FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
VALENCIA

APLICACIONES DEL MODELO DE EQUILIBRIO DEL MERCADO DE CAPITALES

Autor:
MAXIMO FERRANDO BOLADO

Valencia, diciembre de 1981.

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

VALENCIA

APLICACIONES DEL MODELO DE EQUILIBRIO DEL MERCADO DE CAPITALES

Tesis presentada para optar al grado de Doctor, por

MAXIMO FERRANDO BOLADO

Dirigida por la Dra.
Dª MATILDE FERNANDEZ BLANCO,
Agregada de Economía de la Empresa
de la Universidad de Valencia.

Vº Bº

INDICE

Páginas

Páginas

Páginas

CAPITULO V.- EL MODELO DE MERCADO

Páginas

CAPITULO VII.- LA INFLACION Y EL CAPM

Páginas

CAPITULO VIII.- LA PERFORMANCE DE LAS CARTERAS DE VALORES Y DE LOS TITULOS

CAPITULO IX.- LAS DECISIONES DE FINANCIACION E INVERSION EN EL MARCO DEL CAPM

Páginas

A G R A D E C I M I E N T O S

Aunque un trabajo es siempre responsabilidad, en última instancia, de la persona que lo ha hecho; también es cierto que todo trabajo conlleva siempre una tarea de grupo, en la medida que una persona está inserta en un medio social con el cual se relaciona y del cual recibe y da aportaciones.

En este sentido, el autor agradece muy sinceramente la ayuda que le han prestado las siguientes personas e instituciones:

Profesora Dr. Dña. Matilde Fernández Blanco, Agregada de Economía de la Empresa de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valencia, por su inestimable ayuda en la consecución de la presente tesis, bajo cuya dirección e iniciativa ha sido realizada.

Profesor Dr. D. Rafael Romero, Catedrático de Estadística de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Valencia, que nos proporcionó el programa de regresión.

Al Servicio de Estudios de la Bolsa de Madrid, que nos facilitó los datos del Indice Largo Total de la Bolsa de Madrid, datos sin los cuales no hubiese sido posible la elaboración de los dos anexos, de tipo empírico, del capítulo V.

La Dirección General de Universidades e Investigación que subvencionó el trabajo, concediéndome una Beca de Ayuda al Personal Investigador durante un período de tres años. Esta beca me permitió dejar mi pluriempleo de programador en un centro de cálculo y dedicarme exclusivamente a la Universidad.

También quiero dar las gracias a mis compañeros del Departamento de Economía de la Empresa que siempre se han interesado por la marcha del trabajo y me han recordado que en tal o cual publicación podía encontrar cierto artículo de interés.

Por último, es justo que también aparezca aquí, en este apartado de agradecimientos, Angeles, mi esposa, que además de prestarme una valiosa ayuda en la pesada tarea de grabar y comprobar los datos, ha tenido que soportar mis momentos bajos, mis malos humores, alentándome siempre para que siguiese adelante y acabase la tarea que había emprendido. Sin su ayuda, y sin la de todos los demás, este trabajo no hubiese sido posible.

INTRODUCCION

Las Finanzas, como disciplina académica independiente, nace a principios de nuestro siglo. La función financiera, en su concepción tradicional, se preocupaba esencialmente de la búsqueda y obtención de los recursos necesarios para financiar el activo y, en especial, de la financiación a largo plazo. Se consideraba que la Inversión y la Financiación eran dos fenómenos independientes, sin ninguna relación entre sí.

El método que empleaban los primeros tratadistas de esta disciplina era completamente descriptivo, limitándose su estudio a los instrumentos, procedimientos y aspectos legales de las instituciones financieras. Se contemplaba a la empresa desde fuera, desde el punto de vista de un inversor o prestamista, y no se ocupaban en absoluto del proceso interno de la toma de decisiones. Asimismo, se prestaba una excesiva atención a hechos que, aunque tienen su importancia y, en consecuencia, no deben ser dejados de lado (como por ejemplo: constitución de sociedades, consolidación, fusión, quiebra, liquidación, reorganización, etc.), no forman parte de la problemática con que se enfrenta la empresa en el transcurso normal de su actividad.

Aunque en un primer momento, el estudio descriptivo de las fuentes de financiación y del mercado de capitales es necesario para estar familiarizados con la terminología e instituciones del mundo real, posteriormente es preci so avanzar un paso más y dar un salto cualitativo, tratando de abstraer los elementos e interrelaciones principales de esa realidad, con el fin de intentar formalizar un modelo - explicativo.

A partir de la década de los 50 se hace evidente que en el entorno de una industria madura y dentro de unas economías de mercado cada vez más desarrolladas, en las cuales los beneficios unitarios se reducen paulatinamente, la función financiera no ha de limitarse simplemente a la obtención de los recursos necesarios para financiar la actividad de la empresa, sino que también debe ocuparse de la rentabilidad y liquidez de la misma, seleccionando aquellos - proyectos de inversión más convenientes. Por tanto, la gestión financiera debe ocuparse tanto de la composición del activo como del pasivo, siendo de su responsabilidad el logro del equilibrio financiero.

De este modo, surge una nueva concepción de las - Finanzas en virtud de la cual los problemas de Financiación e Inversión deben ser resueltos simultáneamente. Este hecho a su vez obliga al uso de modelos analíticos y métodos matemáticos que proporcionen soluciones concretas a las complejas cuestiones planteadas.

A este esfuerzo de cuantificación, formalización y modelización colaboran, sin duda alguna, el rápido desarrollo de las técnicas de Investigación Operativa, así como el surgimiento y espectacular avance de la Informática que permitió mecanizar los largos y costosos cálculos que mu- -

chos modelos llevaban implícitos.

En 1952 Markowitz elaboró un modelo de selección de valores mobiliarios con un presupuesto de capital limitado, cuya principal característica era que tenía en cuenta de forma explícita el riesgo y mostraba además las ventajas de la diversificación. Este modelo constituyó uno de los hitos más importantes en el área de la financiación y supuso una auténtica revolución, mostrando que los modelos analíticos no deben limitarse a tratar y considerar únicamente el caso de universos deterministas. En el mundo real pocas veces por no decir ninguna, nos encontramos con ambientes de certidumbre total, siendo lo normal que únicamente tengamos un conocimiento aproximado, en términos aleatorios (bien con probabilidades objetivas o bien con probabilidades subjetivas) de lo que va a ocurrir en el futuro.

Lo que empezó siendo un simple modelo de selección de cartera se convirtió en la década de los 60, con las ampliaciones de Sharpe, Lintner y Mossin, entre otros, en un modelo de equilibrio general del mercado de capitales, capaz de proporcionar los precios de equilibrio de los activos financieros en una situación de incertidumbre parcial.

A finales de los 60 y durante la década de los 70 se publicaron un gran número de trabajos en revistas especializadas referentes tanto a aspectos teóricos como empíricos del modelo. En ellos se intentó dotar al modelo de mayor generalidad, dejando de lado algunas de sus hipótesis más restrictivas; se sugirieron diversas aplicaciones a distintas -

áreas de la Economía de la Empresa y se realizaron un gran número de tests sobre las diferentes versiones que fueron - apareciendo. El interés de estas aplicaciones y la diversidad de situaciones que pueden abordarse con este modelo de equilibrio, ha despertado una gran expectación, expectación a la que nosotros no hemos sido ajenos. De ahí que hayamos decidido estudiar con profundidad dicho modelo y algunas de sus posibles aplicaciones en el presente trabajo.

El modelo de precios de equilibrio de los activos financieros, al que se suele hacer mención por las correspondientes siglas inglesas C.A.P.M. (Capital Asset Pricing Model), es una construcción teórica con una fuerte coherencia interna, que se apoya en una serie de supuestos simplificadores sobre el comportamiento de los inversores y el - funcionamiento del mercado. Estos supuestos, como es lógico, son discutibles, pero justamente una de las virtudes del modelo está en su flexibilidad para soportar el abandono de - algunos de los supuestos cuando se intenta acercar el modelo a la realidad. Así, por ejemplo, la relación lineal que postula entre la rentabilidad y el riesgo de los activos financieros se sigue cumpliendo (con diferentes parámetros), cuando se abandonan sucesivamente algunos de los supuestos y se dejan inalterados los restantes.

La mayor cualidad del CAPM reside en que desborda ampliamente los márgenes para los que fue ideado: el estudio de la Bolsa y del mercado de capitales. Realmente puede - adaptarse a cualquier situación que implique elección de activos arriesgados que puedan caracterizarse por dos parámetros: el rendimiento esperado, como medida de la rentabilidad, y la varianza o desviación típica, como medida del riesgo. De esta forma, una empresa puede ser considerada como un objeto de elección, al ser un activo arriesgado con una media y varianza de rentabilidad dadas e igualmente podrían considerarse activos arriesgados una rama industrial e incluso un país, por lo que pueden abordarse con este modelo problemas muy distintos como el de la diversificación en la empresa multinacional.

El CAPM, al proporcionar las rentabilidades y precios de equilibrio de las acciones, ha sido también utilizado para resolver el problema de la estructura financiera óptima de la firma, siendo sorprendente el paralelismo con que puede ir demostrándose las proposiciones de Modigliani y Miller, tanto en situaciones sin impuestos como con impuestos, así como el modo en que confluyen la tesis tradicional y la de Modigliani y Miller cuando se tienen en cuenta los costes de insolvencia. Asimismo, también puede emplearse el CAPM en la toma de decisiones de inversión de las empresas, la medida de la performance de las carteras y de los Fondos de Inversión, que permite comprobar la hipótesis de si el mercado de capitales es eficiente o no, etc.

Sin embargo, el modelo CAPM no está exento de problemas. El mayor, en el orden teórico, es que únicamente resulta apropiado en el contexto de un sólo período y, si bien es cierto que bajo ciertas circunstancias, puede aplicarse al caso multiperíodo, aún no está del todo elaborado. Además, el CAPM es un modelo estático, y es necesario dinamizarlo si queremos comprender no sólo por qué un valor alcanza una cotización dada, sino también el proceso paulatino por el cual se llega a dicha cotización.

En el orden empírico, los resultados de los diversos estudios realizados para contrastar la validez del CAPM, no son unánimes. En primer lugar, hay que tener en cuenta que los contrastes se hacen en base a datos ex-post, mientras que el modelo CAPM se basa en las expectativas ex-ante. Además, hay tests en los que parece que el modelo debe ser rechazado, mientras que en otros ocurre lo contrario. Incluso hay quien piensa que aún no se ha elaborado un test adecuado para contrastar el modelo CAPM, adoleciendo todos los tests empleados hasta ahora de un serio defecto, al usar un índice bursátil como sustituto de la cartera de mercado.

Por lo tanto, a pesar de que se han conseguido resultados esperanzadores y disponemos, hoy en día, de un conocimiento mucho más amplio sobre el funcionamiento del mercado de capitales y sus características, queda mucho camino por recorrer, tanto en lo que respecta a la mejora y perfeccionamiento del armazón teórico, como a los modos de contrastar dicha construcción teórica en la práctica.

La necesidad de recorrer ese camino es mucho mayor si tenemos en cuenta la multitud de aplicaciones que puede tener dicho modelo en las distintas áreas de la Economía de la Empresa y la variedad de problemas que podrían abordarse si el modelo estuviese más cerca de la realidad y fuese más explicativo de lo que en ella ocurre.

A continuación, con el fin de facilitar la lectura de este trabajo y comprender los objetivos que persigue, así como el área de la moderna teoría analítica de la financiación que intenta abarcar, vamos a explicar brevemente el contenido de cada uno de los capítulos que lo componen.

