáticamente tanto las interacciones eléctricas como magnéticas; por otra parte, el hecho de que aparezcan

dos funciones de estructura refleja la posibilidad de que aparezcan estos dos tipos de interacciones o, del mismo modo, que podamos tener interacción debida tanto a fotones longitudinales como transversales.

Todo el desconocimiento en la descripción del vértice hadrónico queda contenido en las dos funciones de estructura  $W_i(\nu, q^2)$  y, por tanto, el problema se centrará en la información que podamos obtener acerca de ellas. Para ello las relacionaremos con cantidades medibles tales como la sección eficaz de colisión inelástica y la sección eficaz de fotoabsorción.

#### 4.2 SECCION EFICAZ DIFERENCIAL $\ell h \rightarrow \ell X$ :

Llevando la expresión (9) a (2) obtenemos la sección eficaz diferencial para el proceso inclusivo representado en la figura 1:

$$d^3\sigma = \frac{4}{\lambda^{1/2}(s, q^2, M^2)} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{d^3p'}{2p'^0} \frac{1}{(q^2)^2} \cdot$$

$$\left\{ -2(2m^2 + q^2) W_1(\nu, q^2) + \right.$$

$$\left. + 2 \left[ \frac{2}{M^2} (p_p)(p_{p'}) + \frac{1}{2} q^2 \right] W_2(\nu, q^2) \right\} \quad (10)$$

4.2.1 Caso particular: colisión elástica leptón-hadrón en la aproximación de intercambio de un fotón.

Para el caso de la colisión elástica, y siempre para un hadrón de espín cero, el tensor hadrónico (4) toma una forma mucho más simple debido a que los estados hadrónicos inicial y final tienen la misma naturaleza, en particular  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}'^2$  (siendo  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  los cuadrimentos respectivos), que proporciona la relación  $2\mathcal{P} \cdot q + q^2 = 0$ . Además, los dos elementos de matriz de la corriente electromagnética que aparecen en  $W_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q)$  pueden descomponerse de la misma forma. Los principios de simetría discutidos en la sección 4.1 imponen la siguiente estructura:

$$\langle \mathcal{P}' | J_{\mu}(0) | \mathcal{P} \rangle = Z F(q^2) (\mathcal{P} + \mathcal{P}')_{\mu} \quad (11)$$

siendo  $Z$  la carga del hadrón en unidades de  $e$  y  $F(q^2)$  su factor de forma normalizado a la unidad,  $F(0) = 1$ .

Con esto puede realizarse la integración sobre trimomentos en (4) y obtener:

$$W_{\mu\nu}^{(el)} = \frac{1}{M} Z^2 |F(q^2)|^2 \left( \mathcal{P} + \frac{1}{2} q \right)_{\mu} \left( \mathcal{P} + \frac{1}{2} q \right)_{\nu} \delta \left( \nu + \frac{q^2}{2M} \right) \quad (12)$$

que proporciona los valores de las funciones de estructura para el caso elástico que se usaron en las ecs. (3.10) y (3.20) del capítulo anterior para obtener las contribuciones del polo a las funciones hadrónicas  $T_i(\nu, q^2)$ . Comparando (12) con (9):

$$W_1^{(el)}(\nu, q^2) = 0$$

$$W_2^{(el)}(\nu, q^2) = M Z^2 |F(q^2)|^2 \delta(\nu + \frac{q^2}{2M}) \quad (13)$$

#### 4.3 RELACION ENTRE LAS FUNCIONES DE ESTRUCTURA Y LA SECCION EFICAZ DE FOTOABSORCION PARA HADRONES:

Aparte de la relación (10) entre las funciones de estructura y la sección eficaz inelástica leptón-hadrón, podemos encontrar otras relaciones de ellas con cantidades medibles. Consideramos aquí el caso de obtener dichas funciones en términos de la sección eficaz de fotoabsorción para hadrones, este hecho lo usaremos más adelante para avanzar en el desarrollo de la ecuación (3.23) y obtener expresiones más manejables para casos de interés físico.

En este contexto estamos interesados en escribir la sección eficaz para el proceso de fotoabsorción por hadrones:

$$\gamma^* h \rightarrow X$$

que corresponde al diagrama de Feynman de la figura 2.

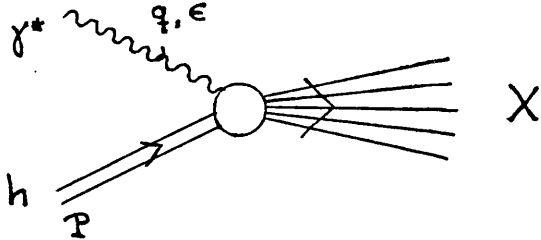


Fig 2: Diagrama de Feynman para el proceso de fotoabsorción por hadrones.

donde  $\gamma^*$  indica que puede tratarse de un fotón virtual.

Para dicho proceso la sección eficaz total tiene la forma:

$$\sigma_{\gamma^*} = \frac{8\pi^2}{\lambda^{1/2}(s, q^2, M^2)} \frac{e^2}{4\pi} \sum_{\sigma} \epsilon^{\mu}(q, \sigma) \epsilon^{\nu}(q, \sigma)^* W_{\mu\nu}(P, q) \quad (14)$$

siendo  $\epsilon^{\mu}(q, \sigma)$  el vector de polarización del fotón.

Si escribimos la descomposición invariante del tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}(P, q)$  y relacionamos mediante

el teorema óptico la parte imaginaria de la amplitud Compton virtual en la dirección hacia adelante con la sección eficaz calculada (14), es inmediato obtener las relaciones (3.11) usadas en las relaciones de dispersión (3.17) y (3.18) obtenidas en el capítulo anterior.

#### 4.3.1. Sección eficaz de fotoabsorción de fotones reales.

A partir de la expresión anterior, tomando el límite de fotón real ( $q^2 \rightarrow 0$ ) y realizando la suma sobre helicidades (recordar  $q^\mu W_{\mu\nu} = 0$ , lo que simplifica el cálculo), obtenemos la expresión:

$$\sigma_{\gamma} = \frac{(2\pi)^2}{P \cdot P} \frac{e^2}{4\pi} \left[ - W_{\mu}^{\mu} (P, q) \right] \quad (15)$$

que da la sección eficaz de fotoabsorción de fotones reales por hadrones. Puesto que en este caso el tensor  $W_{\mu\nu}(P, q)$  está relacionado con las amplitudes físicas de absorción, las aparentes singularidades que aparecen en la descomposición invariante (9) deben cancelarse con las funciones de estructura.

De aquí, podemos inducir que:

$$W_1(\nu, q^2) + \frac{\nu^2}{q^2} W_2(\nu, q^2) = 0 + \mathcal{O}(q^2) \quad (16)$$

$$W_2(\nu, q^2) = 0 + \mathcal{O}(q^2)$$

y la contracción que aparece en (15):

$$W_\mu{}^\mu = -2W_1(\nu, q^2=0) + \mathcal{O}(q^2)$$

de forma que podemos escribir la sección eficaz de fotoabsorción para fotones reales:

$$\sigma_\gamma = \frac{2(2\pi)^2}{P \cdot P} \frac{e^2}{4\pi} W_1(\nu, 0) \quad (17)$$

#### 4.3.2 Sección eficaz de fotoabsorción de fotones virtuales.

Trataremos el caso  $q^2 < 0$ , es decir la zona de colisión inelástica. Como se comentó en (4.1) al hacer la descomposición invariante gauge (9) del tensor hadrónico en términos de dos funciones de estructura, se incorporaba automáticamente la posibilidad de separar las contribuciones debidas a los fotones transversalmente y longitudinalmente



polarizados. Para hacer patente este hecho realizamos la descomposición de la sección eficaz total en dos partes, correspondientes a cada tipo de polarización de los fotones:

$$\sigma_{\gamma^*} = \sigma_L + \sigma_T \quad (18)$$

Y, para encontrar los términos de esta suma calcularemos explícitamente el sumatorio para polarizaciones del fotón que aparece en (14). Si  $\vec{q}$  es el trimomento del fotón en el sistema laboratorio, podemos escoger los vectores de polarización:

$$\epsilon^\mu(q, 0) = \left( \frac{i}{\sqrt{-q^2}} \cdot \sqrt{\frac{\nu^2}{M^2} - q^2}, \frac{i\nu}{\sqrt{-q^2}}, 0, 0 \right)$$

para fotones longitudinales y

$$\epsilon^\mu(q, \pm 1) = \left( 0, 0, \frac{-i}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

para fotones transversales.

Obtenemos con ellos las relaciones

$$\epsilon_\mu(q, \pm 1) W^{\mu\nu} \epsilon_\nu^*(q, \pm 1) = W_1(\nu, q^2)$$

$$\epsilon_\mu(q, 0) W^{\mu\nu} \epsilon_\nu^*(q, 0) =$$

$$= \left(1 - \frac{\nu^2}{q^2}\right) W_2(\nu, q^2) - W_1(\nu, q^2) \equiv W_L(\nu, q^2) \quad (19)$$

Donde hemos introducido una nueva función de estructura  $W_L(\nu, q^2)$ , llamada longitudinal por su relación con la componente de la sección eficaz debida a los fotones longitudinales.

Con esto, se definen las dos componentes de  $\sigma_{\gamma^*}$  :

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \frac{(2\pi)^2}{M|\vec{q}|} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right) W_1(\nu, q^2) \\ \sigma_L &= \frac{(2\pi)^2}{M|\vec{q}|} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right) W_L(\nu, q^2)\end{aligned}\tag{20}$$

que, evidentemente, en el límite de fotones físicos:

$$\begin{aligned}\sigma_T &\longrightarrow \sigma_\gamma \\ \sigma_L &\longrightarrow 0\end{aligned}\quad (q^2 \rightarrow 0)$$

Destaquemos, de entre las relaciones encontradas, la ecuación (16) que permite encontrar una relación entre las funciones de estructura hadrónica para aquellos casos en que la física esté dominada por los fotones reales:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{W_1(\nu, q^2)}{\nu^2} = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{W_2(\nu, q^2)}{-q^2} \quad (21)$$

Sin embargo, sobre la función  $W_L(\nu, q^2)$  no se obtiene una relación similar puesto que sería necesario conocer un orden superior en  $q^2$ . Para poder decir algo acerca de esta función será necesario incorporar algún modelo con el que tratar la ecuación (4).

#### 4.4 FUNCIONES DE ESTRUCTURA EN TERMINOS DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DE LOS OPERADORES DE CORRIENTE HADRONICA

Partiendo de la expresión general del tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}(\mathbf{P}, q)$  (4), podemos encontrar relaciones entre las funciones de estructura hadrónica  $W_{1,2,L}(\nu, q^2)$  y los elementos de matriz de los operadores de corriente hadrónica. Estas expresiones permitirán más tarde, al considerar casos concretos de hadrones, encontrar formas más manejables para las funciones de estructura.

Por simple inspección, podemos obtener, a partir de la descomposición invariante gauge (9) del tensor hadrónico, las siguientes relaciones:

$$W_1(\nu, q^2) = -\frac{1}{2} \left( g^{ij} + \frac{q^i q^j}{|\vec{q}|^2} \right) W_{ij} \quad (22)$$

$$W_L(\nu, q^2) = -\frac{|\vec{q}|^2}{q^2} W_{00}$$

y, de ellas, la relación para  $W_2(\nu, q^2)$  en la que, en principio, no estamos interesados.

Si a continuación expresamos explícitamente las componentes del tensor hadrónico en función de los elementos de matriz de corriente hadrónica (4) y realizamos las contracciones indicadas en (22) llegamos a las expresiones:

$$W_1(\nu, q^2) = \frac{1}{4} \sum_n \delta^{(4)}(p + P - p' - P'_n) \left\{ |\langle P'_n | \vec{J}(0) | P \rangle|^2 - \frac{1}{|\vec{q}|^2} |\langle P'_n | \vec{q} \cdot \vec{J}(0) | P \rangle|^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_n \delta^{(4)}(p + P - p' - P'_n) \left| \langle P'_n | \vec{J}(0) \times \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} | P \rangle \right|^2$$

$$W_L(\nu, q^2) = - \frac{q^2}{2|\vec{q}|^2} \sum_n \delta^{(4)}(p + P - p' - P'_n) \left| \langle P'_n | J_0(0) | P \rangle \right|^2$$

(23)

De nuevo, en estas expresiones se observa que la función de estructura  $W_1(\nu, q^2)$  está relacionada con la interacción mediada por dos fotones transversales que se hace patente mediante el operador  $\vec{J}(0) \times \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$  perpendicular al trimomento del fotón, mientras que la función  $W_L(\nu, q^2)$  trata la parte correspondiente a fotones longitudinales, igualmente visible en su dependencia del operador  $J_0(0)$ . Si escribiéramos

la función  $W_2(\nu, q^2)$  obtendríamos por tanto una combinación de parte longitudinal y transversal.

Este hecho será explotado en el apartado siguiente en el que trabajaremos en el ámbito de la física nuclear y podremos obtener información acerca del comportamiento de las funciones de estructura en determinadas zonas de las variables  $\nu$  y  $q^2$ .

En particular veremos que, en sistemas nucleares de determinadas características, podremos encontrar relaciones entre las funciones de estructura, lo que nos permitirá avanzar en el cálculo de la expresión (3.23)

#### 4.5 FUNCIONES DE ESTRUCTURA PARA UN NUCLEO ATOMICO. APROXIMACION DIPOLAR NO RETARDADA

El tratamiento realizado a lo largo del capítulo sobre las funciones de estructura hadrónica es de validez general puesto que las únicas consideraciones realizadas sobre ellas provenían de principios de simetría observados por interacciones electromagnéticas y fuertes sin atender a la naturaleza del hadrón a que se refieren.

En este apartado prestaremos atención a los casos en que el hadrón es un núcleo atómico. Motivaremos este estudio por una parte en que en muchos procesos de colisión se usan núcleos atómicos como blanco y por otra al considerar que en el ámbito de la física nuclear existen prescripciones claras

para estudiar las excitaciones radiativas nucleares lo que nos permitirá hacer consideraciones sobre las expresiones (23) encontradas en 4.4. En particular, para estos casos, encontraremos formas explícitas de los operadores de corriente hadrónica que nos permitirán evaluar las funciones de estructura mediante relaciones con cantidades medibles.

#### 4.5.1. Tratamiento de los operadores de corriente hadrónica en el caso nuclear. Descripción no relativista del núcleo.

En el estudio de la dinámica nuclear que realizamos a continuación, consideramos los nucleones constituyentes del núcleo como partículas de baja energía cinética, es decir, no relativistas. Esto se traducirá en el hecho de que usaremos las expresiones no relativistas para los operadores de corriente hadrónica. Correcciones a esta aproximación pueden realizarse, de hecho es conocido cómo tratar muchas de ellas pero, considerando que en este trabajo buscamos correcciones a la amplitud de colisión leptón-hadrón, carece de sentido realizar pequeñas correcciones a pequeñas correcciones.

El Hamiltoniano de un conjunto de nucleones no relativistas que interaccionan con un campo externo  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ , puede escribirse en la forma invariante gauge:

$$H = H_0 + \int J_\mu(\vec{x}) A^\mu(\vec{x}) d^3\vec{x} + \frac{e^2}{2M} \int \vec{A}(\vec{x}) \vec{A}(\vec{y}) \{s_6(\vec{x}, \vec{y})\} d^3\vec{x} d^3\vec{y} \quad (24)$$

siendo  $J^\mu(x) = (\rho(\vec{x}), \vec{J}(\vec{x}))$  los operadores de carga y corriente nuclear (que, en su versión no relativista, sólo son aproximadamente un cuadrivector puesto que no obedecen a los propiedades de transformación requeridas) y  $A^\mu(\vec{x})$  el cuadrivector potencial electromagnético.

Por otra parte  $H_0$  es el Hamiltoniano de los  $A$  nucleones y consta de la parte libre y la parte de interacción no electromagnética:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A \frac{\vec{p}_i^2}{2M} + \sum_{j < i} V_{ij}$$

siendo  $V_{ij}$  el potencial de dos cuerpos que describe dicha parte de interacción no electromagnética y que admitimos independiente del momento de los nucleones por motivos que luego se harán patentes. Igualmente lo consideramos independiente de isospín; en lo sucesivo despreciaremos la diferencia de masa entre protón y neutrón.

Si  $f_{p,n}(\vec{x}-\vec{y})$  y  $\mu_{p,n}(\vec{x}-\vec{y})$  son las densidades de carga y momento magnético del protón y neutrón, los operadores densidad de carga y de corriente tienen las expresiones:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^A \int d^3y \delta^3(\vec{y}-\vec{x}_i) \left[ f_p(\vec{x}-\vec{y}) \frac{1+\tau_3(i)}{2} + f_n(\vec{x}-\vec{y}) \frac{1-\tau_3(i)}{2} \right]$$

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^A \int d^3y \{ \vec{p}_i, \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \} \left[ f_p(\vec{x}-\vec{y}) \frac{1+\tau_3(i)}{2} + f_n(\vec{x}-\vec{y}) \frac{1-\tau_3(i)}{2} \right] \frac{1}{2M} + \sum_{i=1}^A \int d^3y \vec{\sigma}(i) \times \vec{\nabla}_i \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) .$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[ \mu_p (\vec{x} - \vec{y}) \frac{1 + \tau_3(i)}{2} + \mu_n (\vec{x} - \vec{y}) \frac{1 - \tau_3(i)}{2} \right] \frac{1}{2M} \\
f_{sg} (\vec{x} - \vec{y}) &= \sum_{i=1}^A \int d^3z \left[ f_p (\vec{x} - \vec{y}) \frac{1 + \tau_3(i)}{2} + \right. \\
& \left. + f_n (\vec{x} - \vec{y}) \frac{1 - \tau_3(i)}{2} \right] \cdot \left[ f_p (\vec{y} - \vec{z}) \frac{1 + \tau_3(i)}{2} + \right. \\
& \left. + f_n (\vec{y} - \vec{z}) \frac{1 - \tau_3(i)}{2} \right] \delta^3 (\vec{z} - \vec{x}(i)) \quad (25)
\end{aligned}$$

$\tau_3(i)$  representa la 3ª componente de isospín de la partícula  $i$  y  $M$  la masa de un nucleón.

De la forma general del Hamiltoniano, con las restricciones impuestas sobre el potencial  $V_{ij}$ , se preserva la ecuación de continuidad de la corriente en la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) = - \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}) = -i [H_0, \rho(\vec{x})] \quad (26)$$

La inclusión de corrientes de intercambio necesitará términos adicionales en  $\vec{J}(\vec{x})$  y  $f_{sg}$  que modificarían la ecuación de continuidad.

En estas condiciones, admitiendo que podemos



conocer exactamente los estados propios del Hamiltoniano  $H_0$ , llegamos a la identificación (FR74):

$$\langle f \vec{P}_f | \rho(0) | i \vec{P}_i \rangle = (4E_f E_i)^{1/2} \langle f | \rho(\vec{q}) | i \rangle \quad (27)$$

donde  $|n \vec{P}_n \rangle$  representa el estado propio de  $H_0$  con energía  $n$  y trimomento nuclear total  $\vec{P}_n$ . El operador  $\rho(\vec{q})$  es la transformada de Fourier tridimensional:

$$\rho(\vec{q}) = \int d^3 \vec{x} \rho(\vec{x}) e^{i \vec{q} \cdot \vec{x}} \quad (28)$$

Y de forma análoga (FR74)

$$\langle f \vec{P}_f | \vec{J}(0) | i \vec{P}_i \rangle = (4E_f E_i)^{1/2} \langle f | \vec{J}(\vec{q}, \vec{P}_i + \vec{P}_f) | i \rangle \quad (29)$$

donde la corriente  $\vec{J}(\vec{q}, \vec{P}_i + \vec{P}_f)$  consta de las partes correspondientes a corriente de carga, de magnetización y de convección.

Es decir, en estas condiciones, al calcular los elementos de matriz de la corriente hadrónica, puede eliminarse la dependencia del trimomento del núcleo y considerar sólo la energía de los niveles en que se encuentre debido a la interacción con el fotón.

Por tanto, si realizamos esta aproximación no relativista en las expresiones (23) obtenemos,

escribiéndolas en el sistema laboratorio:

$$W_L(q^0, q^2) = -\frac{q^2}{|\vec{q}|^2} M \sum_{i \neq f} \delta(q^0 - (q_f^0 - q_i^0)) |\langle f | \rho(\vec{q}) | i \rangle|^2$$

$$W_T(q^0, q^2) = \frac{1}{2} M \sum_{i \neq f} \delta(q^0 - (q_f^0 - q_i^0)) |\langle f | \vec{J}(\vec{q}) \times \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} | i \rangle|^2$$

donde  $|i\rangle$ ,  $|f\rangle$  representan los estados nucleares inicial y final,  $q^0$  es la energía de los fotones que inducen la transición y  $q_f^0 - q_i^0$ , la diferencia entre los niveles de energía inicial y final en los que se encuentra el núcleo.

#### 4.5.2. Aproximación dipolar no retardada:

En el apartado anterior realizamos una descripción no relativista de la dinámica nuclear y obtuvimos las funciones de estructura nuclear en términos de los operadores usuales de respuesta nuclear:  $\rho(\vec{q})$  para las interacciones longitudinales, descritas por  $W_L(\nu, q^2)$ , y  $\vec{q}/|\vec{q}| \times \vec{J}(\vec{q})$  para el caso de la interacción transversal, contenida en  $W_T(\nu, q^2)$ .

Para obtener una forma más sencilla de las expresiones (30) consideraremos aquellos casos en que todas las transiciones nucleares, descritas a partir de los elementos de matriz de los operadores de respuesta nuclear, son de tipo multipolar

eléctrico: se trataría de un caso totalmente riguroso si partiésemos de un estado inicial nuclear con espín-paridad  $J^\pi = 0^+$  para llegar a estados con espín  $J'$  y paridad  $\pi' = (-)^{J'}$ . En cualquier caso es conocido que las transiciones multipolares eléctricas son las dominantes.

