

**UNIVERSIDAD DE VALENCIA**  
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS  
BIBLIOTECA  
N.º Registro 3306  
Fecha 27.10.1986  
SIGNATURA T.D/92  
C. D. U.

b 168 69771

i 19163009



UNIVERSIDAD DE VALENCIA

Facultad de C.Físicas

LEPTO-PRODUCCION DE PARES  $\nu - \bar{\nu}$

Y EL NUMERO DE GENERACIONES

Memoria presentada por  
Antonio Pich Zardoya  
para optar al grado de  
Doctor en C.Físicas.

UMI Number: U603074

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U603074

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.  
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against  
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC  
789 East Eisenhower Parkway  
P.O. Box 1346  
Ann Arbor, MI 48106-1346



JOSE BERNABEU ALBEROLA, Catedrático de Física Teórica de la Facultad de Física de la Universidad de Valencia,

CERTIFICA: Que la presente Memoria "LEPTO-PRODUCCION DE PARES  $\nu - \bar{\nu}$  Y EL NUMERO DE GENERACIONES", ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Física Teórica de la Facultad de Física de la Universidad de Valencia, por D. ANTONIO PICH ZARDOYA, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presenta ante la Facultad de Físicas de la Universidad de Valencia la referida Tesis, firmando el presente Certificado en

Burjasot, 18 de Mayo de 1983



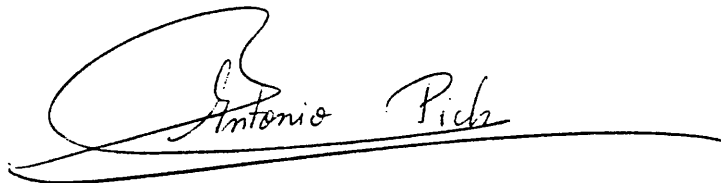
Fdo: José Bernabéu Alberola

Deseo hacer constar, en primer lugar y de manera muy especial, mi agradecimiento al Prof. J. Bernabéu, Director de esta Memoria, por su constante orientación, estímulo y ayuda, sin los cuales no hubiera sido posible la realización de la misma.

Así mismo, deseo agradecer a la Caja de Ahorros y Monte de Piedad de Valencia, la ayuda económica dispensada para la realización de este trabajo.

No puedo olvidar a todos mis compañeros del Departamento de Física Teórica por su interés, preocupación y sus muchas sugerencias prestadas en todo momento.

Finalmente quiero agradecer a Maria-Luisa Gomis su labor mecanográfica.

A handwritten signature in cursive script that reads "Antonio Pich". The signature is written in black ink and is underlined with a single horizontal line.

Fdo: Antonio Pich Zardoya

## INDICE

I.- INTRODUCCION .....	1
II.- TEORIA STANDARD DE GLASHOW-WEINBERG-SALAM ...	5
2.1.- Invariancia gauge bajo $SU(2) \otimes U(1)$ ...	5
2.2.- Interacción por corrientes cargadas ...	7
2.3.- Interacción por corrientes neutras ....	8
2.4.- Rotura espontánea de simetría .....	10
2.5.- Generaciones fermiónicas .....	11
2.6.- Fenomenología .....	15
III.- COTAS SOBRE EL NUMERO DE GENERACIONES .....	17
3.1.- Límites astrofísicos sobre el número de neutrinos .....	17
3.2.- Libertad asintótica .....	25
3.3.- Desintegraciones de resonancias mesóni- cas pesadas .....	26
3.4.- Desintegración $K^+ \rightarrow \pi^+ \bar{\nu} \nu$ .....	27
3.5.- Búsqueda de leptones pesados .....	29
3.6.- Correcciones de orden superior a las masas fermiónicas .....	32
3.7.- Propuestas para el L.E.P. ....	33
IV.- LEPTO-PRODUCCION DE PARES NEUTRINO-ANTINEU- TRINO: CONTRIBUCION DE CORRIENTES NEUTRAS ...	38
4.1.- Elección de helicidad para el haz inci- dente .....	38
4.2.- Contribución de corrientes neutras a la amplitud .....	41
4.3.- Elección de variables invariantes .....	45
4.4.- Integración sobre los cuádrimomentos del par de neutrinos .....	46



4.5.- Tensor electromagnético leptónico .....	53
4.6.- Funciones de estructura leptónicas .....	56
4.7.- Espacio fásico asociado a los cuadrimentos $P_2^\mu$ y $P'^\mu$ .....	60
4.8.- Límite de alta energía .....	65
4.9.- Integración en las variables $x_3$ y $x_5$ ...	68
4.10.- Distribución de fotones virtuales .....	73
4.11.- Sección eficaz total .....	75
V.- APROXIMACION DE LOS FOTONES EQUIVALENTES: LIMITACIONES Y ZONAS DE VALIDEZ .....	87
5.1.- Aproximación de los fotones equivalentes (E.P.A.) .....	87
5.2.- Lepto-producción de pares neutrino-anti-neutrino .....	91
5.3.- Zonas de validez de la aproximación EPA a altas energías .....	94
5.4.- Discusión de los resultados obtenidos ..	96
VI.- CONTRIBUCION DE CORRIENTES CARGADAS .....	99
6.1.- Amplitudes .....	99
6.2.- Transformación de Fierz .....	103
6.3.- Sección eficaz .....	109
6.4.- Proceso inelástico $l^- A_Z \rightarrow l'^- A_Z \sim \bar{1}_1 \bar{1}_1$ .....	111
VII.- DISTRIBUCION ENERGETICA DEL LEPTON CARGADO FINAL .....	114
7.1.- Contracción de los tensores electromagnéticos leptónico y hadrónico .....	114
7.2.- Espacio fásico .....	116
7.3.- Integración en $\Psi_2$ .....	123
7.4.- Estimación analítica para masa nula ....	125
7.5.- Cálculo numérico del espectro energético	131

VIII.- DISTRIBUCION ANGULAR .....	138
8.1.- Espacio fásico .....	138
8.2.- Integración en $\Psi_q$ .....	146
8.3.- Cálculo numérico de la distribución angular .....	148
IX.- CONTRIBUCIONES NO ELASTICAS A LA SECCION EFI- CAZ .....	154
9.1.- Contribución cuasi-elástica .....	154
9.2.- Proceso inelástico .....	171
X.- CONCLUSIONES .....	181
REFERENCIAS .....	185

CAPITULO I    INTRODUCCIÒN

El enorme éxito alcanzado por la teoría estándar de las interacciones electro-débiles durante los últimos años, nos proporciona un esquema sólido en el que intentar estudiar problemas no resueltos en nuestro conocimiento del mundo subatómico. Uno de los mayores interrogantes planteados actualmente en la física de partículas elementales, es la proliferación de los constituyentes básicos de la materia, leptones y quarks, organizados en generaciones.

La teoría  $SU(2) \otimes U(1)$  estudia la interacción de un leptón, un neutrino y un doblete de quarks (junto con sus correspondientes antipartículas) formando lo que se llama una generación de partículas. La teoría se repite a sí misma para cada generación y por lo tanto no dice nada acerca del número de dobletes fermiónicos existentes en la naturaleza.

Uno de los éxitos de este esquema teórico es que efectivamente los leptones y quarks conocidos pueden clasificarse perfectamente en generaciones:

$$\begin{pmatrix} \nu_e & | & u \\ e & | & d \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu & | & c \\ \mu & | & s \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau & | & t \\ \tau & | & b \end{pmatrix}$$

Las dos primeras familias (electrónica y muónica) son bastante bien conocidas, mientras que en la tercera todavía no se ha detectado el quark top aunque hay gran confianza en detectarlo en fecha próxima.

Cada generación es repetición de la anterior en cuanto a características electrodébiles se refiere, con la única diferencia de que la masa aumenta. La razón de la existencia de distintas familias con propiedades idénticas no es conocida así como tampoco se conoce cuántas familias habrá, ya que de existir más, al tener mayor masa escaparían a la detección experimental directa en la actualidad. Como veremos más adelante, la información presente proviene de métodos indirectos que permiten establecer cotas al número de generaciones. No conocemos ninguna razón de principio que impida la existencia de nuevas generaciones.

A fin de obtener información sobre el número de constituyentes elementales de la materia, se han buscado efectos observables que dependan de dicho número. Aunque se ha conseguido establecer algunas cotas sobre el número  $N$  de familias fermiónicas, la situación es todavía bastante confusa. Razonamientos astrofísicos basados en la nucleosíntesis primigenia parecen indicar que  $N$  es menor o igual que un número comprendido entre 4 y 8 según los valores que se escojan para ciertos parámetros cosmológicos, pero existen serias dudas acerca de la fiabilidad de esta cota. Otro límite interesante es  $N < 137$ , obtenido a partir de la ausencia ob-

servada de leptones pesados por debajo de los 20 GeV. Además prejuicios teóricos basados en la persistencia de libertad asintótica en QCD impondrían  $N < 9$ .

El lugar idóneo para determinar  $N$  experimentalmente es sin lugar a dudas la desintegración del bosón intermedio  $Z^0$ , dando origen a pares  $\nu - \bar{\nu}$ , pero para ello habrá que esperar a que el L.E.P. o S.L.C. entren en funcionamiento. Entretanto, se pueden estudiar procesos de producción de pares neutrino-antineutrino mediados por corrientes neutras, que obviamente dependen del número de tipos de neutrinos posibles.

El objeto de este trabajo, ha sido precisamente el estudio de un proceso de este tipo: la lepto-producción de pares neutrino-antineutrino en el campo coulombiano de un núcleo. Una de las razones de haber escogido este proceso radica en que la interacción coulombiana del núcleo, al ser coherente, introduce un factor  $Z^2$  en la sección eficaz, aumentandola así en dos o tres ordenes de magnitud, según el núcleo escogido. Otra razón es la disponibilidad de haces de muones de alta energía en los laboratorios de física de partículas. Aunque el proceso es mediado también por corrientes cargadas cuando el neutrino final pertenece al mismo doblete que el leptón cargado, dicha contribución puede ser deprimida escogiendo adecuadamente la helicidad inicial, de forma que todos los tipos de neutrinos contribuyan por igual.

En el capítulo II hemos desarrollado una breve descripción de la teoría  $SU(2) \otimes U(1)$ , usada a lo largo de esta memoria, con el fin de señalar ingredientes y convenciones. A continuación, se ha expuesto en el capítulo III, la situación presente, tanto experimental como teórica, del problema de la determinación del número de familias, enumerándose las distintas cotas existentes.

El cuerpo central de la Memoria aparece en el capítulo IV, en donde se estudia la contribución de corrientes neutras al proceso  $l^- + Z \rightarrow Z + l^- + \bar{\nu} + \nu$  obteniéndose expresiones analíticas para la distribución de fotones virtuales en el límite de alta energía. El capítulo V está dedicado al análisis de la validez de la aproximación de los fotones equivalentes, utilizada recientemente para obtener una estimación numérica del proceso. El sector de corrientes cargadas es estudiado en el capítulo VI, donde se muestra que es posible relacionarlo con el de corrientes neutras mediante una transformación de Fierz.

Los capítulos VII y VIII están dedicados a obtener las distribuciones energética y angular del leptón cargado final. Por último, en el capítulo IX se estudian otras contribuciones, no coherentes, a la sección eficaz. Las conclusiones de esta Memoria aparecen resumidas en el capítulo X.

CAPITULO II    TEORIA STANDARD DE GLASHOW-WEINBERG-SALAM

2.1 Invariancia gauge bajo SU(2)  $\otimes$  U(1)

La Teoría estándar de las interacciones electro-débiles (GL 61), (WE 67), (SA 68), así llamada porque parece explicar todos los datos existentes sobre estas interacciones, es a su vez una teoría mínima en el sentido de que contiene los ingredientes mínimos necesarios para resolver los problemas planteados por el primitivo modelo V-A (FE 34), (CA 63). La teoría describe la interacción entre dos fermiones  $f$  y  $f'$  tales que sus cargas eléctricas están sujetas a la condición  $Q_f = Q_{f'} + 1$ . Los campos fermiónicos se descomponen en sus componentes levógira y dextrógira

$$f_{L,R}^{(x)} \equiv \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) f^{(x)} \quad (2.1)$$

y dado que los procesos de corrientes cargadas asocian  $f_L$  con  $f'_L$ , es conveniente construir los multipletes (BP 81)

$$\psi_1(x) \equiv \begin{pmatrix} f_L^{(x)} \\ f'_L(x) \end{pmatrix}, \quad \psi_2(x) \equiv f_R^{(x)}, \quad \psi_3(x) \equiv f'_R(x) \quad (2.2)$$

donde  $\psi_1(x)$  es un doblete de SU(2) y  $\psi_{2,3}(x)$  son singletes. En términos de estos campos, el lagrangiano libre viene dado por la expresión

$$L_0(x) = \sum_{j=1}^3 i \bar{\psi}_j(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi_j(x) \quad (2.3)$$

Para construir la interacción se impone el principio de invariancia gauge local bajo el grupo  $SU(2) \otimes U(1)$ , es decir, se exige que ni la dirección de  $\Psi_1(x)$  en el espacio de isospín débil generado por  $f_L$  y  $f'_L$ , ni la fase de los tres campos  $\Psi_j(x)$  sea observable. Las transformaciones de gauge sobre los campos son

$$\Psi_j(x) \rightarrow \Psi_j'(x) = \exp\{i\vec{\alpha}(x) \cdot \frac{\vec{\Sigma}}{2}\} \exp\{i\gamma_j \beta(x)\} \Psi_j(x) \quad (2.4)$$

donde  $\vec{\alpha}(x)$  e  $\gamma_j \beta(x)$  son parámetros reales asociados respectivamente a los grupos  $SU(2)$  y  $U(1)$ , y  $\vec{\Sigma}$  son las matrices de Pauli de  $SU(2)$  ( $\vec{\Sigma} \Psi_{2,3} = 0$  ya que  $\Psi_{2,3}$  son singletes)

Aunque  $L_0(x)$  es invariante bajo transformaciones de gauge globales ( $\alpha(x) \equiv \alpha$ ,  $\beta(x) \equiv \beta$ ), esta invariancia se rompe, debido al operador derivada, al introducir la dependencia espacio-temporal en los parámetros de la transformación de gauge. Para restablecer la invariancia es preciso introducir cuatro campos bosónicos adicionales  $\vec{W}_\mu(x)$  y  $B_\mu(x)$ , y reemplazar la derivada  $\partial_\mu$  por la derivada covariante

$$D_\mu^j \equiv \partial_\mu - ig \frac{\vec{\Sigma}}{2} \cdot \vec{W}_\mu(x) - ig' \gamma_j B_\mu(x) \quad (2.5)$$

donde, debido al carácter abeliano del grupo  $U(1)$ , tenemos constantes de acoplamiento con  $B_\mu$  distintas para los tres campos fermiónicos.



Los campos bosónicos cumplen las leyes de transformación

$$B_\mu(x) \rightarrow B_\mu^i(x) = B_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu B(x)$$

$$\vec{W}_\mu(x) \cdot \vec{Z} \rightarrow \vec{W}_\mu^i(x) \cdot \vec{Z} = S(x) (\vec{W}_\mu(x) \cdot \vec{Z}) S^\dagger(x) + \frac{2i}{g} S(x) \partial_\mu S^\dagger(x) \quad (2.6)$$

donde

$$S(x) = \exp \left\{ i \vec{a}(x) \cdot \frac{\vec{Z}}{2} \right\} \quad (2.7)$$

Los términos de energía cinética asociados con los campos bosónicos deben cumplir también el requisito de invariancia gauge. Estos términos son de la forma (YM 54)

$$L_{EC}(x) = -\frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

$$\vec{W}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g \vec{W}_\mu \wedge \vec{W}_\nu \quad (2.8)$$

Es importante resaltar que el lagrangiano  $L_{EC}(x)$ , contiene términos de autointeracción entre los bosones debido a la no conmutatividad del grupo SU(2).

Podemos añadir al lagrangiano términos de masa para los fermiones, pero es imposible poner masas a los bosones vectoriales sin romper la invariancia gauge.

## 2.2 Interacción por corrientes cargadas

El lagrangiano construido en el párrafo anterior predice interacciones por corrientes cargadas a través del doblete  $\psi_i$ . Definiendo el campo

$$W_\mu(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [ W_\mu^1(x) + i W_\mu^2(x) ] \quad (2.9)$$

que crea un  $W^+$  y destruye un  $W^-$ , el sector de corrientes cargadas puede escribirse en términos de los campos  $f$  y  $f'$  como

$$L_{cc}(x) = \frac{g}{2\sqrt{2}} \left\{ \bar{f}' \gamma^\mu (1 + \gamma_5) f W_\mu + h.c. \right\} \quad (2.10)$$

Esta es precisamente la interacción de la teoría del bosón intermedio para corrientes cargadas (LY 60).

Si el bosón  $W_\mu(x)$  fuese masivo, el lagrangiano (2.10) nos reproduciría a bajas energías la teoría V-A, mediante la identificación

$$\frac{g^2}{8 M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}} \quad (2.11)$$

donde  $G$  es la constante de Fermi. Sin embargo,  $L_{cc}(x)$  no nos describe el mundo real ya que el campo  $W_\mu(x)$ , al carecer de masa, da origen a fuerzas de largo alcance, mientras que las interacciones débiles que tienen lugar en la naturaleza son de muy corto alcance.

### 2.3 Interacción por corrientes neutras

Los campos  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$  dan lugar a interacciones sin cambio de carga entre los fermiones  $f$  y  $f'$ . Como ambos bosones son neutros y sin masa, las partículas físicas pueden corresponder a cualquier combinación lineal de ellos. Así pues,

podemos escribir

$$\begin{aligned} W_\mu^3(x) &= \cos \theta_w Z_\mu(x) + \sin \theta_w A_\mu(x) \\ B_\mu(x) &= -\sin \theta_w Z_\mu(x) + \cos \theta_w A_\mu(x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $\theta_w$  es el llamado ángulo de Weinberg.

Es posible identificar  $A_\mu(x)$  con el campo electromagnético, incluyendo así Q.E.D. en nuestra teoría. Esto se consigue mediante la elección de constantes

$$\begin{aligned} e &= g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w \\ Y_1 &= Q_f - 1/2 \quad ; \quad Y_2 = Q_f \quad ; \quad Y_3 = Q_f' \end{aligned} \quad (2.13)$$

De esta forma solo quedan dos parámetros libres:  $e$  y  $\theta_w$ . Sin embargo, es importante señalar que este método "ad hoc" de reproducir las cargas observadas no es justificado por la teoría.

Usando las expresiones (2.12) y (2.13) se obtiene

$$\begin{aligned} L_{CN}(x) &= L_{CN}^A(x) + L_{CN}^Z(x) \\ L_{CN}^A(x) &= \sum_{j=1}^3 \bar{\psi}_j(x) \gamma^\mu e Q_j \psi_j(x) A_\mu(x) \\ L_{CN}^Z(x) &= \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \left\{ \bar{f}(x) \gamma^\mu \left[ \left( \frac{1}{4} - Q_f \sin^2 \theta_w \right) + \frac{1}{4} \gamma_5 \right] f(x) \right. \\ &\quad \left. - \bar{f}'(x) \gamma^\mu \left[ \left( \frac{1}{4} + Q_f' \sin^2 \theta_w \right) + \frac{1}{4} \gamma_5 \right] f'(x) \right\} Z_\mu(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

A diferencia del sector de corrientes cargadas, las piezas vectoriales y axiales de  $L_{CN}^Z(x)$  no son al 50%. Sólo si la carga del fermión es cero (caso del neutrino) aparece el proyector de helicidad.

#### 2.4. Rotura espontánea de simetría

Si las masas de los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  son introducidas a mano, se rompe la invariancia gauge del lagrangiano y la teoría deja de ser renormalizable. El problema puede ser resuelto efectuando una rotura espontánea de simetría (BG 62), (GS 62) a través del mecanismo de Higgs-Kibble (HI 66), (KI 67). La idea consiste en añadir al lagrangiano un nuevo sector de interacción de bosones escalares con los campos de gauge, invariante gauge, de forma que se obtenga un conjunto de estados degenerados de mínima energía. La elección de un estado concreto como estado físico fundamental, rompe la simetría y origina automáticamente términos de masa para los campos bosónicos  $W_\mu$  y  $Z_\mu$ .

Este mecanismo ha sido ampliamente aceptado debido a que posee la importante propiedad de no destruir la renormalizabilidad de la teoría (TH 71). El precio que hay que pagar a cambio, es la aparición de una nueva partícula escalar, el bosón de Higgs, de la cual no hay por el momento evidencia experimental.

La forma escogida en la teoría estándar para introducir este mecanismo (WE 67) a través de un isodoublete de partículas escalares, impone la siguiente relación entre las masas bosónicas y el ángulo de Weinberg:

$$M_Z = M_W / \cos \theta_W \quad (2.15)$$

Aunque en principio no es necesario para la invariancia gauge, las masas fermiónicas pueden ser también generadas mediante este mecanismo, usando el mismo isodoublete de

escalares. Este procedimiento implica la existencia de interacciones de tipo Yukawa entre los fermiones y el Higgs, con una constante de acoplamiento proporcional a la masa del fermión.

### 2.5. Generaciones fermiónicas

La teoría  $SU(2) \otimes U(1)$  nos describe la interacción entre dos campos fermiónicos de carga definida, de forma que  $Q_f = Q_f + 1$ , por lo que puede ser aplicada al estudio de la interacción entre un leptón y su correspondiente neutrino, o entre una pareja de quarks con cargas  $\frac{2}{3}$  y  $-1/3$  respectivamente.

La fenomenología actual indica la existencia en la naturaleza de una simetría leptón-quark. Tomando esta simetría como principio general, podemos agrupar los leptones y los quarks en  $N$  generaciones, formadas por dos dobletes fermiónicos

$$Q = \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \begin{pmatrix} \nu_j & | & u_j \\ l_j & | & d_j \end{pmatrix} \begin{matrix} + 2/3 \\ - 1/3 \end{matrix} = Q \quad j=1,2,\dots,N \quad (2.16)$$

Hasta la fecha se conocen tres generaciones distintas

$$\begin{pmatrix} \nu_e & | & u \\ e & | & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu & | & c \\ \mu & | & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau & | & t \\ \tau & | & b \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

donde solo el quark  $t$  no ha sido todavía observado.

Cada una de estas familias de fermiones parece comportarse de la misma manera. La única diferencia entre ellas es la masa de los quarks y del leptón cargado que aumenta de una generación a otra. De haber más generaciones, sus fermiones cargados deberán tener una masa todavía mayor, pues de lo contrario ya habrían sido observados.

Debido al requisito de carga definida, es evidente que leptones y quarks deben estar en isomultipletes distintos. Sin embargo, nada nos dice que  $f$  y  $f'$  deban tener sabor o número leptónico definido. El hecho de tener más de una familia fermiónica trae consigo una ambigüedad en la elección de los multipletes; existen infinitas posibilidades y la física dependerá de la elección realizada. Esta arbitrariedad tiene su origen en nuestro total desconocimiento sobre cual es la razón de la existencia de generaciones distintas con propiedades idénticas.

Consideremos primero el sector hadrónico. La elección más general posible para los campos de quarks con propiedades de transformación bien definidas bajo  $SU(2) \otimes U(1)$  será

$$\begin{aligned} U_{jL}^i(x) &= A_{jk}^{(u,L)} U_{kL}(x) & , & & U_{jR}^i(x) &= A_{jk}^{(u,R)} U_{kR}(x) \\ d_{jL}^i(x) &= A_{jk}^{(d,L)} d_{kL}(x) & , & & d_{jR}^i(x) &= A_{jk}^{(d,R)} d_{kR}(x) \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde los campos sin prima corresponden a los quarks de masa y sabor definidos.

Las matrices  $A_{jk}$  deben ser unitarias para no alterar el término de energía cinética del lagrangiano. Como el sector de corrientes neutras (2.14) no mezcla las componentes superior e inferior del doblete, es evidente que la unitariedad de  $A_{jk}$  implica que este sector permanece invariante bajo la transformación (2.18). Por lo tanto las corrientes neutras conservan el sabor (y el número leptónico) de forma natural (GW 77), (PA 77).

Introduciendo en la ecuación (2.10) los campos con prima definidos en (2.18), el lagrangiano de corrientes cargadas puede escribirse como

$$L_{CC}(x) = \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{k,j} \bar{U}_j(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) U_{jk} d_k(x) W_\mu^+(x) + h.c. \quad (2.19)$$

donde  $U_{jk} \equiv [A^{(u,L)\dagger} A^{(d,L)}]_{jk}$  es una matriz unitaria  $N \times N$  sobre la cual la teoría no da información alguna.

Debido a su unitariedad, la matriz  $U$  queda definida por  $N$  parámetros reales, de los cuales  $N(N+1)/2$  son fases y  $N(N-1)/2$  módulos. Eligiendo adecuadamente las fases de los campos  $u_j$  y  $d_j$  podemos eliminar  $2N-1$  fases, por lo que  $U$  viene caracterizada por  $(N-1)(N-2)/2$  fases y  $N(N-1)/2$  módulos como parámetros observables.

Para  $N=2$  la matriz  $U$  depende de un solo parámetro. Usualmente se escribe en la forma

$$U_{(N=2)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

donde  $\theta_c$  es el llamado ángulo de Cabibbo (CA 63).

Si  $N = 3$ ,  $U$  viene caracterizada por tres módulos y una fase. Una elección de estos parámetros especialmente interesante es la de Kobayashi-Maskawa (KM 73)

$$U(N=3) = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

donde  $C_i \equiv \cos \theta_i$  y  $S_i \equiv \sin \theta_i$ .

La fase presente en (2.21) puede ser el origen de la violación de CP observada en las desintegraciones de Kaones neutros. Fijémonos que (2.21) no corresponde exactamente a la rotación de Cabibbo para las dos primeras generaciones a no ser que  $c_2 \approx c_3 \approx 1$

Podemos repetir ahora los mismos argumentos para el sector leptónico e introducir una nueva matriz unitaria  $U'$  de forma que los campos leptónicos cargados  $l(x)$  se acoplen con los campos  $\nu_j'(x) = U'^{\dagger} \nu_j(x)$ . Sin embargo, si suponemos que los neutrinos carecen de masa, los parámetros que caracterizan la matriz  $U'$  no son observables. Definiendo el neutrino físico de tipo  $j$  como aquel que acompaña al leptón  $l_j$  en las interacciones débiles,  $\nu_j$  coincide con  $\nu_j'$ . Quitando las primas podemos escribir

$$L_{cc}(x) = \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{l}(x) \gamma^{\mu} (1 + \gamma_5) \nu_j(x) W_{\mu}(x) + h.c. \quad (2.22)$$



En este caso hay un número leptónico para cada generación ( $L_e, L_\mu, L_\tau, \dots$ ) que es separadamente conservado. Si los neutrinos tuvieran términos de masa de Dirac, la situación sería análoga a la del sector hadrónico: una matriz unitaria  $U'$  es esencial y los números  $L_j$  no se conservan separadamente, con la posibilidad de la existencia de oscilaciones de neutrinos entre distintas generaciones.

## 2.6. Fenomenología

La teoría de Glashow-Weinberg-Salam introduce dos nuevos parámetros: el ángulo de unificación  $\theta_w$  y la masa del Higgs. Aunque se han hecho diversas especulaciones teóricas sobre la masa del Higgs, la única información experimental que tenemos es que no se ha detectado su existencia, por lo que debemos pensar que su masa será alta.

El ángulo  $\theta_w$  ha sido determinado a través de procesos puramente leptónicos y de procesos de dispersión profundamente inelástica de leptones por hadrones. Los resultados de todos estos procesos son compatibles con la teoría estándar dando para el ángulo de unificación el valor efectivo (KL 81) (LR 80).

$$\text{sen}^2 \theta_w = 0.227 \pm 0.010 \quad (2.23)$$

Las masas de los bosones  $Z^0$  y  $W$  pueden ser determinadas a partir del ángulo de Weinberg. Haciendo uso de las relaciones (2.11), (2.13) y (2.15) tenemos que

$$M_W = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2} G} \right)^{1/2} \frac{e}{|\sin \theta_W|} = \frac{37.38}{|\sin \theta_W|} \text{ GeV}$$

$$M_Z = M_W / \cos \theta_W = \frac{37.38}{|\sin \theta_W| \cos \theta_W} \text{ GeV} \quad (2.24)$$

y sustituyendo el valor (2.23) para el seno al cuadrado de  $\theta_W$  obtenemos los valores  $M_W = 78.8 \text{ GeV}$  y  $M_Z = 89.5 \text{ GeV}$ .

No obstante, el valor efectivo de  $\sin^2 \theta_W$  obtenido experimentalmente incluye correcciones radiativas, debidas principalmente a diagramas de polarización del vacío, que no son despreciables. Estas correcciones son particularmente importantes a la hora de usar la relación (2.15) para obtener las masas bosónicas.

El efecto de las correcciones radiativas ha sido estimado por W. Marciano y A. Sirlin (MS 80) (MS 81), obteniendo un valor de  $\sin^2 \theta_W$  renormalizado, directamente relacionado con las masas físicas de los bosones intermedios, dado por (MS 82) (LW 81)

$$\sin^2 \theta_W \equiv 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} = 0.215 \pm 0.014 \quad (2.25)$$

Al tener en cuenta estas correcciones, las predicciones para las masas bosónicas se ven incrementadas en un 5%, obteniendose los valores

$$M_W = 83.0 \pm 2.4 \text{ GeV}$$

$$M_Z = 93.8 \pm 2.0 \text{ GeV} \quad (2.26)$$

### CAPITULO III COTAS SOBRE EL NÚMERO DE GENERACIONES

#### 3.1 Límites astrofísicos sobre el número de neutrinos

El límite más frecuentemente citado sobre el número de neutrinos distintos existentes,  $N_\nu$ , es el obtenido a partir de la abundancia relativa de  ${}^4\text{He}$  en el universo, utilizando el modelo cosmológico standard (Big-Bang) (SH 69) (SS 77) (YS 79) (OS 81b). La extracción de este límite requiere extrapolarse hacia atrás el modelo de Robertson-Walker-Friedman hasta temperaturas del orden de 1 MeV, cuando el factor de escala cósmico era nueve ordenes de magnitud menor que el actual.

En los instantes primigenios del universo cualquier leptón masivo habría sido copiosamente producido y su neutrino asociado habría sido tan abundante como el electrónico y el muónico. Debido a que la densidad de energía del universo,  $\rho_E$ , varía con la cuarta potencia de la temperatura para partículas relativistas ( $m c^2 \ll KT$ ) y con la tercera potencia para partículas más pesadas ( $m c^2 \gg KT$ ), en la época inicial la densidad de energía estaba dominada por la radiación. La existencia de partículas ligeras adicionales provocaría un aumento de la densidad de energía, disminuyendo por tanto la escala de tiempos ( $\rho_E \propto t^{-2}$ ).

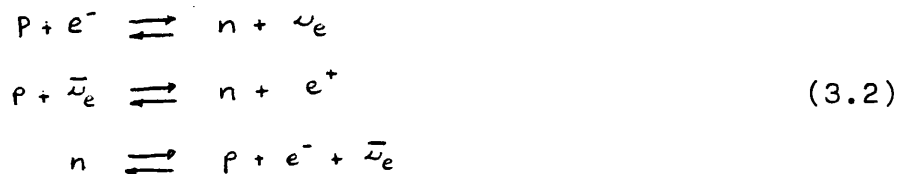
Un cambio en la velocidad de expansión del universo puede alterar de forma significativa la abundancia de elemen-

tos producidos por nucleosíntesis (PE 66) (WF 67) (WA 73). El efecto dominante de un aumento en dicha velocidad sería alterar la razón  $\theta$  del número de neutrones al número de protones.

Inicialmente ( $t \lesssim 1s$ ,  $T \gtrsim 10^{10}$  K) fotones y leptones están en equilibrio ( $T_\gamma = T_e = T_\nu$ ) y  $\theta$  es mantenida en su valor de equilibrio.

$$\theta = \exp(-\Delta M c^2 / kT) \quad (3.1)$$

por las reacciones débiles

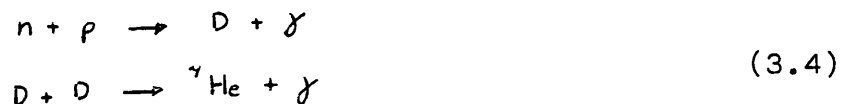


Al mismo tiempo, el deuterio es continuamente formado ( $n + p \rightarrow D + \gamma$ ) y destruido ( $\gamma + D \rightarrow n + p$ ). Para  $T \gtrsim 2 \cdot 10^9$  K, la rápida fotodisociación mantiene la abundancia de deuterio en un valor muy bajo impidiendo la creación de núcleos pesados.

El equilibrio se rompe a una temperatura crítica  $T_c$  cuando la velocidad de expansión supera a la de las reacciones (3.2). Estos procesos son entonces demasiado lentos para mantener la abundancia relativa de neutrones a protones en su valor de equilibrio (3.1) con lo que  $\theta$  queda congelada en el valor

$$\theta_c \simeq \exp(-\Delta M c^2 / kT_c) \quad (3.3)$$

Cuando la temperatura alcanza valores por debajo de  $10^9$  K ( $t \gtrsim 100$  s) la fotodisociación del deuterio pierde importancia, por lo que empieza la formación de núcleos mayores a partir de reacciones del tipo



Sin embargo, al no existir un núcleo estable con número másico  $A = 5$ , se produce un salto difícil de salvar que impide la creación de núcleos más pesados, favoreciendo la formación de  ${}^4\text{He}$ .

Un aumento en la velocidad de expansión traería como consecuencia una mayor temperatura crítica provocando un  $\zeta_c$  mayor. Al ser mayor el número de neutrones, aumentaría la formación de núcleos ligeros ( $D$ ,  ${}^3\text{He}$  y  ${}^4\text{He}$ ) y debido a la gran estabilidad del  ${}^4\text{He}$ , éste no es destruido fácilmente durante la evolución galáctica, por lo que su abundancia en el universo actual permite deducir un límite sobre la velocidad de expansión y por tanto obtener una cota superior sobre el número de partículas ligeras ( $m < 1$  MeV)

La fracción de la masa total del universo atribuida al Helio es grande ( $Y \sim .2 - .3$ ) y, aunque este núcleo es continuamente fabricado en el interior de las estrellas, se ha estimado que la producción estelar contribuye solo en una pequeña fracción ( $Y_* \sim .06$ ) por lo que la abundancia observada de  ${}^4\text{He}$  es un buen límite superior a su abundancia primigenia.

A partir de la abundancia primigenia de helio estimada ( $Y_p \equiv Y - Y_* \lesssim 0.25$ ) y suponiendo que la densidad de masa actual viene dominada por los bariones se ha establecido que el número de neutrinos ligeros ( $m_\nu < 1 \text{ MeV}$ ) con dos grados de libertad no puede exceder la cota

$$\underline{N_\nu \lesssim 3-4} \quad (3.5)$$

En caso de suponer que los neutrinos tuvieran cuatro grados de libertad se obtiene  $N_\nu \lesssim 2$ , cota que podría no tener sentido ya que conocemos la existencia de al menos tres neutrinos:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ . Esto sugiere la no existencia de neutrinos dextrógiros. No obstante, del neutrino asociado al  $z$  solo se conoce que  $m_{\nu_z} \lesssim 200 \text{ MeV}$  por lo que en principio no tiene porque estar incluido en el número de partículas ligeras. Por otra parte, los neutrinos podrían ser masivos ligeros pero con masas incorporadas a la Majorana, con lo que las componentes dextróginas corresponden a los "anti-neutrinos".

Sin embargo, estas cotas no excluyen la existencia de partículas con interacción superdébil, ya que estas se desacoplarían de la radiación antes que los neutrinos. Las partículas ligeras son calentadas debido a la aniquilación de partículas masivas, pero una vez desacopladas ya no pueden compartir esta energía extra; por lo tanto las hipotéticas partículas superdébiles quedarían, después del desacoplo,

con una temperatura  $T_d < T_c$ . Las partículas desacopladas influenciarían la expansión cosmológica debido a su contribución a la densidad de energía, sin embargo, como dicha contribución aparecería diluida por un factor  $(T_d / T)^4 < 1$ , sería posible la existencia de más tipos de partículas desacopladas que de partículas en equilibrio (SC 79) (OS 81a). Cuanto más débil fuera la interacción, más clases de partículas ligeras estarían permitidas. Suponiendo una densidad de nucleones en el universo actual  $\rho_N \geq 10^{-31} \text{ gr cm}^{-3}$  se obtiene que serían posibles entre 1 y 20 nuevos tipos de partículas, dependiendo este número de la intensidad de su interacción. Sin embargo, para  $\rho_N \geq 2 \cdot 10^{-31} \text{ gr cm}^{-3}$  no se permite ninguna partícula adicional.

Todas estas cctas deben tomarse con cautela ya que hay serias discrepancias sobre su validez (SK 80) (OT 81) (SK 81). La obtención de cotas sobre el número de partículas ligeras requiere el conocimiento de tres parámetros (OS 81b): la vida media del neutrón ( $\tau$ ), la abundancia primigenia de helio ( $Y_p$ ) y la razón entre el número de bariones y el número de fotones ( $\eta$ ).

Desgraciadamente  $\tau$  está bastante mal determinada ( $10.13 \leq \tau \leq 10.82$  minutos) y aunque parece haber bastante unanimidad en que  $Y_p \lesssim .25$ , no están completamente descartados valores mayores. No obstante, el parámetro más problemático es el valor de  $\eta$ .

El límite inferior de  $\eta$  ( $\eta \geq 2 \cdot 10^{-10}$ ), utilizado en la extracción de las cotas anteriores, se obtiene a partir

de la masa necesaria para ligar galaxias binarias y pequeños grupos de galaxias, suponiendo que dicha masa viene dominada por los bariones. Si los neutrinos tuvieran una masa del orden de 10 eV podrían tener una contribución apreciable (de hecho dominante) sobre dicha masa, con lo que se reduciría el límite inferior actualmente aceptado para  $\eta$ .

De hecho los límites sobre  $\eta$  obtenidos a partir de la razón entre masa y luminosidad en las cercanías del sol y en las regiones centrales de las galaxias, no son capaces de dar ninguna limitación sobre  $N_\nu$ . Si dicho límite se infiere a partir de la abundancia de deuterio o a partir del gas caliente en cúmulos se obtiene  $N_\nu \lesssim 6-8$ .

Por otra parte, la extracción de cotas sobre  $N_\nu$  a partir de la nucleosíntesis primigenia, está basada en la hipótesis de que los potenciales químicos de los neutrinos son pequeños. Si estos potenciales no fueran despreciables, podrían alterar de forma significativa la abundancia relativa de Helio, con lo que las cotas anteriores perderían validez (ST 80).

En el argumento de nucleosíntesis esgrimido hasta aquí, se supone que  $Y_p$  aumenta con  $N_\nu$ . Sin embargo, para grandes  $N_\nu$   $Y_p$  decrece debido a que el universo se expande tan rápidamente que no deja tiempo a que pueda completarse el proceso de formación del helio (PE 66). Por lo tanto los límites anteriores no son aplicables para  $N_\nu$  grande. Suponiendo  $\eta \gtrsim 2 \cdot 10^{-10}$  se encuentra que la zona  $N_\nu > 6600$  está permitida.



También se han obtenido límites al número de generaciones estudiando las últimas etapas de la evolución estelar. Así, es posible descartar la zona  $N_{\nu} > 6600$  (EO 82). Para ello, se consideran procesos de producción de pares neutrino-antineutrino a través de corrientes neutras. Para grandes  $N_{\nu}$ , estos procesos serán la forma dominante de pérdida de energía, afectando drásticamente a la vida media de la estrella o, en el caso de estrellas de neutrones, a su velocidad de enfriamiento.

Las cotas obtenidas aparecen representadas en la figura 3.1. Las propiedades de las gigantes rojas restringen  $N_{\nu} < 0(700)$ . A partir de los límites inferiores de que se dispone de la temperatura de estrellas de neutrones en el centro de supernovas se obtiene  $N_{\nu} < 0(50)$ . Por último, utilizando la máxima emisión de energía permitida por los modelos estelares para una estrella cuyo combustible sea el carbono se llega a la cota  $N_{\nu} < 0(20)$ . Este último límite, supone que este tipo de estrellas ha sido observado, identificándolas con los supergigantes rojas, hecho que no parece establecido definitivamente.

El límite más fiable (y también el menos restrictivo) es el obtenido a partir de las gigantes rojas. Afortunadamente, este límite es capaz por sí solo de prohibir la zona  $N_{\nu} > 6600$ .

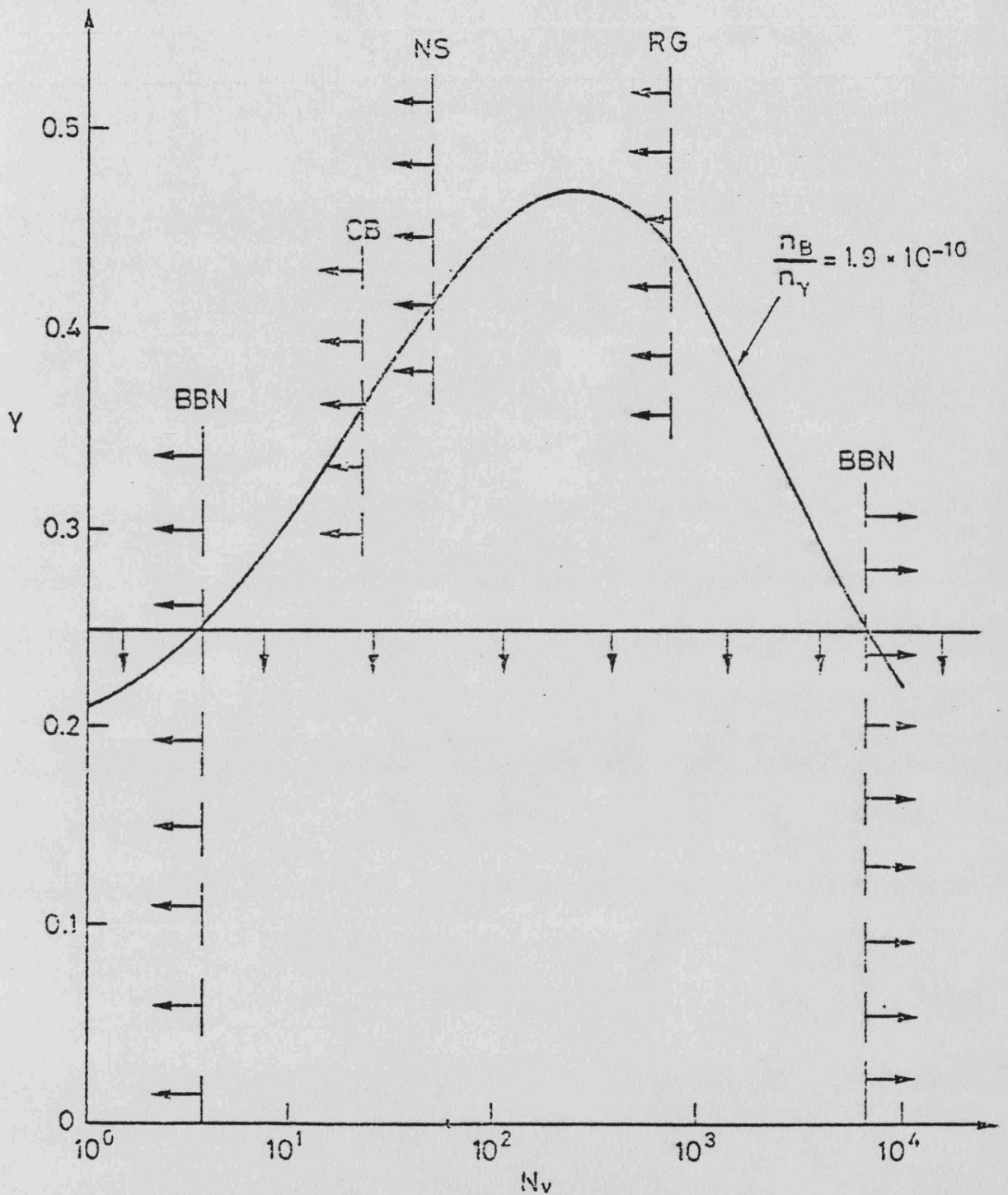


Fig. 3.1.- Abundancia primigenia de Helio en función del número de tipos de neutrinos. Las flechas indican las restricciones sobre  $N_\nu$  obtenidas a partir de la nucleosíntesis en el modelo Big-Bang (BBN), estrellas de carbono (CB), estrellas de neutrones (NS) y gigantes rojas (RG).

### 3.2. Libertad asintótica

Una de las propiedades más relevantes de la cromodinámica cuántica (Q.C.D) es la de libertad asintótica (PO 73) (GR 73), capaz de explicar el comportamiento profundamente inelástico de los hadrones. Sin embargo, esto solo sucede cuando el número de sabores de quarks no excede de 16. La razón de esta restricción radica en la dependencia de la constante de acoplamiento efectiva con el número de sabores  $N_F$

$$\alpha_s(Q^2) \simeq \frac{12 \pi}{(33 - 2 N_F) \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (3.6)$$

Para  $N_F \leq 16$ ,  $\alpha_s(Q^2)$  disminuye al aumentar  $Q^2$ , de forma que a grandes transferencias de momento los quarks se comportan como partículas cuasi-libres, tal como indican los datos experimentales.

