



OBRA DE CONSULTA

EXCLOSA DE PRÉSTEC

NO SE PRESTA

T. D.

149

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Física Teòrica

TENSORES SIMÉTRICOS

Y

REFERENCIALES LORENTZIANOS

616886306

61919500

BIBLIOTECA CIENCIAS
BIBLIOTECA CIENCIAS
Nº Registre ... 24393
DATA ... 2-XII-05
SIGNATURA
Nº LIBIS:

Memoria presentada por
Juan A. Morales LLadosa
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas.
Burjassot, Septiembre de 1988.

23 und.

UMI Number: U603085

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U603085

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.

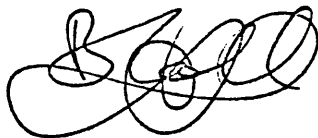


ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

Yo, Bartolomé Coll Durán, investigador C.N.R.S. del "Département de Mécanique Relativiste" de la Universidad de París VI,

CERTIFICO que la presente Memoria, titulada "Tensores simétricos y referenciales lorentzianos", ha sido realizada bajo mi dirección.

Y para que así conste, firmo la presente en París, a 12 de Septiembre de 1988

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and flourishes, representing the name Bartolomé Coll.

Fdo. Bartolomé Coll

Agradezco a Bartolomé Coll el entusiasmo que siempre ha puesto en la realización de este trabajo, y el saber comunicarme; además sus iniciativas, sugerencias y críticas han sido de gran ayuda para mí. Asimismo, aprecio el trato personal que de él he recibido, la hospitalidad de su familia y la amistad con Fernando y Maite; juntos, han alegrado mis estancias en París. Deseo agradecer a Joaquín Olivert su atención a todas mis consultas y sobre todo el haberme iniciado en la investigación científica; a Joan Josep Ferrando, el tiempo que llevamos contándonos las cosas que salen y las que no. En José María Ibañeta y Miquel Portillà veo a cuantos se han interesado, por amistad, por la marcha de mi trabajo.

INDICE

INTRODUCCION	1
--------------------	---

Primera parte: CARACTERIZACION ALGEBRAICA DE UN 2-TENSOR SIMETRICO

I. DETERMINACION DEL TIPO ALGEBRAICO.

1. Situación y planteamiento del problema	9
2. Autovalores de un tensor simétrico	12
3. Tipos reales y ecuaciones minimales	20
4. Grado del polinomio minimal de los tipos reales	25

II. DETERMINACION COVARIANTE DE AUTOVECTORES.

1. Objetivos y contenido	28
2. Concomitantes propios de un tensor simétrico	30
3. Expresión de los concomitantes propios y método covariante de obtención de los autovectores	35
4. Carácter causal de los subespacios propios	44
5. Aplicación al fluido perfecto	50

Segunda parte: REFERENCIALES LORENTZIANOS.

III. CLASIFICACION CAUSAL DE LOS REFERENCIALES DE ESPACIO-TIEMPO.

1. Tipo causal de un referencial y de su dual	55
2. Configuraciones de 2-planos	63
3. Referenciales $\langle teee \rangle$ y $\langle iiee \rangle$. Autodualidad	71
4. Referenciales de la forma $\langle ieee \rangle$	78
5. Número total de clases causales	83

IV. REFERENCIALES SIMETRICOS. ESTUDIO ALGEBRAICO.

1. Motivación y contenido	86
2. Vectores métricamente permutables	88
3. Eje de un referencial simétrico	95
4. Clasificación causal de los referenciales simétricos.	101

V. REFERENCIALES SIMETRICOS NATURALES Y DE ORDEN SUPERIOR.

1. Planteamiento del problema y objetivos	105
2. Referenciales simétricos naturales. Propiedades del eje. Curvatura y tensor de Weyl	107
3. Espacio-tiempos que admiten referenciales simétricos naturales	114
4. Referenciales simétricos de segundo y tercer orden.	123

REFERENCIAS	130
-------------------	-----

INTRODUCCION

Este trabajo se ocupa de la caracterización algebraica de los 2-tensores simétricos y del estudio de los referenciales de espacio-tiempo.

El objetivo de la primera parte es expresar, en términos intrínsecos a un 2-tensor simétrico dado, las propiedades algebraicas de éste. Estudiamos la determinación de su tipo algebraico a partir de operaciones elementales con el tensor y la métrica así como la resolución covariante del problema de autovectores.

La segunda parte se dedica a estudiar los referenciales de espacio-tiempo. En primer lugar éstos se analizan desde la óptica de sus características causales, que conduce a una clasificación de los mismos en ciento noventa y nueve clases. En segundo lugar introducimos los referenciales simétricos, es decir, los constituidos por vectores métricamente indiscernibles. Estudiamos los referenciales simétricos naturales (coordenados) y damos la caracterización de los espacio-tiempos que los admiten. También analizamos la existencia de referenciales simétricos para los concomitantes diferenciales de la métrica.

I

a) Es bien conocido /Churchill, 1932/ que la clasificación algebraica de un 2-tensor simétrico real en el espacio-tiempo conduce a cuatro tipos disjuntos. Existe un trabajo /Hall, 1984/ donde se encuentra recopilada gran parte de la extensa bibliografía sobre el tema, así como los diferentes puntos de vista que se han empleado al abordar el problema. Estos se centran esencialmente en la obtención y comparación de los diferentes criterios equivalentes de clasificación, y en el análisis de las particularidades algebraicas y geométricas de cada tipo. El tipo I es el que admite al menos una dirección propia temporal. Los tipos II y III poseen una única dirección propia isótropa; se distinguen por el número de vectores propios linealmente independientes: tres para el tipo II y dos para el III. Estos tres tipos se denominan reales por ser tal la naturaleza de sus autovalores. El caso con un único par de autovalores complejos conjugados es el tipo IV.

Todos estos resultados, aunque conciernen objetos geométricos intrínsecamente ligados a cada tensor, no han sido, en general, formulados explícitamente en forma covariante. El objetivo del capítulo I es llenar esta laguna, proporcionando una *caracterización intrínseca* de los tipos algebraicos que no exija la resolución previa del problema de autovectores. Una tal caracterización es interesante, especialmente, en el estudio de tensores impulso-energía, de los que es sabido /Plebański, 1964 p.1011-7/ que sólo los tipos I y II son candidatos adecuados para describir una distribución energética físicamente aceptable. De ahí la importancia de establecer el mínimo de operaciones necesarias para determinar el tipo algebraico de un tensor.

b) En Relatividad General, el tensor impulso-energía aparece sometido a diversas condiciones algebraicas a fin de poder describir situaciones susceptibles de interpretación física. Es usual considerar la denominada condición dominante de energía: para todo observador, la densidad de energía es no negativa y su flujo es un vector no espacial. Para los tensores de tipo I, tal condición equivale a que sus autovalores verifiquen ciertas desigualdades dependientes del carácter causal de los subespacios propios asociados /Plebański, 1964; Linet, 1971/.

La determinación previa del tipo algebraico de un tensor T es uno de los dos ingredientes necesarios para la formulación intrínseca explícita (en términos solamente del propio T) de las condiciones de energía, problema aún abierto. El otro ingrediente es la determinación intrínseca del carácter causal del subespacio propio asociado a cada uno de los autovalores.

El objetivo del capítulo II es la *resolución covariante* del problema de autovectores de un tensor simétrico. Con tal fin introducimos, para cada autovalor, un concomitante algebraico del tensor y de la métrica cuya acción sobre una base arbitraria del espacio-tiempo coincide o está contenida en el subespacio propio del autovalor elegido. En los casos en que dicho concomitante no genera la totalidad del subespacio propio, completamos su determinación de modo intrínseco, mediante operaciones que sólo involucran el tensor y la métrica. Para cada uno de los tipos reales damos un método práctico de obtención de sus autovectores y expresamos, con ayuda de los concomitantes, el carácter causal de sus subespacios propios.

Algunos de los resultados de esta primera parte fueron presentados en los Encuentros Relativistas Españoles (E.R.E.) de 1986 /C.Bona, B.Coll y J.A.Morales, 1986/.

c) La clasificación algebraica de los tensores de segundo orden simétricos en un espacio-tiempo ha mostrado su utilidad en Relatividad General. En un amplio artículo, Plebański /1964/ motivó el interés de los relativistas por la cuestión, tras realizar un minucioso análisis algebraico y poner de manifiesto sus múltiples aplicaciones físicas. De este trabajo derivan publicaciones teóricas de interés como son el estudio de los espacio-tiempos con simetría esférica y con contenido energético de un tipo dado /Plebański & Stachel, 1968/, y la posterior generalización a métricas admitiendo grupos de isometrías a tres parámetros con órbitas bidimensionales /Goener & Stachel, 1970/.

Por otra parte, las versiones de la clasificación basadas en técnicas espinoriales han resultado interesantes en el problema de la geometrización de varios campos /Ludwing & Scanlan, 1971/. Cabe también destacar la tarea realizada por Hall y colaboradores en el análisis e interpretación geométrica de la clasificación, así como en el marco de las aplicaciones /G.S.Hall, 1976 (a),(b), 1982; Cormack & Hall 1979 (a),(b), 1981; Crade & Hall 1979, 1981, 1982/.

El estudio que realizamos en la primera parte de la memoria, además de su interés práctico, abre la posibilidad de nuevas aplicaciones teóricas. Nuestro método covariante de obtención de autovectores es útil para traducir ecuaciones algebraicas o diferenciales verificadas por los vectores propios de un tensor T en ecuaciones sobre T . Y la determinación del carácter causal de los subespacios propios es especialmente adecuada en la caracterización intrínseca de la clase de tensores que admiten cierta expresión general. Como ejemplo de aplicación, damos la caracterización algebraica completa de los fluidos perfectos (pascalianos, no conductores del calor) que obedecen a la condición dominante de energía.

I I

a) Los referenciales de un espacio con métrica no elíptica pueden tener diferentes características causales. El carácter causal de los $n-1$ conjuntos ordenados de s -planos ($1 \leq s < n$) generados por las combinaciones de s en s de los n vectores de un referencial proporciona toda la información causal acerca del mismo. Así, en particular, el carácter causal de un referencial lorentziano depende de los $2^n - 2$ caracteres causales de sus s -planos. Según esto, llamaremos *clase causal* de un referencial al conjunto de referenciales con el mismo carácter causal.

En el capítulo III planteamos la siguiente cuestión básica: ¿cuántas clases causales de referenciales existen en el espacio-tiempo?. Comenzaremos por analizar las configuraciones de 2-planos y de 3-planos que son compatibles con el carácter causal de las cuatro direcciones de un referencial dado. Dicho análisis nos conducirá a una clasificación de los referenciales de espacio-tiempo en 199 clases causales.

Este sorprendente número induce una clasificación en igual número de partes del grupo general lineal, que se revelará útil, en particular, en el estudio de perturbaciones de una métrica dada.

Algunas de estas clases presentan ciertas propiedades de dualidad que serán asimismo estudiadas en este capítulo.

b) Con objeto de poder transcribir al espacio-tiempo de la Relatividad ciertas situaciones físicas de interés, en los dos últimos capítulos de esta memoria introducimos y estudiamos el concepto de referencial simétrico.

Un *referencial simétrico* es un referencial tal que sus vectores son métricamente indistinguibles (son iguales sus módulos e iguales sus productos escalares mutuos). Tales referenciales no privilegian ninguna dirección de espacio-tiempo desde el punto de vista métrico; por ello son buenos candidatos a priori para el análisis de propiedades cosmológicas ligadas a la isotropía.

El capítulo IV es un estudio de las propiedades algebraicas de los referenciales simétricos: signatura de las métricas que los admiten, grupo de transformaciones que los relacionan, etc. Probamos que las únicas métricas hiperbólicas que admiten referenciales simétricos son las lorentzianas, y damos la clasificación causal de dichos referenciales. Nuestro análisis se realiza en dimensión cualquiera.

En el capítulo V incorporamos los referenciales simétricos a la estructura diferenciable de una variedad, utilizando dos vías diferentes.

En primer lugar estudiamos los referenciales simétricos naturales, es decir, asociados a sistemas de coordenadas locales. Nuestro resultado fundamental es que tales referenciales son realizables en todos los espacio-tiempos que admiten una *sincronización umbilical conformemente plana*. Como ese es el caso para muchos universos cosmológicos, cabe pensar que las coordenadas simétricas que introducimos deberán jugar un papel interesante en Cosmología.

En segundo lugar exigimos que los vectores de un referencial simétrico sean también indiscernibles para el tensor de curvatura. Los espacio-tiempos que admiten dichos referenciales resultan ser los fluidos perfectos conformemente planos, ampliamente analizados en otro contexto por Stephani /1967/ y Barnes /1973, 1974/. Finalmente consideramos la existencia de referenciales simétricos para la métrica, el tensor de Ricci y sus derivadas covariantes; entonces probamos que el espacio-tiempo se reduce a un espacio de Einstein o bien a un universo de Friedmann-Robertson-Walker.

Los resultados de estos dos capítulos son el contenido detallado de una nota a los Comptes Rendus y de sendas comunicaciones a los E.R.E.-87 y a las Journées Relativistes, /B.Coll y J.A.Morales, 1987, 1988(a),(b)/.

Primera parte:

CARACTERIZACION ALGEBRAICA DE UN 2-TENSOR SIMETRICO

CAPITULO I

DETERMINACION DEL TIPO ALGEBRAICO

1. SITUACION Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .

a) Este capítulo resuelve la siguiente cuestión: dado un 2-tensor simétrico T y una métrica lorentziana g en dimensión cuatro, ¿cómo obtener el tipo algebraico de T con respecto a g ?

Nuestras consideraciones son estrictamente algebraicas y por tanto aplicables en cada punto de un espacio-tiempo (V_4, g) . Indistintamente denotaremos por T el endomorfismo del espacio tangente $T_p V_4$ en $p \in V_4$, asociado canónicamente al 2-tensor simétrico por g . El estudio de las formas reducidas de Jordan de T conduce a su clasificación algebraica /B.Linet, 1971/. Las formas canónicas en una base ortonormal adaptada a los vectores propios del tensor pueden consultarse, por ejemplo, en un trabajo de Petrov /1966/. También se han estudiado de manera sistemática las correspondientes expresiones en una tetraeda isótropa real /G.S.Hall, 1976/.

Nuestro objetivo aquí es bien distinto al de los trabajos anteriores: a partir de los resultados algebraicos conocidos, nos proponemos caracterizar intrínsecamente la clasificación de los 2-tensores simétricos en el espacio-tiempo.

En la sección 2 elegimos un conjunto de invariantes adecuado a nuestros propósitos y analizamos el problema de autovalores de T . Esto permite distinguir los tipos cuyos autovalores son todos reales (I, II y III) del que posee un único par de autovalores complejo-conjugados (tipo IV). Queda entonces la tarea de diferenciar los tres tipos reales entre sí. Para éstos, es conocido que están biunívocamente determinados por el valor de la multiplicidad máxima (τ) de las raíces del polinomio minimal de T . El problema es por tanto expresar el invariante τ en términos de otros invariantes que sean calculables directamente a partir de T y de g .

En la sección 3 escribimos todos los posibles polinomios minimales y construimos la Tabla I.2. que proporciona un método para determinar el tipo algebraico del tensor.

De la Tabla I.2. se sigue (para los tipos reales) la sencilla relación: $\tau = k - \nu$, siendo k el orden de la ecuación minimal y ν el número de invariantes positivos que intervienen en nuestra discusión. Esta relación, complementada con el algoritmo de cálculo de k que presentamos en la sección 4, proporciona un método alternativo para la determinación del tipo algebraico.

b) El tipo Petrov-Bel de un espacio-tiempo puede determinarse a partir de la multiplicidad de las raíces de una ecuación cuártica cuyos coeficientes son las componentes del tensor de Weyl en una tetraeda isótropa compleja. Para su obtención se utiliza el algoritmo de d'Inverno y Russell-Clark /1971/ o alguna de sus versiones mejoradas /Letniowski & McLenaghan, 1988/

La obtención de un algoritmo que proporcione el tipo de un tensor simétrico no es tan sencilla. Primero hay que constatar si todos los autovalores son reales; y si es ese el caso, no basta con dar su multiplicidad: se precisa además el orden de la ecuación minimal verificada por T. Quizá sea ésta la razón por la que algunos autores hayan propuesto un método "mixto" para obtener el tipo de un T dado /Collinson & Shaw, 1972 (Tabla 3)/; éste se basa en la aplicación del algoritmo de d'Inverno y Russell-Clark a una doble 2-forma weylana -denominada "tensor de Plebański" /McIntosh, Foyster & Lun, 1981/- que está asociada a la parte sin traza de T y ha sido estudiada por Sobczyk /1980/. En conexión con estas ideas, cabe mencionar un artículo de Dozmorov /1973/ sobre la relación de los "tipos Petrov" del tensor de materia construido a partir del tensor de Ricci y la clasificación algebraica de éste.

Sin embargo, algoritmos similares a los descritos en este capítulo para determinar el tipo algebraico de T no parece que hayan sido considerados con anterioridad.

2. AUTOVALORES DE UN TENSOR SIMETRICO.

a) En dimensión cuatro, consideremos un endomorfismo real T , y sea N su parte sin traza, $N = T - \frac{1}{4}(\text{tr}T)I$. El polinomio característico de N está dado por:

$$P(x) = x^4 - \frac{b}{4}x^2 - \frac{c}{3}x + \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{2} - d\right) \quad (I.1)$$

en donde

$$b = \text{tr}N^2, \quad c = \text{tr}N^3, \quad d = \text{tr}N^4$$

Conviene definir un conjunto adecuado de invariantes cuyos signos determinen la naturaleza (real o compleja) y la multiplicidad de las raíces de $P(x)$. Elegimos:

$$I_1 = I_3^3 - I_4^2, \quad I_2 = 2b - |I_3|^{1/2} \quad (I.2-3)$$

$$I_3 = 7b^2 - 12d, \quad I_4 = 3b I_3 + 4(3c^2 - b^3) \quad (I.4-5)$$

La Tabla I.1. resume la discusión de la ecuación $P(x)=0$ en términos de los invariantes introducidos y se aplica a una ecuación cuártica genérica con coeficientes reales. Dicha tabla se obtiene como una consecuencia de las proposiciones I.2-3., que serán útiles en la determinación del tipo algebraico de un tensor simétrico en el espacio-tiempo.

Entre las trazas de las potencias de N y T se tiene las siguientes relaciones:

$$b = -\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta, \quad c = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - \frac{3}{4}\alpha\beta + \gamma \quad (I.6-7)$$

$$d = \frac{3}{4}\left[-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 + \frac{1}{2}\alpha^2\beta\right] - \alpha\gamma + \delta \quad (I.8)$$

siendo

$$\alpha = \text{tr}T, \quad \beta = \text{tr}T^2, \quad \gamma = \text{tr}T^3, \quad \delta = \text{tr}T^4$$

TABLA I.1. Naturaleza y multiplicidad de las raíces de un polinomio real de cuarto grado.

$I_1 < 0$	dos raíces reales distintas y un par complejo-conjugadas (c.c).
$I_1 > 0$	$\left\{ \begin{array}{l} I_2 > 0 \\ I_2 < 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{cuatro raíces reales distintas.} \\ \text{dos pares diferentes de raíces c.c.} \end{array} \right.$
$I_1 = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} I_2 > 0 \\ I_2 = 0 \\ I_2 < 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} I_3 > 0 \dots \text{dos reales distintas y una real doble.} \\ I_3 = 0 \dots \text{una triple y una simple.} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} I_3 > 0 \dots \text{dos reales dobles y distintas.} \\ I_3 = 0 \dots \text{una cuádruple.} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} I_4 > 0 \dots \text{una real doble y un par c.c.} \\ I_4 < 0 \dots \text{dos pares iguales de raíces c.c.} \end{array} \right. \end{array} \right.$

De la tabla anterior se infiere que las raíces de un polinomio real de cuarto grado son todas reales si, y sólo si, $I_1 \geq 0$ e $I_2 \geq 0$ (el caso $I_1 > 0, I_2 = 0$ está excluido).

b) En cada punto de un espacio-tiempo (V_4, g) , un 2-tensor simétrico T (real) posee al menos dos autovalores reales /Plebański 1964, p.983/. De hecho, las partes real e imaginaria de un autovector complejo generan un 2-plano temporal invariante por el tensor. El 2-plano espacial ortogonal al anterior es también invariante y está generado por dos direcciones propias espaciales con autovalores reales. Así pues, eliminando de la Tabla I.1. los casos correspondientes a dos pares de raíces complejo-conjugadas se obtiene:

PROPOSICION I.1. En (V_4, g) , la naturaleza y multiplicidad de los autovalores de un tensor simétrico están dadas por el signo de sus invariantes I_1 , I_2 e I_3 de acuerdo con:

$$\begin{array}{l}
 I_1 > 0 \dots\dots \text{cuatro autovalores reales distintos.} \\
 \\
 I_1 = 0 \left\{ \begin{array}{l}
 I_2 > 0 \left\{ \begin{array}{l}
 I_3 > 0 \dots\dots \text{uno doble.} \\
 I_3 = 0 \dots\dots \text{uno triple.}
 \end{array} \right. \quad \text{(todos reales)} \\
 \\
 I_2 = 0 \left\{ \begin{array}{l}
 I_3 > 0 \dots\dots \text{dos dobles.} \\
 I_3 = 0 \dots\dots \text{uno cuádruple}
 \end{array} \right. \\
 \\
 I_2 < 0 \dots\dots \text{uno real doble y un par c.c.}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$I_1 < 0 \dots\dots \text{dos autovalores reales distintos y un par c.c.}$$

Puede verse que la tabla de la proposición anterior concuerda con la dada por Plebański /1964, p.990/. Sin embargo, debido al invariante I_2 introducido, nuestro resultado presenta una ventaja: sólo requiere el concurso de tres signos, mientras que en la tabla de Plebański se necesitan cuatro.

c) Con objeto de justificar la Tabla I.1., consideremos la factorización $P(x) = p_+(x) p_-(x)$, con

$$p_{\pm}(x) = x^2 \pm \varepsilon_c \sqrt{u} x + \frac{1}{2} \left(u - \frac{b}{2} \pm \sqrt{v} \right), \quad \varepsilon_c = \text{sgn}(c) \quad (I.9)$$

y en donde $v = u(u - b) + d - b^2/4$, siendo u cualquier raíz de la ecuación resolvente $9uv = c^2$, es decir

$$u^3 - b u^2 + \left(d - \frac{b^2}{4} \right) u - \frac{c^2}{9} = 0 \quad (I.10)$$

que posee una raíz real no negativa.

Sean Δ_+ y Δ_- los discriminantes de $p_+(x)$ y $p_-(x)$ respectivamente,

$$\Delta_{\pm} = b - (u \pm 2 \sqrt{v}) \quad (I.11)$$

Las raíces $\langle x_i \rangle$ de $P(x)$ se escriben

$$\begin{aligned} 2x_1 &= -\varepsilon_c \sqrt{u} + \sqrt{\Delta_+}, & 2x_2 &= -\varepsilon_c \sqrt{u} - \sqrt{\Delta_+} \\ 2x_3 &= \varepsilon_c \sqrt{u} + \sqrt{\Delta_-}, & 2x_4 &= \varepsilon_c \sqrt{u} - \sqrt{\Delta_-} \end{aligned} \quad (I.12)$$

de donde se obtiene

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j) = \sqrt{\Delta_+ \Delta_-} \left(I_3 - \frac{1}{4} \Delta_+ \Delta_- \right) \quad (I.13)$$

Llamando $w \equiv 3u - b$, la ecuación (I.10) se escribe

$$w^3 - \frac{1}{4} (3 I_3 w + I_4) = 0 \quad (I.14)$$

cuyas raíces son /ver, por ejemplo, Abramowitz & Stegun, 1970/:

$$w_0 = \frac{1}{2} a_+, \quad w_{\pm} = -\frac{1}{4} (a_+ \pm \sqrt{-3} a_-) \quad (I.15)$$

donde

$$a_{\pm} = \alpha_+ \pm \alpha_-, \quad \alpha_{\pm} = \sqrt[3]{I_4 \pm \sqrt{-I_1}} \quad (I.16)$$

A partir de (I.11) resulta

$$\Delta_+ + \Delta_- = \frac{2}{3} (2b - w), \quad 3 \Delta_+ \Delta_- = I_3 - w^2 \quad (I.17-18)$$

Sustituyendo en (I.2) el valor de I_4 en función de w según (I.14), y aplicando (I.18) se obtiene:

$$I_1 = 27 \Delta_+ \Delta_- (I_3 - 4 \Delta_+ \Delta_-)^2 \quad (I.19)$$

y teniendo presente (I.13), todas las raíces son diferentes si $I_1 \neq 0$. Cuando $I_1 < 0$, la ecuación (I.10) posee dos raíces complejas conjugadas y una raíz real no negativa; para esta raíz $\Delta_+ \Delta_- < 0$, y por tanto, $P(x)$ tiene dos raíces reales diferentes y un par complejo-conjugadas.

Cuando $I_1 > 0$ entonces $I_3 > 0$ y necesariamente se tiene que $I_2 \neq 0$. En efecto, si fuese $I_2 = 0$ e $I_3 > 0$, de (I.2) se tendría

$$I_1 = -3(4c)^2(4b^3 + 3c^2) \leq 0 \quad \text{pues} \quad 2b = I_3^{1/2}$$

Por otra parte, siendo $I_1 > 0$, las tres raíces de (I.14) son reales y distintas, y se escriben:

$$w_k = I_3^{1/2} \cos \theta_k \quad (k=0,1,2; w_1 \equiv w_+, w_2 \equiv w_-)$$

siendo

$$\theta_k = \frac{1}{3}(\theta + 2\pi k) \quad \theta = \arccos \left[I_4 I_3^{-3/2} \right]$$

En virtud de (I.19) resulta $\langle \Delta_+ \Delta_- \rangle_k > 0 \quad \forall k$, con lo que las raíces de $P(x)$ son todas de igual naturaleza. Por sustitución de w_k en (I.17) se obtiene

$$\langle \Delta_+ + \Delta_- \rangle_k = \frac{2}{3} \left[I_2 + 2 I_3^{1/2} \operatorname{sen}^2(\theta_k/2) \right]$$

Si $I_2 > 0$ entonces $\langle \Delta_{\pm} \rangle_k > 0$ y las raíces son reales. En cambio, dos raíces complejo-conjugadas corresponde a $\langle \Delta_{\pm} \rangle_k < 0$, lo que significa

$$I_2 < -2 I_3^{1/2} \operatorname{sen}^2(\theta_k/2) \leq 0$$

Estas consideraciones conducen a enunciar la siguiente proposición, que resume el estudio del caso no degenerado.