El capítulo I sirve de introducción al resto de los capítulos y en él se formalizan mínimamente algunos aspectos de la teoría de la utilidad que serán utilizados después: el teorema de la utilidad esperada, la función de utilidad, la aversión al riesgo del inversor, etc.

Los capítulos II y III tratan del modelo de los parámetros de selección de cartera. Pero mientras que en el capítulo II se da una solución puntual, mediante un sólo paso, al problema de la selección de cartera en el marco de las decisiones de consumo-inversión; en el capítulo III, se halla la cartera óptima del inversor mediante las tres etapas clásicas: 1) Determinación de la frontera eficiente. 2) Determinación de las curvas de indiferencia. 3) Determinación de la cartera óptima. En la explicación de estas tres etapas, no hemos empleado el tratamiento de tipo gráfico e intuitivo que suele aparecer en la mayoría de los libros de texto sobre este tema, sino que hemos formalizado el desarrollo con un tratamiento matricial.

En el capítulo IV se desarrolla el modelo de precios de equilibrio de los activos financieros (CAPM) en su versión standard. El modelo CAPM constituye el soporte de la teoría del mercado de capitales, teoría que intenta ver qué ocurre a nivel de mercado cuando se supone que todos los individuos efectúan sus decisiones de inversión de acuerdo con el modelo de dos parámetros de selección de cartera. En este capítulo se llega, a través de dos caminos alternativos, al resultado de que la relación entre la rentabilidad y el riesgo de un título es lineal.

En el capítulo V se estudia el modelo de mercado. Este modelo econométrico guarda un estrecho parecido con la versión ex-post del CAPM. Los objetivos de este capítulo consisten principalmente en tratar de aclarar ciertos aspectos confusos que surgen cuando se hace referencia al modelo diagonal y al modelo de mercado, así como cuando se habla del modelo de mercado y del CAPM. También se introducen importantes conceptos muy utilizados tanto a nivel práctico como teórico: riesgo sistemático y riesgo no sistemático, coeficiente de volatilidad de un título o cartera, etc.

El capítulo V contiene además dos anexos que recogen estudios empíricos que hemos realizado sobre el mercado bursátil español. El primero trata el tema de la diversificación ingenua y su fin es averiguar: 1) Cuántos títulos debe tener una cartera, en la que cada título tiene igual ponderación, para lograr eliminar, en su mayor parte, el riesgo no sistemático. 2) Cuál es el riesgo sistemático de un título por término medio.

El segundo anexo es un test de la versión standard del CAPM y analiza cuál es la relación de tipo empírico que se produce entre la rentabilidad y el riesgo de los títulos, comprobando si esta relación está en consonancia con la prevista por la teoría. Tanto en uno como en otro caso, el período de estudio es la década de los 70 y la base de datos la constituye el Indice Largo Total de la Bolsa de Madrid.

En el capítulo VI se intenta acercar el modelo CAPM a la realidad, por lo que se eliminan una tras otra las hipótesis más restrictivas, analizando los efectos aislados que se dan sobre el modelo cuando se abandona cada una de ellas. Así, sucesivamente se estudia el caso en que:

- No existe el activo libre de riesgo.
- Existen tipos de interés múltiples.
- Las expectativas de los inversores son heterogéneas.
- Existen activos no negociables como, por ejemplo, el capital humano.

El capítulo VII desarrolla el nuevo modelo de precios de equilibrio que resulta cuando se abandona el supuesto sobre la no existencia de cambios en el nivel de precios. Aquí, al igual que en los otros casos contemplados en el capítulo VI, se comprueba que la relación entre el rendimiento esperado y el riesgo, es lineal aunque, claro está, con unos parámetros distintos a los del CAPM standard.

Los capítulos VIII y IX tratan sobre posibles aplicaciones del CAPM. El capítulo VIII se ocupa de resolver el problema de cómo medir la performance, en base a datos expost, de títulos individuales y carteras. En él, se estudian distintos índices de performance propuestos por diferentes autores, así como las relaciones existentes entre ellos.

Por último, en el capítulo IX se aplica el modelo CAPM a las decisiones de financiación y de inversión que debe tomar una empresa. En este capítulo se ve cómo las Proposiciones I y II de Modigliani y Miller, tanto con impuesto de sociedades como en un mundo sin impuestos, son un caso particular del modelo que en el mismo se desarrolla; se trata el problema de si existe o no una estructura financiera óptima para la empresa y también se critica la selección de proyectos de inversión mediante el criterio de la tasa interna de rentabilidad.

En resumen, el objetivo de nuestro trabajo ha sido ofrecer una visión analítica y formalizada, lo más completa posible, del modelo de precios de equilibrio de los activos financieros, así como sugerir algunas aplicaciones concretas del mismo en distintas áreas de la Economía de la Empresa.

CAPITULO I

COMPORTAMIENTO DEL INVERSOR. LA FUNCION DE UTILIDAD

1.1. Introduccion

En este capítulo intentaremos formalizar mínimamente algunos aspectos de la Teoría de la Utilidad que se usarán después repetidamente al hablar del comportamiento del inversor y del modelo de selección de cartera. Principalmente, intentaremos estudiar cuál es la justificación de tres supuestos claves en los que se basa el análisis de las carteras de valores: 1) que los inversores únicamente tienen en cuenta la media y la varianza de los rendimientos de los valores mobiliarios en el momento de seleccionar su cartera de valores; 2) que los inversores tienen aversión al riesgo; 3) que las curvas de indiferencia son cóncavas respecto al eje de ordenadas.

Por tanto, este capítulo sirve de introducción a capítulos posteriores, de modo que no intentaremos realizar un tratamiento completo del tema de la función de utilidad (1), ya que ello desbordaría los objetivos de nuestro estudio. En consecuencia, no seremos demasiado exhaustivos ni formalistas.

El problema que intentamos abordar es cómo efectúa un inversor racional (2) la toma de decisiones de inversión en un ambiente de riesgo o incertidumbre parcial y con un horizonte de planificación único y determinado. Tradicionalmente, la Economía de la Empresa ha tratado el problema de la to ma de decisiones de inversión, tanto en bienes de equipo como en valores mobiliarios, en el contexto de universos deterministas, es decir, como si se conociese con total certeza las entradas y salidas de caja que ocasionan la o las inversiones que una empresa (3) o individuo se proponen efectuar. Sin embargo, desgraciadamente no es éste el caso que suele darse en la realidad, donde lo normal es que, en el mejor de los casos, únicamente se conozca la función de distribución de los flujos de caja al final del período.

En resumen, nos vamos a mover en el marco de modelos uniperiódicos (4) (ahora y más tarde) en ambientes de riesgo o incertidumbre parcial con el fin de estudiar cuál es el patrón del comportamiento del inversor individual en tales situaciones.

1.2. Las preferencias del Inversor en ambiente de riesgo

Consideremos un inversor en posesión de una cierta riqueza al comienzo del período. No entraremos de momento en la cuestión de que parte de su riqueza dedicará al consumo presente y que parte de la misma invertirá de la forma más provechosa (5). Unicamente nos fijaremos, en su actuación respecto a aquella parte de su riqueza que decide invertir en -

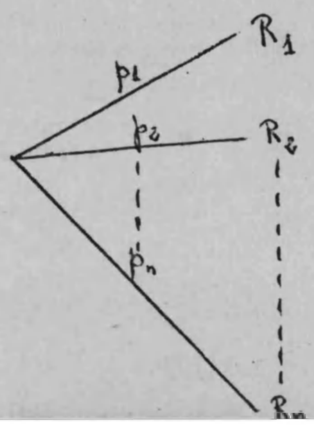
los distintos proyectos que tiene a su alcance (6).

Si nuestro inversor individual conociese con total certeza qué es lo que va a suceder en el futuro, no habría ningún problema. Cada proyecto de inversión únicamente tendría un posible resultado al final del período, con una probabilidad de realización del 100 % y, en consecuencia, el inversor colocaría todo su capital, en aquél que le proporcionase un mayor rendimiento. Pero no es este el caso, el futuro es incierto y para un mismo proyecto de inversión existen diversos rendimientos posibles (R_i) (7), cada uno de los cuales tiene asignada una probabilidad (p_i).

Para nuestros fines, nos es indiferente que las probabilidades sean objetivas, deducidas de hechos históricos repetitivos, los cuales se piensa que se van a volver a dar en el futuro; o que sean probabilidades subjetivas asignadas por el decisor a un hecho único del cual no se tiene constancia en el pasado. En definitiva, al igual que Suarez (8), pensamos que tan irreales son las situaciones de total certeza, como las situaciones de total incertidumbre y que, por tanto, siempre existirá la posibilidad de asignar unas probabilidades a los distintos resultados posibles.

Gráficamente, un proyecto de inversión tendrá la siguiente representación:

Figura 1.1.



o también, ordenando los resultados y sus probabilidades en una función de densidad discreta (9):

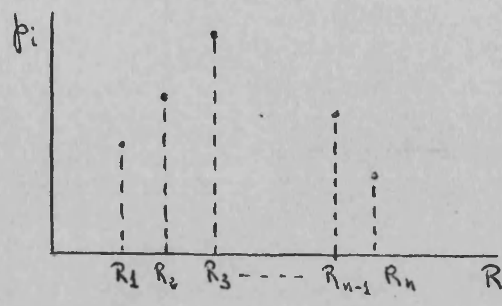


Figura 1.2.

Al enfrentar a nuestro inversor ante distintas oportunidades de inversión como las anteriormente señaladas, se nos plantean al menos dos interrogantes: ¿cuáles serán sus preferencias frente a esas oportunidades de inversión cuyos resultados no son conocidos con certeza?, ¿coincidirán sus preferencias con las de otros inversores?.

Centrándonos en la primera cuestión, se podría pensar que un posible modo de actuación sería calcular el rendimiento esperado de los proyectos y creer que una elección razonable sería escoger aquel que tuviese un mayor rendimiento esperado (10). Pero ello equivaldría a que de la información que proporciona la función de distribución únicamente se tuviese en cuenta el primer momento (la media), olvidando la dispersión de los resultados en torno a la media (segundo momento o varianza), la simetría o asimetría de la función de densidad (tercer momento), si la función de densidad es más o menos puntiaguda (cuarto momento o curtosís), etc. Por tanto, considerar únicamente la media no parece una forma adecuada de abordar el problema.

Tal vez si preguntamos a los individuos sus preferencias ante las distintas oportunidades de inversión obtengamos ciertas normas de actuación comunes, de tipo general, que nos ayuden a resolver el problema de cómo se toman las decisiones ante un futuro incierto, resolviendo así las dos preguntas planteadas.

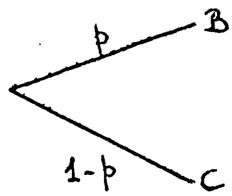
Obviamente, las preferencias no tienen por qué ser iguales para todos los individuos. Las decisiones individuales llevan implícitos elementos subjetivos que hace que difieran de unos individuos a otros. Pero también es cierto que si suponemos que los inversores actúan racionalmente, habrá elementos comunes en las decisiones de los distintos individuos.

Con el fin de encontrar tales elementos comunes, nos será útil olvidarnos de momento de nuestras oportunidades de inversión e introducir el concepto de billete de lotería.

1.3. Concepto de Lotería. Axiomas de Racionalidad (11)

Un billete de lotería es muy similar a un proyecto de inversión, pero con tres diferencias: 1) los distintos resultados posibles cumplen siempre sus respectivas probabilidades debido al uso de un instrumento de azar apropiado (ruleta, bombo con las bolas de la lotería, etc.); 2) los posibles resultados pueden ser sumas ciertas de dinero o bien el derecho a participar de otro billete de lotería; 3) los R_i son flujos de entrada en caja.