En la teoría standard  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  cada generación contiene un doblete de quarks. Por lo tanto, si exigimos que la teoría sea asintóticamente libre, el número de generaciones fermiónicas posible queda limitado por la condición.

$$\underline{N \leq 8} \quad (3.7)$$

### 3.3. Desintegraciones de resonancias mesónicas pesadas

En principio es posible establecer cotas superiores al número de generaciones a partir de las desintegraciones de mesones vectoriales neutros compuestos por quarks pesados. La razón entre las probabilidades de desintegración a neutrinos y a pares  $e^+$  e $^-$  viene dada por (RW 76) (EL 78) (EL 81):

$$B_V \equiv \frac{\Gamma(V \rightarrow z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu})}{\Gamma(V \rightarrow \gamma \rightarrow e^+ e^-)} = \frac{G_F^2}{64 \pi^2 \alpha^2} \frac{m_V^4}{e_q^2} (1 - 4 |e_q| \sin^2 \theta_w)^2 N_\nu \quad (3.8)$$

Para quarks con carga  $e_q = 2/3$  esta relación adquiere el valor

$$B_V \Big|_{e_q=2/3} \simeq 2 \cdot 10^{-9} [m_V (\text{GeV})]^4 N_\nu \quad (3.9)$$

Desgraciadamente la resonancia  $J/\psi$  es demasiado ligera. La cota experimental  $B_{J/\psi} \leq 1/10$  solo permite deducir que  $N_\nu \leq 5 \cdot 10^5$ . Sin embargo, para  $m_V \sim 30$  GeV,  $B_V$  es ya del orden de  $10^{-3} N_\nu$ , por lo que un estudio experimental de las desintegraciones del toponium a neutrinos sería interesante. Una posible forma de hacerlo, sería buscando en colisiones  $e^+ e^-$  sucesos de la forma

$$e^+ e^- \rightarrow (t \bar{t})^* \rightarrow (t \bar{t}) + \pi \pi \quad (3.10)$$

$\downarrow$  "Nada"

La detección de solamente dos piones en el estado final, con un defecto de masa correspondiente a la masa de la resonancia, sería una señal clara de desintegración a neutrinos. Si pudieramos por ejemplo, establecer que  $B_\gamma < 1$  obtendríamos  $N_\nu \lesssim 5 \cdot 10^3$ .

### 3.4. Desintegración $K^+ \rightarrow \pi^+ \bar{\nu} \nu$

La desintegración  $K^+ \rightarrow \pi^+ \bar{\nu} \nu$  es un proceso débil de segundo orden, dominado por diagramas que contienen loops de quarks pesados (MO 78b). Este proceso ha sido analizado con detalle (IL 81) obteniendo una probabilidad de desintegración que naturalmente depende de la matriz de mezcla de quarks. La amplitud de desintegración viene dominada por la contribución del quark top. Usando la probabilidad de desintegración del proceso  $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  y la diferencia de masa,  $\Delta m_K$ , entre  $K_L$  y  $K_S$  para imponer cotas sobre los valores de la masa y los ángulos de mezcla del quark top, se ha podido establecer (EH 82):

$$B(K^+ \rightarrow \pi^+ + \sum_{\nu=e,\mu,\tau} \bar{\nu} \nu) = 3 \times (1.7 - 11) \cdot 10^{-10} \quad (3.11)$$

El intervalo de valores permitido podría reducirse si se pudiera aumentar la cota inferior sobre  $m_t$ .

Esta expresión puede generalizarse a N generaciones bajo determinadas condiciones. Si los correspondientes quarks pesados no contribuyen significativamente a la amplitud y los leptones asociados son mucho más ligeros que los bosones  $W^\pm$ , se pueden escribir

$$B(K^+ \rightarrow \pi^+ + \sum_i \bar{\nu}_i \nu_i) = N \times (1.4 - 11) 10^{-10}, \quad (m_i \ll m_W) \quad (3.12)$$

La observación de esta desintegración por encima de  $10^{-9}$  establecería inmediatamente un límite inferior al número de neutrinos. Por ejemplo, la observación de  $K^+ \rightarrow \pi^+ + ?$  cerca del presente límite superior experimental de  $1.4 \cdot 10^{-7}$  implicaría que  $N \gtrsim O(100)$

Como la amplitud del proceso  $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu_i \bar{\nu}_i$  se anula para determinado valor de  $m_i$ , que depende de  $m_t$ , no es posible establecer un límite inferior absoluto para  $B(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu_i \bar{\nu}_i)$ . Sin embargo, si que se puede dar dicho límite inferior para neutrinos cuyos leptones asociados no tengan masas en una región alrededor de los 100 GeV, estableciendo por lo tanto un límite superior para el número de dichos neutrinos. Por ejemplo, a partir del actual límite experimental (AS 81)

$$B(K^+ \rightarrow \pi^+ + ?) \lesssim 1.4 \cdot 10^{-7} \quad (3.13)$$

se puede deducir que no pueden haber más de 6000 neutrinos cuyos leptones asociados tengan  $m_i \lesssim 30\text{GeV}$  ó  $m_i \gtrsim 30\text{TeV}$

Las aserciones anteriores descansan en la hipótesis de que los loops de quarks más pesados que el top son despreciables al calcular las amplitudes asociadas a  $\Delta m_K$ ,  $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  y  $K^+ \rightarrow \pi^+ \bar{\nu} \nu$ . La inclusión de un quark pesado no disminuye de forma apreciable el límite superior de B y por lo tanto no repercute sobre el potencial límite inferior de N, pero puede invalidar el límite inferior de B y por lo tanto la cota superior de N. Sin embargo, esto requeriría cancelaciones no naturales entre distintas amplitudes a un loop. En principio es posible una disminución del límite inferior de B en un orden de magnitud pero parece improbable. De todas formas una medida de B por debajo de  $3 \times 1.4 \times 10^{-10}$  sería evidencia de la existencia de más de 3 generaciones leptónicas.

La desintegración podría venir enmascarada por los procesos  $K^+ \rightarrow \pi^+ +$  partículas neutras ligeras supersimétricas tales como fotinos, goldstinos, gravitinos y shiggses. Mientras las desintegraciones a fotinos, goldstinos y gravitinos están suprimidas respecto de las de neutrinos, parece ser que la desintegración a shiggses podría ser de un orden de magnitud comparable (EH 82).

### 3.5. Búsqueda de leptones pesados

Se puede extraer otro límite sobre N a partir del hecho de que las experiencias de PEP y PETRA indican que cualquier nuevo leptón pesado debe tener una masa  $m_0 \gtrsim 18$  GeV (KW 82)

En el modelo de Weinberg-Salam con solo un doblete de Higgs la predicción de orden cero  $\epsilon \equiv M_W^2 / (M_Z^2 \cos^2 \theta_W) = 1$  queda alterada a ordenes superiores debido a que los propagadores del W y del Z son afectados de forma distinta. Considerando un solo loop fermiónico se obtiene (VE 77) (CF 78)

$$\epsilon = 1 + \xi \frac{G_F}{8\sqrt{2}\pi^2} \left( \frac{2 m_1^2 m_2^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln \frac{m_2^2}{m_1^2} + m_1^2 + m_2^2 \right) \quad (3.14)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los fermiones que aparecen en el loop y  $\xi$  toma los valores 1 o 3, según se trate de un leptón o de un quark.

Si consideramos solo la contribución leptónica y suponemos  $m_\nu \ll m_\rho$  podemos escribir la desigualdad

$$\xi \equiv |\epsilon - 1| \geq \frac{G_F}{8\sqrt{2}\pi^2} \sum_{\rho=1}^N m_\rho^2 \quad (3.15)$$

Experimentalmente la razón entre secciones eficaces de corrientes neutras y corrientes cargadas es sensible a la razón entre las masas bosónicas. Los datos experimentales están en buen acuerdo con la predicción del modelo, imponiendo una restricción sobre las posibles masas leptónicas. Tomando  $\xi \leq 3\%$  y  $m_\rho \geq 20$  GeV se obtiene la cota  $N_\nu < 740$  (JY 83).

Este límite podrá mejorarse notablemente cuando el L.E.P. entre en funcionamiento, ya que se espera que pueda detectar posibles leptones pesados en la región  $m_\rho \leq 100$  GeV.



En caso de no encontrar ninguno tendríamos  $N < 0(25)$  (EL 79).

No obstante, la cota anterior puede ser reducida notablemente con los datos actuales, considerando el proceso  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  (JY 83).

La presencia de nuevos fermiones modificará el propagador fotónico a través de diagramas de polarización del vacío. Si incluimos en  $\Delta^{\omega}(s)$  la contribución de las tres primeras familias de leptones y quarks a la sección eficaz y consideramos de nuevo solamente la parte leptónica adicional, obtenemos para  $s$  mucho menor que la masa al cuadrado de los nuevos leptones

$$\Delta(s) = \Delta^{(0)}(s) (1 + \delta); \quad \delta \equiv \frac{2\alpha s}{15\pi} \sum_{l=4}^N m_l^{-2} \quad (3.16)$$

A partir de los valores permitidos experimentalmente para  $\delta$  y  $\epsilon$  se obtiene, teniendo en cuenta las expresiones (3.15) y (3.16)

$$\underline{N < 137} \quad (3.17)$$

Si suponemos que los quarks de tipo  $d$  tienen una masa mucho menor que los correspondientes quarks de tipo  $u$  asociados a ellos, podemos incorporar al razonamiento anterior la contribución de los quarks, obteniéndose que  $N < 44$ . Aunque esta cota es menos fiable, es importante señalar que independientemente de la relación de masas entre los dos quarks de un mismo doblete, la contribución de los quarks

necesariamente disminuye la cota (3.17) obtenida a partir del sector leptónico, ya que da una contribución positiva a  $\xi$  y  $\delta$ .

El límite superior (3.17) no es realista ya que solo es alcanzado si todos los fermiones tienen la misma masa ( $m_\rho = 47$  GeV si se consideran solo leptones y  $m_\rho = m_\nu = 41$  GeV si también se incluyen los quarks). Para cualquier otra situación la cota sería más restrictiva. Si suponemos por ejemplo, que la razón entre las masas de los fermiones cargados de dos familias consecutivas es aproximadamente 10 (para los leptones conocidos es mayor) solamente dos nuevas generaciones estarían permitidas.

### 3.6. Correcciones de orden superior a las masas fermiónicas

El cálculo completo de las correcciones a dos loops de los elementos de matriz del operador de masa fermiónico en una teoría gauge general (NR 79) aplicado al modelo SU(5), ha reproducido las anteriores predicciones a un loop para las masas de los quarks s y b (GQ 74) (BN 78) encontrando buen acuerdo con la experiencia (HE 77), (IN 77), (CO 77), (BE 78), (DA 78).

Como las masas de los quarks dependen del número de sabores no es sorprendente que la consistencia entre teoría y experimento ponga un límite superior sobre  $N_F$ : Si se suponen más de 6 sabores las masas de los quarks s y b aumentan de forma inaceptable.

El reciente estudio de la razón de masas entre el quark b y el leptón Z, incluyendo la posibilidad de un acoplamiento de tipo Yukawa para el quark t comparable con  $g_{QCD}$ , (NR 82) ha corroborado este límite. Por lo tanto, si SU(5) es el modelo correcto, solo pueden haber seis sabores de quarks, por lo que  $N = 3$ .

No obstante, estas estimaciones descansan en la suposición usual de que la matriz de masas fermiónica es generada a través del mecanismo de rotura espontánea de simetría mediante Higgses situados en la representación  $\underline{5}$  de SU(5). Sin embargo, la representación  $\underline{45}$  es en principio igualmente aceptable. El cálculo de la razón de masas  $m_b / m_Z$  usando la representación  $\underline{45}$  (FN 79) produce una predicción distinta para el número de sabores:  $N_F = 12$ . En este caso, deberían existir seis generaciones fermiónicas distintas.

### 3.7 Propuestas para el L.E.P.

#### 3.7.1 $e^+ e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow X$ :

El estudio de las desintegraciones de los  $Z^0$  producidos en las colisiones  $e^+e^-$ , es posiblemente la forma más inmediata de determinar N (CM 76).

Ignorando correcciones radiativas, la sección eficaz en el pico de la resonancia está dada por

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow X)}{\Delta_{pt}} \simeq \frac{q}{\alpha^2} B(Z^0 \rightarrow e^+e^-) B(Z^0 \rightarrow X) \quad (3.18)$$

donde  $\langle \sigma_{pt} \equiv \langle (e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-) \rangle$  es usada como normalización del haz.

Tomando 3 generaciones, se obtiene en el modelo de Weinberg-Salam

$$\frac{\langle (e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow X) \rangle}{\langle \sigma_{pt} \rangle} \Bigg|_{W=5} \simeq 5100 \quad (3.19)$$

lo cual corresponde, para una luminosidad de  $10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , a unos 5 sucesos por segundo (EL 79).

La forma dominante de desintegración del  $Z^0$  es el canal a un par fermión-antifermión, cuya probabilidad de desintegración viene dada según la teoría standard  $SU(2) \otimes U(1)$  por:

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow f\bar{f}) = \frac{2 G_F m_Z^3}{3 \sqrt{2} \pi} (1 - 4 m_f^2/m_Z^2)^{1/2} [(\nu^2 + a^2)(1 - m_f^2/m_Z^2) + 3(\nu^2 - a^2) m_f^2/m_Z^2] \quad (3.20)$$

donde  $\nu \equiv \frac{1}{4} c_3 - Q \text{sen}^2 \theta_w$  y  $a \equiv \frac{1}{4} c_3$

Suponiendo  $m_f \ll m_Z/2$  y sumando sobre todos los posibles fermiones que cumplen esta restricción, se obtiene (EL 78):

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow \sum f\bar{f}) \simeq \frac{G_F m_Z^3}{24 \sqrt{2} \pi} \left\{ 2 N_\nu + [1 + (1 - 4 \text{sen}^2 \theta_w)^2] N_0 + 3 [1 + (1 - \frac{8}{3} \text{sen}^2 \theta_w)^2] N_{2/3} + 3 [1 + (1 - \frac{4}{3} \text{sen}^2 \theta_w)^2] N_{-1/3} \right\} \quad (3.21)$$

donde  $N_\nu$ ,  $N_\ell$ ,  $N_{2/3}$  y  $N_{-1/3}$  son el número de neutrinos, leptones asociados y sabores de quarks con cargas  $2/3$  y  $-1/3$  respectivamente que cumplen la restricción  $m_i < M_Z/2$

Si ahora suponemos  $N_\nu = N_\ell = N_{2/3} = N_{-1/3} = N$ , es decir, generaciones completas, tendremos

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow \ell \bar{\ell}) \simeq \frac{G_F m_Z^3}{12 \pi \sqrt{2}} \frac{N}{3} [24 - 48 \sin^2 \theta_w + 64 \sin^4 \theta_w] \quad (3.22)$$

Tomando los valores  $\sin^2 \theta_w = .23$ ,  $m_Z = 90$  GeV y  $N = 3$ , obtenemos una anchura para el  $Z^0$

$$\Gamma \simeq 2.6 \text{ GeV} \quad (3.23)$$

La existencia de un neutrino adicional provocaría un incremento de la anchura  $\Delta \Gamma \simeq .16$  GeV, que viene a ser un 6% de la anchura total. Por lo tanto, para establecer el número de neutrinos con una fiabilidad de 100 contra 1 de que haya 1 más o 1 menos, sería necesaria una medida de  $\Gamma$  con una precisión del 2%. Aunque no habra problemas en conseguir la estadística necesaria para ello en los experimentos sugeridos para las futuras máquinas  $e^+e^-$ , no está claro que errores sistemáticos en la determinación de  $m_Z$ , efectos de órdenes superiores en  $\Gamma$  y distorsiones radiativas en la forma resonante, permitan una determinación de la anchura con la exactitud requerida (BR 81).

3.7.2.  $e^+ e^- \rightarrow \gamma \nu \bar{\nu}$

Aunque el proceso  $e^+ e^- \rightarrow \gamma \nu \bar{\nu}$  tiene contribuciones tanto de corrientes neutras como de corrientes cargadas (MO 78a,b) (GG 79), cerca del pico del  $Z^0$  la contribución de corrientes cargadas no es importante, por lo que la sección eficaz es proporcional a  $N_\nu$

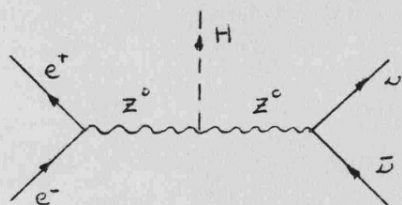
El procedimiento experimental consistiría en operar a una energía en centro de masas por encima de la masa del  $Z^0$  y detectar un fotón con una energía tal que correspondiera a una energía no detectada  $E_{\nu\bar{\nu}} \sim m_{Z^0}$ .

A una energía en centro de masas  $E_{c.m} \simeq 105$  GeV, la sección eficaz integrada sobre la región  $E_\gamma = 14 \pm 2.5$  GeV es aproximadamente  $\sigma \simeq 2.5 \cdot 10^{-2}$  nb para tres generaciones. Cada neutrino adicional dará una contribución  $\Delta\sigma \simeq 8 \cdot 10^{-3}$  nb lo que supone un incremento del 32%. Operando durante 30 días con una luminosidad promedio de  $5 \cdot 10^{30}$   $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  se obtendrían unos 300 sucesos dentro de ese rango de energías, más que suficientes, para poder determinar  $N_\nu$  con la precisión requerida (BR 81).

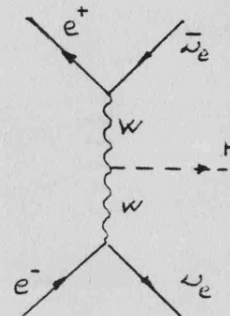
La sección eficaz  $e^+ e^- \rightarrow \gamma \nu \bar{\nu}$  integrada sobre el pico del  $Z^0$  en el espectro fotónico, mide una cantidad proporcional a  $N_\nu \cdot m_Z^2 / \Gamma_Z^2$ . La forma del espectro fotónico determina  $m_Z$  y  $\Gamma_Z$  con la suficiente precisión para determinar  $N_\nu$  sin ambigüedad. No obstante,  $m_Z$  y  $\Gamma_Z$  serán obtenidas sin lugar a dudas con mejor precisión (y posiblemente antes) por el experimento convencional de explorar sobre el pico del  $Z^0$  en  $e^+ e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow x$

3.7.3  $e^+e^- \rightarrow H \nu \bar{\nu}$

El acoplamiento del Higgs con otra partícula es proporcional a la masa de dicha partícula, por lo tanto la contribución principal a este proceso proviene del acoplamiento a bosones vectoriales. Los diagramas dominantes aparecen representados en la figura 3.2.



(a)



(b)

Fig. 3.2- Diagramas dominantes para el proceso  $e^+e^- \rightarrow H \nu \bar{\nu}$

En el canal t (diagrama b) no es posible alcanzar el polo del  $W$ , por lo que para energías del par electrón-positrón menores que 100GeV, la contribución de este diagrama es mucho menor que la del diagrama (a) (PR 79). Este último diagrama aparece para cualquier tipo de neutrinos, por lo que en estas condiciones también puede ser utilizado este proceso para determinar  $N_\nu$ .

El experimento requeriría la detección de la partícula Higgs. Para  $m_H$  menor que 10 GeV la sección eficaz obtenida es mayor que la asociada al proceso  $e^+e^- \rightarrow \gamma \nu \bar{\nu}$ , disminuyendo al aumentar la masa del Higgs.

CAPITULO IV LEPTO-PRODUCCION DE PARES NEUTRINO-ANTINEUTRINO:

CONTRIBUCION DE CORRIENTES NEUTRAS

4.1 Elección de helicidad para el haz incidente:

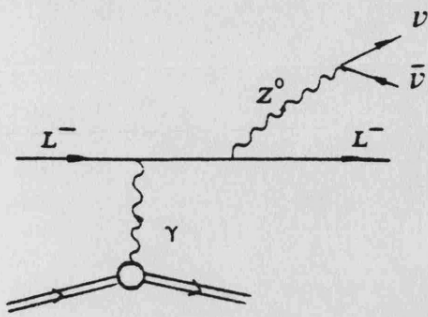
El proceso objeto de nuestro estudio es la leptoproducción de pares neutrino-antineutrino en el campo coulombiano de un núcleo.

$$\bar{l}^{-}(p_1) + {}^A Z(P) \rightarrow \bar{\nu}(p_2) + \bar{\nu}(p_3) + \nu(p_4) + {}^A Z(P') \quad (4.1)$$

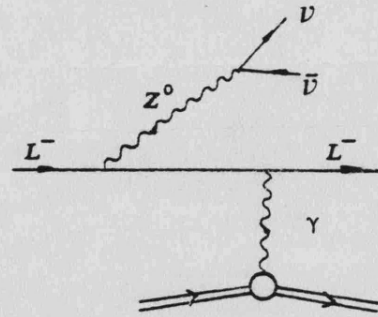
Al orden más bajo en la teoría electrodébil  $SU(2) \otimes U(1)$ , las contribuciones al proceso vienen dadas por los cinco diagramas de la figura 4.1. Como resulta evidente de dicha figura, hay dos tipos distintos de contribuciones, caracterizadas por la carga del bosón masivo intercambiado. La contribución de corrientes neutras (diagramas 1 y 2) es independiente del tipo de neutrino que aparezca en el estado final, mientras que la contribución de corrientes cargadas (diagramas 3,4 y 5) solo aparece cuando el neutrino final pertenece al mismo isodoublete débil que el leptón masivo responsable del proceso.

El hecho de que una de las generaciones leptónicas (la del leptón incidente) tenga una contribución distinta a las demás, es en principio molesto para nuestro objetivo de determinar el número de tipos de neutrinos, ya que puede

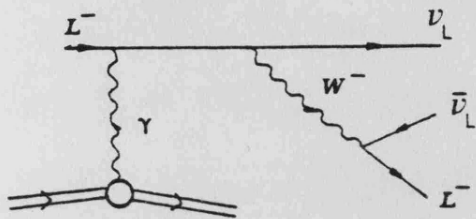




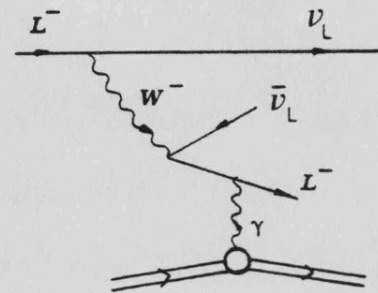
(1)



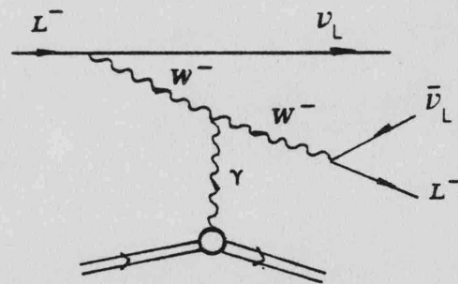
(2)



(3)



(4)



(5)

Fig. 4.1.- Diagramas de Feynman asociados al proceso de lepto-producción de pares neutrino-antineutrino en el campo coulombiano de un núcleo.

oscurecer la dependencia en  $N$  de la sección eficaz. No obstante, en el límite de alta energía ( $m_l \ll E_1$ ) esto no es problema, ya que se puede demostrar fácilmente que, escogiendo adecuadamente la polarización del leptón incidente, la contribución de corrientes cargadas está suprimida por un factor  $m_l / E_1$  respecto a la de corrientes neutras.

La razón de esta supresión radica en que, para calcular los términos dominantes en el límite de alta energía, podemos tomar el límite de masa cero para el leptón a nivel del vértice, y como es bien sabido, para campos fermiónicos de masa nula, los vértices de tipo vectorial y (o) axial conservan la helicidad. Esto puede comprobarse fácilmente, para un vértice general del tipo  $\bar{\Psi}'(a + b \gamma_5) \gamma_\mu \Psi$ , calculando el módulo al cuadrado de la amplitud asociada a dicho vértice.

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= T_n \left\{ \bar{\Psi}' \frac{1+2\lambda'\gamma_5}{2} (a+b\gamma_5) \gamma_\mu \Psi \frac{1+2\lambda\gamma_5}{2} (a'+b'\gamma_5) \gamma_\nu \right\} \\
 &= \delta_{\lambda,\lambda'} T_n \left\{ \bar{\Psi}' (a+b\gamma_5) \gamma_\mu \Psi (a'+b'\gamma_5) \gamma_\nu \frac{1-2\lambda\gamma_5}{2} \right\} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Debido a que el neutrino es una partícula de helicidad bien definida ( $\lambda = -\frac{1}{2}$ ), el intercambio de un  $W$  solo contribuirá cuando el leptón incidente tenga helicidad negativa, por lo que basta con escoger el haz inicial de leptones negativos completamente polarizado con helicidad posi-

tiva ( $\lambda = + \frac{1}{2}$ ) para poder despreciar el sector de corrientes cargadas en el cálculo de la amplitud.

Además, desde el punto de vista experimental, se da la feliz coincidencia de que ésta es justo la helicidad con que se producen mayoritariamente los muones a partir del proceso de desintegración:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (4.3)$$

lo cual es obvio aplicando las leyes de conservación del momento y del momento angular, en el sistema en reposo del pión.

Aunque la desintegración (4.3) se produzca en vuelo, escogiendo los haces de leptones en la dirección hacia adelante con respecto a la del mesón progenitor, el proceso (4.1) puede ser descrito por una suma incoherente de intercambios de corrientes neutras para cada uno de los tipos de neutrino

$$\langle \text{observado} \Big|_{\lambda = +1/2} \simeq N \langle \text{c.n.} (\ell^- z \rightarrow \ell^- z \bar{\nu}_\ell) \Big|_{\lambda = +1/2} \quad (4.4)$$

#### 4.2. Contribución de corrientes neutras a la amplitud:

Aplicando las reglas de Feynman de la teoría standard  $SU(2) \otimes U(1)$  a los diagramas 1 y 2 de la figura 4.1, obtenemos sus respectivas contribuciones a la amplitud.

$$T_1 = \frac{-e^3}{16 \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w} J_\mu \frac{(-g^{\mu\nu})}{q^2} \frac{L_{\nu\tau}^1}{(p_1+q)^2 - m^2} \frac{k^\tau k^\rho / M_Z^2 - g^{\tau\rho}}{k^2 - M_Z^2} N_e \quad (4.5)$$

$$T_2 = \frac{-e^3}{16 \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w} J_\mu \frac{(-g^{\mu\nu})}{q^2} \frac{L_{\nu\tau}^2}{(p_2+q)^2 - m^2} \frac{k^\tau k^\rho / M_Z^2 - g^{\tau\rho}}{k^2 - M_Z^2} N_e$$

donde  $J_\mu$  es la corriente hadrónica, que para núcleos de espín cero podemos escribir mediante el factor de forma nuclear como

$$J_\mu = Z e F(q^2) (P + P')_\mu \quad (4.6)$$

$k^\mu$  y  $q^\mu$  son los cuadrimomentos del  $Z^0$  y del fotón respectivamente, y las dependencias espinoriales las hemos factorizado en los tensores leptónicos.

$$\begin{aligned} L_{\nu\tau}^1 &\equiv \bar{u}(p_2) \gamma_\nu (1-\gamma_5) (\not{p}_1 + \not{q}) \gamma_\tau u(p_1) \\ L_{\nu\tau}^2 &\equiv \bar{u}(p_2) \gamma_\nu (\not{p}_2 - \not{q}) \gamma_\tau (1-\gamma_5) u(p_1) \\ N_e &\equiv \bar{u}(p_4) \gamma_e (1+\gamma_5) v(p_3) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\mathcal{J}$  es la constante de acoplamiento vectorial a leptones cargados, que en la teoría standard tiene el valor

$$\mathcal{J} = 4 \sin^2 \theta_w - 1 \quad (4.8)$$

Suponiendo que el neutrino es una partícula sin masa, la contracción del cuadrimomento del  $Z^0$ ,  $k_\rho$ , con el tensor leptónico  $N_\rho$  es idénticamente nula, lo cual se ve inmediatamente utilizando la ecuación de Dirac. Esto simplifica notablemente la expresión de la amplitud, que podemos escribir como

$$T_{CN} \equiv T_1 + T_2 = \frac{Z e^4}{16 \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w} \frac{F(q^2)}{q^2} \cdot (p + p')^\mu \frac{N^\sigma}{M_Z^2 - k^2} \left[ \frac{L^1_{\sigma\mu}}{(p_1 + q)^2 - m^2} + \frac{L^2_{\mu\sigma}}{(p_2 - q)^2 - m^2} \right] \quad (4.9)$$

Aunque vamos a efectuar el cálculo del proceso en el límite de alta energía, supondremos que ésta no es aún lo suficientemente elevada para que las correcciones del propagador bosónico sean importantes. Es decir, vamos a suponer  $k^2 \ll M_Z^2$ , lo cual equivale a tomar el límite de contacto de las dos corrientes débiles. Veremos más adelante que esta aproximación está plenamente justificada para las energías accesibles experimentalmente en la actualidad.

Calculando el cuadrado del módulo de la amplitud (4.9) para una helicidad  $\lambda$  dada del leptón masivo y utilizando la relación

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 M_Z^2 \cos^2 \theta_w \sin^2 \theta_w} \quad (4.10)$$

donde  $G$  es la constante de Fermi, obtenemos

$$|T_{CN}|^2 \approx 16 (\nu + 2d)^2 \left( \frac{Z e^2 G}{2 \sqrt{2}} \right)^2 \frac{|F(q^2)|^2}{(q^2)^2} \cdot (P + P')^\mu (P + P')^\nu A^{\tau e} B_{\mu\nu\tau e} \quad (4.11)$$

donde  $A^{\tau e}$  proviene del producto de corrientes de neutrinos

$$\begin{aligned} A^{\tau e} &\equiv \frac{1}{8} \text{Tr} (N^\tau \bar{N}^e) = \\ &= P_3^\tau P_4^e + P_4^\tau P_3^e - g^{\tau e} (P_3 P_4) + i \epsilon^{\alpha\tau\beta e} P_{4\alpha} P_{3\beta} \end{aligned} \quad (4.12)$$

mientras que el tensor  $B_{\mu\nu\tau e}$  contiene tres términos

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu\tau e} &\equiv \frac{B_{\mu\nu\tau e}^{(1)}}{[(P_1 + q_1)^2 - m^2]^2} + \frac{B_{\mu\nu\tau e}^{(2)}}{[(P_2 - q_1)^2 - m^2]^2} \\ &+ \frac{B_{\mu\nu\tau e}^{(3)}}{[(P_1 + q_1)^2 - m^2][(P_2 - q_1)^2 - m^2]} \end{aligned} \quad (4.13)$$

asociados con los módulos al cuadrado de  $L_{\tau\mu}^1$  y  $L_{\mu\tau}^2$  y con su interferencia.

$$\begin{aligned}
 B_{\mu\nu\rho}^{(1)} &\equiv \frac{\text{Tr}(L_{\mu\nu}^1 \bar{L}_{\rho\omega}^{-1})}{2(\nu+2d)^2} \approx \\
 &\approx \frac{1}{4} \text{Tr}[\not{p}_2 \not{\epsilon} (\not{p}_1 + \not{q}_1) \not{p}_\mu \not{p}_1 \not{\epsilon} (\not{p}_1 + \not{q}_1) \not{\rho} (1-2d) \not{\delta}_5] \\
 B_{\mu\nu\rho}^{(2)} &\equiv \frac{\text{Tr}(L_{\mu\nu}^2 \bar{L}_{\rho\omega}^{-2})}{2(\nu+2d)^2} \approx \\
 &\approx \frac{1}{4} \text{Tr}[\not{p}_2 \not{\epsilon} (\not{p}_2 - \not{q}_1) \not{\epsilon} \not{p}_1 \not{\rho} (\not{p}_2 - \not{q}_1) \not{\omega} (1-2d) \not{\delta}_5] \\
 B_{\mu\nu\rho}^{(3)} &\equiv \frac{\text{Tr}(L_{\mu\nu}^1 \bar{L}_{\rho\omega}^{-2} + L_{\mu\nu}^2 \bar{L}_{\rho\omega}^{-1})}{2(\nu+2d)^2} \approx \\
 &\approx \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \left[ \not{\epsilon} (\not{p}_1 + \not{q}_1) \not{p}_\mu \not{p}_1 \not{\rho} (\not{p}_2 - \not{q}_1) \not{\omega} + \not{\epsilon} (\not{p}_2 - \not{q}_1) \not{\epsilon} \not{p}_1 \not{\omega} (\not{p}_1 + \not{q}_1) \not{\rho} \right] \right. \\
 &\quad \left. \cdot (1-2d) \not{\delta}_5 \right\}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

### 4.3. Elección de variables invariantes

Debido a las dificultades inherentes al tratamiento de un espacio fásico de cuatro partículas finales, como el que nosotros tenemos, es conveniente trabajar con un conjunto de variables cinemáticas invariantes en vez de utilizar directamente los cuádrimomentos de las partículas. Esto nos permitirá, una vez expresada la amplitud de transición en términos de dichas variables, utilizar en cada etapa de nuestro cálculo el sistema de referencia más adecuado, con lo que el estudio del proceso puede simplificarse notablemente.

Escogeremos como variables cinemáticas los siguientes productos escalares:

$$\begin{aligned}
 x_0 &\equiv (P_1 P) & ; & & x_1 &\equiv -q^2 & ; & & x_2 &\equiv (q P_1) \\
 x_3 &\equiv (q P_2) & ; & & x_4 &\equiv (q P_4) & ; & & x_5 &\equiv (P_1 P_2) \\
 x_6 &\equiv (P_1 P_4) & ; & & x_7 &\equiv (P_2 P) & ; & & x_8 &\equiv (P_4 P)
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Los restantes productos escalares pueden expresarse en función de estas variables de forma trivial, usando la conservación del cuadrимomento ( $P_1 + q = P_2 + P_3 + P_4$ ) y el hecho de que estamos estudiando un proceso nuclear elástico con lo que  $P'^2 = P^2 = M^2$ , donde M es la masa nuclear. Las relaciones obtenidas son:

$$\begin{aligned}
 (q P) &= -\frac{1}{2} x_1 & ; & & (q P_3) &= -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\
 (P_1 P_3) &= x_2 - x_5 - x_6 + m^2 & ; & & (P_2 P_3) &= -\frac{1}{2} x_1 + x_2 - x_4 - x_6 \\
 (P_2 P_4) &= \frac{1}{2} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - m^2 \\
 (P_3 P_4) &= -\frac{1}{2} x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + m^2 & ; & & (P P_3) &= x_0 - \frac{1}{2} x_1 - x_7 - x_8
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

#### 4.4. Integración sobre los cuadrимomentos del par de neutrinos

Como el par neutrino-antineutrino no sería detectado experimentalmente resulta conveniente empezar las integraciones de espacio fásico por los cuadrимomentos  $P_3^\mu$  y  $P_4^\mu$ . Además, debido a que en los dos diagramas de corrientes neutras que contribuyen al proceso aparece la misma corriente



de neutrinos  $N_p$ , la dependencia en  $P_3^\mu$  y  $P_4^\mu$  del módulo al cuadrado de la amplitud es extremadamente simple:  $|T_{CN}|^2$  solo depende de los cuadrimomentos de los neutrinos a través del tensor  $A^{\alpha\beta}$

Teniendo en cuenta la conservación del cuadrimomento en el vértice  $Z^0 \nu \bar{\nu}$ , es obvio que la integral en  $P_3^\mu$  y  $P_4^\mu$  del tensor  $A^{\alpha\beta}$  solo puede depender del resto de variables que intervienen en el proceso a través del cuadrimomento del bosón  $Z^0$ ,  $k^\mu \equiv (P_1 + q - P_2)^\mu$ , por lo que podemos factorizar la integración en la forma

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta} &\equiv \int \frac{d^3 p_3}{2 E_3} \frac{d^3 p_4}{2 E_4} \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - k) A^{\alpha\beta} \\ &= a_1 g^{\alpha\beta} + a_2 k^\alpha k^\beta \end{aligned} \quad (4.17)$$

Una dependencia en  $\epsilon^{\alpha\sigma\beta\rho}$  no es posible ya que habría de contraerse con un  $k_\sigma k_\rho$  obviamente simétrico. Por lo tanto la integración del tensor  $A^{\alpha\beta}$  nos da forzosamente un resultado simétrico en los dos índices. Si ahora tenemos en cuenta que  $|T_{CN}|^2$  depende de la helicidad  $\lambda$  a través del tensor  $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ , el cual debe contraerse con  $A^{\alpha\beta}$ , y que esta dependencia es forzosamente antisimétrica por ir  $\lambda$  siempre acompañada de un  $\delta_5$ , llegamos a la importante conclusión de que la contribución de corrientes neutras a la sección eficaz, integrada en las variables  $P_3^\mu$  y  $P_4^\mu$ , es independiente de la helicidad leptónica, salvo

por la dependencia global  $(v + 2d)^2$  que aparece en la ecuación (4.11)

El hecho de haber factorizado la integración en la forma (4.17) nos permite simplificar notablemente su cálculo, ya que para conocer las funciones  $a_1$  y  $a_2$  basta con integrar determinadas contracciones del tensor  $A^{\nu\rho}$ , que por ser escalares son más simples. Contrayendo en sus dos índices el tensor  $I^{\nu\rho}$  obtenemos

$$\begin{aligned} I^{\nu\rho} &= \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - k) [-2(p_3 p_4)] \\ &= 4 a_1 + k^2 a_2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

La segunda ecuación, necesaria para poder determinar las incógnitas  $a_1$  y  $a_2$ , la obtenemos contrayendo con el cuadrimomento del leptón incidente.

$$\begin{aligned} p_{1\nu} p_{1\rho} I^{\nu\rho} &= \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - k) [2(p_1 p_3)(p_1 p_4)] \\ &\simeq a_2 (p_1 k)^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde hemos despreciado los términos en  $p_1^2 = m^2$

Para calcular estas integraciones, así como el resto de integrales de espacio fásico que irán apareciendo, adaptaremos a nuestro proceso el trabajo realizado por Czyz et al. (CS 64) (LR 71) para estudiar la producción por neutrinos de pares leptónicos. Esto nos permitirá efec-

tuar analíticamente dichas integrales en el límite de alta energía.

Las integrales (4.18) y (4.19) las vamos a realizar en el sistema centro de masas del par neutrino-antineutrino . Más concretamente, escogeremos el sistema de referencia  $L_1$  definido por las condiciones:

$$\text{Referencia } L_1: \vec{q} + \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{0} \quad , \quad \hat{q} = \hat{z} \quad , \quad \hat{p}_1 \in \text{plano } \gamma=0 \quad (4.20)$$

Utilizando la delta de conservación de energía-momento para integrar  $\vec{P}_3$  y  $\vec{P}_4$  obtenemos trivialmente

$$\frac{d^3 P_3}{2 E_3} \frac{d^3 P_4}{2 E_4} \delta^{(4)}(P_1 + q - P_2 - P_3 - P_4) = \frac{1}{8} d\Omega_4 \quad (4.21)$$

Para efectuar la integración angular, utilizaremos la variable  $x_4$ , que en este sistema adopta la expresión

$$x_4 \equiv (q p_4) = E_4 [q^0 - |\vec{q}| \cos \theta_4] \quad (4.22)$$

A partir de esta ecuación y haciendo uso de las relaciones

$$\begin{aligned} k^2 &\equiv (P_3 + P_4)^2 = 2(P_3 P_4) = 2\left(-\frac{1}{2}x_4 + x_2 - x_3 - x_5 + m^2\right) = 4 E_4^2 \\ (q k) &= 2 E_4 q^0 = -x_4 + x_2 - x_3 \\ |\vec{q}|^2 &= x_4 + q_0^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

para reescribir  $|\vec{q}|$  y  $E_4$  en términos de invariantes obtenemos

$$d \cos \theta_4 = \frac{dx_4}{E_4 |\vec{q}|} = \frac{2 dx_4}{\sqrt{D}} \quad (4.24)$$

donde

$$D \equiv (x_2 - x_3)^2 - 2x_1(x_5 - m^2) \quad (4.25)$$

Como ya hemos satisfecho las restricciones que impone la conservación del cuádrimomento, los límites cinemáticos sobre  $x_4$  vendrán dados por la condición  $\cos \theta_4 = \pm 1$ , por lo que

$$\bar{x}_4 = E_4 (q^0 \pm |\vec{q}|) \equiv \frac{1}{2} [-x_1 + x_2 - x_3 \pm \sqrt{D}] \quad (4.26)$$

El diferencial del volumen de espacio fásico adoptará finalmente la forma

$$\int \frac{d^3 p_3}{2 E_3} \frac{d^3 p_4}{2 E_4} \delta^{(4)}(p_1 + q - p_2 - p_3 - p_4) = \frac{\pi}{2} \int_{\underline{x}_4}^{\bar{x}_4} \frac{dx_4}{\sqrt{D}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_4}{2\pi} \quad (4.27)$$

La única dependencia de los integrandos en  $\varphi_4$  es a través de la variable  $x_6$  que aparece lineal y cuadráticamente en la ecuación (4.19). En nuestro sistema de referencia

$$\begin{aligned}
 x_6 \equiv (P_1 P_4) &= E_4 [ E_1 - |\vec{P}_1| (\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4 \cos \varphi_4) ] \\
 &\equiv A - B \cos \varphi_4
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

por lo que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_4}{2\pi} (1, x_6, x_6^2) = (1, A, A^2 + \frac{1}{2} B^2)
 \tag{4.29}$$

Usando las identidades (4.22) y (4.23) y las expresiones de  $x_2$  y  $(P_1 k)$  en el sistema  $L_1$ , podemos reescribir los coeficientes  $A$  y  $B^2$  en función de las variables invariantes:

$$\begin{aligned}
 A &\simeq \frac{1}{2} (x_2 - x_5) + \frac{1}{2D} (x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4) Q \\
 B^2 &\simeq \frac{1}{4} (x_2 - x_5)^2 - \frac{1}{4D} [ Q^2 + (x_2 - x_5)^2 (x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)^2 ] \\
 &\quad + \frac{1}{4D^2} (x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4)^2 Q^2
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

donde

$$Q \equiv x_2 (-x_2 + x_3 + x_5) + x_5 (x_1 + x_3)
 \tag{4.31}$$

Si observamos las expresiones (4.15) y (4.16), resulta evidente que los integrados en (4.18) y (4.19) solo dependen de la variable  $x_4$  a través de  $x_6$ , por lo que la

integración en  $x_4$  puede realizarse de forma sencilla. El factor  $D^{-1/2}$  que aparece en el elemento de volumen de espacio fásico (4.27) se cancela, al integrar, con el factor  $D^{1/2}$  de los límites de integración (4.26) alcanzándose el resultado

$$\int_{x_4}^{\bar{x}_4} \frac{dx_4}{\sqrt{D}} [1, x_4, x_4^2] = [1, \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 - x_3), \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{12} D] \quad (4.32)$$

Usando las expresiones (4.27), (4.29), (4.30), (4.31) y (4.32), el sistema de ecuaciones (4.18) y (4.19) adopta la forma

$$\begin{aligned} 4a_1 + 2(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 - x_5)a_2 &\cong -\pi(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 - x_5) \\ (x_2 - x_5)^2 a_2 &\cong \frac{\pi}{6} (x_2 - x_5)^3 \end{aligned} \quad (4.33)$$

La resolución de este sencillo sistema algebraico, nos permite obtener finalmente las funciones  $a_1$  y  $a_2$ , con lo que el tensor  $I^{\alpha\beta}$  queda completamente determinado

$$I^{\alpha\beta} \cong \frac{\pi}{6} \left\{ k^\alpha k^\beta + [x_1 - 2(x_2 - x_3 - x_5)] g^{\alpha\beta} \right\} \quad (4.34)$$

4.5. Tensor electromagnético leptónico:

Nuestro principal objetivo es el cálculo de la sección eficaz integrada

$$\langle \sigma_{CN} \rangle \simeq \frac{1}{2 \lambda^{1/2}(S, M^2, m^2)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^8} \int \frac{d^3 p_1}{2 E_1} \frac{d^3 p_2}{2 E_2} \frac{d^3 p_3}{2 E_3} \frac{d^3 p_4}{2 E_4} \cdot \delta^{(4)}(p_1 + q - p_2 - p_3 - p_4) |T_{CN}|^2 \quad (4.35)$$

donde  $\lambda(S, M^2, m^2)$  es la función de Källén que en el sistema laboratorio toma el valor  $\lambda^{1/2}(S, M^2, m^2) = 2M |\vec{p}_1| \simeq 2M E_1 = 2x_0$ . A partir de las ecuaciones (4.11) (4.17) y (4.34), podemos reescribir  $\langle \sigma_{CN} \rangle$  en la forma más conveniente (PB 82a)

$$\langle \sigma_{CN} \rangle \simeq \frac{(\nu + 2\lambda)^2 (Z\alpha G)^2}{32 M E_1 \pi^6} \int \frac{d^3 p_1}{2 E_1} \frac{|F(q^2)|^2}{(q^2)^2} \cdot (p + p')^\mu (p + p')^\nu M_{\mu\nu}(p_1, q) \quad (4.36)$$

donde  $M_{\mu\nu}(p_1, q)$  juega el papel de tensor electromagnético leptónico responsable del proceso " $\gamma(q) + l^-(p_1) \rightarrow X$ "

$$M_{\mu\nu}(p_1, q) \equiv \int \frac{d^3 p_2}{2 E_2} I^{\sigma\rho} B_{\mu\nu\sigma\rho} \simeq \frac{\pi}{6} \int \frac{d^3 p_2}{2 E_2} \left\{ k^\sigma k^\rho + [x_1 - 2(x_2 - x_3 - x_5)] g^{\sigma\rho} \right\} B_{\mu\nu\sigma\rho} \quad (4.37)$$

