

tesis N^o 143

Universitat de València

Departamento de Física Teórica

**HIDRODINAMICA RELATIVISTA
NUMERICA: APLICACIONES AL
COLAPSO ESTELAR**

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA CIÈNCIES
N ^o Registre <u>24907</u>
DATA <u>18-04-2006</u> ..
SIGNATURA
<u>119477247</u>
N ^o LÍBIS:

24 cms

Memoria presentada por
José María Martí Puig
para optar al grado
de Doctor en Física

Burjassot, Septiembre 1991



UMI Number: U607722

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607722

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

José M^a. Ibáñez Cabanell, Profesor Titular del Departamento de Física Teórica de la Universitat de València,

CERTIFICA:

Que la presente Memoria: *Hidrodinámica Relativista Numérica: Aplicaciones al Colapso Estelar*, ha sido realizada en el Departamento de Física Teórica de la Universitat de València, bajo mi dirección por José M^a Martí Puig, y constituye su Tesis Doctoral para optar al Grado de Doctor en Física.

Y para que así conste, firmo el presente Certificado en Valencia, a 16 de Septiembre de 1991.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'J. M. Ibáñez', with a large, sweeping flourish underneath.

A Carmen y a José. A Ester.

Agradecimientos

La presente Memoria constituye el resumen de la labor desarrollada por mí durante los últimos años en el seno del Departamento de Física Teórica. En este tiempo, he profundizado en la amistad con José M^a Ibáñez, quien me propuso el trabajo y del que, además, ha sido director. A él, en primer lugar, quiero expresar mi gratitud por su apoyo, dedicación y paciencia permanentes.

Mi agradecimiento es extensivo a todas las personas e instituciones que han hecho posible la realización de este trabajo: a Juan A. Miralles, además de por su amistad, por su colaboración decisiva en diferentes momentos; al Departamento de Física de la Universidad de las Islas Baleares, en el que se ha efectuado una parte de los cálculos, por su acogida durante mis estancias en estos años, y muy especialmente a Carles Bona y Joan Massó, de dicho departamento, en colaboración con los cuales he desarrollado parte de este trabajo; a Antonio Marquina y Rosa Donat, del Departamento de Matemática Aplicada y Astronomía de esta Universidad por el interés mostrado en todo momento, así como por su ayuda en la comprensión de las técnicas numéricas empleadas; a Rosa Donat, además, le agradezco la atenta lectura de una parte del manuscrito y sus comentarios; a Ewald Müller, del Max Planck Institut für Astrophysik, por el seguimiento que ha efectuado de mi trabajo a lo largo de diferentes etapas.

Por último, agradezco a Nicasio y a M^a Luisa su apoyo desinteresado a la investigación.

Índice

Agradecimientos	vii
Índice	ix
1 Introducción	1
1.1 Escenarios físicos y astrofísicos	1
1.2 Relatividad Numérica y estudio de las ondas gravitacionales	6
1.3 Uso de técnicas shock-capturing modernas	7
1.4 Propósito del trabajo y organización de la memoria	8
2 Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación	11
2.1 Definiciones	11
2.2 Problema de Cauchy. Soluciones débiles	12
2.3 Caracterización de las soluciones débiles admisibles: ondas de choque y rarefacciones	16
2.4 Problema de valores iniciales discontinuos (Problema de Riemann)	20
3 Técnicas numéricas de alta resolución modernas para sistemas hiperbólicos de leyes de conservación	25
3.1 Introducción	25
3.2 El método original de S. K. Godunov	31
3.3 Resolvedores de Riemann aproximados	37
3.4 Técnicas shock-capturing y de alta resolución modernas para ecuaciones escalares.	41
3.5 Extensión a sistemas	47

4	Aplicación a la dinámica de fluidos	51
4.1	Dinámica de fluidos clásica en presencia de gravedad y simetría esférica	51
4.2	Códigos en diferencias finitas clásicos para la dinámica de fluidos relativistas.	54
4.3	Las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativistas como sistema hiperbólico	66
4.4	Aplicación de las técnicas de alta resolución modernas . .	69
5	Experimentos Numéricos en Relatividad Especial	75
5.1	Las ecuaciones de la dinámica de fluidos en Relatividad especial y simetría plana	75
5.2	El problema de Sod relativista	
5.3	Propagación de una onda de detonación relativista	79
5.4	Reflexión de una onda de choque	85
6	Acreción esférica sobre objetos compactos	99
6.1	Introducción	99
6.2	Flujo geodésico	102
6.3	Acreción radial de un fluido perfecto	107
7	Colapso estelar	117
7.1	Introducción	117
7.2	Modelo inicial y ecuación de estado	122
7.3	Colapso estelar newtoniano. Comparación con técnicas de viscosidad artificial standard	123
7.3.1	Colapso de polvo	123
7.3.2	Detección del γ_{crit} consistente con el modelo inicial .	123
7.3.3	Comparación con técnicas de viscosidad artificial standard	125
7.4	Colapso estelar relativista	131
7.4.1	Las ecuaciones de conservación de Einstein como un sistema de leyes de conservación	131
7.4.2	Colapso de polvo	135
7.4.3	Evolución dinámica de la configuración inicial de equilibrio	135
7.4.4	Evolución dinámica hacia una configuración de equilibrio	137
7.4.5	Colapso estelar relativista	141

ÍNDICE	xi
Conclusiones y Perspectivas	147
Apéndice	151
Referencias	159

Capítulo 1

Introducción

El término *dinámica de fluidos relativistas* se refiere tanto a los flujos en los que el factor de Lorentz, $W (= (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}})$, excede la unidad de forma apreciable (v es la velocidad del fluido en unidades de la velocidad de la luz¹) o a aquellos en los que el campo gravitatorio *background* o el generado por la materia misma, son tan importantes que su descripción debe hacerse en términos de la teoría de la gravitación de Einstein.

1.1 Escenarios físicos y astrofísicos.

La dinámica de fluidos relativistas tiene un papel importante en diferentes campos de la Física y la Astrofísica, como son la Física de Plasmas, la Física Nuclear, la Astrofísica y la Cosmología.

En el terreno de la Física de Plasmas, se han llegado a obtener en el laboratorio ondas de choque magnetoacústicas con velocidades de hasta $4 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$ (Taussig, 1973).

Ya en el campo de la Física Nuclear, el uso de la dinámica de fluidos para describir la colisión de materia hadrónica comienza con los trabajos de Fermi, de Pomeranchuk y de Landau en los años 50, quienes intentaron describir el *scattering* protón-protón y la consiguiente producción de piones usando conceptos estadísticos e hidrodinámicos (ver Strottman, 1989 y las referencias citadas allí). En la actualidad, se simulan colisiones entre núcleos pesados usando la dinámica de fluidos relativistas sin disipación. La materia nuclear se describe mediante las

¹En todo esta Memoria se han utilizado, salvo que se diga explícitamente otra cosa, unidades geometrizadas, para las que $G = c = 1$.

ecuaciones de la dinámica de fluidos relativistas y los detalles de las interacciones nucleares se incorporan en la ecuación de estado (Clare y Strottman, 1986). La aproximación dada por la dinámica de fluidos relativistas que se fundamenta esencialmente en las leyes básicas de conservación de la masa, el momento y la energía, parece bastante adecuada si tenemos en cuenta el desconocimiento que existe en torno a la dinámica nuclear. Sin embargo, no resulta evidente *a priori* la validez de los cálculos hidrodinámicos para la descripción de las reacciones de iones pesados. Un análisis de las condiciones necesarias indica que sólo se verifican de forma parcial. Por ejemplo, el número de partículas involucradas en una colisión entre iones pesados varía entre 100 y 1000, por lo que el número de grados de libertad es grande comparado con 1, pero relativamente pequeño cuando lo comparamos con un fluido usual.

Es necesaria también la condición de que el tiempo que dura la colisión sea suficientemente grande como para que se pueda establecer el equilibrio termodinámico local. Esta condición también se verifica de forma marginal. Un límite inferior del tiempo de colisión para dos iones pesados puede estimarse de forma grosera como el diámetro del núcleo dividido por la velocidad de la luz, o sea, unos $5 \cdot 10^{-23}$ s. Los nucleones interactúan intercambiando piones y se necesitan alrededor de $5 \cdot 10^{-24}$ s para que dos nucleones adyacentes intercambien un pion. Como este tiempo de interacción es alrededor de una décima del tiempo total de la colisión, puede pensarse que se habrá alcanzado un cierto nivel de equilibrio local. Esto es particularmente cierto para colisiones centrales de núcleos grandes.

Finalmente, es bastante realista tratar los nucleones como partículas clásicas en el régimen de energías en que se trabaja. Para nucleones relativistas su momento es mayor que 1 GeV^2 y su correspondiente longitud de onda de De Broglie es 0.4 fm , menor que el radio del nucleón y mucho menor que el radio del núcleo.

En las colisiones de núcleos pesados, la velocidad relativa de los núcleos es supersónica. Por tanto, se espera que se produzcan ondas de choque (Sobel *et al.*, 1975). Por otro lado, las ondas de choque relativistas podrían estar relacionadas con la transición de fase de la

²Por otro lado, el carácter ultrarrelativista de la colisión entre iones pesados queda de manifiesto teniendo en cuenta que para una colisión entre dos núcleos de igual masa con energías de 5 GeV/nucleon en el sistema de centro de masas, la velocidad de los núcleos es de 0.987 en el sistema centro de masas o de 0.99992 en el sistema laboratorio.

materia nuclear al plasma de quarks y gluones (Clare y Strottman, 1986).

Modelos de fluidos relativistas se han usado también en Cosmología para describir la evolución de las perturbaciones en la densidad del medio cósmico, en teorías de formación de galaxias (Peebles, 1980).

En Astrofísica, los fluidos relativistas aparecen en escenarios muy variados, como pueden ser el colapso estelar de estrellas masivas que precede a las explosiones de supernovas de tipo II, o los escenarios de acreción sobre objetos compactos en sistemas binarios (las llamadas *fuentes compactas de rayos X*). A nivel extragaláctico, el escenario más común lo constituyen las fuentes compactas de radio asociadas a núcleos de galaxias activos y los *jets* que desarrollan.

En el caso del colapso estelar, se alcanzan velocidades superiores al 15% de la velocidad de la luz, y por otra parte, los efectos de Relatividad General son importantes, habiendo sido señalados por varios autores (ver el Capítulo 7 de este Memoria y las referencias citadas allí).

Entre los alrededor de 100 objetos en sistemas binarios que emiten en rayos X, existen al menos 3 que poseen jets: Sco X-1, Cyg X-3, SS433. En un sistema binario, el material capturado forma alrededor de éste un disco de acreción. La fuente primaria de energía es la energía gravitacional liberada por la masa acretada, desde la estrella compañera hasta la superficie del objeto compacto:

$$L_X \sim \frac{M_X \dot{M}_X}{R_X^2}$$

siendo M_X la masa del objeto compacto (en el caso de una estrella de neutrones, $M_X \sim 1.5 M_\odot$) y R_X su radio (de nuevo, en el caso de una estrella de neutrones, $R_X \sim 10 \text{ km}$). \dot{M}_X representa la masa acretada por la fuente de rayos X procedente de la compañera, que es del orden de $10^{-8} M_\odot/\text{año}$, valor típico para la pérdida de masa en una estrella gigante roja. Todo ello da un valor para la luminosidad por rayos X de la fuente que es del orden de $L_X \sim 10^{38} \text{ erg/s}$. En el caso de que el objeto central sea un agujero negro en lugar de una estrella de neutrones (como es el caso de Cyg X-1 o LMC X-3) debe emitirse una cantidad de energía por unidad de masa comparable a la anterior antes de que ésta cruce el horizonte de sucesos en $R_S = 2M_X$.

En una fuente ordinaria de rayos X como, por ejemplo, Her X-1, el ritmo de acreción es pequeño y la energía puede liberarse en forma de rayos X. Sin embargo, para ritmos de acreción suficientemente grandes

la luminosidad por rayos X supera el llamado *límite de Eddington*, en el que la presión de radiación sobre los electrones libres equilibra la fuerza de la gravedad asociada a la materia bariónica:

$$L_{Edd} = \frac{4\pi M_X m_p}{\sigma_T} \simeq 1.3 \cdot 10^{38} \left(\frac{M_X}{M_\odot} \right) \text{ erg/s}$$

(ver, por ejemplo, Rees, 1984). En la expresión anterior m_p es la masa del protón y σ_T , la sección eficaz del scattering Thompson. En estos casos, parte de la materia acretada es eyectada en un flujo bipolar a lo largo del eje de rotación del objeto compacto (ver, por ejemplo, Ögelman, 1987). Esto es lo que parece que ocurre en las fuentes Sco X-1, Cyg X-3 y SS433.

En Sco X-1 se han observado variaciones en las componentes extensas de la fuente entre el 10 – 30% en escalas de tiempo del orden del año. Si se supone que estas variaciones son causales, la velocidad del material que fluye en el jet debe ser de 0.5 (Geldzahler y Fomalont, 1985).

En el caso de Cyg X-3, la velocidad de expansión del jet alcanza 0.35 (Spencer y Johnston, 1986).

SS433 es el único objeto galáctico que muestra jets en todas las longitudes de onda. Su espectro óptico tiene algunas peculiaridades. Aparte de las líneas de emisión intensas y anchas pertenecientes a la serie de Balmer y al He I en sus longitudes de onda correspondientes, dicho espectro contiene líneas en longitudes de onda no familiares. Estas líneas fueron interpretadas más tarde como líneas de Balmer y He I, desplazadas por efecto Doppler, de dos haces de plasma relativista, dirigidos opuestamente y en precesión, moviéndose con una velocidad de 0.26 (Liebert, *et al.*, 1979).

En los tres casos comentados, el objeto compacto podría ser una estrella de neutrones, aunque en el caso de SS433 se especula con la posibilidad de que se trate de un agujero negro.

Sin embargo, la evidencia observacional más interesante sobre la existencia de flujos relativistas lo constituyen las fuentes de radio compactas y los jets asociados a núcleos de galaxias activos. En lo referente a las fuentes compactas, las variaciones rápidas observadas en la densidad de flujo en radio, interpretadas como nubes en expansión, lleva a la asignación de movimientos aparentes *superlumínicos* (Kellermann y Pauliny-Toth, 1981). Existen numerosas fuentes con componentes superlumínicas hasta escalas de 10^{-2} arc sec con velocidades aparentes entre 5

y 50 veces la velocidad de la luz (entre ellas, por ejemplo, 3C120, 3C273, 3C279, 3C345; ver la referencia anterior; 3C395, Simon *et al.*, 1988).

La interpretación más extendida de estos movimientos aparentes superlumínicos está basada en movimientos de conjunto relativistas³. La velocidad transversal aparente, v_{\perp} , de un objeto que mueve con velocidad real v viene dada por (Ginzburg y Syrovatskii, 1969):

$$v_{\perp} = v \sin \theta / (1 - v \cos \theta),$$

donde θ es el ángulo entre el movimiento y la línea visual. Para movimientos relativistas y ángulos θ pequeños ($\sin \theta \sim \frac{1}{W}$), v_{\perp} alcanza un valor (máximo) de $v_{\perp} = Wv$, lo que da cuenta de los movimientos aparentes superlumínicos. En general, un movimiento con $W \sim 10$ ($v \sim 0.995$) sirve para interpretar adecuadamente dichas velocidades, aunque en algunos casos hay que llegar a factores de Lorentz del orden de $W \sim 100$ ($v \sim 0.9999$).

Existe una continuidad entre la fuente compacta de radio, los jets y la componente extensa (lóbulos) (Rees, 1984). Como ya se ha comentado, las fuentes compactas superlumínicas indican flujos a velocidades próximas a la de la luz, pero no está claro si todas las radiofuentes compactas generan jets relativistas, o si la alta velocidad persiste a lo largo de toda su longitud o si los efectos disipativos irán frenando el material. En principio, parece que las fuentes potentes desarrollarían jets de elevado número de Mach y baja disipación, manteniendo velocidades próximas a la de la luz durante cientos de kpc, mientras que en las fuentes menos luminosas el flujo sería más lento y disipativo.

La simulación numérica de todos los escenarios descritos involucra la resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista e incluso de la magnetohidrodinámica. Así, las simulaciones de jets deberían realizarse resolviendo las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en el límite de relatividad restringida y simetría axial. En el caso del estudio de la acreción sobre objetos compactos (cuyo interés radica, por un lado, en que quizá la detección de agujeros negros sólo sea posible mediante la determinación de características observacionales distintivas de estos objetos en sistemas binarios, y por otro en que dichos fenómenos se encuentran en la base de los procesos de generación de energía en núcleos de galaxias activos y jets), se resuelven las ecuaciones de la hidrodinámica

³Otros mecanismos, como el efecto lente gravitacional, mediante los que se pretende explicar este fenómeno han sido recogidos por Scheuer (1984).



relativista en simetría esférica o axial en una métrica background⁴. Por último, en escenarios como el colapso estelar y las explosiones de supernovas de tipo II, en donde el campo gravitatorio generado por la materia estelar misma es relevante, las ecuaciones de la hidrodinámica relativista se resuelven en paralelo con las de Einstein (hasta el momento en simetría esférica o axial).

1.2 Relatividad Numérica y estudio de las ondas gravitacionales.

La resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista es un ingrediente fundamental de los códigos de *Relatividad Numérica*, cuyo objetivo primordial es la resolución autoconsistente de las ecuaciones de Einstein y la consiguiente construcción de soluciones numéricas.

Hasta 1975, los estudios se restringían a sistemas en simetría esférica (May y White, 1967; Matsuda y Sato, 1969). En ese año, Smarr (1975), calculó la colisión de dos agujeros negros en ausencia de materia. Este trabajo fue el primero en generar numéricamente un espacio-tiempo no estático y no esférico, dando lugar al nacimiento de la Relatividad Numérica. Desde entonces, se han abordado diversos problemas que podrían ser englobados en: i) la determinación de la estructura final del espacio-tiempo tras el colapso estelar (comprobación de la hipótesis de la *censura cósmica*); ii) las explosiones de supernovas tipo II; iii) la estimación de la radiación gravitacional emitida en diferentes procesos; iv) Cosmología numérica.

Por otro lado, la próxima puesta en marcha de los detectores de ondas gravitacionales basados en interferometría láser (Drever *et al.*, 1985) ha relanzado el interés por el cálculo realista de la radiación gravitacional procedente de diversas fuentes astrofísicas (colisiones estelares, etapas finales de la fusión orbital de estrellas de neutrones, colapso estelar no

⁴En un flujo de acreción, el despreñar la autogravedad del fluido está justificado, ya que, por ejemplo, un agujero negro acreta materia en el límite de Eddington:

$$\dot{M}_{Edd} \equiv \frac{L_{Edd}}{c^2} = 1.4 \cdot 10^{17} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) [gs^{-1}],$$

necesita unos 10^8 años para doblar su masa, lo que significa que en cualquier instante la masa del fluido que rodea al agujero sólo representa una pequeña parte de la masa de éste.

esférico,...)⁵.

En este sentido, el trabajo realizado y que se resume en la presente Memoria, se enmarca en una colaboración entre los grupos de Astrofísica del Departamento de Física Teórica de la Universidad de Valencia y el de Relatividad del Departamento de Física de la Universidad de las Islas Baleares, financiado por la CICYT desde 1988, con el objetivo a medio y largo plazo de construir un código de Relatividad Numérica capaz de describir diversas fuentes de radiación gravitacional, entre ellas el colapso estelar no esférico, y en la que Valencia tiene la responsabilidad de resolver las ecuaciones de la hidrodinámica relativista. La última parte del Capítulo 7 de esta Memoria resume los resultados más recientes obtenidos en esta dirección.

1.3 Uso de técnicas shock-capturing modernas.

La resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista se ha abordado mediante las llamadas *técnicas shock-capturing modernas*⁶ (de ahora en adelante, TSCM). Para ello nos hemos basado en su carácter hiperbólico. La propiedad fundamental de este tipo de técnicas es la utilización de soluciones locales del problema de Riemann con el objeto de tratar consistentemente las ondas de choque.

En el caso de la dinámica de fluidos clásica, el uso de este tipo de técnicas en la simulación de procesos astrofísicos se ha generalizado, desplazando por completo a las que usaban la viscosidad artificial en la descripción de las ondas de choque. En el caso de la dinámica de fluidos relativistas, la necesidad de la presente extensión ha sido sugerida por diversos especialistas (Hawley, Smarr y Wilson, 1984; Norman y Winkler, 1986) y parece imprescindible para el tratamiento preciso de flujos *ultrarelativistas* ($W \geq 2$). Hasta el momento, dicha extensión no se había llevado a cabo debido probablemente a la *inercia* existente en los grupos a cambiar la estructura de los antiguos códigos con viscosi-

⁵En Schutz (1990) puede encontrarse un resumen reciente de las características de los proyectos de detectores de ondas gravitacionales, así como una discusión sobre la frecuencia en la observación y la amplitud de la señal para los procesos astrofísicos más significativos.

⁶Las definiciones precisas de todos los conceptos que aparecen en esta Sección se darán en los Capítulos posteriores.

dad artificial, pero en la actualidad la diferencia en la calidad de los resultados obtenidos mediante una y otra técnicas es tan grande que las TSCM acabarán imponiéndose en los cálculos de dinámica de fluidos relativistas. En este punto, el trabajo aquí expuesto puede considerarse pionero.

1.4 Propósito del trabajo y organización de la Memoria.

Ya he comentado que el trabajo efectuado se enmarca en el seno de una colaboración que tiene como uno de sus principales objetivos el desarrollo de un código de Relatividad Numérica multidimensional. En este sentido, presento aquí los resultados obtenidos hasta el momento correspondientes a la resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en una dimensión espacial.

Además, y como resultado fundamental, hemos logrado extender las TSCM a la resolución de estas ecuaciones, basándonos en su carácter hiperbólico.

Con todo esto, la organización de la presente Memoria es la que sigue. En el Capítulo 2 se introduce la teoría de los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación.

El Capítulo 3 presenta una visión de las técnicas que se usan para resolver los sistemas anteriores. En la Introducción de dicho Capítulo se plantea la necesidad de desarrollar una teoría de los métodos shock-capturing y se explica brevemente la técnica de la viscosidad artificial comentando sus limitaciones. A continuación, en las Secciones 2, 3, 4 y 5 se exponen las bases de lo que podríamos llamar la teoría moderna de las técnicas shock-capturing, prestando especial atención a las técnicas específicas que se usarán en la obtención de resultados.

El Capítulo 4 está dedicado a la extensión de estas técnicas a la resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista. La Sección 1 presenta, a modo de introducción, la aplicación de estas técnicas a la resolución de las ecuaciones de la dinámica de fluidos clásica en presencia de gravedad y simetría esférica, que se han usado en los cálculos de colapso newtoniano que presentamos en la primera parte del Capítulo 7. En la Sección 2 presentamos un repaso de los códigos en diferencias finitas clásicos para la dinámica de fluidos relativistas, basados todos ellos en la aplicación de la viscosidad artificial para la descripción de las

ondas de choque y definimos la llamada *formulación de Wilson*, que constituye el fundamento de los códigos en diferencias finitas. En la Sección 3 presentamos las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativistas como sistema hiperbólico sentando las bases para la aplicación (a través de lo que en esta Memoria hemos llamado *nuestra formulación*) de las TSCM a este sistema de ecuaciones.

Los Capítulos 5, 6 y 7 recogen los resultados obtenidos. En el Capítulo 5 se presentan diversas aplicaciones en Relatividad Especial y simetría plana: el problema de Sod relativista, la propagación de una onda de detonación relativista y la reflexión de una onda de choque. Todas ellas involucran la propagación de ondas de choque fuertes y las dos últimas la presencia de flujos ultrarrelativistas. En particular, en el problema de la reflexión de una onda de choque hemos descrito flujos con velocidad $v = 0.9999$ (usando el método de Marquina (1991)).

El Capítulo 6 contiene diversos resultados en el problema de la acreción esférica sobre objetos compactos. En particular, en la última Sección exponemos los resultados obtenidos en la propagación de ondas de choque fuertes en presencia de campos gravitatorios intensos.

Finalmente, el Capítulo 7 está dedicado al colapso estelar. En su Introducción, y tras un breve repaso a la teoría del colapso estelar, planteamos el interés que puede tener el desarrollo de un código basado en las TSCM en la descripción del colapso en Relatividad General. Interés que queda de manifiesto en la Sección 3 cuando presentamos las diferencias en los resultados obtenidos en la descripción del colapso estelar newtoniano mediante una TSCM y otra que usa la viscosidad artificial. La Sección 4 de este Capítulo recoge los resultados más recientes (todavía muy preliminares) obtenidos con dicho código. En particular se presentan algunos tests en los que evoluciona tanto la geometría como las variables hidrodinámicas.

Capítulo 2

Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

2.1 Definiciones.

Comenzamos este Capítulo introduciendo algunas definiciones básicas.

Sea Ω un abierto de \mathfrak{R}^p . Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales es *cuasilineal* si puede escribirse en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}^{(i)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \mathbf{0}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (2.1)$$

en donde

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^p)^T \quad (2.2)$$

es una función vector-valuada de $\mathfrak{R}^d \times [0, \infty[$ en Ω , y las $\mathbf{A}^{(i)}$ son d matrices $p \times p$ funciones de \mathbf{u} .

Si las matrices $\mathbf{A}^{(i)}$ son constantes, entonces el sistema es lineal.

Un sistema cuasilineal es *hiperbólico en la dirección temporal* (Courant y Hilbert, 1953) si el problema de valores propios:

$$\left(\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{u})n_i - \lambda \mathbf{I} \right) \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

(donde \mathbf{n} es un vector unitario arbitrario de \mathfrak{R}^d e \mathbf{I} es la matriz identidad) tiene p valores propios $\lambda^{(i)}$ reales ¹, y el correspondiente conjunto de

¹En lo que sigue, cuando hablemos de los valores propios correspondientes a la matriz de coeficientes de un sistema hiperbólico, los supondremos ordenados en sentido creciente: $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots \leq \lambda^{(p)}$.

vectores propios, $\mathbf{d}^{(i)}$, forman una base del espacio euclídeo \mathfrak{R}^p . (Si además los valores propios son todos distintos, el sistema de ecuaciones es *estrictamente hiperbólico*).

De acuerdo con esta definición, las ecuaciones de la dinámica de fluidos newtoniana forman un sistema estrictamente hiperbólico (ver, por ejemplo, Richtmyer y Morton, 1967). Además, los valores propios $\lambda^{(i)}$ se corresponden con las velocidades de propagación de las perturbaciones en el fluido (ver, por ejemplo, Zel'dovich y Raizer, 1966).

Por último, un sistema cuasilineal constituye además un *sistema de leyes de conservación* si existen d funciones diferenciables de $\mathbf{u} \in \Omega$ en \mathfrak{R}^p , $\mathbf{F}^{(k)}$ tales que $\mathbf{A}^{(k)}$ son sus correspondientes matrices jacobianas:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}. \quad (2.4)$$

En términos de estas funciones (denominadas *flujos*), el sistema (2.1) se escribe:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{u})}{\partial x^k} = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

de forma que expresa la conservación de las cantidades \mathbf{u} : si D es un dominio arbitrario de \mathfrak{R}^d y $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)^T$, el vector unitario normal a ∂D en cada punto, a partir de (2.5) se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_D \mathbf{u} dx + \int_{\partial D} \mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{u}) n_k ds = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

(ecuación de *balance*), que implica que la variación temporal de $\int \mathbf{u} dx$ en el dominio D es igual al flujo a través de su frontera, ∂D .

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos newtoniana, como expresión de la conservación de la masa, el momento y la energía, forman un sistema de leyes de conservación en el sentido de Lax (1973).

En lo que sigue, nos ceñiremos al estudio de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de leyes de conservación estrictamente hiperbólicos.

2.2 Problema de Cauchy. Soluciones débiles.

Estudiar la evolución en el tiempo de las cantidades \mathbf{u} consiste en resolver el problema de valores iniciales (*problema de Cauchy*) de encontrar una función $\mathbf{u} : (\mathbf{x}, t) \in \mathfrak{R}^d \times [0, \infty[\rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \Omega$, solución de (2.5) y que satisfaga la condición inicial:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^d, \quad (2.7)$$

donde $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega$ es una función dada. Lax (1973) ha demostrado que este problema tiene como máximo una solución *clásica* (solución de clase C^1 que satisface (2.5), (2.7), punto a punto).

Una característica fundamental de este problema es que, en general no existen soluciones clásicas del sistema (2.5), (2.7) a partir de un cierto tiempo (finito), incluso aunque la condición inicial (2.7) sea una función suave. Para ilustrar este hecho, consideremos una ley escalar de conservación en una única dimensión espacial ($p = d = 1$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (2.8)$$

con

$$a(u) = \frac{dF}{du}. \quad (2.9)$$

Escrita la ecuación (2.8) en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

pone de manifiesto el hecho de que u es constante a lo largo de las trayectorias $x = y(t)$ que verifican:

$$\frac{dy}{dt} = a(u(y(t), t)). \quad (2.11)$$

Las trayectorias $y(t)$ que satisfacen (2.11), reciben el nombre de *curvas características* (o, simplemente, *características*)² y, como acabamos de ver, transportan el valor de u desde el dato inicial. La función $a(u)$ recibe el nombre de *velocidad de la señal*. La constancia de u a lo largo de las características junto con la condición (2.11), muestran que las características se propagan con velocidad constante, es decir, que son líneas rectas, cuyas pendientes dependen de los datos iniciales.

La Figura (2.1) muestra la solución de la ecuación lineal de transporte

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

en $t > 0$, para el dato inicial:

²Para el caso de un sistema de p leyes de conservación en una dimensión espacial, existen p campos característicos, que se definen a partir de las expresiones:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda^{(i)}(u(y(t), t)), \quad 1 \leq i \leq p,$$

siendo $\{\lambda^{(i)}\}_{i=1}^p$ los valores propios de la matriz jacobiana del sistema.

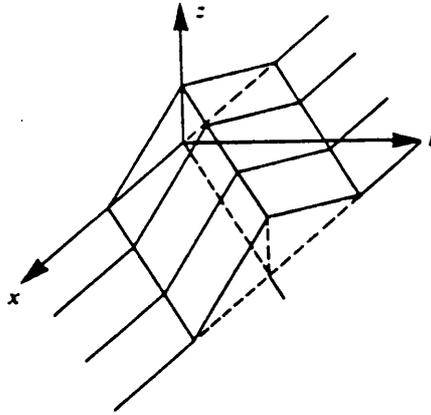


Figura 2.1: Evolución temporal de la solución para la ecuación lineal de transporte (2.12), con el dato inicial que aparece en el texto. La solución se propaga siguiendo las líneas $x = t + \text{constante}$ (de Street, 1973).

$$z_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| > 1 \\ 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Para esta ecuación, las características vienen dadas por las funciones

$$x - t = \text{cte.} \quad (2.13)$$

y son líneas paralelas. La solución en $t > 0$, $z(x, t)$, se corresponde con el valor $z_0(x - t)$, transportado a lo largo de la característica.

Para ecuaciones no lineales, se ve fácilmente que si $a(u_0(x))$ no es una función creciente de x , hay un tiempo t , a partir del cual no existe ninguna función $u(x, t)$ con condición inicial u_0 que resuelva (2.10) en el sentido clásico. En efecto, consideremos por ejemplo, la ecuación³:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \left(1 + \frac{3}{2}z\right) \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (2.14)$$

³Esta ecuación describe la propagación de una onda de gravedad en agua poco profunda, cuando la elevación de la superficie del agua, z , respecto de la posición de equilibrio y sus derivadas permanecen pequeñas.

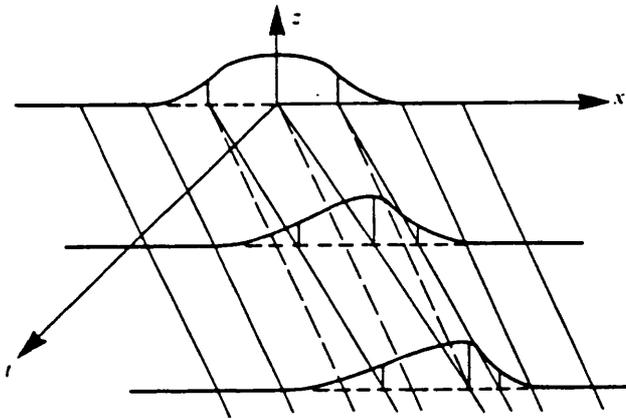


Figura 2.2: Evolución temporal de la solución para la ecuación (2.14), con el dato inicial que aparece en el texto. Con el paso del tiempo, la solución, inicialmente suave, comienza a desarrollar una discontinuidad en la región donde se cruzan las características (de Street, 1973).

con una condición inicial apropiada:

$$z_0(x) = \begin{cases} \varepsilon(1 + \cos x), & \text{si } |x| < \pi, 0 < \varepsilon \ll 1 \\ 0 & \text{si } |x| > \pi. \end{cases}$$

La Figura (2.2) muestra cómo las líneas características convergen en una cierta región. A partir del instante en el que las características se cruzan, la solución deja de ser C^1 .

Para permitir soluciones discontinuas, pues, admitiremos soluciones débiles que satisfagan (2.5), (2.7) en el sentido de la teoría de distribuciones, es decir, que verifican:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F^{(k)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} u(x, 0) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (2.15)$$

para cualquier función φ de clase C^1 con soporte compacto en $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$. La condición anterior es equivalente a requerir que la solución verifique la versión integrada de la ley de conservación (2.5): si D es un dominio

arbitrario de \mathbb{R}^d , y $]t_1, t_2[$ un intervalo cualquiera de tiempo,

$$\left[\int_D \mathbf{u} d\mathbf{x} \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D} \mathbf{F}^{(k)} n_k ds dt = 0. \quad (2.16)$$

Con esto, el conjunto de las soluciones del problema de Cauchy (2.5), (2.7) se ha ampliado con aquellas soluciones \mathbf{u} que son de clase C^1 a trozos⁴, es decir, que son de clase C^1 excepto en un número finito de hipersuperficies, a través de las cuales presentan discontinuidades de salto.

2.3 Caracterización de las soluciones débiles admisibles: ondas de choque y rarefacciones.

Sea Σ una hipersuperficie en el espacio (\mathbf{x}, t) fuera de la cual la solución débil \mathbf{u} es de clase C^1 y a través de la cual \mathbf{u} tiene una discontinuidad de salto. Denotaremos por $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d, r_t)$ un vector normal a la hipersuperficie en cada punto y por \mathbf{u}_+ , \mathbf{u}_- , los límites de \mathbf{u} a cada lado de ella:

$$\mathbf{u}_\pm(\mathbf{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t \pm \varepsilon \mathbf{r}). \quad (2.17)$$

Con estas definiciones puede demostrarse el siguiente Teorema (ver, por ejemplo, Raviart, 1988) que caracteriza las soluciones débiles:

Sea $\mathbf{u}: \mathbb{R}^d \times [0, \infty[\rightarrow \Omega$ una función C^1 a trozos. Entonces, \mathbf{u} es una solución débil de (2.5) si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

1. \mathbf{u} es una solución clásica de (2.5) allí donde es C^1 .
2. \mathbf{u} satisface las *condiciones de salto de Rankine-Hugoniot*⁵:

$$(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)r_t + (\mathbf{F}^{(j)}(\mathbf{u}_+) - \mathbf{F}^{(j)}(\mathbf{u}_-))r_j = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$

a lo largo de las superficies de discontinuidad.

⁴Por construcción, una solución clásica de (2.5), (2.7) es también solución débil. Inversamente, si una solución débil es de clase C^1 , entonces es clásica.

⁵Llamadas así en honor de los investigadores W.J.M. Rankine (1869) y H. Hugoniot (1887) que, en la segunda mitad del siglo pasado, al proponer el carácter continuo de la energía a través de las ondas de choque en la dinámica de gases, fueron los primeros en caracterizar de forma adecuada las discontinuidades en sistemas de leyes de conservación.

En el caso unidimensional ($d = 1$), Σ es una curva que admite la parametrización $(\xi(t), t)$, con lo que:

$$\mathbf{r} = (1, -s), \quad (2.19)$$

$$s = \frac{d\xi}{dt} \quad (2.20)$$

(velocidad de propagación de la discontinuidad). En este caso, las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot (2.18) se escriben:

$$s[\mathbf{u}] = [\mathbf{F}(\mathbf{u})], \quad (2.21)$$

en donde se han introducido las definiciones:

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- \quad (2.22)$$

$$[\mathbf{F}(\mathbf{u})] = \mathbf{F}(\mathbf{u}_+) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_-). \quad (2.23)$$

La consideración de las soluciones débiles plantea el tema de la falta de unicidad para el problema de valores iniciales, lo que implica la necesidad de introducir una condición adicional para determinar la solución físicamente relevante, definida como aquella que es límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de las soluciones \mathbf{u}_ε de las ecuaciones *viscosas*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{u}_\varepsilon)}{\partial x^k} = \varepsilon \Delta \mathbf{u}_\varepsilon. \quad (2.24)$$

En el caso escalar unidimensional, Oleinik (1959) mostró que las discontinuidades de las soluciones físicamente relevantes (*discontinuidades admisibles*) están caracterizadas por las condiciones (*condiciones de entropía*):

1. Para toda u entre u_+ y u_- ,

$$\frac{F(u) - F(u_-)}{u - u_-} \geq s \geq \frac{F(u) - F(u_+)}{u - u_+}. \quad (2.25)$$

2. Para $0 \leq \alpha \leq 1$,

(a) Si $u_+ > u_-$,

$$F(\alpha u_- + (1 - \alpha)u_+) \geq \alpha F(u_-) + (1 - \alpha)F(u_+) \quad (2.26)$$

(la gráfica de F en el intervalo $[u_-, u_+]$ está por encima de la cuerda que pasa por $F(u_-)$, $F(u_+)$).

(b) Si $u_+ < u_-$,

$$F(\alpha u_- + (1 - \alpha)u_+) \leq \alpha F(u_-) + (1 - \alpha)F(u_+) \quad (2.27)$$

(la gráfica de F en el intervalo $[u_+, u_-]$ está por debajo de la cuerda que pasa por $F(u_+)$, $F(u_-)$).

Una discontinuidad que satisface la relación de salto (2.18) y la condición de entropía (2.25) con las desigualdades estrictas recibe el nombre de *onda de choque* (si la condición (2.25) se verifica con los signos de igualdad se habla de *discontinuidad de contacto*).

Para el caso de un flujo estrictamente *convexo* (definido como aquel que verifica $d^2F/du^2 > 0$), la condición (2.25) se transforma en:

$$a(u_-) \geq s \geq a(u_+) \quad (2.28)$$

(en donde $a(u)$ se ha definido según (2.9)), lo que, además es equivalente a:

$$u_- > u_+ \quad (2.29)$$

y la condición (2.27) se verifica de forma trivial. La relación (2.28) tiene una interpretación geométrica: las curvas características a cada lado deben converger a la curva de la discontinuidad.

Para sistemas de leyes de conservación, Lax (1973) ha dado la correspondiente caracterización para las soluciones discontinuas admisibles de (2.5). Además de verificar las condiciones de Rankine-Hugoniot, (2.18), los valores propios, $\lambda^{(i)}$ deben verificar el que *exista* un k , $1 \leq k \leq p$, tal que:

$$\lambda^{(k)}(u_-) \geq s \geq \lambda^{(k)}(u_+) \quad (2.30)$$

$$\lambda^{(k-1)}(u_-) < s < \lambda^{(k+1)}(u_+) \quad (2.31)$$

Estas desigualdades aseguran que k características convergen a la discontinuidad desde la izquierda y que $p - k + 1$ lo hacen desde la derecha. La información transportada por estas $p + 1$ características, junto con las $p - 1$ relaciones de Rankine-Hugoniot (una vez eliminada la velocidad de propagación de la discontinuidad) son suficientes para determinar los $2p$ valores que toma u a ambos lados de la discontinuidad.

Una discontinuidad a través de la cual se satisface (2.18), (2.30) y (2.31) recibe el nombre de *onda de choque en el campo característico k* .

Las relaciones de salto (2.18) caracterizan las discontinuidades admisibles. Una discontinuidad que no verifica dichas condiciones no puede

propagarse y se descompone en, lo que se llama, una *onda de rarefacción*. Como veremos ahora, esta solución es suave a trozos y autosemejante, en el sentido de que su dependencia en las variables x y t se da a través de la relación x/t :

$$u(x, t) = v(x/t), \quad t > 0. \quad (2.32)$$

La propiedad de autosemejanza se basa en que la evolución de una discontinuidad (lo que más tarde definiremos como *problema de Riemann*) es invariante bajo transformaciones del tipo $(x, t) \rightarrow (ax, at)$, $a > 0$, por lo que la solución debe ser constante a lo largo de las trayectorias $x/t = \text{constante}$.

Una onda de rarefacción es una solución continua de la ley de conservación. Por tanto, la función v de (2.32) debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria:

$$-\xi \frac{dv(\xi)}{d\xi} + a(v(\xi)) \frac{dv(\xi)}{d\xi} = 0, \quad (2.33)$$

con

$$\xi = \frac{x}{t}, \quad (2.34)$$

$$a(v(\xi)) = \frac{dF(v(\xi))}{dv}. \quad (2.35)$$

Si excluimos los estados constantes correspondientes a $dv/d\xi = 0$, de la resolución de (2.33) se tiene que:

$$a(v(\xi)) = \xi \quad (2.36)$$

y decimos que el estado u_+ , a la derecha, está conectado con el estado u_- por medio de una onda de rarefacción si:

1.

$$a(u_-) < a(u_+), \quad (2.37)$$

2. existe una función $v : [a(u_-), a(u_+)] \rightarrow \mathfrak{R}$ solución de (2.36).

Para el caso de un sistema de leyes de conservación (2.1), (2.4) también puede definirse el concepto de *onda de rarefacción en el campo característico k* . Aquí, el carácter autosemejante de la solución lleva a que:

$$[A(v) - \xi I] \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad (2.38)$$

en lugar de (2.36), lo que se verifica cuando:

$$\xi = \lambda^{(k)}(\mathbf{v}(\xi)) \quad (2.39)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\xi} \propto \mathbf{d}^{(k)} \quad (2.40)$$

siendo $\lambda^{(k)}$, $\mathbf{d}^{(k)}$ uno de los valores y vectores propios, respectivamente, del jacobiano del sistema. La ecuación (2.40) tiene una única solución que satisface la condición inicial:

$$\mathbf{v}(\lambda^{(k)}(\mathbf{u}_-)) = \mathbf{u}_-, \quad (2.41)$$

que recibe el nombre de onda de rarefacción en el campo característico k .

2.4 Problema de valores iniciales discontinuos (Problema de Riemann).

Con todo lo que acabamos de ver, la solución del *problema de valores iniciales discontinuos* (problema de Riemann) de encontrar una función $u : \mathfrak{R} \times [0, \infty[\rightarrow \mathfrak{R}$ que verifique:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (2.42)$$

con $F : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ de clase C^2 y convexa, con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_- & \text{si } x < 0 \\ u_+ & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es una *onda simple*, onda de choque o de rarefacción, dependiendo de $a(u_-)$ y $a(u_+)$:

1. Si $a(u_-) \geq a(u_+)$, la discontinuidad inicial es admisible y la solución es una onda de choque que conecta los estados u_- y u_+ , de la forma:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & \text{si } x < st \\ u_+ & \text{si } x > st \end{cases}$$

donde s está dada por la condición de Rankine-Hugoniot:

$$s = \frac{[F(u)]}{[u]}. \quad (2.43)$$

(ver Figura (2.3)).

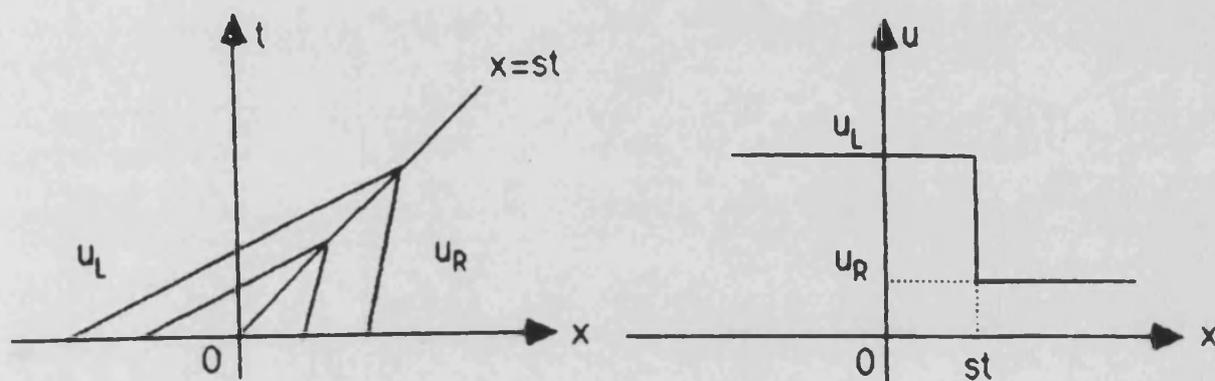


Figura 2.3: Propagación de una discontinuidad inicial admisible, para el caso de una ley de conservación escalar con flujo convexo.

2. Si $a(u_-) < a(u_+)$, la discontinuidad inicial no es admisible y la solución de (2.42) es una onda de rarefacción que conecta de forma continua los estados u_- y u_+ :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & \text{si } x \leq a(u_-)t \\ v(x/t) & \text{si } a(u_-)t \leq x \leq a(u_+)t \\ u_+ & \text{si } x \geq a(u_+)t \end{cases}$$

donde $v(x/t)$ es solución de (2.36) (ver Figura (2.4)).

Con esto hemos conseguido dar una solución explícita del problema de Riemann que es autosemejante y puede escribirse en la forma:

$$u(x, t) = w_R(x/t; u_-, u_+) \tag{2.44}$$

donde la función $\xi \rightarrow w_R(\xi; u_-, u_+)$ se define:

$$w_R(\xi; u_-, u_+) = u_-, \tag{2.45}$$

si $u_- = u_+$;

$$w_R(\xi; u_-, u_+) = \begin{cases} u_- & \text{si } \xi < s \\ u_+ & \text{si } \xi > s \end{cases}$$

con $s = [F(u)]/[u]$, si $u_- > u_+$;

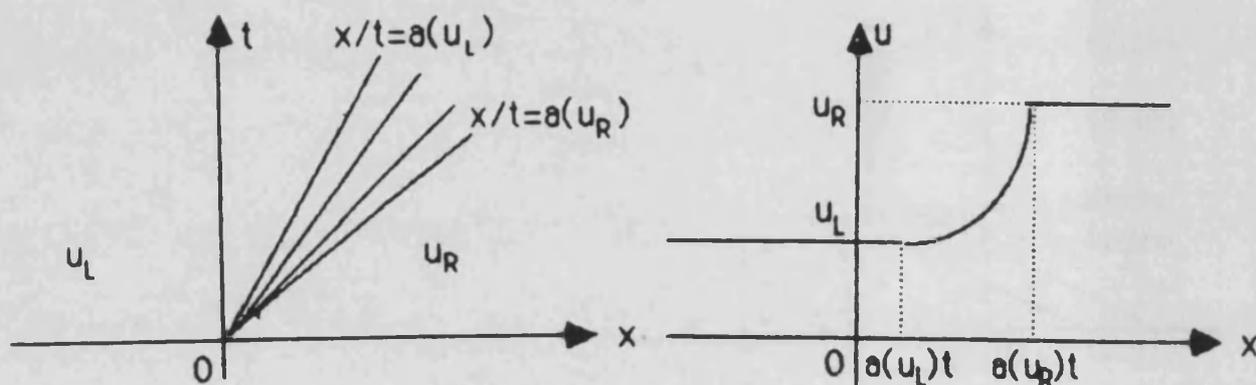


Figura 2.4: Evolución de una discontinuidad inicial no admisible, para el caso de una ley de conservación escalar con flujo convexo.

$$w_R(\xi; u_-, u_+) = \begin{cases} u_- & \text{si } \xi \leq a(u_-) \\ v(\xi) & \text{si } a(u_-) \leq \xi \leq a(u_+) \\ u_+ & \text{si } \xi \geq a(u_+) \end{cases}$$

con $v(\xi)$ solución de (2.36), si $u_- < u_+$ ⁶. Para el caso de una ley de conservación lineal, toda discontinuidad inicial es admisible, y así, la solución para $t > 0$ de (2.42) es, simplemente:

$$w_R(\xi; u_-, u_+) = \begin{cases} u_- & \text{si } \xi < a \\ u_+ & \text{si } \xi > a \end{cases}$$

siendo a , definida según (2.9), ahora una constante.