Gráficamente, un billete de lotería "A" tendría la siguiente representación en el caso más simple de que únicamente tenga dos ganancias posibles:



(1.1)

y significa que brinda la oportunidad de ganar B con la probabilidad o y otra oportunidad de ganar C con la probabilidad 1-p . Tanto B como C pueden ser cantidades ciertas de dinero u otros billetes de lotería (12). En el caso de que B y C sean sumas de dinero, y, al mismo tiempo, p = 1, se tendrá que el billete de lotería equivale sin más a una cantidad cierta de dinero y diremos que es un billete de lotería cierto.

De ahora en adelante, al hablar del billete de lotería "A", no recurriremos a su representación gráfica como parte de un árbol de decisión, sino que usaremos la siguiente expresión que ahorra espacio y es más manejable:

$$A = \left[p \, ; \; B, C \right] \qquad (1.2)$$

El problema que se nos plantea es si un individuo racional es capaz de clasificar y ordenar los billetes de lotería (13). Para ello hay que definir claramente los términos del "comportamiento racional". Siguiendo a Aftalion y Viallet (14), diremos que un individuo es racional si cumple los seis axiomas siguientes de racionalidad (15).

<u>Axioma 1</u> (Comparabilidad): Ante dos billetes de lotería, el individuo debe poder establecer claramente si bien prefiere A a B ($A \succ B$), o bien prefiere B a A ($B \succ A$), o es indiferente entre A y B ($A \sim B$).

<u>Axioma 2</u> (Transitividad): Si un individuo prefiere A a B y B a C, entonces preferirá A a C. De igual manera, si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$.

<u>Axioma 3</u> (Continuidad): Si $A \succ B$ y $B \succ C$, existe una probabilidad p tal que para el billete de lotería $D = [p; A,C]$, el individuo es indiferente entre B y D ($B \sim D$).

<u>Axioma 4</u> (Independencia): Si $A \sim B$ y $C \sim D$, se tiene que $[p; A,C] \sim [p; B,D]$, para todo valor de p.

<u>Axioma 5</u> (Monotonicidad): Si se tienen dos billetes de lotería $A = [p_A; C,D]$ y $B = [p_B; C,D]$ tales que $C \succ D$, entonces la condición necesaria y suficiente para que $A \succ B$ es que $p_A > p_B$.

<u>Axioma 6</u> (Combinación de billetes de loterías): Si se tiene un billete de lotería $Q = [p; A,B]$ tal que $A = [p_A; C,D]$ y $B = [p_B; C,D]$ entonces $[p^*; C,D] \sim Q$, siendo $p^* = p_A\, p + p_B\, (1-p)$. Es decir solamente los resultados -

finales C y D son los que importan y no los posibles billetes de lotería intermedios que conducen a ellos.

Vamos a ver ahora cómo un individuo que actúa en base a los anteriores axiomas de racionalidad es capaz de clasificar u ordenar los distintos billetes de lotería que se le ofrecen en base al teorema de la utilidad esperada.

Hasta el momento, hemos tratado con billetes de lotería simples (con dos ganancias posibles). Sin embargo, el concepto de billete de lotería puede ampliarse en el sentido de admitir que se produzcan más de dos resultados posibles. Así, un billete de lotería compuesto será aquel que ofrezca varias posibles ganancias con sus respectivas probabilidades de realización:

$$BL = \left[p_1, A_1;\ p_2, A_2; \ldots;\ p_n, A_n\right] \qquad (1.3)$$

Supongamos ahora que el individuo ante dos billetes de lotería (BL_1 y BL_2) debe manifestarnos sus preferencias. Ambos billetes de lotería prometen las mismas ganancias: R_1, R_2, ..., R_n (16), aunque con distintas probabilidades: p_1, p_2, ..., p_n para el billete de lotería BL_1 y q_1, q_2, ..., q_n para el billete de lotería BL_2. La representación de ambas loterías en nuestra terminología sería:

$$BL_1 = \left[p_1, R_1;\ p_2, R_2;\ \ldots\ ;\ p_n, R_n\right] \qquad (1.4)$$

$$BL_2 = \left[q_1, R_1;\ q_2, R_2;\ \ldots\ ;\ q_n, R_n\right] \qquad (1.5)$$

Supongamos que hemos definido los billetes de lotería ciertos R_i de forma que la aplicación de los axiomas de comparabilidad y transitividad conduzca a la siguiente ordenación de resultados:

$$R_1 \succ R_2 \succ \dots \succ R_n \qquad (1.6)$$

Entonces, la aplicación del axioma de continuidad nos permite crear nuevos billetes de lotería R^*_i con probabilidades u_i de alcanzar las ganancias extremas (R_1,R_n), de modo que el individuo estará indiferente entre los resultados ciertos R_i y los billetes de lotería R^*_i:

$$R_i \sim R^*_i = (u_i;\ R_1,R_n) \qquad 0 \leqslant u_i \leqslant 1 \qquad (1.7)$$
$$i = 1,2,\dots,n$$

Desde el momento en que hemos considerado a los R_i como billetes de lotería ciertos (sumas monetarias ciertas), u_i sería una probabilidad tal que el individuo se muestra indiferente entre la cantidad cierta de dinero R_i y un billete de lotería que le proporcione unas ganancias R_1 con la probabilidad u_i y una ganancia R_n con la probabilidad $(1-u_i)$. Evidentemente, debe cumplirse para $i = 1$, que $u_1 = 1$ y cuando $i = 0$, se tendrá que $u_n = 0$.

Hasta el momento hemos logrado que los R_i estén expresados en función de las ganancias extremas R_1 y R_n y como al mismo tiempo se cumple que: $R_1 \succ R_2 \succ \dots \succ R_n$, entonces la aplicación del axioma de monotonicidad nos permite asegurar que se cumple:

$$u_1 > u_2 > \dots > u_n \qquad (1.8)$$

Por otra parte, dado que

$$R_1 \sim R_1^*$$
$$R_2 \sim R_2^* \qquad (1.9)$$
$$R_n \sim R_n^*$$

teniendo en cuenta el axioma de independencia, podemos escribir:

$$BL_1 = \left[p_1, R_1; p_2, R_2; \ldots; p_n, R_n\right] \sim \left[p_1 R_1^* ; p_2, R_2^* ; \ldots; p_n, R_n^*\right]$$
$$\qquad (1.10)$$
$$BL_2 = \left[q_1, R_1; q_2, R_2; \ldots; q_n, R_n\right] \sim \left[q_1 R_1^* ; q_2, R_2^* ; \ldots; q_n, R_n^*\right]$$

Finalmente, aplicando el axioma 6, sobre combinación de loterías, podemos expresar los billetes de lotería compuestos BL_1 y BL_2 en función exclusivamente de las ganancias extremas:

$$BL_1 = \left[P ; R_1, R_n\right]$$
$$BL_2 = \left[Q ; R_1, R_n\right] \qquad (1.11)$$

siendo:

$$P = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_n u_n = E\left[U(BL_1)\right]$$
$$Q = q_1 u_1 + q_2 u_2 + \ldots + q_n u_n = E\left[U(BL_2)\right] \qquad (1.12)$$

Como tanto BL_1 como BL_2 han quedado expresados en función de R_1 y R_n, donde $R_1 \succ R_n$; el axioma 5 nos asegura que será preferido por el decisor aquel billete de lotería que tenga mayor probabilidad de obtener el mejor resultado, R_1, es decir aquel para el cual $E\left[U(BL)\right]$ sea mayor.

En resumen, mediante la estricta aplicación de los seis axiomas de racionalidad, anteriormente expuestos, se llega a un mecanismo que permite ordenar de mayor a menor las preferencias del inversor por los distintos billetes de lotería que se le presentan a elección. El siguiente paso que daremos consistirá en ver si de todo ésto se puede deducir una función de utilidad del inversor que permita a éste elegir aquel proyecto de inversión óptimo en una situación de riesgo o incertidumbre parcial.

1.4. La Función de Utilidad

Volvamos un poco atrás y veamos el camino recorrido. Cada billete de lotería estaba compuesto por una serie de posibles ganancias R_i. A cada R_i le hemos asociado un índice u_i y al billete de lotería completo le hemos asignado la media ponderada de los distintos índices u_i que lo componen ($E\left[U(BL)\right]$). Pues bien, a las distintas frecuencias de u_i de las respectivas ganancias R_i les denominaremos índices de utilidad y la $E\left[U(BL)\right]$ será la utilidad esperada del billete de lotería BL:

$$E\left[U\ (BL)\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i \qquad (1.13)$$

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el teorema de la utilidad esperada:

Dados dos billetes de lotería BL_1 y BL_2, se calcula la utilidad esperada de estos billetes de lotería, aplicando la expresión (1.13), y se prefiere aquél que tenga la utilidad esperada más elevada.

Debemos hacer hincapié en que se debe descartar cualquier posible connotación psicológica en nuestro índice de utilidad (17), en el sentido de una posible satisfacción por la consecución de la ganancia R_i. En palabras de Mossin (18): "La introducción del término "función de utilidad" es un accidente histórico desafortunado. El único mérito del teorema de la utilidad esperada se encuentra en el hecho que nos permite describir un orden de preferencias de una manera particularmente simple y económica".

También debemos resaltar que las u_i son índices de utilidad ordinal, no cardinal y que cualquier transformación lineal de las u_i no cambia la clasificación u ordenación de los billetes de lotería hecha por el individuo (19).

Hasta ahora sabemos que las u_i son índices de utilidad de las sumas monetarias R_i, de forma que el inversor se muestra indiferente entre una cantidad de dinero cierta R_i y un billete de lotería que le proporciona la ganancia R_1 con la probabilidad u_i y la ganancia R_n con la probabilidad $(1-u_i)$, siendo $R_1 > R_n$. Hemos visto igualmente que $u_1 = 1$ y que $u_n = 0$. Y, por último, también sabemos que $R_1 > R_2 > \dots > R_n$ y que $u_1 > u_2 > \ldots > u_n$.

De todo ésto se deduce que la función de utilidad de la riqueza debe ser creciente (esto es, $U'(R) > 0$).

Hay distintos autores, como Van Horne, Sharpe, etc. (20), que hablan indistintamente de función de utilidad del dinero o de la riqueza. Nosotros pensamos que es más correcto hablar de función de utilidad del dinero porque en el eje de abscisas de la Figura 1.3 son distintas sumas monetarias con sus respectivos índices de utilidad lo que aparece. No obstante, como es de uso generalizado la expresión función de utilidad de la riqueza, utilizaremos indistintamente una u otra expresión.

Por otra parte, conviene recordar que en el análisis aquí realizado, se ha omitido la variable referente a la riqueza inicial del inversor que influye de una manera notoria sobre la forma de la función de utilidad del dinero, ya que dicha función de utilidad se obtiene, como veremos más adelante, a partir de las respuestas a una serie de preguntas que da un individuo (las u_i) sobre distintos tipos de billetes de lotería que se le ofrecen. Y estas respuestas, ceteris paribus, pueden variar ampliamente de unos individuos a otros según cuáles sean sus respectivas riquezas iniciales.

1.5. La Aversión al riesgo

Hasta este momento, sabemos que la función de utilidad del inversor es creciente ($U'(R) > 0$), pero no sabemos el signo de la segunda derivada, con lo cual no sabemos si la función de utilidad de la riqueza es convexa, cóncava o lineal. Para analizar la forma que tiene la función de utilidad e intentar encontrar cuál es el signo que cabe esperar tome la segunda derivada, nos apoyaremos en el desarrollo de un ejemplo ilustrativo. A efectos prácticos, supongamos que $R_n = 0$, y $R_1 = 1.000.000$ de pesetas.

