





UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA CIÈNCIES
Nº Registre <i>17821</i>
DATA <i>25.11.05</i>
SIGNATURA <i>TD 136</i>
Nº LIBIS:

*b16883901*

*i 19192101*

UN ANALISIS DE LA APLICACION DE LAS TECNICAS  
DE INTERFEROMETRIA CON LUZ LASER AL  
ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES EN ORTODONCIA



**OBRA DE CONSULTA**  
EXCLOSA DE PRÉSTEC  
NO SE PRESTA

Memoria presentada por  
M<sup>a</sup> del Rosario Salvador Palmer  
para optar al Grado de  
Doctor en Ciencias Físicas

BIBLIOTECA  
FACULTAD DE C. FISICAS  
VALENCIA

UMI Number: U607736

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607736

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.  
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against  
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC  
789 East Eisenhower Parkway  
P.O. Box 1346  
Ann Arbor, MI 48106-1346

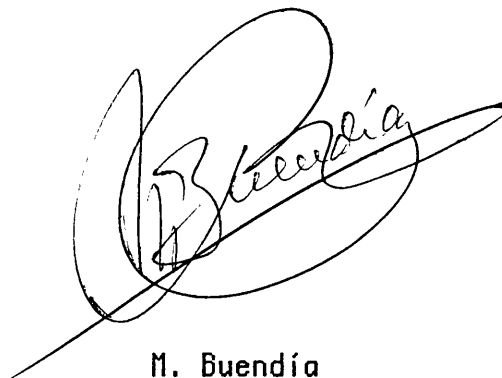
FRANCISCO DALMASES MONCAYO, Catedrático de Física Médica de la Facultad de Medicina, Departamento de Fisiología, de la Universitat de València y MATEO BUENDIA GOMEZ, Profesor Titular de Fisiología del mismo Departamento y Universidad,

CERTIFICAN: que la presente Memoria, «Un análisis de la aplicación de las técnicas de Interferometría con luz láser al estudio de las deformaciones en Ortodoncia», corresponde al trabajo que ha sido realizado bajo nuestra dirección por D<sup>o</sup> M<sup>o</sup> del Rosario Salvador Palmer y constituye su Tesis Doctoral para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos el presente certificado en Valencia, a cinco de junio de mil novecientos ochenta y siete.



F. Dalmases



M. Buendía

*A mis padres, tía y hermanos*

Al concluir la presente Memoria, desarrollada en la Cátedra de Física Médica de la Facultad de Medicina (Departamento de Fisiología) de la Universitat de València, quiero expresar mi sincera gratitud a todas las personas que con su ayuda han colaborado a su realización.

En primer lugar al Prof.D. Francisco Dalmases Moncayo, de quien he adquirido gran parte de mi formación científica, y cuya dedicación y apoyo en la dirección de esta Tesis, así como su amistad, han sido de gran ayuda en todo momento.

Es también un gran placer expresar mi agradecimiento al Prof.D. Mateo Buendía Gómez, tanto por su enorme ayuda y continuo consejo, como por su amistad, demostrada a lo largo del desarrollo de toda esta investigación.

Al Prof.D. José Antonio Canut Brusola, Catedrático de Profilaxis, Estomatología Infantil y Ortodoncia, y Director de la Escuela de Estomatología de la Facultad de Medicina de Valencia, por su disponibilidad ante este trabajo.

Quiero agradecer al Prof.D. Fernando Senent Pérez, Catedrático de Física Atómica y Nuclear, y profesor durante mi carrera, la cortesía y atención con que ha seguido el estudio realizado. Así como al Prof.D. Mariano Aguilar Rico, Catedrático de Optica y fundador del grupo de Valencia, por todo su interés hacia esta investigación.

A los Profs. D. Luc Dermaut y D. Pierre Boone, que junto con su equipo me atendieron y asesoraron durante mi estancia en la Cátedra de Ortodoncia y en el Laboratorio de Resistencia de Materiales de la Universidad de Gent, Bélgica.

De un modo especial, a José Luis Gandía, experto ortodoncista, porque creo que ni buscando con linterna hubiese encontrado un compañero de trabajo mejor.

Mi afectuoso agradecimiento a mis compañeros de la Cátedra, Carmina, Rosa y Clodo, que han sabido ayudarme siempre que los he necesitado.

Finalmente y con mucho cariño, agradezco a mi familia, padres, tía y hermanos, cuyas preguntas y aliento han dado al esfuerzo un sentido especial. Es a ellos a quienes dedico esta Memoria.



## **INDICE**

<b>INTRODUCCION</b> .....	1
<b>I. LAS INTERFEROMETRIAS HOLOGRAFICA Y DE MOTEADO (SPECKLE) EN LA MEDIDA DE DESPLAZAMIENTOS</b> .....	10
<b>I.1.-ASPECTOS ESENCIALES DE LA INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA</b> .....	12
<b>I.1.1.- FUNDAMENTO DE LA HOLOGRAFIA</b> .....	12
<b>I.1.2.- DIFERENCIA DE FASE DEBIDA AL DESPLAZAMIENTO DEL OBJETO</b> .....	17
<b>I.1.2.1.- Distribución de intensidad del frente de ondas reconstruido en función de la diferencia de fase</b> .....	17
<b>I.1.2.2.- Expresión general de la diferencia de fase</b> .....	20
<b>I.1.3.- CUANTIFICACION DEL DESPLAZAMIENTO</b> .....	23
<b>I.1.3.1.- Desplazamiento para una rotación alrededor de un eje contenido en la superficie del objeto</b> .....	23
<b>I.1.3.2.- Cuantificación tridimensional del desplazamiento</b> .....	26
<b>I.1.3.3.- Mejora del método por sobredeterminación del conjunto de datos</b> .....	29
<b>I.1.3.4.- Componentes de traslación y rotación en el movimiento</b> .....	32
<b>I.2.-ASPECTOS ESENCIALES DE LA INTERFEROMETRIA DE MOTEADO</b> .....	37
<b>I.2.1.- CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DEL MOTEADO LASER</b> .....	37
<b>I.2.2.- INTERFEROMETRIA DE MOTEADO DE HAZ UNICO</b> .....	38
<b>II. MATERIAL Y METODO</b> .....	44
<b>II.1.- SISTEMA DE PRODUCCION DE DEFORMACIONES ORTODONCICAS</b> .....	46
<b>II.1.1.- SELECCION DEL CRANEO</b> .....	46
<b>II.1.2.- SOPORTE DEL CRANEO</b> .....	47
<b>II.1.3.- COMPROBACION DE LA EFECTIVIDAD DEL SOPORTE</b> .....	50

II.1.4.- APARATOLOGIA ORTODONCICA .....	51
II.1.5.- SISTEMA DE TRACCION. PROTOCOLO DE APLICACION DE LAS FUERZAS .....	53
II.2.- PROTOCOLO EXPERIMENTAL EN LA TECNICA DE INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA .....	55
II.2.1.- REGISTRO DE LOS INTERFEROGRAMAS DE DOBLE EXPOSICION .....	55
II.2.2.- ANALISIS DE LOS INTERFEROGRAMAS DE DOBLE EXPOSICION PARA EL CALCULO DE LAS COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTO ABSOLUTO .....	59
II.2.2.1.- Selección de los puntos de interés del objeto .....	59
II.2.2.2.- Obtención de los vectores unitarios en las direcciones de observación .....	61
II.2.2.3.- Medida de los corrimientos de franjas .....	63
II.2.2.4.- Obtención de las componentes de traslación y rotación estructurales, así como del eje de giro .....	66
II.3.- PROTOCOLO EXPERIMENTAL EN LA TECNICA DE INTERFEROMETRIA DE MOTEADO .....	68
II.3.1.- REGISTRO DE LOS INTERFEROGRAMAS DE MOTEADO .....	68
II.3.2.- OBTENCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS ABSOLUTOS EN EL PLANO DEL OBJETO .....	70
III. PUESTA A PUNTO DE DISPOSITIVOS ORIGINALES Y CALIBRADO DE LOS METODOS UTILIZADOS .....	73
III.1.- IMPLEMENTACION DEL SISTEMA ANTI-VIBRATORIO .....	74
III.2.- MEDIDA TRIDIMENSIONAL DEL DESPLAZAMIENTO .....	83
III.2.1.- CALIBRADO DEL PROCESO DE MEDIDA .....	83
III.2.2.- ESTIMACION DE LOS ERRORES DEL METODO .....	91
III.2.2.1.- Sensibilidad al error en el recuento de franjas .....	91
III.2.2.2.- Sensibilidad al error en las medidas geométricas .....	99
III.3.- MEDIDA DE DESPLAZAMIENTOS POR INTERFEROMETRIA DE MOTEADO ..	101

<b>IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES</b> .....	107
IV.1.- DESPLAZAMIENTOS ABSOLUTOS EN LOS PUNTOS DE INTERES .....	108
IV.1.1.- OBTENCION DE LOS RECuentOS DE FRANJAS .....	108
IV.1.2.- DETERMINACION DE LAS DIRECCIONES OPTIMAS DE MEDIDA .....	116
IV.1.3.- CALCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS .....	137
IV.2.- EJES DE GIRO MAXILARES .....	154
IV.3.- DESPLAZAMIENTOS EN EL PLANO MEDIANTE INTERFEROMETRIA DE MOTEADO .....	159
<b>V. ANALISIS DE LOS RESULTADOS</b> .....	162
V.1.- INTERES DEL ANALISIS CUALITATIVO .....	163
V.2.- SENSIBILIDAD DEL PROCESO DE MEDIDA PARA LAS EXPERIENCIAS DE INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA .....	170
V.3.- VALORACION CUANTITATIVA DE LAS EXPERIENCIAS .....	187
V.4.- ANALISIS DE LA EXPERIENCIA DE INTERFEROMETRIA DE MOTEADO .....	194
<b>CONCLUSIONES</b> .....	198
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	204

# INTRODUCCION

---

## **INTRODUCCION**

Desde sus inicios, la interferometría holográfica ha manifestado una especial aplicabilidad en todas aquellas materias biomédicas basadas en el estudio de deformaciones de cuerpos, tanto en intensidad como en dirección. Concretamente, las posibilidades ofrecidas por su aplicación al estudio de los efectos producidos por las distintas técnicas ortodóncicas planteables, movió a nuestro equipo a iniciar una línea de investigación en tal sentido, encuadrada dentro del campo de la Física Médica, y sobre la que han podido llegar a concretarse unos primeros resultados<sup>46,47</sup>.

Con la experiencia de estas aportaciones iniciales y debido, sobre todo, al interés de las aplicaciones previsibles, fue desarrollado el presente trabajo, centrado así principalmente en el análisis y modo de empleo de la técnica interferométrica del «recuento de franjas», dentro del estudio de los efectos producidos sobre cráneo humano macerado por una tracción anterior del maxilar superior (TAMS), cuyo método terapéutico es habitual

utilizar en el tratamiento de las maloclusiones Clase III.

Tales maloclusiones, también llamadas progenies o prognatismos mandibulares, se encuentran entre los distintos tipos de alteraciones del alineamiento dentario, cuyas características resultan bien conocidas en ortodoncia<sup>4,7,80</sup>. Su incidencia es del 5% en la población mundial, pasa en el caso concreto de la población española al 10.2% y, más específicamente, alcanza el 17% en el País Vasco y en nuestra Comunidad Valenciana, de acuerdo con los datos más recientes<sup>13</sup>. Ello realza el interés que, en nuestro caso, presenta la aplicabilidad de la técnica holográfica en el análisis de la corrección de tales maloclusiones.

Con respecto al tratamiento ortopédico de las Clases III, la aparición de la máscara facial de Delaire<sup>31,32</sup> supuso una importante aportación inicial relativa al tema, si bien con algunas contraindicaciones específicas. Sin embargo, y alternativamente, la tracción anterior del maxilar superior<sup>26,80,82</sup> se ha revelado más tarde como un tipo de aparatología perfectamente indicada para la corrección de la mayoría de situaciones inherentes a la maloclusión comentada.

Por todo ello se ha decidido el tomar la TAMS como ejemplo para el desarrollo de este trabajo, dentro del panorama general de lo que puede constituir el empleo de las técnicas interferométricas en el análisis de los efectos ortodóncicos. También se ha tenido en cuenta para tal elección el hecho de que,

por su empleo sistemático relativamente reciente, los efectos de la TAMS no son tan íntimamente conocidos como sería de desear.

Junto al análisis de la técnica holográfica en cuanto a condiciones de aplicabilidad y sensibilidad, se ha juzgado conveniente incluir también en el trabajo el estudio de la interferometría de moteado, como técnica complementaria para la medida, también sobre cráneo humano macerado, de los desplazamientos de magnitud más elevada producidos en el plano de interés.

Con respecto a la aplicación de la holografía a la interferometría, fue sugerida inicialmente en 1965 por Horman<sup>60</sup>, quien describió la inclusión de un holograma en un interferómetro de Mach-Zehnder. La interferometría holográfica de objetos difusores opacos fue introducida en el mismo año por Powell y Stetson<sup>64</sup>. Su desarrollo inicial se produjo independientemente en distintos laboratorios e incluye los trabajos de Burch<sup>19</sup>, Collier, Doherty y Pennington<sup>24</sup>, Stetson y Powell<sup>108,109</sup> y Haines e Hildebrand<sup>53</sup>, que estudiaron los desplazamientos de objetos difusores, y los trabajos de Heflinger y Wuerker y Brooks<sup>14,57</sup>, que utilizaron el método para medidas aerodinámicas.

La medida de desplazamientos a partir de la información derivable de las franjas observadas en la reconstrucción de un interferograma holográfico, se ha resuelto de distintos modos. Las técnicas se pueden clasificar en función del

fenómeno óptico o de la aproximación matemática utilizada en su desarrollo. Así, una de tales clasificaciones puede realizarse según la franja de orden cero se encuentre en la superficie del objeto, o dicha franja no sea identificable en la reconstrucción del interferograma.

Respecto a la primera posibilidad, Ennos propuso un método<sup>40</sup>, que posteriormente fue complementado por otros autores para tratar el problema de la localización de la franja de orden cero<sup>1,78</sup>, y para atacar el problema de la complejidad de resolución matemática y obtención del desplazamiento<sup>10,56,63,102</sup>, aunque a expensas de cierta pérdida de generalidad. De todos modos, dadas las grandes dificultades de localización de la franja de orden cero, no utilizaremos dicha técnica en este trabajo, aunque no pueda desecharse la posibilidad de hacerlo en un futuro próximo.

En la segunda clasificación referida se encuentra el método de localización de las franjas, que históricamente fue la primera técnica elaborada para la interpretación de interferogramas holográficos, siendo desarrollada en los primeros trabajos de Haines e Hildebrand<sup>53</sup> y complementada por Froehly y cols.<sup>45</sup>, Boone y Verbiest<sup>11</sup>, Stetson y col.<sup>79,110</sup>, y Welford<sup>123</sup>. Sin embargo, nuevamente choca con la complejidad de las ecuaciones implicadas, así como la dificultad de localización del plano de las franjas.

Dentro de esta segunda clasificación se encuentra



también la técnica del «recuento de franjas», propuesta en primer lugar por Aleksandrov y Bonch-Bruevich<sup>3</sup>, y utilizada por Gates<sup>18</sup>, Sollid<sup>105</sup>, Landry y Wise<sup>74</sup>, Kohler<sup>66</sup>, King<sup>64</sup>, y Bellani y Sona<sup>8</sup>. Este método hace uso asimismo del hecho de que las franjas están localizadas, en general, a cierta distancia de la superficie de la imagen reconstruida, utilizando el paralaje entre las franjas y la imagen, más que la localización real del plano de las franjas. Sobre esta base, propone las observaciones múltiples del punto objeto investigado, desde distintas direcciones a través de un único interferograma, para, a partir de los corrimientos de franjas obtenidos, calcular las componentes de su desplazamiento.

En principio, es suficiente determinar dichos corrimientos de franjas entre tres pares de observaciones, para construir un sistema de ecuaciones del que obtener el desplazamiento. Sin embargo, el valor del determinante de estas ecuaciones es muy pequeño, resultado del limitado tamaño de la placa holográfica, lo que conlleva errores relativos sustanciales en los resultados. De este modo, Dhir y Sikora<sup>36</sup> y Sciamarella y Gilbert<sup>99</sup>, mejoraron el método en base a la utilización de un conjunto sobredeterminado de ecuaciones lineales simultáneas, relacionando los corrimientos de franjas con las tres componentes del desplazamiento, y obteniendo el resultado por métodos de regresión. Por ello, éste ha sido el método empleado, a la vez que analizado en sus condiciones de aplicabilidad y sensibilidad, en las experiencias realizadas en el presente trabajo.

Por otro lado, y con relación a la aplicación de la interferometría holográfica en ortodoncia, deben mencionarse como más relevantes los trabajos de Pryputniewicz, Burstone y cols.<sup>21-23,86-90</sup>, estudiando los cambios dentales producidos ante la aplicación de una fuerza ortodóncica. Por otro lado, los trabajos de Duterloo, Kragt y cols.<sup>39,67-72</sup>, centran sus experiencias en el empleo de la interferometría holográfica para el estudio de los efectos producidos por tracción extraoral posterior del maxilar; Dermaut, Boone y cols.<sup>12,33-35</sup>, realizan estudios interferométricos sobre fuerzas correctoras de malformaciones de Clase II; Hewitt y Young<sup>58,59,125</sup> trabajan en la medida de desplazamientos dentales producidos por fuerzas ligeras, y Wedendal y Bjelkhagen<sup>119-122</sup> en la deformación de materiales dentales.

En lo que respecta a la técnica complementaria de la interferometría de moteado, para el cálculo de los desplazamientos de magnitud más elevada, su fundamentación general se inició con el trabajo de Leendertz<sup>76</sup>, sobre la medida de desplazamientos a partir de la iluminación del objeto desde dos direcciones y la superposición de las imágenes de moteado asociadas a las dos posiciones del objeto, antes y después del movimiento. De forma inmediata, Archbold y cols.<sup>5,6</sup>, introdujeron la medida de desplazamientos superficiales mediante el registro de una fotografía de doble exposición del objeto iluminado con luz láser, completado con el procesado óptico de las imágenes de moteado registradas. Ello hace posible la obtención de las dos componentes del desplazamiento en el plano del objeto paralelo al de la placa.

La aplicación de la interferometría de moteado al campo de la ortodoncia es mucho más reciente, estando principalmente constituida por los trabajos de Dermaut y cols.<sup>65</sup>. Tales autores utilizan la técnica en la medida de desplazamientos dentales relativos a la aplicación de una tracción extraoral posterior, así como a la obtención de centros de resistencia dentales, mediante la aplicación de las fuerzas a distintos niveles. En este sentido, también hemos contribuido con alguna publicación al respecto<sup>96</sup>, si bien centrados ya en el estudio de la tracción anterior del maxilar superior.

Respecto al esquema de presentación de esta Memoria, el primer capítulo se centra en los aspectos teóricos esenciales de la interferometría holográfica aplicada a la medida de desplazamientos, con la justificación matemática de la técnica del «recuento de franjas» y la fundamentación teórica de la interferometría de moteado para la medida de desplazamientos de magnitudes más elevadas. De este modo y en base a estos aspectos tratados, el capítulo II recoge el protocolo experimental de desarrollo de ambas técnicas, con la descripción de las distintas modificaciones y adaptaciones que, de las mismas, se han realizado en este trabajo.

En el capítulo III, tras un análisis de las condiciones de estabilidad del sistema antivibratorio utilizado para la realización de las experiencias, se trata el calibrado de los dos procesos de medida implicados, exponiendo el método utilizado para

la estimación de la sensibilidad de las técnicas. Dicho método, en el caso de la técnica de recuentos de franjas, constituye lo que creemos una importante aportación original dentro del trabajo desarrollado en el conjunto de la Memoria.

El capítulo IV se dedica a la presentación de los resultados pertinentes en la medida de los desplazamientos en interferometría holográfica, realizando un estudio, también original, de las direcciones de observación óptimas para la realización de los recuentos de franjas.

Finalmente, el capítulo V recoge los aspectos relativos al análisis cualitativo de los interferogramas realizados a tal fin, discutiéndose el cálculo de errores para las experiencias realizadas sobre cráneo y analizando la posterior valoración cuantitativa de los resultados.

## **CAPITULO I**

---

### **LAS INTERFEROMETRIAS HOLOGRAFICA Y DE MOTEADO (SPECKLE) EN LA MEDIDA DE DESPLAZAMIENTOS**

#### **I. 1. - ASPECTOS ESENCIALES DE LA INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA**

##### **I. 1. 1.- FUNDAMENTO DE LA HOLOGRAFIA**

##### **I. 1. 2.- DIFERENCIA DE FASE DEBIDA AL DESPLAZAMIENTO DEL OBJETO**

##### **I. 1. 2. 1.- DISTRIBUCION DE INTENSIDAD DEL FRENTE DE ONDAS RECONSTRUIDO EN FUNCION DE LA DIFERENCIA DE FASE**

##### **I. 1. 2. 2.- EXPRESION GENERAL DE LA DIFERENCIA DE FASE**

##### **I. 1. 3.- CUANTIFICACION DEL DESPLAZAMIENTO**

##### **I. 1. 3. 1.- DESPLAZAMIENTO PARA UNA ROTACION ALREDEDOR DE UN EJE CONTENIDO EN LA SUPERFICIE DEL OBJETO**

##### **I. 1. 3. 2.- CUANTIFICACION TRIDIMENSIONAL DEL DESPLAZAMIENTO**

I.1.3.3.- MEJORA DEL METODO POR SOBREDETERMINACION DEL CONJUNTO DE DATOS

I.1.3.4.- COMPONENTES DE TRASLACION Y ROTACION EN EL MOVIMIENTO

I.2.- ASPECTOS ESENCIALES DE LA INTERFEROMETRIA DE MOTEADO

I.2.1.- CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DEL MOTEADO LASER

I.2.2.- INTERFEROMETRIA DE MOTEADO DE HAZ UNICO

## I.1.- ASPECTOS ESENCIALES DE LA INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA

### I.1.1.- FUNDAMENTO DE LA HOLOGRAFIA

Iniciaremos esta breve introducción teórica con una somera interpretación del proceso de formación de franjas de isodesplazamiento, en la técnica de interferometría holográfica. Para ello es indispensable una referencia a la formación de la imagen holográfica, puesto que la holografía es la base sobre la que se asientan todos los procedimientos de interferometría holográfica.

Como es conocido, para que se forme un holograma sobre una película sensible, es necesario que ésta sea impresionada por la luz difundida por un objeto y un fondo coherente suministrado por un haz de referencia. Con vistas a su interpretación, se puede suponer<sup>43,49,112,117</sup> que cada punto del objeto difracta la radiación incidente para generar, en el plano de la emulsión o plano XY, un campo de módulo  $A(x,y)$ , fase  $\varphi(x,y)$  y amplitud compleja  $A(x,y) = A(x,y) \cdot \exp[-i\varphi(x,y)]$ . Paralelamente, la onda de referencia, en el

caso general de onda plana, contribuye con un campo de módulo constante,  $A_0$ , variación de fase lineal,  $\alpha x$ , y amplitud  $A_R(x,y)=A_0 \cdot \exp(i\alpha x)$ , siendo  $\alpha$  una constante relacionada con el ángulo de incidencia,  $\theta$ , y la longitud de onda,  $\lambda$ , según la expresión  $\alpha\lambda=2\pi \cdot \text{sen}\theta$ .

Consecuentemente, la intensidad,  $I(x,y)$ , en el plano XY de la placa es, con (\*) complejo conjugado:

$$I(x,y) = |A(x,y) + A_R(x,y)|^2 = A_0^2 + A(x,y)^2 + A_0 A(x,y) \cdot \exp(-i\alpha x) + A_0 A^*(x,y) \cdot \exp(i\alpha x) \quad (I.1)$$

Aunque esta expresión presenta la intensidad en una forma conveniente para el desarrollo posterior, es ilustrativo sustituir en ella  $A(x,y)$  en su forma módulo-argumental y combinar los términos exponenciales para obtener:

$$I(x,y) = A_0^2 + A(x,y)^2 + 2 A_0 A(x,y) \cdot \cos [\alpha x + \varphi(x,y)] \quad (I.2)$$

donde se aprecia que los dos primeros términos dependen únicamente de las intensidades de las dos ondas, mientras que el tercero depende de sus fases relativas. Se tiene así registrada la información tanto de la amplitud como de la fase de la onda difractada, lo que no ocurriría en el cálculo de la intensidad si el haz de referencia no estuviese presente.



Retomando el desarrollo anterior, si  $t$  es el tiempo de exposición, la energía recibida por la emulsión por unidad de superficie, es:

$$W(x,y) = t \cdot I(x,y) = t A_0^2 + t A(x,y)^2 + t A_0 A(x,y) \cdot \exp(-i\alpha x) + t A_0 A^*(x,y) \cdot \exp(i\alpha x) \quad (I.3)$$

Ahora bien, una vez procesada la placa y dado que el negativo presenta una respuesta de transmisión en amplitud  $T(x,y)$ , función de la energía recibida por unidad de superficie del tipo de la representada en la figura I.1, dicha transmisión sólo será proporcional a  $W$  en la zona de respuesta lineal. Para ella se puede escribir:

$$T_0 - T = \beta (W_0 - W) \quad (I.4)$$

donde  $\beta$  es la pendiente de la función  $T=f(W)$ ,  $W_0$  es el valor medio de la energía recibida por unidad de superficie, es decir, la relativa a la onda de referencia  $W_0 = t A_0^2$ , y  $T_0$  la transmitancia en amplitud correspondiente.

Así pues, la transmitancia en amplitud de la placa puede expresarse como:

$$T(x,y) = T_0 - \beta [t A(x,y)^2 + t A_0 A(x,y) \cdot \exp(-i\alpha x) + t A_0 A^*(x,y) \cdot \exp(i\alpha x)] \quad (I.5)$$

expresión que, si se hace  $\beta' = -\beta t$ , se convierte en:

$$T(x,y) = T_0 + \beta' [A(x,y)^2 + A_0 A(x,y) \cdot \exp(-i\alpha x) + A_0 A^*(x,y) \cdot \exp(i\alpha x)] \quad (I.6)$$

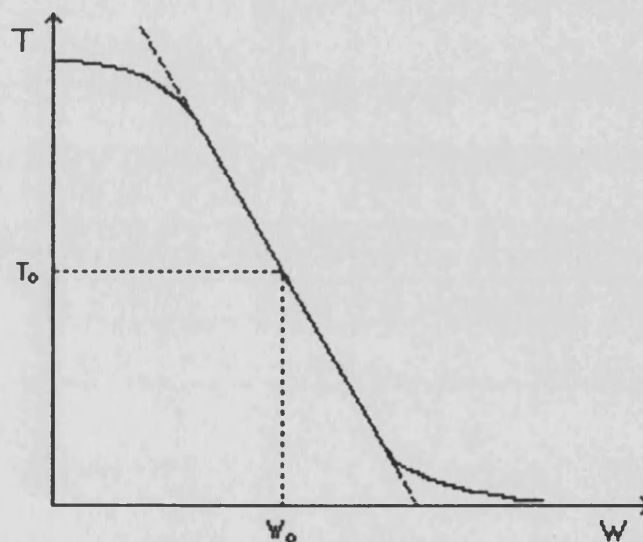


FIGURA I.1.- Transmitancia en amplitud de una emulsión en función de la energía recibida<sup>43</sup>.

Una vez realizado el registro, para proceder a la reconstrucción de la onda objeto, se ilumina el holograma con una onda plana  $B(x,y) = B_0 \cdot \exp(i\alpha x)$ , en la misma dirección que la onda de referencia original. En estas condiciones la amplitud transmitida por el holograma es:

$$\begin{aligned}
 U(x,y) = T(x,y) \cdot B(x,y) = [T_0 + \beta' A(x,y)^2] B_0 \cdot \exp(i\alpha x) + \\
 + \beta' A_0 A(x,y) B_0 + \beta' A_0 A^*(x,y) B_0 \cdot \exp(2i\alpha x)
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

El primer término representa la porción de la onda de reconstrucción que constituye el fondo, aproximadamente el mismo en toda la emulsión. Por otra parte, si se supone que la onda de reconstrucción es una réplica exacta de la onda de referencia original, el segundo término resulta:

$$\beta' A_0 A(x,y) B_0 = \beta' A_0^2 A(x,y)$$

siendo, pues, proporcional a la amplitud de la onda objeto; de tal forma que a un observador le parece que diverge del objeto original, aunque éste se haya eliminado del campo de trabajo. Así, cuando se utiliza la propia onda de referencia original como iluminación durante la reconstrucción, el componente en cuestión de la onda transmitida genera una «imagen virtual» del objeto, idéntica al mismo y con perfecta perspectiva estereoscópica.

El tercer término representa una onda conjugada de la onda objeto original, que suele quedar enmascarada por los efectos de difracción que se producen en los hologramas, a menos que el ángulo de incidencia  $\theta$  sea muy pequeño. Así pues, por lo general, sólo es observable la onda objeto reconstruida.

Ahora bien, si en la reconstrucción se gira el holo

grama  $180^\circ$  alrededor del eje Y, la onda de reconstrucción será la conjugada de la de referencia:  $B^*(x,y) = B_0 \cdot \exp(-i\alpha x)$  y la amplitud compleja resultante :

$$U(x,y) = [T_0 + \beta' A(x,y)^2] B_0 \cdot \exp(-i\alpha x) + \beta' A_0 A(x,y) B_0 \cdot \exp(-2i\alpha x) + \beta' A_0 A^*(x,y) B_0 \quad (1.8)$$

donde el tercer término:

$$\beta' A_0 A^*(x,y) B_0 = \beta' A_0^2 A^*(x,y)$$

es proporcional al conjugado de la onda objeto inicial. Es decir, forma una «imagen real» que está invertida con respecto al eje Z y que corresponde a un enfoque real de la luz en el espacio.

### 1.1.2.- DIFERENCIA DE FASE DEBIDA AL DESPLAZAMIENTO DEL OBJETO

#### 1.1.2.1.- DISTRIBUCION DE INTENSIDAD DEL FRENTE DE ONDAS RECONSTRUIDO EN FUNCION DE LA DIFERENCIA DE FASE

En el proceso interferométrico holográfico, representado por su técnica más habitual y extendida de «doble exposición», se registran sobre la misma placa dos hologramas

sucesivos del objeto con un ligero desplazamiento de algunos, o todos sus puntos, entre las dos exposiciones. Estos hologramas son «casi» idénticos, salvo los cambios en la fase de la onda objeto, que originan el típico aspecto de los interferogramas reconstruidos, en los que se aprecia un campo de franjas modulando la imagen del objeto.

Este procedimiento viene a suplir la imposibilidad de las placas holográficas y otros detectores para responder ante las variaciones de fase, de modo que sólo pueden registrar las variaciones de intensidad. Así, es necesario convertir los cambios de fase en fluctuaciones de intensidad, para formar una imagen de interferencia, registrable en una emulsión fotográfica.

En la etapa de reconstrucción, una vez procesada la placa e iluminada con un haz igual al de referencia original, la placa difracta la luz de forma que reproduce las ondas objeto iniciales, reconstruyendo la imagen virtual y el campo de franjas de interés.

En esta imagen virtual es donde se van a examinar las franjas de interferencia y relacionar el correspondiente cambio de fase con el vector desplazamiento de los puntos de interés del objeto<sup>15,20,25,83,98,104,118</sup>. Así pues, en las primera y segunda exposiciones se registran ondas objeto cuyas amplitudes complejas en el plano del holograma son  $A_1(x,y)$  y  $A_2(x,y)$ , junto con una onda

de referencia  $A_R(x,y)$ . De este modo, en la fase de reconstrucción con una onda  $A_R(x,y)$ , la amplitud compleja de la onda reconstruida tiene un término proporcional a la suma de las amplitudes de las ondas objeto:

$$U(x,y) \propto A_1(x,y) + A_2(x,y) \quad (I.9)$$

y la distribución de intensidad en la placa es proporcional, a su vez, al módulo de dicha suma:

$$I(x,y) \propto |A_1(x,y) + A_2(x,y)| \quad (I.10)$$

Ahora bien, dado que  $A_1(x,y)$  y  $A_2(x,y)$  representan la luz difundida por el objeto antes y después de la alteración producida en el mismo, este cambio afecta fundamentalmente a la fase, por lo que es posible expresar ambas amplitudes como:

$$A_1(x,y) = A(x,y) \cdot \exp[-i\varphi(x,y)] \quad (I.11)$$

$$A_2(x,y) = A(x,y) \cdot \exp\{-i[\varphi(x,y) + \Delta\varphi(x,y)]\} \quad (I.12)$$

De modo que la distribución de intensidad en la imagen reconstruida es:

$$I(x,y) \propto |A(x,y) \cdot \exp[-i\varphi(x,y)] + A(x,y) \cdot \exp\{-i[\varphi(x,y) + \Delta\varphi(x,y)]\}|^2 = 2A^2(x,y) \cdot \{1 + [\cos \Delta\varphi(x,y)]\} \quad (I.13)$$

que es una función de la intensidad de la onda objeto modulada por el factor coseno. Este, a su vez, es función del cambio de fase  $\Delta\phi(x,y)=\delta$  resultante del desplazamiento del objeto entre las dos exposiciones.

### 1.1.2.2.- EXPRESION GENERAL DE LA DIFERENCIA DE FASE

Consideremos un desplazamiento de naturaleza general<sup>73,97</sup>. En la observación del correspondiente interferograma, las superficies inicial y desplazada están presentes simultáneamente, pareciendo ser iluminadas por la luz procedente de una fuente puntual F, similar a la iluminación original de la superficie (figura I.2). Así la luz queda difundida en todas direcciones y, en particular, hacia un punto arbitrario Ob desde donde se realiza el examen de la interferencia<sup>73,97</sup>. Sea  $r$  el vector de posición de un punto P de la superficie indeformada y  $r'$  el del punto correspondiente P' de la superficie deformada. De esta forma, el vector desplazamiento de dicho punto es  $d = r' - r$ .

Desde F, la luz viaja una distancia  $L_F$  hasta P y  $L'_F$  hasta P', y después de la reflexión cubre las distancias  $L_o$  y  $L'_o$ , respectivamente, hasta Ob. La diferencia de caminos ópticos en Ob viene dada por:

$$D = (L_F + L_o) - (L'_F + L'_o) \quad (I.14)$$

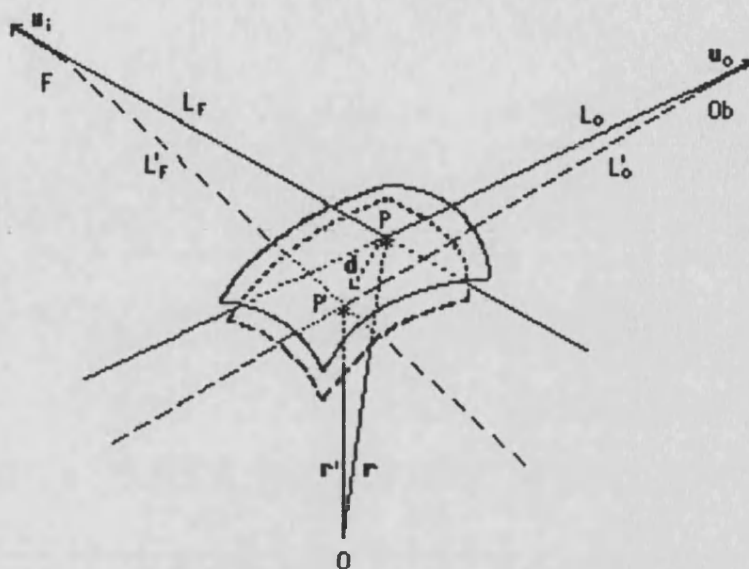


FIGURA 1.2.- Esquema de desplazamiento de un elemento de superficie. F:fuente de luz; Ob:punto de observación; O:origen de vectores de posición; P,P':punto objeto antes y después de la deformación<sup>97</sup>.

Conviene expresar ahora D en función de la posición de referencia, implicando el vector unitario  $u_i$  en la dirección PF,  $u_o$  a lo largo de PO y el vector desplazamiento d. Para ello, si se tiene en cuenta que:

$$L'_o = |L_o \cdot u_o - d| = L_o \sqrt{1 - 2 \frac{d \cdot u_o}{L_o} + \frac{d^2}{L_o^2}} \quad (I.15)$$



donde  $d \equiv |d|$ , resulta:

$$D = L_F \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{d \cdot u_o}{L_o} + \frac{d^2}{L_o^2}} \right) +$$

$$+ L_o \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{d \cdot u_i}{L_F} + \frac{d^2}{L_F^2}} \right) \quad (I.16)$$

Dado que el desplazamiento producido en la mayoría de los problemas prácticos es mucho menor que las distancias fuente-objeto y objeto-punto de observación, podemos suponer que:

$$d \ll L_F \quad \text{y} \quad d \ll L_o$$

Consecuentemente, es posible linealizar la expresión (I.16) mediante un desarrollo en serie de MacLaurin, obteniendo:

$$L'_o = L_o \left( 1 - \frac{d \cdot u_o}{L_o} \right) \quad (I.17)$$

Y al proceder de modo similar para  $L'_F$ , se obtiene la siguiente expresión para la diferencia de camino óptico:

$$D = d (u_i + u_o) \quad (I.18)$$

Finalmente, cuando se multiplica esta diferencia de caminos por el factor  $2\pi/\lambda$ , se obtiene la diferencia de fase,  $\delta$ , de la luz que viaja de la fuente al observador vía el punto desplazado, respecto de la que viaja vía el punto original:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d (u_i + u_o) = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot K \quad (I.19)$$

donde  $K$  representa el vector sensibilidad. Este último, en general, no es un vector unitario y su dirección viene dada por la bisectriz del ángulo que forma la dirección de iluminación con la de observación.

### I.1.3.- CUANTIFICACION DEL DESPLAZAMIENTO

#### I.1.3.1.- DESPLAZAMIENTO PARA UNA ROTACION ALREDEDOR DE UN EJE CONTENIDO EN LA SUPERFICIE DEL OBJETO

Consideremos que la superficie inicial representada en la figura I.3 realiza una rotación de ángulo  $\alpha$ , convirtiéndose en la superficie girada, con el consiguiente desplazamiento  $d$  del punto  $P$  que pasa a la posición  $P'$ .

Sean  $\beta$  y  $\gamma$  los ángulos formados por la dirección de desplazamiento del punto  $P$  y las direcciones de iluminación y observación, respectivamente.

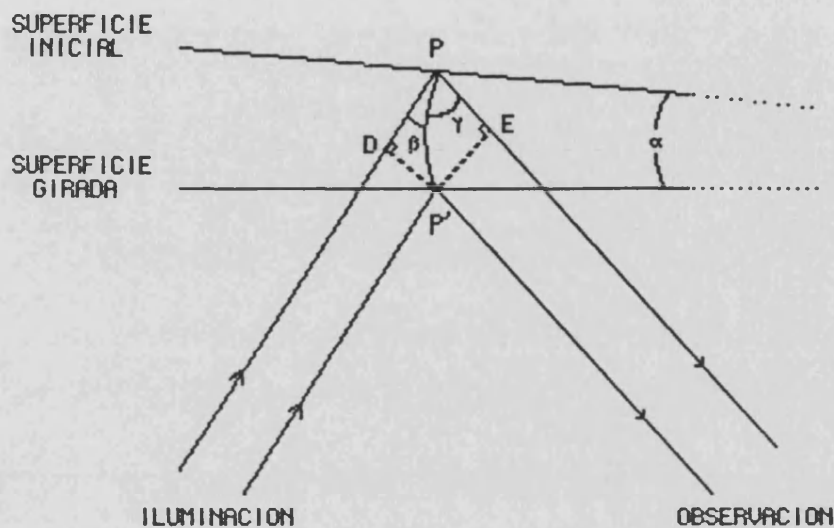


FIGURA 1.3.- Esquema de giro de una superficie alrededor de un eje contenido en la misma.

Dado que el desplazamiento producido es infinitesimal comparado con las distancias fuente-objeto y objeto-punto de observación, los haces de iluminación y observación antes del movimiento son respectivamente paralelos a los correspondientes después del mismo. Por lo tanto, la diferencia de fase de las ondas difundidas hacia el observador por el par de puntos idénticos pero desplazados P y P', viene dada por<sup>2,113</sup>:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} [\overline{DP'} + \overline{P'E}] = \frac{2\pi}{\lambda} d(\cos \beta + \cos \gamma) \quad (1.20)$$

Pues bien, con este tipo de desplazamiento, en la reconstrucción del interferograma aparece el objeto cubierto por una serie de franjas alternativamente claras y oscuras paralelas entre sí y al eje de giro; y de modo que, como el eje permanece inmóvil, constituye la zona central de una franja clara<sup>45,113</sup>.

A partir del eje de giro hay una franja brillante cada vez que la diferencia de fase  $\delta$  es un múltiplo entero del factor  $2\pi$  ó, de forma equivalente, cada vez que la diferencia de caminos entre el haz de iluminación-observación antes y después del desplazamiento  $\overline{DP} + \overline{PE}$ , sea un múltiplo entero de la longitud de onda.

De esta forma, en la posición determinada por el punto P se cumple:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d(\cos \beta + \cos \gamma) = 2\pi n \quad (I.21)$$

siendo n el número de franjas brillantes comprendidas entre el eje de giro y el punto P. Así, finalmente:

$$d = \frac{n\lambda}{\cos \beta + \cos \gamma} \quad (I.22)$$

Consecuentemente, la separación entre franjas, S, viene

dada por la expresión:

$$S = \frac{\lambda}{\alpha(\cos \beta + \cos \gamma)}$$

por lo que el máximo desplazamiento calculable está limitado por la frecuencia de las franjas de interferencia, que es proporcional al ángulo de rotación  $\alpha$  y, por tanto, establece un límite superior en base a la posibilidad de resolver dichas franjas.

#### 1.1.3.2.- CUANTIFICACION TRIDIMENSIONAL DEL DESPLAZAMIENTO

Al combinar las expresiones (I.19) y (I.21), se obtiene:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d(u_i + u_o) = n \cdot 2\pi \quad (I.23)$$

Por consiguiente, para el cálculo de las tres componentes cartesianas del desplazamiento, un posible método a seguir consiste en realizar tres observaciones en sendas direcciones, de modo que se pueda plantear y resolver un sistema de tres ecuaciones<sup>20,40</sup>. Ahora bien, dicho método requiere, en principio, la localización de la franja brillante de orden cero, lo cual es muy problemático e incluso inviable en la mayoría de los casos. Por ello, es preferible recurrir al método alternativo que se describe a continuación.

Sea el esquema de la figura I.4, en el que  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$  representan los cuatro vectores unitarios correspondientes a otras tantas direcciones de observación de la imagen del objeto en el interferograma.

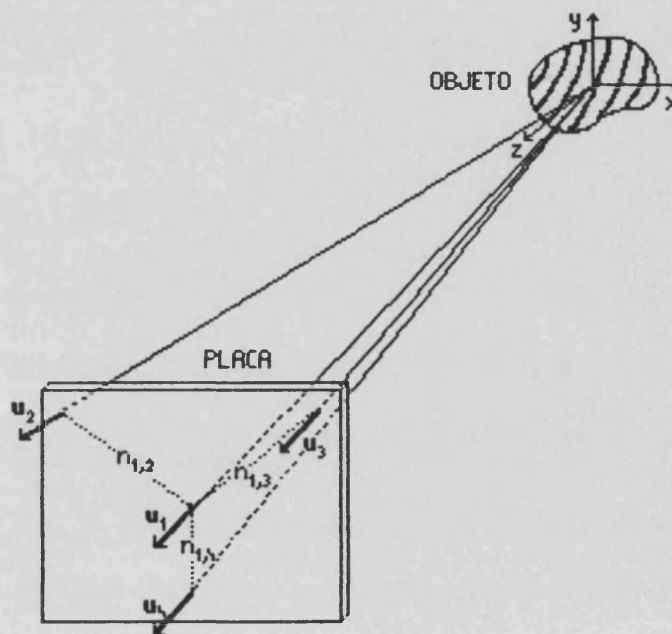


FIGURA I.4.- Geometría de observación en la determinación interferométrica de desplazamientos absolutos, para cuatro direcciones de observación<sup>40</sup>.

Al partir de la expresión (I.23) para la diferencia de fase, se puede escribir<sup>3,115</sup>:

$$\delta_{1,m} = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{d} \quad m = 2, 3, 4 \quad (I.24)$$

donde  $\delta_{1,m}$  es la diferencia de fase relativa entre las direcciones

de observación 1 y m, siendo por tanto:

$$(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{d} = \Omega_{1,m} \quad (I.25)$$

donde  $\Omega$  es la función de localización de las franjas:

$$\Omega_{1,m} = \lambda \cdot n_{1,m}$$

y  $n_{1,m}$  es el número de franjas brillantes que atraviesan el punto de interés del objeto cuando el observador se desplaza de la dirección  $\mathbf{u}_1$  a la  $\mathbf{u}_m$ .

Dado que el interferograma es idéntico, independientemente del orden en que se realicen las exposiciones, el signo del desplazamiento queda indeterminado. Por lo que, para el desarrollo práctico del método, será necesario establecer un convenio de signos respecto de la traslación de las franjas en una dirección dada, cuando se cambia la dirección de observación.