Para un sistema de leyes de conservación, Lax (1973) ha demostrado que la solución del problema de Riemann con datos iniciales

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{si } x < 0 \\ u_p & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

suficientemente próximos, consiste en $p+1$ estados constantes u_0, u_1, \dots, u_p (siendo p el número de leyes de conservación que componen el sistema)

⁶En el caso de una función F más general, que tenga un número finito de puntos de inflexión, la solución del problema de Riemann (2.42) se construye con una secuencia de ondas de rarefacción y de choque que enlazan con u_- y u_+ .

separados por rarefacciones centradas u ondas de choque (lo que, como en el caso escalar, da carácter autosemejante a la solución).

En el caso de un sistema lineal hiperbólico:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (2.46)$$

donde \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ constante con valores propios reales $\lambda^{(i)}$, la diagonalización del sistema mediante una transformación de semejanza:

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} = \Lambda, \quad (2.47)$$

con

$$\Lambda_{ij} = \lambda^{(i)} \delta^{ij}, \quad (2.48)$$

permite escribirlo en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (2.49)$$

en donde las $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}$ reciben el nombre de *variables características*. La matriz de la transformación \mathbf{R} esta formada por los vectores propios $\mathbf{e}^{(i)}$ de \mathbf{A} en columnas.

El sistema (2.49) es ahora un sistema de *ecuaciones características* lineales desacopladas, que se resuelven por separado como ecuaciones lineales escalares, cuya solución es:

$$\mathbf{w}_R(\xi; w_0^{(i)}, w_p^{(i)}) = \begin{cases} w_0^{(i)} & \text{si } \xi < \lambda^{(i)} \\ w_p^{(i)} & \text{si } \xi > \lambda^{(i)} \end{cases}$$

En las variables originales \mathbf{u} , la solución viene dada por:

$$\mathbf{w}_R(\xi; \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_p) = \begin{cases} \mathbf{u}_0 & \text{si } \xi \leq \lambda^{(1)} \\ \mathbf{u}_k & \text{si } \lambda^{(k)} \leq \xi \leq \lambda^{(k+1)}; k = 1, \dots, p-1 \\ \mathbf{u}_p & \text{si } \xi \geq \lambda^{(p)}, \end{cases}$$

(ver la Figura (2.5)), donde los estados intermedios \mathbf{u}_k verifican:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^k \Delta w^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}, \quad (2.50)$$

o, equivalentemente

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_p - \sum_{i=k+1}^p \Delta w^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}. \quad (2.51)$$

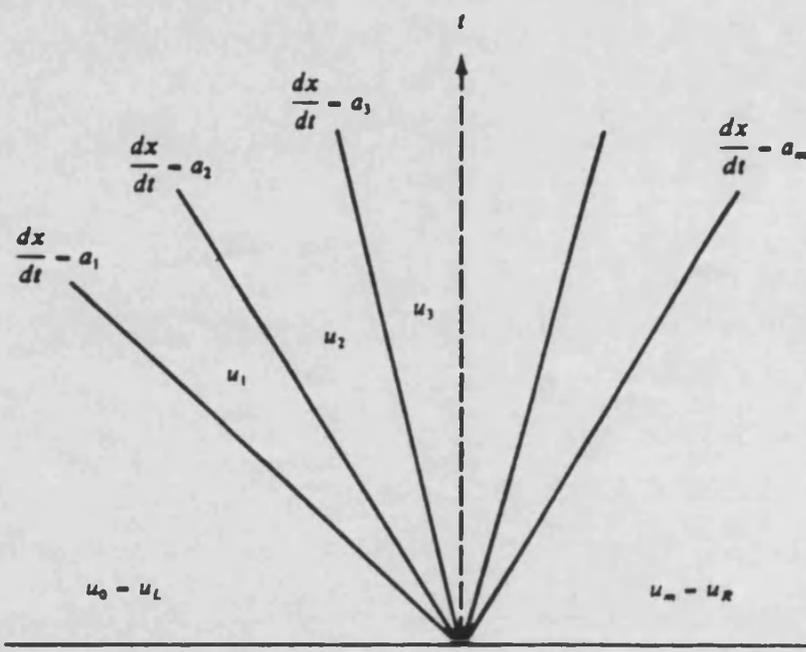


Figura 2.5: Solución analítica para el sistema de leyes de conservación lineal (2.46).

Las cantidades $\Delta \mathbf{w} = \mathbf{w}_p - \mathbf{w}_0$ se obtienen a partir del sistema algebraico:

$$\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^p \Delta w^{(i)} \mathbf{e}^{(i)}. \quad (2.52)$$

Capítulo 3

Técnicas numéricas de alta resolución modernas para sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

3.1 Introducción.

Comenzaremos este Capítulo hablando de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas lineales. Como vimos en el Capítulo anterior, sus soluciones sólo presentan discontinuidades si los datos iniciales ya son discontinuos, lo que reduce de forma importante las dificultades de su resolución. Para ellas existen métodos en diferencias finitas estables y bien estudiados, que pueden encontrarse en los libros de texto clásicos (Garabedian, 1966; Richtmyer y Morton, 1967). Antes de centrarnos en el estudio de los sistemas genuinamente no lineales, repasaremos algunos de estos esquemas.

Sea la ecuación en derivadas parciales hiperbólica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

donde a es una constante real. Sea u_j^n la aproximación numérica a la solución de (3.1) en $x_j = j\Delta x$ y $t^n = n\Delta t$, siendo Δx el tamaño de la celda computacional y Δt , el paso de tiempo.



El esquema *upwind* de Courant, Isaacson y Rees (1952), de acuerdo con la teoría de características descrita en el Capítulo anterior, usa una discretización para la derivada parcial espacial que depende de la dirección de propagación de la señal (signo de a). El esquema se escribe en la forma:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a \begin{cases} (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } a < 0 \\ (u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Introduciendo la notación:

$$a^+ = \frac{1}{2}(a + |a|); \quad (3.2)$$

$$a^- = \frac{1}{2}(a - |a|), \quad (3.3)$$

el esquema puede escribirse de forma compacta como:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [a^+(u_j^n - u_{j-1}^n) + a^-(u_{j+1}^n - u_j^n)], \quad (3.4)$$

independientemente del signo positivo o negativo de a , o también, usando las relaciones entre a^+ , a^- , a y $|a|$:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} |a|(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (3.5)$$

Como veremos más adelante, es conveniente trabajar con esquemas que pueden escribirse en forma conservativa:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}), \quad (3.6)$$

en donde las cantidades $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ reciben el nombre de flujos numéricos.

Definiendo $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ como:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [a(u_{j+1}^n + u_j^n) - |a|(u_{j+1}^n - u_j^n)], \quad (3.7)$$

el esquema (3.5) se escribe en la forma conservativa (3.6).

El algoritmo que acabamos de describir puede extenderse a un sistema hiperbólico lineal:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.8)$$

donde \mathbf{A} es una matriz $p \times p$ constante con valores propios reales. Para ello lo transformamos a su forma característica, tal y como se describió en la Sección 4 del Capítulo anterior:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0, \quad (3.9)$$

siendo Λ la matriz diagonal formada por los valores propios, $\lambda^{(i)}$, de \mathbf{A} .

Ahora, el esquema en forma conservativa (3.6), (3.7) puede aplicarse a cada una de las ecuaciones características desacopladas:

$$\mathbf{w}_j^{n+1} = \mathbf{w}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{\mathbf{g}}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{g}}_{j-\frac{1}{2}}) \quad (3.10)$$

con

$$\hat{\mathbf{g}}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\Lambda (\mathbf{w}_{j+1}^n + \mathbf{w}_j^n) - |\Lambda| (\mathbf{w}_{j+1}^n - \mathbf{w}_j^n)], \quad (3.11)$$

donde los elementos de $|\Lambda|$ se definen según:

$$|\Lambda|_{ij} = |\lambda^{(i)}| \delta^{ij}. \quad (3.12)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{A} = \mathbf{R}\Lambda\mathbf{R}^{-1}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{w}$, en donde \mathbf{R} está compuesta por los vectores propios de \mathbf{A} en columna, el algoritmo (3.10), (3.11) puede escribirse en función de las variables originales \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}}). \quad (3.13)$$

con el flujo numérico:

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{A} (\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_j^n) - |\mathbf{A}| (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n)], \quad (3.14)$$

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1}. \quad (3.15)$$

Además de las técnicas upwind, que usan discretizaciones para la derivada espacial por la izquierda o por la derecha dependiendo del signo de a , existen numerosos esquemas para ecuaciones en derivadas parciales que usan discretizaciones centradas (esquemas simétricos). Entre los esquemas simétricos de segundo orden, son de destacar:

1. El método de Crank-Nicholson :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (3.16)$$

2. El método de Lax-Wendroff :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} a^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.17)$$

3. El método de MacCormack :

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (3.18)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (3.19)$$

4. El método de Lax-Friedrichs:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.20)$$

5. El método Leapfrog :

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (3.21)$$

La extensión de estos esquemas al caso de sistemas con coeficientes constantes puede hacerse de una forma similar a como se hizo con el esquema upwind.

Como vimos en el Capítulo anterior, las ecuaciones hiperbólicas no lineales generan soluciones discontinuas aún partiendo de soluciones iniciales suaves. Esta propiedad está en el origen de alguna de las dificultades técnicas que presenta la resolución numérica de dichas ecuaciones. En efecto, la utilización de técnicas standard de alto orden (≥ 2) como las expuestas más arriba, generalizadas al caso no lineal, conduce a resultados catastróficos cuando aparecen las discontinuidades. La Figura (3.1) muestra un ejemplo de las oscilaciones espúreas que aparecen en la resolución de la ecuación de Burgers (1948), sin viscosidad:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{1}{2}u^2)}{\partial x} = 0 \quad (3.22)$$

con el método de Lax-Wendroff. El dato inicial es una función seno y se han tomado condiciones de contorno periódicas. Las líneas sólidas representan la solución exacta en dos tiempos diferentes y los círculos las

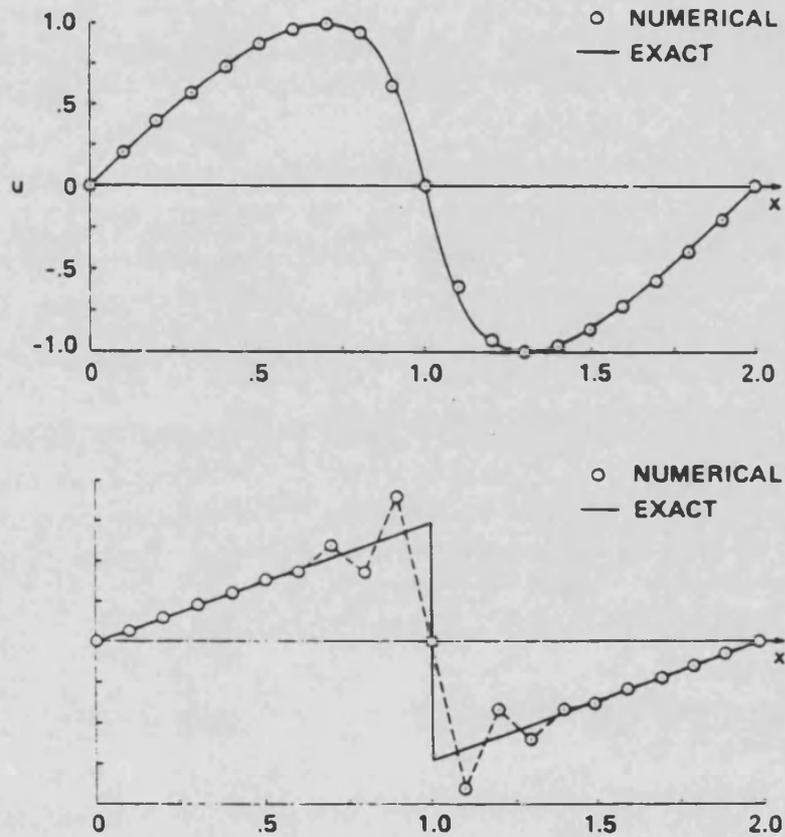


Figura 3.1: Soluciones numéricas de la ecuación de Burgers usando el método de Lax-Wendroff para los tiempos $t = 0.2$ (arriba) y $t = 1.0$ (abajo). De Yee (1989).

soluciones calculadas. Al aparecer la onda de choque, el esquema produce oscilaciones a través de ella. Las oscilaciones mantienen la misma amplitud aunque se refine la malla.

Como el sistema de ecuaciones en derivadas parciales sigue verificándose fuera de las discontinuidades, una posible metodología es usar una técnica en diferencias finitas standard de alto orden en las regiones suaves, combinada con una técnica que detecte la posición de las discontinuidades, para hacer uso, a través de ellas, de las condiciones de salto. Esta técnica recibe el nombre de *shock-tracking*.

Alternativamente, se usan las técnicas *shock-capturing* (TSC), que tratan de forma consistente las discontinuidades allí donde aparecen, sin tener que hacer un seguimiento explícito de ellas (lo que en casos multi-dimensionales o con interacción de discontinuidades, puede hacerse ex-

cesivamente complicado). Dentro de este tipo de técnicas se encuentran las llamadas de *alta resolución*, que tienen al menos, segundo orden de precisión en la parte suave de las soluciones y una buena resolución en las discontinuidades.

El método de la *viscosidad artificial*, introducido originalmente por Richtmyer y von Neumann (1950) para el tratamiento de las ondas de choque -en el caso de la hidrodinámica newtoniana- pertenece a este tipo de técnicas. Cuando un fluido es viscoso, todas las magnitudes varían de forma suave a través de la onda de choque, independientemente de la intensidad de ésta¹. Además, la anchura de la zona de transición aparece como proporcional al coeficiente del mecanismo de disipación, de forma que en el límite de no viscosidad, los valores de las magnitudes a ambos lados de la onda de choque se corresponden con los que verificaban las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot. Teniendo en cuenta todo esto, Richtmyer y von Neumann introdujeron en las ecuaciones de la hidrodinámica newtoniana en una dimensión espacial y coordenadas lagrangianas, un término disipativo puramente artificial, q , distinto de cero en las regiones con posibilidad de que se forme una onda de choque, que acompañaba a la presión y reducía las oscilaciones permitiendo que la transición de la onda de choque ocupara unos cuantos intervalos Δx de la variable espacial independientemente de la intensidad de la onda y no tuviera efecto alguno en las regiones en las que el flujo es suave. Von Neumann y Richtmyer demuestran que una expresión para el término de viscosidad que reunía las condiciones anteriores era:

$$q = \begin{cases} -\alpha \frac{\partial v}{\partial x} & \text{si } \frac{\partial v}{\partial x} < 0 \text{ o } \frac{\partial \rho_0}{\partial t} > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

siendo $\alpha = \rho_0(k\Delta x)^2 \frac{\partial v}{\partial x}$, v la velocidad del fluido, ρ_0 su densidad y k un parámetro constante cuyo valor se ajusta en cada experiencia numérica y que controla el número de celdas en las que se disipa la onda de choque.

Sin embargo, como es bien conocido (ver, por ejemplo, Harten, 1984), la dificultad inherente a la técnica de la viscosidad artificial es determinar una forma apropiada para el término de la viscosidad, q , que introduzca la disipación justa para reducir las oscilaciones sin causar una pérdida excesiva de resolución en la discontinuidad. Ambas condiciones son difíciles de conseguir a la vez.

¹A diferencia de la conducción de calor que sólo mantiene esta propiedad para ondas de choque por debajo de una cierta intensidad (Becker, 1922).

Los métodos de alta resolución *modernos* se basan en otro tipo de principios (la resolución aproximada o exacta de problemas de Riemann locales) de forma que se previene la aparición de oscilaciones manteniendo una buena resolución en las discontinuidades.

3.2 El método original de S. K. Godunov.

En 1959, Godunov (1959) publicó un método aplicable en problemas de hidrodinámica en simetría plana con ondas de choque. Está basado en las ecuaciones lagrangianas, que, en forma *conservativa*, se escriben:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

con

$$\mathbf{u} = (V, v, E)^T, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (-v, p, vp)^T, \quad (3.25)$$

siendo x la coordenada lagrangiana, V el volumen específico, v la velocidad euleriana del fluido y p su presión. Por último, E es la energía total específica, que se define a partir de la energía interna específica, ε , y la cinética, según:

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \varepsilon \quad (3.26)$$

(ver, por ejemplo, Zel'dovich y Raizer, 1966).

El método de Godunov es conservativo², lo que implica que los flujos de la celda i a la celda $i+1$ son iguales y opuestos a los flujos respectivos de la celda $i+1$ a la i (ver Figura (3.2)), por lo que las cantidades que deben conservarse de acuerdo con el sistema de ecuaciones en derivadas parciales, lo hacen de forma exacta en el algoritmo en diferencias.

En un método conservativo el valor medio de \mathbf{u} en la celda j , centrada en $x_j = j\Delta x$, y el instante $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$, \mathbf{u}_j^{n+1} :

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t^{n+1}) dx, \quad (3.27)$$

²El interés de que los esquemas sean conservativos radica en el Teorema de Lax y Wendroff sobre la convergencia de la solución numérica a una de las soluciones débiles del sistema, y se comentará con más detalle en la Sección 4 de este Capítulo.

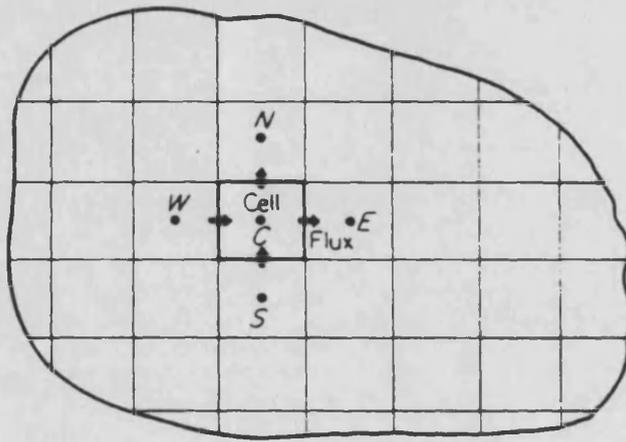


Figura 3.2: Conservación en dos dimensiones sobre una malla. El flujo de la celda C a la celda E es igual y opuesto al flujo de la celda E a la C.

se obtiene a partir de la expresión

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}), \quad (3.28)$$

consistente con la versión integrada de la ley de conservación (2.16) en la celda computacional $[(j - \frac{1}{2})\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta x] \times [t^n, t^{n+1}]$, y en la que $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ representa un valor de $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ en $x_{j+\frac{1}{2}} (= x_j + \frac{\Delta x}{2})$, interfase entre las celdas j y $j + 1$, promediado temporalmente entre los instantes t^n y t^{n+1} ,

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{u}(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (3.29)$$

En el método de Godunov, $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$, con

$$\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{u}(x_{j+\frac{1}{2}}, t) dt. \quad (3.30)$$

De acuerdo con la expresión (3.25) sólo son necesarios los valores de v y p para el cálculo de $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$. Godunov los obtiene resolviendo un problema de Riemann en cada interfase a partir de las distribuciones, supuestas constantes, de v , p , V y E en t^n en cada celda. Para un tiempo

suficientemente pequeño de forma que no interaccionen las soluciones de problemas de Riemann contiguos, y que es del orden de:

$$t_c \approx \frac{\Delta x}{2c_s} \quad (3.31)$$

(c_s es la velocidad local del sonido), y de acuerdo con lo visto en el Capítulo anterior (ver también, por ejemplo, Landau y Lifshitz, 1987), se sabe que cada discontinuidad se descompone en tres ondas simples (ver Figura (3.3)). Dos de ellas pueden ser ondas de choque o rarefacciones, moviéndose una en el sentido de x crecientes y la otra en el sentido de x decrecientes. La tercera es una discontinuidad de contacto que se sitúa en el lugar de la discontinuidad inicial $(j + \frac{1}{2})\Delta x$ (x es la coordenada lagrangiana). En la región comprendida entre las ondas que viajan hacia la derecha y hacia la izquierda, v y p tienen valores constantes en espacio y tiempo, mientras que V y E presentan saltos a través de la discontinuidad de contacto. Son estos valores constantes de v y p los que se consideran para $v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ y $p_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ ³.

La forma de obtener dichos valores constantes, que en lo que queda de Sección llamaremos v^* y p^* , hace uso de las relaciones de Rankine-Hugoniot (deducidas para un sistema hiperbólico general en el Capítulo anterior) a través de las ondas de choque y del carácter autosemejante del flujo en las rarefacciones. Godunov propone una forma de obtener dichos valores suponiendo una ecuación de estado de gas ideal.

Si la onda que se mueve hacia la derecha desde el punto $x = (j + \frac{1}{2})\Delta x$ es una onda de choque, el salto en la velocidad del fluido está relacionado con el salto en la presión a través de la relación de Rankine-Hugoniot que procede de la ecuación del momento:

$$M^+(v^* - v_{j+1}^n) = p^* - p_{j+1}^n \quad (3.32)$$

donde M^+ es la masa de fluido que atraviesa la onda de choque por unidad de tiempo ($M^+ = \frac{d\eta}{dt}$, donde la función $x = \eta(t)$ parametriza la

³Para tiempos mayores que t_c , la solución puede no permanecer constante en $x_{j+\frac{1}{2}}$ debido a la interacción con ondas provenientes de problemas de Riemann vecinos. Para evitar esto, exigimos que $\Delta t \leq t_c$ ($t_c \equiv$ tiempo de Courant). La condición anterior es la generalización natural de la condición de estabilidad de métodos en diferencias finitas de Courant, Friedrichs y Lewy (1928) para el caso escalar lineal.

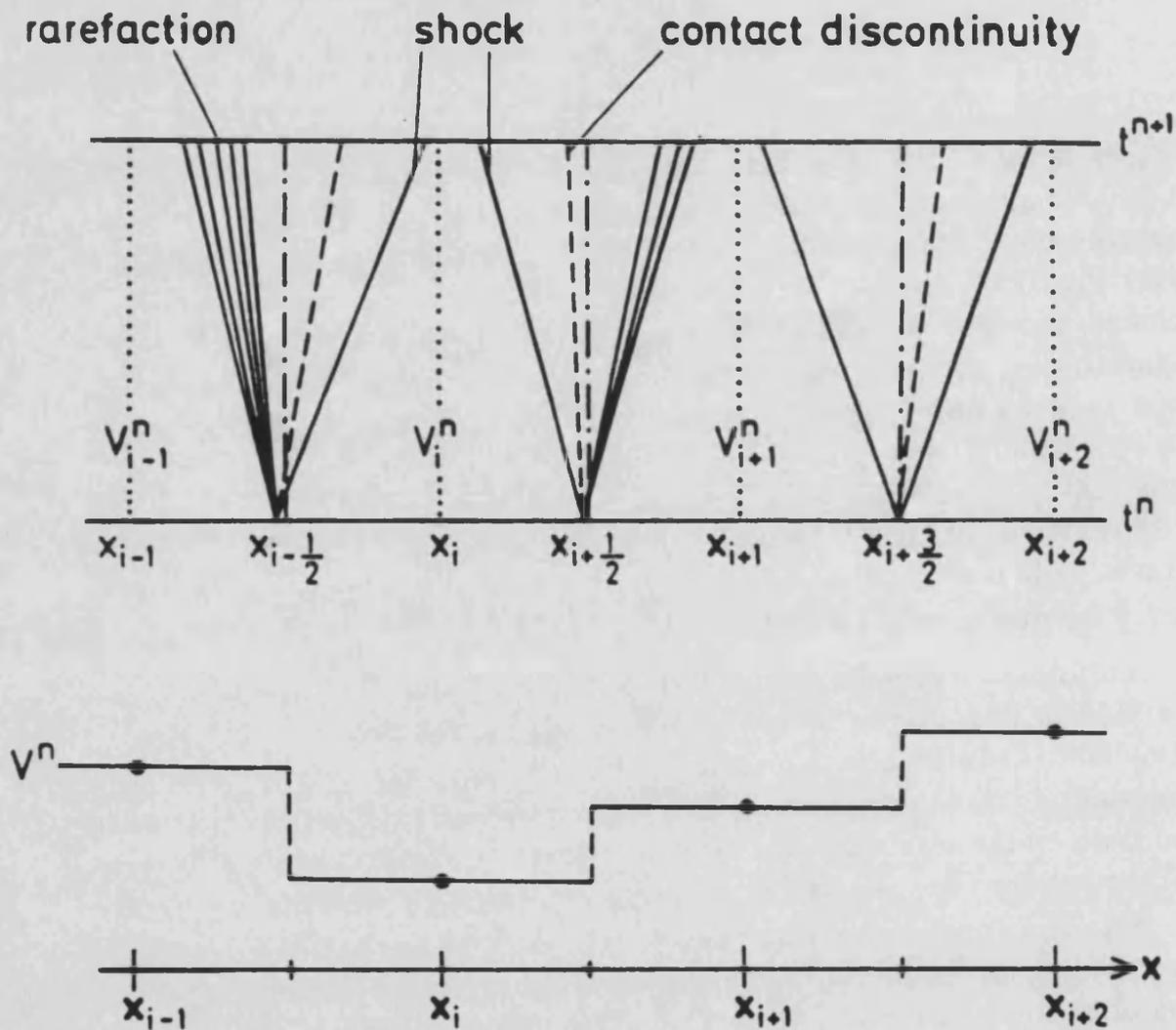


Figura 3.3: Ilustración del método de Godunov. La distribución en $t = t^n$ se aproxima por estados constantes a trozos u_j^n separados por discontinuidades en las interfaces (figura de abajo). La solución en el instante de tiempo siguiente $t = t^{n+1}$ se obtiene promediando las soluciones de los problemas de Riemann locales definidos por las discontinuidades (figura de arriba).

posición de la onda de choque) y viene dada por la ecuación:

$$M^+ = \left[\frac{(\gamma + 1)p^* + (\gamma - 1)p_{j+1}^n}{2V_{j+1}^n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

(siendo γ el cociente de los calores específicos del gas a presión y volumen constantes), que puede obtenerse a partir de las restantes condiciones de Rankine-Hugoniot junto con la ley de estado de gas ideal.

Si la onda simple que se mueve hacia la derecha es una onda de rarefacción, entonces, como ya vimos, la región central donde p y v tienen valores constantes p^* y v^* se separa en el plano $x - t$ de la región donde tienen valores constantes p_{j+1}^n y v_{j+1}^n por medio de un estado en el que todas las magnitudes dependen de x y t a través de la variable

$$\xi = \frac{x - (j + \frac{1}{2})\Delta x}{t - n\Delta t}. \quad (3.34)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \frac{d}{d\xi}, \quad (3.35)$$

y que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\xi}, \quad (3.36)$$

la ecuación del momento en la región de flujo autosemejante se escribe como:

$$\xi \frac{dv}{d\xi} = \frac{dp}{d\xi}. \quad (3.37)$$

A partir de ella puede obtenerse una ecuación formalmente igual a (3.32):

$$M^+(v^* - v_{j+1}^n) = p^* - p_{j+1}^n, \quad (3.38)$$

para lo que M^+ se ha definido como

$$M^+ = \frac{\int_{v_{j+1}^n}^{v^*} \xi dv}{\int_{v_{j+1}^n}^{v^*} dv} \equiv \bar{\xi} \quad (3.39)$$

(la masa que atraviesa, por unidad de tiempo, la característica que dentro de la región de la rarefacción tiene como pendiente $\bar{\xi}$).

El siguiente paso es obtener una expresión que, al igual que la (3.33), permita conocer el valor de M^+ cuando la onda que separa los estados

* y $(j + 1)$ sea una onda de rarefacción. Godunov, haciendo uso de las ecuaciones de continuidad y del momento en función de la variable ξ y del carácter isoentrópico del flujo autosemejante⁴ junto con la ley de estado de gas ideal, obtiene la expresión deseada:

$$M^+ = \frac{(\gamma - 1)}{2\sqrt{\gamma p_{j+1}^n V_{j+1}^n}} \frac{p_{j+1}^n - p^*}{1 - (p^*/p_{j+1}^n)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}. \quad (3.40)$$

Combinando las expresiones (3.33), cuando $p^* > p_{j+1}^n$, y (3.40), cuando $p^* \leq p_{j+1}^n$, se tiene que:

$$M^+ = \left(\frac{p_{j+1}^n}{V_{j+1}^n} \right)^{\frac{1}{2}} \varphi \left(\frac{p^*}{p_{j+1}^n} \right), \quad (3.41)$$

donde

$$\varphi(z) = \begin{cases} \left(\frac{\gamma+1}{2} z + \frac{\gamma-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{si } z > 1 \\ \frac{\gamma-1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{1-z}{1-z^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} & \text{si } z \leq 1 \end{cases}$$

Para la onda que se mueve hacia la izquierda desde el punto $(j + \frac{1}{2})\Delta x$, de forma análoga se tiene:

$$-M^-(v^* - v_j^n) = p^* - p_j^n, \quad (3.42)$$

donde M^- viene dada por:

$$M^- = \left(\frac{p_j^n}{V_j^n} \right)^{\frac{1}{2}} \varphi \left(\frac{p^*}{p_j^n} \right). \quad (3.43)$$

Eliminando v^* de las expresiones (3.32) y (3.42), se obtiene la ecuación para p^* :

$$\frac{p^* - p_j^n}{M^-} + \frac{p^* - p_{j+1}^n}{M^+} + v_{j+1}^n - v_j^n = 0, \quad (3.44)$$

que puede resolverse de forma iterativa⁵. Una vez obtenido el valor de p^* , v^* se calcula a partir de (3.32) ó (3.42), o, como propone Godunov, a partir de:

$$M^+(v^* - v_{j+1}^n) + M^-(v^* - v_j^n) = p_j^n - p_{j+1}^n. \quad (3.45)$$

⁴Para comprobar este punto, consultar Landau y Lifshitz, 1987, págs. 366-69; o el Apéndice de este Trabajo para una prueba en el caso de la dinámica de fluidos relativista.

⁵Una forma no iterativa de obtener el estado intermedio en un problema de Riemann está descrita en Chorin (1976).

El método de Godunov que acabamos de describir puede extenderse a cualquier sistema hiperbólico (Godunov *et al.*, 1979; van Leer, 1984). Así, el método de Godunov para integrar el sistema hiperbólico de leyes de conservación:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (3.46)$$

es un esquema en forma conservativa:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\hat{F}_G(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{F}_G(u_{j-1}^n, u_j^n)}{\Delta x} = 0, \quad (3.47)$$

en el que $\hat{F}_G(u_j^n, u_{j+1}^n)$ es el valor del flujo en $x_{j+\frac{1}{2}}$ en la solución exacta del problema de valores iniciales con una distribución inicial constante a trozos:

$$u^n(x) = u_j^n \text{ para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2}. \quad (3.48)$$

Es decir, si

$$u(x, t) = w_R(x/t; u_-, u_+) \quad (3.49)$$

es la solución (débil) del problema de Riemann que tiene como valores iniciales:

$$u = \begin{cases} u_- & \text{si } x < 0 \\ u_+ & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

entonces,

$$\hat{F}_G(u_j^n, u_{j+1}^n) = F[w_R(0; u_j^n, u_{j+1}^n)]. \quad (3.50)$$

3.3 Resolvedores de Riemann aproximados.

El método de Godunov requiere la solución de problemas de Riemann en cada interfase y cada instante de tiempo. Aunque teóricamente dichos problemas de Riemann pueden resolverse, en la práctica puede ser muy costoso pues involucra la resolución de un sistema algebraico no lineal.

Por otro lado, debido al uso de soluciones promediadas, el esquema de Godunov no utiliza toda la información contenida en la solución exacta del problema de Riemann. Este hecho sugiere la conveniencia de acudir a soluciones aproximadas del problema de Riemann, obtenidas con menor coste. Así, si $w(x/t; u_-, u_+)$ es una aproximación a la solución del problema de Riemann, se definen los esquemas *tipo Godunov* (Harten,

Lax y van Leer, 1983; Einfeldt, 1988) como aquellos en los que u_j^{n+1} se obtiene según:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 w(x/t; u_j, u_{j+1}) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} w(x/t; u_{j-1}, u_j) dx, \quad (3.51)$$

resolviendo de forma aproximada un problema de Riemann en cada interfase y cada paso de tiempo. Harten y Lax (1981) demuestran que si la solución aproximada, $w(x/t; u_-, u_+)$, es consistente con la forma integral de la ley de conservación en el sentido de que

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} w(x/t; u_-, u_+) = \frac{\Delta x}{2} (u_- + u_+) - \Delta t F_+ + \Delta t F_- \quad (3.52)$$

($F_{-,+} = F(u_{-,+})$) y con la forma integral de la condición de entropía, el esquema (3.51) tiene forma conservativa. Efectivamente, aplicando la forma integral de la ley de conservación (2.16) a la solución aproximada del problema de Riemann en el rectángulo $[-\frac{\Delta x}{2}, 0] \times [0, \Delta t]$, el flujo numérico $\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}$ a través de la interfase que separa los estados u_j y u_{j+1} puede obtenerse según:

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}} = F_j - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 w(x/\Delta t; u_j, u_{j+1}) dx + \frac{\Delta x}{2\Delta t} u_j. \quad (3.53)$$

Análogamente integrando en el rectángulo $[0, \frac{\Delta x}{2}] \times [0, \Delta t]$,

$$\hat{F}_{j-\frac{1}{2}} = F_j + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} w(x/\Delta t; u_{j-1}, u_j) dx - \frac{\Delta x}{2\Delta t} u_j. \quad (3.54)$$

En la presente Sección, nos proponemos explicar uno de los resolvers más populares (Roe, 1981a; 1981b), que se sitúa en la base de la *aproximación local por campos característicos*, usada de forma general para extender a sistemas de leyes de conservación los métodos desarrollados para el caso escalar.

Roe considera soluciones aproximadas del problema (3.46) con condición inicial:

$$u = \begin{cases} u_- & \text{si } x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ u_+ & \text{si } x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

(en donde $x_{i+\frac{1}{2}}$ es la interfase entre dos celdas cualquiera de la malla computacional), que son soluciones *exactas* del problema *aproximado*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (3.55)$$

con la misma condición inicial, donde $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)$ es una matriz constante relacionada, como ahora veremos, con la matriz jacobiana del sistema original, y a la que se exige que cumpla las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{F}_- - \mathbf{F}_+ = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)(\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_+)$.
2. $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)$ tiene valores propios reales y un conjunto completo de vectores propios.
3. $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{u})$, donde \mathbf{A} es el jacobiano del sistema original.

Una vez construida dicha matriz, sus valores propios, $\tilde{\lambda}^{(i)}$, pueden considerarse como las velocidades de las características del problema de Riemann y la proyección de $(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)$ sobre sus vectores propios, $\tilde{\mathbf{e}}^{(i)}$, de acuerdo con lo expuesto en la Sección 4 del Capítulo anterior, como los saltos de las variables características, $\Delta \tilde{\mathbf{w}}$:

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = \sum_{i=1}^p \Delta \tilde{w}^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}. \quad (3.56)$$

Combinando esta expresión con la propiedad 1) para la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$, tenemos que

$$\mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_- = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) = \sum_{i=1}^p \tilde{\lambda}^{(i)} \Delta \tilde{w}^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}. \quad (3.57)$$

El resolutor aproximado viene dado por la solución exacta del problema linealizado (3.55), que ya vimos en la última Sección del Capítulo anterior:

$$\mathbf{w}(\xi; \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) = \begin{cases} \mathbf{u}_- & \text{si } \xi \leq \tilde{\lambda}^{(1)} \\ \mathbf{u}_k & \text{si } \tilde{\lambda}^{(k)} \leq \xi \leq \tilde{\lambda}^{(k+1)}; k = 1, \dots, p-1 \\ \mathbf{u}_+ & \text{si } \tilde{\lambda}^{(p)} \leq \xi, \end{cases}$$

y en la que los estados intermedios, \mathbf{u}_k , vienen definidos por:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_- + \sum_{i=1}^k \Delta \tilde{w}^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}. \quad (3.58)$$

El flujo numérico asociado puede obtenerse a partir de la expresión (3.53):

$$\mathbf{F}_{Roe} = \mathbf{F}_- + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mathbf{u}_- - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \mathbf{w}(\xi; \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) dx, \quad (3.59)$$

expresión que, teniendo en cuenta (3.58) puede escribirse en la forma:

$$\mathbf{F}_{Roe} = \mathbf{F}_- + \sum_{\forall i/\tilde{\lambda}^{(i)} < 0} \tilde{\lambda}^{(i)} \Delta \tilde{w}^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}. \quad (3.60)$$

La suma anterior puede extenderse a los valores positivos de $\tilde{\lambda}^{(i)}$ si tenemos en cuenta que se verifica:

$$\sum_{\forall i/\tilde{\lambda}^{(i)} < 0} \tilde{\lambda}^{(i)} \Delta \tilde{w}^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (\tilde{\lambda}^{(i)} - |\tilde{\lambda}^{(i)}|) \Delta \tilde{w}^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}. \quad (3.61)$$

Considerando esta expresión y la (3.57), el flujo de Roe puede escribirse, definitivamente, como:

$$\mathbf{F}_{Roe} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_- + \mathbf{F}_+ - \sum_{i=1}^p |\tilde{\lambda}^{(i)}| \Delta \tilde{w}^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}). \quad (3.62)$$

El resolutor de Roe tiene la virtud de que a través de ondas de choque da la solución exacta: si \mathbf{u}_- y \mathbf{u}_+ satisfacen las condiciones de salto:

$$\mathbf{F}_- - \mathbf{F}_+ = s(\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_+) \quad (3.63)$$

para un cierto escalar s , entonces, por la propiedad 1), s es un valor propio de $\tilde{\mathbf{A}}$; además, una proyección de $(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)$ sobre los vectores propios de $\tilde{\mathbf{A}}$, debido a 2), lo será sólo sobre el vector propio correspondiente a s .

Sin embargo, el resolutor de Roe viola la condición de entropía para el caso de rarefacciones transónicas (ver Roe, 1981b; van Leer, 1984), convergiendo a soluciones débiles no físicas. Para prevenir este hecho, debe añadirse un término de viscosidad que actúa en cada campo característico en los puntos en los que el valor propio asociado presenta un cambio de signo, en el seno de una onda de rarefacción (ver Harten y Hyman, 1983; Yee, 1989).

Roe (1981b) construye explícitamente la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ correspondiente al sistema de ecuaciones de la dinámica de gases (ideales). Sin embargo, Harten y Lax demuestran que, bajo condiciones muy generales, cualquier sistema hiperbólico permite una linealización del tipo propuesto por Roe (ver el Teorema 2.1 del trabajo de Harten, Lax y van Leer, 1983).

3.4 Técnicas shock-capturing y de alta resolución modernas para ecuaciones escalares.

Las técnicas numéricas para la resolución de ecuaciones hiperbólicas se desarrollan primeramente para leyes escalares no lineales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.64)$$

extendiéndose después formalmente a sistemas. Este hecho se debe a que los fundamentos teóricos están demostrados principalmente para el caso escalar.

La primera característica que comparten las TSC es la de estar escritas en *forma conservativa*, lo que significa que el método tiene la forma:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\hat{F}(u_{j-p}^n, u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+q}^n) - \hat{F}(u_{j-p-1}^n, u_{j-p}^n, \dots, u_{j+q-1}^n)], \quad (3.65)$$

para una cierta función \hat{F} , *flujo numérico*, de $p + q + 1$ argumentos. La importancia de la forma conservativa radica en el Teorema de Lax y Wendroff (1960), en el que se demuestra que la solución límite al refinar la malla ($\Delta x \rightarrow 0$) de cualquier esquema en diferencias finitas en forma conservativa que sea *consistente* con la ley de conservación⁶ satisface las condiciones de salto a través de las discontinuidades de forma automática, lo que, por lo menos, asegura que la solución límite, si existe, es una de las soluciones débiles de la ecuación original.

Sin embargo, como ya se comentó en el Capítulo anterior, las soluciones débiles no son únicas. Una propiedad interesante que satisface la solución de entropía de una ley de conservación escalar es que si se escogen dos conjuntos iniciales de datos u_0 y v_0 tales que:

$$v_0(x) \geq u_0(x) \quad \forall x, \quad (3.66)$$

las respectivas soluciones de entropía $u(x, t)$ y $v(x, t)$ satisfacen

$$v(x, t) \geq u(x, t) \quad \forall x, t. \quad (3.67)$$

Así, un esquema explícito en diferencias finitas en tres puntos

$$u_j^{n+1} = G(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \quad (3.68)$$

⁶ $\hat{F}(u, u, \dots, u) = F(u)$, siendo $F(u)$ la función flujo de la ley de conservación.

se dice *monótono* si G es una función monótona creciente de cada uno de sus argumentos. Para una ley de conservación escalar, los esquemas *monótonos* siempre convergen a la solución física (Harten, Hyman y Lax, 1976), lo que ha hecho a estos esquemas interesantes para el cálculo de soluciones discontinuas. El esquema de Godunov (van Leer, 1984) es monótono, mientras que el de Roe (van Leer, 1984) no lo es (Harten y Hyman, 1983).

Aunque los esquemas monótonos poseen, como hemos visto, propiedades adecuadas para el cálculo de soluciones discontinuas, sólo son de primer orden (Harten, Hyman y Lax, 1976). Para flujos complicados los esquemas monótonos y upwind de primer orden son muy difusivos. Así, en los últimos años se ha efectuado un esfuerzo importante en el desarrollo de mejores métodos para tratar ondas de choque. Básicamente hay dos clases de TSCM apropiadas para el cálculo de soluciones débiles: los esquemas TVD (*Total Variation Diminishing*, Harten, 1984) y los ENO (*Essentially Non-Oscillatory*, Harten y Osher, 1987). La principal diferencia entre los métodos TVD y ENO es que ciertos tipos de esquemas ENO mantienen el mismo orden de precisión espacial en los puntos extremos, mientras que los TVD se reducen a primer orden en estos puntos. Todos los esquemas monótonos y upwind de primer orden son esquemas TVD de primer orden. Al contrario que los esquemas monótonos, no todos los esquemas TVD son consistentes, automáticamente, con una condición de entropía.

La *variación total* de una función sobre una malla, $\{u_j^n\}_{j=-\infty}^{\infty}$, se define como:

$$TV(u^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_{j+1}^n - u_j^n|. \quad (3.69)$$

El esquema numérico (3.65) para el problema de valores iniciales (3.64) se dice que es TVD si

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (3.70)$$

El interés de la propiedad TVD se basa, por un lado, en el teorema de convergencia (Harten, 1984) que establece que si el esquema (3.65) es consistente con la ley de conservación (3.64) y con su desigualdad de entropía, si la aproximación numérica tiene *variación total estable*⁷, entonces el esquema es convergente y su límite es la solución débil única de (3.64) que satisface la desigualdad de entropía.

⁷ $TV(u^n)$ uniformemente acotada en espacio y tiempo.

Por otro lado, dada la ley de conservación escalar (3.64), se sabe que la solución es constante a lo largo de las líneas características $dx/dt = a(u)$. En consecuencia, si los datos iniciales son suaves, la variación total en x de la solución permanece constante en el tiempo, mientras las líneas características no se crucen. Incluso cuando se forme una onda de choque, debido a la convergencia de las características, la solución en cada punto (x, t) permanece bien definida en términos de una de las líneas características que la conectan con los datos iniciales. Como los datos iniciales en el dominio de dependencia de la onda de choque se pierden en ella, la formación de una onda de choque puede, realmente, hacer decrecer la variación total en x . Dado que las oscilaciones numéricas producirían un aumento en la variación total de la solución, las técnicas TVD evitan, por construcción la aparición de dicho fenómeno.

Existen varias formas de diseñar esquemas TVD de alto orden (que se incluirían ya en el conjunto de las técnicas de alta resolución). Presentamos aquí dos de los procedimientos más usuales:

1. Esquemas con *limitadores de flujo*.
2. Esquemas con *limitadores de pendiente*.

Entre los primeros el más conocido es el esquema de *transporte con flujo corregido* (*Flux-Corrected Transport*, FCT) de Boris y Book (1973). El flujo numérico, \hat{F} , consta de un flujo numérico de alto orden, $\hat{F}_H(u; j)$ que funciona bien en las regiones suaves y un flujo numérico de orden bajo, $\hat{F}_L(u; j)$, (en general correspondiente a un método monótono) que se comporta bien cerca de las discontinuidades, de forma que \hat{F} se reduce a $\hat{F}_H(u; j)$ en las regiones suaves y a $\hat{F}_L(u; j)$ cerca de las discontinuidades:

$$\hat{F}(u; j) = \hat{F}_L(u; j) + \Phi(u; j)[\hat{F}_H(u; j) - \hat{F}_L(u; j)], \quad (3.71)$$

en donde $\Phi(u; j)$ recibe el nombre de *limitador de flujo* y tiende a 1 cuando el flujo es suave y a cero en presencia de discontinuidades.

Sweby (1984) ha estudiado varios métodos con limitadores de flujo y deducido condiciones algebraicas sobre el limitador que garantizan la precisión de segundo orden y la condición TVD.

En los esquemas con limitadores de pendiente la idea básica es generalizar el método de Godunov reemplazando la distribución constante a trozos por otra de mayor precisión. Así, van Leer (1979) generalizó el

esquema de Godunov a segundo orden, sustituyendo los valores iniciales constantes del problema de Riemann por datos iniciales lineales. La pendiente de la *reconstrucción lineal* se escoge de forma que no aparezcan oscilaciones espúreas (enfoque MUSCL, *Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws*). Consideremos el esquema upwind de Roe de primer orden:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [h(u_j^n, u_{j+1}^n) - h(u_{j-1}^n, u_j^n)] \quad (3.72)$$

en donde:

$$h(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{2} [F(u_j^n) + F(u_{j+1}^n) - |a_{j+\frac{1}{2}}| (u_{j+1}^n - u_j^n)]. \quad (3.73)$$

El enfoque MUSCL sustituye los argumentos u_j^n, u_{j+1}^n del flujo numérico por u_j^R, u_{j+1}^L , definidos hasta segundo orden de precisión en la forma:

$$u_j^R = u_j^n + \sigma_j^n (x_{j+\frac{1}{2}} - x_j) \quad (3.74)$$

$$u_{j+1}^L = u_{j+1}^n + \sigma_{j+1}^n (x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j+1}). \quad (3.75)$$

Las pendientes σ_j^n deben escogerse de forma que no produzcan oscilaciones en las proximidades de las discontinuidades. Para ello se utilizan *limitadores de pendiente* que reducen a cero el valor de la pendiente cerca de las discontinuidades o en los puntos extremos. Uno de los limitadores más corrientes es el llamado *minmod*:

$$\sigma_j = \frac{1}{\Delta x} \minmod(u_{j+1}^n - u_j^n, u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (3.76)$$

con

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0 \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ y } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab \leq 0 \end{cases}$$

La Figura (3.4) muestra las pendientes minmod para un conjunto de datos.

El enfoque MUSCL extendido a un sistema de leyes de conservación ha sido el que hemos utilizado en gran parte de los cálculos relativistas. Detalles de su implementación se verán en un Capítulo posterior.

Woodward y Colella (1984), en la elaboración del PPM (Piecewise Parabolic Method) refinaron la idea de van Leer, usando datos iniciales

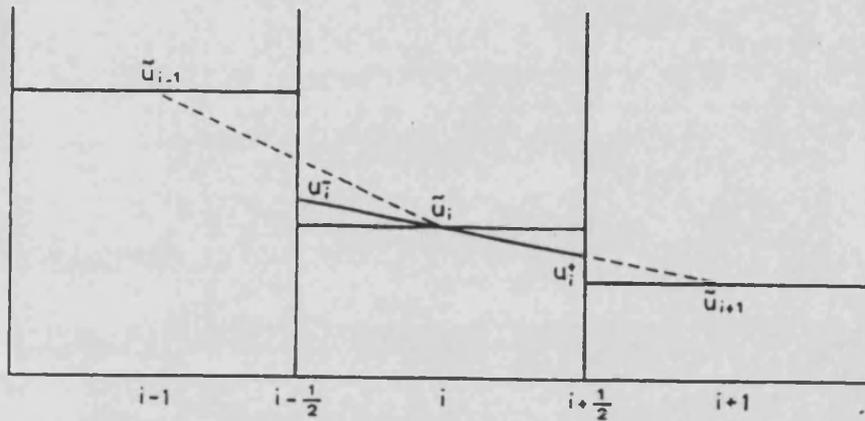


Figura 3.4: Reconstrucción lineal a trozos usando pendientes minmod.

ajustados a parábolas en cada celda. El código de Yahil, Johnston y Burrows (1985), que, con ligeras modificaciones, hemos utilizado en los cálculos de colapso newtoniano, emplea también una reconstrucción de los datos hasta precisión parabólica con apropiados limitadores de pendiente.