PROPOSICION I.2. *Las raíces de $P(x)$ son todas simples si, y sólo si, $I_1 \neq 0$. Además,*

i) $I_1 < 0$ *corresponde a dos raíces reales distintas y un par de complejas conjugadas.*

ii) $I_1 > 0$ *corresponde a cuatro raíces de la misma naturaleza; ésta es real (resp. compleja) si $I_2 > 0$ (resp. $I_2 < 0$).*

d) En los casos degenerados se tiene $I_4=0$, y por tanto $I_3 \geq 0$. Para su estudio conviene definir:

$$\Phi \equiv 2b - I_4^{1/3} = 2b - \varepsilon I_3^{1/2} = I_2 + (1 - \varepsilon) I_3^{1/2} \quad (1.20)$$

en donde $\varepsilon \equiv \text{sgn}(I_4)$. Se presentan las situaciones que muestra la siguiente proposición.

PROPOSICION I.3. En el caso $I_4 > 0$ se tiene:

i) Si $I_2 > 0$ entonces $\Phi > 0$ y todas las raíces son reales:

$$x_d = -\frac{c}{\Phi}, \quad x_{\pm} = \frac{c}{\Phi} \pm \sqrt{\Phi/6} \quad (1.21)$$

Además si $I_3 > 0$, x_d es una raíz doble y x_{\pm} son simples, y si $I_3 = 0$ hay una raíz simple y una triple:

$$x_s = \frac{3}{2} \frac{c}{b}, \quad x_t = -\frac{1}{2} \frac{c}{b} \quad (1.22)$$

ii) Si $I_2 = 0$, hay dos pares de raíces reales dobles:

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b}, \quad \text{con } b = \frac{1}{2} \sqrt{I_3} \geq 0 \quad (1.23)$$

iii) Si $I_2 < 0$ entonces $I_3 > 0$ e $I_4 \neq 0$. Cuando $I_4 > 0$ ($\Phi = I_2$) hay una raíz real doble y un par complejo-conjugadas:

$$x_d = -c/I_2, \quad x_{\pm} = c/I_2 \pm \sqrt{I_2/6} \quad (1.24)$$

Cuando $I_4 < 0$ hay dos pares iguales de raíces complejas conjugadas:

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b} \quad \text{con } b = -\frac{1}{2} \sqrt{I_3} < 0 \quad (1.25)$$

Prueba: En el caso degenerado, de (I.15-16) resulta

$$w_0 = \alpha_+ = \alpha_- = I_4^{1/3}, \quad w_+ = w_- = -w_0/2$$

Como $3u = b + I_4^{1/3}$, las raíces de (I.10) son

$$u_0 = \frac{1}{3} (b + I_4^{1/3}), \quad u_+ = u_- = \frac{1}{3} (b - \frac{1}{2} I_4^{1/3}) = \frac{\Phi}{6}$$

Sustituyendo la raíz $u = u_0 = b - \Phi/3$ en (I.11) se obtiene:

$$(\Delta_{\pm})_0 = \frac{\Phi}{3} \mp 2\sqrt{v_0} \quad \text{con} \quad u_0 v_0 = c^2/9 = u_0 u_+ u_- = u_0 (\Phi/6)^2$$

Analicemos los diferentes casos de la proposición.

Cuando $I_2 = 2b - I_3^{1/2} > 0$ entonces por (I.20) $\Phi > 0$. Si $c \neq 0$ resulta

$$u_0 = (2c/\Phi)^2, \quad v_0 = (\Phi/6)^2$$

y en consecuencia

$$\varepsilon_c \sqrt{u_0} = 2c/\Phi, \quad (\Delta_+)_0 = 0, \quad (\Delta_-)_0 = 2\Phi/3$$

que sustituidas en (I.12) conducen a (I.21). Si $c=0$ se tiene $u_0=0$, es decir $b = -I_4^{1/3} = \Phi/3$; entonces, por (I.5), $b^2=2d$ y las raíces de $P(x)$ son $x_d=0$ y $x_{\pm} = \pm(b/2)^{1/2} = \pm(\Phi/6)^{1/2}$, de acuerdo con (I.21).

Además, para $I_3=0$ se tiene $\Phi = I_2 = 2b > 0$, y como $I_4=0$, resulta (I.22) pues $b^3=3c^2$.

Cuando $I_2=0$, $2b = I_3^{1/2} \geq 0$ y por (I.4) se sigue que $c=0$ y $b^2=4d$ con lo cual $P(x) = (x^2 - b/4)^2$.

Cuando $I_2 < 0$ necesariamente $I_4 \neq 0$ e $I_3 > 0$. En efecto, si fuese $I_4 = 0$ sería $I_3 = 0$ e $I_2 = 2b < 0$. Pero de la expresión (I.5) se tendría $b^3 = 3c^2 \geq 0$. Si $I_4 > 0$ se tiene $I_2 = \Phi < 0$, y para $c \neq 0$ resulta ahora que

$$\varepsilon_c \sqrt{u_0} = -2c/\Phi, \quad \sqrt{v_0} = -\Phi/6, \quad (\Delta_+)_0 = 2\Phi/3, \quad (\Delta_-)_0 = 0$$

y sustituyendo en (I.12) se obtiene (I.24). Para $c=0$, el mismo argumento empleado anteriormente prueba que (I.24) también se aplica en este caso, ahora con $b = \Phi/3 < 0$. Si en cambio $I_4 < 0$ se tiene $\Phi = 2b + I_3^{1/2}$ y necesariamente $\Phi = 0$; en efecto, como $u_0 \Phi^2 = 4c^2 \geq 0$, si fuese $\Phi \neq 0$ entonces $u_0 \geq 0$ y dado que $\varepsilon = -1$, resultaría $b \geq -I_4^{1/3} = I_3^{1/2} > 0$, en contradicción con $I_2 < 0$. Por tanto $2b = -I_3^{1/2} < 0$ y $c=0$. Además como $I_3 = 7b^2 - 12d$, ahora se tiene $b^2 = 4d$ y $P(x) = (x^2 - b/4)^2$ que conduce a (I.25).

■

3. TIPOS REALES Y ECUACIONES MINIMALES.

a) A partir del estudio de la sección anterior, los tensores simétricos que poseen un solo par de autovalores complejo conjugados -que aquí llamaremos tensores de tipo IV- quedan caracterizados porque al menos uno de los invariantes I_1 , I_2 es negativo. En cuanto a los tensores de tipo real -así denominados por ser reales todos sus autovalores- se distinguen por el valor máximo de las multiplicidades de sus autovalores consirándolos como raíces del polinomio minimal /Plebański, 1964 p.990/. Tomaremos como punto de partida la siguiente:

DEFINICION. En el espacio-tiempo, sea τ la multiplicidad máxima de las raíces del polinomio minimal de un tensor simétrico T de tipo real ($I_1 \geq 0$ e $I_2 \geq 0$). Diremos que T es de tipo I, II ó III si τ vale respectivamente 1, 2 ó 3.

En los tensores de tipo I todas las raíces del polinomio minimal son simples; en el tipo II (resp. III) el polinomio minimal posee una única raíz doble (resp. triple). Los casos correspondientes a polinomios minimales con dos raíces dobles y con una cuádruple no son posibles para tensores simétricos en el espacio-tiempo /Plebański, 1964; Linet, 1971/.

b) Nuestro objetivo es caracterizar intrínsecamente los tipos reales, lo que requiere evaluar τ a partir de un T dado. De las expresiones halladas para las raíces (proposición I.3) podemos obtener los polinomios minimales de todos los tipos reales degenerados ($I_1=0$). Sin pérdida de generalidad, consideramos la parte sin traza N de T . Se presentan los siguientes casos:

Caso 1: $I_2 > 0, I_3 > 0$. Para el tipo I el polinomio minimal es

$$p(x) = (x - x_d)(x - x_+)(x - x_-) = x^3 - \frac{c}{\Phi} x^2 - \left(\frac{c^2}{\Phi^2} + \frac{\Phi}{6} \right) x + \frac{c^3}{\Phi^3} - \frac{c}{6}$$

Al considerar el polinomio característico $P(x) = \left(x + \frac{c}{\Phi} \right) p(x)$ e igualar con la expresión (I.1), del coeficiente del término en x^2 se obtiene

$$2c^2/\Phi^2 + \frac{\Phi}{6} = \frac{b}{2} \quad (I.26)$$

que sustituida en el polinomio minimal conduce a

$$p(x) = x^3 - \frac{c}{\Phi} x^2 + \left(\frac{c^2}{\Phi^2} - \frac{b}{2} \right) x + \frac{c}{4} \left(\frac{b}{\Phi} - 1 \right) \quad (I.27)$$

Para el tipo II los polinomios minimal y característico coinciden.

Caso 2: $I_2 = 0, I_3 > 0$. Para el tipo I el polinomio minimal es

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{b} \right) \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{b} \right) = x^2 - \frac{b}{4} \quad (I.28)$$

Para el tipo II, sea ε el signo de la raíz doble del polinomio minimal. Entonces $p(x) = \left(x + \varepsilon\sqrt{b}/2 \right) \left(x - \varepsilon\sqrt{b}/2 \right)^2$, es decir

$$p(x) = x^3 - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{b} \left(x^2 + \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{b} x - \frac{b}{4} \right) \quad (I.29)$$

De hecho, ε es el signo del autovalor correspondiente a la dirección propia isótropa de T.

Caso 3: $I_2 > 0, I_3 = 0$ ($b^3 = 3c^2 > 0$). Para el tipo I el polinomio minimal es

$$p(x) = \left(x + \frac{1}{2} \frac{c}{b}\right) \left(x - \frac{3}{2} \frac{c}{b}\right) = x^2 - \frac{c}{b} x - \frac{b}{4} \quad (I.30)$$

Para el tipo II es $p(x) = \left(x - \frac{3}{2} \frac{c}{b}\right) \left(x + \frac{1}{2} \frac{c}{b}\right)^2$, es decir

$$p(x) = x^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} x^2 + \frac{5}{6} b x + \frac{c}{4}\right) \quad (I.31)$$

Para el tipo III los polinomios minimal y característico coinciden.

Caso 4: $I_2 = I_3 = 0$. Para el tipo I el polinomio minimal es $p(x) = x$; para el tipo II es $p(x) = x^2$ y para el tipo III, $p(x) = x^3$.

c) A partir del conjunto de ecuaciones minimales $\langle p(N) = 0 \rangle$ construimos la Tabla I.2., cuyo interés reside en que permite obtener el tipo algebraico de T de acuerdo la siguiente:

PROPOSICION I.4. En (V_4, g) sea N un tensor simétrico de traza nula, e I_1, I_2, I_3 sus invariantes. La primera ecuación que se verifique de la fila correspondiente de la Tabla I.2. es su ecuación minimal, y el tipo del tensor es el indicado por la columna donde se halle dicha ecuación.

TABLA I. 2.

$I_1 > 0$		$N^4 - \frac{b}{2} N^2 - \frac{c}{3} N + \frac{1}{4} (b^2/2 - d) g = 0 \quad (E.C)$		
$I_1 = 0$	$I_2 > 0$ $I_3 > 0$	$N^3 - \frac{c}{3} N^2 + (c^2/\phi^2 - \frac{b}{2}) N + \frac{c}{4} (\frac{b}{\phi} - 1) g = 0, \quad \phi \equiv 2b - \sqrt{1}$	(E.C)	
	$I_2 = 0$ $I_3 > 0$	$N^2 - \frac{b}{4} g = 0$	$N^3 - \frac{c}{2} \sqrt{b} \left(N^2 + \frac{c}{2} \sqrt{b} N - \frac{b}{4} g \right) = 0$	
	$I_2 > 0$ $I_3 = 0$	$N^2 - \frac{c}{b} N - \frac{b}{4} g = 0$	$N^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} N^2 + \frac{5}{6} b N + \frac{c}{4} g \right) = 0$	(E.C)
	$I_2 = 0$ $I_3 = 0$	$N = 0$	$N^2 = 0$	$N^3 = 0$
Tipo		I	II	III

4. GRADO DEL POLINOMIO MINIMAL DE LOS TIPOS REALES.

El tipo (real) de T depende, por definición, del valor de τ , y éste puede obtenerse a partir de la Tabla I.2. pues de la misma se infiere:

PROPOSICION I.5. Para los tipos reales la multiplicidad máxima τ de las raíces del polinomio minimal está dada por:

$$\tau = k - v \quad (I.32)$$

siendo k el orden de la ecuación minimal y v el número de invariantes positivos en el conjunto $\{I_1, I_2, I_3\}$.

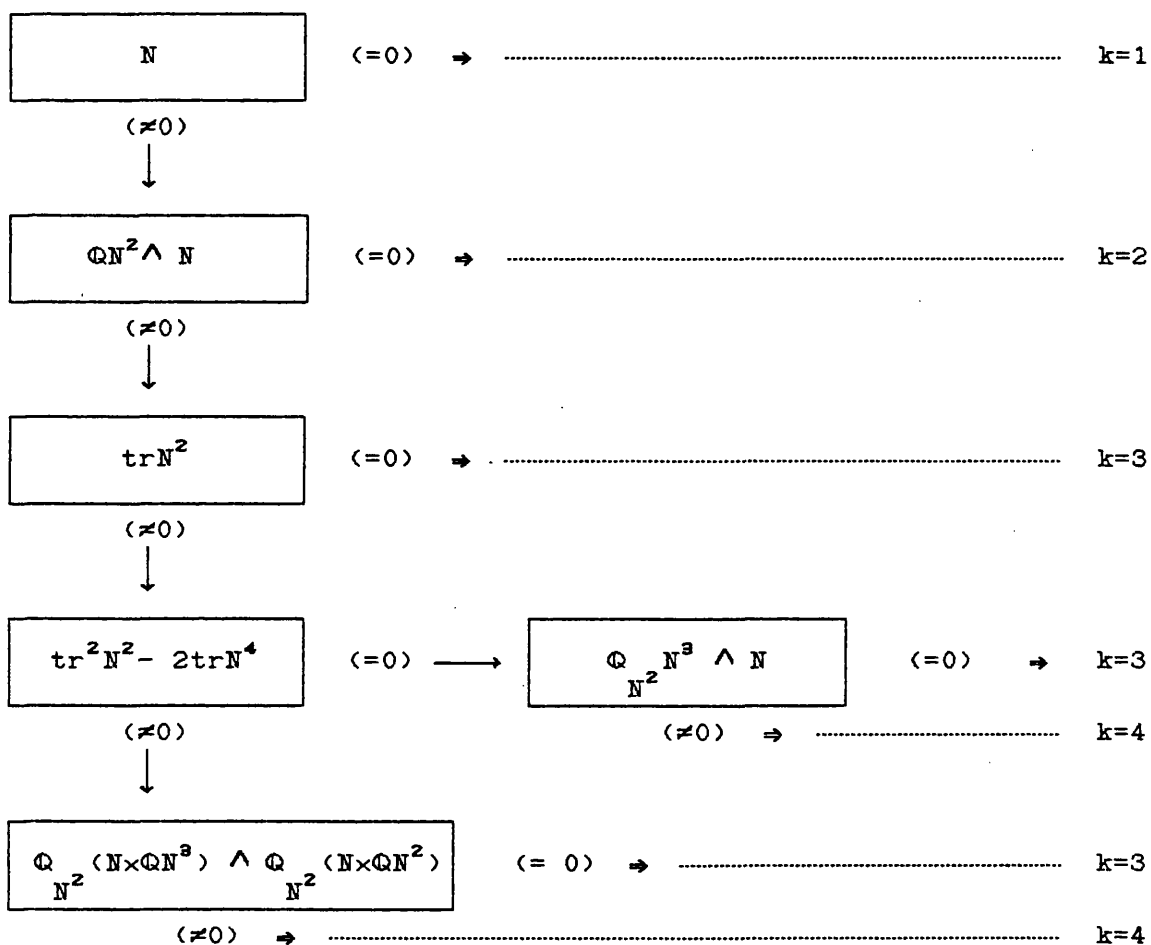
Disponemos así de una regla sencilla para caracterizar los tipos reales, siempre que completemos la relación (I.32) con un algoritmo que permita evaluar k . Este algoritmo está representado en Tabla I.3. Ha sido conveniente introducir el operador *quita-traza* \mathbb{Q}_A relativo a un 2-tensor A de traza no nula; su definición está dada por:

$$\mathbb{Q}_A T \equiv T - \frac{\text{tr} T}{\text{tr} A} A \quad (I.33)$$

Hemos puesto $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{Q}_g$, de modo que se tiene $N = \mathbb{Q}T$, y hemos denotado por \wedge el producto exterior de 2-tensores considerados como elementos (vectores) de su estructura de espacio vectorial. La Tabla I.3. se lee del modo siguiente:

i) Si ninguna expresión de la columna de la izquierda se anula, es $k=4$. ii) Si la primera expresión que se anula es la cuarta, es $k=3$ ó $k=4$, según que se anule o no la expresión de su derecha. iii) En todo otro caso, k toma el valor indicado sobre la línea de la primera expresión que se anula.

TABLA I.3.



Claramente, $k=1$ cuando $N=0$, y $k=2$ si $\mathbb{Q}N^2 \wedge N = 0$, que indica la proporcionalidad entre $\mathbb{Q}N^2$ y N ($\mathbb{Q}N^2 \propto N$).

Por otra parte, de la Tabla I.2. y de la definición de los invariantes I 's resulta que los únicos tipos reales para los cuales $\text{tr}N^2=0$ son los correspondientes a una raíz cuádruple. Sus ecuaciones minimales son $N=0$, $N^2=0$, ó $N^3=0$ según se trate de un tipo I, II, o III respectivamente. En consecuencia, sólo existe un caso real con $k>2$ y $\text{tr}N^2=0$ (el tipo III de ecuación minimal $N^3=0$).

Para $k>2$ y $\text{tr}N^2 \neq 0$ (de hecho $\text{tr}N^2 > 0$) distinguiremos entre N singular - entonces por (I.1) es $\text{tr}^2 N^2 = 2\text{tr}N^4$ - y N regular. Como un endomorfismo es invertible sii el término independiente de su polinomio minimal es diferente de cero, cuando N es singular, es $k=3$ sii $N^3 \wedge N^2 \wedge N = 0$, o equivalentemente, dado que $\text{tr}N^2 \neq 0$, sii

$$\mathbb{Q}_{N^2} N^3 \wedge N = 0 \quad (I.34)$$

Cuando N es regular, es $k=3$ sii $N^3 \wedge N^2 \wedge N \wedge g = 0$, es decir

$$\mathbb{Q}N^3 \wedge \mathbb{Q}N^2 \wedge N = 0$$

y como ahora N es invertible, la anterior relación equivale a:

$$\mathbb{Q}_{N^2} (N \times \mathbb{Q}N^3) \wedge \mathbb{Q}_{N^2} (N \times \mathbb{Q}N^2) = 0 \quad (I.35)$$

que resulta de multiplicar por N y quitar trazas respecto de N^2 .

Mediante el empleo del operador quita-traza, la evaluación de k se reduce a verificar en última instancia la proporcionalidad entre dos tensores.

DETERMINACION COVARIANTE DE AUTOVECTORES

1. OBJETIVOS Y CONTENIDO.

El objetivo de este capítulo es la resolución intrínseca del problema de autovectores de un tensor simétrico en el espacio-tiempo, una vez que su tipo algebraico ha sido determinado. Para cada autovalor definimos un *concomitante propio* del tensor y de la métrica de tal modo que su imagen, considerándolo como endomorfismo, proporciona al menos una dirección propia del tensor de partida.

En la sección 2 introducimos dichos concomitantes y analizamos sus propiedades algebraicas. A partir de las mismas probamos que a toda raíz simple del polinomio minimal del tensor le corresponde un concomitante propio que genera la totalidad del subespacio propio asociado. Este es el caso de cualquier autovalor de un tensor de tipo I y también el de los autovalores de los tensores de tipo II y III cuyos subespacios propios sean espaciales.

Cuando un autovalor es raíz doble o triple del polinomio minimal, le corresponde un concomitante que genera la dirección propia isótropa asociada a dicho autovalor, pero que en general, no proporciona todo el subespacio propio correspondiente. Esta situación se presenta cuando un tensor de tipo II posee un autovalor triple, y también cuando un tensor de tipo II o III posee un autovalor cuádruple. En estos tres casos completamos el cálculo del subespacio propio de un modo intrínseco.

En la sección 3 escribimos la forma explícita de cada concomitante propio y damos un método práctico para determinar los subespacios propios de un tensor de tipo real.

La sección 4 plantea la siguiente cuestión: Dado un autovalor λ , ¿cuál es el carácter causal de su subespacio propio?. Veremos que nuestros concomitantes permiten responder fácilmente a esta pregunta pues el signo de ciertas cantidades definidas a partir de los mismos es un invariante relacionado con el carácter causal del subespacio propio de λ .

Finalmente, como aplicación simple de los resultados de este capítulo, presentamos un teorema de caracterización de un tensor T para que pueda ser interpretado algebraicamente como un fluido perfecto verificando la condición dominante de energía.

2. CONCOMITANTES PROPIOS DE UN TENSOR SIMETRICO.

a) Sea T un 2-tensor simétrico cualquiera, y $p(x)$ su polinomio minimal. Para cada autovalor λ de T , consideremos el polinomio

$$p_\lambda(x) = (x - \lambda)^{-1} p(x) \quad (II.1)$$

a partir del cual damos la siguiente:

DEFINICION. Llamaremos concomitante propio T_λ , asociado al autovalor λ de T a

$$T_\lambda \equiv p_\lambda(T) \quad (II.2)$$

T_λ es necesariamente no nulo y permite escribir la ecuación minimal de T como

$$p(T) = (T - \lambda g) T_\lambda = 0 \quad (II.3)$$

En consecuencia,

PROPOSICION II.1. La imagen de T_λ , considerado como endomorfismo, está contenida en el subespacio propio E_λ asociado a λ :

$$\text{Im } T_\lambda \subset E_\lambda \quad (II.4)$$

Por tanto, T_λ genera al menos una dirección propia de autovalor λ : si $v \notin \text{Ker } T_\lambda$ entonces $T_\lambda(v) \in E_\lambda$. Pero, ¿cuándo es $\text{Im } T_\lambda = E_\lambda$?

A partir de (II.3) y puesto que si $\lambda \neq \mu$, T_μ contiene el factor $T - \lambda g$, resulta

$$T_\lambda T_\mu = 0 \quad \forall \lambda \neq \mu \quad (II.5)$$

El concomitante T_λ es un autotensor de T que conmuta con él,

$$T_\lambda T = T T_\lambda = \lambda T_\lambda \quad (II.6)$$

y en consecuencia se tiene

$$T_\lambda^2 = p_\lambda(T) T_\lambda = p_\lambda(\lambda) T_\lambda \quad (II.7)$$

Por otra parte, denotando por m_λ la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico, se verifica

$$\text{tr } T^p = \sum_{\lambda} m_{\lambda} \lambda^p$$

que permite evaluar la traza de T_λ . Para ello escribimos

$$p_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{k-1} \alpha_p x^p, \quad T_\lambda = \sum_{p=0}^{k-1} \alpha_p T^p$$

con k el grado del polinomio minimal de T y $\alpha_p \in \mathbb{R}$, si todos los autovalores de T son reales. Entonces

$$\text{tr } T_\lambda = \sum_{p=0}^{k-1} \alpha_p \text{tr } T^p = \sum_{p=0}^{k-1} \alpha_p \sum_{\mu} m_{\mu} \mu^p = \sum_{\mu} m_{\mu} p_{\lambda}(\mu)$$

Por (II.1), $\forall \mu \neq \lambda$ se tiene $p_{\lambda}(\mu) = 0$, con lo cual

$$\text{tr } T_\lambda = m_{\lambda} p_{\lambda}(\lambda) \quad (II.8)$$

que sustituida en (II.6) conduce a

$$T_\lambda^2 = m_\lambda^{-1} (\text{tr } T_\lambda) T_\lambda \quad (\text{II.9})$$

Sea n_λ la multiplicidad del autovalor λ como raíz del polinomio minimal $p(x)$ de T ($1 \leq n_\lambda \leq m_\lambda$). Entonces

$$p_\lambda(x) = (x - \lambda)^{n_\lambda - 1} \prod_{\mu \neq \lambda} (x - \mu)^{n_\mu} \quad (\text{II.10})$$

y podemos enunciar:

PROPOSICION II.2. *El autovalor λ es una raíz simple del polinomio minimal de T ($n_\lambda=1$) sii $\text{tr } T_\lambda \neq 0$ (o equivalentemente, sii $T_\lambda^2 \neq 0$).*

b) El concomitante propio T_λ , considerado como endomorfismo, se expresa:

$$T_\lambda = (T - \lambda I)^{n_\lambda - 1} \prod_{\mu \neq \lambda} (T - \mu I)^{n_\mu} \quad (\text{II.11})$$

Cuando es $n_\lambda=1$ entonces $\forall v \in E_\lambda, v \neq 0$, se tiene

$$T_\lambda(v) = \prod_{\mu \neq \lambda} (\lambda - \mu)^{n_\mu} v = p_\lambda(\lambda) v = m_\lambda^{-1} (\text{tr } T_\lambda) v \neq 0$$

es decir, $E_\lambda \subset \text{Im } T_\lambda$, que junto con (II.4) conduce a enunciar:

PROPOSICION II.3. Para cada autovalor λ con $n_\lambda=1$ se verifica:

$$E_\lambda = \text{Im } T_\lambda$$

y como corolario resulta:

PROPOSICION II.4. Para todo tensor T de tipo I y todo autovalor λ , la acción de T_λ sobre una base arbitraria del espacio-tiempo engendra un sistema de generadores del correspondiente subespacio propio E_λ .

Supongamos un T de tipo II o III. El concomitante asociado a cada autovalor λ con $n_\lambda=1$ también genera, de acuerdo con la proposición II.3, la totalidad del subespacio propio E_λ . Pero ahora existe un único autovalor con $n_\lambda > 1$ y se verifica:

PROPOSICION II.5. Para los tensores T de tipo II o III, la imagen del concomitante T_λ asociado a $n_\lambda > 1$ es la dirección propia isotrópica del subespacio E_λ .