Podemos considerar, por otra parte, que en muchos sistemas de interés físico susceptibles de absorber o emitir radiación electromagnética es una buena aproximación considerar que la longitud de onda de la radiación que interviene en el proceso es mucho mayor que la extensión espacial del sistema en cuestión. Esto es, en particular, aplicable a muchas transiciones nucleares en las que la energía del fotón es típicamente de unas decenas de MeV mientras que su extensión espacial es de algunos fermis. En estas condiciones, para un apreciable rango del espectro de estados excitados del núcleo se cumple la condición  $|\vec{q}| \cdot R \ll 1$ , siendo  $|\vec{q}|$  el módulo del trimomento del fotón que induce la transición y  $R$  la extensión del sistema (núcleo). Este hecho permitirá simplificaciones en los cálculos de elementos de matriz como los que aparecen en (30).

Si además de cumplirse estos dos supuestos, los grados de libertad debidos a las contribuciones mesónicas de las interacciones no electromagnéticas entre los nucleones puede considerarse que no afectan a la validez de la ecuación de continuidad (26) de la corriente hadrónica en el rango de energías del fotón en que estamos interesados (caso no relativista), es aplicable el teorema de Siegert que relaciona

los elementos de matriz de la corriente vectorial  $\vec{J}(\vec{r})$  con los correspondientes de la densidad de carga eléctrica  $\rho(\vec{r})$ .

En particular, nuestro interés se centra en relacionar los elementos de matriz del operador de excitación transversal que aparece en (30b) con el operador de excitación longitudinal o densidad de carga (30a). La expresión obtenida; representando por  $|f\rangle, |i\rangle$  los estados inicial y final del núcleo y escogiendo  $\vec{q}$  según el eje ZZ'.

$$\langle f | \vec{J}(\vec{q}) \times \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} | i \rangle =$$

$$= -i \sqrt{4\pi} \sum_{l \neq 0} \sum_{\mu=-l}^{+l} (-1)^\mu (1 \ 1 \ 1 | -\mu \ 0 \ -\mu) i^l \left[ \frac{(2l+1)(2l+1)}{l} \right]^{1/2}.$$

$$\int \langle f | \rho(\vec{r}) | i \rangle j_l(|\vec{q}| \cdot r) Y_{l\mu}(\hat{r}) d^3\vec{r} \cdot \vec{e}_{-\mu} \quad (31)$$

La experiencia (RI76) muestra que las transiciones dipolares son las más importantes en cálculo de correcciones a energías de niveles atómicos debidas a las polarizabilidades hadrónicas. Como ya se comentó en el capítulo 2, este tipo de correcciones se las interpreta a partir de intercambio de

dos fotones entre leptón y hadrón. Por esto y a raíz de los comentarios hechos en cuanto a la aplicabilidad del teorema de Siegert, consideraremos el caso en que la contribución dominante en el sumatorio de (31) proviene del valor  $l=1$  con lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 \langle p | \vec{J}(\vec{q}) \times \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} | i \rangle &= \\
 &= \sqrt{2} |\vec{q}| \sum_{\mu=-1}^{+1} (-)^{\mu} (111 | -\mu \ 0 \ -\mu) \int d^3\vec{r} \langle p | \rho(\vec{r}) | i \rangle \\
 &\quad r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1\mu}(\hat{r}) \vec{r}_{-\mu}
 \end{aligned} \tag{32}$$

Si además consideramos los nucleones como partículas puntuales, es decir, en la ecuación (25) hacemos las sustituciones:

$$f_p(\vec{x}-\vec{y}) = e_p \delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad f_n(\vec{x}-\vec{y}) = 0$$

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^A e_i \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$$

siendo  $e_i$  la carga del protón ( $=e_p$ ) o del neutrón ( $=0$ ) y  $\vec{x}_i$  su posición, podemos escribir el elemento de matriz de la densidad de carga que aparece en (32) en términos de las componentes esféricas del operador dipolar:

$$D_{\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{i=1}^A e_i r_i Y_{1\mu}(\hat{r}_i)$$

Obteniéndose; previa aplicación del teorema de Wigner-Eckart:

$$\begin{aligned}
 \langle f | \vec{J}(\vec{q}) \times \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} | i \rangle &= \\
 &= \sqrt{2} |\vec{q}| \langle f | D_0 | i \rangle \sum_{\mu=-1}^{+1} (-)^{\mu} (111 | -\mu 0 \mu) (J_i + 1 J_f | M_i \mu M_f) \vec{J}_{-\mu}
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Para aquellos casos en que el núcleo esté inicialmente en su estado fundamental y a partir de las condiciones previas al teorema de Siegert ésta sea  $|i\rangle = |0^+\rangle$ :

$$|\langle f | \vec{J}(\vec{q}) \times \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} | i \rangle|^2 = \mathcal{L} |\vec{q}|^2 |\langle N | D_0 | 0 \rangle|^2
 \tag{34}$$

siendo N el estado final sujeto a las restricciones de momento angular impuestas por el Clebsch-Gordan que aparece en (33).

Llevado (34) a las ecuaciones (30) encontramos la relación en la aproximación dipolar no retardada:

$$\frac{W_L}{-q^2} \approx \frac{W_A}{q^0{}^2} \approx M \sum_{N \neq 0} \delta(q^0 - (q_N^0 - q_0^0)) |\langle N | D_0 | 0 \rangle|^2$$

que representa la versión del teorema de Siegert a nivel de las funciones de estructura.

Teniendo en cuenta la relación (21) proporcionada por invarianza gauge, podemos encontrar relación entre las tres funciones de estructura en los límites comentados en esta sección:

$$\frac{W_L}{-q^2} \approx \frac{W_2}{-q^2} \approx \frac{W_1}{q^0{}^2} \approx M \sum_{N \neq 0} \delta(q^0 - (q_N^0 - q^0)) |\langle N | D_0 | 0 \rangle|^2 \quad (35)$$

La introducción de un retardo en la componente longitudinal, o bien en el cálculo del elemento matriz de la densidad de carga implicaría la aparición de los factores de forma de los nucleones o, alternativamente, la inclusión de un factor de forma global para el núcleo dependiente del estado final (BE83), (R082).

Ignorando, como en (35), este ~~factor~~ factor de forma invariante podemos garantizar el correcto comportamiento cuando la física dominante del proceso sea debida a fotones reales, sin embargo se esperarán desviaciones si la contribución de fotones virtuales con altos  $q^2$  es apreciable.

Señalemos por último que, en los límites de la ecuación (35), considerando la expresión (17), llegamos a una relación entre la sección eficaz dipolar de fotoabsorción de fotones reales y las funciones de estructura. Una forma apropiada de

escribirla:

$$\sum_{N \neq 0} \int (q^0 - (q_N^0 - q_0^0)) |\langle N | D_0 | 0 \rangle|^2 = \frac{\sigma_r(q^0)}{4\pi^2 \alpha q^0} \quad (36)$$

relación que será fundamental en el tratamiento posterior de la ecuación (3.23).



## CAPITULO 5

Calculo de  $T_0(2\gamma)_{\lambda\lambda}^c$  para núcleos en la

aproximación dipolar no retardada

En este capítulo calculamos la contribución del continuo a la amplitud de colisión  $T_0(2\gamma)_{\lambda\lambda}^c$  dada en la ecuación (3.23) en los límites expuestos en el capítulo anterior relativos al blanco hadrónico. Es decir, consideraremos que éste es un núcleo atómico que obedece a una descripción no relativista de la dinámica de sus nucleones y en el que las transiciones entre sus estados inducidos por absorción y emisión de luz son del tipo dipolar eléctrica. Asimismo consideraremos que la dinámica del proceso de fotoabsorción viene dominada por la física de fotones reales con lo que podemos tomar la aproximación dipolar no retardada para el factor de forma nuclear y, mediante (35) y (36) relacionar las funciones de estructura nuclear a bajos  $q^2$  con la sección eficaz dipolar de fotoabsorción de fotones reales de forma que:

$$\frac{W_L}{-q^2} \approx \frac{W_1}{\nu'^2} \approx \frac{W_2}{-q^2} \approx \frac{\sigma_\gamma(\nu')}{4\pi^2 \nu' (\epsilon^2/4\pi)} \quad M \quad (1)$$

y llevándolo a (3.23), obtenemos la expresión de  $T_0^c (2\gamma)_{\lambda'\lambda}$  para la colisión leptón-núcleo en la aproximación dipolar no retardada:

$$i T_0^c (2\gamma)_{\lambda'\lambda} = -\delta_{\lambda'\lambda} \left(\frac{mM}{\pi^2}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi} \mathcal{P} \int_{\nu_0}^{+\infty} d\nu' \frac{\sigma_T(\nu')}{\nu'}$$

$$\sum_{\alpha, \beta = \pm 1} \int \frac{d^4 q}{q^2} \cdot \frac{1}{M\nu' + \alpha Pq} \frac{1}{q^2 + 2\beta Pq} \left\{ \frac{P^0}{m^2} + \frac{1}{q^2} \left[ \left(\frac{Pq}{m}\right)^2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - e \frac{P^0}{m} \frac{(Pq)(Pq)}{mM} + \left(\frac{Pq}{M}\right)^2 \right] + e \frac{1}{(q^0)^2} \left[ \frac{(Pq)(Pq)}{mM} \right]^2 \right\} \quad (2)$$

El haber introducido la aproximación dipolar no retardada permite conocer toda la dependencia en el cuadrimomento  $q$  con lo que, en principio, sin más consideraciones acerca de las características del blanco, podrá realizarse la integración sobre las variables  $q^\mu = (q^0, \vec{q})$ . El elemento de matriz quedará escrito, finalmente, en términos de una integración sobre la variable dispersiva introducida en (3.16ss) de la cual depende la sección eficaz de fotoabsorción. Por tanto, será necesario conocer explícitamente esta sección eficaz para obtener resultados numéricos en casos concretos.

## 5.1 INTEGRACION SOBRE EL ESPACIO DE CUADRIMOMENTO $q$ .

De acuerdo con lo expuesto en el Apéndice I, un método de abordar el tipo de integrales que aparecen en (2) fue dado por Feynman (FE49) y consiste fundamentalmente en la introducción de variables auxiliares de forma que los polos simples en la variable  $q^0$  del integrando se transforman en dos polos de orden superior que permite realizar la integración sobre  $q$  y, posteriormente, las integraciones añadidas al introducir las variables auxiliares.

Siguiendo los detalles del apéndice, en este caso es necesario introducir dos variables auxiliares ( $u_1, u_2$ ) y, puesto que la integral es convergente, es posible realizar un desplazamiento del origen de coordenadas en el cuadridespacio  $q^M$  y obtener la expresión:

$$i T_0^{(2f)}_{\lambda\lambda} = -d_{\lambda\lambda} \left(\frac{mM}{\pi^2}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi} P \int_{u_0}^{+\infty} dv' \frac{\sigma_f(v')}{v'} \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} \int_0^1 u_1^{-2} du_1 \int_0^1 du_2 I(u_1, u_2)$$

siendo la función subintegral  $I(u_1, u_2)$ :

$$I(u_1, u_2) = \int d^4 q \frac{1}{[q^2 + a(\alpha, \beta)]^3} \left\{ 2! \frac{P^{02}}{m^2} + 3! \left[ \frac{\langle P(q-g) \rangle}{m^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{P^0}{m} \frac{\langle P(q-g(\alpha, \beta)) \rangle \langle P(q-g(\alpha, \beta)) \rangle}{mM} + \frac{\langle P(q-g(\alpha, \beta)) \rangle^2}{M^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{u_2}{(q^2 + a(\alpha, \beta)^2)} + \right.$$

$$+ 4! \frac{\langle P(q-g(\alpha, \beta)) \rangle^2 \langle P(q-g(\alpha, \beta)) \rangle^2}{m^2 M^2} \cdot \frac{U_2^2}{[q^2 + a(\alpha, \beta)^2]^2} \left. \vphantom{\frac{\langle P(q-g(\alpha, \beta)) \rangle^2 \langle P(q-g(\alpha, \beta)) \rangle^2}{m^2 M^2}}} \right\}$$

con:

$$g(\alpha, \beta) = \beta p(1-u_2) + \alpha \frac{P}{2} (1-u_1) \frac{1}{u_1}$$

$$a(\alpha, \beta) = M v' \frac{1-u_1}{u_1} - g(\alpha, \beta)^2$$

Considerando las expresiones (I.2 a I.5), la integración sobre  $q^{\mu}$  es ahora inmediata obteniéndose:

$$\begin{aligned} I(u_1, u_2) = & i \frac{\pi^2}{2} \left\{ \frac{1}{a(\alpha, \beta)^2} \left[ 2 \frac{p^{\circ 2}}{m^2} + \ell u_2 \left( 1 - \frac{p^{\circ 2}}{m^2} \right) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{U_2^2}{\ell} \left( 1 + \ell \frac{p^{\circ 2}}{m^2} \right) \right] + \frac{1}{[a(\alpha, \beta)^2]^2} \left[ 2 u_2 \left\langle \frac{(Pg(\alpha, \beta))^2}{m^2} + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{(Pg(\alpha, \beta))^2}{M^2} - 2 \frac{p^{\circ}}{m} \frac{(Pg(\alpha, \beta))(p \cdot g(\alpha, \beta))}{m M} \right\rangle + \frac{U_2^2}{m^2 M^2} \left\langle \right. \\ & \left. \left. (Pg(\alpha, \beta))^2 P^2 + (Pg(\alpha, \beta))^2 p^2 + 4 (Pg(\alpha, \beta))(Pg(\alpha, \beta))(p \cdot P) \right\rangle \right] + \\ & \left. + \frac{1}{[a(\alpha, \beta)^2]^3} \frac{4 U_2^2}{m^2 M^2} (Pg(\alpha, \beta))^2 (Pg(\alpha, \beta))^2 \right\} \end{aligned}$$

Es conveniente introducir en las variables auxiliares los cambios dados por:

$$x = 1 - u_1$$

$$y = \frac{1 - u_1}{u_1}$$

y, debido a la disposición de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , podemos realizar la suma sobre uno de ellos de forma que antes de integrar las variables auxiliares, el elemento de matriz se escribe como:

$$T_0^{(2)}(2\gamma)_{\lambda\lambda} = -d_{\lambda\lambda} \left(\frac{mM}{\pi}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi} p \int_{u_0}^{\infty} du_1 \frac{\sigma_{\gamma}(u_1)}{u_1} \sum_{\gamma=\pm 1} \int_0^1 dx \int_0^{\infty} dy I(x, y) \quad (3)$$

donde:

$$\begin{aligned} I(x, y) = & -\frac{4}{M^2} \frac{1}{a(\gamma)^2} \left[ 2 \frac{p^{o2}}{m^2} + 2(1-x) \left(1 - \frac{p^{o2}}{m^2}\right) + \frac{(1-x)^2}{2} \left(1 + 2 \frac{p^{o2}}{m^2}\right) \right] + \\ & + \left(-\frac{4}{M^2}\right)^2 \frac{1}{a(\gamma)^4} \left[ 2(1-x) \left(1 - \frac{p^{o2}}{m^2}\right) \left(m^2 x^2 + \gamma x \gamma p^o M + \frac{M^2}{4} y^2\right) + \right. \\ & + (1-x)^2 \left. \left( m^2 x^2 \left(1 + 5 \frac{p^{o2}}{m^2}\right) + y^2 \frac{M^2}{4} \left(1 + 5 \frac{p^{o2}}{m^2}\right) + 2 \gamma x \gamma p^o M \left(2 + \frac{p^{o2}}{m^2}\right) \right) \right] + \\ & + \left(\frac{-4}{M^2}\right)^3 \frac{4(1-x)^2}{a(\gamma)^6} \left[ x^4 p^{o2} m^2 + x^2 y^2 \frac{M^2 m^2}{4} \left(1 + 4 \frac{p^{o2}}{m^2} + \frac{p^{o4}}{m^4}\right) + \right. \\ & + x^3 y \gamma M p^o m^2 \left(1 + \frac{p^{o2}}{m^2}\right) + x y^3 \gamma \frac{p^o M^3}{4} \left(1 + \frac{p^{o2}}{m^2}\right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{M^4 p^{\circ 2} y^4}{16 m^2} ] \quad (4)$$

con

$$a(\gamma)^2 = y^2 + 4 \frac{\gamma p^{\circ} x - \nu^{\circ}}{M} y + \frac{4 m^2}{M^2} x^2$$

## 5.2 INTEGRACION DE LAS VARIABLES AUXILIARES

### 5.2.1 Integración de la variable "y".

La integración de la variable "y" es inmediata: haciendo uso de las expresiones (1) dadas en el Apéndice II, puede escribirse en términos de la integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 4 \frac{\gamma p^{\circ} x - \nu^{\circ}}{M} y + \frac{4 m^2}{M^2} x^2} = \\ &= \frac{M}{4} \frac{-1}{[(\gamma p^{\circ} x - \nu^{\circ})^2 - m^2 x^2]^{\frac{1}{2}}} \log \frac{\gamma p^{\circ} x - \nu^{\circ} - [(\gamma p^{\circ} x - \nu^{\circ})^2 - m^2 x^2]^{\frac{1}{2}}}{\gamma p^{\circ} x - \nu^{\circ} + [(\gamma p^{\circ} x - \nu^{\circ})^2 - m^2 x^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

expresión que, según el valor del discriminante  $\Delta = m^2 x^2 - (\gamma p^{\circ} x - \nu^{\circ})^2$ , tiene la correspondiente transformación en tangente hiperbólica (si es negativo) o tangente

trigonométrica (caso de ser positivo).

Según el valor de  $\gamma$  y para distintos intervalos de las variables  $x$  y  $\nu'$ , tendremos:

$$\gamma = -1 \quad \nu' \in (0, \infty) \quad x \in (0, 1) \quad \Delta < 0$$

$$\gamma = +1 \quad \nu' \in (0, \rho^0 - m) \quad x \in (0, \nu'/\rho^0 + m) \quad \Delta < 0$$

$$x \in (\nu'/\rho^0 + m, \nu'/\rho^0 - m) \quad \Delta > 0$$

$$x \in (\nu'/\rho^0 - m, 1) \quad \Delta < 0$$

$$\nu' \in (\rho^0 - m, \rho^0 + m) \quad x \in (0, \nu'/\rho^0 + m) \quad \Delta < 0$$

$$x \in (\nu'/\rho^0 + m, 1) \quad \Delta > 0$$

$$\nu' \in (\rho^0 + m, +\infty) \quad x \in (0, 1) \quad \Delta < 0$$

y en cada caso, partiendo de  $x=0$ ,  $\Delta = +\nu'$  y tomando la fase apropiada al rebasar los ceros de  $\Delta$  obtenemos:

$$\mathcal{J}(\Delta < 0) = \frac{M/2}{|(\gamma \rho^0 x - \nu')^2 - m^2 x^2|^{1/2}} \log \left| \frac{1 + \left| \frac{\nu' - (\rho^0 + m)x}{\nu' - (\rho^0 - m)x} \right|^{1/2}}{1 - \left| \frac{\nu' - (\rho^0 + m)x}{\nu' - (\rho^0 - m)x} \right|^{1/2}} \right| \quad (5)$$

$$\mathcal{J}(\Delta > 0) = \frac{M}{|(\gamma \rho^0 x - \nu')^2 - m^2 x^2|^{1/2}} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{(\rho^0 + m)x - \nu'}{\nu' - (\rho^0 - m)x} \right]^{1/2}$$

Y la integración sobre la variable "y" se escribe finalmente; de (4):

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_0^{\infty} dy I(x, y) = I_1(x) + I_2(x) \\
 I_1(x) &= \left(-\frac{4}{M^2}\right)^3 \left\{ \frac{-1}{\Delta} M^3 (1-x) \left(1 - \frac{p^{o2}}{m^2}\right) v' + \right. \\
 &+ \frac{4M}{\Delta^2} (1-x)^2 \left[ m^2 x^2 (v' - \gamma p^{o2} x) \left(1 + 12 \frac{p^{o2}}{m^2} + 3 \frac{p^{o4}}{m^4}\right) + \right. \\
 &+ \left. \left. 4\gamma p^{o2} x (v' - \gamma p^{o2} x)^2 \left(3 + 2 \frac{p^{o2}}{m^2}\right) + 2 (v' - \gamma p^{o2} x)^3 \left(1 + 3 \frac{p^{o2}}{m^2}\right) + 4\gamma p^{o2} x^3 \right] \right\} \\
 I_2(x) &= -\frac{8}{M^2} \left\{ \frac{p^{o2}}{m^2} - v' \left(1 - \frac{p^{o2}}{m^2}\right) \frac{1-x}{m^2 x^2 - (v' - \gamma p^{o2} x)^2} \cdot (v' - \gamma p^{o2} x) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1-x^2}{4[m^2 x^2 - (v' - \gamma p^{o2} x)^2]^2} v'^2 \left[ v'^2 + 2 \left(m x < 1 - \frac{p^{o2}}{m^2} \right) + \gamma \frac{p^{o2}}{m} v' \right] \right\} \mathcal{J}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

con  $\mathcal{J}$  dado en (5).

### 5.2.2. Integración de la variable "x".

Utilizando las expresiones del Apéndice II ecuación (2) puede obtenerse la integración correspon-



diente a  $I_1(x)$ . Si realizamos también la suma sobre  $\gamma$  siendo:

$$I_1 = \sum_{\gamma=\pm 1} \int_0^1 dx I_1(x)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{mM} \left\{ \left[ \frac{5}{4} \frac{\nu'^2}{m^2} + \frac{\nu'}{m} \left(1 - 3 \frac{p^0}{m}\right) - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{p^0}{m}\right) \left(9 - 7 \frac{p^0}{m}\right) \right] \ln \left| \frac{p^0 + m - \nu'}{\nu'} \right| + \right. \\ & + \left[ \frac{5}{4} \frac{\nu'^2}{m^2} + \frac{\nu'}{m} \left(1 + 3 \frac{p^0}{m}\right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{p^0}{m}\right) \left(9 + 7 \frac{p^0}{m}\right) \right] \ln \left| \frac{p^0 - m + \nu'}{\nu'} \right| + \\ & + \left[ -\frac{5}{4} \frac{\nu'^2}{m^2} + \frac{\nu'}{m} \left(1 + 3 \frac{p^0}{m}\right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{p^0}{m}\right) \left(9 + 7 \frac{p^0}{m}\right) \right] \ln \left| \frac{p^0 - m - \nu'}{\nu'} \right| + \\ & + \left[ -\frac{5}{4} \frac{\nu'^2}{m^2} + \frac{\nu'}{m} \left(1 - 3 \frac{p^0}{m}\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{p^0}{m}\right) \left(9 - 7 \frac{p^0}{m}\right) \right] \ln \left| \frac{p^0 + m + \nu'}{\nu'} \right| + \\ & \left. + 5 \frac{\nu'}{m} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

En el cálculo de  $I_2(x)$ , algo más laborioso, es útil realizar el cambio de variable:

$$t = \left[ \frac{(\gamma p^0 + m)x - \nu'}{(\gamma p^0 - m)x - \nu'} \right]^{1/2}$$

y tener presente la discusión de la ecuación (5) cuando, según los valores de  $\gamma$ ,  $x$  y  $\nu'$ ,  $t$  pase de valores reales a imaginarios.