Así, el sistema de tres ecuaciones representado por la expresión (I.25) es suficiente para determinar las tres componentes del vector desplazamiento  $\mathbf{d}$ , explícitas al escribirlo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u^x_2 - u^x_1) & (u^y_2 - u^y_1) & (u^z_2 - u^z_1) \\ (u^x_3 - u^x_1) & (u^y_3 - u^y_1) & (u^z_3 - u^z_1) \\ (u^x_4 - u^x_1) & (u^y_4 - u^y_1) & (u^z_4 - u^z_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_{1,2} \\ \Omega_{1,3} \\ \Omega_{1,4} \end{bmatrix} \quad (I.26)$$

### I.1.3.3.-MEJORA DEL METODO POR SOBREDETERMINACION DEL CONJUNTO DE DATOS

El procedimiento esquemático para la medida de desplazamientos de puntos que se ha presentado, se ve restringido en gran medida por lo limitado del ángulo sólido que subtiende el holograma en el objeto. Concretamente no es posible, en general, observar un cambio suficientemente grande en la imagen de franjas al variar la dirección de observación debido al tamaño limitado de la placa. Esto implica un valor muy pequeño del determinante correspondiente a la resolución del sistema de ecuaciones (I.26) y, por tanto un considerable error relativo en los resultados obtenidos.

Conviene generar, por ello, un conjunto sobredeterminado de ecuaciones lineales simultáneas que relacionen los corrimientos de franjas con las tres componentes desconocidas del desplazamiento, utilizando un conjunto mayor de direcciones de observación, y obtener el resultado mediante la aplicación de técnicas de regresión lineal por mínimos cuadrados<sup>36,85,91,99</sup>.



Así, debe tenerse en cuenta que, con independencia de lo cuidadosamente que se realicen las medidas, y de cuál sea el número de observaciones, existirá un error, o residuo,  $E$ , inherente a tales medidas:

$$E_{1,m} = (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{d} - \Omega_{1,m} \quad m = 2, 3, 4, \dots, r \quad (1.27)$$

donde  $r$  es el número de direcciones de observación.

Por lo que el objetivo del análisis es el ajuste de los coeficientes del sistema, de modo tal que se minimice la suma de los cuadrados de los residuos<sup>92</sup>:

$$\sum_{m=2}^r (E_{1,m})^2 = \sum_{m=2}^r [(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{d} - \Omega_{1,m}]^2 \quad (1.28)$$

Para que  $\sum_{m=2}^r (E_{1,m})^2$  sea mínimo, las derivadas parciales de la ecuación (1.28) con respecto de las tres componentes del desplazamiento deben ser cero:

$$\frac{\partial}{\partial d_i} \left[ \sum_{m=2}^r (E_{1,m})^2 \right] = \frac{\partial}{\partial d_i} \left\{ \sum_{m=2}^r [(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{d} - \Omega_{1,m}]^2 \right\} = 0 \quad (1.29)$$

$$i = x, y, z$$

De donde resulta el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=2}^k (d_x \cdot \Delta U_{1,m}^x + d_y \cdot \Delta U_{1,m}^y + d_z \cdot \Delta U_{1,m}^z) \cdot \Delta U_{1,m}^x &= \sum_{m=2}^k \Omega_{1,m} \cdot \Delta U_{1,m}^x \\ \sum_{m=2}^k (d_x \cdot \Delta U_{1,m}^x + d_y \cdot \Delta U_{1,m}^y + d_z \cdot \Delta U_{1,m}^z) \cdot \Delta U_{1,m}^y &= \sum_{m=2}^k \Omega_{1,m} \cdot \Delta U_{1,m}^y \\ \sum_{m=2}^k (d_x \cdot \Delta U_{1,m}^x + d_y \cdot \Delta U_{1,m}^y + d_z \cdot \Delta U_{1,m}^z) \cdot \Delta U_{1,m}^z &= \sum_{m=2}^k \Omega_{1,m} \cdot \Delta U_{1,m}^z \end{aligned} \right\} \text{(I.30)}$$

con:

$$\Delta U_{1,m}^x = U_m^x - U_1^x$$

$$\Delta U_{1,m}^y = U_m^y - U_1^y$$

$$\Delta U_{1,m}^z = U_m^z - U_1^z$$

y cuya resolución permite obtener finalmente las tres componentes del desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{m=2}^k \Delta U_{1,m}^x \Delta U_{1,m}^x & \sum_{m=2}^k \Delta U_{1,m}^x \Delta U_{1,m}^y & \sum_{m=2}^k \Delta U_{1,m}^x \Delta U_{1,m}^z \\ \sum_{m=2}^k \Delta U_{1,m}^y \Delta U_{1,m}^x & \sum_{m=2}^k \Delta U_{1,m}^y \Delta U_{1,m}^y & \sum_{m=2}^k \Delta U_{1,m}^y \Delta U_{1,m}^z \\ \sum_{m=2}^k \Delta U_{1,m}^z \Delta U_{1,m}^x & \sum_{m=2}^k \Delta U_{1,m}^z \Delta U_{1,m}^y & \sum_{m=2}^k \Delta U_{1,m}^z \Delta U_{1,m}^z \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{m=2}^k \Omega_{1,m} \cdot \Delta U_{1,m}^x \\ \sum_{m=2}^k \Omega_{1,m} \cdot \Delta U_{1,m}^y \\ \sum_{m=2}^k \Omega_{1,m} \cdot \Delta U_{1,m}^z \end{bmatrix}$$

(I.31)

#### I.1.3.4.-COMPONENTES DE TRASLACION Y ROTACION EN EL MOVIMIENTO

Cuando un objeto realiza un movimiento de cuerpo rígido, éste puede resolverse en una traslación  $\mathbf{d}_o$  y una rotación  $\alpha$ , de tal forma que las coordenadas de sus puntos se puede decir experimentan una transformación afín, caracterizada por una matriz 3x3. Es posible escribir entonces el movimiento total  $\mathbf{d}_i$  de un punto  $i$  del objeto como<sup>88,111</sup>:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_o + \mathbf{r}_i \times \alpha \quad i=1,2,\dots,P \quad (I.32)$$

donde  $P$  es el número total de puntos del objeto considerados y  $\mathbf{r}_i$  es el vector posición de cada uno de ellos, desde el origen de un sistema de coordenadas elegido arbitrariamente hasta el punto  $i$  del objeto (figura I.5), definido como:

$$\mathbf{r}_i = r_{ix} \mathbf{i} + r_{iy} \mathbf{j} + r_{iz} \mathbf{k}$$

siendo  $r_{ix}$ ,  $r_{iy}$ ,  $r_{iz}$  las componentes de  $\mathbf{r}_i$  en las direcciones de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  del sistema de coordenadas cartesianas.

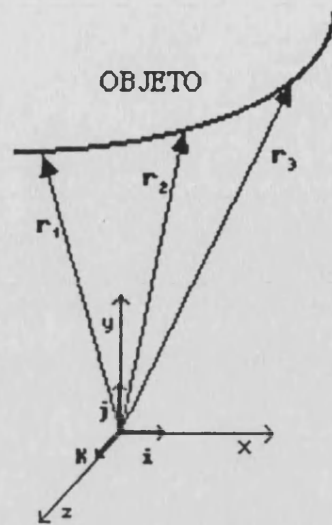


FIGURA I.5.- Geometría para la determinación interferométrica de movimientos de cuerpo rígido.

En la ecuación (I.32), los vectores que definen el movimiento vienen dados por:

$$d_i = d_{ix}i + d_{iy}j + d_{iz}k \quad i = 1, 2, \dots, P$$

$$d_o = d_{ox}i + d_{oy}j + d_{oz}k$$

$$\alpha = \alpha_x i + \alpha_y j + \alpha_z k$$

De modo que la ecuación se puede escribir en forma matricial:

$$(d_i) = [[I], [r_i]] \cdot \begin{pmatrix} (d_o) \\ (\alpha) \end{pmatrix} \quad (I.33)$$

donde:

a) el  $i^{\text{ésimo}}$  vector desplazamiento  $(d_i)$  está representado en forma de matriz columna como:

$$(d_i) = \begin{bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{iz} \end{bmatrix}$$

b) la matriz identidad  $[I]$  está definida en su forma habitual:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) la matriz de rotación  $[r_i]$  es:

$$[r_i] = \begin{bmatrix} 0 & -r_{iz} & r_{iy} \\ r_{iz} & 0 & -r_{ix} \\ -r_{iy} & r_{iz} & 0 \end{bmatrix}$$

y d) las componentes de los vectores  $(d_0)$  y  $(\alpha)$  están combinadas formando las matrices columna:

$$(d_0) = \begin{bmatrix} d_{0x} \\ d_{0y} \\ d_{0z} \end{bmatrix} \quad (\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}$$

Se podría pensar que dos ecuaciones del tipo de la (I.33) son suficientes para determinar las seis incógnitas, esto es, las tres componentes  $d_{ox}$ ,  $d_{oy}$ ,  $d_{oz}$  del vector traslación  $d_o$  y las tres  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  del vector rotación  $\alpha$ . Sin embargo, y al igual que en el cálculo de los desplazamientos absolutos, debido a la pequeñez del ángulo sólido que el holograma subtende en el objeto y los consiguientes errores en el resultado, es conveniente utilizar tres o más puntos objeto ( $P \geq 3$ ), lo que resulta en una matriz rectangular ( $3P \times 6$ ),  $[[I], [r_i]]$ .

Así pues, expandiendo la ecuación (I.33) para P puntos en el objeto, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} (d_1) \\ (d_2) \\ \vdots \\ (d_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [r_1] \\ [I] & [r_2] \\ \vdots & \vdots \\ [I] & [r_p] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (d_o) \\ (\alpha) \end{bmatrix} \quad (I.34)$$

Ecuación que se puede escribir en forma más condensada:

$$(d) = [Z] \cdot \begin{pmatrix} (d_o) \\ (\alpha) \end{pmatrix} \quad (I.35)$$

donde se ha definido:

$$(d) = \begin{bmatrix} (d_1) \\ (d_2) \\ \vdots \\ (d_p) \end{bmatrix} \quad [\Xi] = \begin{bmatrix} [I] & [r_1] \\ [I] & [r_2] \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ [I] & [r_p] \end{bmatrix}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación (I.35) por la traspuesta de la matriz rectangular  $[\Xi]$ , se obtiene:

$$[\Xi]^T \cdot (d) = [\Xi]^T \cdot [\Xi] \cdot \begin{pmatrix} (d_0) \\ (\alpha) \end{pmatrix} \quad (I.36)$$

lo que reduce la matriz rectangular (3Px6),  $[\Xi]$ , a una matriz cuadrada (6x6),  $[\xi]$ :

$$[\xi] = [\Xi]^T \cdot [\Xi] \quad (I.37)$$

y da la solución de los vectores de traslación y rotación:

$$\begin{pmatrix} (d_0) \\ (\alpha) \end{pmatrix} = [\xi]^{-1} \cdot [\Xi]^T \cdot (d) \quad (I.38)$$

## I.2.- ASPECTOS ESENCIALES DE LA INTERFEROMETRIA DE MOTEADO

### I.2.1.- CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DEL MOTEADO LASER

El moteado láser ("speckle", en la terminología anglosajona y "granularité", en la francesa) es un aspecto característico que ofrecen las superficies iluminadas con luz coherente, originado por los efectos de interferencia entre las ondas elementales difundidas por los diferentes dominios difusores, distribuidos aleatoriamente en una superficie rugosa<sup>44</sup>. Se manifiesta como una imagen de regiones brillantes y oscuras en el espacio atravesado por la luz difundida. El tamaño de estas regiones puede ser un parámetro importante en aquellos estudios en que se consideren las propiedades del moteado.

Es común distinguir entre dos tipos de moteado según sus condiciones de formación:

El moteado objetivo, que se propaga libremente del medio difusor al plano de observación, y cuyo tamaño promedio para un objeto circular de diámetro  $D$ , uniformemente iluminado y observado a una distancia  $L$ , es  $\sigma_0 \approx 1.22\lambda L/D$ <sup>42,50,77</sup>.

El moteado subjetivo, en el cual la propagación de la onda está restringida por una abertura, como puede ser la pupila



del ojo mirando una pantalla iluminada con láser: de ahí el término subjetivo. Es de interés especial la imagen de moteado producida por una lente, en cuyo caso, el tamaño promedio viene dado por una expresión similar al caso objetivo,  $\sigma_s \approx 1.22\lambda f$ , donde  $f$  es la relación entre la distancia focal y el diámetro de la pupila de la lente<sup>42,77,115</sup>, conocido como «nº f» de la lente.

Comparando las expresiones del tamaño de moteado en los dos casos, se aprecia que, para una longitud de onda dada, está relacionado únicamente con la apertura angular de los haces de interferencia. En el caso objetivo es posible obtener motas mayores reduciendo el tamaño del objeto, incrementando la distancia de observación, o con ambas cosas a la vez. Lo que corresponde en el caso subjetivo a una disminución en la apertura de la lente.

### 1.2.2.- INTERFEROMETRIA DE MOTEADO DE HAZ UNICO

Existe un conjunto de técnicas, denominadas de interferometría de moteado, basadas en el cambio del aspecto del moteado proyectado sobre una superficie, cuando ésta se desplaza. Si, del modo que sea, se hacen interferir ambos moteados, se obtendrá un esquema de franjas, relacionado con los cambios producidos.

Por ejemplo, la interferometría de moteado de «haz dual»

se produce cuando la iluminación del objeto se realiza mediante dos haces de luz coherente desde dos direcciones distintas, recogiéndose los dos campos de moteado sobre una placa fotográfica mediante una lente de pequeña apertura. Una vez procesado el negativo y reposicionado exactamente, al observar el objeto a su través, actúa como «máscara de sombra», la cual permite ver únicamente las zonas del objeto que se hayan desplazado con respecto a su posición original, de modo que se haya producido un cambio de fase  $(2n+1)\pi$ .

En la técnica anterior, es interesante hacer notar el hecho de que al desplazarse el objeto, los moteados se mueven con su superficie. Por esta razón se produce una pérdida progresiva de correlación espacial entre las primera y segunda imágenes de exposición, con la consiguiente reducción del contraste de franjas resultante. El contraste llega a desaparecer cuando el desplazamiento superficial es comparable al tamaño de moteado<sup>5</sup>.

Para medir desplazamientos superiores, es posible utilizar la técnica de fotografía de moteado que, aunque emplea iluminación con un solo haz, entra dentro de las técnicas de interferometría de moteado. Ya que depende de las propiedades ópticas del moteado en cuestión, que a su vez es resultado de la interferencia de la luz difundida por el objeto<sup>42,61</sup>.

Este método posibilita la medida de las componentes en el plano del desplazamiento, mediante la observación de la

transformada óptica de un registro, de doble exposición, de la imagen del objeto, antes y después del desplazamiento, mediante iluminación en una sola dirección<sup>6,30,42</sup>. El sistema correspondiente se muestra en la figura I.6. De este modo, se forma una imagen de la superficie del objeto mediante una lente de focal  $F$  y diámetro  $D$ . Las distancias objeto  $l_o$  e imagen  $l_i$  están relacionadas mediante la expresión<sup>55</sup>  $(1/l_o) + (1/l_i) = (1/f)$ , de tal forma que, según se ha comentado en I.2.1, la imagen formada en el plano de la placa estará modulada por un conjunto de motas de tamaño característico,  $\sigma_s$ , determinado por la apertura de la lente:  $\sigma_s = 1.22 \lambda (F/D)$ .

Si se realiza una primera exposición del objeto mediante el uso de la lente, en placa de suficiente resolución, la imagen formada en el plano de la placa estará modulada por dicho esquema de moteado. Si el objeto se traslada entonces verticalmente una distancia  $d_y$ , la fase relativa de la luz en cada una de las distintas ondas que contribuyen a la formación de cada moteado permanecerá inalterada. Por ello, la imagen de moteado simplemente se trasladará como un todo en el plano de la placa, una distancia  $Ad_y$ , siendo  $A$  el factor de amplificación objeto-placa debido a la lente. De forma similar, el moteado se traslada una distancia  $Ad_x$  si el objeto se desplaza una distancia  $d_x$  en la dirección horizontal. La traslación de la imagen de moteado es, por tanto, independiente del ángulo de iluminación.

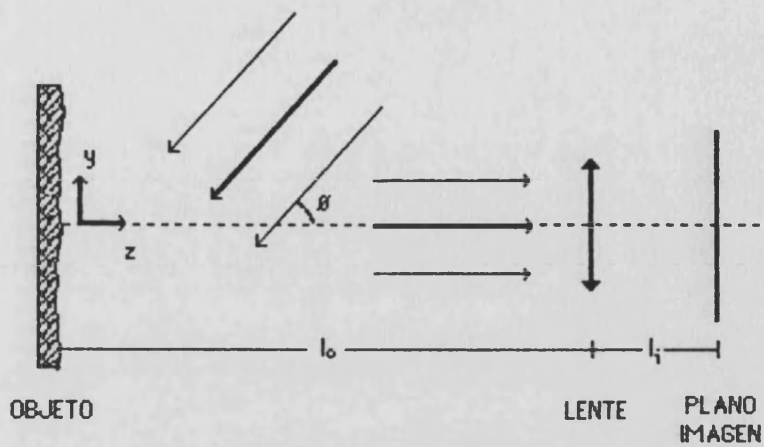


FIGURA 1.6.- Esquema de formación del interferograma de moteado.  $\theta$ : ángulo de incidencia.

Para medir el desplazamiento producido se realizan, por tanto, dos exposiciones sobre la misma placa, una antes y otra después del movimiento, de tal forma que la imagen registrada tras la segunda exposición puede considerarse como la convolución<sup>76</sup> de la imagen de moteado original con las dos funciones de Dirac  $\delta(x,y)+\delta(x+\Delta x,y+\Delta y)$ . Suponiendo que la traslación es mayor que el tamaño de moteado, la placa procesada contendrá un par de imágenes de moteado idénticas y separadas una distancia  $\Delta d$ . Así pues, la doble exposición genera un espectro de difracción que puede ser entendido como la distribución del halo de difracción original, modulada por una imagen de franjas de Young de dos orificios.

De esta forma, aunque en algunos casos será posible medir el desplazamiento identificando los moteados correspondientes a las dos imágenes, es más cómodo examinar la imagen de

difracción de la distribución de intensidad de moteado obtenida.

El registro de una imagen de moteado única difractará un haz de luz en un cono de ángulo bien definido que, proyectado sobre una pantalla, forma un halo circular rodeando al haz no difractado. La distribución de intensidad de la luz difractada no es uniforme, sino que decrece radialmente. Se le denomina "halo de autocorrelación" y su extensión angular,  $\beta_{\text{máx}}$ , está relacionada con el  $n^{\circ} f$  de la lente mediante la fórmula<sup>42</sup>:

$$\beta_{\text{máx}} = 1/f \quad (I.39)$$

El halo se extiende el doble del ángulo  $\beta_{\text{máx}}$ .

Si se registran dos imágenes de moteado, en la misma placa, con un desplazamiento  $d$ , los dos conos de difracción que se generan interfieren para formar un conjunto de franjas paralelas y equiespaciadas, modulado por el halo de autocorrelación. En este último, la mancha central que aparece está producida por la luz transmitida por la placa, carente de difracción, mientras que la imagen de moteado modulada está generada por la luz difractada por el correspondiente moteado producido en la placa. Las franjas se forman debido a que cada par de motas correspondientes, actúa como pareja de fuentes idénticas de luz coherente, generadora del conjunto de franjas de Young. Tales franjas resultan reforzadas, dado que en todos los pares las motas están separadas una misma

distancia  $\Delta d$ .

Con respecto a la interpretación de las franjas, su orientación es normal a la traslación  $d$  en el plano, y su magnitud viene dada por:

$$d = \frac{\lambda L}{\Delta e_f} \quad (I.40)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz láser utilizada para formar las franjas,  $L$  la distancia normal placa-pantalla y  $e_f$  el espaciado de franjas<sup>41,42</sup>.

Es interesante señalar, finalmente, que para la aplicación del método, se requiere que cada par de motas pueda resolverse en el interferograma, por lo que el desplazamiento mínimo medible debe ser superior al tamaño promedio de las motas láser<sup>124</sup>.

## **CAPITULO II**

---

### **MATERIAL Y METODO**

#### **II.1.- SISTEMA DE PRODUCCION DE DEFORMACIONES ORTODONCICAS**

II.1.1.- SELECCION DEL CRANEO

II.1.2.- SOPORTE DEL CRANEO

II.1.3.- COMPROBACION DE LA EFECTIVIDAD DEL SOPORTE

II.1.4.- APARATOLOGIA ORTODONCICA

II.1.5.- SISTEMA DE TRACCION. PROTOCOLO DE APLICACION DE LAS FUERZAS

#### **II.2.- PROTOCOLO EXPERIMENTAL EN LA TECNICA DE INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA**

II.2.1.-REGISTRO DE LOS INTERFEROGRAMAS DE DOBLE EXPOSICION

**II.2.2.- ANALISIS DE LOS INTERFEROGRAMAS DE DOBLE EXPOSICION PARA EL CALCULO DE LAS COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTO ABSOLUTO**

II.2.2.1.- SELECCION DE LOS PUNTOS DE INTERES DEL OBJETO

II.2.2.2.- OBTENCION DE LOS VECTORES UNITARIOS EN LAS DIRECCIONES DE OBSERVACION

II.2.2.3.- MEDIDA DE LOS CORRIMIENTOS DE FRANJAS

II.2.2.4.- OBTENCION DE LAS COMPONENTES DE TRASLACION Y ROTACION ESTRUCTURALES, ASI COMO DEL EJE DE GIRO

**II.3.- PROTOCOLO EXPERIMENTAL EN LA TECNICA DE INTERFEROMETRIA DE MOTEADO**

II.3.1.- REGISTRO DE LOS INTERFEROGRAMAS DE MOTEADO

II.3.2.- OBTENCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS ABSOLUTOS EN EL PLANO DEL OBJETO

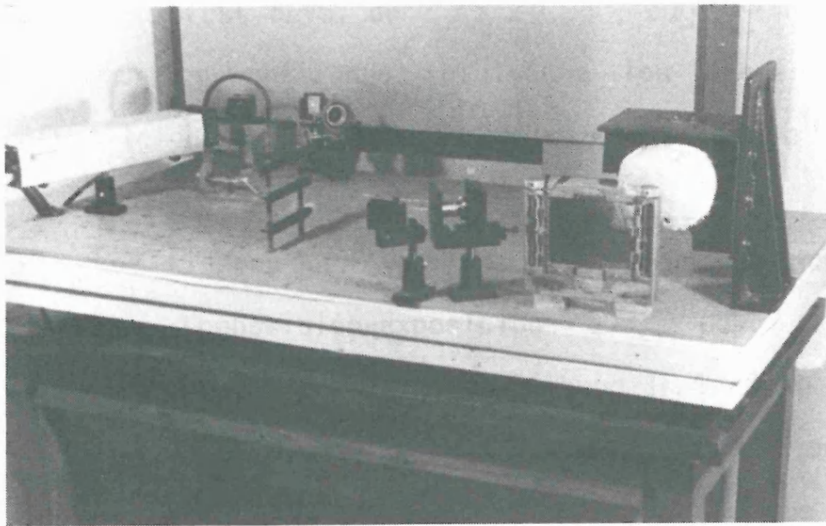


## II.1.- SISTEMA DE PRODUCCION DE DEFORMACIONES ORTO DONCICAS

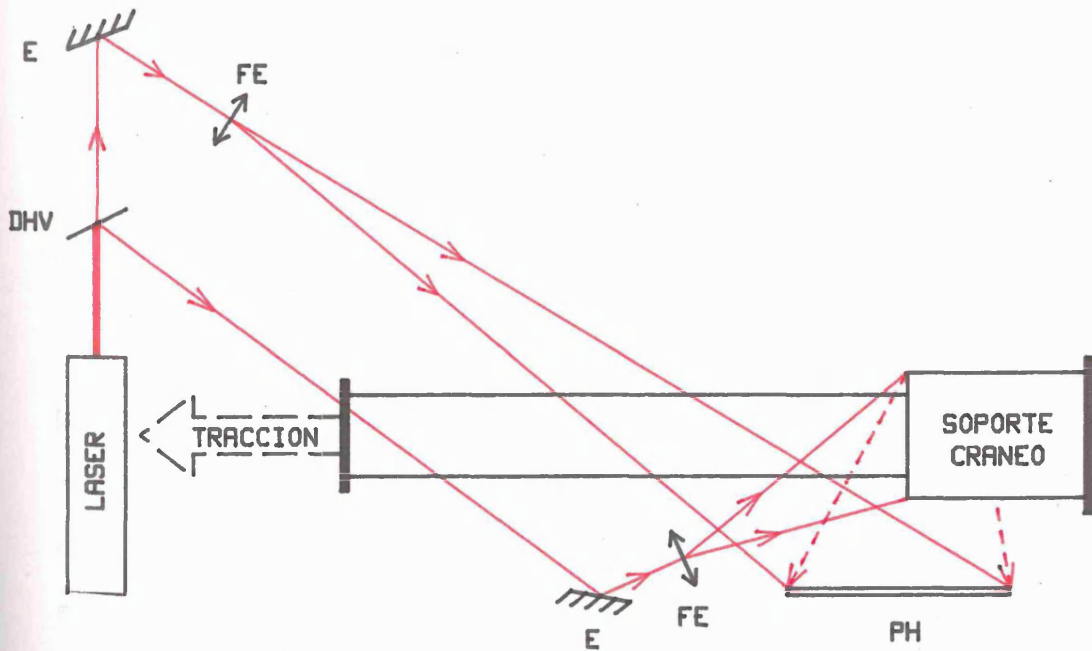
### II.1.1.- SELECCION DEL CRANEO

Para la realización de las experiencias se empleó un cráneo humano desecado, el cual fue seleccionado, a través de nuestra colaboración con la Cátedra de Ortodoncia de la Facultad de Medicina de Valencia, de entre una importante colección que se encuentra en el Departamento de Ortodoncia de la Escuela de Odontología de la Universidad de Groningen, Holanda. Se buscó reuniera el mayor número de requisitos para que el estudio se asemejara lo más posible a los tratamientos ortodóncicos habituales.

Pertenece a un individuo sin identificar del que no hay información disponible acerca de su edad. Tampoco se conoce mucho de su origen étnico, si bien parece ser originario de la India. Unicamente se dispone del esqueleto cráneo-facial, incluida la mandíbula. Se trata de un cráneo en dentición mixta, completa y normal, que corresponde a unos 9.5-10 años de edad dental,



[a]



[b]

FIGURA II.3.-a) Fotografía del dispositivo experimental para obtención de los interferogramas holográficos.  
 b) Esquema del dispositivo experimental: (E) espejos, (DHV) divisor de haz variable, (FE) filtros espaciales, (PH) placa holográfica.

hierro de (16x15) y (19x15)cm<sup>2</sup> de superficie, respectivamente, y 5 mm de espesor, soldadas en ángulo recto, con seis agujeros roscados para sujeción a la parte de unión con la mesa y dos guías centrales para ajuste del cráneo (figura II.1, pieza A). A ellas van soldadas, a su vez, dos láminas de hierro del mismo grosor, diseñadas para estar directamente en contacto con el cráneo y que se acoplan a su mismo contorno de la forma lo más exacta posible. Para ello fue preciso hacer unas plantillas de aquellas zonas del cráneo que iban a estar en contacto con el soporte (desde la mitad superior de la parte anterior del hueso frontal hasta la zona más inferior del hueso occipital, con una anchura de 8 cm, 4 a cada lado del plano medio sagital), de modo que permitieran la visualización de todos los huesos superficiales del cráneo. Puesto que éste presentaba ciertas asimetrías, sobre todo a nivel del hueso occipital, se hicieron dos plantillas distintas, una para cada lado, derecho e izquierdo, y en base a ellas se construyeron las piezas del soporte recortadas en plancha de hierro.

Una vez posicionado el cráneo, con el plano oclusal paralelo a la plancha metálica superior, se procedió a rellenar todos los espacios que quedaban entre el cráneo y el soporte. El material de relleno empleado fue escayola blanca (MOLDUREX). Algunos días después de que la escayola hubiera fraguado, se apretaron un poco más los tornillos de sujeción del cráneo al soporte, para asegurar que las posibles contracciones de la escayola no permitieran ninguna holgura.

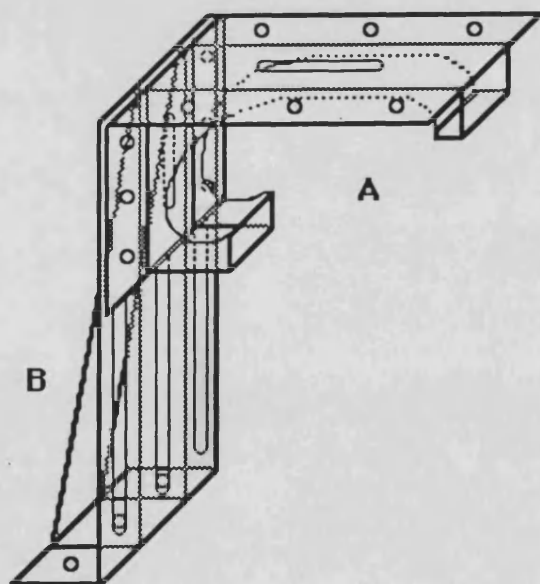


FIGURA II.1.- Detalle del cráneo en el sistema de soporte diseñado para su fijación durante las experiencias y esquema de este último con sus dos piezas constituyentes A y B.

Seguidamente, hubo que fijar el conjunto «soporte-cráneo» a la plataforma sobre la que se realizaron las experiencias, de una manera lo suficientemente sólida para que no se desplazara con movimientos de cuerpo rígido ante las fuerzas aplicadas. Para ello se diseñó una nueva pieza como nexo de unión (figura II.1, pieza B), de 10 mm de grosor, con dos ranuras o guías laterales para sujeción del soporte, con posibilidad de deslizamiento en toda su longitud, a fin de conseguir distintas alturas en el posicionamiento del cráneo, así como su situación con el plano oclusal paralelo o perpendicular a la dirección del haz.

### II.1.3.- COMPROBACION DE LA EFECTIVIDAD DEL SOPORTE

La estabilidad del conjunto cráneo-soporte, necesaria para evitar la producción de artefactos (esto es, la aparición de franjas adicionales debidas a movimientos de cuerpo rígido del propio cráneo, sobrepuestos a los desplazamientos resultantes únicamente de la fuerza aplicada), se comprobó mediante interferometría holográfica en tiempo real<sup>2</sup>. La cual permite seguir la evolución de los desplazamientos conforme se van produciendo, utilizando la técnica de revelado «in situ».

Para el desarrollo de dicha técnica, el soporte para placas utilizado está compuesto de un portaplacas, con fijado de las mismas mediante resortes, situado dentro de una cubeta con las caras anterior y posterior formadas por láminas plano-paralelas de

vidrio. Asimismo, la cubeta está provista de conducciones de entrada y salida de líquidos, para el procesado de la placa sin necesidad de su extracción del soporte, y rebosadero para su manejo en oscuridad. Debido a esta situación de la placa entre las láminas de vidrio de la cubeta, la relación de intensidades de los haces se obtuvo realizando medidas delante del vidrio anterior y detrás del vidrio posterior. Se determinó así, tras sucesivos ensayos experimentales, en base a la obtención de buena calidad en los interferogramas, que los valores óptimos debían encontrarse entre 2:1 y 4:1 para la relación entre el valor medio de la intensidad medida delante y detrás de la cubeta, por parte del haz de referencia, y el correspondiente valor medio relativo al haz objeto.

De esta forma y por ambas técnicas, la observación de los interferogramas en tiempo real permitió constatar que, al activar el sistema de tracción, aparecían en el cráneo franjas reveladoras de deformación, las cuales se comprimían luego al aumentar el grado de activación, pero que no se transmitieron en ningún caso al soporte, dentro del rango de las experiencias.

#### II.1.4.- APARATOLOGIA ORTODONCICA

Los ensayos experimentales se realizaron mediante la aplicación de fuerzas extraorales a la arcada dentaria superior del cráneo. Con este fin, y con ayuda de la colaboración por parte de la Cátedra de Ortodoncia, se procedió previamente al cementado directo de brackets en todas las piezas dentarias, tanto

temporales como definitivas (figura II.2). Sobre estas brackets se situó un arco rectangular de 0.018"x 0.025" de forma pasiva, es decir, que tras su colocación y fijación con ligadura metálica, ningún diente estaba sometido a fuerza alguna. Para ello se hicieron las compensaciones necesarias en dicho arco con el fin de respetar el posicionamiento normal de las brackets.

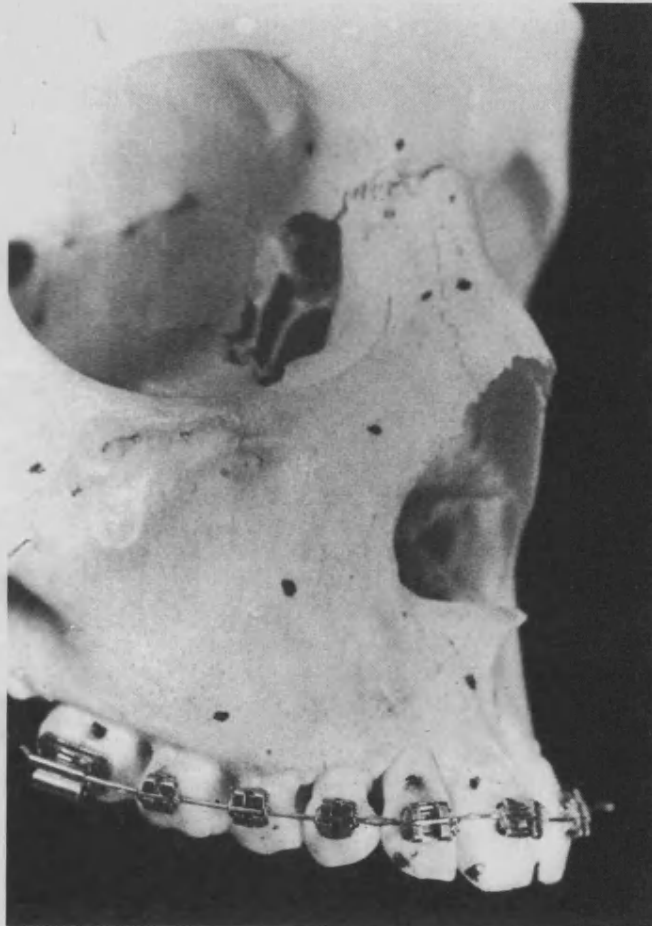


FIGURA II.2.- Fotografía del arco y brackets cementadas directamente sobre las piezas dentales del cráneo.

El objetivo final, pues, consistía en que el arco, una vez ligado a las brackets, no ejerciera sobre éstas ningún tipo de fuerza ni momento de torsión, sino que actuara como una férula de toda la arcada para transmitir fuerzas al resto de estructuras cráneo-faciales.

#### II.1.5.- SISTEMA DE TRACCION. PROTOCOLO DE APLICACION DE LAS FUERZAS

Los estudios se realizaron mediante la aplicación de una tracción anterior del maxilar superior (TAMS), consistente en la aplicación de una fuerza extraoral mediante una ligadura metálica, que se fijó a la arcada dentaria superior. La TAMS se efectuó, a través de un dispositivo simple de bastidor y polea, mediante alambre de 0.009" como el utilizado habitualmente para confeccionar las ligaduras que mantienen el arco dentro de la bracket. Dicho alambre se fijó por un extremo a las brackets en cuestión, y por el otro se le fueron colgando las distintas pesas empleadas para la realización de la tracción.

La dirección de la fuerza quedó asegurada paralelamente al plano oclusal mediante el adecuado posicionamiento del bastidor. Los puntos de aplicación de la misma estuvieron a nivel de los incisivos laterales superiores permanentes (2+2) y de los primeros molares superiores permanentes (6+6).

Los criterios de elección de la dirección de la fuerza



se condicionaron al intento de reproducir lo más fielmente posible la situación clínica real. Para ello, debe tenerse en cuenta que la posición normal del labio inferior es aquella en la que descansa sobre el tercio incisal de los incisivos superiores, por lo que la variación en la dirección de la fuerza respecto al plano oclusal es muy pequeña, quedando establecida, por un lado, por el molar superior y, por otro lado, por un punto situado por encima del tercio incisal del incisivo superior.

Cuando el punto de aplicación de la TAMS se situó a nivel de (2+2), se decidió respetar la dirección de la fuerza utilizada en la tracción desde (6+6). De esta forma se permite comparar las diferencias en los desplazamientos dento-maxilofaciales atribuibles al cambio del punto de aplicación de la fuerza.

El procedimiento de aplicación de las fuerzas consistió en la realización de una primera exposición con una fuerza  $F_1$ , actuando sobre el cráneo y lograda al suspender el peso adecuado del extremo libre del alambre de tracción. A continuación, esta fuerza se incrementó hasta un nuevo valor  $F_2$ , y se dejó actuar durante un tiempo no inferior a 2 minutos, para permitir que todas las deformaciones potenciales más significativas hubieran tenido lugar. En estas condiciones se realizó una segunda exposición, de igual duración que la primera.

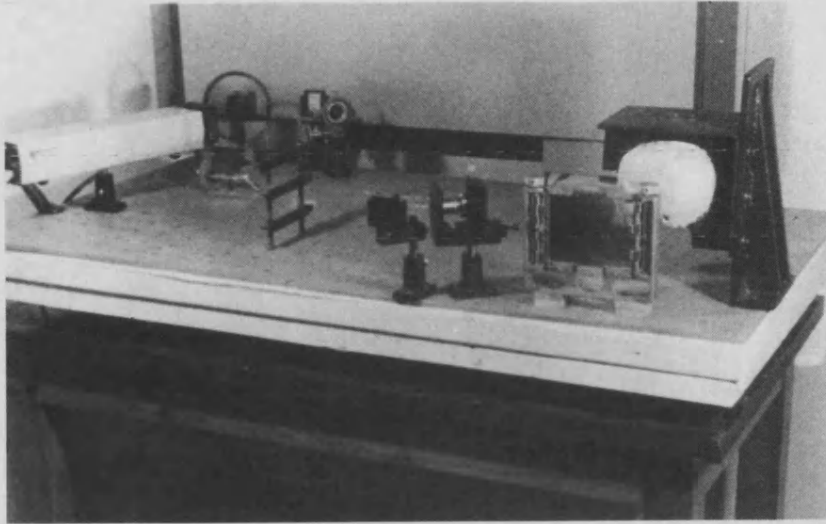
## II.2.- PROTOCOLO EXPERIMENTAL EN LA TECNICA DE INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA

### II.2.1.- REGISTRO DE LOS INTERFEROGRAMAS DE DOBLE EXPOSICION

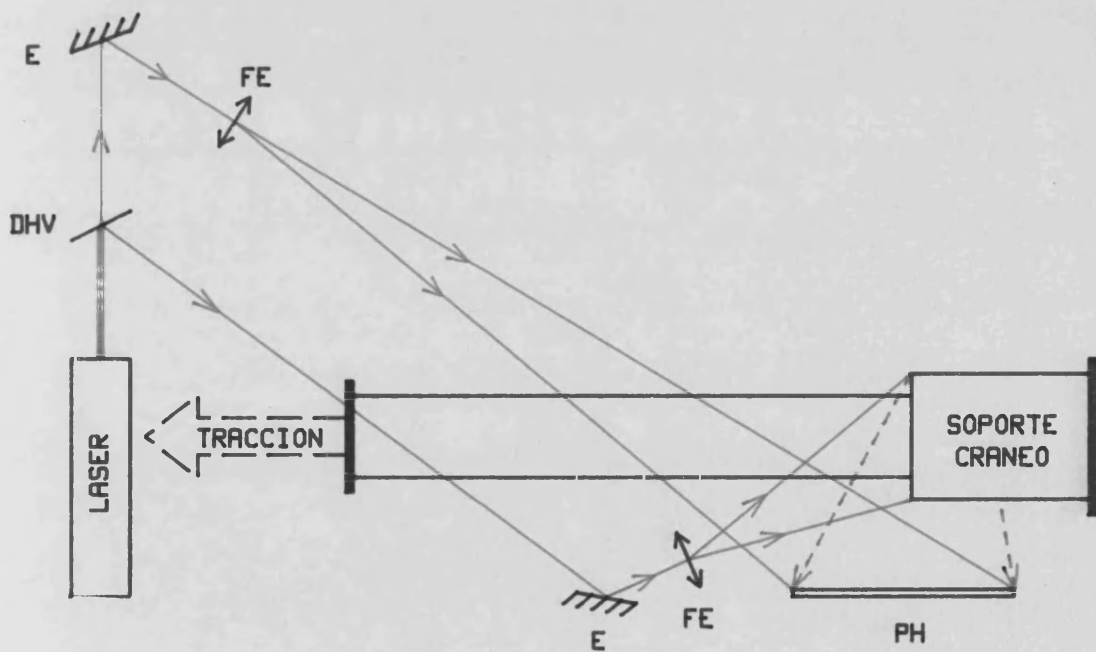
Los interferogramas que sirven de base a los resultados en este trabajo, se obtuvieron con el montaje que se presenta en la figura II.3.

El haz procedente de la fuente (un láser He-Ne de 5 mW sin polarizar) alcanza un divisor de haz variable (DHV), de modo que el haz transmitido, tras reflejarse en un espejo (E), es lavado y expandido mediante un filtro espacial, constituido por un objetivo de microscopio 45x y un agujero de 5  $\mu\text{m}$  de diámetro (FE), para conformar el haz directo o de referencia que ilumina la placa holográfica (PH). Igualmente, el haz reflejado en el divisor, también tras ser dirigido y acondicionado mediante un espejo y otro filtro espacial, incide sobre la zona de interés del objeto, constituyendo el haz indirecto o haz objeto.

Todos los elementos constituyentes del montaje se situaron sobre una plataforma antivibratoria, cuyo comportamiento aislante frente a las vibraciones se analizará en el capítulo III, y cuya superficie de trabajo es una plancha metálica de 5 mm de grosor, con agujeros roscados para fijar sólidamente cada componente, pudiendo así situarlos en cualquier posición de la plataforma con facilidad.



[a]



[b]

FIGURA II.3.- a) Fotografía del dispositivo experimental para obtención de los interferogramas holográficos.  
 b) Esquema del dispositivo experimental: (E) espejos, (DHV) divisor de haz variable, (FE) filtros espaciales, (PH) placa holográfica.

Los interferogramas se registraron en placas Agfa-Gevaert Holotest 8E75, de 4"x5"x0.06", cuya resolución es de 5000 líneas/mm, garantizando totalmente los requerimientos de resolución exigidos por la interferometría holográfica<sup>115</sup>.

Los tiempos de exposición se fijaron a partir de la característica transmisión-exposición que, para las placas empleadas, es la representada en la figura II.4. Como es sabido, la eficiencia de difracción de la emulsión es máxima para transmitancias dentro de su zona lineal<sup>115</sup>, por lo que se escogió el valor de 100 erg/cm<sup>2</sup>, el cual está centrado en dicha región.

Con respecto a la relación entre la intensidad de la onda de referencia y la objeto, las condiciones de montaje evidenciaron una relación óptima de 2:1 a 4:1, consiguiendo así una alta visibilidad de las franjas a la vez que una buena calidad de imagen.

El ángulo de incidencia del haz de referencia con la placa se fijó en unos 30°, tras los correspondientes ensayos experimentales, mediante una fórmula de compromiso entre las condiciones de medida y la calidad de los interferogramas. En efecto, cuanto mayor es dicho ángulo menor es la eficiencia de difracción, pero mejores son las condiciones prácticas de recuento de franjas sobre los interferogramas. Así pues, se utilizó el referido valor, de tal forma que la calidad de los interferogramas y el contraste de franjas de interferencia, resultó suficiente

para la medida de los recuentos de franjas desde cualquier punto de la placa, a la vez que dicha medida se pudo realizar sin la extorsión debida al deslumbramiento, que habría supuesto el haz directo sobre las direcciones de observación de los puntos de interés del objeto.

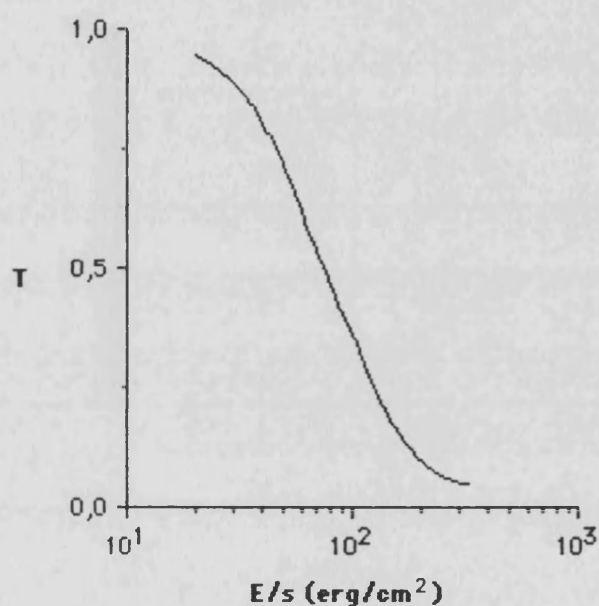


FIGURA II.4.- Transmisión en función de la exposición, para las placas AGFA 8E75.

El control de las intensidades de los haces a nivel de la posición de la placa holográfica, así como el del consiguiente tiempo de exposición, se realizó mediante un radiómetro (NRC 880), provisto de obturador automático. Una vez impresionadas, las placas holográficas se revelaron durante 4 minutos (Valca Universal,

a 20 °C), fijaron durante 5 minutos (Fyval) y lavaron en agua destilada durante 15 minutos.

### II.2.2.- ANALISIS DE LOS INTERFEROGRAMAS DE DOBLE EXPOSICION PARA EL CALCULO DE LAS COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTO ABSOLUTO

#### II.2.2.1.-SELECCION DE LOS PUNTOS DE INTERES DEL OBJETO

Con respecto al punto de aplicación de las fuerzas de tracción empleadas en el estudio, tal como se describió en el apartado II.1.4, fue situado a nivel de los incisivos laterales (2+2) en una de las series de experiencias, y sobre los primeros molares permanentes (6+6) en la otra. La razón fue la de permitir el estudio de las posibles diferencias entre las respuestas a ambas modalidades de aplicación que, por otro lado, corresponden a las más comúnmente empleadas en el tratamiento de las alteraciones esqueléticas de Clase III<sup>75</sup> que les son pertinentes.