El teorema de convergencia de Harten no necesita que el esquema tenga variación total decreciente, sino que basta con que dicha variación esté acotada. Ello ha llevado a Shu (1987) a introducir los esquemas TVB (*Total Variation Bounded*), para los que:

$$TV(u^n) \leq B(u^0), \quad (3.77)$$

para un cierto $B(u^0) > 0$. Relajando de esta forma la propiedad TVD, estos esquemas logran mantener el orden en todos los puntos, incluyendo los extremos.

Al contrario que en los esquemas TVD, en los esquemas ENO no se requiere que disminuyan los valores en cada extremo local y en cada paso de tiempo, sino que se les permite ocasionalmente acentuar un extremo local. De hecho, los esquemas ENO parecen verificar:

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) + O(\Delta x^r), \quad (3.78)$$

siendo r el orden del método, lo que, además, implicaría el carácter TVB (Harten, Engquist, Osher y Chakravarthy, 1987). Esta propiedad

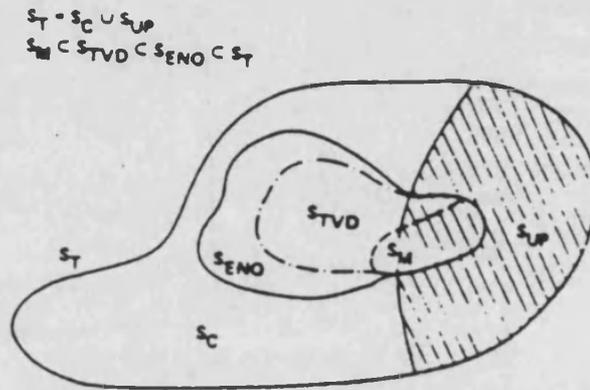


Figura 3.5: Esquemas conservativos para leyes de conservación hiperbólicas (de Yee (1989)).

permite a los esquemas ENO mantener el orden incluso en los puntos extremos. El carácter no oscilatorio se consigue considerando reconstrucciones polinómicas no oscilatorias a partir de los promedios en las celdas para calcular los flujos numéricos (ver Harten y Osher, 1987, donde los autores construyen un esquema no oscilatorio de segundo orden).

Siguiendo a Yee (1989), y teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos clasificar los esquemas en forma conservativa del siguiente modo (ver Figura (3.5)). Sea S_T el conjunto de todos los esquemas conservativos existentes de cualquier orden para leyes de conservación hiperbólicas. Este conjunto puede dividirse en dos partes, S_{UP} y S_C , donde S_{UP} es el conjunto de todos los esquemas upwind de cualquier orden. Además, sea S_{ENO} el conjunto de todos los esquemas esencialmente no oscilatorios de cualquier orden; sea S_{TVD} el conjunto de todos los esquemas con variación total decreciente de cualquier orden y sea S_M el de todos los esquemas monótonos. Entonces, $S_M \subset S_{TVD} \subset S_{ENO} \subset S_T$.

Recientemente, Shu y Osher (1988, 1989) han construido esquemas ENO usando polinomios interpolantes no oscilatorios para la reconstrucción de los flujos a partir de los valores puntuales en lugar de los promedios en las celdas. La misma idea ha sido empleada por Marquina (1991) en su esquema de tercer orden PHM (*Piecewise Hyperbolic Method*) en el que la precisión espacial se consigue mediante una reconstrucción upwind con hipérbolas (que preserva la monotonía). En los

extremos, el método puede degenerar hasta $O(\Delta x^{\frac{3}{2}})$ (debido, precisamente, al carácter monótono de la reconstrucción), por lo que supera en dichos puntos a los métodos TVD. La propiedad más interesante del PHM radica en su carácter *local* (los flujos numéricos reconstruidos son función de cuatro variables, mientras que los flujos numéricos de la reconstrucción ENO de tercer orden de Shu y Osher, 1989, son función de seis variables), lo que se traduce en una mejor resolución de las discontinuidades lineales y los puntos angulosos. Como ocurre con los esquemas ENO, el carácter TVB del PHM todavía no ha sido probado. Marquina (1991) presenta resultados con esta técnica para el caso de una ley de conservación escalar en una y dos dimensiones espaciales. Resultados para el sistema de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en una dimensión se verán en un Capítulo posterior.

3.5 Extensión a sistemas.

Los métodos escalares que acabamos de describir se extienden a sistemas de leyes de conservación usando una descomposición aproximada del sistema en sus campos característicos (*aproximación local por campos característicos*). Esta técnica de extensión es una versión generalizada del procedimiento sugerido por Roe (1981a). La idea básica es extender el esquema escalar al caso de un sistema aplicándolo a cada una de las ecuaciones características adecuadamente linealizadas.

Como ya vimos al comienzo de este Capítulo, dado el sistema lineal de p leyes de conservación:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.79)$$

se definen las variables características, \mathbf{w} , como:

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}, \quad (3.80)$$

donde \mathbf{R} es la matriz que tiene los vectores propios de \mathbf{A} en columnas. En función de las variables características, el sistema (3.79) se desacopla en p ecuaciones características:

$$\frac{\partial w^k}{\partial t} + \lambda^{(k)} \frac{\partial w^k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, p \quad (3.81)$$

(siendo $\{\lambda^{(k)}\}_{k=1}^p$ los valores propios de \mathbf{A}), lo que ofrece una forma natural de extender un esquema escalar a un sistema de ecuaciones con

coeficientes constantes, aplicándolo escalarmente a cada una de las ecuaciones características⁸.

Para sistemas no lineales ($\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{u})$), la aplicación del esquema escalar va precedida de una *linealización* del sistema, definiendo en cada interfase $j + \frac{1}{2}$ de la malla computacional una matriz jacobiana constante $\bar{\mathbf{A}}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{A}(\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}})$, en donde $\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}$ es un promedio de \mathbf{u}_j y \mathbf{u}_{j+1} .

En el caso del enfoque MUSCL, el flujo numérico, h , que aparece en (3.72), con la reconstrucción lineal se aplica a cada campo característico. En las variables originales, el flujo numérico tiene la expresión:

$$h(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_j^R) + \mathbf{F}(\mathbf{u}_{j+1}^L)) - \sum_{i=1}^p |\bar{\lambda}_{j+\frac{1}{2}}^{(i)}| \Delta \bar{\mathbf{w}}_{j+\frac{1}{2}}^{(i)} \tilde{\mathbf{e}}_{j+\frac{1}{2}}^{(i)}, \quad (3.82)$$

análoga a la (3.62) para el flujo de Roe, y en la que los $\bar{\lambda}_{j+\frac{1}{2}}^{(i)}$ y $\tilde{\mathbf{e}}_{j+\frac{1}{2}}^{(i)}$ son los valores y vectores propios, respectivamente, de $\bar{\mathbf{A}}_{j+\frac{1}{2}}$ y los saltos en las variables características $\Delta \bar{w}_{j+\frac{1}{2}}^{(i)}$ se obtienen a partir de los saltos en las variables originales según:

$$\Delta \bar{\mathbf{w}}_{j+\frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{R}}_{j+\frac{1}{2}}^{-1} (\mathbf{u}_{j+1}^L - \mathbf{u}_j^R). \quad (3.83)$$

En el caso del PHM, la extensión a sistemas (Marquina *et al.*, 1991a) se ha efectuado de una forma un poco más sofisticada. Los pasos son los siguientes:

1. Obtención de los flujos en las variables características, \mathbf{G} en los puntos de la malla numérica:

$$\mathbf{G}_j = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{F}_j, \quad (3.84)$$

en donde el subíndice j en la matriz \mathbf{R} indica que se ha calculado en el punto $x = x_j$, y \mathbf{F} es el vector de flujos del sistema de ecuaciones.

2. Aplicación de la reconstrucción hiperbólica en cada celda y obtención del flujo numérico en las variables características en cada interfase, $\hat{\mathbf{G}}_{j+\frac{1}{2}}$, a partir de las hipérbolas en las celdas j y $j + 1$, en la dirección upwind.

⁸ Este procedimiento permite, incluso, como propone Roe (1981a), usar esquemas escalares diferentes en cada campo característico.

3. Cálculo de los flujos numéricos en las variables originales:

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^{up} \mathbf{G}_{j+\frac{1}{2}}. \quad (3.85)$$

El superíndice up significa que cada componente de cada vector propio que integra la matriz \mathbf{R} se ha reconstruido a las interfaces a partir de las correspondientes componentes calculadas en las celdas (que ya se conocen del paso 1 anterior), mediante hipérbolas, en la dirección upwind (de la misma forma que se hizo en el paso 2 en el cálculo de los flujos de las variables características).

Es en este último punto en el que la extensión a sistemas del método PHM se distingue del resto de métodos: en el cálculo de los flujos numéricos en las variables originales se hace uso de los vectores propios reconstruidos de forma upwind en lugar de usar un promedio (de forma *simétrica*), como se ha hecho usualmente.

Capítulo 4

Aplicación a la dinámica de fluidos

En este Capítulo vamos a aplicar las técnicas descritas en el Capítulo anterior a las ecuaciones de la dinámica de fluidos. En la primera Sección lo haremos para las ecuaciones newtonianas en presencia de gravedad y simetría esférica, que hemos resuelto en los cálculos de colapso estelar newtoniano.

El resto del Capítulo estará dedicado a la extensión de las TSCM a la dinámica de fluidos relativistas.

4.1 Dinámica de fluidos clásica en presencia de gravedad y simetría esférica.

Las ecuaciones lagrangianas de la dinámica de fluidos pueden escribirse, de forma compacta:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial m} = \mathbf{s}(\mathbf{u}). \quad (4.1)$$

Como variable lagrangiana consideramos m , la masa incluida desde el origen. El vector de incógnitas, para el caso unidimensional es el que aparece en la Sección 2 del Capítulo 3:

$$\mathbf{u} = (V, v, E)^T. \quad (4.2)$$

El vector de flujos incluye ahora un factor geométrico $\mathcal{G}r^\alpha$, cuyo valor depende de la simetría del problema ($\mathcal{G} \equiv 1, 2\pi, 4\pi$; $\alpha = 0, 1, 2$, para

simetría plana, cilíndrica o esférica respectivamente):

$$\mathbf{F} = \mathcal{G}r^\alpha(-v, p, vp)^T. \quad (4.3)$$

Por último aparece un término fuente en el que hemos incluido, además, la aceleración Φ debida a la presencia de un campo de fuerzas externo general actuando sobre el sistema:

$$\mathbf{s} = (0, \frac{\alpha p V}{r} + \Phi, 0)^T. \quad (4.4)$$

En lo que sigue, nos centraremos en el caso de simetría esférica (algunos tests y aplicaciones en el caso de simetría plana, usando diferentes resolvedores de Riemann pueden encontrarse en Martí *et al.*, 1990a o en el apéndice del trabajo de Martí, Ibáñez y Miralles, 1990b). Tras una sencilla manipulación, el sistema de ecuaciones (4.1) con los correspondientes vectores (4.2), (4.3) y (4.4) puede escribirse en la forma:

$$\mathbf{u} = (V, rv, E)^T, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{F} = 4\pi(-r^2v, r^3p, r^2vp)^T, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{s} = (0, v^2 + \frac{3p}{\rho} - \frac{m}{r}, 0), \quad (4.7)$$

en donde el campo de fuerzas externo es el campo gravitatorio generado por el propio sistema, y donde E , energía total específica, incluye también el término de energía gravitacional:

$$E = \varepsilon + \frac{1}{2}v^2 - \frac{m}{r}. \quad (4.8)$$

En nuestros cálculos hemos utilizado una TSCM con limitador de pendiente para resolver el sistema de ecuaciones (4.1), con (4.5), (4.6) y (4.7). Los ingredientes fundamentales del esquema son:

1. Reconstrucción de la celda con objeto de obtener representaciones más precisas de las distribuciones de las variables en las celdas. En el código utilizado, los valores en las interfases se han reconstruido hasta precisión parabólica, a partir de la expresión:

$$\mathbf{u}_j^{L,R} = \mathbf{u}_j + \sigma_j^{L,R}(x_{j \mp \frac{1}{2}} - x_j) \quad (4.9)$$

(con $x \equiv m^{2/3}$), en donde las pendientes $\sigma_j^{L,R}$, verifican:

$$\sigma_j^{L,R} = \alpha_j^{L,R} \mathbf{a}_j + \beta_j^{L,R} \mathbf{b}_j, \quad (4.10)$$

con

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (4.12)$$

Los pesos $\alpha_j^{L,R}$, $\beta_j^{L,R}$ cumplen con:

$$\alpha_j^{L,R} + \beta_j^{L,R} = 1, \quad (4.13)$$

y sólo dependen de la distribución de masas, obteniéndose mediante una función prueba parabólica.

En los puntos extremos y en las proximidades de las discontinuidades, los limitadores de pendiente hacen bajar a 1 el orden del método, a fin de preservar la monotonicidad.

2. Los flujos numéricos se han calculado según la expresión (3.82). En ella intervienen de forma explícita los valores y vectores propios del jacobiano del sistema, que han debido calcularse usando un cierto promedio (en nuestros cálculos, la media aritmética) en las interfases de las celdas. Las derivadas de la presión, que aparecen en el jacobiano, se han calculado en las interfases siguiendo a Glaister (1988)¹.

3. El avance temporal de los valores medios \mathbf{u}_j^n :

$$\mathbf{u}_j^n = \frac{1}{\Delta m_j} \int_{m_{j-\frac{1}{2}}}^{m_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(m, t^n) dm, \quad (4.14)$$

¹En un trabajo anterior, (Martí, Ibáñez y Miralles, 1990c) comparamos, en el contexto del colapso estelar y para una ecuación de estado tipo *ley* γ con $\gamma = \gamma(\rho)$, el comportamiento de este resolvidor de Riemann con el resolvidor de Riemann de Godunov, expuesto en la Sección 3 del Capítulo anterior, aplicando éste último como si cada punto del plano presión-densidad estuviera ajustado por un gas ideal con exponente adiabático γ . El comportamiento de los dos resolvidores es muy similar, y las únicas diferencias se manifiestan cuando la ecuación de estado se separa mucho del gas ideal, apareciendo oscilaciones espúreas con el resolvidor de Godunov.

se ha efectuado usando una *técnica de predicción-corrección* standard, que asegura segundo orden de precisión en la integración temporal. Primero se calcula una predicción de las magnitudes u :

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n + \left(\frac{du_j}{dt} \right)^n \Delta t, \quad (4.15)$$

en donde el valor de du_j/dt se obtiene según:

$$\left(\frac{du_j}{dt} \right)^n = \frac{1}{\Delta m_j} \left[\hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^n - \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n \right] + s(u_j^n). \quad (4.16)$$

A partir de los valores predichos para u_j , se calcula una predicción de las derivadas temporales:

$$\left(\frac{du_j}{dt} \right)^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta m_j} \left[\hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1/2} - \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1/2} \right] + s(u_j^{n+1/2}). \quad (4.17)$$

El paso corrector se efectúa usando un promedio entre las derivadas temporales (4.16) y (4.17):

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{du_j}{dt} \right)^n + \left(\frac{du_j}{dt} \right)^{n+1/2} \right], \quad (4.18)$$

cuyo resultado puede usarse de nuevo como predicción en el cálculo de (4.17).

Todos estos ingredientes se han incorporado en un código hidrodinámico suministrado por el Dr. M. D. Johnston del Space Telescope Science Institute. Detalles del código pueden encontrarse en Yahil, Johnston y Burrows (1985), o en Martí, Ibáñez y Miralles (1990b).

4.2 Códigos en diferencias finitas clásicos para la dinámica de fluidos relativistas.

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativistas se han deducido usualmente por analogía con la dinámica de fluidos newtoniana, identificando adecuadamente las magnitudes relativistas que representan las densidades y flujos de materia, momento y energía (Synge, 1960; Landau and Lifshitz, 1987; Misner, Thorne and Wheeler, 1973).

Supondremos que el fluido está caracterizado por una cuadrivelocidad u^μ y un tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$. Si ρ_0 representa la densidad de masa en reposo medida en un sistema localmente inercial, una de las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativista representa la ley de conservación local de la masa y se escribe en la forma:

$$\nabla_\alpha(\rho_0 u^\alpha) = 0 \quad (4.19)$$

en donde ∇_α representa las componentes de la correspondiente derivada covariante. Las otras ecuaciones representan las leyes de conservación local de la energía y el momento y se obtienen a partir de:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.20)$$

(consecuencia de las identidades de Bianchi).

En lo que sigue, consideraremos un fluido perfecto, para el que el tensor energía impulso viene dado por:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0(1 + \varepsilon) + p)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}p, \quad (4.21)$$

en donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico (de signatura +2) del espacio-tiempo definido por la variedad diferenciable de dimensión 4, \mathcal{M} , y ε y p , la energía interna específica y la presión, respectivamente, en el sistema localmente inercial, que están relacionadas entre sí y con la densidad de masa en reposo, ρ_0 , a través de una ecuación de estado, que, en general, escribiremos como:

$$p = p(\rho_0, \varepsilon). \quad (4.22)$$

En muchas situaciones puede despreciarse el campo gravitatorio producido por el fluido, en comparación con el campo gravitatorio *background* (por ejemplo, en problemas de acreción sobre objetos compactos). En estos casos, se habla de *dinámica de fluidos prueba relativistas*, y su movimiento viene descrito exclusivamente por la ecuaciones (4.19) y (4.20), junto con la ecuación de estado (4.22). En los casos en los que la aproximación anterior no es adecuada, las ecuaciones anteriores se complementan con las de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (4.23)$$

a partir de las cuales pueden obtenerse las componentes del tensor métrico como funciones de las coordenadas.

El sistema de ecuaciones formado por (4.19), (4.20), (4.23), con la ecuación de estado (4.22), o en su versión de fluidos prueba, ha sido resuelto en diferentes contextos astrofísicos, entre los que destacan el colapso estelar y la acreción sobre objetos compactos. En lo que queda de Sección repasaremos los códigos en diferencias finitas que, históricamente se han desarrollado para resolver las ecuaciones anteriores, prestando atención a los avances teóricos que han ido introduciendo.

1. **El código de May y White.** El primer código en diferencias diseñado para resolver las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativistas fue desarrollado en el área del colapso estelar esférico, a mediados de los años sesenta. May y White (1966, 1967) desarrollaron un código capaz de describir el colapso esférico de un objeto masivo bajo la influencia de su propia gravedad y presión, ignorando el transporte de energía, en el marco de la Relatividad General y con coordenadas comóviles. El elemento de línea venía descrito por:

$$ds^2 = -a^2(m, t) dt^2 + b^2(m, t) dm^2 + R^2(m, t) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.24)$$

siendo m la masa en reposo total incluida desde el centro.

El carácter comóvil de las coordenadas permitía escribir el tensor energía-impulso de la materia (considerada como fluido perfecto) como:

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad (4.25)$$

$$T_0^0 = (1 + \varepsilon)\rho_0, \quad (4.26)$$

$$T_\nu^\mu = 0, \text{ si } \mu \neq \nu. \quad (4.27)$$

En estas coordenadas, la ecuación de conservación local de la masa, (4.19), se integra fácilmente:

$$b = \frac{1}{4\pi\rho_0 R^2}. \quad (4.28)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein, (4.23), y las ecuaciones del movimiento, (4.20), se reducían al siguiente sistema en derivadas parciales cuasilíneas (confrontar con Misner y Sharp, 1964):

$$\frac{\partial p}{\partial m} + \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial m} \rho_0 h = 0, \quad (4.29)$$

(siendo h la entalpía específica: $h = 1 + \varepsilon + p/\rho_0$)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) = 0, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \left(4\pi \frac{\partial p}{\partial m} R^2 \frac{\Gamma}{h} + \frac{M}{R^2} + 4\pi p R \right), \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{\rho_0 R^2} \frac{\partial \rho_0 R^2}{\partial t} = -a \frac{\partial u / \partial m}{\partial R / \partial m}, \quad (4.32)$$

en donde se han introducido las definiciones:

$$u = \frac{1}{a} \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (4.33)$$

$$\Gamma = \frac{1}{b} \frac{\partial R}{\partial m} \quad (4.34)$$

y

$$M = \int_0^m 4\pi R^2 \rho_0 (1 + \varepsilon) \frac{\partial R}{\partial m} dm \quad (4.35)$$

(que representa la masa total incluida). El sistema se completa añadiendo una ecuación de estado de la forma (4.22).

May y White integraron el sistema anterior de ecuaciones, para varias ecuaciones de estado sencillas, mediante un esquema en diferencias finitas. La aparición de oscilaciones numéricas tras la onda de choque formada en el proceso del colapso se prevenía introduciendo, junto a la presión, en las ecuaciones relativistas descritas anteriormente, un término de viscosidad artificial, Q , (obtenido por analogía con el propuesto originalmente por Richtmyer y von Neumann), de la forma:

$$Q = \begin{cases} \rho_0 \left(\frac{a \Delta m}{R^2} \right)^2 \frac{\partial R^2 u}{\partial m} / \Gamma & \text{si } \frac{\partial \rho_0}{\partial t} > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Matsuda y Sato (1969) usaron el código de May y White para investigar la evolución hidrodinámica de esferas de gas con masas en el rango $10^4 M_\odot - 10^{20} M_\odot$, considerando aquellas como una mezcla de gas ideal y radiación de cuerpo negro.

Wilson (1971) incorporó al código de May y White los efectos del transporte de neutrinos resolviendo la ecuación de Boltzmann,

con el objeto de determinar si la deposición de energía por los neutrinos podía provocar la expulsión de la envoltura de estrellas masivas durante el proceso del colapso, como sugirieron Colgate y White (1966).

Con muy pocas variaciones, este código ha sido usado desde entonces para la resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en simetría esférica y, en particular, ha estado en la base de los cálculos de colapso estelar efectuados por nuestro grupo (Ibáñez, 1984; Ibáñez y Miralles, 1985; Miralles *et al.*, 1990; Miralles *et al.*, 1991).

2. **El código de Smarr y Wilson.** La descripción lagrangiana es generalmente inaplicable en la simulación de flujos (relativistas o no) en varias dimensiones espaciales. Por este motivo desde los años 70 comenzaron a desarrollarse códigos usando coordenadas eulerianas. Como un primer paso, Wilson (1972) diseñó un código en coordenadas cilíndricas capaz de tratar la acreción de materia sobre un agujero negro en rotación con simetría axial (métrica de Kerr), con el objeto de estudiar la formación de ondas de choque y emisión de rayos X en la región cercana al agujero negro. La materia venía descrita por un tensor energía-impulso correspondiente a un fluido perfecto.

Tiene interés el que escribamos la forma explícita de las ecuaciones del movimiento ya que, sin cambios sustanciales, se mantendrá en todos los códigos desarrollados por, la que podríamos denominar, *Escuela de Wilson*. En función de una métrica $g^{\mu\nu}$ tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial t} (D^* \sqrt{-g}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (D^* V^i \sqrt{-g}) = 0, \quad (4.36)$$

para la conservación del número de bariones y en donde se han introducido las definiciones:

$$g = \det(g_{\mu\nu}), \quad (4.37)$$

$$D^* = \rho_0 u^0, \quad (4.38)$$

$$V^\mu = \frac{u^\mu}{u^0}, \quad (4.39)$$

siendo u^μ el cuadvivector velocidad del fluido.

La conservación del cuadrimomento se escribe:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial t} (S_{\mu}^* \sqrt{-g}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (S_{\mu}^* V^i \sqrt{-g}) + \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{S_{\alpha}^* S_{\beta}^*}{(S^*)^0} = 0, \quad (4.40)$$

donde se ha definido la correspondiente densidad como:

$$S_{\mu}^* = \rho_0 h u_{\mu} u^0. \quad (4.41)$$

Por último, la conservación de la energía, $E^* = \rho_0 \epsilon u^0$, se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E^* \sqrt{-g}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (E^* V^i \sqrt{-g}) + p \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (u^0 V^{\mu} \sqrt{-g}) = 0. \quad (4.42)$$

La ecuación de estado que cierra el sistema de ecuaciones (4.36), (4.40) y (4.42), en el código de Wilson es una *ley* γ (transformación adiabática) en la que la presión viene dada por:

$$p = (\gamma - 1) \rho_0 \epsilon \quad (4.43)$$

siendo γ una constante.

Para resolver las ecuaciones, Wilson utiliza una técnica *upwind* para tratar los *términos de transporte*². Las ecuaciones para las componentes espaciales de la densidad de cuadrimomento, S_{μ}^* , se integran mediante esta técnica, junto con las ecuaciones de conservación de la masa bariónica y de la energía. Una vez obtenidos los nuevos valores de S_i^* , D^* y E^* en un instante posterior, S_0^* se calcula a partir de la condición $u^{\mu} u_{\mu} = -1$.

La disipación en las ondas de choque se consigue mediante un término de viscosidad artificial de la forma:

$$Q = D^* \left[\left(\Delta r \frac{\partial V^r}{\partial r} \right)^2 + \left(\Delta z \frac{\partial V^z}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.44)$$

si $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ y $\left(\frac{\partial V^r}{\partial r} < 0 \text{ ó } \frac{\partial V^z}{\partial z} < 0 \right)$ y $\left(\frac{\partial (S_i^*/D^*)}{\partial r} < 0 \text{ ó } \frac{\partial (S_i^*/D^*)}{\partial z} < 0 \right)$ y cero en cualquier otro caso. En la expresión anterior, r y z representan las correspondientes coordenadas cilíndricas.

² Aquellos que tienen forma de derivada espacial de la densidad correspondiente multiplicada por una velocidad.

El código del que acabamos de hablar permite integrar las ecuaciones de la hidrodinámica en un espacio-tiempo dado. Históricamente, el siguiente paso será elaborar códigos que evolucionen a la vez las ecuaciones del movimiento de la materia y las ecuaciones de campo de Einstein.

Teniendo como precedente el estudio de la colisión de dos agujeros negros en ausencia de materia (Smarr, 1975), mediante la integración de las ecuaciones del campo gravitatorio en el marco del *formalismo (3+1)* (ver, por ejemplo, York, 1979), Wilson (1979), junto con Smarr, elaboran un código numérico para la integración de las ecuaciones de Einstein y de la hidrodinámica en el contexto del colapso estelar en simetría axial, con el fin de calcular la energía emitida en forma de radiación gravitacional. Las ecuaciones para la parte hidrodinámica aparecen escritas en la Tesis Doctoral de Dykema (1980) y, con muy pocos cambios coinciden con las de Wilson (1972). De nuevo, la materia vendrá descrita por el tensor energía-impulso correspondiente a un fluido perfecto. Teniendo en cuenta las definiciones

$$\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}, \quad (4.45)$$

(siendo α la función *lapso* y γ_{ij} la métrica espacial)

$$V^\mu = \frac{u^\mu}{u^0}, \quad (4.46)$$

$$W = \alpha u^0, \quad (4.47)$$

$$D = \alpha D^*, \quad (4.48)$$

$$E = \alpha E^*, \quad (4.49)$$

$$S_\mu = S_\mu^*, \quad (4.50)$$

las ecuaciones de la hidrodinámica se escriben:

$$\frac{\partial}{\partial t}(D\sqrt{\gamma}) + \frac{\partial}{\partial x^i}(DV^i\sqrt{\gamma}) = 0 \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_i\sqrt{\gamma}) + \frac{\partial}{\partial x^i}(S_iV^i\sqrt{\gamma}) = -\alpha\sqrt{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^i} \rho_0 h u_\alpha u_\beta \right) \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E\sqrt{\gamma}) + \frac{\partial}{\partial x^i}(EV^i\sqrt{\gamma}) = -p \left(\frac{\partial}{\partial t}(W\sqrt{\gamma}) + \frac{\partial}{\partial x^i}(WV^i\sqrt{\gamma}) \right) \quad (4.53)$$

Estas ecuaciones se resuelven considerando fijas, en cada Δt , las magnitudes relacionadas con la geometría. Una vez conocidas D , S_i y E se utiliza la condición de normalización, $u^\mu u_\mu = -1$, para obtener u^0 . El sistema se cierra con una ecuación de estado de la forma $p = p(\rho_0, \epsilon)$.

Como explica Dykema, los términos de transporte de las ecuaciones de la hidrodinámica se diferencian en forma conservativa, proponiendo como ecuación modelo en una dimensión:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi + \frac{\partial}{\partial x}(v\Psi) = 0 \quad (4.54)$$

(en la discusión que sigue, supondremos que la velocidad, v , es una función de x , pero independiente de t). Sea Δx constante, Ψ_j centrado en la celda y $v_{j+\frac{1}{2}}$ en las interfaces. Integrando la expresión anterior en la celda computacional $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times \Delta t$, se tiene:

$$(\bar{\Psi}_j^{n+1} - \bar{\Psi}_j^n)\Delta x = -(v_{j+\frac{1}{2}}\Psi'_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}\Psi'_{j-\frac{1}{2}})\Delta t \quad (4.55)$$

en donde $\bar{\Psi}$ representa una media espacial de Ψ y Ψ' una media temporal. Los cálculos a primer y segundo orden difieren en el valor asignado a Ψ' . En ambos casos la técnica es upwind. A primer orden:

$$\Psi'_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} = \begin{cases} \Psi_j^n & \text{si } v_{j+\frac{1}{2}} > 0 \\ \Psi_{j+1}^n & \text{si } v_{j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

(esquema de la *celda donante* o de Lelevier). Este esquema es muy estable pero muy difusivo. Con el objeto de reducir la difusión, Wilson introduce unos flujos calculados a segundo orden, haciendo intervenir una aproximación lineal a la pendiente de la función Ψ en cada interfase. El resultado, como puede verse en algunos tests presentados por Hawley, Smarr y Wilson (1984b), es un código menos estable. A segundo orden, se interpolan linealmente los valores de Ψ_j^n y se asigna a $\Psi'_{j+\frac{1}{2}}$ el valor de Ψ^n en el punto desplazado

una distancia $\frac{\Delta t}{2}v_{j+\frac{1}{2}}$ desde $x_{j+\frac{1}{2}}$ en sentido upwind. Esto es:

$$\Psi'_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\Psi_j^n + \Psi_{j+1}^n) - v_{j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{2}(\Psi_{j+1}^n - \Psi_j^n) \quad (4.56)$$

El algoritmo continua con el cálculo de los flujos a primer y segundo orden:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{(i)} = v_{j+\frac{1}{2}} \Psi'_{j+\frac{1}{2}}^{(i)} \quad (4.57)$$

en cada interfase y definiendo un flujo efectivo:

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}} = \lambda_{j+\frac{1}{2}} F_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} + (1 - \lambda_{j+\frac{1}{2}}) F_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}, \quad (4.58)$$

en donde el parámetro λ actúa como limitador de flujo y vale 1 en las regiones de gradientes grandes y 0 en las de flujo suave. Con estas definiciones, el esquema (4.55) se escribe en forma conservativa:

$$\bar{\Psi}_j^{n+1} = \bar{\Psi}_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{F}_{j-\frac{1}{2}} - \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}). \quad (4.59)$$

Los términos fuente se integran según

$$\bar{\Psi}_j^{n+1} = \bar{\Psi}_j^n + \Delta t S, \quad (4.60)$$

discretizando de forma simple los operadores diferenciales que aparecen en ellos.

Finalmente se incluye el efecto de la viscosidad artificial en las ecuaciones, usando una del tipo de von Neumann y Richtmyer, que se añade a la presión en determinados términos, apareciendo así:

$$\frac{\partial S_r}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial Q^r}{\partial r}, \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial Q^\theta}{\partial \theta} \quad (4.62)$$

y

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -Q^r \frac{\partial W V^r}{\partial r} - Q^\theta \frac{\partial W V^\theta}{\partial \theta}, \quad (4.63)$$

donde

$$Q^r = \begin{cases} aD \left(\frac{\partial W V^r}{\partial r} \Delta r \right)^2 & \text{si } \frac{\partial W V^r}{\partial r} < 0 \text{ y } W V^r \frac{\partial D}{\partial r} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

$$Q^\theta = \begin{cases} aD\left(\frac{\partial WV^\theta}{\partial \theta} \Delta \theta\right)^2 & \text{si } \frac{\partial WV^\theta}{\partial \theta} < 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

El código que acabamos de describir no sólo ha sido el origen de los desarrollados por la Escuela de Wilson, como después veremos, sino que ha influido decisivamente en todos los códigos de hidrodinámica relativista. Así, Piran (1980) usó el mismo método de diferenciación upwind para el tratamiento de los términos de transporte en su código numérico para describir sistemas con simetría cilíndrica (los sistemas más simples en los que pueden generarse ondas gravitacionales) en Relatividad General, e introdujo un término de viscosidad artificial análogo para el tratamiento de las ondas de choque.

Lo mismo ocurre con los códigos desarrollados por el *Grupo de Kyoto*. Entre los años 1979 y 1982, dicho grupo elaboró diversos códigos de Relatividad Numérica con el objeto de estudiar el colapso de una estrella masiva en simetría esférica (Nakamura *et al.*, 1980), en simetría axial y sin rotación (Nakamura y Sato, 1982), y con rotación (Nakamura, 1981), a fin de determinar qué clase de agujero negro se formaba en los diferentes casos. En la descripción del colapso con rotación, Nakamura utiliza la representación $[(2+1)+1]$ (Maeda *et al.*, 1980) para las ecuaciones de Einstein. La contribución más relevante del grupo de Kyoto a la integración de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista la constituye, por un lado, el uso de variables con comportamiento regular en el centro:

$$\tilde{V}^r = \frac{V^r}{r}, \quad (4.64)$$

$$\tilde{V}^z = \frac{V^z}{z}, \quad (4.65)$$

$$\tilde{S}^r = \frac{S^r}{r}, \quad (4.66)$$

$$\tilde{S}^z = \frac{S^z}{z}, \quad (4.67)$$

y por otro, la discretización de las ecuaciones de Euler y de la energía en función de las variables $x = r^2$ e $y = z^2$, siendo r y z las coordenadas cilíndricas originales.

3. **La Escuela de Wilson.** En ella pueden distinguirse, al menos, tres líneas de trabajo:

- (a) *Cosmología Numérica* : Centrella y Wilson (1983, 1984) describen un método para estudiar la evolución de modelos cosmológicos inhomogéneos con simetría plana, mediante la resolución de las ecuaciones de Einstein acopladas a las de la hidrodinámica.
- (b) *Colapso Estelar Axisimétrico* : desarrollada por Evans (1984, 1986), constituye la continuación directa de los trabajos de Wilson (1979) y Dykema (1980).
- (c) *Acreción sobre Objetos Compactos* : Hawley, Smarr y Wilson (1984a, 1984b) desarrollan un código para la descripción del movimiento de un fluido en métricas estacionarias con simetría axial.

En todos los trabajos citados aquí, la técnica numérica utilizada está basada en la descrita en la Sección anterior (el código de Smarr y Wilson). Sin embargo, dado que, como también se comentó allí, el *transporte* de Wilson es poco estable, los autores han ido introduciendo otro algoritmo, también de segundo orden, que cumple la condición de *monotonidad (transporte monótono)*. En este algoritmo, la precisión de segundo orden se obtiene definiendo unas pendientes en cada celda (*reconstrucción lineal*) que preservan la monotonidad de la función, con el objeto de evitar las oscilaciones que preceden a los comportamientos inestables, tal y como fue descrito en la Sección 4 del Capítulo anterior.

La *formulación de Wilson* (el código de Smarr y Wilson, junto con la prescripción TVD para la reconstrucción) es la única, dentro del conjunto de las técnicas en diferencias finitas, mediante la cual se aborda, actualmente, la resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista. Los códigos más modernos, como por ejemplo el de Stark y Piran (1987), presentan sólo ligeras diferencias sobre lo expuesto aquí.

Sin embargo, dicha formulación plantea serios problemas en determinados contextos. La Figura (4.1) reproduce una gráfica de Norman y Winkler (1986) en la que se representa el error relativo de la solución numérica, obtenida con la técnica descrita en Centrella y Wilson (1984) en el problema de la reflexión de una onda de choque relativista (ver el

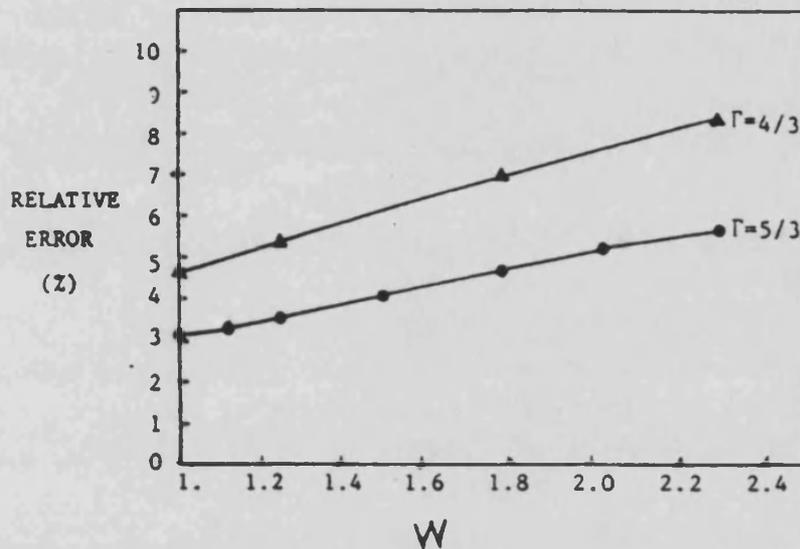


Figura 4.1: Resultados obtenidos en el problema de la reflexión de una onda de choque relativista, para el error relativo en la determinación del contraste de densidades a ambos lados de la onda de choque en función del factor de Lorentz del flujo incidente (la gráfica es de Norman y Winkler, 1986; los datos son de Centrella y Wilson, 1984).

Capítulo siguiente), frente al factor de Lorentz del gas que incide contra la pared. Como puede verse, para factores de Lorentz $W \sim 2$ ($v \sim 0.86$) los errores se sitúan entre el 5% y el 7% (dependiendo del exponente adiabático, γ del gas), y con una tendencia de crecimiento lineal.

En el artículo citado, Norman y Winkler (1986) demuestran que los grandes errores obtenidos con la formulación de Wilson, en el tratamiento de flujos relativistas se deben a la forma en que se incorpora el término de viscosidad artificial en el código. Como vimos en esta misma Sección, Wilson y sus colaboradores añaden la viscosidad artificial, Q , a la presión sólo en algunos términos (el del gradiente de la presión en la fuente de la ecuación del momento y el de la divergencia de la velocidad en la fuente de la ecuación de la energía) y no en todos, como debería hacerse si quisiera considerarse la viscosidad artificial como una viscosidad real, tal y como proponen Norman y Winkler (1986, págs. 451-52). Según estos autores las ecuaciones de la hidrodinámica deberían escribirse considerando el tensor energía impulso en la forma

$$T^{\mu\nu} = \rho_0(1 + \epsilon + (p + Q)/\rho_0)u^\mu u^\nu + (p + Q)g^{\mu\nu} \quad (4.68)$$

Así, para la métrica de Minkowski ($g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$) y considerando

la expresión anterior para el tensor energía-impulso, la ecuación del momento se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho_0 h + Q)W^2 V_j] + \frac{\partial}{\partial x^i}[(\rho_0 h + Q)W^2 V_j V^i] + \frac{\partial(p + Q)}{\partial x^j} = 0 \quad (4.69)$$

En la formulación de Wilson, Q se omite en los dos términos en que aparece sumando a $\rho_0 h$.

Sin embargo, conviene recordar que Q es, en general, una función no lineal de la velocidad, lo que hace que la cantidad QW^2V , que aparece en la densidad de momento de la ecuación (4.69) sea una función altamente no lineal de la velocidad y sus derivadas. Este hecho, junto con la presencia implícita del factor de Lorentz, W , en los términos de transporte de las tres ecuaciones, así como de la presión en la entalpía específica, hace que las ecuaciones relativistas estén mucho más acopladas que sus equivalentes newtonianas. Como consecuencia, Norman y Winkler elaboran un código implícito para describir de forma más apropiada dicho acoplamiento. El código de Norman y Winkler, al que incorporan una malla adaptable, obtiene resultados muy precisos, incluso en el caso de flujos ultrarrelativistas ($W \sim 10$), en una dimensión, pero debido a su complejidad todavía no ha sido extendido al tratamiento de flujos multidimensionales.

En lo que queda de Capítulo vamos a detallar la aplicación de las TSCM, descritas en el Capítulo anterior, al sistema de ecuaciones de la dinámica de fluidos relativista, explotando su carácter hiperbólico. En *nuestra formulación* (Martí, Ibáñez y Miralles, 1991), desaparece la viscosidad artificial y por tanto gran parte de la necesidad de desarrollar un código implícito. El resultado será un código explícito más sencillo, capaz de tratar flujos ultrarrelativistas y, en principio, extendible a problemas multidimensionales, y cuyos resultados son comparables a los obtenidos por Norman y Winkler.

4.3 Las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativistas como sistema hiperbólico.

Los fenómenos de propagación de ondas en los fluidos relativistas fueron estudiados primeramente por Taub (1948).

Lichnerowicz (1955, 1967), con sus trabajos sobre el problema de

Cauchy para las ecuaciones de Einstein³, sistematizó dichos fenómenos de propagación de ondas en la gravitación, apareciendo, en el problema general de Cauchy interior en el caso de un fluido perfecto, tres tipos de hipersuperficies características. Si la ecuación local que describe dicha hipersuperficie es $\varphi(x^\lambda) = 0$, los tres tipos de hipersuperficies características son:

1. Las tangentes en cada punto al cono de luz asociado a dicho punto, que tienen el papel de superficies de onda gravitacionales, y que verifican la expresión:

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi = 0. \quad (4.70)$$

2. Las tangentes en cada punto a la cuadrivelocidad del fluido en ese punto y que son solución de:

$$u^\alpha \partial_\alpha \varphi = 0. \quad (4.71)$$

3. Las soluciones de:

$$[g^{\alpha\beta} + (1 - \frac{1}{c_s^2}) u^\alpha u^\beta] \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi = 0 \quad (4.72)$$

(siendo c_s la velocidad local del sonido, definida como

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (4.73)$$

con ρ , densidad de energía, igual a $\rho = \rho_0(1 + \varepsilon)$), a través de las cuales pueden producirse discontinuidades en el gradiente de presión y que constituyen la extensión relativista de los frentes de onda de la hidrodinámica clásica.

Con la idea de incluir todos estos resultados en el marco de la teoría de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, Friedrichs (1974) introdujo una definición covariante de sistema hiperbólico cuasilíneo. Consideremos en \mathcal{M} el sistema cuasilíneo de p ecuaciones en derivadas parciales de primer orden para las incógnitas \mathbf{u} , que en las coordenadas $\{x^\mu\}$ se escribe como:

$$\mathbf{A}^{(\alpha)}(\mathbf{u}) \nabla_\alpha \mathbf{u} = \mathbf{s}(\mathbf{u}), \quad (4.74)$$

³Conocido el campo gravitatorio sobre una hipersuperficie Σ , determinar fuera de ella el campo gravitatorio que satisface las ecuaciones de Einstein.

donde las $\mathbf{A}^{(\alpha)}(\mathbf{u})$ son matrices $p \times p$ y \mathbf{s} un vector de \mathfrak{R}^p , función de $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^p)$.

Sea ξ^α un campo de vectores temporales unitarios en \mathcal{W} , un abierto conexo de \mathcal{M} . El sistema anterior se dice hiperbólico en la dirección temporal definida por ξ^α si se cumplen las siguientes condiciones en \mathcal{W} :

1. $\det(\mathbf{A}^{(\alpha)}\xi_\alpha) \neq 0$.
2. Para cualquier campo de vectores espaciales ζ_α en \mathcal{W} , el problema de valores propios:

$$\mathbf{A}^{(\alpha)}(\zeta_\alpha - \mu\xi_\alpha)\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (4.75)$$

tiene sólo valores propios reales, μ , y p vectores propios, \mathbf{d} , linealmente independientes.

Cuando los valores propios son todos distintos, el sistema es estrictamente hiperbólico. El vector de componentes $(\zeta_\alpha - \mu\xi_\alpha)$ recibe el nombre de *característica*.

Si \mathcal{M} es el espacio tiempo de Minkowski y se escoge $\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, la definición anterior se reduce a la que dimos al comienzo del Capítulo 2 en coordenadas cartesianas, con $-\mu$ como valores propios.

Con todo lo anterior, Anile (1989) demuestra que el sistema cuasilinéal formado por las ecuaciones (4.19), (4.20), con la ecuación de estado (4.22), que describe la dinámica de fluidos prueba relativistas, con la restricción sobre la ecuación de estado de que $c_s \leq 1$, es hiperbólico en el sentido de la definición que acabamos de dar.

Si $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ representan ahora las matrices de coeficientes del sistema de la dinámica de fluidos prueba relativistas, los valores propios, calculados según:

$$\det(\mathbf{A}^{(\alpha)}q_\alpha) = 0, \quad (4.76)$$

con $q_\alpha = (\zeta_\alpha - \mu\xi_\alpha)$, son solución de las ecuaciones:

$$u^\alpha q_\alpha = 0, \quad (4.77)$$

ó

$$[g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{c_s^2})u^\mu u^\nu]q_\mu q_\nu = 0 \quad (4.78)$$

(confrontar con las expresiones (4.71) y (4.72)). Como consecuencia de lo anterior, las características q_α son los vectores normales a las hipersuperficies características.

En el caso unidimensional y considerando $\xi^\alpha = (\sqrt{-g^{00}}, 0)$, $\zeta^\alpha = (0, \sqrt{g^{11}})$, en donde g_{00} y g_{11} son los elementos de una métrica diagonal, los correspondientes valores propios que se obtienen como solución de (4.77) y (4.78) son, respectivamente:

$$-\mu = v, \quad (4.79)$$

en donde v se ha definido como:

$$v = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{00}}} \frac{u^1}{u^0}, \quad (4.80)$$

y

$$-\mu = \frac{v \mp c_s}{1 \mp v c_s}. \quad (4.81)$$

4.4 Aplicación de las técnicas de alta resolución modernas.

Con la idea fundamental de explotar su carácter hiperbólico, vamos a trabajar con las ecuaciones de la hidrodinámica relativista tal y como se obtienen directamente de las leyes de conservación. Nos restringiremos al caso de simetría esférica y consideraremos una métrica diagonal que, en las coordenadas adaptadas a la simetría, escribiremos en la forma:

$$ds^2 = -\alpha^2(r, t) dt^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.82)$$

con

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = X^2(r, t) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.83)$$

Ahora, las ecuaciones de conservación de la masa, expresión (4.19), y del momento y la energía, expresión (4.20), se transforman en:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\alpha}{X} D v}{\partial r} = s^1, \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\alpha}{X} (S v + p)}{\partial r} = s^2, \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\alpha}{X} (S - D v)}{\partial r} = s^3, \quad (4.86)$$

para lo que se han tenido que introducir las definiciones de densidad de masa, momento y energía, respectivamente, como:

$$D = \rho_0 W, \quad (4.87)$$

$$S = \rho_0 h W^2 v, \quad (4.88)$$

$$\tau = \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W, \quad (4.89)$$

donde todas las magnitudes tienen su significado habitual⁴ y v se ha definido a partir de las componentes del cuadrivector velocidad según:

$$v = \frac{X u^r}{\alpha u^0}. \quad (4.90)$$

Por otro lado, la cantidad W , definida como:

$$W = \alpha u^0, \quad (4.91)$$

verifica la relación:

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (4.92)$$

por lo que nos referiremos a ella como el *factor de Lorentz generalizado*.