Usando la expresión (II.3) y la forma integral de la función dilogarismo, estudiada en el Apéndice II, llegamos a la expresión:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sum_{\gamma=\pm 1} \int_0^1 dx \quad I_2(x) = \\
 &= \frac{1}{mM} \left\{ \left[ -\frac{9+2\frac{p^0}{m}-7\frac{p^{02}}{m^2}}{4} + \frac{5}{4}\frac{\nu'^2}{m^2} + \frac{\nu'}{m}\left(1-3\frac{p^0}{m}\right) \right] \ln \left| \frac{p^0+m-\nu'}{\nu'+m-p^0} \right| + \right. \\
 &+ \left[ -\frac{9-2\frac{p^0}{m}-7\frac{p^{02}}{m^2}}{4} + \frac{5}{4}\frac{\nu'^2}{m^2} + \frac{\nu'}{m}\left(1+3\frac{p^0}{m}\right) \right] \ln \left| \frac{p^0-m+\nu'}{p^0+m+\nu'} \right| + \\
 &+ \left( \frac{p^0}{m} - 2\frac{\nu'}{m} \right) \ln \left| \frac{m}{2(\nu'-p^0+m)} \right| - \left( \frac{p^0}{m} + 2\frac{\nu'}{m} \right) \ln \left| \frac{m}{2(p^0+m+\nu')} \right| + \\
 &+ 4 \left( \frac{p^0+m+\nu'}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{p^0-m+\nu'}{m} \right)^{1/2} \ln \left| \frac{1 - \left( \frac{p^0-m+\nu'}{p^0+m+\nu'} \right)^{1/2}}{1 + \left( \frac{p^0-m+\nu'}{p^0+m+\nu'} \right)^{1/2}} \right| + \\
 &\left. + A(p^0, m, \nu') + B(p^0, m, \nu') \right\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

donde los valores de las funciones A y B dependen del intervalo de  $\nu'$  considerado:

$$\begin{aligned}
 A(p^0, \nu', m) &= 4 \left| \frac{p^0-m-\nu'}{m} \right|^{1/2} \left| \frac{\nu'-p^0-m}{m} \right|^{1/2} \ln \left| \frac{1 - \left| \frac{p^0+m-\nu'}{p^0-m-\nu'} \right|^{1/2}}{1 + \left| \frac{p^0+m-\nu'}{p^0-m-\nu'} \right|^{1/2}} \right|, \quad \Delta < 0 \\
 &= 8 \left( \frac{\nu'-(p^0-m)}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{m-\nu'+p^0}{m} \right)^{1/2} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{p^0+m-\nu'}{\nu'-(p^0-m)} \right]^{1/2}, \quad \Delta > 0 \quad (9)
 \end{aligned}$$

Y

$$B(p^0, \nu', m) = 4 \left( \frac{p^{02}}{m^2} - \frac{p^0 \nu'}{m} + \frac{\nu'^2}{2m^2} \right) j(\gamma=+1) + \\ + 4 \left( \frac{p^{02}}{m^2} + \frac{p^0 \nu'}{m} + \frac{\nu'^2}{2m^2} \right) j(\gamma=-1) \quad (10)$$

siendo:

$$j(\gamma) = m \int_0^1 \frac{dx}{[(\gamma p^0 x - \nu')^2 - m^2 x^2]^{1/2}} \ln \frac{\gamma p^0 x - \nu' - [(\gamma p^0 x - \nu')^2 - m^2 x^2]^{1/2}}{\gamma p^0 x - \nu' + [(\gamma p^0 x - \nu')^2 - m^2 x^2]^{1/2}}$$

que puede relacionarse con  $L_2(z)$  y obtener un resultado analítico de la integración sobre la variable  $x$ . Los detalles del proceso pueden completarse con las relaciones y propiedades de la función dilogarismo y, finalmente, mediante las ecuaciones (7), (8), (9) y (10) llevadas a la expresión (3), obtener un resultado analítico para la amplitud  $T_0(2\gamma)_{\lambda\lambda}^c$  en la aproximación dipolar no retardada a cualquier energía del leptón.

Recordando que  $m$  representaba la masa del leptón mientras que  $p^0$  era su energía total, podemos escribir el resultado en términos de la energía cinética  $T = p^0 - m$ .

$$T_0(2\gamma)_{\lambda\lambda}^c = d_{\lambda\lambda} \frac{4m\alpha}{\pi^2} M \int_{\nu_0}^{+\infty} d\nu' \frac{\sigma_2(\nu')}{\nu'} [\mathcal{H}(\nu', m, T) + \mathcal{G}(\nu', m, T)] \quad (11)$$

donde la función  $\mathcal{H}(\nu', m, T)$  se escribe:

$$\mathcal{H}(\nu', m, T) = \frac{\nu'}{m} - \frac{\nu'}{m} \ln \frac{2\nu'}{m} - \frac{\nu'+T}{m} t_0^{-1} \ln \frac{1-t_0}{1+t_0} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m}{T^{1/2} (T+2m)^{1/2}} \left[ \left(1 + \frac{T}{m}\right)^2 + \frac{\nu'}{m} \left(1 + \frac{T}{m}\right) + \frac{\nu'^2}{2m^2} \right] \left\{ L_2 \left( \frac{1-t_0}{1+t_0} \cdot \frac{a-1}{a+1} \right) - \right. \\
& \left. - L_2 \left( \frac{1-t_0}{1+t_0} \cdot \frac{a+1}{a-1} \right) + \ln \frac{1-t_0}{1+t_0} \ln \frac{at_0+1}{at_0-1} \cdot \frac{a-1}{a+1} \right\}
\end{aligned}$$

válida para cualquier valor de  $\nu', T, m$ .

Mientras que  $G_1(\nu', m, T)$  tiene formas distintas según el intervalo de la variable  $\nu'$  (en relación directa con la discusión realizada acerca de la ecuación (5)).

$$\nu' \in (0, T)$$

$$G_1(\nu', m, T) = - \frac{T-\nu'}{m} t_1 \ln \left| \frac{1-t_1}{1+t_1} \right| -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{m}{T^{1/2} (T+2m)^{1/2}} \left[ \left(1 + \frac{T}{m}\right)^2 + \frac{\nu'}{m} \left(1 + \frac{T}{m}\right) + \frac{\nu'^2}{2m^2} \right] \left\{ L_2 \left( \frac{t_1-1}{t_1+1} \cdot \frac{a-1}{a+1} \right) + \right. \\
& + L_2 \left( \frac{t_1+1}{t_1-1} \cdot \frac{a-1}{a+1} \right) + 4 L_2(1) + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{t_1+1}{t_1-1} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{a+1}{a-1} + \\
& \left. + \ln \frac{t_1-a}{t_1+a} \ln \frac{t_1+1}{t_1-1} \right\}
\end{aligned}$$

$$\nu' \in (T, T+2m)$$

$$G_2(\nu', m, T) = - \frac{\nu'-T}{m} t_2 t_2^{-1} t_2 -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{m}{T^{\frac{1}{2}}(T+2m)^{\frac{1}{2}}} \left[ \left(1 + \frac{T}{m}\right)^2 - \frac{\nu'}{m} \left(1 + \frac{T}{m}\right) + \frac{\nu'^2}{2m^2} \right] \left\{ L_2 \left( \frac{it_2-1}{it_2+1} \cdot \frac{a-1}{a+1} \right) + \right. \\
& + L_2 \left( \frac{it_2+1}{it_2-1} \cdot \frac{a-1}{a+1} \right) + L_2(1) + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{a+1}{a-1} + \\
& \left. + 4 \operatorname{tg}^{-1} t_2 a^{-1} \operatorname{tg}^{-1} t_2 - 2 (\operatorname{tg}^{-1} t_2)^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\nu' \in (T+2m, +\infty)$$

$$\begin{aligned}
G_3(\nu', m, T) = & - \frac{\nu' - T}{m} t_1 \ln \frac{1-t_1}{1+t_1} - \\
& - \frac{m}{T^{\frac{1}{2}}(T+2m)^{\frac{1}{2}}} \left[ \left(1 + \frac{T}{m}\right)^2 - \frac{\nu'}{m} \left(1 + \frac{T}{m}\right) + \frac{\nu'^2}{2m^2} \right] \left\{ -L_2 \left( \frac{a-t_1}{a+t_1} \cdot \frac{a-1}{a+1} \right) - \right. \\
& - L_2 \left( \frac{a+t_1}{a-t_1} \cdot \frac{a-1}{a+1} \right) + L_2(1) + L_2 \left( \left[ \frac{a-1}{a+1} \right]^2 \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{a-t_1}{a+t_1} + \\
& \left. + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{a+1}{a-1} \right\} \tag{12}
\end{aligned}$$

donde:

$$a^2 = \frac{T+2m}{T}, \quad t_0^2 = \frac{\nu'+T}{\nu'+T+2m}, \quad t_1^2 = \left| \frac{T-\nu'+2m}{T-\nu'} \right|, \quad t_2^2 = \frac{T-\nu'+2m}{\nu'-T}$$

El hecho de que la forma de la función  $G(\nu', m, T)$  aparezca un tanto diferente según el intervalo de  $\nu'$  se debe únicamente a que sobre la expresión inicial hemos realizado transformaciones en las funciones dilogarítmicas para que finalmente quede patente el carácter real de las expresiones. Puede verificarse

en cualquier caso la continuidad de la función  $G(\nu', m, T)$  en los cortes  $\nu' = T$ ,  $\nu' = T + 2m$ .

Observemos por último que a partir de esta expresión puede calcularse las correcciones a los niveles energéticos de los átomos debidas a las polarizabilidades nucleares. Dicha corrección, relacionada con nuestro elemento de matriz mediante la expresión (2.19) podemos obtenerla haciendo  $T=0$  en (12) y:

$$T_0(2\gamma)_{\lambda'\lambda}^c = \delta_{\lambda'\lambda} \frac{4m\alpha}{\pi^2} M \int_{\nu_0}^{+\infty} d\nu' \frac{\sigma_T(\nu')}{\nu'} \mathcal{F}'(\nu', m, T=0)$$

con:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(\nu', m, T=0) &= \frac{\nu'}{m} + \frac{\nu'}{m} \ln 2 \frac{\nu'}{m} + \\ &+ \left(1 + \frac{\nu'^2}{2m^2}\right) \left(1 + \frac{2m}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1 - \left(\frac{\nu'}{\nu'+2m}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(\frac{\nu'}{\nu'+2m}\right)^{\frac{1}{2}}} + C(\nu', m) \end{aligned}$$

$$C(\nu', m) =$$

$$= -2 \left(1 + \frac{\nu'^2}{2m^2}\right) \left(\frac{2m - \nu'}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2m}{\nu'} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu' < 2m$$

$$= -\left(1 + \frac{\nu'^2}{2m^2}\right) \left(\frac{\nu' - 2m}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{1 - \left(\frac{\nu'}{\nu' - 2m}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(\frac{\nu'}{\nu' - 2m}\right)^{\frac{1}{2}}} \right|, \quad \nu' > 2m$$

que puede compararse con los cálculos realizados en (BJ74) si tomamos las funciones de estructura en la aproximación dipolar no retardada.

## CAPITULO 6

### Aproximaciones para la colisión

$e^-$  y  $\mu^-$  núcleo

El objeto de esta sección va a ser la obtención de ecuaciones más expresivas que la ecuación (12) para los casos que hoy tienen interés físico, es decir, cuando el haz de leptones esté formado por muones o por electrones.

A energías intermedias esto supondrá tratamientos muy distintos de dicha ecuación en cada caso, debido a la diferencia de masa entre muón y electrón.

Así, cuando se trate de muones tomaremos como escala de las magnitudes que intervienen la masa del muón mucho mayor que su energía cinética al mismo tiempo que frente a la energía puesta en juego en las excitaciones nucleares (representadas por la variable  $\nu$ ) como realmente sucede en los casos de fotoabsorción (AH75)(AR74). Este límite permitirá reproducir la zona de la ecuación (5.11)

próxima al umbral de energía cinética ( $T=0$ ).

Por otra parte en el caso de electrones tomaremos el límite de masa muy pequeña respecto de las magnitudes comentadas en el caso anterior. Si no hacemos ninguna consideración acerca de la energía cinética del electrón frente a las energías de excitación nuclear este límite nos reproducirá alguna zona intermedia de (5.12) suficientemente alejada de  $T=0$ .

Equivalentemente, estos dos estudios corresponden a tratamientos no relativistas del leptón (caso de muones), aunque no estático, mientras que en el caso de electrones el tratamiento es totalmente relativista.

Antes de proceder a encontrar las expresiones objeto de este capítulo, es conveniente hacer alguna consideración acerca de las energías típicas de excitación nuclear. Esto permitirá comparar valores de la energía cinética  $T$  frente a los valores de  $\nu'$ .

Como se comentó en el capítulo tercero la variable  $\nu'$  representa la energía de excitación nuclear debidas a la absorción de fotones. Puesto que nos limitamos al rango de energías puestas en juego donde no aparecen grados de libertad mesónicos, podemos obtener las funciones de estructura hadrónica en términos de la sección eficaz total de fotoabsorción hadrónica. Por tanto estudiando la forma típica de esta sección eficaz, podemos estimar los valores de  $\nu'$  frente a  $T$  y  $m$  que son relevantes en el cálculo



de la amplitud dada por (5.12).

Para un amplio espectro de núcleos (AH75) (AR74) puede observarse que la contribución más importante a la sección eficaz de fotoabsorción viene dada para valores de la energía de los fotones entre el valor umbral y 30-40 MeV. Por otra parte se observa la existencia de un máximo debido a la resonancia dipolar gigante situado sobre el rango de energías de 20-30 MeV a partir de la cual decrece de forma rápida.

Esto nos permite suponer que cuando realicemos la integración sobre la variable  $\nu'$  así como el tratamiento del integrando relacionando T y m con  $\nu'$ , los valores típicos de  $\nu'$  a tener en cuenta oscilarán entre el valor umbral de fotoabsorción y 30-40 MeV, considerando que la contribución de la integral para energías superiores es pequeña frente a este intervalo. Este hecho viene también avalado por cálculos de reglas de suma sobre la sección eficaz  $\sigma_{\gamma}(\nu')$  que indican aceptable tomar como valor superior de la integración (5.11)  $\nu' = 100$  MeV.

Estas últimas consideraciones se hacen sobre la base de un comportamiento suave del integrando en (5.11) de forma que no aparezca picado para valores altos de  $\nu'$ . En casos particulares efectuados posteriormente para  $^{12}\text{C}$  y  $^4\text{He}$  se comprobaron estos extremos.

Hechos estos comentarios, encontramos a continuación las expresiones de  $T_{\sigma}(2\gamma)^c$  para la colisión muón-núcleo y electrón-núcleo.

## 6.1 COLISION MUON-NUCLEO

Considerando la masa del muón  $m_\mu = 105.66$  MeV y valores típicos de  $\nu' \sim 20-40$  MeV, válido para un amplio espectro de núcleos, estudiaremos el comportamiento de la función (5.12) para los valores de la energía cinética del muón tales que  $T \ll \nu' \ll m_\mu$ . De esta forma pretendemos estudiar su comportamiento en términos de la variable  $T$  desde el valor umbral de energía cinética del muón ( $T=0$ ) hasta donde las contribuciones de términos  $(T/\nu')^2$  sean apreciables. Básicamente lo que haremos será obtener la aproximación lineal de (5.12) en términos de  $T/\nu'$ , aproximación apropiada por la relación entre  $T, \nu'$  y  $m_\mu$ .

Para este propósito es útil, a partir de las propiedades de la función dilogaritmo expuestas en el apéndice II, obtener el siguiente desarrollo de la función (5.12):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\nu', m_\mu, T) = & \frac{\nu'}{m_\mu} - \frac{\nu'}{m_\mu} \left[ 1 - \mathcal{L} \left( \frac{T}{m_\mu} + 1 \right) \frac{m_\mu}{T^{1/2}(T+2m_\mu)^{1/2}} \ln \frac{1+a^{-1}}{1-a^{-1}} \right] \ln \frac{2\nu'}{m_\mu} + \\ & + \frac{m_\mu}{T^{1/2}(T+2m_\mu)^{1/2}} \left[ \ln \frac{1-t_0}{1+t_0} \ln \frac{t_0+a^{-1}}{t_0-a^{-1}} + S_1 \right] \left[ \left( 1 + \frac{T}{m_\mu} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\nu'}{m_\mu} \left( 1 + \frac{T}{m_\mu} \right) + \frac{\nu'^2}{2m_\mu^2} \right] + \frac{m_\mu}{2T^{1/2}(T+2m)^{1/2}} \ln \frac{1+a^{-1}}{1-a^{-1}} \cdot \\ & \cdot \left[ \left( 1 + \frac{T}{m_\mu} \right)^2 - \frac{\nu'}{m_\mu} \left( 1 + \frac{T}{m_\mu} \right) + \frac{\nu'^2}{2m_\mu^2} \right] \end{aligned}$$

$$G_1(\nu', m_\mu, T) = - \frac{T-\nu'}{m_\mu} t_1 \ln \frac{t_1-1}{t_1+1} + \left[ \left(1 + \frac{T}{m_\mu}\right)^2 - \frac{\nu'}{m_\mu} \left(1 + \frac{T}{m_\mu}\right) + \frac{\nu'^2}{2m_\mu^2} \right] \cdot \frac{m_\mu}{T^{1/2}(T+2m_\mu)^{1/2}} [S_3 - 6d_2(1)]$$

$$G_2(\nu', m_\mu, T) = -2 \frac{\nu'-T}{m_\mu} t_2 \operatorname{tg}^{-1} t_2 - \left[ \left(1 + \frac{T}{m_\mu}\right)^2 - \frac{\nu'}{m_\mu} \left(1 + \frac{T}{m_\mu}\right) + \frac{\nu'^2}{2m_\mu^2} \right] \cdot \frac{m_\mu}{T^{1/2}(T+2m_\mu)^{1/2}} \left[ -S_2 - \ln \frac{a-1}{a+1} \ln \frac{2\nu'}{m_\mu} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{a-1}{a+1} + 2\pi \operatorname{tg}^{-1} \frac{t_2}{a} \right]$$

Con:

$$S_1 = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{m} \left( \frac{(1-t_0)a^{-1}}{t_0} \right)^m \frac{1}{k} \left( \frac{2t_0}{t_0-1} \right)^k \left[ \left( \frac{-1}{1+a^{-1}} \right)^m - \left( \frac{1}{1-a^{-1}} \right)^m \right]$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left( \frac{2}{1-it_2} \right)^k \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \left( \frac{1-it_2}{a+1} \right)^m + \left( \frac{2}{1+it_2} \right)^k \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \left( \frac{1+it_2}{a+1} \right)^m \right\}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left( \frac{-2}{t_1-1} \right)^k \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \left( \frac{t_1-1}{a+1} \right)^m + \left( \frac{2}{t_1+1} \right)^k \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \left( -\frac{1+t_1}{a+1} \right)^m \right\} \quad (1)$$

y  $a, t_i$ , vienen dados en (5.12).

Obsérvese que la función  $G_3(\nu', m, T)$  en el caso  $\nu' > T+2m_\mu$  carece de significado físico aceptable pues supondría considerar energías de fotoabsorción siempre mayores que 200 MeV, más allá del umbral de producción de piones y por tanto fuera del caso en el que estamos trabajando.

A partir de las ecuaciones (1) realizamos un desarrollo en serie en términos de  $T/m_\mu$ ,  $\nu'/m_\mu$ , y  $T/\nu'$  y consideramos la contribución dominante al orden  $T/\nu'$ ,  $(\nu'/m_\mu)^0$  y  $\nu'/m_\mu$ . Como se verá después, estos términos son suficientes para reproducir los resultados de  $^{12}\text{C}$  y  $^4\text{He}$  y consideraremos este hecho como general debido a la estructura similar que poseen las  $\sigma_T(\nu')$  para un amplio espectro de núcleos.

En principio la contribución dominante de la función global proviene del término  $2\pi \text{tg}^{-1}(t_s a^{-1})$  puesto que es de orden  $(m_\mu \nu')^{1/2}$  mientras que los restantes términos son siempre orden cero o inferiores en esta relación. Hecho que coincide con cálculos realizados considerando directamente  $T=0$  en (3.23) (BJ74).

En cualquier caso, y después de realizar los desarrollos en serie de las funciones que aparecen en (1) obtenemos, a los órdenes comentados antes:

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(\nu'/m_\mu \ll 1, T/m_\mu \ll 1) + \mathcal{G}(\nu'/m_\mu \ll 1, T/m_\mu \ll 1) \approx \\ & \approx -\pi \left(\frac{2m_\mu}{\nu'}\right)^{1/2} - \frac{1}{8} \left(\frac{2\nu'}{m_\mu}\right)^{1/2} \ln \frac{2\nu'}{m_\mu} - \\ & - \pi \left(\frac{2m_\mu}{\nu'}\right)^{1/4} \frac{T}{\nu'} \left[ \frac{1}{6} + \frac{5}{4} \frac{\nu'}{m_\mu} + \frac{1}{3\pi} \left(\frac{2\nu'}{m_\mu}\right)^{1/4} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Donde nos hemos restringido a energías cinéticas del muón por debajo del umbral de fotoabsorción de fotones que permite no considerar  $\mathcal{G}_s(\nu', T, m_\mu)$ .