El término en  $k^\nu k^\rho$  no da contribución al orden dominante ya que su contracción con el tensor  $B_{\mu\nu\rho\sigma}$  produce un resultado proporcional a la masa leptónica. Esto es fácilmente comprobable si recordamos que  $B_{\mu\nu\rho\sigma}$  no es mas que el módulo al cuadrado del tensor

$$B_{\nu\sigma} \equiv \frac{L_{\nu\sigma}^1}{(P_1+q)^2 - m^2} + \frac{L_{\nu\sigma}^2}{(P_2+q)^2 - m^2} \quad (4.38)$$

Utilizando la ecuación de Dirac, es inmediato obtener que  $k^\nu B_{\nu\sigma} \propto O(m)$ . Por lo tanto, despreciando masas leptónicas podemos aproximar el tensor leptónico por la expresión

$$M_{\mu\nu}(P_1, q) \simeq \frac{\pi}{6} \int \frac{d^3 p_2}{2 E_2} [x_1 - 2(x_2 - x_3 - x_5)] B_{\mu\nu\sigma}{}^\sigma \quad (4.39)$$

El tensor  $B_{\mu\nu\sigma}{}^\sigma$  puede determinarse de forma directa utilizando las técnicas standard del cálculo de trazas (BD 64). A partir de (4.14) obtenemos

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu\sigma}{}^\sigma^{(1)} &= \frac{1}{4} \text{Tr} [P_2 \gamma_\sigma (P_1+q) \gamma_\mu P_1 \gamma_\nu (P_1+q) \gamma^\sigma (1-2\lambda \gamma_5)] = \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} [P_2 (P_1+q) \gamma_\mu P_1 \gamma_\nu (P_1+q) (1+2\lambda \gamma_5)] = \\ &= -P_2 (P_1+q) \text{Tr} [(P_1+q) \gamma_\mu P_1 \gamma_\nu (1-2\lambda \gamma_5)] + \frac{1}{2} (P_1+q)^2 \text{Tr} [P_2 \gamma_\mu P_1 \gamma_\nu (1-2\lambda \gamma_5)] \simeq \\ &\simeq -4 P_2 (P_1+q) [(P_1+q)_\mu P_{1\nu} + (P_1+q)_\nu P_{1\mu} - g_{\mu\nu} (P_1+q) - 2\lambda i \epsilon_{\alpha\mu\rho\nu} q^\alpha P_1^\rho] \\ &+ 2 (P_1+q)^2 [P_{2\mu} P_{1\nu} + P_{2\nu} P_{1\mu} - g_{\mu\nu} (P_1 P_2) - 2\lambda i \epsilon_{\alpha\mu\rho\nu} P_2^\alpha P_1^\rho] \end{aligned} \quad (4.40)$$



$$\begin{aligned}
 B_{\mu\nu\sigma}^{(2)} &= \frac{1}{4} \text{Tr} [P_2 \gamma_\mu (P_2 - \not{q}) \gamma_\nu P_1 \gamma^\sigma (P_2 - \not{q}) \gamma_\omega (1 - 2\lambda \gamma_5)] = \\
 &= -\frac{1}{2} \text{Tr} [P_2 \gamma_\mu (P_2 - \not{q}) P_1 (P_2 - \not{q}) \gamma_\omega (1 - 2\lambda \gamma_5)] = \\
 &= -P_1 (P_2 - \not{q}) \text{Tr} [P_2 \gamma_\mu (P_2 - \not{q}) \gamma_\omega (1 - 2\lambda \gamma_5)] + \frac{1}{2} (P_2 - \not{q})^2 \text{Tr} [P_2 \gamma_\mu P_1 \gamma_\omega (1 - 2\lambda \gamma_5)] \simeq \\
 &\simeq -4 P_1 (P_2 - \not{q}) [P_{2\mu} (P_2 - \not{q})_\omega + P_{2\omega} (P_2 - \not{q})_\mu + g_{\mu\omega} (P_2 \not{q}) + 2\lambda i \epsilon_{\alpha\mu\rho\nu} P_2^\alpha q^\beta] \\
 &\quad + 2 (P_2 - \not{q})^2 [P_{2\mu} P_{1\omega} + P_{2\omega} P_{1\mu} - g_{\mu\omega} (P_1 P_2) - 2\lambda i \epsilon_{\alpha\mu\rho\nu} P_2^\alpha P_1^\beta]
 \end{aligned}$$

(4.41)

$$\begin{aligned}
 B_{\mu\nu\sigma}^{(3)} &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ P_2 \left[ \gamma_\nu (P_1 + \not{q}) \gamma_\mu P_1 \gamma^\sigma (P_2 - \not{q}) \gamma_\omega \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \gamma_\mu (P_2 - \not{q}) \gamma_\nu P_1 \gamma_\omega (P_1 + \not{q}) \gamma^\sigma \right] (1 - 2\lambda \gamma_5) \right\} = \\
 &= \frac{1}{4} \text{Tr} [P_2 \gamma_\nu (P_1 + \not{q}) \gamma_\mu P_1 \gamma^\sigma (P_2 - \not{q}) \gamma_\omega] + (\mu \leftrightarrow \nu) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} [P_2 \gamma_\nu (P_1 + \not{q}) \gamma_\mu P_1 \gamma^\sigma (P_2 - \not{q}) \gamma_\omega \gamma_5] - (\mu \leftrightarrow \nu) \right\}
 \end{aligned}$$

(4.42)

Los términos dependientes de la helicidad no dan contribución a la sección eficaz por ser antisimétricos en los índices  $\mu$  y  $\nu$ . Nos basta pues con calcular la parte simétrica de  $B_{\mu\nu}^{(3)}$

$$\begin{aligned}
 B_{\mu\nu}^{(3)} &= -\frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} [P_2 P_1 \gamma_\mu (P_1 + \not{q}) (P_2 - \not{q}) \gamma_\nu] + (\mu \leftrightarrow \nu) \right\} = \\
 &= (P_2 - \not{q})_\mu \text{Tr} [P_2 P_1 (P_1 + \not{q}) \gamma_\nu] - (P_1 + \not{q})_\mu \text{Tr} [P_2 P_1 (P_2 - \not{q}) \gamma_\nu] \\
 &\quad - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \text{Tr} [P_2 P_1 (P_1 + \not{q}) (P_2 - \not{q})] + (\mu \leftrightarrow \nu) \simeq \\
 &\simeq -4 (P_1 P_2) [P_{1\mu} (P_2 - q)_\nu + P_{2\nu} (P_1 + q)_\mu] + 2 g_{\mu\nu} q^2 (P_1 P_2) \\
 &\quad + 4 (P_1 + P_2)_\mu [(P_1 + q) P_{2\nu} - (P_2 + q) P_{1\nu}] + (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

#### 4.6. Funciones de estructura leptónicas:

La evaluación del tensor electromagnético leptónico  $M_{\mu\nu}(P_1, q)$  puede simplificarse notablemente usando las propiedades de covariancia Lorentz e invariancia gauge. Solo la parte simétrica del tensor  $M_{\mu\nu}(P_1, q)$  produce una contribución no nula a la sección eficaz. Teniendo en cuenta que la conservación de la corriente electromagnética impone  $q^\mu M_{\mu\nu} = q^\nu M_{\mu\nu} = 0$  y que obviamente la misma condición se mantiene para la parte simétrica  $M_{\mu\nu}^S$ , ésta deberá

ser de la forma

$$M_{\mu\nu}^S(p_1, q) = f_1(x_1, x_2) \left( g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{x_1} \right) + f_2(x_1, x_2) \left( P_{1\mu} + \frac{x_2}{x_1} q_\mu \right) \left( P_{1\nu} + \frac{x_2}{x_1} q_\nu \right) \quad (4.44)$$

Todos los detalles del tensor leptónico se manifiestan a través de las funciones de estructura invariantes  $f_{1,2}$ , las cuales solo dependen de las variables  $x_1$  y  $x_2$ . Para predecir la sección eficaz de nuestro proceso, es suficiente pues con calcular ciertas combinaciones de las componentes del tensor  $M_{\mu\nu}$

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left\{ M^\mu{}_\mu - \frac{x_1}{x_2^2 + m^2 x_1} P_{1\mu} P_{1\nu} M^{\mu\nu} \right\}$$

$$f_2(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{2(x_2^2 + m^2 x_1)} \left\{ M^\mu{}_\mu - \frac{3x_1}{x_2^2 + m^2 x_1} P_{1\mu} P_{1\nu} M^{\mu\nu} \right\} \quad (4.45)$$

Este procedimiento tiene la ventaja de reducir de forma drástica las complicaciones que presentaría una evaluación detallada de las distribuciones diferenciales. El precio que pagamos por esta simplificación, es que las propiedades globales del tensor leptónico no permiten la extracción de la distribución de leptones finales. Vamos pues a olvidarnos por el momento de dichas distribuciones, concentrando nuestro interés en la distribución de fotones

virtuales y en la sección eficaz integrada.

A partir de las ecuaciones (4.39) y (4.45) podemos expresar las funciones de estructura en la forma

$$\hat{f}_i(x_1, x_2) \simeq \frac{\pi}{6} \int \frac{d^3 P_2}{2 E_2} \hat{f}_i, \quad (i=1, 2) \quad (4.46)$$

donde las nuevas funciones  $\hat{f}_i$  quedan determinadas a partir del tensor  $B_{\mu\nu\sigma}$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= \left(\frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 + x_5\right) \left[ g^{\mu\nu} - \frac{x_1}{x_2^2 + m^2 x_1} p_1^\mu p_1^\nu \right] B_{\mu\nu\sigma} \\ \hat{f}_2 &= -\frac{x_1}{x_2^2 + m^2 x_1} \left(\frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 + x_5\right) \left[ g^{\mu\nu} - \frac{3x_1}{x_2^2 + m^2 x_1} p_1^\mu p_1^\nu \right] B_{\mu\nu\sigma} \end{aligned} \quad (4.47)$$

La descomposición (4.13) del tensor  $B_{\mu\nu\sigma}$  sugiere la conveniencia de realizar una factorización análoga de las funciones  $\hat{f}_i$  en tres términos

$$\hat{f}_i \equiv \frac{\hat{f}_i^{(1)}}{(x_2 - 2x_2)^2} + \frac{\hat{f}_i^{(2)}}{(x_1 + 2x_3)^2} + \frac{\hat{f}_i^{(3)}}{(x_1 - 2x_2)(x_1 + 2x_3)} \quad (4.48)$$

(i=1, 2)

Para calcular las funciones  $\hat{f}_i^{(j)}$ , hay que evaluar previamente las contracciones de los tensores  $B_{\mu\nu\sigma}^{(j)}$  con  $g^{\mu\nu}$  y  $P_1^\mu P_1^\nu$ . A partir de las ecuaciones (4.40) (4.41) y (4.43) obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned}
 B_{\mu\nu\sigma}^{(1)\mu} &\simeq 8(P_1 q)(P_2 q) - 4q^2(P_1 P_2) = 8x_2 x_3 + 4x_1 x_5 \simeq B_{\mu\nu\sigma}^{(2)\mu} \\
 B_{\mu\nu\sigma}^{(3)\mu} &\simeq 16(P_1 P_2) [q^2 - (P_1 P_2) + q(P_1 - P_2)] = -16x_5(x_1 - x_2 + x_3 + x_5) \\
 P_1^\mu P_1^\nu B_{\mu\nu\sigma}^{(1)} &\simeq P_1^\mu P_1^\nu B_{\mu\nu\sigma}^{(3')} \simeq 0 \\
 P_1^\mu P_1^\nu B_{\mu\nu\sigma}^{(2)} &\simeq -8(P_1 P_2) [P_1(P_2 - q)]^2 = -8x_5(x_2 - x_5)^2
 \end{aligned}
 \tag{4.49}$$

donde hemos despreciado los términos proporcionales a masas leptónicas.

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (4.47) llegamos finalmente al resultado

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_1^{(1)} &\simeq -\frac{1}{x_1} (x_2^2 + m^2 x_1) \hat{f}_2^{(1)} \simeq 8 \left( \frac{1}{2} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 \right) (x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_5) \\
 \hat{f}_1^{(2)} &\simeq 8 \left( \frac{1}{2} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 \right) \left[ x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_5 + \frac{x_1 x_5}{x_2^2 + m^2 x_1} (x_2 - x_5)^2 \right] \\
 \hat{f}_2^{(2)} &\simeq -\frac{8x_1}{x_2^2 + m^2 x_1} \left( \frac{1}{2} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 \right) \left[ x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_5 + \frac{3x_1 x_5}{x_2^2 + m^2 x_1} (x_2 - x_5)^2 \right] \\
 \hat{f}_1^{(3)} &\simeq -\frac{1}{x_1} (x_2^2 + m^2 x_1) \hat{f}_2^{(3)} \simeq -16x_5 \left( \frac{1}{2} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 \right) (x_1 - x_2 + x_3 + x_5)
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

4.7. Espacio fásico asociado a los cuádrimomentos  $P_2^\mu$  y  $P_1^\mu$ :

La integración en  $P_2^\mu$  la realizaremos en el sistema centro de masas de los 3 leptones finales  $L_2$ , definido por las condiciones

$$\text{Referencia } L_2: \quad \vec{q} + \vec{P}_1 = \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4 = \vec{0} \quad , \quad \hat{q} = \hat{z} \quad (4.51)$$

Las funciones de estructura  $f_1$  y  $f_2$  dependen únicamente de variables leptónicas por lo que, al efectuar su cálculo, el cuádrimomento  $P_2^\mu$  solo aparecerá a través de las variables invariantes  $x_3$  y  $x_5$ . Es conveniente resaltar que el procedimiento utilizado nos ha permitido eliminar toda dependencia en las variables  $x_7$  y  $x_8$ , reduciendo a seis el número de grados de libertad que hemos de considerar. En el sistema  $L_2$ ,  $x_3$  y  $x_5$  adoptan la forma

$$\begin{aligned} x_3 &\equiv (q P_2) = E_2 q^0 - |\vec{P}_2| |\vec{q}| \cos \theta_2 \\ x_5 &\equiv (P_1 P_2) = E_1 E_2 + |\vec{P}_1| |\vec{P}_2| \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

No hay ninguna dependencia en  $\psi_2$  por lo que la integración azimutal puede realizarse trivialmente. Calculando el Jacobiano de la transformación (4.52) y teniendo en cuenta la expresión de  $x_2$  en este sistema, obtenemos

$$\frac{d^3 P_2}{2 E_2} = \pi \frac{dx_3 dx_5}{\sqrt{x_2^2 + m^2 x_1}} \quad (4.53)$$

La extracción de los límites de integración es un poco más complicada. Como la conservación del cuadrimento ya ha sido satisfecha, no hay restricciones sobre

$\theta_2$ , por lo que la condición  $\cos \theta_2 = \pm 1$  nos dará un conjunto de curvas para acotar la región de integración

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 = \pm 1 &\rightarrow x_5(2x_2x_3 + x_1x_5) = m^2(x_2^2 + x_3^2 + m^2x_1) \\ \rightarrow x_3 &= \frac{1}{m^2} \left\{ x_2x_5 \pm [x_2^2x_5^2 - m^2(m^2(x_2^2 + m^2x_1) - x_1x_5^2)]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Las cotas restantes provienen de los valores mínimo y máximo que puede tomar  $E_2$  en este sistema de referencia. Usando la identidad:

$$x_3 + x_5 = \bar{E}_2(E_1 + \varphi^0) = E_2 [2x_2 - x_1 + m^2]^{1/2} \quad (4.55)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} (E_2)_{\min} = m &\rightarrow x_3 + x_5 = m [2x_2 - x_1 + m^2]^{1/2} \\ (E_2)_{\max} = \frac{(\varphi^0 + E_1)^2 + m^2}{2(\varphi^0 + E_1)} &\rightarrow x_3 + x_5 = \frac{1}{2} [2x_2 - x_1 + 2m^2] \end{aligned} \quad (4.56)$$

La condición de energía mínima no limita realmente el volumen de integración. A partir de (4.54) y de

la segunda de las ecuaciones (4.56) se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= x_2 - x_5 + m^2 - \frac{1}{2} x_1 \\ \underline{x}_3 &= \frac{1}{m^2} \left\{ x_2 x_5 - [x_2^2 x_5^2 - m^2 (m^2 (x_2^2 + m^2 x_1) - x_1 x_5^2)]^{1/2} \right\} \\ \bar{x}_5 &= \frac{(x_2 + m^2)(2x_2 - x_1 + 2m^2)}{2(2x_2 - x_1 + m^2)} \left\{ 1 \pm \left[ 1 - \frac{m^2(2x_2 - x_1 + m^2)}{(x_2 + m^2)^2(2x_2 - x_1 + 2m^2)^2} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot [4(x_2^2 + m^2 x_1) + (2x_2 - x_1 + 2m^2)^2]^{1/2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

La integración sobre el cuadrimomento nuclear la efectuaremos en el sistema laboratorio

$$\text{Referencia } L_3: \quad \vec{P} = \vec{0}, \quad \hat{P}_1 = \hat{z} \quad (4.58)$$

Usando la relación  $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{q}$ , podemos escribir

$$\frac{d^3 p'}{2E'} = \frac{d^3 q}{2E'} = \frac{|\vec{q}|^2}{2E'} d|\vec{q}| d\cos\theta_q d\varphi_q \quad (4.59)$$

En este sistema

$$\begin{aligned} q^0 &= M - E' = M - \sqrt{M^2 + |\vec{q}|^2} \\ x_2 &\equiv (q \cdot P_1) = E_1 q^0 - |\vec{P}_1| |\vec{q}| \cos\theta_q \\ x_1 &\equiv -q^2 = |\vec{q}|^2 - q_0^2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

por lo que la ley de transformación entre los invariantes  $x_1$  y  $x_2$  y las variables  $|\vec{q}|$  y  $\cos\theta_q$  es de la forma



$$\begin{aligned}
 x_1 &= -2M^2 + 2M \sqrt{M^2 + |\vec{q}|^2} \\
 x_2 &= E_1 [M - \sqrt{M^2 + |\vec{q}|^2}] - |\vec{p}_1| |\vec{q}| \cos \theta_q
 \end{aligned}
 \tag{4.61}$$

Tampoco aquí hay dependencia en el ángulo azimutal. Calculando el Jacobiano del cambio de variables (4.61) obtenemos

$$\frac{d^3 p'}{2 E'} = \frac{\pi}{2M |\vec{p}_1|} dx_1 dx_2
 \tag{4.62}$$

El límite superior de  $x_2$  para  $x_1$  fijo se alcanza en  $\theta_q = \pi$  ( $P'$  en la dirección hacia adelante). Usando las igualdades

$$q^0 = -x_1/2M \quad ; \quad |\vec{q}| = \sqrt{x_1 + x_1^2/4M^2}
 \tag{4.63}$$

se obtiene inmediatamente

$$\bar{X}_2 = -E_1 \frac{x_1}{2M} + |\vec{p}_1| \sqrt{x_1 + x_1^2/4M^2}
 \tag{4.64}$$

El ángulo polar  $\theta_q$  no puede tomar todos los valores, pues el núcleo no puede retroceder hacia atrás. Podemos conseguir un límite inferior a partir de la desigualdad

$$(P_1 + q)^2 = 2x_2 - x_1 + m^2 = (P_2 + P_3 + P_4)^2 \geq m^2 \quad (4.65)$$

Es fácil ver que siempre es posible alcanzar este límite. Por lo tanto

$$\underline{x}_2 = \frac{1}{2} x_1 \quad (4.66)$$

Los límites cinemáticos del invariante  $x_1$  se obtienen fácilmente en el sistema de referencia centro de masas

$$\text{Referencia } L_4 : \vec{p} + \vec{p}_1 = \vec{p}' + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{0} \quad (4.67)$$

Agrupando los cuadrimomentos de los tres leptones finales en uno solo,  $r^\mu \equiv (P_2 + P_3 + P_4)^\mu$ , de masa variable  $s' \equiv (P_2 + P_3 + P_4)^2 \geq m^2$ , podemos considerar el proceso como una colisión de dos partículas yendo a dos. La condición  $\cos \theta_q = \pm 1$  impone límites a la transferencia de momento  $q^2 \equiv (P - P')^2$  en función de  $s'$  y del invariante  $s \equiv (P_1 + P)^2$

$$(q^2)_{\min}^{\text{Max}} = 2M^2 - \frac{1}{2s} \left\{ (s+M^2-m^2) (s+M^2-s') \right. \\ \left. + d^{1/2}(s, M^2, m^2) d^{1/2}(s, M^2, s') \right\} \quad (4.68)$$

Se comprueba inmediatamente que  $(q^2)_{\text{Max}}$  y  $(q^2)_{\text{min}}$  alcanzan sus valores extremales en  $s' = m^2$ . Sustituyendo este valor de  $s'$  en (4.68) y recordando que  $x_1 = -q^2$ , obtenemos finalmente

$$\bar{x}_1 = \frac{4 |\vec{P}_1|^2}{1 + \frac{2E_1}{M} + \frac{m^2}{M^2}} \quad ; \quad \underline{x}_1 = 0 \quad (4.69)$$

#### 4.8. Límite de alta energía

Independientemente de las restricciones cinemáticas, la variable  $x_1$  está fuertemente limitada a pequeños valores debido a la presencia del factor de forma nuclear en la distribución de masas de los fotones virtuales. Todas las demás variables invariantes ( $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_5$ ) alcanzan por el contrario límites superiores que crecen linealmente con la energía incidente  $E_1$  en el sistema laboratorio. Por lo tanto, salvo posibles singularidades dinámicas, podemos realizar la aproximación  $x_1 \ll x_i$  ( $i = 2, 3, 5$ ) en los integrandos de nuestra distribución, en el límite de alta energía. También efectuaremos la aproximación de despreciar  $m^2$  frente

a las variables  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_5$ , pero no frente a  $x_1$  ya que debido al factor de forma  $m^2$  y  $x_1$  pueden, en principio, ser de magnitud comparable (o incluso  $x_1 < m^2$ ) en las zonas dominantes. Los únicos factores potencialmente peligrosos, que deberemos analizar con detalle antes de realizar ninguna aproximación, son los denominadores, que muestran la dinámica asociada con los propagadores leptónicos.

En el límite de alta energía, podemos pues aproximar las cotas (4.57) y (4.64), hasta primer orden en  $x_1$  y  $m^2$  quedándonos con las expresiones, mucho más simples,

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= x_2 - x_5 + m^2 - \frac{1}{2} x_1 & ; & \quad \underline{x}_3 \simeq \frac{m^2 x_2^2 - x_1 x_5^2}{2 x_2 x_5} \\ \bar{x}_5 &\simeq x_2 + \frac{1}{2} m^2 & ; & \quad \underline{x}_5 \simeq m^2 \\ \bar{x}_2 &\simeq E_1 \sqrt{x_1} & ; & \quad \underline{x}_2 = \frac{1}{2} x_1 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Hemos mantenido de momento los términos de primer orden en  $x_1$  y  $m^2$  para evitar las singularidades, que de otro modo aparecerían al realizar las integraciones en las variables  $x_3$  y  $x_5$ , debidas a los propagadores leptónicos. Obviamente también hemos usado el hecho de que  $x_1$  es mucho menor que la masa del núcleo al cuadrado, lo cual equivale (ver (4.63)) a tomar  $q^0 = 0$  (aproximación coulombiana)

A la vista de las expresiones (4.70) podemos justificar ahora fácilmente la aproximación  $k^2 \ll M_Z^2$  efectuada

sobre el propagador del  $Z^0$  en el apartado (4.2). En términos de las variables invariantes  $x_i$ ,  $k^2 = (x_2 - x_3 - x_5 + m^2 - \frac{1}{2}x_1)$  que obviamente es menor o igual que el límite superior de  $x_2$ , por lo que  $k^2 \lesssim E_1 \sqrt{x_1}$ . Tomando los valores  $E_1 \sim 500$  GeV y  $x_1 \sim .1$  GeV<sup>2</sup> obtenemos que  $k^2 \lesssim 158$  GeV<sup>2</sup>, a comparar con  $M_Z^2 \sim 6400$  GeV<sup>2</sup>. Por lo tanto, a estas energías el error cometido al tomar el límite de contacto es siempre menor del 2.5%. (De hecho es bastante menor ya que la zona dominante en el cálculo de la sección eficaz corresponde a valores de  $x_1$  mucho más pequeños que el hemos tomado para realizar la estimación)

A partir de las ecuaciones (4.36), (4.39), (4.44), (4.45), (4.53) y (4.62), y usando las aproximaciones mencionadas, podemos reescribir la sección eficaz en la forma

$$\sigma_{CN} \simeq \frac{(V+2d)^2 (Z\alpha G)^2}{96 E_1^2 \pi^3} \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{dx_1}{x_1^2} |F(x_1)|^2 \cdot \int_{x_2}^{\bar{x}_2} \frac{dx_2}{\sqrt{x_2^2 + m^2 x_1}} [G_1(x_1, x_2) + E_1^2 G_2(x_1, x_2)] \quad (4.71)$$

donde las funciones  $G_i(x_1, x_2)$  corresponden, salvo normalizaciones, a las dos funciones de estructura  $f_{1,2}$

$$G_i(x_1, x_2) \equiv \frac{6}{\pi^2} \sqrt{x_2^2 + m^2 x_1} f_i(x_1, x_2) \simeq \int_{x_5}^{\bar{x}_5} dx_5 \int_{x_3}^{\bar{x}_3} dx_3 \hat{f}_i \quad (4.72)$$

(i = 1, 2)

Análogamente a la descomposición (4.48) de las  $\hat{f}_i$ , factorizaremos las funciones  $G_i(x_1, x_2)$  en tres términos

$$G_i \equiv G_i^{(1)} + G_i^{(2)} + G_i^{(3)}, \quad (i = 1, 2) \quad (4.73)$$

donde obviamente cada  $G_i^{(j)}$  resulta de integrar en (4.72) la correspondiente  $\hat{f}_i^{(j)}$  dividida por el denominador asociado en (4.48) al índice  $j$ .

#### 4.9. Integración en las variables $x_3$ y $x_5$ :

##### 4.9.1. Cálculo de $G_i^{(1)}(x_1, x_2)$

Como el propagador asociado a las funciones  $\hat{f}_i^{(1)}$  no depende de los invariantes  $x_3$  y  $x_5$ , la integración de estas variables no presenta aquí problema alguno. Suprimiendo los términos lineales en  $x_1$  y  $m^2$  tanto en el integrando como en los límites de integración obtenemos

$$\int_{x_5}^{\bar{x}_5} dx_5 \int_{x_3}^{\bar{x}_3} dx_3 \int_1^{(1)} \simeq 8 x_2 \int_{x_5}^{\bar{x}_5} dx_5 \int_{x_3}^{\bar{x}_3} dx_3 x_3 (-x_2 + x_3 + x_5) \simeq$$

$$\simeq -\frac{4}{3} x_2 \int_{x_5}^{\bar{x}_5} dx_5 (x_2 - x_5)^3 \simeq -\frac{1}{3} x_2^5 \quad (4.74)$$

por lo que teniendo en cuenta el propagador leptónico

$$G_1^{(1)} \simeq -\frac{1}{12} x_2^3 \quad ; \quad G_2^{(2)} \simeq \frac{1}{12} x_1 x_2 \quad (4.75)$$

#### 4.9.2. Cálculo de $G_i^{(2)}(x_1, x_2)$

En este caso, no podemos suprimir los términos en  $x_1$  ya que aparecen integrales de la forma

$$I_n \equiv \int_{x_3}^{\bar{x}_3} \frac{x_3^n}{(x_1 + 2x_3)^2} dx_3 \quad , \quad (n=0, 1, 2) \quad (4.76)$$

que para el caso  $n=0$  dan contribuciones en  $1/x_1$ . Sí que podemos eliminar, no obstante, los términos cuadráticos en  $x_1$  y los que son proporcionales al producto  $x_1 x_3$ , aproximando las funciones  $\hat{f}_i^{(2)}$  por las expresiones

$$\begin{aligned} \hat{f}_1^{(2)} \simeq & 4 x_1 x_5 (x_5 - x_2) [1 + 2 (x_2 - x_5)^2 / x_2^2] \\ & + 8 x_2 x_3 (x_5 - x_2 + x_3) \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\hat{f}_2^{(2)} \simeq \left\{ 4 x_1 x_5 (x_5 - x_2) [1 + 6 (x_2 - x_5)^2 / x_2^2] + 8 x_2 x_3 (x_5 - x_2 + x_3) \right\} \cdot (-x_1 / x_2^2)$$

Observese que en el conteaje de potencias de  $x_1$  que hemos realizado para desprestigiar términos, no hemos tenido en cuenta el factor  $x_1$  que aparece multiplicando globalmente en  $\hat{f}_2^{(2)}$ . La razón de este proceder es evidente si observamos las ecuaciones (4.50) y (4.71), ya que para que contribuyan al mismo orden en la sección eficaz, la función  $G_2(x_1, x_2)$  debe aparecer con un factor  $x_1/x_2^2$  adicional respecto a  $G_1(x_1, x_2)$ .

Al orden dominante, las integrales  $I_n$  vienen dadas por las expresiones

$$\begin{aligned}
 I_0 &\approx \frac{1}{2} \frac{x_2 x_5}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} \\
 I_1 &\approx \frac{1}{4} \left\{ \ln \left[ \frac{2 x_2 x_5 (x_2 - x_5 + m^2)}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} \right] - \frac{x_1 x_2 x_5}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} \right\} \\
 I_2 &\approx \frac{1}{4} (x_2 - x_5)
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

A partir de las ecuaciones (4.77) y (4.78) obtenemos inmediatamente

$$\begin{aligned}
 \int_{\underline{x}_3}^{\bar{x}_3} \frac{dx_3}{(x_1 + 2x_3)^2} \hat{f}_1^{(2)} &\approx \frac{2 x_1 x_2 x_5 (x_2 - x_5)^2}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} [1 + 2(x_5 - x_2) x_5 / x_2^2] \\
 &\quad + 2 x_2 (x_2 - x_5) \left\{ 1 - \ln \left[ \frac{2 x_2 x_5 (x_2 - x_5 + m^2)}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} \right] \right\} \\
 \int_{\underline{x}_3}^{\bar{x}_3} \frac{dx_3}{(x_1 + 2x_3)^2} \hat{f}_2^{(2)} &\approx - \frac{2 x_1}{x_2} \left\{ \frac{x_1 x_5 (x_2 - x_5)^2}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} [1 + 6(x_5 - x_2) x_5 / x_2^2] \right. \\
 &\quad \left. + (x_2 - x_5) \left\{ 1 - \ln \left[ \frac{2 x_2 x_5 (x_2 - x_5 + m^2)}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} \right] \right\} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$



Utilizando ahora las integrales

$$\int_{x_5}^{\bar{x}_5} dx_5 \frac{x_1 x_5 (x_2 - x_5)^2}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} \approx \frac{1}{2} x_2^2 \left\{ 1 - \frac{2m^2}{x_1} \frac{1}{f} \ln \left( \frac{f+1}{f-1} \right) \right\}$$

$$\int_{x_5}^{\bar{x}_5} dx_5 \frac{x_1 x_5^2 (x_2 - x_5)^3}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} \approx \frac{1}{12} x_2^4 \left\{ 1 - \frac{6m^2}{x_1} + \frac{12m^4}{x_1^2} \frac{1}{f} \ln \left( \frac{f+1}{f-1} \right) \right\}$$

$$\int_{x_5}^{\bar{x}_5} dx_5 (x_5 - x_2) \ln \left[ \frac{2 x_2 x_5 (x_2 - x_5 + m^2)}{m^2 x_2^2 + x_1 x_5 (x_2 - x_5)} \right] \approx \tag{4.80}$$

$$\approx \frac{1}{2} x_2^2 \left\{ \ln (m^2 / 2 x_2) + f \ln \left( \frac{f+1}{f-1} \right) \right\}$$

donde

$$f \equiv (1 + 4m^2/x_1)^{1/2} \tag{4.81}$$

obtenemos finalmente

$$G_1^{(2)}(x_1, x_2) \approx x_2^3 \left\{ \frac{5}{3} + \frac{2m^2}{x_1} - \ln \left( \frac{2x_2}{m^2} \right) + \right.$$

$$\left. + (1 + 2m^2/x_1 - 4m^4/x_1^2) \frac{1}{f} \ln \left( \frac{f+1}{f-1} \right) \right\}$$

$$G_2^{(2)}(x_1, x_2) \approx -x_1 x_2 \left\{ 1 + \frac{6m^2}{x_1} - \ln \left( \frac{2x_2}{m^2} \right) + \right.$$

$$\left. + (1 + 2m^2/x_1 - 12m^4/x_1^2) \frac{1}{f} \ln \left( \frac{f+1}{f-1} \right) \right\} \tag{4.82}$$

### 4.9.3. Cálculo de $G_i^{(3)}(x_1, x_2)$ :

La integración en la variable  $x_3$  no presenta en este caso ningún problema por lo que podemos eliminar los factores

$x_1$  en la expresión de  $\hat{f}_1^{(3)}$ . Las integrales en  $x_3$  que aparecen en este caso son

$$\int_{x_3}^{\bar{x}_3} \frac{dx_3}{x_1 + 2x_3} \approx \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{2x_2x_5(x_2 - x_5 + m^2)}{m^2x_2^2 + x_1x_5(x_2 - x_5)} \right]$$

$$\int_{x_3}^{\bar{x}_3} \frac{dx_3}{x_1 + 2x_3} x_3 \approx \frac{1}{2} (x_2 - x_5)$$

$$\int_{x_3}^{\bar{x}_3} \frac{dx_3}{x_1 + 2x_3} x_3^2 \approx \frac{1}{4} (x_2 - x_5)^2$$

(4.83)

A partir de estas expresiones y utilizando la integral

$$\int_{x_5}^{\bar{x}_5} dx_5 x_5 (x_2 - x_5)^2 \ln \left[ \frac{2x_2x_5(x_2 - x_5 + m^2)}{m^2x_2^2 + x_1x_5(x_2 - x_5)} \right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{12} x_2^4 \left\{ \ln(2x_2/m^2) - 4m^2/x_1 - (1 + 2m^2/x_1 - 8m^3/x_1^2) \frac{1}{f} \ln\left(\frac{f+1}{f-1}\right) \right\}$$

(4.84)

llegamos finalmente al resultado

$$G_1^{(3)}(x_1, x_2) \approx -\frac{x_2^2}{x_1} \quad G_2^{(3)}(x_1, x_2) \approx$$

$$\approx x_2^3 \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2x_2}{m^2}\right) - \frac{4m^2}{3x_1} - \frac{1}{3} (1 + 2m^2/x_1 - 8m^3/x_1^2) \frac{1}{f} \ln\left(\frac{f+1}{f-1}\right) \right\} \quad (4.85)$$

4.10. Distribución de fotones virtuales:

La integración de las funciones  $G_i(x_1, x_2)$  en la variable invariante  $x_2$  es inmediata. Sustituyendo el resultado de esta integración en la ecuación (4.71) obtenemos

$$\langle \sigma_{CN} \rangle \approx \frac{(V+2\lambda)^2 (Z\alpha G)^2}{216 \pi^3} E_1 \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} |F(x_1)|^2 \left\{ \mathcal{Z}(x_1) + \ln\left(\frac{2E_1\sqrt{x_1}}{m^2}\right) \right\} \quad (4.86)$$

donde

$$\mathcal{Z}(x_1) = -\frac{35}{24} - 10 \frac{m^2}{x_1} - (1 + 2m^2/x_1 - 20m^4/x_1^2) \frac{1}{f} \ln\left(\frac{f+1}{f-1}\right) \quad (4.87)$$

y  $f = (1 + 4m^2/x_1)^{1/2}$

En particular para  $\lambda = +1/2$ , que es el canal interesante, obtenemos haciendo uso del valor de la constante de acoplamiento vectorial dado en la ecuación (4.8)

$$\langle \sigma(\lambda=+1/2) \rangle \approx \frac{2(Z\alpha G)^2}{27 \pi^3} \sin^4 \theta_w E_1 \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} |F(x_1)|^2 \cdot \left\{ \mathcal{Z}(x_1) + \ln\left(\frac{2E_1\sqrt{x_1}}{m^2}\right) \right\} \quad (4.88)$$

Es importante señalar que no hemos hecho ninguna suposición acerca de la importancia relativa de los parámetros  $m^2$  y  $x_1$ . Podemos estudiar pues el comportamiento de la distribución de masas para los fotones virtuales en los dos casos extremos  $m^2 \ll x_1$  y  $m^2 \gg x_1$ .

No hay ninguna singularidad asociada con el límite de leptones de masa nula. Para  $m^2 \ll x_1$  la sección eficaz puede ser aproximada por la expresión

$$\sigma(\lambda = +1/2) \underset{(m^2 \ll x_1)}{\approx} \frac{2 Z^2 \alpha^2 G^2}{27 \pi^3} \sin^4 \theta_w E_1 \cdot \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} |F(x_1)|^2 \left\{ -\frac{35}{24} + \ln(2E_1/\sqrt{x_1}) \right\} \quad (4.89)$$

Como veremos más adelante, este límite resulta ser una buena aproximación en el caso de electrones incidentes.

La situación es distinta cuando el leptón inicial es un leptón pesado comparado con los valores de  $x_1$  que dominan la distribución de carga nuclear. El límite  $x_1 \ll m^2$  correspondería a haber efectuado en nuestro cálculo la aproximación de los fotones equivalentes. Fácilmente se obtiene en este caso

$$\sigma(\lambda = +1/2) \underset{(x_1 \ll m^2)}{\approx} \frac{2 Z^2 \alpha^2 G^2}{27 \pi^3} \sin^4 \theta_w E_1 \cdot \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} |F(x_1)|^2 \left\{ -\frac{33}{8} + \ln(2E_1 \sqrt{x_1}/m^2) \right\} \quad (4.90)$$

Este resultado es completamente distinto del anterior; incluso la escala del logaritmo ha cambiado. La aproximación  $x_1 \ll m^2$  tiene una divergencia logarítmica cuando la masa leptónica tiende a cero, que como ya hemos visto no existe realmente. Físicamente, debemos esperar que esta aproximación no sea buena para electrones.

#### 4.11. Sección eficaz total:

La integración en  $x_1$  la efectuaremos numéricamente introduciendo factores de forma realistas en la distribución de fotones virtuales. Para ello, reescribimos la ecuación (4.88) en la forma más conveniente

$$\sigma(\lambda = +1/2) \cong \sigma_0 Z^2 E_1 [a + b \ln(Z E_1 / m)] \quad (4.91)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_0 &\equiv \frac{2 \alpha^2 G^2}{27 \pi^3} \sin^2 \theta_w \\ a &\equiv \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} |F(x_1)|^2 \left\{ Z(x_1) + \ln(\sqrt{x_1}/m) \right\} \\ b &\equiv \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} |F(x_1)|^2 \end{aligned} \quad (4.92)$$

Utilizando para el ángulo de Weinberg el valor actualmente aceptado,  $\sin^2 \theta_w = .23$ , la constante global  $\langle \sigma \rangle$  toma el valor

$$\langle \sigma \rangle = 9.116 \cdot 10^{-19} \text{ GeV}^{-4} \quad (4.93)$$

Para realizar el cálculo de estas integrales hemos considerado dos núcleos típicos:  ${}_{26}^{56}\text{Fe}$  y  ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ . En el caso del hierro, hemos utilizado como factor de forma nuclear la aproximación fenomenológica dada por V. Ganapathy y J. Smith (GS 80) al factor de forma experimental (FF 73)

$$|F(x_1)| = \exp \left\{ (0.58 + 0.82 A^{1/3}) 4.2805 x_1 \right\} / (1 + x_1 10^{45.42 x_1}) \quad (4.94a)$$

para  $0 < x_1 < 0.044 \text{ GeV}^2$

$$|F(x_1)| = -0.283516 + 11.17128 x_1 - 122.791 x_1^2 + 413.824 x_1^3 \quad (4.94b)$$

para  $0.044 < x_1 < 0.132 \text{ GeV}^2$ , y

$$|F(x_1)| = -0.158323 + 2.39278 x_1 - 11.26749 x_1^2 + 16.9721 x_1^3 \quad (4.94c)$$

para  $0.132 < x_1 < 0.25 \text{ GeV}^2$

En el caso del plomo hemos partido de una densidad de Fermi de tres parámetros para la distribución de carga nuclear

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1 + w r^2 / c^2}{1 + \exp\{(r^2 - c^2) / a^2\}} \quad (4.95)$$

tomando para estos parámetros los valores dados por J. Heisenberg et al. (HE 69) (BJ 77):

$$\begin{aligned} c &= 6.3032 \text{ fm} \\ a &= 2.8882 \text{ fm} \\ w &= 0.3379 \end{aligned} \quad (4.96)$$

Normalizando a uno la integral de la densidad de carga, el parámetro de normalización  $\rho_0$  toma el valor

$$\rho_0 = 7.2541 \cdot 10^{-4} \text{ fm}^{-3} \quad (4.97)$$

El factor de forma se ha extraído en la forma standard haciendo numéricamente la transformada de Fourier de  $\rho(r)$

$$F(x_1) = \frac{4\pi}{\sqrt{x_1}} \int_0^\infty dr \, r \, \text{sen}(\sqrt{x_1} r) \rho(r) \quad (4.98)$$

Los dos factores de forma nucleares, así como la densidad de carga nuclear del  $^{208}_{82}\text{Pb}$ , aparecen representados en las figuras 4.2, 4.3 y 4.4

Hemos realizado el cálculo tanto para electrones como para muones. También hemos considerado el límite de masa nula ; en este caso la ecuación (4.91) debe ser sustituida por la expresión

$$\langle \sigma(d=+1/2) \rangle_{m=0} \approx \langle \sigma_0 \rangle Z^2 E_1 [a' + b \ln(2E_1)] \quad (4.99)$$

donde

$$a' = \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} |F(x_1)|^2 \left\{ -\frac{35}{24} - \ln(\sqrt{x_1}) \right\} \quad (4.100)$$

Fijémonos que, al no quedar otra escala en este límite, la que aparece en el segundo término de (4.99) está asociada al factor de forma.

El límite opuesto,  $x_1 \ll m^2$ , se determina directamente a partir de las ecuaciones (4.91) y (4.92) sustituyendo  $Z(x_1)$  por el valor  $-33/8$ . Los valores obtenidos en todos estos casos aparecen tabulados en la tabla 4.1. Los valores dados para  $a'$  presuponen que la energía que aparece en el logaritmo de la ecuación (4.99) viene dada en GeV.