Para probar este resultado sea $l \in \text{Im } T_\lambda$; entonces existe un vector u tal que $l = T_\lambda u$ y puesto que T_λ (como 2-tensor covariante) es simétrico y además $T_\lambda^2 = 0$, resulta

$$g(l, l) = g(T_\lambda u, T_\lambda u) = T_\lambda^2(u, u) = 0$$

Pero dado cualquier otro vector $l' = T_\lambda u' \neq 0$,

$$g(l, l') = g(T_\lambda u, T_\lambda u') = T_\lambda^2(u, u') = 0$$

con lo que l y l' son vectores isotópos ortogonales y por tanto colineales.

■

En el estudio algebraico de las propiedades del polinomio minimal de un endomorfismo T se emplea la matriz adjunta reducida asociada a T . Se trata de la matriz polinomial en λ que se obtiene al dividir los elementos de la matriz adjunta de la matriz característica $(T-\lambda I)$ por su máximo común divisor /F.R.Gantmacher, 1966 p.90-93/. Puede mostrarse que salvo factores de proporcionalidad, el valor para $\lambda=\lambda_0$ de dicha matriz coincide, para cada tipo, con el concomitante propio T_{λ_0} correspondiente. El interés de introducir directamente nuestros concomitantes propios estriba en que pueden obtenerse para ellos expresiones covariantes explícitas relativamente sencillas que se prestan bien, tanto a análisis teóricos como a cálculos prácticos.

Por otra parte, la propiedad (II.9) de los concomitantes propios introducidos los distingue de los denominados *covariantes de Frobenius* /G.Frobenius, 1879; J.Wellstein, 1903/. Si denotamos estos últimos mediante F_λ , entonces se tiene $\forall \lambda$ que $F_\lambda^2 = F_\lambda$ /H.Schwerdtfeger, 1938, p.20/. Cuando $\text{tr}T_\lambda \neq 0$, ambos concomitantes son proporcionales; en cambio si es $\text{tr}T_\lambda = 0$, la distinción entre los mismos es esencial para poder determinar la dirección propia isotropa asociada a los tensores de tipo II o III.

3. EXPRESION DE LOS CONCOMITANTES PROPIOS Y METODO COVARIANTE DE OBTENCION DE LOS AUTOVECTORES.

En esta sección damos un método práctico de obtención de los vectores propios de un tensor simétrico T de tipo real. Construimos los concomitantes N_ν asociados a los autovalores ν de $N=QT$. Cuando éstos no generan la totalidad del correspondiente subespacio propio, presentamos un procedimiento que completa su determinación. Con la notación introducida en el capítulo I, analicemos los casos que se presentan para cada tipo algebraico.

a) Sea T de tipo I. Cuando es $I_1 > 0$, los polinomios minimal y característico coinciden, con lo cual

$$p_\nu(x) = \frac{p(x)}{x - \nu} = x^2 + \nu x^2 + (\nu^2 - \frac{b}{2})x + \nu(\nu^2 - \frac{b}{2}) - \frac{c}{3}$$

y entonces el concomitante asociado es $N_\nu = p_\nu(N)$.

Cuando es $I_1=0$, $I_2 > 0$ e $I_3 > 0$, de (1.26) y del polinomio minimal $p(x) = (x - x_d)(x - x_+)(x - x_-)$ resulta

$$p_d(x) = \frac{p(x)}{x - x_d} = (x - x_+)(x - x_-) = x^2 - 2 \frac{c}{\Phi} x + 3c^2/\Phi^2 - \frac{b}{2}$$

$$p_\pm(x) = \frac{p(x)}{x - x_\pm} = (x - x_d)(x - x_\mp) = x^2 \pm \sqrt{\Phi/6} x - \frac{c}{\Phi} (\frac{c}{\Phi} \mp \sqrt{\Phi/6})$$

y los concomitantes asociados son $N_d \equiv p_d(N)$ y $N_\pm \equiv p_\pm(N)$.

Cuando es $I_1=I_2=0$ e $I_3 > 0$, de (1.23) y (1.28) resulta

$$p_\pm(x) = \frac{p(x)}{x - x_\pm} = x - x_\mp = x \pm \frac{1}{2} \sqrt{b}$$

y los concomitantes asociados son $N_\pm = p_\pm(N) = N \pm \sqrt{b}/2 g$.

Quando es $I_1=I_3=0$ e $I_2>0$, de (1.22) y (1.30) se obtienen los concomitantes asociados a los autovalores simple y triple:

$$N_s = N + \frac{1}{2} \frac{c}{b} g, \quad N_t = N - \frac{3}{2} \frac{c}{b} g$$

Quando $I_1=I_2=I_3=0$, el concomitante asociado es g . Reuniendolos, todos estos casos conducen al siguiente:

TEOREMA II.1. *Un tensor de tipo I cuyos invariantes sean I_1 , I_2 e I_3 , tiene asociados los concomitantes que muestra la fila correspondiente de la Tabla II.1. La acción de éstos sobre una base arbitraria del espacio-tiempo genera los vectores propios del tensor.*

TABLA II.1.

$I_1 > 0$	$N_\nu = N^3 + \nu N^2 + (\nu^2 - \frac{b}{2})N + [\nu(\nu^2 - \frac{b}{2}) - \frac{c}{3}] g$
-----------	---

$$N_d = N^2 - 2 \frac{c}{\Phi} N + (3c^2/\Phi^2 - \frac{b}{2}) g$$

$I_1=0, I_2>0, I_3>0$	$\left[\Phi \equiv 2b - \sqrt{I_4} \right]$
-----------------------	--

$$N_\pm = N^2 \pm \sqrt{\Phi/6} N - \frac{c}{\Phi} \left(\frac{c}{\Phi} \mp \sqrt{\Phi/6} \right) g$$

$I_1=I_2=0, I_3>0$	$N_\pm = N \pm \frac{1}{2} \sqrt{b} g$
--------------------	--

$I_1=I_3=0, I_2>0$	$N_s = N + \frac{1}{2} \frac{c}{b} g, \quad N_t = N - \frac{3}{2} \frac{c}{b} g$
--------------------	--

$I_1=I_2=I_3=0$	$N_o = g$
-----------------	-----------

b) Supongamos ahora un tensor de tipo II. Entonces hay tres (y sólo tres) vectores propios linealmente independientes. Uno es isótropo y los otros dos son espaciales. Veamos como obtenerlos en los diferentes casos que se presentan.

Cuando es $I_2 > 0$ e $I_3 > 0$, los polinomios minimal y característico coinciden,

$$P(x) = p(x) = (x - x_d)^2 (x - x_+) (x - x_-)$$

y aplicando la relación (I.26) resultan los polinomios

$$p_d(x) \equiv \frac{p(x)}{x - x_d} = x^3 - \frac{c}{\Phi} x^2 + \left(\frac{c^2}{\Phi^2} - \frac{b}{2} \right) x + \frac{c}{4} \left(\frac{b}{\Phi} - 1 \right)$$

$$p_{\pm}(x) \equiv \frac{p(x)}{x - x_{\pm}} = x^3 + \left(\frac{c}{\Phi} \pm \sqrt{\Phi/6} \right) x^2 - \frac{c}{\Phi} \left(\frac{c}{\Phi} \mp 2\sqrt{\Phi/6} \right) x - c^2 \left(\frac{c}{\Phi} \mp \sqrt{\Phi/6} \right) / \Phi^2$$

El concomitante $N_d \equiv p_d(N)$ genera la dirección propia isótropa y los concomitantes $N_{\pm} \equiv p_{\pm}(N)$ son los generadores de las dos direcciones propias espaciales.

Cuando es $I_2 = 0$ e $I_3 > 0$, el polinomio minimal es (I.29):

$$p(x) = \left(x + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{b} \right) \left(x - \frac{\epsilon}{2} \sqrt{b} \right)^2$$

siendo $\epsilon = \pm 1$ el signo del autovalor de N que tiene asociada la dirección propia isótropa $\langle l \rangle$. A partir de los polinomios

$$p_{\epsilon}(x) = \left(x - \frac{\epsilon}{2} \sqrt{b} \right) \left(x + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{b} \right) = x^2 - \frac{b}{4}, \quad p_{-\epsilon}(x) = \left(x - \frac{\epsilon}{2} \sqrt{b} \right)^2$$

se obtienen los concomitantes:

$$N_{\epsilon} \equiv p_{\epsilon}(N) = N^2 - \frac{b}{4} g \equiv N_l$$

$$N_{-\epsilon} \equiv p_{-\epsilon}(N) = N^2 - \epsilon \sqrt{b} N + \frac{b}{4} g$$

Se ha denotado $N_{\epsilon} \equiv N_l$ por ser el generador de $\langle l \rangle$. Nótese que $\text{tr} N_l = 0$ y $N_l^2 = 0$, de acuerdo con la proposición II.2. pues $n_{\lambda} = 2$.

Un comentario sobre cómo determinar ϵ . Si dado un T, su tipo algebraico se ha obtenido por aplicación de la Tabla I.2., el valor de ϵ se conocerá al verificar la ecuación minimal

$$N^3 = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{b} (N^2 + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{b} N - \frac{b}{4} g)$$

En cambio, si se ha determinado el tipo algebraico a partir del procedimiento de la sección I.4. -que sólo precisa conocer el grado $k=3$ del polinomio minimal- el signo ϵ se obtiene directamente una vez calculado l pues $N(l) = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{b} l$, y en la determinación de l sólo interviene N_l , que no depende de ϵ .

Cuando es $I_2=0$ e $I_3>0$, el polinomio minimal está dado por (I.31) con $b^3=3c^2>0$, y se tiene:

$$p_s(x) = (x + \frac{1}{2} \frac{c}{b})^2 = x^2 + \frac{c}{b} x + b/12$$

$$p_t(x) = (x + \frac{1}{2} \frac{c}{b})(x - \frac{3}{2} \frac{c}{b}) = x^2 - \frac{c}{b} x - \frac{b}{4}$$

El concomitante $N_s \equiv p_s(N)$ genera la dirección propia espacial $\langle e \rangle$ asociada al autovalor simple. Denotando por $i(u)$ el producto interior por u ,

$$e \propto i(u) N_s \quad \forall u \notin \text{Ker } N_s$$

El concomitante $N_t \equiv p_t(N)$ sólo genera la dirección isótropa $\langle l \rangle$ del 2-plano propio asociado al autovalor triple. Este 2-plano es ortogonal al generado por e y l , luego tiene asociada la 2-forma $F \equiv *(e \wedge l)$, siendo $*$ el operador de dualidad. Si tomamos un vector u temporal tal que $i(u)N_S \neq 0$ resulta:

$$e \wedge l = \frac{1}{3} u \wedge \left[\frac{c}{2} i(u)N + b i(u)N^2 \right] + 2 \frac{c}{b} i(u)N \wedge i(u)N^2 .$$

Cuando es $I_2 = I_3 = 0$, al autovalor cuádruple $\nu = 0$ corresponde el concomitante $N_0 = N$, que sólo genera la dirección isótropa $\langle l \rangle$:

$$l \propto i(u)N \quad \forall u \text{ temporal}$$

El subespacio propio es el 3-plano isótropo que contiene a l , es decir, el asociado a la 3-forma $H \equiv *l = i(l)\eta$, siendo η el elemento de volúmen de espacio-tiempo.

Las consideraciones precedentes permiten enunciar:

TEOREMA II.2. *Un tensor de tipo II cuyos invariantes sean I_2 , e I_3 , tiene asociados los concomitantes que muestra la fila correspondiente de la Tabla II.2. Entonces:*

i) *Cuando es $I_3 > 0$, cada concomitante genera el respectivo subespacio propio.*

ii) Cuando es $I_2 > 0$ e $I_3 = 0$, el concomitante N_s genera la dirección propia (espacial) asociada al autovalor simple; al autovalor triple corresponde el 2-plano (isótropo) definido por:

$$F = * \left\{ \frac{1}{3} u \wedge \left[\frac{c}{2} i(u)N + b i(u)N^2 \right] + 2 \frac{c}{b} i(u)N \wedge i(u)N^2 \right\}$$

para todo u que verifique $i(u)N_s \neq 0$.

iii) Cuando es $I_2 = I_3 = 0$, el subespacio propio es el 3-plano (isótropo) definido por:

$$H = * i(u) N \quad \forall u \text{ temporal.}$$

TABLA II.2.

$$N_d = N^3 - \frac{c}{\Phi} N^2 + (c^2/\Phi^2 - \frac{b}{2}) N + \frac{c}{4} (\frac{b}{\Phi} - 1) g$$

$I_2 > 0, I_3 > 0$

$$\left(\Phi \equiv 2b - \sqrt{I_4} \right)$$

$$N_{\pm} = N^3 + \left(\frac{c}{\Phi} \pm \sqrt{\Phi/6} \right) N^2 - \frac{c}{\Phi} \left(\frac{c}{\Phi} \mp 2\sqrt{\Phi/6} \right) N - c^2 \left(\frac{c}{\Phi} \mp \sqrt{\Phi/6} \right) / \Phi^2 g$$

$I_2 = 0, I_3 > 0$

$$N_e = N^2 - \frac{b}{4} g \equiv N_l, \quad N_{-e} = N^2 - \epsilon \sqrt{b} N + \frac{b}{4} g$$

$I_2 > 0, I_3 = 0$

$$N_s = N^2 + \frac{c}{b} N + b/12 g, \quad N_t = N^2 - \frac{c}{b} N - \frac{b}{4} g$$

$I_2 = I_3 = 0$

$$N_o = N$$

c) Consideremos un tensor de tipo III. Entonces existen sólo dos vectores propios linealmente independientes, siendo uno de ellos isótropo y el otro espacial. Necesariamente $I_1 = I_3 = 0$, y se tiene dos casos según que $I_2 > 0$ ó $I_2 = 0$.

Cuando es $I_2 > 0$, los polinomios minimal y característico coinciden,

$$P(x) = p(x) = \left(x + \frac{1}{2} \frac{c}{b}\right)^3 \left(x - \frac{3}{2} \frac{c}{b}\right)$$

y teniendo presente que se verifica $b^3 = 3c^2 > 0$, resulta:

$$p_s(x) = \left(x + \frac{1}{2} \frac{c}{b}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{4} \left(6 \frac{c}{b} x^2 + b x + \frac{c}{6}\right)$$

$$p_t(x) = \left(x + \frac{1}{2} \frac{c}{b}\right)^2 \left(x - \frac{3}{2} \frac{c}{b}\right) = x^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} x^2 + \frac{5}{6} b x + \frac{c}{4}\right)$$

El concomitante $N_s \equiv p_s(N)$ genera la dirección propia espacial, y $N_t \equiv p_t(N)$ es el generador de la dirección propia isótropa.

Cuando es $I_2 = 0$, existe un 2-plano isótropo asociado al autovalor cuádruple $\nu = 0$. El concomitante $N_o \equiv N^2$ sólo genera la dirección isótropa de dicho 2-plano. Para completarlo, recordemos que la forma canónica de un tensor de tipo III en base isótropa real $\langle l, n, p, q \rangle$ adaptada a sus direcciones propias l y q -de autovalores λ y μ respectivamente- está dada por:

$$T = \lambda \tilde{l} \tilde{n} + \tilde{l} \tilde{p} - \lambda p \otimes p - \mu q \otimes q$$

en donde $\tilde{\otimes}$ denota el producto tensorial simetrizado y $g(l, n) = 1$, $g(p, p) = g(q, q) = -1$, siendo todos los demás productos escalares iguales a cero. /J. Plebański, 1964 p.987; G.S. Hall, 1976/.

En el caso degenerado que nos ocupa $\lambda = \mu$, con lo cual

$$T = \lambda g + l\tilde{\otimes}p$$

y por tanto $N = l\tilde{\otimes}p$. Contrayendo con un vector u ,

$$i(u)N = g(u, l) p + g(u, p) l$$

de modo que los dos 2-planos generados por $\langle l, p \rangle$ y $\langle l, i(u)N \rangle$ coinciden con tal que u sea temporal o isótropo no colineal con l . Por tanto, el 2-plano propio de un tensor de tipo III con un autovalor cuadruple es el ortogonal al generado por $\langle i(u)N, i(u)N^2 \rangle$ y queda probado el siguiente:

TEOREMA II.3. *Sea N un tensor de tipo III de traza nula.*

i) *Cuando es $I_2 > 0$, la dirección propia espacial [resp. isótropa] de N es la generada por el concomitante:*

$$N_s = N^3 + \frac{1}{4} \left[6 \frac{c}{b} N^2 + b N + \frac{c}{6} g \right]$$

$$[\text{resp. } N_t = N^3 - \frac{1}{2} \left[\frac{c}{b} N^2 + \frac{5}{6} b N + \frac{c}{4} g \right]]$$

ii) *Cuando es $I_2 = 0$, el subespacio propio es el 2-plano isótropo definido por:*

$$F = * [i(u)N \wedge i(u)N^2] \quad \forall u \text{ temporal.}$$

d) Consideremos un tensor de tipo IV. Cuando es $I_1 < 0$ entonces el concomitante

$$N_\nu = N^3 + \nu N^2 + (\nu^2 - \frac{b}{2})N + [\nu(\nu^2 - \frac{b}{2}) - \frac{c}{3}] g$$

genera la dirección propia espacial asociada al autovalor real ν de N. Cuando es $I_1 = 0$ e $I_2 < 0$, el concomitante

$$N_d = N^2 - 2 c I_2^{-1} N + \left[3c^2 I_2^{-2} - \frac{b}{2} \right] g$$

genera el 2-plano espacial asociado al autovalor doble del tensor.

e) En los esquemas físicos usuales (fluidos perfectos, campo electromagnético, etc.) una o varias de las direcciones propias del tensor impulso-energía T aparecen a veces sometidas a condiciones diferenciales particulares: ser integrables, geodésicas, sin distorsión, etc. Los resultados obtenidos anteriormente abren la vía para poder traducir estas propiedades en términos del propio tensor T. La situación más simple se presenta cuando la imagen del concomitante T_λ es unidimensional ($\langle v_\lambda \rangle = \text{Im} T_\lambda$); así por ejemplo, el carácter integrable de v_λ ($v_\lambda \wedge dv_\lambda = 0$) es equivalente a que T_λ satisfaga la ecuación $T_\lambda \wedge dT_\lambda = 0$, en la cual \wedge y d son el producto exterior y la diferencial exterior obtenidos considerando T_λ como 1-forma a valores vectoriales. En el estudio de la permanencia del campo electromagnético singular intervienen condiciones del tipo mencionado; su análisis requiere la resolución covariante del problema de autovectores de una 2-forma /B.Coll y J.J.Ferrando, 1988/.

4. CARACTER CAUSAL DE LOS SUBESPACIOS PROPIOS.

Este método de determinación covariante de los autovectores que hemos analizado proporciona un criterio simple para distinguir el carácter causal del subespacio propio asociado al autovalor λ .

Para tensores de tipo II y III, dicho carácter se deduce inmediatamente de los resultados precedentes: el subespacio E_λ correspondiente al autovalor λ con $n_\lambda > 1$ es isótropo, y los subespacios E_μ con $\mu \neq \lambda$ son necesariamente espaciales.

a) Los tensores de tipo I merecen una atención especial. Consideremos en primer lugar un autovalor simple λ y su concomitante T_λ ; la dirección propia v_λ correspondiente está dada por $T_\lambda x = \alpha_x v_\lambda$ para cualquier $x \notin \text{Ker} T_\lambda$, siendo $\alpha_x \in \mathbb{R}$ un factor de proporcionalidad que depende del vector x . El carácter causal de v_λ aparece así ligado al cuadrado de T_λ , y una condición de "elipticidad" es necesaria para ponerlo de manifiesto.

Dado un 2-tensor A arbitrario, llamaremos *pseudotraz*a de A (relativa a una base $\langle e_a \rangle_{a=1}^n$) a la cantidad

$$\text{pstr}_{\langle e_a \rangle} A \equiv \sum_{a=1}^n g(A(e_a), e_a) = \sum_{a=1}^n A_{aa} \quad (\text{II.12})$$

Debido a la simetría de T_λ , la expresión de la pseudotraz de T_λ^2 relativa a una base $\langle e_a \rangle$ conduce a:

$$\text{pstr}_{\langle e_a \rangle} T_\lambda^2 = \sum_a g(T_\lambda(e_a), T_\lambda(e_a)) = g(v_\lambda, v_\lambda) \sum_b \alpha_b^2$$

donde el índice b corresponde a los $e_b \notin \text{Ker} T_\lambda$. Aplicando (II.9), $T_\lambda^2 = (\text{tr} T_\lambda) T_\lambda$, podemos enunciar:

PROPOSICION II.6. Sea λ un autovalor simple de un tensor de tipo I. i) El signo de la pseudotraza del concomitante T_λ es independiente de la base elegida. ii) En signatura -2 , la dirección propia asociada a λ es espacial (resp. temporal) si la traza y la pseudotraza de T_λ tienen diferente (resp. igual) signo.

También se define la traza riemanniana de A (relativa a un vector temporal u, $u^2=1$) como:

$$\text{tr}_u A \equiv 2 i^2(u)A - \text{tr}A \quad (\text{II.13})$$

Cuando $\{e_a\}$ es una base ortonormal que contiene a u, entonces se tiene que $\text{pstr}_{\{e_a\}} A = \text{tr}_u A$, y por tanto:

PROPOSICION II.7. Para tensores de tipo I, la pseudotraza y la traza riemanniana de los concomitantes T_λ asociados a autovalores simples tienen el mismo signo.

De la proposición anterior resulta que el empleo de la traza riemanniana en lugar de la pseudotraza es facultativo. La expresión más compacta de la primera la hace más deseable para un tratamiento teórico, mientras que la segunda ofrece indudables ventajas en un formalismo matricial de cálculo explícito.

b) Con objeto de determinar el carácter causal del 2-plano propio asociado a un autovalor doble de un T de tipo I, extendemos la noción de pseudotraza al espacio de las dobles 2-formas $\Lambda^2 \otimes \Lambda^2$.

Si $D \in \Lambda^2 \otimes \Lambda^2$, definimos la pseudotrazada de D relativa a una base $\langle F_A \rangle_{A=1}^N$, $N=n(n-1)/2$ del espacio Λ^2 de las 2-formas mediante:

$$\text{pstr}_{\langle F_A \rangle} D \equiv \sum_{A=1}^N D_{AA} \quad (\text{II.14})$$

Al concomitante T_λ podemos asociarle la doble 2-forma simétrica:

$$T_\lambda \equiv T_\lambda \wedge T_\lambda \quad (\text{II.15})$$

donde ahora \wedge denota el producto exterior de doble 1-formas. Si P y Q son doble 1-formas, se define $P \wedge Q$ como la doble 2-forma de componentes

$$(P \wedge Q)_{abcd} \equiv P_{ac} Q_{bd} + P_{bd} Q_{ac} - P_{ad} Q_{bc} - P_{bc} Q_{ad} \quad (\text{II.16})$$

Sean P, Q, R, S doble 1-formas cualesquiera; entonces se verifica:

$$(P \wedge Q) \times (R \wedge S) = (P \times R) \wedge (Q \times S) + (P \times S) \wedge (Q \times R) \quad (\text{II.17})$$

De (II.9) y (II.17) resulta:

$$T_\lambda^2 \equiv (T_\lambda \wedge T_\lambda) \times (T_\lambda \wedge T_\lambda) = 2/m_\lambda^2 (\text{tr } T_\lambda)^2 T_\lambda \quad (\text{II.18})$$

Mediante "x" hemos denotado el producto cruzado de tensores: contracción de los índices adyacentes del producto tensorial. Para doble 1-formas se trata del producto matricial; en el caso de doble 2-formas se entiende contracción de parejas de índices dobles y entonces es el producto matricial si se considera a éstas como endomorfismos en Λ^2 .

En particular, si λ es un autovalor doble se verifica

$$T_\lambda^2 \equiv \frac{1}{2} (\text{tr } T_\lambda)^2 T_\lambda \quad (\text{II.19})$$

relación que permite probar:

PROPOSICION II.8. *Sea λ un autovalor doble de un tensor de tipo I. i) El signo de la pseudotraza de $T_\lambda \equiv T_\lambda \wedge T_\lambda$ es independiente de la base de 2-formas elegida. ii) Cualquiera que sea el signo de la signatura de la métrica, el 2-plano propio asociado a λ es espacial (resp. temporal) si la pseudotraza de T_λ es positiva (resp. negativa)*

Para demostrar esta proposición, sea $\langle F_A \equiv e_a \wedge e_b \rangle$ una base de Λ^2 , en donde el índice A representa las seis parejas de valores de los índices (a b). Entonces,

$$\begin{aligned} \langle i(F_A) T_\lambda \rangle_{cd} &\equiv \frac{1}{4} \delta_{ab}^{rs} \langle T_\lambda \rangle_{rscd} = \frac{1}{2} \langle T_\lambda \rangle_{abcd} = \\ &= \langle T_\lambda \rangle_{ac} \langle T_\lambda \rangle_{bd} - \langle T_\lambda \rangle_{ad} \langle T_\lambda \rangle_{bc} \equiv \langle f_a \wedge f_b \rangle_{cd} \end{aligned}$$

donde $f_a \equiv i(e_a) T_\lambda \in E_\lambda$. Sea $\langle x, y \rangle$ una base de E_λ , en la cuál $f_a = \alpha_a x + \beta_a y$. Así,

$$f_a \wedge f_b = \gamma_A x \wedge y, \quad \text{con} \quad \gamma_A \equiv \alpha_a \beta_b - \alpha_b \beta_a$$

En esta base, la pseudotrazada de T_λ^2 se escribe:

$$\text{pstr}_{\langle F_A \rangle} T_\lambda^2 = \sum_{A=1}^N (\text{tr}_{\langle F_A \rangle} T_\lambda)^2 = (x \wedge y)^2 \sum_{A=1}^N \gamma_A^2$$

siendo

$$(x \wedge y)^2 \equiv \frac{1}{2} (x \wedge y)_{ab} (x \wedge y)^{ab} = g(x,x) g(y,y) - [g(x,y)]^2$$

Para tensores de tipo I sabemos, en virtud de la proposición II.2., que $\text{tr} T_\lambda \neq 0$; entonces por (II.19), el signo de la pseudotrazada de T_λ no depende de la base de 2-formas empleada y coincide con el signo de $(x \wedge y)^2$. Ahora bien, independientemente del signo de la signatura de g , el signo de $(x \wedge y)^2$ proporciona el carácter del 2-plano generado por $\langle x, y \rangle$: éste es espacial (resp. temporal) sii el valor de $(x \wedge y)^2$ es positivo (resp. negativo).