Si descartamos la posibilidad de que existan puntos de inflexión, la función de utilidad podría tener una de las tres formas siguientes:

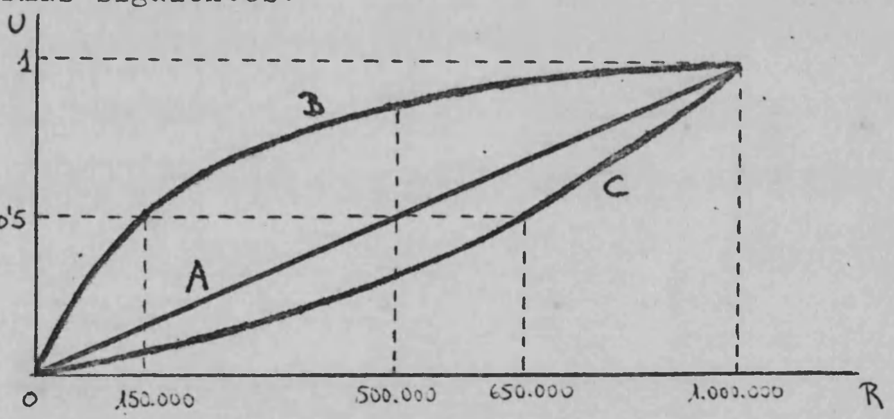


Figura 1.3

Vamos ahora a efectuar tres encuestas a tres señores A, B y C, con el fin de estudiar sus preferencias. Imaginemos que le preguntamos al primer encuestado (señor A), qué valor (R) le asignaría a un billete de lotería que le proporcione una ganancia R_1 con la probabilidad U y la ganancia R_n

con la probabilidad (1-U), y nos contesta que simplemente la ganancia esperada del billete de lotería, sean cuales sean - los valores de R_1 y R_n y sea cual sea la probabilidad U, entonces tendríamos que

$$R = R_1 U + R_n (1-U) \qquad (1.14)$$

que en particular para $R_1 = 1.000.000$ y $R_n = 0$, quedará

$$R = 1.000.000\ U$$

o lo que es lo mismo:

$$U = 1/1.000.000\ R \qquad (1.15)$$

Es decir, que la función de utilidad de un individuo que toma sus decisiones con arreglo al criterio de la "esperanza matemática de la ganancia" o rendimiento esperado, es lineal (21): la recta A de la figura 1.3.

Supongamos ahora que el segundo encuestado (el señor B) tiene una riqueza comprendida entre cero y un millón - de pesetas, 500.000 ptas., por ejemplo, y le preguntamos cuánto estaría dispuesto a pagar por un billete de lotería que le proporcione la oportunidad de ganar 1.000.000 de pesetas con el 50 % de probabilidad y nada en el 50 % restante de los casos. Un señor sin miedo al riesgo y que haga sus cálculos de acuerdo al criterio del rendimiento esperado, diría que hasta 500.000 pesetas, sin embargo lo más probable es que nuestro - segundo encuestado, ponga un precio de compra bastante inferior, por ejemplo 150.000 (22). Es decir:

$$R = 150.000 < 500.000 = 1.000.000\ U + 0\ (1-U), \text{ con } U = 0'5 \qquad (1.16)$$

o, también expresado en otros términos:

$$U\ (0'5.R_1 + 0'5.R_n) > 0'5\ U(R_1) + 0'5\ U(R_n) \qquad (1.17)$$

de forma que para $R_1 = 1.000.000$ y $R_n = 0$, la expresión (1.17) queda como sigue:

$$U\ (500.000) > 0'5 \, . \, 1 + 0'5 \, . \, 0 = 0'5 \qquad (1.18)$$

Es decir, que la utilidad del punto medio del intervalo (23) $\left[0, 1.000.000\right]$ es superior a la media de los índices de utilidad en los extremos del intervalo.

A la diferencia: 500.000 - 150.000 = 350.000, se le llama "prima de riesgo" (24) y dicha prima será mayor cuanto más convexa (con respecto al eje de ordenadas) sea la curva de utilidad de la riqueza del inversor.

Por último, imaginemos que el tercer encuestado (señor C), ante la misma pregunta hecha al encuestado número dos responde que pagaría 650.000 pesetas por adquirir un billete de lotería de esas características. Puede que su decisión nos parezca un poco excéntrica, pero en realidad lo que ocurre es que este señor es un amante del riesgo y disfruta al poseer un billete de lotería de esas características, por lo que estaría dispuesto a pagar por encima del rendimiento medio esperado.

Las curvas A, B, C de la figura 1.3., tienen una función de utilidad creciente $U'(R) > 0$, pero difieren en la utilidad marginal del dinero:

1) El primer encuestado (indiferente al riesgo) tiene una función de utilidad como la recta A de la figura 1.3, y para él la utilidad marginal del dinero, ni crece ni decrece, es nula: U"(R) = 0. El dinero siempre tiene la misma utilidad marginal para este señor, sea cual sea su cuantía.

2) El segundo encuestado (con aversión al riesgo) tiene una utilidad marginal del dinero decreciente: U"(R) < 0 y una función de utilidad como la curva convexa B de la figura 1.3, por lo que es un señor conservador y ante aventuras de obtener más dinero, pero en las que debe pagar para tomar parte en ellas, se muestra prudente y reservado.

3) El tercer encuestado (con propensión al riesgo), tiene una función de utilidad como la curva cóncava C de la figura 1.3, con una utilidad marginal del dinero creciente: U"(R)> 0, por lo que está dispuesto a tomar parte en cualquier juego arriesgado, pagando un precio superior al rendimiento esperado.

Los tres comportamientos analizados son válidos y, en realidad, una misma persona podría comportarse de acuerdo a esos tres modos según cual fuese la cantidad de dinero en juego. Así, por ejemplo, si el derecho a jugar no implica un desembolso elevado, podemos observar como la gente paga un precio superior a la ganancia esperada (quinielas, lotería, juegos de casino, etc.), porque les excita la posibilidad de ganar una fuerte cantidad de dinero, aunque sea pequeña la probabilidad de conseguirlo. No obstante, a medida que el des embolso aumenta, esa misma persona irá cambiando su actitud y su aversión al riesgo crecerá de forma paulatina, tal como muestra el siguiente gráfico (25):

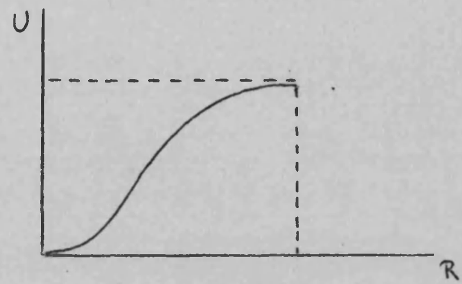


Figura 1.4

"No esperamos que el supuesto de aversión al riesgo se mantenga para todo el mundo bajo cualquier circunstancia, fenómenos tales como las loterías o Las Vegas no pueden ser explicados sin suponer que hay personas (o situaciones) no caracterizadas por la aversión al riesgo. Sin embargo, fenómenos más normales tales como las compañías de seguros o las carteras de títulos diversificadas, no pueden ser explicados sin el supuesto de la aversión al riesgo. La aversión al riesgo parece un supuesto razonable en el análisis de negocios más ordinarios, y éstos, son los problemas con los cuales nosotros estamos interesados en este libro"(26).

Por tanto, dado que nos ocupamos de la toma de decisiones en el contexto del mundo de los negocios y las finanzas, supondremos que el inversor objeto de nuestro estudio tiene aversión al riesgo y, por tanto, una función de utilidad creciente y convexa, es decir, con $U'(R)>0$ y $U''(R)<0$ (27).

Una vez que tenemos construida la función de utilidad del dinero del inversor individual, ya estamos en condiciones de poder ordenar las distintas oportunidades de inversión que se le ofrecían al inversor en el primer epígrafe de este tema. Sustituiríamos los R_i por los correspondientes u_i de la función de utilidad y el decisor elegirá aquella inversión con una utilidad esperada $\sum_{i=1}^{n} p_i u_i$ mayor. Si bien esto es válido en principio, pensamos que el problema no está solucionado de una forma global, ya que no consideraremos las posibles inversiones de una forma aislada como si fuesen independientes entre sí, sino que trataremos de ver qué conjunto de inversiones es el más conveniente. La razón de este proceder la veremos con todo detalle al hablar de la selección de cartera.

1.6. La Utilidad Esperada en función de los Dos Primeros Momentos

En los capítulos relativos a la selección de cartera nos moveremos en un mundo de dos parámetros: la media y la varianza, o su equivalente, la media y la desviación típica. Anteriormente ya hemos visto cómo un individuo con aversión al riesgo no desea tomar parte en juegos donde puede ganar o perder, con una igual probabilidad, una cierta cantidad de dinero;

es decir, que no quiere participar en juegos con un rendimiento esperado nulo y una varianza positiva, lo cual equivale a decir que el individuo "odia" el riesgo medido por la varianza y "ama" la rentabilidad expresada por el rendimiento esperado. En consecuencia, un comportamiento racional puede consistir en tener en cuenta únicamente los dos primeros momentos de la función de distribución de los rendimientos de los diferentes proyectos de inversión. Para que ésto sea válido es necesario poder expresar la utilidad esperada, que todo individuo racional intentará maximizar, en función de los dos primeros momentos.

En este epígrafe queremos mostrar en qué casos lo que acabamos de reseñar es completamente válido y en qué otros es sólo una aproximación y, cuando así sea, qué cosas sacrifica o deja de lado dicha aproximación (28).

Tanto los proyectos u oportunidades de inversión como los billetes de lotería, vimos que tenían distintos desenlaces posibles R_i con sus respectivas probabilidades. Los R_i eran flujos netos de caja en el caso de los proyectos de inversión, mientras que en el caso de los billetes de lotería eran flujos de entrada en caja. En la función de utilidad del dinero, denotamos por R a los distintos valores que podían tomar los R_i. Ahora, con el fin de ir homogeneizando la nomenclatura de cara a capítulos posteriores, es conveniente que en vez de R usemos la variable $\tilde{R}$ con el fin de resaltar que los proyectos de inversión son variables aleatorias con sus correspondientes funciones de distribución.

Para expresar la utilidad esperada en función de la media y la varianza nos basaremos en el análisis hecho por Farrar (29). Así, si efectuamos un desarrollo de Taylor de la función de utilidad del dinero (30) y luego tomamos esperanzas matemáticas en ambos lados de la igualdad, lograremos expresar la utilidad esperada de un proyecto de inversión en función de la media y la varianza de los posibles flujos netos de caja.