El haber mantenido órdenes superiores en  $\nu/m_\mu$  responde a un hecho que fue constatado después de realizar los cálculos numéricos para núcleos concretos (ver cap. 8). Si bien cuando aumentamos el orden  $(\nu/m_\mu)^p$  proporciona un factor  $\sim 10^{-p}$  que deprime términos sucesivos, es necesario notar que al realizar la integración sobre  $\sigma_\gamma(\nu')$  en la ecuación (5.11) aparecen reglas de suma  $\sigma_p = \int d\nu' \nu'^p \sigma_\gamma(\nu')$  que implica que la relación entre estas reglas de suma así como los factores numéricos constantes que aparezcan serán decisivos cuando cortemos los desarrollos según estas potencias.

Las relaciones observadas entre estas reglas de suma son normalmente del orden de magnitud de la razón  $\nu/m_\mu$  (AH75) con lo que los resultados dados a continuación son de validez general para un amplio espectro de núcleos.

Con estas consideraciones, al orden cero en  $\tau/\nu'$  es suficiente mantener el término en  $(\nu'/\nu)^{1/2}$  mientras que para reproducir la pendiente es necesario llegar hasta el término  $\nu'/m_\mu$ . La ecuación (2) se simplifica en:

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(\nu'/m_\mu \ll 1, \tau/m_\mu \ll 1) + \mathcal{G}(\nu'/m_\mu \ll 1, \tau/m_\mu \ll 1) \approx \\ & \approx -\pi \left(\frac{2m}{\nu'}\right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{\tau}{\nu'} \left[ \frac{1}{6} + \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\nu'}{2m_\mu}\right)^{1/2} + \frac{5}{4} \frac{\nu'}{m_\mu} \right] \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

De forma que la contribución del continuo a la colisión muón-núcleo mediada por dos fotones en la dirección hacia adelante puede escribirse en

términos de reglas de suma sobre la sección eficaz de fotoabsorción nuclear. Para energías cinéticas del muón menores que el umbral de fotoabsorción y hasta valores de T donde las contribuciones  $(T/\mu)^2$  comienzan a ser apreciables se obtiene:

$$T_0 (2\gamma)_{\lambda\lambda}^c = -f_{\lambda\lambda} \frac{(2m_\mu)^{3/2}}{\pi} M \left\{ \sigma^{-3/2} + \right. \\ \left. + T \left[ \frac{1}{6} \sigma^{-5/2} + \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{m_\mu}} \sigma^{-2} + \frac{5}{4m_\mu} \sigma^{-3/2} \right] \right\} \quad (4)$$

donde:

$$\sigma_n = \int_{\nu_0}^{100 \text{ MeV}} d\nu \nu^n \bar{\sigma}_\gamma(\nu) \quad (5)$$

Tomando el límite  $T=0$ , a partir de esta amplitud de colisión podemos obtener la diferencia de energías debida a la polarizabilidad nuclear para el caso de átomos muónicos que, en la aproximación de la función de onda, viene dado por (2.19) y permite encontrar el resultado (2.26).

## 6.2 COLISION ELECTRON-NUCLEO

Debido a la masa del electrón:

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}$$

es conveniente en este caso tomar el límite  $m \rightarrow 0$

en la ecuación (5.22). Sin hacer ninguna consideración acerca de los valores relativos de T y  $\nu'$ :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{H}(\nu', m_e \rightarrow 0, T) + \mathcal{G}(\nu', m_e \rightarrow 0, T) \approx \\
 & \approx \frac{\nu'}{m_e} + \frac{T}{m_e} \ln \frac{2\nu'}{m_e} + \left| \frac{T-\nu'}{m_e} \right| \ln \frac{2|T-\nu'|}{m_e} + \frac{\nu'+T}{m_e} \ln \left( 1 + \frac{T}{\nu'} \right) - \\
 & - \left( \frac{T+\nu'}{m_e} + \frac{\nu'^2}{2m_e T} \right) \left[ \ln \frac{2\nu'}{m_e} \left( 1 + \frac{T}{\nu'} \right) \cdot \ln \left( 1 + \frac{T}{\nu'} \right) + L_2 \left( \frac{T}{T+\nu'} \right) \right] + \\
 & + \left( \frac{T-\nu'}{m_e} + \frac{\nu'^2}{2m_e T} \right) \left[ \frac{1}{2} \ln^2 \left| \frac{T}{\nu'} - 1 + \left( 1 - \frac{\nu'}{2T} \right) \frac{m}{\nu'} \right| + \right. \\
 & + \ln \frac{2T}{m_e} \ln \left| \frac{T}{\nu'} - 1 + \left( 1 - \frac{\nu'}{2T} \right) \frac{m}{\nu'} \right| + \operatorname{Re} L_2 \left( \frac{\nu'}{T} \right) - 2 L_2(1) - \\
 & \left. - \ln \frac{T}{\nu'} \ln \left[ \left( \frac{T}{\nu'} \right)^{1/2} - \left( \frac{\nu'}{T} \right)^{1/2} \right] - \begin{cases} 3 L_2(1) & \text{si } \nu' \leq T \\ 0 & \text{si } \nu' \geq T+2m_e \end{cases} \right] \quad (6)
 \end{aligned}$$

Expresión que reproducirá el valor de (5.22) para valores de T suficientemente alejados del umbral  $T=0$ .

La aparente discontinuidad entre los valores de la función  $\mathcal{G}(\nu', m, T)$  viene del hecho de haber omitido el término  $\mathcal{G}_2(\nu', m, T)$  válido en la región  $T \leq \nu' \leq T+2m$ . Sin embargo este término, después de realizar la integración (5.11) es un orden superior en  $m_e$  que los anteriores y por tanto lo eliminamos directamente.

De hecho se comprobó que su contribución a la integral era despreciable frente a los otros términos.

Por otra parte, podemos obtener una expresión sencilla para valores de la energía cinética mucho mayores que los valores de las energías típicas de excitación nuclear. En este límite:

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(\nu', m_e \rightarrow 0, T) + \mathcal{G}(\nu', m_e \rightarrow 0, T) \approx \\ & \approx \frac{T}{m_e} \left( 2 \ln \frac{2T}{m_e} - 6 L_2(1) \right) - \\ & - 2 \frac{\nu'}{m_e} \ln^2 \frac{2T}{m_e} - 2 \frac{\nu'}{m_e} \ln \frac{2T}{m_e} \ln \frac{2\nu'}{m_e} \end{aligned} \quad (7)$$

Expresión que reproduce el valor de (5.12) a energías  $T \gtrsim 200$  MeV. Con esto la contribución del continuo a la amplitud de intercambio de dos fotones para la colisión elástica electrón-núcleo en la dirección hacia adelante es, en la aproximación dipolar no retardada y a las energías comentadas:

$$\begin{aligned} T_0(\sigma_T)_{\lambda\lambda}^C &= \int_{\lambda'\lambda} \frac{g}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} TM \left\{ \left[ \ln \frac{2T}{m_e} - \frac{\pi^2}{2} \right] \sigma_{-1} - \right. \\ & \left. - \ln^2 \frac{2T}{m_e} \frac{\sigma_0}{T} - \frac{1}{T} \int_{\nu_0}^{100 \text{ MeV}} d\nu' \sigma_T(\nu') \ln \frac{2\nu'}{m_e} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$



Recordemos, que los cálculos han sido realizados en la aproximación dipolar no retardada. A estas energías, sin embargo, la contribución de fotones reales en el proceso puede no ser la más importante y, por tanto la ecuación (8) carecer de significado físico aceptable para reproducir datos experimentales en este caso. Será necesario, para costatar este hecho, introducir de alguna forma los efectos del tamaño finito del núcleo.

Por último y para completar este estudio encontramos la expresión (5.12) para el umbral de energía cinética del electrón. Así, tomando  $T=0$  y desarrollando según potencias  $\frac{m_e}{\nu'}$  obtenemos:

$$T_0(2\gamma)_{\lambda'\lambda}^c = - \sigma_{\lambda'\lambda} 4 \frac{e^2}{4\pi} m_e^2 \frac{5}{2\pi^2} \int_{\nu_0}^{100\text{MeV}} d\nu' \frac{\sigma_{\gamma}(\nu')}{\nu'^2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{19}{30} + \ln \frac{2\nu'}{m_e} + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^2}{\nu'^2} \ln \frac{2\nu'}{m_e}\right) \right\} \quad (9)$$

Util para encontrar la diferencia de energías debidas a la polarizabilidad nuclear en átomos electrónicos ligeros (ec 2.29).

### 6.3 TEOREMA A BAJAS TRANSFERENCIAS DE MOMENTO PARA LA COLISION LEPTON-HADRON

Este teorema demostraba que, a bajas transferencias de momento, las amplitudes de helicidad tienen

un desarrollo según la transferencia de momento  $t$  dado en (2.17) de forma que el término independiente de  $t$  quedaba desconocido en este tratamiento mientras que se predecían los dos primeros términos no analíticos en dicho desarrollo. Asimismo se obtenía una expresión de la contribución del continuo hadrónico a las amplitudes de helicidad para el caso de la colisión muón-núcleo (2.15 y 16), de forma que los dos términos conocidos dependían únicamente de las polarizabilidades nucleares.

El objeto de este trabajo se planteó en el cálculo del primer término, independiente del momento transferido, de forma que obtendríamos para el caso de la amplitud sin cambio de helicidad (2.18):

$$C(\omega) = - \frac{1}{8m^2 M} \frac{4\pi}{e^2} T_0(2\gamma)_{++}^c$$

mientras que nada podríamos decir acerca de la amplitud con cambio de helicidad por encontrarnos un cero cinemático en la dirección hacia adelante.

Atendiendo a este resultado y a (4) podemos escribir la amplitud sin cambio de helicidad para la colisión muón-núcleo, de (2.15, 2.16 y 4):

$$T_{++}^c(2\gamma) = - 8m^2 M \frac{e^2}{4\pi} \left\{ 2 \frac{(2m_\mu)^{3/2}}{\pi} \cdot \frac{4\pi}{e^2} \cdot \frac{1}{8m^2} \right\}$$

$$\left\langle \sigma_{-3/2} + T \left[ \frac{1}{6} \sigma_{-3/2} + \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{m_\mu}} \sigma_{-2} + \frac{5}{4m_\mu} \sigma_{-3/2} \right] \right\rangle -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\pi^2 \sqrt{4Tm_\mu(1-\cos\theta)}}{16 m_\mu} \left[ \alpha \mathcal{L} \left( 4 + 7 \frac{T}{m_\mu} \right) + \beta \mathcal{L} \left( 1 + 5 \frac{T}{m_\mu} \right) \right] - \\
& - \ln \frac{4Tm_\mu(1-\cos\theta)}{\Lambda} \left[ -\alpha \left( 11 + 24 \frac{T}{m_\mu} \right) + \beta \left( -5 - 24 \frac{T}{m_\mu} \right) \right] \left. \right\} \cos \frac{\theta}{2} \quad (10)
\end{aligned}$$

a baja energía cinética de muón y bajo momento transferido.

Asimismo, el teorema permitía la construcción de la asimetría (BP81) entre la colisión leptón-núcleo y antileptón-núcleo según aparece en 2.2 que podía dar cuenta acerca de la existencia de la amplitud de dos fotones en el proceso que nos ocupa. Afortunadamente sólo el término independiente del momento transferido que aparece en la amplitud sin cambio de helicidad contribuye al referido observable. Podemos, por tanto obtener una expresión analítica del mismo, siempre para muones de baja energía y en la aproximación dipolar no retardada para las funciones de estructura del núcleo, como:

$$\begin{aligned}
Q^c(T, \theta) &= 4Tm_\mu(1-\cos\theta) \left\{ \mathcal{L} \frac{(2m_\mu)^{3/2}}{\pi} \frac{4\pi}{e^2} \frac{1}{8\pi Z m_\mu} \left\langle \sigma_{-3/2} + \right. \right. \\
&+ T \left[ \frac{1}{6} \sigma_{-5/2} + \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{m_\mu}} \sigma_{-2} + \frac{5}{4m_\mu} \sigma_{-3/2} \right] - \\
&- \frac{\pi}{8Z} \sqrt{4Tm_\mu(1-\cos\theta)} \left[ \alpha \left( 2 + \frac{T}{m_\mu} \right) + \beta \frac{T}{m_\mu} \right] - \\
&- \frac{1}{24\pi Z m_\mu} 4Tm_\mu(1-\cos\theta) \left[ \left( 11 + 13 \frac{T}{m_\mu} \right) \alpha + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left( 5 + 19 \frac{T}{m_\mu} \right) \beta \int \ln \frac{4Tm_\mu (1 - \cos \theta)}{\Lambda} \quad (11)$$

dato en términos de la energía cinética del muón (T) y del ángulo de difusión ( $\theta$ ), que se relacionan con las variables invariantes, energía y momento mediante las expresiones:

$$t = -4Tm_\mu (1 - \cos \theta)$$

$$s = (p+P)^2 = (m_\mu + M)^2 + 2Tm_\mu$$

$\alpha$  y  $\beta$  son las polarizabilidades eléctrica y magnética del blanco.

## CAPITULO 7

### Consideraciones sobre el tamaño nuclear

En el capítulo anterior, calculamos la amplitud  $T_0^c(2\gamma)_{++}$  en la aproximación dipolar no retardada, considerando los nucleones como partículas puntuales (cap. 4) y despreciando efectos de orden superior en  $q^2$ . Ello significaba suponer que la física nuclear en la interacción con los fotones virtuales viene controlada por la física para fotones reales i.e.  $-q^2 = 0$ .

En la literatura se encuentra, sin embargo, en trabajos relativos al cálculo de correcciones a los niveles energéticos debidos a la polarizabilidad nuclear (BE83), así como en estudios de las correcciones dispersivas a la amplitud de colisión leptón-núcleo, ambos procesos relacionados con el intercambio de dos fotones, <sup>muestran</sup> que la contribución de fotones virtuales puede llegar a ser importante. Esto ocurre porque, como veremos en el capítulo 8, la física del proceso viene dominada por fotones virtuales de masa  $-q^2 \sim$

2.  $p^0, \nu'$ , siendo  $p^0$  la energía total del leptón en el sistema laboratorio y  $\nu'$  la energía de excitación nuclear; y para valores de  $p^0 \sim m_\mu$  el trimomento de los fotones transferidos no es mucho menor que la inversa del radio nuclear siendo por tanto necesario introducir los efectos del tamaño finito del núcleo.

En este capítulo modificaremos los resultados obtenidos anteriormente para tener en cuenta este hecho.

El procedimiento que seguiremos será incluir un factor de forma global relativo al núcleo de manera que la expresión (4.35), con las mismas consideraciones de momento angular dadas en (4.5.2) quede modificada según:

$$| \langle N | \hat{c}(\vec{q}) | 0 \rangle |^2 = |\vec{q}|^2 |D_{N0}|^2 F_N(\vec{q}^2) \quad (4)$$

Esta expresión constituye la aproximación dipolar de los elementos de matriz de excitación nuclear, con efectos de retardo incluidos.

El factor de forma lo consideramos normalizado según  $F_N(0) = 1$  y el subíndice N indica que, en principio puede depender de la transición  $0 \rightarrow N$  de que se trate.

Su relación con la densidad nuclear viene dada por su transformada de Fourier según:

$$F_N(\vec{q}^2) = \left| \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \right|^2 \quad (2)$$

El modelo de Goldhaber-Teller (GT48) de la resonancia dipolar gigante sugiere que  $F_M(\vec{q}^2) = F(\vec{q}^2)$ , i.e. el factor de forma del estado fundamental. Considerando esta universalidad del factor de forma, podemos obtener relaciones similares a (4.35) entre las funciones de estructura hadrónica y escribirlas de nuevo en términos de la sección eficaz fotonuclear sin más que multiplicar por el factor de forma nuclear.

Para poder realizar un cálculo análogo al del capítulo anterior, necesitaremos utilizar expresiones explícitas del factor de forma de manera que conozcamos su dependencia con el cuadrado del cuadrimomento transferido.

Cálculos realizados en (FR77) muestran que los resultados obtenidos en la amplitud de dos fotones, a energía umbral de leptón, no son especialmente sensibles al modelo de factor de forma usado, con tal que se reproduzca el radio cuadrático medio  $\langle \vec{r}^2 \rangle$ .

Con esta filosofía escogemos un factor de forma sencillo que proporcione el término en  $\langle \vec{r}^2 \rangle$  que aparece en (2). La elección del factor de forma monopolar del tipo:

$$F(q^2) = \frac{1}{1 - q^2/t_0} \quad \text{con } t_0 = \frac{3}{\langle \vec{r}^2 \rangle} \quad (3)$$

esperamos que reproduzca bien su comportamiento a bajas energías del leptón donde la física viene dominada por fotones de masa virtual pequeña.

Obsérvese que realizamos una aproximación

semirrelativista al incluir dependencia en el cuádrimomento del fotón en lugar del trimomento, lo que equivale a no considerar órdenes superiores en  $q^0/t_0$ .

Con estas consideraciones, introduciendo el factor de forma (3) en la ecuación (3.22), podemos escribir la amplitud de transición,  $T_o^{1c}(2\gamma)_{++}$ , como:

$$T_o^{1c}(2\gamma)_{++} = T_o^c(2\gamma)_{++} + T_1^c(2\gamma)_{++} \quad (4)$$

donde el segundo término contiene todas las dependencias del parámetro introducido  $t_0$  y, con la misma nomenclatura que en capítulos anteriores, se escribe explícitamente:

$$T_1^c(2\gamma)_{++} = i \frac{m^2 M}{\pi^4} \int_{\nu_0} d\nu' \frac{\tilde{\sigma}_\gamma(\nu')}{\nu'} I$$

$$I = \sum_{\alpha, \beta} \int d^4 q \frac{1}{\nu' + \alpha^2 q/M} \frac{1}{q^2 + 2\beta p q} \left\{ \frac{1}{t_0 - q^2} \left( A + \frac{B}{t_0} + \frac{C}{t_0^2} \right) + \frac{1}{q^2} \left( \frac{B}{t_0} + \frac{C}{t_0^2} \right) + \frac{1}{(q^2)^2} \frac{C}{t_0} \right\}$$

con:

$$A = \frac{p^0{}^2}{m^2}$$

$$B = \left( \frac{pq}{m} \right)^2 - 2 \frac{p^0}{m} \frac{pq}{M} \frac{pq}{m} + \left( \frac{pq}{M} \right)^2$$



$$C = 2 \frac{(Pg)^2 (pq)^2}{m^2 M^2} \quad (5)$$

El método seguido en el cálculo de la integral de cuadrimentos es esencialmente el mismo que el seguido en el capítulo 6 y expuesto en el apéndice I.

Así, si introducimos nuevamente dos variables auxiliares y realizamos la integración de cuadrimento:

$$I = \ell \sum_{\gamma} \int_0^1 dx \int_0^{\infty} dy [J_1 + J_2 + J_3] \frac{1}{\ell i \pi^2}$$

$$J_1 = -i \pi^2 \frac{p^{\circ 2}}{m^2} \Delta$$

$$J_2 = \frac{i \pi^2}{t_0} \left\{ B_0 \left( \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) + \ell B_1 \ln \frac{a_2^2}{a_1^2} \right\}$$

$$J_3 = \frac{i \pi^2}{t_0} \left\{ C_0 \left( \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} + \frac{a_1^2 - a_2^2}{(a_1^2)^2} \right) + \right. \\ \left. + \ell C_1 \left( \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2} + \ln \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \right\}$$

$$B_0 = g^2 \left( 1 - \frac{p^{\circ 2}}{m^2} \right), \quad B_1 = \frac{1}{\ell} \left( 1 - \frac{p^{\circ 2}}{m^2} \right)$$

$$C_0 = \ell \left( \frac{pq}{m} \right)^2 \left( \frac{Pg}{M} \right)^2, \quad C_1 = \frac{1}{\ell} \left[ \left( \frac{pq}{m} \right)^2 + \left( \frac{Pg}{M} \right)^2 + 4 \frac{r^{\circ}}{m} \left( \frac{pq}{m} \right) \left( \frac{Pg}{M} \right) \right]$$

$$C_2 = \frac{1}{\ell} \left( 1 + \ell \frac{p^{\circ 2}}{m^2} \right)$$

$$a_1^2 = M\nu'\gamma - g^2, \quad a_2^2 = M\nu'\gamma - t_0(1-x) - g^2$$

$$g = \frac{P}{2} \gamma + \gamma P x \quad (6)$$

La única consideración adicional a los cálculos efectuados en el cap.6 habría que hacerla para  $\mathcal{J}_3$ , donde las divergencias aparentes que encontramos pueden eliminarse con la expresión (I.6) y no ofrece problemas el desplazamiento del origen de integración.

La integración de la variable auxiliar "y" es tediosa pero directa haciendo uso de las ecuaciones I.1 a I.3.

El resultado obtenido en este punto es de muy difícil tratamiento analítico por lo que renunciamos a la integración explícita de la variable "x" y tomaremos los valores característicos de los parámetros en los casos físicos de interés en esta memoria i.e. electrones y muones. En ambos casos buscaremos la primera corrección introducida por el factor de forma y expresada en términos de  $t_0$ .