Comparando las definiciones dadas para las densidades de masa, momento y energía con las utilizadas en la formulación de Wilson (expresiones (4.48), (4.49) y (4.50)) se observa que la definición de densidad de masa, D , es la misma en los dos casos, mientras que la de la densidad de momento difiere en un factor que involucra cantidades de la métrica:

$$S = \alpha X S^r \quad (4.93)$$

La diferencia más importante, sin embargo, se encuentra en la definición de energía: mientras que Wilson utiliza una variable relacionada con la densidad de la energía interna, nosotros hemos considerado una cantidad directamente relacionada con la densidad de energía total (menos la masa en reposo),

$$\tau = \alpha^2 T^{00} - \rho_0 W. \quad (4.94)$$

Existen todavía más diferencias entre los dos conjuntos de ecuaciones. Los términos fuente s^1 , s^2 y s^3 , obedecen a las expresiones:

$$s^1 = -D \frac{\partial \ln \sqrt{\gamma}}{\partial t} - \frac{\alpha}{X} D \frac{\partial \ln \sqrt{\gamma}}{\partial r}, \quad (4.95)$$

⁴Obsérvese que en la definición de τ se resta la densidad de masa material para evitar problemas numéricos en el límite no relativista.

$$s^2 = -S \frac{\partial \ln \sqrt{\gamma X^2}}{\partial t} - \frac{\alpha}{X} (Sv+p) \frac{\partial \ln \sqrt{\gamma}}{\partial r} - \frac{\alpha}{X} (\tau+D) \frac{\ln \alpha}{\partial r} + \frac{\alpha}{X} p \frac{\partial \ln(\sqrt{\gamma}/X)}{\partial r}, \quad (4.96)$$

$$s^3 = -\tau \frac{\partial \ln \sqrt{\gamma}}{\partial t} - \frac{\alpha}{X} S \frac{\partial \ln \alpha \sqrt{\gamma}}{\partial r} - Sv \frac{\partial \ln X}{\partial t} - p \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial t} + \frac{\alpha}{X} D \frac{\partial \ln \sqrt{\gamma}}{\partial r} \quad (4.97)$$

(en donde $\gamma \equiv \det(\gamma_{ij})$), y, al contrario de lo que ocurre en la formulación de Wilson (ver miembros de la derecha de las ecuaciones (4.52) y (4.53)), no involucran términos con derivadas de las magnitudes hidrodinámicas (D, S, τ, v). La consecuencia más importante es que mientras la formulación de Wilson *rompe el carácter hiperbólico original* descrito anteriormente del sistema de ecuaciones, convirtiendo todas las ecuaciones en ecuaciones de transporte con la misma velocidad característica, la formulación de las ecuaciones en términos de las variables *conservadas* D, S y τ y la elección de los términos fuente sin derivadas en las variables hidrodinámicas, mantiene dicho carácter hiperbólico, permitiendo el uso de esquemas numéricos diseñados expresamente para el tratamiento de este tipo de sistemas.

Así pues, vamos a centrarnos en la resolución del sistema hiperbólico de leyes de conservación en una dimensión espacial:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial r} = \mathbf{s}(\mathbf{u}), \quad (4.98)$$

con \mathbf{u} , vector de incógnitas, igual a:

$$\mathbf{u} = (D, S, \tau)^T; \quad (4.99)$$

el vector de flujos, \mathbf{F} , dado por:

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha}{X} (Dv, Sv + p, S - Dv)^T, \quad (4.100)$$

y las componentes del vector de las fuentes definidas en las expresiones (4.95), (4.96) y (4.97).

Para nuestros cálculos necesitaremos conocer la descomposición es-

pectral de la matriz jacobiana, $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$:

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha}{X} \begin{pmatrix} \frac{v(\tau+p-Dp_D)}{\tau+D+p} & \frac{D(1-p_S)}{\tau+D+p} & -vD \frac{1+p_\tau}{\tau+D+p} \\ p_D(1-v^2) - v^2 & p_S(1-v^2) + 2v & p_\tau(1-v^2) - v^2 \\ -\frac{v(\tau+p-Dp_D)}{\tau+D+p} & 1 - \frac{D(1-p_S)}{\tau+D+p} & vD \frac{1+p_\tau}{\tau+D+p} \end{pmatrix}$$

en donde se ha tenido en cuenta que v , como función de las variables conservadas se escribe en la forma:

$$v = \frac{S}{\tau + D + p}. \quad (4.101)$$

La presencia del término $\frac{\alpha}{X}$ en la expresión de \mathbf{A} indica su carácter independiente respecto de las variables hidrodinámicas. Por último, los símbolos p_D , p_S y p_τ denotan las derivadas parciales de p respecto de D , S y τ .

Los valores propios de \mathbf{A} se han calculado mediante resolución directa de la ecuación característica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (4.102)$$

obteniéndose:

$$\lambda^{(1),(3)} = \frac{\alpha}{X} \frac{v \mp c_s}{1 \mp v c_s} \quad (4.103)$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{\alpha}{X} v, \quad (4.104)$$

en donde c_s representa, de nuevo, la velocidad local del sonido, definida según la expresión (4.73). Finalmente, las componentes del vector propio $\mathbf{e}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), base del subespacio correspondiente a $\lambda^{(i)}$, son:

$$\mathbf{e}_1^{(i)} = \frac{(\lambda^{(i)} - v) - v(\lambda^{(i)} p_S - p_\tau)}{(\lambda^{(i)} - v) h W - v(p_\tau - p_D)} \quad (4.105)$$

$$\mathbf{e}_2^{(i)} = \lambda^{(i)} \quad (4.106)$$

$$\mathbf{e}_3^{(i)} = 1 - \mathbf{e}_1^{(i)}. \quad (4.107)$$

Llegados a este punto, conviene que nos centremos por un momento en el papel que tiene la presión, p , en nuestra formulación. Por un lado, en las expresiones de las componentes de los vectores propios aparecen las derivadas parciales de la presión respecto a D , S y τ . La presión es, en general, una función de ρ_0 y ε , teniendo definidas, por tanto, las parciales p_{ρ_0} y p_{ε} . p_D , p_S y p_{τ} deberán calcularse, pues, a partir de p_{ρ_0} y p_{ε} , usando la transformación de variables $(\rho_0, \varepsilon, v) \rightarrow (D, S, \tau)$.

Por otro lado, la resolución numérica mediante un esquema en diferencias del sistema (4.98) con el vector de variables (4.99), permite conocer en cada instante de tiempo, t^n , y en cada celda, x_j , los valores de las variables conservadas D_j^n , S_j^n y τ_j^n , a partir de los cuales se deberán recuperar los correspondientes valores de ρ_0 , ε y v : ρ_{0j}^n , ε_j^n y v_j^n . La presencia implícita de la presión en la transformación $(D_j^n, S_j^n, \tau_j^n) \rightarrow (\rho_{0j}^n, \varepsilon_j^n, v_j^n)$ impide la obtención directa de estos últimos valores, siendo necesario recurrir a técnicas autoconsistentes. En la práctica, hemos construido una función algebraica (no lineal) de p , que tiene como parámetros a los valores de las variables conservadas, $f(D_j^n, S_j^n, \tau_j^n; p)$, cuyo cero⁵, p_j^n , es la presión real en t^n y x_j y a partir del cual y de los valores de las variables conservadas pueden obtenerse de forma unívoca los valores de ρ_{0j}^n , ε_j^n y v_j^n , usando las expresiones:

$$v_j^n = \frac{S_j^n}{\tau_j^n + D_j^n + p_j^n}, \quad (4.108)$$

$$\rho_{0j}^n = \frac{D_j^n}{W_j^n}, \quad (4.109)$$

$$\varepsilon_j^n = \frac{S_j^n - D_j^n W_j^n v_j^n - p_j^n (W_j^n)^2 v_j^n}{D_j^n W_j^n v_j^n}, \quad (4.110)$$

con

$$W_j^n = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_j^n)^2}}. \quad (4.111)$$

En los cálculos relativistas hemos usado dos TSCM, descritas en la Sección 4 del Capítulo anterior y extendidos a sistemas como se describió en la Sección 5 del mismo Capítulo:

⁵Para resolver dicha ecuación hemos usado una técnica iterativa del tipo Newton-Raphson. Debido a la existencia de un único cero para dicha función y al buen comportamiento de su derivada, la convergencia es muy rápida (en general, en menos de 10 iteraciones se alcanzan convergencias en 8 dígitos).

1. MUSCL, utilizado en todas las aplicaciones presentadas en esta Memoria.
2. PHM, utilizado en las aplicaciones de Relatividad Especial.

De los tres ingredientes fundamentales de que constan las técnicas de alta resolución, dos de ellos (la técnica de reconstrucción y el cálculo de los flujos numéricos) ya se describieron en el Capítulo anterior. El tercero, el avance temporal, en el caso del esquema MUSCL ha sido la misma técnica de predicción-corrección expuesta en la Sección 1 de este Capítulo. En el caso del PHM, se ha usado un Runge-Kutta de tercer orden que preserva la forma conservativa del esquema en cada subpaso temporal.

Capítulo 5

Experimentos Numéricos en Relatividad Especial

5.1 Las ecuaciones de la dinámica de fluidos en Relatividad Especial y simetría plana.

En ausencia de campo gravitatorio y simetría plana, las ecuaciones relativistas de conservación de la masa, el momento y la energía, se reducen a:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial Dv}{\partial x} = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv + p)}{\partial x} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(S - Dv)}{\partial x} = 0, \quad (5.3)$$

con D , S y τ definidas igual que en (4.90), (4.91) y (4.92):

$$D = \rho_0 W, \quad (5.4)$$

$$S = \rho_0 h W^2 v, \quad (5.5)$$

$$\tau = \rho_0 h W^2 - p - D. \quad (5.6)$$

W es el factor de Lorentz:

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (5.7)$$



Las aplicaciones en Relatividad Especial permiten estudiar el comportamiento de los términos púramente relativistas. Con este propósito hemos resuelto diferentes problemas en este marco. Nos hemos centrado en experimentos que involucran la presencia de ondas de choque fuertes en todos los regímenes, desde el clásico ($W \sim 1$) al ultrarrelativista ($W \gg 1$).

Los experimentos abordados han sido:

1. El problema de Sod (1978) relativista.
2. La propagación de una onda de detonación relativista.
3. La reflexión de una onda de choque.

Los problemas 1) y 2) constituyen problemas de valores iniciales discontinuos. Como ya se explicó en el Capítulo 4 al introducir el método de Godunov, la ruptura de una discontinuidad inicial genera dos estados intermedios separados entre sí y con los estados iniciales mediante tres ondas simples (ver Apéndice): dos de ellas que pueden ser ondas de rarefacción o de choque, y una discontinuidad de contacto. La magnitud de los saltos, a través de la discontinuidad, de los valores iniciales de las variables es la responsable de la mayor o menor severidad del test. Ello se traducirá en valores para el factor de Lorentz -tanto del flujo como de la onda de choque- muy superiores a la unidad.

En la Tabla (5.1) se muestran los estados iniciales correspondientes a los experimentos 1) y 2) (los estados iniciales barren el intervalo $0 \leq x \leq 1$, situándose la discontinuidad en $x = 0.5$).

5.2 El problema de Sod relativista.

Sod (1978) resolvió este test en su versión newtoniana para comparar varios esquemas en diferencias finitas. En nuestro caso, hemos resuelto la versión relativista, consistente en usar los mismos datos iniciales pero describiendo la evolución posterior del sistema mediante las ecuaciones de la hidrodinámica relativista. Ello nos permite comparar con los resultados obtenidos por Hawley, Smarr y Wilson (1984b) y Norman y Winkler (1986).

Los perfiles obtenidos son cualitativamente similares a los newtonianos, siendo destacable el cambio cuantitativo en la velocidad en el

<i>test</i>	<i>Estado L</i>				<i>Estado R</i>			
	p_L	ρ_L	v_L	γ_L	p_R	ρ_R	v_R	γ_R
RST	1.0	1.0	0.0	1.4	0.1	0.125	0.0	1.4
RBW	10^3	1.0	0.0	5/3	10^{-2}	1.0	0.0	5/3

Tabla 5.1: Condiciones iniciales para el test de Sod relativista (RST) y la propagación de una onda de detonación relativista (RBW).

estado tras la onda de choque, que pasa a valer 0.426 (menos de la mitad del valor correspondiente newtoniano), lo que da un valor para el factor de Lorentz, $W = 1.1$. Además las posiciones de la onda de choque, la onda de rarefacción y la discontinuidad de contacto se ven retardadas en comparación con la solución newtoniana en el mismo tiempo.

Los resultados de este test para la velocidad, la densidad y la presión aparecen en las Figuras (5.1), (5.2) y (5.3), respectivamente, y han sido obtenidos con el algoritmo MUSCL en una malla euleriana de 100 puntos, sin utilizar la reconstrucción. En esta figuras, los puntos numéricos se muestran explícitamente sobre la solución analítica (línea continua)¹. Es destacable la ausencia de oscilaciones, característica de las técnicas TVD.

¹En el Apéndice hemos detallado, por su interés, la obtención de la solución analítica.

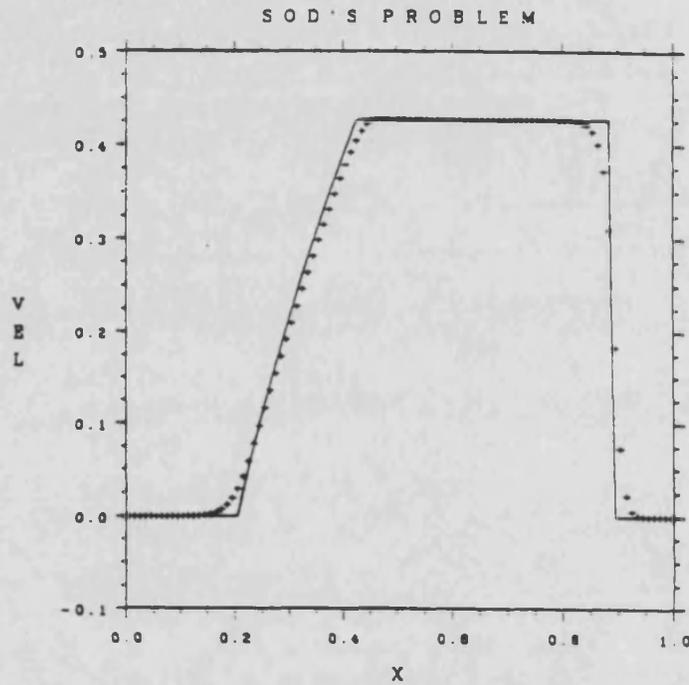


Figura 5.1: Perfil de la velocidad en el problema de Sod relativista para un tiempo, t , mayor que cero. Los puntos numéricos (cruces) aparecen superpuestos a la solución analítica (línea continua).

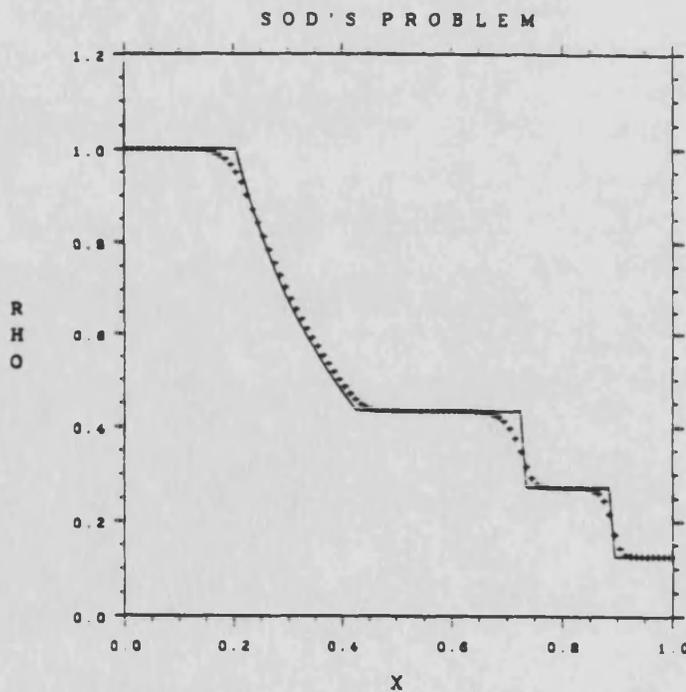


Figura 5.2: Perfil de la densidad en el problema de Sod relativista para un tiempo, t , mayor que cero. Los puntos numéricos (cruces) aparecen superpuestos a la solución analítica (línea continua).

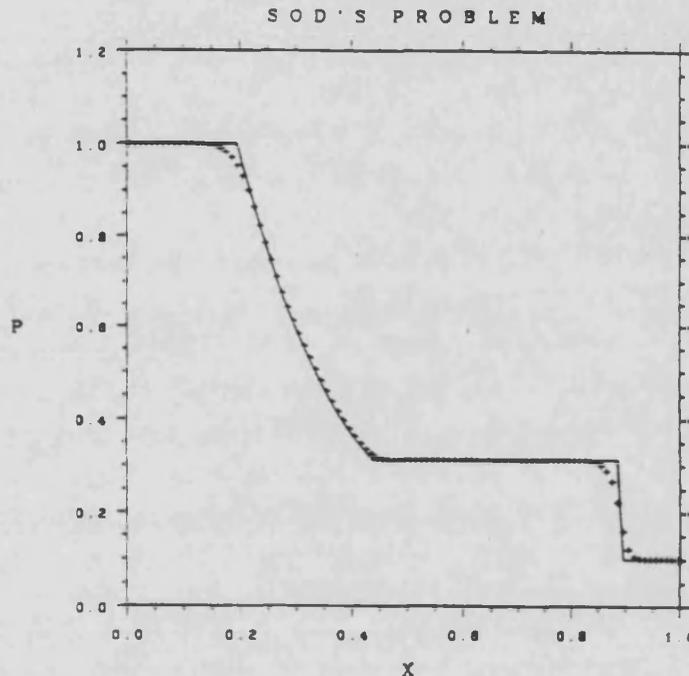


Figura 5.3: Perfil de la presión en el problema de Sod relativista para un tiempo, t , mayor que cero. Los puntos numéricos (cruces) aparecen superpuestos a la solución analítica (línea continua).

5.3 Propagación de una onda de detonación relativista.

Este test, propuesto por Norman y Winkler (1986), involucra una discontinuidad inicial en la presión de cinco órdenes de magnitud y contiene varias características genuinamente relativistas. El perfil de velocidades en la onda de rarefacción no es lineal, como ocurre en el caso de un flujo newtoniano en simetría plana, curvándose conforme v se aproxima a la velocidad de la luz. La velocidad del gas que ha sufrido el paso de la onda de choque alcanza el valor de 0.96 (ver Figura (5.4)), lo que corresponde a un factor de Lorentz $W \sim 3.5$ en esta región. La mayor parte de este gas, se sitúa en una región muy densa y estrecha limitada por la onda de choque y la discontinuidad de contacto (ver Figura (5.5)). La proximidad de estas dos discontinuidades se debe, en última instancia, a la composición de Lorentz de dos velocidades (en este caso la del fluido y la del sonido) cercanas a la de la luz. La velocidad de la onda de choque es 0.986, lo que corresponde a un factor de Lorentz de $W \sim 6$.

Las Figuras (5.5) y (5.6), junto con la (5.7) que muestra la presión, han sido obtenidas mediante el algoritmo MUSCL con una malla de 400

puntos numéricos y reconstrucción lineal. Los resultados son similares a los obtenidos por Norman y Winkler, si bien ellos obtuvieron una resolución espacial muy buena y el valor adecuado de la densidad en la capa densa (la onda de detonación), debido, en gran medida, a su técnica de malla adaptable².

Con la idea de ver qué resultados dependen de la formulación de las ecuaciones y cuáles del algoritmo numérico particular empleado (cuestión que nos hemos planteado en Marquina *et al.*, 1991b), hemos repetido el test usando la versión extendida a sistemas del PHM (de 3^{er} orden). Las gráficas correspondientes a la velocidad, la densidad y la presión se muestran en las Figuras (5.7), (5.8) y (5.9) respectivamente. Aparte de que aumenta la aproximación al valor de la densidad en la onda de detonación, la onda de choque (ver, por ejemplo, la gráfica de la velocidad) tiene un perfil mucho más limpio.

²En la Figura 8 del citado trabajo de Norman y Winkler (1986) puede verse cómo el algoritmo de malla adaptable sitúa 140 puntos, de los 400 que constituyen la red, en la región de la capa densa.

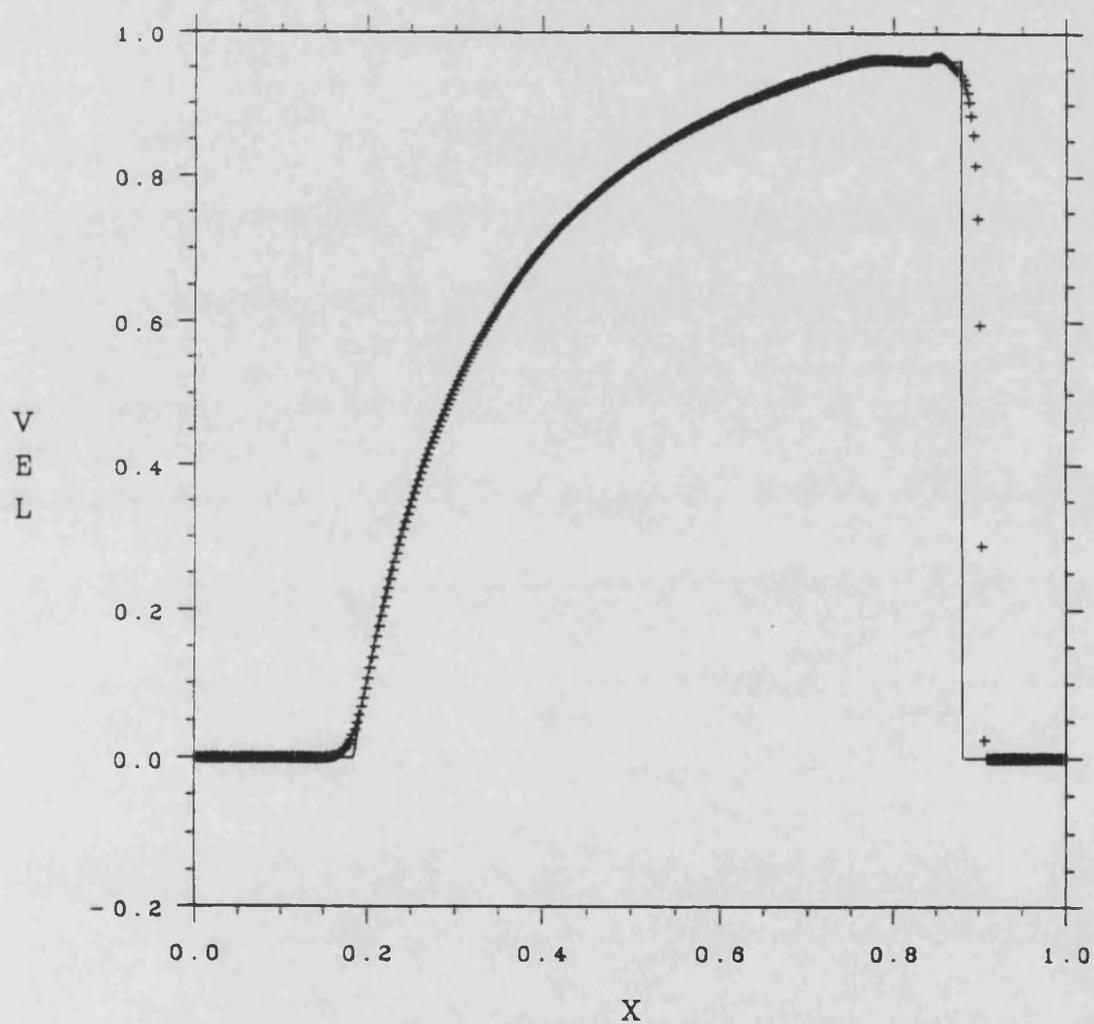


Figura 5.4: Perfil de la velocidad en el problema de la propagación de una onda de detonación relativista para un tiempo, t , mayor que cero, usando el algoritmo MUSCL. Los puntos numéricos (cruces) aparecen superpuestos a la solución analítica (línea continua).

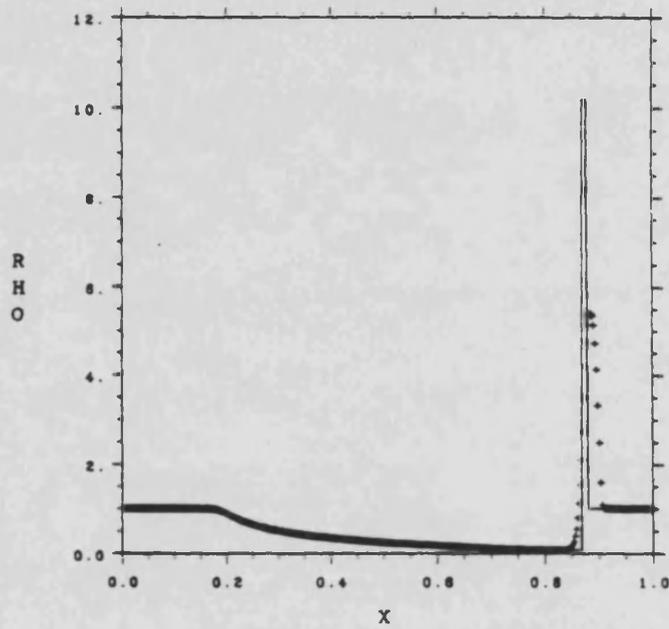


Figura 5.5: Perfil de la densidad en el problema de la propagación de una onda de detonación relativista para un tiempo, t , mayor que cero, usando el algoritmo MUSCL. Los puntos numéricos (cruces) aparecen superpuestos a la solución analítica (línea continua).

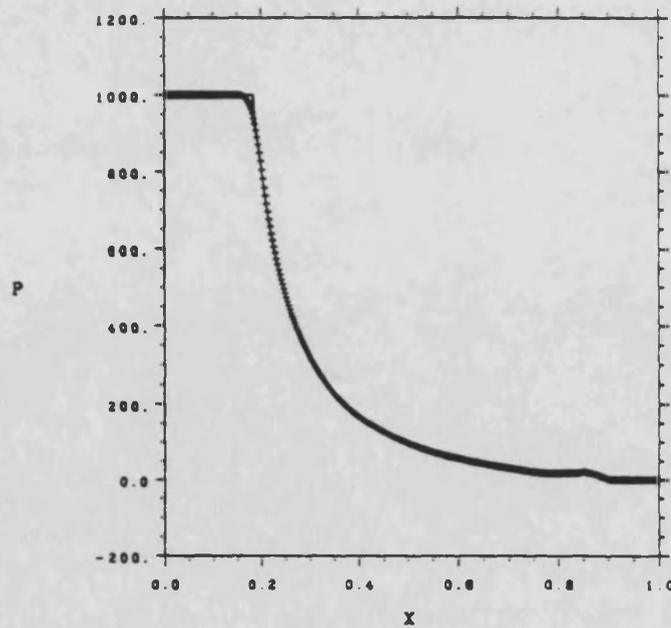


Figura 5.6: Perfil de la presión en el problema de la propagación de una onda de detonación relativista para un tiempo, t , mayor que cero, usando el algoritmo MUSCL. Los puntos numéricos (cruces) aparecen superpuestos a la solución analítica (línea continua).

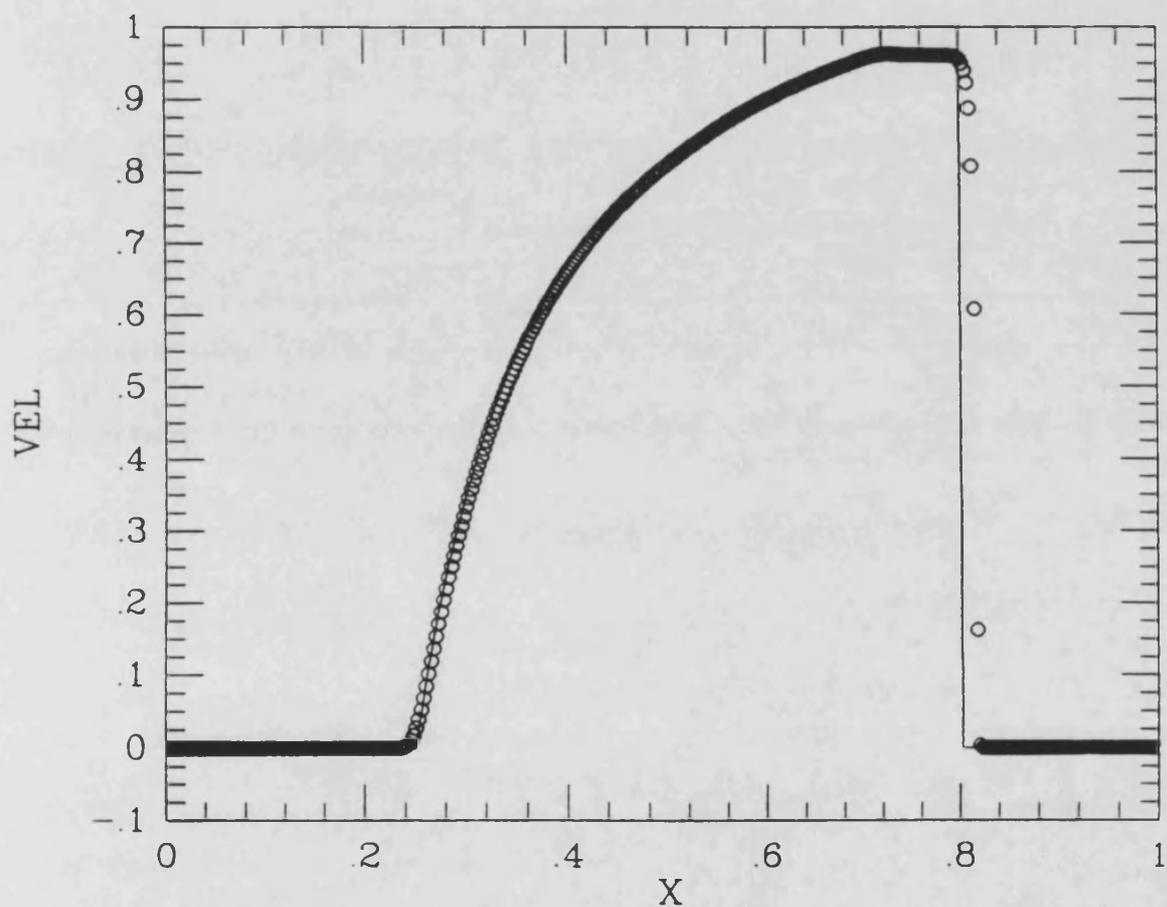


Figura 5.7: Perfil de la velocidad en el problema de la propagación de una onda de detonación relativista para un tiempo, t , mayor que cero, usando el algoritmo PHM. Los puntos numéricos (círculos) aparecen superpuestos a la solución analítica (línea continua).

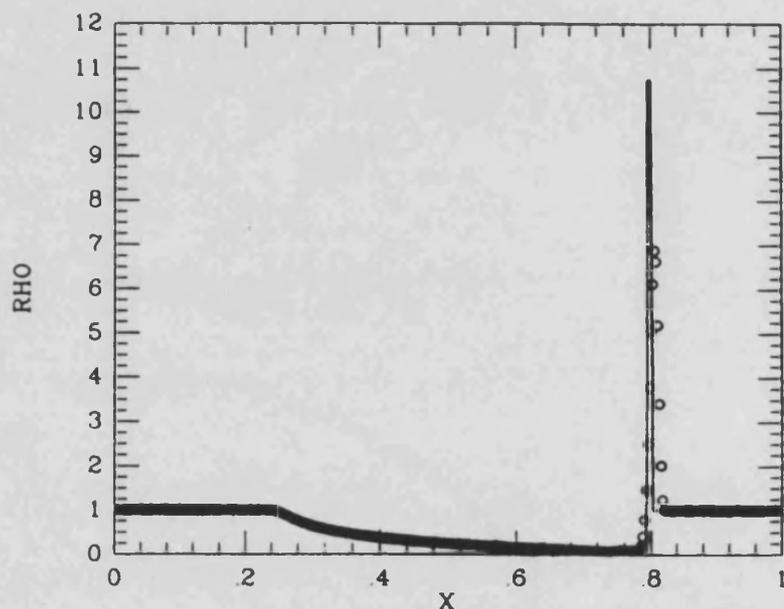


Figura 5.8: Perfil de la densidad en el problema de la propagación de una onda de detonación relativista para un tiempo, t , mayor que cero, usando el algoritmo PHM. Los puntos numéricos (círculos) aparecen superpuestos a la solución analítica (línea continua).

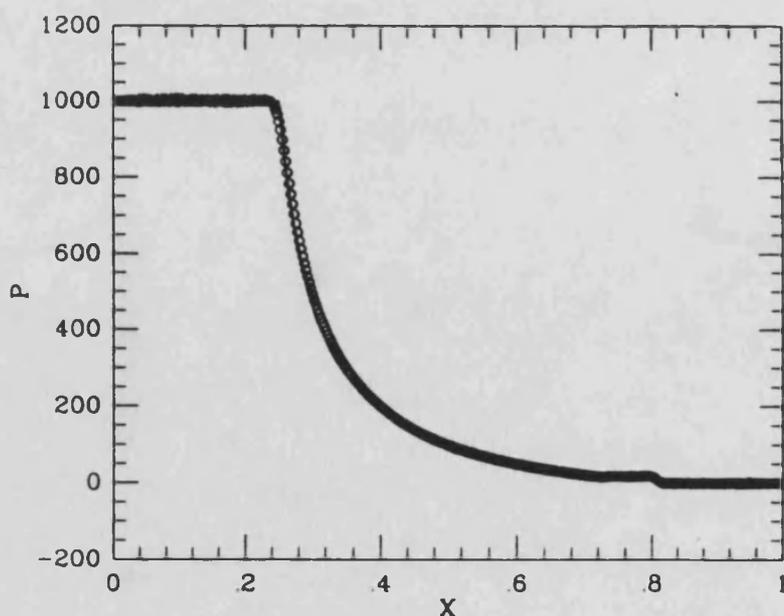


Figura 5.9: Perfil de la presión en el problema de la propagación de una onda de detonación relativista para un tiempo, t , mayor que cero, usando el algoritmo PHM. Los puntos numéricos (círculos) aparecen superpuestos a la solución analítica (línea continua).

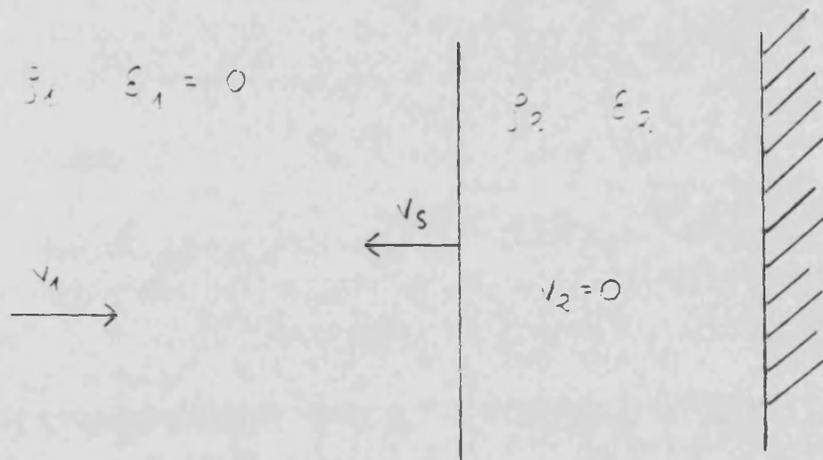


Figura 5.10: El impacto de un gas frío contra una pared rígida, a la derecha, provoca la formación de una onda de choque junto a la pared, que se propaga alejándose de ésta.

5.4 Reflexión de una onda de choque.

El impacto de un gas frío contra una pared rígida provoca la formación de una onda de choque junto a la pared, que se propaga alejándose de ésta. El gas que atraviesa la onda de choque, se comprime y calienta, convirtiendo su momento en energía interna (ver Figura (5.10)).

La condición inicial de este test consiste en un gas de densidad $\rho_1 = 1$ y energía interna $\epsilon_1 = 0$, que es lanzado contra una pared con velocidad v_1 . Hemos considerado una ecuación de estado tipo gas ideal, con $\gamma = 5/3$. El gas tras la onda de choque queda en reposo ($v_2 = 0$).

En el límite newtoniano, las condiciones de Rankine-Hugoniot conducen a una relación de compresión entre los estados 1 y 2 que viene dada por:

$$\sigma^N = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 4, \quad (5.8)$$

mientras que la energía interna específica del gas en el estado 2 es:

$$\epsilon_2^N = \frac{1}{2} v_1^2 (< 1). \quad (5.9)$$

Este test pone de manifiesto las diferencias existentes entre la dinámica newtoniana y la relativista, ya que en este último caso σ y ε_2 toman los valores:

$$\sigma = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \varepsilon_2, \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_2 = W_1 - 1, \quad (5.11)$$

siendo W_1 el factor de Lorentz del gas en el estado 1. Conforme v_1 tienda a la velocidad de la luz, el factor de Lorentz, W_1 , será mucho mayor que 1 y, con él, σ y ε_2 .

Hemos simulado diferentes casos, variando el valor de la velocidad del flujo incidente, v_1 , de forma que hemos cubierto todos los regímenes: newtoniano, relativista y ultrarelativista, alcanzando un valor para W_1 en torno a 23, para las simulaciones efectuadas con el algoritmo MUSCL. Las Figuras (5.11) a la (5.20) muestran los valores para la velocidad y la presión en un instante de su evolución, cuando la onda de choque ya ha sido formada, para los valores de $v_1 = 0.01, 0.4, 0.8, 0.9$ y 0.99 . Las gráficas muestran también la correspondiente solución analítica (línea continua). En estos cálculos fue usada una malla euleriana de 100 puntos sin el algoritmo de reconstrucción de la celda, con lo que el método tiene una precisión espacial de primer orden. En la Tabla (5.2) aparecen los errores relativos en el cálculo de la relación de compresión que se obtienen con la formulación de Wilson (y que se han tomado del trabajo de Centrella y Wilson (1984)) y con nuestra formulación y el algoritmo MUSCL, para una muestra de los cálculos efectuados.

En general, la onda de choque se resuelve en dos o tres celdas numéricas y no aparecen oscilaciones tras ella. Ahora bien, conforme el flujo se hace más relativista, la resolución en la onda de choque es más pobre, siendo necesarios entre ocho y nueve puntos cuando $W \gg 1$ (comparar por ejemplo, las Figuras (5.16), (5.18) y (5.20) para la presión).

Finalmente hemos aplicado el algoritmo PHM (con una malla euleriana de 100 puntos) a la simulación de un flujo ultrarelativista: $v_1 = 0.9999$ ($W \sim 70$). Los resultados mostrados en las Figuras (5.21), (5.22) y (5.23) exhiben, de nuevo, una resolución muy buena en la representación de la onda de choque e indican que la pérdida de precisión conforme $W \gg 1$ que aparecía en los resultados con MUSCL, se debe a la técnica particular utilizada y no a las limitaciones de nuestra formulación.

Este test fue usado, en la calibración de su código, por May y White

v_1	W_1	σ_{teor}	$\varepsilon_r^W(\sigma)$ (%)	$\varepsilon_r^{MUSCL}(\sigma)$ (%)
0.01	1.00	4.00	3.1	0.02
0.40	1.09	4.23	-	0.2
0.45	1.12	4.30	3.3	-
0.75	1.51	5.28	4.1	-
0.80	1.67	5.67	-	0.2
0.90	2.29	7.24	5.6	0.1
0.99	7.09	19.22	-	0.2

Tabla 5.2: Errores relativos medios en el cálculo de la relación de compresión con la formulación de Wilson (W) y con nuestra formulación y el algoritmo MUSCL, en el problema de la eflexión de una onda de choque.

(1967) (aunque, por tratarse de un código lagrangiano, el test es menos severo): encontraron errores relativos del 30% en la estimación de ε_2 cuando $W \sim 100$. Más recientemente, además de en Centrella y Wilson (1984), aparecen en los trabajos de Hawley, Smarr y Wilson (1984b) (en donde se muestran los resultados obtenidos para un flujo incidente con factor de Lorentz 2.24) y en Norman y Winkler (1986) (para un flujo incidente con factor de Lorentz 10).

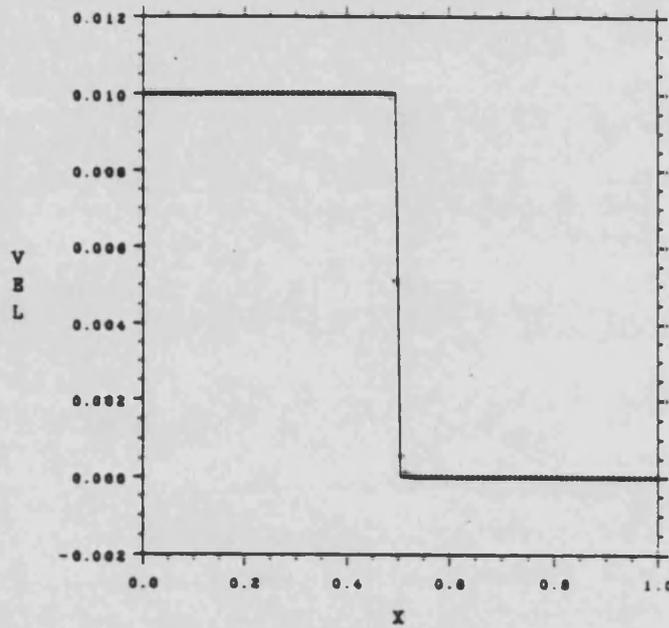


Figura 5.11: Perfil de la velocidad en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL. La velocidad del flujo que inicialmente incidía contra la pared es $v_1 = 0.01$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

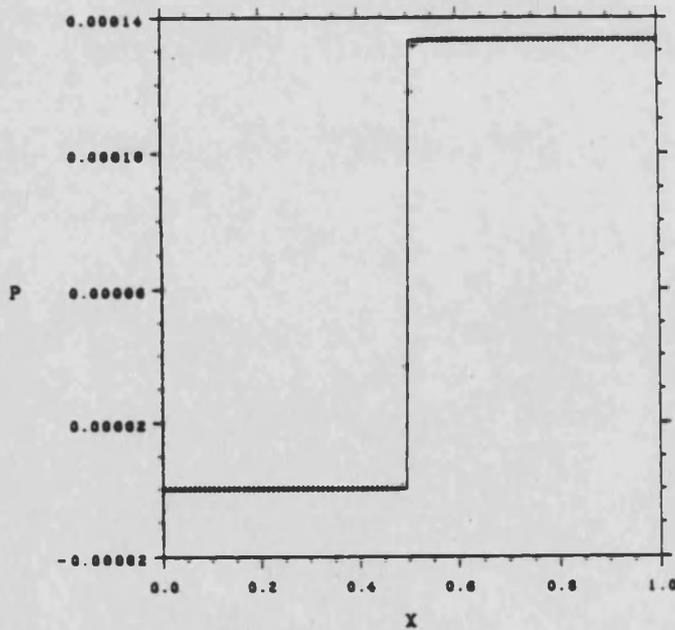


Figura 5.12: Perfil de la presión en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL correspondiente al caso en el que el flujo incidente contra la pared tenía una velocidad $v_1 = 0.01$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

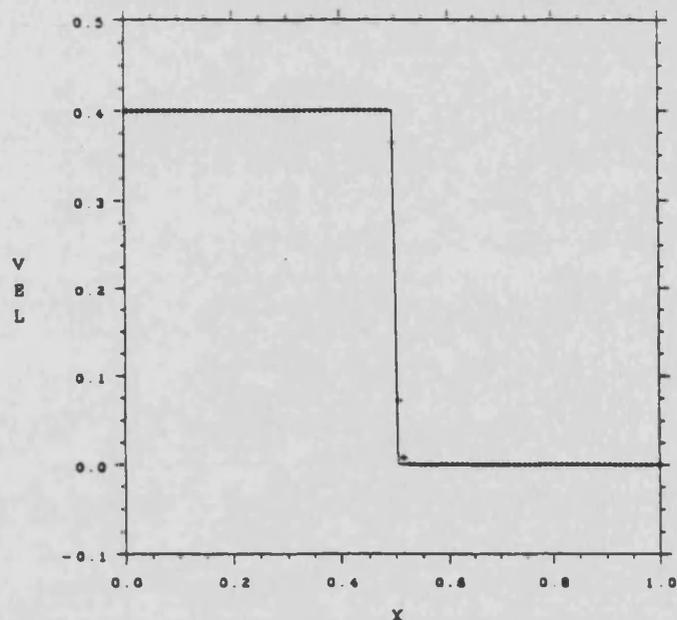


Figura 5.13: Perfil de la velocidad en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL. La velocidad del flujo que inicialmente incidía contra la pared es $v_1 = 0.40$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

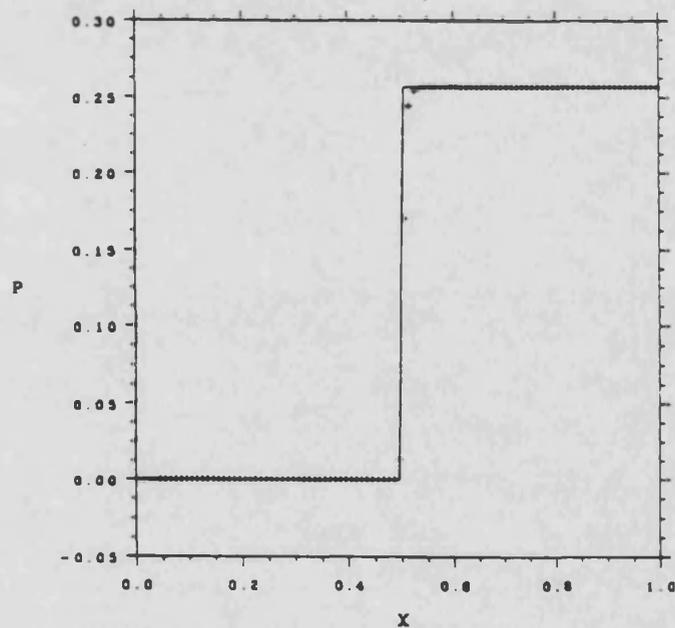


Figura 5.14: Perfil de la presión en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL correspondiente al caso en el que el flujo incidente contra la pared tenía una velocidad $v_1 = 0.40$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

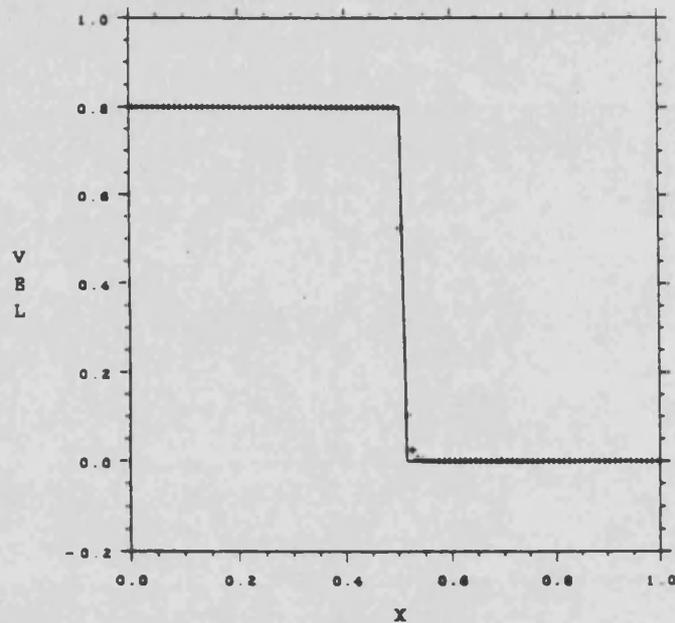


Figura 5.15: Perfil de la velocidad en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL. La velocidad del flujo que inicialmente incidía contra la pared es $v_1 = 0.80$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

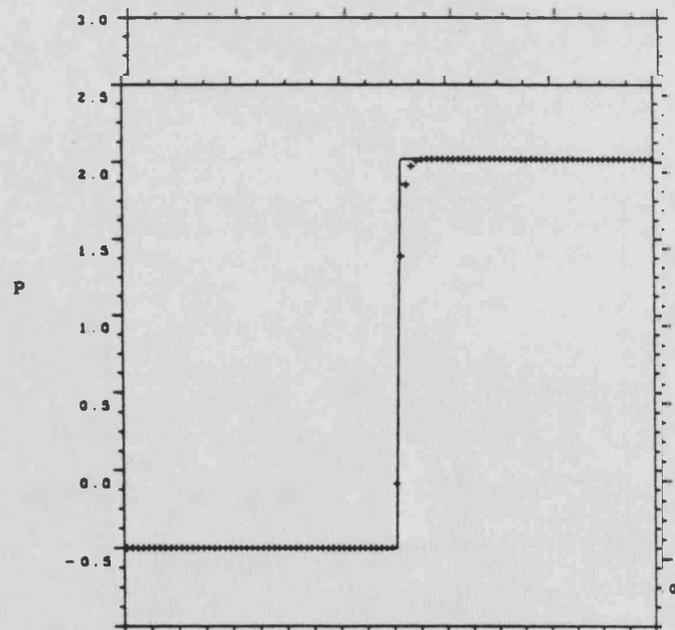


Figura 5.16: Perfil de la presión en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL correspondiente al caso en el que el flujo incidente contra la pared tenía una velocidad $v_1 = 0.80$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