El desarrollo de Taylor de una función: f(x), en las proximidades de un valor determinado: q, para el cual la función está definida, es:

$$f(x) = f(q) + f'(q)(x-q) + \frac{f''(q)}{2!}(x-q)^2 + \ldots + \frac{f^n(q)}{n!}(x-q)^n + \ldots \qquad (1.19)$$

Nosotros vamos a situarnos en un punto concreto $q = E(\tilde{R})$, para efectuar el desarrollo de Taylor de la función de utilidad, así obtendremos:

$$U\left[\tilde{R}\right] = U\left[E(\tilde{R})\right] + U'\left[E(\tilde{R})\right]\left[\tilde{R} - E(\tilde{R})\right] + \frac{U''\left[E(\tilde{R})\right]}{2!}\left[\tilde{R} - E(\tilde{R})\right]^2 + \frac{U'''\left[E(\tilde{R})\right]}{3!}\left[\tilde{R} - E(\tilde{R})\right]^3 + \ldots \qquad (1.20)$$

Si ahora tomamos esperanzas matemáticas en ambos miembros(31):

$$E\left(U\left[\tilde{R}\right]\right) = U\left[E(\tilde{R})\right] + U'\left[E(\tilde{R})\right] \cdot E\left[(\tilde{R}-E(\tilde{R})\right] + \frac{U''\left[E(\tilde{R})\right]}{2!} E(\tilde{R}-E(\tilde{R}))^2 + \frac{U'''\left[E(\tilde{R})\right]}{3!} E(\tilde{R}-E(\tilde{R}))^3 + \ldots \qquad (1.21)$$

Fijemos nuestra atención en el segundo miembro de la igualdad. El primer término es el valor de la función de utilidad en el punto de abcisas igual al rendimiento medio esperado de la inversión, y aunque es una constante, depende de la media. El segundo término es nulo, puesto que aplicando el operador esperanza matemática al mismo queda: $E(\tilde{R}) - E(\tilde{R})$. El tercer término, es una constante $\frac{U''\left[E(\tilde{R})\right]}{2!}$ que multiplica a la varianza (o dispersión en torno a la media). El cuarto término es una constante $U'''\left[E(\tilde{R})\right]/3!$ que multiplica al tercer momento (que es una media de la simetría o asimetría de los rendimientos R_i). El quinto término sería otra constante por el cuarto momento (o curtosis). Y así sucesivamente.

Si la función de utilidad es un polinomio de segundo grado, entonces $U''' E(\tilde{R})$, $U^{IV} E(\tilde{R})$ y las derivadas sucesivas serán nulas y la función de utilidad esperada quedará en función de la media y la varianza de los posibles rendimientos R_i.

Por tanto, resulta completamente válido afirmar que la utilidad esperada es función de los dos primeros momentos cuando la función de utilidad es un polinomio cuadrático. Pero los polinomios de segundo grado, no son las únicas funciones que cumplen nuestros supuestos de $U'(R) > 0$ y $U''(R) < 0$, por lo que cuando la función de utilidad no es cuadrática, la afirmación anterior es válida únicamente en forma aproximada. En realidad, cuando la función de utilidad no es una función de segundo grado, lo que estamos argumentando es que se consigue una aproximación suficiente de la utilidad esperada, -

con el empleo de los tres primeros términos del desarrollo de Taylor, ignorando los términos siguientes, es decir, ignorando el tercer momento, el cuarto momento y momentos superiores de la función de distribución de los R_i.

La mayoría de los autores que han estudiado este problema están de acuerdo en que pasar por alto el tercer momento no parece desacertado, ya que en varios estudios se ha encontrado que las funciones de distribución de los rendimientos son simétricas (32) y, en consecuencia, el tercer momento será nulo. Por lo que respecta al cuarto momento o curtosis, según Francis y Archer (33): "queda mucho por hablar respecto a lo que mide realmente", existiendo un desacuerdo entre los diferentes autores respecto a su significación.

Un individuo que en sus decisiones de inversión únicamente tenga en cuenta los dos primeros momentos, es decir, que su utilidad esperada únicamente depende de la media y la varianza de los rendimientos (34):

$$E\,(U(\tilde{R})) = f\,(E(\tilde{R}),\ \sigma^2(\tilde{R})) \qquad (1.22)$$

y con aversión al riesgo, tendrá una función de utilidad esperada tal que (35):

$$\frac{\partial f}{\partial E(\tilde{R})} > 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \sigma^2(\tilde{R})} < 0 \qquad (1.23)$$

es decir, que su utilidad esperada será creciente con respecto al rendimiento medio de la inversión y decreciente con respecto a la varianza. Así, un inversor en un mundo de dos parámetros identifica al riesgo con la varianza ó dispersión de los rendimientos en torno a la media o rendimiento esperado: "ama" el rendimiento esperado ($E(\widetilde{R})$) y "odia" el riesgo ($\sigma^2(R)$). De modo que entre dos inversiones con igual rendimiento esperado prefiere la de menor varianza o, lo que es lo mismo, a varianzas iguales prefiere la inversión de mayor rendimiento esperado.

1.7. Las Curvas de Indiferencia. Propiedades

Vamos a ver a continuación qué forma tienen las curvas de indiferencia de un individuo con aversión al riesgo en un mundo de dos parámetros. Una curva de indiferencia está representada por el conjunto de pares (rendimiento esperado, varianza) en los que el individuo alcanza la misma utilidad, es decir, distintos pares $E(\widetilde{R}_i)$, $\sigma^2(\widetilde{R}_i)$ entre los que el inversor se muestra indiferente.

Respecto a las curvas de indiferencia o isoutilidad se pueden hacer las siguientes consideraciones (36):

1) En el espacio $(E(\widetilde{R}), \sigma^2(\widetilde{R}))$ las curvas de indiferencia deben ser crecientes. En efecto, para un individuo con aversión al riesgo y que toma sus decisiones teniendo en cuenta la media y la varianza de los rendimientos, sabemos que:

$$E(U(\tilde{R})) = f(E(\tilde{R}), \sigma^2(\tilde{R}) \qquad (1.24)$$

con:

$$\frac{\partial f}{\partial E(\tilde{R})} > 0 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma^2(\tilde{R})} < 0 \qquad (1.25)$$

Manteniendo constante la utilidad esperada en (1.24) y pasándola al otro miembro, tendríamos una función implícita de dos variables: $E(\tilde{R})$ y $\sigma^2(\tilde{R})$ donde a su vez $E(\tilde{R})$ es una función de $\sigma^2(\tilde{R})$. Derivando dicha función implícita:

$$\frac{\partial f}{\partial E(\tilde{R})} \cdot \frac{d\,E(\tilde{R})}{d\,\sigma^2(\tilde{R})} + \frac{\partial f}{\partial \sigma^2(\tilde{R})} = 0 \qquad (1.26)$$

y despejando:

$$\frac{d\,E(\tilde{R})}{d\,\sigma^2(\tilde{R})} = - \frac{\partial f / \partial \sigma^2(\tilde{R})}{\partial f / \partial\, E(\tilde{R})} > 0 \qquad (1.27)$$

ya que según (1.25) el numerador es negativo y el denominador positivo, estando el cociente afectado de signo menos.

2) Para un inversor con aversión al riesgo, a medida que el riesgo de una inversión crece, será necesario un crecimiento aún mayor en el rendimiento para que su utilidad esperada se mantenga al mismo nivel. Esto nos lleva a que sus curvas de indiferencia deben ser cóncavas hacia el eje de ordenadas en el plano $(E(\tilde{R}), \sigma^2(\tilde{R}))$. Por tanto, ni una línea recta, ni una curva convexa pueden ser curvas de indiferencia de un inversor con aversión al riesgo.

3) Las curvas de indiferencia no se pueden cortar.

Si así sucediese como en el caso de las curvas de indiferencia 1 y 2 del siguiente gráfico:

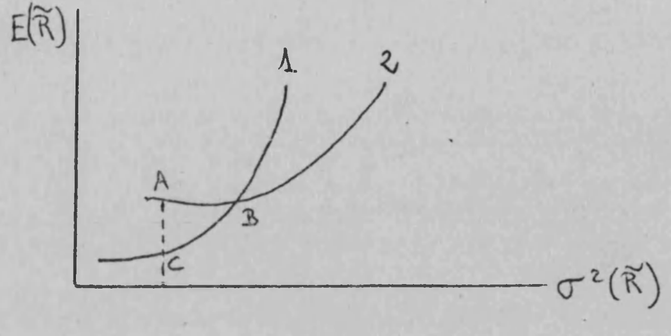


Figura 1.5

Los puntos A y B de la curva de indiferencia 1, le proporcionarían al individuo la misma utilidad esperada. Igual ocurrirá con los puntos B y C de la curva de indiferencia 2. Con lo que tendríamos:

$$\begin{aligned} A &\sim B \\ B &\sim C \end{aligned} \qquad (1.28)$$

y suponiendo que las preferencias son transitorias, como así lo hicimos en nuestros axiomas de racionalidad, tendríamos que

$$A \sim C \qquad (1.29)$$

lo cual no es válido, ya que el punto A es preferido al C, desde el momento que tiene la misma varianza, pero un rendimiento esperado superior.

4) Una curva de indiferencia en su corte con el eje de ordenadas nos proporciona el equivalente cierto de cualquier inversión arriesgada contenida en ella. Es decir, aquel rendimiento cierto para el cual el individuo se muestra indiferente entre dicho rendimiento y aquel otro rendimiento de

una inversión arriesgada (con varianza positiva), contenida en la curva de indiferencia en cuestión

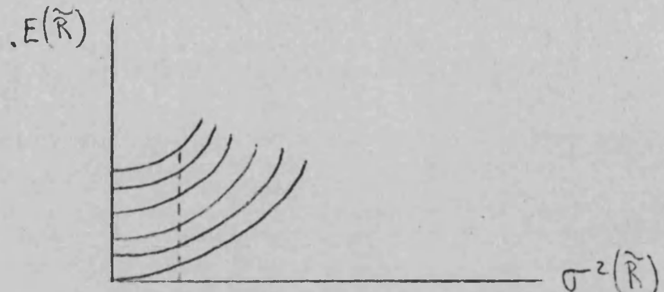


Figura 1.6

Como se observa en la figura anterior, no dibujamos o no prolongamos las curvas de indiferencia por debajo del eje de abcisas, ya que representan inversiones con rendimientos esperados negativos y varianzas positivas que un individuo racional no llevará a cabo.

Igualmente, también se desprende de la figura 1.6, que las curvas de indiferencia situadas más hacia arriba y más hacia la izquierda representan niveles de utilidad superiores, ya que para un mismo nivel de $\sigma^2(\tilde{R})$, los valores de $E(\tilde{R})$ son mayores.

1.8. La Función de Utilidad Cuadrática

Ya hemos visto en el anterior epígrafe cómo si el inversor tenía una función de utilidad del tipo de un polinomio de segundo grado, entonces era completamente válido tener en cuenta únicamente los dos primeros momentos, la media y la varianza de los rendimientos.

Dado que dentro de las muchas funciones que cumplen las condiciones exigidas a la función de utilidad, la función cuadrática es una de ellas, y dado que en la literatura sobre la selección de cartera muchos autores consideran como hipótesis que la función de utilidad es cuadrática, vamos a analizar con detalle la forma e implicaciones de una función de utilidad cuadrática. Sea el polinomio de segundo grado:

$$U(\tilde{R}) = a + b\tilde{R} + c\tilde{R}^2 \qquad (1.30)$$

Para un individuo cuya función de utilidad tenga esa forma y que tenga aversión al riesgo, las constantes b y c deben ser tales que $U'(\tilde{R}) > 0$ y $U''(\tilde{R}) < 0$:

$$U'(\tilde{R}) = b + 2\,c\tilde{R} > 0 \qquad (1.31)$$

$$U''(\tilde{R}) = 2\,c < 0 \qquad \text{de donde} \quad c < 0 \qquad (1.32)$$

es decir, que para que la utilidad marginal del dinero sea decreciente, la constante c debe ser negativa.

Al mismo tiempo, para que la utilidad del dinero sea positiva:

$$U'(\tilde{R}) = b + 2\,c\tilde{R} > 0$$

$$b > -2\,c\tilde{R} \qquad (1.33)$$

lo que implica que b es una constante positiva cuando $\tilde{R} > 0$, ya que $c < 0$. Por otra parte, esta función de utilidad tiene un máximo cuando su primera derivada se anula:

$$U'(\tilde{R}) = b + 2\, c\tilde{R} = 0$$

$$\tilde{R} = \frac{-b}{2\,c}\ , \text{ con } \quad c < 0 \qquad (1.34)$$

por lo que a partir del punto $\tilde{R} = -b/2c$ (con $c<0$), la función cuadrática tiene una utilidad marginal del dinero negativa, lo cual contradice el resultado, deducido a partir de los axiomas de racionalidad, que afirmaba que la utilidad marginal del dinero era siempre positiva. Por tanto, la función de utilidad cuadrática no tiene sentido económico para valores de $\tilde{R}$ superiores a $-b/2c$ (con $c<0$).