### 7.1 Caso muónico.

Siguiendo la pauta marcada en el cap.6 buscaremos la aproximación lineal en T, a los órdenes en  $\nu'/m_\mu$  considerados en (6.4). La integral I, se escribe entonces:

$$I \approx \sum_{\gamma} \left\{ \int_0^1 \frac{1-2x}{[x(t_0 - 2\gamma m_\mu \nu') - t_0 + \nu'^2]^{1/2}} \ln \frac{\gamma^+}{\gamma^-} dx + \right.$$

$$+ e \frac{T}{m_\mu} \int_0^1 dx \frac{e-3x}{[x(t_0 - 2\gamma m_\mu \nu') - t_0 + \nu'^2]^{1/2}} \ln \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \Bigg\}$$

$$\gamma^\pm = \gamma \frac{m_\mu}{\nu'} x - 1 - [x(t_0 - 2\gamma m_\mu \nu') - t_0 + \nu'^2]^{1/2} \quad (8)$$

Integrando , y tomando los límites  $T \ll \nu'$   
 $\ll m_\mu, t_0$  obtenemos el resultado:

$$T_1^c(2\gamma)_{++} \approx \frac{e(2m_\mu)^{3/2}}{\pi} \frac{e^2}{4\pi} M \int_{\nu_0}^{\nu'} d\nu' \frac{\sigma_\gamma(\nu')}{\nu'^{3/2}} \frac{\sqrt{2m_\mu \nu'}}{\sqrt{t_0 + \sqrt{2m_\mu \nu'}}} \left(1 + e \frac{T}{m_\mu}\right) \quad (9)$$

que, con la ecuación (6.4) permite encontrar la amplitud, corregida con el tamaño finito del núcleo a nivel del factor de forma (3):

$$T_0^c(2\gamma)_{++} = - \frac{e(2m_\mu)^{3/2}}{\pi} \frac{e^2}{4\pi} M \int_{\nu_0}^{\nu'} d\nu' \frac{\sigma_\gamma(\nu')}{\nu'^{3/2}} \left\{ \frac{1}{1 + \sqrt{2m_\mu \nu'}/t_0} + \right. \\ \left. + \frac{T}{\nu'} \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{3\pi} \left( \frac{e\nu'}{m_\mu} \right) - \frac{5}{4} \frac{\nu'}{m_\mu} + e \frac{\nu'}{m_\mu} \frac{1}{1 + \sqrt{2m_\mu \nu'}/t_0} \right] \right\} \quad (10)$$

Se observa que, a los órdenes considerados en  $t_0$  sólo el término proporcional a  $\nu'/m_\mu$  recibe contribuciones del tamaño finito en la corrección de la energía cinética. Esto hace que, aunque en el umbral  $T = 0$  el valor de la amplitud disminuya (en valor absoluto) sensiblemente al tender desde una dependencia

$\sigma_{-1/2}$  a una según  $\sigma_{-2}$ , la pendiente se verá poco afectada por el tamaño nuclear.

## 7.2 Caso electrónico.

Es apropiado en este caso tomar el límite  $m_e \rightarrow 0$ , de forma que, a energía cinética del electrón  $T < t_0^{1/2}$  podemos encontrar la ecuación (7) al orden dominante en  $1/t_0$ . Es decir, tomando  $v' \ll t_0^{1/2}$ ,  $T \ll t_0^{1/2}$  y  $m_e \rightarrow 0$ :

$$\sum_{\gamma} I \approx \frac{e}{t_0^{1/2}} \int_0^1 dx (1-x)^{1/2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{t_0^{1/2}(1-x)^{1/2}}{e v'} \quad (11)$$

que, una vez integrada proporciona:

$$T_1^c(2\gamma)_{++} \approx - \frac{8M}{3\pi} \frac{e^2}{4\pi} \frac{T^2}{t_0^{1/2}} \sigma_{-1} \quad (12)$$

Con esto y el resultado (6.6) obtenido para  $T_0^c(2\gamma)_{++}$ :

$$T_0^c(2\gamma)_{++} = T_0^c(2\gamma)_{++} - \frac{8M}{3\pi} \frac{e^2}{4\pi} \frac{T^2}{t_0^{1/2}} \sigma_{-1} \quad (13)$$

proporciona el valor de la amplitud habiendo considerado el tamaño nuclear por medio del factor de forma (3). Es interesante señalar en conexión con los efectos de tamaño finito para electrones incidentes que, al orden dominante en  $t_0$ , esos efectos aumentan con el cuadrado de la energía, haciendo intervenir la regla de suma  $\sigma_{-1}$ .

## CAPITULO 8

### Resultados para $^{12}\text{C}$ y $^4\text{He}$

Después de haber encontrado en los capítulos anteriores las formas que toma  $T_0(2\gamma)_{\mu}^{\xi}$  y  $T_0'(2\gamma)_{\mu}^{\xi}$  en los casos límites aplicables a muones y electrones, el propósito de esta sección será discutir resultados numéricos para la amplitud que nos ocupa, cuando se trata de un núcleo de  $^{12}\text{C}$  ó  $^4\text{He}$ .

Necesitaremos, por tanto, conocer explícitamente la sección eficaz de fotoabsorción para poder realizar la integración (5.11). Además vamos a comparar con las aproximaciones obtenidas en el capítulo 6 para hacernos una idea de la bondad de ellas frente al resultado exacto.

Los núcleos elegidos fueron  $^{12}\text{C}$  y  $^4\text{He}$ . De este último tomamos la parametrización dada por Rinker

en (R176) que, de una forma sencilla, reproduce la sección eficaz de fotoabsorción. Para el  $^{12}\text{C}$  usaremos un método más general que permite obtener una parametrización de las funciones de estructura hadrónica (cap.4) a partir de propiedades generales del espectro de excitación nuclear (R081).

Por considerar este método de amplia aplicación, no sólo en problemas de cálculo de secciones eficaces de fotoabsorción, sino también en otros relativos a la colisión cuasielástica de electrones o a captura de muones, expondremos a continuación las líneas generales de su tratamiento.

### 8.1 Modelo de las funciones de estructura nuclear.

En las condiciones expuestas en el capítulo 4, las funciones de estructura nuclear para núcleos de espín cero se escribían en términos de los elementos de matriz que describían la excitación nuclear, de una forma genérica como:

$$W_i(q^0, q^2) = \sum_{\substack{n \\ i \neq n}} \delta(q^0 - [E_n - E_0]) |\langle n | \mathcal{O}_i(\vec{q}) | i \rangle|^2 \quad (1)$$

donde  $(q^0, \vec{q})$  son la energía y momento transferido al blanco y la suma se realiza sobre los estados nucleares excitados de energía  $E_n$ . ( $E_0$  es la energía del estado inicial  $|i\rangle$ ).

$\mathcal{O}_i(\vec{q})$  representan los operadores de excitación nuclear según el proceso bajo consideración y vienen dados por:

$$O_L(\vec{q}) = \sqrt{\frac{-q^2 M}{|\vec{q}|^2}} \rho(\vec{q})$$

$$O_T(\vec{q}) = \sqrt{\frac{M}{2}} \vec{J}(\vec{q}) \times \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} \quad (2)$$

El conocimiento de las funciones de estructura nuclear requiere, en este contexto, el conocimiento de todo el espectro de estados excitados del núcleo en consideración.

Mientras que algunas regiones del plano  $(q^0, \vec{q})$  pueden ser descritas correctamente desde distintos puntos de vista, obtener una descripción completa del espectro plantea muchas dificultades. Esto es debido, no sólo a la complejidad del espectro que contribuye a la ecuación (1) sino también a las muy distintas estructuras microscópicas responsables de los altos y bajos estados excitados nucleares.

Así, mientras que las resonancias gigantes pueden describirse como estados excitados colectivos, el pico cuasielástico a más altas energías de excitación se considera fundamentalmente producido por procesos de un cuerpo.

La respuesta a este problema (R081) consiste en buscar una parametrización que tenga en cuenta el aspecto global del espectro más que una descripción detallada del mismo.

La forma de proceder resulta como sigue:

A partir de propiedades generales del espectro nuclear se obtienen restricciones sobre las funciones de estructura:

- i)  $W_i(q^0, q^2)$  son reales
  - ii)  $W_i(q^0, q^2) = 0$  si  $q^0 \leq 0$
  - iii)  $W_i(q^0, q^2) \geq 0$  en la región  $-q^2 > 0$ .
- (3)

Restricciones que se trasladan a la "función característica"  $F(t)$ , generadora de los momentos o reglas de suma sobre las funciones de estructura nuclear:

$$\begin{aligned}
 F_i(t) &= \frac{1}{m_0^{(i)}} \int_0^\infty dq^0 e^{iq^0 t} W_i(q^0, q^2) = \\
 &= 1 + it \frac{m_1^{(i)}}{m_0^{(i)}} + \frac{(it)^2}{2!} \frac{m_2^{(i)}}{m_0^{(i)}} + \dots \quad (4) \\
 m_k^{(i)} &= \int_0^\infty dq^0 (q^0)^k W_i(q^0, q^2)
 \end{aligned}$$

o bien, con la representación exponencial de  $F(t)$  dada por:

$$F_i(t) = \exp \left\{ i t \lambda_1^{(i)} + \dots \right\} \quad (5)$$

con  $\lambda_k^{(i)}$  relacionada con los momentos  $m_k^{(i)}$  de forma que:

$$\lambda_1 = \frac{m_1}{m_0}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{m_0} \left( m_2 - \frac{m_1^2}{m_0} \right), \dots$$

(En adelante suprimiremos el subíndice  $i$  de las funciones de estructura entendiéndose que el tratamiento puede hacerse para ambos).

Las propiedades (3) de  $W_i(q^0, q^2)$  se traducen en la función  $F(t)$  de la siguiente forma:

- i)  $F(t)^* = F(-t)^*$  considerada  $F$  como



función de la variable compleja  $t$ .

- ii)  $F(t)$  es analítica en el semiplano superior de la variable  $t$  y completamente monótona:  $(-)^k \frac{\partial^k F}{\partial \beta^k} \geq 0$ , ( $k=1,2,\dots$ ),  $t = i\beta$

La primera propiedad asegura que todas las energías del espectro de excitación son positivas mientras que la segunda se traduce en  $W(q^0, q^1) \geq 0$ .

Una parametrización consistente de  $F(t)$  debe respetar estas propiedades y reducirse a (4) ó (5) en el límite  $t \rightarrow 0$ . Además es necesario imponer condiciones sobre su comportamiento a  $t$  grandes para reproducir el espectro de bajas energías.

Admitiendo, como se discutió en el capítulo seis, que este parte viene dominada por una resonancia gigante de energía  $E_0$ , se traduce en:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = e^{iE_0 t} \quad (6)$$

lo que equivale a representar la resonancia gigante mediante una función delta de Dirac.

Una parametrización de  $F(t)$  que respete estas condiciones viene dada por la aproximación (2.1) de Padé a  $\ln F(t)$  (RO81), de forma que:

$$F(t) = \exp \left\{ i\alpha_0 t \frac{1 - i\alpha_1 t}{1 - i\alpha_2 t} \right\}$$

Comparamos los límites  $t \rightarrow 0, \infty$  con (4,5) y (6) respectivamente, para obtener los coeficientes

$\alpha_i$  en términos de los momentos  $m_k$ :

$$\alpha_0 = \frac{m_1}{m_0} = \lambda_1$$

$$\alpha_1 = \frac{E_G}{2m_1} \cdot \frac{m_2 - m_1^2/m_0}{m_1/m_0 - E_G} = \frac{E_G}{\lambda_1} \frac{\frac{1}{2} \lambda_2}{\lambda_2 - E_G}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2m_0} \cdot \frac{m_2 - m_1^2/m_0}{m_1/m_0 - E_G} = \frac{\frac{1}{2} \lambda_2}{\lambda_1 - E_G} \quad (7)$$

Con esta expresión puede realizarse analíticamente la transformada de Fourier para obtener la parametrización adecuada de las funciones de estructura:

$$W_i(q^0, q^2) = m_0^{(i)} e^{-A^{(i)}} \delta(q^0 - E_G) + \frac{m_0^{(i)}}{\alpha_2^{(i)}} \mathcal{H}(q^0 - E_G) e^{-A^{(i)} - \Omega^{(i)} \sqrt{\frac{A^{(i)}}{\Omega^{(i)}}}} I_1(2\sqrt{A^{(i)}\Omega^{(i)}}) \quad (8)$$

donde  $\Omega = q^0 - E_G / \alpha_2$ ,  $A = \lambda_2 / 2\alpha_2^2$  e  $I_1(x)$  es la función de Bessel modificada de orden uno.

Obsérvese que la diferencia entre las distintas funciones de estructura según  $i = 1, L$  viene marcada por la presencia de los momentos  $m_k^{(i)}$  que aparecen en (8).

El primer término de (8) describe la posición y altura de la resonancia gigante a la que, por tanto, se le da una anchura nula. Una forma de hacer un modelo más realista consistiría en incluir una anchura finita de ella.

Esto puede hacerse mediante una generalización

de la ecuación (6).

$$F(t) = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \exp \left\{ i \alpha_0 t \frac{1 - \alpha_1 t}{1 - \alpha_2 t / \epsilon} \right\}$$

donde  $g(\epsilon)$  incluye la anchura de la resonancia y se escoge positiva y normalizada a 1.

De la misma forma que antes los coeficientes  $\alpha_i$  son determinados en términos de los momentos por los desarrollos (4) y (5).

En ambos casos, los factores desconocidos que aparecen se tratan como parámetros y se ajustan por tanto a datos experimentales.

## 8.2 Sección eficaz de fotoabsorción.

La sección eficaz total de absorción de fotones reales está relacionada con la función de estructura transversal a través de la ecuación (4.20) y tal como se expuso en (4.35) podemos obtener; en el límite de grandes longitudes de onda:

$$\sigma_T(q^0) = \frac{e^2}{4\pi} \frac{4\pi^2}{M} \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{q^0 W_2(q^0, q^2)}{-q^2}$$

Usando la parametrización (8), obtenemos la forma de  $\sigma_T(q^0)$  en la aproximación dipolar:

$$\sigma_T(q^0) = q^0 \sigma_{-1} e^{-A} \left\{ \delta(q^0 - E_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_2} \Theta(q^0 - E_0) e^{-\alpha_2 \sqrt{\frac{A}{\Omega}}} I_1(e\sqrt{A\Omega}) \right\} \quad (9)$$

Donde las reglas de suma sobre la sección eficaz vienen dadas en términos de los momentos por:

$$\sigma_k = 4\pi^2 \frac{e^2}{4\pi} m_{(k+1)}$$

Los parámetros  $\alpha_2$ ,  $\lambda_2$ ,  $\sigma_{-1}$ ... se conocerán a partir de las reglas de suma conocidas experimentalmente  $\sigma_k$ , así como el valor de  $E_G$ .

En el caso del  $^{12}\text{C}$ , al que aplicaremos este estudio, toman los valores (AH74):

$$\begin{aligned} E &= 22.7 \text{ MeV} , \quad \lambda_2 = 339 \text{ MeV} , \quad \sigma_{-1} = 8.69 \text{ mb} \\ \alpha_2 &= 13.14 \end{aligned} \quad (10)$$

### 8.3 Sección eficaz de fotoabsorción para $^4\text{He}$ .

Por completitud, indicamos a continuación la parametrización escogida para la sección eficaz fotonuclear del  $^4\text{He}$  (RI76):

$$\sigma_f(\nu') = \begin{cases} A \nu' (\nu' - \nu_0) & \nu' \in (\nu_0, \nu_1) \\ \frac{\sigma(\nu'_m) \nu'^2}{\nu'^2 + \left(\frac{\nu'^2 - \nu_m^2}{\Gamma}\right)^2} & \nu' > \nu_1 \end{cases} \quad (11)$$

Y damos a continuación los parámetros usados así como las reglas de suma a que da lugar esta parametrización:

$$\nu_1 = 23 \text{ MeV} , \quad \nu_0 = 20.1 \text{ MeV} , \quad \nu'_m = 26 \text{ MeV}$$

$$\sigma(\nu_m) = .365 \text{ fm}, \Gamma = 19.3 \text{ fm}, A = 1.27 \times 10 \text{ Mev}$$

$$\sigma_0 = 8.0 \text{ fm} \cdot \text{Mev}, \sigma_{-1} = .23 \text{ fm}, \sigma_{-2} = .0074 \text{ fm /Mev}$$

resultados estos últimos que podemos comparar con los valores experimentales en (AR74).

#### 8.4 Resultados para la amplitud muón-núcleo.

##### 8.4.1. Amplitud $\mu^- - {}^{12}\text{C}$ .

Introduciendo la parametrización de la sección eficaz (9) con los parámetros dados para  ${}^{12}\text{C}$  en las expresiones (10) obtenemos la amplitud para la colisión  $\mu^-$ -núcleo:

$$\begin{aligned} T_0(2\gamma)^c &= 4 \frac{e^2}{4\pi} \frac{m_\mu}{\pi^2} \sigma_{-1} e^{-A} M \left\{ \mathcal{H}(E_G, m_\mu, T) + \right. \\ &+ \mathcal{G}(E_G, m_\mu, T) + \frac{1}{\alpha_2} \int_{E_0}^{100 \text{ MeV}} d\nu' e^{-\Omega} \sqrt{\frac{A}{\Omega}} I_1(2\sqrt{A\Omega}) \left[ \mathcal{H}(\nu', m_\mu, T) + \right. \\ &\left. \left. + \mathcal{G}(\nu', m_\mu, T) \right] \right\} \end{aligned}$$

Integral que, realizada numéricamente, proporciona los valores de la amplitud en términos de la energía cinética del muón dados en la tabla 1, (Apéndice 3), y representados en la gráfica 1.

Obsérvese que la integración está cortada arbitrariamente para un valor de energía del fotón  $\nu' = 100 \text{ MeV}$ . Este hecho no merma la validez del resultado obtenido puesto que las reglas de suma calculadas con este corte están de acuerdo con los resultados experimentales.

Con la misma sección eficaz calculamos las reglas de suma:

$$\begin{aligned}\sigma_{-3/2} &= 3.98 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-5/2} \\ \sigma_{-5/2} &= 1.42 \times 10^{-7} \text{ MeV}^{-7/2} \\ \sigma_{-2} &= 7.42 \times 10^{-7} \text{ MeV}^{-3}\end{aligned}$$

Así como la integral:

$$I = \int_{\nu_0}^{100 \text{ MeV}} d\nu' \frac{\sigma_T(\nu')}{\nu'^{3/2}} \frac{1}{1 + (2m_p \nu' / t_0)^2}^{1/2} = 2.57 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-5/2}$$

(con  $\langle r^2 \rangle = 2.4 \text{ fm}^2$ ,  $t_0 \approx 2.1 \times 10^4 \text{ MeV}^2$ ).

que permiten encontrar las formas de la aproximación lineal al resultado exacto en la aproximación dipolar no retardada, así como las correcciones debidas a las contribuciones de fotones virtuales a bajos  $q^2$  discutidas en el capítulo anterior.

Las ecuaciones que dan lugar son:

$$T_0(q)^c / M \approx - \left[ 5.68 \times 10^{-5} \text{ MeV}^{-1} + 1.16 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2} \right]$$

para la aproximación dipolar no retardada, obtenida a partir de (6.4). Mientras que:

$$T_0(q)^c / M \approx - \left[ 3.67 \times 10^{-5} \text{ MeV} + 7.84 \times 10^{-7} \text{ MeV}^{-2} \right]$$

con las consideraciones acerca del tamaño finito, obtenido a partir de la ec.(7.10).

Representamos estos resultados en la figura 1 para comparar con los valores hallados en el caso exacto (13).

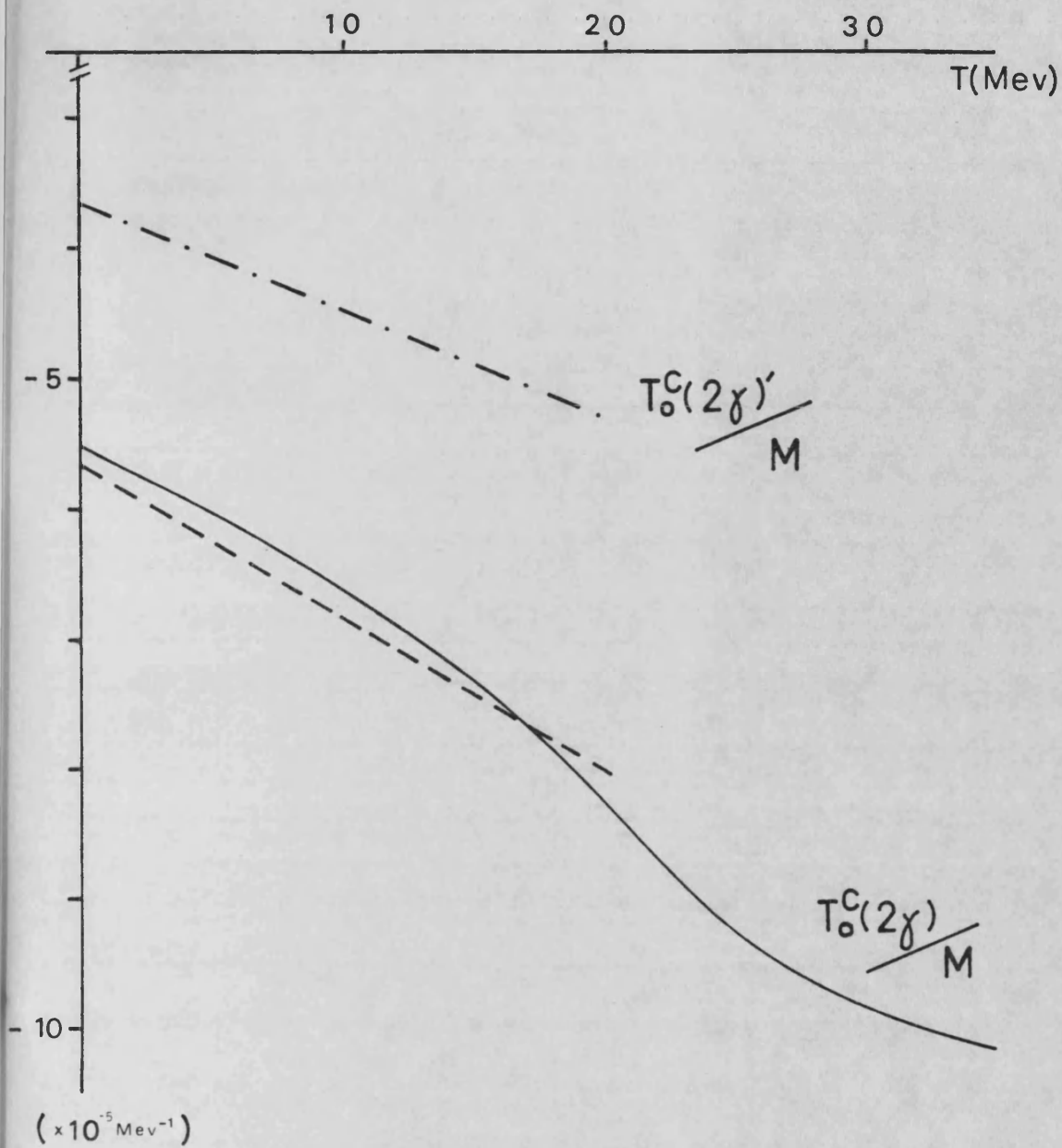


Fig. 1

Amplitud para la colisión  $\mu^{-12}\text{C}$ .