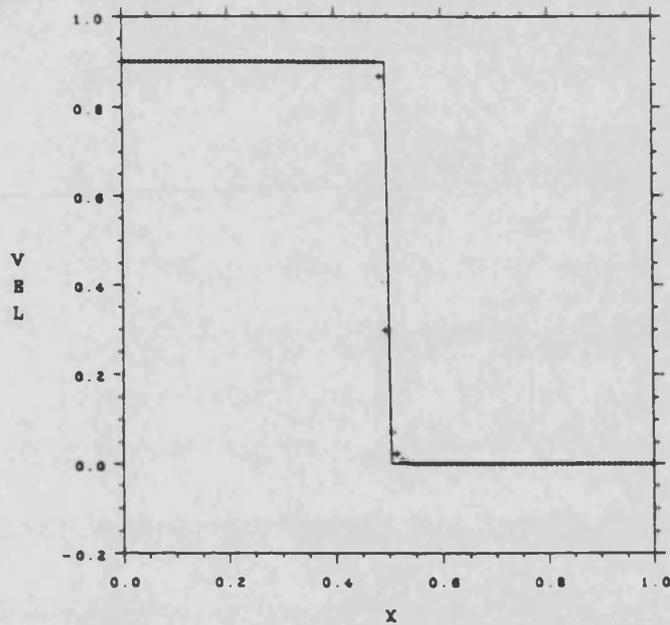


Figura 5.17: Perfil de la velocidad en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL. La velocidad del flujo que inicialmente incidía contra la pared es $v_1 = 0.90$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

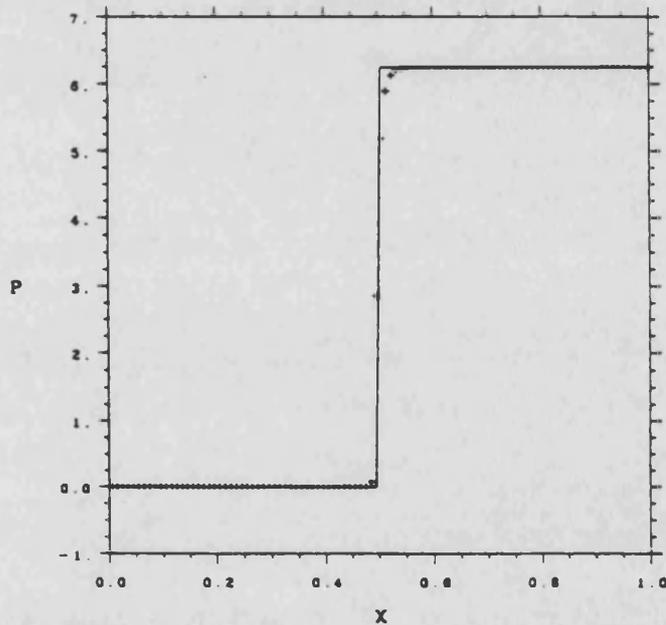


Figura 5.18: Perfil de la presión en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL correspondiente al caso en el que el flujo incidente contra la pared tenía una velocidad $v_1 = 0.90$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

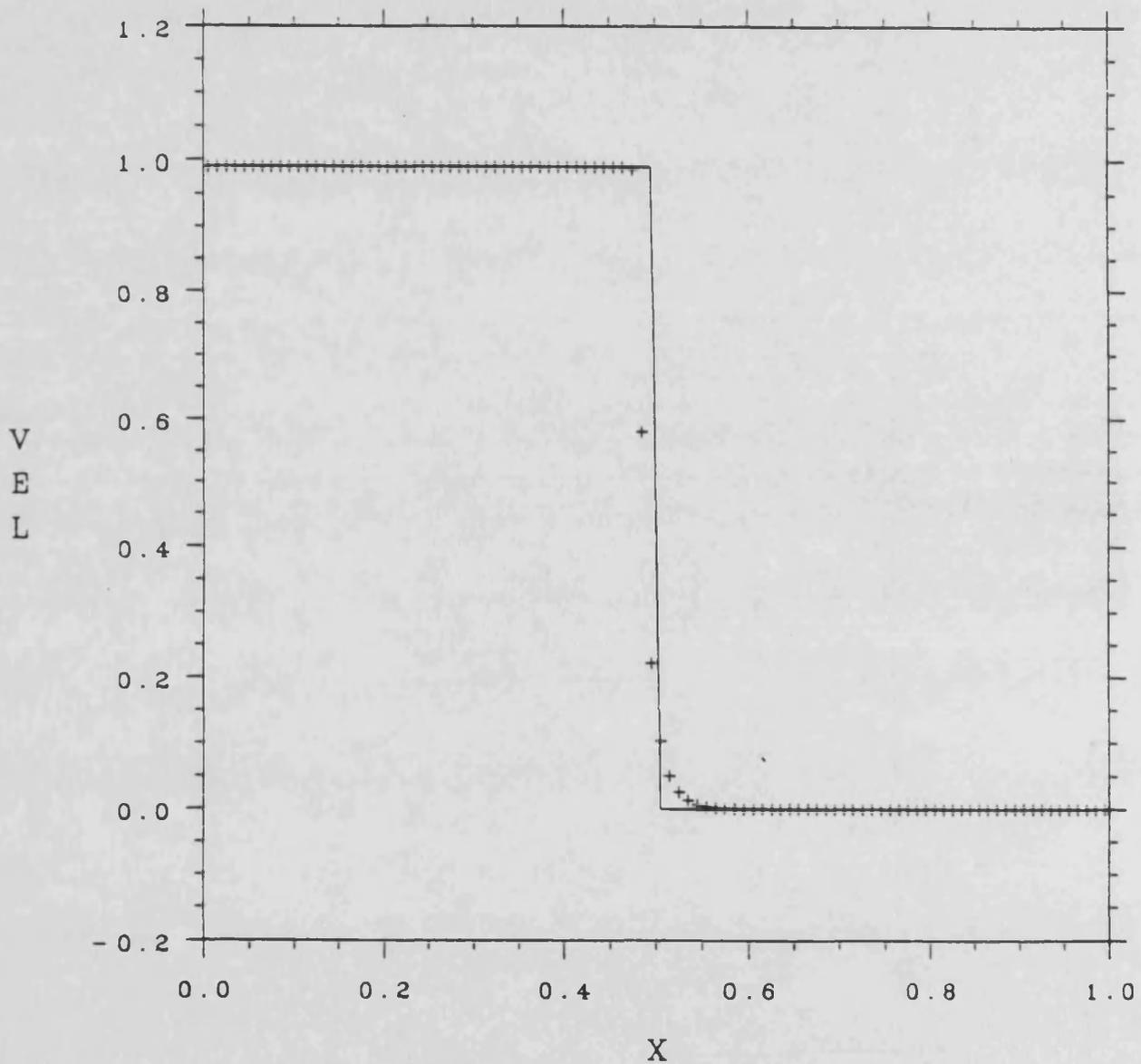


Figura 5.19: Perfil de la velocidad en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL. La velocidad del flujo que inicialmente incidía contra la pared es $v_1 = 0.99$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

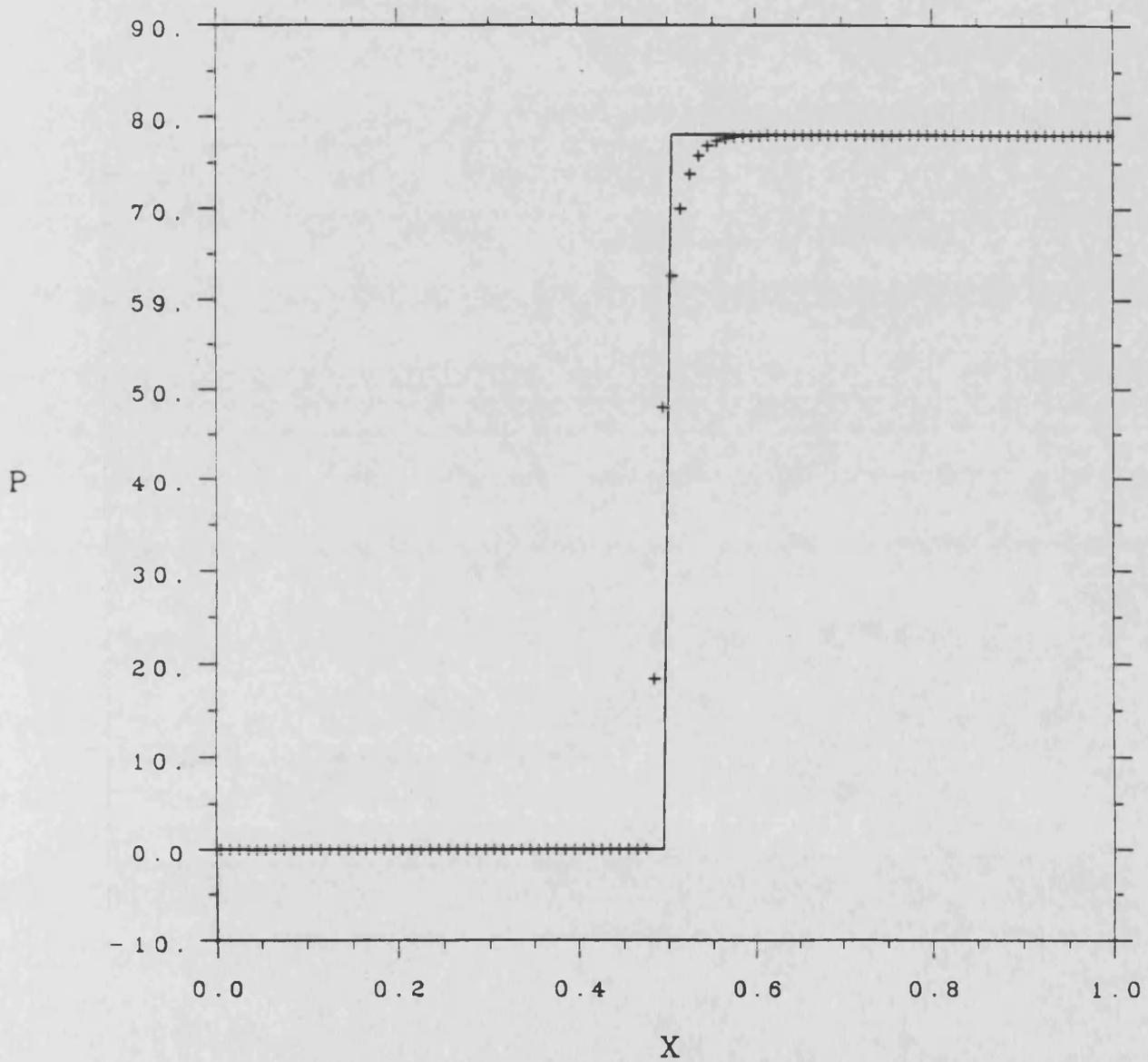


Figura 5.20: Perfil de la presión en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo MUSCL correspondiente al caso en el que el flujo incidente contra la pared tenía una velocidad $v_1 = 0.99$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

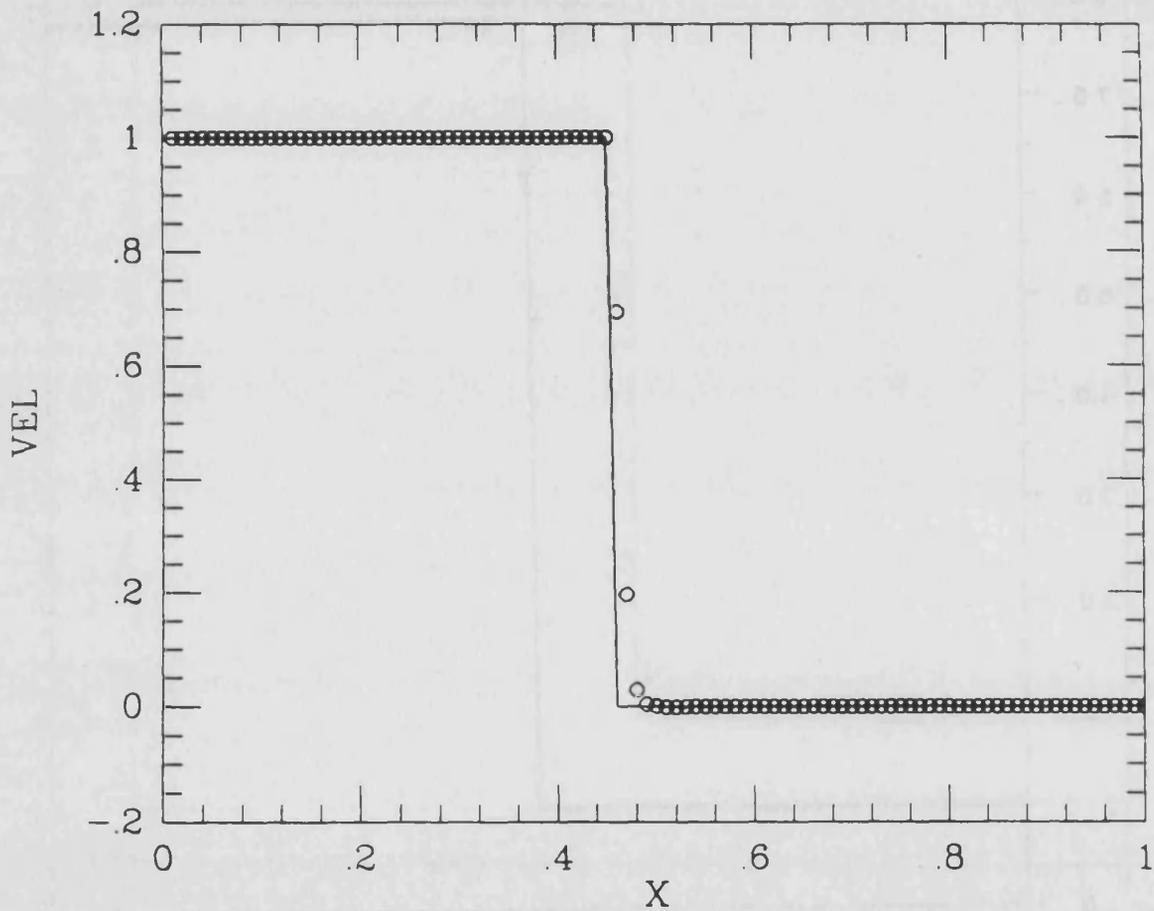


Figura 5.21: Perfil de la velocidad en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo PHM. La velocidad del flujo que inicialmente incidía contra la pared es $v_1 = 0.9999$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

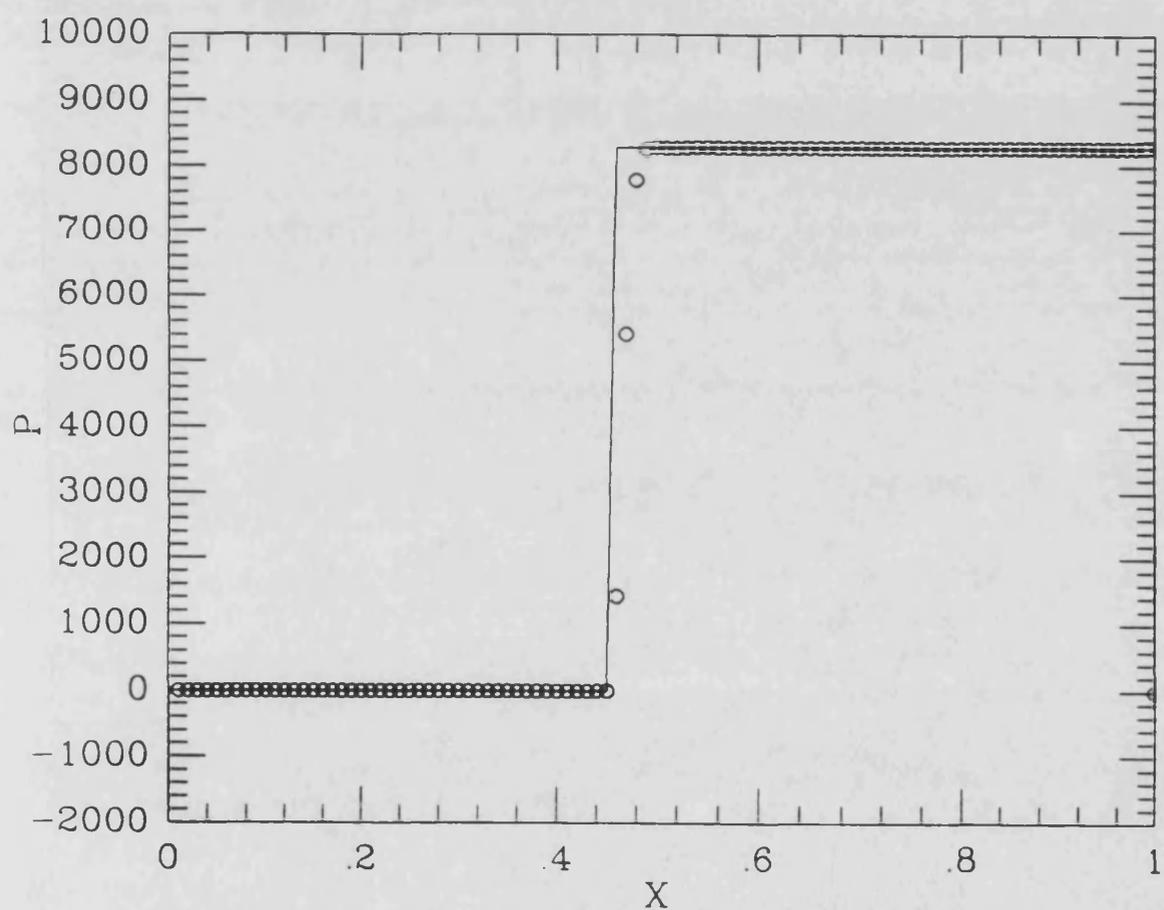


Figura 5.22: Perfil de la presión en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo PHM correspondiente al caso en el que el flujo incidente contra la pared tenía una velocidad $v_1 = 0.9999$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

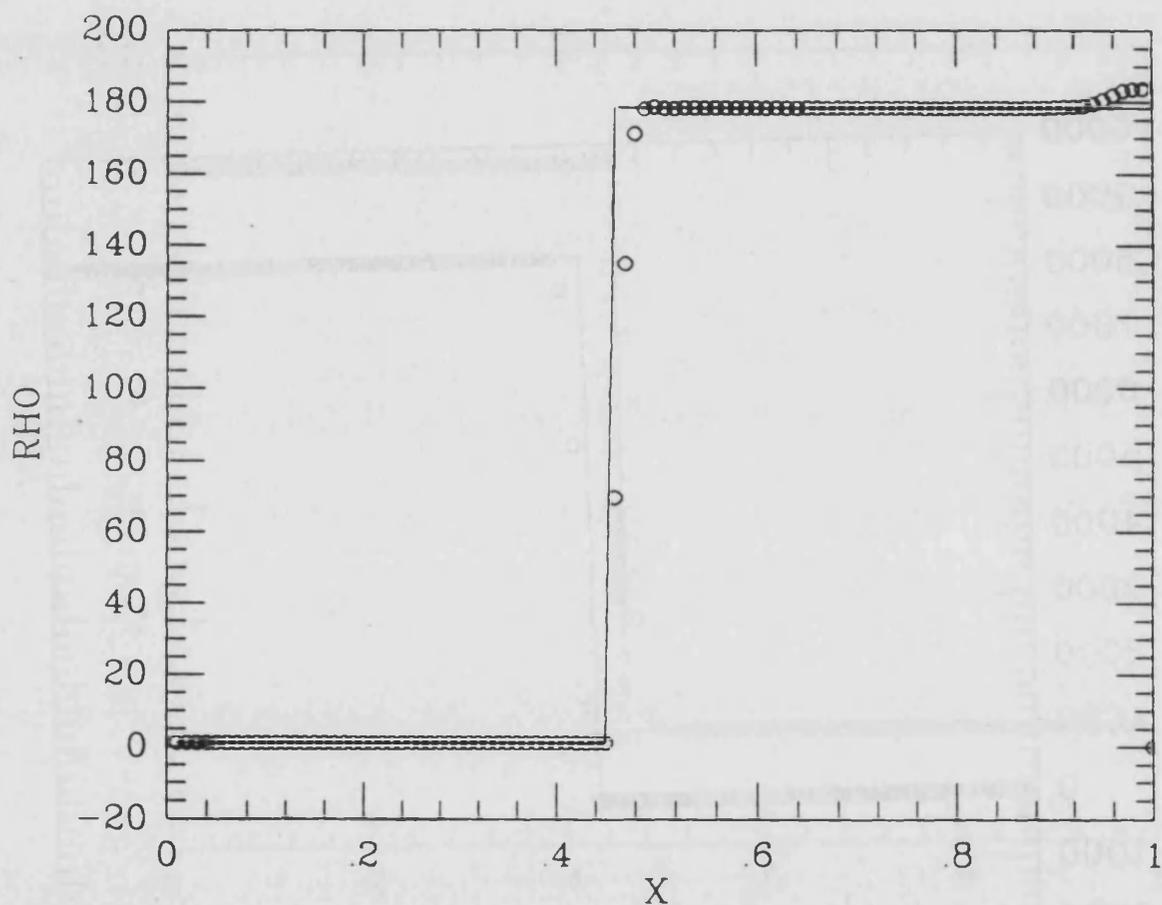


Figura 5.23: Perfil de la densidad en el problema de la reflexión de una onda de choque en un tiempo, t , mayor que cero, obtenido con el algoritmo PHM correspondiente al caso en el que el flujo incidente contra la pared tenía una velocidad $v_1 = 0.9999$. Los puntos numéricos (cruces) se han superpuesto a la solución analítica (línea continua).

Capítulo 6

Acreción esférica sobre objetos compactos

6.1 Introducción.

Como ya comentamos en la Introducción de esta Memoria, existen numerosos escenarios astrofísicos que pueden describirse en términos de un objeto compacto que acreta materia: fuentes compactas de rayos X, discos de acreción supermasivos en núcleos de galaxias activos, ...

En su versión newtoniana y para flujos sin momento angular, el problema fue analizado por primera vez por Hoyle y Bondi (1944), quienes realizaron cálculos analíticos aproximados, interesándose sobre todo en la estimación de ritmos de acreción. Según estos autores, las partículas, describiendo órbitas hiperbólicas alrededor del objeto, formaban una zona de alta densidad en la parte de detrás del objeto. En dicha zona, la *columna de acreción*, las colisiones entre las partículas se hacen importantes, destruyendo la componente transversal del momento y dejando inalterada la componente radial. Si la velocidad resultante para la partícula es menor que la de escape en ese punto, entonces es capturada por el objeto. Según este modelo, el ritmo de acreción viene dado por la expresión:

$$A = 4\pi\alpha\frac{M^2}{v_\infty^3}\rho_\infty, \quad (6.1)$$

en donde M es la masa de la fuente del campo que se considera inalterada durante todo el proceso de acreción, y ρ_∞ y v_∞ son la densidad y el módulo de la velocidad (uniforme) del fluido en el infinito. El parámetro

α varía entre $\frac{1}{2}$ y 1.

En la obtención de la expresión anterior, se ha supuesto que las partículas no interaccionaban excepto en el interior de la columna de acreción. Esta es la situación, por ejemplo, cuando se considera un fluido altamente supersónico, en el que la densidad de energía cinética es mucho mayor que la densidad de energía térmica, con lo que las fuerzas debidas a la presión son despreciables.

Si el objeto no se mueve respecto del fluido en el infinito (Bondi, 1952) el flujo es esféricamente simétrico y el gas cae radialmente hacia el objeto, existiendo una longitud característica correspondiente al radio de acreción (el *radio de Bondi*) dado por:

$$R_B = \frac{M}{c_\infty^2}, \quad (6.2)$$

donde c_∞ es la velocidad del sonido en el gas en el infinito, dando lugar a un ritmo de acreción:

$$A = 4\pi\lambda \frac{M^2}{c_\infty^3} \rho_\infty, \quad (6.3)$$

donde λ es un parámetro adimensional del orden de la unidad dependiente del valor del exponente adiabático del gas, y para el que existen expresiones analíticas.

Para flujos subsónicos o moderadamente supersónicos, el análisis no es tan simple. En estos casos, la similitud de las ecuaciones (6.1) y (6.3) permitió a Bondi (1952) sugerir una fórmula de interpolación aproximada:

$$A = 2\pi \frac{M^2}{(c_\infty^2 + v_\infty^2)^{3/2}} \rho_\infty. \quad (6.4)$$

Las primeras simulaciones numéricas del problema de la acreción sobre un objeto gravitante en el marco de la dinámica newtoniana fueron realizadas por Hunt (1971, 1979), quien las aplicó a la acreción de materia intergaláctica por parte de nuestra Galaxia. Hunt aborda el problema resolviendo las ecuaciones para el movimiento del fluido, a partir de un estado inicial uniforme, hasta obtener un estado estacionario. La técnica numérica empleada fue el esquema de Lax-Wendroff de dos pasos. El tratamiento numérico de las ondas de choque se efectuó primero (Hunt, 1971) mediante una técnica de *shock-fitting* y más tarde (Hunt, 1979) introduciendo un término de viscosidad artificial. Las conclusiones más

importantes de los trabajos de Hunt son: i) la columna de acreción propuesta por Bondi y Hoyle no se forma y ii) para flujos supersónicos ($\mathcal{M} < 2$; \mathcal{M} , número de Mach en el infinito) el ritmo de acreción es, al menos, dos veces el valor predicho por estos autores (6.4).

Más recientemente Shima *et al.* (1985) han estudiado también el problema en el caso newtoniano. La principal característica de su trabajo es el empleo de una técnica *shock-capturing* (la versión en volúmenes finitos del método de 2º orden de Osher; ver Chakravarthy y Osher, 1983) que evita el uso de la viscosidad artificial para el tratamiento de las ondas de choque, motivados por el hecho de que para calcular el flujo de forma estable en presencia de ondas de choque fuertes, hay que introducir una viscosidad numérica excesiva, que causa errores importantes incluso en otras regiones del flujo¹. En sus cálculos detectan la aparición de un *cono de acreción*, en lugar de la columna de acreción, situado tras el objeto en el caso de flujos supersónicos, y cuyo ángulo de apertura depende del número de Mach del flujo.

En el caso relativista el estudio del flujo de un fluido en una métrica de Kerr motivó el desarrollo del primer código de acreción hidrodinámico (Wilson, 1972). En este trabajo se descubrieron, por primera vez, los discos de acreción *gruesos*.

En la actualidad los trabajos de Hawley (Hawley, Smarr y Wilson, 1984a; Hawley, Smarr y Wilson, 1984b; Hawley, 1986) siguen la línea del trabajo original de Wilson (1972) para la descripción numérica de la acreción no esférica sobre un agujero negro, mientras que Petrich *et al.* (1989) abordan la descripción relativista de la acreción sobre un agujero negro en movimiento en la que el gas no posee un momento angular neto y, por tanto, en una línea similar a la de Hunt.

En este último caso, los cálculos de Petrich *et al.* (1989) se han efectuado usando el código de Stark y Piran (1987) que presenta sólo ligeras modificaciones respecto del código usado por Hawley, Smarr y Wilson (1984b) (formulación de Wilson).

El nivel actual de desarrollo de nuestra formulación, sin embargo, sólo permite el tratamiento de flujos en una dimensión. El resto del Capítulo lo vamos a dedicar a la descripción de flujos de acreción esférica

¹En este punto es interesante señalar que los resultados de Shima *et al.* (1985), los únicos obtenidos para este problema haciendo uso de un método tipo Godunov, son los más precisos en el cálculo del ritmo de acreción para flujos supersónicos, es decir, con presencia de ondas de choque, como se desprende de la Fig. 1 del trabajo de Petrich *et al.* (1989).

en la métrica generada por un objeto compacto (métrica de Schwarzschild exterior). La técnica MUSCL, aplicada a las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativistas escritas en la forma conservativa (4.101) con \mathbf{u} , \mathbf{F} dados por (4.102) y (4.103), respectivamente, y las componentes del vector de las fuentes, \mathbf{s} , dadas por (4.98), (4.99) y (4.100), ha sido la utilizada en todas las aplicaciones que presentaremos en este Capítulo.

La malla numérica espacial utilizada, que cubre la región $2.1M \leq r \leq 20M$ (siendo M la masa del objeto), está compuesta por 50 celdas de tamaño Δr ; variable, siendo más pequeño en las proximidades del objeto compacto central. En la práctica, los tamaños de las celdas son los elementos de una serie geométrica de razón mayor que la unidad.

Comenzaremos considerando flujos estacionarios para los que existen soluciones analíticas. Ello nos permitirá contrastar los resultados numéricos obtenidos con nuestro código. Teniendo en cuenta las hipótesis de estacionariedad y flujo radial, las ecuaciones de conservación del número de bariones y de la energía, que introdujimos en el Capítulo 4: se convierten en:

$$\frac{d}{dr}(\rho_0 u^r \sqrt{-g}) = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{d}{dr}(\rho_0 h u_0 u^r \sqrt{-g}) = 0, \quad (6.6)$$

(en donde se ha considerado el fluido como perfecto). En las expresiones anteriores, g denota el $\det(g_{\mu\nu})$, siendo $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico en coordenadas esféricas correspondiente a la métrica de Schwarzschild exterior, en función del cual, el elemento de distancia se escribe:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (6.7)$$

Como la métrica es conocida y fija, y u^θ y u^ϕ son cero, el conocimiento de la función $u^r(r)$ permite obtener $\rho_0(r)$ y $h(r)$ (dada la ecuación de estado). En general, $u^r(r)$ se obtiene a partir de la ecuación de evolución del momento (4.85). Sin embargo, aquí la obtendremos como consecuencia de imponer condiciones restrictivas sobre los flujos.

6.2 Flujo geodésico.

Para partículas sin interacción (polvo), la no dependencia de la métrica con el tiempo implica que u^0 es una constante del movimiento (ver, por

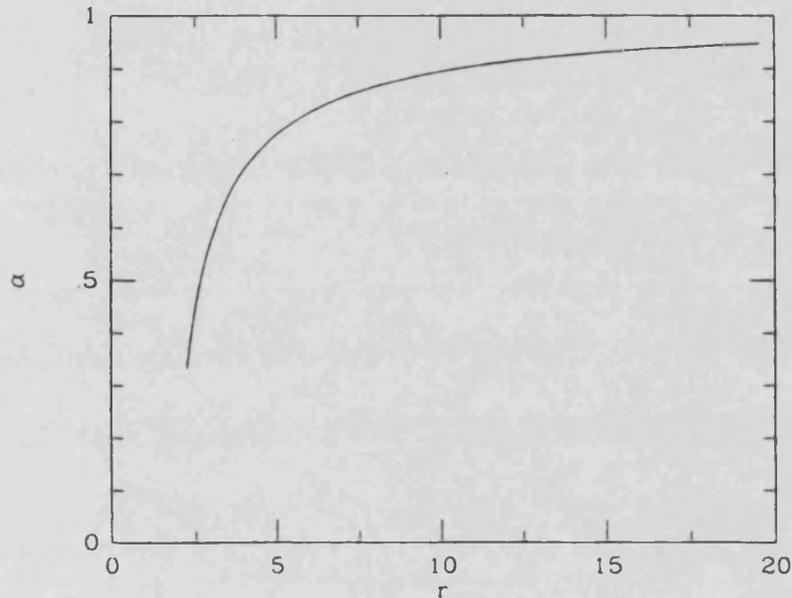


Figura 6.1: Valores para la función $\alpha = \sqrt{g_{00}}$, correspondiente a la métrica de Schwarzschild, en la malla computacional. La coordenada radial r se mide en unidades de la masa del agujero negro.

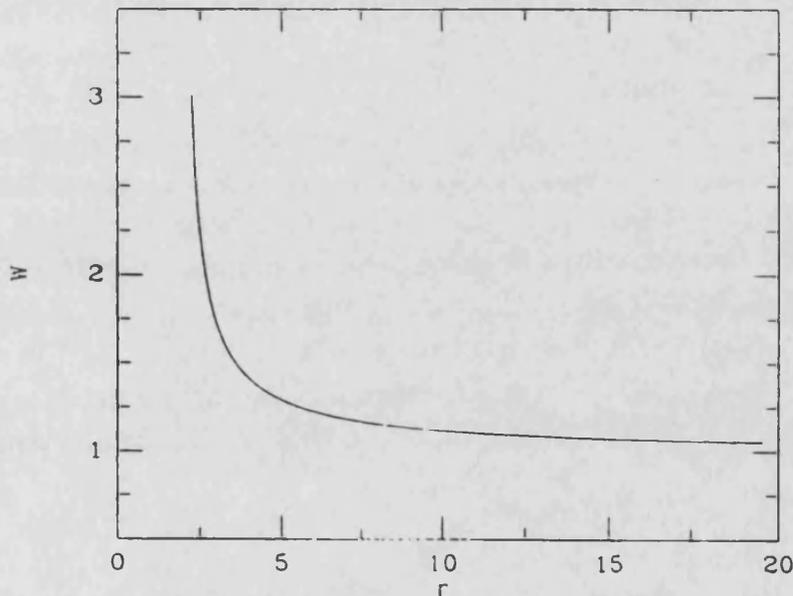


Figura 6.2: Valores para el factor de Lorentz generalizado, W , en la malla computacional, para la solución estacionaria dada por (6.10), (6.11) con $C_1 = 0.195$. En la región interior a $r = 5M$, W alcanza valores claramente superiores a la unidad.

ejemplo, Schutz, 1985) y, dado que $u^\mu u_\mu = -1$, u^r puede obtenerse como función de la constante u^0 y las funciones métricas:

$$u^r = (g^{rr})^{\frac{1}{2}}(-1 - g^{00}(u_0)^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.8)$$

En función de u^0 tenemos, pues, una familia uniparamétrica de soluciones. Una vez fijada u^0 y conocida u^r , usamos la expresión (6.5) para calcular $\rho_0(r)$:

$$\rho_0 u^r \sqrt{-g} = C_1, \quad (6.9)$$

siendo C_1 una constante. En la presente aplicación, consideraremos la solución marginalmente ligada $u_0 = -1$, para la cual se verifica:

$$u^r = \sqrt{2M/r}, \quad (6.10)$$

$$\rho_0 = \frac{C_1}{r^2 \sqrt{2M/r}}. \quad (6.11)$$

En los cálculos hemos usado un valor para $C_1 = 0.195$. Las Figuras (6.1) y (6.2) muestran el comportamiento de la componente del tensor métrico $\sqrt{g_{00}}$ y el factor de Lorentz generalizado, W , respectivamente, para la solución estacionaria, en las proximidades del agujero negro.

En la aplicación numérica, se parte del vacío en la región de interés $2.1M \leq r < 20.0M$, imponiéndose en $r = 20M$ las condiciones de flujo correspondientes a la solución (6.10), (6.11).

La secuencia de Figuras (6.3), muestra la evolución de la densidad, D , en la malla computacional, superpuesta a la solución estacionaria analítica. La solución alcanza el estado estacionario en $t = 90M$. Por último, las Figura (6.4) muestra el valor de la velocidad, v , en $t = 90M$, cuando ya se ha alcanzado el estado estacionario.

Los errores de las variables directamente integradas, D , S y τ , en el momento de alcanzarse la solución estacionaria son menores que el 2% en toda la malla, permaneciendo *constant*es con el transcurso del tiempo.

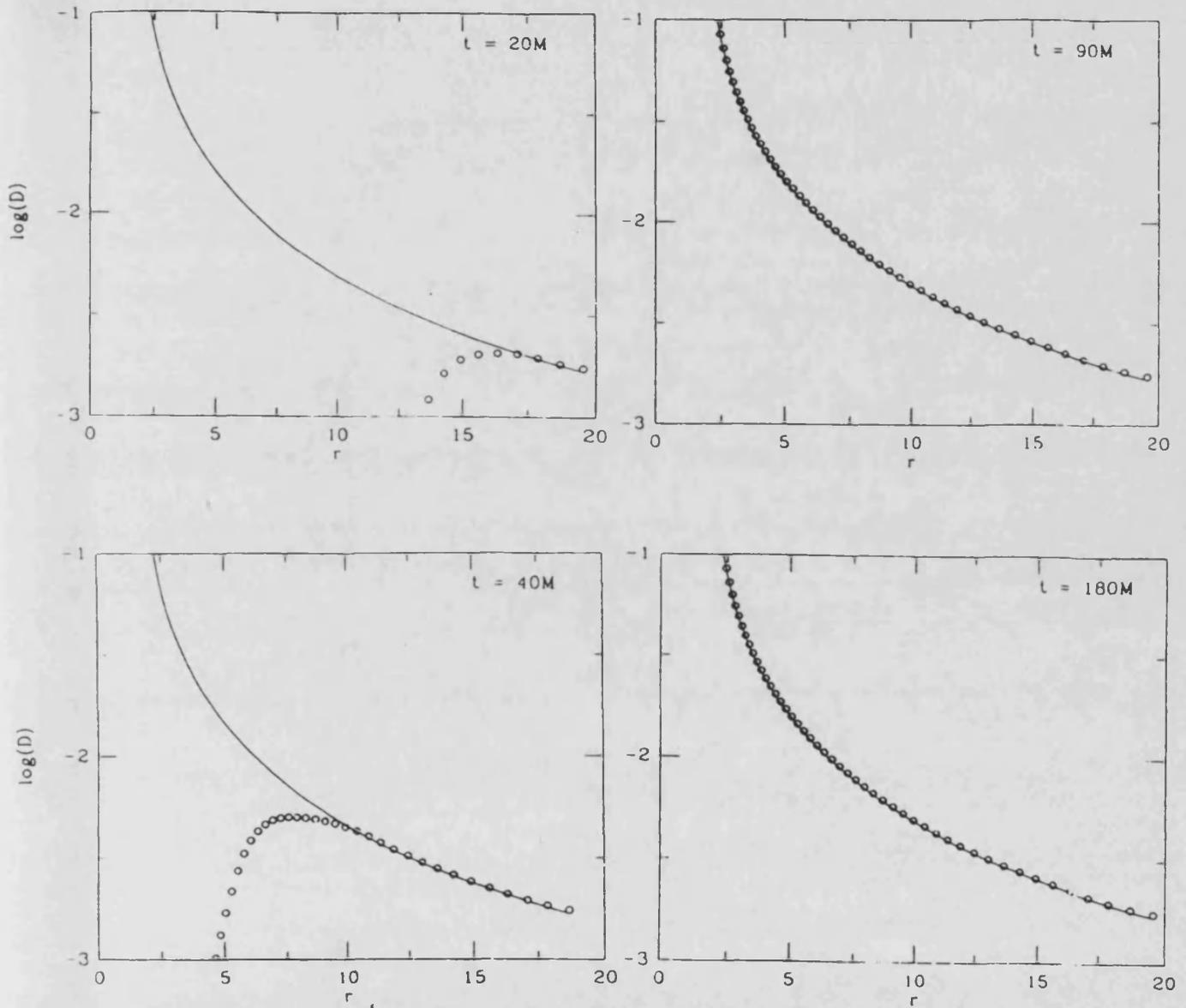


Figura 6.3: Secuencia de gráficas del valor de D que describen la evolución hasta el estado final estacionario en el problema de la acreción de polvo sobre un agujero negro, cuando se parte del vacío. La línea continua muestra la solución estacionaria analítica final.

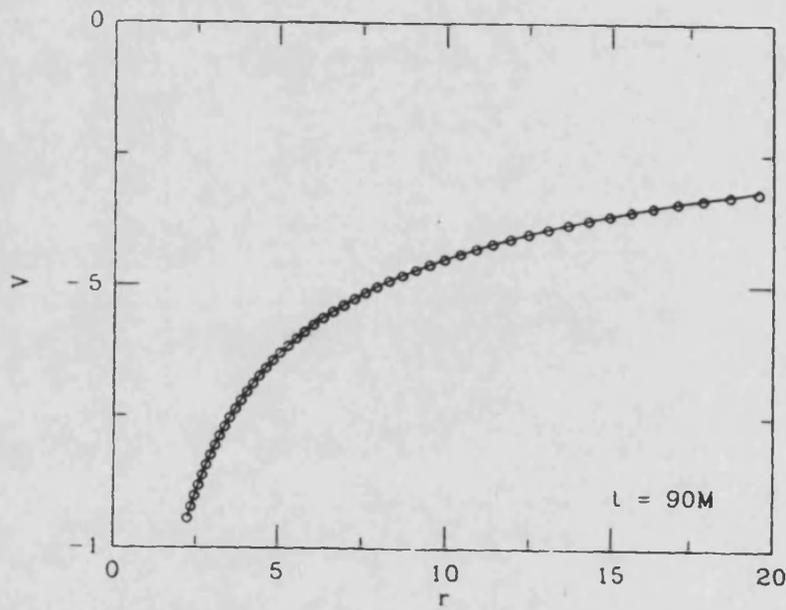


Figura 6.4: Velocidad del polvo una vez se ha alcanzado el estado estacionario final, en el problema de la acreción de polvo sobre un agujero negro. La línea continua corresponde a la solución analítica.

6.3 Acreción radial de un fluido perfecto.

La acreción radial estacionaria de un fluido perfecto sobre un objeto compacto fue considerada por Michel (1972).

Para un fluido perfecto, las ecuaciones (6.5) y (6.6) se integran, dando:

$$\rho_0 u^r \sqrt{-g} = C'_1, \quad (6.12)$$

$$\rho_0 h u_0 u^r \sqrt{-g} = C'_2 \quad (6.13)$$

(siendo C'_1 y C'_2 dos constantes). Para una métrica de Schwarzschild, y tras una sencilla manipulación, pueden transformarse en:

$$\rho_0 u^r r^2 = C'_1, \quad (6.14)$$

$$h^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + (u^r)^2\right) = \left(\frac{C'_2}{C'_1}\right)^2 = C'_3. \quad (6.15)$$

Las soluciones de las ecuaciones (6.14) y (6.15) están caracterizadas por un *punto crítico* y sólo las que pasan por él se corresponden con material que cae (o que sale) del objeto central con velocidad monótona creciente a lo largo de las trayectorias de las partículas. El punto crítico, r_c , queda determinado a partir de las condiciones (Michel, 1972):

$$(u_c^r)^2 = \frac{M}{2r_c}, \quad (6.16)$$

y

$$V_c^2 = \frac{(u_c^r)^2}{1 - 3(u_c^r)^2}, \quad (6.17)$$

donde V se ha definido según:

$$V^2 \equiv \frac{d \ln(\rho_0 h)}{d \ln \rho_0} - 1. \quad (6.18)$$

Las relaciones (6.16) y (6.17), una vez fijada la ecuación de estado, ligán los valores de u_c^r , ρ_{0c} y r_c . Dando un valor a r_c , a través de (6.16) obtenemos el valor de u_c^r , y a través de (6.17) el de ρ_{0c} . Además, en el punto crítico deben verificarse las ecuaciones (6.15) y (6.16), por lo que se pueden determinar los valores de las constantes C'_1 y C'_3 , que fijan la solución estacionaria.

Las Figuras (6.5), (6.6) y (6.7) muestran los resultados obtenidos en la evolución de la solución analítica estacionaria correspondiente a un

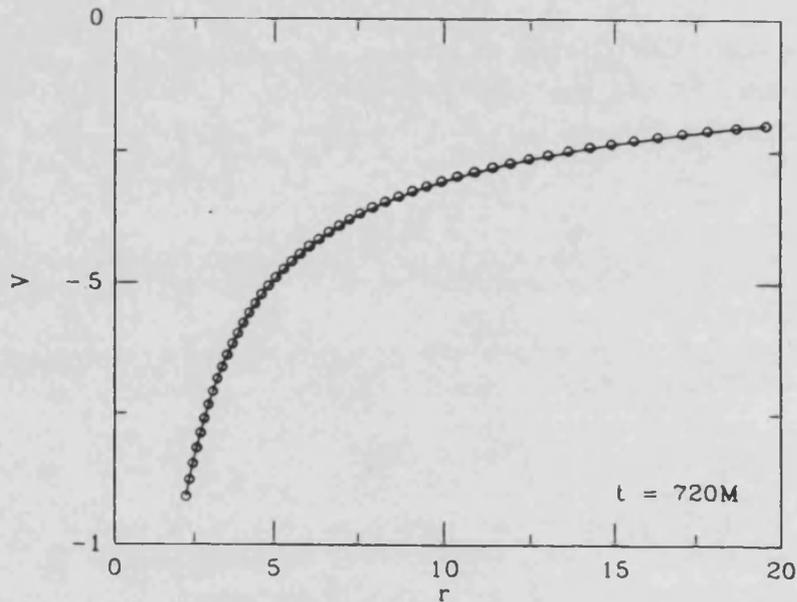


Figura 6.5: Perfil de la velocidad en el problema de la acreción radial estacionaria de un fluido perfecto sobre un agujero negro. Los círculos representan los valores calculados en el instante $t = 720M$. La línea continua representa la solución estacionaria inicial.

radio crítico $r_c = 200M$, en donde la densidad vale $\rho_{0c} = 7.0 \times 10^{-4} M^{-2}$ (para una ecuación de estado tipo gas ideal, con $\gamma = \frac{5}{3}$), en el interior de la malla numérica $2.1M \leq r \leq 20.0M$. Las gráficas corresponden al instante $t = 720M$ (aproximadamente $1500t_{\text{COUR}}$; $t_{\text{COUR}} \equiv$ tiempo de Courant).

Los errores en las variables directamente integradas, D , S y τ , son menores que el 2% en toda la malla numérica y permanecen *constantes* en el tiempo.

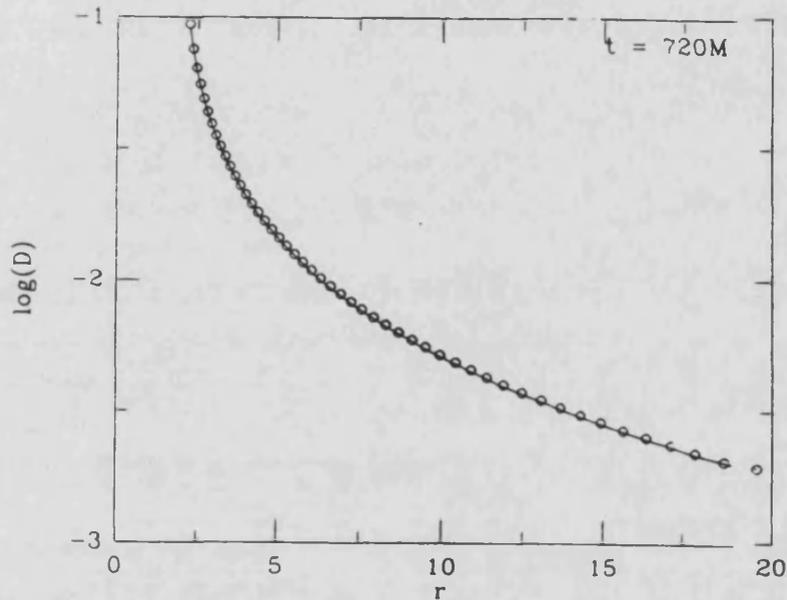


Figura 6.6: Perfil de la densidad D , en escala logarítmica, en el problema de la acreción radial estacionaria de un fluido perfecto sobre un agujero negro. Los círculos representan los valores calculados en el instante $t = 720M$. La línea continua representa la solución estacionaria inicial.

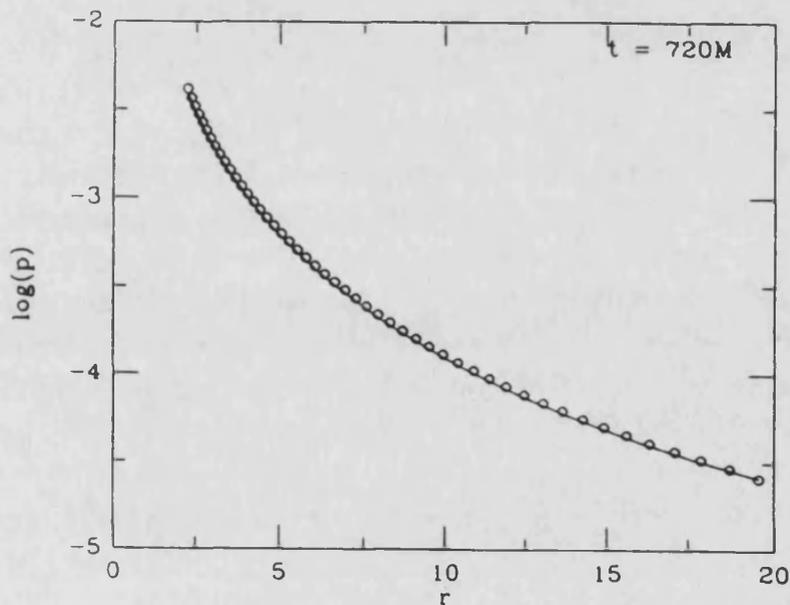


Figura 6.7: Perfil de la presión, en escala logarítmica, en el problema de la acreción radial estacionaria de un fluido perfecto sobre un agujero negro. Los círculos representan los valores calculados en el instante $t = 720M$. La línea continua representa la solución estacionaria inicial.