Tomando esperanzas matemáticas, en ambos miembros de (1.30), tenemos que:

$$\begin{aligned} E\,(U(\tilde{R})) &= a + bE(\tilde{R}) + cE(\tilde{R}^2) = \\ &= a + bE(\tilde{R}) + c\left[(E(\tilde{R}))^2 + \sigma^2(\tilde{R})\right] = \\ &= a + bE(\tilde{R}) + c\, E(\tilde{R})^2 + c\, \sigma^2(\tilde{R}). \qquad (1.35) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $c<0$, se puede escribir (37):

$$E(U(\tilde{R})) = a + b\, E(\tilde{R}) - c\,(E(\tilde{R}))^2 - c\,\sigma^2(\tilde{R}) \qquad (1.36)$$

expresión que nos relaciona la utilidad esperada con los dos primeros momentos: $E(\tilde{R})$ y $\sigma^2(\tilde{R})$.

Si ahora suponemos un valor constante (K) de la utilidad esperada, podemos deducir la curva de indiferencia para ese nivel de utilidad (38):

$$E(U(\tilde{R})) = a + b\, E(\tilde{R}) - c\,(E(\tilde{R}))^2 - c\,\sigma^2(\tilde{R}) = K$$

$$c\,(E(\tilde{R}))^2 - b\, E(\tilde{R}) + c\,\sigma^2(\tilde{R}) = a - K$$

dividido todo por c y sumando en ambos miembros $b^2/4c^2$, operando se llega a que:

$$\left(E(\tilde{R}) - \frac{b}{2c}\right)^2 + \sigma^2(\tilde{R}) = \frac{a-K}{c} + \frac{b^2}{4c^2} \qquad (1.37)$$

que en los ejes $(E(\tilde{R}), \sigma(\tilde{R}))$ representa la ecuación de una circunferencia con centro en: $E(\tilde{R}) = b/2c$ y $\sigma(\tilde{R}) = 0$.

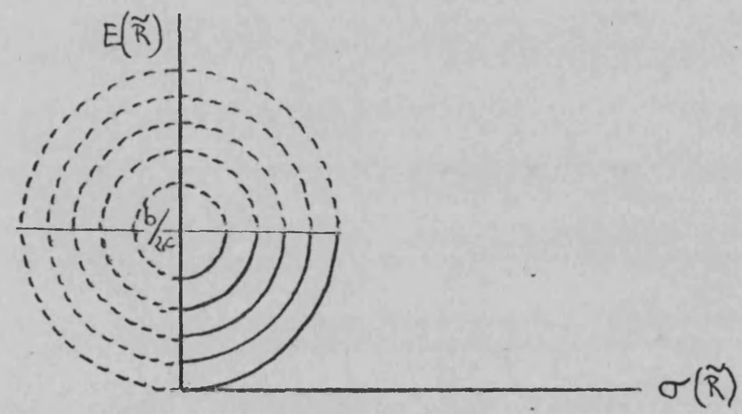


Figura 1.7

Por tanto, una función de utilidad cuadrática da lugar a curvas de indiferencia que son circunferencias concéntricas con centro sobre el eje de ordenadas, de las cuales únicamente resulta significativo económicamente el cuadrante sureste de las mismas (39). De modo que, aunque las curvas de indiferencia de una función cuadrática son algo rígidas y tienen una serie de limitaciones, permiten, sin embargo, explicar la aversión al riesgo del inversor individual, ya que son cóncavas hacia el eje de ordenadas.

NOTAS DEL CAPITULO I

(1) Una exposición más extensa y completa de los temas que - trataremos a lo largo de este capítulo puede encontrarse en:

VON NEUMANN, J. y MORGENSTERN, O.: "The Theory of Games - and Economic Behavior". Princeton University Press. Princeton, N.J., 1947.

FRIEDMAN, M. y SAVAGE, L.J.: "The Utility Analysis of - Choices Involving Risk". Journal of Political Economy, - vol. 56, Agosto 1948, p. 279-304.

DUNCAN LUCE, R. y RAIFFA, H.: "Games and Decisions", John Willey. New York, 1957.

MARKOWITZ, H.M.: "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments". John Willey & Sons, Inc. New - York, 1959.

FARRAR, D.E.: "The Investment Decision under Uncertainty" Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1962.

HOROWITZ, I.: "An Introduction to Quantitative Business - Analysis". McGraw-Hill Bock Company. New York, 1965.

SWALM: "Utility Theory". Harvard Business Review, vol. 44 noviembre-diciembre 1966, p. 123-36.

SCHLAIFER, R.: "Analysis of Decisions under Uncertainty". McGraw-Hill Book,Company. New York, 1969.

RAIFFA, H.: "Analyse de la Decision: Introduction aux - Choix en Avenir Incertain". Dunod. Paris 1973. La versión original en inglés está editada por Addison-Wesley Publishing, Inc. Massachussets, 1968.

(2) Un individuo racional es aquel que en su toma de decisiones sigue una serie de normas y principios lógicos. O lo que es lo mismo, que no se deja llevar por la corazonada o el capricho cuando se enfrenta a la elección entre distintos proyectos u oportunidades de inversión. Más adelante se definirá explícitamente, y de forma rigurosa, qué se entiende por inversor racional.

(3) En principio nos vamos a ocupar de la lógica de la toma de decisiones de inversión en títulos o valores mobiliarios por parte de los individuos. Unicamente, cuando al agregar a nivel de mercado las ecuaciones de demanda de los títulos de las empresas por parte de los inversores particulares lleguemos a un modelo de equilibrio de los precios de dichos activos, nos ocuparemos de cómo deben efectuar las empresas sus decisiones de inversión con el fin de maximizar el valor de sus acciones, teniendo presente el mecanismo de formación de precios que se desprende del modelo normativo que expondremos en otros capítulos.

(4) En ocasiones, en los capítulos siguientes, se observará como se hace referencia a un modelo de dos períodos con el fin de poder analizar conjuntamente las decisiones de consumo-inversión. Pero los supuestos en que se basa tal modelo son tales que es completamente indiferente hablar de las decisiones de inversión en el marco de un modelo de uno o de dos períodos.

(5) Cuando estudiemos las decisiones de consumo-inversión, y

también al hablar del modelo de dos parámetros de selección de cartera, trataremos esta cuestión.

(6) Ver Mossin, donde se demuestra que un inversor con una función de utilidad de la riqueza creciente, siempre invertirá cierta cantidad para conseguir un rendimiento esperado positivo.
MOSSIN, J.: "Theory of Financial Markets". Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs. New Jersey, 1973, p. 18.

(7) Los rendimientos posibles R_i son flujos netos de caja.

(8) SUAREZ SUAREZ, A.S.: "Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa". Ediciones Pirámide. Madrid, 1980. p. 124.

(9) A lo largo de nuestro estudio, normalmente usaremos funciones de distribución discretas, aunque todos los resultados que se obtengan serán válidos y fácilmente generalizables para las funciones de distribución contínuas.

(10) La regla de maximizar el rendimiento esperado puede ser válida en muchas situaciones tal como en los juegos de azar, en los que se puede tomar parte tantas veces como se desee y que, en consecuencia, es de esperar que a la larga se cumplan las probabilidades teóricas por la aplicación de la Ley de los Grandes Números. Pero aún en este caso, se debería tener en cuenta, como lo hace Prieto Pérez, la posibilidad de que en alguna jugada intermedia sobreviniese la ruina del jugador ante una mala racha. - De todos modos, las oportunidades de inversión, que ana-

lizamos en este estudio, suelen ser acontecimientos únicos, no repetitivos.

PRIETO PEREZ, E.: "Teoría de la Inversión". Ediciones - ICE. Madrid, 1973. p. 146-148.

(11) Para desarrollar este epígrafe, nos vamos a basar principalmente en la obra de

AFTALION, F. y VIALLET, C.: "Theorie du Portefeuille". Presses Universitaires de France. Paris 1977.

(12) Las sumas monetarias ciertas podrían ser negativas, en cuyo caso sería más apropiado hablar de pérdidas y no de - ganancias negativas.

(13) Y, por asimilación, los proyectos de inversión tal como los definimos en el epígrafe anterior.

(14) AFTALION, F. y VIALLET, op. cit., p. 26 y ss.

(15) Una esclarecedora discusión sobre el alcance y significación de los distintos axiomas de racionalidad puede verse en:

MARKOWITZ, H.M., op. cit., cap. 10.

HIRSHLEIFER, J.: Investment, Interest, and Capital". - Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1970, cap. 8.

FAMA, E.F. y MILLER, M.H.: "The Theory of Finance". Holt Rinehart andWinston, Inc. New York, 1972, p. 190-198.

(16) Los R_i pueden ser billetes de lotería ciertos o inciertos. Nosotros, a efectos de exposición y para simplificar, supondremos que son sumas monetarias ciertas.

(17) Como bien señala Philippatos: "El término utilidad se refiere a una actitud hacia el riesgo. No debería ser confundido con el concepto de utilidad empleado por los economistas clásicos. En éstos, el término se refiere al valor subjetivo derivado de los gustos y preferencias".

PHILIPPATOS, G.C.: "Financial Management". Holden-Day, Inc. San Francisco. California. 1973, p. 179.

(18) MOSSIN, J.: op. cit., p. 29.

(19) Así, si en vez de u_i, usamos $u^*_i = a + bu_i$ (con $b > 0$), Aftalion y Viallet demuestran que:

$$E\left[U^*(BL)\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i u^*_i = \sum_{i=1}^{n} p_i (a + bu_i) = a + b \sum_{i=1}^{n} p_i u_i =$$

$$= a + b\, E\left[U(BL)\right].$$

Por tanto, si $E\left[U(BL_1)\right] \gtrless E\left[U(BL_2)\right]$ se tendrá que $E\left[U^*(BL_1)\right] \gtrless E\left[U^*(BL_2)\right]$

AFTALION, F. y VIALLET, C., op. cit., p. 29.

(20) VAN HORNE, J.: "Financial Management and Policy". Prentice Hall International Editions. 4ª Ed. Londres 1977.

SHARPE, W.F.: "Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales". Ediciones Deusto. Bilbao, 1976.

(21) RAIFFA, H., op. cit., p. 74.

(22) Nuestro segundo encuestado tiene aversión al riesgo porque no le asigna al billete de lotería un valor igual a su ganancia media esperada, sino un valor inferior, Mossin da otra definición equivalente: "nosotros definimos la aversión al riesgo como el no deseo en tomar parte en

juegos con un resultado esperado cero (juegos limpios o neutrales). Así una persona que decline un juego en que puede ganar o perder una cantidad h con igual probabilidad tiene por definición aversión al riesgo".
MOSSIN, J., op. cit., p. 16.

(23) O de cualquier otro punto intermedio del intervalo $[0, 1.000.000]$. Es decir, que para cualquier: $0 > \alpha > 1$

$$U(\alpha R_1 + (1-\alpha)R_n) > \alpha U(R_1) + (1-\alpha)U(R_n)$$

(24) MOSSIN, J., op. cit., p. 20.

(25) Es de esperar que de acuerdo con la riqueza inicial de cada inversor, la abscisa del punto de inflexión de la curva de la Figura 1.4 varíe, creciendo a medida que lo haga la riqueza inicial.