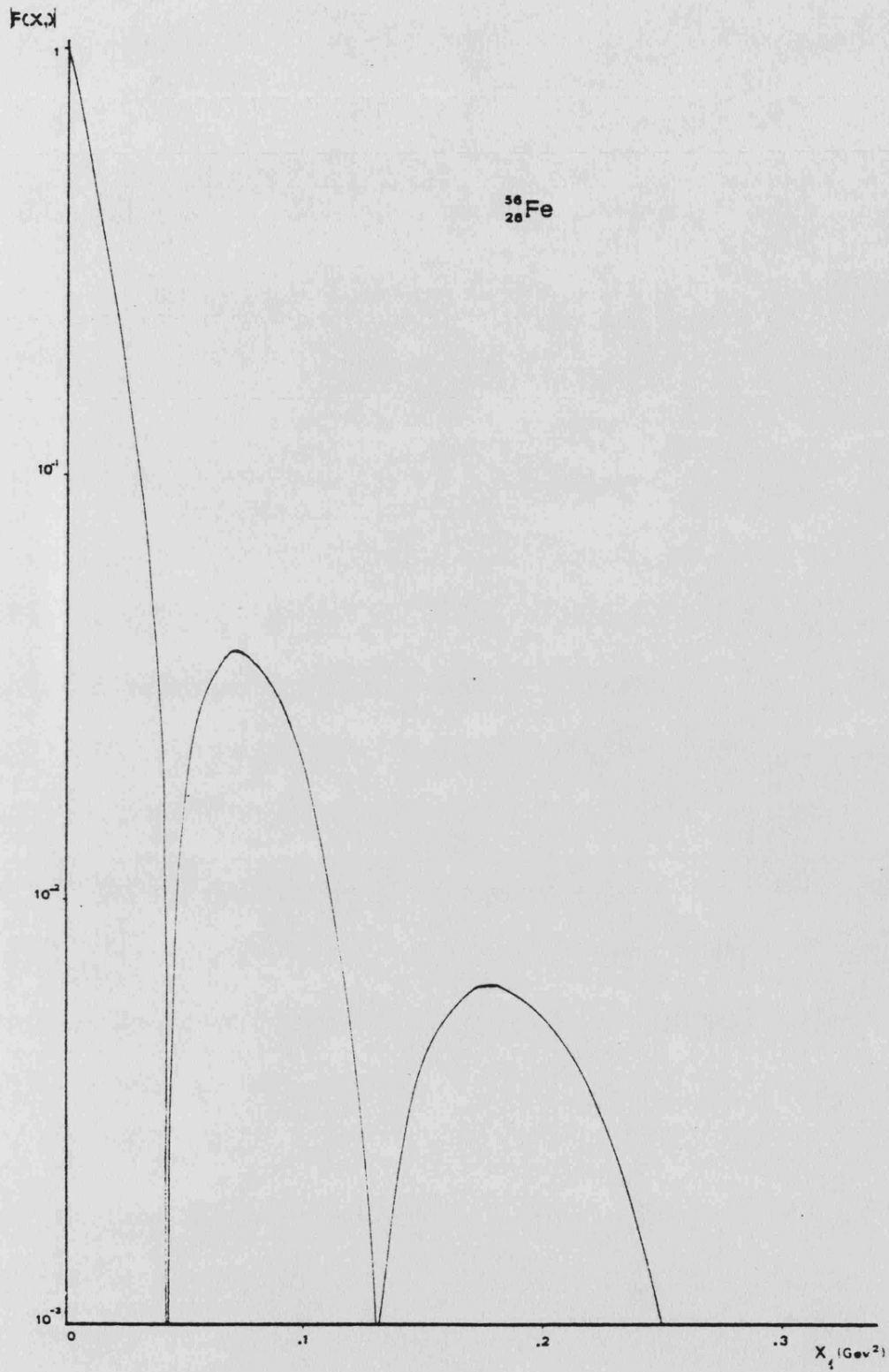


Fig. 4.2.- Factor de forma del  $^{56}_{26}\text{Fe}$

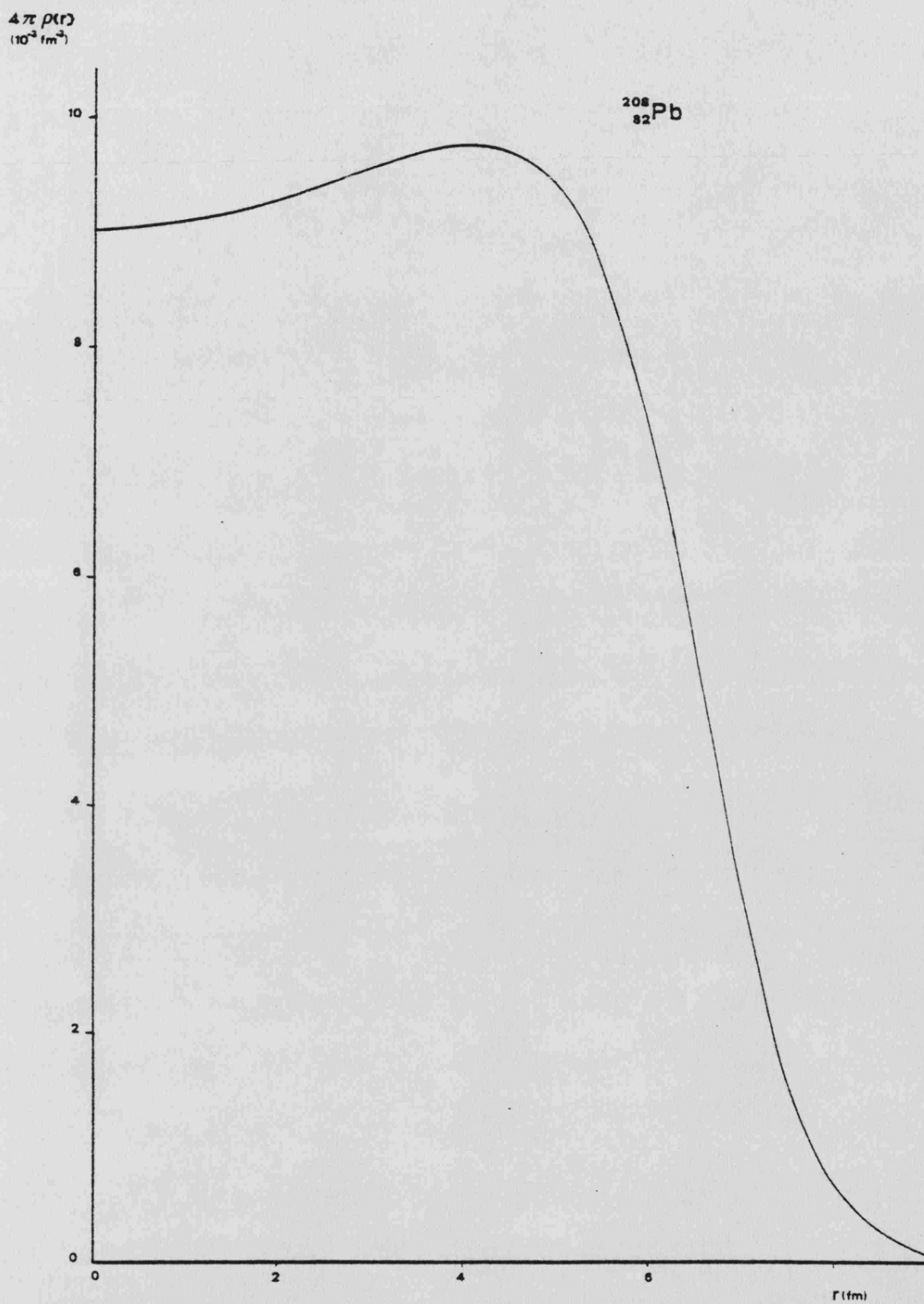


Fig. 4.3.- Densidad de carga nuclear del  $^{208}_{82}\text{Pb}$

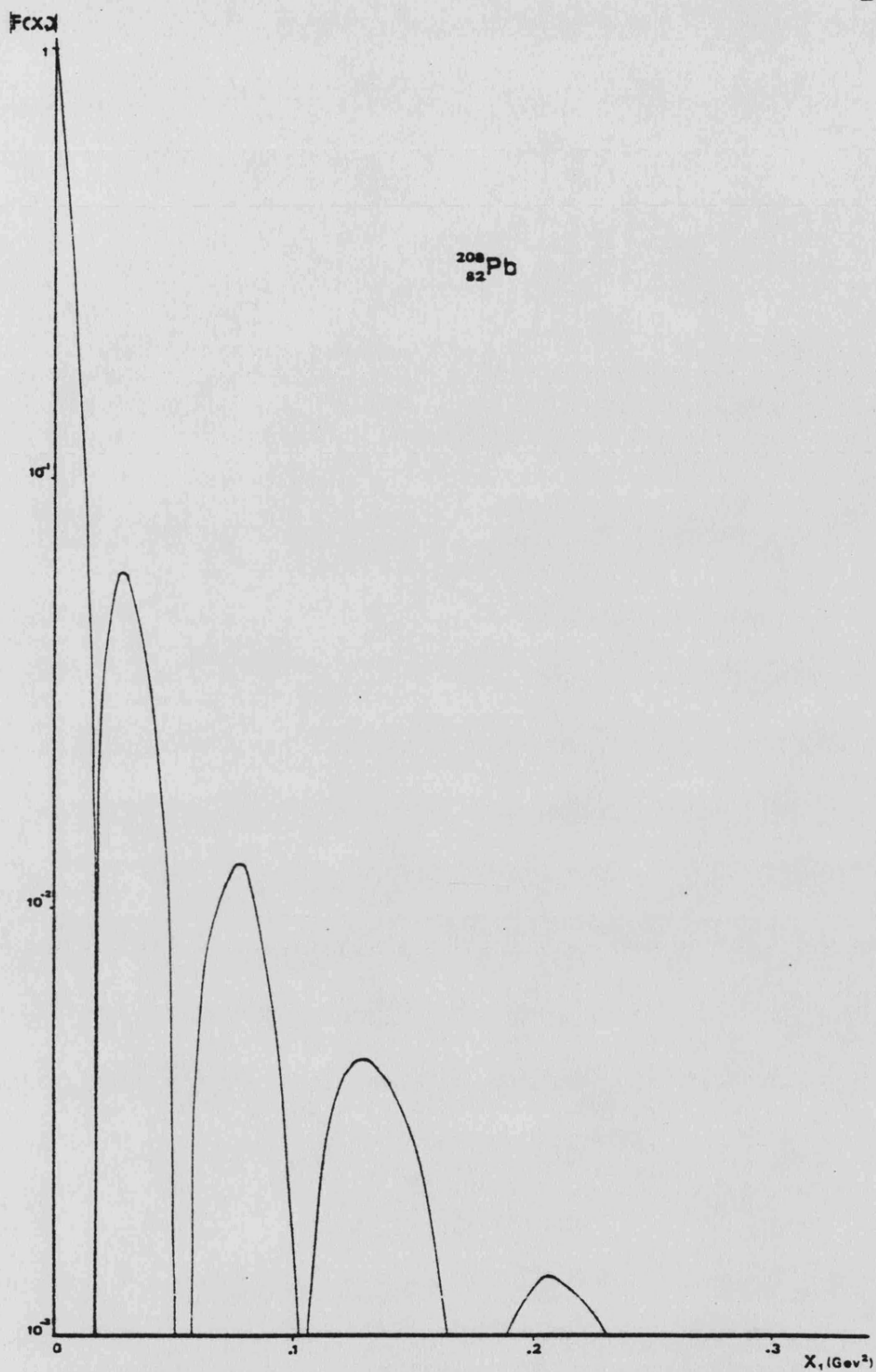


Fig. 4.4.- Factor de forma del  $^{208}_{82}\text{Pb}$

	b	$a(m_\mu)$	$a(m_\mu)(x_1 \ll m^2)$	$a(m_e)$	$a(m_e)(x_1 \ll m^2)$	$a'$
${}^{56}_{26}\text{Fe}$	.158	-.834	-.834	-.899	$.682 \cdot 10^{-4}$	.308
${}^{208}_{82}\text{Pb}$	.103	-.587	-.587	-.550	$-.372 \cdot 10^{-3}$	.243

Tabla 4.1

Valores de los coeficientes a, b y a' para los núcleos  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  y  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ . Se consideran los valores de a en los casos de electrón y muón incidentes, así como en el caso de haber realizado la aproximación  $x_1 \ll m^2$ . Todos los coeficientes están dados en GeV.

A la vista de los resultados que aparecen en la tabla 4.1, resulta evidente que la aproximación  $x_1 \ll m^2$  resulta ser muy buena en el caso de muones.

En las figuras 4.5 y 4.6 aparece representada la sección eficaz total en función de la energía para los dos núcleos considerados. La línea continua corresponde al caso de muones incidentes. La curva con trazos largos es el resultado obtenido para electrones; esta curva coincide muy aproximadamente con la obtenida en el caso de masa cero. Por último la línea dibujada con trazos cortos corresponde a usar la aproximación  $x_1 \ll m^2$  en el caso de electrones. Aparte de la divergencia logarítmica para  $m$  teniendo a cero que antes hemos mencionado, vemos que esta aproximación en el caso de electrones es errónea hasta en un 70%

Suponiendo tres generaciones, la sección eficaz total vale, en el caso del hierro,  $1.1 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^2$  para energías incidentes de muones de 300 GeV. Para electrones resulta ser un factor 2.5 mayor. El comportamiento es similar para el plomo, en cuyo caso la sección eficaz toma el valor  $6.6 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^2$  para muones de 300 GeV y tres generaciones.

Un comportamiento completamente coherente de la sección eficaz con la carga nuclear, hubiera producido un factor 10 de diferencia, bajo las mismas condiciones, entre los dos núcleos, debido a la dependencia en  $Z^2$ . Sin embargo el mayor radio del plomo hace que el factor de forma disminuya

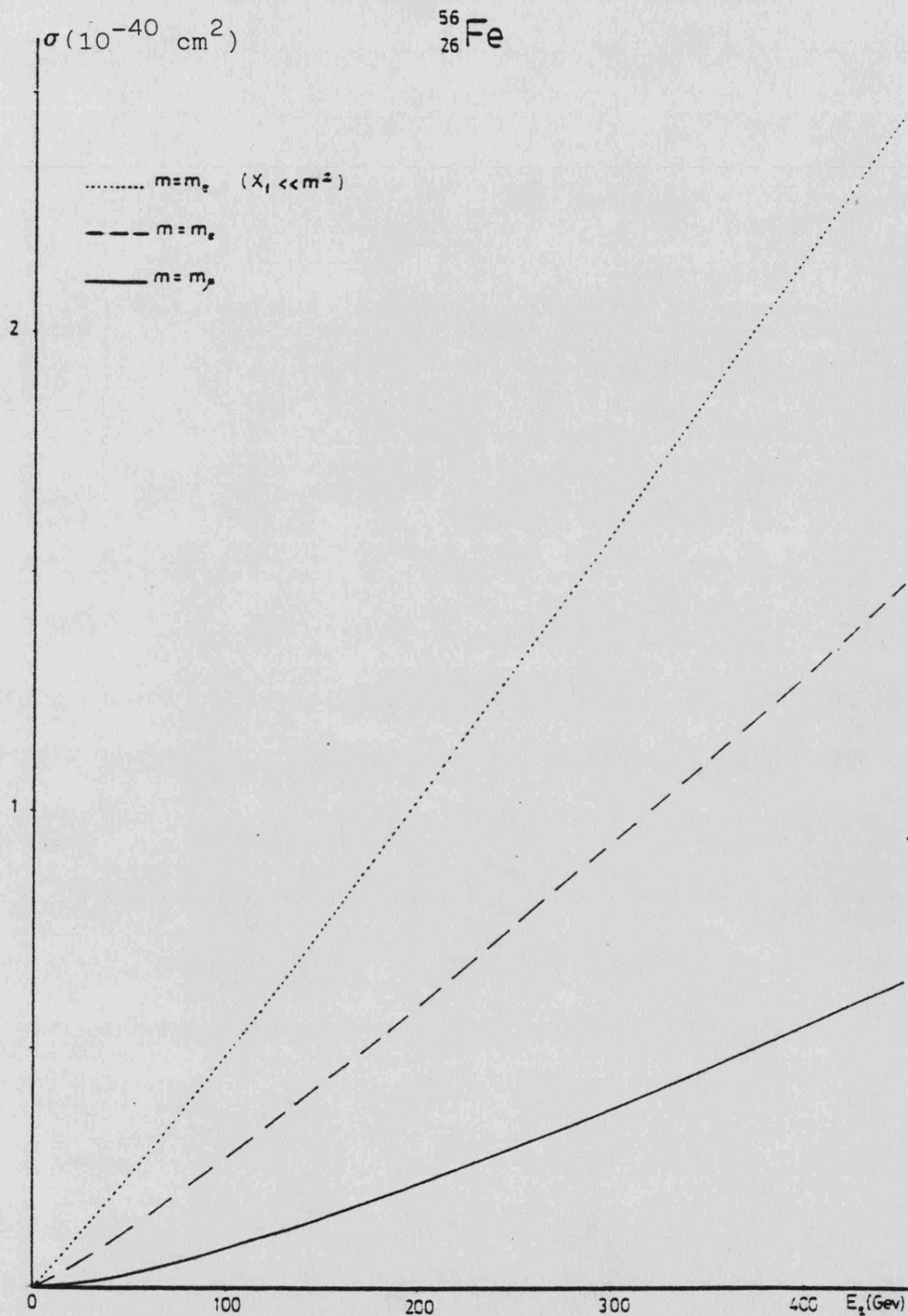


Fig. 4.5.- Sección eficaz total en función de la energía incidente, para  $^{56}_{26}\text{Fe}$ . La línea continua (—) da los valores obtenidos para muones, la línea discontinua (- - -) los valores obtenidos para electrones, y la línea punteada (.....) corresponde al uso de la aproximación  $x_1 \ll m^2$  para electrones.

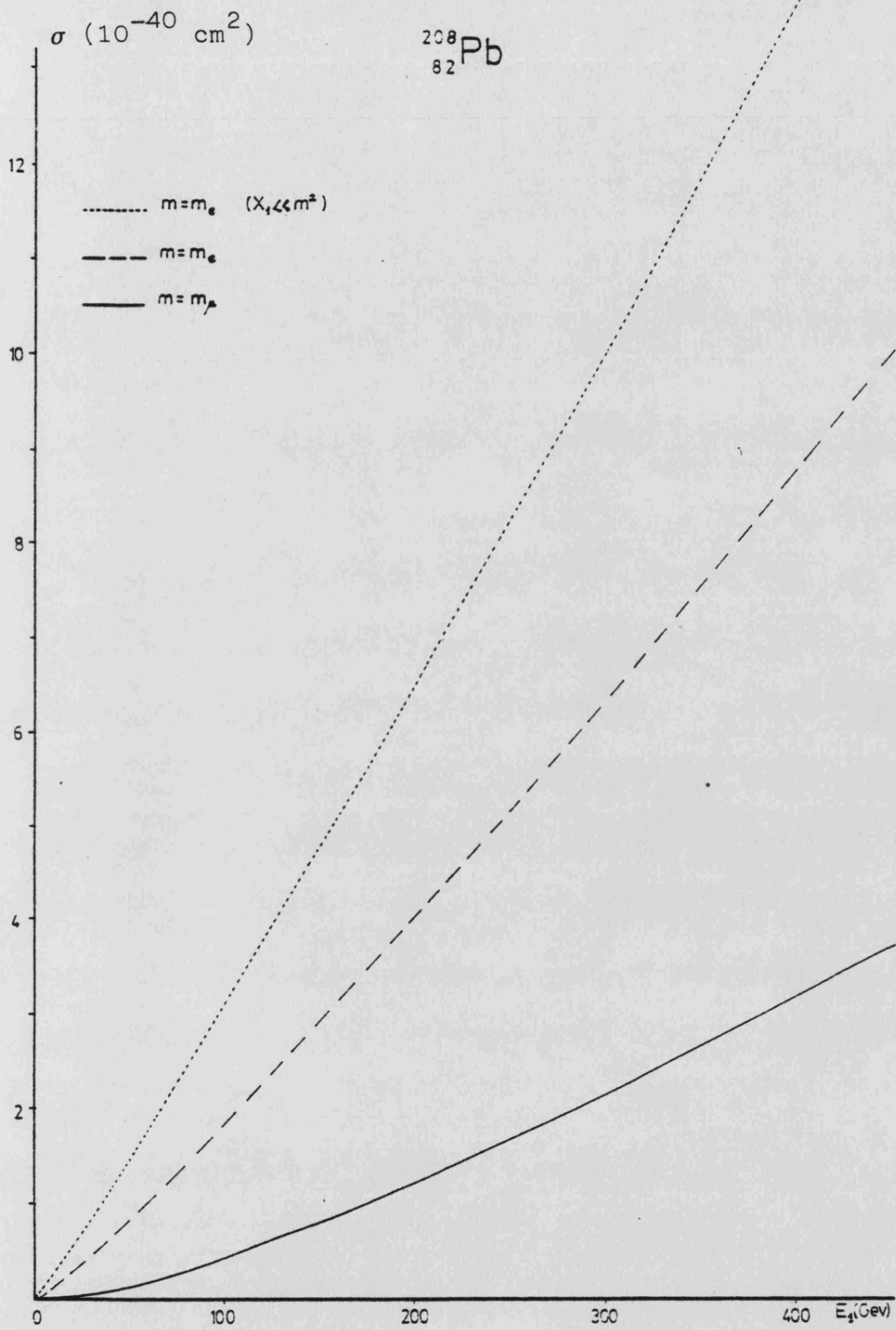


Fig. 4.6.- Lo mismo que la figura 4.5, pero para  $^{208}_{82}\text{Pb}$ .

más bruscamente al aumentar  $x_1$ , reduciendo esta diferencia a solamente un factor 6.

Los valores obtenidos para la sección eficaz total, en el caso de tres generaciones, parecen ser demasiado pequeños para poder observar el proceso, a las energías y luminosidades actualmente accesibles para haces de muones.

(GA 82). Sin embargo, la situación cambia si el número de generaciones fuera mayor. En consecuencia, es posible en principio obtener experimentalmente una cota superior sobre el número de dobletes leptónicos.



CAPITULO V    APROXIMACION DE LOS FOTONES EQUIVALENTES: LIMITA-  
CIONES Y ZONAS DE VALIDEZ

5.1. Aproximación de los fotones equivalentes(E.P.A.)

En el estudio de la interacción electromagnética entre partículas elementales suele ser de gran utilidad, para simplificar los cálculos, el uso del método conocido como aproximación de los fotones equivalentes (PS 61) (BG 75). Este procedimiento está basado en el hecho de que en muchos procesos electromagnéticos existe un "cut-off" dinámico que suprime los valores grandes del cuadrimomento del fotón al cuadrado, con lo que el proceso viene dominado por pequeños valores de  $|q^2|$ . En esta situación se puede describir la interacción electromagnética entre dos partículas como la interacción de una de ellas con un flujo de fotones reales generado por la otra.

Este método ha sido usado recientemente (BK 81) para realizar una estimación numérica de la sección eficaz asociada con la leptoproducción de pares de neutrinos en el campo coulombiano de un núcleo. Sin embargo, se debe ser cauto al aplicar esta aproximación, ya que hay que dar un significado preciso a la condición de que la masa de los fotones virtuales sea pequeña en la región de interés.

Usando los resultados del capítulo anterior, donde se ha conseguido extraer una expresión analítica para la dis-

tribución de fotones virtuales, estamos en condiciones de estudiar las conclusiones a las que habríamos llegado en el caso de haber usado la aproximación E.P.A. y comparar ambas situaciones.

Consideremos la difusión de un leptón cargado por el campo Coulombiano de un núcleo, a muy alta energía. El proceso aparece esquematizado en la figura 5.1a. La aproximación E.P.A. consiste en conectar este proceso con el de fotoproducción sobre el leptón que aparece representado en la figura 5.1b. Los cuádrimentos de las distintas partículas están indicados en la figura.

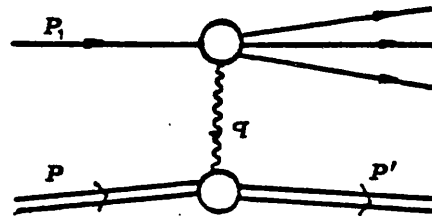
Se podría aducir en contra de esta aproximación, que el campo del fotón virtual Coulombiano es longitudinal, mientras que la fotoproducción corresponde a fotones reales transversales. Sin embargo, esto no es problemático si  $q^2$  está limitado a valores suficientemente pequeños, ya que la conservación de la corriente electromagnética permite entonces relacionar las componentes longitudinales y transversales al orden dominante (BT 75). Además, como es bien sabido, el campo electromagnético de una partícula cargada a gran velocidad es casi transversal y por lo tanto similar al caso de fotones reales.

Las amplitudes asociadas con estos dos procesos están dadas por

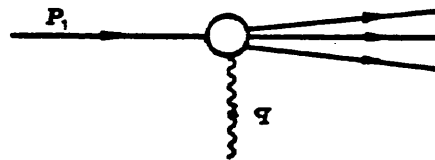
$$T_a = - \frac{Z e^2}{q^2} F(q^2) J_\mu^{(h)} J^{(l)\mu}$$

$$T_b = e \epsilon_\mu(q) J^{(l)\mu}$$

(5.1)



(a)



$(q^2 = 0)$

(b)

Fig. 5.1.- Diagramas asociados con la difusión de un leptón cargado por el campo coulombiano nuclear (a) y con la fotoproducción sobre el leptón (b).

donde  $J_\mu^{(h)}$  y  $J_\mu^{(l)}$  son las corrientes electromagnéticas hadrónica y leptónica respectivamente,  $F(q^2)$  es el factor de forma nuclear y  $\xi_\mu(q)$  el vector de polarización del fotón.

Estas amplitudes pueden relacionarse fácilmente en el sistema de referencia  $\vec{P}_1 = 0$  (BL 71). Para ello, aproximamos  $J_\mu^{(h)}$  por  $2P_\mu$  y  $J_\mu^{(l)}$  por su correspondiente valor a  $q^2 = 0$ . Esta aproximación será buena si  $(-q^2)$  es mucho menor que las escalas que aparecen en la corriente leptónica, es decir,  $(-q^2) \ll m^2$ , donde  $m$  es la masa del leptón cargado. Imponiendo ahora las condiciones de conservación de la corriente electromagnética y transversalidad del vector de polarización del fotón obtenemos

$$J_\mu^{(l)} J^{(h)\mu} \simeq \frac{2P^0}{q^0} \left( \vec{J}_\perp^{(l)} \vec{q}_\perp + \frac{M^2 q^0}{P_0^2} J_z^{(l)} \right) \quad (5.2)$$

$$J_\mu^{(l)} \xi^\mu(q) \simeq -\vec{\xi}_\perp \left[ \vec{J}_\perp^{(l)} - (\vec{q}_\perp / q^0) J_z^{(l)} \right]$$

donde hemos tomado como eje  $z$  la dirección de  $\vec{P}$  y el subíndice  $\perp$  denota las componentes transversales a  $\hat{z}$ . En general la componente  $J_z^{(l)}$  no puede ser despreciada. Sin embargo, bajo las condiciones

$$|\vec{q}_\perp| \ll q^0 \quad ; \quad q^0 \ll (P_\perp^2 / M^2) |\vec{q}_\perp| \quad (5.3)$$

podemos suprimir los términos en  $J_Z^{(1)}$  obteniendo

$$T_a = \frac{ze}{q^2} F(q^2) \frac{z p^c}{q^c} |\vec{q}_\perp| T_b \quad (5.4)$$

que es la relación buscada entre las dos amplitudes.

### 5.2. Lepto-producción de pares neutrino-antineutrino

La ecuación (5.4) puede ser escrita en forma covariante, usando las variables invariantes  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$  (PB 82b)

$$T_a = - \frac{4ze}{x_1} F(x_1) \frac{x_0}{2x_2 - x_1} \left( 1 - \frac{2x_2 - x_1}{2x_0} \right)^{1/2} \cdot \left[ x_1 - \frac{M^2 (2x_2 - x_1)^2}{2x_0 (2x_0 - 2x_2 + x_1)} \right]^{1/2} T_b \quad (5.5)$$

Tomando en consideración los factores cinemáticos las secciones eficaces de los procesos (a) y (b) están relacionadas por la expresión

$$\sigma_a^{E.P.A.} = z \frac{z^2 \alpha}{\pi} \int \frac{dx_1 dx_2}{2x_2 - x_1} \frac{|F(x_1)|^2}{x_1^2} \left( 1 - \frac{2x_2 - x_1}{2x_0} \right) \cdot \left[ x_1 - \frac{M^2 (2x_2 - x_1)^2}{2x_0 (2x_0 - 2x_2 + x_1)} \right] \sigma_b(x_2) \quad (5.6)$$

donde  $\nabla_b(x_2)$  debe ser calculada para fotones reales con  $x_1 = 0$ . En el límite de alta energía, la ecuación (5.6) puede simplificarse considerablemente con lo que la aproximación E.P.A. da en este caso la relación.

$$\nabla_a^{E.P.A.} \simeq \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \int \frac{dx_1}{x_1^2} |F(x_1)|^2 \int \frac{dx_2}{x_2} (x_1 - x_2^2 / E_1^2) \nabla_b(x_2) \quad (5.7)$$

donde  $E_1$  es la energía del leptón incidente en el sistema laboratorio. Recordemos que en este límite de alta energía las contribuciones dominantes provienen de valores de  $x_2$  cercanos a su límite superior  $\bar{x}_2 \simeq E_1 \sqrt{x_1}$ .

Al tomar fotones reales, sólo la función de estructura  $G_1$  contribuirá a la sección eficaz  $\nabla_b(x_2)$  ya que  $G_2 \propto x_1$ . Comparando con la ecuación (4.71) para obtener los factores correctos, vemos que la sección eficaz de fotoproducción  $\nabla_b(x_2)$  está relacionada con la función de estructura transversal  $G_1(x_2) \equiv -G_1(x_1 = 0, x_2)$  por la expresión

$$\nabla_b(x_2) = \frac{G^2 \alpha}{\pi^2} \sin^4 \theta_w \frac{G_1(x_2)}{6 x_2^2} \quad (5.8)$$

El cambio de signo en la función  $G_1(x_2)$  es debido a la forma como hemos definido en (4.44) la función de estructura  $f_1(x_1, x_2)$ . Al tomar fotones reales,  $\nabla_b$  es proporcional

a  $\xi^\mu(q) \cdot \xi^\nu(q)^* \cdot M_{\mu\nu}$  y debido a la transversalidad del vector de polarización ( $\xi \cdot q = 0$ ) y al hecho de que este es un vector espacial ( $\xi^2 = -1$ ),  $\nabla_b \propto -f_1(x_1 = 0, x_2)$ .

$G_1(x_2)$  puede ser obtenida fácilmente, tomando  $x_1 = 0$  en las ecuaciones (4.75), (4.82) y (4.85)

$$G_1(x_2) = x_2^3 \left[ \frac{2}{3} \ln(2x_2/m^2) - 67/36 \right] \quad (5.9)$$

Introduciendo las expresiones (5.8) y (5.9) en la ecuación (5.7) e integrando sobre la variable  $x_2$ , obtenemos

$$\nabla_a^{EPA} = \frac{2Z^2\alpha^2G^2}{27\pi^3} x_1^4 \partial_a E_1 \int \frac{dx_2}{\sqrt{x_1}} |F(x_1)|^2 \left\{ \ln\left(\frac{2E_1\sqrt{x_1}}{m^2}\right) - \frac{33}{8} \right\} \quad (5.10)$$

que coincide con la ecuación (4.90) obtenida en el capítulo anterior para el caso  $x_1 \ll m^2$ .

Sin embargo, al realizar el cálculo completo, sin utilizar la aproximación EPA, las dos amplitudes  $G_1(x_1, x_2)$  contribuyen al orden dominante incluso en el límite  $x_1 \ll m^2$ , es decir, las componentes transversales y longitudinales del fotón son igualmente importantes. La razón de que ambos procedimientos a pesar de ser formalmente distintos, conduzcan a la misma expresión es evidente si observamos las ecuaciones

(4.75) (4.82) y (4.85) ya que en el límite  $x_1 \ll m^2$  se cumple

$$G_2(x_1, x_2) \underset{x_1 \ll m^2}{\simeq} - \frac{x_1}{x_2^2} G_1(x_1, x_2) \underset{x_1 \ll m^2}{\simeq} \frac{x_1}{x_2^2} G_4(x_2) \quad (5.11)$$

con lo que el factor  $(x_1 - x_2^2/E_1^2)$  que aparece en la ecuación (5.7) reproduce en este límite el término  $(G_1 + E_1^2 G_2)$  de la ecuación (4.71)

### 5.3. Zonas de validez de la aproximación EPA a altas energías

Acabamos de ver que la aplicación de la aproximación EPA a la leptoproducción de pares conduce al mismo resultado que la aproximación  $x_1 \ll m^2$ . Sin embargo, sabemos que EPA sólo es válida si además de la condición  $x_1 \ll m^2$  se cumplen las restricciones dadas por las expresiones (5.3). Esto parece indicar que estas condiciones adicionales se cumplen automáticamente en el límite de alta energía.

Las desigualdades (5.3) pueden ser escritas en forma covariante mediante el uso de las variables  $x_0, x_1$  y  $x_2$ . Recordando que dichas expresiones fueron obtenidas en el sistema de referencia  $\vec{P}_1 = 0$ , se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} |\vec{q}_\perp| \ll q^0 &\iff \pi(x_0, x_1, x_2) \ll x_2^2/m^2 \\ q^0 \ll P_0^2 |\vec{q}_\perp|/M^2 &\iff x_2/m \ll \sqrt{\pi(x_0, x_1, x_2)} x_0^2/(m^2 M^2) \end{aligned} \quad (5.12)$$



donde

$$\pi(x_0, x_1, x_2) \equiv \frac{x_1 [x_0(x_0 - x_2) - m^2(M^2 + \frac{1}{4}x_1)] - M^2 x_2^2}{x_0^2 - m^2 M^2} \quad (5.13)$$

En el límite de alta energía la función  $\pi(x_0, x_1, x_2)$  puede ser aproximada por la expresión más simple

$$\pi(x_0, x_1, x_2) \simeq x_1 - x_2^2 / E_1^2 \quad (5.14)$$

Ya hemos señalado anteriormente que a altas energías en el sistema laboratorio, la sección eficaz de nuestro proceso viene dominada por valores de  $x_2$  cercanos a su límite superior  $\bar{x}_2 \simeq E_1 \sqrt{x_1}$ . Si redefinimos  $x_2$  como

$$x_2 \equiv E_1 \sqrt{x_1} - \Delta \quad (5.15)$$

entonces las condiciones(5.12) adoptan la forma

$$2m^2 \Delta \ll E_1^3 \sqrt{x_1} \quad ; \quad m^2 \sqrt{x_1} \ll 2 \Delta E_1 \quad (5.16)$$

Obviamente estas desigualdades son satisfechas automáticamente a altas energías para valores razonables de la variable  $\Delta$ . (Solo en la zona  $\Delta \lesssim m^2 \sqrt{x_1} / 2E_1$  se viola

la segunda desigualdad, pero como a dicha zona corresponde un volumen de espacio fásico insignificante, el valor de la integración en  $x_2$  no se ve afectado). Por lo tanto, en el límite de alta energía, todos los problemas asociados con la validez de la aproximación E.P.A., se trasladan a la validez del límite  $x_1 \ll m^2$ .

#### 5.4. Discusión de los resultados obtenidos

Vimos en capítulo anterior que la aproximación  $x_1 \ll m^2$  conduce a una divergencia logarítmica en el límite de masa cero que físicamente no existe. Lógicamente era de esperar que esta aproximación no fuera válida cuando los leptones incidentes fuesen electrones. Para muones, por el contrario, la aproximación resultó ser muy buena. No obstante, es instructivo analizar si en este caso estaba realmente justificado el uso de la E.P.A. En la tabla 5.1 aparecen los valores medios de la variable  $x_1$  obtenidos, en los diferentes casos estudiados, utilizando la distribución de fotones virtuales (4.86). Cuando los comparamos con la correspondiente masa leptónica vemos que, incluso para muones, los buenos resultados obtenidos con la E.P.A. son algo sorprendentes.

Aunque algo menores, los valores de  $\langle x_1 \rangle$  para muones incidentes son del mismo orden que la masa del muón al cuadrado, por lo que las zonas dominantes de nuestro proceso no cumplen las condiciones exigidas para que la E.P.A. sea aplicable.

	$\xi_1$ (GeV)	100	300
Muon $m^2 = 11.2$ $(10^{-3} \text{ GeV}^2)$	$^{56}\text{Fe}$	5.4	4.8
	$^{208}\text{Pb}$	2.6	2.3
Electron $m^2 = 2.6$ $(10^{-7} \text{ GeV}^2)$	$^{56}\text{Fe}$	3.3	3.4
	$^{208}\text{Pb}$	1.5	1.5

Tabla 5.1

Valores de  $\langle x_1 \rangle$ , en  $10^{-3} \text{ GeV}^2$ , para dos energías incidentes distintas. Se considera tanto el caso electrónico como el muónico.

El hecho de que se obtengan buenos resultados es más bien casual. La razón hay que buscarla en la forma explícita de la distribución de fotones. La sección eficaz (4.91) viene dominada por el término logarítmico, cuyo coeficiente no depende de la relación entre el cuadrimento del fotón y la masa del leptón. Por otra parte el otro coeficiente (a) solo depende de la razón  $x_1/m^2$  a través de la función  $J(x_1) \equiv Z(x_1) + \ln(\sqrt{x_1}/m)$ , que varía muy suavemente en la zona dominante (para muones,  $J(x_1)$  vale  $-.96$  en  $x_1 = 10^{-4}$ ,  $-.79$  en  $x_1 = 10^{-3}$  y  $-.62$  en  $x_1 = 10^{-2}$ ).

Es importante señalar que, a pesar de la existencia del propagador fotónico, las principales contribuciones a la sección eficaz provienen de valores de  $x_1$  no excesivamente pequeños ( $\sqrt{\langle x_1 \rangle} \sim 50$  MeV). Esto es debido a la dependencia del espacio fásico leptónico con la masa invariante del fotón virtual, ya que el volumen de espacio fásico decrece con  $x_1$  (Recuerdese que  $\bar{x}_i \sim E_i \sqrt{x_i}$ ,  $i \geq 2$ ). Gracias a esta peculiaridad de nuestro proceso, no aparece en este caso la divergencia infrarroja característica de los procesos Coulombianos.

CAPITULO VI CONTRIBUCION DE CORRIENTES CARGADAS

6.1. Amplitudes

Los diagramas de corrientes cargadas (diagramas 3, 4 y 5 de la figura 4.1) solo dan contribución cuando la pareja de neutrinos producida pertenece a la misma generación fermiónica que el leptón incidente. Además dichos diagramas están suprimidos por un factor  $m/E_1$  respecto a los de corrientes neutras cuando la helicidad del leptón es positiva. Sin embargo, su contribución es importante para la otra helicidad.

El diagrama 5, que contiene la interacción del bosón de gauge  $w$  con el campo electromagnético, dará una contribución despreciable a las energías que estamos considerando, ya que contiene dos propagadores bosónicos. Las amplitudes correspondientes a los otros dos diagramas son:

$$\begin{aligned}
 T_3 &= \frac{-e^3}{8 \sin^2 \theta_w} J_\mu \frac{(-g^{\mu\nu})}{q^2} \frac{l^\sigma l^\rho / M_w^2 - g^{\sigma\rho}}{0^2 - M_w^2} \frac{L_{\nu\omega}^3 N_e^3}{(p_1+q)^2 - m^2} \\
 T_4 &= \frac{-e^3}{8 \sin^2 \theta_w} J_\mu \frac{(-g^{\mu\nu})}{q^2} \frac{t^\sigma t^\rho / M_w^2 - g^{\sigma\rho}}{t^2 - M_w^2} \frac{L_{\nu\omega}^4 N_e^4}{(p_2+q)^2 - m^2} \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

donde  $J_\mu$  es la corriente electromagnética hadrónica definida en la ecuación (4.6),  $l^\sigma \equiv (P_2 + P_3)^\sigma$  y  $t^\sigma \equiv (P_1 - P_4)^\sigma$  los

cuadrimomentos del  $w$ , y los tensores leptónicos vienen dados por

$$\begin{aligned}
 L_{\nu\sigma}^3 &\equiv \bar{u}(p_4) \gamma_\sigma (1+\gamma_5) (p_1+q) \gamma_\nu u(p_1) \\
 L_{\nu\sigma}^4 &\equiv \bar{u}(p_2) \gamma_\nu (p_2-q) \gamma_\sigma (1+\gamma_5) v(p_3) \\
 N_e^3 &\equiv \bar{u}(p_2) \gamma_e (1+\gamma_5) v(p_3) \\
 N_e^4 &\equiv \bar{u}(p_4) \gamma_e (1+\gamma_5) u(p_1)
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

Las contracciones  $l^e N_e^3$  y  $t^e N_e^4$  son proporcionales a la masa del leptón cargado, por lo que la contribución de los términos en  $l^e$  y  $t^e$  está suprimida por un factor  $m/M_w$ . Si además realizamos la aproximación de contacto en los propagadores bosónicos, podemos escribir las amplitudes en la forma

$$\begin{aligned}
 T_3 &\simeq \frac{ze^2 G}{\sqrt{2}} \frac{F(q^2)}{q^2} (P+P')^\nu \frac{L_{\nu\sigma}^3 N^{3\sigma}}{(p_1+q)^2 - m^2} \\
 T_4 &\simeq \frac{ze^2 G}{\sqrt{2}} \frac{F(q^2)}{q^2} (P+P')^\nu \frac{L_{\nu\sigma}^4 N^{4\sigma}}{(p_2-q)^2 - m^2}
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Si comparamos estas expresiones con las amplitudes de corrientes neutras

$$\begin{aligned}
 T_1 &\approx \frac{z e^2 G}{2 \sqrt{2}} \frac{F(q^2)}{q^2} (P+P')^\nu \frac{L_{\nu\sigma}^1 N^\sigma}{(P_1+q)^2 - m^2} \\
 T_2 &\approx \frac{z e^2 G}{2 \sqrt{2}} \frac{F(q^2)}{q^2} (P+P')^\nu \frac{L_{\nu\sigma}^2 N^\sigma}{(P_2-q)^2 - m^2}
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

donde  $L_{\nu\sigma}^1$ ,  $L_{\nu\sigma}^2$  y  $N^\sigma$  son los tensores leptónicos definidos en (4.7), vemos que las amplitudes de corrientes neutras y corrientes cargadas presentan grandes similitudes.

Si nos restringimos a helicidades leptónicas negativas ( $\lambda = -\frac{1}{2}$ ), podemos usar el hecho de que los spinores de helicidad definida para fermiones de masa cero son propios de la matriz  $\gamma_5$ . Despreciando masas leptónicas se cumple

$$\begin{aligned}
 \gamma_5 u(P_1, \lambda = -\frac{1}{2}) &= u(P_1, \lambda = -\frac{1}{2}) \\
 \bar{u}(P_2, \lambda = -\frac{1}{2}) \gamma_5 &= -\bar{u}(P_2, \lambda = -\frac{1}{2})
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Usando estas relaciones y eliminando los proyectores  $(1 + \gamma_5)$ , que son superfluos al estar actuando sobre campos con la helicidad apropiada, podemos reescribir los tensores leptónicos como

$$L_{\nu\sigma}^1 = (\sigma-1) \bar{u}(p_2) \gamma_\sigma (\not{p}_1 + \not{q}_1) \gamma_\nu u(p_1)$$

$$L_{\nu\sigma}^2 = (\sigma-1) \bar{u}(p_2) \gamma_\nu (\not{p}_2 - \not{q}_1) \gamma_\sigma u(p_1)$$

$$N_e = 2 \bar{u}(p_2) \gamma_e \not{p}_3$$

$$L_{\nu\sigma}^3 = 2 \bar{u}(p_2) \gamma_\sigma (\not{p}_1 + \not{q}_1) \gamma_\nu u(p_1)$$

$$L_{\nu\sigma}^4 = 2 \bar{u}(p_2) \gamma_\nu (\not{p}_2 - \not{q}_1) \gamma_\sigma \not{p}_3 \quad (6.6)$$

$$N_e^3 = 2 \bar{u}(p_2) \gamma_e \not{p}_3$$

$$N_e^4 = 2 \bar{u}(p_2) \gamma_e u(p_1)$$

A la vista de estas expresiones es evidente que, salvo constantes globales, las amplitudes de corrientes cargadas solo difieren de las de corrientes neutras en la situación de los espinores en el doble producto de corrientes fermiónicas, por lo que cabe pensar que ambos tipos de amplitudes pueden ser relacionadas mediante una transformación de Fierz (FI 37).