■

c) Cuando λ es un autovalor triple de un tensor de tipo I, el estudio del carácter causal del 3-plano propio E_λ se reduce al de la dirección E_μ , con $\mu \neq \lambda$, para el cual se aplica la proposición II.6. Reuniendo los resultados de esta sección se tiene el siguiente teorema-resumen:

TEOREMA II.4. Sea T un tensor simétrico de tipo real y σ la signatura de la métrica. El carácter causal del subespacio propio E_λ asociado al autovalor λ de T , de multiplicidad m_λ , se deduce a partir de su concomitante T_λ :

i) Si T es de tipo I y $m_\lambda=1$, E_λ es espacial o temporal según que el signo de $\text{tr}T_\lambda \times \text{pstr}T_\lambda$ sea igual o diferente que el signo de σ .

ii) Si T es de tipo I y $m_\lambda=2$, E_λ es espacial o temporal según que la pseudotrazada de $T_\lambda \wedge T_\lambda$ sea positiva o negativa.

iii) Si T es de tipo I y $m_\lambda=3$, E_λ es espacial o temporal según que el signo de $\text{tr}T_\mu \times \text{pstr}T_\mu$ sea diferente o igual que el signo de σ , siendo $\mu \neq \lambda$ el autovalor con $m_\mu=1$.

iv) Si T es de tipo II o III, E_λ es espacial o isótropo según que $\text{tr}T_\lambda \neq 0$ ó $\text{tr}T_\lambda = 0$.

5. APLICACION AL FLUIDO PERFECTO.

a) Los resultados precedentes minimizan tanto el bagaje teórico como los cálculos concretos necesarios para la clasificación algebraica completa de un 2-tensor *dado*, en métrica lorentziana cuadridimensional. Pero también se revelan útiles en la formulación del problema recíproco: obtener la caracterización algebraica completa de la *clase* de tensores que admiten una cierta expresión general.

Como aplicación vamos a caracterizar la clase de los tensores que pueden escribirse en la forma:

$$T = (\rho + p) u \otimes u - p g$$

Un fluido cuyo tensor impulsión-energía sea de esta forma y admita u como vector velocidad es un *fluido perfecto* (pascaliano, no conductor del calor), de densidad total de energía ρ y presión p .

En primer lugar veamos la caracterización de los tensores de tipo I que poseen un autovalor triple estricto.

Lema. Un tensor simétrico T es de tipo I con un autovalor simple y uno triple si, y sólo si, satisface:

$$i) \quad 4 \operatorname{tr} T^2 > \operatorname{tr}^2 T$$

$$ii) \quad \mathcal{Q}T^2 = \chi \mathcal{Q}T \quad \text{con} \quad \chi \neq \frac{1}{2} \operatorname{tr} T$$

En efecto, por (I.6) la primera condición equivale a $b > 0$; la segunda se escribe:

$$N^2 = \left(\chi - \frac{\alpha}{2} \right) N + \frac{b}{4} g, \quad \chi \neq \frac{\alpha}{2}$$

y entonces $c \equiv \operatorname{tr} N^3 = (\chi - \alpha/2)b \neq 0$. Además, de la Tabla I.2. y

de la definición de los invariantes I 's resulta que los únicos tensores simétricos cuya ecuación minimal es de orden dos y verifican que $c \neq 0$ son los de tipo I con un autovalor triple estricto.

■

Puesto que la existencia de un autovalor triple implica que $b^3 = 3c^2$, el factor χ está dado por:

$$\chi = \frac{\alpha}{2} + \frac{c}{b} = \frac{\alpha}{2} + \epsilon_c \sqrt{b/3} = \frac{1}{2} \left[\alpha + \epsilon_c \sqrt{\frac{1}{3} (4\beta - \alpha^2)} \right] \quad (II.20)$$

y por (I.22) los autovalores de T se expresan:

$$\lambda_s = \frac{1}{2} (3\chi - \alpha), \quad \lambda_t = \frac{1}{2} (\alpha - \chi) \quad (II.21)$$

Notar que el conocimiento de $\alpha \equiv \text{tr}T$ y $\beta \equiv \text{tr}T^2$ no basta para determinar χ ; se requiere además conocer el signo ϵ_c y por tanto calcular $\gamma \equiv \text{tr}T^3$ y aplicar la identidad (I.8).

b) Por otra parte, de la proposición II.6. se sigue cómo determinar el carácter causal de la dirección principal $\langle u \rangle$ asociada al autovalor simple λ_s de T . El correspondiente concomitante es $T_s = T - \lambda_t g$, y por tanto $\text{tr}T_s = \lambda_s - \lambda_t = 2c/b$. Así, en signatura -2,

$$u \text{ es temporal sii } (\lambda_s - \lambda_t) p \text{str}T_s > 0$$

Pero el signo de $\lambda_s - \lambda_t$ es precisamente ϵ_c , y como por la proposición II.7. la pseudotraza y la traza riemanniana de T_s tienen el mismo signo resulta:

$$u \text{ es temporal sii } 2\epsilon_c i^2(x)T > \epsilon_c \chi \quad (\text{II.22})$$

pues la traza riemanniana de T_s está dada por

$$\text{tr}_x T_s = 2i^2(x)T_s - \text{tr}T_s = 2i^2(x)T - (\lambda_s + \lambda_t) = 2i^2(x)T - \chi$$

en donde x es cualquier vector temporal unitario.

Es razonable asumir sobre el tensor impulso-energía de un sistema macroscópico la condición dominante de energía /Plebański, 1964 p.1011/. Para el caso particular de un fluido perfecto tal condición es equivalente a las desigualdades:

$$-\rho < p \leq \rho \quad (\text{II.23})$$

Como $\rho = \lambda_s$ y $p = -\lambda_t$ están dados por (II.21), las desigualdades anteriores se expresan

$$\epsilon_c = 1 \quad \text{y} \quad \chi \geq 0 \quad (\text{II.23}')$$

Así pues, si al lema I.1. añadimos el hecho que $\langle u \rangle$ sea temporal -expresado por (II.22)- y la condición dominante de energía, podemos enunciar:

TEOREMA II.5. Un 2-tensor simétrico T , en un espacio-tiempo de signatura -2 , define algebraicamente un fluido perfecto sometido a la condición dominante de energía si, y sólo si, verifica:

- i) $4 \operatorname{tr} T^2 > \operatorname{tr}^2 T$
- ii) $\mathcal{Q}T^2 = \chi \mathcal{Q}T$ con $\frac{1}{2} \operatorname{tr} T < \chi \geq 0$
- iii) $2i^2(x)T > \chi$ para un x temporal unitario arbitrario.

Entonces el valor de χ es:

$$\chi = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tr} T + \sqrt{\frac{1}{3} (4\operatorname{tr} T^2 - \operatorname{tr}^2 T)} \right]$$

y la densidad ρ , la presión p y la dirección u de la cuadrivelocidad del fluido vienen dadas por:

$$\rho = \frac{1}{2} (3\chi - \operatorname{tr} T), \quad p = \frac{1}{2} (\chi - \operatorname{tr} T), \quad u \propto i(x)T + px$$

Ciertas condiciones necesarias para la caracterización de un fluido perfecto fueron ya dadas por Taub /1967/. La condición iii), que cierra la suficiencia, no parece sin embargo haber sido considerada previamente.

Como consecuencia de las ecuaciones de Einstein, el teorema anterior puede expresarse en términos del tensor de Ricci, $\operatorname{Ric}(g)$, y proporciona entonces las condiciones que ha de verificar una métrica g para que sea interpretable como un espacio-tiempo de fluido perfecto. Además, pueden analizarse las condiciones (diferenciales) que ha de satisfacer $\operatorname{Ric}(g)$ para que un tal fluido admita una termodinámica. Este análisis ha sido realizado por J.J. Ferrando /1987/, completando de este modo la "teoría a la Rainich" del fluido perfecto termodinámico.

Segunda parte:

REFERENCIALES LORENTZIANOS

CLASIFICACION CAUSAL DE LOS REFERENCIALES DE ESPACIO-TIEMPO

1. TIPO CAUSAL DE UN REFERENCIAL Y DE SU DUAL.

a) En este capítulo clasificamos los referenciales de espacio-tiempo atendiendo a sus peculiaridades causales. Precisemos en primer lugar la notación que vamos a emplear. Un referencial es una base ordenada de vectores; nosotros consideramos el tipo causal de un referencial, es decir, la especificación de los caracteres causales de sus vectores. En lo sucesivo, éstos se ordenarán según el siguiente convenio (que denominamos *estándar*): en primer lugar los vectores temporales, a continuación los isótropos y finalmente los espaciales.

En dimensión n y métrica lorentziana las combinaciones con repetición de los tres géneros causales tomados de n en n dan lugar a $(n+1)(n+2)/2$ tipos causales de referenciales. Así, los quince tipos que resultan en el espacio de Minkowski se escriben:

<tttt>
 <ttti> <ttte>
 <ttii> <ttie> <ttee>
 <tiii> <tiie> <tiee> <teee>
 <iiii> <iiie> <ieee> <ieee> <eeee>

en donde t, i, e designan el carácter temporal, isótropo o espacial respectivamente. Pero esto no constituye una clasificación causal exhaustiva de los referenciales de espacio-tiempo pues no tiene en cuenta ni el carácter causal de los 2-planos ni el de los 3-planos asociados al referencial.

La ordenación precedente de un referencial con p vectores temporales, q isótropos y r espaciales no está completamente fijada pues todavía podemos reordenar los caracteres causales idénticos. Mediante $P_p \times P_q \times P_r$ denotamos el grupo de las permutaciones de los vectores de un referencial de igual carácter causal. La necesidad de tener en cuenta dicho grupo se verá al establecer una ordenación para el referencial dual y al elegir convenientemente un representante de cada *clase causal*. Una clase causal designará el conjunto de referenciales con el mismo carácter causal de sus vectores, 2-planos y 3-planos. Es obvio que los transformados de un referencial por el grupo de Lorentz y todas sus permutaciones pertenecen a la misma clase.

Los resultados de este capítulo han sido presentados recientemente en los Encuentros Relativistas /Coll y Morales 1988(c)/.

b) En el espacio de Minkowski, un 3-plano es temporal, espacial o isótropo si su normal es respectivamente espacial, temporal o isótropa. Dicho carácter se infiere parcialmente a partir del siguiente lema.

LEMA III.1. Sean tres direcciones linealmente independientes.

i) Si una es temporal o dos de ellas son isótropas, entonces generan un 3-plano temporal. ii) Si una es isótropa y las otras espaciales, generan un 3-plano temporal o isótropo. iii) Si las tres son espaciales el 3-plano puede ser temporal, espacial o isótropo.

Ahora bien, las normales a los hiperplanos de un referencial son las direcciones vectoriales asociadas por la métrica a los co-vectores de su dual algebraico. Dado el referencial $\langle e_i \rangle$ $i=1, \dots, n$, el carácter causal del j -ésimo co-vector θ^j del referencial dual es el de la normal al hiperplano generado por las $n-1$ direcciones e_i con $i \neq j$.

Así pues, un primer paso en la clasificación causal de los referenciales minkowskianos consiste en averiguar qué tipos de duales son compatibles con cada uno de los quince tipos causales de referenciales que existen en el espacio-tiempo. Por de pronto, del lema anterior se sigue directamente:

PROPOSICION III.1.

- i) Los referenciales $\langle tttt \rangle$, $\langle ttti \rangle$, $\langle ttte \rangle$, $\langle ttii \rangle$, $\langle tiii \rangle$, $\langle iiii \rangle$, $\langle ttie \rangle$, $\langle ttee \rangle$, $\langle tiie \rangle$ y $\langle iiie \rangle$ tienen asociado un único tipo causal de dual: el $\langle eeee \rangle$.
- ii) Al referencial $\langle tiee \rangle$ le corresponden dos tipos de duales: $\langle eeee \rangle$ y $\langle ieee \rangle$. La codirección isótropa de $\langle ieee \rangle$ es la asociada por la métrica a la dirección isótropa del referencial de partida.
- iii) El dual de un referencial $\langle teee \rangle$ es de uno de los tres tipos $\langle eeee \rangle$, $\langle ieee \rangle$, $\langle teee \rangle$.
- iv) Cualquiera de los quince tipos causales puede ser el dual de un referencial con cuatro direcciones espaciales $\langle eeee \rangle$.

Denotemos por r el referencial y por r^* su dual. En los tres primeros apartados de la proposición III.1. el orden que se obtiene para r^* coincide directamente con el estándar. Para un referencial de la forma $\langle eeee \rangle$ es siempre posible conseguir, mediante permutaciones P_e de sus direcciones, el orden estándar en su dual.

c) Veamos el caso de dos direcciones isótropas y dos espaciales: $\langle i_1 i_2 e_1 e_2 \rangle$. Los 3-planos asociados son $\langle i_2 e_1 e_2 \rangle$, $\langle i_1 e_1 e_2 \rangle$, $\langle i_1 i_2 e_2 \rangle$, $\langle i_1 i_2 e_1 \rangle$. El carácter de los dos primeros puede ser temporal o isótropo, mientras que el de los dos últimos es necesariamente temporal. El referencial dual será de uno de los tipos:

$\langle eeee \rangle$; $\langle e_1 ee \rangle$; $\langle i_2 eee \rangle$; $\langle i_2 i_1 ee \rangle$

que corresponden respectivamente a los casos en que el primer y segundo hiperplanos son: ambos temporales; temporal e isotropo; isotropo y temporal; ambos isotropos.

Notar que, en este caso, las direcciones isotropas de r^* son las asociadas métricamente a las respectivas direcciones isotropas de r con el mismo subíndice.

Entre los dos tipos de dual $\langle e_1 ee \rangle$ y $\langle i_2 eee \rangle$ no existe ninguna distinción causal: la permutación de i_1 por i_2 intercambia también los 3-planos $\langle i_2 e_1 e_2 \rangle$, $\langle i_1 e_1 e_2 \rangle$. La elección de $\langle i_2 eee \rangle$ como representante de los mismos supone establecer la ordenación estándar en r^* . Así, cuando uno de los dos primeros 3-planos sea temporal y el otro isotropo se tomará i_1 como la dirección que genera con las dos espaciales el 3-plano temporal. En este caso queda aún libre la ordenación de las dos direcciones espaciales (permutación P_{2e}). Estas consideraciones permiten enunciar:

PROPOSICION III.2. *Un referencial de la forma $\langle i_1 i_2 e_1 e_2 \rangle$ admite tres tipos de duales: $\langle eeee \rangle$, $\langle i_2 eee \rangle$, $\langle i_2 i_1 ee \rangle$. Para $\langle i_2 eee \rangle$ se han ordenado las direcciones isotropas del referencial de modo que el 3-plano $\langle i_1 e_1 e_2 \rangle$ es temporal*

d) Por último, consideremos un referencial con una dirección isótropa y tres espaciales: $\langle i e_1 e_2 e_3 \rangle$. Los 3-planos asociados son $\langle e_1 e_2 e_3 \rangle$, $\langle i e_2 e_3 \rangle$, $\langle i e_1 e_3 \rangle$ y $\langle i e_1 e_2 \rangle$. El primero puede ser temporal, isótropo o espacial y los otros tres temporales o isótropos. Pero de estos tres últimos, dos han de ser necesariamente temporales; en efecto, si existiesen dos isótropos entonces $i \cdot e_1 = i \cdot e_2 = i \cdot e_3 = 0$, y la métrica sería degenerada. En lo sucesivo se empleará a menudo esta propiedad por lo que conviene enunciar:

LEMA III.2. *Un vector isótropo y tres espaciales ortogonales a él no pueden ser linealmente independientes.*

Es más, por reordenación de las direcciones espaciales siempre puede conseguirse que los dos últimos 3-planos sean temporales. Se tiene entonces las siguientes posibilidades para el dual:

$$r^*: \langle eeee \rangle, \langle ieee \rangle, \langle teee \rangle, \langle eiee \rangle, \langle iiee \rangle, \langle tiee \rangle$$

Un referencial $\langle i e_1 e_2 e_3 \rangle$ cuyo dual es de la forma $\langle eiee \rangle$ es causalmente diferente de un referencial $\langle i e_1 e_2 e_3 \rangle$ de dual $\langle ieee \rangle$. En el primer caso, los vectores espaciales de r generan un 3-plano temporal, mientras que en el segundo dicho 3-plano es isótropo. Además el co-vector isótropo de $\langle eiee \rangle$ es el asociado por la métrica a la dirección isotropa del referencial pues es la normal al 3-plano $\langle i e_2 e_3 \rangle$. En cambio la co-dirección isótropa de $\langle ieee \rangle$ es ortogonal a e_1 , e_2 y e_3 , y en virtud del lema 2, no puede ser colineal con la dirección isótropa del referencial.

Es posible precisar más la notación en r^* denotando por i' el co-vector isótropo que no es el asociado métricamente a la dirección isótropa de r . Resumiendo, se tiene:

PROPOSICION III.3. *El referencial dual de un $\langle i e_1 e_2 e_3 \rangle$ puede ser de los siguientes tipos:*

$\langle eeee \rangle, \langle eiee \rangle, \langle i'eee \rangle, \langle i'iee \rangle, \langle teee \rangle, \langle tiee \rangle$

Las direcciones espaciales del referencial se han ordenado de modo que $\langle i e_1 e_2 \rangle$ y $\langle i e_1 e_3 \rangle$ sean hiperplanos temporales.

En los referenciales $\langle ieee \rangle$ cuyo dual se de uno de los tipos $\langle eeee \rangle, \langle i'eee \rangle$ o $\langle teee \rangle$, aún existe libertad de permutar las tres direcciones espaciales de r . Para los restantes tipos de r^* la ordenación convenida en la proposición 3 fija e_1 pero todavía es posible permutar e_2 por e_3 .

Los resultados de esta sección permiten enunciar:

TEOREMA III.1. *Atendiendo al carácter causal de los vectores de un referencial y al de los co-vectores de su dual, en el espacio-tiempo existen treinta y nueve clases causales de referenciales. Estas se indican en la tabla siguiente:*

TABLA III.1. Tipos causales de referenciales (r) y sus duales (r*)

r	r*				
<tttt>	<eeee>				
<ttti>	<eeee>				
<ttii>	<eeee>				
<tiii>	<eeee>				
<iiii>	<eeee>				
<ttte>	<eeee>				
<ttie>	<eeee>				
<t1ie>	<eeee>				
<i1ie>	<eeee>				
<ttee>	<eeee>				
<t1ee>	<eeee>	<1eee>			
<teee>	<eeee>	<1eee>	<teee>		
<i1'ee>	<eeee>	<1'eee>		<1'iee>	
<1eee>	<eeee>	<1'eee> <e1ee>	<teee>	<1'iee>	<t1ee>
	<eeee>	<1eee>	<teee>	<11ee>	<t1ee>
<eeee>	<i1ie>	<t1ie>	<ttee>	<ttie>	<iiii>
	<tiii>	<ttii>	<ttte>	<ttti>	<tttt>

Nótese que, salvo en el caso de un referencial $\langle ieee \rangle$ de dual $\langle eiee \rangle$, siempre es posible elegir el orden estándar para el referencial dual.

En sólo cuatro tipos causales de referenciales la elección del orden de r^* restringe la libertad de ordenación de r . Estos son: el tipo $\langle ii'ee \rangle$ de dual $\langle i'eee \rangle$ en el que i' es la dirección isótropa ortogonal a las dos espaciales de r , y los referenciales de la forma $\langle ieee \rangle$ cuyo dual es de uno de los tres tipos $\langle eiee \rangle$, $\langle i'iee \rangle$ o $\langle tiee \rangle$, en los cuales el primer vector espacial de r es el (único) no ortogonal al isótropo. En dichos casos todavía es posible realizar permutaciones P_{2e} .

2. CONFIGURACIONES DE 2-PLANOS.

a) Ahora vamos a considerar el carácter causal de los 2-planos asociados a un referencial. Es el ingrediente que necesitamos incorporar a nuestro esquema para obtener una clasificación causal completa de los referenciales minkowskianos. El carácter causal de un 2-plano está parcialmente ligado al de los vectores que lo generan; concretamente, en métrica lorentziana se tiene:

LEMA III.3. *Sean dos vectores linealmente independientes.*

i) *Si uno es temporal o ambos son isótopos, entonces generan un 2-plano temporal.* ii) *Si uno es isótropo y el otro espacial, el 2-plano que generan es isótropo si son ortogonales, y temporal si no lo son.* iii) *Si ambos son espaciales y unitarios, el 2-plano que generan es temporal isótropo o espacial según que el valor absoluto de su producto escalar sea mayor, igual o menor que uno.*

Consideremos el 2-plano Π generado por $\langle x, y \rangle$. El signo π de la cantidad $x^2y^2 - (x \cdot y)^2$ no depende de la base elegida en el 2-plano, e indica el carácter causal de Π independientemente de cuál sea la signatura de la métrica empleada. Lo denominaremos *indicador causal* del 2-plano Π pues $\pi = 1, 0$, ó -1 según que Π sea (respectivamente) espacial, isótropo o temporal.

Sea el referencial $\langle abcd \rangle$. Ordenemos los indicadores causales de los 2-planes asociados del modo siguiente:

$$\langle \pi_{ab} \ \pi_{ac} \ \pi_{ad} \ \pi_{bc} \ \pi_{bd} \ \pi_{cd} \rangle$$

Este conjunto de signos denotará la configuración de 2-planes del referencial. Del lema 3 resulta de inmediato:

PROPOSICION III.4.

- i) Los referenciales de la forma $\langle tttt \rangle$, $\langle ttti \rangle$, $\langle ttte \rangle$, $\langle ttii \rangle$, $\langle tiii \rangle$ y $\langle iiii \rangle$ tienen asociada la configuración de 2-planes $\langle - - - - - \rangle$.
- ii) Al tipo causal de referencial $\langle ttie \rangle$ le corresponden las configuraciones de 2-planes $\langle - - - - - \rangle$, $\langle - - - - - 0 \rangle$.
- iii) El tipo causal $\langle ttee \rangle$ tiene asociadas las configuraciones de 2-planes: $\langle - - - - - \rangle$, $\langle - - - - - 0 \rangle$, $\langle - - - - - + \rangle$.

En la proposición anterior los signos de las configuraciones de 2-planes resultan directamente fijados y además ordenados de menor a mayor. Es claro que ésta no será la situación general. De hecho, existirán configuraciones de 2-planes que podrán reordenarse mediante permutaciones $P_p \times P_q \times P_r$, lo que motiva:

DEFINICION. *Dos configuraciones de 2-planos se dirán equivalentes si coinciden por permutaciones que no alteren el orden convenido del referencial ni de su dual.*

Así pues, cada clase de configuraciones equivalentes de 2-planos contendrá (conjuntos de) signos "móviles" en el sentido que su orden no está fijado de antemano por el convenido para r y r^* . Emplearemos el siguiente criterio de ordenación:

Los signos "móviles" de una clase de configuraciones equivalentes de 2-planos comenzarán a ordenarse de menor a mayor hasta que todos queden fijados.

Según el lema 3, las configuraciones de 2-planos asociadas a los referenciales $\langle tiie \rangle$ y $\langle iiie \rangle$ son respectivamente de la forma $\langle ----\cdot \rangle$ y $\langle --\cdot--\cdot \rangle$ en dónde el símbolo \cdot indica $-$ ó 0 . Por otra parte, el dual de estos referenciales es necesariamente un $\langle eeee \rangle$, con lo que existe completa libertad en la ordenación de las direcciones isótropas. Con el criterio convenido resulta:

PROPOSICION III.5.

i) *Un referencial $\langle tiie \rangle$ tiene asociadas las configuraciones*

$\langle ----- \rangle$ $\langle -----0 \rangle$ $\langle -----00 \rangle$

ii) *Un referencial $\langle iiie \rangle$ tiene como configuraciones posibles*

$\langle ----- \rangle$ $\langle -----0 \rangle$ $\langle -----00 \rangle$ $\langle --0-00 \rangle$

b) El carácter causal de las direcciones y de los 2-planos de un referencial está dado respectivamente por los signos de la diagonal y de los menores principales de segundo orden de las componentes $g_{\mu\nu}$ de la métrica g en dicho referencial. Y lo mismo para el referencial dual respecto de las componentes $g^{\mu\nu}$.

Sean $\langle \pi_{\alpha\beta} \rangle$ y $\langle \pi^{\alpha\beta} \rangle$ ($\alpha \neq \beta$) los respectivos indicadores causales de las configuraciones asociadas a un referencial y a su dual,

$$\pi_{\alpha\beta} \equiv \text{sgn.} [g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - (g_{\alpha\beta})^2], \quad \pi^{\alpha\beta} \equiv \text{sgn.} [g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta} - (g^{\alpha\beta})^2]$$

En dimensión cuatro, para cualesquiera cuatro valores distintos de los índices se verifica la identidad:

$$g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta} - (g^{\alpha\beta})^2 = (\det. g)^{-1} [g_{\gamma\gamma} g_{\delta\delta} - (g_{\gamma\delta})^2]$$

que es un caso particular de la relación existente entre cada menor de una matriz y el menor complementario de su inversa. Así pues, para el caso de un espacio-tiempo resulta

$$\pi^{\alpha\beta} = -\pi_{\gamma\delta}$$

y en consecuencia hemos probado:

LEMA III.4.

Si un referencial tiene asociada la configuración de 2-planos dada por

$$\langle \pi_{12} \quad \pi_{13} \quad \pi_{14} \quad \pi_{23} \quad \pi_{24} \quad \pi_{34} \rangle$$

la configuración de 2-planos correspondiente a su dual es

$$\langle -\pi_{34} \quad -\pi_{24} \quad -\pi_{23} \quad -\pi_{14} \quad -\pi_{13} \quad -\pi_{12} \rangle$$

c) De acuerdo con la proposición 1, los diez tipos de referenciales de las proposiciones 4 y 5 tienen por dual el <eeee>. Las configuraciones duales de 2-planos evaluadas directamente por el lema 4, resultan compatibles con dicho dual, en virtud del lema 3.

Cuando existen varias posibilidades causales de realización para el co-referencial, ha de especificarse qué configuraciones de 2-planos corresponden a cada posibilidad. Concretamente, para un referencial <tíee> las configuraciones de 2-planos son de la forma <---***> en donde (***), se refiere al carácter de los tres 2-planos generados por <íee>. Si el 3-plano generado por <íee> es isótropo se tiene una única configuración de 2-planos, y el referencial dual es <íeee>. En cambio, cuando dicho hiperplano es temporal le corresponden las posibilidades

(---) ; (--0) ; (---+) ;
 (-0-) , (0--) ; (-00) , (0-0) ; (-0+) , (0-+)

Las seis últimas dan lugar a pares de configuraciones equivalentes por permutaciones de tipo P_{2e} del referencial. Con el criterio de elección ya definido, resulta:

PROPOSICION III.6. *A un referencial <tíee> cuyo dual es de la forma <eeee> le corresponden las configuraciones de 2-planos*

<-----> <-----0> <-----+> <----0-> <----00> <----0+>

Y le corresponde la única configuración <---00+> cuando su dual es de la forma <íeee>.