Por otro lado y con respecto a los puntos del cráneo analizados, la figura II.5 presenta un esquema del perfil craneal, con los puntos de interés señalados sobre el mismo. Estos se eligieron con arreglo al siguiente criterio: en la arcada dentaria, se tomaron dos puntos donde previsiblemente debiera ser mayor la diferencia, es decir, en sus extremos anterior y posterior, correspondientes al incisivo central y al primer molar superior, para poder establecer una comparación entre sus posibles

distintas reacciones según el punto de aplicación de la fuerza. En el incisivo central se marcó el punto en el ángulo disto-incisal (punto 4) y en el molar superior, entre la cresta alveolar y la bracket de cementado directo a nivel de la cúspide mesio-bucal en sentido antero-posterior (punto 3).

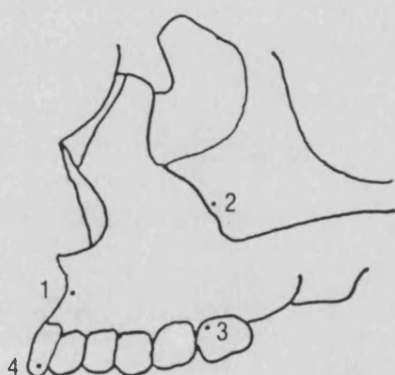


FIGURA II.5.- Esquema del cráneo empleado en las experiencias, con los puntos de interés señalados sobre el mismo.

A fin de estudiar los desplazamientos del maxilar superior, se escogió un punto (punto 1) muy próximo al denominado, en el lenguaje ortodóncico, "punto A" (o punto posterior de la concavidad anterior del maxilar), aproximadamente 1mm por encima del plano sagital medio. Y finalmente, el comportamiento del hueso zigomático (o malar) se estudió mediante un punto en las proximidades de la sutura zigomático-maxilar, a la misma distancia entre el reborde inferior y orbitario de dicho hueso (punto 2).

### II.2.2.2.- OBTENCION DE LOS VECTORES UNITARIOS EN LAS DIRECCIONES DE OBSERVACION

Para la aplicación de la técnica, expuesta en su vertiente teórica en I.1.3.2 y I.1.3.3, es necesario el cálculo de las tres componentes cartesianas de los vectores unitarios en las direcciones de observación  $u_i^x, u_i^y, u_i^z$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , siendo  $m$  el número de ellas.

Para ello, tomando el origen de coordenadas en el punto del objeto a analizar (figura II.6), supongamos que el eje Z incide en la placa en el punto  $O_p$  y tomemos, para simplificar el esquema, tres direcciones de observación definidas por los vectores  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ . Así pues, los correspondientes vectores unitarios vendrán dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &\equiv (u_1^x, u_1^y, u_1^z) \equiv \left( \frac{V_1^x}{|V_1|}, \frac{V_1^y}{|V_1|}, \frac{V_1^z}{|V_1|} \right) \\ \mathbf{u}_2 &\equiv (u_2^x, u_2^y, u_2^z) \equiv \left( \frac{V_2^x}{|V_2|}, \frac{V_2^y}{|V_2|}, \frac{V_2^z}{|V_2|} \right) \\ \mathbf{u}_3 &\equiv (u_3^x, u_3^y, u_3^z) \equiv \left( \frac{V_3^x}{|V_3|}, \frac{V_3^y}{|V_3|}, \frac{V_3^z}{|V_3|} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$



siendo para el caso representado en la figura II.6:

$$V_1^x = \overline{0pD}, \quad V_1^y = -\overline{AD}, \quad V_1^z = \overline{0pO}$$

$$V_2^x = -\overline{BE}, \quad V_2^y = \overline{0pE}, \quad V_2^z = \overline{0pO}$$

$$V_3^x = \overline{CE}, \quad V_3^y = \overline{0pE}, \quad V_3^z = \overline{0pO}$$

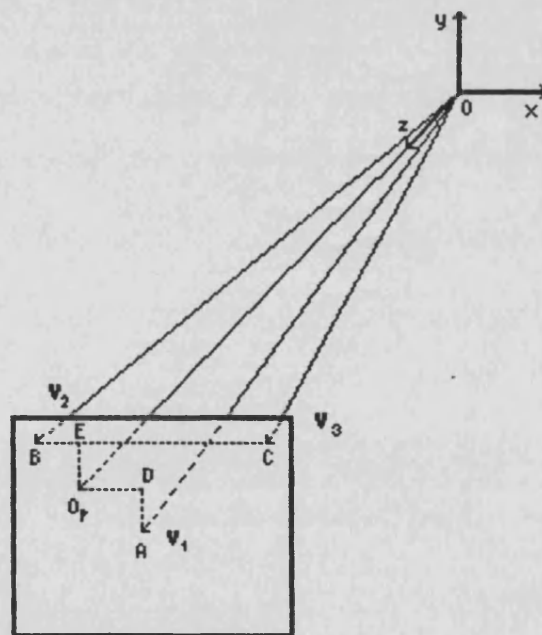


FIGURA II.6.- Esquema para la obtención de los vectores unitarios en las direcciones de observación.

De esta forma es posible obtener los vectores unitarios en las direcciones de observación, a partir de la medida de la distancia entre el punto de interés del objeto y su proyección normal a la placa, así como de las correspondientes medidas geométricas en la placa de las distancias horizontales y verticales entre la mencionada proyección y los puntos de observación.

Estas distancias se midieron con ayuda de una fuente láser auxiliar, que se situó de modo que su haz filiforme incidiera normalmente al plano de la placa desde el lado opuesto al ocupado por el objeto, pudiendo desplazarse mediante tornillos micrométricos según dos ejes ortogonales entre sí y también al eje Z.

#### II.2.2.3.- MEDIDA DE LOS CORRIMIENTOS DE FRANJAS

Una vez obtenidos los vectores unitarios en las direcciones de observación, se pasó a la obtención de los corrimientos de franjas correspondientes a los distintos cambios en la dirección de observación.

Para ello se situó en el soporte de la placa, y superpuesta detrás de la misma, una plantilla de acetato en la que se señalaron los puntos correspondientes a las direcciones de observación, esquematizadas en la figura II.7. A continuación y siguiendo el desarrollo expuesto en el capítulo I, se realizó una observación del punto del objeto cuyo desplazamiento se deseaba

conocer, en la dirección 1, reconociendo la posición de la franja que atravesaba dicho punto. Seguidamente se desplazó el observador hasta ver el mismo punto según la dirección de observación 2, contando durante su desplazamiento el número de franjas,  $n_{1,2}$ , que atravesaban el referido punto. Análogamente se realizaron las medidas de los corrimientos de franjas al cambiar la dirección de observación de la 1 a las restantes 8 direcciones, que se estimaron suficientes en número y localización como se discutirá en IV.1.2.

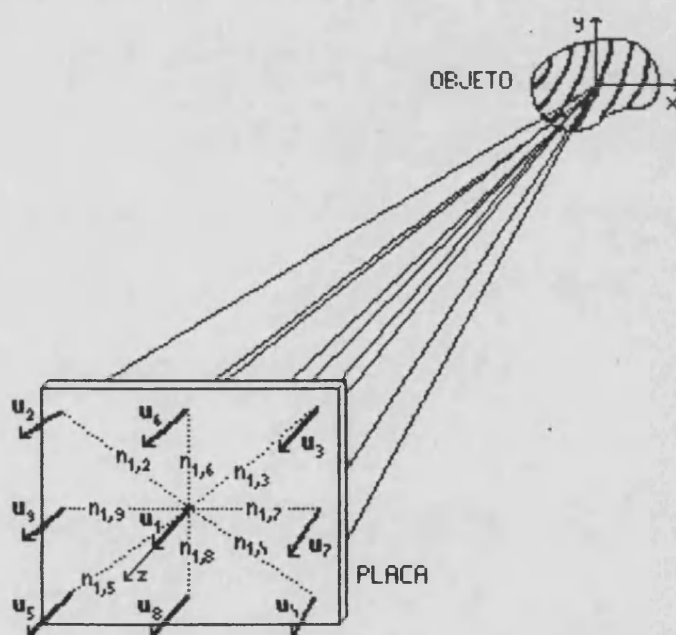


FIGURA II.7.- Esquema de las direcciones de observación, representadas por sus vectores unitarios  $u_j$ . Los  $n_{1,j}$  denotan los recuentos de franjas correspondientes a los cambios en la dirección de observación.

Ahora bien, dado que, en muchas ocasiones, al cambiar la dirección de observación el punto analizado no era atravesado por un número entero de franjas, sino también por una parte fraccionaria, se realizó una comprobación de la exactitud del valor asignado por los observadores al proceder del siguiente modo, con la ayuda de una cámara fotográfica. Primeramente y por observación visual, se realizó el recuento del número de franjas completas,  $n_{1,j}$ , que atravesaban el punto del objeto al cambiar de la dirección de observación 1 a la j. Y seguidamente, para calcular la fracción de franja restante, se hizo una fotografía del objeto, alineando el eje del sistema fotográfico en la dirección 1.

Para ello, la cámara se situó en un soporte con posibilidad tanto de desplazamiento como de giro, para fijar la posición deseada. A continuación se hizo otra fotografía en las mismas condiciones en la dirección j. De tal forma que una vez positivadas las dos fotografías, con la ampliación adecuada para una buena observación, se pudo medir la fracción de franja restante. De este modo se pudo constatar un buen acuerdo entre los valores obtenidos mediante la utilización de la cámara y los medidos por los observadores, por lo que se estimó suficiente la observación visual directa.

Más aun, adicionalmente, la serie de experiencias de prueba sirvió para adoptar un criterio de asignación de errores en la medida del número de franjas recontado, de acuerdo con las

discrepancias obtenidas entre varios observadores entrenados, contrastadas con el método fotográfico comentado. De hecho, los errores experimentales que se han asignado al recuento de franjas, y a los que nos referiremos en III.2.2, se han obtenido a base de este criterio práctico.

Con todos estos datos, y a través de la expresión (1.31), se pudieron calcular las tres componentes del desplazamiento producido en cada punto de interés del objeto.

#### II.2.2.4.-OBTENCION DE LAS COMPONENTES DE TRASLACION Y ROTACION ESTRUCTURALES, ASI COMO DEL EJE DE GIRO

Una vez obtenidas las componentes cartesianas del desplazamiento absoluto de cada punto de interés, para calcular las componentes de traslación y rotación de una estructura determinada, tal como es el hueso maxilar, y de acuerdo con lo expuesto en I.1.3.4, se marcaron tres puntos en dicho hueso. Uno situado en las proximidades de la sutura zigomático-maxilar, junto al punto 2 ya mencionado (punto 6), otro a mitad de distancia aproximadamente entre los puntos 1 y 2 (punto 7), y el tercero en la apófisis orbitaria del maxilar, en las proximidades de la sutura con el hueso nasal (punto 11). Para tales puntos se calculó el desplazamiento absoluto producido.

A continuación se calcularon las componentes de los vectores posición de los puntos, de forma similar al cálculo

realizado en II.2.2.2, pero tomando el origen de coordenadas en el centro de la placa. De este modo se dispone ya de los datos suficientes para, mediante la expresión (I.38), obtener los vectores de traslación  $\mathbf{d}_o = (d_{ox}, d_{oy}, d_{oz})$  y rotación  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ .

Seguidamente, a partir de la ecuación (I.32), se deduce que el eje de rotación viene determinado por el lugar geométrico de los puntos  $i$  cuyos vectores posición cumplen la relación:

$$\mathbf{r}_i \times \alpha = 0$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} 0 & -r_{iz} & r_{iy} \\ r_{iz} & 0 & -r_{ix} \\ -r_{iy} & r_{ix} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = 0 \quad (II.2)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} -r_{iz} \cdot \alpha_y + r_{iy} \cdot \alpha_z &= 0 \\ r_{iz} \cdot \alpha_x - r_{ix} \cdot \alpha_z &= 0 \\ -r_{iy} \cdot \alpha_x + r_{ix} \cdot \alpha_y &= 0 \end{aligned} \quad (II.3)$$

Así, una vez calculadas las componentes del vector de rotación, se incluyeron en el sistema anterior, cuya resolución proporciona las coordenadas de los puntos pertenecientes al eje.

## II.3.- PROTOCOLO EXPERIMENTAL EN LA TECNICA DE INTERFEROMETRIA DE MOTEADO

### II.3.1.- REGISTRO DE LOS INTERFEROGRAMAS DE MOTEADO

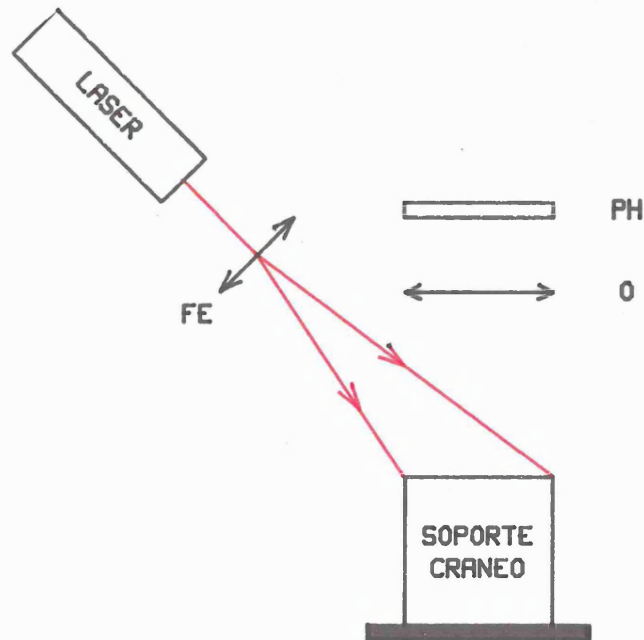
La figura II.8.a presenta el dispositivo experimental utilizado para la realización de los interferogramas de moteado de haz único, cuyo diagrama esquemático se muestra en la figura II.8.b. Para su registro se utilizó la misma fuente láser que en las experiencias de interferometría holográfica, un He-Ne de 5mW.

El haz, tras ser reflejado en el espejo E, es expandido por el filtro espacial, FE, para incidir luego sobre el cráneo. La luz difundida hacia el sistema fotográfico produce la imagen del objeto en la placa.

En las sucesivas experiencias, y a fin de obtener una información más apropiada, el cráneo se situó de forma que la base de la arcada dentaria y el hueso palatino estuviesen dispuestos paralelamente a la placa fotográfica. De este modo se pueden analizar, en efecto, los desplazamientos producidos en las distintas partes que componen las estructuras mencionadas.



[a]



[b]

FIGURA II.8.- a) Fotografía del dispositivo experimental para obtención de los interferogramas de moteado. b) Esquema del dispositivo experimental: (FE) filtro espacial, (O) objetivo fotográfico y (PH) placa holográfica.



En estas condiciones, para la obtención de cada interferograma se realizó una primera exposición con el sistema de tracción desactivado. Seguidamente se produjo el desplazamiento a analizar y se realizó una segunda exposición, recogiendo en la placa la imagen del objeto con el campo de moteado, característico de su superficie, desplazado. Una vez impresionada, la placa se procesó, obteniendo un negativo del objeto con los dos campos de moteado, correspondientes a las situaciones antes y después del movimiento.

### II.3.2.- OBTENCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS ABSOLUTOS EN EL PLANO DEL OBJETO

Una vez realizado el registro del interferograma, debe procederse a la obtención del desplazamiento producido en función de las magnitudes medibles experimentalmente. Ahora bien, como el desplazamiento en cuestión viene dado por la separación en el objeto de los dos campos de moteado asociados a la zona a analizar, según I.2.2, la medida de tal separación puede realizarse a partir de la correspondiente en la placa, teniendo en cuenta que el desplazamiento real sobre el objeto es el medido en la placa multiplicado por el factor de amplificación objeto-placa,  $M$ . Tal factor se calculó como la relación entre dos distancias equivalentes medidas en el objeto,  $m_o$ , y en la placa,  $m_p$ :  $M = m_o/m_p$ .

Con este fin, se hizo incidir el haz láser, ahora sin

abrir, sobre el punto de la placa correspondiente al del objeto cuyo desplazamiento se pretendía conocer (figura II.9) y se observó en la pantalla (señalada con dos ejes perpendiculares), el patrón de franjas portadoras de la información relativa al movimiento. En dicho patrón, la situación de la  $m^{\text{ésima}}$  franja brillante,  $y_m$ , en la pantalla, está determinada por la separación entre los granos de moteado correspondientes,  $S$ . Asimismo, depende de la distancia perpendicular entre la pantalla y la placa,  $L$ , y la longitud de onda de la luz,  $\lambda$ . Todo ello a través de la expresión:

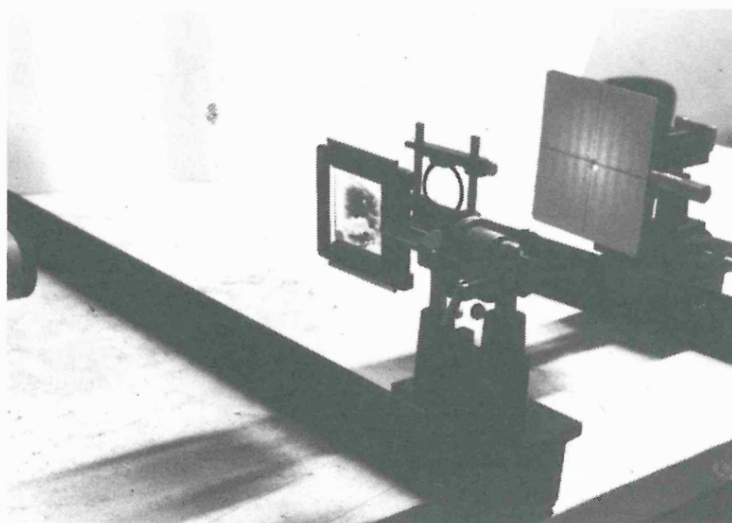
$$y_m = \frac{m \cdot L \cdot \lambda}{S} \quad (\text{II.4})$$

De este modo, es inmediato obtener la separación entre los campos de moteado en función del espaciado de franjas,  $e_f = y_m/m$ .

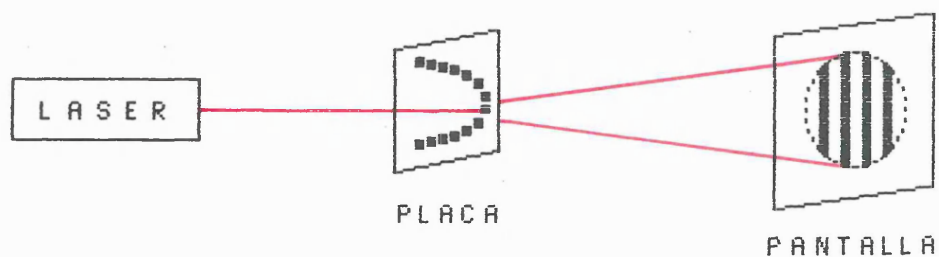
Teniendo en cuenta, por una parte, el factor de amplificación objeto-placa antes mencionado y, por otra, que en algunas experiencias y puntos de interés, la separación entre franjas es pequeña, resulta más correcto obtenerla a partir de una distancia mayor  $E$ , dividida por el número de franjas  $n$  en ella contenidas. Así, el desplazamiento real en el objeto viene dado por:

$$d = \frac{S}{M} = \frac{L \cdot \lambda \cdot n}{M \cdot E} \quad (\text{II.5})$$

siendo su dirección la perpendicular al esquema de franjas. Dicha dirección se midió situando la pantalla con los dos ejes ortogonales dibujados en ella, sobre una plataforma giratoria graduada.



[a]



[b]

FIGURA II.9.- a) Fotografía del dispositivo experimental para el análisis de los interferogramas de moteado y b) esquema del mismo.

## **CAPITULO III**

---

### **PUESTA A PUNTO DE DISPOSITIVOS ORIGINALES Y CALIBRADO DE LOS METODOS UTILIZADOS**

#### **III.1.- IMPLEMENTACION DEL SISTEMA ANTIVIBRATORIO**

#### **III.2.- MEDIDA TRIDIMENSIONAL DEL DESPLAZAMIENTO**

##### **III.2.1.- CALIBRADO DEL PROCESO DE MEDIDA**

##### **III.2.2.- ESTIMACION DE LOS ERRORES DEL METODO**

##### **III.2.2.1.- SENSIBILIDAD AL ERROR EN EL RECUENTO DE FRANJAS**

##### **III.2.2.2.- SENSIBILIDAD AL ERROR EN LAS MEDIDAS GEOMETRICAS**

#### **III.3.- MEDIDA DE DESPLAZAMIENTOS POR INTERFEROMETRIA DE MOTEADO**

### III.1.- IMPLEMENTACION DEL SISTEMA ANTIVIBRATORIO

Dada la naturaleza interferométrica de las experiencias implicadas en el trabajo, es imprescindible disponer de un sistema suficientemente aislado de las vibraciones ambientales sobre el que llevar a cabo los montajes. Para ello, se diseñó y construyó en primer lugar una «plataforma compuesta» aislada de vibraciones, de  $(1.2 \times 1.7) \text{ m}^2$  de superficie (figura III.1).

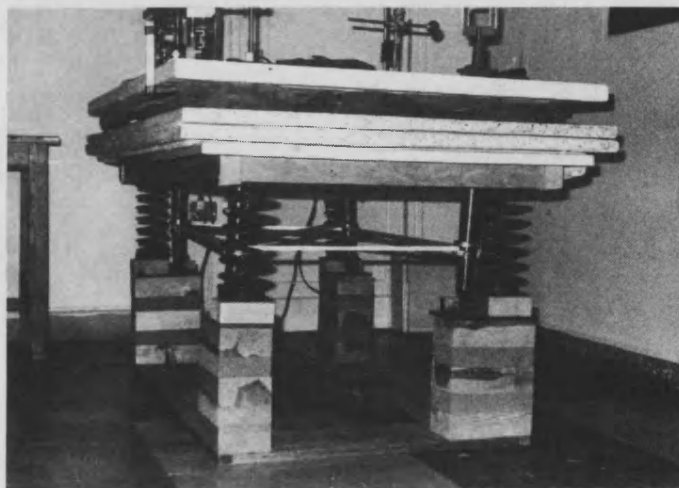


FIGURA III.1.- Fotografía de la plataforma antivibratoria construida en el laboratorio de Física Médica de la Facultad de Medicina de Valencia.

Dicha plataforma ya quedó descrita en un trabajo anterior<sup>28</sup>. Por ello, simplemente reseñamos sus componentes esenciales, basados en conjunto en tres grados de libertad equivalente a tres filtros mecánicos de frecuencia en serie<sup>27,54,81</sup>.

En primer lugar, el contacto del sistema con el suelo se produce a través de cuatro montajes «sandwich» de corcho y madera, constituyendo un primer y grosero filtro para las vibraciones de muy alta frecuencia.

El segundo componente está constituido por cuatro resortes helicoidales en paralelo con cuatro amortiguadores hidráulicos en funcionamiento crítico que, para la masa a soportar ( $\approx 600$  kg), constituye un filtro de alta frecuencia<sup>94,107</sup>.

El tercer elemento, sin embargo, debía resonar a frecuencias mucho menores que las estructurales del edificio<sup>103</sup>, lo que exigía bajo amortiguamiento, por lo que se eligió para tal fin un sistema neumático libre, de cámaras de caucho a baja presión que proporciona una frecuencia de resonancia unas cuatro veces menor que la frecuencia de vibración fundamental del suelo sobre el que se apoya.

Con este sistema se realizaron las experiencias interferométricas iniciales correspondientes a este trabajo.

Ahora bien, dado lo compacto del montaje experimental, se analizó la posibilidad de un nuevo sistema aislante, con menor complejidad de elaboración y sin merma práctica de prestaciones, a base de una disminución adecuada de superficie útil que garantizara menores desplazamientos relativos. El sistema así diseñado demostró ser capaz de sustentar, con fiabilidad suficiente, las distribuciones mecano-ópticas utilizadas, incluso con sus elementos independizados. Siendo, por ello, el que se empleó para el grueso de las experiencias realizadas.

El proceso de elaboración fue el siguiente. Al objeto de conservar las características esenciales del sistema anterior<sup>26</sup>, se utilizó como elemento único su componente aislante de vibraciones más efectivo<sup>26,103,114</sup>, las cámaras neumáticas de caucho a baja presión. El sistema, «plataforma simple», que se presenta en la figura III.2, quedó así constituido por seis de tales cámaras (Firestone A-4) sobre una estructura de soporte íntegramente de madera y, encima de ellas, la plataforma propiamente dicha de superficie plana (0.70 x 1.25) m<sup>2</sup> y masa suficiente (unos 160 kg).

La mencionada reducción de superficie de la plataforma, fundamental para minorar los desplazamientos relativos, permitió además su ubicación cerca de columnas de sustentación, con una disminución del nivel de vibración del suelo subyacente en varios dB. Posicionamiento éste que no admitió, por razones de accesibilidad, la plataforma compuesta.

Para la medida de los niveles de aceleración característicos de la vibración, se utilizó una cadena formada por acelerómetro, preamplificador de carga y analizador estadístico de nivel<sup>16-18,114</sup>, en la banda de frecuencia de 0.2 a  $10^4$  Hz. El sistema se calibró de modo que el nivel de 44 dB correspondiese a una aceleración de  $100 \text{ mm/s}^2$ .

El estudio del comportamiento antivibratorio de la plataforma se realizó en dos vertientes: aislamiento ante los niveles mínimos por una parte y ante niveles extemporáneos (picos de vibración) por la otra.

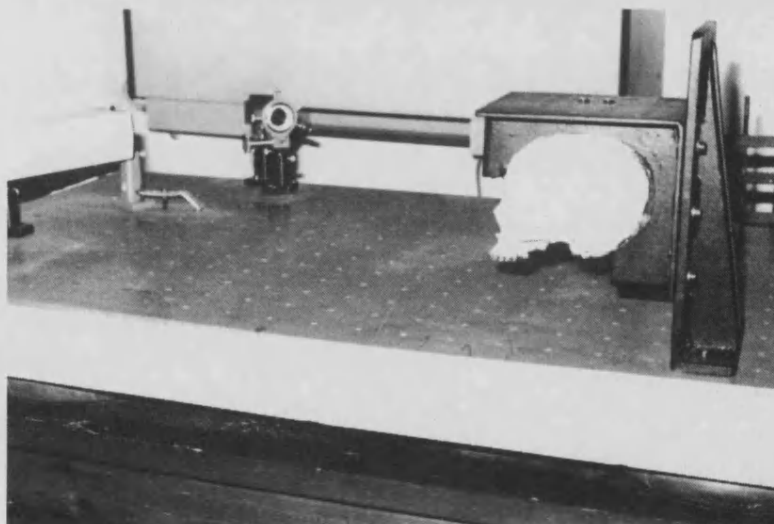


FIGURA III.2.- Vista general de la plataforma simple.



### a) Aislamiento para los niveles mínimos

Para su estudio se tomaron muestras a lo largo de varios días, de los niveles instantáneos de aceleración en períodos de 200 s, cada 0.1 s, sucesivamente en los cuatro puntos de interés: sobre la plataforma simple, la compuesta y sendos puntos del suelo subyacente. Así pues, el límite inferior del rango de vibración quedó adecuadamente caracterizado<sup>28</sup> por el nivel  $L_{90}$ , cuya diferencia en dB, entre sus valores sobre el suelo y la plataforma correspondiente, mide la efectividad de aislamiento (EA) mínima de la plataforma.

Los análisis de regresión por mínimos cuadrados de los puntos experimentales para ambas plataformas ( $EA_{p.simple} = 0.86 \cdot L_{90} - 6.9$ ,  $corr=0.98$ , y  $EA_{p.compuesta} = 0.85 \cdot L_{90} - 6.7$ ,  $corr=0.98$ ) confirman las hipótesis tanto de linealidad como de igualdad de pendientes a nivel de significación<sup>36</sup> superior al 99.9%. Este resultado implica, por tanto, que el comportamiento aislante de la plataforma simple, para los niveles mínimos de vibración, es totalmente equivalente al de la compuesta<sup>29</sup>.

Por otra parte, el intervalo de mínima vibración [ $L_{90,min}$ ,  $L_{10,min}$ ], resultó para la plataforma simple [6.3, 8.8] dB, algo inferior al valor [8, 9] dB obtenido para la compuesta. Ello permite concluir el satisfactorio comportamiento aislante de la plataforma ante las vibraciones correspondientes a los niveles

mínimos, para las condiciones de mayor estabilidad vibracional de su suelo subyacente, asimismo confirmadas por los resultados.

#### b) Aislamiento para los picos de vibración

El estudio del comportamiento de la plataforma ante la aparición de vibraciones debidas a choques en el suelo se realizó produciendo en éste percusiones estandarizadas, en condiciones controladas constantes, dando lugar a niveles máximos de aceleración, medidos directamente con el equipo, iguales en los puntos del suelo situados bajo ambas plataformas. De este modo, si  $a_i$  denota la aceleración máxima producida por el impacto y  $N_i = 20 \cdot \log(a_i/a_0)$  el nivel medido para la  $a_0$  de referencia<sup>18</sup>, la diferencia entre el valor medido en el suelo,  $N_{is}$ , y sobre la plataforma,  $N_{ip}$ , permite determinar la efectividad de aislamiento para el nivel de impacto:  $(ER)_i = N_{is} - N_{ip}$ .

Ahora bien, como  $a_i$  no puede separarse del comportamiento debido al fondo de vibración, el único valor que, en realidad, resulta medible directamente en el suelo, si  $a_f$  es la correspondiente a dicho fondo, es  $N'_{is} = 20 \cdot \log[(a_i + a_f)/a_0]$ . Pero este último valor coincidirá sensiblemente con el  $N_{is}$  buscado (esto es, dentro del margen de error experimental de  $\pm 0.5$  dB), siempre que  $a_i$  sea suficientemente mayor que  $a_f$ , al menos 17 veces, como es

inmediato deducir. Lo cual implica una diferencia de unos 23 dB entre los niveles  $N_{fs}$  y el del fondo:  $N_{fs} = 20 \cdot \log (\theta_f / \theta_0)$ .

De acuerdo con los resultados de la tabla III.1, obtenidos a lo largo de un período suficientemente representativo de las condiciones de muestreo,  $N_{fs}$  presentaba un valor máximo medio de unos 19 dB bajo la plataforma simple y unos 23 dB bajo la compuesta. Por ello, para englobar ambas situaciones, se establecieron unos 46 dB como nivel  $N_{fs}$  mínimo a lograr en las experiencias.

PLATAFORMA SIMPLE		PLATAFORMA COMPUESTA	
$N_{fs}$ máx (dB)		$N_{fs}$ máx (dB)	
20.0	20.3	28.5	21.0
19.0	15.8	19.0	21.3
17.0	15.3	18.0	17.0
22.0	18.0	18.8	29.3
22.0	18.8	34.3	25.5
21.0	17.5	21.5	17.8
Valor medio: 18.9		Valor medio: 22.7	

TABLA III.1.- Valores máximos de los niveles de aceleración en el suelo,  $N_{fs}$ , obtenidos para las condiciones de muestreo.

Con esta finalidad se buscaron el punto de impacto y la intensidad del mismo, hasta que se obtuvo buena prueba de repetitividad cuando en una serie de 15 impactos sucesivos se midieron siempre valores comprendidos entre 48 y 49 dB, independientes por tanto de la vibración de fondo (de variabilidad mucho mayor). Debe observarse que los valores así elegidos no sólo cumplían la condición esencial de independencia del nivel de fondo, sino también la de estar próximos a los 44 dB para los que se había calibrado inicialmente la cadena de medida.

De este modo, los resultados encontrados para los niveles máximos de aceleración sobre ambas plataformas<sup>29</sup>,  $N_p$ , que recoge la tabla III.2 (y a los que ya no tiene sentido atribuir una vibración de fondo, puesto que se deben exclusivamente al choque), permiten inferir, para un  $N_s$  de [48.0,49.0] dB, un  $(EA)_i$  de [21.5,24.2]dB para la plataforma compuesta y de [17.2,19.7] dB para la simple.

Estos resultados confirman la esencialidad del sistema neumático para el aislamiento de las vibraciones estructurales que imponen los niveles mínimos de fondo. Con respecto a los niveles elevados de aceleración, la EA de la plataforma simple es inferior en unos 4dB a la de la compuesta. Sin embargo y pese a ello, el sistema, con un menor tamaño, que supone menores distancias y, por ello, menores variaciones relativas de las mismas durante la vibración, resultó perfectamente útil para su finalidad aislante práctica, siendo el utilizado para la realización sobre él de los

distintos ensayos de interferometría.

Posteriormente se completó la superficie con la adición de una plancha de hierro de 10 mm de espesor, provista de 270 perforaciones roscadas, para servir como fijación de los elementos necesarios. Adicionalmente, los más de 70 kg añadidos, mejoraron notablemente el comportamiento antivibratorio.

	PLATAFORMA SIMPLE	PLATAFORMA COMPUESTA
$N_{is}$ (dB)	48.0 , 49.0	48.0 , 49.0
$N_{ip}$ (dB)	29.3 , 30.8	24.8 , 26.5
$(EA)_i$ (dB)	17.2 , 19.7	21.5 , 24.2

TABLA III.2.- Intervalos experimentales de los niveles de aceleración y de la correspondiente efectividad de aislamiento ante la producción de percusión controlada sobre el suelo, correspondientes a este último y a las plataformas.

## III.2.-MEDIDA TRIDIMENSIONAL DEL DESPLAZAMIENTO

### III.2.1.- CALIBRADO DEL PROCESO DE MEDIDA

A fin de asegurar la corrección del proceso de obtención de los desplazamientos absolutos de los puntos de interés, se procedió a la realización de unas experiencias de calibrado, calculando el desplazamiento mediante otro método, para posterior comparación. Naturalmente, no se trataba de poner en entredicho la bondad de ningún procedimiento ya probado y avalado por experiencias de otros autores<sup>3,36,99</sup>, sino de justificar la suficiente calidad de nuestro propio dispositivo experimental, puesto a punto especialmente para este conjunto de experiencias y establecer así una primera cota de error.

Se utilizó como generador de movimientos controlados un microdesplazador de precisión, que permite la realización de giros con una amplitud de hasta  $3^\circ$ , alrededor de dos ejes ortogonales y coplanarios, en cuyo plano se situó la cara frontal de una lámina circular de cartulina rígida (5 cm de diámetro). En ella se señalaron los dos ejes XY de coordenadas, que previamente se habían hecho coincidir con las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, así como dos puntos (1 y 2) en el eje vertical, separados una distancia de 2.6 cm. La lámina se dispuso paralela al plano de la placa holográfica de registro, de tal forma que los pequeños giros de aquélla dieran lugar a despla

zamientos de los puntos prácticamente en la dirección establecida como eje Z en nuestras experiencias.

En estas condiciones se realizó una serie de 5 interferogramas de doble exposición con giros correspondientes a 2, 4, 6, 8 y 10 divisiones del micrométrico, alrededor del eje horizontal. En la reconstrucción de los interferogramas se apreciaba el objeto cubierto de franjas horizontales alternativamente brillantes y oscuras, de tal forma que el eje de giro aparecía brillante, correspondiendo a una zona de movimiento nulo en el objeto. Las fotografías de los 5 interferogramas se presentan en la figura III.3.

Así pues, se estudió el desplazamiento relativo del punto 2 con respecto al del punto 1, en primer lugar mediante la utilización de la expresión (I.22), donde los ángulos de iluminación y observación fueron  $\beta = 42^\circ$  y  $\gamma = 0^\circ$ . El recuento de franjas se realizó observando el plano determinado por los ejes XY, en dirección normal al mismo, y contando las franjas existentes entre los puntos 1 y 2. Los correspondientes recuentos junto con los desplazamientos,  $dr_{1,2}$ , aparecen en la tabla III.3.

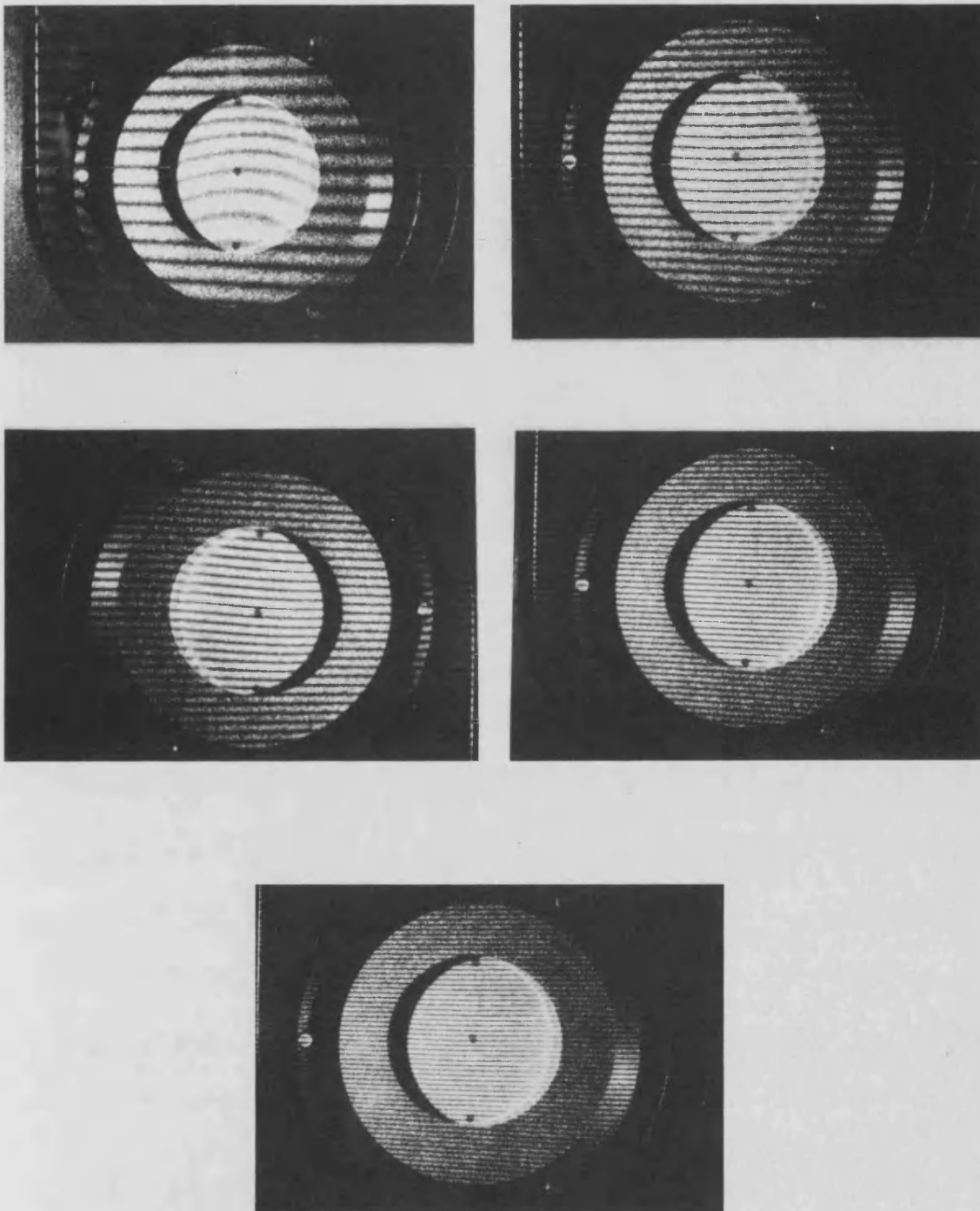


FIGURA III.3.- Fotografías de los Interferogramas de doble exposición del microposicionador de precisión, para giros correspondientes a 2,4,6,8 y 10 divisiones del micrométrico.



DIVISIONES MICROMETRICO	NUMERO DE FRANJAS	$dr_{1,2}$ ( $\mu\text{m}$ )
2	7.00	2.70
4	14.25	5.49
6	16.50	6.31
8	24.50	9.43
10	31.00	11.94

Tabla III.3.- Recuentos de franjas y desplazamientos calculados, correspondientes a los giros del microposicionador de precisión.

Se trata en segundo lugar de cuantificar, simultáneamente, las componentes espaciales del desplazamiento absoluto de ambos puntos, siguiendo el método desarrollado en II.2.2, para contrastar el resultado que se obtenga a partir de las componentes en la dirección Z.

Llegados a este punto de la presente Memoria, es imprescindible profundizar en dos aspectos que estimamos esenciales: uno de tipo general, referido a la estimación de la imprecisión de los resultados obtenidos, y otro, más específico, en el que se deben discutir cuántas y cuáles son las direcciones

de observación que se deben seleccionar para efectuar los recuentos de franjas inherentes al método.

En lo referente al segundo aspecto, precisamente por su carácter de especificidad, pensamos que entra de lleno en la discusión de los resultados que se tratará en el próximo capítulo. No obstante, podemos ya adelantar que los resultados son plenamente aceptables utilizando las direcciones de observación 1,2,3,4,5 de la figura II.7. Estas direcciones, además, se demostrará son las idóneas para el resto de las experiencias sobre el cráneo.

En cuanto al primer aspecto señalado, estimamos que es esencial en el método experimental seguido, y su resolución, una de las justificaciones básicas de la necesidad de este trabajo. Así pues, le dedicaremos el siguiente apartado de este capítulo. No obstante y por razones de estructuración lógica de esta Memoria, concluiremos ahora este punto presentando los resultados del calibrado.

En este sentido, los vectores unitarios para las cinco direcciones de observación se presentan en la tabla III.4 y los recuentos de franjas en la tabla III.5, donde, además, se incluyen los desplazamientos calculados.

PUNTO DEL OBJETO	DIRECCION DE OBSERVACION	$u_x$	$u_y$	$u_z$
1	1	-0.05	-0.11	0.99
	2	-0.42	0.17	0.89
	3	0.34	0.17	0.92
	4	0.33	-0.36	0.88
	5	-0.40	-0.34	0.85
2	1	-0.05	0.11	0.99
	2	-0.41	0.34	0.85
	3	0.33	0.36	0.88
	4	0.34	-0.17	0.92
	5	-0.42	-0.17	0.89

TABLA III.4.- Vectores unitarios de los puntos analizados para las direcciones de observación utilizadas.

DIU.	PTO.	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	$n_{1,4}$	$n_{1,5}$	$daz(\mu m)$	$(daz_2 - daz_1)(\mu m)$
2	1	0.25	0.13	0.13	0.25	-1.07	2.32
	2	-0.25	-0.25	-0.25	-0.13	1.25	
4	1	0.75	0.25	0.25	1.00	-3.30	5.12
	2	-0.38	-0.50	-0.25	-0.13	1.82	
6	1	0.50	0.50	0.75	1.00	-4.02	6.22
	2	-0.50	-0.50	-0.25	-0.25	2.20	
8	1	1.00	0.75	0.75	1.50	-5.82	10.22
	2	-1.00	-1.00	-0.50	-0.50	4.55	
10	1	1.50	1.00	1.00	1.50	-7.21	11.93
	2	-1.00	-1.00	-0.75	-0.50	4.72	

TABLA III.5.- Recuentos de franjas,  $n_{1,j}$ , al cambiar la dirección de observación y desplazamientos absolutos correspondientes en la dirección Z.

Para establecer la comparación entre las medidas del desplazamiento desarrolladas por ambos métodos, puede recurrirse a la representación gráfica de unas en función de las otras (figura III.4), efectuando el correspondiente análisis de regresión por mínimos cuadrados de los puntos experimentales. El índice de correlación de 0.994 indica la bondad del ajuste. Además, como las estimaciones de los parámetros de la línea de regresión obtenidas con este método son estimadores de máxima verosimilitud, pueden obtenerse los intervalos de confianza para los parámetros en cuestión<sup>37,51,52,62,116</sup>.

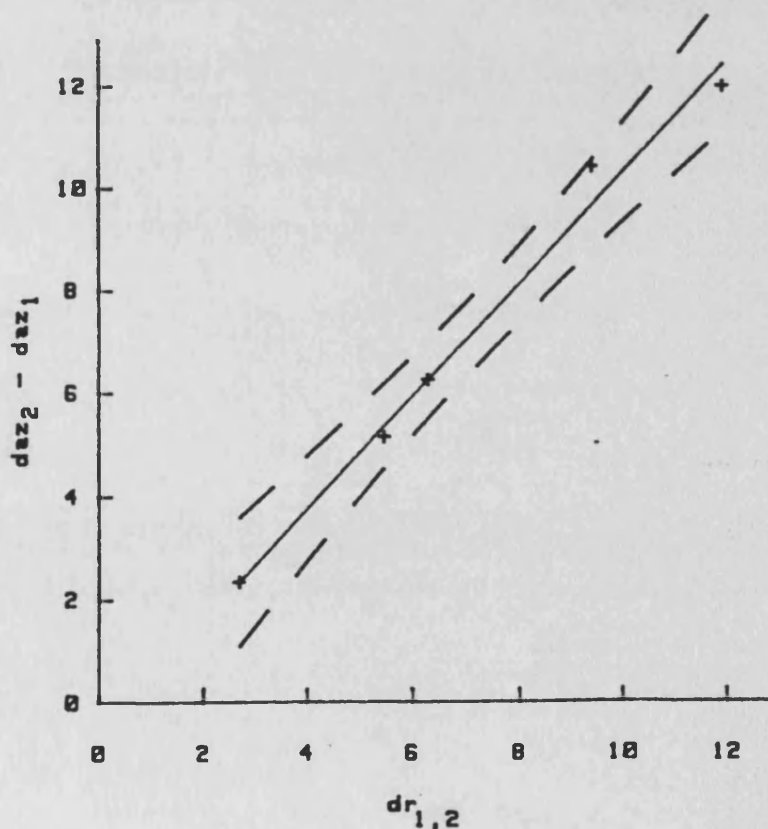


FIGURA III.4.-Relación entre los desplazamientos relativos del punto 2, calculados por los dos métodos descritos. La línea continua es la recta ajustada, de pendiente  $(1.1 \pm 0.2)$ , de ordenada en el origen  $(-0.6 \pm 1.8) \mu\text{m}$  y coeficiente de correlación 0.994. Las líneas de trazos delimitan la región del 95% de confianza.