6.4 Acreción esférica con presencia de ondas de choque.

Los dos problemas anteriores involucran flujos suaves. Con los resultados presentados hemos comprobado la estabilidad de la técnica numérica empleada en presencia de campos gravitatorios intensos. Modificando la condición de contorno en la frontera interna de la malla numérica, imponiendo ahora condiciones de contorno de reflexión (similares a las empleadas en el test 3 del Capítulo anterior) y situándola en $r = 3M$ (lo que representa de forma simple la superficie de una estrella de neutrones, $M_{NS} \simeq 1.5M_{\odot}$, $R_{NS} \simeq 10km$.) hemos simulado el impacto sobre dicha superficie de un gas ideal. Las Figuras (6.8), (6.9) y (6.10) muestran los perfiles de la velocidad, la densidad y la presión, respectivamente, en los que puede verse la onda de choque que se propaga desde la superficie del objeto hacia el exterior. El comportamiento cualitativo guarda una cierta similitud con la propagación de la onda de choque en el núcleo de las estrellas masivas tras el colapso en el escenario standard de supernovas de tipo II, aunque en este caso el salto en la velocidad alcanza un valor de 0.5. Es remarcable el hecho de que la onda de choque se resuelve en 1 ó 2 puntos numéricos.

Aquí, el gas que inicialmente cae sobre el objeto central tiene una presión elevada que disminuye la aceleración debida al campo gravitatorio del objeto central. Si el gas que cae es frío ($\varepsilon \ll 1$; $\varepsilon \equiv$ energía interna específica) los términos de presión son despreciables y el gas impacta con velocidad máxima sobre la superficie. Las Figuras (6.11), (6.12) y (6.13) muestran los perfiles correspondientes a la velocidad, la densidad y la presión, respectivamente en el problema de la acreción esférica de un gas frío sobre una esfera dura. Los resultados son extremos, alcanzándose un salto en la velocidad de 0.7 y 4 órdenes de magnitud en el salto de la presión.

Los resultados expuestos en este Capítulo aparecen en Ibáñez *et al.*, 1991.

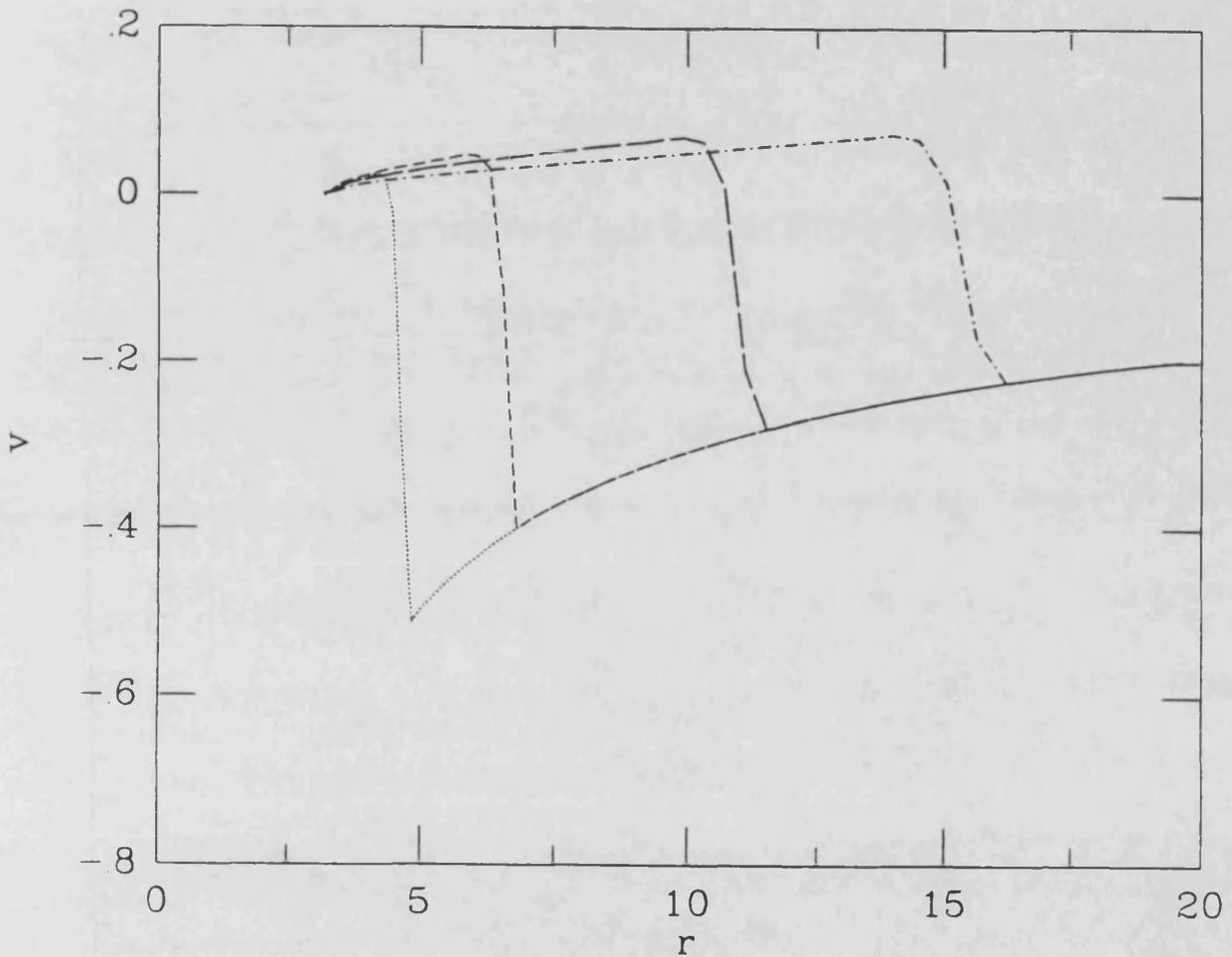


Figura 6.8: Evolución del campo de velocidades en el problema de la acreción de un gas ideal por una esfera dura. El impacto del gas sobre la superficie de dicha esfera (que se sitúa en $r = 3M$) provoca la formación de una onda de choque que se propaga hacia el exterior. Las curvas se corresponden con los instantes: $t = 10M$, $t = 20M$, $t = 40M$, $t = 60M$.

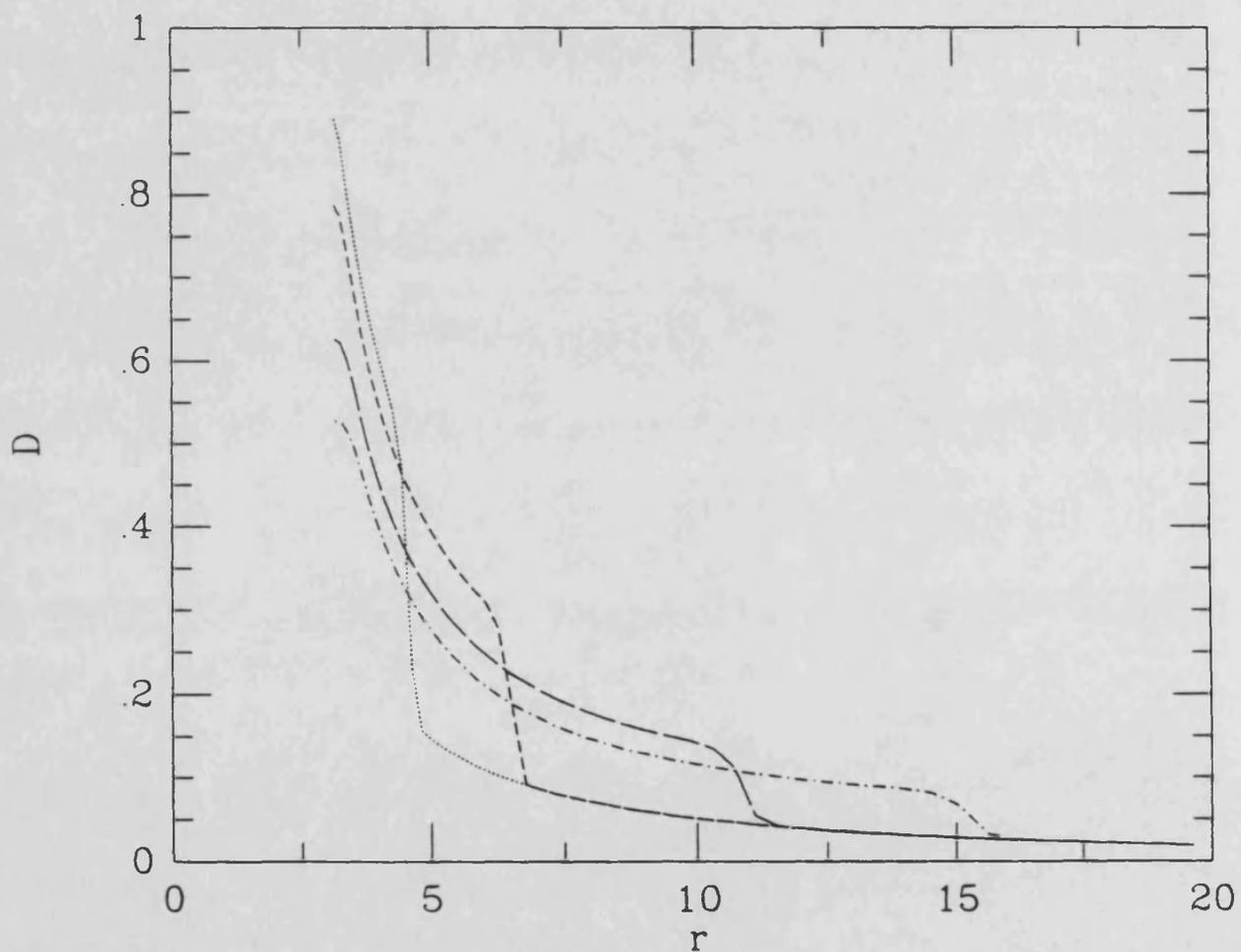


Figura 6.9: Evolución de la densidad en el problema de la acreción de un gas ideal por una esfera dura. Las curvas se corresponden con los instantes: $t = 10M$, $t = 20M$, $t = 40M$, $t = 60M$.

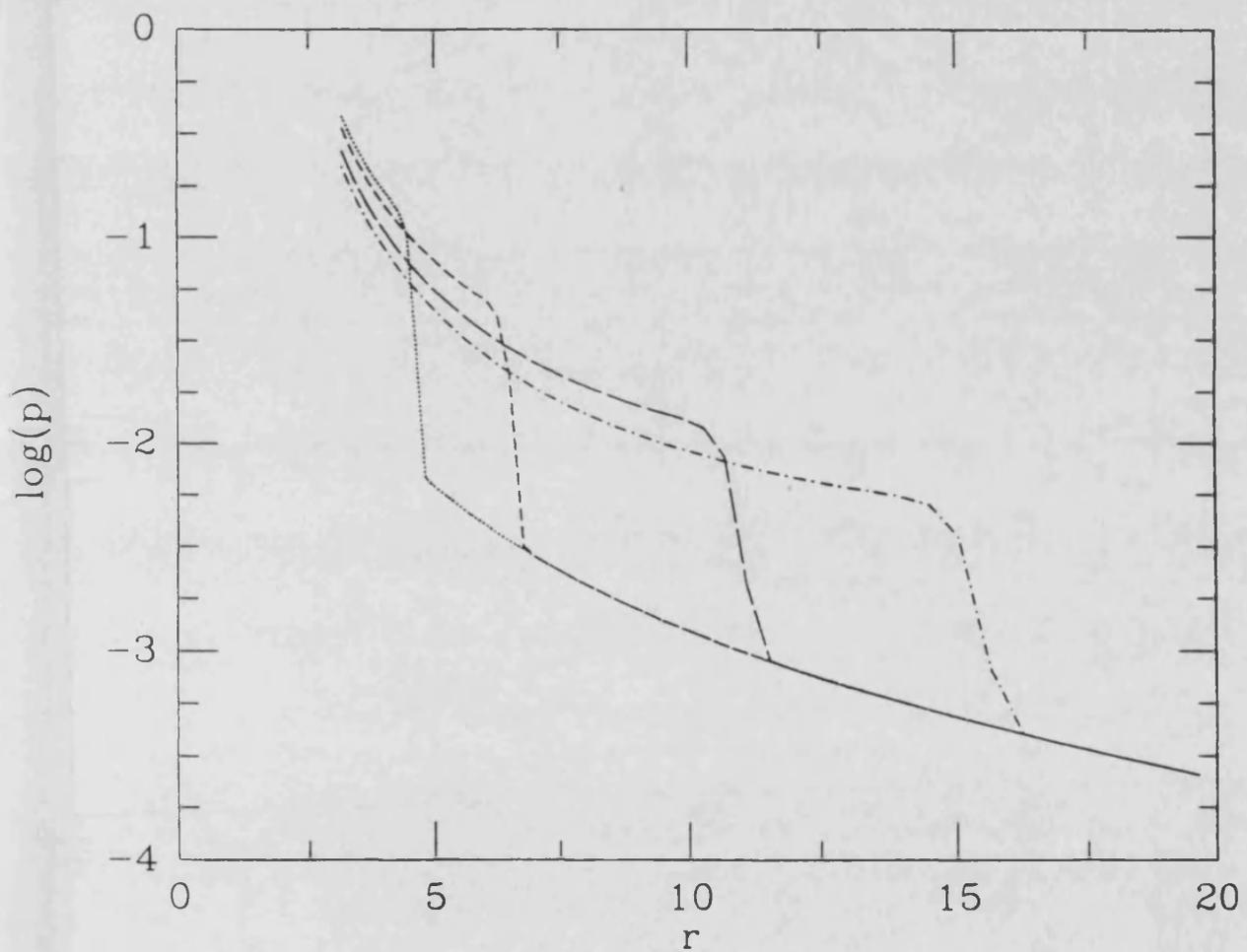


Figura 6.10: Evolución de la presión en el problema de la acreción de un gas ideal por una esfera dura. Las curvas se corresponden con los instantes: $t = 10M$, $t = 20M$, $t = 40M$, $t = 60M$.

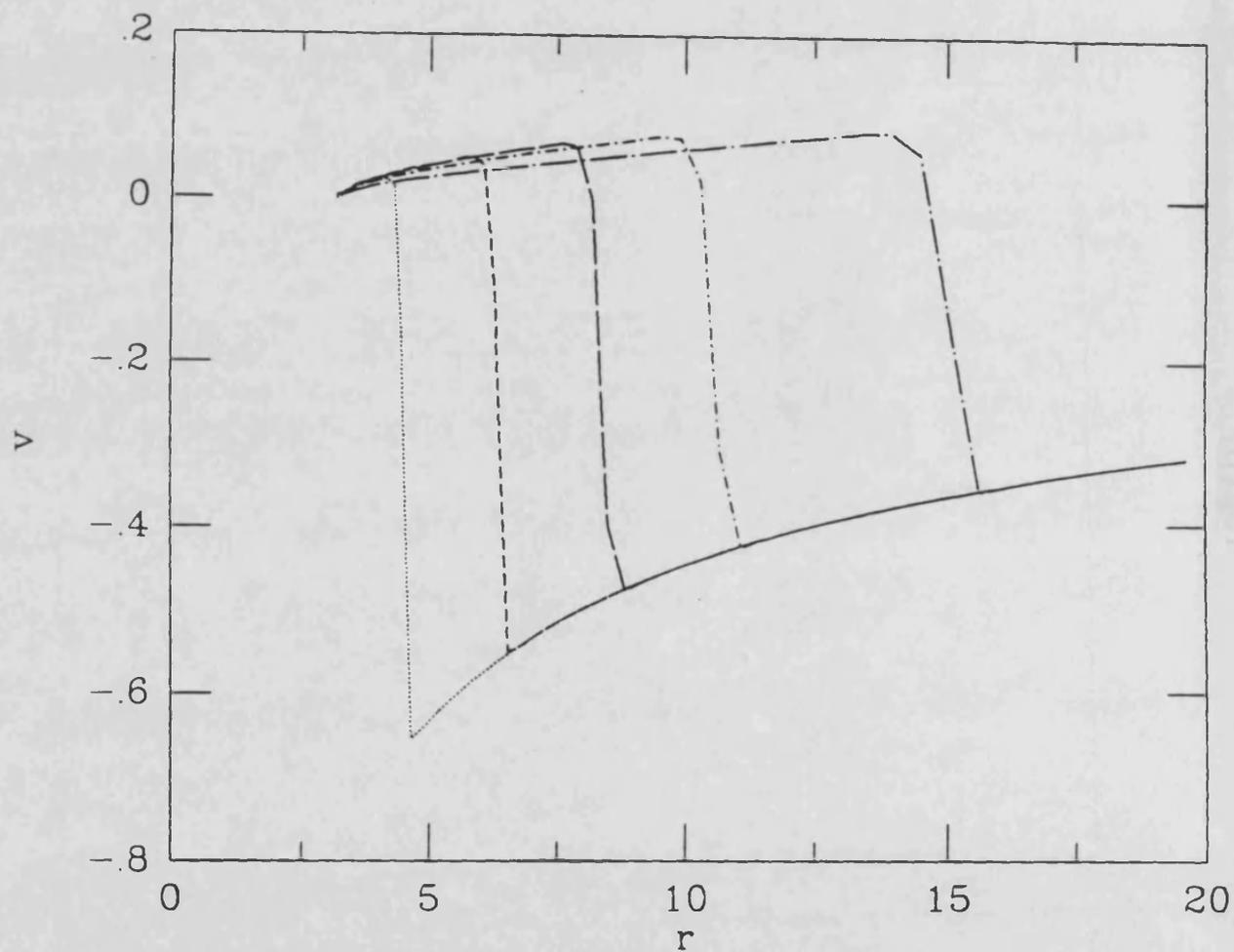


Figura 6.11: Evolución del campo de velocidades en el problema de la acreción de un gas ideal *frio* por una esfera dura. Las curvas se corresponden con los instantes: $t = 10M$, $t = 20M$, $t = 30M$, $t = 40M$, $t = 60M$.

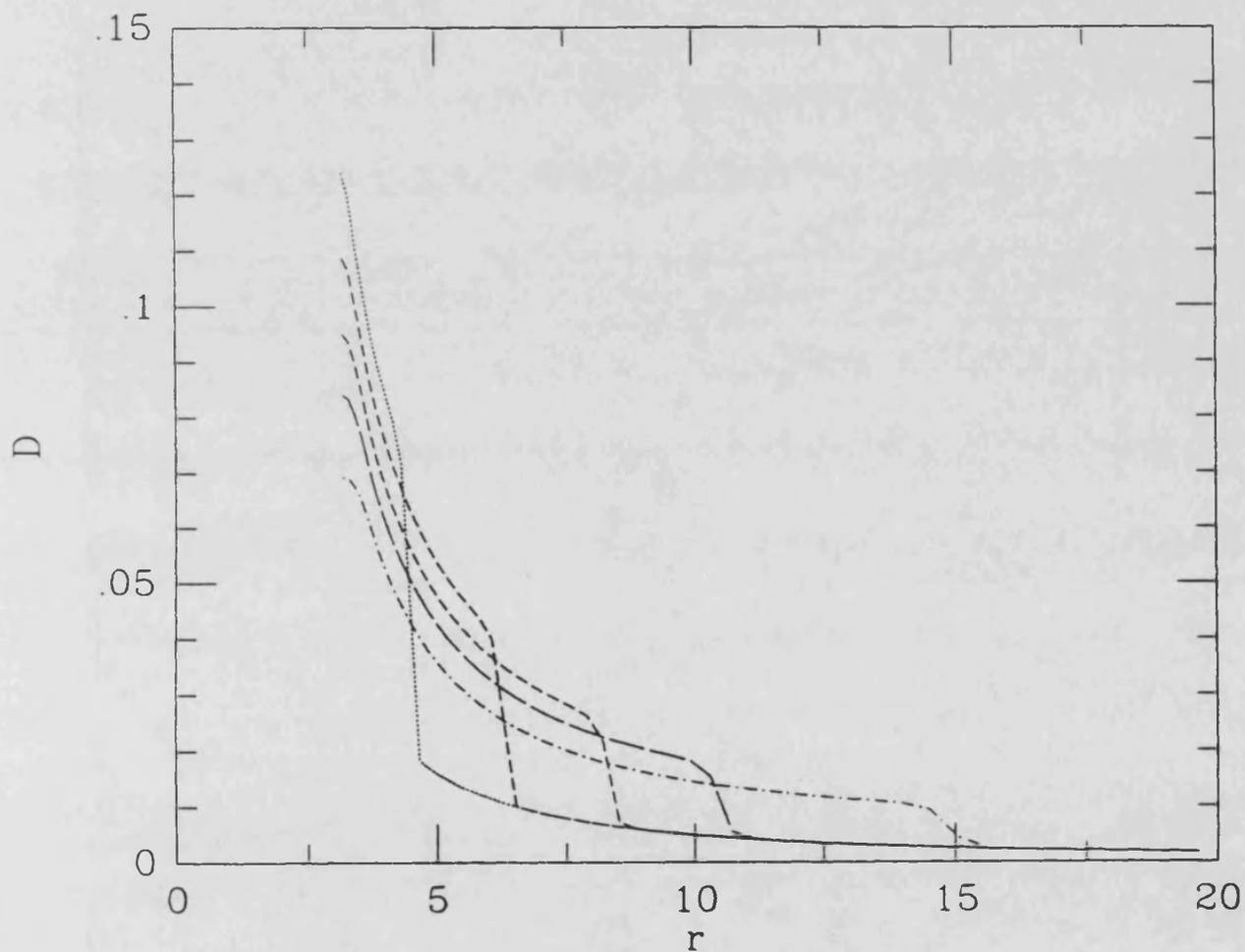


Figura 6.12: Evolución de la densidad en el problema de la acreción de un gas ideal *frio* por una esfera dura. Las curvas se corresponden con los instantes: $t = 10M$, $t = 20M$, $t = 30M$, $t = 40M$, $t = 60M$.

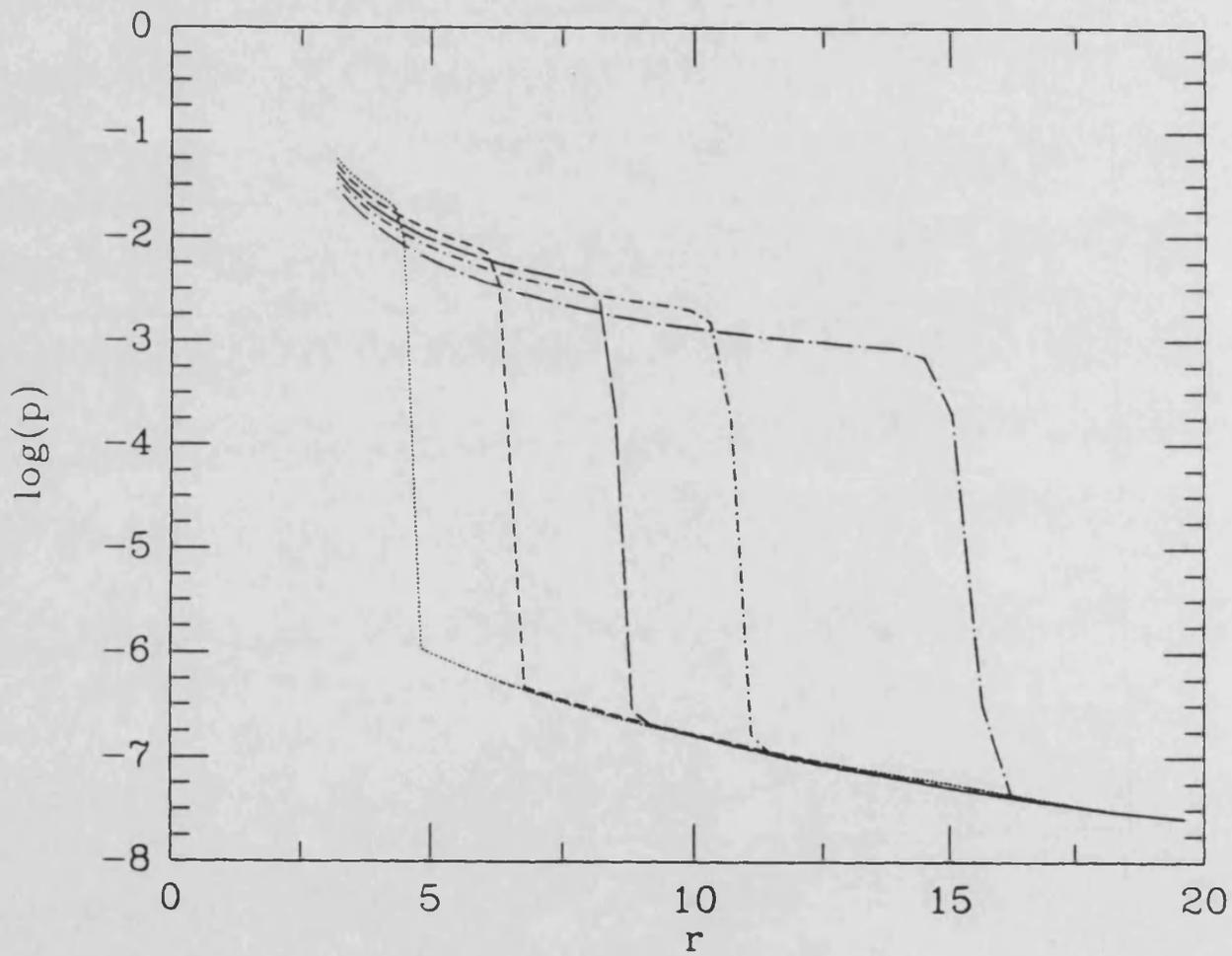


Figura 6.13: Evolución de la presión en el problema de la acreción de un gas ideal *frío* por una esfera dura. Las curvas se corresponden con los instantes: $t = 10M$, $t = 20M$, $t = 30M$, $t = 40M$, $t = 60M$.

Capítulo 7

Colapso Estelar

7.1 Introducción

Los modelos teóricos de Supernovas de Tipo II se basan en que el colapso de un núcleo de hierro de una estrella masiva ($M \geq 9M_{\odot}$) al final de su evolución termonuclear, induce la explosión de la supernova y la formación de un objeto compacto (estrella de neutrones o agujero negro). La fuente de energía es la energía gravitacional de ligadura de la estrella de neutrones que se forma, que es del orden de (ver, por ejemplo, Shapiro y Teukolsky, 1983):

$$E_{lig} \sim \frac{M^2}{R} = 3 \cdot 10^{53} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^{-1} \text{ ergs} \quad (7.1)$$

siendo M y R la masa y el radio de la estrella de neutrones, respectivamente.

Las curvas de luz de las Supernovas de Tipo II, pueden obtenerse, sin embargo, con energías mucho menores, del orden de 10^{51} ergs, para las capas de material eyectadas. Así, los modelos de Supernovas Tipo II tratan de encontrar un mecanismo por el cual, una pequeña parte de la energía de ligadura emitida durante el colapso se transfiere a las capas externas de la estrella, produciendo una violenta explosión con velocidades, para la masa expulsada, del orden de 10^4 km/s y la formación de una estrella de neutrones de $1.4 M_{\odot}$.

De acuerdo con Chandrasekhar (1939), una estrella que se mantiene por la presión de degeneración de sus electrones relativistas puede soportar su propia gravedad sólo si su masa es menor que una masa crítica

que, en el límite de temperatura cero, es:

$$M_{Ch} = 1.457(2Y_e)^2 M_{\odot} \quad (7.2)$$

(*masa de Chandrasekhar*), en donde Y_e representa la fracción de electrones. Al final de la fase de combustión del Silicio, la estrella ha desarrollado un núcleo con elementos del grupo de hierro (*núcleo de hierro*), con una densidad central en torno a $\rho_c \approx 10^{10} \text{ g/cm}^3$ y una temperatura central, $T_c \approx (8 - 10) 10^9 \text{ K}$, con una fracción de electrones $0.42 \leq Y_e \leq 0.44$. Dicho núcleo excede la masa de Chandrasekhar debido a que (i) la masa del núcleo de hierro aumenta como resultado de la combustión del Silicio en capa; (ii) las capturas electrónicas sobre protones libres reducen el número leptónico y (iii) la presión en el núcleo se reduce como consecuencia de la fotodesintegración -proceso endotérmico- de los núcleos por fotones energéticos¹ (Fowler y Hoyle, 1964). Como consecuencia de todos estos factores, el núcleo estelar se convierte en inestable y colapsa hasta que se alcanza una densidad central del orden de la densidad nuclear de saturación ($\rho_n \approx 2.7 10^{14} \text{ g/cm}^3$).

Históricamente se han propuesto varios mecanismos para explicar el fenómeno de las Supernovas de Tipo II. Colgate y Johnson (1960) sugirieron que el colapso del núcleo de hierro se detendría debido al endurecimiento de la materia nuclear, lo que generaría una onda de choque capaz de expulsar las capas externas del núcleo (este mecanismo recibiría más tarde el nombre de *mecanismo directo*, en contraposición al *mecanismo retrasado*, del que hablaremos después). Unos años más tarde, Colgate y White (1966) sugirieron un mecanismo alternativo, en el que la transferencia de energía y momento de los neutrinos (producidos en las capturas electrónicas) en su interacción con la materia menos densa de la envoltura, conducía a una expulsión de material (Schwartz, 1967). Este mecanismo, estudiado numéricamente por Arnett (1968) y Wilson (1971), no dio los resultados esperados debido a la baja sección eficaz de interacción entre los neutrinos y la materia. El descubrimiento de las *corrientes neutras* (Weinberg, 1967) modificó considerablemente el valor de dicha sección eficaz. En particular, la sección eficaz para el *scattering* coherente con núcleos que esta teoría predecía (Freedman, 1974) iba a significar un aumento considerable en la opacidad de la materia. Sin embargo, cálculos detallados condujeron a un atrapamiento de los neutrinos en el núcleo estelar para densidades $\rho \gtrsim 3 10^{11} \text{ g/cm}^3$, con lo

¹La energía consumida por cada reacción $^{56}\text{Fe} \rightarrow 13 \alpha + 4 n$ es de 124.4 MeV .

que la luminosidad no era lo suficientemente grande como para expulsar material (Mazurek, 1976). Se volvió entonces a pensar en el mecanismo puramente hidrodinámico de Colgate y Johnson como responsable de las explosiones de Supernovas de Tipo II.

El atrapamiento de los neutrinos durante el proceso de colapso implica la conservación del número leptónico total, Y_L , durante toda esta fase. Este atrapamiento provoca el que se alcance el *equilibrio β* para densidades $\rho \gtrsim 3 \cdot 10^{12} \text{ g/cm}^3$. A partir de este momento, la entropía permanece constante y el colapso se desarrolla adiabáticamente hasta la formación de la onda de choque (Bethe *et al.*, 1979). El carácter adiabático del colapso junto con la baja entropía por nucleón del núcleo estelar de hierro inicial, ($s \approx 1 k_B$) y la elevada entropía necesaria para disociar los núcleos hace que éstos persistan hasta densidades del orden de la materia nuclear. Como consecuencia, el colapso no es detenido por la presión térmica de los nucleones, sino que continúa hasta densidades nucleares². En toda esta fase, la presión se ve dominada por la contribución de los electrones relativistas y el exponente adiabático es $\gamma \lesssim 4/3$.

Cálculos analíticos (Yahil y Lattimer, 1982) y las simulaciones numéricas han demostrado que la dinámica del colapso del núcleo de hierro puede entenderse cualitativamente por medio de soluciones autosimilares. Yahil y Lattimer han encontrado soluciones autosimilares para polítropos con $\frac{6}{5} \leq \gamma \leq \frac{4}{3}$ (que contienen como caso particular la solución de colapso homólogo de Goldreich y Weber, 1980, para $\gamma = \frac{4}{3}$) que no son exactamente homólogas. En dichas soluciones, el núcleo se divide en una parte interna subsónica que colapsa homológamente ($v \propto r$) y una parte externa que cae supersónicamente, con un número de Mach entre 2 y 3 y con velocidad próxima a la de caída libre ($v \propto r^{-\frac{1}{2}}$). En estos modelos, la masa del núcleo homólogo depende del valor del exponente adiabático, siendo $M_h(\gamma_1) > M_h(\gamma_2)$ si $\gamma_1 > \gamma_2$. En cálculos realistas, dicha masa se sitúa entre $0.6M_\odot$ y $0.9M_\odot$. Cerca de la frontera del núcleo homólogo (en la que el módulo de la velocidad de caída alcanza su valor máximo) hay un *punto sónico* donde la velocidad de caída iguala

²Esta descripción del colapso corresponde al caso en que éste procede de forma esféricamente simétrica. Para estrellas masivas en rotación en el umbral del colapso, el desarrollo de éste tiene otras características destacando, en particular, el que puede detenerse a densidades menores que la densidad de la materia nuclear. Para una discusión en profundidad de las características del colapso en rotación ver Müller (1991) y las referencias allí citadas.

la velocidad local del sonido.

Cuando la densidad central en el núcleo excede la densidad de saturación de la materia nuclear, los núcleos se disuelven. A partir de este momento, un ligero aumento en la densidad provoca un gran aumento en la presión, debido a la actuación de la parte repulsiva de la interacción fuerte. El resultado es que la ecuación de estado se *endurece* y γ aumenta desde un valor por debajo de $4/3$ hasta un valor entre 2.5 y 3. De acuerdo con el teorema del virial, el núcleo puede alcanzar una nueva posición de equilibrio si el exponente adiabático promedio, $\bar{\gamma}$ se hace mayor que $4/3$. El material comienza a pararse desde el centro. Las ondas de presión se desplazan hacia el exterior, en radios, y se acumulan cerca del punto sónico, donde comienza a formarse una onda de choque. Debido a su inercia, el núcleo homólogo no queda en equilibrio sino que se expande tras la onda de choque (*rebote*) que ya ha comenzado a propagarse hacia el exterior.

La densidad máxima alcanzada durante el rebote puede oscilar entre 2 ó 3 veces la densidad de saturación para ecuaciones de estado *duras* y 10 veces, para ecuaciones de estado *muy blandas*, si se tienen en cuenta los efectos de Relatividad General (ver Baron, Cooperstein y Kahana, 1985a,b).

Las condiciones a ambos lados de la onda de choque verifican las relaciones de Rankine-Hugoniot. El salto en velocidades puede alcanzar los 10^{10} *cm/s*, y el salto en la energía interna los 10^{19} *erg/g*. La energía inicial de la onda de choque es aproximadamente igual a la energía cinética del núcleo interno en el momento de la *última buena homología* (Brown *al.*, 1982). Simulaciones numéricas muestran que dicha energía es del orden de:

$$E_{shock}^{(i)} \approx (4 - 10) 10^{51} \text{ ergs}, \quad (7.3)$$

mucho más de lo que se necesita para explicar la energía observada en una explosión de supernova. Sin embargo, en su movimiento hacia el exterior, la onda de choque se ve amortiguada por la fotodesintegración de los núcleos pesados en nucleones libres o partículas α , siendo la pérdida de energía del orden de

$$E_{loss} \approx (1.6 - 1.8) 10^{51} \frac{\text{ergs.}}{0.1M_{\odot}} \quad (7.4)$$

(Hillebrandt y Müller, 1981). Así pues, el éxito o fracaso de la onda de choque dependerá de un delicado balance entre la energía que tenía

cuando se formó y la energía perdida hasta alcanzar la superficie del núcleo estelar de hierro. En general, existen varios factores que inciden crucialmente en el éxito o fracaso de la onda de choque:

1. La diferencia entre la masa del núcleo inicial de hierro y la masa del núcleo homólogo: es conveniente para tener una onda de choque efectiva, que el núcleo de hierro tenga una masa pequeña y que la masa del núcleo homólogo sea grande, con el fin de que la energía consumida en fotodisociar sea pequeña³. Motivados por esta idea, recientemente se han revisado los cálculos de evolución presupernova, obteniéndose núcleos de hierro en el umbral del colapso, con masas de $1.26M_{\odot}$ (Woosley *et al.*, 1987) y hasta de $1.18M_{\odot}$ (Nomoto y Hashimoto, 1988).
2. La incompresibilidad de la materia nuclear: un *módulo de incompresibilidad* pequeño (ecuación de estado blanda) facilita la expulsión de material por la onda de choque.
3. Efectos de la Relatividad General: El caso relativista conduce a un núcleo homólogo menor, en masa, que el newtoniano, lo que, en principio, podría llevar a concluir que la onda de choque, al tener que atravesar una mayor cantidad de material, tendrá menos posibilidades de éxito. Sin embargo, al alcanzarse densidades más altas (efecto similar al de disminuir el módulo de incompresibilidad) la energía de la onda de choque es mayor, lo que puede conducir a un balance positivo en cuanto a la efectividad de aquella. Sólo la simulación numérica puede ayudar a aclarar este punto.

En relación con el punto 1 anterior, hay que señalar que junto al mecanismo directo para explosiones de supernovas Tipo II que acabamos de describir, está el mecanismo retrasado, por el cual las estrellas más masivas (aquellas que desarrollan un núcleo de hierro mayor) lograrían explotar (Wilson, 1985; Colgate, 1989; Wilson, 1989). En estos casos, la onda de choque que se habría convertido en una onda de acreción estacionaria, es reactivada por los neutrinos procedentes del interior. Aunque sólo el 0.1% de la energía de los neutrinos es absorbida, el flujo

³Nótese que para una pérdida de energía por disociación como la considerada, la masa máxima de hierro que la onda de choque puede disociar se sitúa en torno a las $0.45M_{\odot}$, lo que implica, dado el tamaño característico de los núcleos homólogos desarrollados, una masa máxima para el núcleo inicial de hierro de $1.35M_{\odot}$, si se quieren obtener explosiones efectivas.

de neutrinos durante unos cientos de milisegundos va acumulando energía tras la onda de choque, causando el calentamiento del material y reactivándola. Las explosiones producidas por este mecanismo son menos energéticas (menos de 10^{51} erg).

Los puntos anteriores 2 y 3 han sido ampliamente estudiados en el seno de nuestro grupo (Miralles, 1990; Miralles *et al.*, 1990; Miralles *et al.*, 1991) para ecuaciones de estado basadas en fuerzas de Skyrme.

Como ya se dijo en la Introducción de esta Memoria, el motivo fundamental por el que estamos interesados en aplicar las técnicas de alta resolución modernas a las ecuaciones de la hidrodinámica relativista es tratar correctamente, desde un punto de vista numérico, las ondas de choque. En particular, en el campo del Colapso Estelar queremos indicar que la correcta simulación de la onda de choque debe añadirse como uno más de los problemas a considerar para la efectividad del mecanismo directo. Para apoyar esta idea, comenzaremos presentando los resultados correspondientes al colapso estelar newtoniano obtenidos mediante dos técnicas cualitativamente diferentes: el método tipo Godunov descrito en la Sección 1 del Capítulo 4 y la versión newtoniana del código de May y White, que utiliza la viscosidad artificial, descrito en la Sección 2 de dicho Capítulo.

7.2 Modelo inicial y ecuación de estado.

El modelo inicial utilizado en nuestros cálculos de colapso es una configuración de enana blanca de Carbono con una densidad central de $2.5 \cdot 10^{10}$ g/cm³. Es un modelo de equilibrio para la ecuación de estado de Chandrasekhar con correcciones coulombianas, deducida por Salpeter y Zapolski (1967), correspondiente al máximo de la curva *masa-radio*, encontrándose, por tanto, en el umbral de la estabilidad (ver Ibáñez, 1984).

La ecuación de estado que hemos usado es una ley γ , según la cual, la presión viene dada por:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (7.5)$$

en donde γ varía con la densidad de acuerdo con la prescripción de Van Riper (1978):

$$\gamma = \gamma_0 + S \log\left(\frac{\rho}{\rho_b}\right), \quad (7.6)$$

con $S = 0$ si $\rho \leq \rho_b$ (densidad de rebote) y $S > 0$ si $\rho > \rho_b$. Los valores típicos de los parámetros γ_0 , S y ρ_b son, respectivamente: $\frac{4}{3}$, 1 y $2.7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ (densidad de la materia nuclear), de forma que la expresión (7.6) simula el endurecimiento de la ecuación de estado, al alcanzar la densidad nuclear, que hasta ese momento venía dominada por los electrones relativistas degenerados ($\gamma = \frac{4}{3}$).

7.3 Colapso estelar newtoniano. Comparación con técnicas de viscosidad artificial standard.

En esta Sección presentamos los resultados correspondientes al colapso estelar newtoniano obtenidos con la TSCM descrita en la primera Sección del Capítulo 4 (que a lo largo de esta Sección denotaremos por **G**). Además de los tests usuales para el resolutor del problema de Riemann (tubos de Riemann), el código ha superado otros más generales como son la descripción del colapso del polvo y la detección del γ crítico consistente con el modelo inicial. Presentamos primero los resultados obtenidos para dichos tests.

7.3.1 Colapso de polvo.

El colapso de una nube de polvo tiene solución analítica. La Tabla (7.1) muestra el comportamiento del código **G**, que mantiene la homología durante el colapso, como puede verse a partir de la constancia en el tiempo ($< 1\%$) de la cantidad $r^3\rho$ o la constancia en la masa coordenada ($< 1\%$) de la cantidad $\chi = r(m, t)/r(m, 0)$.

7.3.2 Detección del γ_{crit} consistente con el modelo inicial.

Como queda señalado en el Apéndice B de Ibáñez (1984), el modelo inicial que estamos usando tiene un valor crítico para el exponente adiabático medio $\gamma_{crit} = 1.343$. Variando γ_0 en (7.6) hemos llevado a cabo simulaciones con el código **G** a fin de detectar el valor crítico de γ que separa los modelos que colapsan de aquellos que oscilan. El valor crítico de γ que hemos encontrado de esta forma es: $\gamma_{crit}^{num} = 1.345 \mp 0.005$. La Figura (7.1) muestra una oscilación del modelo inicial obtenida para un valor de $\gamma = 1.345$.

$t^n(ms)$	$t^a(ms)$	ρ_{14}	\mathcal{R}_1	χ_1	\mathcal{R}_2	χ_2
0	0	6.64×10^{-6}	518.0	1	3900	1
30	30	8.70×10^{-6}	518.2	0.914	3991	0.914
60	61	3.08×10^{-5}	517.3	0.599	3985	0.599
80	80	4.30×10^{-3}	518.4	0.116	3993	0.116
81.50	81.53	9.11	519.9	9.01×10^{-3}	3999	9.01×10^{-3}
81.51	81.54	24.6	518.0	6.46×10^{-3}	3989	6.46×10^{-3}

Tabla 7.1: Homología del colapso sin presión. ρ_{14} es la densidad en unidades de 10^{14} g/cm^3 . $\mathcal{R}_A = r(m_A, t)^3 \rho$ y $\chi_A = r(m_A, t)/r(m_A, 0)$, con $m_A = 0.117M_\odot, 0.872M_\odot$ para $A = 1, 2$, respectivamente.

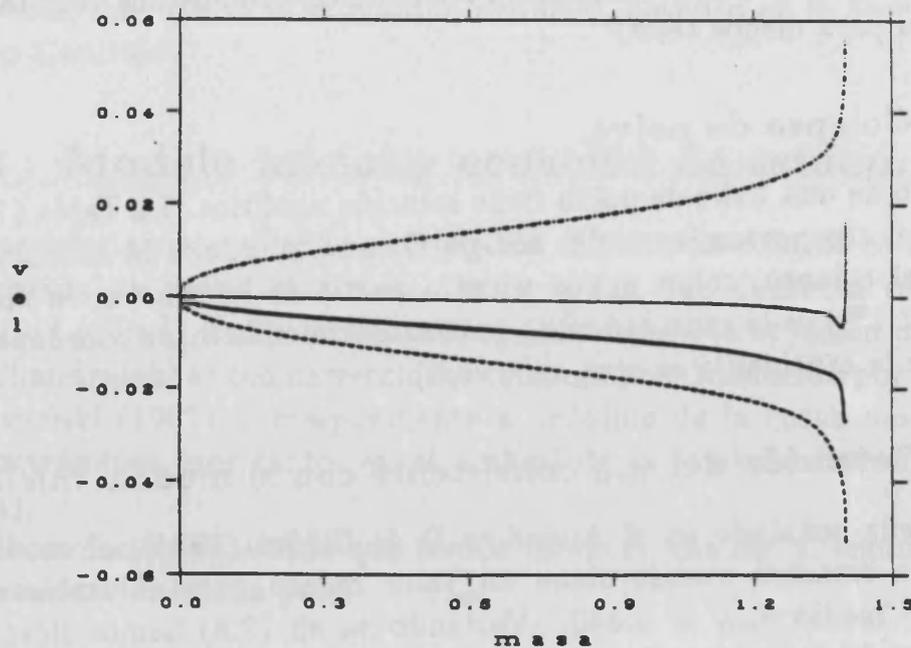


Figura 7.1: Oscilación del modelo inicial obtenida con el código hidrodinámico G con la ecuación de estado tipo gas ideal, para $\gamma = 1.345$. El periodo de la oscilación es, aproximadamente, de 0.15 s.

7.3.3 Comparación con técnicas de viscosidad artificial standard.

En esta Sección vamos a comparar los resultados obtenidos en el colapso estelar con el método **G** y una versión newtoniana del código de May y White, que usa un término de viscosidad artificial, Q , para tratar las ondas de choque. Una expresión usual para Q es:

$$Q = k^2 \rho \Delta m^2 \left(\frac{\partial(r^2 v)}{\partial m} \right)^2 / r^4, \quad (7.7)$$

si $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ y $Q = 0$ en cualquier otro caso (en lo que sigue, denotaremos por Q_d el código hidrodinámico que introduce de esta forma el término de viscosidad artificial).

Como ya se comentó en el Capítulo 3 al hablar de la técnica de la viscosidad artificial, ésta actúa introduciendo disipación en la zona de la onda de choque. Ahora bien, la disipación va transformando parte de la energía cinética del sistema en energía térmica (entropía), por lo que es importante que el término de viscosidad artificial actúe en el menor número de puntos posible y sólo cuando sea estrictamente necesario. En particular, hay que intentar que el término Q sea no nulo exclusivamente en las proximidades de las ondas de choque. Con esta idea y dado que la forma de introducir el término de viscosidad es a través de un condicional que trata de caracterizar la presencia de una onda de choque, otros autores (Noh, 1987) han sugerido otras formas de implementar el término de viscosidad, además de Q_d ; por ejemplo, $Q = 0$ si $\frac{\partial v}{\partial m} > 0$. En lugar de ella, nosotros hemos usado las siguientes condiciones más restrictivas:

1. $Q = 0$ si $\frac{\partial v}{\partial m} > 0$ o $\frac{\partial v}{\partial t} < 0$ (condición original propuesta por von Neumann y Richtmyer). Denotaremos este caso de forma abreviada por Q_v .
2. $Q = 0$ si $\frac{\partial v}{\partial t} < 0$ y también durante la fase de colapso homólogo (caso Q_h). Este caso es más fuerte que Q_d y Q_v en el sentido de que contiene al caso Q_d y difiere del caso Q_v sólo en la envoltura supersónica (donde Q es muy pequeña) y a partir de que la onda de choque ya se ha formado, pero hace $Q = 0$ en toda la fase de colapso homólogo.

3. $Q = 0$ para las condiciones $\{Q_v \cup Q_h\}$. Obviamente, éste es el caso más fuerte y lo denotaremos por Q_d .

Finalmente, el valor escogido para k^2 es 2, lo que hace que la onda de choque se difunda en tres o cuatro celdas numéricas. Los dos códigos han partido de la misma configuración inicial y evolucionado con la misma ecuación de estado. La malla numérica también ha sido la misma y se ha construido dividiendo el radio del modelo inicial en 50 zonas iguales. La distribución resultante de masas ha constituido la base de nuestros cálculos lagrangianos.

Hemos efectuado diferentes simulaciones con los siguientes valores de los parámetros que intervienen en la ecuación de estado (7.6): $\gamma_0 = 1.33$, $S = 1$ y $\rho_b = 2.17 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$. Los casos menos restrictivos, Q_d y Q_v , conducen a los mismos resultados:

1. La energía cinética máxima en la fase de caída es $E_{k(inf)}^{max} = 4.9 \cdot 10^{51} \text{ erg}$.
2. El mínimo absoluto de la velocidad es $v_{min} = -0.154$.
3. El valor máximo para la densidad central es $\rho_c^{max} = 3.5 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$.
4. El valor del radio cuando la onda de choque alcanza la superficie es $R_{min} = 315, 305 \text{ km}$, respectivamente.
5. El valor máximo de la energía cinética de la materia eyectada es $E_{k(esc)}^{max} = 0.7, 1.0 \cdot 10^{51} \text{ erg}$.
6. El porcentaje de la masa expulsada es 1.7%.