## 6.2. Transformación de Fierz

Consideremos el conjunto de 16 matrices de Dirac  
(IZ 80)

$$\Gamma^i \equiv \{ I, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma_5 \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} \} \quad (6.7)$$

y sus correspondientes inversas

$$\Gamma_i \equiv (\Gamma^i)^{-1} \equiv \{ I, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} \} \quad (6.8)$$

Con esta notación, se cumple que

$$\text{Tr} [\Gamma^i \Gamma_j] = 4 \delta_j^i, \quad 1 \leq i, j \leq 16 \quad (6.9)$$

Cualquier matriz cuatro por cuatro puede escribirse como combinación lineal de las  $\Gamma^i$ . A partir de la propiedad (6.9) podemos obtener fácilmente los coeficientes de dicha combinación lineal

$$X = \frac{1}{4} \text{Tr} [X \Gamma_i] \Gamma^i \quad (6.10)$$

Identificando, en los dos términos de la igualdad, el coeficiente que acompaña al elemento de matriz  $X_{ab}$  se obtiene la identidad

$$\delta_{a\bar{a}} \delta_{b\bar{b}} = \frac{1}{4} (\Gamma_i)_{\bar{b}\bar{a}} (\Gamma^i)_{ab} \quad (6.11)$$

Utilizando esta relación, podemos insertar el conjunto de matrices  $\Gamma^i$  en el producto de corrientes que aparece en las amplitudes  $T_3$  y  $T_4$ . Llamando  $\mathcal{L}_\nu^i$  a la contracción de las dos corrientes leptónicas de la amplitud  $T^i$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu^3 &\equiv 4 [\bar{u}(p_4) T_{\leftarrow\nu} u(p_1)] [\bar{u}(p_2) \delta^\nu v(p_3)] = \\ &= [\bar{u}(p_2) \Gamma^i T_{\leftarrow\nu} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \Gamma_i \delta^\nu v(p_3)] \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu^4 &\equiv 4 [\bar{u}(p_2) \tilde{T}_{\nu\leftarrow} v(p_3)] [\bar{u}(p_4) \delta^\nu u(p_1)] = \\ &= [\bar{u}(p_2) \tilde{T}_{\nu\leftarrow} \Gamma_i v(p_3)] [\bar{u}(p_4) \delta^\nu \Gamma^i u(p_1)] \end{aligned}$$

donde

$$T_{\leftarrow\nu} \equiv \gamma_\nu (\not{p}_1 + \not{p}_4) \gamma_\nu \quad (6.13)$$

y

$$\tilde{T}_{\omega\sigma} \equiv \gamma_{\omega} (\not{P}_2 - \not{P}_1) \gamma_{\sigma} \quad (6.14)$$

Para fermiones sin masa, la corriente  $[u' X u]$ , asociada a un operador espinorial  $X$ , que sea un producto cualquiera de matrices gamma, conserva o invierte la helicidad según que  $X$  contenga un número impar o par de matrices de Dirac. Por lo tanto, si despreciamos masas leptónicas, solo los operadores pares  $I$ ,  $\gamma_5$  y  $\not{\sigma}^{\mu\nu}$  deberán ser tenidos en cuenta en las ecuaciones (6.12), ya que estamos considerando que el leptón cargado tiene helicidad negativa. Haciendo uso de la propiedad (6.5) para eliminar las matrices  $\gamma_5$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega}^3 &\simeq 2 [\bar{u}(p_2) T_{\omega\sigma} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \not{\sigma}^{\sigma\tau} v(p_3)] \\ &+ \frac{1}{2} [\bar{u}(p_2) \not{\sigma}_{\alpha\beta} T_{\omega\sigma} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \not{\sigma}^{\alpha\beta} \not{\sigma}^{\sigma\tau} v(p_3)] \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega}^4 &\simeq 2 [\bar{u}(p_2) \tilde{T}_{\omega\sigma} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \not{\sigma}^{\sigma\tau} v(p_3)] \\ &+ \frac{1}{2} [\bar{u}(p_2) \tilde{T}_{\omega\sigma} \not{\sigma}_{\alpha\beta} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \not{\sigma}^{\sigma\tau} \not{\sigma}^{\alpha\beta} v(p_3)] \end{aligned}$$

Utilizando el desarrollo (6.10) en los términos que contienen al operador tensorial  $\not{\sigma}_{\alpha\beta}$ , podemos reescribir las

corrientes  $\mathcal{A}_\omega^i$  en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega^3 &\cong 2 [\bar{u}(\rho_2) T_{\omega\omega} u(\rho_1)] [\bar{u}(\rho_4) \gamma^\nu v(\rho_3)] + \\ &+ \frac{1}{32} \text{Tr}[\epsilon_{\alpha\beta} T_{\omega\omega} \Gamma_i] \text{Tr}[\epsilon^{\alpha\beta} \gamma^\nu \Gamma_j] [\bar{u}(\rho_2) \Gamma^i u(\rho_1)] [\bar{u}(\rho_4) \Gamma^j v(\rho_3)] \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega^4 &\cong 2 [\bar{u}(\rho_2) \tilde{T}_{\omega\omega} u(\rho_1)] [\bar{u}(\rho_4) \gamma^\nu v(\rho_3)] + \\ &+ \frac{1}{32} \text{Tr}[\tilde{T}_{\omega\omega} \epsilon_{\alpha\beta} \Gamma_i] \text{Tr}[\delta^{\alpha\beta} \gamma^\nu \Gamma_j] [\bar{u}(\rho_2) \Gamma^i u(\rho_1)] [\bar{u}(\rho_4) \Gamma^j v(\rho_3)] \end{aligned}$$

El argumento de conservación de helicidad nos indica ahora que solo las  $\Gamma^i$  impares  $\gamma^\mu$  y  $\delta_5 \gamma^\mu$  contribuyen al orden dominante en (6.16). Utilizando de nuevo (6.5) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega^3 &\cong 2 [\bar{u}(\rho_2) T_{\omega\omega} u(\rho_1)] [\bar{u}(\rho_4) \gamma^\nu v(\rho_3)] + \\ &+ \frac{1}{32} S_\omega^{mn} [\bar{u}(\rho_2) \gamma_m u(\rho_1)] [\bar{u}(\rho_4) \gamma_n v(\rho_3)] \\ \mathcal{A}_\omega^4 &\cong 2 [\bar{u}(\rho_2) \tilde{T}_{\omega\omega} u(\rho_1)] [\bar{u}(\rho_4) \gamma^\nu v(\rho_3)] + \\ &+ \frac{1}{32} t_\omega^{mn} [\bar{u}(\rho_2) \gamma_m u(\rho_1)] [\bar{u}(\rho_4) \gamma_n v(\rho_3)] \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde

$$\begin{aligned} S_\omega^{mn} &\equiv \text{Tr}(\epsilon^{\alpha\beta} \gamma^\nu \gamma^n) \text{Tr}(\epsilon_{\alpha\beta} T_{\omega\omega} \gamma^m) - \text{Tr}(\epsilon^{\alpha\beta} \gamma^\nu \gamma^n) \text{Tr}(\epsilon_{\alpha\beta} T_{\omega\omega} \gamma^m \gamma_5) \\ &- \text{Tr}(\epsilon^{\alpha\beta} \gamma^\nu \gamma^n \gamma_5) \text{Tr}(\epsilon_{\alpha\beta} T_{\omega\omega} \gamma^m) + \text{Tr}(\epsilon^{\alpha\beta} \gamma^\nu \gamma^n \gamma_5) \text{Tr}(\epsilon_{\alpha\beta} T_{\omega\omega} \gamma^m \gamma_5) \end{aligned} \quad (6.18)$$

y

$$t_{\omega}^{mn} \equiv \text{Tr}(\gamma^{\tau} \sigma^{\alpha\beta} \gamma^n) \text{Tr}(\tilde{T}_{\omega\tau} \sigma_{\alpha\beta} \gamma^m) - \text{Tr}(\gamma^{\tau} \sigma^{\alpha\beta} \gamma^n) \text{Tr}(\tilde{T}_{\omega\tau} \sigma_{\alpha\beta} \gamma^m \gamma_5) \quad (6.19)$$

$$- \text{Tr}(\gamma^{\tau} \sigma^{\alpha\beta} \gamma^n \gamma_5) \text{Tr}(\tilde{T}_{\omega\tau} \sigma_{\alpha\beta} \gamma^m) + \text{Tr}(\gamma^{\tau} \sigma^{\alpha\beta} \gamma^n \gamma_5) \text{Tr}(\tilde{T}_{\omega\tau} \sigma_{\alpha\beta} \gamma^m \gamma_5)$$

Podemos simplificar las expresiones (6.18) y (6.19) si tenemos en cuenta que la relación

$$\gamma_5 \sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} \gamma_5 = -\frac{i}{2} \epsilon^{\alpha\beta\tau s} \sigma_{\tau s} \quad (6.20)$$

permite eliminar las matrices  $\gamma_5$ , ya que se cumple

$$(\gamma_5 \sigma^{\alpha\beta}) (\gamma_5 \sigma_{\alpha\beta}) = (\sigma^{\alpha\beta}) (\sigma_{\alpha\beta})$$

$$(\sigma^{\alpha\beta}) (\gamma_5 \sigma_{\alpha\beta}) = (\gamma_5 \sigma^{\alpha\beta}) (\sigma_{\alpha\beta}) = -\frac{i}{2} \epsilon^{\alpha\beta\tau s} (\sigma_{\alpha\beta}) (\sigma_{\tau s}) \quad (6.21)$$

donde los paréntesis indican que los correspondientes operadores aparecen en trazas distintas. Sustituyendo (6.21) en (6.18) y (6.19) obtenemos

$$S_{\omega}^{mn} = \text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \gamma^{\tau} \gamma^n] \text{Tr}[\sigma^{\tau s} T_{\omega\tau} \gamma^m] \{ 2 \delta_{\alpha\tau} \delta_{\beta s} + i \epsilon_{\alpha\beta\tau s} \} \quad (6.22)$$

$$t_{\omega}^{mn} = \text{Tr}[\gamma^{\tau} \sigma^{\alpha\beta} \gamma^n] \text{Tr}[\tilde{T}_{\omega\tau} \sigma^{\tau s} \gamma^m] \{ 2 \delta_{\alpha\tau} \delta_{\beta s} - i \epsilon_{\alpha\beta\tau s} \}$$

Calculando ahora las trazas que no contienen los tensores  $T_{\nu\sigma}$  y  $\tilde{T}_{\nu\sigma}$  y utilizando la relación (6.20) para eliminar el tensor antisimétrico, llegamos a las expresiones

$$\begin{aligned} S_{\nu}^{mn} &= 48 \operatorname{Tr} [T_{\nu}^n \delta^m (\delta_5 - 1)] \\ t_{\nu}^{mn} &= 48 \operatorname{Tr} [\tilde{T}_{\nu}^n \delta^m (\delta_5 - 1)] \end{aligned} \quad (6.23)$$

Para poder comparar las ecuaciones (6.17) con las corrientes  $\mathcal{Z}_{\nu}^1$  y  $\mathcal{Z}_{\nu}^2$ , vamos a manipular ligeramente estas últimas. Introduciendo la expansión (6.10) en las expresiones de  $L_{\nu\sigma}^1$  y  $L_{\nu\sigma}^2$  y usando de nuevo el argumento de conservación de helicidad tenemos

$$\begin{aligned} \frac{L_{\nu\sigma}^1}{(\nu-1)} &= \frac{1}{4} \operatorname{Tr} [T_{\nu\sigma} \Gamma_i] [\bar{u}(p_2) \Gamma^i u(p_1)] \simeq \\ &\simeq \frac{1}{4} [\bar{u}(p_2) \delta^{\nu} u(p_1)] \operatorname{Tr} [T_{\nu\sigma} \delta_n (1 - \delta_5)] \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{L_{\nu\sigma}^2}{(\nu-1)} &= \frac{1}{4} \operatorname{Tr} (\tilde{T}_{\nu\sigma} \Gamma_i) [\bar{u}(p_2) \Gamma^i u(p_1)] \simeq \\ &\simeq \frac{1}{4} [\bar{u}(p_2) \delta^{\nu} u(p_1)] \operatorname{Tr} [\tilde{T}_{\nu\sigma} \delta_n (1 - \delta_5)] \end{aligned}$$

Al comparar las ecuaciones (6.17), (6.23) y (6.24) obtenemos finalmente

$$\mathcal{Z}_{\nu}^3 \simeq \frac{2}{1-\nu} \mathcal{Z}_{\nu}^1 \quad ; \quad \mathcal{Z}_{\nu}^4 \simeq \frac{2}{1-\nu} \mathcal{Z}_{\nu}^2 \quad (6.25)$$

que es la relación deseada entre las contribuciones de corrientes cargadas y de corrientes neutras.

### 6.3. Sección eficaz

Teniendo en cuenta el factor  $\frac{1}{2}$  adicional en que difieren las constantes que multiplican globalmente las amplitudes (6.3) y (6.4), las relaciones (6.25) entre productos de corrientes se traducen en la siguiente relación entre amplitudes

$$T_{CC}(\lambda = -1/2) \simeq \frac{4}{1-\nu} T_{CN}(\lambda = -1/2) \quad (4.26)$$

por lo que la amplitud total del proceso será

$$T(\beta Z \rightarrow \beta Z \nu_{\rho'} \bar{\nu}_{\rho'}) \simeq \left[ 1 + \frac{4 \delta_{\rho\rho'} \delta_{\lambda, -1/2}}{1-\nu} \right] T_{CN}(\beta Z \rightarrow \beta Z \nu_{\rho'} \nu_{\rho'}) \quad (6.27)$$

Como esta amplitud solo difiere de la de corrientes neutras, calculada en el capítulo cuarto, en un factor constante, la obtención de la sección eficaz en el caso general es ahora completamente trivial. Teniendo en cuenta el factor global  $(\nu + 2\lambda)^2$  que aparece en (4.86) se obtiene

$$\sigma_{\lambda}(\beta Z \rightarrow \beta Z \nu_{\rho'} \bar{\nu}_{\rho'}) \simeq C_{\lambda, \rho'} \sigma(\lambda = +1/2) \quad (6.28)$$

donde la expresión de  $\langle \lambda = +1/2 \rangle$  viene dada por (4.88) y (4.91) y la constante  $C_{\lambda, \rho'}$  vale

$$C_{\lambda, \rho'} \equiv \left[ 1 - \delta_{\lambda, -1/2} \frac{1 + 2\delta_{\rho, \rho'}}{2 \sin^2 \theta_w} \right]^2 \quad (6.29)$$

Sumando sobre todos los posibles tipos de neutrinos en el estado final, tendremos para N generaciones

$$\langle \lambda | \rho Z \rightarrow \rho Z \sum_{\rho'} \nu_{\rho'} \bar{\nu}_{\rho'} \rangle \simeq g(N, \lambda) \langle \lambda = +1/2 \rangle \quad (6.30)$$

donde la función  $g(N, \lambda)$  viene dada por

$$g(N, \lambda) \equiv \sum_{\rho'} C_{\lambda, \rho'} = (N-1) \left[ 1 - \frac{\delta_{\lambda, -1/2}}{2 \sin^2 \theta_w} \right]^2 + \left[ 1 - \frac{3 \delta_{\lambda, -1/2}}{2 \sin^2 \theta_w} \right]^2 \quad (6.31)$$

Obviamente  $g(N, \lambda)$  es igual a N cuando el leptón tiene helicidad positiva, por lo que la sección eficaz es en este caso directamente proporcional al número de generaciones.

Tomando para  $\sin^2 \theta_w$  el valor standard 0.23 y suponiendo tres generaciones,  $g(3, \lambda)$  toma los valores

$$g(3, 1/2) = 3 \quad ; \quad g(3, -1/2) = 33.25 \quad (6.32)$$



Así pues, la contribución de corrientes cargadas es dominante para helicidadas negativas, produciendo una sección eficaz un orden de magnitud mayor.

Si partimos de leptones no polarizados, tendremos que promediar sobre helicidadas la función  $g(N, \lambda)$ . Para tres generaciones tendremos

$$\bar{g}(3) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\lambda} g(3, \lambda) = 18.12 \quad (6.33)$$

Las correspondientes secciones eficaces para  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$  y para leptones no polarizados, aparecen representadas en la figura 6.1 para el caso de muón incidente sobre hierro y suponiendo tres generaciones.

#### 6.4. Proceso inelástico $\nu^- A Z \rightarrow \nu'^- A Z \nu_p \bar{\nu}_{p'}$

La detección de la razón entre la sección eficaz de nuestro proceso y la correspondiente a la reacción

$$\nu^- + A Z \rightarrow \nu'^- + A Z + \nu_p + \bar{\nu}_{p'} \quad (6.34)$$

con  $l \neq l'$

$$R_{\nu \bar{\nu}} \equiv \frac{\langle \sigma(\nu Z \rightarrow \nu Z \nu \bar{\nu}) \rangle}{\langle \sigma(\nu Z \rightarrow \nu' Z \nu_p \bar{\nu}_{p'}) \rangle} \quad (6.35)$$

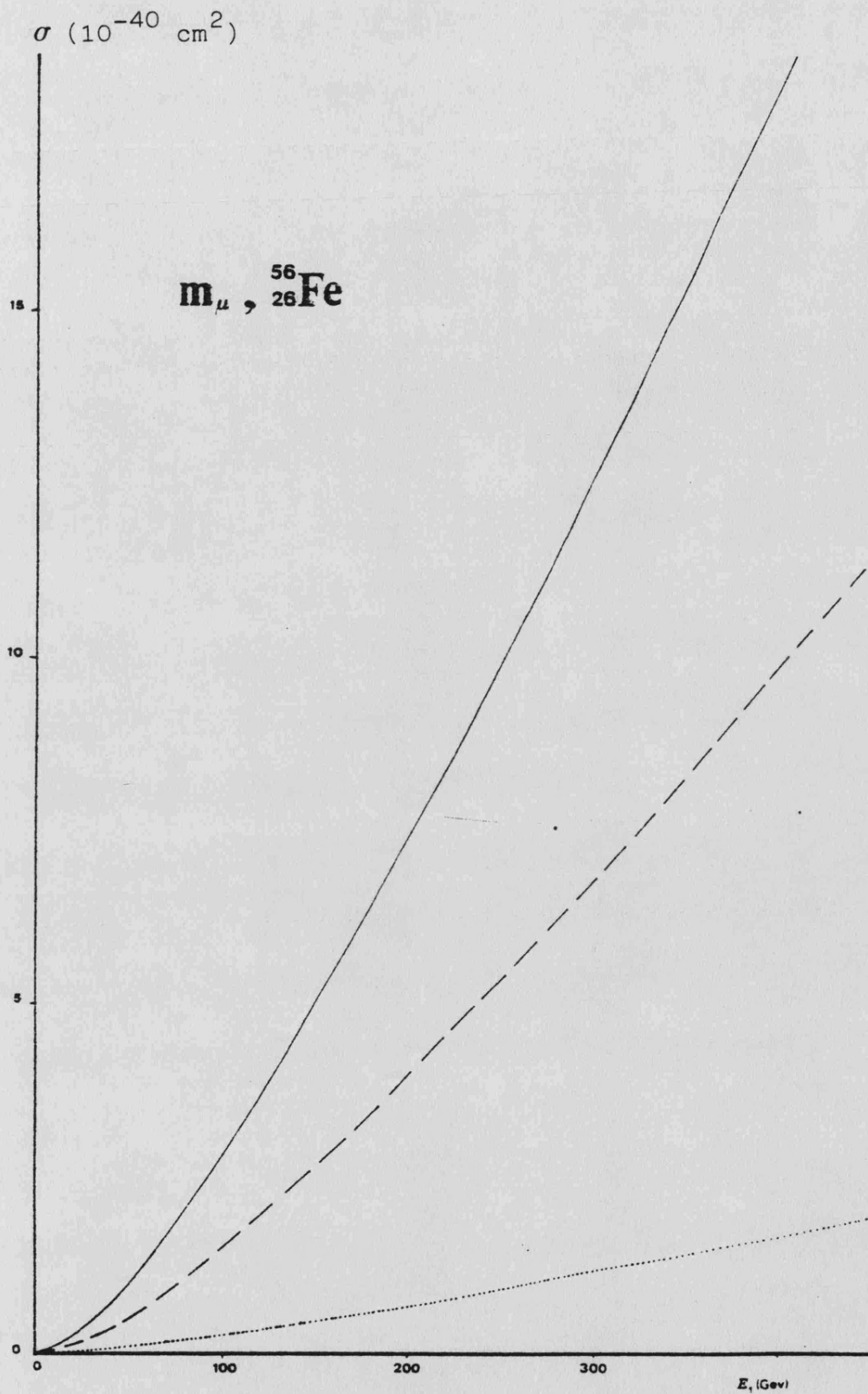


Fig. 6.1.- Sección eficaz total en función de  $E_1$  para el caso de muón incidente sobre  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ , suponiendo tres generaciones. La línea continua (—) corresponde a  $\lambda = -1/2$ , la línea punteada (.....) a  $\lambda = 1/2$  y la línea a trazos (—) al caso de muones no polarizados.

ha sido propuesta como un medio de obtener información sobre el número de generaciones sin tener que estudiar detalladamente el comportamiento de la sección eficaz (TU 80). Aunque la idea es buena, el valor estimado por Wu-Ki Tung para esta razón es incorrecto, por lo que procederemos ahora a obtener  $R_{\nu\bar{\nu}}$  a partir de nuestros resultados.

Obviamente, el proceso (6.34) solo puede transcurrir a través de corrientes cargadas, ya que los leptones cargados inicial y final son distintos. Además ya hemos visto que la amplitud de corrientes cargadas está suprimida por masas leptónicas para helicidades positivas, por lo que solo el canal con  $\lambda = -\frac{1}{2}$  resulta de interés.

Gracias a la relación (6.26) entre las amplitudes de corrientes cargadas y corrientes neutras para  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , todas las dependencias tanto dinámicas como cinemáticas pueden factorizarse al calcular la razón (6.35), con lo que esta se puede igualar a una relación entre constantes. Fácilmente se obtiene

$$R_{\nu\bar{\nu}}(\lambda = -1/2) \simeq 2(1 - \sin^2 \theta_w) + N \left( \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w \right)^2 \quad (6.36)$$

Si consideramos leptones no polarizados, el numerador de la expresión (6.35) se verá modificado por la contribución de  $\lambda = +\frac{1}{2}$ , por lo que cambia la predicción para  $R_{\nu\bar{\nu}}$

$$R_{\nu\bar{\nu}}(\text{no pol.}) \simeq \frac{\sum_{\lambda} \langle \lambda | \nu Z \rightarrow \bar{\nu} Z \nu \bar{\nu} \rangle}{\langle -1/2 | \nu Z \rightarrow \bar{\nu}' Z \nu_p \bar{\nu}'_p \rangle} \simeq 2(1 - \sin^2 \theta_w) + N \left[ \sin^2 \theta_w + \left( \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w \right)^2 \right] \quad (6.37)$$

CAPITULO VII. DISTRIBUCIÓN ENERGÉTICA DEL LEPTÓN CARGADO FINAL

7.1. Contracción de los tensores electromagnéticos leptónico y hadrónico

El método de funciones de estructura leptónica seguido en el capítulo cuatro, aunque ha permitido obtener una expresión analítica para la distribución de fotones virtuales, es incapaz de dar información alguna sobre las distribuciones leptónicas finales. Para obtener estas distribuciones, deberemos retroceder a los resultados obtenidos en el parrafo 4.5 y calcular la contracción del tensor electromagnético leptónico  $M_{\mu\nu}(P_1, q)$  con el tensor hadrónico  $(P + P')^\mu (P + P')^\nu$

Teniendo en cuenta que  $(P + P')^\mu \equiv (2P - q)^\mu$  y usando la conservación de la corriente electromagnética ( $q^\mu M_{\mu\nu} = q^\nu M_{\mu\nu} = 0$ ) tenemos

$$\begin{aligned} (P+P')^\mu (P+P')^\nu M_{\mu\nu}(P_1, q) &= 4 P^\mu P^\nu M_{\mu\nu}(P_1, q) \simeq \\ &\simeq \frac{2\pi}{3} \int \frac{d^3 P_2}{2 E_2} [x_1 - 2(x_2 - x_3 - x_5)] P^\mu P^\nu B_{\mu\nu\sigma} \end{aligned} \quad (7.1)$$

El cálculo de  $P^\mu P^\nu B_{\mu\nu\sigma}$  es inmediato. A partir de las ecuaciones (4.40), (4.41) y (4.43) se obtiene

$$P^\mu P^\nu B_{\mu\nu\sigma}^{(1)} \simeq -4(x_3+x_5) [2x_0(x_0 - \frac{1}{2}x_1) - M^2x_2] \\ + 2(2x_2-x_1)(2x_0x_7 - M^2x_5)$$

(7.2)

$$P^\mu P^\nu B_{\mu\nu\sigma}^{(2)} \simeq 4(x_2-x_5) [2x_7(x_7 + \frac{1}{2}x_1) + M^2x_3] \\ - 2(2x_3+x_1)(2x_0x_7 - M^2x_5)$$

$$P^\mu P^\nu B_{\mu\nu\sigma}^{(3)} \simeq 8(x_0+x_7)(x_2x_7 - x_0x_3) \\ - 8x_5 [2x_0x_7 + \frac{1}{2}x_1(x_0-x_7 + M^2)]$$

A diferencia de lo que sucedía con el método seguido en el capítulo cuatro, ahora tenemos dependencias explícitas en las variables  $x_0$  y  $x_7$ . En el sistema laboratorio estos dos invariantes son proporcionales a la masa del núcleo

$$x_0 \equiv (P_1 P) = ME_1 \quad ; \quad x_7 \equiv (P_2 P) = ME_2 \quad (7.3)$$

por lo que los términos dominantes en (7.2) son proporcionales a  $M^2$

Despreciando los términos en  $x_1/x_0$  y  $x_1/x_7$  (lo cual es equivalente a la aproximación estática  $q^0 = 0$  utilizada en el capítulo cuatro), la sección eficaz puede escri-

birse en la forma

$$\Gamma(\lambda) \simeq g(N, \lambda) \frac{2 Z^2 \alpha^2 G^2 M}{3 E_1 \pi^5} \sin^2 \theta_w \left( \frac{d^3 P_1}{2 E_1} \frac{d^3 P_2}{2 E_2} \right) \cdot \frac{|F(q^2)|^2}{(q^2)^2} T \quad (7.4)$$

donde

$$T = [x_1 - 2(x_2 - x_3 - x_5)] \left\{ \frac{2 E_1 E_2 - x_5}{2 x_2 - x_1} - \frac{2(x_3 + x_5)(2 E_1^2 - x_2)}{(2 x_2 - x_1)^2} \right. \\ \left. - \frac{2 E_1 E_2 - x_5}{(x_1 + 2 x_3)} + \frac{2(x_2 - x_5)(2 E_2^2 + x_3)}{(x_1 + 2 x_3)^2} \right. \\ \left. + \frac{8 x_5 (E_1 E_2 + \frac{1}{2} x_1) + 4(E_1 + E_2)(x_3 E_1 - x_2 E_2)}{(2 x_2 - x_1)(x_1 + 2 x_3)} \right\} \quad (7.5)$$

## 7.2. Espacio fásico

Para obtener la distribución de leptones finales, deberemos calcular los elementos de volumen de espacio fásico en el sistema laboratorio. El diferencial de volumen asociado con el cuadrimento nuclear, ya fue calculado anteriormente en función de los invariantes  $x_1$  y  $x_2$ , con el resultado dado en (4.62)

Para efectuar la integración sobre el cuadrimomento del leptón cargado, resulta conveniente escoger una orientación de ejes distinta a la de  $L_3$

$$\text{Referencia } L_5: \vec{P} = \vec{0}, (\vec{P}_1 + \vec{q}) \parallel \hat{z}, \vec{q} \in \text{Plano } (y=0) \quad (7.6)$$

Usaremos el conjunto de variables  $E_2, x_3$  y  $Z$ , donde esta última viene definida por

$$Z \equiv x_3 + x_5 = E_2 (E_1 + q^0) - |\vec{P}_2| |\vec{P}_1 + \vec{q}| \cos \theta_2 \quad (7.7)$$

$|\vec{P}_1 + \vec{q}|$  se obtiene fácilmente a partir de la expresión de la masa invariante al cuadrado de los tres leptones finales,  $(q + P_1)^2$ , en este sistema de referencia

$$|\vec{P}_1 + \vec{q}| = \sqrt{(q^0 + E_1)^2 - 2x_2 + x_4 - m^2} \equiv \sqrt{W} \quad (7.8)$$

por lo que podemos relacionar el diferencial sobre el ángulo polar  $\theta_2$  con el diferencial de  $Z$

$$dZ = |\vec{P}_2| \sqrt{W} d\cos \theta_2 \quad (7.9)$$

obteniendo

$$\frac{d^3 P_2}{2 E_2} = \frac{\pi}{\sqrt{W}} dE_2 dZ \frac{d\varphi_2}{2\pi} \quad (7.10)$$

El ángulo azimutal  $\psi_2$  es completamente arbitrario. La única variable que depende de  $\psi_2$  es  $x_3$

$$\begin{aligned} x_3 \equiv (q \cdot \vec{p}_2) &= q^0 E_2 - |\vec{q}| |\vec{p}_2| (\cos \theta_q \cos \theta_2 + \sin \theta_q \sin \theta_2 \cos \psi_2) \\ &\equiv A_3 - B_3 \cos \psi_2 \end{aligned} \quad (7.11)$$

A partir de la ecuación (7.7) y de la expresión de  $q \cdot (q + P_1)$  en este sistema, podemos expresar los ángulos  $\theta_2$  y  $\theta_q$  en términos de invariantes, obteniendo para los coeficientes  $A_3$  y  $B_3$

$$\begin{aligned} A_3 &= q^0 E_2 - [E_2 (E_1 + q^0) - Z] \cdot [q^0 (E_1 + q^0) + x_1 - x_2] / W \\ B_3^2 &= \left\{ |\vec{p}_2|^2 - [E_2 (E_1 + q^0) - Z]^2 / W \right\} (x_1 + q_0^2) \\ &\quad - [q^0 (E_1 + q^0) + x_1 - x_2]^2 / W \end{aligned} \quad (7.12)$$

La obtención de los límites cinemáticos es bastante tediosa.  $Z$  viene relacionada con la masa invariante al cuadrado del par neutrino-antineutrino,  $k^2$ , a través de la ecuación

$$Z = x_2 - \frac{1}{2} x_1 + m^2 - \frac{1}{2} k^2 \quad (7.13)$$

por lo que los límites sobre  $k^2$

$$0 \leq k^2 \leq k_c^2 = (E_1 + q^0 - E_2)^2 \quad (7.14)$$



nos imponen las restricciones

$$Z_1 \leq Z \leq Z_3 \quad (7.15)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_1 &\equiv X_2 - \frac{1}{2} X_1 + m^2 - \frac{1}{2} (E_1 + q^0 - E_2)^2 \\ Z_3 &\equiv X_2 - \frac{1}{2} X_1 + m^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Por otra parte, a partir de la condición  $-1 \leq \cos \theta_2 \leq 1$ , obtenemos

$$Z_2 \leq Z \leq Z_4 \quad (7.17)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_2 &\equiv E_2 (E_1 + q^0) - |\vec{P}_2| \sqrt{W} \\ Z_4 &\equiv E_2 (E_1 + q^0) + |\vec{P}_2| \sqrt{W} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Es fácil comprobar que  $Z_2$  es siempre mayor o igual que  $Z_1$ , por lo que  $\underline{Z} = Z_2$ . La extracción de  $\bar{Z}$  no es tan inmediata debido a la existencia de cortes entre las diversas cotas

$$\begin{aligned} Z_3 = Z_4 &\longleftrightarrow (X_2 = \xi_+ \wedge E_1 + q^0 \geq E_2 + |\vec{P}_2|) \\ Z_3 = Z_2 &\longleftrightarrow (X_2 = \xi_+ \wedge E_1 + q^0 \leq E_2 + |\vec{P}_2|) \vee (X_2 = \xi_-) \end{aligned} \quad (7.19)$$

donde

$$\xi_{\pm} \equiv \frac{1}{2} x_1 + (E_1 + q^0 - E_2) (E_2 \pm |\vec{P}_2|) \quad (7.20)$$

En la zona  $[x_2 > \xi_+ \wedge E_1 + q^0 > E_2 + |\vec{P}_2|]$ ,  $Z_3$  es mayor que  $Z_4$ , mientras que  $Z_4 > Z_3$  en los demás casos. Los cortes de  $Z_2$  y  $Z_3$  son particularmente interesantes, ya que las zonas en donde  $Z_3$  sea menor que  $Z_2$  estarán cinemáticamente prohibidas. Esto ocurre en la zona  $[x_2 > \xi_+ \wedge E_1 + q^0 < E_2 + |\vec{P}_2|]$  y para  $x_2 < \xi_-$ . Dado que  $\xi_-$  es siempre mayor o igual que la cota inferior de  $x_2$ ,  $\frac{1}{2} x_1$ , obtenida en el capítulo cuatro, esta última condición nos dice que  $\underline{x}_2 = \xi_-$ .

Estudiemos ahora los cortes de  $\xi_{\pm}$  con la cota superior de  $x_2$  obtenida en el capítulo cuatro

$$x_2 \leq \rho \equiv |\vec{P}_1| \sqrt{x_1 + q_0^2} + E_1 q_0 \quad (7.21)$$

La ecuación  $\xi_{\pm} = \rho$  tiene como soluciones

$$\epsilon_{\pm} = z_{\pm} \equiv \frac{(E_1 + q^0) (\rho - \frac{1}{2} x_1 + m^2) \pm (\rho - \frac{1}{2} x_1) \sqrt{(E_1 + q^0)^2 - 2\rho + x_1 - m^2}}{2\rho - x_1 + m^2} \quad (7.22)$$

A altas energías ( $E_1 \gg m, \sqrt{x_1}$ ) podemos aproximar  $z_{\pm}$

por las expresiones

$$\begin{aligned} z_+ &\simeq E_1 - \frac{1}{2} \sqrt{x_1} \\ z_- &\simeq \frac{1}{2} \sqrt{x_1} + \frac{m^2}{2 \sqrt{x_1}} \left\{ 1 + \frac{m_1^2 - x_1}{2 E_1 \sqrt{x_1}} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (7.23)$$

El corte en  $E_2 = z_+$  corresponde siempre a  $\xi_+$ , sin embargo en  $E_2 = z_-$  el corte depende de la relación entre  $\rho$  y

$$\omega \equiv \frac{1}{2} x_1 + m (E_1 + q^0 - m) \quad (7.24)$$

Para  $\rho$  mayor que  $\omega$ , es  $\xi_+$  quien corta a  $\rho$  en  $E_2 = z_-$ , mientras que para  $\rho$  menor que  $\omega$  el corte corresponde a  $\xi_-$ . La situación aparece esquematizada en la figura 7.1, donde se consideran los distintos casos. La zona sombreada señala el espacio fásico permitido. Para  $\rho = \omega$ ,  $\xi_+$  y  $\xi_-$  coinciden en  $E_2 = z_-$ , y  $z_- = m$ . Nótese que la relación entre  $\rho$  y  $\omega$  corresponde muy aproximadamente a la de  $x_1^{1/2}$  y  $m$  ( $\rho \simeq E_1 x_1^{1/2}$  y  $\omega \simeq E_1 m$ ).

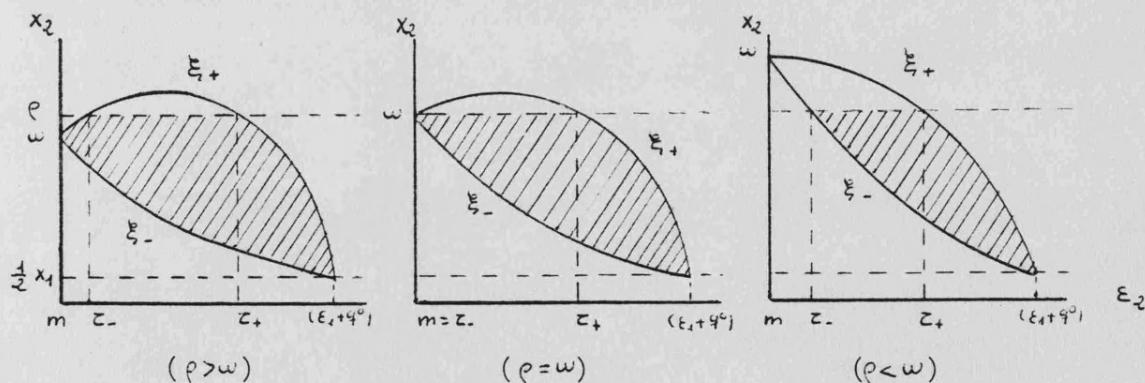


Fig. 7.1.- Zonas permitidas cinemáticamente en el plano  $(E_2, x_2)$ , para  $\rho > \omega$ ,  $\rho = \omega$  y  $\rho < \omega$ . Los valores de  $E_1$  y  $x_1$ , así como las escalas de abscisas y ordenadas, son arbitrarios.

Los límites cinemáticos sobre las variables  $x_2$  y  $z$  son pues

$$\begin{aligned} \underline{z} &= z_2 \equiv E_2(E_1 + q^0) - |\vec{P}_2| \sqrt{w} \\ \bar{z} &= \begin{cases} z_4 \equiv E_2(E_1 + q^0) + |\vec{P}_2| \sqrt{w} & , \text{ si } [x_2 > \xi_+ \wedge E_2 < z_- \wedge \rho > w] \\ z_3 \equiv x_2 - \frac{1}{2}x_1 + m^2 & , \text{ en los demás casos} \end{cases} \\ \underline{x}_2 = \xi_- &\equiv \frac{1}{2}x_1 + (E_1 + q^0 - E_2)(E_2 - |\vec{P}_2|) \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\bar{x}_2 = \begin{cases} \rho \equiv |\vec{P}_1| \sqrt{x_1 + q^2} + E_1 q^0 & , \text{ si } E_2 \leq z_+ \\ \xi_+ \equiv \frac{1}{2}x_1 + (E_1 + q^0 - E_2)(E_2 + |\vec{P}_2|) & , \text{ si } E_2 \geq z_+ \end{cases}$$

El límite superior de  $x_1$  se deduce fácilmente a partir de la igualdad

$$x_1 = 2M(E_1 - E_2 - k^0) \quad (7.26)$$

que no es más que la ley de conservación de la energía. Como  $k^0$  es siempre positivo, tendremos obviamente que  $x_1$  debe ser menor o igual que  $2M(E_1 - E_2)$ . Sin embargo, para pequeños valores de  $E_2$  este límite es superior a la cota absoluta dada en (4.69). El corte entre ambas cotas ocurre en

$$E_2 = \Delta \equiv \frac{E_1 [1 + m^2/M^2 + 2m^2/E_1 M]}{1 + 2E_1/M + m^2/M^2} \quad (7.27)$$

por lo que

$$\bar{x}_1 = \begin{cases} 2M(E_1 - E_2) & , \text{ si } E_2 \geq \Delta \\ \frac{4|\vec{p}_1|^2}{1 + 2E_1/M + m^2/M^2} & , \text{ si } E_2 \leq \Delta \end{cases} \quad (7.28)$$

Para  $\varrho < \omega$ , la zona  $E_2 < \tau_-$  está cinemáticamente prohibida. Esto impone un límite inferior para  $x_1$  que, obviamente, será proporcional a la masa del leptón. Cogiendo para  $\tau_-$  la expresión aproximada (7.23) es fácil deducir

$$\sqrt{x_1} \simeq \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left[ 1 - \sqrt{1 - m^2 \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1^2 E_2^2}} \right] \quad (7.29)$$

Para  $E_2 \gg m$ ,  $\sqrt{x_1} \simeq \frac{1}{2} m^2 \frac{E_1 - E_2}{E_1 E_2}$ , mientras que cuando  $E_2$  se acerca a su límite inferior  $m$ ,  $x_1$  tiende también a  $m$ .

### 7.3. Integración en $\gamma_2$

Sustituyendo en la ecuación (7.4) los diferenciales de volumen de espacio fásico dados en (4.62) y (7.10), obtenemos la siguiente expresión para la sección eficaz

diferencial

$$\frac{d\psi(d)}{dE_2} \approx g(N, \lambda) \frac{z^2 \alpha^2 G^2}{3 \pi^3 E_1^2} \sin^2 \theta_w \int \frac{dx_1}{x_1^2} |F(x_1)|^2$$

$$\cdot \frac{dx_2 dz}{\sqrt{w}} \frac{d\psi_2}{2\pi} T$$

(7.30)

donde  $T$  está ahora expresado en función de la nueva variable  $Z$

$$T = (x_1 - 2x_2 + 2z) \left\{ \frac{2E_1^2 - x_1 + x_3}{2x_2 - x_1} - \frac{2z(2E_1^2 - \frac{1}{2}x_1)}{(2x_2 - x_1)^2} \right.$$

$$+ \frac{1}{(x_1 + 2x_3)} \left[ x_2 - \frac{1}{2}x_1 - 4E_1E_2 + \frac{8E_1E_2z + 2x_1(z + \frac{1}{2}x_1 - E_1^2 - E_2^2)}{2x_2 - x_1} \right]$$

$$\left. - \frac{2(2E_2^2 - \frac{1}{2}x_1)(z + \frac{1}{2}x_1 - x_2)}{(x_1 + 2x_3)^2} \right\}$$

(7.31)

La única dependencia del integrando en la variable  $\psi_2$  es a través del invariante  $x_3$ , el cual solo aparece en los propagadores y linealmente. La integración en  $\psi_2$  puede realizarse analíticamente con el resultado

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi_2}{2\pi} [x_3, (x_1 + 2x_3)^{-1}, (x_1 + 2x_3)^{-2}] =$$

$$= [A_3, s^{-1/2}, (x_1 + 2A_3) s^{-3/2}]$$

(7.32)

donde

$$S \equiv (x_1 + 2A_3)^2 - 4B_3^2 \quad (7.33)$$

Tomando  $q^0 \simeq 0$  en las ecuaciones (7.12), podemos aproximar  $A_3$  y  $s$  por las expresiones

$$\begin{aligned} A_3 &\simeq (E_1 E_2 - z_1 (x_2 - x_1)) / W \\ s &\simeq 4x_1 (a - bz + z^2) / W \end{aligned} \quad (7.34)$$

donde

$$\begin{aligned} a &\simeq E_1^2 \left( \frac{1}{4} x_1 + m^2 \right) + |\vec{P}_2|^2 (m^2 + x_2^2 / x_1) + E_1 E_2 (x_2 - x_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} x_1 (2x_2 - x_1 + m^2) \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$b \simeq 2E_1 E_2 + x_2 - x_1$$

#### 7.4 Estimación analítica para masa nula

Tomando la masa del leptón igual a cero, es posible obtener una estimación analítica de la parte más energética del espectro ( $E_2 \gg m$ ), ya que las cotas cinemáticas se simplifican considerablemente en este caso. Para masa nula,  $z_- \simeq \frac{1}{2} \sqrt{x_1}$  y  $z_+ \simeq E_1 - \frac{1}{2} \sqrt{x_1}$  por lo que la zona problemática ( $E_2 < z_-$  y  $E_2 > z_+$ ) del

espacio fásico ( $E_2, x_1$ ) puede ser ignorada si los  $x_1$  dominantes, en la integración del factor de forma, son mucho menores que la energía al cuadrado del leptón cargado saliente.

Las cotas (7.25) pueden ser aproximadas por las expresiones mucho más simples

$$\begin{aligned} \bar{z} &\simeq E_2 (E_1 - \sqrt{W}) \simeq x_2 E_2 / E_1 \\ \bar{z} &\simeq x_2 \\ \underline{x}_2 &\simeq \frac{1}{2} x_1 \\ \bar{x}_2 &\simeq E_1 \sqrt{x_1} \end{aligned} \tag{7.36}$$

Como ya vimos al calcular la distribución de fotones virtuales, la sección eficaz está dominada por los valores de  $x_2$  cercanos a su límite superior ( $x_2 \sim E_1 \sqrt{x_1}$ ). La expresión de "s" dada en (7.34) vendrá, pues, dominada por el término  $|\vec{P}_2|^2 x_2^2 / x_1$  de "a", que crece como una cuarta potencia de energía en la zona importante ( $\sim E_2^2 E_1^2$ ). Manteniendo solamente el orden siguiente en  $\sqrt{x_1} / E_1$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} a &\simeq E_2^2 x_2^2 / x_1 + E_1 E_2 x_2 \\ b &\simeq 2 E_1 E_2 \end{aligned} \tag{7.37}$$



por lo que

$$S \approx \frac{4 E_2^2 X_2^2}{W} \left[ 1 + \frac{E_1 X_1}{E_2 X_2} \left( 1 - \frac{2Z}{X_2} \right) \right] \quad (7.38)$$

A partir de esta expresión, podemos aproximar las integrales en  $\Psi_2$  (7.32) por

$$\begin{aligned} A_3 &\approx \frac{1}{W} [ E_2 E_1 (X_2 - X_1) - Z X_2 ] \\ S^{-1/2} &\approx \frac{\sqrt{W}}{2 E_2 X_2} \left[ 1 - \frac{E_1 X_1}{2 E_2 X_2} \left( 1 - \frac{2Z}{X_2} \right) \right] \\ (X_1 + 2 A_3) S^{-3/2} &\approx \frac{E_1 \sqrt{W}}{4 E_2^2 X_2^2} \left[ 1 - \frac{X_1}{X_2} \left( 1 + \frac{E_1}{E_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{Z}{E_1 E_2} \left( 1 - \frac{3 E_1^2 X_1}{X_2^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.39)$$

Utilizando estos resultados, es fácil comprobar que los términos dominantes se cancelan entre sí al efectuar la integración de T en la variable  $\Psi_2$ . Esta es la razón de que en las expresiones (7.37), (7.38) y (7.39) hayamos mantenido el orden siguiente. El resultado obtenido al integrar el ángulo azimutal es

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\Psi_2}{2\pi} \frac{T}{\sqrt{W}} &\approx \left( \frac{X_2^2}{E_1^2} - X_1 \right) \left\{ -\frac{4}{3} \frac{E_1}{X_2} + \frac{8 Z E_1}{3 X_2^2} \left( 1 + \frac{E_1}{2 E_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4 E_1 Z^2}{3 X_2^3} \left( 1 + \frac{2 E_1}{E_2} \right) + \frac{4 Z^3 E_1^2}{3 E_2 X_2^4} - \frac{2 E_1}{3 X_2^2} (X_2 - Z) \left( \frac{E_1}{E_2} + \frac{E_2}{E_1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (7.40)$$

La integración en los invariantes  $z$  y  $x_2$  puede ahora ser realizada sin dificultad, obteniéndose

$$\frac{d\sigma}{dE_2}(\Delta) \approx g(N, \Delta) \langle \sigma \rangle Z^2 b \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{E_2^3}{E_1^3} \right) \quad (7.41)$$

$(E_2 \gg m, \langle x_1 \rangle^{1/2})$

donde  $\langle \sigma \rangle$  y  $b$  vienen definidos en la expresión (4.92)

En las figuras 7.2 y 7.3 hemos representado esta distribución de energías del leptón cargado saliente para los núcleos  $^{56}_{26}\text{Fe}$  y  $^{208}_{82}\text{Pb}$ , respectivamente. Para ello, hemos tomado los valores de "b" dados en la tabla 4.1. Las curvas dibujadas corresponden al caso de una generación y helicidad positiva; es decir, se ha representado la distribución

$$\langle \sigma(E_2) \rangle \equiv \frac{d\sigma}{dE_2}(\Delta) / g(N, \Delta) \quad (7.42)$$

El espectro energético obtenido diverge como  $E_2^{-1}$  al disminuir la energía  $E_2$ . Sin embargo, esta divergencia es ficticia, ya que aparece debido a las aproximaciones realizadas, que sólo son válidas en la zona de alta energía  $(E_2 \gg m, \langle x_1 \rangle^{1/2})$

Si observamos las figuras, es evidente que las distribuciones energéticas están fuertemente picadas en la zona de bajas energías, donde nuestra estimación no es

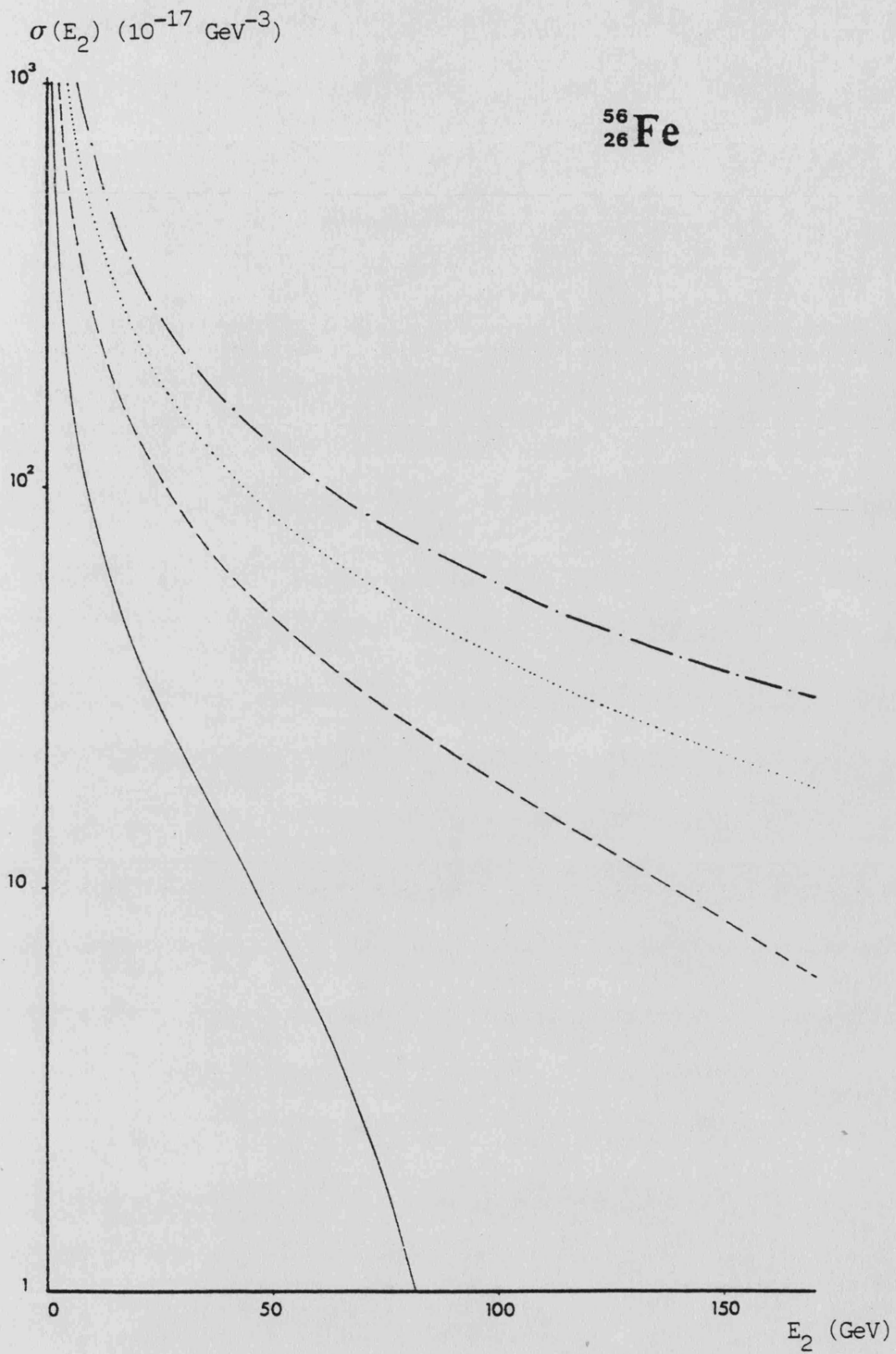


Fig. 7.2.- Distribución energética del leptón cargado saliente en la aproximación de masa nula para  $^{56}_{26}\text{Fe}$ . Las distintas curvas corresponden e energías incidentes de 100 (—), 300 (---), 500 (···) y 700 GeV (—·—).