Con estas consideraciones, el intervalo de confianza del 95 % para la estimación de la pendiente resulta de 0.9 a 1.3, que engloba al valor 1, correspondiente a identidad entre los desplazamientos relativos y las diferencias de los absolutos. Adicionalmente, tal identidad queda corroborada por el hecho de que el intervalo en la estimación de la ordenada en el origen (con la misma confianza) es de (-2.4 a 1.2)  $\mu\text{m}$ , englobando también el 0. Por lo que, en definitiva, queda demostrada la equivalencia de ambos métodos de medida para las condiciones de las experiencias.

### III.2.2.- ESTIMACION DE LOS ERRORES DEL METODO

#### III.2.2.1.- SENSIBILIDAD AL ERROR EN EL RECUESTO DE FRANJAS

Los métodos habituales de propagación de errores presentan una dificultad básica de aplicación a este caso concreto<sup>37,92,93,100,126</sup>. En efecto, debe tenerse en cuenta que se trata de manejar un sistema de ecuaciones sobredeterminado cuya solución debe enfocarse mediante técnicas de regresión, totalmente alejadas de la filosofía de la propagación de errores a las medidas indirectas que dependen funcionalmente, de manera inmediata, de los valores medidos.

Así pues, al no disponer de un sistema de cálculo apropiado, se decidió atacar el problema directamente, desde el

propio concepto del error como incertidumbre del valor: cuando el observador aprecia el paso de un número de franjas  $n$  al efectuar un recuento, y le asigna un error  $\epsilon$  a dicho número, está aceptando que, en términos físicos, el valor de la medida oscila entre  $n-\epsilon$ ,  $n$  ó  $n+\epsilon$ . Como, para obtener las tres componentes del vector de desplazamiento mediante el presente método, son necesarios cuatro recuentos de franjas que designaremos  $n_{1,2}$ ,  $n_{1,3}$ ,  $n_{1,4}$  y  $n_{1,5}$ , mediante el criterio ya descrito nos encontramos con  $3^4$  posibles resultados, correspondientes a las combinaciones de valores.

Nuestra tesis, en este caso, consiste en que la distribución de estos 81 valores es aleatoria y gaussiana, por lo que, siguiendo la norma general de medida de una magnitud física, se puede tomar como resultado el valor medio y aceptar como cota de error válida, la correspondiente a una desviación típica.

Con este objeto, a partir de los recuentos de franjas presentados en la tabla III.5, medidos en los cinco interferogramas a los que nos hemos referido en III.2.1, se calcularon los 81 posibles valores de las tres componentes del desplazamiento de cada punto. Los errores de cada recuento fueron asignados por los observadores según el criterio habitual<sup>101</sup>. Quedaron comprendidos entre  $1/8=0.13$  franja y  $1/4=0.25$  franja. En las tablas III.6 a la III.10 se ofrecen los resultados obtenidos, tras realizar el adecuado agrupamiento de datos por intervalos de clase<sup>116</sup>.

Giro : 2 div.		Punto : 1		$\epsilon$ : 0.13 franja	
dx ( $\mu\text{m}$ )		dy ( $\mu\text{m}$ )		dz ( $\mu\text{m}$ )	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.269	4	-0.195	3	-1.759	5
-0.211	10	-0.113	9	-1.563	10
-0.153	16	-0.030	18	-1.366	16
-0.096	20	0.052	21	-1.170	19
-0.038	17	0.134	18	-0.973	16
0.020	10	0.217	9	-0.777	10
0.077	4	0.300	3	-0.581	5

Giro : 2 div.		Punto : 2		$\epsilon$ : 0.13 franja	
dx ( $\mu\text{m}$ )		dy ( $\mu\text{m}$ )		dz ( $\mu\text{m}$ )	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.309	4	-0.257	3	0.565	5
-0.251	10	-0.174	9	0.761	10
-0.193	16	-0.092	18	0.958	16
-0.135	21	-0.010	21	1.154	19
-0.078	16	0.073	18	1.351	16
-0.020	10	0.155	9	1.574	10
0.038	4	0.237	3	1.743	5

TABLA III.6.- Valores calculados de las componentes del desplazamiento, para todas las posibles combinaciones de  $n-\epsilon$ ,  $n$  y  $n+\epsilon$ , agrupados en intervalos de clase. Experiencia de giro de 2 divisiones de micrométrico.



Giro : 4 div.		Punto : 1		e : 0.13 franja	
dx (μm)		dy (μm)		dz (μm)	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.595	4	-0.151	3	-3.990	5
-0.538	10	-0.069	9	-3.794	10
-0.480	16	0.014	18	-3.597	16
-0.422	21	0.096	21	-3.401	19
-0.365	16	0.178	18	-3.204	16
-0.307	10	0.260	9	-3.008	10
-0.249	4	0.343	3	-2.812	5

Giro : 4 div.		Punto : 2		e : 0.13 franja	
dx (μm)		dy (μm)		dz (μm)	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.384	4	-0.434	3	1.128	5
-0.326	10	-0.352	9	1.324	10
-0.269	16	-0.270	18	1.521	16
-0.211	21	-0.187	21	1.717	19
-0.153	16	-0.105	17	1.914	16
-0.095	10	-0.023	10	2.110	10
-0.038	4	0.060	3	2.306	5

TABLA III.7.- Valores calculados de las componentes del desplazamiento, para todas las posibles combinaciones de  $n-\epsilon$ ,  $n$  y  $n+\epsilon$ , agrupados en intervalos de clase. Experiencia de giro de 4 divisiones de micrométrico.

Giro : 6 div.		Punto : 1		$\epsilon : 0.13$ franja	
dx ( $\mu\text{m}$ )		dy ( $\mu\text{m}$ )		dz ( $\mu\text{m}$ )	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.145	4	-0.392	3	-4.712	5
-0.087	10	-0.309	9	-4.516	10
-0.029	16	-0.227	18	-4.319	16
0.029	20	-0.145	21	-4.123	19
0.086	17	-0.063	18	-3.927	16
0.144	10	0.020	9	-3.730	10
0.202	4	0.102	3	-3.534	5

Giro : 6 div.		Punto : 2		$\epsilon : 0.13$ franja	
dx ( $\mu\text{m}$ )		dy ( $\mu\text{m}$ )		dz ( $\mu\text{m}$ )	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.290	4	-0.401	3	1.512	5
-0.234	10	-0.319	9	1.709	10
-0.174	16	-0.236	18	1.905	16
-0.116	20	-0.154	21	2.101	19
-0.059	17	-0.072	18	2.300	16
-0.001	10	0.011	9	2.494	10
0.057	4	0.093	3	2.691	5

TABLA III.8.- Valores calculados de las componentes del desplazamiento, para todas las posibles combinaciones de  $n-\epsilon$ ,  $n$  y  $n+\epsilon$ , agrupados en intervalos de clase. Experiencia de giro de 6 divisiones de micrométrico.

Giro : 8 div.		Punto : 1		$\epsilon$ : 0.25 franja	
dx ( $\mu\text{m}$ )		dy ( $\mu\text{m}$ )		dz ( $\mu\text{m}$ )	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.605	4	-0.393	3	-7.253	5
-0.485	10	-0.222	9	-6.844	10
-0.365	16	-0.050	18	-6.435	16
-0.244	21	0.121	21	-6.026	19
-0.124	16	0.293	18	-5.617	16
-0.004	10	0.464	9	-5.207	10
0.117	4	0.635	3	-4.798	5

Giro : 8 div.		Punto : 2		$\epsilon$ : 0.25 franja	
dx ( $\mu\text{m}$ )		dy ( $\mu\text{m}$ )		dz ( $\mu\text{m}$ )	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.596	4	-0.825	3	2.967	5
-0.476	10	-0.654	9	3.376	10
-0.356	16	-0.483	18	3.785	16
-0.235	21	-0.311	21	4.195	19
-0.115	16	-0.140	18	4.604	16
0.005	10	0.031	9	5.013	10
0.126	4	0.203	3	5.422	5

TABLA III.9.- Valores calculados de las componentes del desplazamiento, para todas las posibles combinaciones de  $n-\epsilon$ ,  $n$  y  $n+\epsilon$ , agrupados en intervalos de clase. Experiencia de giro de 8 divisiones de micrométrico.

Giro : 10 div.		Punto : 1		$\epsilon$ : 0.25 franja	
$dx(\mu m)$		$dy(\mu m)$		$dz(\mu m)$	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.554	4	0.027	3	-8.638	5
-0.434	10	0.198	9	-8.229	10
-0.313	16	0.370	18	-7.819	16
-0.193	21	0.541	21	-7.410	19
-0.073	16	0.712	18	-7.001	16
0.048	10	0.884	9	-6.592	10
0.168	4	1.055	3	-6.183	5

Giro : 10 div.		Punto : 2		$\epsilon$ : 0.25 franja	
$dx(\mu m)$		$dy(\mu m)$		$dz(\mu m)$	
Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas	Extremos izqdos. interv. de clase	Frecuencias observadas
-0.718	4	-0.643	3	3.286	5
-0.597	10	-0.471	9	3.695	10
-0.477	16	-0.300	18	4.104	16
-0.357	21	-0.129	21	4.514	19
-0.237	16	0.043	18	4.923	16
-0.116	10	0.214	9	5.332	10
0.004	4	0.385	3	5.741	5

TABLA III.10.- Valores calculados de las componentes del desplazamiento, para todas las posibles combinaciones de  $n-\epsilon$ ,  $n$  y  $n+\epsilon$ , agrupados en intervalos de clase. Experiencia de giro de 10 divisiones de micrométrico.

En dichas tablas se aprecia ya, por la regularidad y simetría de las frecuencias observadas de los datos agrupados, una clara distribución gaussiana. Ahora bien, de todos modos, a los grupos de datos se les aplicó la prueba de Kolmogorov-Smirnov<sup>116</sup>, la cual nos permitió asegurar que todas las distribuciones son normales a nivel de significación del 95%.

Por consiguiente, sí es lícito tomar, según anticipábamos, la media aritmética como resultado final de la medida y asignarle, como error, una desviación típica. Dichos valores se ofrecen en la tabla III.11.

Div.	p.	dx	$\sigma_{dx}$	dy	$\sigma_{dy}$	dz	$\sigma_{dz}$
2	1	-0.07	0.08	0.09	0.12	-1.1	0.3
2	2	-0.11	0.08	0.03	0.12	1.3	0.3
4	1	-0.39	0.08	0.14	0.12	-3.3	0.3
4	2	-0.18	0.08	-0.15	0.12	1.8	0.3
6	1	0.06	0.08	-0.10	0.12	-4.0	0.3
6	2	-0.09	0.08	-0.11	0.12	2.2	0.3
8	1	-0.18	0.17	0.2	0.3	-5.8	0.6
8	2	-0.18	0.17	-0.2	0.3	4.4	0.6
10	1	-0.13	0.17	0.6	0.3	-7.2	0.6
10	2	-0.3	0.17	0.0	0.3	4.7	0.6

TABLA III.11.- Valores medios de las distribuciones agrupadas de las tablas III.6 a III.10, con sus desviaciones típicas, en  $\mu\text{m}$ .

Como resultado de la observación de las particularidades de esta tabla se obtiene la serie de consecuencias que a continuación se reseñan. En primer lugar, la proporcionalidad existente entre las desviaciones típicas y los errores asignados a los recuentos de franjas, de modo que al doblarse estos últimos prácticamente se duplican las primeras, sin que parezcan depender de la magnitud de los desplazamientos implicados (en realidad, la constancia se mantiene hasta la cuarta cifra significativa del error, que no se presenta por aplicación de criterios de redondeo).

En segundo lugar, se puede observar que las desviaciones correspondientes a la medida de la componente de desplazamiento en la dirección Z, son apreciablemente superiores a las otras. Esta particularidad nos indica que la situación geométrica utilizada es mucho mejor para medir desplazamientos en el plano XY que para hacerlo en dicha dirección Z. No obstante, incluso esta tercera medida ha demostrado ser suficientemente buena, en el sentido de servir para el calibrado del sistema y comprobar su aceptable rendimiento.

#### III.2.2.2.- SENSIBILIDAD AL ERROR EN LAS MEDIDAS GEOMETRICAS

En el razonamiento desarrollado en el apartado anterior no se ha tenido en cuenta la posible influencia que, en la exactitud de los resultados, pudiera tener el error cometido en

las medidas geométricas conducentes al cálculo de los vectores unitarios en las direcciones de medida. Se hace necesaria, pues, la evaluación de su contribución al error global.

Con este fin, procedimos a realizar un proceso análogo al descrito anteriormente, cuando se pusieron de manifiesto las particularidades de los errores debidos a los recuentos de franjas. Para ello, se modificó el programa de ordenador correspondiente para que realizase los cálculos de las componentes del desplazamiento, incrementando y decrementando los valores de las longitudes en el error de medida, que se estimó en 0.5 mm para todas ellas. Los resultados finales se presentan en la tabla III.12.

Div.	p.	dx	$\sigma_{dx}$	dy	$\sigma_{dy}$	dz	$\sigma_{dz}$
2	1	-0.067	0.002	0.093	0.003	-1.072	0.009
2	2	-0.107	0.002	0.031	0.004	1.252	0.009
4	1	-0.393	0.007	0.137	0.010	-3.30	0.04
4	2	-0.182	0.003	-0.146	0.004	1.815	0.016
6	1	0.058	0.008	-0.104	0.011	-4.02	0.04
6	2	-0.086	0.003	-0.113	0.006	2.200	0.015
8	1	-0.184	0.011	0.207	0.016	-5.82	0.05
8	2	-0.175	0.007	-0.226	0.011	4.40	0.03
10	1	-0.133	0.013	0.627	0.019	-7.21	0.06
10	2	-0.297	0.008	-0.043	0.013	4.72	0.03

TABLA III.12.- Valores medios de las distribuciones para datos agrupados obtenidos al considerar todas las posibles combinaciones de valores de longitudes medidas, con sus desviaciones típicas, en  $\mu\text{m}$ .

De la comparación de los resultados referentes a las desviaciones típicas en las tablas III.11 y III.12, se desprende que las segundas son siempre considerablemente menores que las primeras, de modo que sólo en una ocasión (la  $\sigma_{dx}$  correspondiente a 4 divisiones, en el punto 1) la segunda se acerca al 10% de la primera, sin llegar a alcanzarlo. Esta relación, mayor que un orden de magnitud, tiene como consecuencia inmediata el que se puedan desechar los errores cometidos en la medida de longitudes, sin que por ello sea necesaria su consideración a partir de ahora.

### III.3.- MEDIDA DE DESPLAZAMIENTOS POR INTERFEROMETRIA DE MOTEADO

Para verificar la viabilidad y, simultáneamente, calibrar el proceso de medida de las dos componentes cartesianas en el plano de desplazamientos de mayor magnitud, mediante interferometría de moteado, se recurrió a la utilización de un desplazador lineal provisto de micrométrico. Sobre él se dispuso una lámina plana de aluminio paralela al plano de la placa de registro, situando el micrométrico vertical, con el fin de que los desplazamientos producidos lo fueran en el eje Y, para así establecer una comparación entre su medida ( $ds_y$ ) por interferometría de moteado y la obtenida directamente del microdesplazador calibrado ( $dm_y$ ).



De este modo, se realizó una serie de 9 interferogramas, para distintos desplazamientos. La medida de los mismos se efectuó según el proceso descrito en II.3.2 y los desplazamientos fueron calculados mediante la expresión (II.5). Para ello, se midió el factor de amplificación objeto-placa, resultando ser de 1.05 y la distancia placa-pantalla de 24 cm. La figura III.5 presenta las fotografías de dos halos de difracción modulados por los esquemas de franjas correspondientes.

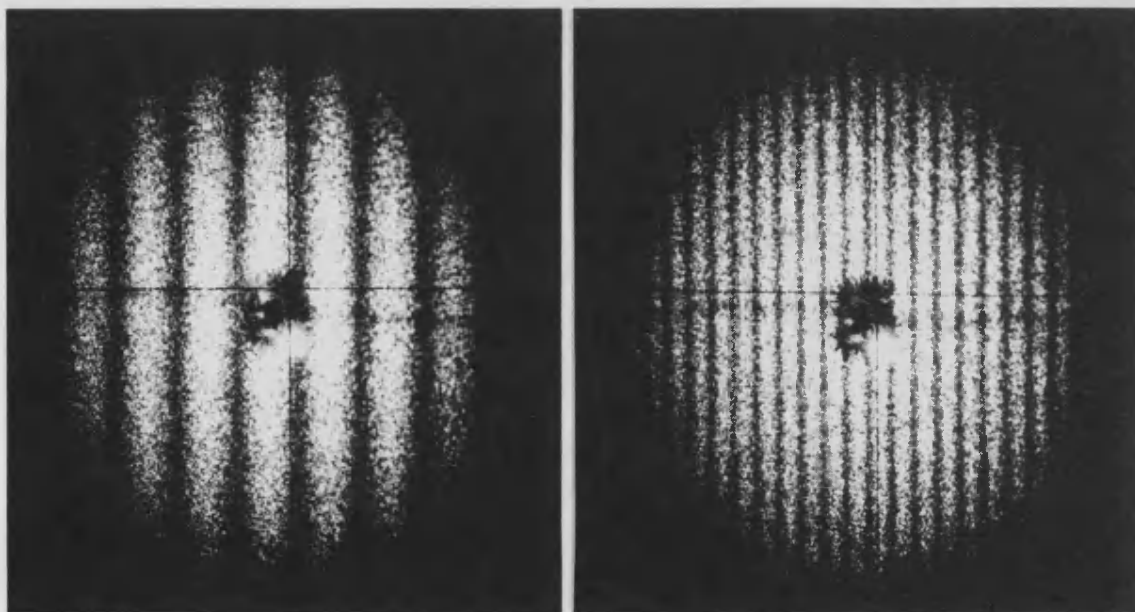


FIGURA III.5.- Halos de difracción modulados por los esquemas de franjas correspondientes a dos experiencias de desplazamiento en el plano. a)  $27.1 \mu\text{m}$ . b)  $67.6 \mu\text{m}$ .

Para medir el espaciado entre franjas, se proyectaron los halos de difracción sobre una pantalla plana, en la que se habían señalado dos ejes ortogonales. La pantalla se dispuso sobre un sistema mecánico de precisión capaz de producir giros y traslaciones, de modo que permitiese situar un eje sobre una franja, para luego trasladarlo paralelamente a sí mismo y medir el espaciado interfranja. La tabla III.13 presenta los valores de los recuentos de franjas,  $n$ , las distancias correspondientes,  $E$ , el espaciado interfranja,  $e_f$ , así como los desplazamientos del objeto calculados mediante dicha técnica,  $ds_y$ , junto con los medidos directamente en el micrométrico del desplazador,  $dm_y$ .

Con respecto a los errores de medida de los desplazamientos, dado que éstos se calcularon mediante la expresión (II.5), se obtuvieron aplicando la ley de propagación de errores de Gauss<sup>9,93,126</sup>. Para ello se identificaron las desviaciones típicas de las magnitudes implicadas de medida directa, con sus correspondientes sensibilidades de determinación<sup>106</sup>.

Concretamente, al incluir los valores de las distancias equivalentes medidas en el objeto y en la placa para hallar el correspondiente factor de amplificación, la mencionada expresión (II.5) se puede reescribir en la forma:

$$d = \frac{L \cdot \lambda \cdot a_o \cdot n}{a_p \cdot E}$$

Las magnitudes de medida directa resultaron:  $L = 24$  cm;  $a_o = 4.40$  cm y  $a_p = 4.61$  cm. La sensibilidad experimental asignada a las medidas geométricas fué de 0.05 cm y la correspondiente a los recuentos de franjas de 0.25 franja. La tabla III.13 presenta también las sensibilidades en cada uno de los desplazamientos, que proporcionan una precisión en las medidas del 1.6%.

n	E(cm)	$e_f$ (mm)	$ds_y$ ( $\mu$ m)	$dm_y$ ( $\mu$ m)
3	2.5	8.3	$17.2 \pm 0.3$	$17 \pm 3$
5	2.7	5.4	$27.1 \pm 0.4$	$27 \pm 3$
5	2.4	4.8	$30.7 \pm 0.5$	$30 \pm 3$
8	3.7	4.6	$31.5 \pm 0.5$	$30 \pm 3$
6	2.3	3.8	$38.5 \pm 0.6$	$40 \pm 3$
9	3.0	3.3	$43.4 \pm 0.7$	$45 \pm 3$
10	2.7	2.7	$59.5 \pm 0.9$	$60 \pm 3$
14	3.0	2.1	$67.6 \pm 1.2$	$67 \pm 3$
9	1.4	1.6	$90.9 \pm 1.6$	$90 \pm 3$

TABLA III.13.- Desplazamientos calculados por interferometría de moteado ( $ds_y$ ) y desplazamientos medidos en el micrométrico ( $dm_y$ ). n:números de franjas, E:distancias en la pantalla,  $e_f$ :espaciados de franjas.

Por otro lado, la figura III.6 muestra la representación gráfica de los desplazamientos calculados a partir de los interferogramas de moteado, en función de los medidos con el microdesplazador.

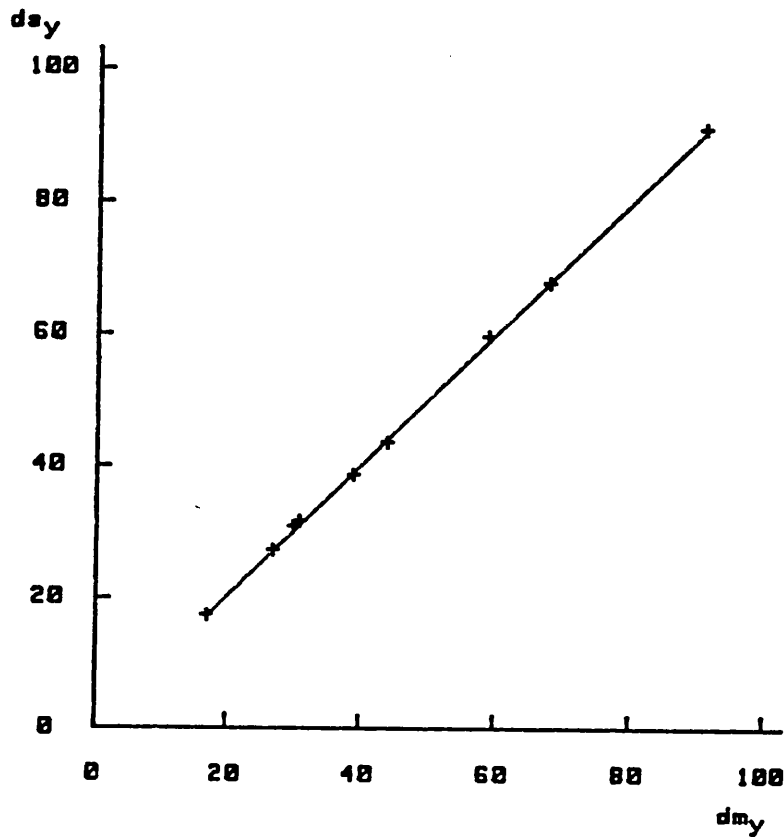


FIGURA III.6.- Desplazamientos del objeto medidos por interferometría de moteado en función de las correspondientes medidas del microdesplazador. La línea continua es la recta ajustada, de pendiente  $0.994 \pm 0.017$ , ordenada en el origen  $(0.3 \pm 0.9) \mu\text{m}$  y coeficiente de correlación 0.9998.

El correspondiente análisis de regresión de los puntos experimentales (figura III.6), proporciona un coeficiente de correlación de 0.9998, sumamente elevado, revelando un muy buen ajuste. Respecto de la estimación de los parámetros del ajuste, con confianza del 95%<sup>37,100</sup>, se obtiene para la pendiente un intervalo de 0.977 a 1.011, muy ajustado al valor 1, de igualdad entre abscisas y ordenadas. Para la ordenada en el origen resulta de

(-0.6 a 1.2)  $\mu\text{m}$ , englobando el valor 0, lo que también demuestra la corrección del proceso de medida.

Dados los valores obtenidos, en la figura III.6 no se han representado las líneas que delimitan la región de 95% de confianza para las estimaciones del desplazamiento medido con los interferogramas de moteado, puesto que se superponen a la recta de regresión.

En conclusión, el método no sólo es viable, sino que tiene una precisión, para el rango de medida de esta experiencia, muy superior a la del micrométrico utilizado para el calibrado.

## **CAPITULO IV**

---

### **RESULTADOS EXPERIMENTALES**

#### **IV.1.- DESPLAZAMIENTOS ABSOLUTOS EN LOS PUNTOS DE INTERES**

IV.1.1.- OBTENCION DE LOS RECIENTOS DE FRANJAS

IV.1.2.- DETERMINACION DE LAS DIRECCIONES OPTIMAS DE MEDIDA

IV.1.3.- CALCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

#### **IV.2.- EJES DE GIRO MAXILARES**

#### **IV.3.- DESPLAZAMIENTOS EN EL PLANO MEDIANTE INTERFEROMETRIA DE MOTEADO**

## **IV.1.- DESPLAZAMIENTOS ABSOLUTOS EN LOS PUNTOS DE INTERES**

### **IV.1.1.- OBTENCION DE LOS RECUENTOS DE FRANJAS**

Tal como se indicó en II.2.2.1, se realizaron dos series de 9 experiencias, analizando el desplazamiento de los cuatro puntos del objeto señalados mediante los números 1,2,3,4 en la figura II.5, al aplicar al cráneo con la arcada superior ferulizada una tracción anterior. Como quedó indicado en II.1.5, en la primera serie, el punto de aplicación de la fuerza se situó a nivel de los incisivos laterales (2+2) y en la segunda, al de los primeros molares permanentes (6+6). Las fuerzas aplicadas en cada exposición, así como sus correspondientes incrementos para cada experiencia, se recogen en la tabla IV.1. Por otro lado, en las figuras IV.2 y IV.3, que se presentarán en las páginas 143-8 para ilustrar los resultados relativos al cálculo de los desplazamientos, quedan incluidas las fotografías de los 18 interferogramas correspondientes a las dos series de experiencias.

Con vistas a la realización del estudio en curso, se efectuaron observaciones de los cuatro puntos del cráneo,

trasladando la dirección de observación desde la rotulada con el número 1, hasta cada una de las marcadas con los números del 2 al 9 en el esquema de la placa presentado en la figura IV.1 (correspondiente al de la figura II.7). Siguiendo el protocolo desarrollado en II.2.2.2, se realizó en primer lugar el cálculo de los vectores unitarios. La tabla IV.2 recoge los valores correspondientes a las tres coordenadas cartesianas de dichos vectores en las nueve direcciones de observación, para cada uno de los cuatro puntos a estudiar.

Seguidamente se midieron los corrimientos de franjas  $n_{1,2}$  al  $n_{1,9}$ , observados al cambiar la dirección de observación de cada uno de los puntos, desde la 1 hasta cada una de las otras ocho, numeradas de 2 a 9 en la figura IV.1, para cada una de las experiencias realizadas. Los valores correspondientes se clasificaron por experiencias, según el punto de aplicación de la fuerza y la magnitud de la misma.

$F_1$ (g)	0	100	200	300	400	500	600	700	800
$F_2$ (g)	100	200	300	400	500	600	700	800	1000
$\Delta F$ (g)	100	100	100	100	100	100	100	100	200

TABLA IV.1.- Fuerzas de tracción aplicadas para la obtención de los sucesivos interferogramas. Durante la primera exposición,  $F_1$ , y en la segunda,  $F_2$ .



PUNTO DEL OBJETO	DIRECCION DE OBSERVACION	$U_x$	$U_y$	$U_z$
1	1	0.10	0.08	0.99
	2	-0.33	0.22	-0.07
	3	0.29	0.20	-0.12
	4	0.30	-0.23	-0.09
	5	-0.34	-0.24	-0.03
	6	0.00	0.23	-0.05
	7	0.31	-0.01	-0.08
	8	0.00	-0.24	-0.01
	9	-0.34	0.00	-0.02
2	1	-0.08	-0.04	1.00
	2	-0.39	0.29	-0.15
	3	0.43	0.30	-0.09
	4	0.43	-0.29	-0.11
	5	-0.38	-0.27	-0.16
	6	0.00	0.32	-0.04
	7	0.44	0.00	-0.06
	8	0.01	-0.31	-0.06
	9	-0.40	0.01	-0.12
3	1	-0.09	0.13	0.99
	2	-0.33	0.22	-0.15
	3	0.37	0.24	-0.10
	4	0.39	-0.28	-0.04
	5	-0.36	-0.27	-0.10
	6	0.01	0.26	-0.07
	7	0.39	-0.01	-0.04
	8	0.00	-0.28	0.00
	9	-0.36	-0.01	-0.01

TABLA IV.2.- Componentes cartesianas de los vectores unitarios en las nueve direcciones de observación, para los cuatro puntos de interés del objeto.

PUNTO DEL OBJETO	DIRECCION DE OBSERVACION	$u_x$	$u_y$	$u_z$
	1	0.13	0.19	0.97
	2	-0.33	0.21	-0.08
	3	0.28	0.18	-0.14
	4	0.31	-0.24	-0.08
4	5	-0.35	-0.25	0.00
	6	-0.01	0.22	-0.07
	7	0.31	-0.02	-0.09
	8	0.00	-0.25	0.02
	9	-0.35	0.00	-0.02

TABLA IV.2.- Continuación.

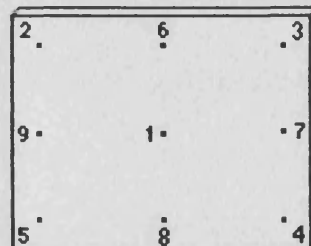


FIGURA IV.1.- Esquema de la placa holográfica, con los puntos determinantes de las nueve direcciones de observación.

Los resultados de la aplicación de la fuerza en (2+2) se presentan en la tabla IV.3 y los relativos al punto de aplicación en (6+6), en la tabla IV.4.

		PUNTO DE APLICACION (2+2)							
$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	PUNTO OBJETO	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	$n_{1,4}$	$n_{1,5}$	$n_{1,6}$	$n_{1,7}$	$n_{1,8}$	$n_{1,9}$
0 → 100	1	5.00	-2.50	-3.50	3.00	1.00	-3.50	-1.00	4.00
	2	0.50	-1.00	-0.75	0.75	0.00	-0.75	0.00	0.50
	3	4.25	-6.00	-4.75	6.25	-1.00	-5.50	1.00	5.25
	4	6.00	-4.00	-6.00	4.00	2.00	-4.00	-2.00	6.00
100 → 200	1	7.00	-2.50	-7.00	3.00	2.50	-4.50	-2.00	5.00
	2	2.00	-1.50	-2.00	1.50	0.50	-2.00	-0.50	2.00
	3	6.00	-6.00	-6.50	6.00	0.00	-6.50	0.00	6.00
	4	8.00	-3.00	-8.00	5.00	2.00	-5.00	-2.00	7.00
200 → 300	1	4.50	-2.50	-4.50	2.50	1.25	-3.50	-1.50	3.50
	2	1.25	-1.00	-1.25	0.75	0.13	-1.25	-0.13	1.00
	3	3.25	-4.50	-4.50	4.00	0.00	-4.50	0.00	3.75
	4	6.00	-3.00	-6.00	4.00	1.50	-5.00	-1.50	5.00
300 → 400	1	7.50	-3.50	-7.00	3.50	1.50	-5.50	-1.25	5.75
	2	3.25	-2.50	-2.75	2.25	0.25	-2.75	-0.25	3.00
	3	6.00	-7.50	-7.50	7.00	0.00	-7.00	0.50	7.00
	4	8.00	-7.00	-9.00	7.00	3.00	-7.00	-3.00	7.00

TABLA IV.3.- Recuentos de franjas en los cuatro puntos de interés del objeto. Puntos de aplicación de la fuerza en (2+2).

		PUNTO DE APLICACION (2+2)							
$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	PUNTO OBJETO	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	$n_{1,4}$	$n_{1,5}$	$n_{1,6}$	$n_{1,7}$	$n_{1,8}$	$n_{1,9}$
400 → 500	1	8.00	-4.00	-6.50	4.50	2.00	-5.00	-2.00	6.00
	2	3.50	-2.75	-3.50	2.50	0.50	-3.50	-0.50	3.25
	3	7.00	-7.00	-7.00	7.00	0.00	-7.00	0.00	7.00
	4	6.00	-6.00	-7.00	6.00	2.00	-5.00	-2.00	6.00
500 → 600	1	6.50	-4.50	-7.00	4.00	1.50	-6.00	-1.50	5.50
	2	2.75	-2.75	-3.50	2.00	0.50	-2.50	-0.50	3.00
	3	5.25	-8.00	-7.00	6.00	-0.75	-7.50	0.25	6.00
	4	9.00	-7.00	-9.00	7.00	1.50	-7.00	-2.00	8.00
600 → 700	1	5.75	-3.50	-5.50	4.00	1.25	-4.50	-1.00	5.00
	2	3.00	-2.75	-3.00	2.50	0.25	-3.00	-0.25	3.00
	3	5.50	-7.00	-5.50	6.00	-0.75	-6.00	0.75	5.50
	4	8.00	-5.00	-7.00	5.50	1.00	-6.00	-1.00	6.50
700 → 800	1	3.25	-3.00	-4.00	2.25	0.50	-3.00	-0.75	2.75
	2	2.00	-2.00	-2.50	1.75	0.25	-2.50	-0.25	2.00
	3	3.00	-5.00	-4.00	5.00	-0.50	-4.50	0.50	3.75
	4	5.00	-4.00	-5.00	4.00	1.00	-4.50	-1.00	4.00
800 → 1000	1	9.00	-8.00	-8.00	8.00	1.50	-8.00	-1.50	8.00
	2	5.00	-7.00	-7.00	4.50	0.50	-7.00	-0.75	5.50
	3	10.00	-12.00	-9.00	12.00	-1.00	-11.00	1.50	10.00
	4	12.00	-10.00	-10.00	9.00	2.00	-10.00	-2.00	9.00

TABLA IV.3.- Continuación.

		PUNTO DE APLICACION (6+6)							
$F_1 \rightarrow F_2$	PUNTO	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	$n_{1,4}$	$n_{1,5}$	$n_{1,6}$	$n_{1,7}$	$n_{1,8}$	$n_{1,9}$
(g)	OBJETO								
0 → 100	1	2.75	-0.25	-3.00	0.25	1.25	-2.00	-1.75	1.50
	2	0.25	1.75	-0.25	-0.50	1.00	0.75	-1.00	-0.25
	3	2.00	-2.00	-3.00	2.00	0.25	-2.25	-1.00	2.00
	4	4.00	-4.00	-1.50	1.75	2.50	-2.75	-2.00	3.00
100 → 200	1	5.00	-3.50	-4.00	4.00	0.75	-4.50	-0.50	4.50
	2	1.25	-1.00	-0.75	1.25	0.25	-1.00	-0.13	1.25
	3	4.00	-4.50	-4.50	5.00	0.00	-5.00	0.00	5.00
	4	6.00	-5.00	-6.00	5.50	1.50	-6.00	-1.50	6.00
200 → 300	1	2.75	-0.25	-3.00	0.25	1.25	-2.00	-1.75	1.50
	2	0.25	1.75	-0.25	-0.50	1.00	0.75	-1.00	-0.25
	3	2.00	-2.00	-3.00	2.00	0.25	-2.25	-1.00	2.00
	4	4.00	-4.00	-1.50	1.75	2.50	-2.75	-2.00	3.00
300 → 400	1	0.75	-1.75	-2.75	2.00	1.00	-2.50	-1.00	3.00
	2	2.50	-2.00	-2.00	2.50	0.20	-2.00	-0.13	2.50
	3	4.00	-5.00	-4.00	5.00	-0.25	-5.00	0.50	4.50
	4	5.50	-3.50	-5.00	3.50	1.00	-3.50	-1.00	4.00

TABLA IV.4.- Recuentos de franjas en los cuatro puntos de interés del objeto. Puntos de aplicación de la fuerza en (6+6).

		PUNTO DE APLICACION (6+6)							
$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	PUNTO OBJETO	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	$n_{1,4}$	$n_{1,5}$	$n_{1,6}$	$n_{1,7}$	$n_{1,8}$	$n_{1,9}$
400 → 500	1	3.75	-2.00	-3.50	2.00	1.00	-3.00	-1.00	3.00
	2	2.75	-2.25	-2.75	2.25	0.50	-2.50	-0.25	2.50
	3	4.50	-5.50	-5.00	5.00	0.00	-5.50	0.25	5.50
	4	6.00	-4.00	-5.50	4.00	1.50	-5.00	-1.50	4.50
500 → 600	1	6.00	-3.50	-6.00	5.00	1.00	-5.00	-1.00	5.00
	2	4.25	-3.50	-3.75	3.25	0.25	-4.00	-0.25	3.75
	3	8.00	-8.00	-7.00	7.00	-1.50	-7.00	1.00	7.00
	4	9.00	-6.00	-8.00	6.00	2.00	-7.00	-1.50	8.00
600 → 700	1	5.00	-2.50	-4.50	3.00	1.00	-4.00	-1.00	3.50
	2	3.75	-2.75	-3.00	3.00	0.50	-3.00	-0.25	3.50
	3	6.00	-7.00	-7.00	6.00	-0.50	-6.00	0.50	6.00
	4	7.00	-5.00	-6.00	4.00	1.00	-5.00	-1.00	6.00
700 → 800	1	5.00	-3.00	-5.00	3.50	1.00	-4.00	-1.00	4.00
	2	3.75	-3.50	-4.00	3.00	0.25	-4.00	-0.25	3.25
	3	6.00	-7.00	-7.00	6.00	-1.00	-7.00	1.00	6.00
	4	8.00	-6.00	-8.00	6.00	1.00	-6.00	-1.00	7.00
800 → 1000	1	10.00	-5.00	-8.00	6.00	1.50	-7.00	-2.00	8.00
	2	7.00	-8.00	-8.00	6.00	0.50	-8.00	-1.00	6.50
	3	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	4	12.00	-9.00	-10.00	10.00	3.00	-8.00	-3.00	10.00

TABLA IV.4.- Continuación.

#### IV.1.2.- DETERMINACION DE LAS DIRECCIONES OPTIMAS DE MEDIDA

Aunque desde un punto de vista matemáticamente estricto, para la obtención de las tres componentes cartesianas del desplazamiento es suficiente el conocimiento de, únicamente, tres recuentos de franjas, ya se justificó en I.1.3.3 que se puede mejorar el método con un conjunto sobredeterminado de datos. Con este objeto, se realizó un estudio con vistas a determinar el número óptimo de direcciones de observación, de modo que, a partir de él, se forme el mínimo conjunto de ecuaciones lineales simultáneas que proporcione los correspondientes desplazamientos.

Este estudio consistió en el cálculo de los desplazamientos a partir de todas las posibles combinaciones de direcciones de observación, para escoger las óptimas. Para ello, en primer lugar, se hacía necesaria la elaboración de un criterio que permitiese ordenar las distintas combinaciones según su calidad. En este sentido nos pareció más coherente, y con un significado evidente, el que minimiza los errores de  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ , calculados como desviación típica<sup>101,106</sup>, según se discutió en III.2.2.1. Además, dado que la sensibilidad del método de cálculo es independiente del intervalo de fuerza empleado, se estimó suficiente centrar este estudio en un solo incremento de fuerza, el (0→100)g, con aplicación de la misma en (2+2), para los cuatro puntos de interés del objeto.

De este modo, para cada uno de los puntos objeto, se

desarrolló el protocolo detallado a continuación. En primer lugar se realizó el cálculo del error cometido en las tres componentes del desplazamiento, al tomar las 56 posibles combinaciones de cuatro direcciones de observación, manteniendo como fija la marcada con el número 1. Seguidamente, se efectuaron sendas clasificaciones correspondientes a las tres componentes. A continuación se llevó a cabo el mismo proceso para el caso de 5, 6, 7, 8 y 9 direcciones de observación, clasificando los conjuntos de direcciones de observación en los mismos intervalos de error, para poder establecer comparaciones. La tabla IV.5 presenta los resultados del punto 1 para todas las direcciones, habiéndose omitido sistemáticamente la referencia explícita a dicho punto con el número 1, por razones de brevedad. El mismo proceso se realizó con los restantes puntos del cráneo, recogiendo las tablas IV.6 a IV.8, los valores obtenidos.

Al analizar los resultados reflejados en dichas tablas, se observa, de inmediato, una serie de características:

a) Cuando se comparan los valores correspondientes a cuatro direcciones, se puede apreciar que sólo la combinación «257» se repite con una frecuencia que pueda considerarse significativa en los intervalos de menor error. Sin embargo, esta consideración no es fiable, puesto que la misma configuración geométrica, por razones de simetría, ofrece la combinación 349 ó, incluso, las 238 y 456, que no aparecen con la misma frecuencia en dichos intervalos de clase. Por tanto, estimamos directamente desechables las combinaciones de sólo cuatro direcciones, y nos afirmamos en



nuestra idea primitiva de que la solución se debe buscar en un sistema de ecuaciones sobredeterminado, como ya se había adelantado.

b) Revisando ahora los datos referidos a cinco o más direcciones de observación se aprecia que, para todos los puntos analizados y tanto para  $\sigma_x$ , como para  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , en todos los casos, los conjuntos de direcciones que contienen las 2345 aparecen incluidos en los intervalos de clase de menor error. Para que se aprecie visualmente este hecho, hemos destacado las referencias a tales direcciones utilizando negritas en todas las tablas presentadas.

c) En este mismo conjunto de resultados, del que se han excluido ya los referentes a cuatro direcciones de observación, se aprecia que los límites del intervalo de clase en que aparece el error mínimo, para todos los puntos y para las tres componentes, se estabilizan desde el valor correspondiente a las cinco direcciones; por lo que no es justificable la utilización de más mediciones.

Así pues, las direcciones de observación que utilizaremos en las medidas experimentales serán las señaladas con 12345, que corresponden al punto central y a los cuatro puntos, señalados en la figura IV.1, en las cercanías de los vértices de la placa. Lo cual, por otra parte, no deja de ser un resultado esperable, puesto que se trata de los cambios en la dirección de observación que, partiendo del centro, subtienden un ángulo sólido mayor: es evidente que la incorporación de nuevas rectas visuales no puede ya aumentar la amplitud de dicho ángulo, al menos sin añadir una mayor superficie de placa.

PUNTO 1		4 DIRECCIONES												
		$\sigma_x$												
0.20-0.30	0.31-0.40	0.41-0.50			0.51-0.60			>0.60						
<b>257</b>	235	234	<b>238</b>	278	236	237	246	247	248	256				
	239	279	<b>345</b>	<b>349</b>	249	258	259	268	269	289				
	245	369	<b>379</b>	<b>389</b>	267	346	<b>347</b>	<b>348</b>	<b>356</b>	<b>357</b>				
	459	<b>456</b>	458	469	359	358	367	368	378	457				
		479	489	567	578	467	468	478	568	569				
		579	679	789	689	589	678							
		$\sigma_y$												
		0.41-0.50	0.51-0.60		0.61-0.70			>0.70						
	245	235	234	<b>238</b>	236	237	239	246	247					
	<b>345</b>	<b>257</b>	268	278	248	249	256	259	267					
	<b>456</b>	258	289	368	269	279	346	<b>347</b>	<b>356</b>					
		348	378	389	357	358	359	367	369					
		<b>349</b>	468	469	379	457	458	459	467					
			567	568	478	479	489	569	578					
			678	689	579	589	679	789						
		$\sigma_z$												
1.36-1.50		>1.50												
234	235	236	237	<b>238</b>	239	245	248	249	256	<b>257</b>	258	259	267	268
246	269	278	279	289	345	346	347	348	<b>349</b>	356	357	358	359	367
247	368	369	378	379	389	<b>456</b>	457	458	459	467	468	469	478	479
	489	567	568	569	578	579	589	678	679	689	789			

TABLA IV.5.- Distribución de las combinaciones de direcciones de observación en intervalos de desviación típica ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ), para 4, 5, 6, 7, 8 y 9 direcciones, correspondientes al punto 1 analizado en el cráneo.

PUNTO 1		5 DIRECCIONES										
$\sigma_x$												
0.20-0.30		0.31-0.40				0.41-0.50		0.51-0.60		>0.60		
2345	2357	2348	2349	2356	2358	2346	2347	2467	2568	2569		
2359	2389	2368	2369	2378	2379	2367	2478	2468	2589	3467		
2456	2457	2469	2479	2489	2679	2678	3457	2689	3468	3478		
2458	2459	2789	3456	3469	3479	3458	3567	3568	3678	4678		
2567	2578	3489	3569	3579	3589	3578	3689	5689				
2579	3459	3679	3789	4567	4568	4578	4689					
4569	4589	4579	4679	4789	5679	5678						
		5789	6789									
$\sigma_y$												
0.30-0.40		0.41-0.50				0.51-0.60		0.61-0.70		>0.70		
2345	2456	2348	2357	2358		2346	2347	2349	2467	2367	2369	
2458	3456	2457	2459	2468		2356	2359	2368	3569	2379	2479	
3458	4568	2567	2568	2578		2378	2389	2469	4578	2569	2679	
		2589	3457	3459		2478	2489	2579	4589	3467	3579	
		3468	3469	3478		2678	2689	2789		3679	4579	
		3489	3568	4567		3479	3567	3578				
		4569	4678	4689		3589	3678	3689				
		5678	5689			3789	4679	4789				
						5679	5789	6789				
$\sigma_z$												
0.90-1.05		1.06-1.20		1.21-1.35		1.36-1.50				>1.50		
2345	2349	2348	2358	2346	2347	2356	2367	2368	2369	2378	2379	2389
	2357	2456	2457	2359	2458	2459	2568	2569	2579	2589	2678	2679
		2469	2478	2467	2468	2489	2689	2789	3467	3468	3478	3678
		2479	3456	2567	2578	3457	3679	3689	3789	4567	4568	4569
		3459	3567	3458	3469	3479	4578	4579	4589	4678	4679	4689
		3579		3489	3568	3569	4789	5678	5679	5689	5789	6789
				3578	3589							

TABLA IV.5.- Continuación.