La viscosidad artificial generada en los códigos Q_d y Q_v tiene una influencia importante en el resultado final del colapso, cuando se compara con el código G (cuyas características aparecen en la Tabla (7.2)):

1. Los valores del mínimo absoluto de la velocidad (ver Tabla (7.2) y Figuras (7.2) y (7.3)) difieren en un factor 2.
2. La energía cinética de la materia eyectada difiere en un factor 6.
3. El porcentaje de masa difiere en un factor 2.5.

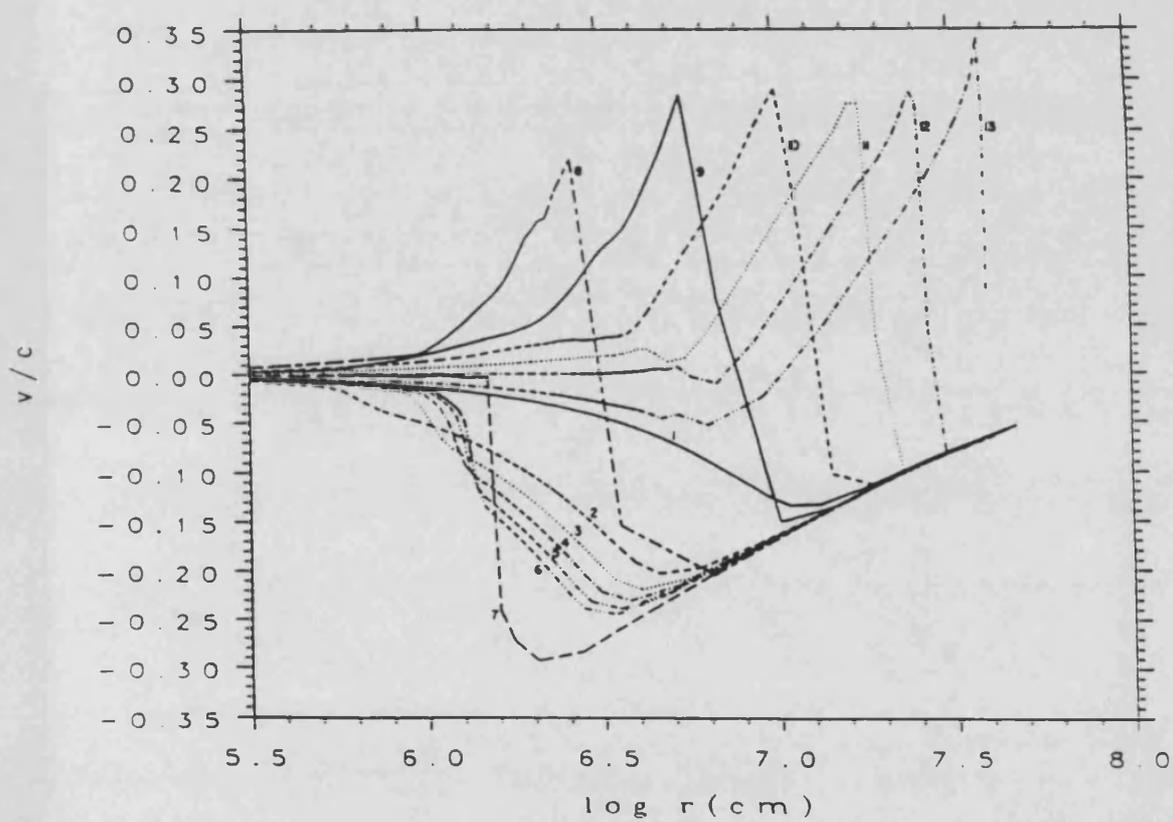


Figura 7.2: Perfiles de la velocidad en función de la coordenada radial (en escala logarítmica y unidades de cm , obtenidos con el código G. El número que aparece junto a cada curva establece la secuencia temporal dentro del intervalo $92.56 \leq t(\text{ms}) \leq 96.24$.

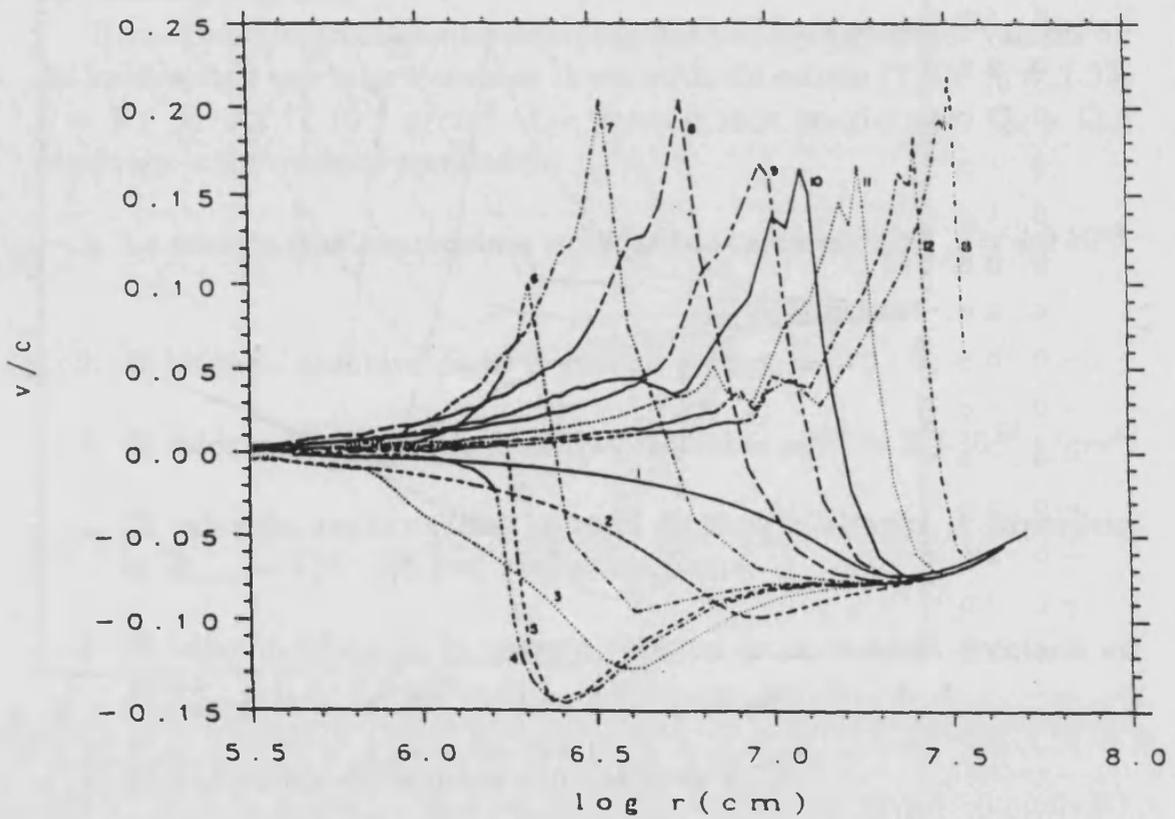


Figura 7.3: Perfiles de la velocidad en función de la coordenada radial (en escala logarítmica y unidades de cm , obtenidos con el código Q_d . El número que aparece junto a cada curva establece la secuencia temporal dentro del intervalo $92.42 \leq t \text{ (ms)} \leq 102.5$.

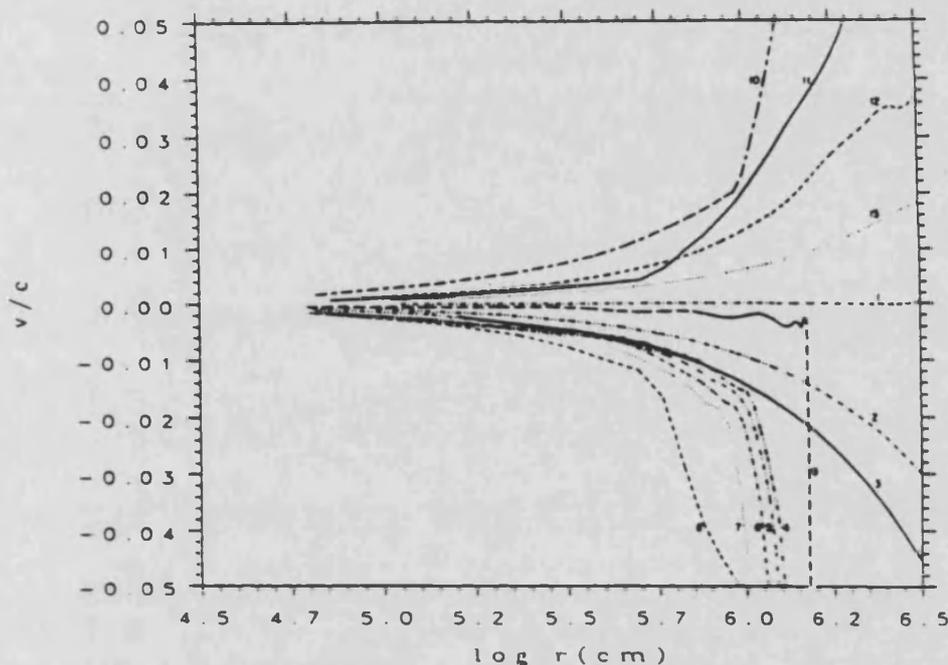


Figura 7.4: Detalle de los perfiles de la velocidad en función de la coordenada radial (en escala logarítmica y unidades de cm , obtenidos con el código G). El número que aparece junto a cada curva establece la secuencia temporal dentro del intervalo $92.56 \leq t(ms) \leq 96.24$.

Las oscilaciones espúreas en la velocidad no son aparentes en las Figuras, debido a la escala considerada y las Figuras (7.4) y (7.5) muestran un detalle.

Los casos Q_d y Q_v tienen la ventaja principal de mostrar una situación extrema en la que los efectos de la viscosidad artificial han sido exagerados. Un modo más riguroso de implementar estos métodos en un cálculo de colapso debe tener en cuenta el hecho de que en la fase de caída no se desarrollan ondas de choque⁴. En este sentido vamos a considerar los casos Q_h y Q_s .

Estos dos casos llevan, prácticamente a los mismos resultados. Aparecen pequeñas discrepancias en $R_{min} = 375, 377 km$, respectivamente, y $E_{k(esc)}^{max} = 1.7, 2.0 \cdot 10^{51} erg$.

La Tabla (7.2) resume los resultados obtenidos con los códigos hidrodinámicos Q_h y G . Las principales diferencias aparecen en v_{min} , $E_{k(esc)}^{max}$ y M_{lost} . La viscosidad artificial produce valores para estas cantidades menores que los generados por el método G , lo que está motivado, in-

⁴Hay que señalar que no siempre se tiene un conocimiento teórico tan grande del problema que se intenta abordar.

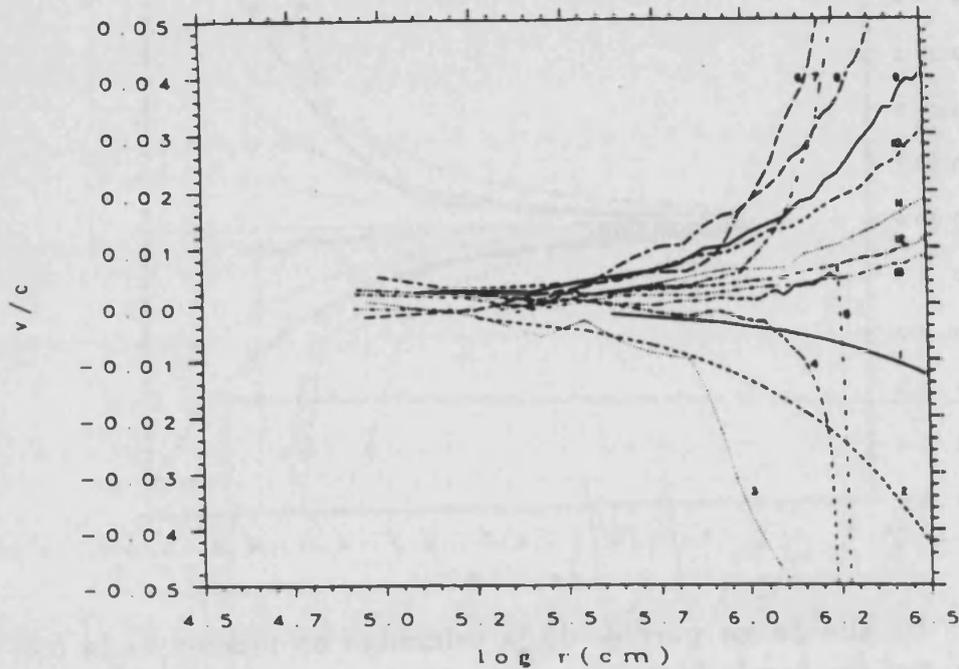


Figura 7.5: Detalle de los perfiles de la velocidad en función de la coordenada radial (en escala logarítmica y unidades de cm , obtenidos con el código Q_d). El número que aparece junto a cada curva establece la secuencia temporal dentro del intervalo $92.42 \leq t(ms) \leq 102.5$.

HC	$E_{k(inf)}^{max}$	v_{min}	ρ_{c14}^{max}	$R_{min}(km)$	$E_{k(esc)}^{max}$	$M_{lost}(\%)$
Q_h	10.0	-0.228	3.956	375	1.71	3.0
G	10.6	-0.293	3.665	391	3.98	4.2

Tabla 7.2: Comparación de dos códigos hidrodinámicos. M_{lost} es el porcentaje de masa expulsada.

dudablemente, por la mayor disipación introducida por la técnica de la viscosidad, que va reduciendo la energía cinética total del sistema.

7.4 Colapso estelar relativista.

La descripción del colapso estelar en el marco de la Relatividad General exige tanto la resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista como de las ecuaciones de Einstein. Las ecuaciones de la hidrodinámica ya se introdujeron en el Capítulo 4. El siguiente Apartado de esta Sección va a estar dedicado a detallar la forma en que se han escrito las ecuaciones de Einstein para ser resueltas.

7.4.1 Las ecuaciones de evolución de Einstein como un sistema de leyes de conservación.

Como ya comentamos en el Capítulo 4, el código de May y White fue el primer código de hidrodinámica totalmente relativista. En él se conjugaba una descripción particular de las ecuaciones de Einstein en simetría esférica (lagrangiana y comóvil) y un esquema en diferencias finitas estable, de segundo orden y que hacía uso de la viscosidad artificial para el tratamiento de las ondas de choque. Las ventajas de la descripción de May y White, esto es, su sencillez y su estrecha analogía con el caso newtoniano -propiciada por una elección adecuada de variables- han sido claves en el éxito y posterior desarrollo de lo que, usualmente, se denomina *código de May y White*.

Sin embargo, estas ventajas son, a su vez y paradójicamente, los principales inconvenientes. La descripción lagrangiana sólo es aplicable en problemas unidimensionales y además, la estructura de las ecuaciones (sistema de ecuaciones cuasilineal *no* conservativo) impide la aplicación de métodos específicos diseñados para el tratamiento de ondas de choque.

Con la idea de extender los métodos tipo Godunov al caso del sistema de las ecuaciones de la dinámica de fluidos en Relatividad General y en la perspectiva de desarrollar un código hidrodinámico multidimensional, vamos a presentar en este Apartado los pasos dados en dicha dirección.

Consideremos la descomposición de la métrica en los objetos: α , β^i , γ_{ij} , denominados respectivamente, función *lapso*, vector *desplazamiento* y métrica espacial *inducida*. Con ellos, el elemento de distancia se puede

escribir:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt). \quad (7.8)$$

El sistema de diez ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ en el formalismo (3+1) puede descomponerse en seis ecuaciones independientes de segundo orden para la métrica inducida γ_{ij} (*sistema de evolución*) y que corresponde a las ecuaciones con $\mu = i, \nu = j$. Las restantes cuatro ecuaciones proporcionan las ligaduras que deben ser satisfechas por los datos iniciales. No hay ecuaciones de evolución para α y β^i .

En lo que sigue, utilizaremos las condiciones coordenadas analizadas por Bona y Massó (1988, 1989) y que se resumen en:

1. *Gauge euleriano*: $\beta^i = 0$, que asegura que para una foliación temporal regular del espacio-tiempo, la congruencia de líneas coordenadas temporales no se hará singular.
2. *Sincronización armónica*: $\partial(\sqrt{\gamma}\alpha)/\partial t = 0 \Rightarrow \alpha(t, x^i) = C(x^i)\sqrt{\gamma}$. Esta elección evita las denominadas *singularidades de aplastamiento* (*crashing singularities*).

La restricción al caso de simetría esférica ha sido escrita explícitamente por Bona y Massó (1989) como un sistema de primer orden de leyes de conservación en estrecha analogía con las ecuaciones de la hidrodinámica y en la perspectiva de poder aplicar técnicas numéricas diseñadas para ésta.

Obviamente, la forma de escribir las ecuaciones de Einstein (con las condiciones coordenadas anteriores) como sistema de leyes de conservación no es única. Aquí presentaré una de ellas. Consideremos:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + X^2 dr^2 + Y^2 d\Omega^2, \quad (7.9)$$

como elemento de distancia, donde las funciones α , X e Y dependen de las coordenadas r y t . Para un fluido perfecto, podemos escribir las ecuaciones de evolución como:

$$\frac{-1}{Y^2} - \frac{2}{Y} \frac{1}{\alpha^2} (\ddot{Y} - \dot{Y} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{Y}^2}{2Y}) + \frac{2}{Y} \frac{1}{X^2} (Y' \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{Y'^2}{2Y}) = 8\pi[(W^2 - 1)\rho + Wp] \quad (7.10)$$

$$X^2 \left[\frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{\alpha' X'}{\alpha X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Y'}{Y} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{X'}{X} \right) \right]$$

$$-\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\ddot{X}}{X} - \frac{\dot{X}\dot{\alpha}}{X\alpha} + \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Y}}{Y} \left(\frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right) \right] = 8\pi p, \quad (7.11)$$

y las de ligadura (que no contienen derivadas segundas respecto del tiempo):

$$\begin{aligned} \frac{-1}{Y^2} - \frac{2}{Y} \frac{1}{X^2} \left(Y'' - Y' \frac{X'}{X} + \frac{Y'^2}{2Y} \right) \\ - \frac{2}{Y} \frac{1}{\alpha^2} \left(\dot{Y} \frac{\dot{X}}{X} + \frac{\dot{Y}^2}{2Y} \right) = -8\pi [W^2 \rho + (W^2 - 1)p] \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\frac{2}{Y} \frac{1}{\alpha X} \left(\dot{Y}' - \dot{Y} \frac{\alpha'}{\alpha} - Y' \frac{\dot{X}}{X} \right) = 8\pi \frac{X}{\alpha} \rho_0 h W (X u^r) \quad (7.13)$$

(En donde los símbolos $\dot{}$ y \prime denotan, respectivamente, la derivadas respecto de la coordenada temporal y radial).

Con objeto de escribir este sistema en forma conservativa, procedemos de la siguiente forma:

1. Introducimos las definiciones:

- (a) $Y^2 = r^2 Z^2(r, t)$,
- (b) $\alpha(t, r) = b(r) X Z^2$ (condición coordenada);

2. Manipulamos algebraicamente el sistema anterior eliminando: i) Y'' del sistema de evolución, utilizando la primera ligadura; ii) X , \dot{X} , X' , \dot{X} utilizando la condición coordenada; iii) \dot{Y} de la segunda ecuación de evolución utilizando la primera;

3. Introducimos la *masa de Bondi*, m :

$$\frac{2m}{Y} = 1 + \frac{1}{\alpha^2} [(r\dot{Z})^2 - (bZ^2Y')^2]; \quad (7.14)$$

y las variables auxiliares:

$$Q^z = \frac{\dot{Z}}{cZ}, \quad (7.15)$$

$$Q^\alpha = \frac{\dot{\alpha}}{c\alpha}, \quad (7.16)$$

$$\Gamma^\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad (7.17)$$

$$\Gamma^z = \frac{Z'}{Z}, \quad (7.18)$$

$$\Psi = \frac{2m}{r^3 Z^3} \quad (7.19)$$

(donde $c = \alpha/X$).

Con todo ello, obtenemos un sistema cerrado de primer orden que, como puede comprobarse, es estrictamente hiperbólico:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = c(ZQ^z) \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = c \left(-Q^z(8\pi(p+\tau+D-\rho) + 3\Psi) - 8\pi \frac{S}{c} \left(\frac{1}{r} + \Gamma^z \right) \right) \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial Q^z}{\partial t} = c \left(\Gamma^\alpha \Gamma^z + Q^z(Q^\alpha - 3Q^z) + \frac{\Gamma^\alpha}{r} - \frac{X^2}{2}(8\pi(p+\tau+D-\rho) + \Psi) \right) \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial \Gamma^z}{\partial t} = c \left(\Gamma^z(Q^\alpha - 3Q^z) + \Gamma^\alpha Q^z + \frac{(Q^\alpha - 3Q^z)}{r} + 4\pi X^2 \frac{S}{c} \right) \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial(cV)}{\partial r} = & \\ & c \left(2\Gamma^\alpha \Gamma^z + 2Q^z(Q^\alpha - 3Q^z) + 2\frac{\Gamma^\alpha}{r} + 4\pi X^2(\rho - 2\tau - 2D - 3p) \right) \quad (7.24) \\ & + \mathcal{N} c X^2 \left(4\pi Q^z \frac{S}{c} r + 4\pi(\tau + D)(1 + r\Gamma^z) + \Psi(-1 + r\Gamma^\alpha - \frac{5}{2}r\Gamma^z - \frac{1}{2}r^2 \frac{b'}{rb}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial(cQ^\alpha)}{\partial r} = & \quad (7.25) \\ & \mathcal{N} c X^2 \left(4\pi \frac{S}{c} (1 + r\Gamma^z) + 4\pi r Q^z (p + \tau + D - \rho) + r\Psi \left(\frac{7}{2} Q^z - Q^\alpha \right) \right) \end{aligned}$$

donde $V = (\Gamma^\alpha - \mathcal{N} r X^2 \frac{\Psi}{2})$ y \mathcal{N} puede ser 0 ó 1.

El sistema de ecuaciones compuesto por las seis ecuaciones de Einstein y las tres de la hidrodinámica, se han usado para describir el colapso

en Relatividad General de la configuración tipo enana blanca descrita en la Sección 2.

Gran parte de los resultados presentados en este Capítulo se han obtenido utilizando la técnica de separación de operadores de Strang (*Strang splitting*; ver Yee, 1989) en los términos fuente, de forma que las incógnitas, u , se integran en el tiempo según:

$$u^{n+1} = \mathcal{L}_s^{\Delta t/2} \mathcal{L}_F^{\Delta t} \mathcal{L}_s^{\Delta t/2} u^n \quad (7.26)$$

en donde $\mathcal{L}_s^{\Delta t/2}$ es el operador que evoluciona las u con los términos fuente y $\mathcal{L}_F^{\Delta t}$ con los flujos (en este caso con un esquema explícito de MacCormack con un término de disipación conservativo TVD) y en donde cada operador actúa sobre lo que tiene a su derecha.

7.4.2 Colapso de polvo.

Para una configuración inicial homogénea con una masa igual a la de la configuración de la enana blanca en el equilibrio, hemos simulado el colapso sin presión. Para ello, se ha efectuado un cambio a unas coordenadas comóviles con la materia. La homología se aprecia en la constancia de la masa encerrada, que aparece representada en la Figura (7.6) o en la de Y_j^n/Y_j^0 (el equivalente a $\chi = r(m, t)/r(m, 0)$, que veíamos en el caso newtoniano), que puede calcularse a partir de los datos mostrados en la Figura (7.7). El cálculo se detiene cuando la función α^2 tiene un valor inferior a 10^{-10} .

7.4.3 Evolución dinámica de la configuración inicial de equilibrio.

En este Apartado presentamos algunos resultados obtenidos en el estudio de la evolución hidrodinámica del modelo inicial de equilibrio de la enana blanca. En la práctica hemos dejado evolucionar dicho modelo inicial con el código hidrodinámico, manteniendo como ecuación de estado la misma con la que se obtuvo el modelo inicial. En este test hemos mantenido fijo el campo gravitatorio inicial y las ecuaciones de la hidrodinámica han evolucionado con el esquema MUSCL ya descrito. Las Figuras (7.8) y (7.9) muestran la evolución en el perfil de la velocidad. Tras varios miles de pasos temporales en los que la configuración se reajusta debido a las perturbaciones numéricas que aparecen al hacer evolucionar el modelo inicial con un código con precisión diferente de aquél con el que fue

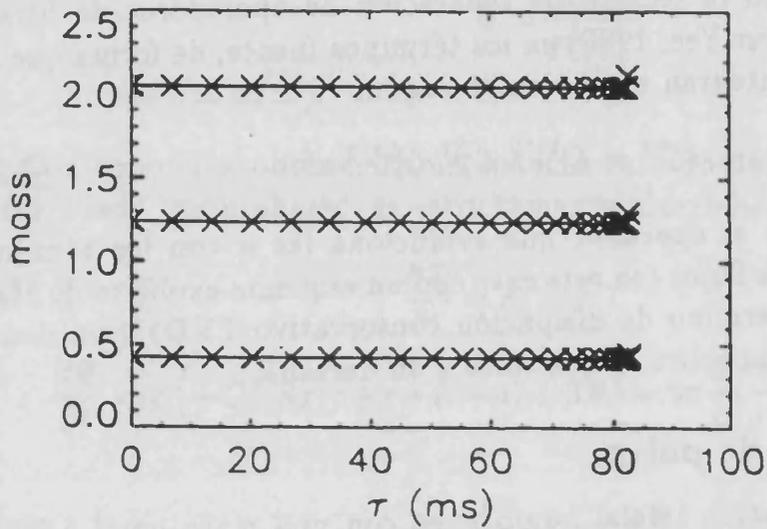


Figura 7.6: Evolución de la masa encerrada con el tiempo propio para tres capas, en el colapso de polvo.

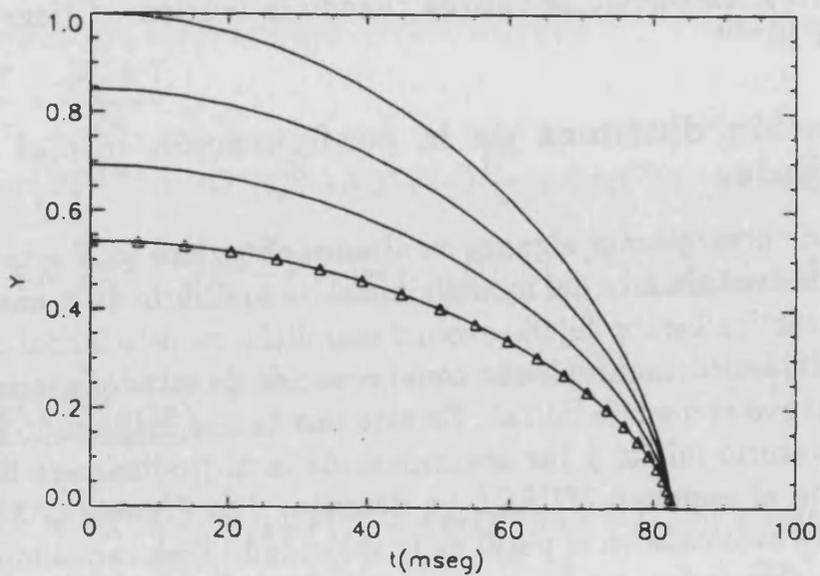


Figura 7.7: Evolución de Y (normalizada a su valor en la superficie en $t = 0$) con el tiempo propio, en el colapso de polvo.

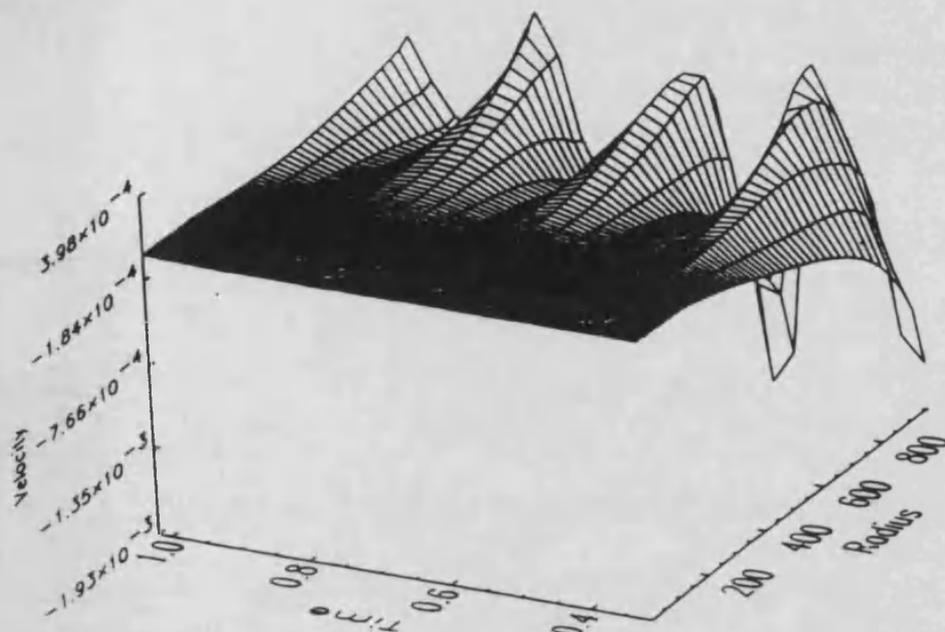


Figura 7.8: Diagrama tridimensional que muestra el perfil del campo de velocidades en función de su distancia al centro (medida en km) y el tiempo (medido en s) en el problema de la evolución dinámica de la configuración inicial de equilibrio. Los límites superior e inferior de la escala de la velocidad muestran los valores máximo y mínimo absolutos alcanzados por ésta (en unidades de la velocidad de la luz).

generado, la configuración comienza a oscilar radialmente con el modo fundamental. En la Figura (7.9) puede verse con claridad el período de las oscilaciones (alrededor de $0.2 s$).

La malla numérica utilizada en esta ocasión consta de 100 celdas, más pequeñas hacia el centro, distribuidas según una serie geométrica y cubriendo el radio de la configuración inicial ($1020 km$).

Las oscilaciones observadas se limitan a la zona de la envoltura, en donde dado el mayor tamaño de las celdas, la precisión va a ser menor. Al cabo de un segundo de evolución, en el centro la densidad ha cambiado menos de un 6% y la energía interna específica menos de un 2% .

7.4.4 Evolución dinámica hacia una configuración de equilibrio.

Para realizar este test hemos considerado un modelo de equilibrio de enana blanca para la ecuación de estado de Salpeter y Zapolski (1967),

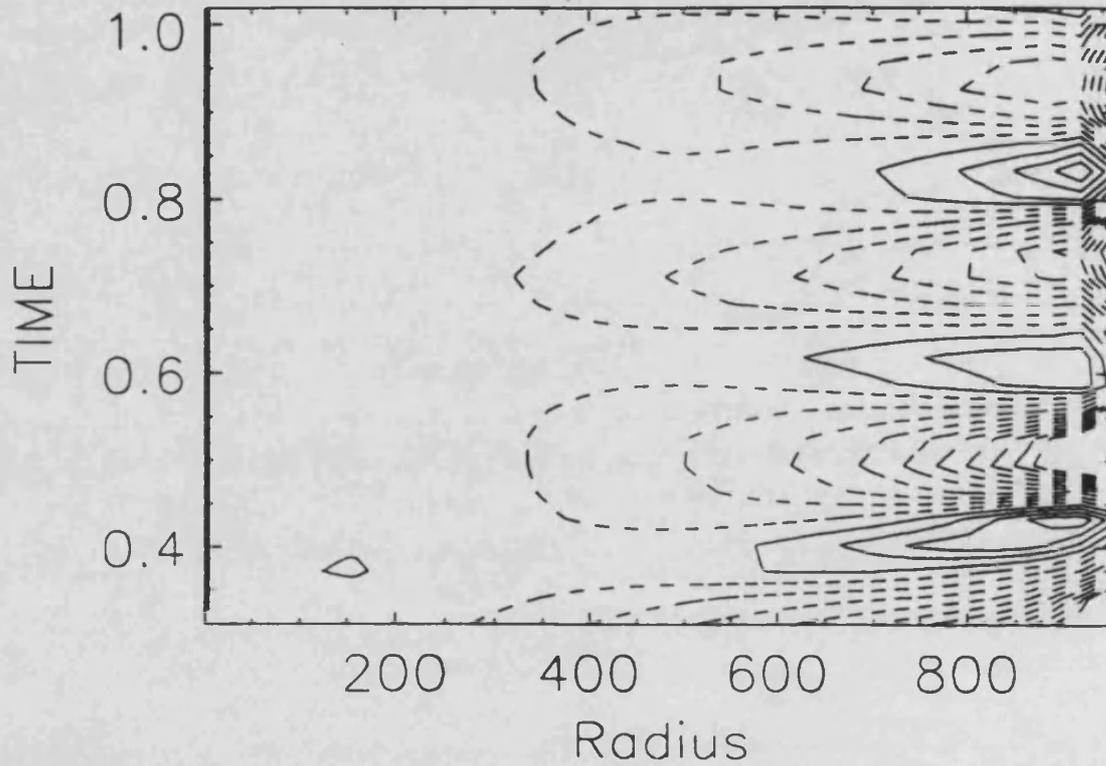


Figura 7.9: Contornos para la velocidad en función de la distancia al centro y el tiempo en el problema de la evolución dinámica de la configuración inicial de equilibrio. Las líneas discontinuas representan velocidades negativas y las continuas positivas. Se observan tres oscilaciones completas con un período del orden de 0.2 s.

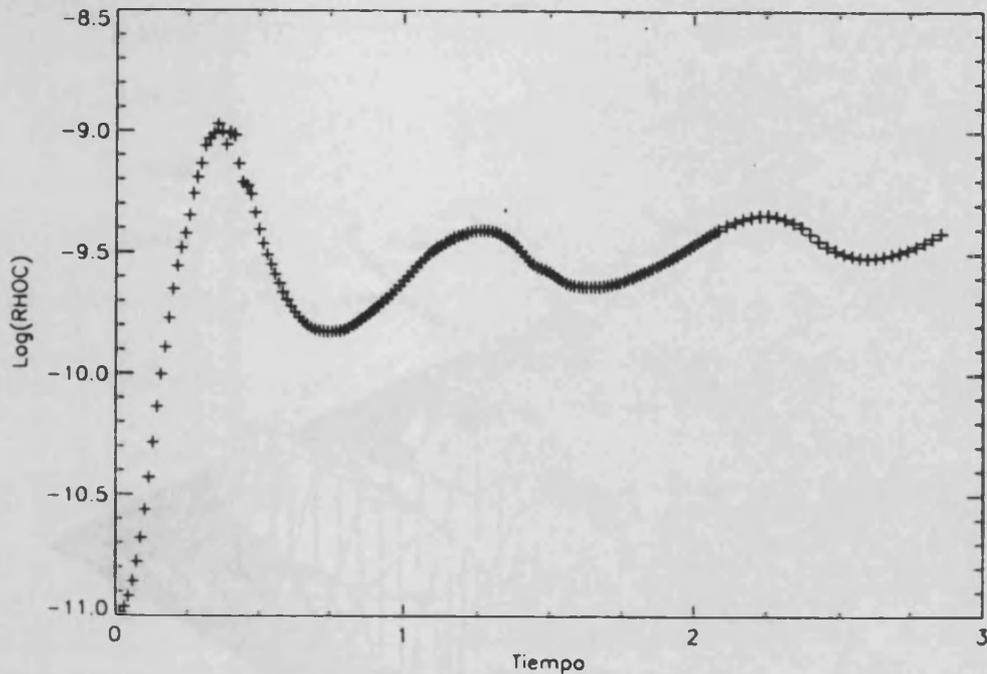


Figura 7.10: Evolución con el tiempo de la densidad central de un objeto con densidad uniforme inicialmente.

con una masa de $1.23M_{\odot}$. El criterio estático de estabilidad permite identificar este objeto como estable, al menos frente a perturbaciones radiales, en el diagrama correspondiente *masa-densidad central* (ver, por ejemplo, Ibáñez, 1983).

A partir de dicho modelo, hemos generado un objeto con el mismo radio y la misma masa pero con una distribución de densidad uniforme e igual a $\rho = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$, en donde M y R son la masa y el radio, respectivamente, de la configuración original. Dicho objeto tiene un gradiente de presión nulo y, en consecuencia, al inyectarlo en el código numérico hidrodinámico, inducirá inmediatamente un campo de velocidades. En este modelo, la densidad central es menor que la del correspondiente en equilibrio para la misma masa, por lo que la tendencia inicial del objeto es a colapsar. La Figura (7.10) muestra la evolución en el tiempo de la densidad central. Durante el primer medio segundo de evolución, aumenta dos órdenes de magnitud superando la densidad central del modelo de equilibrio al que tiende. A partir de ese momento, el objeto comienza a describir oscilaciones estables alrededor de la configuración de equilibrio (ver Figura (7.11)), aunque con una cierta tendencia de la densidad central a aumentar. La simulación fue parada después de tres segundos, tras 10^5 pasos temporales. La Figura (7.12) representa

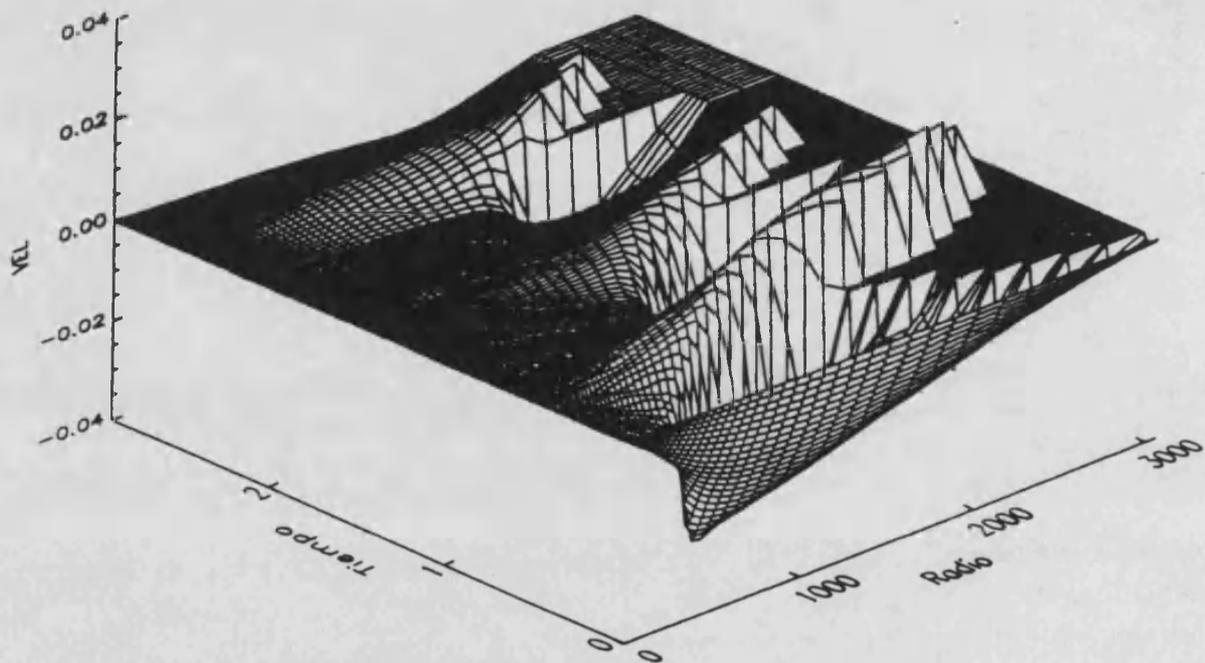


Figura 7.11: Campo de velocidades como función de la distancia al centro y el tiempo, en el problema de la evolución dinámica hacia una configuración de equilibrio. Pueden apreciarse la primera fase de compresión, que desarrolla un marcado perfil en V , y tres oscilaciones alrededor de la configuración de equilibrio.

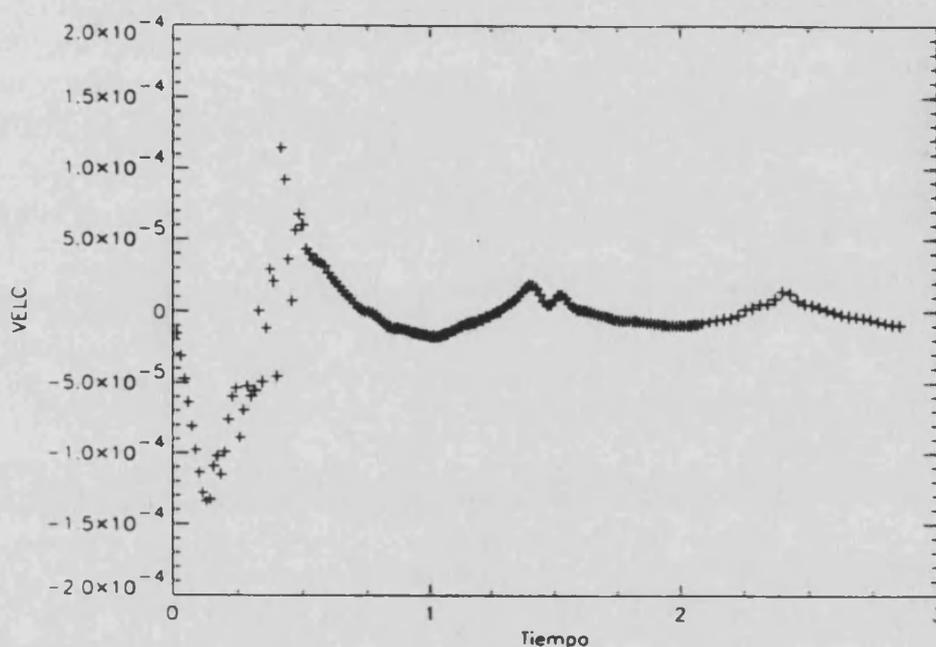


Figura 7.12: Velocidad en la primera capa en el problema de la evolución dinámica hacia una configuración de equilibrio.

la velocidad de la primera capa durante ese periodo, siendo destacable su oscilación alrededor de cero una vez superada la fase de compresión inicial.

En los cálculos hemos utilizado una malla de 50 celdas con espaciado geométrico sobre el radio del objeto inicial $R = 3500 \text{ km}$.

7.4.5 Colapso estelar relativista.

En este Apartado presentamos los resultados, muy preliminares, obtenidos en la simulación del colapso estelar relativista. En la ecuación de estado usada, la presión viene dada por (7.6), con el exponente adiabático obedeciendo una expresión similar a la (7.7) pero en la que la discontinuidad en la derivada de γ en $\rho = \rho_b$ se ha eliminado introduciendo una transición suave entre las densidades $\rho_1 (< \rho_b)$ y $\rho_2 (> \rho_b)$. La secuencia de Figuras (7.13) muestra un detalle de los perfiles de la velocidad, la función α y la densidad durante la fase de colapso y hasta alcanzar en el centro la densidad de saturación de la materia nuclear ($2.7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$), a la que hemos situado ρ_b , para un $\gamma_0 = 1.30$. Durante esta fase, la densidad central aumenta cuatro órdenes de magnitud y la velocidad va desarrollando el característico perfil en V que se transforma en una onda

de choque al endurecerse la ecuación de estado. Tras la onda de choque, en el instante de su formación (lo que puede corresponder aproximadamente a la última de las curvas mostradas como se aprecia en la Figura de la velocidad), ha quedado una masa de alrededor de $0.8M_{\odot}$ (más de la mitad de la masa de la estrella) en una región de unos $10km$ de radio. Este hecho pone de manifiesto una dificultad inherente a todos los códigos hidrodinámicos eulerianos cuando son aplicados a problemas que implican cambios importantes de escala como es la pérdida de resolución en la parte central que, a su vez, es causa de una pérdida de precisión.

Por último, las Figuras (7.14) y (7.15) muestran una secuencia de perfiles de la velocidad y la energía interna específica en la fase de rebote. Los parámetros de la ecuación de estado con los cuales se han obtenido han sido: $\gamma_0 = 1.30$, $S = 1$, $\rho_b = 2 \cdot 10^{12} \text{ g/cm}^3$, $\rho_2/\rho_1 = 10$. En las Figuras queda de manifiesto la formación de un objeto central estático de unos 50 km de radio. La onda de choque se propaga hasta la superficie. En la Figura (7.15), correspondiente a la energía interna específica, puede verse el aumento de entropía (calentamiento) que experimenta el material al atravesar la onda de choque.

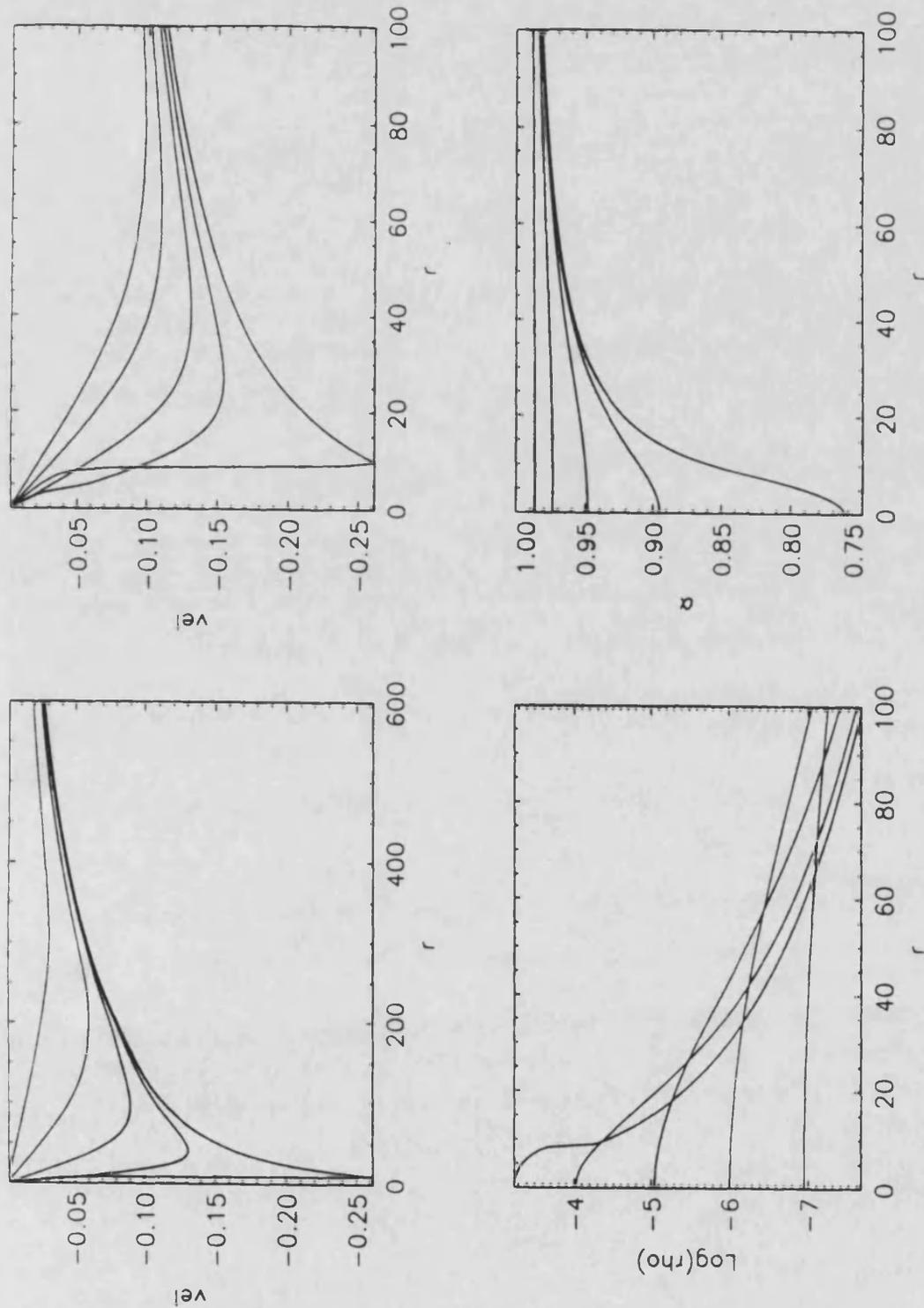


Figura 7.13: Fase de caída en el colapso relativista. Con el tiempo los modelos desarrollan perfiles en la velocidad con un mínimo más marcado y una densidad central mayor.