( En la aproximación dipolar no retardada  $T_0^C(2\gamma)$ , la línea a trazos representa la aproximación lineal. )

### 8.4.2. Amplitud $\mu^-$ -He<sup>4</sup>.

Con la sección eficaz dada en (11) y los parámetros (12) realizamos el mismo cálculo que en 8.4.1 para el caso de <sup>4</sup>He.

Es decir:

$$T_0^c(2\gamma) = \frac{4m_\mu}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} M \left\{ A \int_{\nu_0}^{\nu_1} (\nu' - \nu_0) d\nu' + \right. \\ \left. + \sigma(\nu'_m) \int_{\nu_1}^{100 \text{ MeV}} d\nu' \frac{\nu'}{\nu'^2 + \left(\frac{\nu'^2 - \nu_m'^2}{\pi}\right)^2} \right\} \cdot \left[ \mathcal{H}(\nu', m_\mu, T) + \mathcal{G}(\nu', m_\mu, T) \right] \quad (16)$$

que proporciona los valores dados en la tabla 2 (Apéndice III).

Asimismo, calculando las reglas de suma:

$$\sigma_{-3/2} = 1.05 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-5/2}$$

$$\sigma_{-5/2} = 3.52 \times 10^{-8} \text{ MeV}^{-7/2}$$

$$\sigma_{-2} = 1.81 \times 10^{-7} \text{ MeV}^{-3}$$

$$I = \int_{\nu_0}^{100 \text{ MeV}} d\nu' \frac{\sigma_{\mathcal{H}}(\nu')}{\nu'^{3/2}} \frac{1}{1 + \left(2m_\mu/\nu_0\right)^{1/2}} = 7.49 \times 10^{-7} \text{ MeV}^{-5/2}$$

encontramos la aproximación lineal en este caso:

$$\frac{T_0^c(2\gamma)}{M} = - \left[ 1.50 \times 10^{-5} \text{ MeV}^{-1} + 2.99 \times 10^{-7} T \text{ MeV}^{-2} \right]$$



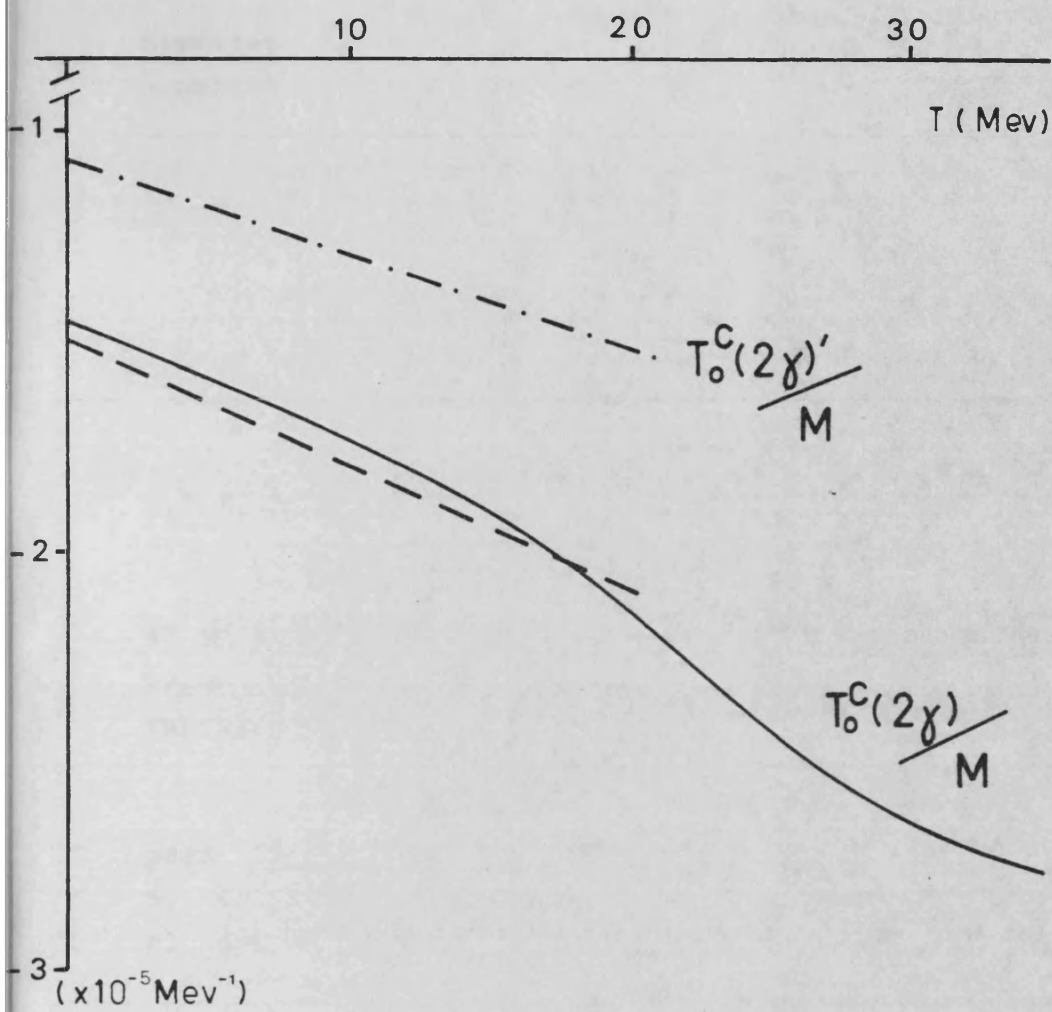


Fig. 2

Lo mismo que la fig.1 para  $\mu^-$ - ${}^4\text{He}$ .

mientras que con  $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 1.67$  fm,  $t_0 \approx 4.2 \times 10^4$  MeV<sup>2</sup>, la ecuación toma los valores:

$$\frac{T_0(2\gamma)'}{M} \approx - [1.07 \times 10^{-5} \text{ MeV}^{-1} + 2.17 \times 10^{-7} T \text{ MeV}^{-2}]$$

En la figura 2 pueden compararse resultados.

#### 8.4.3. Amplitud $e^- - {}^4\text{He}$ y $e^- - {}^{12}\text{C}$ .

Sustituyendo la masa del muón por la del  $e^-$  en las ecuaciones (12) y (16) obtenemos los resultados para estas amplitudes dados en las tablas 3 y 4 y representados en las figuras 3 y 4.

Asimismo calculamos las mismas amplitudes para la expresión  $m_e \rightarrow 0$  encontrada en el capítulo 6, ec. (6.6) obteniéndose resultados en acuerdo con el caso exacto.

Por último, a partir de la ecuación (7.13) realizamos las correcciones debidas al tamaño nuclear.

$$T_0(2\gamma)'$$

#### 8.4.4. Comentarios.

Analizando las gráficas 1 y 2, se observa que la aproximación lineal a la amplitud en caso de muones, se comporta muy bien hasta energías  $T \sim 20$  MeV, con diferencias no mayores que el 5% respecto

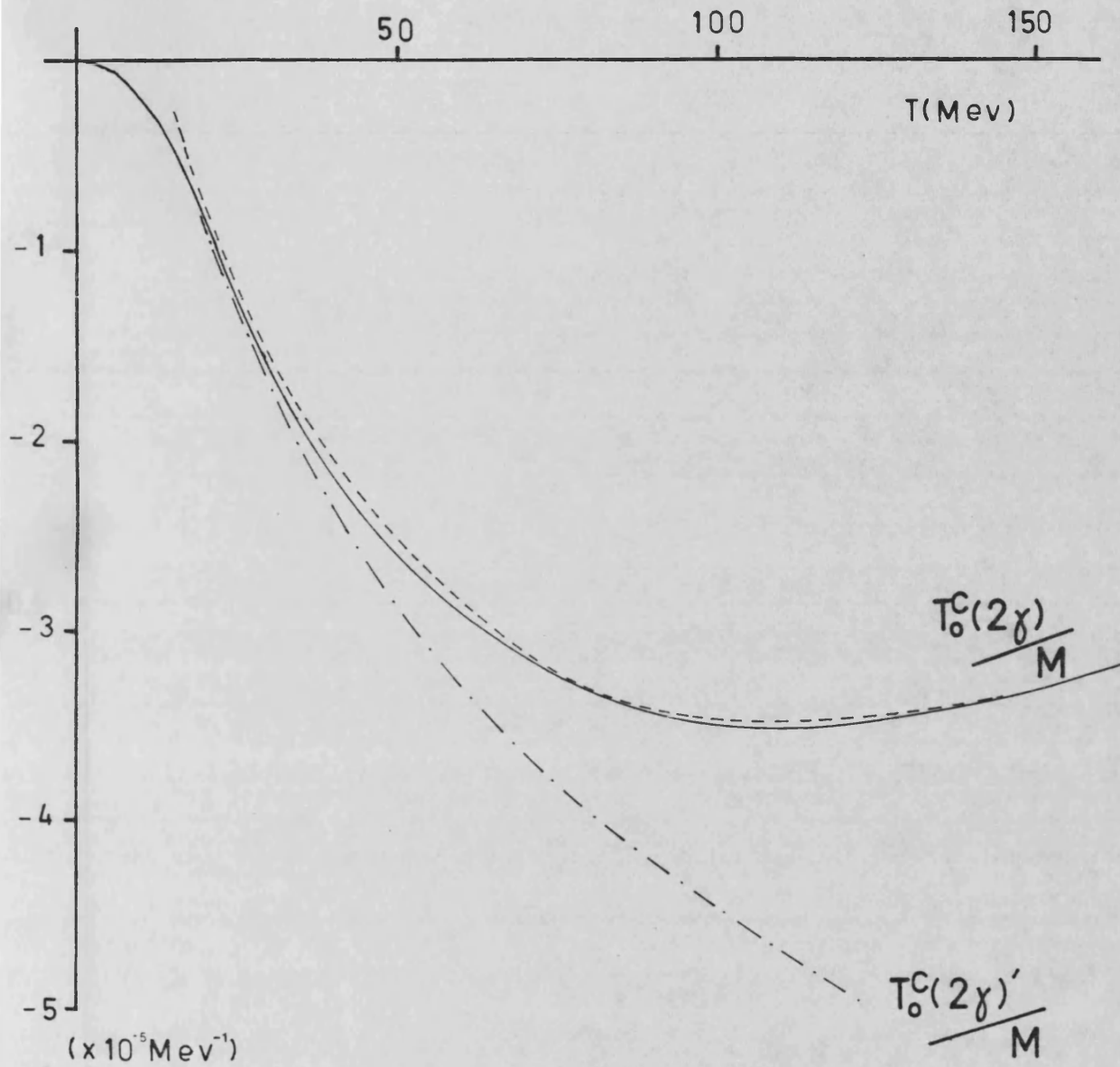


Fig. 3

Lo mismo que la fig. 1 para  $e^{-12}\text{C}$   
 ( La línea a trazos representa la aproximación a  
 $T_0^C(2\gamma)$  dada por la ec.(6.6) )

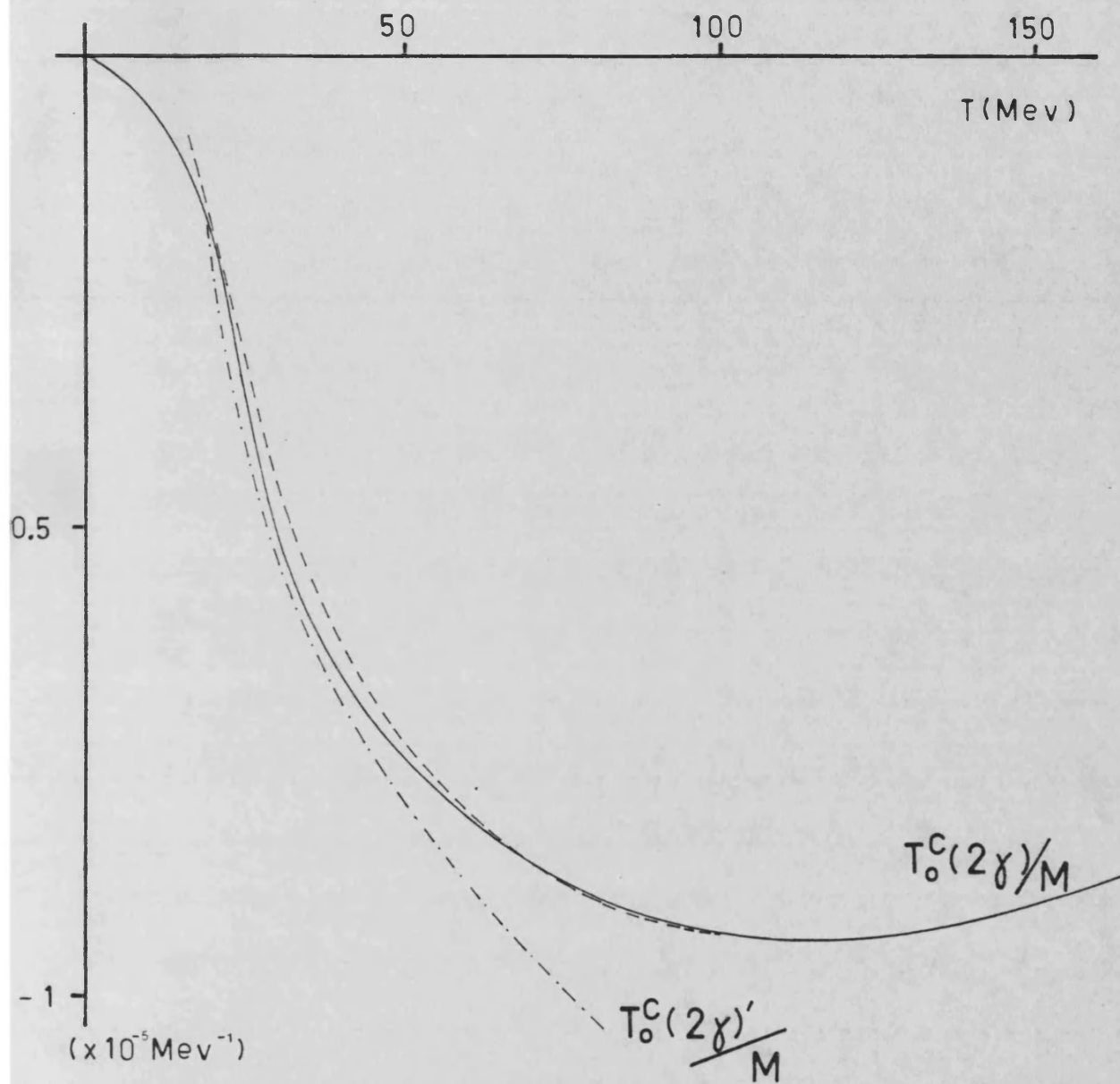


Fig. 4

Lo mismo que la fig 3 para  $e^{-4}\text{He}$

del caso exacto, ambos en la aproximación dipolar no retardada. Esto sugiere que el cálculo efectuado teniendo en cuenta el factor de forma (ecs. 15 y 18) debería dar una buena descripción de los efectos considerados hasta esas energías, que corresponden a momentos del haz  $|\vec{p}_\mu| \sim 70$  MeV.

Por otra parte, si calculamos la razón entre la amplitud para  $^{12}\text{C}$  y para  $^4\text{He}$  encontramos valores desde  $\sim 3.8$  a  $T=0$  MeV disminuyendo uniformemente de forma que a  $T \sim 100$  MeV se obtiene  $\sim 2.7$ . Puesto que la única diferencia entre ambos cálculos radica en la sección eficaz fotonuclear, intentaremos relacionar aquel resultado con esta dependencia.

Si atendemos a las reglas de suma, la relación entre ellas disminuye conforme aumentan las potencias de la energía, i.e:

$$\frac{\sigma_n(^{12}\text{C})}{\sigma_n(^4\text{He})} > \frac{\sigma_{n+1}(^{12}\text{C})}{\sigma_{n+1}(^4\text{He})}$$

Esto sugiere que a bajas energías  $T$  son importantes las reglas de suma con  $n$  más pequeño mientras que conforme aumenta  $T$  influyen reglas de suma con mayor  $n$ . Permitiendo este hecho explicar el buen funcionamiento de la aproximación lineal (6.3) tomando sólo hasta una potencia máxima  $\sigma_{-3/2}$  y, a la vez, aventurar el mismo acuerdo en las ecs. 15 y 18 donde se incluían los efectos del tamaño nuclear.

Otro aspecto que destaca de los resultados

obtenidos es la necesidad de incluir las correcciones debidas al tamaño nuclear.

En el caso de muones, ya en el umbral de energía cinética estos efectos son importantes mientras que en el caso de electrones las correcciones se hacen sensibles a energías  $T \sim 20-25$  MeV tomando valores similares a los del caso de muones para  $T \sim 100$  MeV.

Estos hechos pueden intentar explicarse a partir del tipo de fotones involucrados en el proceso: de hecho, como se comentó en (2.3.2), para cálculos al umbral de energía cinética del leptón se encontraba que la física del proceso venía dominada por fotones con  $-q^2 \sim 2m\nu'$  siendo  $q^2$  el cuadrimomento del fotón y  $m$  la masa del leptón. Así, si  $R$  es una característica del tamaño nuclear, el valor  $|\vec{q}|R$  no es mucho menor que la unidad para el caso de muones y, por lo tanto los efectos del tamaño nuclear se hacen notar ya a esta energía. De hecho, las correcciones son del  $\sim 35\%$  para  $^{12}\text{C}$  y del  $\sim 30\%$  para  $^4\text{He}$ .

Para  $e^-$ , como es de esperar, estos efectos son despreciables a energía umbral, sin embargo, si tomamos energías  $T \sim m_\mu$  encontramos correcciones del orden del 28% para  $^{12}\text{C}$  y 20% para  $^4\text{He}$ . A  $T \neq 0$  los valores de  $-q^2$  relevantes parecen estar en la región  $-q^2 \sim 2\nu'(T+m)$ . Atendiendo a las gráficas 3 y 4 se observa que a  $T \sim 30$  MeV con  $-q^2 \sim 1.5 \times 10^3$  MeV,  $|\vec{q}|R \sim 0.3$  y los efectos ya son apreciables.

Destaquemos también el hecho de que, aunque a  $T=0$  en el caso de electrones los valores de la amplitud son muy pequeños, debido al efecto de la

masa del electrón (factor  $m_e$  en 2.27), se observa que aumenta rápidamente con T y sus valores son comparables con los del caso de muones para  $T \gtrsim 20$  MeV, con lo que haces de electrones también podrían estudiarse en estudios de esta amplitud en procesos de colisión.

#### 8.4.5. Asimetría $\mu^+$ , $\mu^-$ , núcleo.

Con la información obtenida a partir de estos resultados y con el teorema a bajas transferencias de momento, podemos plantear el cálculo de la asimetría cuya contribución del continuo toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^c(T, \theta) = & 4Tm_\mu (1 - \cos \theta) \left\{ -\frac{4\pi}{e^2} \frac{1}{8\pi Z m_\mu} [A + BT] - \right. \\ & - \frac{\pi}{4Z} \sqrt{Tm_\mu (1 - \cos \theta)} \alpha \left(2 + \frac{T}{m_\mu}\right) - \\ & \left. - \frac{T(1 - \cos \theta)}{6\pi Z} \alpha \left(11 + 13 \frac{T}{m_\mu}\right) \ln \frac{4Tm_\mu (1 - \cos \theta)}{\Lambda} \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

con T la energía cinética del muón incidente y  $\theta$  el ángulo de difusión del muón saliente, ambos en el sistema laboratorio.

Las cantidades A y B, se obtienen de (15) y (18) para los casos particulares de  ${}^4\text{He}$  y  ${}^{12}\text{C}$ .

La polarizabilidad eléctrica es:

$$\alpha(^4\text{He}) = 0.073 \text{ fm}^3$$

$$\alpha(^{12}\text{C}) = 1.59 \times 10^{-2} \text{ mb/MeV}$$

y hemos tomado la polarizabilidad magnética  $\beta = 0$  en ambos casos.

Recordemos que el primer término es el obtenido en esta memoria mediante la difusión Compton hacia adelante, mientras los términos en  $\sqrt{-t}$  y  $t \ln(-t)$  del corchete fueron deducidos a partir del comportamiento de largo alcance de la amplitud. El parámetro  $\Lambda$ , que fija la escala del logaritmo en la ecuación (19) es característico de la estructura hadrónica. El resultado es muy poco sensible al valor preciso de  $\Lambda$ , que puede ser estimado del modo siguiente. En los límites no relativista y estático, los efectos de polarizabilidad pueden ser descritos (BE 72) por el potencial de interacción de largo alcance:

$$V(r) = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi} \alpha \frac{1}{r^4} \quad (20)$$

que corresponde a la respuesta dada por la polarizabilidad de un sistema con estructura a un campo eléctrico externo. Este potencial reproduce correctamente, cercano al umbral de energías, el término en  $\sqrt{-t}$ , mientras el término independiente de  $t$  necesita un corte. Este corte al comportamiento de largo alcance es  $R = \frac{2}{\Lambda}$ , dando una asimetría de la forma:

$$\mathcal{R}^{\text{pot}} = -\frac{\alpha t}{z} \left( \frac{1}{R} - \frac{\pi}{4} \sqrt{-t} \right) \quad (21)$$



Tomando  $T=0$  en la ecuación (19), y comparando con (21), obtenemos  $R$  y por tanto  $\Lambda$ , que puede ser así incluido en la escala hadrónica del logaritmo:

$$\sqrt{\Lambda} = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{A}{4\pi\alpha m_\mu}$$

$$\Lambda(^4\text{He}) \approx 1.4 \times 10^4 \text{ MeV}^2, \quad \Lambda(^{12}\text{C}) \approx 8.7 \times 10^3 \text{ MeV}^2$$

Y la contribución del continuo (19) a la asimetría viene dada en términos de la energía cinética del muón  $T$  y del ángulo de difusión  $\theta$ .

Los resultados para blancos de  $^4\text{He}$  y  $^{12}\text{C}$  se presentan en las figuras 5 y 6.

En la ecuación (19), las contribuciones positivas a la asimetría provienen del primer y tercer término mientras que el segundo contribuye negativamente. La importancia relativa de estas contribuciones se observa en dichas figuras.