PUNTO 1										6 DIRECCIONES																																																							
$\sigma_x$																																																																	
0.20-0.30										0.31-0.40					>0.40																																																		
23456	23457	23458	23459	23469	23479	23468	23478	23678	23467	23489	23567	23568	23569	23578	23579	24679	24689	24789	24678	23589	23679	23689	23789	24567	24568	34567	34568	34679	25689	24569	24578	24579	24589	25678	25679	34689	34789	35679	34578	25789	26789	34569	34579	34589	45679	35689	35789	36789	34678	45689	45789	56789				45678	46789		35678						
$\sigma_y$																																																																	
0.30-0.40										0.41-0.50					>0.50																																																		
23456	23457	23458	23459	23469	23478	23567	23569	23467	23479	23468	23489	23568	23578	23579	23589	24579	24678	23678	23679	24567	24568	24569	24578	24689	24789	25679	25689	23689	23789	24589	25679	25789	34567	26789	34579	34678	34679	24679	35679	34568	34569	34578	34589	34789	35678	35689	35789	45789		34689	45678	45689				36789	45679	46789	56789						
$\sigma_z$																																																																	
0.90-1.05				1.06-1.20				1.21-1.35				1.36-1.50				>1.50																																																	
23456	23469	23479	23489	23468	23478	23467	23569	23789	23678	23679	23457	23567	23578	23579	23568	23589	24568	24589	25678	23689	25689	23458	24567	24578	24579	24569	24678	25679	25789	34578	26789	34678	23459	24679	24789	34569	24689	34567	34679	34689	34789	36789	45678							34568	35678	45679	45689	45789							35689			46789	56789

TABLA IV.5.- Continuación.

PUNTO 1										7 DIRECCIONES																	
$\sigma_x$																											
0.20-0.30										>0.30																	
234567	234568	234569	234578	234579	234589	234679	234689	234789	234678	235678	235679	235689	235789	236789	245678	245679	245689	245789	345678	246789	256789	345679	345689	345789	356789	456789	346789
$\sigma_y$																											
0.30-0.40										>0.40																	
234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234689	234679	235679	234789	235678	235689	235789	245678	245679	245689	245789	236789	246789	256789	345678	345679	345689	345789	346789	456789	356789
$\sigma_z$																											
0.90-1.05										>1.05																	
234567	234568	234569	234678	234679	234689	235678	235679	235689	235789	234578	234579	234589	236789	245678	245679	245689	245789	246789	256789	234789	345678	345679	345689	345789	346789	356789	456789

TABLA IV.5.- Continuación.

PUNTO 1				8 DIRECCIONES			
$\sigma_x$ 0.20-0.30				$\sigma_y$ 0.20-0.30			
2345678	2345679	2345689	2345789	2345678	2345679	2345689	2345789
2346789	2356789	2456789	3456789	2346789	2356789	2456789	3456789
0.90-1.05				$\sigma_z$ >1.05			
2345678	2345679	2345689	2345789	2356789	2456789		
2346789	3456789						
PUNTO 1				9 DIRECCIONES			
$\sigma_x$ 0.20-0.30		$\sigma_y$ 0.20-0.30		$\sigma_z$ 0.90-1.05			
23456789		23456789		23456789			

TABLA IV.5.- Continuación.

PUNTO 2										4 DIRECCIONES									
										$\sigma_x$									
0.10-0.15				0.16-0.20				0.21-0.30				>0.30							
234	237	238	257	235	236	239	245	246	248	256	258	259	268	269					
267	279	345	349	247	278	357	369	249	356	289	346	347	348	367					
379	456	457	479	389	458	459	469	358	359	368	378	467	468	478					
578	579	679	789	489	567			678		568	569	589	689						
										$\sigma_y$									
0.15-0.20				0.21-0.25				0.26-0.30				>0.30							
234	235	238	256	245	257	259	246	248	236	237	239	247	249						
268	345	346	349	278	347	348	258	289	267	269	279	357	359						
368	468	568	678	389	456	467	356	358	367	369	379	457	458						
689				469	567	569	378	679	459	478	479	489	578						
							789		579	589									
										$\sigma_z$									
0.41-0.45					>0.45														
234	235	245	246	247	236	237	238	239	256	258	259	267	268						
248	249	257	345	349	269	278	279	289	346	347	348	367	368						
256	257	258	259	369	378	379	389	456	457	458	459	467							
				468	469	478	479	489	567	568	569	578							
				579	589	678	679	689	789										

TABLA IV.6.- Distribución de las combinaciones de direcciones de observación en intervalos de desviación típica ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ), para 4, 5, 6, 7, 8 y 9 direcciones, correspondientes al punto 2 analizado en el cráneo.

PUNTO 2											5 DIRECCIONES										
											$\sigma_x$										
0.05-0.10			0.11-0.15			0.16-0.20			0.21-0.25			>0.25									
2345	2346	2347	2348	2356	2357	2358	2468	3678	2568												
2349	2359	2367	2368	2369	2378	2389	2489	4678	2569												
2379	2456	2457	2458	2459	2467	2469	3568		2589												
3459	2478	2479	2567	2578	2579	2678	3569		2689												
3479	2679	2789	3456	3457	3458	3469	4589		3467												
4579	3489	3567	3578	3579	3589	3679			3468												
	3689	3789	4567	4568	4569	4578			3478												
	4679	4689	4789	5678	5679	5789			5689												
	6789																				
											$\sigma_y$										
0.10-0.15			0.16-0.20			0.21-0.25			0.25-0.30			>0.30									
2345	2346	2347	2349	2356	2357	2359	2459	2467	2367	2379											
2348	2358	2368	2378	2389	2457	2458	2489	2589	2369	4578											
2456	2568	2468	2469	2478	2567	2569	2679	3569	2479	4579											
3456	3467	2578	2579	2678	2689	2789	3578	3679	3579	4589											
3468	3469	3457	3458	3459	3478	3479	5679		4789												
		3489	3567	3568	3589	3678			5789												
		3689	3789	4567	4568	4569															
		4678	4679	4689	5678	5689															
		6789																			
											$\sigma_z$										
0.25-0.30			0.31-0.35			0.36-0.40			0.41-0.45			>0.30									
2345	2349	2348	2358	2346	2347	2356	2367	2368	2369	2378	2379										
	2357	2456	2459	2359	2389	2458	2568	2569	2589	2678	2679										
	2459	2468	2469	2467	2567	2789	2689	3467	3468	3478	3678										
	2479	2478	2489	3457	3458	3469	3679	3689	4567	4588	4578										
	3459	2578	2579	3479	3489	3569	4579	4589	4678	4689	4789										
	3579	3456	3567	3578	3789	4569	5678	5689	5789	6789											
		3568	3589	4679	5679																

TABLA IV.6.- Continuación.



PUNTO 2					6 DIRECCIONES					
$\sigma_x$										
0.05-0.10					0.11-0.15				>0.15	
23456	23457	23458	23459	23467	23568	23569	23589	23678	23689	34678
23468	23469	23478	23479	23489	24568	24569	24589	24678	24679	25689
23567	23578	23579	23679	23789	24689	24789	25678	25679	25789	
24567	24578	24579	34567	34569	26789	34568	34578	34689	35678	
34579	34589	34679	34789	45679	35679	35689	35789	36789	45678	
45789					45689	46789	56789			
$\sigma_y$										
0.10-0.15					0.16-0.20				>0.20	
23456	23457	23458	23459	23467	23468	23479	23569	23579	23789	24578
23469	23478	23489	23567	23568	23578	24579	24589	24679	24689	24789
23589	23678	23689	24567	24568	24569	25789	26789	34578	34579	35678
24678	25678	25679	25689	34567	34568	35679	35789	36789	45678	45679
34569	34589	34678	34679	34689	34789	45689	46789	56789		
35689										
$\sigma_z$										
0.25-0.30		0.31-0.35			0.36-0.40			0.41-0.45		>0.30
23456	23469	23479	23489	23567	23468	23478	23568	23467	23689	23678
23457	23578	23579	23589	24567	23569	23789	24589	26789	34578	23679
23458	24568	24569	24578	24579	24678	24689	25678	34679	36789	25689
23459	24679	24789	34569	34579	25679	25789	34567	45678	45689	34678
	34589	35679	35789		34568	34689	34789	46789	56789	45789
					35678	35689	45679			

TABLA IV.6.- Continuación.

PUNTO 2										7 DIRECCIONES																			
										$\sigma_x$																			
										0.05-0.10					>0.10														
234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	235689	245689	234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	235689	245689										
234689	234789	235678	235679	235789	236789	245678	245679	246789	256789	234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	235689	245689										
245789	345678	345679	345689	345789	356789	456789		356789		234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	235689	245689										
										$\sigma_y$																			
										0.10-0.15					>0.15														
234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	456789	234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	235689	245689										
234789	235678	235679	235689	235789	236789	245678	245679	245689		234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	235689	245689										
245789	246789	256789	345678	345679	345689	345789	346789	356789		234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	235689	245689										
										$\sigma_z$																			
										0.25-0.30			0.31-0.35			>0.35													
234567	234568	234569	234578	234679	234689	235678	235679	234678	236789	234567	234568	234569	234578	234679	234689	235678	235679	234678	236789										
234579	234589	234789	235789	235689	245678	245689	245789	256789	345678	234567	234568	234569	234578	234679	234689	235678	235679	234678	236789										
245679	345679			246789	345689	345789	356789	346789	456789	234567	234568	234569	234578	234679	234689	235678	235679	234678	236789										
										PUNTO 2										8 DIRECCIONES									
										$\sigma_x$			$\sigma_y$			$\sigma_z$													
										0.05-0.10			0.10-0.15			0.25-0.30													
2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	234568	234568	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	234568	234568										
2345789	2346789	2356789	2345789	2346789	2356789	2345789	2346789	2356789	2345789	2345678	2345679	2345689	2345789	2346789	2356789	2345789	2346789	2356789	2345789										
2456789	3456789		2456789	3456789		2456789	3456789	2456789	3456789	2345678	2345679	2345689	2345789	2346789	2356789	2345789	2346789	2356789	2345789										
										PUNTO 2										9 DIRECCIONES									
										$\sigma_x$			$\sigma_y$			$\sigma_z$													
										0.05-0.10			0.10-0.15			0.25-0.30													
										23456789				23456789				23456789											

TABLA IV.6.- Continuación.

PUNTO 3										4 DIRECCIONES									
										$\sigma_x$									
0.25-0.35					0.36-0.45					0.46-0.55					>0.55				
234	237	<b>238</b>	<b>257</b>		235	236	245	247		239	248				246	249	256	258	259
279	345	<b>349</b>	379		267	278	357	389		358	369				268	269	289	<b>346</b>	<b>347</b>
<b>456</b>	457	479	579		458	469	489	567		459	678				348	356	359	367	368
679	789				578										378	467	468	478	568
															569	589	689		
										$\sigma_y$									
0.35-0.45					0.46-0.55					0.56-0.65					>0.65				
245					234					235	<b>238</b>	248	258		236	237	239	246	247
345					<b>257</b>					268	278	289	348		249	256	259	267	269
<b>456</b>					<b>349</b>					358	368	378	389		279	346	347	356	357
					567					458	468	489	568		359	367	369	379	457
										578	678	689	789		459	467	478	479	569
															579	589	679		
										$\sigma_z$									
0.96-1.10					1.11-1.25					>1.25									
235					234	245				236	237	<b>238</b>	239	256	258	259	267		
356					246	247				268	269	278	279	289	346	347	348		
359					248	249				367	368	369	378	379	389	<b>456</b>	457		
					<b>257</b>	345				458	459	467	468	469	478	479	489		
					<b>349</b>	357				567	568	569	578	579	589	678	679		
					358					689	789								

TABLA IV.7.- Distribución de las combinaciones de direcciones de observación en intervalos de desviación típica ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ), para 4, 5, 6, 7, 8 y 9 direcciones, correspondientes al punto 3 analizado en el cráneo.

PUNTO 3										5 DIRECCIONES																																																																													
										$\sigma_x$																																																																													
0.15-0.25					0.26-0.35					0.36-0.45					0.46-0.55					>0.55																																																																			
2345	2347	2346	2348	2357	2358	2367	2356	2359	3678	2568	2349	2379	2368	2378	2389	2456	2458	2369	2468	4678	2569	2457	3457	2459	2467	2478	2479	2567	2469	2489		2589	3459	3479	2578	2579	2678	2679	2789	3568	3569		2689	4567	4578	3456	3458	3469	3489	3567	3589	3689		3467	4579		3578	3579	3679	3789	4568	4589			3468			4569	4679	4689	4789	5678				3478			5679	5789	6789						5689
										$\sigma_y$																																																																													
0.25-0.35					0.36-0.45					0.46-0.55					0.56-0.65					>0.65																																																																			
2345		2348	2349	2358	2346	2347	2356	2357	2467	2369	2456		2457	2459	2468	2359	2368	2378	2389	2479	2369	2458		2567	2578	3457	2469	2478	2489	2568	2689	2379	3456		3459	3469	3478	2579	2589	2678	2789	3569	2569	3458		3479	3489	3568	3468	3567	3578	3589	3578	2679	4568		4567	4569	4689	3689	3789	4578	4589	3678	3467			5678	6789		4678	4679	4789	5679	4579	3679						5689	5789				
										$\sigma_z$																																																																													
0.65-0.80				0.81-0.95				0.96-1.10				1.11-1.25				>1.25																																																																							
2345		2349		2346	2347	2348	2378	2389	2367	2368	2369	2379		2357		2356	2359	2456	2458	2459	2568	2569	2589	2678		2358		2467	2468	2469	2789	3457	2679	2689	2467	3468		2457		2478	2489	2567	3458	3479	3478	3678	3679	3689		2479		2578	2579	3456	3489	3578	4567	4568	4578	4579		3459		3469	3567	3568	3789	4569	4589	4678	4689	4789		3579		3569	3589		4679	3579	5678	5689	5789	6789			

TABLA IV.7.- Continuación.

PUNTO 3					6 DIRECCIONES						
					$\sigma_x$						
0.15-0.25					0.26-0.35				>0.35		
23456	23457	23458	23459	23467	23468	23568	23569	23589	23689	34678	
23469	23478	23479	23489	23567	24568	24569	24589	24678	24679	25689	
23578	23579	23678	23679	23789	24689	24789	25678	25679	25789		
24567	24578	24579	34567	34569	26789	34568	35678	35679	35689		
34578	34579	34589	34679	34689	35789	36789	45689	46789	56789		
34789	45678	45679	45789								
					$\sigma_y$						
0.25-0.35				0.36-0.45				>0.45			
23456	23457	23458	23459	23469	23478	23479	23567	23568	23467	23569	
23468	23489	23578	24567	23579	23589	24579	24678	24689	23678	23679	
24568	24569	24578	24589	24789	25679	25689	25789	26789	23689	23789	
25678	34567	34568	34569	34579	34678	34679	35678	35689	24679	35679	
34578	34589	34689	34789	35789	36789	45679	45789	46789			
45678	45689			56789							
					$\sigma_z$						
0.65-0.80		0.81-0.95		0.96-1.10		1.11-1.25		>1.25			
23456	23469	23479	23489	23467	23468	23478	23678	23689	23679		
23457	23567	23568	23578	23569	23789	24589	26789	36789	25689		
23458	23579	23589	24567	24678	24689	25678	45678	45689	34678		
23459	24568	24569	24578	25679	25789	34567	46789	56789	45789		
	24579	24679	24789	34568	34578	34679					
	34569	34579	34589	34689	34789	35678					
	35679	35689	35789	45679							

TABLA IV.7.- Continuación.

PUNTO 3										7 DIRECCIONES									
$\sigma_x$										$\sigma_y$									
0.15-0.25										>0.25									
234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	235689	234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	235689
234789	235678	235679	235789	236789	245678	245679	245789	246789	245689	234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	235689
345678	345679	345689	345789	356789	356789	456789				234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	235689
										234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	235689
										234789	235678	235789	245678	245679	245689	245789	246789	246789	235689
										256789	345678	345679	345689	345789	346789	356789	456789	456789	236789
$\sigma_z$										$\sigma_y$									
0.65-0.80										0.81-0.95									
234567	234568	234569	234578	234679	234689	235689	245678	234678	236789	234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	235689
234579	234589	234789	235678	245689	245789	246789	245689	256789	345678	234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	235689
235679	235789	245679	345679	345789	356789			346789	456789	234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	235689
										234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678	234679	234689	235689
										234789	235678	235789	245678	245679	245689	245789	246789	246789	235689
										256789	345678	345679	345689	345789	346789	356789	456789	456789	236789
PUNTO 3										8 DIRECCIONES									
$\sigma_x$										$\sigma_y$									
0.15-0.25										0.25-0.35									
2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345689	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345689
2345789	2346789	2356789	2345789	2346789	2356789	2345789	2346789	2356789	2345789	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345689
2456789	3456789		2456789	3456789		2456789	3456789		2456789	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345689
										2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345678	2345679	2345689	2345689
										234789	235678	235789	245678	245679	245689	245789	246789	246789	235689
										256789	345678	345679	345689	345789	346789	356789	456789	456789	236789
PUNTO 3										9 DIRECCIONES									
$\sigma_x$										$\sigma_y$									
0.15-0.25										0.25-0.35									
23456789										23456789									
										23456789									
										23456789									
										23456789									
										23456789									
										23456789									
										23456789									
										23456789									
										23456789									
										23456789									

TABLA IV.7.- Continuación.

PUNTO 4												4 DIRECCIONES											
												$\sigma_x$											
0.20-0.30			0.31-0.40			0.41-0.50			0.51-0.60			>0.30											
245			235			234	<b>238</b>	249	278	236			237	246	247	256	258	259					
<b>257</b>			239			279	345	<b>349</b>	359	248			267	268	269	289	346	347					
			459			369	379	389	<b>456</b>	458			348	356	357	358	367	368					
						469	479	489	567	578			378	457	467	468	478	568					
						579	679	789		689			569	589	679								
												$\sigma_y$											
0.40-0.50			0.51-0.60			0.61-0.70						>0.70											
245			<b>257</b>			234	235			236	237	<b>238</b>	239	246	247	249	256	258					
345			<b>349</b>			248	358			259	267	268	269	278	279	289	346	347					
<b>456</b>			489			469	567			348	<b>358</b>	356	357	359	367	368	369	378					
458			578			789				379	389	457	459	468	478	479	568	569					
										579	589	678	679	689									
												$\sigma_z$											
1.31-1.45												>1.45											
234						235	236	237	<b>238</b>	239	245	248	249	256	<b>257</b>	258	259	267	268				
246						269	278	279	289	345	346	347	348	<b>349</b>	356	357	358	359	367				
247						368	369	378	379	389	<b>456</b>	457	458	459	467	468	469	478	479				
						489	567	568	569	578	579	589	678	679	689	789							

TABLA IV.8.- Distribución de las combinaciones de direcciones de observación en intervalos de desviación típica ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ), para 4, 5, 6, 7, 8 y 9 direcciones, correspondientes al punto 4 analizado en el cráneo.

PUNTO 4		5 DIRECCIONES									
		$\sigma_x$									
0.20-0.30		0.31-0.40			0.41-0.50			0.51-0.60		>0.60	
2345	2356	2349	2369	2379	2346	2347	2348	2367	2568		
2357	2358	2469	2479	2489	2368	2378	2478	2467	3467		
2359	2389	2679	2789	3456	2678	2689	3457	2468	3468		
2456	2457	3459	3569	3579	3458	3469	3479	2569	3478		
2458	2459	3589	4567	4568	3489	3567	3568	2589	3678		
2567	2578	4579	4589	5679	3679	3689	3789	3578	4678		
2579	4569	5789	6789		4679	4689	4789	4578			
					5678	5689					
		$\sigma_y$									
0.30-0.40		0.41-0.50		0.51-0.60			0.61-0.70		>0.70		
2345	2456	2348	2358	2349	2357	2468	2346	2347	2367	2368	2369
2458	3456	2457	2459	2469	2478	2489	2356	2359	2379	2467	2479
3458	4567	2578	3457	2567	2579	3469	2378	2389	2568	2569	2589
4568	4569	3459	3489	3479	3567	3568	2678	2789	2679	2689	3467
		4578	4589	3578	3589	4579	3689	3789	3468	3478	3569
		4689	5678	4679	4789	5679			3579	3678	3679
				5789	6789				4678	5689	
		$\sigma_z$									
0.85-1.00		1.01-1.15		1.16-1.30		1.31-1.45			>1.45		
2345	2349	2348	2358	2346	2347	2356	2367	2368	2369	2378	2379
	2357	2456	2457	2359	2458	2467	2389	2459	2568	2569	2579
		2469	2478	2468	2489	2567	2589	2678	2679	2689	2789
		2479	3456	2578	3458	3469	3457	3467	3468	3478	3678
		3459	3567	3479	3489	3568	3679	3689	3789	4567	4568
		3579		3569	3578	3589	4569	4578	4579	4589	4678
							4679	4689	4789	5678	5679
							5689	5789	6789		

TABLA IV.8.- Continuación.



PUNTO 4										6 DIRECCIONES												
										$\sigma_x$												
0.20-0.30										0.31-0.40					>0.40							
23456	23457	23458	23459	23479	23469	23478	23678	23679	23467	23468	23489	23567	23568	23569	23578	24679	24689	24789	26789	24678	25689	
23579	23589	23689	23789	24567	34567	34568	34679	34689	34578	34678	24568	24569	24578	24579	24589	34789	35679	35689	35789	35678		
25678	25679	25789	34569	34579	36789	45678	45789	46789			34589	45679	45689	56789								
										$\sigma_y$												
0.30-0.40					0.41-0.50					>0.50												
23456	23457	23458	23459	24567	23468	23478	23489	23567	23467	23469	23479	24569	24578	24589	23568	23578	23589	24579	23569	23579	23678	
24569	24578	24589	34567	34568	34569	24689	24789	25678	25679	23679	23689	23789	34578	34589	45678	25789	34579	34689	34789	24678	24679	25689
34578	34589	45678	45679	45689	56789	35678	35789	45789	46789	26789	34678	34679				35678	35789	45789	46789	26789	34678	34679
										35679	35689	36789										
										$\sigma_z$												
0.85-1.00			1.01-1.15			1.16-1.30			1.31-1.45			>1.45										
23456	23469	23479	23489	23467	23468	23478	23569	24589	23678	23679	23457	23567	23578	23579	23568	23589	23789	25678	25679	23689	25689	
23458	24567	24579	24679	24568	24569	24578	25789	34578	26789	34678	23458	24789	34569	34579	24568	24689	34567	34679	34689	26789	34678	
23459				34568	34589	35678	34789	45679	36789	45678	23459	35679			34568	34589	35678	34789	45679	36789	45678	
				35689	35789										35689	35789			45689	45789		
																			46789	56789		

TABLA IV.8.- Continuación.

PUNTO 4										7 DIRECCIONES																	
$\sigma_x$																											
0.20-0.30										>0.30																	
234567	234568	234569	234578	234579	234589	234679	234689	234789	234678	235678	235679	235689	235789	236789	245678	245679	245689	245789	345678	246789	256789	345679	345689	345789	356789	456789	346789
$\sigma_y$																											
0.30-0.40										>0.40																	
234567	234568	234569	234578	234579	234678	234679	234689	234789	235678	234589	245678	245679	245689	245789	235679	235689	235789	236789	246789	345678	345679	345689	345789	456789	256789	346789	356789
$\sigma_z$																											
0.85-1.00					1.01-1.15					1.16-1.30					>1.30												
234567	234568	234679	234689	235678	235679	234678	235689	256789	234569	234578	235789	245678	245679	245789	236789	245689	456789	234579	234589	246789	345679	345689	345789	345678	346789	234789	356789

TABLA IV.8.- Continuación.

PUNTO 4				8 DIRECCIONES			
$\sigma_x$ 0.20-0.30				$\sigma_y$ 0.30-0.40			
2345678	2345679	2345689	2345789	2345678	2345679	2345689	2345789
2346789	2356789	2456789	3456789	2346789	2356789	2456789	3456789
0.85-1.00				$\sigma_z$ >1.00			
2345678	2345679	2345689	2345789	2346789	2356789	2456789	3456789
PUNTO 4				9 DIRECCIONES			
$\sigma_x$ 0.20-0.30		$\sigma_y$ 0.30-0.40		$\sigma_y$ 0.85-1.00			
23456789		23456789		23456789			

TABLA IV.8.- Continuación.

### IV.1.3.- CALCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Una vez realizada la selección de las direcciones apropiadas, se pueden ya calcular los valores de los desplazamientos de cada punto, para cada experiencia particular. Los resultados se ofrecen en las tablas IV.9 y 10.

En ellas, además de las tres componentes cartesianas del desplazamiento y del módulo de éste, se presenta una columna titulada « $dx_y$ ». Esta contiene la componente del desplazamiento en el plano paralelo a la placa, que es un resultado al menos de tanto interés como el módulo del desplazamiento total. Así sucede por dos motivos fundamentales. En primer lugar porque la experiencia, desde el punto de vista de la aplicación de las fuerzas ortodónicas, se ha diseñado para producir desplazamientos preferentemente en ese plano. Y en segundo lugar, porque el error en el cálculo de la componente  $dz$  suele ser tan elevado que dicho resultado queda, en algunos casos, desvirtuado frente a los demás.

PUNTO DE APLICACION (2+2)						
$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	PUNTO OBJETO	$dx(\mu m)$	$dy(\mu m)$	$dz(\mu m)$	$d(\mu m)$	$d_{xy}(\mu m)$
0 → 100	1	-7.24	1.93	-2.82	8.01	7.49
	2	-1.19	-0.29	0.37	1.28	1.22
	3	-9.16	-2.09	-1.06	9.45	9.40
	4	-9.59	3.06	1.91	10.25	10.07
100 → 200	1	-9.72	6.04	0.33	11.45	11.44
	2	-2.70	0.57	-0.44	2.79	2.76
	3	-10.56	0.22	-1.44	10.66	10.56
	4	-12.02	5.16	-2.19	13.26	13.08
200 → 300	1	-6.91	2.91	1.15	7.58	7.50
	2	-1.66	0.41	0.03	1.71	1.71
	3	-7.17	-0.28	1.32	7.30	7.18
	4	-9.36	3.38	-0.34	9.96	9.95
300 → 400	1	-10.70	5.37	0.62	11.99	11.97
	2	-4.13	0.71	-1.00	4.31	4.19
	3	-12.24	-0.47	0.70	12.27	12.25
	4	-14.63	2.87	5.63	15.94	14.91

TABLA IV.9.- Componentes cartesianas, módulo y componente en el plano XY, de los desplazamientos de los puntos de interés. Punto de aplicación de la fuerza en (2+2).

PUNTO DE APLICACION (2+2)						
$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	PUNTO OBJETO	$dx(\mu\text{m})$	$dy(\mu\text{m})$	$dz(\mu\text{m})$	$d(\mu\text{m})$	$d_{xy}(\mu\text{m})$
400 → 500	1	-11.69	4.11	-2.12	12.57	12.39
	2	-4.74	0.98	-0.48	4.87	4.84
	3	-11.99	-0.21	-2.43	12.24	11.99
	4	-11.74	1.41	5.23	12.93	1.82
500 → 600	1	-10.68	3.81	3.96	12.01	11.34
	2	-4.36	0.79	1.09	4.56	4.43
	3	-11.68	-0.65	3.62	12.25	11.70
	4	-15.32	3.26	3.56	16.07	15.66
600 → 700	1	-9.38	2.65	0.18	9.75	9.75
	2	-4.36	0.42	-0.45	4.40	4.38
	3	-10.39	-1.25	-0.29	10.47	10.46
	4	-12.55	3.02	-0.38	12.91	12.91
700 → 800	1	-5.90	1.70	4.22	7.45	6.14
	2	-3.24	0.41	0.36	3.28	3.27
	3	-7.42	-1.78	0.41	7.65	7.63
	4	-8.62	1.67	2.06	9.01	8.78
800 → 1000	1	-16.42	0.77	1.46	16.50	16.44
	2	-9.40	0.14	3.78	10.14	9.40
	3	-18.32	-3.56	-4.57	19.21	18.66
	4	-19.78	2.47	2.93	20.15	19.93

TABLA IV.9.- Continuación.

PUNTO DE APLICACION (6+6)						
$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	PUNTO OBJETO	$dx(\mu m)$	$dy(\mu m)$	$dz(\mu m)$	$d(\mu m)$	$d_{xy}(\mu m)$
0 → 100	1	-3.06	3.78	0.70	4.91	4.86
	2	0.77	1.59	-1.27	2.17	1.77
	3	-3.98	0.73	0.58	4.08	4.05
	4	-5.35	0.03	0.89	5.42	5.35
100 → 200	1	-8.39	0.95	-1.39	8.55	8.44
	2	-1.58	-0.11	-1.20	1.99	1.58
	3	-7.73	-0.73	-1.45	7.90	7.76
	4	-10.87	1.23	1.84	11.10	10.94
200 → 300	1	-5.75	1.06	0.09	5.85	5.85
	2	-3.01	0.14	-0.22	3.02	3.01
	3	-8.69	-0.59	-0.09	8.71	8.71
	4	-8.32	2.08	1.32	8.68	8.58
300 → 400	1	-3.28	0.07	4.40	5.49	3.28
	2	-3.39	0.05	-1.81	3.85	3.39
	3	-7.72	-1.36	-1.30	7.95	7.84
	4	-8.50	2.53	0.67	8.89	8.87

TABLA IV.10.- Componentes cartesianas, módulo y componentes en el plano XY de los desplazamientos de los puntos de interés. Punto de aplicación de la fuerza en (6+6).

PUNTO DE APLICACION (6+6)						
$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	PUNTO OBJETO	$dx(\mu m)$	$dy(\mu m)$	$dz(\mu m)$	$d(\mu m)$	$d_{xy}(\mu m)$
400 → 500	1	-5.59	2.33	0.41	6.07	6.06
	2	-3.86	0.57	-0.65	3.95	3.64
	3	-8.69	-0.59	-0.09	8.71	8.71
	4	-9.45	2.56	0.95	9.84	9.79
500 → 600	1	-10.38	2.35	-1.11	10.70	10.64
	2	-5.67	0.72	-1.27	5.85	5.72
	3	-12.83	-0.26	-2.56	13.08	12.83
	4	-14.11	3.59	0.94	14.59	14.56
600 → 700	1	-7.57	2.77	-0.76	8.10	8.06
	2	-4.74	0.61	-2.02	5.19	4.78
	3	-11.37	0.14	0.77	11.39	11.37
	4	-10.52	3.14	2.08	11.17	10.98
700 → 800	1	-8.23	2.49	0.47	8.61	8.60
	2	-5.55	0.68	-0.04	5.59	5.59
	3	-11.37	0.14	0.77	11.39	11.37
	4	-13.41	3.20	3.01	14.11	13.79
800 → 1000	1	-14.82	4.71	-3.59	15.96	15.55
	2	-11.41	0.48	1.63	11.54	11.42
	3	-----	----	----	-----	-----
	4	-20.25	1.78	-0.85	20.34	10.33

TABLA IV.10.- Continuación.



Las figuras IV.2 y IV.3 presentan las fotografías de los 18 interferogramas pertenecientes a las dos series de experiencias, junto con los esquemas craneales, en los que se han señalado tanto los desplazamientos como sus componentes en el plano de la figura, relativos a los correspondientes incrementos de fuerza.

Finalmente y respecto del efecto acumulativo producido sobre cada punto del objeto frente al aumento de la fuerza aplicada, de 0 a 1000 g, las tablas IV.11 y IV.12 recogen los correspondientes valores obtenidos. Asimismo, la figura IV.4 presenta los esquemas craneales con las componentes en el plano del desplazamiento pertenecientes a dicho intervalo de fuerza total, tanto para punto de aplicación en (2+2) como en (6+6).

Estos resultados no se hubiesen podido obtener sin la realización escalonada de las experiencias, en cuanto a los incrementos de fuerza se refiere, puesto que, para incrementos superiores, el número de franjas resulta tan elevado en algunas zonas de interés, que no es posible diferenciarlas. Así pues, sólo es factible apreciar el efecto de fuerzas superiores, o bien a costa de la realización de una serie elevada de experiencias sucesivas, o bien, mediante la utilización de la interferometría de moteado.

IV.- Resultados experimentales

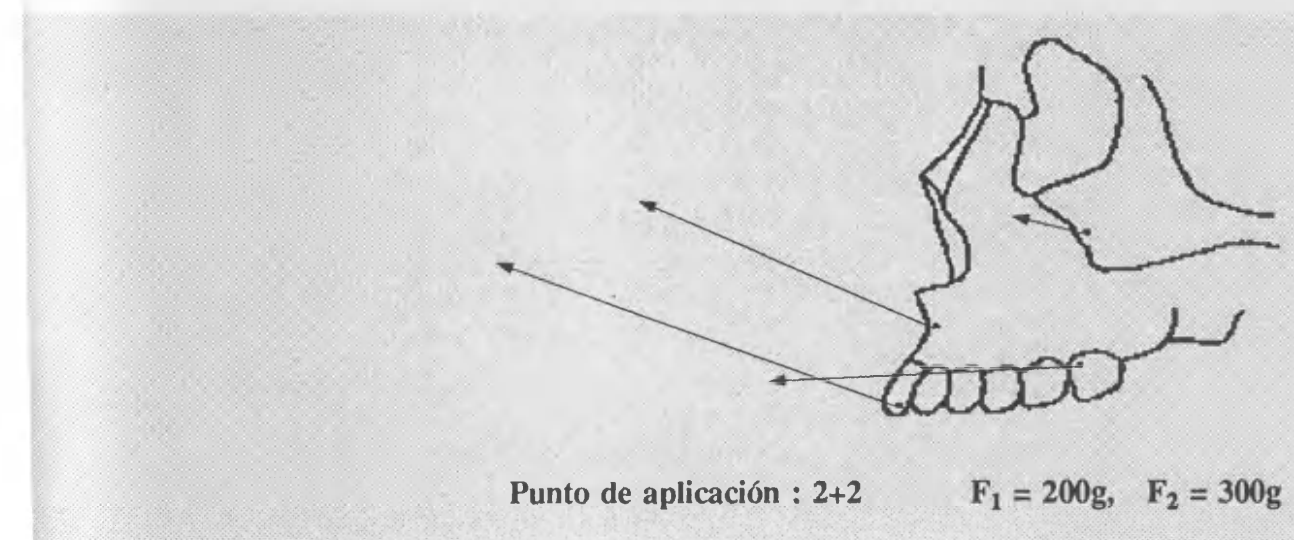
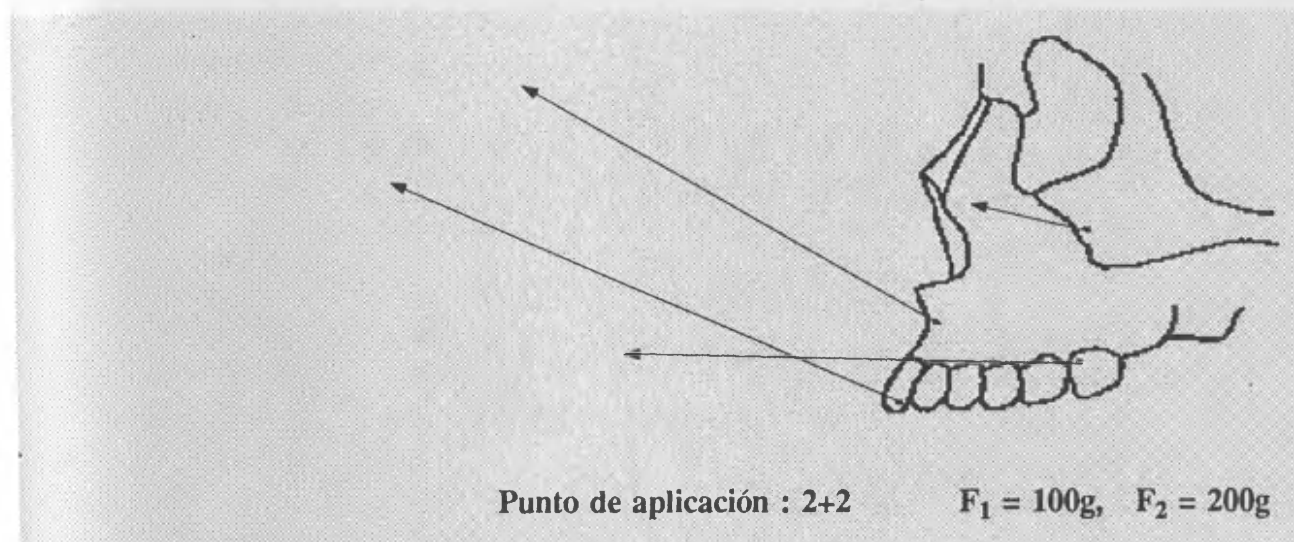
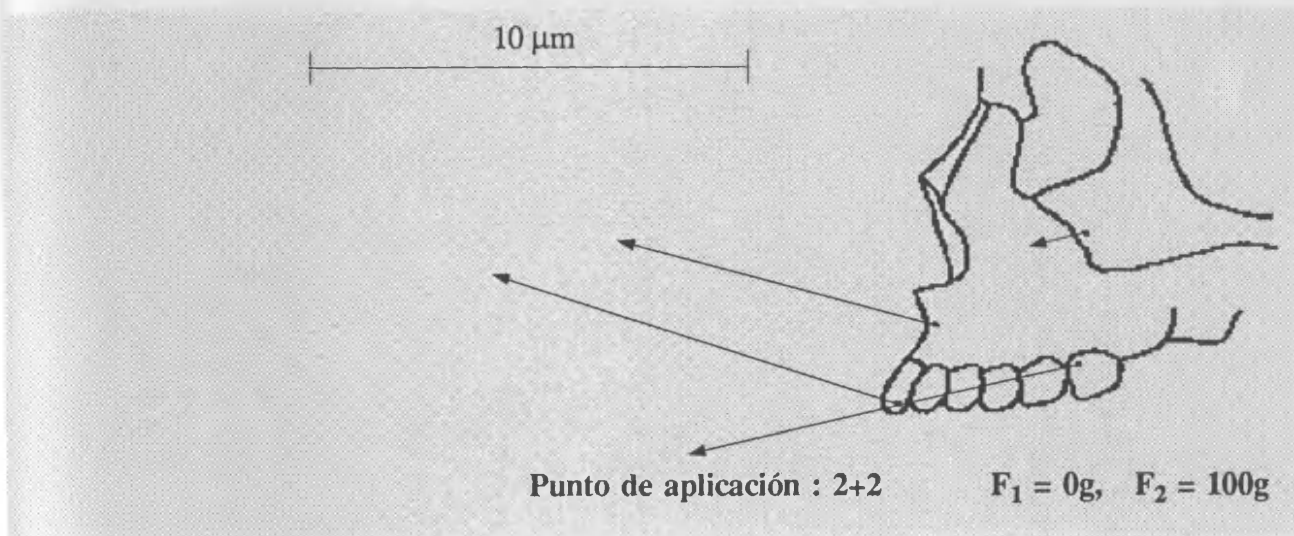


FIGURA IV.2.- Fotografías de los sucesivos interferogramas, (2+2), junto con los correspondientes esquemas, en los que se han señalado los desplazamientos absolutos en el plano, relativos a cada punto estudiado.



IV.- Resultados experimentales

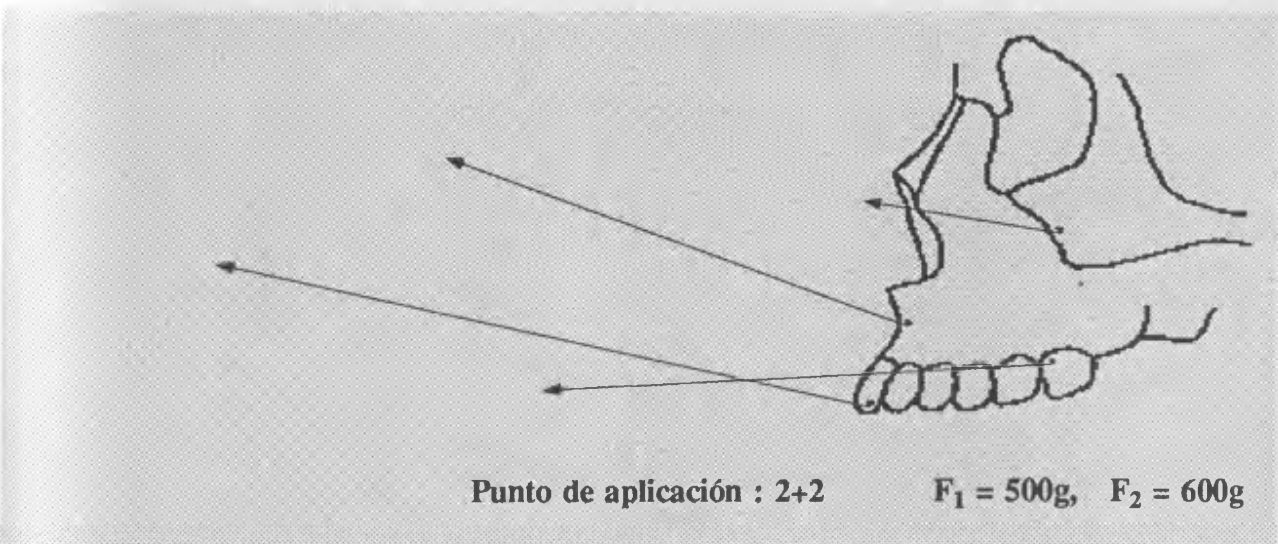
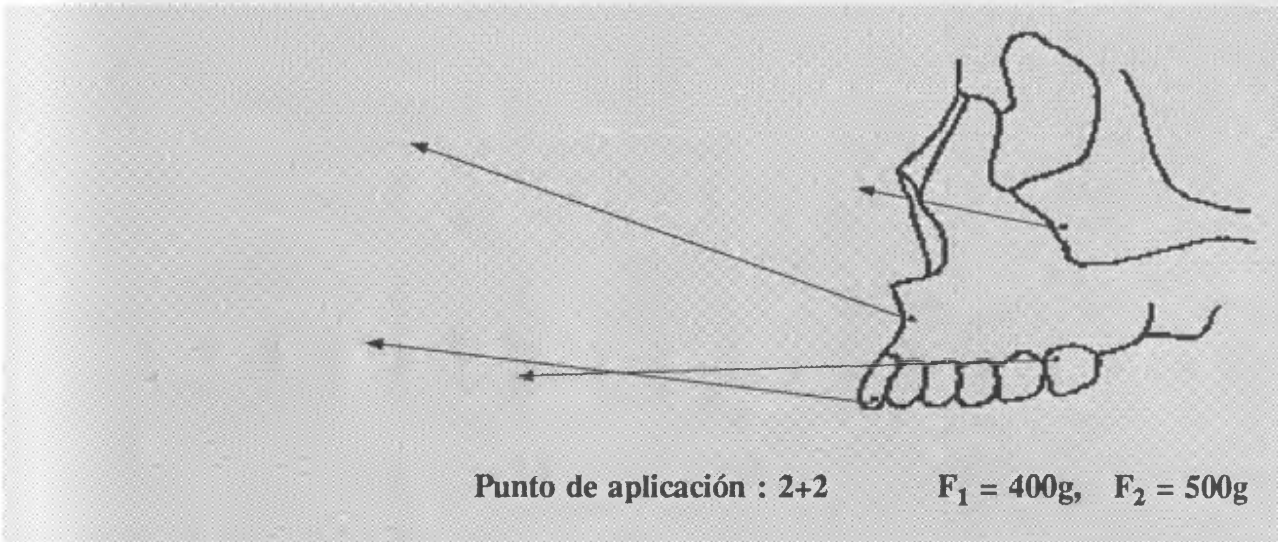
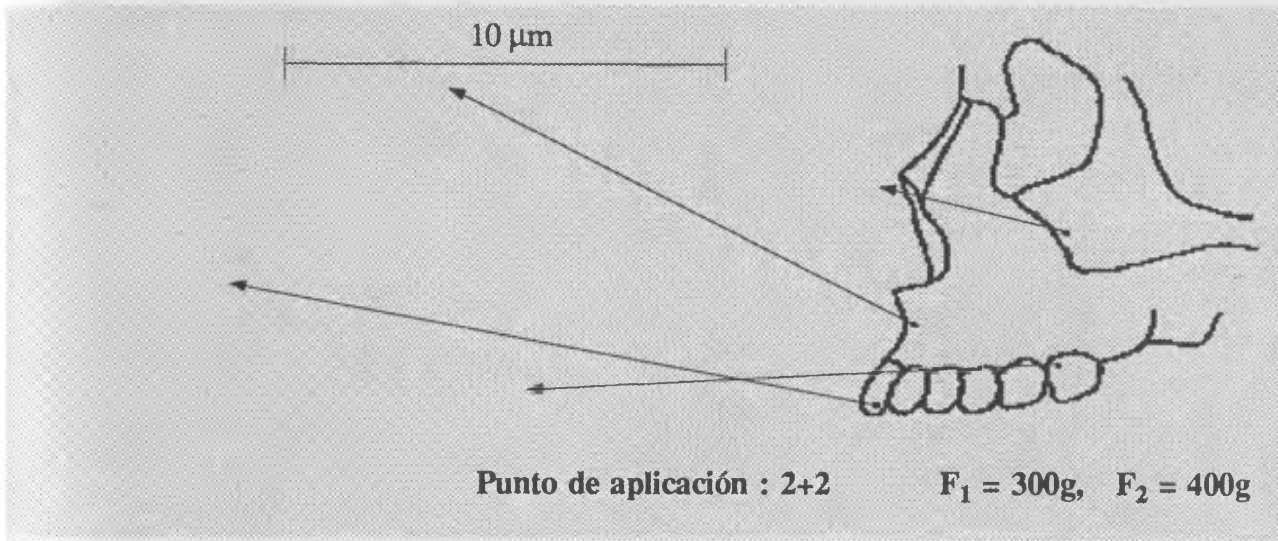
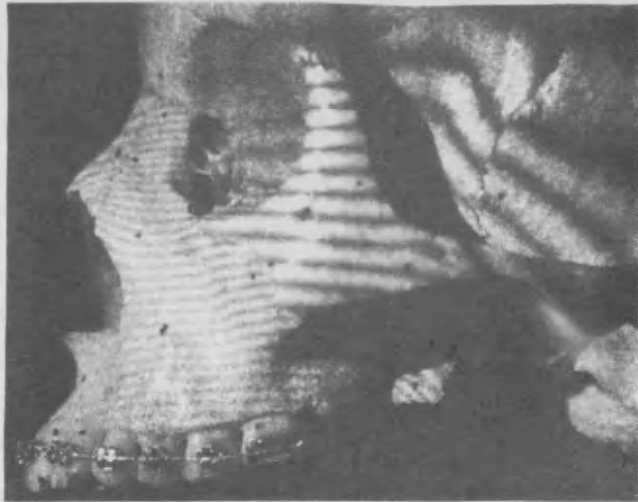
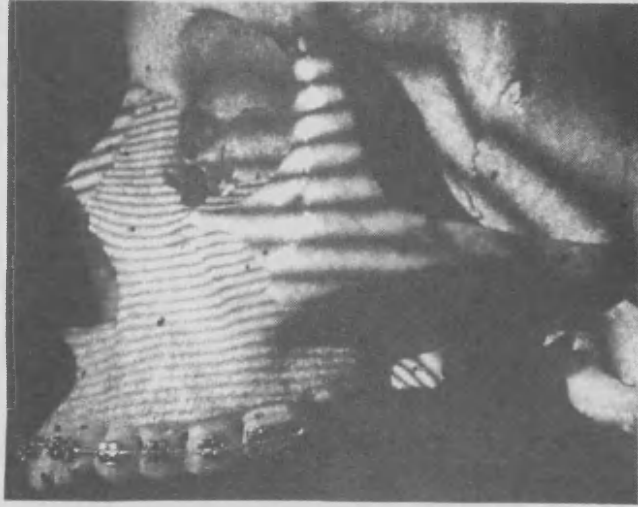
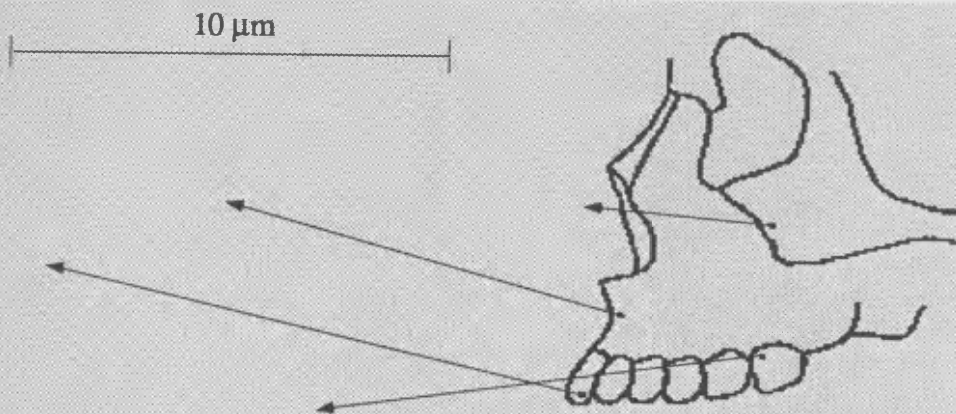


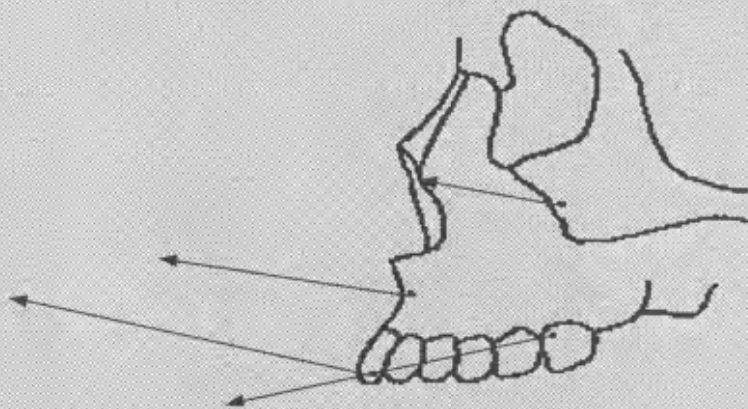
FIGURA IV.2.- Continuación.