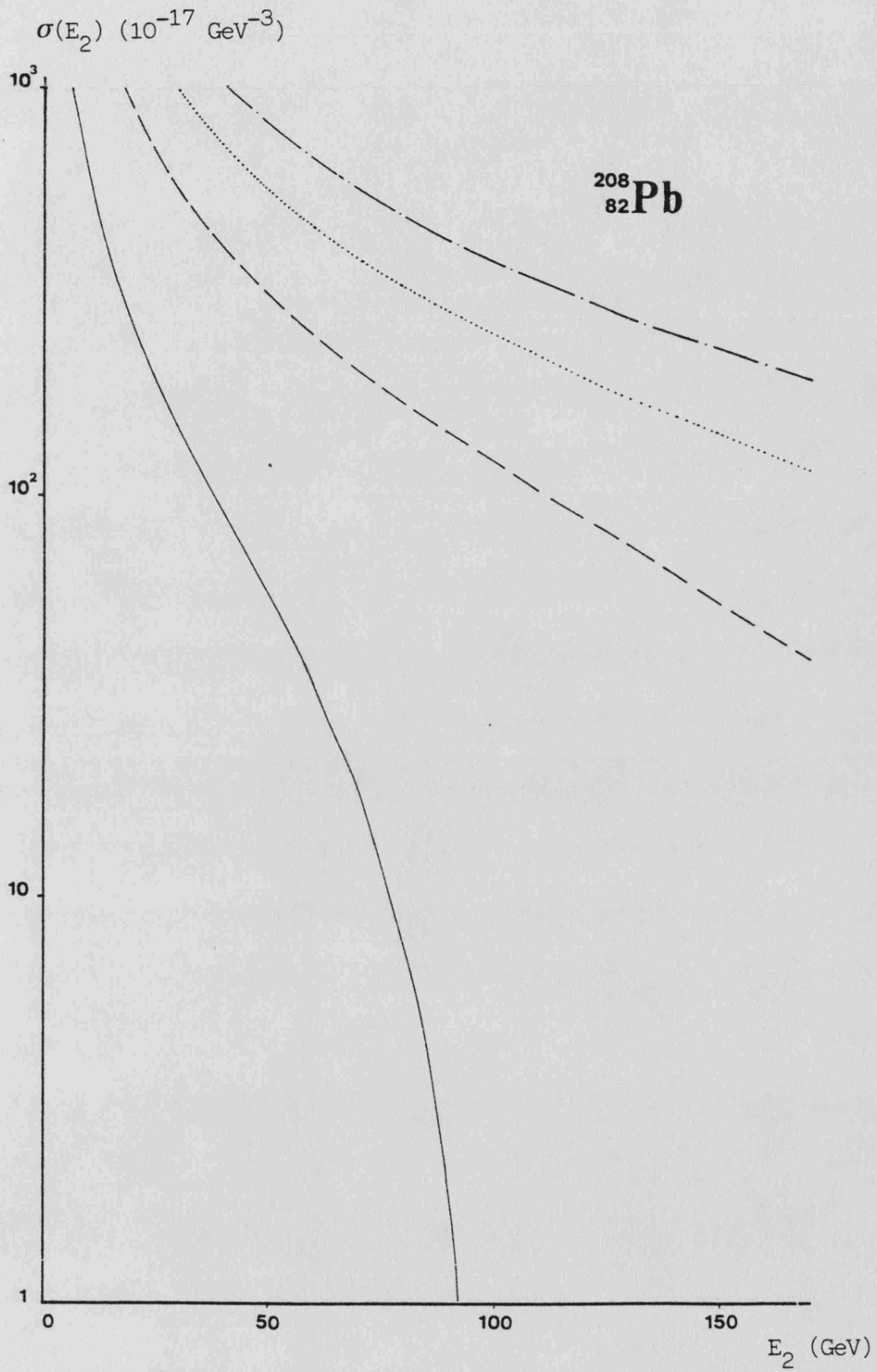


Fig. 7.3.- Lo mismo que la figura 7.2, pero para  $^{208}_{82}\text{Pb}$ .

adecuada. Por lo tanto, deberemos recurrir a métodos numéricos para estudiar el comportamiento de  $\nabla(E_2)$  en dicha zona.

### 7.5. Cálculo numérico del espectro energético

Para obtener la distribución energética del leptón cargado final, hemos efectuado numéricamente las integraciones en las variables invariantes  $x_1$ ,  $x_2$  y  $z$ . Hemos estudiado el comportamiento de  $\nabla(E_2)$  tanto para muones como para electrones, tomando energías iniciales de 100 y 300 GeV. El cálculo ha sido efectuado en el caso del  $^{56}_{26}\text{Fe}$  solamente. Para el  $^{208}_{82}\text{Pb}$  se obtendría un resultado similar ya que la forma de la distribución es debida principalmente a efectos cinemáticos; la única diferencia estribaría en que el caso del plomo daría valores de  $\nabla(E_2)$  mayores.

En la figura 7.4 aparecen representados los resultados obtenidos. A grandes rasgos hemos reproducido los valores analíticos encontrados para masa nula. La distribución aparece fuertemente picada a bajas energías. Para energías finales mayores de 1 GeV el comportamiento es similar para muones y electrones, aunque con valores de  $\nabla(E_2)$  ligeramente mayores en este último caso. La distribución de energías para electrones se ajusta con mucha aproximación a la expresión (7.41) a estas energías.

En las figuras 7.5, 7.6 y 7.7, aparece ampliada la zona de bajas energías de la figura 7.4. El máximo de la

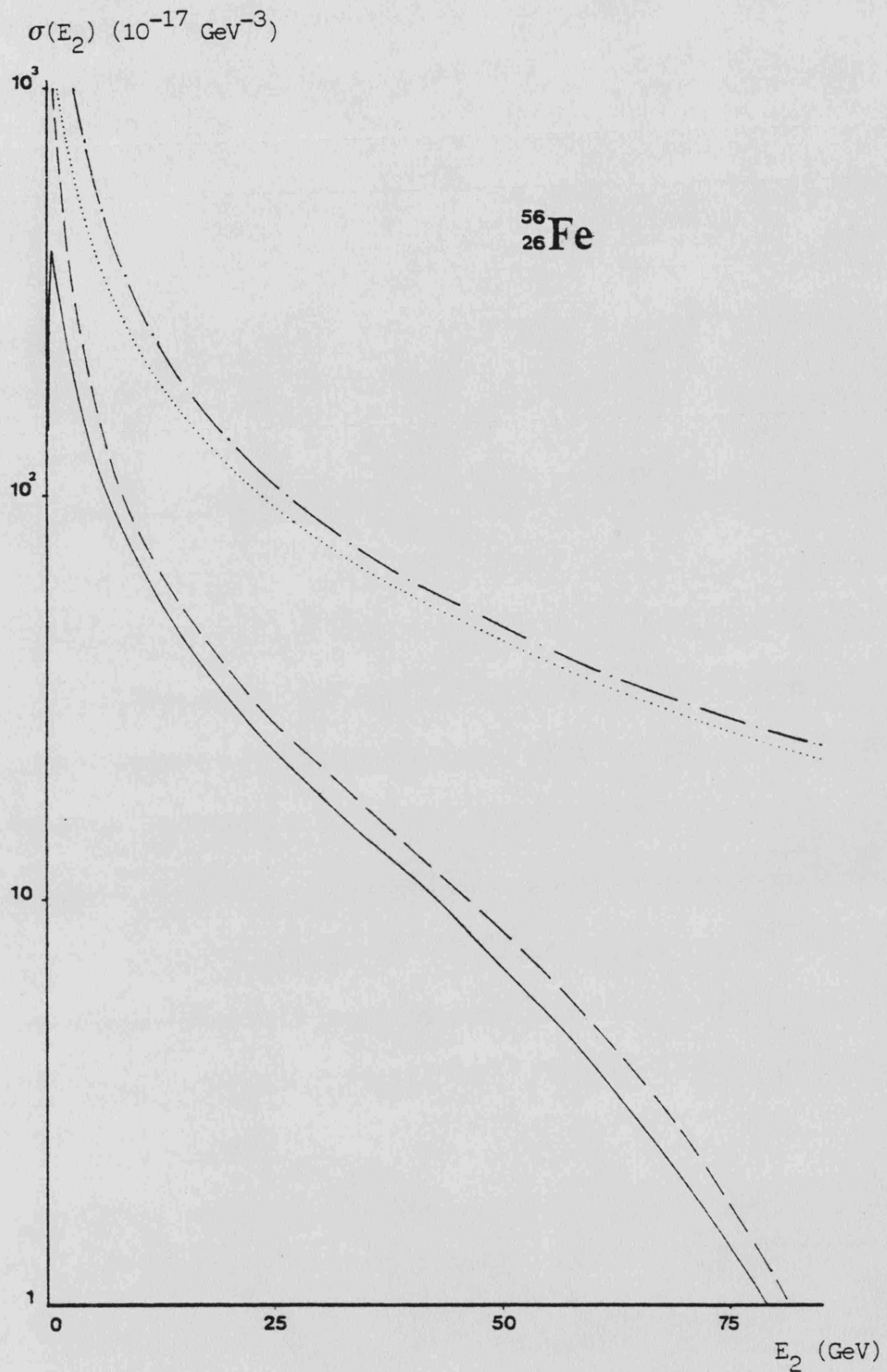


Fig. 7.4.- Distribución energética del leptón cargado saliente para  $^{56}_{26}\text{Fe}$ . Las distintas curvas corresponden a muones incidentes de 100 GeV (—), electrones de 100 GeV (---), muones de 300 GeV (.....) y electrones de 300 GeV (-.-).

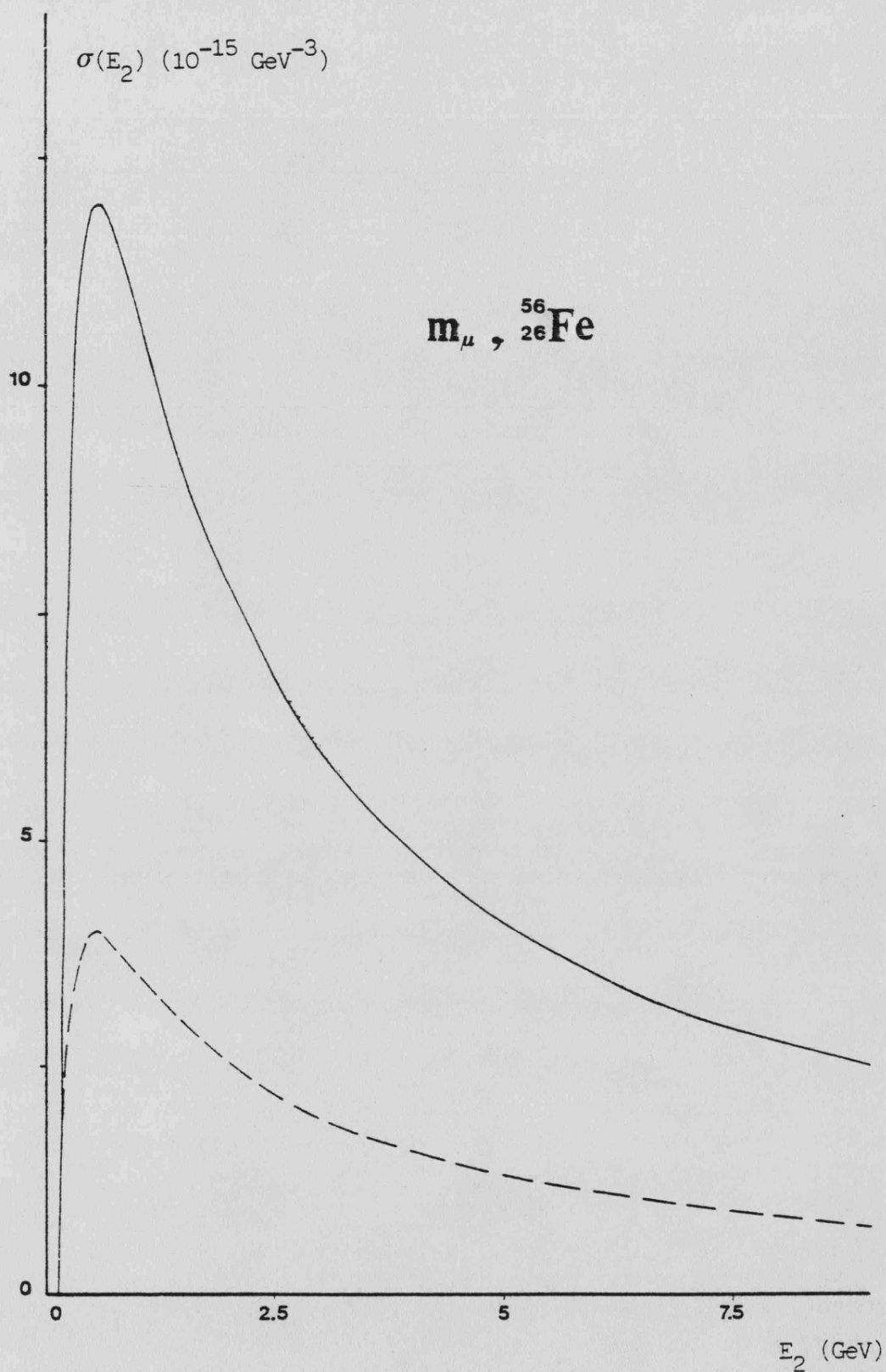


Fig. 7.5.- Ampliación de la zona de bajas energías de la figura 7.4 para muones incidentes de 100 (—) y 300 GeV (---).

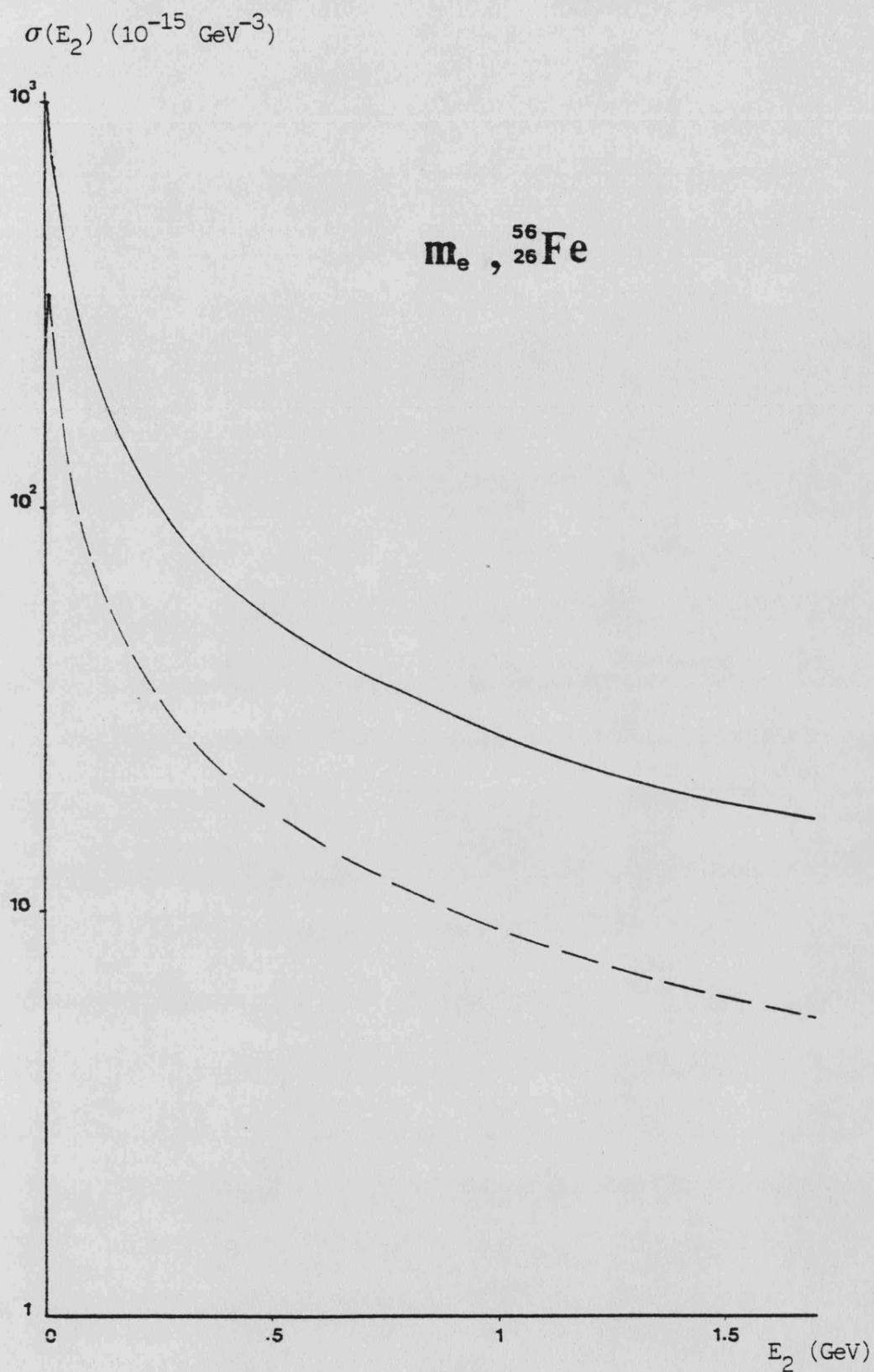


Fig. 7.6.- Ampliación de la zona de bajas energías de la figura 7.4 para electrones de 100 (—) y 300 GeV (---).



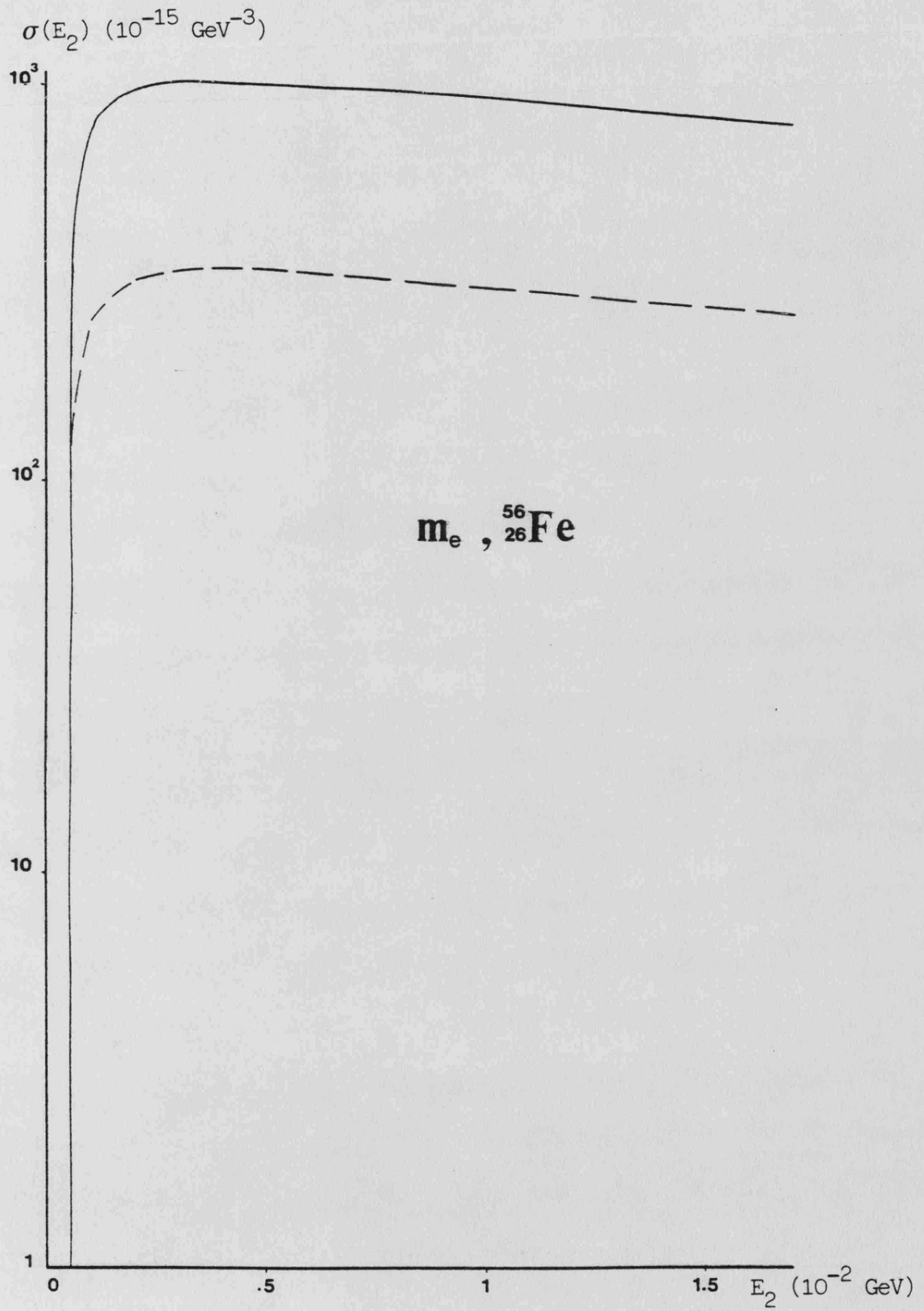


Fig. 7.7.- Ampliación de la zona de bajas energías de la figura 7.6 para electrones de 100 (---) y 300 GeV (—).

distribución energética está situado prácticamente sobre el límite inferior de  $E_2$ , cayendo  $\langle E_2 \rangle$  bruscamente a cero para  $E_2 = m$ . Tanto a 100 como a 300 GeV, el máximo de  $\langle E_2 \rangle$  ocurre a una energía  $E_2$  aproximadamente igual a 600 MeV para muones y 3-4 MeV para electrones, es decir, entre seis y siete veces la masa del leptón. Los valores medios de la energía leptónica final,  $\langle E_2 \rangle$ , vienen dados en la tabla 7.1

	$\langle E_2 \rangle$ (GeV)	
$E_1$ (GeV)	muón	electrón
100	12.7	6.2
300	30.7	15.6

Tabla 7.1

Valores medios de  $E_2$  en GeV.

Así pues, el leptón cargado pierde una gran cantidad de energía durante el proceso de radiación del par neutrino-antineutrino. Este hecho puede ser de gran importancia a la hora de estudiar el proceso experimentalmente, ya

que el enorme "back-ground" existente (principalmente la difusión elástica del leptón, y su frenado en el campo coulombiano con emisión de fotones), produce mayoritariamente leptones finales áltamente energéticos.

CAPITULO VIII    DISTRIBUCION ANGULAR

8.1. Espacio Fásico

Para obtener la distribución angular del leptón cargado final, deberemos estudiar la cinemática de nuestro proceso utilizando como variables la energía  $E_2$  y el ángulo polar  $\theta_2$ , en el sistema laboratorio. Los ángulos  $\theta_2$  y  $\psi_2$  los referiremos respecto a la dirección del leptón incidente, es decir, en la referencia  $L_1$  definida por la condición  $\vec{P}_1 \parallel \hat{Z}$ . Como la colisión posee simetría cilíndrica, el ángulo  $\psi_2$  puede integrarse directamente. El elemento de volumen asociado al cuadrimomento  $P_2$  será pues

$$\frac{d^3 P_2}{2 E_2} = \pi |\vec{P}_2| dE_2 d\cos\theta_2 \quad (8.1)$$

Todas las dependencias angulares provendrán del invariante  $x_5$ , que en este sistema toma la expresión

$$x_5 = E_1 E_2 - |\vec{P}_1| |\vec{P}_2| \cos\theta_2 \quad (8.2)$$

La integración sobre el cuadrimomento del fotón virtual la efectuaremos también en el sistema laboratorio,

pero escogiendo una orientación de ejes distinta

$$\text{Referencia } L_6 : \vec{P}=\vec{0}, (\vec{P}_1-\vec{P}_2) \parallel \hat{z}, \hat{P}_2 \in \text{Plano } (y=0) \quad (8.3)$$

En este sistema de referencia, resulta conveniente sustituir el invariante  $x_2$  por una nueva variable cinemática definida por

$$Y \equiv x_2 - x_3 \equiv (P_1 - P_2) \cdot q = q^0 (E_1 - E_2) - |\vec{q}| |\vec{P}_1 - \vec{P}_2| \cos \theta_q \quad (8.4)$$

que usaremos para integrar el ángulo polar del fotón virtual

$$dY = |\vec{q}| |\vec{P}_1 - \vec{P}_2| d\cos\theta_q \quad (8.5)$$

A partir del invariante  $(P_1 - P_2)^2 = 2(x_5 - m^2)$ , se obtiene inmediatamente el valor de  $|\vec{P}_1 - \vec{P}_2|$  que aparece en esta última expresión

$$|\vec{P}_1 - \vec{P}_2| = \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 2(x_5 - m^2)} \equiv \sqrt{H} \quad (8.6)$$

La integración en  $|\vec{q}|$  la efectuaremos, al igual que en el capítulo cuatro, haciendo uso de la relación (4.61)

entre esta variable y la masa al cuadrado del fotón virtual

$$dx_4 = 2M \frac{|\vec{q}_1|}{E'} d|\vec{q}_1| \quad (8.7)$$

Usando las expresiones (8.5), (8.6) y (8.7), obtenemos para el elemento de volumen asociado a  $P'$

$$\frac{d^3 P'}{2 E'} = \frac{d^3 q}{2 E'} = \frac{\pi}{2M\sqrt{H}} dx_4 dY \frac{d\psi_q}{2\pi} \quad (8.8)$$

El ángulo azimutal  $\psi_q$  no está sometido a ninguna restricción cinemática. La única dependencia en  $\psi_q$  es a través del invariante  $x_3$

$$\begin{aligned} x_3 \equiv (P_2 q) &= E_2 q^0 - |\vec{P}_2| |\vec{q}_1| (\cos \theta_2 \cos \theta_q + \sin \theta_2 \sin \theta_q \cos \psi_q) \equiv \\ &\equiv \check{P} - \check{Q} \cos \psi_q \end{aligned} \quad (8.9)$$

Los ángulos  $\theta_2$  y  $\theta_q$  pueden ser expresados en función de invariantes, a partir de la expresión de  $(P_1 - P_2) \cdot P_2$  e  $Y$  en este sistema de referencia, con lo que los coeficientes  $\check{P}$  y  $\check{Q}$  adoptan la forma

$$\begin{aligned} \check{P} &= E_2 q^0 + [Y - q^0 (E_1 - E_2)] [E_2 (E_1 - E_2) - x_5 + m^2] / H \\ \check{Q} &= \left\{ |\vec{P}_2|^2 - [E_2 (E_1 - E_2) - x_5 + m^2]^2 / H \right\}^{1/2} \left\{ |\vec{q}_1|^2 - [q^0 (E_1 - E_2) - Y]^2 / H \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (8.10)$$

La obtención de los límites cinemáticos sobre este conjunto de variables no es trivial. A partir de la condición  $-1 \leq \cos \theta_q \leq 1$  obtenemos

$$y_1 \leq y \leq y_2 \quad (8.11)$$

donde

$$\begin{aligned} Y_1 &\equiv \varphi^0 (E_1 - E_2) - |\vec{q}| \sqrt{H} \\ Y_2 &\equiv \varphi^0 (E_1 - E_2) + |\vec{q}| \sqrt{H} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Por otra parte, la variable "y" viene relacionada con la masa invariante al cuadrado del par neutrino-antineutrino,  $k^2$ , a través de la ecuación

$$Y = x_5 + \frac{1}{2} x_1 - m^2 + \frac{1}{2} k^2 \quad (8.13)$$

por lo que las cotas (7.14) sobre  $k^2$  nos imponen las restricciones

$$y_3 \leq y \leq y_4 \quad (8.14)$$

donde

$$\begin{aligned} Y_3 &\equiv x_5 + \frac{1}{2} x_1 - m^2 \\ Y_4 &\equiv x_5 + \frac{1}{2} x_1 - m^2 + \frac{1}{2} (E_1 - E_2 + \varphi^0)^2 \end{aligned} \quad (8.15)$$

Es fácil comprobar que  $y_1 < y_3$  (obvio por ser  $y_1$  siempre negativo) e  $y_2 \leq y_4$ , por lo que los límites sobre el invariante  $y$  vienen dados por

$$\underline{y} = y_3 \quad ; \quad \bar{y} = y_2 \quad (8.16)$$

El volumen de espacio fásico cinemáticamente permitido deberá cumplir que  $\underline{y} \leq \bar{y}$ . Esto impone una restricción sobre los posibles valores de  $x_5$

$$x_5^- \leq x_5 \leq x_5^+ \quad (8.17)$$

donde

$$x_5^\pm \equiv \frac{1}{2} x_1 + m^2 + (q^0 \pm |\vec{q}|) (E_1 - E_2 + q^0) \quad (8.18)$$

Dado que  $x_5$  es función de  $E_2$  y  $\theta_2$ , las condiciones (8.17) permiten extraer límites sobre estas variables. Por simplicidad, vamos a estudiar estas restricciones tomando  $q^0 \simeq 0$ . La desigualdad  $x_5^- \leq x_5$  puede escribirse en la forma

$$(E_1 + \sqrt{x_1})(E_2 - E_2^A) \leq |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \theta_2 \quad (8.19)$$



donde

$$E_2^A \equiv \frac{E_1 \sqrt{x_1} + \frac{1}{2} x_1 + m^2}{E_1 + \sqrt{x_1}} \quad (8.20)$$

Si  $\cos \theta_2$  es mayor o igual que cero, la condición (8.19) se cumple en las zonas  $E_2 \leq E_2^A$  y  $[E_2 \geq E_2^A \wedge P(E_2) \leq 0]$ , mientras que para  $\cos \theta_2$  negativo solo se cumple en la zona  $[E_2 \leq E_2^A \wedge P(E_2) \geq 0]$ , donde  $P(E_2)$  es un polinomio de segundo grado en  $E_2$

$$P(E_2) \equiv E_2^2 [(E_1 + \sqrt{x_1})^2 - |\vec{P}_1|^2 \cos^2 \theta_2] - 2 E_2 (E_1 + \sqrt{x_1})^2 E_2^A + (E_1 + \sqrt{x_1})^2 E_2^A{}^2 + m^2 |\vec{P}_1|^2 \cos^2 \theta_2 \quad (8.21)$$

cuyos ceros vienen dados por

$$E_2 = E_2^\pm \equiv \frac{(E_1 + \sqrt{x_1})(E_1 \sqrt{x_1} + \frac{1}{2} x_1 + m^2) \pm |\vec{P}_1| \cos \theta_2 [x_1 (E_1 + \frac{1}{2} \sqrt{x_1})^2 - m^2 |\vec{P}_1|^2 (1 - \cos^2 \theta_2)]^{1/2}}{(E_1 + \sqrt{x_1})^2 - |\vec{P}_1|^2 \cos^2 \theta_2} \quad (8.22)$$

Estos ceros serán números reales si y solo si el discriminante es positivo, es decir

$$E_2^\pm \in \mathbb{R} \iff \cos^2 \theta_2 \geq \eta \equiv 1 - \frac{x_1 (E_1 + \frac{1}{2} \sqrt{x_1})^2}{m^2 |\vec{P}_1|^2} \quad (8.23)$$

Evidentemente, para valores negativos de  $\gamma$  esta desigualdad se cumple trivialmente para todo  $\theta_2$ . Sin embargo, si  $\gamma$  es positivo habrá una zona en la que los ceros serán imaginarios y en la que por lo tanto  $P(E_2)$  será positivo para toda  $E_2$ . Es fácil demostrar que  $\gamma \geq 0$  si y solo si  $E_2^A \leq m$ , por lo que en dicha zona la condición (8.19) no puede satisfacerse. Así pues, obtenemos la siguiente restricción sobre  $\theta_2$

$$E_2^A \leq m \quad \rightarrow \quad \cos \theta_2 \geq \gamma^{1/2} \geq 0 \quad (8.24)$$

Fijémonos que la condición  $E_2^A \leq m$  es prácticamente equivalente a  $x_1^{1/2} \leq m$  para energías incidentes elevadas. De nuevo encontramos que las restricciones cinemáticas sobre las variables de integración aparecen reguladas por la relación entre la masa del fotón virtual y la masa del leptón cargado.

Para un ángulo  $\theta_2$  fijado, la desigualdad (8.24) impone un límite inferior sobre  $x_1$

$$x_1 \geq \begin{cases} m^2 & , \text{ si } \cos \theta_2 \leq 0 \\ m^2 (1 - \cos^2 \theta_2) & , \text{ si } \cos \theta_2 \geq 0 \end{cases} \quad (8.25)$$

Cuando los ceros de  $P(E_2)$  son reales, la desigualdad (8.19) impone cotas superiores sobre la energía  $E_2$ . Es-

tas pueden determinarse fácilmente, estudiando los posibles cortes de  $E_2^{\pm}$  con  $E_1$  y  $m$ , con lo que se obtiene

$$E_2 \leq \begin{cases} E_2^+ & , \text{ si } \cos \theta_2 \leq 1-x_1/2|\vec{P}_1|^2 \\ E_1 & , \text{ si } \cos \theta_2 \geq 1-x_1/2|\vec{P}_1|^2 \end{cases} \quad (8.26)$$

De forma totalmente análoga, la segunda condición  $x_5 \leq x_5^+$  puede reescribirse como

$$E_2(E_1 - \sqrt{x_1}) + E_1 \sqrt{x_1} - \frac{1}{2}x_1 + m^2 \geq |\vec{P}_1||\vec{P}_2| \cos \theta_2 \quad (8.27)$$

y dado que el término de la izquierda es siempre positivo, (8.27) solo produce cotas cuando  $\cos \theta_2$  también es positivo, en cuyo caso es equivalente a la condición  $Q(E_2) \geq 0$ , donde

$$Q(E_2) \equiv E_2^2 [(E_1 - \sqrt{x_1})^2 - |\vec{P}_1|^2 \cos^2 \theta_2] + 2E_2(E_1 - \sqrt{x_1})(E_1 \sqrt{x_1} - \frac{1}{2}x_1 - m^2) + (E_1 \sqrt{x_1} - \frac{1}{2}x_1 - m^2)^2 + m^2 |\vec{P}_1|^2 \cos^2 \theta_2 \quad (8.28)$$

Los ceros de este polinomio vienen dados por

$$E_2 = \hat{E}_2^{\pm} \equiv \frac{-(E_1 - \sqrt{x_1})(E_1 \sqrt{x_1} - \frac{1}{2}x_1 - m^2) \pm |\vec{P}_1| \cos \theta_2 [(E_1 - \frac{1}{2}\sqrt{x_1})^2 x_1 - m^2 |\vec{P}_1|^2 (1 - \cos^2 \theta_2)]^{1/2}}{(E_1 - \sqrt{x_1})^2 - |\vec{P}_1|^2 \cos^2 \theta_2} \quad (8.29)$$

Si  $\hat{E}_2^{\pm}$  no son reales, la condición  $Q(E_2) \geq 0$

es satisfecha para todo  $E_2$ , mientras que en las zonas en donde los ceros son reales la ecuación (8.27) impone las siguientes cotas superiores para  $E_2$

$$E_2 \leq \begin{cases} E_1 & , \text{ si } \cos \theta_2 \leq 1-x_1/2|\vec{P}_1|^2 \\ \hat{E}_2^- & , \text{ si } \cos \theta_2 \geq 1-x_1/2|\vec{P}_1|^2 \end{cases} \quad (8.30)$$

A partir de las expresiones (8.26) y (8.30) obtenemos finalmente

$$\bar{E}_2 = \begin{cases} E_2^+ & , \text{ si } \cos \theta_2 \leq 1-x_1/2|\vec{P}_1|^2 \\ \hat{E}_2^- & , \text{ si } \cos \theta_2 \geq 1-x_1/2|\vec{P}_1|^2 \end{cases} \quad (8.31)$$

No hay ninguna restricción adicional sobre  $E_2$  y  $x_1$ , por lo que las restantes cotas serán obviamente

$$\underline{E}_2 = m \quad ; \quad \bar{x}_1 = \frac{4|\vec{P}_1|^2}{1+2E_1/M+m^2/M^2} \quad (8.32)$$

## 8.2. Integración en $\Psi_q$

Introduciendo en la ecuación (7.4) los diferenciales de volumen de espacio fásico dados en (8.1) y

(8.8), obtenemos la siguiente expresión para la distribución angular del leptón cargado final

$$\frac{d\sigma(\lambda)}{d\cos\theta_2} \approx g(N, \lambda) \frac{Z^2 \alpha^2 G^2}{3 \pi^3 E_1} \sin^4 \theta_w \left( \frac{dx_1}{x_1^2} |F(x_1)|^2 \right. \\ \left. \cdot \frac{|\vec{P}_2| dE_2}{\sqrt{H}} dY \frac{d\varphi_q}{2\pi} T \right) \quad (8.33)$$

En función del conjunto de variables cinemáticas ahora utilizadas, T toma la forma

$$T = 2(x_5 - Y + \frac{1}{2}x_1) \left\{ 1 + (4E_1 E_2 + x_1 - Y) [(2Y + 2x_3 - x_1)^{-1} - (x_1 + 2x_3)^{-1}] \right. \\ \left. + \frac{8x_5 (E_1 E_2 + \frac{1}{2}x_1) - 2x_1 (E_1 + E_2)^2}{(x_1 + 2x_3)(2Y + 2x_3 - x_1)} \right. \\ \left. - (2x_5 - 2Y + x_1) \left[ \frac{2E_1^2 - \frac{1}{2}x_1}{(2Y + 2x_3 - x_1)^2} + \frac{2E_2^2 - \frac{1}{2}x_1}{(x_1 + 2x_3)^2} \right] \right\} \quad (8.34)$$

La única dependencia del integrando en la variable  $\varphi_q$  es a través del invariante  $x_3$ , el cual solo aparece en los propagadores. Es necesario calcular cinco integrales distintas, aunque del mismo tipo que las expresadas en (7.32). Fácilmente se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_q}{2\pi} [(x_1 + 2x_3)^{-1}, (x_1 + 2x_3)^{-2}] = [\tau^{-1/2}, (x_1 + 2\tilde{P}) \tau^{-3/2}] \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_q}{2\pi} [(2x_3 + 2Y - x_1)^{-1}, (2x_3 + 2Y - x_1)^{-2}] = [e^{-1/2}, (2\tilde{P} + 2Y - x_1) e^{-3/2}] \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_q}{2\pi} (2x_3 + 2Y - x_1)^{-1} (2x_3 + x_1)^{-1} = \begin{cases} \frac{\tau^{-1/2} - e^{-1/2}}{2(Y - x_1)}, & \text{si } Y \neq x_1 \\ (x_1 + 2\tilde{P}) \tau^{-3/2}, & \text{si } Y = x_1 \end{cases} \quad (8.35)$$

donde

$$\begin{aligned} r &\equiv (x_1 + 2\tilde{P})^2 - 4\tilde{Q}^2 \\ t &\equiv (2\tilde{P} + 2y - x_1)^2 - 4\tilde{Q}^2 \end{aligned} \quad (8.36)$$

Tomando  $q^0 \approx 0$  en las ecuaciones (8.10),  $\tilde{P}$ ,  $r$  y  $t$  pueden ser aproximadas por las expresiones

$$\begin{aligned} \tilde{P} &\approx \frac{Y}{H} [E_2(E_1 - E_2) - x_5 + m^2] \\ r &\approx \frac{4}{H} \left\{ |\vec{P}_2|^2 Y^2 + x_1 Y [E_2(E_1 - E_2) - x_5 + m^2] + x_1 (m^2 + \frac{1}{4} x_1) (E_1 - E_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(x_5 - m^2) x_1 (\frac{1}{4} x_1 + m^2 - E_1 E_2) + x_1 (x_5 - m^2)^2 \right\} \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$\begin{aligned} t &\approx \frac{4}{H} \left\{ |\vec{P}_1|^2 Y^2 - x_1 Y [E_1(E_1 - E_2) + x_5 - m^2] + x_1 (m^2 + \frac{1}{4} x_1) (E_1 - E_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(x_5 - m^2) x_1 (\frac{1}{4} x_1 + m^2 - E_1 E_2) + x_1 (x_5 - m^2)^2 \right\} \end{aligned}$$

### 8.3. Cálculo numérico de la distribución angular

La distribución angular (8.33) la hemos obtenido efectuando numéricamente las integraciones en las variables  $x_1, E_2$  e  $y$ . Hemos estudiado su comportamiento tanto para muones como para electrones, sobre un núcleo de  $^{56}_{26}\text{Fe}$ , tomando energías iniciales de 100, 300 y 500 GeV.