La compatibilidad de la proposición 6 con el lema 4 se sigue directamente pues a un referencial $\langle ieee \rangle$ no pueden corresponder configuraciones con un 2-plano espacial entre los tres primeros.

d) Precisemos lo que entendemos por clase causal de un referencial.

DEFINICION. *Denominaremos clase causal de un referencial a la especificación del carácter causal de sus direcciones, de las de su dual y de su configuración de 2-planos.*

La tabla III.2. muestra las clases causales a que conducen las proposiciones 4, 5 y 6. Cada clase se denota por $\langle r \pi r^* \rangle$. Además se ha escrito el subgrupo P_I de $P_p \times P_q \times P_r$ que deja invariante el representante elegido de la clase (con $P_I = \text{Id.}$, si éste se reduce a la identidad). Para los referenciales con tres vectores v_1, v_2, v_3 del mismo carácter causal, la permutación de dos de ellos se indica mediante $P_{\underline{v_i v_j}}$. Los signos que aparecen subrayados pueden reordenarse arbitrariamente sin que ello implique cambio de clase causal; es decir, las permutaciones de los mismos conducen a configuraciones equivalentes de 2-planos. En tales casos se especifica también el grupo P de las permutaciones de los vectores del referencial que da lugar a dichas reordenaciones de signos. $\text{Per}(\dots)$ indica permutación cíclica de los símbolos entre paréntesis.

TABLA III.2. Clases causales de referenciales <tttt>, <ttti>, <ttte>, <ttii>, <tiii>, <iiii>, <ttie>, <ttee>, <tiie>, <iiie>, <tiee>.

$\langle r \ \pi \ r^* \rangle$	P_I	P
$\langle tttt \text{ ----- } eeee \rangle$	P_{4t}	
$\langle tttt1 \text{ ----- } eeee \rangle$	P_{3t}	
$\langle ttte \text{ ----- } eeee \rangle$	P_{3t}	
$\langle tt11 \text{ ----- } eeee \rangle$	$P_{2t} \times P_{21}$	
$\langle t111 \text{ ----- } eeee \rangle$	P_{3i}	
$\langle i111 \text{ ----- } eeee \rangle$	P_{4i}	
$\langle ttie \text{ ----- } eeee \rangle$	P_{2t}	
$\langle ttie \text{ ----- } 0 \ eeee \rangle$	P_{2t}	
$\langle ttee \text{ ----- } eeee \rangle$	$P_{2t} \times P_{2e}$	
$\langle ttee \text{ ----- } 0 \ eeee \rangle$	$P_{2t} \times P_{2e}$	
$\langle ttee \text{ ----- } + \ eeee \rangle$	$P_{2t} \times P_{2e}$	
$\langle tiie \text{ ----- } eeee \rangle$	P_{2i}	
$\langle tiie \text{ ----- } \underline{0} \ eeee \rangle$	Id	P_{2i}
$\langle tiie \text{ ---- } 00 \ eeee \rangle$	P_{2i}	
$\langle iiie \text{ ----- } eeee \rangle$	P_{3i}	
$\langle iiie \text{ ----- } \underline{\underline{0}} \ eeee \rangle$	$P_{1_1 1_2}$	$\text{Per}(1_1 1_2 1_3)$
$\langle iiie \text{ ---- } \underline{\underline{00}} \ eeee \rangle$	$P_{1_2 1_3}$	$\text{Per}(1_1 1_2 1_3)$
$\langle iiie \text{ -- } 0-00 \ eeee \rangle$	P_{3i}	

(cont.)

$\langle r \pi r^* \rangle$	P_I	P
$\langle tiee \text{ ----- } eeee \rangle$	P_{2e}	
$\langle tiee \text{ -----0 } eeee \rangle$	P_{2e}	
$\langle tiee \text{ -----+ } eeee \rangle$	P_{2e}	
$\langle tiee \text{ ----}\underline{0}\text{-- } eeee \rangle$	Id	P_{2e}
$\langle tiee \text{ ----}\underline{00} \text{ } eeee \rangle$	Id	P_{2e}
$\langle tiee \text{ ----}\underline{0}\text{+ } eeee \rangle$	Id	P_{2e}
<hr/>		
$\langle tiee \text{ ---00+ } ieee \rangle$	P_{2e}	

3. REFERENCIALES <teee> y <ieee>. AUTODUALIDAD.

a) Veamos cuántas clases causales corresponden a los referenciales constituidos por una dirección temporal y tres espaciales, y a cuál de ellas pertenece un referencial físico estándar.

Las configuraciones de 2-planos asociadas a un referencial $r = \langle teee \rangle$ son de la forma $\langle ---*** \rangle$ en donde * indica cualquier carácter causal. Los tres tipos posibles de duales r^* : $\langle eeee \rangle$, $\langle ieee \rangle$, y $\langle teee \rangle$, no restringen la libertad de ordenación de las tres direcciones espaciales de r . Mediante permutaciones P_{3e} , cualquier configuración de 2-planos es equivalente a una de las diez siguientes:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccccc} \langle ----- \rangle & \langle -----0 \rangle & \langle -----+ \rangle & \langle ----00 \rangle & \langle ----0+ \rangle \\ \langle -----++ \rangle & \langle ---000 \rangle & \langle ---00+ \rangle & \langle ---0++ \rangle & \langle ---+++ \rangle \end{array} \right\}$$

Por el lema 4, las respectivas configuraciones duales son

$$\pi^* : \left\{ \begin{array}{ccccc} \langle ++++++ \rangle & \langle 0+++++ \rangle & \langle -+++++ \rangle & \langle 00++++ \rangle & \langle -0++++ \rangle \\ \langle ---++++ \rangle & \langle 000+++ \rangle & \langle -00+++ \rangle & \langle --0+++ \rangle & \langle ---+++ \rangle \end{array} \right\}$$

Si el dual es de la forma $r^* = \langle eeee \rangle$, del lema 3 resulta que todas las configuraciones π^* son compatibles con él. Si el dual es $r^* = \langle teee \rangle$ le corresponde la configuración $\pi^* = \langle ---+++ \rangle$. Y si es de la forma $r^* = \langle ieee \rangle$ sólo puede tener las configuraciones de 2-planos π^* : $\langle ---+++ \rangle$ y $\langle --0+++ \rangle$. En efecto, todas aquellas que

poseen algún 2-plano espacial entre los tres primeros no son compatibles con tal tipo de dual; tampoco lo es $\langle 000+++ \rangle$ pues viola el lema 2. Finalmente, la configuración $\langle -00+++ \rangle$ no es compatible con $r^* = \langle ieeee \rangle$ porque el 3-plano generado por la dirección isótropa y las dos últimas espaciales es isótropo; su normal es isótropa y esto contradice el carácter espacial del segundo vector del referencial de partida. Como emplearemos a menudo este argumento, conviene enunciar:

LEMA III.5. *Un referencial $\langle i*ee \rangle$ cuyas configuraciones sean de la forma $\langle *00**+ \rangle$ tiene por dual $\langle *i** \rangle$.*

Podemos reunir los resultados de este epígrafe en la siguiente:

PROPOSICION III.7. *Existen trece clases causales de referenciales con una dirección temporal y tres espaciales. Estas se representan en la siguiente tabla.*

r r^*	π π^*				
teee eeee	----- +++++	-----0 0+++++	-----+ -+++++	----00 00++++	----0+ -0++++
	-----++ --++++	---000 000+++	---00+ -00+++	---0++ --0+++	----++ ----++
teee ieee	---0++ --0+++	----++ -----++			
teee teee	----++ ----++				

b) Consideremos ahora los referenciales con dos direcciones isótropas y dos espaciales: $\langle i_1 i_2 e_1 e_2 \rangle$. Las configuraciones de 2-planos son necesariamente de la forma $\langle -\dots * \rangle$ en donde \circ indica $-$ ó 0 , y $*$ denota $-$, 0 ó $+$. Resultan las siguientes configuraciones de 2-planos:

- 1) $\langle -\dots * \rangle$
- 2) $\langle -\dots 0 * \rangle$, $\langle -\dots 0 * \rangle (P_{2e})$, $\langle --0\dots * \rangle (P_{2i})$, $\langle -0\dots * \rangle (P_{2i} \times P_{2e})$
- 3) $\langle --0-0 * \rangle$, $\langle -0-0 * \rangle (P_{2e})$
- 4) $\langle --00 * \rangle$, $\langle -0--0 * \rangle (P_{2i})$ ó (P_{2e})
- 5) $\langle ---00+ \rangle$, $\langle -00--+ \rangle (P_{2i})$
- 6) $\langle --000+ \rangle$, $\langle -0-00+ \rangle (P_{2e})$, $\langle -00-0+ \rangle (P_{2i})$, $\langle -000-+ \rangle (P_{2i} \times P_{2e})$
- 7) $\langle -0000+ \rangle$

Para cada valor de $*$, las configuraciones de 2-planos pertenecientes a la misma fila son equivalentes; su representante es la situada en primer lugar. A continuación de las restantes configuraciones de 2-planos se ha escrito la permutación (P..) que la transforma en su representante. En 5), 6) y 7) el 2-plano generado por e_1 y e_2 es necesariamente espacial pues ambos vectores son ortogonales a la misma dirección isótropa.

Si el dual es de la forma $r^* = \langle eeee \rangle$ los hiperplanos $\mathcal{H}_1 \equiv \langle i_2 e_1 e_2 \rangle$ y $\mathcal{H}_2 \equiv \langle i_1 e_1 e_2 \rangle$ son ambos temporales, y le corresponden las doce configuraciones de 2-planos:

$\langle -\dots * \rangle$ $\langle -\dots 0 * \rangle$ $\langle --0-0 * \rangle$ $\langle --00 * \rangle$

Si el dual es $r^* = \langle 1_2 e e e \rangle$ se tiene que \mathcal{K}_1 es isótropo y \mathcal{K}_2 temporal. En este caso, r tiene asociadas las configuraciones de 2-planos $\langle ---00+ \rangle$ y $\langle --000+ \rangle$.

Si el dual es de la forma $r^* = \langle 1_2 1_1 e_1 e_2 \rangle$, a r le corresponde la configuración de 2-planos $\langle -0000+ \rangle$ pues \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 son isótropos. Reuniendo estos resultados se tiene:

PROPOSICION III.8. *Existen quince clases causales de referenciales con dos direcciones isótropas y dos espaciales. Estas son las dadas en la tabla siguiente:*

r r^*	π π					
$i \ i' e e$ $e e e e$	----- ++++++	-----0 0+++++	-----+ -+++++	-----0- +0++++	-----00 00++++	-----0+ -0++++
	--0-0- +0+0++	--0-00 00+0++	--0-0+ -0+0++	--00-- ++00++	--00-0 0+00++	--00-+ -+00++
$i \ i' e e$ $i' e e e$	---00+ -00+++	--000+ -000++				
$i \ i' e e$ $i' i e e$	-0000+ -0000+					

c) Una propiedad de ciertas clases causales que conviene analizar es la de autodualidad.

DEFINICION. *Llamaremos dual de la clase causal de referenciales $\langle r \ \pi \ r^* \rangle$ a la clase causal $\langle r^* \ \pi^* \ r \rangle$. Una clase causal se dirá autodual si coincide con su dual.*

En las proposiciones 7 y 8 aparecen dos clases causales autoduales:

$$\langle \text{teee} \text{ ---+++ teee} \rangle, \quad \langle \text{ii'ee} \text{ -0000+ i'iee} \rangle$$

a las que pertenecen respectivamente las tetradas ortogonales y las isótropas reales. Para un referencial ortonormado se tiene además autodualidad de sus vectores: los co-vectores de su dual son los asociados por la métrica a los vectores del referencial.

Puede darse autodualidad sólo en el sentido de la configuración de 2-planos, como ocurre para las clases $\langle \text{teee} \text{ ---+++ eeee} \rangle$ y $\langle \text{teee} \text{ ---+++ ieee} \rangle$. Sin embargo, no es éste el caso de un referencial $\langle \text{ii'ee} \rangle$ en el cual la autodualidad del referencial y la de su configuración de 2-planos aparecen conjuntamente.

La clase $\langle \text{ii'ee} \text{ -0000+ i'iee} \rangle$ no sólo es autodual en el sentido causal. Las direcciones isótropas de r^* son las asociadas métricamente a las direcciones isótropas de r en orden intercambiado; además los 2-planos espaciales de π y π^* coinciden.

d) La Tabla III.3 presenta las clases causales asociadas a los referenciales de la forma $\langle \text{teee} \rangle$ e $\langle \text{ieee} \rangle$, y su notación es similar a la de Tabla III.2. Las líneas discontinuas separan clases causales de igual r y diferente r^* . Para $r = \langle \text{ieee} \rangle$, en las configuraciones de 2-planos $\langle \text{---0-0*} \rangle$ y $\langle \text{---00-*} \rangle$ (con $* = -, 0, +$) pueden permutarse simultáneamente el segundo signo con el tercero y el cuarto con el quinto, sin que ello implique cambio de clase causal. Mediante $P(2i, 2e)$ se denota la permutación simultánea y por separado de los dos vectores isótropos y de los dos espaciales. Para cada valor de $*$, las clases $\langle \text{ieee} \text{ ---00-* eeee} \rangle$ y $\langle \text{ieee} \text{ -0--0* eeee} \rangle$ son equivalentes por permutaciones P_{2i} o P_{2e} , lo cual se denota en la tabla mediante $P_{2i} = P_{2e}$; la elección de la primera para representarlas obedece al criterio de ordenación convenido.

TABLA III.3. Clases causales de referenciales <teee> y <ieee>.

$\Gamma \Pi \Gamma^*$	P_I	P
<teee ----- eeee>	P_{3e}	
<teee ----- <u>0</u> eeee>	$P_{e_2 e_3}$	$\text{Per}(e_1 e_2 e_3)$
<teee ----- <u>+</u> eeee>	$P_{e_2 e_3}$	$\text{Per}(e_1 e_2 e_3)$
<teee ----- <u>00</u> eeee>	$P_{e_1 e_2}$	$\text{Per}(e_1 e_2 e_3)$
<teee ----- <u>0+</u> eeee>	Id	P_{3e}
<teee ----- <u>++</u> eeee>	$P_{e_1 e_2}$	$\text{Per}(e_1 e_2 e_3)$
<teee ---000 eeee>	P_{3e}	
<teee --- <u>00+</u> eeee>	$P_{e_2 e_3}$	$\text{Per}(e_1 e_2 e_3)$
<teee --- <u>0++</u> eeee>	$P_{e_1 e_2}$	$\text{Per}(e_1 e_2 e_3)$
<teee ---+++ eeee>	P_{3e}	
<teee --- <u>0++</u> ieee>	$P_{e_1 e_2}$	$\text{Per}(e_1 e_2 e_3)$
<teee ---+++ ieee>	P_{3e}	
<teee ---+++ teee>	P_{3e}	

(cont.)

$\langle r \pi r^* \rangle$	P_I	P
$\langle 11ee \text{ ----- } eeee \rangle$	$P_{21} \times P_{2e}$	
$\langle 11ee \text{ -----0 } eeee \rangle$	$P_{21} \times P_{2e}$	
$\langle 11ee \text{ -----+ } eeee \rangle$	$P_{21} \times P_{2e}$	
$\langle 11ee \text{ ----0- } eeee \rangle$	Id	$P_{21} \times P_{2e}$
$\langle 11ee \text{ ----00 } eeee \rangle$	Id	$P_{21} \times P_{2e}$
$\langle 11ee \text{ ----0+ } eeee \rangle$	Id	$P_{21} \times P_{2e}$
$\langle 11ee \text{ --0-0- } eeee \rangle$	P_{21}	P_{2e}
$\langle 11ee \text{ --0-00 } eeee \rangle$	P_{21}	P_{2e}
$\langle 11ee \text{ --0-0+ } eeee \rangle$	P_{21}	P_{2e}
$\langle 11ee \text{ --00-- } eeee \rangle$	$P(21, 2e)$	$P_{21} = P_{2e}$
$\langle 11ee \text{ --00-0 } eeee \rangle$	$P(21, 2e)$	$P_{21} = P_{2e}$
$\langle 11ee \text{ --00-+ } eeee \rangle$	$P(21, 2e)$	$P_{21} = P_{2e}$
.....		
$\langle 11'ee \text{ ---00+ } 1'eee \rangle$	P_{2e}	
$\langle 11'ee \text{ --000+ } 1'eee \rangle$	Id	P_{2e}
.....		
$\langle 11'ee \text{ -0000+ } 1'iee \rangle$	$P_{21} \times P_{2e}$	

4. REFERENCIALES DE LA FORMA $\langle ieee \rangle$.

a) Vamos a analizar los referenciales con una dirección isótropa y tres espaciales: $\langle ie_1e_2e_3 \rangle$. En virtud del lema 2, los 2-planos $\langle ie_1 \rangle$, $\langle ie_2 \rangle$, $\langle ie_3 \rangle$ no pueden ser los tres isótropos; se tiene las siguientes posibilidades para los mismos:

- 1) Los tres son temporales.
- 2) Dos son temporales y uno isótropo.
- 3) Uno es temporal y dos isótropos.

Los casos 1) y 2) corresponden a un referencial cuyo dual es de la forma $r^* = \langle *eee \rangle$ pues los 3-planos $\mathcal{K}_1 \equiv \langle ie_2e_3 \rangle$, $\mathcal{K}_2 \equiv \langle ie_1e_3 \rangle$, y $\mathcal{K}_3 \equiv \langle ie_1e_2 \rangle$ son temporales. Este tipo de dual no impone ninguna restricción sobre el orden de las tres direcciones espaciales del referencial; por tanto se pueden elegir e_1 y e_2 de modo que los dos primeros 2-planos de las configuraciones sean temporales. Así pues, a estos dos casos corresponden respectivamente las configuraciones de 2-planos:

$$1) \langle ---*** \rangle \quad \text{y} \quad 2) \langle --0*** \rangle$$

En el caso 1) no se privilegia ninguna dirección espacial del referencial. Mediante permutaciones P_{3e} podemos ordenar de menor a mayor los caracteres causales de los 2-planos $\langle (e_1e_2)(e_{13})(e_{23}) \rangle$ del 3-plano $\mathcal{K}_4 \equiv \langle e_1e_2e_3 \rangle$:

$$[---] \quad [--0] \quad [---] \quad [-00] \quad [-0+] \quad [-++] \quad [000] \quad [00+] \quad [0++] \quad [+++]$$

En el caso 2) se ha privilegiado el tercer vector espacial del referencial respecto de los otros dos, cuya ordenación queda aún libre. Para cada carácter causal del 2-plano $\langle e_1e_2 \rangle$, podemos

ordenar de menor a mayor los caracteres causales de los 2-planos $\langle e_1 e_3 \rangle$ y $\langle e_2 e_3 \rangle$. Los 2-planos asociados a \mathcal{R}_4 son ahora:

[*--] [*-0] [*-+] [*00] [*0+] [*++]

Para los casos 1) y 2) resultan pues en total veintiocho configuraciones de 2-planos. Del lema 4 se obtienen sus duales π^* y ahora, por aplicación del lema 3, hay que ver cuáles son compatibles con cada uno de los tres tipos de dual $\langle *eee \rangle$. Está claro que si $r^* = \langle eeee \rangle$ ya no habrá más restricciones.

Cuando el dual es de la forma $\langle teee \rangle$ los tres primeros planos de las π^* son temporales y sólo estarán permitidas aquellas π cuyos tres últimos 2-planos son espaciales: $\langle ---+++ \rangle$, $\langle --0+++ \rangle$ (de acuerdo con las dos clases correspondientes de la proposición 7).

En cambio si el dual es del tipo $\langle i'eee \rangle$, entre los tres primeros 2-planos de las configuraciones duales no puede existir ninguno espacial ni tampoco ser los tres isótropos; esto limita las π^* a las siguientes:

$\langle -00+++ \rangle$ $\langle --0+++ \rangle$ $\langle ---+++ \rangle$
 $\langle -000+++ \rangle$ $\langle --00+++ \rangle$ $\langle 00-0+++ \rangle$ $\langle -0-0+++ \rangle$ $\langle ---0+++ \rangle$

Ahora bien, el lema 5 aplicado al dual $r^* = \langle i'eee \rangle$ prohíbe las π^* -configuraciones $\langle -00+++ \rangle$ y $\langle -000+++ \rangle$ porque contradicen la forma del referencial de partida $\langle ieee \rangle$. Además la $\langle 00-0+++ \rangle$ tampoco es compatible con $r^* = \langle i'eee \rangle$ pues siendo los dos primeros 2-planos isótropos, el cuarto ha de ser espacial. Así, al tipo causal de $\langle ieee \rangle$ cuyo dual es de la forma $\langle i'eee \rangle$ le corresponden las cinco configuraciones de 2-planos:

π : $\langle ---0+++ \rangle$ $\langle ---+++ \rangle$ $\langle --00+++ \rangle$ $\langle --0+0+++ \rangle$ $\langle --0+++ \rangle$

Consideremos finalmente el caso 3) que se presenta cuando uno de los 3-planos $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ es isótropo (y los otros dos necesariamente temporales). El referencial dual contiene la dirección isótropa asociada por la métrica a la dirección isótropa del referencial. La elección de los tres tipos de dual $\langle *iee \rangle$ que se hizo en la proposición 3 consiste en tomar $\mathcal{X}_3 \equiv (ie_2 e_3)$ como el 3-plano isótropo; tal elección fija el primer vector espacial del referencial de modo que sea (ie_1) el 2-plano temporal. Como $(e_1 e_2)$ es espacial las configuraciones de 2-planos son de la forma:

$$3) \langle -00*** \rangle$$

Pero aún podemos permutar e_2 y e_3 , es decir, cambiar en 3) el cuarto signo por el quinto. Ordenados estos signos de menor a mayor, cualquier configuración de 2-planos es equivalente a una de las siguientes:

$$\pi : \langle -00--- \rangle \langle -00-0+ \rangle \langle -00-++ \rangle \langle -0000+ \rangle \langle -000++ \rangle \langle -00+++ \rangle$$

Las configuraciones duales de las anteriores son:

$$\pi^* : \langle -++00+ \rangle \langle -0+00+ \rangle \langle ---00+ \rangle \langle -0000+ \rangle \langle --000+ \rangle \langle ---00+ \rangle$$

y todas ellas son compatibles con un dual de la forma $r^* = \langle eiee \rangle$. Si $r^* = \langle tiee \rangle$ la única π^* compatible con él es $\langle ---00+ \rangle$, lo cual concuerda con la proposición 6. Para $r^* = \langle i'iee \rangle$, las π^* no pueden tener un 2-plano espacial en los tres primeros lugares; además la configuración $\langle -0000+ \rangle$ viola el lema 5 aplicado al referencial dual, y por tanto sólo son compatibles con este dual las π^* de la forma $\langle ---00+ \rangle$ y $\langle ---00+ \rangle$. Al mismo resultado se llega directamente por dualidad de las correspondientes clases de la proposición 8.

La discusión de este epígrafe permite enunciar:

PROPOSICION III.9. Existen cuarenta y cuatro clases causales de referenciales con una dirección isótropa y tres espaciales. Estas son las dadas en la siguiente tabla:

r r^*	π π^*						
ieee eeee	----- ++++++	-----0 0+++++	-----+ -+++++	-----00 00++++	-----0+ -0++++	-----++ -+++++	-----000 000++++
	---00+ -00+++	---0++ --0+++	---+++ -+++	--0--- +++0++	--0--0 0++0++	--0--+ -++0++	--0-00 00+0++
	--0-0+ -0+0++	--0-++ --0+++	--00-- ++00++	--00-0 0+00++	--00-+ -+00++	--0000 0000++	--000+ -000++
	--00++ --00++	--0+-- ++-0++	--0+-0 0+-0++	--0+-+ +-0++	--0+00 00-0++	--0+0+ -0-0++	--0+++ ---0++
ieee eiee	-00--+ -++00+	-00-0+ -0+00+	-00-++ -+00+	-0000+ -0000+	-000++ --000+	-00+++ ---00+	
ieee ieee	---0++ --0+++	---+++ -+++	--00++ --00++	--0+0+ -0-0++	--0+++ ---0++		
ieee iiee	-00+++ ---00+	-000++ --000+					
ieee teee	--0+++ ---0++	---+++ +++---					
ieee tiee	-00+++ ---00+						

b) Consideremos más detenidamente las seis clases causales asociadas a los referenciales del tipo <ieeee> cuyo dual es de la forma <eiee>:

$$A_1 = \langle \text{ieeee } -00---+ \text{ eiee} \rangle$$

$$A_2 = \langle \text{ieeee } -00-0+ \text{ eiee} \rangle$$

$$A_3 = \langle \text{ieeee } -00-++ \text{ eiee} \rangle$$

$$A_4 = \langle \text{ieeee } -0000+ \text{ eiee} \rangle$$

$$A_5 = \langle \text{ieeee } -000++ \text{ eiee} \rangle$$

$$A_6 = \langle \text{ieeee } -00+++ \text{ eiee} \rangle$$

La clase dual de A_3 es $A_3^* = \langle \text{eiee } ---+00+ \text{ ieee} \rangle$ y posee los mismos caracteres causales que A_3 aunque ordenados de diferente modo. Pero si se considera el orden estándar para el referencial en A_3^* (permutación P_{e1} del primer e por i) se obtiene la clase A_3 de partida. Luego A_3 y A_3^* son la misma clase causal: $A_3^* = A_3$. Del mismo modo se tiene que $A_4^* = A_4$; y también $A_1^* = A_6$ y $A_2^* = A_5$.

Por otra parte, denotemos las cinco clases causales de referenciales <ieeee> cuyo dual es de la forma <i'eee> por:

$$B_1 = \langle \text{ieeee } ---0++ \text{ i'eee} \rangle$$

$$B_2 = \langle \text{ieeee } ---+++ \text{ i'eee} \rangle$$

$$B_3 = \langle \text{ieeee } --00++ \text{ i'eee} \rangle$$

$$B_4 = \langle \text{ieeee } --0+0+ \text{ i'eee} \rangle$$

$$B_5 = \langle \text{ieeee } --0+++ \text{ i'eee} \rangle$$

La clase dual de B_1 es la B_5 , $B_1^* = B_5$. Las clases B_2 y B_3 son autoduales en sentido causal. La clase B_4 también es autodual pues $B_4^* = \langle \text{i'eee } -0-0++ \text{ ieee} \rangle$ coincide causalmente con B_4 si se permutan las dos últimas direcciones espaciales.