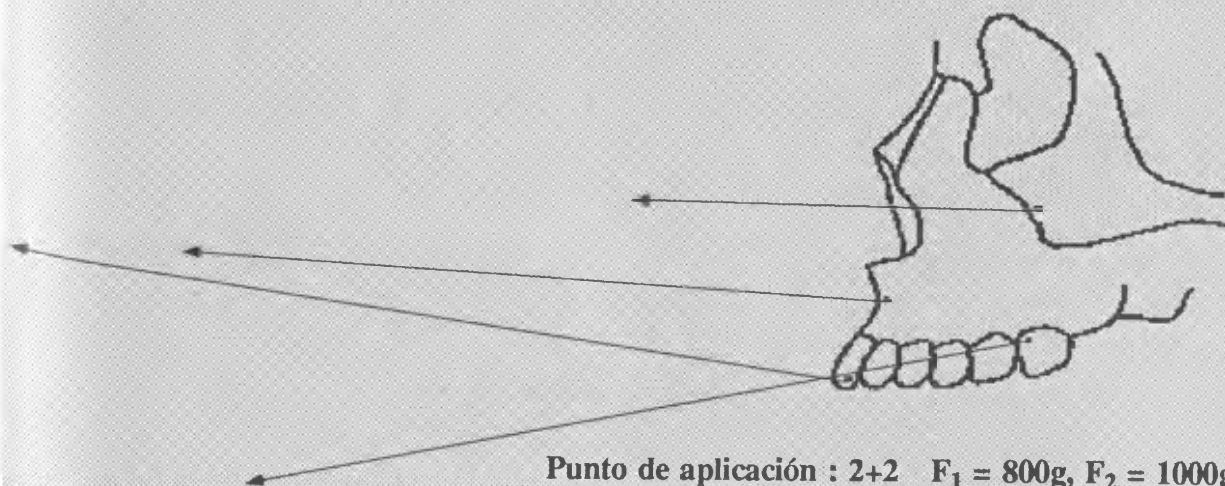
IV.- Resultados experimentales



Punto de aplicación : 2+2  $F_1 = 600g, F_2 = 700g$



Punto de aplicación : 2+2  $F_1 = 700g, F_2 = 800g$



Punto de aplicación : 2+2  $F_1 = 800g, F_2 = 1000g$

FIGURA IV.2.- Continuación.



IV.- Resultados experimentales

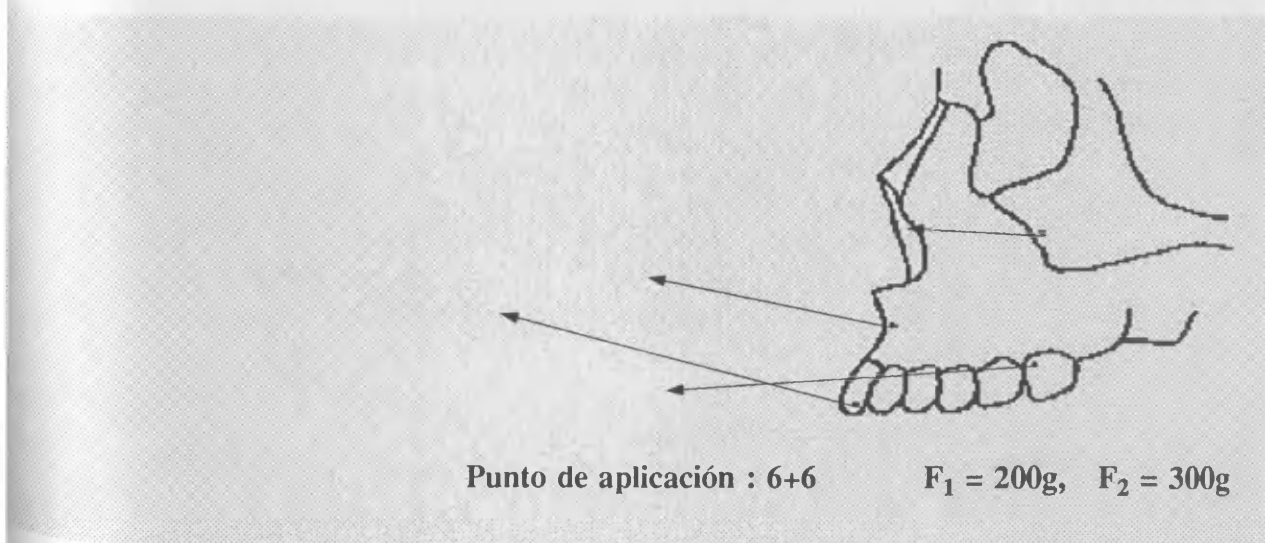
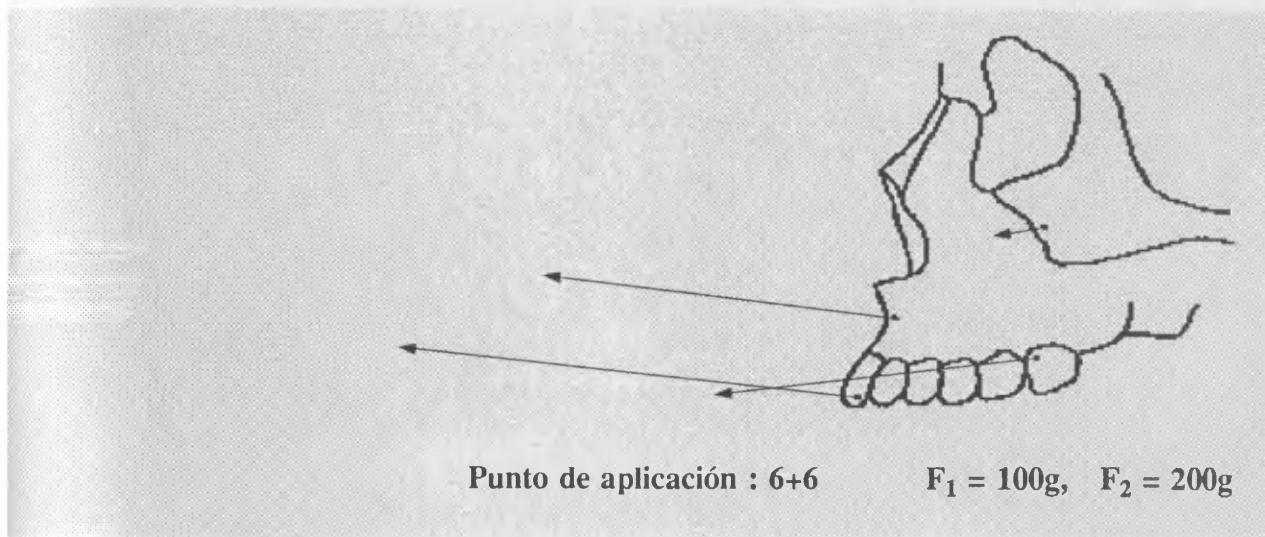
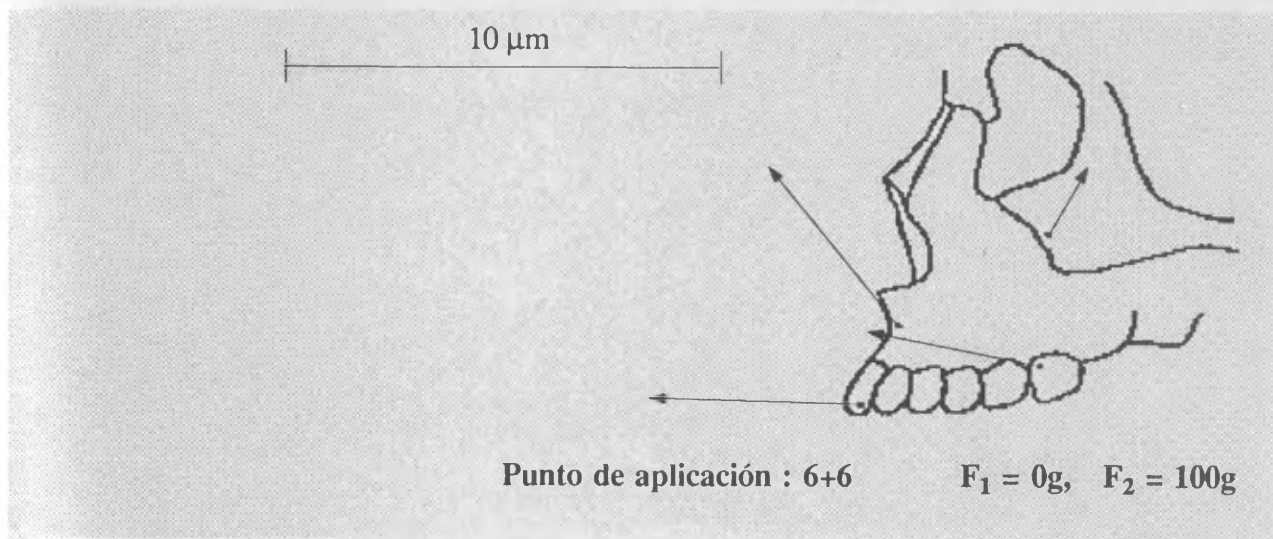


FIGURA IV.3.- Fotografías de los sucesivos interferogramas, (6+6), junto con los correspondientes esquemas, en los que se han señalado los desplazamientos absolutos en el plano, relativos a cada punto estudiado.





IV.- Resultados experimentales

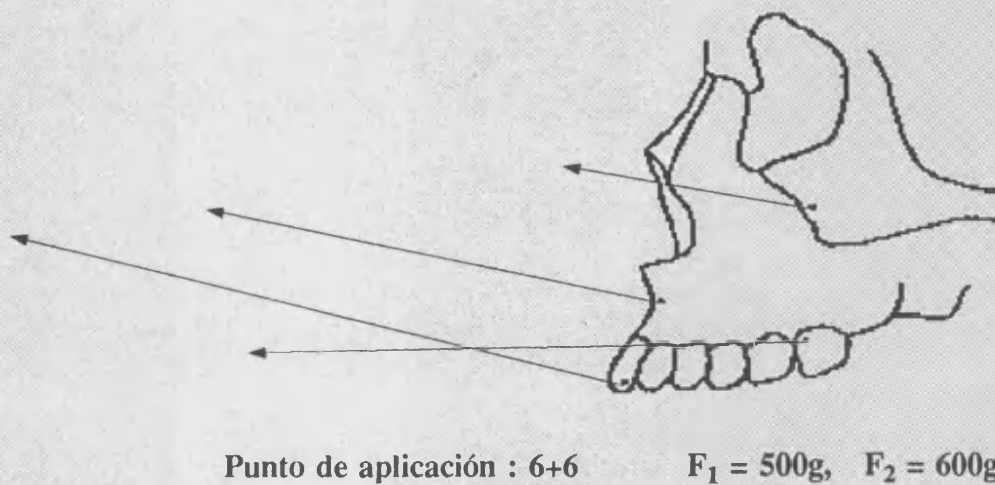
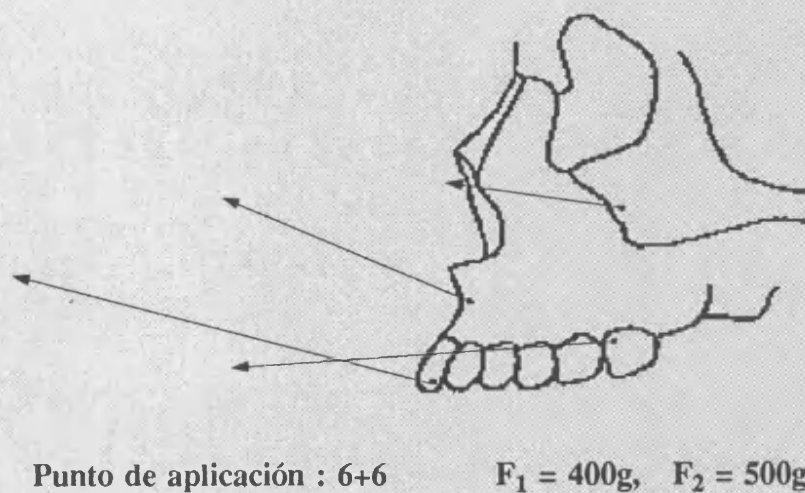
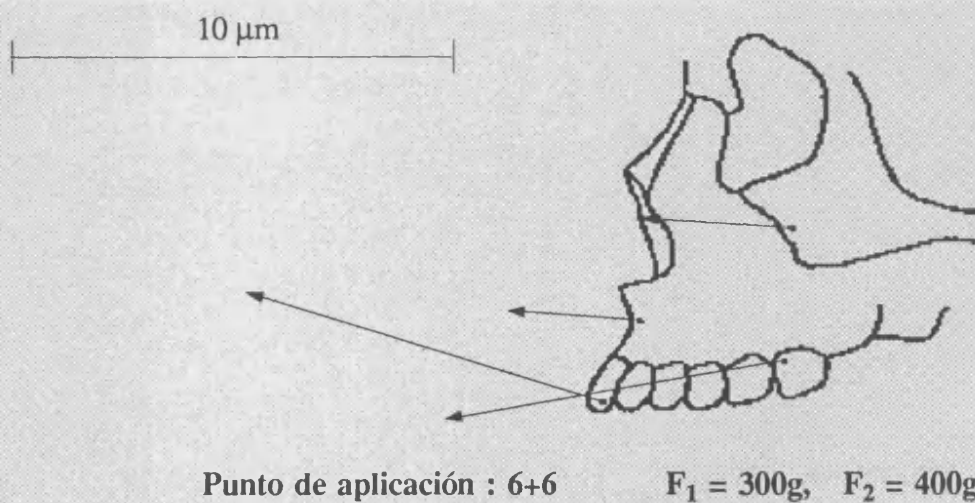
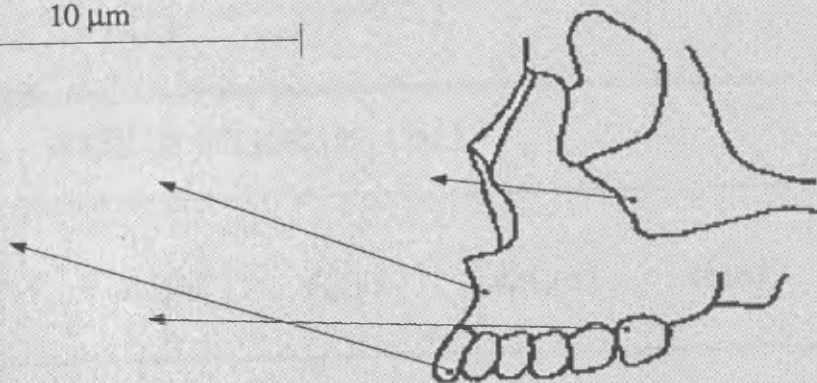


FIGURA IV.3.- Continuación.



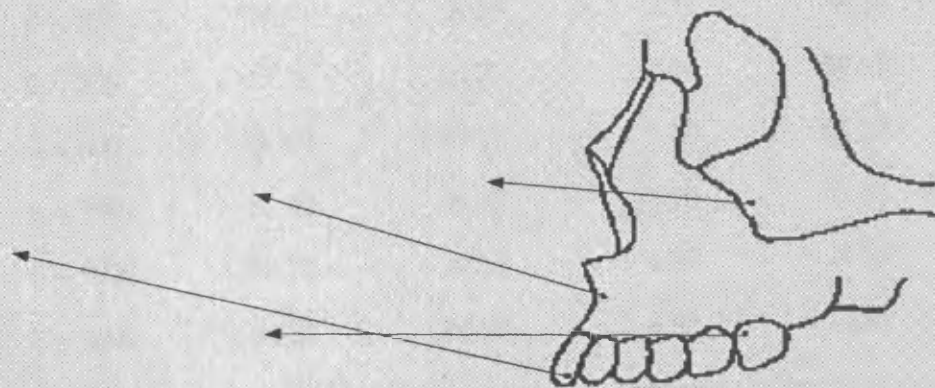
IV.- Resultados experimentales

10  $\mu$ m



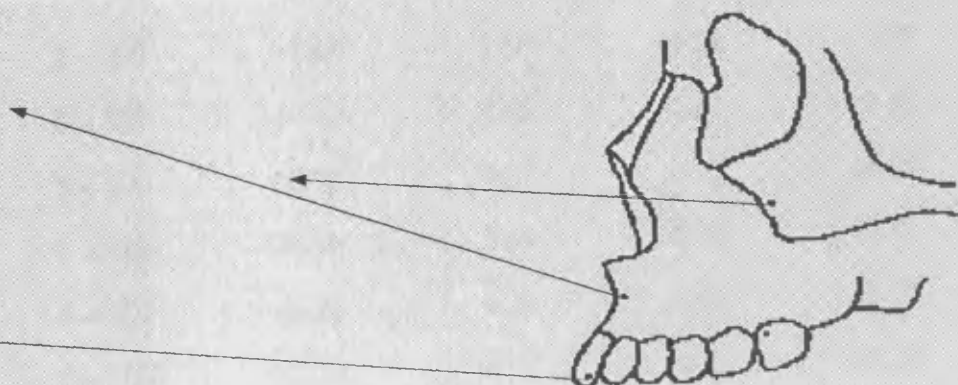
Punto de aplicación : 6+6

$F_1 = 600g$ ,  $F_2 = 700g$



Punto de aplicación : 6+6

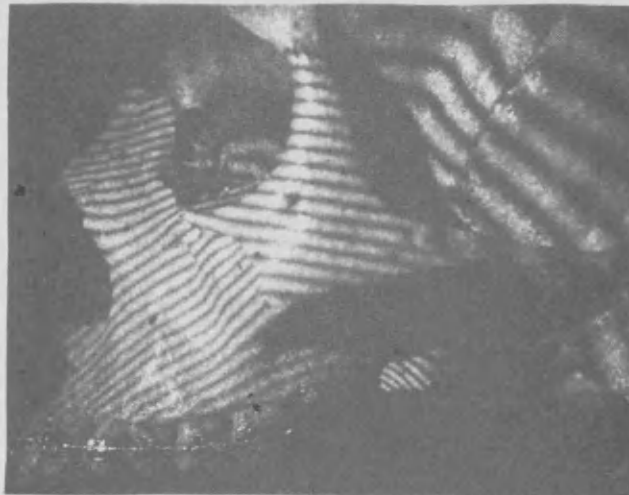
$F_1 = 700g$ ,  $F_2 = 800g$



Punto de aplicación : 6+6

$F_1 = 800g$ ,  $F_2 = 1000g$

FIGURA IV.3.- Continuación.



PUNTO DE APLICACION (2+2)					
PUNTO OBJETO	$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	$dx(\mu m)$	$dy(\mu m)$	$dz(\mu m)$	$d(\mu m)$
1	0 → 100	-7.24	1.93	-2.82	8.01
	0 → 200	-16.96	7.97	-2.49	18.90
	0 → 300	-23.87	10.88	-1.34	26.27
	0 → 400	-34.57	16.25	-0.72	38.21
	0 → 500	-46.26	20.36	-2.84	50.62
	0 → 600	-56.94	24.17	1.12	61.87
	0 → 700	-66.32	26.82	1.30	71.55
	0 → 800	-72.22	28.52	5.52	77.84
	0 → 1000	-88.64	29.29	6.98	93.61
	2	0 → 100	-1.19	-0.29	0.37
0 → 200		-3.89	0.38	-0.07	3.91
0 → 300		-5.55	0.79	-0.04	5.61
0 → 400		-9.68	1.50	-1.04	9.97
0 → 500		-14.42	2.48	-1.52	9.85
0 → 600		-18.78	3.27	-0.43	19.07
0 → 700		-23.14	3.69	-0.88	23.45
0 → 800		-26.38	4.10	-0.52	26.70
0 → 1000		-35.78	4.24	3.26	36.18

TABLA IV.11.- Valores del desplazamiento acumulado en los puntos de interés del objeto para intervalos crecientes de fuerza, con punto de aplicación en (2+2).

PUNTO DE APLICACION (2+2)					
PUNTO OBJETO	$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	$dx(\mu m)$	$dy(\mu m)$	$dz(\mu m)$	$d(\mu m)$
3	0 → 100	-9.16	-2.09	-1.06	9.46
	0 → 200	-19.72	-1.87	-2.50	19.97
	0 → 300	-26.89	-2.15	-1.18	27.00
	0 → 400	-39.13	-2.62	-0.48	39.22
	0 → 500	-51.12	-2.83	-2.91	51.28
	0 → 600	-62.80	-3.48	0.71	62.90
	0 → 700	-73.19	-4.73	0.42	73.34
	0 → 800	-80.61	-6.51	0.83	80.88
	0 → 1000	-98.93	-10.07	-3.74	99.51
4	0 → 100	-9.59	3.06	1.91	10.25
	0 → 200	-21.61	8.22	-0.28	23.12
	0 → 300	-30.97	11.60	-0.62	33.08
	0 → 400	-45.60	14.47	5.01	48.10
	0 → 500	-57.34	15.88	10.24	60.37
	0 → 600	-72.66	19.14	13.80	76.40
	0 → 700	-85.21	22.16	13.42	89.06
	0 → 800	-93.83	23.83	15.48	98.04
	0 → 1000	-113.61	26.30	18.41	34.87

TABLA N.11.- Continuación.

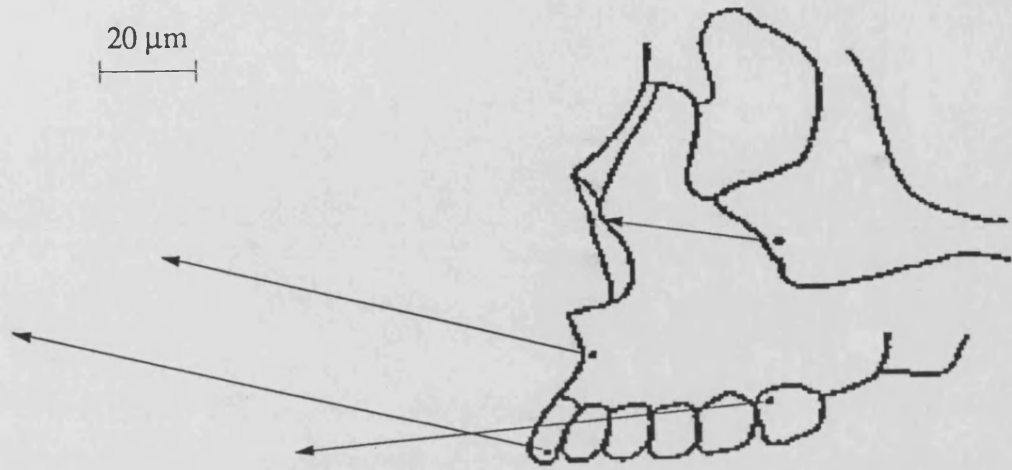
PUNTO DE APLICACION (6+6)					
PUNTO OBJETO	$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	$dx(\mu m)$	$dy(\mu m)$	$dz(\mu m)$	$d(\mu m)$
1	0 → 100	-3.06	3.78	0.70	4.91
	0 → 200	-11.45	4.73	-0.69	12.41
	0 → 300	-17.20	5.79	-0.60	18.16
	0 → 400	-20.48	5.86	3.80	21.64
	0 → 500	-26.07	8.19	4.21	27.65
	0 → 600	-36.45	10.54	3.10	38.07
	0 → 700	-44.02	13.31	2.34	46.05
	0 → 800	-52.25	15.80	2.81	54.66
	0 → 1000	-67.07	20.51	-0.78	70.14
	2	0 → 100	0.77	1.59	-1.27
0 → 200		-2.35	1.48	-2.47	3.72
0 → 300		-5.36	1.62	-2.69	6.21
0 → 400		-8.75	1.67	-4.50	9.98
0 → 500		-12.61	2.24	-5.15	13.80
0 → 600		-18.28	2.96	-6.42	19.60
0 → 700		-23.02	3.57	-8.44	24.78
0 → 800		-28.57	4.25	-8.48	30.10
0 → 1000		-39.98	4.73	-6.85	40.84

TABLA IV.12.- Valores del desplazamiento acumulado en los puntos de interés del objeto para intervalos crecientes de fuerza, con punto de aplicación en (6+6).

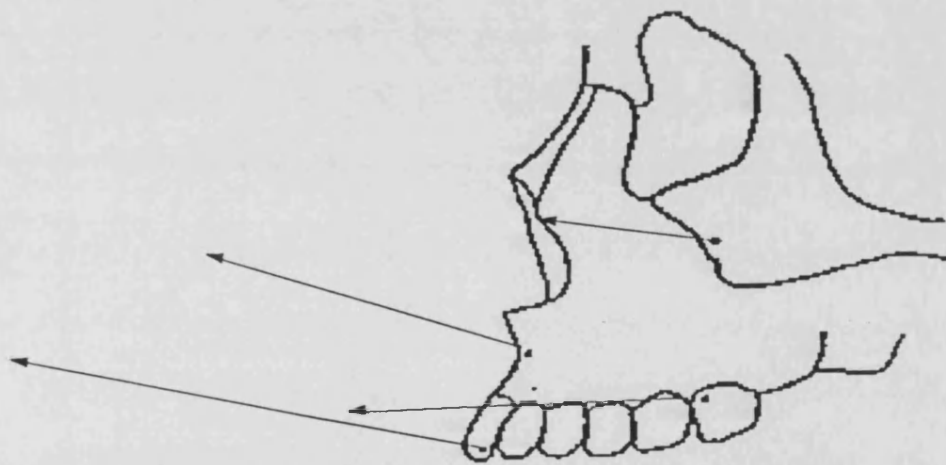


PUNTO DE APLICACION (6+6)					
PUNTO OBJETO	$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	$dx(\mu m)$	$dy(\mu m)$	$dz(\mu m)$	$d(\mu m)$
3	0 → 100	-3.98	0.73	0.58	4.09
	0 → 200	-11.71	0.00	-0.87	11.74
	0 → 300	-20.40	-0.59	-0.96	20.43
	0 → 400	-28.12	-1.95	-2.26	28.28
	0 → 500	-36.81	-2.54	-2.35	36.97
	0 → 600	-49.64	-2.80	-4.91	49.96
	0 → 700	-61.01	-2.66	-4.14	61.21
	0 → 800	-72.38	-2.52	-3.37	72.50
4	0 → 100	-5.35	0.03	0.89	5.42
	0 → 200	-16.22	1.26	2.73	16.50
	0 → 300	-24.54	3.34	4.05	25.10
	0 → 400	-33.04	5.87	4.72	33.89
	0 → 500	-42.49	8.43	5.67	43.69
	0 → 600	-56.60	12.02	6.61	58.24
	0 → 700	-67.12	15.16	8.69	69.36
	0 → 800	-80.53	18.36	11.70	83.42
	0 → 1000	-100.78	20.14	10.85	103.34

TABLA IV.12.- Continuación.



Punto de aplicación : 2+2



Punto de aplicación : 6+6

FIGURA IV.4.- Esquema de los desplazamientos en el plano, correspondientes a la fuerza total de 1000 g.

## IV.2.- EJES DE GIRO MAXILARES

Dentro de este conjunto de valoraciones de técnicas y métodos, con vistas a evaluar la utilidad de un cálculo derivado del protocolo principal, se decidió realizarlo sobre el hueso maxilar, cuyo posible patrón de movilidad es de interés primordial en la aplicación de una TRMS. De todos modos, como se trataba de un estudio complementario, se realizó únicamente en dos de cada una de las series de nueve experiencias.

Estos cálculos fueron efectuados para los incrementos de fuerza (300→400) g y (700→800) g, escogidos porque representan aproximadamente los intervalos situados a 1/3 y 2/3 de las fuerzas totales aplicadas, tanto con el punto de aplicación de la misma en (2+2) como en (6+6). El análisis se llevó a cabo a través de los puntos maxilares 6, 7 y 11, cuya situación se describió en II.2.2.4, calculando los desplazamientos absolutos de dichos puntos objeto. Los resultados se presentan en las tablas IV.13 a IV.15.

Aunque, en principio, con dos puntos objeto es suficiente para resolver el sistema implicado, dado que se utilizaron tres a fin de minimizar errores (debido a la pequeñez del ángulo sólido que la placa subtiende en el objeto), se redujo la matriz (9x6) de coeficientes a una matriz cuadrada (6x6). Ello permitió resolver el sistema de ecuaciones (I.38), obteniendo los vectores traslación,  $d_0$  y rotación  $\alpha$  que se recogen en la tabla

IV.16. Los correspondientes ejes de rotación se presentan en la tabla IV.17

PUNTO DEL OBJETO	DIRECCION DE OBSERVACION	$u_x$	$u_y$	$u_z$
6	1	-0.06	-0.03	1.00
	2	-0.38	0.28	-0.14
	3	0.41	-0.29	-0.10
	4	0.41	-0.28	-0.11
	5	-0.38	-0.27	-0.15
7	1	0.02	0.03	1.00
	2	-0.35	0.24	-0.10
	3	0.35	0.24	-0.11
	4	0.35	-0.25	-0.10
	5	-0.36	-0.25	-0.09
11	1	0.07	-0.17	0.98
	2	-0.34	0.24	-0.03
	3	0.32	0.24	-0.07
	4	0.30	-0.19	-0.13
	5	-0.32	-0.21	-0.09

TABLA IV.13.- Componentes cartesianas de los vectores unitarios en las direcciones de observación, para los puntos de interés del objeto (6,7,11).

PUNTO DE APLICACION	$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	PUNTO OBJETO	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	$n_{1,4}$	$n_{1,5}$	
(2+2)	300 → 400	6	5.25	-4.00	-5.00	3.00	
		7	6.00	-3.13	-5.88	3.50	
		11	3.13	1.00	-1.50	0.00	
	700 → 800	6	2.25	-3.00	-3.25	2.00	
		7	2.38	-2.38	-3.13	2.38	
		11	1.50	-0.13	-1.00	0.63	
	(6+6)	300 → 400	6	3.50	-3.00	-3.00	3.25
			7	3.25	-2.25	-2.25	3.00
			11	1.38	0.13	-0.63	0.38
700 → 800		6	4.63	-5.00	-5.00	4.38	
		7	5.13	-4.38	-5.38	4.00	
		11	2.38	-0.38	-1.75	1.00	

TABLA IV.14.- Recuentos de franjas en los tres puntos de interés, para los intervalos de fuerza y puntos de aplicación señalados.

PUNTO DE APLICACION	$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	PUNTO OBJETO	$dx(\mu m)$	$dy(\mu m)$	$dz(\mu m)$	$d(\mu m)$
(2+2)	300 → 400	6	-6.90	1.83	0.18	7.14
		7	-8.31	3.35	-0.71	8.99
		11	-2.03	4.59	-3.79	6.29
	700 → 800	6	-4.29	0.23	2.03	4.75
		7	-4.58	0.51	1.35	4.80
		11	-1.68	1.47	-1.39	2.63
(6+6)	300 → 400	6	-5.02	0.18	-1.57	5.26
		7	-4.86	0.09	-2.69	5.56
		11	-1.22	1.53	-1.93	2.75
	700 → 800	6	-7.60	0.13	0.35	7.61
		7	-8.45	1.39	1.23	8.65
		11	-2.79	2.20	-1.53	3.87

TABLA IV.15.- Desplazamientos absolutos de los puntos maxilares para los incrementos de fuerza señalados.

PUNTO APLIC.	$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	$do_x$ ( $\mu\text{m}$ )	$do_y$ ( $\mu\text{m}$ )	$do_z$ ( $\mu\text{m}$ )	$do$ ( $\mu\text{m}$ )	$\alpha_x$ (rad)	$\alpha_y$ (rad)	$\alpha_z$ (rad)	$\alpha$ (rad)
(2+2)	300 $\rightarrow$ 400	-13.08	11.28	-0.84	17.29	0.07	0.04	0.22	0.23
	700 $\rightarrow$ 800	-10.13	7.25	1.16	12.51	0.05	0.05	0.10	0.12
(6+6)	300 $\rightarrow$ 400	-11.74	-1.43	-2.08	12.01	-0.02	0.06	0.09	0.11
	700 $\rightarrow$ 800	-10.91	8.84	0.55	14.05	0.06	0.02	0.21	0.22

TABLA IV.16.- Vectores traslación y rotación maxilares para los incrementos de la fuerza aplicados.

PUNTO DE APLICACION	$F_1 \rightarrow F_2$ (g)	ECUACION DE LA RECTA EJE DE ROTACION
(2+2)	300 $\rightarrow$ 400	$y = 0.57 \cdot x$ $z = 3.14 \cdot x$
	700 $\rightarrow$ 800	$y = x$ $z = 2 \cdot x$
(6+6)	300 $\rightarrow$ 400	$y = -3 \cdot x$ $z = -4.5 \cdot x$
	700 $\rightarrow$ 800	$y = 0.33 \cdot x$ $z = 3.5 \cdot x$

TABLA IV.17.- Ejes de rotación maxilares para los incrementos de fuerza señalados.

### IV.3.- DESPLAZAMIENTOS EN EL PLANO MEDIANTE INTERFEROMETRIA DE MOTEADO

Con respecto a los desplazamientos de rango superior, interesaba comprobar la viabilidad del método de interferometría de moteado de haz único, analizado en el contexto de las deformaciones implicadas. Con este objetivo, el conjunto de observaciones pertinentes para los análisis de interés, fue referido a la realización de un barrido de toda la zona óseo-dental comprendida por la base de la arcada dentaria y ambos huesos maxilares. Se obtuvieron así los desplazamientos producidos cuando la primera exposición se efectuó con el sistema aplicado a los incisivos laterales desactivado y, la segunda, con aplicación de una fuerza de 200g en la dirección del eje Y.

El montaje experimental permitió fijar la distancia placa-pantalla en 29.2 cm y el factor de amplificación objeto-placa de 1.08. Los puntos estudiados aparecen numerados en la figura IV.5. Por último, la tabla IV.18 recoge los espaciados de franja, los desplazamientos en el plano objeto y el ángulo  $\beta$  formado con la vertical. Dichos desplazamientos alcanzan valores de hasta unas 17  $\mu\text{m}$  y por ello, entre los de mayor magnitud que se han podido apreciar mediante interferometría holográfica.



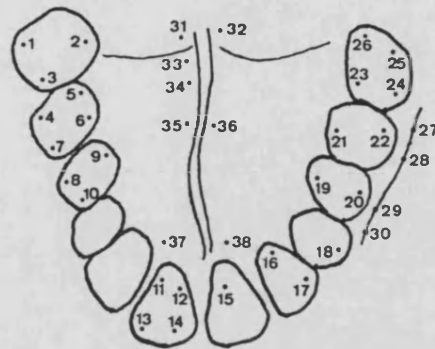


FIGURA IV.5.- Puntos de interés estudiados en el análisis de los desplazamientos por interferometría de moteado.

PUNTO OBJETO	E/n (mm)	$\beta$ (rad)	dx ( $\mu\text{m}$ )	dy ( $\mu\text{m}$ )	dxy ( $\mu\text{m}$ )
1	13.39	-0.87	-0.11	12.84	12.84
2	13.79	0.00	0.00	12.46	12.46
3	14.39	-2.62	-0.31	11.94	11.94
4	12.75	-1.16	-0.16	13.48	13.48
5	14.57	0.00	0.00	11.80	11.80
6	14.48	0.00	0.00	11.87	11.87
7	13.67	2.18	0.27	12.57	12.57
8	14.11	0.00	0.00	12.18	12.18
9	14.33	0.00	0.00	11.99	11.99
10	13.36	2.76	0.36	12.86	12.86
11	12.67	16.00	2.16	13.39	13.56
12	12.09	16.87	2.38	14.00	14.20

TABLA IV.18.- Desplazamientos y ángulos formados con la vertical ( $\beta$ ), medidos por interferometría de moteado, para los 38 puntos de interés.

PUNTO OBJETO	E/n (mm)	$\beta$ (rad)	dx ( $\mu\text{m}$ )	dy ( $\mu\text{m}$ )	dxy ( $\mu\text{m}$ )
13	10.03	13.24	2.26	16.98	17.13
14	11.65	17.89	2.63	14.51	14.75
15	10.55	17.45	2.83	16.04	16.29
16	13.03	20.65	2.70	12.91	13.19
17	11.84	21.23	3.06	14.19	14.52
18	13.59	23.71	2.97	12.30	12.65
19	14.87	18.91	2.17	11.35	11.56
20	15.52	20.94	2.30	10.83	11.07
21	16.65	12.22	1.26	10.24	10.32
22	16.47	12.65	1.32	10.35	10.43
23	15.45	4.95	0.55	11.11	11.12
24	16.34	8.00	0.84	10.49	10.52
25	14.83	-1.45	-0.17	11.59	11.59
26	15.33	-2.47	-0.28	11.21	11.21
27	15.25	9.02	1.01	11.21	11.26
28	15.10	19.63	2.22	11.16	11.38
29	14.78	23.42	2.68	11.32	11.63
30	10.77	32.29	5.06	15.14	15.96
31	10.62	-27.49	-4.39	15.57	16.18
32	12.49	2.62	0.36	13.76	13.76
33	11.75	-27.63	-3.99	14.07	14.62
34	10.84	-3.93	-0.62	15.84	15.85
35	13.62	3.49	0.44	12.60	12.61
36	12.52	7.56	1.03	13.63	13.67
37	13.92	10.62	1.31	12.28	12.35
38	11.97	18.76	2.68	14.11	14.36

TABLA IV.18.- Continuación.

## **CAPITULO V**

---

### **ANALISIS DE LOS RESULTADOS**

**V.1.- INTERES DEL ANALISIS CUALITATIVO**

**V.2.- SENSIBILIDAD DEL PROCESO DE MEDIDA PARA LAS EXPERIENCIAS DE INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA**

**V.3.- VALORACION CUANTITATIVA DE LAS EXPERIENCIAS**

**V.4.- ANALISIS DE LA EXPERIENCIA DE INTERFEROMETRIA DE MOTEADO**

### V.1.- INTERES DEL ANALISIS CUALITATIVO

La información que ofrece un interferograma holográfico del efecto producido por fuerzas ortodóncicas, puede contabilizarse para su utilización a dos niveles: cualitativo, que se puede extraer por simple inspección visual, y cuantitativo, obtenible mediante las medidas y cálculos adecuados, que permite conocer el desplazamiento de cualquiera de los puntos del objeto, en las tres direcciones del espacio.

El primer nivel, al que vamos a referirnos principalmente bajo este epígrafe, presenta la ventaja, en algunos casos, de que su comprensión permite apreciar de inmediato muchas características de los cambios producidos en el objeto a analizar. En concreto, en ortodoncia, muchas veces es más importante saber si una zona se mueve más o menos que otra, o si una determinada sutura interviene, que el conocimiento preciso de los desplazamientos de cada punto. Dicho con otras palabras, se prima el «cómo» frente al «cuánto».

Precisamente con esta finalidad se procedió a la realización de una serie de cinco interferogramas (figura V.1), en los que las primeras exposiciones se efectuaron con el cráneo sin carga y las segundas con cargas de 25, 50, 100, 200 y 300 g, respectivamente, estando el punto de aplicación de las mismas en los primeros molares permanentes de la arcada superior, (6+6).

Observando el conjunto de interferogramas cuyas fotografías se ofrecen en la figura V.1, se puede apreciar que con una fuerza de únicamente 25 g (figura V.1a), ya se producen deformaciones que alcanzan a la arcada dentaria, maxilar superior y huesos propios de la nariz. Con fuerzas totales de 50 y 100 g (figuras V.1b y c), puede observarse prácticamente el mismo esquema de orientación de franjas que en la figura V.1a, pero con una disminución de su espaciamiento y anchura, por lo que lógicamente la deformación es progresivamente mayor. Además, ésta comienza a alcanzar, aunque ligeramente, a la base del cráneo.

Cuando las fuerzas aplicadas son ya de 200 y 300 g, (figuras V.1d y e), aparecen claras deformaciones en la base del cráneo, con franjas que van contorneando el macizo facial a través de los huesos frontal, esfenoides y temporal.