Los resultados en ambos casos son de unos pocos por mil, de forma que la asimetría aumenta con el momento del haz y los máximos valores absolutos corresponden, salvo a energías cinéticas cercanas al umbral, a la dirección hacia atrás.

A energías cinéticas de muones superiores a 20 Mev, tanto los desarrollos (15) y (17) como las condiciones de validez del teorema no son adecuadas y por tanto conduciría a resultados erróneos.

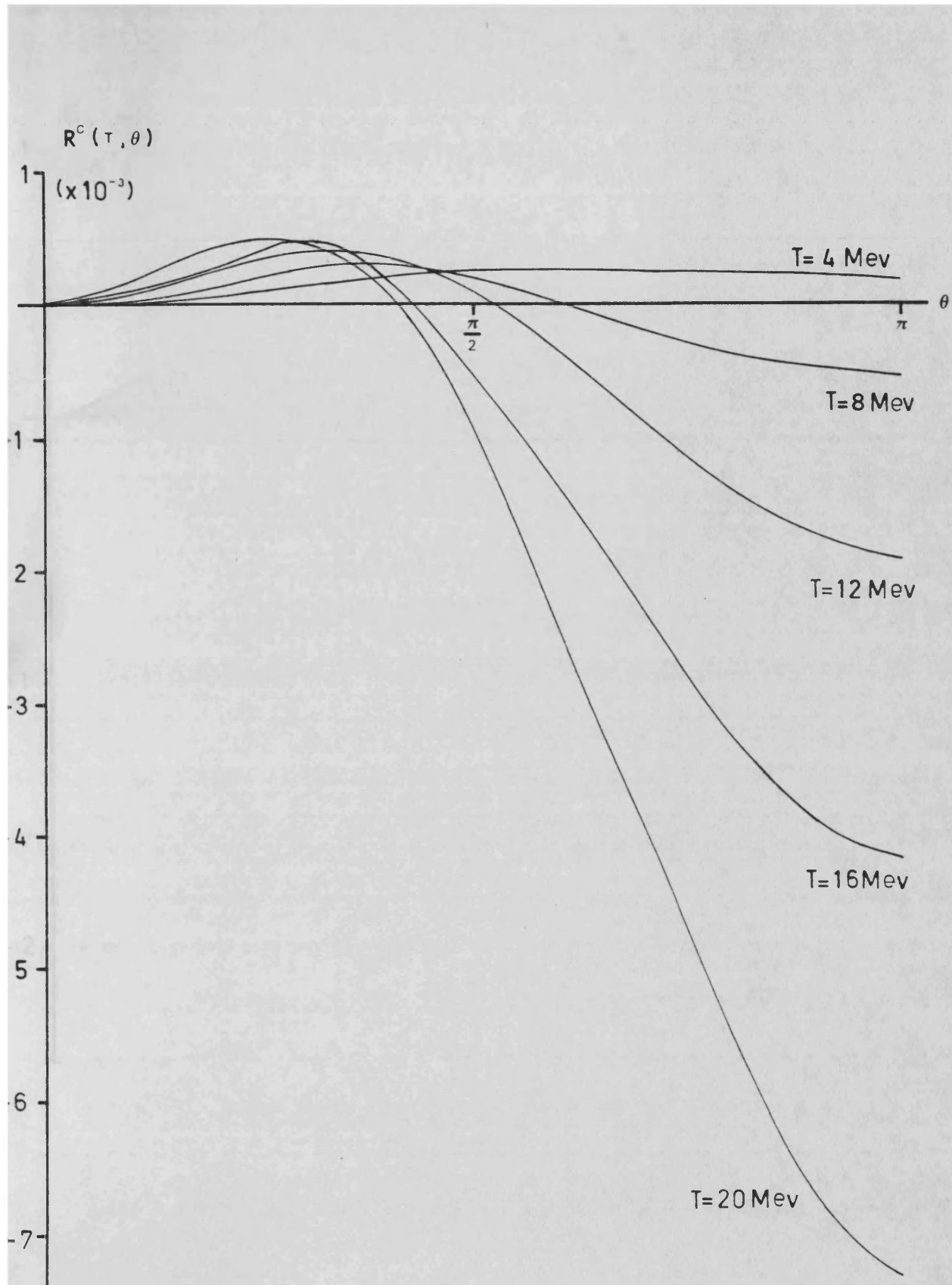


Fig. 5

Distribución angular de la asimetría para la colisión de  $u^+$  y  $u^-$  sobre  $^{12}\text{C}$ .

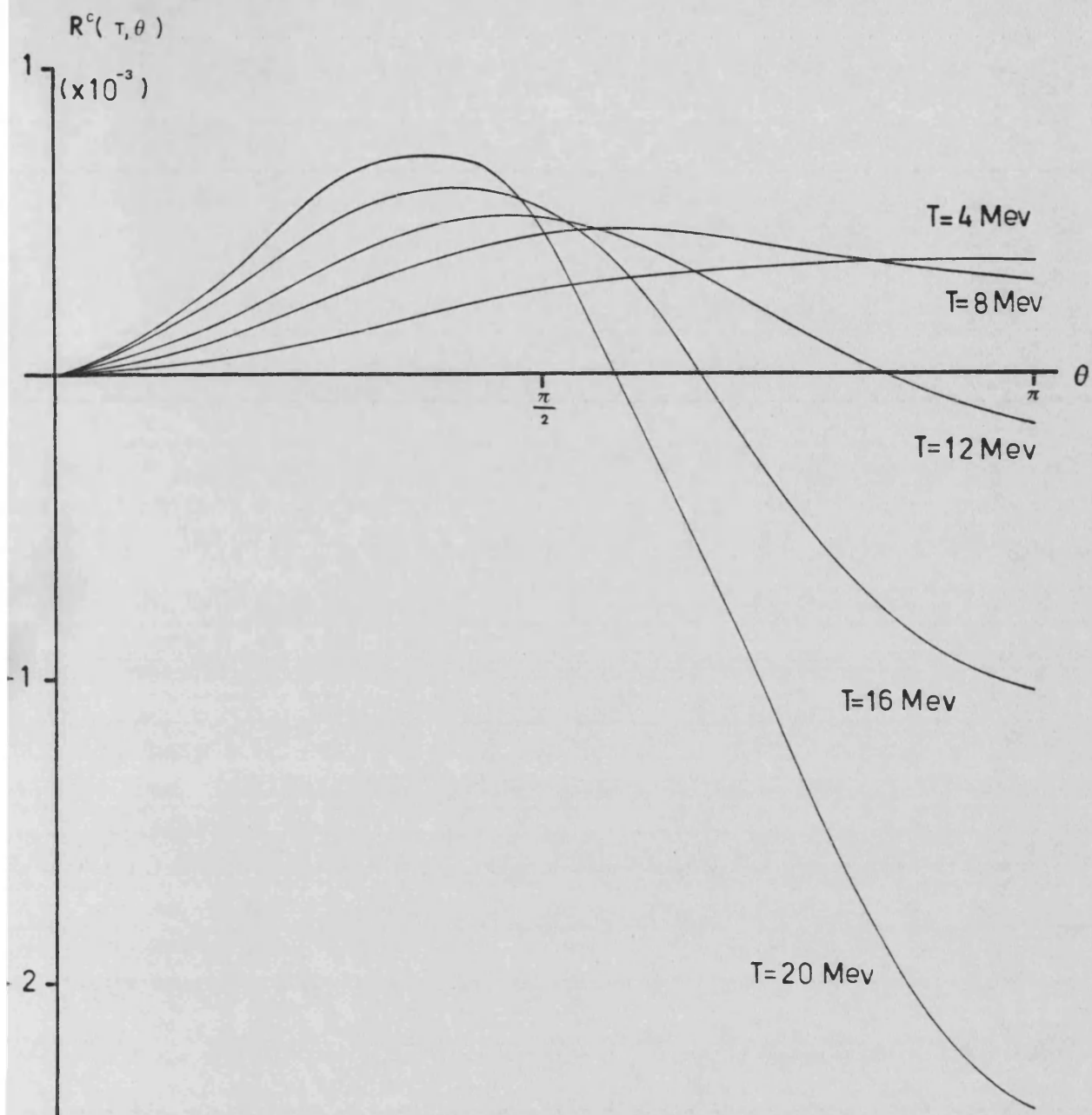


Fig. 6

Lo mismo que la fig. 5 para  ${}^4\text{He}$ .

## CONCLUSIONES

En esta memoria hemos estudiado la amplitud para la colisión entre leptón y hadrón de espín cero en la dirección hacia adelante con intercambio de dos fotones. El propósito consiste en conectar con los resultados del teorema a bajas transferencias de momento (BP81), que dejaba indeterminado el término independiente del momento. El resultado permite encontrar expresiones para observables que muestren la existencia de la amplitud de dos fotones. En particular estudiamos la contribución del continuo a la distribución angular en la asimetría de carga para la colisión de muones positivos y negativos con núcleos.

Los puntos tratados en la memoria y los resultados obtenidos pueden resumirse de la siguiente forma:

- Relacionamos el término independiente

del momento transferido con la amplitud mediada por 2 fotones en la dirección hacia adelante.

- Dicha amplitud la estudiamos en términos de la amplitud Compton virtual en la dirección hacia adelante para leptones y hadrones. La amplitud Compton de leptones se calcula de forma inmediata mientras que la amplitud para hadrones en la dirección hacia adelante se descompone, en virtud de invarianza gauge, covarianza Lorentz e invarianza bajo paridad e inversión temporal, en dos funciones escalares que contienen toda la información acerca del propagador hadrónico.

- Efectuamos relaciones de dispersión sobre estas funciones en la variable energía del fotón (manteniendo su masa virtual fija). Con ello y la relación de unitariedad en el canal  $s$  para el proceso de dos fotones, se obtienen sus partes reales en términos de las funciones de estructura hadrónica. Aislamos la contribución del continuo hadrónico a estas partes reales con el objeto de construir la contribución del continuo al observable indicado al principio del capítulo.

Por tanto, el desconocimiento del propagador hadrónico queda contenido en las funciones de estructura, medibles en procesos de colisión inelástica leptón-hadrón o en procesos de fotoabsorción hadrónica. Su estudio requiere la elección de un modelo que describa la física del hadrón para obtener resultados analíticos.

- Tomamos la aproximación dipolar no retardada

para las funciones de estructura y obtenemos, mediante técnicas de Feynman de integración, una expresión analítica para la amplitud de fotones. Ello supone admitir que la física del problema viene controlada por fotones reales. Podemos relacionar las funciones de estructura con la sección eficaz de fotoabsorción hadrónica.

Los resultados obtenidos permiten, a su vez, encontrar las diferencias de energías debidas a la polarizabilidad nuclear para átomos, tanto electrónicos como muónicos, tomando los leptones a energía umbral y la "aproximación de la función de onda" en este cálculo.

- A partir del resultado analítico obtenemos las expresiones para la amplitud en los casos físicos:

i) Muones: tomando los límites  $m_\mu \gg \nu' \gg T$  (siendo  $\nu'$  la energía de excitación nuclear y  $T$  la energía cinética del muón).

ii) Electrones: tomando el límite  $m_e \rightarrow 0$ .

Los resultados para muones muestran que la amplitud de dos fotones puede escribirse, a primer orden en  $T$  y en la aproximación dipolar no retardada, en términos de reglas de suma de la sección eficaz de fotoabsorción. Comparando esta aproximación lineal con la expresión exacta, se obtiene, en los casos de  ${}^4\text{He}$  y  ${}^{12}\text{C}$  un acuerdo muy bueno hasta energías  $T \sim 20\text{MeV}$  (las desviaciones no superan el 5%). -

Los resultados para  $e^-$  muestran que, aunque en el umbral de energía cinética los valores de la amplitud son varios órdenes de magnitud inferiores a los del caso de muones, al aumentar la energía ( $T \sim 20-30$  MeV) se obtienen valores comparables lo que sugiere la posibilidad de usar también electrones al estudiar efectos de la amplitud de dos fotones. Esto sugiere que los efectos de intercambio de dos fotones dependen de la energía total del leptón y no de su masa únicamente.

- Para tratar de obtener resultados más realistas se consideran los efectos del tamaño finito del hadrón introduciendo un factor de forma monopolar que reproduzca bien su influencia a bajos momentos del fotón.

Los cálculos numéricos realizados en  ${}^4\text{He}$  y  ${}^{12}\text{C}$  muestran que el tamaño nuclear incluye a niveles del orden del 30% sobre los valores de la amplitud en la aproximación dipolar no retardada, para muones de energía umbral. Mientras que estos porcentajes se alcanzan para electrones a energías  $T \sim 100$  MeV. Señalando de nuevo el papel que juega la energía del leptón en estos procesos.

Asimismo indican que el proceso de intercambio de dos fotones viene dominado por fotones cuyo cuadrimento típico es del orden de  $-q^2(T+m_e)$ .

- Con los resultados obtenidos estamos en condiciones de calcular la distribución del continuo a la distribución angular de la asimetría de carga para muones.

Encontramos esta asimetría a distinta energía cinética del muón incidente con los valores actuales de las polarizabilidades eléctrica y magnética del  ${}^4\text{He}$  y  ${}^{12}\text{C}$  y una estimación del parámetro de estructura hadrónica  $\Lambda$ .

Los resultados obtenidos son comparables en ambos casos obteniéndose las mayores asimetrías en la dirección hacia atrás donde, por otra parte, la contribución del polo contiene un cero cinemático con lo que los resultados en esa dirección son debidos únicamente al continuo y, por lo tanto, dependen de las polarizabilidades hadrónicas.

- A tenor de los cálculos realizados y al orden  $e^4$  en Electrodinámica Cuántica, el resultado esperado de la asimetría es de unos pocos por mil. Los valores máximos de la asimetría encontrados para  ${}^{12}\text{C}$ , (Fig. 6), se hallan en la dirección hacia atrás para energías cinéticas  $T \sim 10$  MeV y, en particular, para  $T \sim 20$  MeV, correspondientes a momentos  $|\vec{p}| \sim 65$  MeV, alcanzan valores de  $R^e(T, \theta) \sim 6-7 \times 10^{-3}$ .

Un aspecto interesante, y no tratado en esta memoria, consistiría en realizar un cálculo similar para electrones. Como se ha comentado cabría esperar resultados interesantes también en estos casos.

Este estudio requeriría una revisión del teorema a bajos momentos transferidos para obtener una expresión analítica que sea apropiada para estos casos.



Tentativas realizadas en este sentido (BP81a) sugieren desarrollos en  $m_e/t$  que no permiten conectar con los procedimientos usados en este trabajo puesto que partimos de la amplitud  $t = 0$ .

APENDICE I  
METODO DE INTEGRACION DE FEYNMAN Y ROTACION DE WICK

Integrales del tipo (3.5) que normalmente aparecen en cálculos de teoría de campos (PT84, JR ) pueden realizarse usando el método de parametrización de Feynman (FE49). Esencialmente consiste en la introducción de unas variables auxiliares de forma que la integración original sobre el cuádrimomento se convierte en una integral tipo que puede evaluarse fácilmente y la única dificultad subsiste en el cálculo de las integraciones sobre las nuevas variables introducidas.

Las características del método se resumen indicando su covarianza explícita, la reducción del número de polos del integrando a dos y su aplicabilidad a las integrales que aparecen en cálculos relacionados con la matriz S.

Una integral típica de la forma:

$$I = \int d^4 p \frac{Q(p)}{q_1(p) \dots q_n(p)} \quad (1)$$

donde  $q_i(p)$  son polinomios de 2º grado en P (usualmente propagadores que puedan aparecer en una teoría de campos) y  $Q(p)$  es un polinomio de grado m.

El denominador de (1) puede transformarse introduciendo (n-1) variables auxiliares en la forma:

$$\frac{1}{q_1(p) \dots q_n(p)} = (n-1)! \int_0^1 du_1 u_1^{n-2} \dots \int_0^1 du_{n-1} \cdot$$

$$I' = \int d^4 p \frac{Q(p)}{[(p-q)^2 - a^2]^n}$$

y admitiendo el postulado de integración simétrica, podemos promediar sobre las direcciones del cuadrivector  $p_\mu$  y realizar las sustituciones:

$$p_\mu p_\nu \rightarrow \frac{1}{4} g_{\mu\nu} p^2$$

$$p_\mu p_\nu p_\lambda p_\sigma \rightarrow \frac{1}{24} (p^2)^2 (g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda})$$

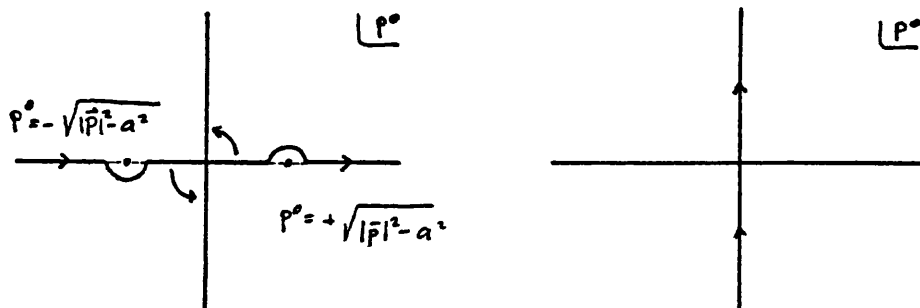
y en la integral  $I'$  aparecerán los términos de la forma:

$$I_{mn} = \int d^4 p \frac{(p^2)^{m-n}}{(p^2 - a^2)^n}$$

para evaluar estos términos debemos recordar que los denominadores de (1) llevan una parte imaginaria de tipo  $-i\epsilon$ , que da la prescripción para evitar los polos de la integración. Esto se traduce en una parte imaginaria  $-i\epsilon$  en esta última integral  $I_{mn}$ . Puesto que los polos del integrando en el plano  $p^0$ -complejo están en:

$$p^0 = \pm (|\vec{p}|^2 - a^2)^{1/2}$$

es posible girar el camino de integración un ángulo de  $\pi/2$  sin cruzar los polos, según indica en la figura (rot. de Wick), sin que el valor de la integral sufra variación.



Integración de  $p^0$  en el plano  $p^0$ -complejo.

1

$$\frac{1}{[q_1 u_1 \dots u_{n-1} + q_2 u_1 \dots u_{n-2} (1 - u_{n-1}) + \dots + q_n (1 - u_1)]^n}$$

(relación que puede obtenerse por inducción)

Con esto, el denominador en (2) puede escribirse de la forma:

$$A^n = [(p-g)^2 - a^2]^n$$

y la integral sobre cuadrimentos (1) quedaría reducida a:

$$I' = \int d^4 p \frac{Q(p)}{[(p-g)^2 - a^2]^n}$$

donde el cuadrivector  $g$  y el escalar  $a^2$  son independientes de la variable de integración  $P_\mu$  pero dependen de las variables auxiliares  $u_i$ .

En este punto puede observarse que los  $2n$  polos del integrando en (1) se convierten ahora en dos polos de orden  $n$  en (3).

El tratamiento de (3) en el caso de integrales convergentes se basa en desplazar el origen de integración de la variable  $p$ :

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + g_\mu$$

con lo que

Si hacemos ahora el cambio  $p^0 = ip'^0$ , la integral (4) se escribe:

$$I = i \int \frac{(p'^2)^{m-2}}{(p'^2 - a^2)^n} d^4 p'$$

que puede realizarse en el espacio esférico cuatridimensional  $p'^2 = \vec{p}'^2 + p'^0{}^2$  con lo que; si escribimos las coordenadas esféricas  $K, \varphi, \theta, \chi$ , la integración sobre los ángulos es directa y:

$$I_{mn} = 2\pi^2 i \int_0^\infty dk \frac{(k^2)^{m-2}}{(k^2 - a^2)^n} = \frac{i\pi^2}{(-a^2)^{n-m}} \mathcal{B}(m, n-m) \quad (5)$$

habiendo introducido la función beta Gaussiana que, además da la condición de existencia de la integral  $n > m$ , i.e. la condición de convergencia.

Este método de realizar integrales sirve también como prescripción para separar las partes divergentes sin significado físico de las partes convergentes en integrales divergentes.

En el tratamiento de estas últimas debe tenerse especial cuidado al realizar el corrimiento del origen en (3), según el tipo de las divergencias que se traten el corrimiento del origen de integración puede dar lugar a la adición de nuevos términos.

En particular, derivando del hecho de que dos integrales logarítmicamente divergentes y cuyos integrandos son asintóticamente iguales, son iguales, el corri-

miento del origen puede realizarse sin necesidad de sumar ningún término.

Por el mismo razonamiento, si la divergencia es lineal, el corrimiento del origen lleva consigo la adición de un término (Término de superficie).

En ambos casos, en el tratamiento de estas integrales, es útil la expresión:

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = - \int_0^1 \frac{n(\alpha - \beta)}{[(\alpha - \beta)z + \beta]^{n+1}} dz$$

APENDICE II

ALGUNAS INTEGRALES QUE APARECEN EN EL CALCULO DE  $T_0^c(2\gamma)$

Detallamos a continuación algunas integrales que permiten encontrar los resultados dados en el capítulo V.

II.1.- En el cálculo de la integración sobre la variable "y" (V.2.1) es útil usar las expresiones:

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{(a+by+cy^2)^2} = \sum_{n=0}^2 y^n A_n =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left( -A_2 b + 2A_1 - \frac{b}{a} A_0 \right) + \frac{1}{\Delta} \left( 2a A_2 - b A_1 + 2A_0 \right) \int_0^{\infty} \frac{dy}{a+by+cy^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{a+by+cy^2} = \sum_{n=0}^4 y^n B_n =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left\{ -\frac{b}{2} B_4 + B_3 - \frac{b}{2a} B_2 + \frac{1}{a} B_1 - \frac{b}{2a^2} B_0 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta^2} \left\{ -3ab B_4 + \frac{3b^2}{2} B_3 - \frac{(2a+b^2)b}{2a} B_2 + \frac{3b^2}{2a} B_1 - \frac{3b}{a} B_0 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta^2} \left\{ 6a^2 B_4 - 3ab B_3 + (2a+b^2) B_2 - 3b B_1 + 6B_0 \right\}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{a+by+cy^2} \quad (1)$$

donde  $\Delta = 4a - b^2$ .