5. NUMERO TOTAL DE CLASES CAUSALES.

Un referencial $\langle eeee \rangle$ causalmente autodual tiene asociadas veintiocho configuraciones de 2-planos no equivalentes (las combinaciones de los tres caracteres $-$, 0 , $+$ tomados de seis en seis). Como representantes de las mismas pueden elegirse las que poseen el orden estándar pues la forma de $r^* = \langle eeee \rangle$ no restringe la libertad de ordenación del referencial. Un modo adecuado de distribuirlas es el siguiente:

$\langle \text{-----} \rangle$ $\langle \text{-----+} \rangle$ $\langle \text{-----++} \rangle$ $\langle \text{----++++} \rangle$ $\langle \text{---+++++} \rangle$ $\langle \text{--++++++} \rangle$ $\langle \text{+++++++} \rangle$

$\langle \text{-----0} \rangle$ $\langle \text{-----0} \rangle$ $\langle \text{---0++} \rangle$ $\langle \text{--0+++} \rangle$ $\langle \text{-0++++} \rangle$ $\langle \text{0+++++} \rangle$

$\langle \text{-----00} \rangle$ $\langle \text{---00+} \rangle$ $\langle \text{--00++} \rangle$ $\langle \text{-00+++} \rangle$ $\langle \text{00++++} \rangle$

$\langle \text{---000} \rangle$ $\langle \text{--000+} \rangle$ $\langle \text{-000++} \rangle$ $\langle \text{000+++} \rangle$

$\langle \text{--0000} \rangle$ $\langle \text{-0000+} \rangle$ $\langle \text{0000++} \rangle$

$\langle \text{-00000} \rangle$ $\langle \text{00000+} \rangle$

$\langle \text{000000} \rangle$

En la línea vertical central se sitúan las cuatro configuraciones de 2-planos autoduales; simétricamente respecto a ellas según la horizontal, están colocados los doce pares de configuraciones de 2-planos relacionados por dualidad.

Las configuraciones de 2-planos asociadas a los catorce tipos de referenciales $\langle eeee \rangle$ no autoduales se obtienen directamente de las proposiciones 4 5 6 7 8 y 9.

Ahora vamos a reunir en un cuadro todos los resultados precedentes. Dicho cuadro es manifiestamente asimétrico debido a la existencia de las seis clases causales de referenciales $\langle ieee \rangle$ cuyo dual es de la forma $\langle eiee \rangle$. Posee quince entradas para los referenciales y dieciseis salidas para los duales. De acuerdo con el teorema III.1. hay un total de treinta y nueve casillas a rellenar y en ellas se han escrito las configuraciones de 2-planos π asociadas al referencial r cuyo dual es r^* . La inspección del cuadro conduce a enunciar:

TEOREMA III.2. *Un espacio-tiempo admite 199 clases causales de referenciales. Son las dadas en el cuadro de la página siguiente.*

La existencia de las 199 clases causales de referenciales minkowskianos ha sido verificada mediante ejemplos numéricos de cada tipo.

CAPITULO IV

REFERENCIALES SIMETRICOS. ESTUDIO ALGEBRAICO

1. MOTIVACION Y CONTENIDO.

Los referenciales usualmente utilizados en Física privilegian ciertas direcciones de espacio-tiempo (la dirección temporal con respecto a las tres direcciones espaciales en los "referenciales físicos", las dos direcciones isótropas con respecto a las dos direcciones espaciales en los "referenciales isótropos", etc.). Ahora bien, como el principio cosmológico sugiere en parte, ciertas propiedades del espacio-tiempo podrían ser mejor descritas en referenciales que no privilegien métricamente ninguna dirección. Tales referenciales los llamaremos *referenciales simétricos*; el estudio de sus propiedades algebraicas es el objetivo del presente capítulo.

¿Existen referenciales simétricos en métrica hiperbólica?.
Mostraremos en la sección 2 que sólo existen si ésta es lorentziana. En la misma sección estudiamos el número máximo de vectores métricamente permutables no generadores de subespacios isótropos que admite una métrica de tipo general. Asimismo analizamos la dimensión maximal de los subespacios isótropos generados por dichos vectores.

La sección 3 introduce la noción de eje de un referencial simétrico, que en el caso lorentziano define una dirección temporal. A continuación obtenemos el grupo máximo de transformaciones entre referenciales simétricos y analizamos cómo asociar a un referencial simétrico dado un referencial auxiliar ortogonal.

La sección 4 estudia la clasificación causal de los referenciales simétricos lorentzianos. Veremos que, en dimensión m , existen $2m-1$ clases causales de tales referenciales, y que éstas pueden ser caracterizadas mediante un sólo parámetro.

2. VECTORES METRICAMENTE PERMUTABLES.

a) Un conjunto de p vectores está métricamente caracterizado por sus $p(p+1)/2$ productos escalares mutuos. Damos la siguiente:

DEFINICION. Diremos que p vectores son métricamente permutables si son iguales sus módulos e iguales sus productos escalares, y llamaremos referenciales simétricos a los constituidos por vectores métricamente permutables.

En dimensión $m \equiv n+1$, sea $\langle \xi_A \rangle_{A=1}^m$, un referencial simétrico respecto de la métrica g :

$$g(\xi_A, \xi_A) = \alpha, \quad g(\xi_A, \xi_B) = \beta \quad \forall A \neq B$$

Sea $\langle \theta^A \rangle_{A=1}^m$ el co-referencial dual algebraico de $\langle \xi_A \rangle_{A=1}^m$, es decir $\theta^A(\xi_B) = \delta_B^A \equiv \delta_{AB}$; la métrica $g = g_{AB} \theta^A \otimes \theta^B$ es entonces tal que

$$g_{AB} = (\alpha - \beta) \delta_{AB} + \beta 1_A 1_B \quad \cdot \text{ (IV.1)}$$

donde 1_A es la m -upla de 1's.

Es obvio que las métricas elípticas admiten referenciales simétricos. Pero, ¿qué otras métricas los admiten?. Responder a esta cuestión exige estudiar la signatura de g_{AB} .

Sea Δ_{k+1} el menor principal de orden $k+1$ de la matriz g_{AB} . Para obtener su expresión observemos que, para $r \leq k$ se tiene $g_{ir} - g_{i,r+1} = (\alpha - \beta)(\delta_{ir} - \delta_{i,r+1})$, con lo cual es

$$\Delta_{k+1} \equiv \det(g_{ij})_{i,j=1}^{k+1} = \det(g_{ir} - g_{i,r+1}, g_{i,k+1})_{i=1}^{k+1}, \quad r \leq k$$

y desarrollando por la primera fila resulta:

$$\Delta_{k+1} = (\alpha - \beta) \Delta_k + (-1)^k \beta (\beta - \alpha)^k = (\alpha - \beta) \Delta_k + \beta (\alpha - \beta)^k$$

Por recurrencia se obtiene el siguiente:

LEMA.IV.1. *El menor principal de orden $k+1$ de g_{AB} está dado por:*

$$\Delta_{k+1} = (\alpha + k\beta)(\alpha - \beta)^k \quad (\text{IV.2})$$

de donde se sigue, en particular, que

COROLARIO. g_{AB} es regular si, y sólo si, se tiene

$$D \equiv (\alpha + n\beta)(\alpha - \beta) \neq 0 \quad (\text{IV.3})$$

Por ser g_{AB} regular, de (IV.3) y (IV.2) se sigue que su secuencia de signatura contiene a lo sumo un cero. Por tanto, el teorema de Jacobi o, en su caso, el de Gundelfinger permiten evaluar la signatura. Recordemos brevemente su contenido /F.R. Gantmacher (1966), p. 305/.

1) El *teorema de Jacobi* afirma que cuando la secuencia de signatura $\langle 1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m \rangle$ no contiene ningún cero, la signatura es $\sigma = m - 2v = p - v$, siendo respectivamente p y v el número de permanencias y el de variaciones de signo en la secuencia.

2) Cuando la secuencia de signatura de una métrica contiene ceros no consecutivos, el *teorema de Gundelfinger* afirma que $\sigma = m - 2v$ siendo v el número de variaciones de signo de la secuencia reducida que se obtiene al omitir los ceros.

A partir de la expresión (IV.2) de los menores principales de g_{AB} puede entonces probarse el siguiente teorema, en donde $\text{sgn}(x)$ denota el signo de x .

TEOREMA IV.1. *En dimensión $m=n+1$, la signatura σ de una métrica que admite un referencial simétrico está dada por*

$$\sigma = \text{sgn}(\alpha + n\beta) + n \text{sgn}(\alpha - \beta) \quad (\text{IV.4})$$

Distinguiremos varios casos en la demostración, según sea el signo de β . Cuando $\beta=0$ y $\alpha \neq 0$ la métrica es elíptica, y la relación (IV.4) se satisface de inmediato.

Supongamos ahora $\beta > 0$. Cuando $\alpha > \beta$, todos los menores principales son positivos y g_{AB} es definida positiva; cuando $\alpha < -n\beta$, cualesquiera dos menores principales sucesivos tienen

signos opuestos y la métrica es definida negativa. En cambio, cuando $-n\beta < \alpha < \beta$ hay que distinguir dos situaciones (según que haya, o no, un menor nulo) pero ambas conducen a una métrica lorentziana de signatura $1-n$. En efecto, si para algún k se tiene $\alpha = -k\beta$ entonces $\Delta_{k+1} = 0$ y en la secuencia que resulta de omitir el cero existen n variaciones de signo. Cuando se verifica que $-k\beta < \alpha < (1-k)\beta$ entonces $\Delta_k \neq 0$ cualquiera que sea k , y la única permanencia de signo tiene lugar entre Δ_k y Δ_{k+1} . Así pues,

$$\sigma = \begin{cases} 1+n & \text{si } \alpha > \beta > 0 \\ 1-n & \text{si } -n\beta < \alpha < \beta \\ -1-n & \text{si } \alpha < -n\beta < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Cuando $\beta < 0$, la discusión precedente aplicada a $(-\alpha, -\beta)$ proporciona la signatura de $-\varepsilon_{AB}$,

$$\sigma = \begin{cases} 1+n & \text{si } \alpha > -n\beta > 0 \\ -1+n & \text{si } -n\beta > \alpha > \beta \\ -1-n & \text{si } \alpha < \beta < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

y queda probado el teorema. ■

Una consecuencia directa importante del teorema IV.1 es

COROLARIO. *Las únicas métricas no elípticas que admiten referenciales simétricos son las lorentzianas.*

De hecho, resulta de (IV.4) que la métrica g_{AB} es definida o lorentziana según que sea $D > 0$ ó $D < 0$ respectivamente.

En el caso lorentziano con $m > 2$, denotando mediante ϵ_σ el signo de la signatura, se sigue a partir de (IV.5-6) que

$$\epsilon_\sigma \equiv \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\alpha - \beta) = -\text{sgn}(\beta) = -\text{sgn}(\alpha + n\beta) \quad (\text{IV.7})$$

b) Consideremos un referencial simétrico $\langle \xi_A \rangle_{A=1}^m$:

$$\alpha = g(\xi_A, \xi_A), \quad \beta = g(\xi_A, \xi_B) \quad A \neq B$$

y sea $v = \lambda^A \xi_A$ tal que $\langle \xi_1, \dots, \xi_m, v \rangle$ constituya un conjunto de $m+1$ vectores métricamente permutables:

$$\alpha = g(v, v), \quad \beta = g(v, \xi_A) \quad \forall A$$

De las relaciones precedentes resulta

$$\alpha = \lambda^A g(v, \xi_A) = \beta \lambda^A$$

$$\beta = \alpha \lambda^A + \beta \sum_{B \neq A} \lambda^B = (\alpha - \beta) \lambda^A + \alpha$$

y como $\alpha \neq \beta$ se tiene $\lambda^A = -1 \quad \forall A$ y $\alpha = -m\beta$; esto exige que la métrica sea elíptica pues $D \equiv (\alpha - \beta)(\alpha + n\beta) = (m+1)\beta^2 > 0$. Por tanto hemos probado:

PROPOSICION IV.1. i) En dimensión m , el número máximo de vectores métricamente permutables que admite una métrica elíptica es $m+1$. ii) En métrica lorentziana, todo sistema de generadores formado por vectores métricamente permutables es un referencial simétrico.

Los $m+1$ vectores permutables $\langle \xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1} = -1^A \xi_A \rangle$ que admite una métrica elíptica son precisamente los radios de un $(m+1)$ -edro regular pues

$$\alpha = -m \beta \quad \text{y} \quad \sum_{R=1}^{m+1} \xi_R = 0 \quad (\text{IV.8})$$

c) Sea una métrica general de tipo (p, q) , $p+q=m$, $p-q=\sigma$, y denotemos por i el índice de la misma, esto es, la dimensión de los subespacios maximales totalmente isotropos: $i = \min \langle p, q \rangle$. Los resultados de los epígrafes anteriores permiten probar:

TEOREMA IV.2. i) Para una métrica de índice i , el número máximo N de vectores métricamente permutables no generadores de subespacios isotropos es $N = m-i+1$.

ii) La dimensión maximal d_M de los subespacios isotropos generados por vectores métricamente permutables es i si estos son isotropos. Si son espaciales y $\sigma \neq 0$ entonces d_M es $i+1$ (resp. $m-i$) si sus módulos son iguales (resp. diferentes) a sus productos escalares. Si son espaciales y $\sigma=0$, o son temporales entonces $d_M = i \geq 2$.

Si $\sigma \neq 0$, decimos que un vector v es espacial [resp. temporal] si $\text{sgn}(v^2) = \epsilon_\sigma$ [resp. $\text{sgn}(v^2) = -\epsilon_\sigma$].

La primera parte del teorema se obtiene aplicando la proposición IV.1. a los subespacios maximales con métrica elíptica o lorentziana.

Sea $\langle \xi_i \rangle_{i=1}^k$ una base del subespacio isótropo \mathfrak{Z}_k formada por vectores métricamente permutables: $\alpha = g(\xi_i, \xi_i)$, $\beta = g(\xi_i, \xi_j)$ $i \neq j$. Por (IV.2) \mathfrak{Z}_k puede ser de dos tipos según que $\alpha = \beta$ o $\alpha = (1-k)\beta$. El caso $\alpha = 0$ corresponde a subespacios totalmente isótropos con lo cual $d_M = i$, y todos sus vectores son métricamente permutables.

Cuando $\alpha = \beta \neq 0$, \mathfrak{Z}_k se obtiene añadiendo a un $(k-1)$ -plano totalmente isótropo, generado por $\langle l_\alpha \rangle_{\alpha=1}^{k-1}$, un vector v ortogonal no isótropo: $\xi_\alpha \equiv l_\alpha + v$, $\xi_k \equiv v$, con $l_\alpha \cdot l_\beta = l_\alpha \cdot v = 0$ y $v^2 = \alpha$. Si $\sigma \neq 0$ entonces $k-1 \leq i$ con lo cual $d_M = i+1$; si además $k = d_M$ necesariamente v es espacial, y los ξ_i 's también son espaciales. En cambio, si $\sigma = 0$, todo vector ortogonal a un subespacio maximal totalmente isótropo es isótropo, y así $k-1 < i$, es decir $d_M = i$.

Cuando $\alpha = (1-k)\beta$, $2 \leq k < m$, en \mathfrak{Z}_k existe una única dirección ortogonal a todos sus vectores pues si $l = \lambda^1 \xi_1 \neq 0$, $l \cdot \xi_j = 0 \quad \forall j$, se tiene

$$0 = \lambda^1 \xi_1 \cdot \xi_j = \lambda^1 [(\alpha - \beta) \delta_{1j} + \beta 1_1 1_j] = \beta (-k \lambda^j + 1_1 \lambda^1 1^j)$$

lo que implica $\lambda^1 \propto 1^1$, y por tanto $l = \lambda 1^1 \xi_1$. Así, $r_i \equiv \lambda \xi_i - l$ ($i=1, \dots, k$) son los radios de un k -edro regular y generan un $(k-1)$ plano con métrica elíptica y ortogonal a l . A lo sumo existen $i-1$ [resp. $m-i-1$] vectores temporales [resp. espaciales] ortogonales a l y linealmente independientes. En consecuencia, $d_M = i \geq 2$ si los r_i 's son temporales, o bien, $d_M = m-i$ cuando son espaciales. Si $\sigma = 0$, entonces $m = 2i$ y $d_M = i$ en cualquier caso.

■

3. EJE DE UN REFERENCIAL SIMETRICO.

a) Suponiéndole a la matriz inversa de g la forma:

$$g^{AB} = (\mu - \nu) \delta^{AB} + \nu 1^A 1^B \quad (IV.9)$$

donde $1^A = \delta^{AB} 1^B$, resulta como únicas condiciones de compatibilidad

$$\mu = D^{-1}[\alpha + (n-1)\beta], \quad \nu = -D^{-1}\beta \quad (IV.10)$$

y por tanto:

PROPOSICION IV.2. *El dual algebraico de un referencial simétrico es un referencial simétrico.*

Sea ξ un vector arbitrario. Se llama *cono métrico de eje* (la dirección definida por) ξ , al lugar geométrico de las direcciones que forman con ξ un ángulo constante. Para cada referencial simétrico $\langle \xi_A \rangle_{A=1}^m$, existe una única dirección que forma un mismo ángulo con todos los vectores del referencial, pues si $\xi \equiv \lambda^R \xi_R$ es tal que $g(\xi, \xi_A) = g(\xi, \xi_B)$ entonces $\lambda^A = \lambda^B$ para cualesquiera A, B. Por tanto, el cono métrico que contiene las direcciones definidas por un referencial simétrico es único, y su eje está dado por $\xi \equiv 1^A \xi_A$; la dirección determinada por ξ se denominará *eje del referencial simétrico* $\langle \xi_A \rangle$.

Sea $\theta \equiv 1_A \theta^A$ el correspondiente eje del referencial dual algebraico $\langle \theta^A \rangle$ de $\langle \xi_A \rangle$. Se tiene entonces:

$$g(\xi) = g_{AB} 1^A \theta^B = (\alpha + n\beta) 1_A \theta^A = (\alpha + n\beta) \theta$$

y en consecuencia,

PROPOSICION IV.3. El eje del dual algebraico de un referencial simétrico es el dual métrico de su eje.

Por otra parte se tiene que

$$g(\xi, \xi) = m g(\xi, \xi_A) = m (\alpha + n\beta) \quad (IV.11)$$

y para $m > 2$, de (IV.7) resulta $\text{sgn}(g(\xi, \xi)) = -\varepsilon_\sigma$, con lo cual

PROPOSICION IV.4. En métrica lorentziana (y dimensión $m > 2$), el eje de un referencial simétrico es temporal.

b) Sea $\langle e_A \rangle_{A=1}^m$ la proyección de un referencial simétrico en el hiperplano ortogonal a su eje:

$$e_A = \xi_A - \frac{g(\xi_A, \xi)}{g(\xi, \xi)} \xi = \xi_A - \frac{1}{m} \xi$$

Si γ es la métrica inducida en dicho hiperplano, por (IV.11)

$$\gamma(e_A, e_B) = g(e_A, e_B) = g_{AB} - \frac{1}{m} (\alpha + n\beta) \quad \forall A, B$$

lo que significa:

LEMA.IV.2. La proyección de un referencial simétrico sobre el hiperplano ortogonal a su eje constituye un sistema de $m=n+1$ vectores métricamente permutables para la métrica elíptica n -dimensional inducida en dicho hiperplano.

El lema IV.2 es útil en la obtención del subgrupo de $GL(m, \mathbb{R})$ constituido por el conjunto de transformaciones entre referenciales simétricos. Como ya hemos indicado, los m vectores $\langle e_A \rangle$ son los radios de un m -edro regular pues verifican (IV.8), que en este caso se escriben:

$$\gamma(e_A, e_A) + n \gamma(e_A, e_B) = 0 \quad (A \neq B), \quad 1^A e_A = 0$$

En consecuencia, las únicas transformaciones en el hiperplano ortogonal a ξ que mantienen el carácter métricamente permutable de los m vectores e_A son las rotaciones y las dilataciones. Estas dilataciones $\bar{e}_A = a e_A$ corresponden, en el espacio total, a transformaciones del tipo $\bar{\xi}_A = a \xi_A + b \xi$, por lo que resulta:

TEOREMA IV.3. *Toda transformación entre referenciales simétricos es la composición de una transformación ortogonal, una dilatación y una transformación del tipo*

$$\bar{\xi}_A = \xi_A + \frac{\lambda-1}{m} 1^R \xi_R, \quad \lambda \neq 0 \quad (IV.12)$$

Una transformación ortogonal cambiará, en general el eje del referencial, pero mantendrá el carácter causal de todos los vectores así como sus productos escalares. En cambio, (IV.12) preserva el eje, pero puede modificar el carácter causal del referencial.

La transformación (IV.12) es regular. Para verlo, nótese que su expresión matricial M_A^B es de la forma (IV.1):

$$M_A^B = \frac{1}{m} [(\lambda+n) \delta_A^B + (\lambda-1) 1_A 1^B] \quad (IV.13)$$

por lo que, de acuerdo con (IV.2), se tiene $\det M_A^B = \lambda$. Las componentes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ de la métrica transformada \bar{g}_{AB} están relacionadas con las α , β de g_{AB} por

$$\bar{\alpha} - \alpha = \bar{\beta} - \beta = \frac{1}{m} (\alpha+n\beta) (\lambda^2-1) \quad (IV.14)$$

c) Es posible asociar a cada referencial simétrico $\langle \xi_A \rangle_{A=1}^m$ un referencial auxiliar ortogonal $\langle x_o, x_a \rangle_{a=1}^n$ constituido por el eje del referencial simétrico y un n-edro del hiperplano ortogonal. Para ello, consideremos la transformación:

$$x_o = m^{-1/2} 1^A \xi_A, \quad x_a = \Lambda_a^A \xi_A \quad (IV.15)$$

De (IV.11) y (IV.1) resulta directamente

$$g(x_o, x_o) = \alpha + n\beta, \quad g(x_o, x_a) = m^{-1/2} (\alpha + n\beta) 1_A \Lambda_a^A$$

$$g(x_a, x_b) = [(\alpha-\beta) \delta_{AB} + \beta 1_A 1_B] \Lambda_a^A \Lambda_b^B$$

Por tanto, $g(x_o, x_a) = 0$ significa que $1_A \Lambda_a^A = 0$ y en consecuencia $\langle x_o, x_a \rangle$ es un referencial ortogonal con

$$g(x_o, x_o) = \alpha + n\beta, \quad g(x_a, x_a) = \alpha - \beta \quad (IV.16)$$

si, y sólo si, se verifican las relaciones

$$1_A \Lambda_a^A = 0, \quad \delta_{AB} \Lambda_a^A \Lambda_b^B = \delta_{ab} \quad (IV.17)$$

Consideremos, en particular, una transformación (IV.15) de la forma:

$$\Lambda_a^{a-r} = 0, \quad \Lambda_a^a = \mu_a \neq 0, \quad \Lambda_a^{a+r} = \nu_a \neq 0 \quad \forall r > 0$$

En tal caso, las relaciones (IV.17) se reducen a $\mu_a + (m-a)\nu_a = 0$ y $\mu_a^2 + (m-a)\nu_a^2 = 1$, con lo cual

$$\mu_a = -\varepsilon_a \sqrt{(m-a)/(m-a+1)}, \quad \nu_a = \varepsilon_a / \sqrt{(m-a)(m-a+1)} \quad (\varepsilon_a = \pm 1)$$

Si se eligen los signos $\varepsilon_a = 1 \quad \forall a$ resulta:

TEOREMA IV.4. Sea $\langle \xi_A \rangle_{A=1}^m$ un referencial simétrico. El referencial $\langle X_o, X_a \rangle_{a=1}^n$ dado por:

$$X_o = \lambda_o 1^A \xi_A \tag{IV.18}$$

$$X_a = \lambda_{a-1} \left[-\lambda_a^{-1} \xi_a + \lambda_a \sum_{r=a}^n \xi_{r+1} \right]$$

con $\lambda_N \equiv (m-N)^{-1/2}$, $m=n+1$, $N=0, \dots, n$, es ortogonal y verifica

$$g(X_o, X_o) = \alpha + n\beta, \quad g(X_a, X_a) = \alpha - \beta \tag{IV.19}$$

siendo $\alpha = g(\xi_A, \xi_A)$ y $\beta = g(\xi_A, \xi_B) \quad \forall A \neq B$.

De (IV.1), todo referencial simétrico es δ -ortonormado: $\delta(\xi_A, \xi_B) = \delta_{AB}$. En consecuencia, las transformaciones (IV.15) que verifican (IV.17) son δ -ortogonales pues

$$\delta(x_0, x_0) = \frac{1}{m} \delta(\xi, \xi) = 1$$

$$\delta(x_0, x_a) = m^{-1/2} \Lambda_a^A \delta(\xi, \xi_A) = m^{-1/2} \Lambda_a^A 1_A = 0$$

$$\delta(x_a, x_b) = \Lambda_a^A \Lambda_b^B \delta(\xi_A, \xi_B) = \delta_{ab}$$

Por tanto, la inversa de (IV.19) es precisamente su transpuesta, con lo cual resulta el siguiente:

COROLARIO. Cada referencial ortogonal $\langle x_A \rangle_{A=0}^n$ que verifique $g(x_a, x_a) = g(x_b, x_b)$ ($a, b=1, \dots, n$), tiene asociado el referencial simétrico:

$$\xi_1 = \lambda_0 x_0 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} x_1$$

$$\xi_s = \lambda_0 x_0 + \sum_{r=1}^s \lambda_{r-1} \lambda_r x_r - \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1}} x_{s+1} \quad (\text{IV.20})$$

$$\xi_m = \lambda_0 x_0 + \sum_{r=1}^n \lambda_{r-1} \lambda_r x_r$$

en donde $\lambda_A \equiv (m-A)^{-1/2}$, $m=n+1$ y $s=2, \dots, n$.