En las figuras 8.1 y 8.2 aparecen representadas las distribuciones angulares para muones y electro-

$\sigma(\cos \theta_2) (10^{-43} \text{ cm}^2)$

-149-

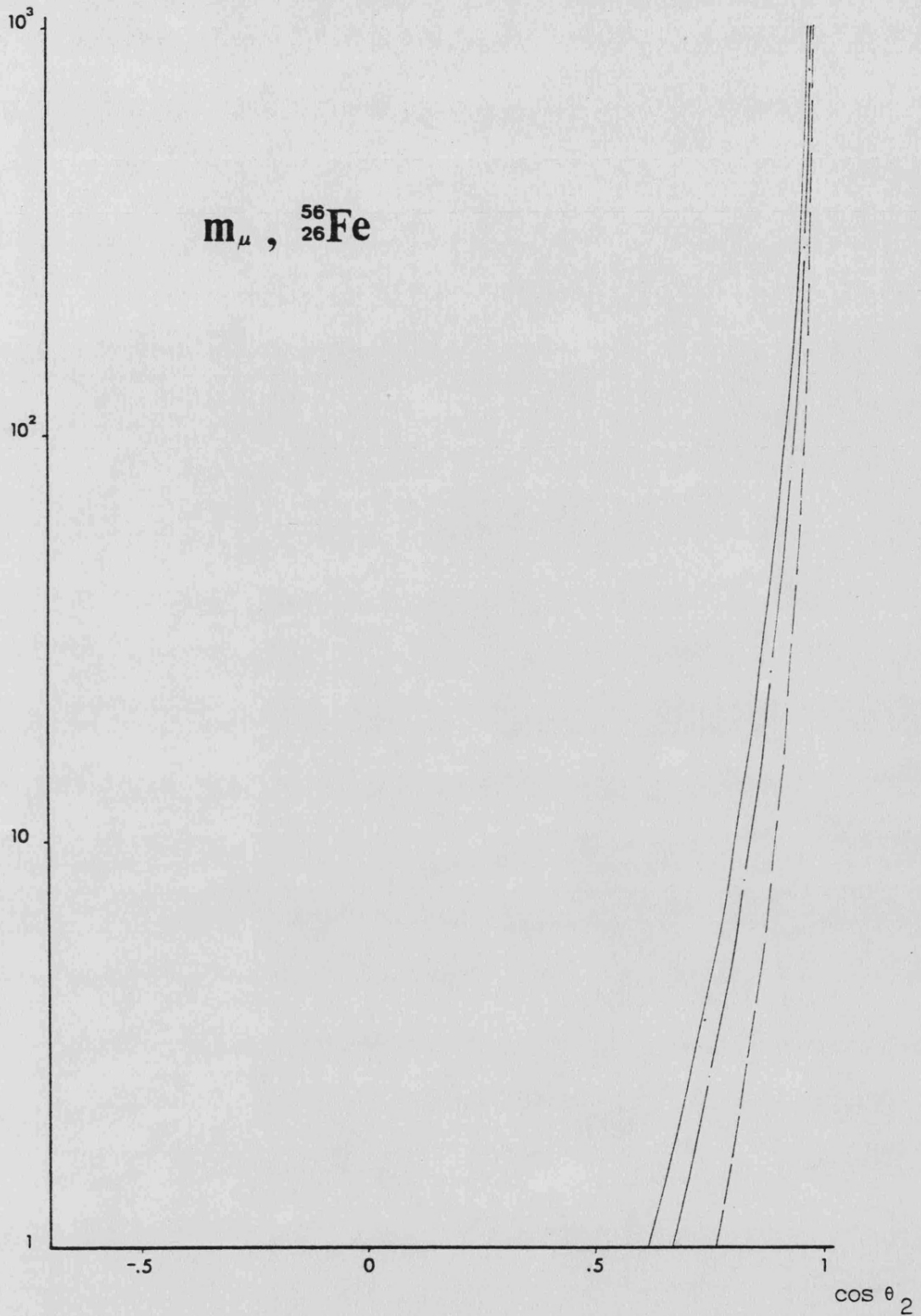


Fig. 8.1.- Distribución angular del leptón cargado final para muones incidentes de 100 (—), 300 (---) y 500 (—) GeV, sobre un núcleo de  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ .

$\sigma(\cos \theta_2) (10^{-42} \text{ cm}^2)$

-150-

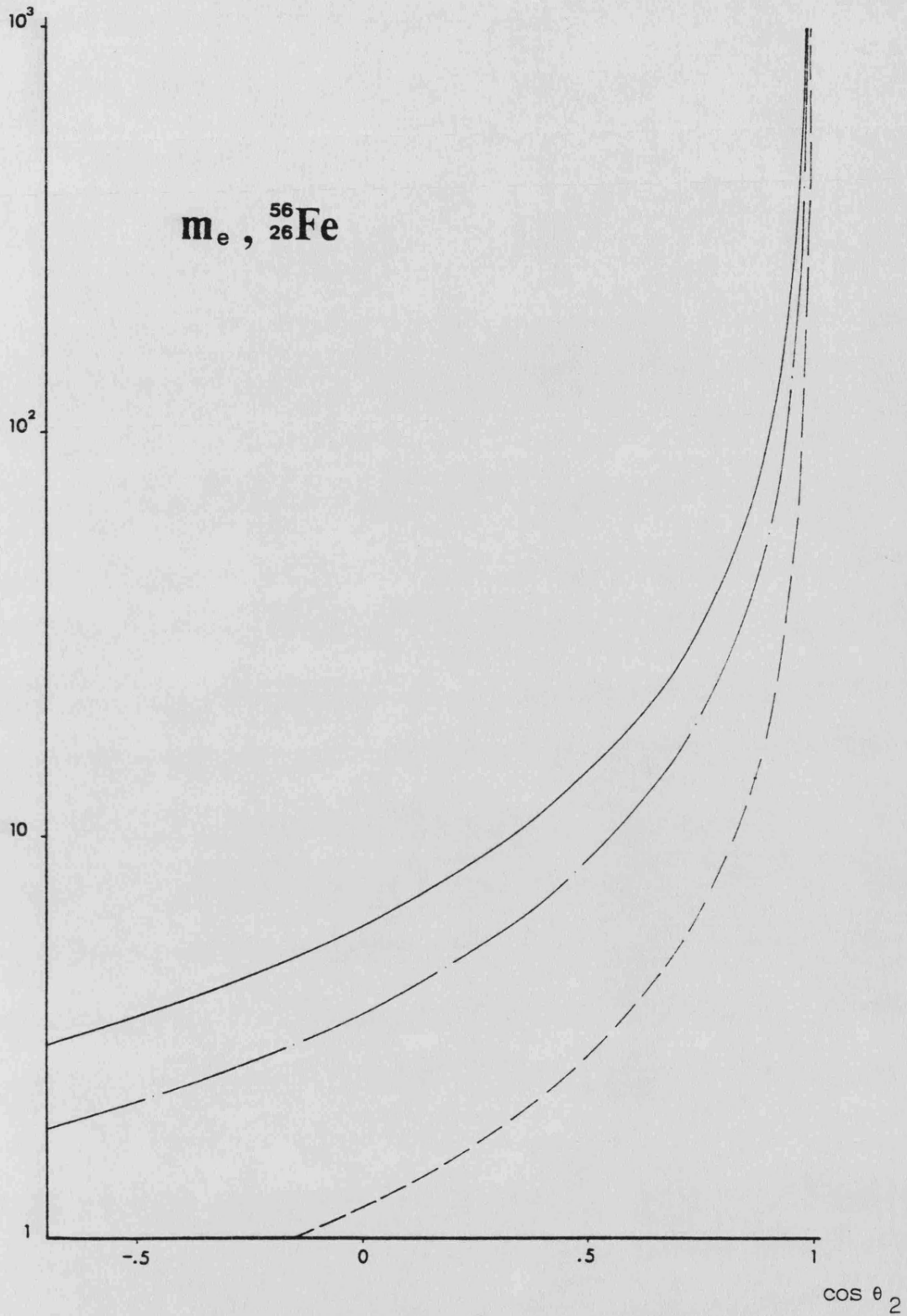


Fig. 8.2.- Lo mismo que la figura 8.1, pero para electrones.



nes respectivamente. Se ha tomado  $\lambda = +\frac{1}{2}$  y  $N=1$ , es decir, se ha representado la función

$$\langle \cos\theta_2 \rangle \equiv \frac{1}{g(N,\lambda)} \frac{d\sigma}{d\cos\theta_2} (1) \quad (8.38)$$

La zona próxima a la dirección hacia delante aparece ampliada en las figuras 8.3 y 8.4.

Como es lógico esperar por razones cinemáticas obvias, la distribución está fuertemente picada en la dirección hacia delante. No obstante, se alcanzan valores medios apreciables para el ángulo de difusión, tal como indica la tabla 8.1. Para muones de 300 GeV se obtiene un valor medio  $\langle \theta_2 \rangle \sim 2.9^\circ$ . Para electrones, se alcanzan ángulos de difusión sustancialmente mayores, obteniéndose  $\langle \theta_2 \rangle \sim 10.7^\circ$  a 300 GeV.

$E_1$ (GeV)	$\langle \theta_2 \rangle$	
	muón	electrón
100	3.0	13.8
300	2.9	10.7
500	2.6	9.9

Tabla 8.1

Valores medios en grados del ángulo de difusión  $\theta_2$ , para distintas energías iniciales.

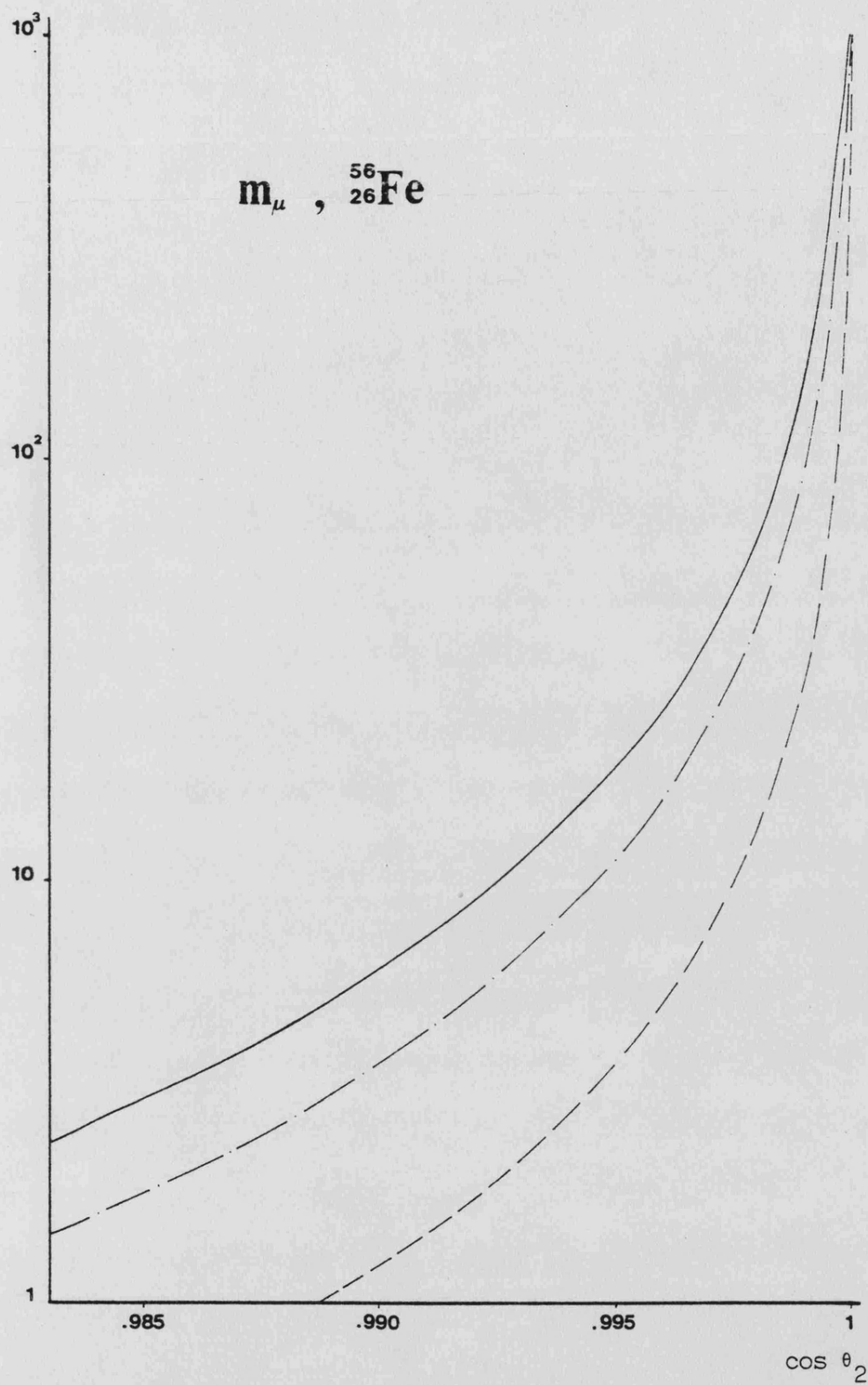


Fig. 8.3.- Ampliación de la figura 8.1 en la zona de ángulos de dispersión pequeños.

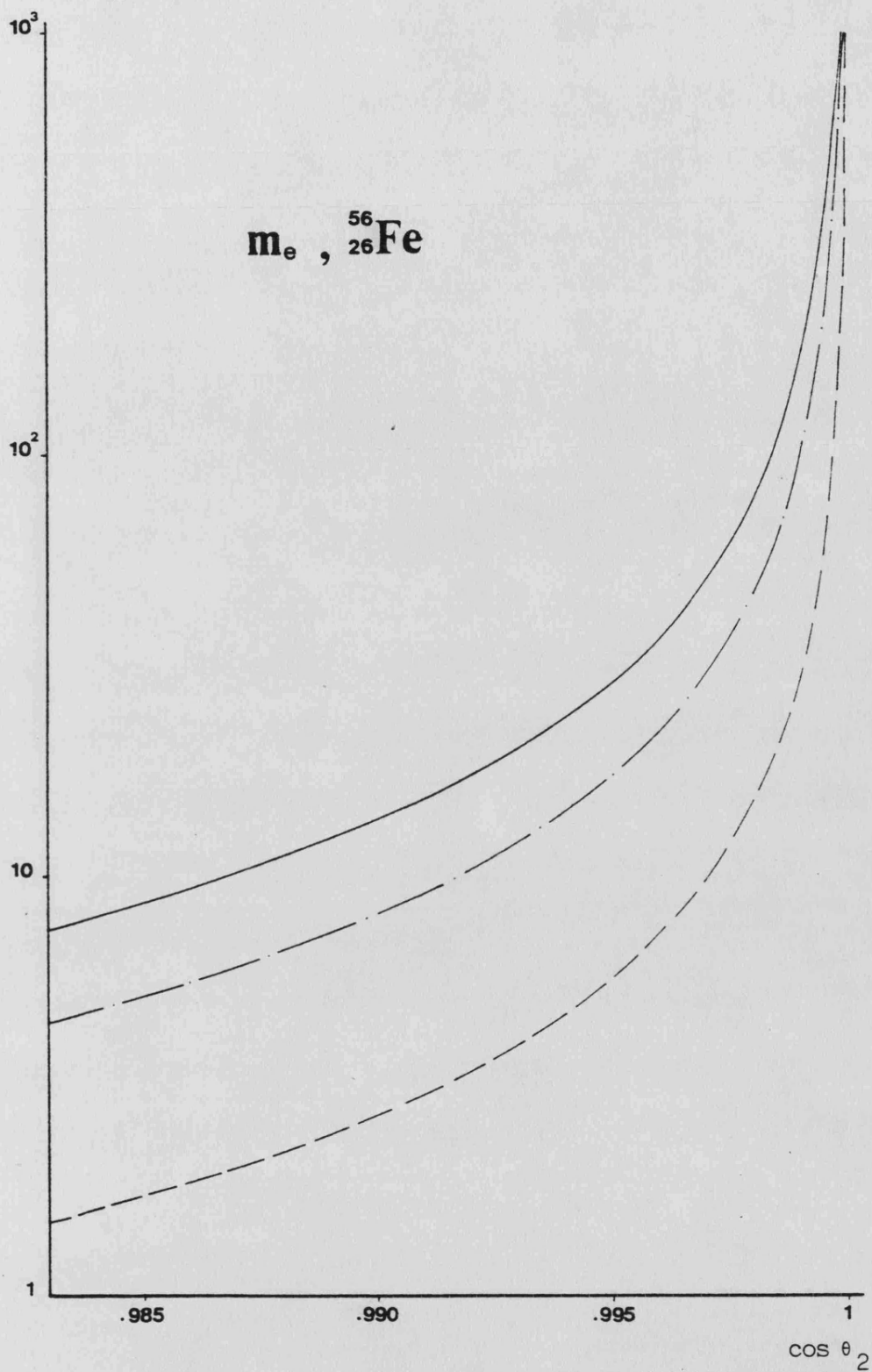


Fig. 8.4.- Ampliación de la figura 8.2 en la zona de ángulos de dispersión pequeños.

CAPITULO IX    CONTRIBUCIONES NO ELÁSTICAS A LA SECCIÓN EFICAZ

9.1. Contribución cuasi-elástica

En los capítulos anteriores hemos hecho la hipótesis usual de que la sección eficaz viene dominada por el proceso nuclear elástico, en el que el núcleo interacciona con el fotón virtual de forma coherente. Sin embargo, existen otras contribuciones debidas a las excitaciones nucleares inducidas por el fotón virtual que, aunque menores, pueden en principio modificar de forma apreciable la sección eficaz.

La corrección más fácilmente calculable es la proveniente del pico cuasi-elástico ("elástico" de nucleones), debida a la interacción incoherente del fotón virtual con cada uno de los nucleones del núcleo. El proceso es del todo análogo al calculado en el capítulo cuatro, salvo las complicaciones adicionales debidas al espín del nucleón. La corriente hadrónica (4.6) debe ser sustituida por la corriente electromagnética convencional de una partícula de espín  $\frac{1}{2}$

$$J_{\mu} = e \bar{u}(P') \left[ \gamma_{\mu} F_1(q^2) - \frac{i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu}}{2M} F_2(q^2) \right] u(P) \quad (9.1)$$

donde  $F_{1,2}$  son las funciones de estructura del nucleón considerado.

El cálculo del tensor hadrónico no presenta ninguna dificultad; promediando sobre las posibles polarizaciones del nucleón se obtiene

$$W_{\mu\nu} \equiv J_\mu J_\nu^* / e^2 = H_1(q^2) (g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2) + H_2(q^2) (2P - q)_\mu (2P - q)_\nu \quad (9.2)$$

donde

$$H_1(q^2) \equiv q^2 (F_1 + F_2)^2$$

$$H_2(q^2) \equiv F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} F_2^2 \quad (9.3)$$

La contracción de  $W_{\mu\nu}$  con el tensor leptónico  $M^{\mu\nu}$  (4.44) nos da la siguiente expresión para la sección eficaz

$$\sigma \simeq g(N,1) \frac{\alpha^2 G^2 \sin^4 \theta_W}{6 E_1^2 \pi^3} \int \frac{dx_1}{x_1^2} \frac{dx_2}{x_2}$$

$$\cdot \left\{ \frac{H_1}{4M^2} \left( 3G_1 + \frac{x_2^2}{x_1} G_2 \right) + H_2 \left[ G_1 \left( 1 + \frac{x_1}{4M^2} \right) + G_2 E_1^2 \left( 1 - \frac{x_2}{2ME_1} \right)^2 \right] \right\} \quad (9.4)$$

donde  $G_{1,2}$  son las funciones de estructura leptónicas definidas en el capítulo cuatro.

Las contribuciones dominantes al proceso cuasi-elástico, provienen de fotones virtuales con  $x_1 \sim 0.1 \text{ GeV}^2$  por lo que la aproximación  $x_1 \ll x_i$  ( $i = 2,3,5$ ) utilizada en el cál-

culo del tensor leptónico, sigue siendo válida en este caso. Sin embargo, la energía del fotón virtual ( $q^0$ ) no es ahora despreciable, ya que la masa del nucleón es del orden de 1 GeV, por lo que debemos mantener los términos en  $\sqrt{x_1}/M$  y  $x_1/M^2$  que aparecen en la ecuación (9.4) y en el límite superior de  $x_2$

$$\bar{x}_2 \simeq E_1 \delta \equiv E_1 \left[ \sqrt{x_1 + x_1^2/4M^2} - x_1/2M \right] \quad (9.5)$$

Las funciones de estructura del nucleón, suelen expresarse en términos de los factores de forma eléctrico y magnético de Sachs

$$F_1 = \frac{G_E + \frac{x_1}{4M^2} G_M}{1 + \frac{x_1}{4M^2}}$$

$$F_2 = \frac{G_M - G_E}{1 + \frac{x_1}{4M^2}} \quad (9.6)$$

Los datos experimentales de que se dispone sobre estos factores de forma, son reproducidos con bastante aproximación por las expresiones (GO 74)

$$G_{E,p} = \frac{G_{M,p}}{\mu_p} = \frac{G_{M,n}}{\mu_n} = (1 + x_1/1.71 \text{ GeV}^2)^{-2} \quad (9.7)$$

$$G_{E,n} = 0$$

donde  $\mu_{p,n}$  son los momentos magnéticos del protón y del neu-

trón respectivamente, cuyos valores son

$$\mu_p = 2.79 \quad ; \quad \mu_n = -1.91 \quad (9.8)$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación (9.4) y efectuando la integración en la variable  $x_2$  obtenemos la siguiente distribución de fotones virtuales

$$\frac{d\sigma_{Nu}}{dx_1} \simeq \frac{1}{2} g(N, Z) \sigma_0 E_1 x_1^{-2} (1 + x_1/0.71)^{-4} \cdot \left\{ \frac{S_{Nu,p} + \frac{x_1}{4M^2} \mu_{Nu}^2}{1 + x_1/4M^2} T(x_1) + \frac{x_1}{4M^2} \mu_{Nu}^2 R(x_1) \right\} \quad (9.9)$$

donde el subíndice Nu hace referencia al tipo de nucleón considerado. Las funciones  $T(x_1)$  y  $R(x_1)$  vienen dadas por

$$T(x_1) \equiv \delta^3 \left\{ \frac{47}{24} + K_1 + \frac{x_1}{4M^2} (1 + K_1 - K_2) \right\} + \frac{3x_1}{2M} \delta^2 \left( \frac{9}{8} + K_2 \right) - 3x_1 \delta \left( \frac{13}{8} + K_2 \right) \quad (9.10)$$

$$R(x_1) \equiv \delta^3 \left( \frac{59}{12} + 3K_1 - K_2 \right)$$

donde

$$K_1 \equiv \frac{m^2}{x_1} + \left( 1 + \frac{2m^2}{x_1} - \frac{2m^4}{x_1^2} \right) f^{-1} \ln \left( \frac{f+1}{f-1} \right) - \ln (2E_1 \delta / m^2)$$

$$K_2 \equiv \frac{7m^2}{x_1} + \left( 1 + \frac{2m^2}{x_1} - \frac{14m^4}{x_1^2} \right) f^{-1} \ln \left( \frac{f+1}{f-1} \right) - \ln (2E_1 \delta / m^2)$$

$$f \equiv \sqrt{1 + 4m^2/x_1} \quad (9.11)$$

En las figuras 9.1 y 9.2 aparece representada la distribución  $x_1 \cdot \nabla_{N_u}(x_1) \equiv x_1 \cdot \frac{d\nabla_{N_u}}{dx_1} / g(N,d)$  para muones y electrones incidentes respectivamente. Las curvas continua y discontinua con trazos largos corresponden a la interacción con un protón, tomando energías iniciales de 300 y 100 GeV. La curva discontinua con trazos cortos es el resultado obtenido para el neutrón con energía incidente de 300 GeV. La contribución debida al neutrón resulta ser mucho más pequeña que la del protón, lo cual es lógico, ya que no tiene factor de forma eléctrico, y su momento magnético al cuadrado es cuatro veces menor. En el caso del protón, el centro de la distribución aparece en  $x_1 \sim 9 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^2$  para muones y  $x_1 \sim 6 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^2$  para electrones.

La sección eficaz integrada viene dada por

$$\nabla_{N_u} \simeq g(N,d) \nabla_0 E_1 [c + d \ln(2E_1/m)] \quad (9.12)$$

donde

$$c \equiv \frac{1}{2} \int \frac{dx_1}{x_1^2} (1+x_1/0.71)^{-4} \left\{ \frac{\delta_{N_u,p} + \frac{x_1}{4M^2} \mu_{N_u}^2}{1+x_1/4M^2} \tilde{T}(x_1) + \frac{x_1}{4M^2} \mu_{N_u}^2 \tilde{R}(x_1) \right\} \quad (9.13)$$

$$d \equiv -\frac{1}{2} \int \frac{dx_1}{x_1^2} (1+x_1/0.71)^{-4} \left\{ \frac{\delta_{N_u,p} + \frac{x_1}{4M^2} \mu_{N_u}^2}{1+x_1/4M^2} [\delta^3 + \frac{3x_1}{2M} \delta^2 - 3x_1 \delta] + \frac{x_1}{4M^2} \mu_{N_u}^2 2 \delta^3 \right\}$$



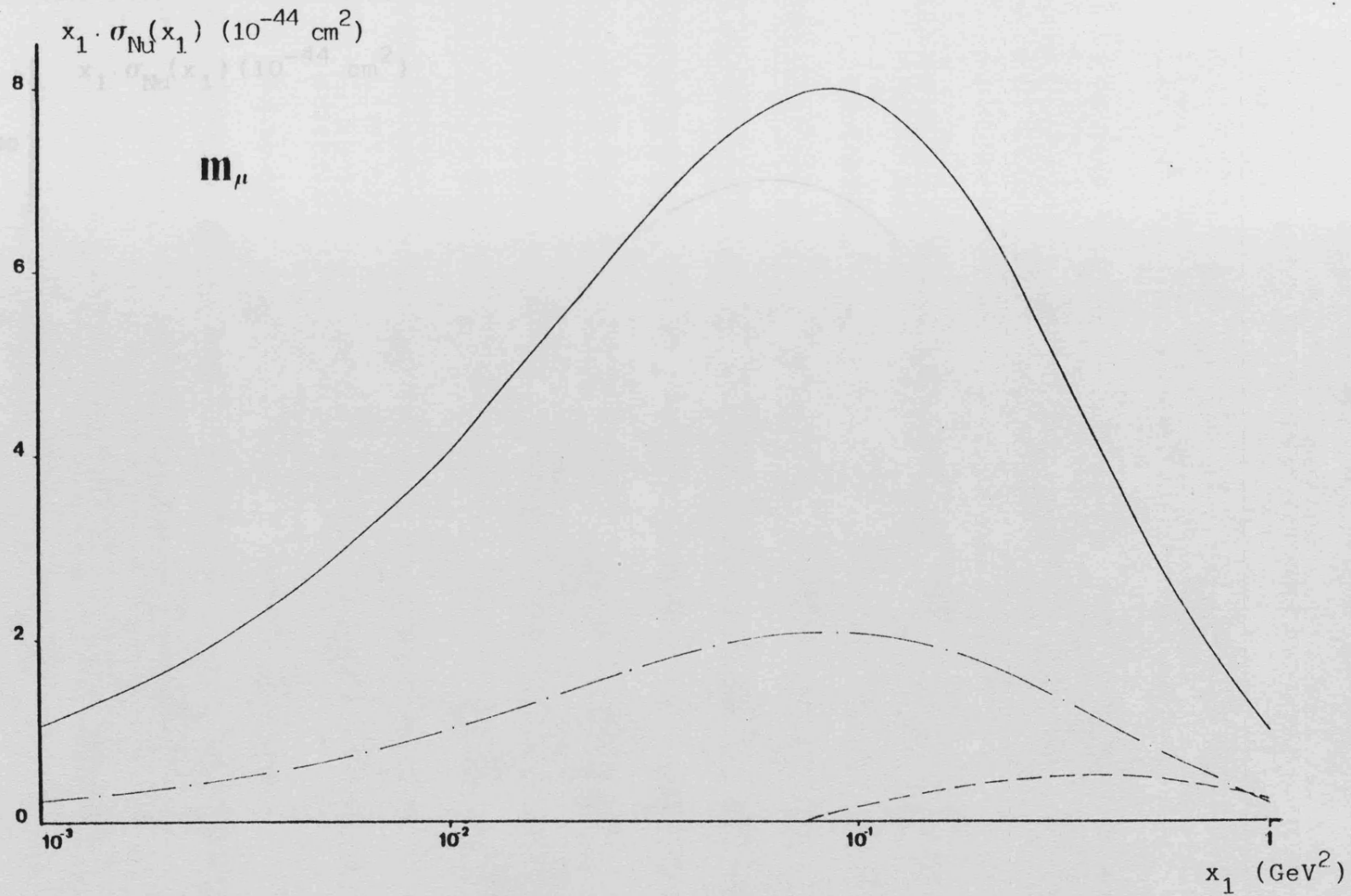


Fig. 9.1.- Distribución de fotones virtuales (multiplicada por  $x_1$ ) para la contribución cuasielástica, en el caso de muones incidentes. La curva de trazos cortos (---) corresponde a una energía incidente de 300 GeV sobre un neutrón. Las otras dos a energías de 100 (---) y 300 (—) GeV sobre un protón.

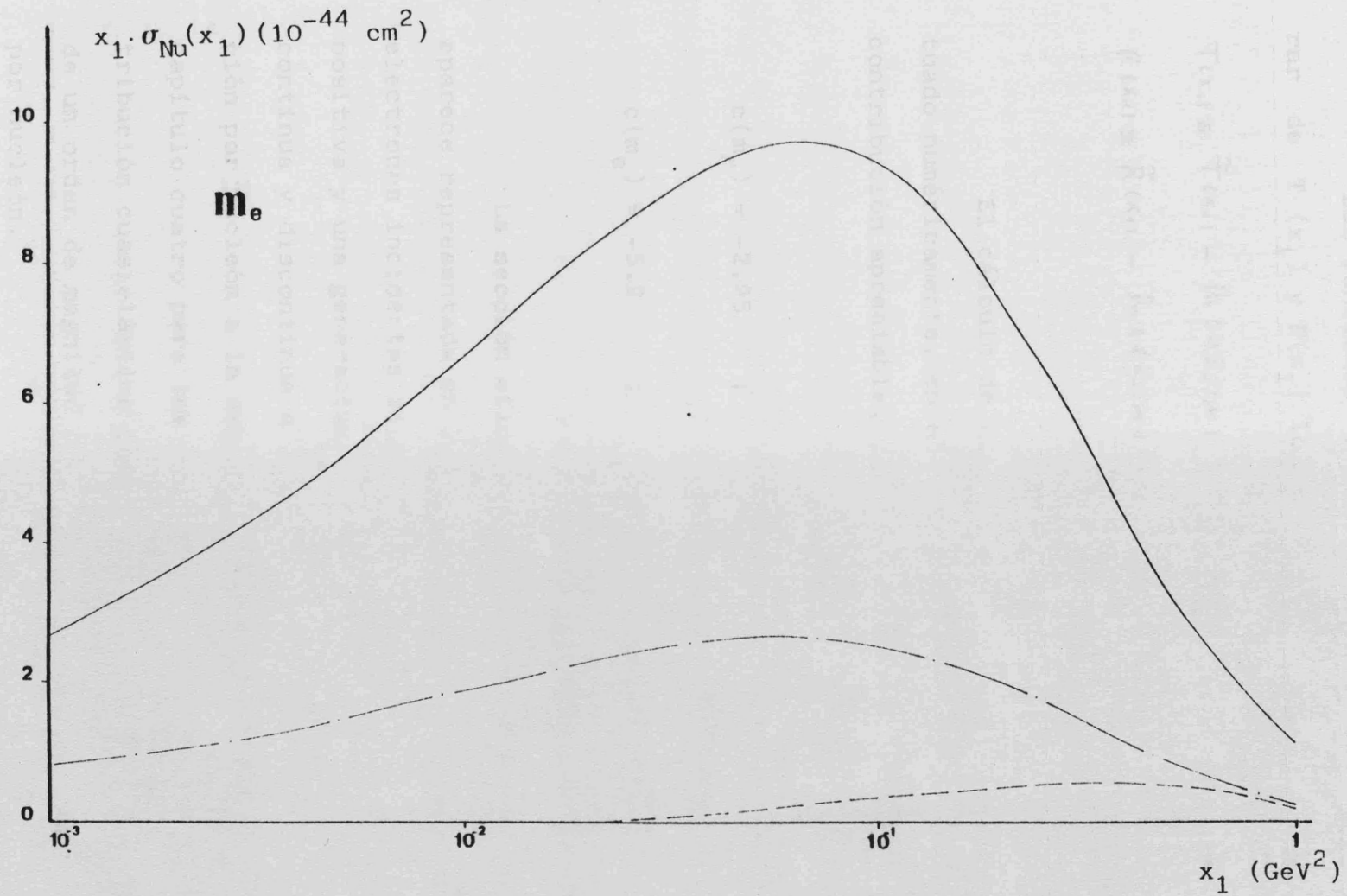


Fig.9.2- lo mismo que la figura 9.1, pero para electrones incidentes.

Las funciones  $\tilde{T}(x_1)$  y  $\tilde{R}(x_1)$  resultan de separar de  $T(x_1)$  y  $R(x_1)$  los términos en  $\ln(2E_1/m)$

$$\begin{aligned} T(x_1) &\equiv \tilde{T}(x_1) - \ln(2E_1/m) \left[ \delta^3 + \frac{3x_1}{2M} \delta^2 - 3x_1 \delta \right] \\ R(x_1) &\equiv \tilde{R}(x_1) - \ln(2E_1/m) 2 \delta^3 \end{aligned} \quad (9.14)$$

El cálculo de los coeficientes  $c$  y  $d$  lo hemos efectuado numéricamente, en el caso del protón que es el que da contribución apreciable, con el resultado

$$c(m_\mu) = -2.95 \quad ; \quad d(m_\mu) = .70 \quad (9.15)$$

$$c(m_e) = -5.2 \quad ; \quad d(m_e) = .70$$

La sección eficaz (9.12) correspondiente al protón, aparece representada en las figuras 9.3 y 9.4 para muones y electrones incidentes respectivamente tomando la helicidad positiva y una generación (curva a trazos cortos). Las curvas continua y discontinua a trazos largos indican la contribución por nucleón a la sección eficaz elástica calculada en el capítulo cuatro para los núcleos  $^{208}_{82}\text{Pb}$  y  $^{56}_{26}\text{Fe}$ . La contribución cuasielástica por protón, aunque menor, resulta ser de un orden de magnitud comparable a la contribución elástica por nucleón.

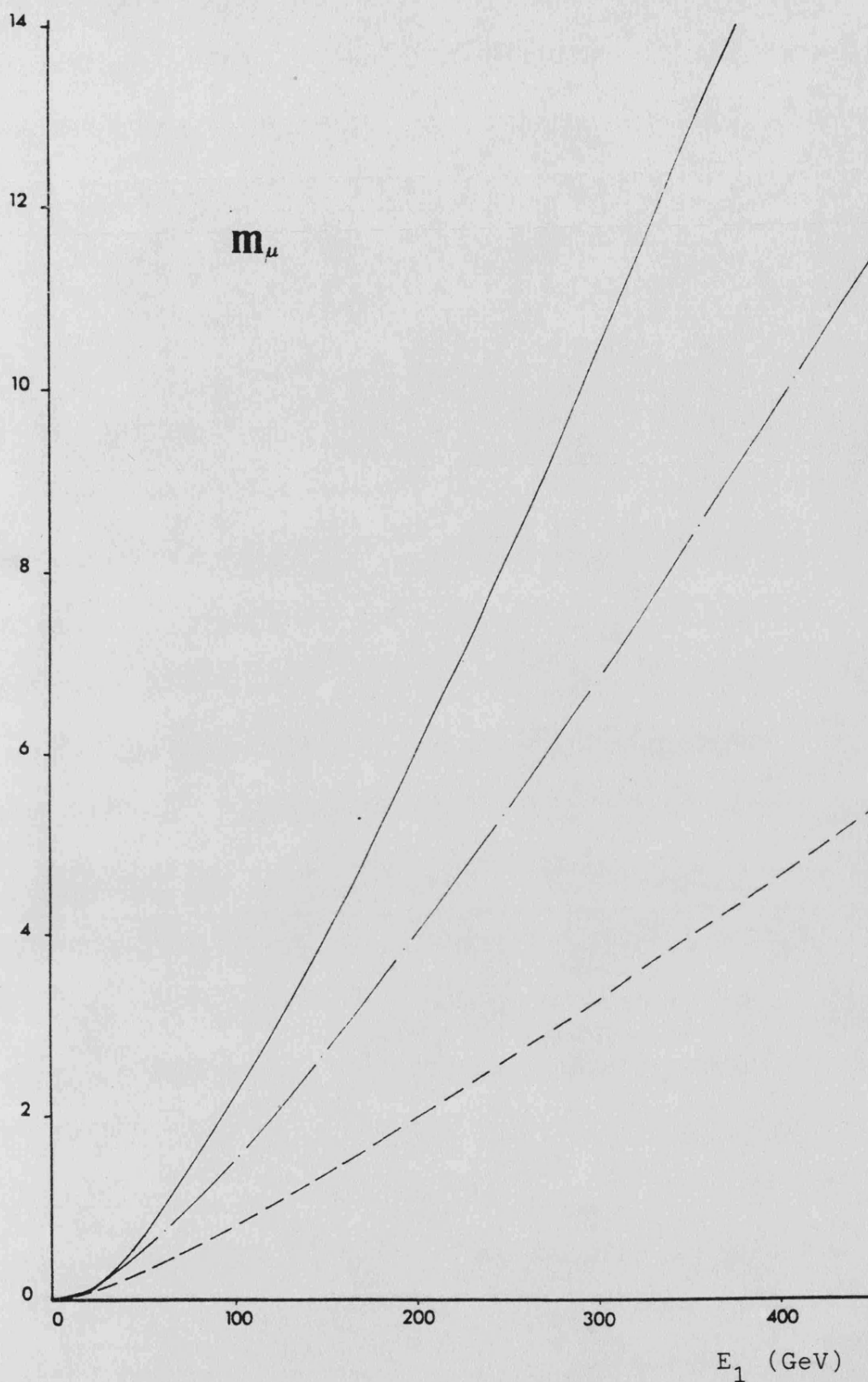


Fig. 9.3.- Sección eficaz cuasielástica de protón (---), y sección eficaz elástica por nucleón para  $^{208}_{82}\text{Pb}$  (—) y  $^{56}_{26}\text{Fe}$  (-.-) en el caso de muones incidentes con helicidad positiva y una sola generación.

$\sigma/A$  ( $10^{-42}$  cm<sup>2</sup>/ nucleón)

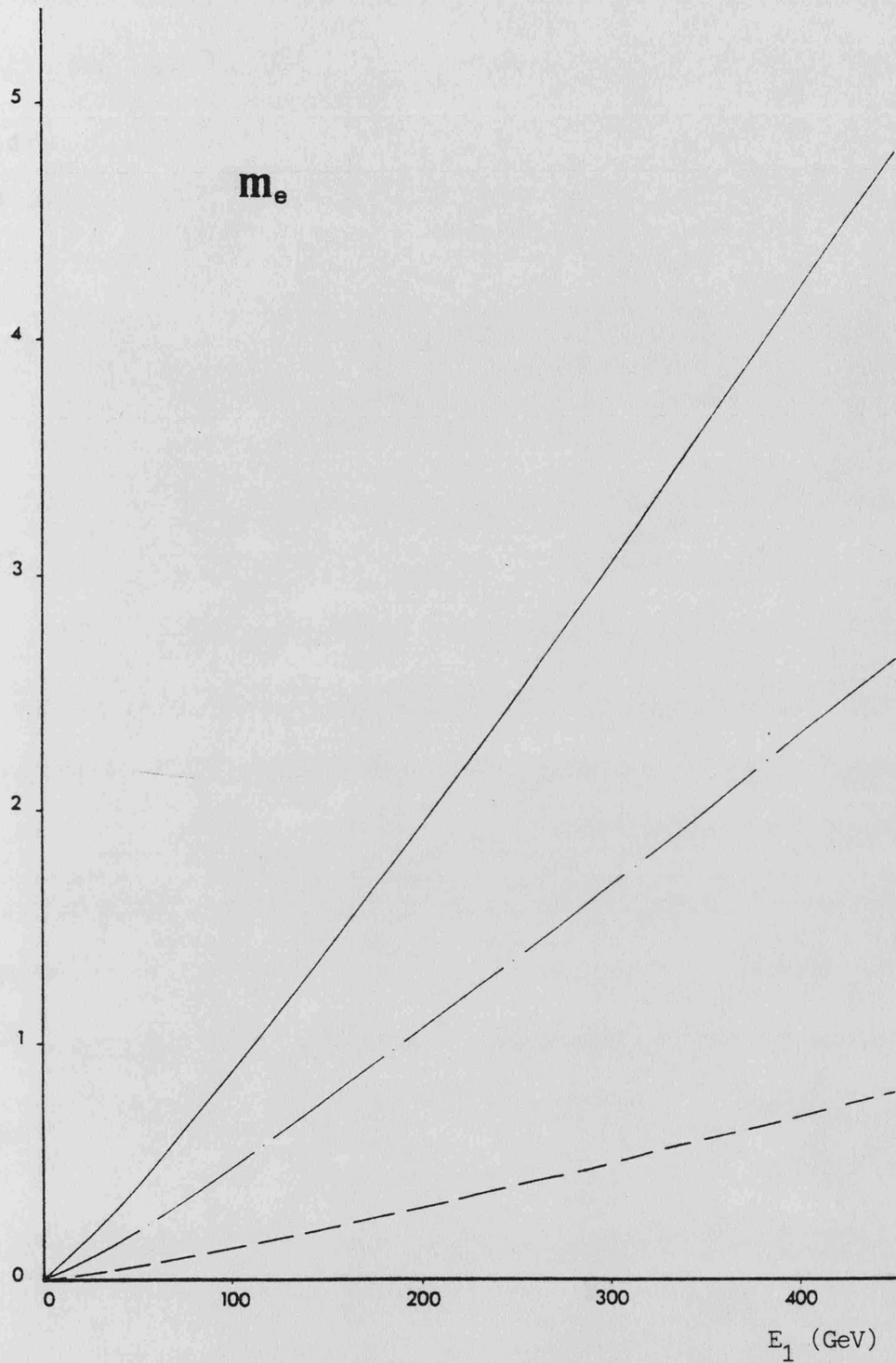


Fig. 9.4.- Lo mismo que la figura 9.3, pero para electrones incidentes.

La sección eficaz cuasi-elástica total la obtenemos sumando incoherentemente las contribuciones de todos los protones del núcleo

$$\sigma_{c.e.} \simeq Z \sigma_p \simeq g(N, A) \sigma_0 E_1 [ \gamma + \alpha \ln(2E_1/m) ] \quad (9.16)$$

Este resultado debe compararse con la sección eficaz elástica (4.91) dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &\simeq g(N, A) \sigma_0 E_1 Z^2 [ a + b \ln(2E_1/m) ] \equiv \\ &\equiv g(N, A) \sigma_0 E_1 [ \alpha + \beta \ln(2E_1/m) ] \end{aligned} \quad (9.17)$$

La coherencia e incoherencia de estas dos secciones eficaces se manifiesta claramente en la distinta dependencia con la carga nuclear,  $Z^2$  y  $Z$  respectivamente.

Sumando ambas contribuciones, obtenemos la sección eficaz total

$$\sigma \simeq g(N, A) \sigma_0 E_1 [ A + B \ln(2E_1/m) ] \quad (9.18)$$

donde

$$A \equiv \alpha + \gamma \quad ; \quad B \equiv \beta + \gamma \quad (9.19)$$

Los valores de todos estos coeficientes aparecen tabulados en la tabla 9.1, donde se aprecia claramente que la contribución cuasi-elástica modifica sustancialmente los parámetros elásticos  $a$  y  $b$  de la sección eficaz.

En las figuras 9.5, 9.6, 9.7 y 9.8 hemos dibujado las secciones eficaces cuasi-elástica (curva a trazos cortos), elástica (trazos largos) y total (curva continua), en los distintos casos considerados ( $l^- = e^-, \mu^-$  y  $A_Z = {}_{26}^{56}\text{Fe}, {}_{82}^{208}\text{Pb}$ ) tomando la helicidad del leptón incidente positiva y suponiendo una sola generación. Las modificaciones introducidas por el pico cuasi-elástico resultan ser más importantes para el hierro que para el plomo (lo cual es lógico por la distinta dependencia en  $Z$  de las contribuciones elástica y cuasi-elástica), y en el caso muónico que en el electrónico. Tomando una energía incidente de 300 GeV, la contribución cuasi-elástica a la sección eficaz total es del 18 % para muón y hierro, 12 % para electrón y hierro, 11 % para muón y plomo y 6 % para electrón y plomo.

	$\alpha$	$\gamma$	A	$\beta$	$\eta$	B
$m_{\mu}, {}^{56}_{26}\text{Fe}$	-563.8	-76.7	-640.5	106.8	18.2	125.0
$m_e, {}^{56}_{26}\text{Fe}$	-607.7	-135.2	-742.9	106.8	18.2	125.0
$m_{\mu}, {}^{208}_{82}\text{Pb}$	-3947	-242	-4189	692.6	57.4	750.0
$m_e, {}^{208}_{82}\text{Pb}$	-3698	-426	-4125	692.6	57.4	750.0

Tabla 9.1 - Coeficientes de las secciones eficaces elástica ( $\alpha, \beta$ ), cuasi-elástica ( $\gamma, \eta$ ) y total (A, B) para los distintos casos considerados. Todos los valores aparecen tabulados en GeV.



Fig. 9.5 - Secciones eficaces elástica y total (---), cuasi-elástica (---) y elástica (....) para los distintos casos considerados.