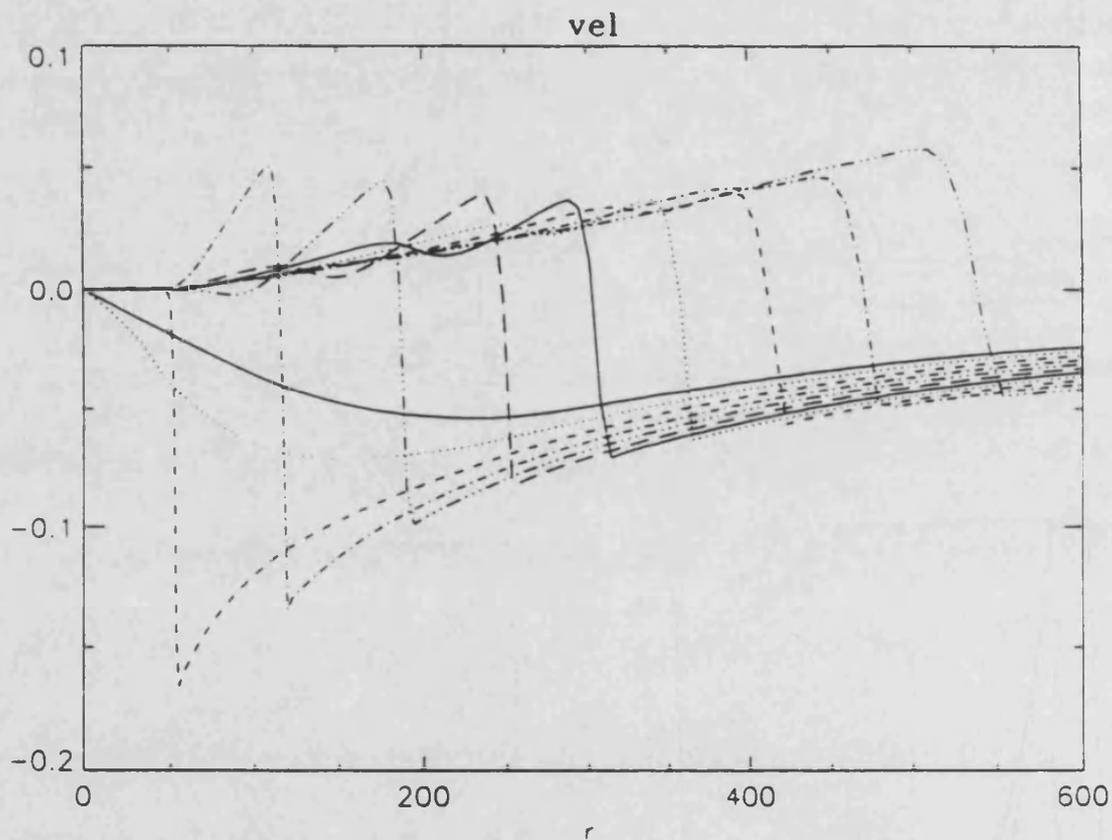


Figura 7.14: Perfiles de la velocidad para diferentes modelos en la simulación de la propagación de la onda de choque tras el colapso estelar con $\rho_b = 2 \cdot 10^{12} \text{ g/cm}^3$. El tiempo al que corresponde cada curva aparece (en unidades de km) en la Figura (7.13).

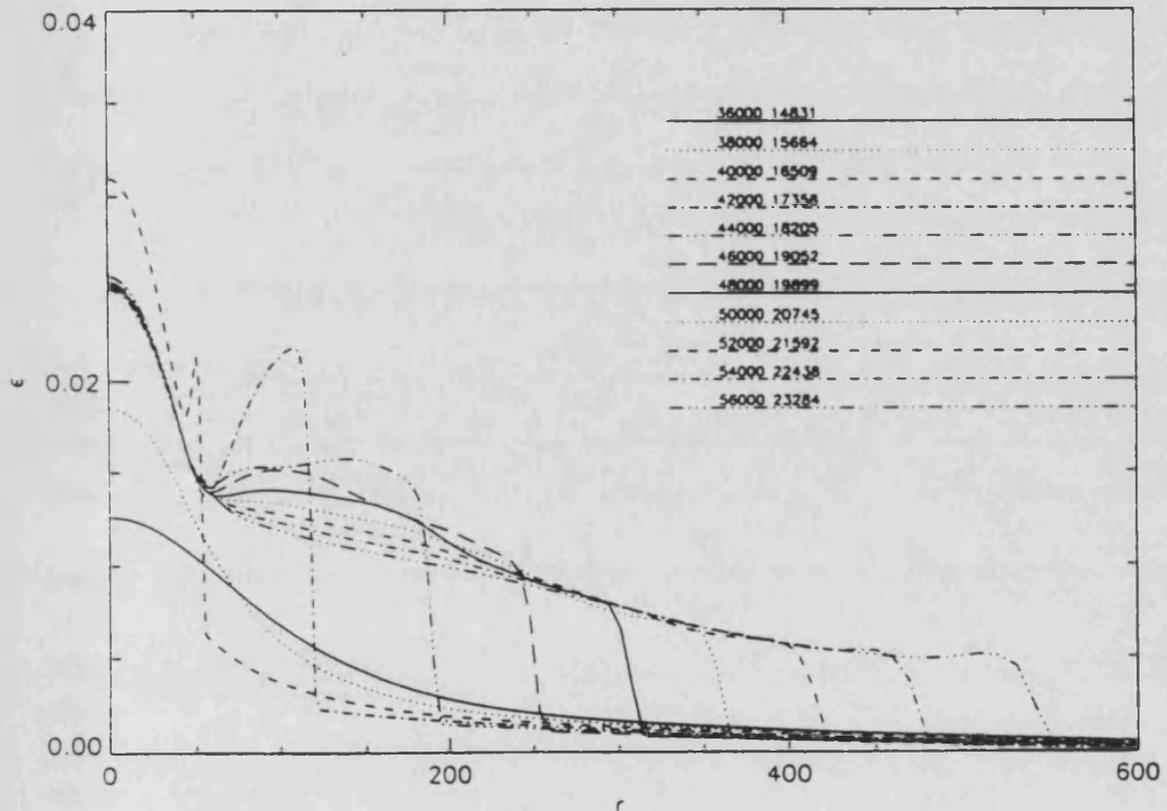


Figura 7.15: Energía interna específica en diferentes instantes en la simulación de la propagación de la onda de choque tras el colapso estelar con $\rho_b = 2 \cdot 10^{12} \text{ g/cm}^3$. En la leyenda aparece el tiempo al que corresponde cada curva (en unidades de km).

Conclusiones y perspectivas

La principal aportación del trabajo descrito en la presente Memoria ha sido el desarrollo de una formulación para las ecuaciones de la hidrodinámica relativista que permita el uso de las técnicas *shock-capturing* modernas (TSCM) para su resolución.

Las TSCM se han desarrollado durante la última década y su uso se ha extendido a la simulación de diferentes escenarios astrofísicos en el marco de la dinámica newtoniana, sustituyendo por completo a las técnicas de viscosidad artificial. La primera parte de mi trabajo ha consistido, precisamente, en la puesta a punto de un código hidrodinámico newtoniano basado en las TSCM, capaz de describir el colapso estelar en simetría esférica. En esa fase se comprobó la eficiencia de diferentes resolvedores de Riemann no sólo en problemas de valores iniciales discontinuos (Martí *et al.*, 1990a) sino también en cálculos concretos de colapso (Martí, Ibáñez y Miralles, 1990c).

Con dicho código se han efectuado diferentes cálculos de colapso estelar de configuraciones tipo enana blanca. En la comparación con los resultados obtenidos con un código de viscosidad artificial, con el mismo modelo inicial, ecuación de estado y malla numérica, han aparecido diferencias en la energética global del proceso: hasta un factor 2 en la energía cinética máxima de la masa eyectada (Martí, Ibáñez y Miralles, 1990b). Este resultado podría ser de gran importancia en el contexto del mecanismo directo de supernovas de tipo II.

Abordamos más tarde el problema de la aplicación de las TSCM a la resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista (en una dimensión espacial). En este punto el trabajo desarrollado por nosotros (Martí, Ibáñez y Miralles, 1991) puede considerarse pionero, ya que,

aunque la idea de extender las TSCM a la resolución de estas ecuaciones ha sido propuesta por diversos especialistas (Hawley, Smarr y Wilson, 1984b; Norman y Winkler, 1986), aún no ha sido llevada a la práctica. Nuestra formulación se basa en la explotación del carácter de *sistema de leyes de conservación hiperbólico* que tienen las ecuaciones de la hidrodinámica y, en cierto modo, enlaza con el trabajo teórico, recopilado por Anile (1989), sobre la caracterización covariante de sistemas hiperbólicos. La extensión de las TSCM se ha efectuado a través de la denominada *aproximación local por campos característicos* y para hacerla posible hemos tenido que escribir las ecuaciones en términos de las variables en función de las cuales el sistema exhibe su carácter conservativo.

El código elaborado se ha utilizado para la descripción de diferentes problemas (en una dimensión) en Relatividad Especial con ondas de choque, involucrando flujos en todos los regímenes de velocidades: newtoniano, relativista y ultrarrelativista. Son destacables los resultados obtenidos en la descripción de flujos con un factor de Lorentz próximo a 100 (con el método de Marquina, 1991). Los resultados obtenidos nos permiten confiar en la viabilidad de nuestra formulación como base de un futuro código para la descripción de jets relativistas.

Además, se ha comprobado la estabilidad y el correcto funcionamiento del método en la descripción de flujos con presencia de ondas de choque en escenarios de acreción esférica sobre objetos compactos.

Todos los resultados anteriores nos han permitido abordar con una cierta confianza la descripción del colapso estelar en Relatividad General, en colaboración con los investigadores Dr. C. Bona y J. Massó, del grupo de Relatividad del Departamento de Física de la Universidad de las Islas Baleares. En este problema, las ecuaciones de la hidrodinámica relativista aparecen acopladas a las de Einstein. Los resultados preliminares abarcan varios tests: i) el colapso de polvo, ii) la evolución hidrodinámica hacia una configuración de equilibrio de un modelo inicial con densidad uniforme, iii) la evolución del modelo original de equilibrio, obteniendo oscilaciones. Además, hemos logrado describir la fase de caída en el proceso del colapso estelar y la propagación de la onda de choque.

Las conclusiones más importantes de todo el trabajo desarrollado pueden resumirse de la siguiente forma:

- Hemos encontrado diferencias importantes en la energética del co-

lapso newtoniano al comparar los resultados obtenidos mediante un código basado en una TSCM y otro basado en una técnica de viscosidad artificial, lo que demuestra la importancia del correcto tratamiento de la ondas de choque en la descripción del mecanismo directo en supernovas de tipo II.

- Hemos logrado extender las TSCM a la resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista (en una dimensión) mediante la llamada *aproximación local por campos característicos*.
- Haciendo uso de estas técnicas, hemos logrado describir flujos ultrarrelativistas, alcanzando factores de Lorentz del orden de 100.
- Hemos efectuado diferentes simulaciones de flujos de acreción esférica sobre objetos compactos con presencia de ondas de choque.
- Por último, hemos abordado el problema del colapso estelar en Relatividad General. Los resultados obtenidos hasta el momento nos permiten ser optimistas.

La extensión de las TSCM a las ecuaciones de la hidrodinámica relativista abre toda una línea de trabajo para el futuro. Dicha extensión en combinación con las técnicas de *operator splitting* para el tratamiento de problemas multidimensionales permite abordar la simulación de diferentes escenarios:

- Jets galácticos: muy probablemente parte del trabajo que realizaré en los próximos años irá dirigido a la aplicación de este tipo de técnicas en la simulación de jets en régimen ultrarrelativista.
- Acreción sobre objetos compactos: Font (1991) ha aplicado las TSCM para la descripción de flujos *potenciales* de acreción con simetría axial, resolviendo una ecuación de ondas lineal (en un espacio-tiempo curvo). Las técnicas de splitting exploradas por él para el tratamiento multidimensional pueden combinarse con el trabajo presentado en esta Memoria, para la elaboración de un código capaz de describir procesos de acreción hidrodinámica.
- Colapso estelar no esférico: siguiendo con la colaboración anteriormente citada, y una vez concluido el código unidimensional, abordaremos el estudio del colapso estelar no esférico. En particular, se intentará estimar las características de la señal y ritmo de

emisión de energía de la radiación gravitacional generada en dicho escenario.

En el ámbito de la hidrodinámica newtoniana queda todavía pendiente el estudio del colapso de núcleos de estrellas masivas con una microfísica realista -modelo inicial, ecuación de estado y transporte de neutrinos- y las TSCM.

Apéndice

Presentamos en este Apéndice la obtención de la solución analítica para el problema de Riemann de un fluido relativista (*tubo de Riemann*). Consideremos en $t = 0$, un fluido perfecto (es decir, con conductividad térmica y viscosidad nulas) estático, en dos estados uniformes diferentes, separados por una membrana. Supondremos que la discontinuidad inicial se sitúa en $x_0 = 0.5$, y que el gas a mayor presión está a la izquierda de dicha discontinuidad, ocupando la región $0 \leq x \leq 0.5$. En $t = 0$ se elimina la membrana. La evolución posterior es cualitativamente la misma para flujos newtonianos o relativistas. Conforme transcurre el tiempo, el estado del gas es autosemejante, dependiendo de la variable $\xi = \frac{x-x_0}{t}$ y está compuesto por cinco regiones. La Figura 1 muestra un esquema típico (para las condiciones iniciales expuestas más arriba) para el estado del gas en un instante de tiempo posterior a $t = 0$ junto con un diagrama $x - t$ en el que aparece la evolución de las diferentes regiones (numeradas de 1 a 5).

La región 1 es el estado que inicialmente se situaba a la izquierda de x_0 . Su frontera derecha se mueve con velocidad $\xi_1 (< 0)$ y se encuentra en $x_1 = x_0 + \xi_1 t$.

La región 2 es una rarefacción. En ella, el fluido se mueve hacia la derecha con velocidad $v = v_2(\xi)$. La densidad y la presión en esta región vienen dadas por: $\rho_0 = \rho_{02}(\xi)$, $p = p_2(\xi)$. La frontera derecha se sitúa en $x_2 = x_0 + \xi_2 t$.

Las regiones 3 y 4 son dos estados constantes separados por una discontinuidad de contacto en $x_3 = x_0 + \xi_3 t$. El límite derecho de la región 4 lo constituye la onda de choque que se mueve hacia la derecha con velocidad ξ_4 . Al otro lado de dicha onda se sitúa el estado que había inicialmente en $x > x_0$.

Los estados 1 y 5 son los iniciales. Así pues, lo que resta por determinar son los valores de la velocidad, la presión y la densidad en las

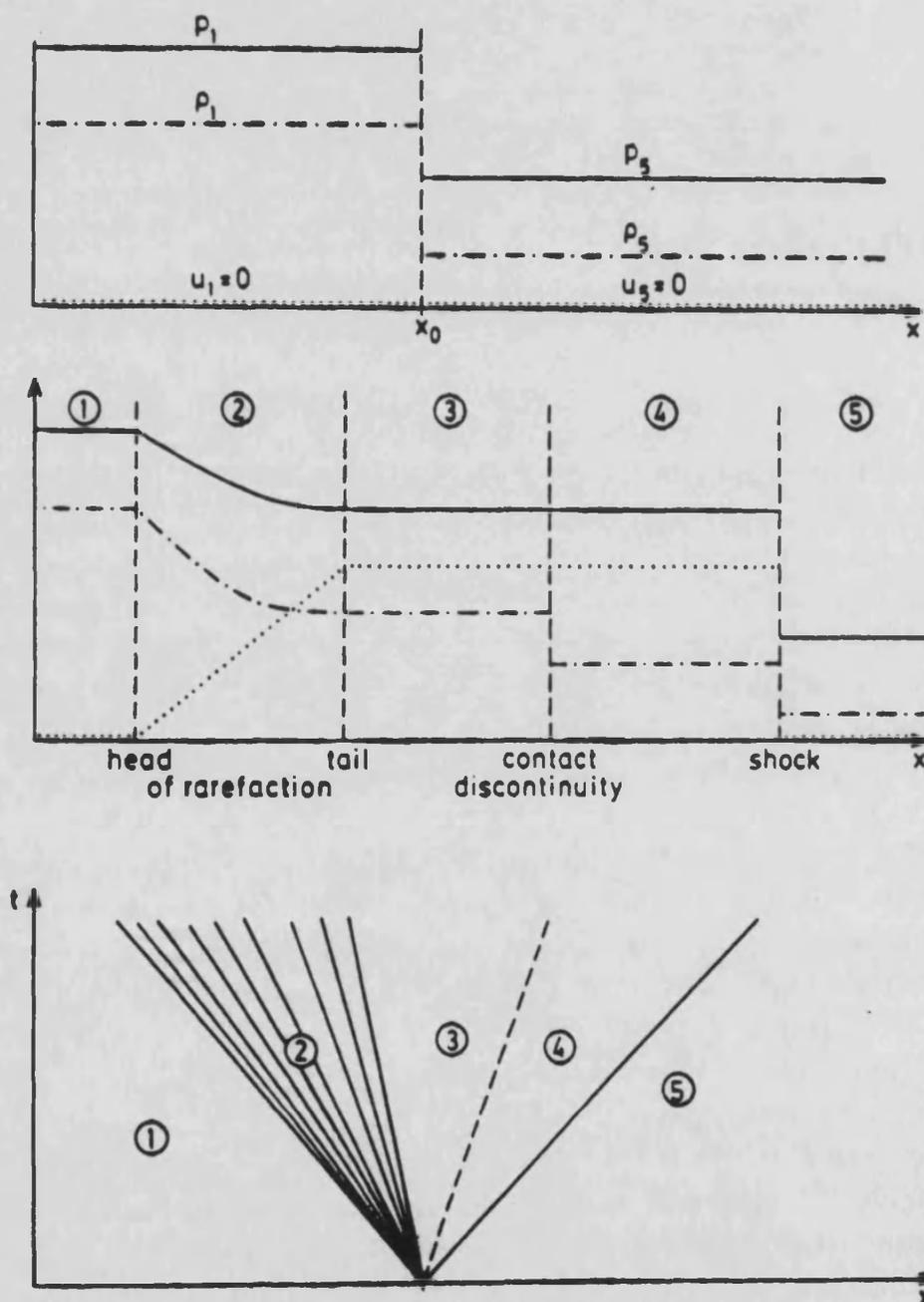


Figura 0.1: Solución esquemática de un problema de Riemann. El estado inicial en $t = 0$ (figura superior) consiste es dos estados constantes, L y R con $p_L > p_R$, $\rho_{0L} > \rho_{0R}$, y $v_L = v_R = 0$, separados por una membrana en x_0 . El diagrama de espacio-tiempo (figura de abajo) muestra la evolución del estado inicial: una onda de choque (línea continua) y una discontinuidad de contacto (línea de trazos) comienzan a moverse hacia la derecha, mientras que una onda de rarefacción (abanico de líneas continuas) lo hace hacia la izquierda. Así, en $t > 0$ aparecen cinco estados diferentes en el flujo (figura de en medio).

regiones 3 y 4 (constantes), las funciones $v_2(\xi)$, $p_2(\xi)$ y $\rho_{02}(\xi)$ que describen el flujo en la región de la rarefacción y las velocidades con que se mueven los puntos que separan las diferentes regiones: ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 y ξ_4 .

Las condiciones de Rankine-Hugoniot, que se verifican a través de la discontinuidad de contacto y a través de la onda de choque, aportan seis relaciones que pueden utilizarse para eliminar seis variables. El resto de relaciones, como ahora veremos, provienen de la condición de flujo autosemejante en la región de la rarefacción y las condiciones de continuidad en el flujo en el punto que separa la rarefacción del estado constante a su derecha.

Las ecuaciones, en coordenadas cartesianas y simetría plana, que gobiernan el movimiento de un fluido perfecto relativista se reducen a:

$$\frac{\partial \rho_0 W}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 W v}{\partial x} = 0, \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial \rho_0 h W^2 v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 h W^2 v^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial (\rho_0 h W^2 - p)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 h W^2 v}{\partial x} = 0 \quad (0.3)$$

(en donde todas las magnitudes tienen la definición usual). La última ecuación expresa la conservación de la energía o, haciendo uso de la primera ley de la Termodinámica, la conservación de la entropía específica, s :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (0.4)$$

tratándose por tanto de un fluido adiabático.

Imponiendo el carácter autosemejante para el flujo, todas las variables que describen el fluido dependerán exclusivamente de ξ . Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\xi}, \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \frac{d}{d\xi}, \quad (0.6)$$

las ecuaciones anteriores se escriben:

$$(v - \xi) \frac{d\rho_0}{d\xi} + (1 - v\xi) \rho_0 W^2 \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad (0.7)$$

$$(v - \xi)W^2 v \frac{d\rho_0 h}{d\xi} + [2W^2(v - \xi) + \xi]W^2 \rho_0 h \frac{dv}{d\xi} + \frac{dp}{d\xi} = 0, \quad (0.8)$$

$$(v - \xi)W^2 \frac{d\rho_0 h}{d\xi} + [2W^2(v - \xi)v + 1]W^2 \rho_0 h \frac{dv}{d\xi} + \xi \frac{dp}{d\xi} = 0. \quad (0.9)$$

Eliminando de (0.8) y (0.9) el término en $\frac{d\rho_0 h}{d\xi}$, el sistema anterior se escribe:

$$(v - \xi) \frac{d\rho_0}{d\xi} + (1 - v\xi)\rho_0 W^2 \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad (0.10)$$

$$(v - \xi)W^2 \rho_0 h \frac{dv}{d\xi} + (1 - v\xi) \frac{dp}{d\xi} = 0. \quad (0.11)$$

Como en el caso newtoniano, el flujo autosimilar es isentrópico¹, lo que permite encontrar una relación entre las cantidades $\frac{d\rho_0}{d\xi}$ y $\frac{dp}{d\xi}$. Efectivamente, dado que la velocidad del sonido en un fluido relativista se define, como ya vimos, según:

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad (0.12)$$

para un fluido como el que estamos considerando, se cumplirá que:

$$\frac{dp}{d\xi} = c_s^2 \frac{d\rho}{d\xi}. \quad (0.13)$$

Además, haciendo uso de la primera ley de la Termodinámica, se tiene que:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} \right)_s = h, \quad (0.14)$$

lo que permite reescribir la expresión (0.13) en la forma:

$$\frac{dp}{d\xi} = c_s^2 h \frac{d\rho_0}{d\xi}. \quad (0.15)$$

Haciendo uso de esta expresión, el sistema formado por las ecuaciones (0.10) y (0.11), puede escribirse ahora:

$$(v - \xi) \frac{d\rho_0}{d\xi} + (1 - v\xi)\rho_0 W \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad (0.16)$$

¹La expresión (0.4), para la conservación de la entropía, en términos de la variable auto-semejante ξ , puede escribirse en la forma:

$$(v - \xi) \frac{ds}{d\xi} = 0,$$

lo que implica el carácter isentrópico del flujo, dado que, en general, $v \neq \xi$.

$$(v - \xi)\rho_0 W^2 \frac{dv}{d\xi} + (1 - v\xi)c_s^2 \frac{d\rho_0}{d\xi} = 0, \quad (0.17)$$

que tiene solución distinta de la trivial (estados constantes) cuando:

$$(v - \xi)\rho_0 W^2 = (1 - v\xi)^2 c_s^2 \rho_0 W^2, \quad (0.18)$$

lo que es equivalente a:

$$c_s = \pm \frac{v - \xi}{1 - v\xi}. \quad (0.19)$$

Despejando ξ se tiene:

$$\xi = \frac{v \mp c_s}{1 \mp vc_s} \quad (0.20)$$

(confrontar con Mathews, 1971). En el caso que estamos considerando, la rarefacción se desarrolla junto a una región (la 1) en la que el fluido está en reposo ($v_1 = 0$) y se desplaza hacia la izquierda, por tanto, la velocidad con que se mueve el punto que separa las regiones 1 y 2, que puede obtenerse a partir de (0.20), será:

$$\xi_1 = -c_s 1 \quad (0.21)$$

(en donde ya se ha escogido el signo adecuado para la solución).

Sustituyendo esta expresión para ξ (0.16) se tiene que:

$$c_s \frac{d\rho_0}{d\xi} + \rho_0 W^2 \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad (0.22)$$

o, equivalentemente,

$$W^2 dv = -\frac{c_s}{\rho_0} d\rho_0 \quad (0.23)$$

(el signo $-$ refleja el hecho de que en la rarefacción, la velocidad del fluido aumenta en el sentido de x crecientes, mientras que la densidad disminuye).

Para un fluido isentrópico, la velocidad del sonido puede escribirse como función exclusiva de ρ_0 , por lo que la expresión anterior es integrable:

$$\frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+v}{1-v} \right]_{v_1}^v = - \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{c_s}{\rho_0} d\rho_0 \quad (0.24)$$

(en donde los límites inferiores de integración se han escogido como los valores de v y ρ_0 en la región contigua 1, desde donde se desarrolla la rarefacción).

Para un fluido capaz de experimentar sólo transformaciones adiabáticas, se verifica que:

$$p = K \rho_0^\gamma \quad (0.25)$$

(transformación politrópica con γ igual al cociente de los calores específicos a presión y volumen constantes y K una constante), y la velocidad del sonido se calcula según:

$$c_s^2 = \frac{\gamma p (\gamma - 1)}{\rho_0 (\gamma - 1) + \gamma p}. \quad (0.26)$$

Teniendo en cuenta las dos últimas expresiones, dos estados arbitrarios del gas quedan relacionados a través de:

$$\rho_0 = \rho_{01} \left(\frac{c_s^2 (\gamma - 1 - c_{s1}^2)}{c_{s1}^2 (\gamma - 1 - c_s^2)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (0.27)$$

(en donde, de nuevo, se ha escogido el estado 1 como el estado constante a partir del cual se desarrolla el flujo autosemejante).

La sustitución de la expresión anterior en la integral (0.24) lleva a que:

$$\frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+v}{1-v} \right]_{v_1}^v = - \int_{c_{s1}}^{c_s} \frac{2dc_s}{\gamma - 1 - c_s^2}. \quad (0.28)$$

Una vez efectuada la integral, la velocidad del sonido puede expresarse en función de v en la forma:

$$c_s = (\gamma - 1)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\sqrt{\gamma - 1} + c_{s1}}{\sqrt{\gamma - 1} - c_{s1}} \left(\frac{1+v}{1-v} \frac{1-v_1}{1+v_1} \right)^{\frac{-\sqrt{\gamma-1}}{2}} - 1 \right] \left[\frac{\sqrt{\gamma - 1} + c_{s1}}{\sqrt{\gamma - 1} - c_{s1}} \left(\frac{1+v}{1-v} \frac{1-v_1}{1+v_1} \right)^{\frac{-\sqrt{\gamma-1}}{2}} + 1 \right]^{-1} \quad (0.29)$$

(confrontar con Liang, 1977).

La resolución del sistema algebraico formado por las expresiones (0.19) y (0.29) permite determinar los valores de v (y c_s) en función de x y t , en la zona de la rarefacción (región 2). La expresión (0.27) da el perfil de la densidad y la ecuación de estado, una vez conocida la densidad, el de la presión.

Por último, las tres condiciones restantes las aporta el carácter continuo del flujo en el otro extremo de la región de la rarefacción:

$$p(\xi_2) = p_3, \quad (0.30)$$

$$\rho_0(\xi_2) = \rho_{03}, \quad (0.31)$$

$$v(\xi_2) = v_3. \quad (0.32)$$

Referencias

1. Anile, A.M., *Relativistic fluids and magneto-fluids* (Cambridge University Press, 1989).
2. Arnett, W.D., *Astrophys. J.*, **153**, 341 (1968).
3. Baron, E., Cooperstein, J. and Kahana, S., *Nucl. Phys.*, **A440**, 744 (1985).
4. Baron, E., Cooperstein, J. and Kahana, S., *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 126 (1985).
5. Becker, R., *Stosswelle und detonation*, *Z. Physik*, **8**, 321 (1922).
6. Bethe, H.A., Brown, G.E., Applegate, J. and Lattimer, J.M., *Equation of state in the gravitational collapse of stars*, *Nucl. Phys.*, **A324**, 487 (1979).
7. Bona, C. and Massó, J., *Phys. Rev.*, **D38**, 2419 (1988).
8. Bona C. and Massó, J., *Einstein's evolution equations as a system of balance laws*, *Phys. Rev.*, **40**, 1022 (1989).
9. Bondi, H., *On spherically symmetric accretion*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **112**, 195 (1952).
10. Bondi H. and Hoyle, F., *On the mechanism of accretion by stars*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **104**, 273 (1944).
11. Boris, J.P. and Book, D.L., *Flux corrected transport, I, SHASTA, a fluid transport algorithm that works*, *J. Comp. Phys.*, **11**, 38 (1973).

12. Brown, G.E., Bethe, H.A. and Baym, G., *Supernova theory*, Nucl. Phys., **A375**, 481 (1982).
13. Burgers, J.M., *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Adv. Appl. Mech., **1**, 171 (1948).
14. Centrella, J.M. and Wilson J.R., *Planar numerical cosmology. I. The differential equations*, Astrophys. J., **273**, 428 (1983).
15. Centrella, J.M. and Wilson, J.R., *Planar numerical cosmology. II. The difference equations and numerical tests*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **54**, 229 (1984).
16. Clare, R.B. and Strottman, D., *Relativistic hydrodynamics and the heavy ion reactions*, Phys. Rep., **141**, 177 (1986).
17. Colella, P. and Woodward, P.R., *The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations*, J. Comp. Phys., **54**, 174 (1984).
18. Colgate, S.A., *Hot bubbles drive explosions*, Nature, **341**, 489 (1989).
19. Colgate, S.A. and Johnson, M.H., *Hydrodynamic origin of cosmic rays*, Phys. Rev. Lett., **5**, 235 (1960).
20. Colgate, S.A. and White, R.H., Astrophys. J., **143**, 626 (1966).
21. Courant, R. and Hilbert, D., *Methods of mathematical Physics* (Interscience, 1953).
22. Courant, R., Friedrichs, K.O. and Lewy, H., *Über die partiellen differenzgleichungen der mathematisches physik*, Math. Ann., **100**, 32 (1928).
23. Courant, R., Isaacson, E. and Rees, M., *On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations*, Commun. Pure Appl. Math., **5**, 243 (1952).
24. Chakravarthy, S.R. and Osher, S., A.I.A.A.Jl., **29**, 1241 (1983).
25. Chandrasekhar, S., *An introduction to the study of stellar structure* (University of Chicago Press, 1939).

26. Chorin, A.J., *Random choice solution of hyperbolic systems*, J. Comp. Phys., **22**, 517 (1976).
27. Drever, R.W.P., Weiss, R., Linsay, P.S., Saulson, P.R., Spero, R. and Schutz, B.F., *A detailed engineering design study and development and testing of components for a laser interferometer gravitational wave observatory* (Caltech, 1985).
28. Dykema, P.G., *Numerical simulation of axisymmetric gravitational collapse*, Ph. D. Dissertation, The University of Texas at Austin, 1980.
29. Einfeldt, B., *On Godunov-type methods for gas dynamics*, SIAM J. Numer. Anal., **25**, 294 (1988).
30. Evans, C.R., *A method for numerical relativity: simulation of axisymmetric gravitational collapse and gravitational radiation generation*, Ph. D. Dissertation, The University of Texas at Austin, 1984.
31. Evans, C.R., *An approach for calculating axisymmetric gravitational collapse*, in *Dynamical space-times and numerical relativity*, ed. Centrella, J.M. (Cambridge University Press, 1986).
32. Font, J.A., *Acreción sobre objetos compactos y flujos potenciales en relatividad general*, Tesina de Licenciatura, Universidad de Valencia, 1991.
33. Fowler, W.A. and Hoyle, F., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **9**, 201 (1964).
34. Freedman, D.Z., *Coherent effects of a weak neutral current*, Phys. Rev., **D9**, 1389 (1974).
35. Friedrichs, K.O., *On the laws of relativistic electromagneto-fluid dynamics*, Commun. Pure Appl. Math., **27**, 749 (1974).
36. Garabedian, P.R., *Partial differential equations* (Wiley, 1964).
37. Geldzahler, B.J. and Fomalont, E.B., *Bull. Am. Astr. Soc.*, **17**, 854 (1985).
38. Ginzburg, V.L. and Syrovatskii, S.I., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **7**, 375 (1969).

39. Glaister, P., *An approximate linearized Riemann solver for the Euler equations for real gases*, J. Comp. Phys., **74**, 382 (1988).
40. Godunov, S.K., *A finite difference method for the numerical computation and discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*, Mat. Sb., **47**, 271 (1959).
41. Godunov, S.K., Zabrodine, A. Ivanov, M., Kraïko, A. and Prokopov, G., *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz* (Mir, 1978).
42. Goldreich, P. and Weber, S.V., *Homologously collapsing stellar cores*, Astrophys. J., **157**, 869 (1980).
43. Harten, A., *On a class of high resolution total-variation stable finite difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal., **21**, 1 (1984).
44. Harten, A. and Hyman, J.M., *Self adjusting grid methods for one dimensional hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., **50**, 235 (1983).
45. Harten, A. and Lax, P.D., *A random choice finite difference scheme for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., **18**, 289 (1981).
46. Harten, A. and Osher, S., *Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I*, SIAM J. Numer. Anal., **24**, 279 (1987).
47. Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakrabarthy, S.R., *Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III*, J. Comp. Phys., **71**, 231 (1987).
48. Harten, A., Hyman, J.M. and Lax, P.D., *On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks*, Commun. Pure Appl. Math., **29**, 297 (1976).
49. Harten, A., Lax, P.D. and Van Leer, B., *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Review, **25**, 35 (1983).
50. Hawley, J.F., Smarr, L.L. and Wilson, J.R., *A numerical study of nonespherical black hole accretion. I. Equations and test problems*, Astrophys. J., **277**, 296 (1984).

51. Hawley, J.F., Smarr, L.L. and Wilson, J.R., *A numerical study of nonespherical black hole accretion. II. Finite differencing and code calibration*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **55**, 211 (1984).
52. Hawley, J.F., *General relativistic hydrodynamics near black holes*, in *Dynamical space-times and numerical relativity*, ed. Centrella, J.M. (Cambridge University Press, 1986).
53. Hillebrandt, W. and Müller, E., *Computer simulations of stellar collapse and shock propagation*, *Astron. Astrophys.*, **103**, 147 (1981).
54. Hugoniot, H., *Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits*, *Journal de l'école polytechnique*, **58**, 1 (1889).
55. Hunt, R., *A fluid dynamical study of the accretion process*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **154**, 141 (1971).
56. Hunt, R., *Accretion of gas having specific heat ratio 4/3 by a moving gravitating body*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **188**, 83 (1979).
57. Ibáñez, J.M^a, *Efectos relativistas en la estructura y estabilidad de enanas blancas masivas*, *Rev. Mex. Astron. Astrofis.*, **8**, 7 (1983).
58. Ibáñez, J.M^a, *Explosive collapse of accreting white dwarfs*, *Astron. Astrophys.*, **135**, 382 (1984).
59. Ibáñez, J.M^a, Marquina, A., Font, J.A., Martí, J.M^a and Miralles, J.A., *Numerical relativistic hydrodynamics without artificial viscosity: approximate Riemann solvers*, talk given at the *Sixth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, Kyoto (Japan), 23-29 June (1991).
60. Ibáñez, J.M^a and Miralles, J.A., *Anisotropic effects on the collapse of white dwarfs*, *Astrophys. J.*, **299**, 21 (1985).
61. Kellermann, K.I. and Pauliny-Toth, I.I.K., *Compact radio sources*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **19**, 373 (1981).
62. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Fluid mechanics*, Second edition (Pergamon, 1987).

63. Lax, P.D., *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves* (SIAM, 1973).
64. Lax, P.D. and Wendroff, B., *Systems of conservation laws*, Commun. Pure Appl. Math., **13**, 217 (1960).
65. Liang E.P.T., *Relativistic simple waves: shock damping and entropy production*, Astrophys. J., **211**, 361 (1977).
66. Lichnerowicz, A., *Relativistic hydrodynamics and magnetodynamics* (Benjamin, 1967).
67. Lichnerowicz, A., *Théories relativistes de la gravitation et l'électromagnétisme* (Masson, 1955).
68. Liebert, J., Angel, J.R.P., Hege, E.K., Martin, P.G. and Blair, W.P., Nature, **279**, 384 (1979).
69. Maeda, K., Sasaki, M., Nakamura, T. and Miyama, S., Prog. Theor. Phys., **63**, 719 (1980).
70. Marquina, A., *Local piecewise hyperbolic reconstruction of numerical fluxes for nonlinear conservation laws*, SIAM J. Stat. Comp., in press (1991).
71. Marquina *et al.*, in preparation (1991).
72. Marquina, A., Martí, J.M^a, Ibáñez, J.M^a, Miralles, J.A. and Donat, R., *Ultrarelativistic hydrodynamics: high resolution shock capturing methods*, submitted (1991).
73. Martí, J.M^a, Ibáñez, J.M^a and Miralles, J.A., *Godunov-type methods for stellar collapse*, Astron. Astrophys., **235**, 535 (1990b).
74. Martí, J.M^a, Ibáñez, J.M^a and Miralles, J.A., *Numerical relativistic hydrodynamics: local characteristic approach*, Phys. Rev. **D43**, 3794 (1991).
75. Martí, J.M^a, Ibáñez, J.M^a and Miralles, J.A., *Stellar hydrodynamics with Glaister's Riemann solver: an approach to the stellar collapse*, J. Comp. Phys., **90**, 262 (1990c).

76. Martí, J.M^a, Ibáñez, J.M^a, Colomer, F. y Miralles, J.A., *Esquemas tipo Godunov e hidrodinámica estelar: la extensión a ecuaciones de estado generales*, Anales de Física, serie A, **86**, 47 (1990a).
77. Mathews, W.G., *The hydromagnetic free expansion of a relativistic gas*, Astrophys. J., **165**, 147 (1971).
78. Matsuda, T. and Sato, H., *Hydrodynamical behaviour of gas spheres with masses of $10^4 M_{\odot}$ to $10^{20} M_{\odot}$* , Prog. Theor. Phys., **41**, 1021 (1969).
79. May, M.M. and White, R.H., *Hydrodynamic calculations of general relativistic collapse*, Phys. Rev., **141**, 1232 (1966).
80. May, M.M. and White, R.H., *Stellar dynamics and gravitational collapse*, Math. Comp. Phys., **7**, 219 (1967).
81. Mazurek, T.J., *Pauli constriction of the low-energy window in neutrino supernova models*, Astrophys. J. Lett., **207**, 87 (1976).
82. Michel, F.C., *Accretion of matter by condensed objects*, Astrophys. Spa. Sci., **15**, 153 (1972).
83. Miralles, J.A., *Incompresibilidad nuclear, relatividad general y colapso estelar*, Tesis Doctoral, Universidad de Valencia, 1990.
84. Miralles, J.A., Ibáñez, J.M^a, Martí, J.M^a and Pérez, A., *Incompressibility of hot nuclear matter and general relativistic stellar collapse*, Astron. Astrophys., **237**, 97 (1990).
85. Miralles, J.A., Ibáñez, J.M^a, Martí, J.M^a and Pérez, A., *Incompressibility of hot nuclear matter, general relativistic stellar collapse and shock propagation*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., in press (1991).
86. Misner, C.W. and Sharp, D.H., *Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse*, Phys. Rev., **136B**, 571 (1964).
87. Misner, C.W., Thorne, K.S. and Wheeler, J.A., *Gravitation* (Freeman, 1973).

88. Müller, E., *Supernovae: observations, theory, models and nucleosynthesis*, in *Late stages of stellar evolution and computational methods in astrophysical hydrodynamics*, ed. De Loore, C.B. (Springer, 1991).
89. Nakamura, T., Maeda, K., Miyama, S. and Sasaki, M., *General relativistic collapse of an axially symmetric star. I*, *Prog. Theor. Phys.*, **63**, 1229 (1980).
90. Nakamura, T. and Sato, H., *General relativistic collapse of non-rotating, axisymmetric stars*, *Prog. Theor. Phys.*, **67**, 1396 (1982).
91. Nakamura, T., *General relativistic collapse of axially symmetric stars leading to the formation of rotating black holes*, *Prog. Theor. Phys.*, **65**, 1876 (1981).
92. Noh, W.F., *Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux*, *J. Comp. Phys.*, **72**, 78 (1987).
93. Nomoto, K. and Hashimoto, M., *Phys. Rep.*, **163**, 13 (1988).
94. Norman, M.L. and Winkler, K.-H.A., *Why ultrarelativistic numerical hydrodynamics is difficult?*, in *Astrophysical radiation hydrodynamics*, eds. Norman, M.L. and Winkler, K.-H.A. (Dordrecht: Reidel, 1986).
95. Ögelman, H., *Jets in X-ray binaries*, in *Astrophysical jets and their engines*, ed. Kundt, W. (Reidel, 1987).
96. Oleinik, O.A., *Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation*, *Uspekhi Mat. Nauk.*, **14**, 165 (1959).
97. Peebles, P.J.E., *The large scale structure of the Universe* (Princeton University Press, 1980).
98. Petrich, L.I., Shapiro, S.L., Stark, F. and Teukolsky, S.A., *Accretion onto a moving black hole: a fully relativistic treatment*, *Astrophys. J.*, **336**, 313 (1989).
99. Piran, T., *Numerical codes for cylindrical general relativistic systems*, *J. Comp. Phys.*, **35**, 254 (1980).

100. Rankine, W.J.M., *On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance*, Trans. Roy. Soc. London, **160**, 277 (1870).
101. Raviart, P.A. and Godlewski, E., *Nonlinear hyperbolic problems*, en *Simulación numérica en física e ingeniería*, Proceedings de la Tercera Escuela de Otoño Hispano-Francesa, eds. Bernadou, M. y Michavila, F. (Universidad Politécnica de Madrid, 1988).
102. Rees, M.J., *Galactic nuclei and jets*, in *Numerical astrophysics*, eds. Centrella, J.M., Leblanc, J.M. and Bowers, R.L. (Jones and Bartlett Publishers, Inc., 1985).
103. Richtmyer, R.D. and Morton, K.W., *Difference methods for initial-value problems*, Second edition (Interscience, 1967).
104. Roe, P.L., *The use of the Riemann problem in finite difference schemes*, in *Proceedings, Seventh Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.* (Springer, 1981).
105. Roe, P.L., *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*, J. Comp. Phys. **43**, 357 (1981).
106. Salpeter, E.E. and Zapolski, H.S., Phys. Rev., **158**, 876 (1967).
107. Scheuer, P.A.G., in *VLBI and compact radio sources*, eds. Fanti, R., Kellermann, K. and Setti, G. (Reidel, 1984).
108. Schutz, B.F., *A first course on general relativity* (Cambridge University Press).
109. Schutz, B.F., *Gravitational Waves*, in *Recent developments in Gravitation*, eds. Verdaguer, E., Garriga, J. and Céspedes, J. (World Scientific, 1990).
110. Schwartz, R.A., Ann. Phys., **43**, 42 (1967).
111. Shapiro, S.L. and Teukolsky, S.A., *Black holes, white dwarfs and neutron stars* (Wiley, 1983).
112. Shima, E., Matsuda, T., Takeda, H. and Sawada, K., *Hydrodynamic calculations of axisymmetric accretion flow*, Mon. Not. Roy. Astro. Soc., **217**, 367 (1985).

113. Shu, C.-W., *TVB uniformly high order schemes for conservation laws*, Math. Comp., **49**, 105 (1987).
114. Shu, C.-W. and Osher, S., *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes*, J. Comp. Phys., **77**, 439 (1988).
115. Shu, C.-W. and Osher, S., *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. II*, J. Comp. Phys., **83**, 32 (1989).
116. Simon, R.S., Hall, J., Johnston, K.J., Spencer, J.H. and Waak, J.A., *Superluminal motion toward a stationary knot in the radio core of the quasar 3C395*, Astrophys. J. Lett., **326**, 5 (1988).
117. Smarr, L.L., *The structure of general relativity with a numerical illustration: the collision of two black holes*, Ph. D. Dissertation, The University of Texas at Austin, 1975.
118. Sobel, M.I., Siemens, P.J., Bondford, J.P. and Bethe, H.A., *Shock waves in colliding nuclei*, Nucl. Phys., **A251**, 502 (1975).
119. Sod, G.A., *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., **27**, 1 (1978).
120. Spencer, R.E. and Johnston, K.J., in *Proceedings of the Manchester Conference on RS Ophiuci*, ed. Bode, M. (VNU press, 1986).
121. Stark, R.F. and Piran, T., *A general relativistic code for rotating axisymmetric configurations and gravitational radiation: numerical methods and tests*, Comp. Phys. Rep., **5**, 221 (1987).
122. Street, R.L., *Analysis and solution of partial differential equations* (Brooks/Cole Publishing Company, 1973).
123. Strotzman, D., *Relativistic hydrodynamics and heavy ion reactions*, in *Relativistic fluid dynamics*, eds. Anile, A. and Choquet-Bruhat, Y. (Springer, 1989).
124. Sweby, P.K., *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., **21**, 995 (1984).

125. Synge, J.L., *Relativity: the general theory* (North-Holland, 1960).
126. Taub, A.H., *Relativistic Rankine-Hugoniot relations*, *Phys. Rev.*, **74**, 328 (1948).
127. Taussig, R., *Shock wave production of relativistic plasmas*, in *Dynamics of ionized plasmas*, eds. Lighthill, M.J., Imai, I. and Sato, H. (Tokyo University Press, 1973).
128. Thompson, K.W., *The special relativistic shock tube*, *J. Fluid Mech.*, **171**, 365 (1986).
129. Van Leer, B., *Towards the ultimate conservation difference schema. V. A second order sequel to Godunov's method*, *J. Comp. Phys.*, **32**, 101 (1979).
130. Van Leer, B., *On the relation between the upwind differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe*, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **5**, 1 (1984).
131. Van Riper, *The hydrodynamics of stellar collapse*, *Astrophys. J.*, **221**, 304 (1978).
132. Von Neumann, J. and Richtmyer, R.D., *A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks*, *J. Appl. Phys.*, **21**, 232 (1950).
133. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1264 (1967).
134. Wilson, J.R., *A numerical study of gravitational stellar collapse*, *Astrophys. J.*, **163**, 209 (1971).
135. Wilson, J.R., *Numerical study of fluid flow in a Kerr space*, *Astrophys. J.*, **173**, 431 (1972).
136. Wilson, J.R., *A numerical method for relativistic hydrodynamics*, in *Sources of gravitational radiation*, ed. Smarr, L.L. (Cambridge University Press, 1979).
137. Wilson, J.R., *Supernovae and post collapse behaviour*, in *Numerical astrophysics*, eds. Centrella, J.M., Leblanc, J.M. and Bowers, R.L. (Jones and Bartlett Publishers, Inc., 1985).

138. Wilson, J.R., in *Proceedings of the nuclear equation of state*, eds. Greiner, W. and Stöcker, H. (Plenum, 1989).
139. Woosley, S.E., Pinto, P.A., Martin, P. and Weaver, T.A., *Astrophys. J.*, **318**, 664 (1987).
140. Yahil, A. and Lattimer, J.M., *Supernovae for pedestrians*, in *Supernovae: a survey of the current research*, ed. Rees, M.J. and Stoneham, R.J. (Reidel, 1982).
141. Yahil, A., Johnston, M.D. and Burrows, A., *A conservative Lagrangian hydrodynamical scheme with parabolic spatial accuracy*, Space Telescope Science Institute, preprint series n.62 (1985).
142. Yee, H.C., *A class of high resolution explicit and implicit shock capturing methods*, in *Computational Fluid Dynamics*, Lectures given at the Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Belgium, March 6-10, 1989.
143. York, J.W., *Kinematics and dynamics of general relativity*, in *Sources of gravitational radiation*, ed. Smarr, L.L. (Cambridge University Press, 1979).
144. Zel'dovich, Ya.B. and Raizer, Yu.P., *Physics of shock waves and high temperature hydrodynamic phenomena Vol I* (Academic Press, 1966).

FACULTAD DE CIÊNCIAS FÍSICAS

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE CIÊNCIAS FÍSICAS

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data,
 acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral
 d'En/ Na/ N' José María Martí Prif
 la qualificació d' APTO "CUM LAUDE"

València a 27 de setembre de 1991

El Secretari,

El President,

J. Canal

J. V. / ay