Las relaciones recíprocas de (I.19) proporcionan las componentes α y β de la métrica en el referencial simétrico:

$$g(\xi_A, \xi_A) = \frac{1}{m} [g(x_0, x_0) + n g(x_a, x_a)] \quad (\text{IV.21})$$

$$g(\xi_A, \xi_B) = \frac{1}{m} [g(x_0, x_0) - g(x_a, x_a)] \quad A \neq B$$

4. CLASIFICACION CAUSAL DE LOS REFERENCIALES SIMETRICOS.

a) En métrica lorentziana (y dimensión $m > 2$) el carácter causal del s-plano generado por los vectores $\langle v_1, \dots, v_s \rangle$ está dado por el signo $\langle \epsilon \rangle$ del determinante formado con sus productos escalares mútuos. Un s-plano es espacial o temporal si, y sólo si, $\epsilon = (\epsilon_0)^s$ ó $\epsilon = -(\epsilon_0)^s$ respectivamente, siendo ϵ_0 el signo de la signatura de la métrica. Esto se sigue fácilmente si se tiene en cuenta que ϵ es independiente de la base elegida en el s-plano y que $\text{sgn}(x^2) = \epsilon_0$ ó $\text{sgn}(x^2) = -\epsilon_0$ según que el vector x sea espacial o temporal; basta entonces considerar una base ortonormal del s-plano para demostrar la anterior afirmación. En el caso de un s-plano isótropo, la métrica inducida sobre el mismo es degenerada y por tanto $\epsilon = 0$.

Es obvio que las m direcciones definidas por los vectores de un referencial simétrico lorentziano tienen igual carácter causal, y lo mismo ocurre con los $\binom{m}{s}$ s-planos, $0 < s < m$, engendrados por las combinaciones de s en s de dichos vectores. Por tanto clasificar causalmente los referenciales simétricos se reduce a establecer las diferentes series de signos correspondientes a las orientaciones posibles de los $m-1$ s-planos. Cada una de estas series representa una clase causal de referenciales simétricos.

La clasificación causal de los referenciales simétricos es claramente invariante por conformidad de la métrica. Es conveniente, por ello, elegir un parámetro invariante conforme.

DEFINICION. Llamaremos indicador de una clase causal de referenciales simétricos lorentzianos al parámetro:

$$\kappa \equiv 1 - \frac{\alpha}{\beta} \in (0, m) \quad (\text{IV.22})$$

Nótese que $0 < \kappa < m$ es equivalente a $(\alpha - \beta)(\alpha + m\beta) < 0$ y por tanto significa que la métrica es lorentziana.

A partir de (IV.2) se tiene

$$\kappa - s = - \frac{1}{\beta} [\alpha + (s-1)\beta] = - \frac{1}{\beta} (\alpha - \beta)^{1-s} \Delta_s$$

de donde, en virtud de (IV.7), resulta

LEMA IV.3. En el caso lorentziano, el signo de los menores principales Δ_s ($0 < s < m$) de la matriz g_{AB} está dado por:

$$\text{sgn}(\Delta_s) = (\epsilon_0)^s \text{sgn}(\kappa - s) \quad (\text{IV.23})$$

del cual se infiere que el carácter causal de los s -planos del referencial está directamente relacionado con el indicador κ :

COROLARIO Los s -planos de un referencial simétrico son espaciales, isotropos o temporales si, y sólo si, $\kappa > s$, $\kappa = s$ ó $\kappa < s$ respectivamente.

Los resultados anteriores permiten clasificar causalmente los referenciales simétricos de acuerdo con el siguiente:

TEOREMA IV.5. En dimensión m , existen $2m-1$ clases causales de referenciales simétricos lorentzianos:

- i) A cada intervalo de valores $(p, p+1)$ del indicador κ ($p=0, 1, \dots, m-1$) corresponde una clase causal cuyos s -planos son, respectivamente, espaciales o temporales según que $s \leq p$ ó $s \geq p+1$.
- ii) A cada valor entero $\kappa=p$ ($p=1, \dots, m-1$), corresponde una clase causal con los p -planos isótropos y cuyos s -planos, $s \neq p$, son respectivamente espaciales o temporales según que $s < p$ ó $s > p$.

Las clases $\kappa \in (p, p+1)$ corresponden a las m secuencias de signatura de la métrica (IV.1) que no contienen ceros. En éstas puede darse sólo una permanencia o sólo una variación de signo si la signatura es $1-n$ ó $n-1$ respectivamente. Las clases $\kappa=p=1, \dots, n$, están asociadas a las secuencias de signatura que presentan un único cero. Que no son posibles secuencias que contengan más de un cero significa que no existen referenciales simétricos con dos o más subespacios isótropos de diferente dimensión.

Puede resultar conveniente utilizar como indicador causal el parámetro positivo:

$$\bar{\kappa} \equiv \frac{\alpha+n\beta}{\beta-\alpha} \quad (\text{IV.24})$$

($1+\bar{\kappa} = m \kappa^{-1}$) pues en términos del mismo se sigue de (IV.9-10) que

El indicador del dual algebraico de un referencial de indicador $\bar{\kappa}$ es $(\bar{\kappa})^{-1}$.

b) Las consideraciones precedentes conducen a que en el espacio-tiempo, y dependiendo del valor del indicador κ , existan siete clases causales de referenciales simétricos, según se indican en el diagrama siguiente.

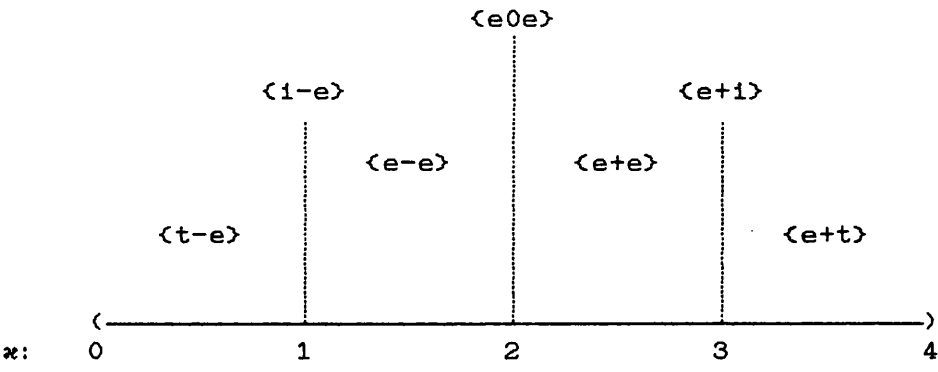


DIAGRAMA: e, i, t designan respectivamente el carácter espacial, isótropo, temporal de las direcciones de un referencial r y de su dual r^* . El carácter causal de los 2-planos se indica por $\pi = +, 0, -$ en los casos espacial, isótropo, temporal respectivamente. Cada clase causal se denota por $\langle r \pi r^* \rangle$, y su emplazamiento en el diagrama corresponde al valor o intervalo de valores de κ indicados en abscisas. Las clases situadas en la misma línea horizontal son duales. La clase $\langle e0e \rangle$ es autodual en el sentido causal.

CAPITULO V

REFERENCIALES SIMETRICOS NATURALES Y DE ORDEN SUPERIOR

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS.

Después del estudio algebraico de los referenciales simétricos que hemos realizado en el capítulo anterior, cabe preguntarse cómo incorporar estas nociones a la estructura diferenciable de una variedad. En este capítulo presentamos dos maneras totalmente diferentes de responder a esta cuestión. La primera supone que los referenciales simétricos son naturales, mientras que en la segunda se exige que los vectores del referencial sean indiscernibles no sólo para la métrica sino también para sus concomitantes diferenciales.

A partir del corolario del Teorema IV.1., en cada punto de una variedad riemanniana o lorentziana pueden siempre construirse referenciales simétricos, pero los campos de referenciales a que dan lugar en un abierto serán, en general, no holónomos. Nuestro primer objetivo es caracterizar aquellas estructuras métricas excepcionales que admiten referenciales simétricos naturales (holónomos) es decir, asociados a sistemas de coordenadas locales.

En la sección 2 estudiamos las propiedades del eje de un referencial simétrico natural, que define una dirección integrable y sin distorsión. En el caso de un espacio-tiempo, resulta que el tensor de Weyl es de tipo eléctrico con respecto a dicho eje. En la misma sección obtenemos la expresión general de la curvatura y del tensor de Weyl para una métrica lorentziana que admita un tal referencial. En la sección 3 damos la caracterización geométrica de las estructuras métricas en las que existen referenciales simétricos naturales: son las que admiten (localmente) una *sincronización umbilical conformemente plana*. Los espacio-tiempos correspondientes contienen a los esféricamente simétricos, y éstos gozan además de una importante peculiaridad: los potenciales gravitatorios (en estos referenciales) dependen únicamente de las dos primeras funciones simétricas elementales de las coordenadas.

En la sección 4 comenzamos suponiendo que existe un referencial simétrico (no holónimo) para la métrica y para su tensor de Riemann. Entonces probamos que los espacio-tiempos que admiten tetradas de este tipo son los fluidos perfectos conformemente planos. Finalmente, consideramos aquellos referenciales cuyos vectores son indiscernibles para la métrica, el tensor de Ricci y sus derivadas covariantes; además del caso obvio de un espacio de Einstein, veremos que los universos de Friedmann-Robertson-Walker son los únicos espacio-tiempos que los admiten.

2. REFERENCIALES SIMÉTRICOS NATURALES. PROPIEDADES DEL EJE. CURVATURA Y TENSOR DE WEYL.

a) Sea $\langle dy^\mu \rangle_{\mu=0}^n$ un co-referencial simétrico natural:

$$g = [(\alpha - \beta)\delta_{\mu\nu} + \beta 1_\mu 1_\nu] dy^\mu \otimes dy^\nu \quad (V.1)$$

en donde α y β son funciones de las coordenadas $\langle y^\mu \rangle$. Mediante $1_\mu \equiv 1^\mu$ denotamos la m -upla de 1's, de modo que

$$1_\mu 1^\mu = m \equiv n+1, \quad g_{\mu\nu} 1^\nu = (\alpha + n\beta) 1_\mu \quad (V.2)$$

La 1-forma asociada por la métrica al eje del referencial $\xi \equiv 1^\mu \partial_\mu$ ($\partial_\mu \equiv \partial/\partial y^\mu$) está dada por

$$g(\xi) = (\alpha + n\beta) d\Sigma \quad \text{con} \quad \Sigma \equiv 1_\mu y^\mu \quad (V.3)$$

y por tanto, ξ define una dirección integrable.

De (IV.11), el campo unitario en la dirección del eje es

$$u = \left[m |\alpha + n\beta| \right]^{-1/2} \xi \quad (V.4)$$

Puesto que $\xi^\mu = 1^\mu$, las componentes covariantes de u son

$$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu = \epsilon \left[\frac{1}{m} |\alpha + n\beta| \right]^{1/2} 1_\mu \quad (V.5)$$

siendo $\varepsilon = g(u, u) = \text{sgn}(\alpha + n\beta)$. Entonces, la métrica inducida sobre la familia de hipersuperficies ortogonales a ξ , $\gamma = g - \varepsilon u \otimes u$, se expresa

$$\gamma = (\alpha - \beta) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{m} l_{\mu} l_{\nu} \right) dy^{\mu} \otimes dy^{\nu} \quad (V.6)$$

Teniendo en cuenta que $l^{\mu} \gamma_{\mu\nu} = 0$, es inmediato calcular la derivada de Lie de γ a lo largo de u ,

$$[\mathcal{L}(u)\gamma]_{\mu\nu} = (\alpha - \beta)^{-1} u^{\rho} \partial_{\rho} (\alpha - \beta) \gamma_{\mu\nu}$$

Por tanto $\mathcal{L}(u)\gamma$ es proporcional a γ

$$\mathcal{L}(u)\gamma = i(u) \text{dln} |\alpha - \beta| \gamma \quad (V.7)$$

Con esto queda probada la siguiente proposición:

PROPOSICION V.1. *El eje de un referencial simétrico natural es una dirección integrable y de distorsión nula.*

Es conocido /M. Trümper (1965)/ que si un espacio-tiempo admite una dirección temporal integrable y sin distorsión entonces, relativamente a dicha dirección, el tensor de Weyl es de tipo eléctrico. Así, podemos enunciar como consecuencia inmediata de las proposiciones IV.4 y V.1 :

PROPOSICION V.2 *En los espacio-tiempos que admiten referenciales simétricos naturales, el tensor de Weyl relativamente al eje del referencial es puramente eléctrico, y por lo tanto el tipo de Petrov-Bel del espacio-tiempo es I, D ó 0 .*

El resultado anterior es consecuencia únicamente de la cinemática de u y es independiente de las ecuaciones de campo. Nótese también que la anulación de la rotación y/o la distorsión de una congruencia es una propiedad invariante por conformidades de la métrica, y por tanto las proposiciones precedentes constituyen una característica de las clases de conformidad de métricas que admiten referenciales simétricos naturales.

b) Veamos la forma explícita del tensor de curvatura para una métrica que admite un referencial simétrico natural. A partir de ahora consideraremos métricas lorentzianas de signatura $\sigma=2-m$. Los resultados así obtenidos pueden extenderse inmediatamente a métricas elípticas. Denotando

$$e^{2\Phi} \equiv \beta - \alpha, \quad e^{2\Psi} \equiv \frac{\alpha + n\beta}{\beta - \alpha}$$

la expresión (V.1) se escribe:

$$g = e^{2\Phi} \bar{g}, \quad \bar{g} \equiv (-\delta_{\mu\nu} + Y 1_{\mu} 1_{\nu}) dy^{\mu} \otimes dy^{\nu} \quad (V.8)$$

con

$$Y \equiv m^{-1}(1 + e^{2\Psi}) = \alpha^{-1}$$

Sean \mathcal{R} y $\bar{\mathcal{R}}$ las doble 2-formas de curvatura de g y \bar{g} , entre las cuales existe la conocida relación

$$\mathcal{R} = e^{2\Phi} \bar{\mathcal{R}} + B \wedge g$$

con

$$B = -e^{-\Phi} \nabla d e^{\Phi} + \frac{1}{2} g(d\Phi, d\Phi) g \quad (V.9)$$

y en donde ∇ es la conexión métrica de g , y \wedge denota el producto exterior de doble 1-formas definido en (II.16).

Los símbolos de Christoffel de la conexión $\bar{\nabla}$ de \bar{g} se escriben

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu, \lambda} = \frac{1}{2} (Y_{\mu}^1 Y_{\nu}^1 Y_{\lambda}^1 + Y_{\nu}^1 Y_{\lambda}^1 Y_{\mu}^1 + Y_{\lambda}^1 Y_{\mu}^1 Y_{\nu}^1), \quad Y_{\mu} \equiv \partial_{\mu} Y$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu\lambda\rho} &\equiv \partial_{\lambda} \bar{\Gamma}_{\nu\rho, \mu} - \partial_{\rho} \bar{\Gamma}_{\nu\lambda, \mu} + \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\sigma} \bar{\Gamma}_{\mu\rho, \sigma} - \bar{\Gamma}_{\nu\rho}^{\sigma} \bar{\Gamma}_{\mu\lambda, \sigma} = \\ &= \frac{1}{2} (Y_{\nu\lambda}^1 Y_{\rho\mu}^1 - Y_{\mu\lambda}^1 Y_{\nu\rho}^1 - Y_{\nu\rho}^1 Y_{\lambda\mu}^1 + Y_{\mu\rho}^1 Y_{\nu\lambda}^1) + \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\sigma} \bar{\Gamma}_{\mu\rho, \sigma} - \bar{\Gamma}_{\nu\rho}^{\sigma} \bar{\Gamma}_{\mu\lambda, \sigma} \end{aligned}$$

Introduciendo el hesiano de Y respecto de \bar{g} , $(\bar{\nabla}dY)_{\mu\nu} = Y_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} Y_{\sigma}$, se tiene:

$$\begin{aligned} 2 \bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu\lambda\rho} &= -(\bar{\nabla}dY \wedge 1\otimes 1)_{\mu\nu\lambda\rho} + (\bar{\Gamma}_{\mu\rho}^{\sigma} Y_{\nu\lambda}^1 - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\sigma} Y_{\nu\rho}^1) Y_{\sigma} + \\ &+ \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\sigma} (Y_{\mu\rho}^1 + Y_{\rho\mu}^1) - \bar{\Gamma}_{\nu\rho}^{\sigma} (Y_{\mu\lambda}^1 + Y_{\lambda\mu}^1) = \\ &= \left[\left[-\bar{\nabla}dY + \frac{m}{2} (mY-1)^{-1} dY \otimes dY \right] \wedge 1\otimes 1 \right]_{\mu\nu\lambda\rho} \end{aligned}$$

en donde la última igualdad se sigue al simplificar la expresión que resulta de sustituir

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} \equiv \bar{g}^{-\sigma\lambda} \bar{\Gamma}_{\mu\nu, \lambda} = \frac{1}{2} (Y_{\mu}^1 Y_{\nu}^1 \bar{I}^{\sigma} + Y_{\nu}^1 \bar{I}^{\sigma} Y_{\mu}^1 - \bar{Y}^{\sigma} Y_{\mu}^1 Y_{\nu}^1)$$

siendo

$$\bar{g}^{\mu\nu} = -\delta^{\mu\nu} + (m^{-2})^{-1} Y_{\mu}^1 Y_{\nu}^1, \quad \bar{I}^{\mu} \equiv \bar{g}^{\mu\nu} Y_{\nu}^1, \quad \bar{Y}^{\mu} \equiv \bar{g}^{\mu\nu} Y_{\nu}^1$$

Las 1-formas u y \bar{u} según el eje, y unitarias respecto de g y \bar{g} respectivamente, están dadas por

$$u = m^{-1/2} e^{\Phi+\Psi} d\Sigma, \quad \bar{u} = m^{-1/2} e^{\Psi} d\Sigma \quad (d\Sigma = 1_{\mu} dy^{\mu})$$

y teniendo presente que $dY = \frac{2}{m} e^{2\Psi} d\Psi$ resulta:

$$\mathcal{R} = - e^{-\Psi} \bar{\nabla} e^{\Psi} \wedge \bar{u} \otimes \bar{u} \quad (V.10)$$

En virtud de (V.9) y la relación $\bar{\nabla}v = \nabla v + v \tilde{\otimes} d\Phi - g(v, d\Phi)g$, válida para toda 1-forma v ($\tilde{\otimes}$ denota el producto tensorial simetrizado: $x \tilde{\otimes} y = x \otimes y + y \otimes x$), podemos enunciar:

PROPOSICION V.3. *La doble 2-forma de curvatura \mathcal{R} de una métrica lorentziana g que admite un referencial simétrico natural $\langle dy^{\mu} \rangle_{\mu=0}^n$,*

$$g = \alpha d\Sigma \otimes d\Sigma + (\beta - \alpha) \sum_{\mu \neq \nu} dy^{\mu} \otimes dy^{\nu} \quad (V.11)$$

($d\Sigma \equiv 1_{\mu} dy^{\mu}$), está dada por:

$$\mathcal{R} = A \wedge u \otimes u + B \wedge g \quad (V.12)$$

con

$$A \equiv - \left[e^{-\Psi} \nabla d e^{\Psi} + d\Psi \tilde{\otimes} d\Phi - g(d\Psi, d\Phi) g \right]$$

$$B \equiv - e^{-\Phi} \nabla d e^{\Phi} + \frac{1}{2} g(d\Phi, d\Phi) g$$

siendo $u = m^{-1/2} e^{\Phi+\Psi} d\Sigma$ la 1-forma temporal unitaria según el eje del referencial y

$$e^{2\Phi} \equiv \beta - \alpha, \quad e^{2\Psi} \equiv \frac{\alpha + n\beta}{\beta - \alpha}$$

Tomando trazas respecto de g en (V.12), es inmediato calcular el tensor de Ricci, Ric , y la curvatura escalar R de g , sin más que tener en cuenta

$$\text{tr}(P \wedge Q) = \text{tr}P Q + \text{tr}Q P - P \times Q - Q \times P$$

que se sigue directamente de (II.6). Así, como $u^2=1$, resulta:

$$Ric \equiv \text{tr}\mathcal{R} = \text{tr}A u \otimes u + A - i(u)A \tilde{\otimes} u + \text{tr}B g + (m-2)B$$

$$R \equiv \text{tr}Ric \equiv \text{tr}^2\mathcal{R} \equiv 2[\text{tr}A - i^2(u)A] + 2(m-1)\text{tr}B$$

c) A partir de (V.12) podemos obtener la expresión del tensor de Weyl de una clase de conformidad de métricas que admiten referenciales simétricos naturales. En dimensión $m \geq 2$, se define la doble 2-forma weyliana asociada a una doble 2-forma simétrica \mathcal{R} cualquiera mediante:

$$W(\mathcal{R}) = \mathcal{R} - \frac{1}{m-2} \text{tr}\mathcal{R} \wedge g + \frac{\text{tr}^2\mathcal{R}}{2(m-1)(m-2)} g \wedge g \quad (V.13)$$

En particular, $W(B \wedge g) = 0 \quad \forall B$, y en nuestro caso

$$W(\mathcal{R}) = W(A \wedge u \otimes u) = W(A_{\perp} \wedge u \otimes u)$$

en donde se ha aplicado que $x \tilde{\otimes} u \wedge u \otimes u = 0 \quad \forall x$, luego de escribir la descomposición irreducible de A relativa a u :

$$A = i^2(u)A u \otimes u + \perp(u) i(u)A \tilde{\otimes} u + A_{\perp}$$

siendo $\perp(u) \equiv g - u \otimes u$, y $A_{\perp} \equiv \perp(u) \times A \times \perp(u)$.

Así pues

$$\begin{aligned} W(\mathcal{R}) &= A_{\perp} \wedge u \otimes u - \frac{1}{m-2} [A_{\perp} + \text{tr} A_{\perp} u \otimes u - (m-1)^{-1} \text{tr} A_{\perp} g] \wedge g = \\ &= \frac{1}{m-2} [A_{\perp} \wedge g_u - (m-1)^{-1} \text{tr} A_{\perp} (g_u + u \otimes u) \wedge g] \end{aligned}$$

con $g_u \equiv (m-2)u \otimes u - g$. Además se verifica:

$$(g_u + u \otimes u) \wedge g = g_u \wedge \perp(u) + g_u \wedge u \otimes u + u \otimes u \wedge g = g_u \wedge \perp(u) = \perp(u) \wedge g_u$$

y en consecuencia,

$$W(\mathcal{R}) = \frac{1}{m-2} [A_{\perp} - (m-1)^{-1} \text{tr} A_{\perp} \perp(u)] \wedge g_u$$

Como $\text{tr} A_{\perp} = \text{tr}_{\perp}(A_{\perp})$, con $\text{tr}_{\perp}(\cdot)$ la traza relativa a $\perp(u)$, queda probada la siguiente:

PROPOSICION V.4. *El tensor de Weyl de una métrica que admite un referencial simétrico natural está dado por:*

$$W = E \wedge g_u \tag{V.14}$$

con

$$E = \frac{1}{m-2} \mathbb{Q}_{\perp} A_{\perp}, \quad g_u = (m-2)u \otimes u - g$$

siendo \mathbb{Q}_{\perp} el operador quita-traza relativo a $\perp(u) = g - u \otimes u$, y $A_{\perp} = \perp(u) \times A \times \perp(u)$, con g, u, A dados como en la proposición V.3.

En dimensión $m=3$, $g_u = -\perp(u)$ y W es una doble 2-forma simétrica en el 2-plano ortogonal a u , y siendo $\text{tr} W = 0$, se tiene $W=0$ como ya sabíamos.

Relativamente a un observador u , el tensor de Weyl de un espacio-tiempo cualquiera se expresa:

$$W = E \wedge g_u + *(H \wedge g_u) \quad (V.15)$$

donde $E \equiv i(u)i'(u)W$ y $H \equiv -i(u)i'(u)*W$ son respectivamente la parte eléctrica y magnética de W relativas a u ; $i(\cdot)$ [resp. $i'(\cdot)$] denota el producto interior a izquierda [resp. a derecha], $*$ el operador de dualidad, y ahora es $g_u = 2u \otimes u - g$. Por tanto, si un espacio admite un referencial simétrico natural, respecto de su eje es $H=0$, de acuerdo con la proposición V.2.

3. ESPACIO-TIEMPOS QUE ADMITEN REFERENCIALES SIMÉTRICOS NATURALES.

a) El lenguaje cinemático de la proposición V.1. sobre el eje de un referencial simétrico natural admite una transcripción equivalente en términos de la foliación por las hipersuperficies espaciales (sincronización) ortogonales al eje. Dado que la segunda forma fundamental (o curvatura extrínseca, K) de una hipersuperficie de normal unitaria u y métrica inducida γ está dada por $K = \frac{1}{2}\mathcal{L}(u)\gamma$, resulta:

PROPOSICION V.5. *Una condición necesaria para que una métrica lorentziana admita referenciales simétricos naturales es que exista (localmente) una sincronización umbilical.*

Sea S una hipersuperficie espacial en (V_{n+1}, g) y sean γ y K su primera y segunda formas fundamentales respectivamente. Si v es un vector unitario de $T_p S$ entonces $K(v, v)$ mide la separación entre la geodésica de la variedad y la geodésica de S tangentes a v en $p \in S$. El punto p se dice que es *umbilical* si dicha separación es independiente de la dirección $\langle v \rangle$, y S se denomina umbilical si todos sus puntos son umbilicales.

De acuerdo con el comentario anterior, un punto $p \in S$ es umbilical si, y sólo si, cualquier $x \in T_p S$ es un vector principal de K , es decir si $K \propto \gamma$ en p . Así, una caracterización del carácter umbilical de una hipersuperficie está dada por la proporcionalidad entre su primera y segunda formas fundamentales $K = \frac{\text{tr}K}{n} \gamma$, con $\text{tr}K \equiv \gamma^{ij} K_{ij}$ función del punto considerado de S .

Con objeto de hallar una forma canónica para la métrica g de un variedad V_{n+1} que admita una sincronización umbilical consideremos un sistema $\langle x^\mu \rangle_{\mu=0}^n$ de coordenadas normales adaptadas a la sincronización:

$$g = g_{00} dx^0 \otimes dx^0 + g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad i, j = 1, \dots, n.$$

En estas coordenadas, la curvatura extrínseca de los instantes (hojas) de la sincronización se expresa por:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} |g_{00}|^{-1/2} \partial_0 g_{ij} \quad (\text{V.16})$$

y, en particular, si éstos son umbilicales se verifica:

$$\partial_0 g_{ij} = \frac{2}{n} |g_{00}|^{1/2} \text{tr}K g_{ij} \quad (\text{V.17})$$

de modo que la razón entre dos funciones cualesquiera g_{ij} es independiente de x^0 . Por tanto la dependencia en x^0 de las componentes de la métrica es a través de una función común de las coordenadas, es decir

$$g_{ij}(x^0, x^k) = -b^2(x^0, x^k) b_{ij}(x^k) \quad (\text{V.18})$$

con b_{ij} definida positiva. Así pues /L.P. Eisenhart (1926), p.182/

LEMA IV.1. *Una condición necesaria y suficiente para que una variedad lorentziana (V_{n+1}, g) admita una sincronización umbilical es que exista una carta $\langle x^0, x^1 \rangle$ en la cual*

$$g = a^2 dx^0 \otimes dx^0 - b^2 b_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (i, j=1, \dots, n)$$

donde las a y b son funciones arbitrarias de las coordenadas y las b_{ij} no dependen de x^0 .