Que permite pasar de la ecuación (5.4) a las ecuaciones (5.6).

II.2.- En el cálculo de la integración sobre la variable "x" (.2.2.) usamos las relaciones:

$$\int_0^1 dx \frac{x^m}{x+a} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-a)^n}{m-n} + (-a)^m \ln \left| \frac{1+a}{a} \right| \quad m=1,2,\dots \quad (2)$$

Así como las funciones primitivas de las siguientes integrales:

$$\int dx x^m \ln(ax+b) = \frac{1}{m+1} \left[ x^{m+1} - \left(\frac{-b}{a}\right)^{m+1} \right] \ln(ax+b) -$$

$$- \frac{1}{m+1} \left(\frac{-b}{a}\right) \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n} \left(-\frac{ax}{b}\right)^n + C ; a \neq 0, m \geq 0$$

$$\int dx \frac{\ln(ax+b)}{x^m} = \frac{-1}{m-1} \frac{\ln(ax+b)}{x^{m-1}} +$$

$$+ \frac{1}{m-1} \left(\frac{-a}{b}\right)^{m-1} \left[ \ln \frac{ax+b}{x} + \sum_{n=1}^{m-2} \frac{1}{n} \left(-\frac{b}{ax}\right)^n \right] + C ; b \neq 0, m > 2$$

$$\int dx \frac{\ln(ax+b)}{x^2} = (\ln x) \frac{a}{b} - \left(\frac{1}{x} + \frac{a}{b}\right) \ln(ax+b) + C$$

$$\int dx \frac{\ln(ax+b)}{x} = \ln b \ln x - d_2 \left(\frac{-ax}{b}\right) + C ; a \cdot b \neq 0$$



$$\int dx \frac{\ln x}{x - \alpha} = \ln x \ln \frac{\alpha - x}{\alpha} + \alpha^2 \left( \frac{x}{\alpha} \right) + C \quad (3)$$

siendo  $L_2(z)$  la función dilogaritmo que se define como:

$$L_2(z) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{t - 1/x} dt$$

$$L_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad \text{si } |z| \leq 1$$

En el siguiente apartado recopilamos algunas de sus propiedades, usadas para la obtención de la expresión final (5.12).

II.3.- Función de Spence de 2º orden o función dilogaritmo:  $L_2(z)$ .

Se define en (II.4). Observamos de la primera igualdad que cuando  $z$  es real y mayor que la unidad el logaritmo es complejo y por tanto tendremos un corte en el plano  $z$ -complejo desde 1 a  $\infty$ . Para dar un valor definido a la función  $L_2(z)$ , tomaremos  $\arg(1-t)$  de forma que  $-\pi \leq \arg(1-t) < \pi$  con lo que  $\ln(1-t) = -i\pi + \ln(t-1)$  si  $t > 1$ .

Con lo que se traduce sobre  $L_2(z)$  en:

$$L_2^+(z) - L_2^-(z) = 2\pi i \ln z, \quad 1 < z < \infty$$

o, lo que es lo mismo:

$$\operatorname{Im} L_2(z+i\epsilon) = i\pi \ln z, \quad z \in \mathbb{R}, (z > 1).$$

Algunas relaciones útiles entre funciones  $L_2(z)$  (GH 2):

$$\text{i) } L_2\left(\frac{x}{1-y} \cdot \frac{y}{1-x}\right) = L_2\left(\frac{x}{1-y}\right) + L_2\left(\frac{y}{1-x}\right) - L_2(x) - L_2(y) - \ln(1-x) \ln(1-y)$$

$$\text{ii) } L_2(xy) = L_2(x) + L_2(y) + L\left(\frac{x}{1-y}\right) + L_2\left(\frac{y}{1-x}\right) + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1-x}{1-y}$$

$$\text{iii) } L_2(x) + L_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$\text{iv) } L_2(-x) = L_2\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{\pi^2}{6} \quad (x > 0)$$

$$\text{v) } L_2(x) + L_2\left(\frac{1}{x}\right) = i\pi \ln x - \frac{1}{2} \ln x + \frac{\pi^2}{3} \quad (x > 0)$$

$$\text{vi) } L_2(z) + L_2(-z) = \frac{1}{2} L_2(z^2) \quad (|z| < 1)$$

$$\text{vii) } L_2(\rho e^{i\varphi}) - L_2(\rho e^{-i\varphi}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \sin n\varphi}{n^2} \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

$$\text{viii) } L_2(\rho e^{i\varphi}) + L_2(\rho e^{-i\varphi}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \cos n\varphi}{n^2} \quad "$$

Algunos valores especiales de  $L_2(z)$  son:

$$L_2(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad L_2(-1) = \frac{\pi^2}{12}$$

En algunos puntos del trabajo, en los que ha sido necesario buscar límites en determinados parámetros que intervenían como argumentos de  $L_2(z)$ , p.e. (6.1), han sido útiles, además de la propia definición

de  $L_2(z)$  como desarrollo en serie para  $|z| < 1$ , los siguientes desarrollos:

$$L_2(\alpha + \epsilon) = L_2(\alpha) - \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) \ln(1 - \alpha - \epsilon) + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\epsilon}{1-\alpha}\right)^m \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^k; \quad \alpha + \epsilon < 1, \quad \epsilon \ll 1$$

$$L_2\left(\frac{\alpha}{1+\epsilon}\right) = \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) \ln\left(1 - \frac{\alpha}{1+\epsilon}\right) + L_2(\alpha) + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^k \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n; \quad \alpha < 1, \quad \epsilon \ll 1$$

APENDICE III

RESULTADOS NUMERICOS DE LA AMPLITUD  $T_0(2\gamma)_{++}^C/M$

A partir de las ecuaciones 5.11 y 5.12 y de las parametrizaciones dadas para la sección eficaz fotonuclear para  ${}^4\text{He}$  (8.11) y  ${}^{12}\text{C}$  (8.9), podemos obtener mediante integración numérica sobre la variable  $\nu'$ , los valores de la amplitud de intercambio de dos fotones en la dirección hacia adelante y en la aproximación dipolar no retardada a diferentes energías del leptón incidente.

Siguiendo la misma nomenclatura que en capítulos anteriores, los resultados obtenidos se dan en las siguientes tablas:

III.1.- $\mu^-$ - ${}^{12}\text{C}$

$T \leq 22.7 \text{ MeV}$

$$\frac{T_0(2\gamma)_{++}^C}{M} = \frac{4 m_\mu}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \sigma_{-1} e^{-A} \left\{ \mathcal{H}(E_G, m_\mu, T) + \mathcal{G}_2(E_G, m_\mu, T) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\alpha_2} \int_{22.7 \text{ MeV}}^{100 \text{ MeV}} d\nu' e^{-\Omega} \sqrt{\frac{A}{\Omega}} I_1(\ell \sqrt{A\Omega}) \cdot \left[ \mathcal{H}(\nu', m_\mu, T) + \right.$$

$$\left. \left. + \mathcal{G}_2(\nu', m_\mu, T) \right] \right\}$$

$22.7 \text{ MeV} \leq T \leq 100 \text{ MeV}$

$$\frac{T_0(2\gamma)_{++}^C}{M} = \frac{4 m_\mu}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \sigma_{-1} e^{-A} \left\{ \mathcal{H}(E_G, m_\mu, T) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + G_1(E_0, m_\mu, T) + \frac{1}{\alpha_2} \left[ \int_{22.7 \text{ MeV}}^T G_1(\nu', m_\mu, T) + \right. \\
& + \int_T^{100 \text{ MeV}} G_2(\nu', m_\mu, T) + \left. \int_{22.7 \text{ MeV}}^{100 \text{ MeV}} \mathcal{H}(\nu', m_\mu, T) \right] d\nu' e^{-\nu_2} \\
& \cdot \sqrt{\frac{A}{\Omega}} I_1(e\sqrt{A\Omega}) \}
\end{aligned}$$

T (MeV)	$T_0(2g)_{++}^c/M$ (MeV <sup>-1</sup> )	T (MeV)	$T_0(2g)_{++}^c/M$ (MeV <sup>-1</sup> )
0	-5.51x10 <sup>-5</sup>	16	-7.44x10 <sup>-5</sup>
2	-5.71	18	-7.79
4	-5.91	20	-8.21
6	-6.13	25	-9.27
8	-6.35	30	-9.84
10	-6.57	35	-1.01x10 <sup>-4</sup>
12	-6.85	40	-1.04
14	-7.11	45	-1.05

Tabla 1

### III.2.- $\mu^- - {}^4\text{He}$

$T \leq 20.1 \text{ MeV}$

$$\frac{T_0(2g)_{++}^c}{M} = \frac{4m_\mu}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ A \int_{20.1 \text{ MeV}}^{\nu_1} d\nu' (\nu' - 20.1) + \right.$$

$$+ \sigma(\nu'_m) \int_{\nu'_1}^{100 \text{ MeV}} d\nu' \frac{\nu'}{\nu'^2 + \left(\frac{\nu'^2 - \nu'_m{}^2}{\Gamma}\right)^2} \left\{ \mathcal{H}(\nu', m_\mu, T) + \mathcal{G}_2(\nu', m_\mu, T) \right\}$$

$\nu'_1 \leq T \leq 100 \text{ MeV}$

$$\frac{T_0(2\gamma)_{++}^c}{M} = \frac{4 m_\mu}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \left[ \left\{ A \int_{20.1 \text{ MeV}}^{\nu} d\nu' (\nu' - 20.1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma(\nu'_m) \int_{\nu'_1}^T d\nu' \frac{\nu'}{\nu'^2 + \left(\frac{\nu'^2 - \nu'_m{}^2}{\Gamma}\right)^2} \right\} \cdot \left\{ \mathcal{H}(\nu', m_\mu, T) + \mathcal{G}_1(\nu', m_\mu, T) \right\} + \right. \\ \left. + \int_T^{100 \text{ MeV}} d\nu' \frac{\nu'}{\nu'^2 + \left(\frac{\nu'^2 - \nu'_m{}^2}{\Gamma}\right)^2} \left\{ \mathcal{H}(\nu', m_\mu, T) + \mathcal{G}_2(\nu', m_\mu, T) \right\} \right]$$

T (MeV)	$T_0(2\gamma)_{++}^c/M$ (MeV <sup>-1</sup> )	T (MeV)	$T_0(2\gamma)_{++}^c/M$ (MeV <sup>-1</sup> )
0	-1.46x10 <sup>-5</sup>	16	-1.94x10 <sup>-5</sup>
2	-1.51	18	-2.02
4	-1.56	20	-2.12
6	-1.61	25	-2.44
8	-1.67	30	-2.64
10	-1.73	35	-2.75
12	-1.80	40	-2.80
14	-1.86	45	-2.84

Tabla 2

III.3.-  $e^- - {}^{12}\text{C}$

$$T + 2m_e \leq 22.7 \text{ MeV}$$

$$\frac{T_0(2\gamma)_{++}^c}{M} = \frac{4m_e}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \sigma_{-1} e^{-A} \left\{ \mathcal{H}(E_G, m_e, T) + \mathcal{G}_3(E_G, m_e, T) + \frac{1}{\alpha_2} \int_{E_G}^{100 \text{ MeV}} [\mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \mathcal{G}_3(\nu', m_e, T)] d\nu' e^{-\Omega \sqrt{\frac{A}{\Omega}}} I_1(2\sqrt{A\Omega}) \right\}$$

$$22.7 \text{ MeV} \leq T < T + 2m_e \leq 100 \text{ MeV}$$

$$\frac{T_0(2\gamma)_{++}^c}{M} = \frac{4m_e}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \sigma_{-1} e^{-A} \left\{ \mathcal{H}(E_G, m_e, T) + \mathcal{G}_1(E_G, m_e, T) + \frac{1}{\alpha_2} \left[ \int_{22.7 \text{ MeV}}^{100 \text{ MeV}} \mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \int_{22.7 \text{ MeV}}^T \mathcal{G}_1(\nu', m_e, T) + \int_T^{T+2m_e} \mathcal{G}_2(\nu', m_e, T) + \int_{T+2m_e}^{100 \text{ MeV}} \mathcal{G}_3(\nu', m_e, T) \right] d\nu' e^{-\Omega \sqrt{\frac{A}{\Omega}}} I_1(2\sqrt{A\Omega}) \right\}$$

$$100 \text{ MeV} \leq T$$

$$\frac{T_0(2\gamma)_{++}^c}{M} = \frac{4m_e}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \sigma_{-1} e^{-A} \left\{ \mathcal{H}(E_G, m_e, T) + \mathcal{G}_1(E_G, m_e, T) + \frac{1}{\alpha_2} \int_{22.7 \text{ MeV}}^{100 \text{ MeV}} [\mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \mathcal{G}_1(\nu', m_e, T)] d\nu' e^{-\Omega \sqrt{\frac{A}{\Omega}}} I_1(2\sqrt{A\Omega}) \right\}$$

T (MeV)	$T_0(z\gamma)_{+1}^c / M$ (MeV <sup>-1</sup> )	T (MeV)	$T_0(z\gamma)_{+1}^c / M$ (MeV <sup>-1</sup> )
0	$-7.70 \times 10^{-9}$	50	$-2.59 \times 10^{-5}$
2	$-1.29 \times 10^{-7}$	55	-2.77
4	-3.44	60	-2.93
6	-7.01	65	-3.06
8	$-1.20 \times 10^{-6}$	70	-3.17
10	-1.84	75	-3.26
12	-2.64	80	-3.33
14	-3.60	85	-3.39
16	-4.76	90	-3.43
18	-6.16	95	-3.46
20	-7.88	100	-3.48
25	$-1.28 \times 10^{-5}$	120	-3.47
30	-1.58	140	-3.38
35	-1.87	160	-3.21
40	-2.14	180	-2.98
45	-2.38	200	-2.69

Tabla 3

III.4.-  $e^- - {}^4\text{He}$

$$T + 2m_e \leq 20.1 \text{ MeV}$$

$$\frac{T_0(z\gamma)_{+1}^c}{M} = \frac{4m_e}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ A \int_{20.1 \text{ MeV}}^{\nu_1} d\nu' (\nu' - 20.1) \left[ \mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \mathcal{G}_3(\nu', m_e, T) + \mathcal{O}(\nu'_m) \right] \int_{\nu_1}^{100 \text{ MeV}} d\nu'' \frac{\nu''}{\nu''^2 + \left( \frac{\nu'^2 - \nu''^2}{m} \right)^2} \right.$$



$$\left. \left[ \mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \mathcal{G}_3(\nu', m_e, T) \right] \right\}$$

$$23 \leq T \leq T + 2m_e \leq 100 \text{ KeV}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_0(\nu)_{++}^c}{M} = & \frac{4m_e}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ A \int_{20.1 \text{ MeV}}^{\nu_1} d\nu' (\nu' - 20.1) \left[ \mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \mathcal{G}_1(\nu', m_e, T) \right] + \right. \\ & + \sigma(\nu'_m) \left[ \int_{\nu_1}^T d\nu' \left[ \mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \mathcal{G}_1(\nu', m_e, T) \right] + \int_T^{T+2m_e} d\nu' \left[ \mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{G}_2(\nu', m_e, T) \right] + \int_{T+2m_e}^{100 \text{ MeV}} d\nu' \left[ \mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \mathcal{G}_3(\nu', m_e, T) \right] \right] \frac{\nu'}{\nu'^2 + \left( \frac{\nu'^2 - \nu_m'^2}{\pi} \right)^2} \end{aligned}$$

$$100 \text{ MeV} \leq T$$

$$\begin{aligned} \frac{T_0(\nu)_{++}^c}{M} = & \frac{4m_e}{\pi^2} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ A \int_{20.1 \text{ MeV}}^{\nu_1} d\nu' (\nu' - 20.1) \left[ \mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{G}_1(\nu', m_e, T) \right] + \sigma(\nu'_m) \int_{\nu_1}^{100 \text{ MeV}} d\nu' \left[ \mathcal{H}(\nu', m_e, T) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{G}_1(\nu', m_e, T) \right] \frac{\nu'}{\nu'^2 + \left( \frac{\nu'^2 - \nu_m'^2}{\pi} \right)^2} \right\} \end{aligned}$$

T(MeV)	$T_0(2\gamma)_{H/M}^S$ (MeV <sup>-1</sup> )	T(MeV)	$T_0(2\gamma)_{H/M}^S$ (MeV <sup>-1</sup> )
0	-1.97x10 <sup>-9</sup>	50	-7.44x10 <sup>-6</sup>
2	-3.35x10 <sup>-8</sup>	55	-7.80
4	-8.58	60	-8.11
6	-1.82x10 <sup>-7</sup>	65	-8.39
8	-3.11	70	-8.63
10	-4.78	75	-8.83
12	-6.83	80	-9.01
14	-9.30	85	-9.15
16	-1.23x10 <sup>-6</sup>	90	-9.27
18	-1.57	95	-9.35
20	-2.00	100	-9.40
25	-4.15	120	-9.37
30	-5.17	140	-9.14
35	-5.94	160	-8.72
40	-6.54	180	-8.07
45	-7.01	200	-7.15

Tabla 4

## BIBLIOGRAFIA

- (AS) ABRAMOWITZ - SEGUN  
"Handbook of Mathematical Functiones" (Dover Publ.,  
1968)
- (AH75) AHRENS et al.  
Nucl. Phys. A251 (1975), 479
- (AR74) ARKATOV et. al.  
Sov. J. Nucl. Phys. 19 (1974), 598
- (BT68) BARDEEN - TUNG  
Phys. Rev. 173 (1968), 173
- (BE82) BEHREND et al.  
Cello Collaboration DESY 82-080 (1982)
- (BE72) BERNABEU-ERICSON  
Phys. Lett. 42B (1972), 93
- (BE83) BERNABEU-ERICSON  
Z.Phys. A 309 (1983), 213
- (BE74) BERNABEU-ERICSON-FERRO FONTAN  
Phys. Lett. 49B (1974), 381
- (BJ73) BERNABEU-JARSLKOG  
Nucl. Phys. B60 (1973), 347
- (BJ74) BERNABEU-JARLSKOG  
Nucl. Phys. B75 (1974), 59
- (BJ76) BERNABEU-JARLSKOG  
Phys. Lett. 60B (1976), 197
- (BP80) BERNABEU-PEÑARROCHA  
Phys. Rev. D22 (1980), 1082
- (BP81) BERNABEU-PEÑARROCHA  
Ann. of. Phys. 135 (1981), 321

- (BP81a) BERNABEU-PEÑARROCHA  
Nucl. Phys. A358 (1981), 375c
- (BR81) BERNABEU-ROSA CLOT  
Nuevo Cimiento A, 65 (1981), 87
- (BT75) BERNABEU-TARRACH  
Phys. Lett. 55B (1975), 183
- (BC72) BOTTINO-CIOCHETTI  
Nucl. Phys. A178 (1972), 593
- (CG57) CHEW-GOLBERGER-LOW-NAMBU  
Nuevo Cimiento A, 56 (1975), 1337
- (DG70) DAMASHEK-GILMAN  
Phys. Rev. D1 (1970), 1319
- (EG) EISENBERG-GREINER  
"Nuclear Models" (North Holland, 1970)
- (EH70) ELITZUR -HARARI  
Ann. Phys. 56 (1970), 81
- (EH72) ERICSON-HUFNER  
Nucl. Phys. B47 (1972), 205
- (FE49) FEYNMAN  
Phys. Rev. 76 (1949), 769
- (FR76) FRIAR  
Nucl. Phys. A257 (1976), 403
- (FR77) FRIAR  
Phys. Rev. C16 (1977), 1540
- (FR74) FRIAR-ROSEN  
Ann. of. Phys. 87 (1974), 289
- (GT48) GOLDHABER-TELLER  
Phys. Rev. 74 (1948), 1076

- (G074) GOURDIN  
Phys. Rep. 11C (1974), 31
- (GR) GRADSHTEYN-RYZHIK  
"Table of Integrals series and products"  
(Academia Press , 1965)
- (GH1) GROBNER-HOFREITER  
"Unbestimmte Integrale." (Springer Verlag, 1965)
- (GH2) GROBNER-HOFREITER  
"Bestimmte Integrale" (Springer Verlag, 1961)
- (HK76) HENLEY-KREJS-WILETS  
Nucl. Phys. A256 (1976), 349
- (HO) HORNYAK  
"Nuclear Structure" (Academic Press, 1975)
- (JR) JAUCH-ROHRLICH  
"The theory of photons and electrons" (Springer  
Verlag, 1976)
- (MA58) MANDELSTAM  
Phys. Rev. 112 (1958), 1344
- (MS) MARTIN-SPEARMAN  
"Elementary particle theory" (North Holland,  
1970)
- (NO83) NOZAKI.  
DESY 83-011 (1983)
- (OL82) OLSSON XVII Rencontre de Moriond.  
DESY F11-82-02 (1982)

- (PT74) PASCUAL-TARRACH  
QCD: "Renormalization for Practitioner" (Springer  
Verlag, 1984)
- (QU68) QUARATI  
Nucl. Phys. A115 (1968), 651
- (RI76) RINKER  
Phys. Rev. A14 (1976), 18
- (RO80) ROSENFELDER  
Ann. of. Phys. 128 (1980), 188
- (RO82) ROSENFELDER  
Nucl. Phys. A377 (1982), 518
- (RO83) ROSENFELDER  
Nucl. Phys. A393 (1983), 301
- (RO) ROY  
"Theory of Lepton-Hadron processes at High Energies"  
(Clarendon Press, 1975)
- (SA82) SAXON  
Lectures given at the 12<sup>th</sup> British Summer  
School in Theoretical Physics. RL 82-096 (1982)
- (SM76) SICK-Mc CARTNEY-WHITNEY  
Phys. Lett. 64B (1976), 33
- (WE75) WEST  
Phys. Rep. C18 (1975), 270
- (YN) YNDURAIN  
"Lectures on deep inelastic and asymptotic freedom"  
(GIFT, 1978)
- (ZE72) ZEE  
Phys. Rep. 3C (1972), 129

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha,  
acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de  
D. José Manuel BORDES VILLAGRASA  
la calificación de Sobresaliente "CUM LAUDE"  
Valencia, a 28 de Febrero de 1985

El Presidente

*José Manuel*

El Secretario,

*Duamacha*