(26) MOSSIN, J., op. cit., p. 17.

(27) Evidentemente existen diversos tipos de funciones que cumplen esos supuestos: cuadrática, logarítmica, etc. Hemos analizado como puede esperarse que la generalidad de los individuos tengan aversión al riesgo en sus decisiones de tipo económico-financiero y es precisamente ésto, y no la forma concreta de la función de utilidad, lo que nos interesa señalar de momento para los fines de nuestro estudio. Ya no volveremos a tratar el problema de qué tipo de función de utilidad tiene un individuo concreto. Esto es un problema de encuestas que permitan obtener una nube de puntos en el plano (U,R) a la cual ajustar una función matemática particular.

(28) En el capítulo siguiente veremos como existe otra justificación, tal vez más elegante, mediante la cual un individuo que maximice la utilidad esperada únicamente va a tener en cuenta la media y la varianza de los rendimientos en sus decisiones de inversión y es suponer que tales rendimientos siguen una función de distribución normal.

(29) El análisis de Farrar está recogido por Jean en el capítulo IV de su obra traducida al castellano:
FARRAR, D.E., op. cit.
JEAN, W.H.: "Teoría Analítica de la Financiación". Editorial Ariel. Barcelona, 1976.

(30) Aunque no hemos concretado qué función matemática se ajusta a la función de utilidad, ya que pueden ser diferentes para los distintos individuos, suponemos que tal función reune los requisitos necesarios (contínua, derivable, etc.) para que la aproximación por el desarrollo de Taylor de la función de utilidad en un punto determinado sea posible.

(31) Como $E(\tilde{R})$ es una constante, $U\left[E(\tilde{R})\right]$ también es una constante y, como se sabe, la esperanza matemática de una constante es la misma constante, por lo que:

$$E\left[U\left[E(\tilde{R})\right]\right] = U\left[E(\tilde{R})\right]$$

(32) KENDALL, M.G.: "The analysis of Economic Time Series, I: Prices". Journal of the Royal Statistical Society, sec. A, 1953, p. 11-25.

OSBORNE, M.F.M.: "Brownian Motion in the Stock Market". Operation Research, vol. 7, 1957, p. 145-177.
FAMA, E.F.: "The Behavior of Stock Market Prices". Journal of Business, vol. 38, Enero 1965, p. 34-105.
BLUME, M.: "Portfolio Theory; A Step towards its Practical Application". Journal of Business, abril 1970, p. 163-164.

(33) FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H.: "Análisis y Gestión de Cartera de Valores". Ediciones ICE. Madrid 1977, p. 34.

(34) Para la varianza del rendimiento utilizaremos indistintamente: var $(\tilde{R})$ o $\sigma^2(\tilde{R})$, donde las tildes indican que se trata de variables aleatorias.

(35) Recordemos como al principio de este epígrafe vimos que un individuo con aversión alriesgo "ama" el rendimiento esperado y "odia" la varianza.

(36) Para estudiar las propiedades de las curvas de indiferencia seguiremos principalmente la obra de Jean.
JEAN, W.H., op. cit.

(37) A idéntico resultado llegaríamos particularizando en (1.21) para el caso en que $U(\tilde{R}) = a + b\tilde{R} + c\tilde{R}^2$.

(38) La deducción está basada en la realizada por Sharpe en su libro traducido al castellano:
SHARPE, W.F., op. cit., p. 239.

(39) La utilidad esperada de una función cuadrática es:

$$E\left[U(\tilde{R})\right] = a + b\,E(\tilde{R}) - c\left[E(\tilde{R})\right]^2 - c\,\sigma^2(\tilde{R})$$

Como sabemos, la utilidad esperada de un individuo con aversión al riesgo debe ser tal que, ceteris paribus, crezca con el rendimiento esperado y decrezca con el riesgo o varianza:

$$\frac{\partial E\,(U(\tilde{R}))}{\partial E(\tilde{R})} = b - 2c\,E(\tilde{R}) > 0$$

$$\frac{\partial E\,(U(\tilde{R}))}{\partial \sigma^2(\tilde{R})} = -c < 0$$

de donde $E(\tilde{R}) < \frac{b}{2c}$. Es decir, unicamente para valores del rendimiento esperado inferiores a b/2c, las curvas de indiferencia son válidas.

CAPITULO II

EL MODELO DE DOS PARAMETROS DE SELECCION DE CARTERA

2.1. Introducción

En el capítulo I considerábamos la situación de un inversor con una riqueza inicial que debía repartir entre - consumo e inversión. Hicimos abstracción de qué parte de su riqueza dedicaría al consumo e intentamos ver cuál sería el comportamiento racional del inversor en el contexto de un modelo de un período (ahora,más tarde) en ambientes de riesgo. Así, en base a unos axiomas de racionalidad individual, llegamos a que el inversor intentaría maximizar la utilidad esperada.

Luego introducimos el supuesto de que en el mundo de los negocios y las finanzas, lo normal era que el inversor tuviese aversión al riesgo, con lo cual las funciones de utilidad eran crecientes y convexas hacia el eje de ordenadas. Posteriormente, vimos como era posible expresar la utilidad esperada en función de la media y la varianza de los rendimientos, bien como una aproximación, mediante los tres primeros términos de un desarrollo de Taylor, o bien de una manera exacta, en el caso de que la función de utilidad fuese un polinomio cuadrático.

Por último, aunque en el capítulo anterior señalamos que una posible decisión óptima de inversión por parte del individuo consistiría simplemente en elegir aquel proyec to u oportunidad de inversión que tuviese una mayor utilidad esperada, ya apuntamos la idea de que eso no sería correcto, puesto que la posible existencia de correlaciones entre los distintos proyectos de inversión, obligaría a considerar las oportunidades de inversión conjuntamente y no aisladamente, como se hacía allí.

A partir de este momento, nos ceñiremos a un problema concreto, no hablaremos de proyectos u oportunidades de inversión en abstracto, sino de la inversión en títulos o valores mobiliarios (1). De modo que la consideración conjunta de las oportunidades de inversión nos lleva directamente al análisis del tema de la selección de cartera.

Una cartera de valores queda definida cuando se hace explícito qué títulos la componen y en qué cantidad. El rendimiento de cada valor mobiliario de una cartera, como nos movemos en situaciones de riesgo, es una variable aleatoria que está caracterizada por los dos primeros momentos de su función de distribución: la media y la varianza.

Markowitz dice que en su obra se habla más de "selección de cartera" que de "selección de títulos", ya que "una buena cartera es más que una larga lista de acciones y obligaciones" (2), puesto que muchas veces una cartera compuesta por un gran número de títulos no proporciona la mejor diversificación (3) y, además, el análisis de carteras trata de seleccionar la cartera de valores mobiliarios que mejor cumple los objetivos del inversor individual.

Para efectuar la selección de cartera, es decir, para intentar resolver el problema de seleccionar la cartera que mejor se ajusta a los objetivos del inversor, es necesario establecer un criterio adecuado que refleje las preferencias del inversor individual. Los objetivos de los inversores varían ampliamente de unos a otros; sin embargo, si tratamos de buscar puntos comunes en sus gustos y preferencias ya vimos, en el capítulo anterior, que un individuo racional con aversión al riesgo, "ama" la rentabilidad o rendimiento esperado de una inversión y "odia" el riesgo o varianza de los rendimientos (4). Es decir, que se guía por el criterio media-varianza (5).

Si situamos sobre los ejes $(E(\widetilde{R}p), Var(\widetilde{R}p))$ distintas carteras posibles entre las cuales el individuo debe seleccionar aquella que mejor se ajusta a sus necesidades, veremos que, con independencia de su mayor o menor aversión al riesgo, hay una serie de carteras que ya desde un principio, si el inversor actua racionalmente, debe rechazar.

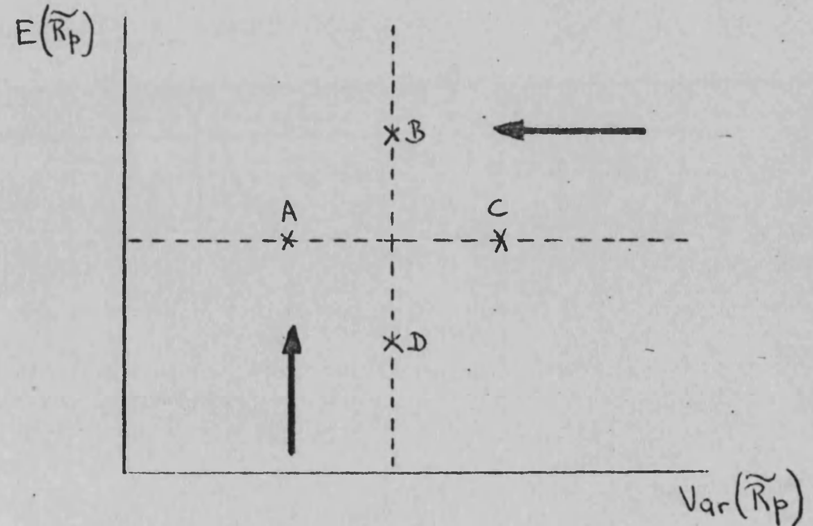


Figura 2.1

Así, por ejemplo, si analizamos las carteras B y D, vemos que ambas tienen el mismo riesgo o varianza, pero la cartera B tiene un rendimiento esperado mayor, por lo que un individuo racional con aversión al riesgo preferirá la cartera B. Y la cartera D, desde este momento, debe ser rechazada por ser una cartera ineficiente (6). Del mismo modo, si el inversor ha de enfrentarse a una elección entre las carteras A y C, como las dos carteras tienen el mismo rendimiento esperado, pero en cambio la cartera A tiene un riesgo menor, lógicamente el individuo elegirá la cartera A y no invertirá en ningún caso en la cartera C (7). Por último, por lo que respecta a las carteras A y B, no es posible hacer comparaciones y elegir una de ellas sin tener en cuenta explícitamente el mapa concreto de las curvas de indiferencia del inversor, puesto que si bien es cierto que la cartera B tiene una rentabilidad mayor, también lo es el hecho de que su riesgo es superior al de la cartera A. En consecuencia, el inversor elegirá una u otra, en función de su mayor o menor aversión al riesgo, pero no porque una de esas carteras sea más eficiente que la otra.

Por tanto, no es necesario analizar todo el conjunto de las carteras posibles, sino solamente el subconjunto cuyo par media-varianza sea distinto (8). De forma que el posterior análisis de la selección de la cartera óptima que mejor se ajusta a las preferencias del inversor, se reduce al análisis de ese subconjunto (llamado eficiente) y que proviene de eliminar del conjunto de carteras posibles aquellas que no son eficientes.

Todo lo dicho hasta ahora se puede sintetizar, siguiendo a Sharpe (9), diciendo que la selección de cartera se puede dividir en tres fases:

1) El análisis de los títulos: consiste en predecir las perspectivas y los cursos de evolución de las cotizaciones de los títulos. Se puede usar la información proporcionada por las series históricas de los rendimientos de los títulos y hacer una extrapolación hacia el futuro o tener en cuenta los juicios y opiniones de los especialistas en temas financieros. Pero en cualquier caso, en palabras de Sharpe, "el análisis de los títulos es un arte".

2) El análisis de carteras: averiguadas las características de los titulos en la primera fase: $E(\tilde{R}j)$, $Var(\tilde{R}j)$ y $cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$, el análisis de carteras es una fase técnica que consiste en calcular las carteras eficientes.