En el caso especial de una sincronización umbilical conformemente plana existe un cambio de coordenadas adaptadas, $\bar{x}^0 = \bar{x}^0(x^0)$, $\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1)$, que permite escribir la métrica de cada instante $x^0 = c = \text{cte}$ en la forma:

$$\bar{g}_{ij}(c, \bar{x}^k) = -b^2(c, \bar{x}^k) \bar{b}_{ij}(\bar{x}^k) = -f^2(\bar{x}^k) \delta_{ij}$$

Luego $\bar{b}_{ij}(\bar{x}^k) = F^2(\bar{x}^k) \delta_{ij}$, y como bajo tal transformación es $\bar{g}_{01} = 0$, resulta:

LEMA IV.2. Una variedad lorentziana (V_{n+1}, g) admite una sincronización umbilical conformemente plana si, y sólo si, g puede escribirse localmente en la forma:

$$g = a^2 dx^0 \otimes dx^0 - b^2 \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (i, j=1, \dots, n)$$

con a y b funciones cualesquiera de las coordenadas $\langle x^0, x^1 \rangle$.

b) En vistas a "cerrar" el resultado de la proposición V.5 con una condición suficiente conviene tener presente el teorema IV.4 que asocia a un referencial simétrico $\langle \xi_A \rangle_{A=1}^m$ un referencial auxiliar ortogonal $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha=1}^n$. Como la transformación (IV.18) está determinada por los coeficientes numéricos $\lambda_N \equiv (m-N)^{-1/2}$, es claro que un referencial simétrico es natural si, y sólo si, lo es su referencial ortogonal asociado. Por tanto, si una variedad admite referenciales simétricos coordenados, existe una carta $\langle x_\mu \rangle$ en la cual $x_\mu \equiv \partial_\mu$, $\mu=0, 1, \dots, n$, y tal que la métrica se expresa:

$$g = g(x_0, x_0) dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n g(x_i, x_i) dx^i \otimes dx^i \quad (V.19)$$

y, en virtud del lema V.2, la variedad admite (localmente) una sincronización umbilical conformemente plana.

Recíprocamente, partiendo de una sincronización umbilical y conformemente plana, el lema V.2 asegura la existencia de coordenadas $\langle x^\mu \rangle$ en las que g se escribe en la forma (IV.19). Aplicando a la correspondiente base coordenada la transformación (IV.20) se obtiene un referencial simétrico natural con α y β dados por (IV.21). Así pues, la existencia de referenciales simétricos coordenados queda caracterizada geoméricamente por el siguiente:

TEOREMA V.1. *Una condición necesaria y suficiente para que una variedad lorentziana admita un referencial simétrico natural es que exista localmente una sincronización umbilical conformemente plana.*

c) Ahora vamos a considerar el caso de espacio-tiempos con simetría esférica, con objeto de estudiar en ellos la existencia de referenciales simétricos naturales. Partimos de la siguiente expresión general para la métrica:

$$g = M^2 d\mu \odot d\mu - N^2 d\nu \odot d\nu - F^2(d\theta \odot d\theta + \text{sen}^2\theta d\phi \odot d\phi)$$

en donde M , N y F dependen sólo de las coordenadas μ y ν .

Sea $f(\mu, \nu)$ tal que $g(df, df) = -F^{-2}$, es decir una solución de

$$N^{-2}f_{\nu}^2 - M^{-2}f_{\mu}^2 = F^{-2}$$

con la notación usual $f_{\mu} \equiv \partial_{\mu} f$, $f_{\nu} \equiv \partial_{\nu} f$; y consideremos una función $\Gamma(\mu, \nu)$ cuyo gradiente sea ortogonal a df , $g(d\Gamma, df) = 0$. Dada una f , Γ es una solución de la ecuación de primer orden en derivadas parciales:

$$N^2\Gamma_{\mu}f_{\mu} = M^2\Gamma_{\nu}f_{\nu}$$

Es claro que Γ y f son funcionalmente independientes ya que si fuese $\Gamma = \Gamma(f)$ entonces la 1-forma df sería isotrópica. Esto demuestra la existencia de coordenadas $\Gamma = \Gamma(\mu, \nu)$, $X = X(\mu, \nu)$, ($X \equiv e^f$) en las cuales se tiene:

$$g^{XX} \equiv g(dX, dX) = -(X/F)^2, \quad g^{\Gamma X} \equiv g(d\Gamma, dX) = 0$$

$$g^{\Gamma\Gamma} \equiv g(d\Gamma, d\Gamma) = \left(\frac{X N \Gamma_{\mu}}{F M X_{\nu}} \right)^2$$

En consecuencia, la métrica de un espacio-tiempo con simetría esférica puede escribirse en la forma:

$$g = a^2 d\Gamma \odot d\Gamma - b^2 [dX \odot dX + X^2 (d\theta \odot d\theta + \text{sen}^2 \theta d\phi \odot d\phi)]$$

con

$$a \equiv \frac{M X_{\nu}}{N \Gamma_{\mu}} b, \quad y \quad b \equiv \frac{F}{X}$$

A partir de la transformación inversa $\mu=\mu(\Gamma, X)$, $\nu=\nu(\Gamma, X)$, se sigue que a y b son funciones únicamente de Γ y X , con lo cual resulta /J.L. Synge (1966) p.269/:

LEMA V.3. En todo espacio-tiempo con simetría esférica existen coordenadas $\langle x^0, x^i \rangle$ -llamadas isotrópicas- en las cuales la métrica se expresa:

$$g = a^2(x^0, \rho) dx^0 \otimes dx^0 - b^2(x^0, \rho) \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

con $\rho \equiv \delta_{ij} x^i x^j$, $i, j=1, 2, 3$.

De los lemas V.2 y V.3 se sigue directamente:

COROLARIO. Todo espacio-tiempo con simetría esférica admite una sincronización umbilical conformemente plana.

Por otra parte, en un espacio-tiempo que admita un referencial simétrico natural $\langle \xi_\mu \rangle$ $\mu=1, \dots, 4$, podemos considerar la base coordenada auxiliar dada por (IV.18):

$$x_0 = \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4), \quad x_1 = \frac{1}{2} \sqrt{3} [-\xi_1 + \frac{1}{3}(\xi_2 + \xi_3 + \xi_4)]$$

$$x_2 = \sqrt{2/3} [-\xi_2 + \frac{1}{2} (\xi_3 + \xi_4)], \quad x_3 = (-\xi_3 + \xi_4) / \sqrt{2}$$

Denotemos por $\langle y^\mu \rangle$ y $\langle x^0, x^1 \rangle$ las coordenadas asociadas a $\langle \xi_\mu \rangle$ y $\langle x_0, x_1 \rangle$ respectivamente. Entre las mismas existe la siguiente relación lineal:

$$x^0 = \frac{1}{2} (y^1 + y^2 + y^3 + y^4), \quad x^1 = \frac{1}{2} (-3y^1 + y^2 + y^3 + y^4) / \sqrt{3}$$

$$x^2 = (-2y^2 + y^3 + y^4) / \sqrt{6}, \quad x^3 = (-y^3 + y^4) / \sqrt{2}$$

de donde se obtiene que

$$\delta_{1j} x^1 x^j = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = \frac{3}{4} (\Sigma_1)^2 - \Sigma_2$$

siendo Σ_1 y Σ_2 dos de las funciones simétricas elementales de las coordenadas $\langle y^\mu \rangle$, concretamente

$$\Sigma_1 \equiv \sum_i y^i, \quad \Sigma_2 \equiv \sum_{1 < j} y^i y^j \quad (V.20)$$

Por tanto, $\delta_{1j} x^1 x^j$ es una función simétrica de las coordenadas y^μ .

En el caso de simetría esférica, a partir de las coordenadas isotrópicas $\langle x^0, x^1 \rangle$ podemos definir las coordenadas:

$$y^1 = \frac{1}{2} (x^0 - \sqrt{3} x^1)$$

$$y^2 = \frac{1}{2} (x^0 + x^1 / \sqrt{3}) - \sqrt{2/3} x^2$$

$$y^3 = \frac{1}{2} (x^0 + x^1 / \sqrt{3}) + x^2 / \sqrt{6} - x^3 / \sqrt{2}$$

$$y^4 = \frac{1}{2} (x^0 + x^1 / \sqrt{3}) + x^2 / \sqrt{6} + x^3 / \sqrt{2}$$

en las cuales la métrica se expresa en la forma (V.1)

$$g = [(\alpha - \beta)\delta_{\mu\nu} + \beta 1_{\mu}^1 1_{\mu}^1] dy^{\mu} \odot dy^{\nu}$$

con α y β dados, según (IV.21), por

$$\alpha = \frac{1}{4} (a^2 - 3b^2) , \quad \beta = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)$$

siendo $a^2(x^0, \rho)$ y $b^2(x^0, \rho)$ las componentes esenciales de la métrica en coordenadas isotrópicas. En consecuencia, las componentes α y β de la métrica en el referencial simétrico natural $\langle \partial/\partial y^{\mu} \rangle$ son funciones simétricas de las coordenadas $\langle y^{\mu} \rangle$ pues dependen únicamente de Σ_1 y Σ_2 . Hemos así probado:

TEOREMA V.2. *Todo espacio-tiempo con simetría esférica admite un referencial simétrico natural en el cual las componentes de la métrica dependen únicamente de las dos primeras funciones simétricas elementales de las coordenadas.*

4. REFERENCIALES SIMÉTRICOS DE SEGUNDO Y TERCER ORDEN.

a) Los vectores de un referencial simétrico son indiscernibles para la métrica pero no lo son necesariamente para sus concomitantes diferenciales. Cuando dichos vectores sean indiscernibles para el tensor de Riemann entonces diremos que constituyen un referencial simétrico de segundo orden. Veamos cómo expresar esta noción de un modo más preciso.

Sea Π_{AB} el 2-plano orientado generado por ξ_A y ξ_B , es decir $\Pi_{AB} = \xi_A \wedge \xi_B$, y consideremos el tensor de curvatura como una forma bilineal simétrica sobre los Π 's. Denotemos $\mathcal{R}_{ABCD} \equiv \text{Riem}(\Pi_{AB}, \Pi_{CD})$; una pareja de Π 's puede tener 0, 1 ó 2 índices comunes, lo que conduce a considerar los tres tipos de escalares:

$$r_{PQ} \equiv \mathcal{R}_{PQPQ}, \quad r_{PQR} \equiv \mathcal{R}_{PQPR}, \quad r_{PQRS} \equiv \mathcal{R}_{PQRS}$$

donde P, Q, R, S son todos diferentes.

DEFINICION. Diremos que un referencial simétrico es de segundo orden si se verifica:

$$r_{PQ} = A, \quad r_{PQR} = B, \quad r_{PQRS} = C$$

cualesquiera que sean los valores (diferentes) de P, Q, R, S.

Entonces, las identidades algebraicas del tensor de curvatura implican $C=0$. A partir de las relaciones (en dimensión $m=n+1$):

$$\delta^{AB} \mathcal{R}_{APBP} = n A, \quad 1^A 1^B \mathcal{R}_{APBP} = n [A + (n-1)B]$$

$$\delta^{AB} \mathcal{R}_{APBQ} = (n-1) B, \quad 1^A 1^B \mathcal{R}_{APBQ} = - [A + (n-1)B]$$

es inmediato calcular las componentes $R_{AB} \equiv g^{CD} \mathcal{R}_{CADB}$ del tensor de Ricci en un referencial simétrico de segundo orden:

$$a \equiv R_{PP} = n [\mu A + (n-1)\nu B] \quad (V.21)$$

$$b \equiv R_{PQ} = -\nu A + (n-1)(\mu-2\nu)B \quad (P \neq Q)$$

donde $\mu = g^{AA}$, $\nu = g^{AB}$ ($A \neq B$) están dados por (IV.10).

Para $n > 1$, el sistema lineal (V.21) en A y B tiene rango igual a dos; cuando $a = b = 0$ su única solución es $A = B = 0$ lo que significa que la curvatura es una función homogénea del tensor de Ricci:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{n-2} \left[\text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)} g \right] \wedge g \quad (V.22)$$

y por (V.13), si una métrica admite un referencial simétrico de segundo orden su tensor de Weyl es idénticamente nulo.

Es más, los vectores del referencial son indiscernibles para Ric pues

$$R_{AB} = (a - b) \delta_{AB} + b 1_A 1_B \quad (V.23)$$

y aplicando (IV.2) a $R_{AB} - \lambda g_{AB}$ resulta:

$$\det(R_{AB} - \lambda g_{AB}) = [a + nb - \lambda(\alpha + n\beta)] [a - b - \lambda(\alpha - \beta)]^n$$

Luego Ric posee dos autovalores diferentes como máximo,

$$\lambda_1 = (a + nb)(\mu + n\nu), \quad \lambda_2 = (a - b)(\mu - \nu) \quad (V.24)$$

donde se ha tenido en cuenta (IV.10) y (IV.3). λ_1 y λ_2 son respectivamente los autovalores del eje del referencial y de su hiperplano ortogonal. En efecto,

$$R^A_B 1^B = g^{AC} R_{CB} 1^B = (a+nb) g^{AC} 1_C = \lambda_1 1^A$$

y $\forall v$ tal que $1_A v^A = 0$ se verifica:

$$R^A_B v^B = g^{AC} R_{CB} v^B = (a-b) g^{AC} \delta_{CB} v^B = \lambda_2 v^A$$

Así pues, el tensor de Ricci es espacialmente isótropo con respecto al eje de un referencial de segundo orden, y por tanto

$$\text{Ric} = r g + s u \otimes u \quad (\text{V.25})$$

con $r \equiv \lambda_2$, $s \equiv \lambda_1 - \lambda_2$, y u el vector temporal unitario según el eje ($u^2=1$). Recíprocamente, si Ric es de la forma (V.25) entonces todo referencial simétrico de eje u es también simétrico para Ric. Si además el tensor de Weyl es cero, de (V.22) resulta que dicho referencial es de segundo orden. Por tanto, hemos probado:

TEOREMA V.3. *Los espacio-tiempos que admiten referenciales simétricos de segundo orden son los fluidos perfectos conformemente planos. El eje del referencial es colineal con la cuadrivelocidad del fluido.*

Es bien conocido /H. Stephani, 1967/ que estos fluidos perfectos pertenecen a la clase de interiores de Schwarzschild generalizados o a la clase de los universos de Stephani (espacio-tiempos que admiten una sincronización iso-invariante homogénea e isótropa /C. Bona y B. Coll, 1985(a)(b), 1988/).

b) La existencia de un referencial simétrico $\langle \xi_A \rangle_{A=1}^m$ para una métrica y para su tensor de Ricci implica que éste es necesariamente de la forma $\text{Ric} = rg + su\otimes u$ con $\langle u \rangle$ el eje del referencial. Por tanto, los espacio-tiempos de fluido perfecto son los que admiten un referencial simétrico para g y para $\text{Ric}(g)$. Cuando además los vectores de dicho referencial sean indiscernibles para ∇Ric diremos que forman un referencial simétrico de tercer orden. A partir de (V.25) resulta:

$$\nabla_A^R BC = r_A \delta_{BC} + s_A u^B u^C + s(\nabla_A u^B u^C + u_B \nabla^A u^C) \quad (\text{V.26})$$

con $r_A \equiv \xi_A(r)$ y $s_A \equiv \xi_A(s)$. Contrayendo con u ,

$$s \nabla_A u^B = u^C \nabla_A^R BC - u^C u^D \nabla_A^R CD u_B \quad (\text{V.27})$$

$$r_A + s_A = u^B u^C \nabla_A^R BC \quad (\text{V.28})$$

de modo que la existencia de un referencial simétrico de tercer orden impondrá condiciones sobre la cinemática de u y sobre los autovalores de Ric .

DEFINICION. Diremos que un referencial $\langle \xi_A \rangle_{A=1}^m$ es simétrico para un 3-cotensor K si se verifica:

$$K(\xi_P, \xi_P, \xi_P) = k_1, \quad K(\xi_Q, \xi_P, \xi_P) = k_2, \quad K(\xi_P, \xi_Q, \xi_P) = k_3,$$

$$K(\xi_P, \xi_P, \xi_Q) = k_4 \quad \text{y} \quad K(\xi_P, \xi_Q, \xi_R) = k_5.$$

para valores cualesquiera (diferentes) de los índices P, Q, R .

Denotando $\delta_{ABC} \equiv \delta_{AB}\delta_{AC}\delta_{BC}$, en tales referenciales K se expresa:

$$K_{ABC} = \kappa_1 \delta_{ABC} + \kappa_2 1_A \delta_{BC} + \kappa_3 1_B \delta_{CA} + \kappa_4 1_C \delta_{AB} + \kappa_5 1_A 1_B 1_C$$

con $\kappa_1 = k_1 - (k_2 + k_3 + k_4) + 2k_5$, $\kappa_i = k_i - k_5$ ($i=2,3,4$), y $\kappa_5 = k_5$.

Consideremos un referencial simétrico para ∇Ric . Entonces

$$\nabla^R_{BC} = r_1 \delta_{ABC} + r_2 1_A \delta_{BC} + r_3 (1_B \delta_{CA} + 1_C \delta_{AB}) + r_4 1_A 1_B 1_C \quad (\text{V.29})$$

de donde se obtiene (por ser $1^A \delta_{ABC} = \delta_{BC}$):

$$1^C \nabla^R_{A BC} = \bar{r}_1 \delta_{AB} + \bar{r}_2 1_A 1_B, \quad 1^B 1^C \nabla^R_{A BC} = (\bar{r}_1 + m\bar{r}_2) 1_A \quad (\text{V.30-31})$$

con $\bar{r}_1 \equiv r_1 + m r_3$ y $\bar{r}_2 \equiv r_2 + r_3 + m r_4$. Sustituidas estas relaciones en (V.27) conducen a:

$$s \nabla^R_{A B} u_B = \lambda \bar{r}_1 (\delta_{AB} - \frac{1}{m} 1_A 1_B) = \lambda \bar{r}_1 (\mu - \nu) \gamma_{AB}$$

donde se ha tenido presente la expresión (V.6) de $\gamma = g + u \otimes u$ y que $u^A = \lambda 1^A$, $u_A = (m\lambda)^{-1} 1_A$ con $\lambda \equiv m^{-1/2} (\mu + \nu)^{1/2}$.

Cuando $s \neq 0$, es decir si el espacio no es de Einstein entonces

$$\nabla u = \frac{\theta}{s} \gamma, \quad \theta \equiv \frac{n}{s} \lambda (\mu - \nu) \bar{r}_1 \quad (\text{V.32})$$

y por ser $i(u)\nabla u = 0$, de (V.26,29) resulta:

$$s^{AB} \nabla^R_{A BC} = r_C + (s + s\theta) u_C = [\mu r_1 + (\mu + \nu) r_2] 1_C$$

con $\dot{s} \equiv i(u)ds$. Así $dr \propto u$, que junto con (V.28,31) implica $ds \propto u$. En consecuencia, podemos enunciar:

LEMA V.4. *En los espacios que no son de Einstein y admiten un referencial simétrico de tercer orden, el eje $\langle u \rangle$ de dicho referencial es integrable, geodésico y sin distorsión, y los autovalores de Ric dependen sólo del potencial de u .*

Las identidades de Ricci, $\nabla_A \nabla_B u_C - \nabla_B \nabla_A u_C = u^D \mathcal{R}_{DCBA}$, aplicadas a (V.32) conducen a:

$$n i(u) i'(u) \mathcal{R} = - \left[\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{n} \right] \gamma \quad (V.33)$$

con $\dot{\theta} \equiv i(u)d\theta$; la parte sin traza de esta ecuación es

$$i(u) i'(u) W = 0 \quad (V.34)$$

El lema V.4 aplicado al caso de un espacio-tiempo implica que éste es necesariamente de fluido perfecto barótopo [$\rho = \rho(p)$] de cuadrivelocidad u , y que la parte magnética del tensor de Weyl, relativa a u , es nula. Y, en virtud de (V.15,34) dicho espacio-tiempo es conformemente plano. Las ecuaciones de campo, $\text{Ric} = T - \frac{1}{2} \text{tr}T = \frac{1}{2}(\rho - p)g + (\rho + p)u\otimes u$, sustituidas en (V.22) dan para la curvatura:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \left[(\rho + p)u\otimes u - \frac{\rho}{3} g \right] \wedge g$$

siendo ρ y p la densidad de energía y la presión respectivamente.

La traza de (V.33) da entonces la ecuación de propagación de la expansión:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2} (\rho + 3p)$$

Puesto que $\theta = -\dot{\rho}/(\rho+p)$, cuando $\theta=0$ entonces $\rho=-3p=\text{cte.}$ y el espacio-tiempo es el universo estático de Einstein /D.Kramer, 1980 p.p. 122, 362/. (Un término en constante cosmológica se incluye en la expresión de T con la consiguiente redefinición de ρ y p). En cambio, cuando $\theta \neq 0$ se trata de un universo de Stephani barótopo, y entonces el estudio de su grupo de isometría /A.Barnes, 1973; C.Bona y B.Coll, 1985(a), 1988/ conduce a que necesariamente es un espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker. Con ello queda probado el siguiente:

TEOREMA V.5. *Los espacio-tiempos que admiten referenciales simétricos de tercer orden son los espacios de Einstein y los universos de Friedmann-Robertson-Walker.*

REFERENCIAS

- Abramowitz M., Stegun I.A. (1970) Handbook of mathematical functions, Dover Pub.
- Barnes A. (1973) G.R.G., 4, 105-129.
- Barnes A. (1974) G.R.G., 5, 147-162.
- Bona C., Coll B. (1985a) C.R. Acad. Sci. Paris, 301, Sér.I, 613-6.
- Bona C., Coll B. (1985b) J.Math. Phys. 26, 1583-91.
- Bona C., Coll B. (1988) G.R.G. 20, 293-303.
- Bona C., Coll B., Morales J.A. (1986) Caracterización algebraica de un 2-tensor simétrico. Actas de los E.R.E.-86, València.
- Churchill R.V. (1932) Trans. Am. Math. Soc. 34, 784-94.
- Coll B., Ferrando J.J. (1988) G.R.G. 20, 51-64.
- Coll B., Morales J.A. (1987) Permutaciones de un referencial lorentziano. Actas de los E.R.E.-87. Publicaciones del I.A.C. Ser.C, n°6 (1988), 69-78.
- Coll B., Morales J.A. (1988a) C.R. Acad. Sci. Paris, 306, Sér.I, 791-4.
- Coll B., Morales J.A. (1988b) Repères symétriques lorentziens. Journées Relativistes 1988, Ginebra.
- Coll B., Morales J.A. (1988c) Las 199 clases causales de referenciales de espacio-tiempo. Actas de los E.R.E.-88 (Salamanca).

- Collinson C.D., Shaw R. (1972) *Int. J.Theor. Phys.* 6, 347-57.
- Cormaack W.J., Hall G.S. (1979a) *J.Phys.A: Math.Gen.* 12, 55-62.
- Cormaack W.J., Hall G.S. (1979b) *Int. J.Theor.Phys.* 18, 279-89.
- Cormaack W.J., Hall G.S. (1981) *Int. J.Theor.Phys.* 20, 105-19.
- Crade R.F., Hall G.S. (1979) *Phys. Lett. A* 73 , 17-9.
- Crade R.F., Hall G.S. (1981) *Phys. Lett. A* 85 , 313-5.
- Crade R.F., Hall G.S. (1982) *Acta Phys. Pol. B* 13, 405-19.
- d'Inverno R.A., Russell-Clarck R.A. (1971) *J.Math.Phys.* 12, 1258.
- Dozmorov I.M. (1973) *Sov. Phys. J.* 16, 1708-14.
- Eisenhart L.P. (1949) *Riemannian Geometry*, Princeton Univ. Press.
- Ferrando J.J. (1987) *Fluids perfectes i camps electomagnètics en Relativitat. Tesi Doctoral, Universitat de València.*
- Frobenius G. (1879) *Crelles Journal* 86, 44-71.
- Gantmacher F.R. (1966) *Théorie des matrices. Vol.1.* Dunod. Paris.
- Goener H., Stachel J. (1970) *J.Math. Phys.* 11, 3358-70.
- Hall G.S. (1976a) *J.Phys.A: Math.Gen.* 9, 541-5.
- Hall G.S. (1976b) *Phys. Lett. A* 56, 17-8.
- Hall G.S. (1982) *G.R.G.* 14, 1035-41.
- Kramer D., Stephani H., M_CCallum M, Herlt E. (1980) *Exact Solutions of Einstein Field Equations*, VEB, Berlin.

- Letniowski F.W., M_C Lenaghan R.G. (1988) G.R.G. 20, 463-83.
- Linet B. (1971) C.R. Acad. Sci. 272, Sér.A, 1142-4.
- Ludwig G., Scanlan G. (1971) Commun. Math. Phys. 20, 291-300.
- M_C Intosh C.B.G., Foyster J.M., Lun A.W.-C. (1981) J.Math. Phys. 22, 2620-23.
- Petrov A.Z. (1966), en "Perspectives in Geometry and Relativity", Indiana Univ. Press., pág. 278.
- Plebański J. (1964) Acta Phys. Polon. 26, 963-1020.
- Plebański J., Stachel J. (1968) J.Math. Phys. 9, 269-83.
- Schwerdtfeger H. (1938) "Les Fonctions de Matrices I. Les fonctions univalentes". Actualités scientifiques et industrielles 649. Hermann ed., Paris.
- Sobczyk G. (1980) Acta Phys. Polon. B 11, 579-602.
- Stephani H. (1967) Comm. Math. Phys. 4, 137-142.
- Synge J.L. (1966) Relativity: The General Theory. Nort-Holland Pub. Comp., Amsterdam.
- Taub H.A. (1967) Relativistic Hydrodynamics, en Lectures in App. Math., 8, A.M.S.
- Trümper M. (1965) J.Math. Phys. 6, 584-9.
- Wellstein J. (1903) Archiv. f. Math. u. Phys. 3, t.5, 229-41.