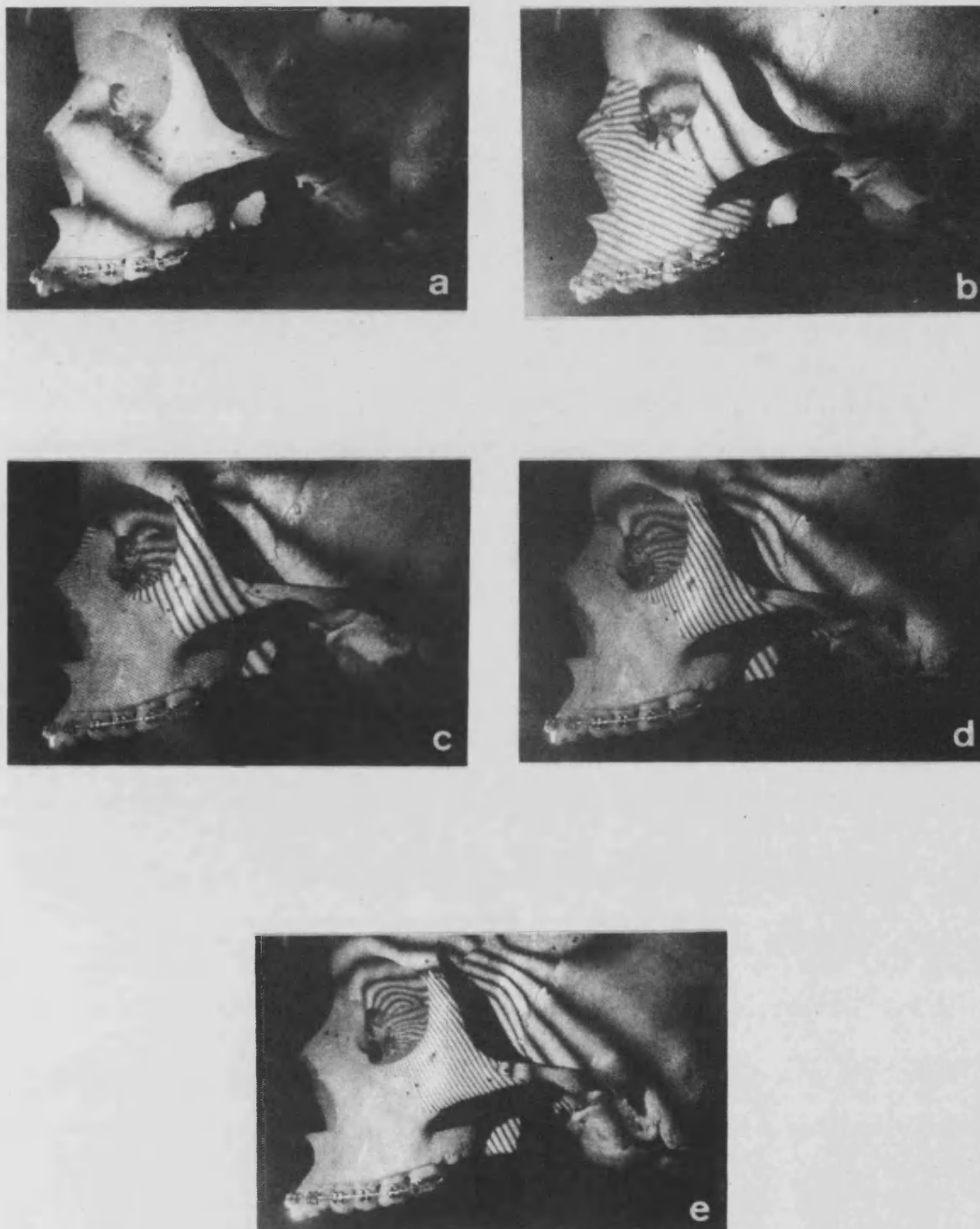


FIGURA V.1.- Fotografías de interferogramas del lado izquierdo del cráneo. Experiencias de tracción anterior. Primera exposición, fuerza nula; durante la segunda: (a) 25 g, (b) 50 g, (c) 100 g, (d) 200 g, y (e) 300 g.

Otra consecuencia importante que se desprende de este análisis visual es el papel demostrado por las suturas. Sólo para incrementos de fuerza aplicada de 25 g, el cráneo reacciona como un todo, sin que, al parecer, lleguen a producir ningún efecto dichas suturas, mientras que para fuerzas de 50 g y superiores, aquéllas siempre delimitan claramente los distintos patrones de franjas producidos en cada hueso, por otra parte sensiblemente homogéneos.

Tal efecto puede también observarse en las fotografías de los interferogramas de las figuras IV.2 y IV.3. Todo ello supone, en suma, que a nivel de las suturas, como líneas de discontinuidad, siempre se produce un cambio en el valor y la dirección del desplazamiento de las superficies óseas implicadas. Más aun, debido a la homogeneidad de los patrones de franjas, parece como si cada hueso de la cara experimentase un proceso de desplazamiento conjunto, sin deformación apreciable, dentro de los límites de la experiencia.

No obstante, a esta sencilla evaluación cualitativa es factible que se le escape información visual fácilmente: es posible que una zona con aparente ausencia de franjas se haya deformado, tal y como por ejemplo sucede en la arcada dentaria y el hueso maxilar cuando la fuerza aplicada es de 300 g (figura V.1e). En efecto, cuanto mayor es la deformación, las franjas aparecen más finas, de contornos más nítidos y con menor distancia entre ellas; por lo que, al ir incrementando la fuerza, se alcanzará un valor de la misma tal que no se las podrá

diferenciar. Aunque las franjas están realmente presentes, sólo se traducen en un tono gris intermedio que parece informar, erróneamente, de ausencia de deformación. Por esta razón es necesario conocer cómo se ha realizado un interferograma a la hora de evaluarlo. Y así, para la situación presentada en la figura V.1e, no es lógico admitir que la arcada dentaria no se haya desplazado cuando se están evidenciando deformaciones que alcanzan hasta la base del cráneo.

Existirá, por tanto, en el caso del que hasta ahora nos hemos ocupado de fuerzas nulas en las primeras exposiciones, un límite superior para la fuerza de tracción aplicada cuyos efectos se pretendan registrar en el análisis conjunto de las estructuras de interés. De acuerdo con la figura V.1, tal límite se establece en nuestro caso en torno a los 100 g, por encima de los cuales ya no es posible determinar claramente las deformaciones de la arcada dentaria y del maxilar.

Consiguientemente, para extender el análisis a fuerzas superiores a tal límite, por lo demás similares a las fuerzas ortopédicas empleadas clínicamente, es preciso recurrir a un escalonamiento de las experiencias, en el que la fuerza final,  $F_2$ , de cada etapa se convierte en la inicial,  $F_1$ , de la siguiente, hasta completar la fuerza total deseada. Tal es el caso de nuestra siguiente serie de siete interferogramas consecutivos, correspondientes a las fuerzas iniciales y finales que recoge la tabla V.1 y cuyos resultados presenta la figura V.2.



$F_1$ (g)	0	50	100	200	400	500	700
$F_2$ (g)	50	100	200	400	500	700	800
$\Delta F$ (g)	50	50	100	200	100	200	100

TABLA V.1.- Valores de las fuerzas de tracción totales aplicadas en (5+6). En la primera exposición de los sucesivos interferogramas,  $F_1$ , y en la segunda,  $F_2$ .

A la vista de estos nuevos interferogramas, y para sus condiciones experimentales, se puede deducir, primeramente, que los desplazamientos de la arcada dentaria sólo son apreciables en todo el rango de la experiencia para incrementos de fuerza de 100 g o inferiores; ya que cuando  $\Delta F=200$  g, las franjas de interferencia de esta zona son visualmente indistinguibles. Sin embargo, en el hueso maxilar y para fuerzas iniciales superiores a 100 g, sí es posible apreciar los desplazamientos producidos para incrementos de 200 g, a diferencia de lo que ocurría cuando la fuerza inicial era nula.

También es posible inferir de este resultado el hecho de que incrementos de fuerza iguales producen una respuesta mayor cuando el cráneo está inicialmente descargado que cuando ya se encuentra traccionado por una fuerza inicial. Consecuencia que se aprecia claramente al observar las figuras V.2 c, e y g, donde los incrementos de fuerza son idénticos, mientras que los desplazamientos son claramente inferiores cuando la fuerza de partida es de 700 g que cuando es de 400 g ó 100 g.



FIGURA V.2.- Fotografías de interferogramas del lado izquierdo del cráneo. Incrementos en la fuerza aplicada de: (a) (0-50) g, (b) (50-100) g, (c) (100-200) g, (d) (200-400) g, (e) (400-500) g, (f) (500-700) g y (g) (700-800) g.

Conviene destacar asimismo que en la figura V.2g se aprecia un desplazamiento superior en el primer molar permanente (zona donde se ubicó el punto de aplicación de la fuerza), que en el resto de la arcada dentaria. Lo cual pone de manifiesto una consecuencia de singular interés clínico en ortodoncia como es el que, para el rango de fuerzas iniciales tan elevadas, la pretendida ferulización de la arcada dentaria con alambre rectangular de las mismas dimensiones que las brackets, es insuficiente.

## **V.2.- SENSIBILIDAD DEL PROCESO DE MEDIDA PARA LAS EXPERIENCIAS DE INTERFEROMETRIA HOLOGRAFICA**

En este apartado se presenta el análisis de la sensibilidad de los resultados obtenidos en las experiencias realizadas sobre cráneo. Estas se plasman en los 18 interferogramas cuyas fotografías se han presentado en el capítulo IV (páginas 142-8), correspondientes a los 9 intervalos de fuerza que completan los 1000 g de tracción anterior máxima aplicada, a nivel de los incisivos laterales (2+2) y de los primeros molares (6+6). Los resultados para las tres componentes del desplazamiento, en los cuatro puntos escogidos, así como el desplazamiento total y la componente en el plano paralelo a la placa, se han recogido en las tablas IV.9 a IV.12. Su valoración cuantitativa e interés, dentro del marco de la Física Médica en el que se encuadra este trabajo, serán discutidos en el siguiente apartado de este mismo capítulo.

A continuación, vamos a centrarnos específicamente en la fiabilidad de las medidas de desplazamiento.

Como se vio en III.2.2, el proceso de cálculo de los desplazamientos viene influido por dos fuentes de error, una primera debida a la sensibilidad experimental en los corrimientos de franjas y una segunda debida a la sensibilidad en las medidas geométricas.

Con respecto a la primera, el protocolo experimental de desarrollo del método requiere la medida de los corrimientos de franjas producidos al cambiar la dirección de observación desde la 1 a las restantes direcciones 2,3,4 y 5, respectivamente. Como ya se ha discutido anteriormente en el apartado III.2.2.1, fueron observadores entrenados quienes decidieron el intervalo de incertidumbre en cada medición. Los valores asignados por los observadores a la sensibilidad experimental para tales medidas se presentan en la tabla V.2.

$F_1 \rightarrow F_2$	PUNTO DE APLICACION (2+2)		PUNTO DE APLICACION (6+6)	
	SENSIBILIDAD (franja)		SENSIBILIDAD (franja)	
	Puntos objeto 1,3,4	Punto objeto 2	Puntos objeto 1,3,4	Punto objeto 2
0 → 100	0.25	0.13	0.13	0.13
100 → 200	0.25	0.13	0.25	0.13
200 → 300	0.25	0.13	0.25	0.25
300 → 400	0.25	0.25	0.25	0.25
400 → 500	0.25	0.25	0.25	0.25
500 → 600	0.25	0.25	0.25	0.25
600 → 700	0.25	0.25	0.25	0.25
700 → 800	0.25	0.25	0.25	0.25
800 → 1000	0.50	0.50	0.50	0.50

TABLA V.2.- Sensibilidad experimental en los corrimientos de franjas, asignada a los cuatro puntos de interés del cráneo, para los distintos intervalos de fuerza aplicada.

Consecuentemente, con objeto de calcular los errores en las tres componentes del desplazamiento, se obtuvieron éstas para las 81 posibles combinaciones de los valores ( $n_{1,j}$ - sensibilidad),  $n_{1,j}$  y ( $n_{1,j}$ + sensibilidad), con  $j=2,3,4,5$ , y se agruparon por intervalos de clase. A continuación, se decidió contrastar el método de verificación de normalidad y cálculo de la desviación típica con otros métodos existentes, a fin de asegurar doblemente la validez de las conclusiones. Para ello se eligió, por su sencillez de aplicación e interpretación, el de la recta de Henri<sup>52</sup>. Este

método tiene la dificultad de que, por ser fundamentalmente gráfico, es difícilmente informatizable; a cambio, presenta la cualidad de ser aplicable rápidamente disponiendo únicamente de una calculadora manual y papel probabilístico, de modo que el coeficiente de correlación obtenido mide, directamente, el grado de normalidad de la distribución, y, automáticamente, se lee sobre el papel gráfico el valor de la desviación típica.

Las figuras V.3 a V.6 muestran las correspondientes representaciones para las tres componentes del desplazamiento de cada uno de los cuatro puntos estudiados, en el intervalo de fuerza de  $(0 \rightarrow 100)$ g, con punto de aplicación en  $(2+2)$ . En ellas están también representadas las rectas de regresión, siendo los coeficientes de correlación los consignados en la tabla V.3, reveladores de la normalidad de las distribuciones<sup>38</sup>. Asimismo, la tabla V.4 recoge las desviaciones típicas obtenidas, para las tres componentes del desplazamiento, en los mencionados puntos.

Posteriormente se aplicó a cada conjunto de resultados correspondiente a cada componente del desplazamiento, la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov<sup>16</sup>, para las 72 situaciones analizadas. Ello permitió la aceptación, en todos los casos, de la hipótesis de normalidad al 95 % de confianza. De este modo, pudo asignarse a cada desplazamiento un error igual a la desviación típica de su distribución de valores, coincidiendo los desplazamientos medios con los calculados inicialmente.

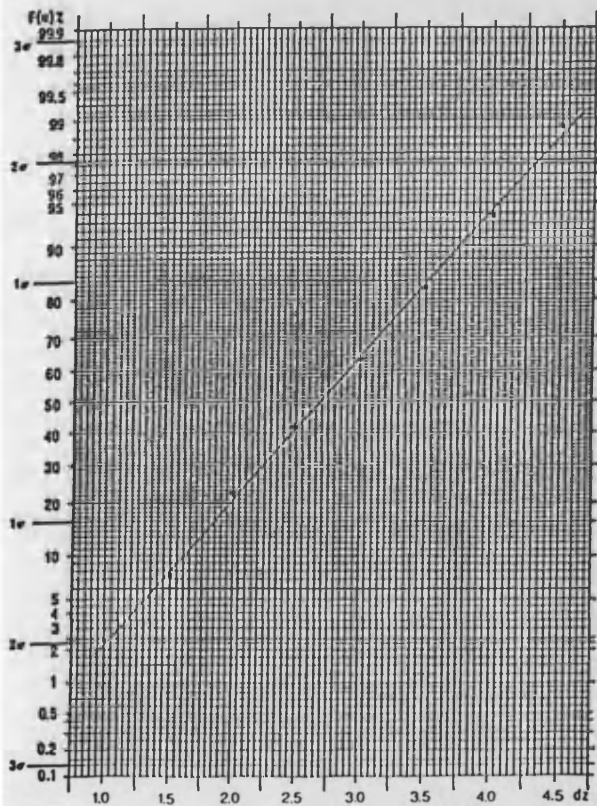
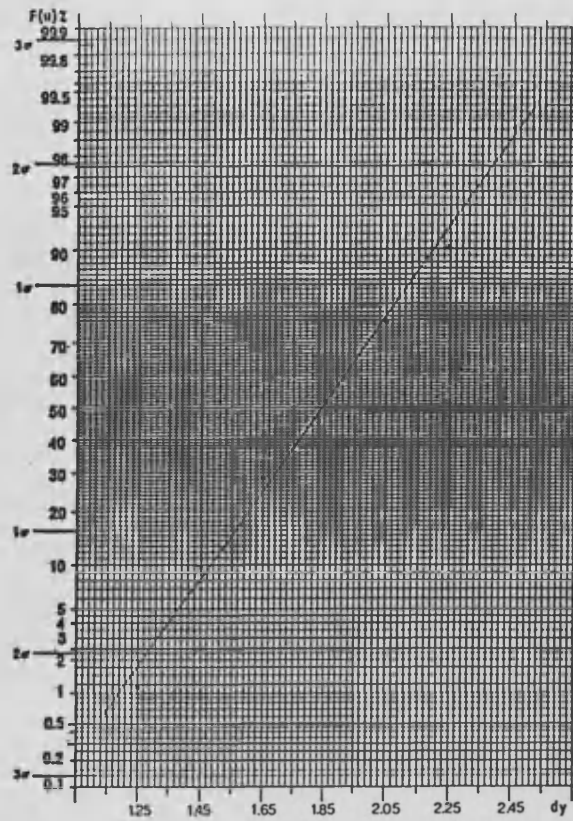
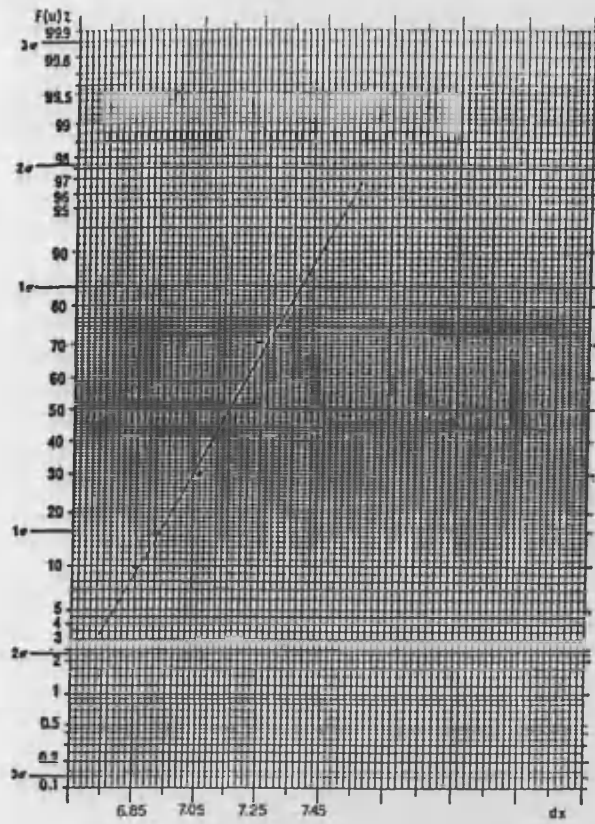


FIGURA V.3.- Rectas de Henri correspondientes al ajuste lineal de las frecuencias acumuladas,  $F(u)$ , obtenidas para las componentes  $dx, dy, dz$  del desplazamiento del punto 1.

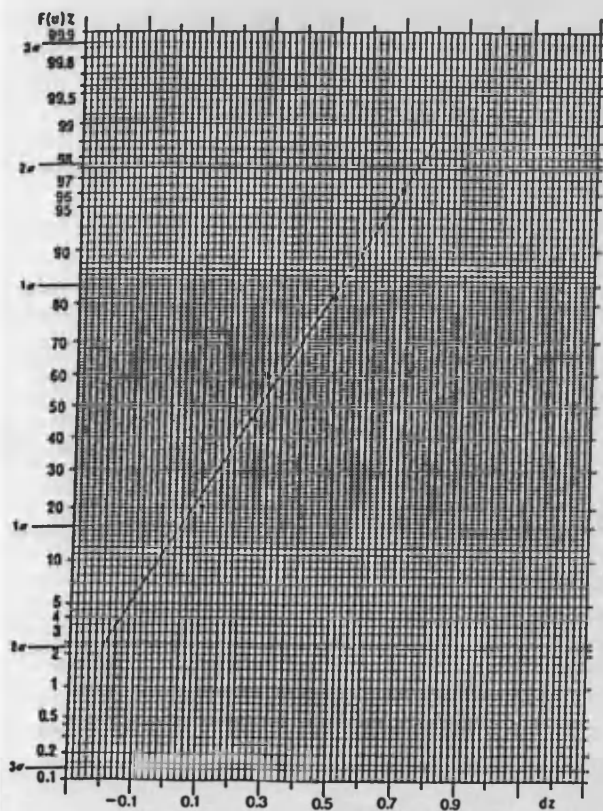
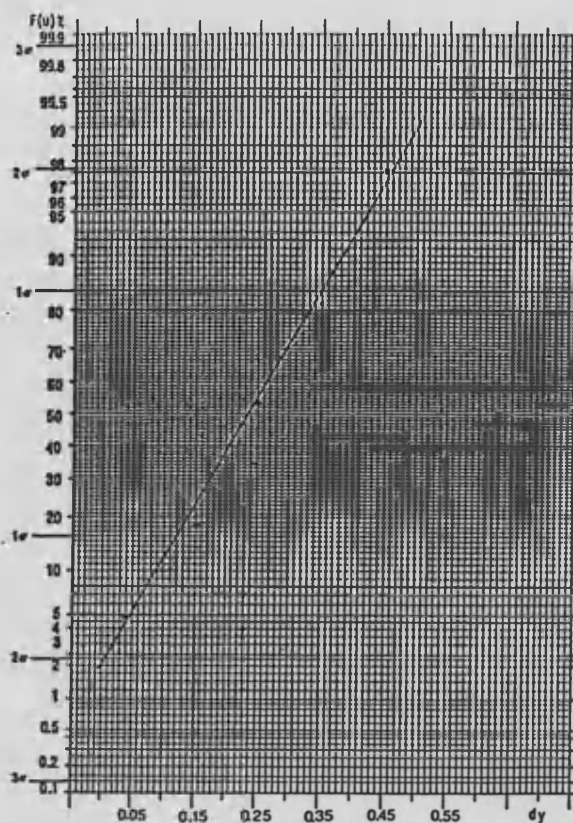
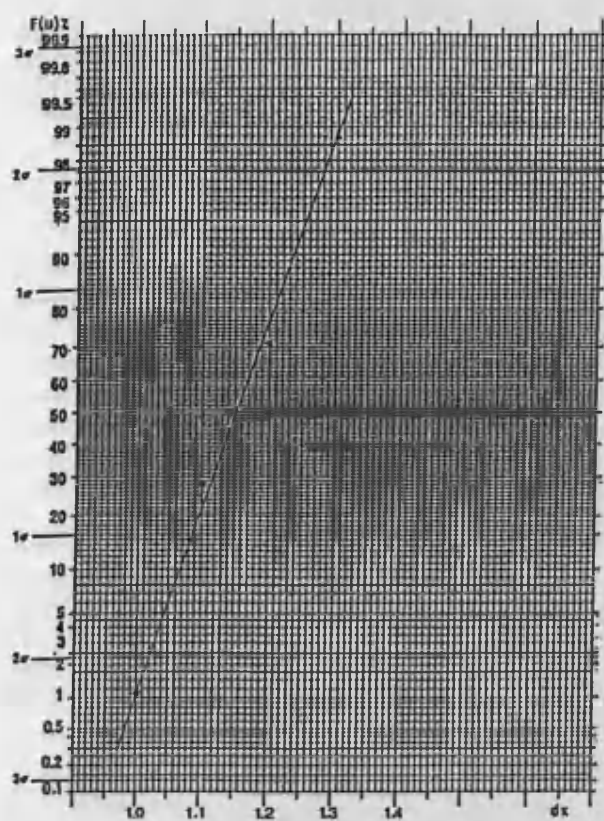


FIGURA V.4.- Rectas de Henri correspondientes al ajuste lineal de las frecuencias acumuladas,  $F(u)$ , obtenidas para las componentes  $dx, dy, dz$  del desplazamiento del punto 2.



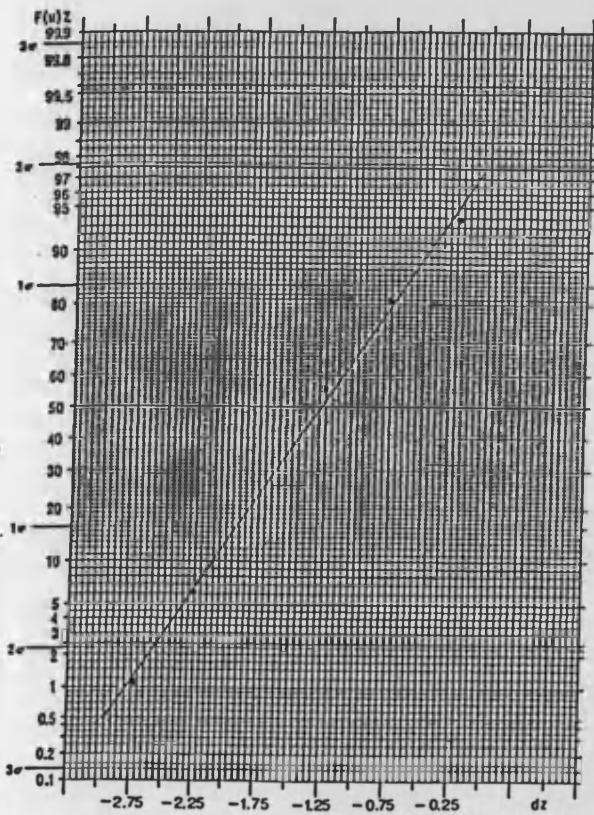
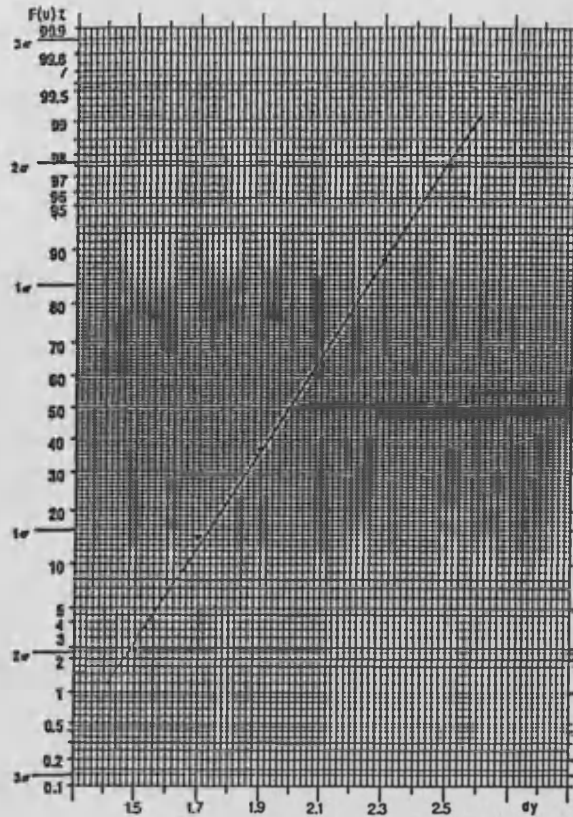
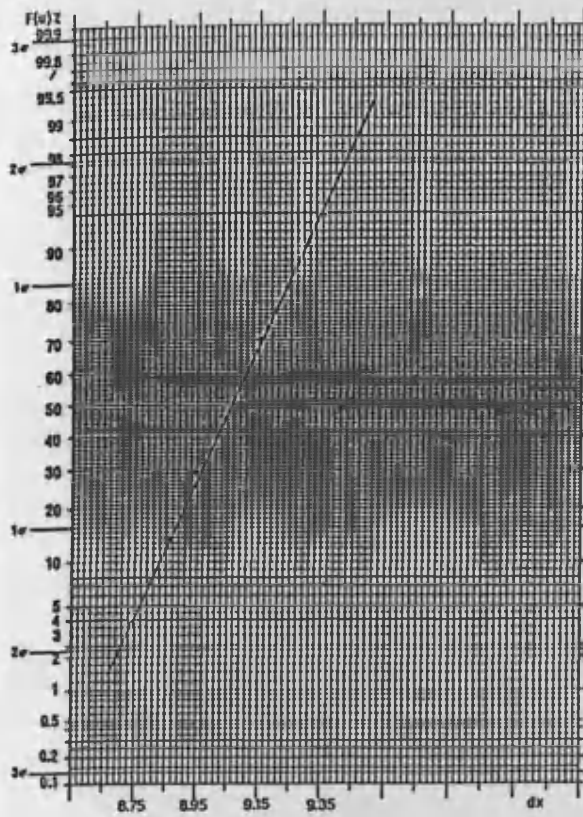


FIGURA V.5.- Rectas de Henri correspondientes al ajuste lineal de las frecuencias acumuladas,  $F(u)$ , obtenidas para las componentes  $dx, dy, dz$  del desplazamiento del punto 3.

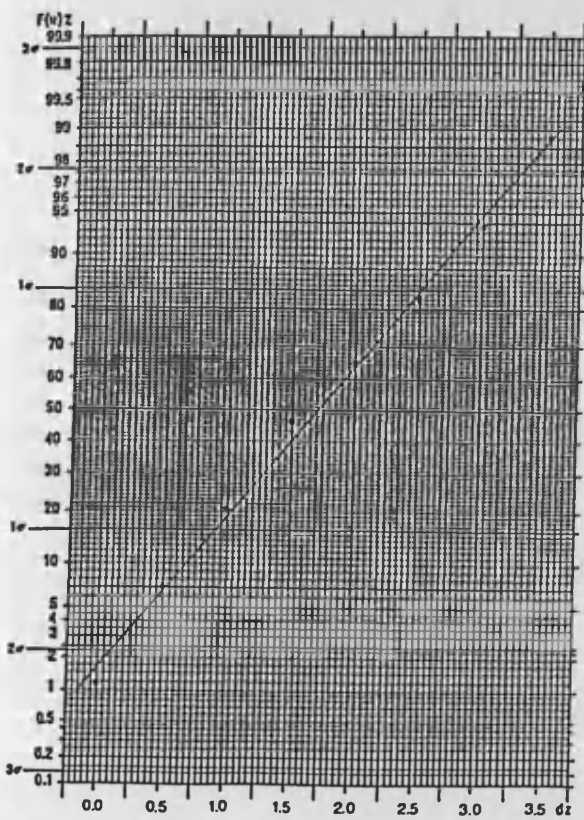
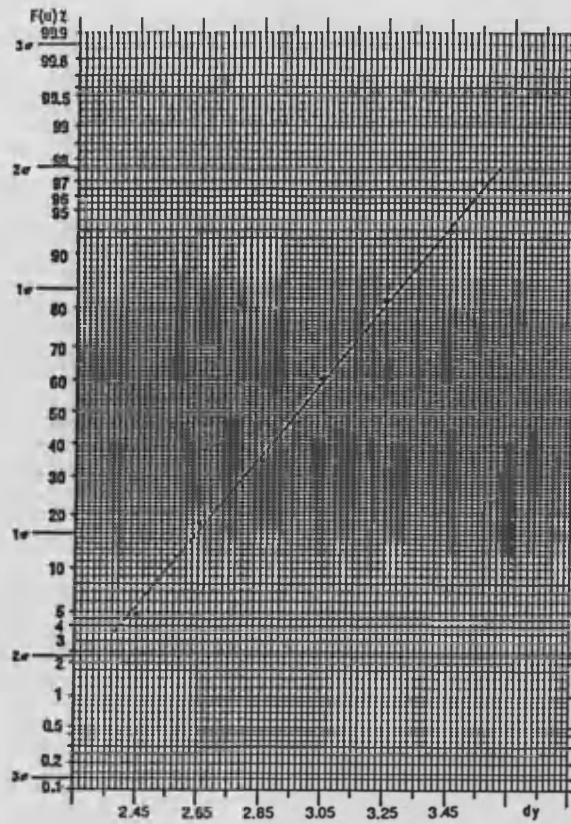
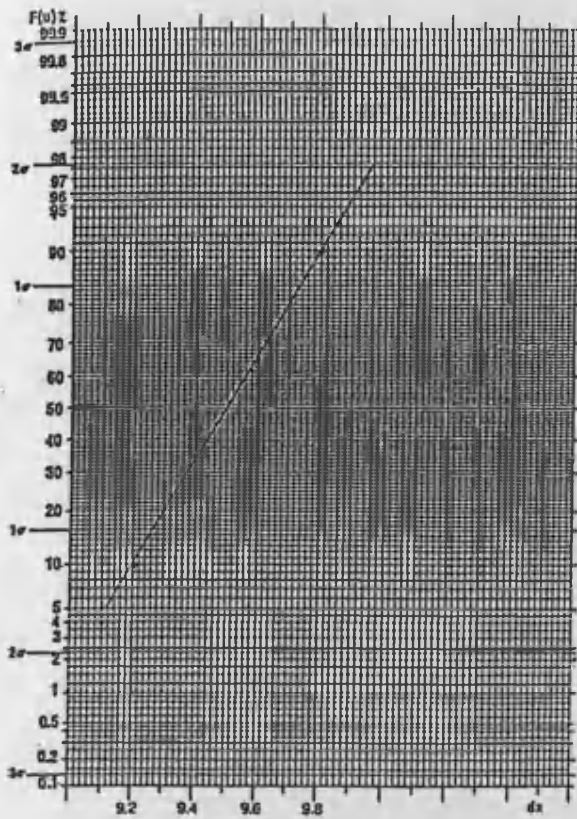


FIGURA Y.6.- Rectas de Henri correspondientes al ajuste lineal de las frecuencias acumuladas,  $F(u)$ , obtenidas para las componentes  $dx, dy, dz$  del desplazamiento del punto 4.

PUNTO OBJETO	C.C.(dx)	C.C.(dy)	C.C.(dz)
1	0.997	0.997	0.999
2	0.997	0.999	0.997
3	0.999	0.999	0.999
4	0.999	0.999	0.999

TABLA V.3.- Coeficientes de correlación (C.C.) de las rectas de Henri ajustadas, para las tres componentes del desplazamiento.

PUNTO OBJETO	$\sigma_{dx}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dy}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dz}$ ( $\mu\text{m}$ )
1	0.2	0.3	0.8
2	0.08	0.11	0.2
3	0.18	0.3	0.6
4	0.2	0.3	0.8

TABLA V.4.- Valores de las desviaciones típicas ( $\sigma$ ) de las componentes del desplazamiento, obtenidas de las rectas de Henri.

Las desviaciones típicas así calculadas, para los casos en que se había hecho la comprobación de normalidad a través de la recta de Henri, coinciden con los valores deducidos por este

segundo método (tabla V.4), tal como puede comprobarse. Así pues, ambos caminos confirman la validez de los resultados encontrados.

Los errores en los valores de las componentes del desplazamiento, se recogen en las tablas V.5 y V.6. En ellas se puede apreciar que tales errores oscilan, para incrementos de fuerza de 100 g, entre, aproximadamente, 0.1 y 0.3  $\mu\text{m}$  para las componentes X e Y, mientras que los valores para la componente Z resultan de 2 a 3 veces más elevados. Lo que unido a la pequeñez de la magnitud de dicha componente Z del desplazamiento en algunos intervalos de fuerza analizados (tablas IV.11 y IV.12), desaconsejan en ellos su utilización para el cálculo de los desplazamientos absolutos. Por tal razón, en las referidas tablas, se han presentado también los errores de los desplazamientos en el plano XY, a fin de manejar sus valores en el estudio de los movimientos de los puntos significativos.

$(F_1 \rightarrow F_2)$ (g)	PUNTO OBJETO	$\sigma_{dx}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dy}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dz}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_d$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dxy}$ ( $\mu\text{m}$ )
0 → 100	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.08	0.11	0.2	0.11	0.08
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
100 → 200	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.08	0.11	0.2	0.11	0.08
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
200 → 300	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.08	0.11	0.2	0.11	0.08
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
300 → 400	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
400 → 500	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
500 → 600	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
600 → 700	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
700 → 800	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
800 → 1000	1	0.4	0.6	1.6	0.8	0.4
	2	0.3	0.4	0.8	0.4	0.3
	3	0.4	0.6	1.2	0.4	0.4
	4	0.4	0.6	1.6	0.4	0.4

TABLA V.5.- Desviaciones típicas en los desplazamientos de los puntos de interés, referidas a la sensibilidad en los recuentos de franjas. Fuerza aplicada en (2+2).

$(F_1 \rightarrow F_2)$ (g)	PUNTO OBJETO	$\sigma_{dx}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dy}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dz}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_d$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dxy}$ ( $\mu\text{m}$ )
0 → 100	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.08	0.11	0.2	0.11	0.08
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
100 → 200	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.08	0.11	0.2	0.11	0.08
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
200 → 300	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
300 → 400	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
400 → 500	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
500 → 600	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
600 → 700	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
700 → 800	1	0.2	0.3	0.8	0.4	0.2
	2	0.16	0.2	0.4	0.2	0.16
	3	0.18	0.3	0.6	0.19	0.18
	4	0.2	0.3	0.8	0.2	0.2
800 → 1000	1	0.4	0.6	1.6	0.8	0.4
	2	0.3	0.4	0.8	0.4	0.3
	3	0.4	0.6	1.2	0.4	0.4
	4	0.4	0.6	1.6	0.4	0.4

TABLA V.6.- Desviaciones típicas en los desplazamientos de los puntos de interés, referidas a la sensibilidad en los recuentos de franjas. Fuerza aplicada en (6+6).

Con respecto a los errores producidos en los desplazamientos, debido a la sensibilidad experimental en las medidas de distancias implicadas, la tabla V.7 recoge los valores de las coordenadas de los puntos representativos en la placa, para los cuatro puntos del objeto analizados, donde todas las medidas vienen afectadas de una sensibilidad experimental de 0.5 mm.

A partir de estos datos, el cálculo de los errores cometidos en las componentes del desplazamiento se realizó de forma análoga a los correspondientes a la influencia de la sensibilidad experimental en la medida de los corrimientos de franjas. Es decir, combinando los valores de las tres coordenadas de las 5 direcciones de observación utilizadas, con las mismas disminuidas y aumentadas en la referida sensibilidad de 0.5 mm. Se obtuvieron así los correspondientes conjuntos de desplazamientos, a los que, agrupados debidamente, se les aplicó la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov<sup>116</sup>, que permitió nuevamente la aceptación, en todos los casos, de la hipótesis de normalidad al 95% de confianza.

PUNTO OBJETO	DIRECCION DE OBSERVACION	Cx(mm)	Cy(mm)	Cz(mm)
1	1	14.5	12.0	144.0
	2	-35.5	47.0	144.0
	3	64.5	47.0	144.0
	4	64.5	-23.0	144.0
	5	-35.5	-23.0	144.0
	6	14.5	47.0	144.0
	7	64.5	12.0	144.0
	8	14.5	-23.0	144.0
	9	-35.5	12.0	144.0
2	1	-9.0	-4.5	106.0
	2	-59.0	30.5	106.0
	3	41.0	60.5	106.0
	4	41.0	-39.5	106.0
	5	-59.0	-39.5	106.0
	6	-9.0	30.5	106.0
	7	41.0	-4.5	106.0
	8	-9.0	-39.5	106.0
	9	-59.0	-4.5	106.0
3	1	-11.5	16.5	121.0
	2	-61.5	51.5	121.0
	3	38.5	51.5	121.0
	4	38.5	-18.5	121.0
	5	-61.5	-18.5	121.0
	6	-11.5	51.5	121.0
	7	38.5	16.5	121.0
	8	-11.5	-18.5	121.0
	9	-61.5	16.5	121.0
4	1	18.5	27.5	138.0
	2	-31.5	62.5	138.0
	3	68.5	-7.5	138.0
	4	68.5	-7.5	138.0
	5	-31.5	-7.5	138.0
	6	18.5	62.5	138.0
	7	68.5	27.5	138.0
	8	18.5	-7.5	138.0
	9	-31.5	27.5	138.0

TABLA V.7.- Coordenadas de los puntos representativos en la placa de las direcciones de observación, referidas a los 4 puntos analizados en el objeto.



Las tablas V.8 y V.9 presentan los valores de las desviaciones típicas correspondientes a los intervalos de fuerza y puntos del objeto analizados, para la aplicación de la fuerza en (2+2) y (6+6), respectivamente. En dichas tablas se aprecia que los errores en la componente Z son, de nuevo, superiores a los de las componentes X e Y.

Por consiguiente, al comparar los resultados de las tablas V.8 y V.9 con los antes consignados en las V.5 y V.6, vuelve a confirmarse la despreciable influencia de la sensibilidad en las medidas geométricas, frente a la de los recuentos de franjas, que ya fue establecida en III.2.2.2 al efectuar el análisis general del calibrado del proceso de medida. En efecto, los errores asociados a la medida de las distancias geométricas resultan, aproximadamente, un orden de magnitud inferior a los correspondientes a los recuentos de franjas, lo que avala la validez de utilización de, exclusivamente, de estos últimos para los cálculos realizados en el presente estudio.

PUNTO DE APLICACION : (2+2)						
$(F_1 \rightarrow F_2)$ (g)	PUNTO OBJETO	$\sigma_{dx}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dy}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dz}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_d$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dxy}$ ( $\mu\text{m}$ )
0 → 100	1	0.03	0.04	0.18	0.09	0.03
	2	0.010	0.010	0.05	0.02	0.010
	3	0.05	0.08	0.4	0.06	0.04
	4	0.04	0.05	0.2	0.03	0.04
100 → 200	1	0.03	0.03	0.14	0.03	0.03
	2	0.010	0.010	0.07	0.010	0.010
	3	0.05	0.07	0.4	0.05	0.05
	4	0.05	0.05	0.2	0.07	0.04
200 → 300	1	0.02	0.02	0.15	0.02	0.02
	2	0.005	0.010	0.04	0.010	0.010
	3	0.03	0.05	0.3	0.07	0.03
	4	0.04	0.05	0.21	0.04	0.03
300 → 400	1	0.03	0.04	0.19	0.03	0.03
	2	0.010	0.02	0.12	0.03	0.010
	3	0.05	0.08	0.5	0.07	0.05
	4	0.08	0.09	0.4	0.12	0.07
400 → 500	1	0.05	0.05	0.3	0.08	0.04
	2	0.02	0.02	0.13	0.02	0.02
	3	0.05	0.09	0.5	0.09	0.05
	4	0.07	0.08	0.4	0.12	0.06
500 → 600	1	0.04	0.04	0.3	0.07	0.04
	2	0.010	0.02	0.11	0.03	0.010
	3	0.05	0.08	0.5	0.16	0.05
	4	0.08	0.10	0.4	0.06	0.07
600 → 700	1	0.04	0.04	0.2	0.03	0.04
	2	0.02	0.02	0.13	0.02	0.02
	3	0.05	0.08	0.4	0.05	0.05
	4	0.06	0.08	0.3	0.06	0.05
700 → 800	1	0.02	0.02	0.17	0.08	0.02
	2	0.010	0.010	0.09	0.02	0.010
	3	0.04	0.06	0.3	0.04	0.04
	4	0.05	0.06	0.3	0.04	0.04
800 → 1000	1	0.09	0.10	0.6	0.06	0.09
	2	0.03	0.04	0.3	0.12	0.03
	3	0.10	0.16	0.8	0.19	0.09
	4	0.11	0.15	0.6	0.06	0.10

TABLA V.8.- Desviaciones típicas en los desplazamientos, referidas a la sensibilidad en las medidas geométricas. Fuerza aplicada en (2+2).

PUNTO DE APLICACION : (6+6)						
$(F_1 \rightarrow F_2)$ (g)	PUNTO OBJETO	$\sigma_{dx}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dy}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dz}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_d$ ( $\mu\text{m}$ )	$\sigma_{dxy}$ ( $\mu\text{m}$ )
0 → 100	1	0.010	0.010	0.03	0.010	0.010
	2	0.010	0.010	0.07	0.04	0.010
	3	0.010	0.02	0.13	0.03	0.02
	4	0.04	0.06	0.19	0.02	0.04
100 → 200	1	0.04	0.05	0.3	0.08	0.04
	2	0.010	0.010	0.06	0.04	0.010
	3	0.04	0.06	0.3	0.06	0.04
	4	0.06	0.08	0.3	0.04	0.06
200 → 300	1	0.010	0.010	0.03	0.010	0.010
	2	0.010	0.010	0.07	0.04	0.01
	3	0.010	0.02	0.13	0.03	0.02
	4	0.04	0.06	0.19	0.02	0.04
300 → 400	1	0.02	0.02	0.14	0.10	0.02
	2	0.02	0.02	0.12	0.06	0.02
	3	0.04	0.06	0.3	0.06	0.04
	4	0.04	0.05	0.2	0.02	0.03
400 → 500	1	0.02	0.02	0.12	0.02	0.02
	2	0.01	0.02	0.11	0.02	0.01
	3	0.04	0.06	0.4	0.04	0.04
	4	0.05	0.06	0.2	0.03	0.04
500 → 600	1	0.05	0.05	0.3	0.07	0.05
	2	0.02	0.03	0.17	0.04	0.02
	3	0.06	0.10	0.5	0.09	0.06
	4	0.07	0.09	0.4	0.04	0.06
600 → 700	1	0.03	0.03	0.17	0.04	0.03
	2	0.02	0.03	0.15	0.06	0.02
	3	0.05	0.08	0.42	0.07	0.05
	4	0.05	0.07	0.3	0.04	0.04
700 → 800	1	0.03	0.03	0.2	0.03	0.03
	2	0.02	0.03	0.16	0.02	0.02
	3	0.05	0.08	0.4	0.07	0.05
	4	0.07	0.08	0.4	0.05	0.06
800 → 1000	1	0.06	0.07	0.3	0.12	0.06
	2	0.04	0.06	0.4	0.08	0.04
	3	----	----	---	----	----
	4	0.12	0.15	0.6	0.13	0.11

TABLA V.9.- Desviaciones típicas en los desplazamientos, referidas a la sensibilidad en las medidas geométricas. Fuerza aplicada en (6+6).

### V.3.- VALORACION CUANTITATIVA DE LAS EXPERIENCIAS

Al analizar los resultados de las experiencias realizadas sobre cráneo, con puntos de aplicación en (2+2) y en (6+6), se pueden inferir las siguientes consecuencias. En primer lugar, cuando el punto de aplicación de la fuerza está situado en (2+2), el desplazamiento de los cuatro puntos analizados se produce, fundamentalmente y como cabía esperar, en la dirección del eje horizontal (X), correspondiente a la de tracción. Tanto la componente vertical (Y) como la normal al plano de la placa (Z) toman valores relativamente pequeños.

Concretamente, dicha componente vertical es positiva para los puntos situados en el hueso maxilar (punto 1), en el primer molar (punto 3) y en el incisivo central (punto 4), mientras que resulta negativa para el punto situado en el hueso malar (punto 2). Para la situación del punto de aplicación en (6+6), los desplazamientos en el eje vertical son positivos, salvo para el punto 3 que toma valores alternativamente positivos y negativos. Con referencia a la componente Z, sus valores son relativamente pequeños y de ambos signos, lo que unido a la magnitud de los errores de que se ve afectada, hacen irrelevante su utilización para el análisis.