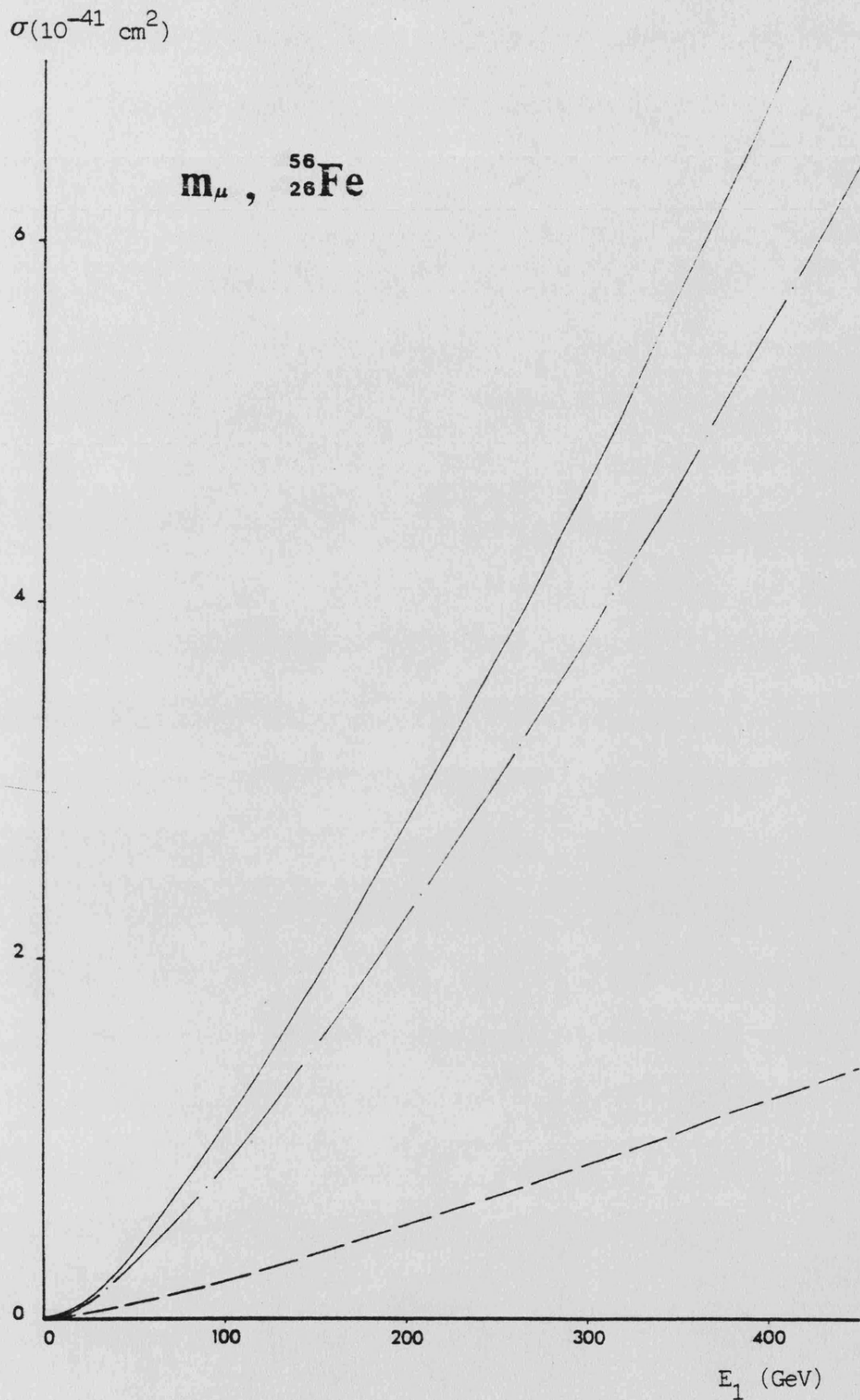


Fig. 9.5.- Sección eficaz elástica (---), cuasielástica (— · —) y total (—), para muones incidentes sobre  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ , en el caso de helicidad positiva y tomando una sola generación.

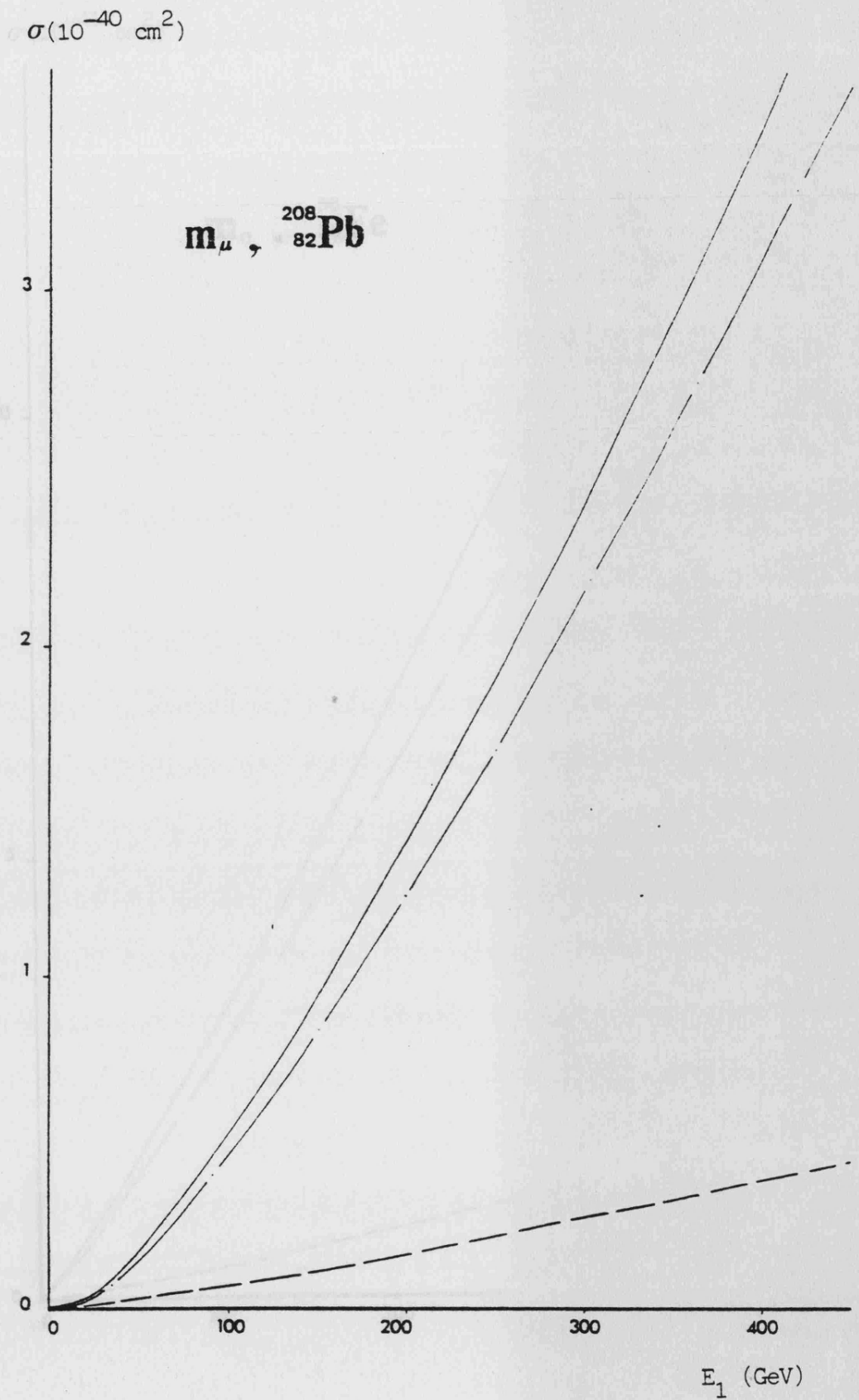


Fig. 9.6.- Lo mismo que la figura 9.5, pero para muones incidentes sobre  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ .

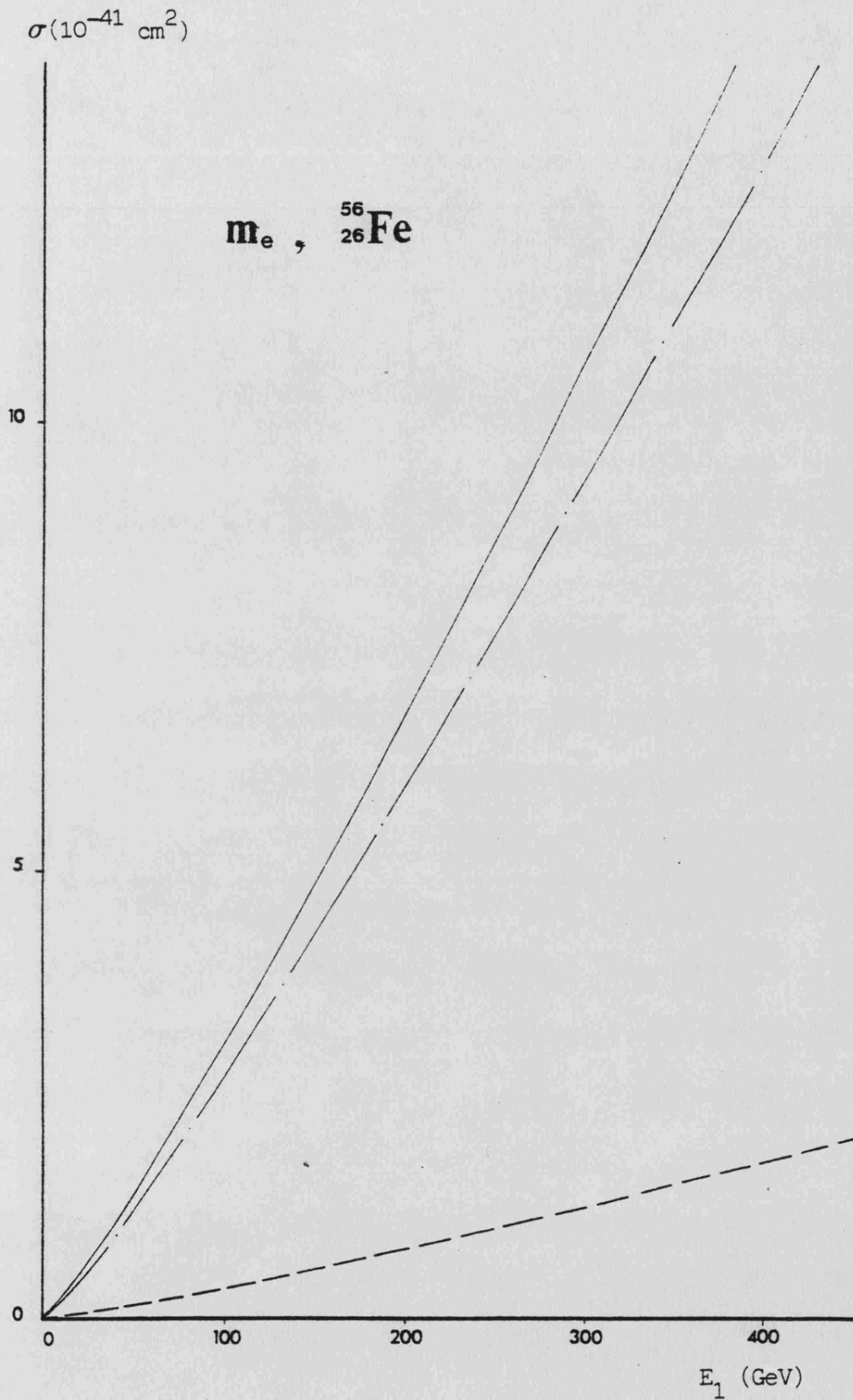


Fig. 9.7.- Lo mismo que la figura 9.5, pero para electrones incidentes sobre  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ .

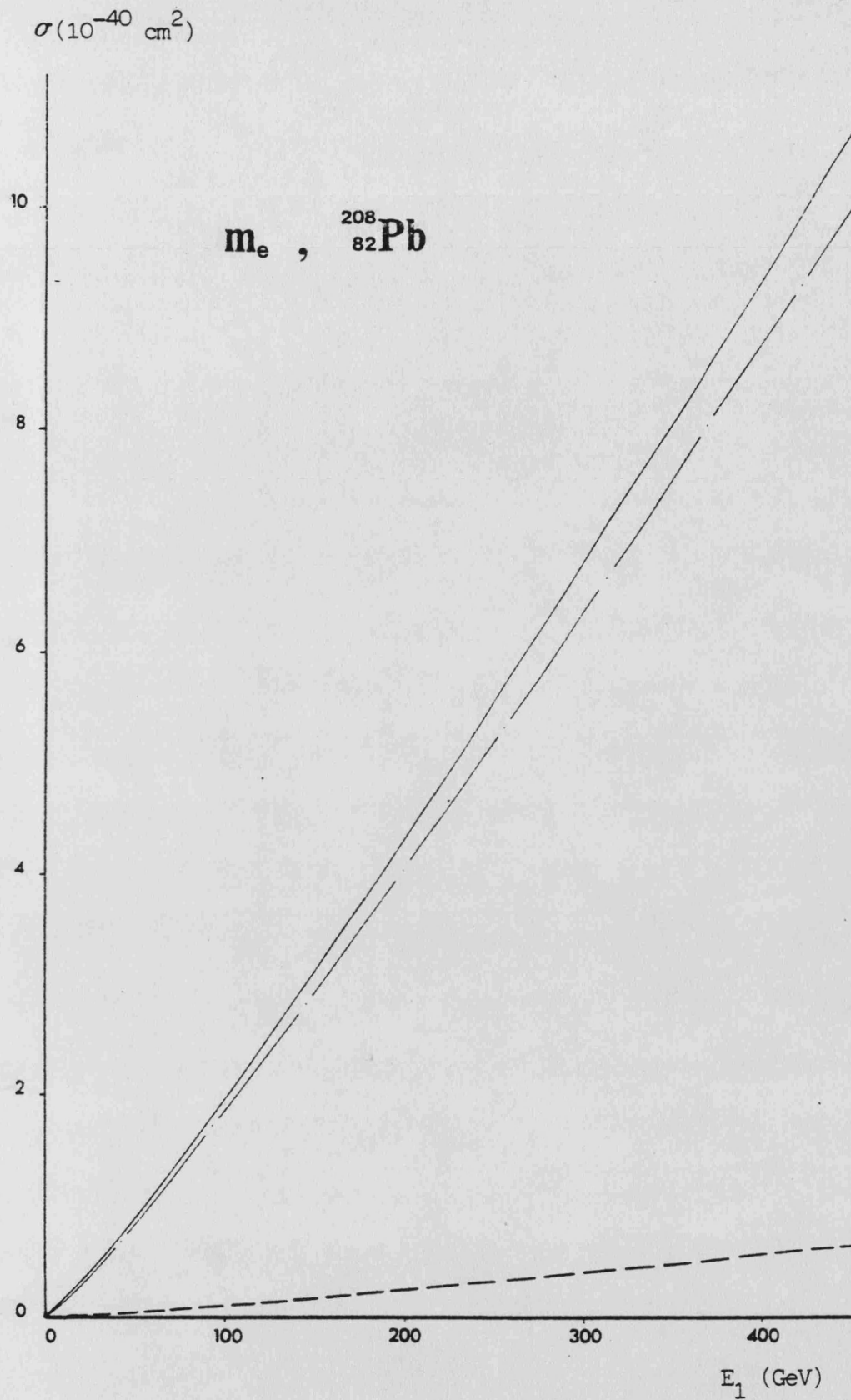


Fig. 9.8.- Lo mismo que la figura 9.5, pero para electrones incidentes sobre  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ .

## 9.2. Proceso inelástico

Si experimentalmente no se determina el estado hadrónico final, deberemos considerar la reacción inclusiva

$$l^-(P_1) + Z(P) \longrightarrow l^-(P_2) + \bar{U}(P_3) + \omega(P_4) + X(P') \quad (9.20)$$

caracterizada en cuanto a la parte nuclear se refiere por el tensor hadrónico

$$W_{\mu\nu} = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(q^2, \omega) + \frac{1}{M^2} \left( P + \frac{\omega}{q^2} q \right)_\mu \left( P + \frac{\omega}{q^2} q \right)_\nu W_2(q^2, \omega) \quad (9.21)$$

donde toda la información sobre los detalles de la interacción en el vértice hadrónico queda incluida en las funciones de estructura  $W_{1,2}$ . La variable  $\omega$  viene definida por la expresión

$$\omega \equiv - (P q) = - M q^0 \equiv M \omega \quad (9.22)$$

Debido a nuestra ignorancia sobre el comportamiento de las funciones  $W_{1,2}$  es imposible realizar un cálculo exacto del proceso (9.20). No obstante si que es posible efectuar estimaciones en determinados límites. En la zona

profundamente inelástica ( $x_1 \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty$ ), por ejemplo, existe evidencia experimental de que se cumple con gran aproximación la invariancia de escala predicha por Bjorken (BJ 69)

$$W_1 \simeq F_1(x) \quad ; \quad \nu W_2 / M^2 \simeq F_2(x)$$

$$F_2(x) \simeq 2x F_1(x) \quad ; \quad x \equiv x_1 / 2\nu \quad (9.23)$$

Usando esta propiedad, se ha estimado la contribución de la zona profundamente inelástica al proceso (9.20), a partir de la teoría V-A, encontrándose para muones no polarizados de 150 GeV que la corrección impuesta a la sección eficaz elástica es menor del 1% (FU 71) y por lo tanto despreciable.

Aunque la predicción de la teoría V-A es incorrecta por considerar corrientes cargadas solamente, es evidente que el cálculo de la contribución de corrientes neutras no va a variar el orden de magnitud del proceso inelástico, ya que como se demostró en el capítulo VI, las amplitudes de corrientes neutras y corrientes cargadas están relacionadas por una transformación de Fierz.

Aparte de la excitación profundamente inelástica, existe una contribución en la región de excitación nuclear no incluida en el pico cuasielástico, de modo que  $x_1$  es pequeño y  $\nu$  está asociada a la excitación nuclear. En esta región podemos realizar la aproximación dipolar retardada relacionando las funciones de estructura hadrónicas con la sección

eficaz de fotoabsorción

$$W_1(x_1, \omega) \approx \frac{\omega^2}{M^2 x_1} \quad W_2(x_1, \omega) \approx \frac{\omega}{(2\pi)^2 \alpha} \nabla_j(\omega) |F(x_1)|^2 \quad (9.24)$$

$F(x_1)$  es un factor de forma nuclear, que aunque irrelevante para  $x_1$  mucho más pequeño que  $\langle r^2 \rangle^{-1}$ , donde  $\langle r^2 \rangle$  es el radio cuadrático medio del núcleo, ( $F(0) = 1$ ), es necesario para cortar la contribución de la zona con  $x_1$  grande, en donde la aproximación (9.24) no tiene sentido.

Efectuando la contracción con el tensor leptónico y teniendo en cuenta los diversos factores cinemáticos que aparecen, podemos escribir la sección eficaz en la forma

$$\sigma \approx g(N, Z) \frac{9 \sigma_0}{4(2\pi)^2 \alpha M^2 E_1^2} \int d\omega \omega f(\omega) \nabla_j(\omega) \quad (9.25)$$

donde

$$f(\omega) \approx \int \frac{dx_1}{x_1^2} \frac{dx_2}{x_2} |F(x_1)|^2 \left\{ \left( \frac{M^2 x_1}{\omega^2} - z \right) G_1 + \frac{x_0}{\omega} \left( \frac{x_0 x_1}{\omega} - z x_2 \right) G_2 \right\} \quad (9.26)$$

El espacio fásico permitido para las variables  $x_1$  y  $x_2$ , calculado en la sección 4.7, debe ser modificado ya que

ahora hay una variable cinemática adicional (la masa del sistema hadrónico final). Los límites sobre  $x_2$  son formalmente idénticos, salvo que la relación (4.63) que liga la energía  $q^0$  del fotón virtual con  $x_1$  deja de ser cierta, por ser ahora  $q^0$  una variable independiente. Así pues, tenemos

$$\bar{x}_2 \simeq E_1, u \equiv E_1 [\sqrt{x_1 + \omega^2} - \omega] \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2} x_1 \quad (9.27)$$

donde  $\omega \equiv |q^0| = -q^0$

La integración en  $x_2$  puede realizarse analíticamente sin problemas, pero se obtiene una expresión demasiado complicada para poder efectuar la integración en  $x_1$  de forma no numérica, por lo que si deseamos hallar una expresión analítica para  $f(\omega)$ , deberemos llevar a cabo algún tipo de aproximación. Restringiéndonos al caso de muones incidentes podemos suponer que  $x_1 \ll m^2$  en la región que nos interesa con lo que  $G_1$  y  $G_2$  se simplifican notablemente

$$G_1 \simeq -\frac{x_2^2}{x_1} \quad G_2 \simeq \frac{2}{3} x_2^3 \left[ \frac{67}{24} - \ln(2x_2/m^2) \right], \quad (x_1 \ll m^2) \quad (9.28)$$

Efectuando la integración en  $x_2$  obtenemos



$$\begin{aligned}
 f(\omega) \approx \frac{2}{3} E_1^3 \int \frac{dx_1}{x_1^2} |F(x_1)|^2 \left\{ \frac{1}{3} u^3 \left( \frac{x_1}{\omega_2} - 2 \right) \left[ \frac{25}{8} - \ln(2\bar{x}_2/m^2) \right] \right. \\
 - u(x_1/\omega)^2 \left[ \frac{91}{24} - \ln(2\bar{x}_2/m^2) \right] \\
 \left. + u^2 x_1/\omega \left[ \frac{79}{24} - \ln(2\bar{x}_2/m^2) \right] \right\} \quad (9.29)
 \end{aligned}$$

A grandes  $x_1$  el integrando se comporta como  $\sqrt{x_1} \cdot |F(x_1)|^2$ . De no haber mantenido el factor de forma  $F(x_1)$  al realizar la aproximación dipolar (es decir, si hubieramos efectuado la aproximación dipolar no retardada) la función  $f(\omega)$  vendría dominada por los valores grandes de  $x_1$ , lo cual no tendría sentido. Para regularizar este comportamiento nos basta con introducir el retardo

$$|F(x_1)|^2 = \left( \frac{a}{a+x_1} \right)^2 \quad (9.30)$$

donde el parámetro "a" está relacionado con el radio nuclear

$$a \equiv \frac{3}{2} \langle r^2 \rangle^{-1} \quad (9.31)$$

La integración en  $x_1$  es extremadamente tediosa, aunque sin complicaciones que merezca la pena señalar, alcanzándose para  $f(\omega)$  el resultado

$$f(\omega) = \frac{4a}{3\omega} E_1^3 \tilde{f}(\omega, a)$$

$$\tilde{f}(\omega, a) \cong \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \ln(2\omega/\sqrt{a})$$

$$+ [\alpha_5 + \alpha_6 \xi + \alpha_7 \ln(2\omega/\sqrt{a})] \ln(2E_1\sqrt{a}/m^2)$$
(9.32)

donde

$$\xi \equiv \begin{cases} (1-x)^{-1/2} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right) & , \text{ si } x \leq 1 \\ 2(x-1)^{-1/2} \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{x-1}) & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\eta \equiv \begin{cases} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right) \ln\left(\frac{2}{1-\sqrt{1-x}}\right) & , \text{ si } x \leq 1 \\ -\ln^2(\sqrt{x}/2) - [\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{x-1})]^2 & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$
(9.33)

$$x \equiv a/\omega^2$$

y los parámetros  $\alpha_i$  vienen dados por las expresiones

$$\alpha_1 = \frac{29}{48} - \frac{25}{6} x^{-1}$$

$$\alpha_2 = -\frac{25}{48} x - \frac{11}{8} + \frac{53}{6} x^{-1} - \frac{25}{3} x^{-2}$$

$$\alpha_3 = -\frac{4}{3} x^{-1} + \frac{8}{3} x^{-2}$$

$$\alpha_4 = -\frac{24}{3} x^{-1} + \frac{50}{3} x^{-2}$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{6} + \frac{4}{3} x^{-1}$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{6} x - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} x^{-1} + \frac{8}{3} x^{-2}$$

$$\alpha_7 = \frac{8}{3} x^{-1} - \frac{16}{3} x^{-2}$$
(9.34)

La función  $\tilde{f}(\omega, a)$  es demasiado compleja para permitirnos realizar una estimación de la sección eficaz (9.25) por lo que conviene estudiar si puede ser aproximada por otras expresiones más manejables. En el límite  $\omega^2 \ll a$  ( $x \gg 1$ )  $\tilde{f}(\omega, a)$  viene dada por

$$\tilde{f}(\omega, a) \underset{(\omega^2 \ll a)}{\simeq} f_{<} \equiv \frac{\pi \sqrt{a}}{6 \omega} \left[ \ln(2E_1 \sqrt{a}/m^2) - 25/8 \right] \quad (9.35)$$

mientras que en el caso opuesto  $\omega^2 \gg a$  ( $x \ll 1$ ) tenemos

$$\tilde{f}(\omega, a) \underset{(\omega^2 \gg a)}{\simeq} f_{>} \equiv \frac{a}{3 \omega^2} \left\{ \frac{11}{48} - \frac{37}{12} \ln(2\omega/\sqrt{a}) + \ln(2E_1 \sqrt{a}/m^2) \left[ \ln(2\omega/\sqrt{a}) - 1/12 \right] \right\} \quad (9.36)$$

En la figura 9.9 aparecen dibujadas las tres funciones  $\tilde{f}(\omega, a)$  (curva continua),  $f_{<}$  (curva con trazos largos) y  $f_{>}$  (curva con trazos cortos) para una energía de 100 GeV y un valor típico del parámetro  $a$ ,  $a = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^2$ .

De la figura resulta evidente que  $f_{<} > \tilde{f}(\omega, a) > f_{>}$  para todos los valores de  $\omega$ .

Aunque esperamos que la sección eficaz (9.25) venga dominada por la zona  $\omega \sim 40\text{-}50 \text{ MeV}$ , en donde las aproxi-

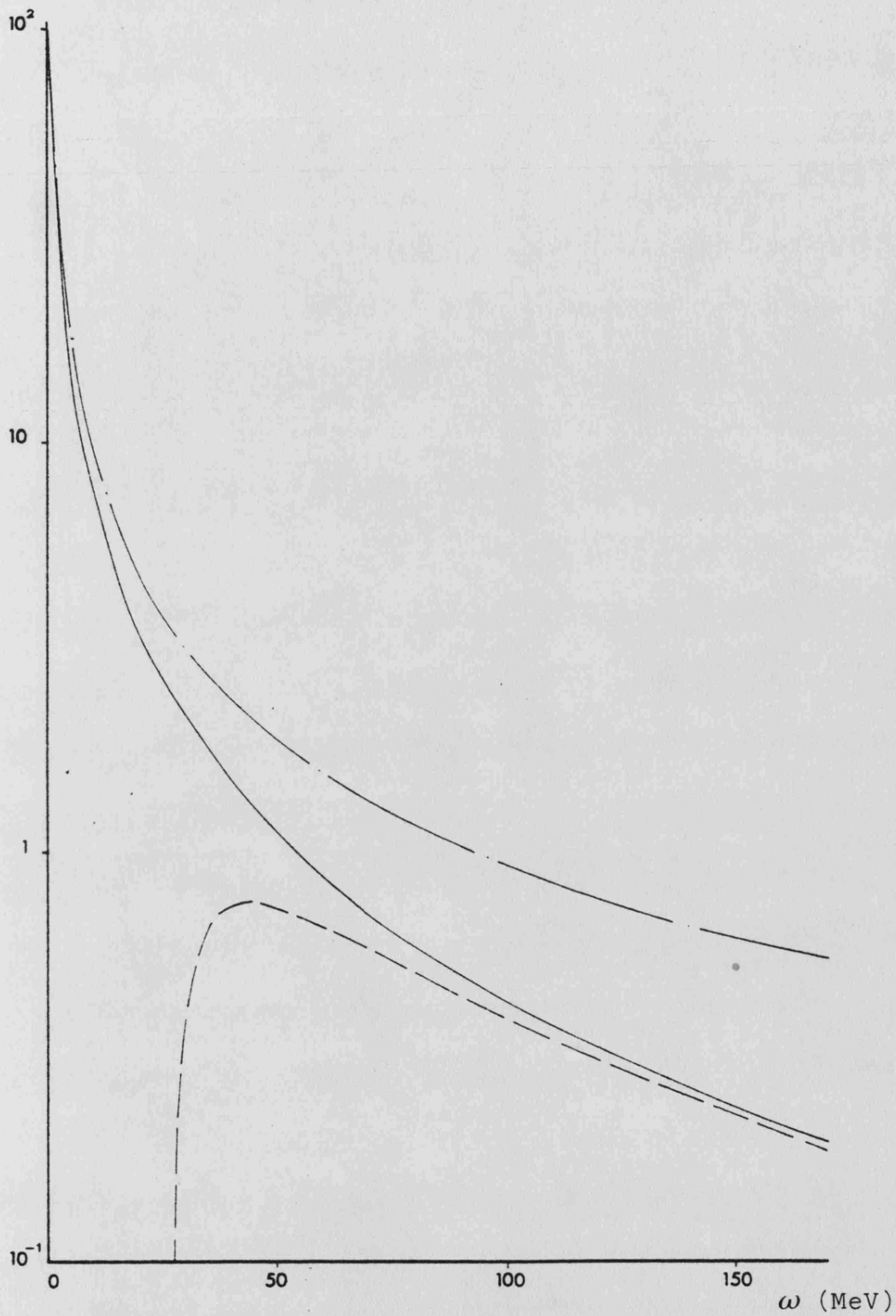


Fig. 9.9.- Valores de  $\tilde{f}(\omega, a)$  (—),  $f_z$  (---) y  $f_>$  (---) en función de  $\omega$ , para  $E_1=100$  GeV y  $a=2.4 \cdot 10^{-3}$  GeV<sup>2</sup>.

maciones  $f_{\geq}$  son peores ( $\omega^2 \sim a$  en esta región), podemos hacer estimaciones por exceso y por defecto usando dichas funciones. Como  $f_{\leq}$  es más simple y mejor comportada que  $f_{\geq}$ , realizaremos la estimación por exceso. Introduciendo la expresión (9.35) en la ecuación (9.25) obtenemos

$$\sigma \approx g(N, a) \frac{\sigma_0 a^{3/2}}{8\pi\alpha} E_1 [ \ln(2E_1 \sqrt{a}/m^2) - 25/8 ] \sigma_{-1} \quad (9.37)$$

donde

$$\sigma_{-1} \equiv \int \frac{d\omega}{\omega} \sigma_f(\omega) \quad (9.38)$$

Para núcleos con número másico  $A \geq 100$ ,  $\sigma_{-1}$  está bastante bien determinada experimentalmente, pudiendo ser ajustada por la expresión (BO 79)

$$\sigma_{-1} = (0.20 \pm 0.02) A^{4/3} \text{ mb} \quad (9.39)$$

El radio cuadrático medio viene dado muy aproximadamente por

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} \approx 1.2 A^{1/3} \text{ fm} \quad (9.40)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (9.37) obtenemos para el plomo ( $A = 208$ )

$$\sigma_{pb} \sim 5 \cdot 10^{-47} g(N, d) E_1 \left[ \ln(2 E_1 \sqrt{a} / m^2) - 25/8 \right] \quad (9.41)$$

que para una energía del orden de 100 GeV, helicidad positiva y una generación, nos da un valor para la sección eficaz  $\sigma \sim 2 \cdot 10^{-44}$  que es completamente despreciable frente a las contribuciones elástica y cuasi-elástica.

CAPITULO X    CONCLUSIONES

En esta memoria hemos estudiado la leptoproducción de pares neutrino-antineutrino en el campo coulombiano nuclear

$$\ell^- + {}^A_Z \rightarrow \ell^- + \nu + \bar{\nu} + {}^A_Z$$

La motivación fundamental de este estudio ha sido la posibilidad de imponer cotas al número de generaciones fermiónicas, mediante la detección experimental del proceso, aprovechando la disponibilidad de haces de muones de alta energía en los laboratorios de física de partículas, y el hecho de que la coherencia de la dispersión coulombiana introduce un factor  $Z^2$  en la sección eficaz, aumentándola así en dos o tres órdenes de magnitud según el núcleo considerado.

El punto de partida de este estudio ha sido la teoría estándar  $SU(2) \otimes U(1)$  de las interacciones electro-débiles. Las conclusiones principales a las que hemos llegado son:

- La contribución de corrientes cargadas a la amplitud, que sólo aparece cuando el neutrino final pertenece al mismo isodoublete débil que el leptón incidente, está suprimida por un factor  $m/E_1$  respecto a la de corrientes neutras, cuando el leptón cargado negativamente tiene helicidad

positiva. Así pues, tomando  $\lambda = +\frac{1}{2}$ , la sección eficaz es proporcional al número de generaciones fermiónicas.

-Para helicidades negativas la contribución de corrientes cargadas puede ser relacionada con la de corrientes neutras mediante una transformación de Fierz. Para ello, hemos despreciado el diagrama de autoacoplamiento de los bosones gauge, por contener dos propagadores bosónicos y hemos tomado el límite de masa nula a nivel del vértice. Esta relación permite predecir la razón entre la sección eficaz de nuestro proceso y la correspondiente a la reacción

$$\nu^- + {}^A_Z \rightarrow \nu'^- + \nu + \bar{\nu} + {}^A_Z, \quad (\nu \neq \nu')$$

sin tener que estudiar detalladamente el comportamiento de la sección eficaz.

- La distribución de fotones virtuales ha sido obtenida analíticamente en el límite de alta energía. Los casos límite  $x_1 \ll m^2$  y  $m^2 \ll x_1$  han sido estudiados, encontrando que resultan ser muy buenas aproximaciones, al caso de muones y electrones respectivamente.

Utilizando factores de forma realistas, se ha estudiado numéricamente esta distribución para los núcleos  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  y  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ , obteniéndose valores medios de  $x_1$  del orden de  $3 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^2$

- La sección eficaz total tiene una dependencia con la energía de la forma  $\sigma \sim E_1 [a + b \ln(2E_1/m)]$ . Suponiendo tres generaciones y helicidad positiva se obtiene, en el caso del hierro, un valor de  $1.1 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^2$  para muo-



nes de 300 GeV. Para electrones, la sección eficaz resulta ser un factor 2.5 mayor. El comportamiento es similar para el plomo, en cuyo caso la sección eficaz toma el valor  $6.6 \times 10^{-40} \text{ cm}^2$  para muones de 300 GeV y tres generaciones.

-Las distribuciones energética y angular del leptón cargado final, han sido obtenidas numéricamente para un núcleo de  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ . El leptón cargado pierde una gran cantidad de energía durante el proceso de radiación del par neutrino-antineutrino. El máximo de la distribución energética está situado prácticamente sobre el límite inferior del espectro cayendo  $\sphericalangle(E_2)$  bruscamente a cero para  $E_2 = m$ . Para una energía incidente de 300 GeV, el valor medio de  $E_2$  es de 30.7 GeV para muones y 15.6 GeV para electrones.

La distribución angular está, lógicamente, picada en la dirección hacia adelante. Sin embargo, se alcanzan valores medios apreciables para el ángulo de difusión. Para muones de 300 GeV, se obtiene un valor medio  $\langle \theta_2 \rangle \sim 2.9^\circ$ . Para electrones se alcanzan ángulos de difusión sustancialmente mayores, obteniéndose  $\langle \theta_2 \rangle \sim 10.7^\circ$  a 300 GeV.

-Se ha calculado también la contribución del pico cuasi-elástico nuclear a la sección eficaz. La contribución cuasi-elástica por protón resulta ser de un orden de magnitud comparable, aunque menor, a la contribución coherente por nucleón, mientras que los neutrones no dan contribución apreciable. Las modificaciones introducidas por el pico cuasi-elástico resultan ser más importantes para el hierro

que para el plomo, y en el caso muónico que en el electrónico. Tomando una energía incidente de 300 GeV, la contribución cuasi-elástica a la sección eficaz total es del 18% para muón y hierro, 12% para electrón y hierro, 11% para muón y plomo y 6% para electrón y plomo.

- Finalmente hemos estudiado la contribución de la región de excitación nuclear, no incluida en el pico cuasi-elástico, en la que  $x_1$  es pequeño y  $\omega$  está asociada a dicha excitación, mediante el uso de la aproximación dipolar retardada, relacionando así las funciones de estructura hadrónicas con la sección eficaz de fotoabsorción. Nuestras estimaciones muestran que esta contribución es cuatro órdenes de magnitud menor que la elástica y por lo tanto despreciable.

REFERENCIAS

- (AS 81) Y.Asano et al., Phys. Lett. 107B, 159 (1981)
- (BD 64) J.B.Bjorken y S.D.Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", Ed.McGraw-Hill Book Company, New York (1964), p.104
- (BE 78) C.Berger et al., Phys. Lett. 76B, 243 (1978)
- (BG 62) M.Baker y S.L.Glashow, Phys. Rev. 128, 2462 (1962)
- (BG 75) V.M.Budnev, I.F.Ginzburg, G.V.Meledin y V.G.Serbo, Phys. Rep. 15, 181 (1975)
- (BJ 69) J.D.Bjorken, Phys. Rev. 179,1547 (1969)
- (BJ 77) R.C.Barret y D.F.Jackson, "Nuclear Sizes and Structure", Ed. Clarendon Press, Oxford (1977)
- (BK 81) V.Barger, W.Y.Keung y R.J.N.Phillips, Madison preprint MAD/PH/3 (1981)
- (BL 71) V.B.Berestetskii, E.M.Lifshitz y L.P.Pitaevskii, "Teoría Cuántica Relativista", Ed. Reverté, Barcelona (1971)
- (BN 78) A.J.Buras, J.Ellis, M.K.Gaillard y D.V.Nanopoulos, Nucl. Phys. B135, 66 (1978)
- (BO 79) O.Bohigas, Proc. de la "International Conference on Theory and Applications of Moment Methods in Many-Fermion Systems", Iowa, 1979; Ed. Plenum Press, New York (1980)
- (BP 81) J.Bernabéu y P.Pascual, "Electro-Weak Theory", Ed. Univ. Autónoma de Barcelona (1981)
- (BR 81) G.Barbiellini, B.Richter y J.L.Siegrist, SLAC-PUB-2744, Mayo (1981)
- (BT 75) J.Bernabéu y R.Tarrach, Phys. Lett. 55B, 183 (1975)
- (CA 63) N.Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10, 531 (1963)
- (CF 78) M.S.Chanowitz, M.A.Furman e I.Hinchliffe, Phys. Lett. 78B, 285 (1978)
- (CM 76) L.Camilleri et al., CERN Yellow Report 76-18 (1976)
- (CO 77) J.H.Cobb et al., Phys. Lett. 72B, 273 (1977)

- (CS 64) W.Czyz, G.C.Sheppey y J.D.Walecka, Nuov. Cim. 34, 404 (1964)
- (DA 78) C.W.Darden et al., Phys. Lett. 76B, 246 (1978)
- (EH 82) J.Ellis y J.S.Hagelin, CERN preprint TH-3390 (1982)
- (EL 78) J.Ellis, Proc. 1978 SLAC Summer Institute on Particle Physics, Ed. M.Zipf, SLAC-215, p.69 (1978)
- (EL 79) J.Ellis, Proc. ECFA/CERN Les Houches Summer Study on L.E.P., CERN Yellow Report 79-01 (1979)
- (EL 81) J.Ellis, Lectures at Les Houches Summer School, LAPP preprint TH-48 / CERN preprint TH-3174 (1981)
- (EO 82) J.Ellis y K.A.Olive, CERN preprint TH-3328 (1982)
- (FE 34) E.Fermi, Zeit. für Phys. 88, 161 (1934)
- (FF 73) G.Fey, H.Frank, W.Schütz y H.Theissen, Zeit. für Phys. 265, 401 (1973)
- (FI 37) M.Fierz, Zeit. für Phys. 104, 553 (1937)
- (FN 79) P.H.Frampton, S.Nandi y J.J.G.Scanio, Phys. Lett. 85B, 225 (1979)
- (FU 71) K.Fujikawa, Ann. of Phys. 68, 102 (1971)
- (GA 82) E.Gabathuler, Comunicación privada (1982)
- (GG 79) K.J.F.Gaemers, R.Gastmans y R.M.Renard, Phys. Rev. D19, 1605 (1979)
- (GL 61) S.L.Glashow, Nucl.Phys. 22, 579 (1961)
- (GO 74) M.Gourdin, Phys. Rep. 11, 29 (1974)
- (GQ 74) H.Georgi, H.Quinn y S.Weinberg, Phys. Rev. Lett. 33, 451 (1974)
- (GR 73) D.J.Gross y F.Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973)
- (GS 62) J.Goldstone, A.Salam y S.Weinberg, Phys. Rev. 127, 965 (1962)
- (GS 80) V.Ganapathi y J.Smith, Stony Brook report ITP-SB-80-36 (1980)
- (GW 77) S.L.Glashow y S.Weinberg, Phys. Rev. D15, 1958 (1977)
- (HE 69) J.Heisenberg et al., Phys. Rev. Lett. 23, 1402 (1969)

- (HE 77) S.Herb et al., Phys. Rev. Lett. 39, 252 (1977)
- (HI 66) P.W.Higgs, Phys. Rev. 145, 1156 (1966)
- (IL 81) T.Inami y C.S.Lim, Prog. Theor. Phys. 65, 297 (1981)
- (IN 77) W.R.Innes et al., Phys. Rev. Lett. 39, 1240 (1977)
- (IZ 80) C.Itzykson y J.B.Zuber, "Quantum Field Theory", Ed. McGraw-Hill, New York (1980), p. 161
- (JY 83) C.Jarlskog y F.Ynduráin, Phys. Lett. 120B, 361 (1983)
- (KI 67) T.W.B.Kibble, Phys. Rev. 155, 1554 (1967)
- (KL 81) J.E.Kim, P.Langacker, M.Levine y H.H.Williams, Rev. Mod. Phys. 53, 211 (1981)
- (KM 73) M.Kobayashi y K.Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49, 652 (1973)
- (KW 82) Kwong H.Lau, SLAC-PUB-3001 (1982)
- (LR 71) L.Løvstth y M.Radomski, Phys. Rev. D3, 2686 (1971)
- (LR 80) I.Liede y M.Roos, Nucl. Phys. B167, 397 (1980)
- (LW 81) C.H.Llewellyn Smith y J.F.Wheater, Phys. Lett. 105B, 486 (1981)
- (LY 60) T.D.Lee y C.N.Yang, Phys. Rev. Lett. 4, 307 (1960)
- (MO 78a) E.Ma y J.Okada, Phys. Rev. Lett. 41, 287 (1978)
- (MO 78b) E.Ma y J.Okada, Phys. Rev. D18, 4219 (1978)
- (MS 80) W.J.Marciano y A.Sirlin, Phys. Rev. D22, 2695 (1980)
- (MS 81) A.Sirlin y W.J.Marciano, Nucl. Phys. B189, 442 (1981)
- (MS 82) W.J.Marciano y A.Sirlin, BNL-31653 (1982)
- (NR 79) D.V.Nanopoulos y D.A.Ross, Nucl. Phys. B157, 273 (1979)
- (NR 82) D.V.Nanopoulos y D.A.Ross, Phys. Lett. 108B, 351 (1982)
- (OS 81a) K.A.Olive, D.N.Schramm y G.Steigman, Nucl. Phys. B180 (FS2), 497 (1981)
- (OS 81b) K.A.Olive, D.N.Schramm, G.Steigman, M.S.Turner y J.Yang, Ap. J. 246, 557 (1981)
- (OT 81) K.A.Olive y M.S.Turner, Phys. Rev. Lett. 46, 516 (1981)
- (PA 77) E.A.Paschos, Phys. Rev. D15, 1966 (1977)

- (PB 82a) A.Pich y J.Bernabéu, Zeit. für Phys. C14, 21 (1982)
- (PB 82b) A.Pich y J.Bernabéu, J. Phys. G8, L65 (1982)
- (PE 66) P.J.E.Peebles, Ap. J. 146, 542 (1966)
- (PO 73) H.D.Politzer, Phys. Rev. Lett. 30, 1346 (1973)
- (PR 79) A.Van Proeyen, Phys. Rev. 20D, 813 (1979)
- (PS 61) I.Ya Pomeranchuk e I.M.Schmuskevich, Nucl. Phys. 23, 452 (1961)
- (RW 76) J.Rich y D.R.Winn, Phys. Rev. D14, 1283 (1976)
- (SA 68) A.Salam, "Elementary Particle Physics", Ed. N.Svartholm, Estocolmo (1968)
- (SH 69) V.G.Shvartsman, JETP Lett. 9, 184 (1969)
- (SK 80) F.W.Stecker, Phys. Rev. Lett. 44, 1237 (1980)
- (SK 81) F.W.Stecker, Phys. Rev. Lett. 46, 517 (1981)
- (SO 79) G.Steigman, K.A.Olive y D.N.Schramm, Phys. Rev. Lett. 43, 239 (1979)
- (SS 77) G.Steigman, D.N.Schramm y J.E.Gunn, Phys. Lett. 66B, 202 (1977)
- (ST 80) N.Straumann, Proc. del "GIFT Seminar on Electroweak Interactions", Peñiscola (1980) / preprint Zürich Univ. (1980)
- (TH 71) G.'t Hooft, Nucl. Phys. B33, 173 (1971)
- (TU 80) Wu-Ki Tung, Zeit. für Phys. 4C, 307 (1980)
- (VE 77) M.Veltman, Nucl. Phys. B123, 89 (1977)
- (WA 73) R.V.Wagoner, Ap. J. 179, 343 (1973)
- (WE 67) S.Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967)
- (WF 67) R.V.Wagoner, W.A.Fowler y F.Hoyle, Ap. J. 148, 3 (1967)
- (YM 54) C.N.Yang y R.L.Mills, Phys. Rev. 86, 191 (1954)
- (YS 79) J.Yang, D.N.Schramm, G.Steigman y R.T.Rood, Ap. J. 227, 697 (1979)

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha,  
acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de  
D. Antonio Pich Zardoya  
la calificación de sobresaliente cum laude

Valencia, a 29 de junio de 1983 ✓

El Secretario,

El Presidente



Rolf Tamad