Por otro lado, los desplazamientos para los intervalos de fuerza analizados, en la dirección de tracción, son superiores para el punto de aplicación en los incisivos que en los molares.

Lo mismo sucede para la componente Y de los puntos 1, 2 y 4, mientras que el punto 3 se desplaza en dicho eje en menor grado.

Pasando a analizar separadamente los cuatro puntos estudiados, las figuras V.7 a V.10 presentan las tres componentes del desplazamiento para cada punto, en todo el intervalo de fuerzas aplicado, tanto con punto de aplicación de las mismas en (2+2) como en (6+6).

El punto 1 se encuentra situado en la zona anterior del maxilar, muy próximo al denominado punto A, utilizado en Cefalometría<sup>95</sup>, de ahí el interés del análisis de sus movimientos. Su desplazamiento se produce fundamentalmente en la dirección anteroposterior con sentido anterior, ya que este eje coincide casi exactamente con la dirección de aplicación de la tracción. Dicho desplazamiento es de 1.5 a 2 veces superior, cuando se tracciona de (2+2) a cuando la tracción se aplica en (6+6). En el eje Y su desplazamiento es unas 3 veces menor que el producido en el eje X, aunque alcanza valores considerables, como son 29.3  $\mu\text{m}$  en (2+2) y 20.5  $\mu\text{m}$  en (6+6). Con respecto al desplazamiento en el eje Z, es claramente superior en (2+2), 7.0  $\mu\text{m}$ , mientras que en (6+6), -0.8  $\mu\text{m}$ , puede decirse que el movimiento tiene lugar en el plano XY.

El punto 2 está situado en el hueso zigomático, cerca de la sutura zigomático-maxilar. Su desplazamiento en el eje anteroposterior es algo mayor para (2+2) en los primeros

intervalos de fuerza, para terminar siendo ligeramente superior en (6+6),  $-40.0 \mu\text{m}$ , frente a (2+2),  $-37.8 \mu\text{m}$ . Por otro lado, es el punto que presenta menor desplazamiento en dicho eje, aproximadamente el 30 % del máximo desplazamiento, que se produce para el punto 4, con tracción en (2+2),  $-113.6 \mu\text{m}$ . Esto permite atribuir al hueso zigomático el papel de estructura más estable del conjunto. En el eje Y, el movimiento es relativamente pequeño y similar para ambos puntos de aplicación (2+2),  $-4.2 \mu\text{m}$ , y (6+6),  $-4.7 \mu\text{m}$ . Sin embargo, en el eje Z, el desplazamiento es menor en (2+2),  $3.3 \mu\text{m}$ , y de sentido contrario a (6+6),  $-6.9 \mu\text{m}$ , alejándose del plano sagital medio, si la tracción es a nivel de (2+2) y acercándose si es en (6+6). Puede observarse que éste es el único punto cuyo desplazamiento anterior es mayor cuando la tracción se ejerce a nivel de los primeros molares, a diferencia de lo que sucede con los tres restantes.

El punto 3 corresponde al primer molar permanente donde, por otro lado, se situó uno de los punto de aplicación de la tracción (6+6). Es el único punto donde no fue posible el recuento de franjas en el intervalo (800  $\rightarrow$  1000)g, con punto de aplicación en (6+6), por lo que los desplazamientos en la figura V.9 hacen referencia a los intervalos hasta 800 g. No obstante, es posible hacer una extrapolación, estimando de forma aproximada el valor de la componente X en torno a las  $95 \mu\text{m}$ , para los 1000g. Con respecto al eje Y, el desplazamiento del molar es relativamente pequeño, pero con la particularidad de que se

produce hacia abajo para ambos puntos de aplicación de la fuerza y en mayor magnitud cuando la tracción está en (2+2) que cuando se tracciona sobre él. En el eje Z el desplazamiento es similar en ambos casos, de pequeña magnitud y en sentido de acercamiento al plano sagital medio.

Finalmente, el punto 4 se encuentra en el incisivo central superior. Es el punto que presenta mayor desplazamiento en el plano horizontal, [(2+2), -113.6  $\mu\text{m}$  y (6+6), -100.8  $\mu\text{m}$  en el eje X y (2+2), 18.4  $\mu\text{m}$  y (6+6), 10.9  $\mu\text{m}$  en el eje Y], Puede confirmarse, pues, que experimenta un claro movimiento anterior pero también hacia arriba y alejándose de la línea media.

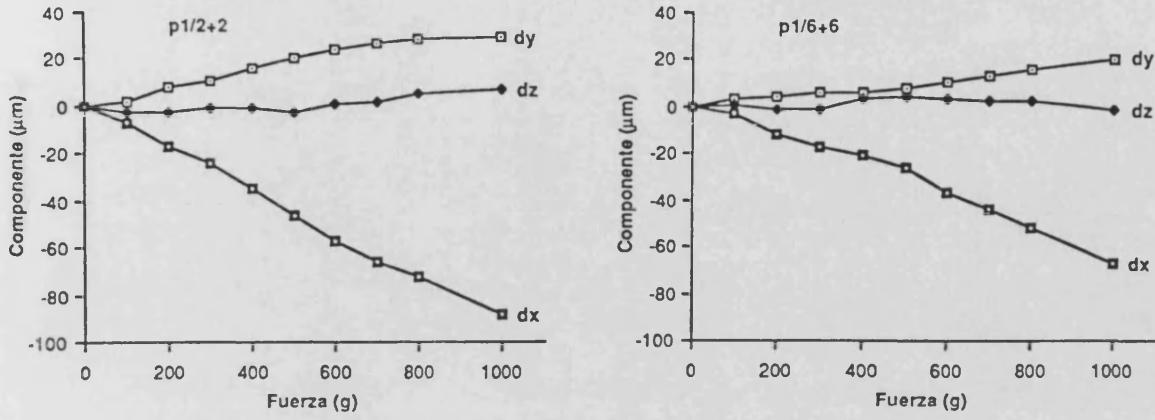


FIGURA V.7.- Componentes del desplazamiento del punto 1, en función de la fuerza aplicada. Puntos de aplicación en (2+2) y en (6+6).

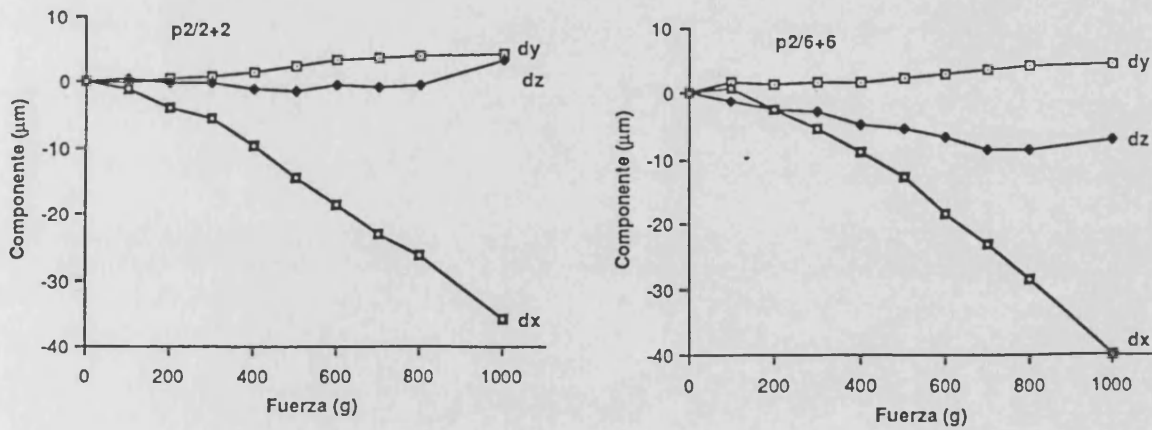


FIGURA V.8.- Componentes del desplazamiento del punto 2, en función de la fuerza aplicada. Puntos de aplicación en (2+2) y en (6+6).



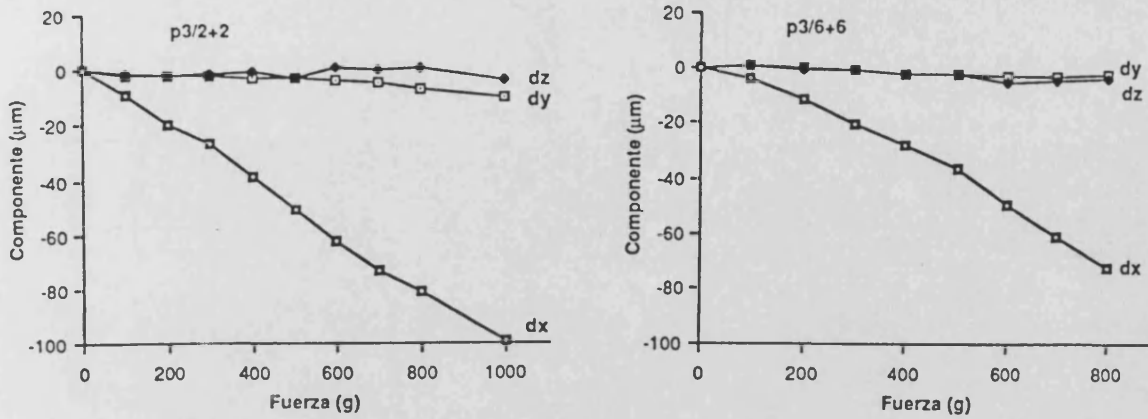


FIGURA V.9.- Componentes del desplazamiento del punto 3, en función de la fuerza aplicada. Puntos de aplicación en (2+2) y en (6+6).

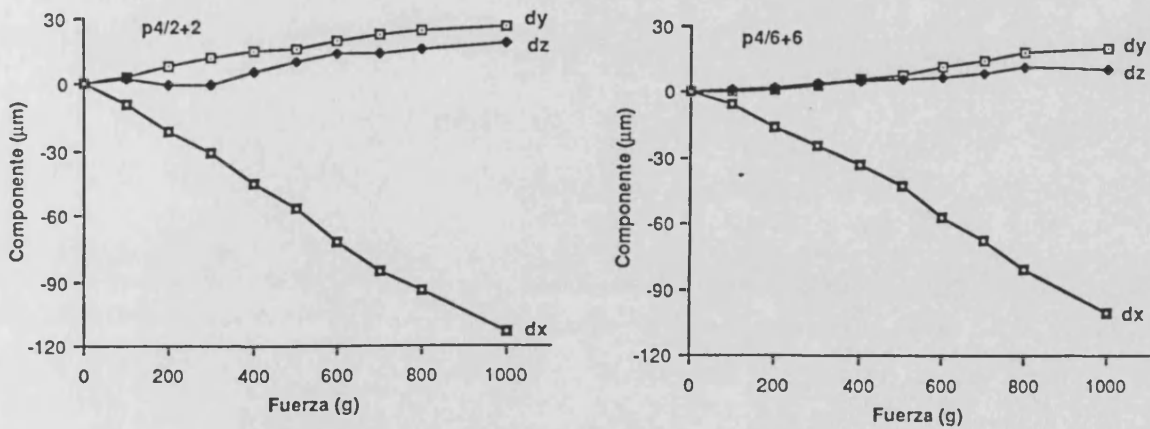


FIGURA V.10.- Componentes del desplazamiento del punto 4, en función de la fuerza aplicada. Puntos de aplicación en (2+2) y en (6+6).

Con respecto a la respuesta global de las estructuras analizadas es muy ilustrativo el cálculo realizado con referencia a los giros, a nivel del maxilar, cuyos resultados se presentaron en las tablas IV.11 y IV.12.

Al analizar dichos valores se aprecia que el tipo de ensayo ortodóncico aplicado provoca una rotación del hueso maxilar izquierdo en el sentido de las agujas del reloj, en sentido contrario a lo que sucede con una tracción extraoral cervical<sup>70</sup>. Concretamente, el desplazamiento total es suma de un desplazamiento anterior del macizo facial y una rotación, que provoca la compresión de la sutura fronto-nasal. Este movimiento encontrado en nuestros resultados es más intenso cuando la tracción se verifica sobre los incisivos laterales permanentes que cuando se aplica a nivel de los primeros molares, para la variación de fuerzas de (300→400) g, y la relación se invierte para los (700→800) g.

En definitiva, todos estos resultados permiten confirmar la plena validez y adecuación de la metodología analizada e implementada para su finalidad propuesta. Mediante la misma es, en efecto, posible un análisis cuantitativo, suficientemente sensible y detallado, de los efectos deformadores producidos en las estructuras de interés por parte de la acción ortodóncica investigada, correspondiente en nuestro caso a la tracción anterior del maxilar superior.

#### V.4.- ANALISIS DE LA EXPERIENCIA DE INTERFEROMETRIA DE MOTEADO

Como se discutió en el apartado III.3, los desplazamientos pueden calcularse, para la técnica de interferometría de moteado, mediante la expresión II.5, viniendo establecida la sensibilidad de medida por aplicación directa de la ley de propagación de errores de Gauss. En el caso de la experiencia realizada analizada, sobre el cráneo con aplicación de una tracción extraoral anterior de 200 g, sobre los incisivos laterales superiores, los valores implicados se concretan en:

$$L = 29.2 \text{ cm}; a_o = 1.7 \text{ cm}; a_p = 1.85 \text{ cm}.$$

La sensibilidad experimental asignada a las medidas geométricas fue de 0.05 cm y la correspondiente a los recuentos de franjas de 0.25 franja. De este modo, la tabla V.10 presenta los valores resultantes para los desplazamientos, afectados de sus correspondientes errores. Así, la precisión resultante en las medidas es del 7.4%.

La figura V.11 recoge esquemáticamente los desplazamientos de los puntos más significativos de la zona analizada, donde se pueden realizar las siguientes apreciaciones. La más elevada magnitud de los desplazamientos puede objetivarse a nivel de la zona de los incisivos, donde alcanza valores comprendidos entre las 14 y las 17  $\mu\text{m}$ . De hecho, ésta es la zona de aplicación de la fuerza y donde, lógicamente, se han producido mayores deformaciones.

PUNTO OBJETO	DESPLAZAMIENTO ABSOLUTO ( $\mu\text{m}$ )	PUNTO OBJETO	DESPLAZAMIENTO ABSOLUTO ( $\mu\text{m}$ )
1	12.8 $\pm$ 0.9	20	11.0 $\pm$ 0.8
2	12.4 $\pm$ 0.9	21	10.3 $\pm$ 0.8
3	11.9 $\pm$ 0.9	22	10.4 $\pm$ 0.8
4	13.4 $\pm$ 1.0	23	11.1 $\pm$ 0.8
5	11.7 $\pm$ 0.9	24	10.5 $\pm$ 0.8
6	11.8 $\pm$ 0.9	25	11.5 $\pm$ 0.9
7	12.5 $\pm$ 0.9	26	11.2 $\pm$ 0.8
8	12.1 $\pm$ 0.9	27	11.2 $\pm$ 0.8
9	11.9 $\pm$ 0.9	28	11.3 $\pm$ 0.8
10	12.8 $\pm$ 0.9	29	11.6 $\pm$ 0.9
11	13.5 $\pm$ 1.0	30	15.9 $\pm$ 1.2
12	14.2 $\pm$ 1.0	31	16.1 $\pm$ 1.2
13	17.1 $\pm$ 1.3	32	13.7 $\pm$ 1.0
14	14.7 $\pm$ 1.1	33	14.6 $\pm$ 1.1
15	16.2 $\pm$ 1.2	34	15.8 $\pm$ 1.2
16	13.1 $\pm$ 1.1	35	12.6 $\pm$ 0.9
17	14.5 $\pm$ 1.1	36	13.7 $\pm$ 1.0
18	12.6 $\pm$ 0.9	37	12.3 $\pm$ 0.9
19	11.5 $\pm$ 0.9	38	14.3 $\pm$ 1.1

TABLA V.10.- Resultados obtenidos mediante el método de interferometría de moteado para la medida de los desplazamientos absolutos de 38 puntos del cráneo, al aplicar una TAMS de 200 g en (2+2).

Consecuentemente, los desplazamientos experimentados por otros puntos del maxilar superior, progresivamente más alejados de la línea media son, asimismo, decrecientes.

Las hemiarcadas derecha e izquierda no se han desplazado en la misma cantidad, cuando consideramos puntos de una y otra, situados a la misma distancia de la línea media. Probablemente, esta asimetría se debe a la pequeña intensidad de la fuerza empleada, ante los resultados de otros estudios<sup>70</sup>, en los

que dicha asimetría tiende a desaparecer para fuerzas más elevadas.

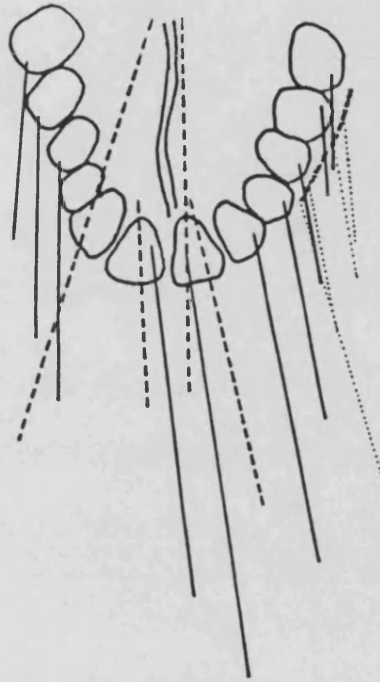


FIGURA V.11.- Esquema de las líneas de desplazamiento en el maxilar superior, para una tracción anterior de 200 g. El trazo continuo corresponde a las piezas dentales, el discontinuo a los huesos maxilar y palatino, y el punteado al arco dental utilizado.

La tendencia general de las direcciones de los desplazamientos óseo-dentales no es paralela a la línea media ni, por tanto, a la dirección de la fuerza aplicada, como cabría esperar. Ello puede deberse a que, en realidad, la fuerza no se haya aplicado en una dirección perfectamente paralela a dicha línea media, o bien a las asimetrías existentes en el maxilar superior, o a las dos causas conjuntamente.

Teniendo en cuenta que la fuerza se aplicó a un arco adaptado pasivamente a toda la arcada, las zonas que deberían sufrir un mayor desplazamiento son las más próximas a dicho arco. De hecho, sus puntos se desplazan en mayor proporción que los inmediatamente vecinos situados en las piezas dentales. Sin embargo, y paradójicamente, se comprueba la existencia de puntos más alejados que experimentan un desplazamiento similar en magnitud al que tiene lugar en la zona de aplicación de la fuerza. Parece claro que para estos puntos, a pesar de ser los más separados de dicha zona, se potencia el efecto de las fuerzas actuantes, debido posiblemente a un aumento de la torsión del grupo incisivo o a rotaciones radiculares de los propios ejes longitudinales de los molares, o bien a ambos.

En resumen, también esta metodología revela unas claras posibilidades para el análisis de efectos en el plano de interés.

Por otro lado, conviene referirse al empleo de láminas metálicas adheridas a las zonas de interés del objeto, sugerido por algunos autores para mejorar el enfoque en la fase de registro del interferograma<sup>65</sup>. Por nuestra parte hemos podido confirmar que tal operación no es necesaria ya que el contraste de franjas obtenido mediante el montaje utilizado resulta suficiente para conseguir una medida fiable de los desplazamientos. Lo que además posibilita un verdadero análisis sin alteración alguna del conjunto estudiado.

## **CONCLUSIONES**

---

## **CONCLUSIONES**

Tras el desarrollo de los montajes experimentales para el registro y el análisis de interferogramas holográficos, así como de moteado, la aplicación de estas técnicas a la realización de una serie de experiencias de tracción anterior del maxilar superior sobre cráneo humano desecado y la discusión de los resultados obtenidos, se han podido derivar los siguientes resultados y conclusiones más destacados:

1.- Se ha puesto a punto un montaje de interferometría holográfica de doble exposición para el estudio de deformaciones cráneo-faciales, que ha demostrado excelentes prestaciones tanto en la fase de registro, con una distancia objeto-placa de unos 15 cm y tiempos de exposición de unos 12 s, como en la fase de reconstrucción, obteniendo en los interferogramas una buena calidad de imagen, así como un buen contraste de franjas para la realización de las medidas.

2.- Se ha desarrollado un sistema de registro y análisis de los interferogramas de moteado de haz único, para la



medida de desplazamientos en el plano objeto de los puntos de interés del cráneo, y se ha constatado su adecuada funcionalidad en el estudio de deformaciones ortopédicas en el cráneo utilizado.

3.- Se ha diseñado y puesto a punto una plataforma aislada de vibraciones, necesaria para la realización sobre la misma de las experiencias interferométricas e idónea para montajes compactos, como los utilizados en la experiencia. Tras el correspondiente análisis vibrométrico, ha resultado ser perfectamente útil para su finalidad aislante práctica (efectividad de aislamiento de 17 a 20 dB para impulsos de 48 a 49 dB).

4.- Se ha contrastado mediante análisis estadístico la calidad de nuestros procedimientos experimentales, tanto en interferometría holográfica como de moteado, en cuanto al proceso de determinación de los desplazamientos, dentro de los inevitables errores accidentales asociados a la realización de las mediciones experimentales.

5.- Es de resaltar que, mediante un análisis cualitativo de los interferogramas holográficos, sin un proceso largo de medida y posterior cálculo, es posible obtener información útil de las deformaciones producidas a nivel de las diversas zonas en que el cráneo queda parcelado por las líneas de sutura.

6.- Se ha podido comprobar que la respuesta, como modelo, de un cráneo humano macerado ante idénticos incrementos de fuerza aplicados, es superior cuando se parte de una carga inicialmente pequeña que cuando se tracciona con una fuerza inicial de varios cientos de gramos.

7.- Para nuestras condiciones experimentales, hemos podido establecer los 100-200 g como límite práctico de los incrementos de las fuerzas de tracción, aplicables para que la evaluación en cuestión se pueda realizar mediante interferometría holográfica, a nivel de la arcada dentaria superior y del hueso maxilar. Aquellos estudios que requieran la aplicación de fuerzas de tracción mayores, deben realizarse, o bien utilizando un método como el propuesto, en el sentido de descomponer la experiencia total en una serie de experiencias escalonadas parciales con incrementos sucesivos menores que el establecido, o bien implementando una técnica de mayor alcance, como puede ser la interferometría de moteado.

8.- En el cálculo de los desplazamientos por interferometría holográfica, se ha efectuado un estudio para determinar el número y tipo óptimos de direcciones de observación, según el criterio de minimización de los errores asociados a las tres componentes del desplazamiento. Son los cambios en la dirección de observación correspondientes a las cuatro semidiagonales de la placa holográfica los que responden a tal exigencia.

9.- Tras analizar la influencia, en cada una de las componentes del desplazamiento, de la sensibilidad asociada a la medida de los corrimientos de franjas, demostrando la normalidad de las distribuciones de valores inherentes a tal sensibilidad, se ha podido caracterizar cada desplazamiento por el valor medio de su distribución en cuestión, afectado de un error igual a la desviación típica.

10.- El error en las medidas de desplazamiento generado por la sensibilidad en las medidas geométricas resulta, para nuestras condiciones experimentales, más de un orden de magnitud inferior al correspondiente a los recuentos de franjas. Lo que avala la consideración de sólo este último para el cálculo del error de medida.

11.- Se han podido establecer las cotas de error correspondientes a la medida de los desplazamientos absolutos experimentados por los puntos craneales bajo la acción de una actuación ortodóncica. Para la situación analizada de la tracción anterior del maxilar superior, los errores absolutos oscilan entre 0.2 y 0.8  $\mu\text{m}$ , para una sensibilidad en el recuento de franjas de 0.25 franja.

12.- Se ha constatado que los errores correspondientes a la componente del desplazamiento en la dirección perpendicular a la placa holográfica, resultan de 2 a 3 veces más elevados que los asociados a las componentes paralelas a dicha placa; lo que unido

a la pequeña magnitud de tal componente normal, en la mayoría de los intervalos de fuerza analizados, desaconseja su utilización en el cálculo de los desplazamientos absolutos. Para su posible medida es, por tanto, más adecuado el variar la geometría del montaje, a una situación del cráneo más frontal con respecto a la placa.

13.- Para cada punto del objeto estudiado, se ha podido constatar que, para una misma magnitud de la fuerza aplicada, la sensibilidad en los desplazamientos relativa a los recuentos de franjas es independiente del intervalo de fuerzas analizado.

14.- Mediante la técnica de interferometría de moteado implementada, ha sido posible medir desplazamientos de hasta de 90  $\mu\text{m}$ , con precisión del 7%.

15.- Se ha dejado abierta la posibilidad de obtención de una serie de conclusiones, referentes a cuestiones concretas tales como la respuesta de los elementos óseos en los distintos intervalos de fuerza, el papel que juegan las suturas, la rotación del maxilar, o la elección de los puntos de anclaje para la aplicación de fuerzas, que juzgamos de importancia significativa para su evaluación clínica en ortodoncia.

## BIBLIOGRAFIA

---

**BIBLIOGRAFIA**

1. ABRAMSON N. **The Holo-diagram U: a device for practical interpreting of hologram fringes.** Appl.Opt. 11: 1143-7. 1972.
2. ABRAMSON N. **The making and evaluation of holograms.** Academic Press, London. 1981.
3. ALEKSANDROV EB, BONCH-BRUEVICH AM. **Investigation of surface strains by the hologram technique.** Sov.Phys.-Tech.Phys. 12: 258-65. 1967.
4. ANGLE EH. **Treatment of malocclusions of the teeth.** The SS White Dental Manufacturing Co. Philadelphia. 1907.
5. ARCHBOLD E, BURCH JM, ENNOS AE. **Recording of in-plane surface displacement by double exposure Speckle Photography.** Opt. Acta 17: 883-98. 1970.
6. ARCHBOLD E, ENNOS AE. **Displacement measurement from double-exposure laser photographs.** Opt. Acta 19: 253-71. 1972.
7. ASENSI C. **Análisis morfológico de los prognatismos mandibulares.** Tesis de Licenciatura presentada en la Facultad de Medicina de Valencia. 1983.
8. BELLANI UF, SONA A. **Measurement of 3-dimensional displacements by scanning a double-exposure hologram.** Appl.Opt. 13: 1337-41. 1974.

9. BEVINGTON PR. **Data reduction and error analysis for the physical sciences**. Mc-Graw-Hill, New York. 1969.
10. BIJL D, JONES R. **New theory for practical interpretation of holographic interference patterns resulting from static surface displacements**. *Opt.Acta* 21: 105-18. 1974.
11. BOONE PM, VERBIEST R. **Application of hologram interferometry to plate deformation and traslation measurements**. *Opt.Acta* 16: 555-67. 1969.
12. BOONE PM. **Applications medicales de l'holographie**. *Cahiers voor Arbeidsgeneeskunde* 18: 47-57, 1981.
13. BRAVO LA. **Análisis del patrón facial y de su relación con la maloclusión**. Tesis Doctoral presentada en la Facultad de Medicina de Valencia. 1986.
14. BROOKS RE, HEFLINGER LO, WUERKER RF. **Interferometry with a holographically reconstructed comparison beam**. *Appl.Phys. Lett.* 7: 748-9. 1965.
15. BROWN GM, GRANT RM, STROKE GW. **Theory of Holographic Interferometry**. *J.R.S.A.* 45: 1166-77. 1969.
16. BRÜEL & KJAER (Ed). **Piezoelectric accelerometers and vibratio preamplifiers handbook**. B & K. 1978.
17. BRÜEL & KJAER (Ed). **Charge amplifier type 2635**. B & K Manual. 1980.
18. BRÜEL & KJAER (Ed). **Noise level analyzer type 4426**. B & K Manual. 1980.
19. BURCH JM. **The applications of laser in production engineering**. *Prod.Eng.* 44: 431-42. 1965.
20. BURCH JM. **Holographic measurement of displacement and strain**. *J.Strain An.* 9: 1-3. 1974.

21. BURSTONE CJ, PRYPUTNIEWICZ RJ, BOWLEY WW. **Holographic measurement of tooth mobility in three dimensions.** J.Periodont.Pres. 13: 283-94. 1978.
22. BURSTONE CJ, PRYPUTNIEWICZ RJ. **Holographic determination of centers of rotation produced by orthodontic forces.** Am.J.Orthod. 77: 396-409. 1982.
23. BURSTONE CJ, EVERY TW, PRYPUTNIEWICZ RJ. **Holographic measurement of incisor extrusion.** Am.J.Orthod. 82: 1-9. 1982.
24. COLLIER RJ, DOHERTY ET, PENNINGTON KS. **Application of moire techniques to holography.** Appl.Phys.Lett. 7: 223-5. 1965.
25. COLLIER RJ, BURCKHARDT CB, LIN LH. **Optical Holography.** Academic Press, New York. 1971.
26. COZZANI G. **Extraoral traction and class III treatment.** Am.J.Orthod. 80: 638-50. 1981.
27. CROCKER MJ, PRICE AJ. **Noise and noise control.** (Vol.I). CRC. Press Inc., Florida. 1979.
28. DALMASES F, BUENDIA M, ROMERO C, CIBRIAN R, SALVADOR R, SALA S. **Protocolo de investigación biomédica en interferometría holográfica mediante láser: implementación de un sistema antivibratorio.** Inv.Clin.Láser 0: 7-12. 1983.
29. DALMASES F, BUENDIA M, ROMERO C, CIBRIAN R, SALVADOR R. **Un sistema antivibratorio simplificado para aplicaciones biomédicas de la interferometría holográfica.** Inv.Clin.Láser 4: 7-9. 1984.
30. DE BACKER LC. **In-plane displacement measurement by Speckle Interferometry.** Non-destr.Test. 8: 177-80, 1975.
31. DELAIRE J, VERDON P, LUMINEAU JL, CHERGA-NEGREA A, TALMANT J, BOISSON M. **Quelques resultats des tractions extra-orales à appui fronto-mentonnier dans le traitement orthopédique des malformations maxillo-mandibulaires de classe III et des**



- séquelles osseuses des fentes labio-maxillaires. Rev.Stom. 73: 633-42. 1972.
32. DELAIRE J, VERDON P, FLOUR J. Buts et resultats des tractions extra-orales postero-antérieures sur masque orthopédique dans le traitement des retrognathies et brachygnathies maxillaires. Fortschr Kieferorthop 37: 247-62. 1976.
33. DERMAUT LR, BEERDEN L. The effects of class III elastic force on a dry skull measured by holographic interferometry. Am.J.Orthod. 79: 296-304. 1981.
34. DERMAUT LR, VANDEN BULCKE MM. Evaluation of intrusive mechanics of the type "segmented arch" on a macerated human skull using the laser reflection technique and holographic interferometry. Am.J.Orthod. 89: 251-63. 1986.
35. DERMAUT LR, KLEUTGHEN JPJ, DE CLERK HJJ. Experimental determination of the center of resistance of the upper first molar in a macerated, dry human skull submitted to horizontal headgear traction. Am.J.Orth.-Dent.Orthop. 90: 29-36. 1986.
36. DHIR SK, SIKORA JP. An improved method for obtaining the general-displacement field from a holographic interferogram. Exp.Mech : 323-7. 1972.
37. DIETRICH CF. Uncertainty, calibration and probability. Adam Hilger, London. 1973.
38. DRAPER N, SMITH H. Applied regression analysis. 2ª edición. John Wiley & Sons, New York. 1981.
39. DUTERLOO HS, KRAGT G, ALGRA AM. Holographic and cephalometric study of the relationship between craniofacial morphology and the initial reaction to high-pull headgear traction. Am.J.Orthod. 88: 297-302. 1985.
40. ENNOS RE. Measurements of in-plane surface strain by Hologram Interferometry. J.Sci.Instrum., Ser.II, 1: 731-46. 1968.

41. ENNOS AE. **Strain measurement**. (En *Holographic nondestructive testing*, RK Erf (Ed). Academic Press, New York. 1974).
42. ENNOS AE. **Speckle Interferometry**. (En *Laser speckle*, JL Dainty (Ed). Springer-Verlag, Berlin. 1984).
43. FRANÇON M. **Holografía**. Paraninfo, Madrid. 1972.
44. FRANÇON M. **La granularité laser (speckle) et ses applications en Optique**. Masson, París. 1976.
45. FROEHLY J, MONNERET J, PASTEUR J, VIENOT JC. **Slight displacements of opaque objects and optical distortion in solid state lasers by hologram interferometry**. *Opt.Acta* 16: 343-50. 1969.
46. GANDIA JL, BUENDIA M, PLASENCIA E, ROMERO C, DALMASES F, CANUT JA. **La interferometría holográfica aplicada a la investigación en Ortodoncia**. *Rev.Esp.Ort.* 13: 51-65. 1983.
47. GANDIA JL, SALVADOR R, CANUT JL, DALMASES F, BUENDIA M, ROMERO C, CIBRIAN R. **Análisis mediante interferometría holográfica de la deformación craneofacial producida por tracción anterior del maxilar**. *Rev.Esp.Ort.* 16: 103-12. 1986.
48. GATES JWC, BENNET SJ. **Holography of diffusely reflecting objects using double focus lens**. *Nature* 221: 1234-8. 1969.
49. GOODMAN JW. **Introduction to Fourier Optics**. McGraw-Hill Book Comp., New York. 1968.
50. GOODMAN JW. **Statistical properties of laser speckle patterns**. (En *Laser speckle and related phenomena*, JC Dainty (Ed). Springer-Verlag, Berlin. 1975).
51. GRAYBILL FR. **Theory and applications of the linear model**. Duxbury Press, Boston. 1976.
52. GREMY F, SALMON D. **Bases statistiques. Sciences mathématiques au service de la médecine**. Dunod, París. 1969.

53. HAINES KA, HILDEBRAND BP. **Surface-deformation measurement using the wavefront reconstruction technique.** Appl.Opt. 5: 595-602. 1966.
54. HASSAL Jr, ZAVERI K. **Acoustic noise measurement.** B & K. 1979.
55. HECHT E, ZAJAC A. **Optica.** Fondo Educativo Interamericano S.A., Bogotá. 1977.
56. HECHT NL, MINARDI JE, LEWIS D, FUSEK RL. **Quantitative theory for predicting fringe pattern formation in holographic interferometry.** Appl.Opt. 12: 2665-76. 1973.
57. HEFLINGER LO, WUERKER RF, BROOKS RE. **Holographic interferometry.** Appl.Phys. 37: 642-9. 1966.
58. HEWITT AB. **An investigation using holographic interferometry, of surface strains in bone induced by orthodontic forces: a preliminary report.** Br.J.Orthod 4: 39-41. 1977.
59. HEWITT AB. **Holographic investigation of bone response to small forces.** Br.J.Orthod. 8: 43-6. 1981.
60. HORMAN MH. **An application of wavefront reconstruction to Interferometry.** Appl.Opt. 4: 333-6, 1965.
61. HUNG YY. **Displacement and strain measurement.** (En Speckle metrology, RK Erf (Ed). Academic Press, New York. 1978.
62. JOHNSON NL, LEONE FC. **Statistics and experimental design in engineering and the physical sciences.** 2ª edición. John Wiley & Sons (Vol. 1), New York. 1977.
63. JONES R. **Experimental verification of a new theory for interpretation of holographic interference patterns resulting from static surface displacements.** Opt.Acta 21: 257-66. 1974.

64. KING PW. **Holographic interferometry techniques utilizing 2 plates and relative fringe orders for measuring micro-displacements.** *Appl.Opt.* **13**: 231-3. 1974.
65. KLEUTGHEN JPJ, DERMAUT LA, BOONE PM, DE CALUWE M. **Measurement of displacements introduced by extra-oral orthodontic forces on a macerated skull by means of speckle interferometry: a preliminary report.** *S.P.I.E.* 369 Max Born: 538-50. 1983.
66. KOHLER H. **Studies on quantitative analysis of holographic interferometry.** *Optik* **39**: 229-35. 1974.
67. KRAGT G, TEN BOSCH JJ, BORSBOOM PCF. **Measurement of bone displacement in a macerated human skull induced by orthodontic forces; a holographic study.** *J.Biomech.* **12**: 905-10. 1979.
68. KRAGT G, BORSBOOM PCF. **Bone displacement as a function of time of force application to a macerated human skull.** *J.Biomech.Mat.Res.* **14**: 813-5. 1980.
69. KRAGT G, DUTERLOO HS. **The initial alterations in the craniofacial complex of a skull of macaca mulata resulting from high-pull headgear forces.** *J.Dent.Res.* **62**: 388-94. 1983.
70. KRAGT G, DUTERLOO HS, TEN BOSCH JJ. **The initial reaction of a macerated human skull caused by orthodontic cervical traction determined by laser metrology.** *Am.J.Orthod.* **81**: 49-56.1982.
71. KRAGT G, DUTERLOO HS. **The initial effects of orthopedic forces: a study of alterations in the craniofacial complex of a macerated human skull due to high-pull headgear traction.** *Am.J.Orthod.* **81**: 57-64. 1982.
72. KRAGT G, DUTERLOO HS, ALGRA AM. **Initial displacements and variations of eight human child skulls owing to high-pull headgear traction determined with laser holography.** *Am.J.Orthod.* **89**: 399-406. 1986.

73. KRIENS AFC. **Some considerations on the quantitative interpretation of holographic interferograms.** S.P.I.E. 136: 156-65. 1978.
74. LANDRY MJ, WISE CM. **Automatic data reduction of certain holographic interferograms.** Appl.Opt. 12: 2320-7. 1973.
75. LANGLADE M. **Diagnostic orthodontique.** Maloine S.A., París. 1981.
76. LEENDERTZ JA. **Interferometric displacement on scattering surfaces utilizing speckle effect.** J.Phys.E.- Scient.Instr. 3: 214-8. 1970.
77. LØKBERG OJ. **Speckle techniques for use in Biology and Medicine.** (En Optics in Biomedical sciences, G Bally, P Greguss (Eds). Springer-Verlag, New York. 1982).
78. MATSUMOTO T, IWATA K, NAGATA R. **Measuring accuracy of 3-dimensional displacements in holographic interferometry.** Appl.Opt. 12: 961-3. 1972.
79. MOLIN NE, STETSON KA. **Fringe localization in hologram interferometry of mutually independent and dependent rotations around orthogonal non-intersecting axes.** Optik 33: 399-422. 1971.
80. NANDA R. **Biomechanical and clinical considerations of a modified protraction headgear.** Am.J.Orthod. 78: 125-39. 1980.
81. NEWPORT CORPORATION (Ed). **Vibration isolation support systems.** Tech.Note. NRC-Cat. 1983.
82. OPPENHEIM A. **A possibility for physiologic orthodontic movement.** Am.J.Orthod. 30: 345-68. 1944.
83. OSTROVSKY YI, BUTUSOV MM, OSTROVSKAYA GV. **Interferometry by Holography.** Springer-Verlag, Berlin. 1980.
84. POWELL RL, STETSON RA. **Interferometric vibration analysis by wavefront reconstruction.** J.Opt.Soc.Am. 55: 1593-8. 1965.

85. PRYPUTNIEWICZ RJ, BOWLEY WW. **Techniques of holographic displacement measurement: an experimental comparison.** Appl. Opt. 17: 1748-56. 1978.
86. PRYPUTNIEWICZ RJ, BURSTONE CJ, EVERY TW. **Holographic determination of time effects of force on tooth movement.** J.Dent.Res. 57: 361. 1978.
87. PRYPUTNIEWICZ RJ, BURSTONE CJ, BOWLEY WW. **Determination of arbitrary tooth displacements.** J.Dent.Res. 57: 663-78. 1978.
88. PRYPUTNIEWICZ RJ. **Holographic determination of rigid-body motions, and applications of the method to Orthodontics.** Appl. Opt. 18:1442-4. 1979.
89. PRYPUTNIEWICZ RJ, BURSTONE CJ. **The effect of time and force magnitude on orthodontic tooth movement.** J.Dent.Res. 58: 1754-64. 1979.
90. PRYPUTNIEWICZ RJ, BURSTONE CJ, GOLDIN B. **Reproducibility of tooth displacements using laser holography.** J.Dent.Res. 59: 979. 1980.
91. PRYPUTNIEWICZ RJ. **State-of-the-art in hologrammetry and related fields.** Int.Arch.Photogram 23: 620-9. 1980.
92. PUGH EM, WISLOW GH. **The analysis of physical measurements.** Addison-Wesley, Massachusetts. 1966.
93. RIOS S. **Análisis estadístico aplicado.** Paraninfo, Madrid. 1972.
94. ROCA A, LEON J. **Vibraciones mecánicas.** Limusa, Mexico. 1981.
95. SAKAMOTO T, IWASE I, UKA A, NAKAMURA S. **A roentgen-cephalometric study of skeletal changes during and after chin cup treatment.** Am.J.Orthod. 85: 341-50. 1984.
96. SALVADOR R, BUENDIA M, ROMERO C, CIBRIAN R, ROLDAN C, DALMASES F, GANDIA JL, CANUT JL. **Valoración de la técnica de interferometría de speckle con luz láser para la investigación de desplazamientos ortodóncicos.** Inv.Clín.Laser 3:90-3.1986.

97. SCHUMANN W, DUBAS M. **Holographic Interferometry**. Springer-Verlag, Berlin. 1979.
98. SCHUMAN W, ZÜRCHER JP, CUCHE D. **Holography and deformation analysis**. Springer Series in Optical Sciences, (vol. XLVI). Springer-Verlag, Berlin. 1985.
99. SCIAMMARELLA CA, GILBERT JA. **Strain analysis of a disk subjected to diametral compression by means of Holographic Interferometry**. Appl.Opt. 12: 1951-6. 1973.
100. SENENT F. **Fundamentos estadísticos de las técnicas experimentales en Física**. Publicaciones del Dpto. de Física Fundamental, Facultad de Ciencias Físicas. Universidad de Valencia. 1981.
101. SENENT F. **Técnicas experimentales en un laboratorio de Física**. 4ª Edición. Publicaciones del Dpto. de Física Fundamental, Facultad de Ciencias Físicas. Universidad de Valencia. 1981.
102. SHIBAYAMA K, UCHIYAMA H. **Measurement of 3 dimensional displacements by hologram interferometry**. Appl.Opt. 10: 2150-4. 1971.
103. SLAYMAKER FH. **The elimination of building vibratio in an optical laboratory**. Appl.Opt. 5: 1766-8. 1966.
104. SMITH HM. **Principles of Holographg**. John Wiley & Sons, New York. 1969.
105. SOLLID JE. **Holographic interferometry applied to measurements of small static displacements of diffusely reflecting surfaces**. Appl.Opt. 8: 1587-90. 1969.
106. SPIRIDONOV UP, LOPATKIN AA. **Tratamiento matemático de datos físico-químicos**. Mir, Moscú. 1973.
107. STEIDEL RF Jr. **Introduction of building vibratio in an optical laboratory**. Continental, Mexico. 1981.

108. STETSON KA, POWELL RL. **Hologram interferometry.** J.Opt.Soc.Am. 55: 1570A. 1965.
109. STETSON KA. **A rigorous treatment of fringes of hologram interferometry.** Optik 29: 386-400. 1969.
110. STETSON KA. **Fringe interpretation for hologram interferometry of rigid-body motions and homogeneous deformations.** J.Opt.Soc.Am. 64: 1-10, 1974.
111. STETSON KA. **Homogeneous deformations: determination by fringe vectors in Hologram Interferometry.** Appl.Opt. 14: 2256-9. 1975.
112. STROKE GW. **An introduction to coherent optics and Holography.** Academic Press, New York. 1969.
113. TAGLIAFERRO WE, LEE PL. **Holographic Interferometry for pure rotation.** Am.J.Phys. 46: 46-8. 1978.
114. TRAMPLE J. **Mechanical vibratio and shock measurements.** B & K. 1980.
115. VEST CM. **Holographic Interferometry.** John Wiley & Sons, New York. 1979.
116. VIEDMA JA. **Métodos estadísticos. Fundamentos y aplicaciones.** Ediciones del Castillo, Madrid. 1972:
117. WATERS JP. **Holography.** (En Holographic nondestructive testing (cap.II) , RK Erf (Ed). Academic Press, New York. 1974).
118. WATERS JP. **Interferometric Holography.** (En Holographic non-destructive testing (cap.IV), RK Erf (Ed). Academic Press, New York. 1974).
119. WEDENDAL PR. **Dental holographic interferometry in laboratory installations and in vivo.** Tesis Doctoral presentada en la Facultad de Odontología de Estocolmo. 1974.



120. WEDENDAL PR, BJELKHAGEN HI. **Holographic interferometry on the elastic deformation of prosthodontic appliances as simulated by bar elements.** Acta Orthod.Scand. 32: 189-99. 1974.
121. WEDENDAL PR, ALFREDSSON H, BJELKHAGEN H, NIIR L. **The tolerance within a special screw-lock system determined by means of laser metrology.** I.C.D.,Sc.Ed.Bull. (Vol. VII), No.1. 1974.
122. WEDENDAL PR, BJELKHAGEN HI. **Holography in Dentistry.** (En Laser applications in Medicine and Biology, (Vol III). ML. Wolbarst (Ed). Plenum Press, New York. 1977).
123. WELFORD WT. **Fringe visibility and localization in hologram interferometry with parallel displacement.** Opt.Commun 1: 311-4. 1969.
124. WU ES, GEOHEGAN DB. **Double-exposure Speckle Photography for the measurement of small displacements.** Am.J.Phys. 51: 315-20. 1983.
125. YOUNG JM, ALTSCHULER BR. **Laser holography in dentistry.** J.Dent.Res. 38: 216-25. 1977.
126. ZURMUHL R. **Matemática aplicada para ingenieros y físicos.** Labor, Madrid. 1964.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE CIÈNCIES FISIOLÒGIC

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data,  
acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral  
d'En/ Na/ N' M<sup>o</sup> del Rosario Salvador Palmer  
la qualificació d' Apto cum laude (unanimitat)

València a 9 d' Julio de 1987

El Secretari,

El President,