3) La selección de cartera propiamente dicha: es la última fase en la que, conocida la frontera eficiente de las dos carteras arriesgadas, se intenta encontrar cuál es la cartera óptima que mejor se ajusta a las preferencias del inversor. Preferencias que son completamente subjetivas.

Por lo tanto, de las tres fases que propone Sharpe, la única fase técnica es la segunda, ya que la primera es un arte, mientras que la tercera depende de la subjetividad inherente an las preferencias del inversor. A esta fase técnica, consistente en el estudio de la frontera eficiente, dedicaremos el capítulo siguiente, mientras que en el presente capítu lo vamos a hablar de la selección de cartera pero utilizando el enfoque teórico de Fama y Miller (10): las decisiones de consumo-inversión, enfoque que es más general, pero que llega a los mismos resultados.

2.2. Las Decisiones de Consumo-Inversión

Hasta ahora habíamos omitido el tratamiento de las decisiones de consumo y nos habíamos concentrado exclusivamente en la decisión de inversión, cuando en realidad son dos decisiones interdependientes como vamos a ver a continuación.

Consideremos un individuo con una riqueza inicial w_1 al principio del período 1 que debe tomar una decisión de consumo-inversión al comienzo de cada uno de los t períodos de vida que le quedan por vivir. w_1 incluye el valor de mercado de todos sus activos (11) y las rentas de su trabajo personal de todo el período 1 que supondremos recibe al inicio de dicho período. De este modo, al comienzo del período 1, el individuo debe decidir qué parte de su riqueza dedica al consumo presente invirtiendo el resto en títulos o valores mobiliarios:

$$w_1 = c_1 + h_1 \qquad (2.1)$$

Como tanto el rendimiento futuro sobre su inversión de principios del período 1, como las rentas del trabajo personal del período 2 son inciertas, el nivel de su riqueza al comienzo del período 2 también lo será. Es decir, que su riqueza inicial en el período 2 será una variable aleatoria: $\tilde{w}_2$ que deberá repartir entre el consumo y la inversión del período 2 y así sucesivamente el individuo deberá ir tomando decisiones de consumo-inversión en cada uno de los períodos que le restan de vida. En el último período de su vida: t, toda la riqueza se dedica al consumo, ya que el legado que deja a sus herederos lo consideramos consumo.

El individuo únicamente obtiene utilidad (12) del consumo e invierte en la medida que con ello considera que obtendrá un mayor nivel de consumo futuro. "Juzgando el contenido de la mayoría de los libros sobre inversión, la gente invierte solamente por el placer de hacer dinero. Realmente, nada podría estar más lejos de la verdad. Las inversiones sirven meramente como un medio para lograr un fin, y el fin es el consumo. Como consecuencia, la cantidad invertida y los tipos de inversiones seleccionadas dependen de la más fundamental decisión de consumo" (13).

Por supuesto que el problema tal como lo hemos planteado es muy complicado, no existiendo realmente una solución completa y satisfactoria hasta el momento. Por ello, nosotros fijaremos nuestro estudio en el caso de dos períodos, donde se debe tomar una decisión de consumo-inversión al principio del período 1, siendo el consumo del período 2 igual al valor que obtenga el individuo por la venta al comienzo del período 2 de la cartera que adquirió al inicio del período 1; haremos también el supuesto adicional de que el individuo no trabaja durante el período 2:

$$w_1 = c_1 + h_1 \quad , \text{ de donde } \quad h_1 = w_1 - c_1$$

$$\tilde{w}_2 = \tilde{c}_2 = h_1(1 + \tilde{R}_p) = (w_1 - c_1)(1 + \tilde{R}_p) \qquad (2.2)$$

donde $\tilde{R}_p$ es el rendimiento aleatorio por peseta invertida en la cartera p que el individuo adquiere al principio del período 1.

Como nosotros en nuestro modelo omitiremos por completo el mercado de los bienes de consumo concentrándonos en el mercado de capitales, las variables c_1 y $\tilde{c}_2$ son las cantidades monetarias resultantes de multiplicar los precios de los bienes de consumo (14) que adquiere el consumidor por sus respectivos precios.

En el capítulo I estudiamos la función de utilidad del dinero de un individuo que dependía de una sola variable por cuanto únicamente se analizaba la utilidad que le proporcionaba el dinero obtenido de su decisión de inversión, y omitimos el tratamiento de qué parte de su riqueza dedicaría al consumo corriente del período así como la utilidad que ello le reportaría. Ahora, en el nuevo contexto más amplio del problema base planteado y ciñéndonos al caso de dos períodos, la función de utilidad del dinero debemos ampliarla a dos variables, la cantidad monetaria del consumo del período 1: c_1 y la cantidad monetaria del consumo del período 2: $\tilde{c}_2$. Es de -

cir, que la función de utilidad quedaría:

$$U\ (c_1,\ \tilde{c}_2) \qquad (2.3)$$

en donde las derivadas parciales con respecto a c_1 y $\tilde{c}_2$ son positivas:

$$\frac{\partial U(c_1,\tilde{c}_2)}{\partial c_1} > 0 \qquad \frac{\partial U(c_1,\tilde{c}_2)}{\partial \tilde{c}_2} > 0$$

al ser para todos los individuos la utilidad marginal del dinero siempre positiva. La convexidad de la función de utilidad (2.3), implicada por el supuesto de aversión al riesgo del inversor, quedaría definida del siguiente modo:

Dados dos vectores consumo, (c_1^1, c_2^1) y (c_1^2, c_2^2), para cualquier $0<x<1$ (15),

$$U(xc_1^1 + (1-x)c_1^2\ ,\ xc_2^1 + (1-x)c_2^2) > x\ U(c_1^1, c_2^1) + (1-x)U(c_1^2, c_2^2) \qquad (2.4)$$

Debemos resaltar que la aversión al riesgo de un individuo en la función de utilidad $U(c_1,\tilde{c}_2)$, implica la convexidad de dicha función con respecto a cualquiera de las dos variables dejando constante la otra. Es decir, que en la función $U(c_1,\tilde{c}_2)$, al hacer constante una de las dos variables c_1 ó $\tilde{c}_2$, la correspondiente función que queda de una variable es convexa. Por ejemplo, haciendo constante $c_1 = c_1^0$:

$$U(c_1^0,\ xc_2^1 + (1-x)c_2^2) > x\ U(c_1^0, c_2^1) + (1-x)U(c_1^0, c_2^2) \qquad (2.5)$$

2.3. Rentabilidad y Riesgo de una Cartera de Valores

El propósito de los dos epígrafes siguientes es proporcionar una serie de útiles o herramientas con los cuales poder plantear y desarrollar un modelo para la toma de decisiones de consumo-inversión en condiciones de riesgo (16).

Anteriormente ya hemos dicho que una cartera de valores queda definida cuando se hace explícito qué títulos la componen y en qué cantidad. Asimismo, también dijimos que cada valor mobiliario de una cartera, como nos movemos en situaciones de riesgo o incertidumbre parcial, era una variable aleatoria que suponíamos tenía una media y varianza finita.

En un modelo de dos períodos, el individuo compra una cartera al principio del período, vendiéndola al principio del período siguiente. Por tanto, el rendimiento de un título, haciendo abstracción de las ampliaciones de capital, incluye las ganancias de capital y los dividendos percibidos. A lo largo de este capítulo y los siguientes, ya no hablaremos de rendimientos en valores absolutos (flujos netos de caja, como en el capítulo anterior), sino de rendimientos por pesetas invertida en un título durante el período de estudio. De este modo, el rendimiento de un título "i" quedará definido de la siguiente manera:

$$\widetilde{R}_i = \frac{\widetilde{P}_{i2} - P_{i1} + \widetilde{d}_{i1}}{P_{i1}} \qquad (2.6)$$

en donde:

$\widetilde{R}_i$ es el rendimiento por peseta invertido en el título "i" (17).

P_{i1} es el precio de los títulos de la empresa "i" al principio del período 1.

$\widetilde{P}_{i2}$ es el precio de los títulos de la empresa "i" al principio del período 2 ó final del período 1.

$\widetilde{d}_{i1}$ es el dividendo de un título ó acción de la empresa "i" recibido durante el período 1.

Llamando h_{ip} al valor monetario en pesetas invertido en el título i dentro de la cartera p, si suponemos que la cartera está compuesta por n títulos, entonces el valor total en pesetas invertido en la cartera p sería:

$$h_1 = \sum_{i=1}^{n} h_{ip} \qquad (2.7)$$

siendo h_1 la parte de la riqueza w_1 que se destina a la inversión en valores mobiliarios o, lo que es lo mismo, aquella parte de la riqueza que no se dedica al consumo corriente del período de estudio:

$$h_1 = w_1 - c_1 \qquad (2.8)$$

en donde c_1 es el consumo corriente del período 1.

Si cada título i(i=1,2,...,n) proporciona un rendimiento $\widetilde{R}_i$ por peseta invertida, entonces la cartera compuesta por h_{1p} pesetas del título 1, h_{2p} pesetas del título 2, ..., h_{np} pesetas del título n, proporcionará un rendimiento total en términos absolutos:

$$h_1\widetilde{R}_p = h_{1p}\widetilde{R}_1 + h_{2p}\widetilde{R}_2 + \ldots + h_{np}\widetilde{R}_n = \sum_{i=1}^{n} h_{ip}\widetilde{R}_i \qquad (2.9)$$

y en términos relativos, es decir, el rendimiento de la cartera por peseta invertida en la misma, resultará de dividir ambos miembros de (2.9) por h_1:

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_{ip}}{h_1} \tilde{R}_i \qquad (2.10)$$

Definiendo $x_i = h_{ip}/h_1$ (18), es decir, siendo x_i la proporción del total de los recursos h_1 dedicada a la inversión en el título i, puede expresarse (2.10) como:

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{R}_i \qquad (2.11)$$

Por tanto, el rendimiento de una cartera (19) es igual a la media ponderada de los rendimientos de los títulos que la componen, siendo los coeficientes de ponderación las proporciones invertidas en cada uno de los títulos.

Un inversor racional que maximice la utilidad esperada y que tenga una función de utilidad cuadrática (20), únicamente tendrá en cuenta los dos primeros momentos de la función de distribución de los rendimientos de las distintas carteras a la hora de seleccionar una cartera particular, siendo la media una medida de la rentabilidad y la varianza, o dispersión en torno a la media, una medida de su riesgo (21).

Aplicando el operador esperanza matemática a (2.11) que es una suma de variables aleatorias, obtenemos que el rendimiento esperado de la cartera p es la media ponderada de los rendimientos esperados de los n títulos que la componen:

$$E(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, E(\tilde{R}_i) \qquad (2.12)$$

Para hallar el riesgo de la cartera p, debemos tomar varianzas en (2.11), con lo que se llega a que la varianza de la cartera p es (22):

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, \sigma^2(\tilde{R}_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i x_j \, \sigma_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, \sigma_{ij} \qquad (2.13)$$

Es decir, que la varianza de la cartera p no es la media ponderada de las varianzas de los rendimientos de los títulos (23), sino que también depende de las covarianzas o correlación entre los distintos títulos. Además, en la medida que hay n varianzas frente a las $n(n-1) = (n^2-n)$ covarianzas en la expresión (2.13), cabe esperar que en las carteras bien diversificadas el peso específico de las covarianzas supere al de las varianzas (24).

Esta correlación entre los rendimientos de los diferentes títulos es lo que obliga al inversor a no tratar las oportunidades de inversión de forma aislada sino conjuntamente, ya que el riesgo de una cartera (o conjunto de títulos) depende no sólo de las varianzas de los títulos que la integran, sino también de las covarianzas o correlación entre los mismos.

2.4. Rentabilidad y Riesgo de un Título

Acabamos de ver que la rentabilidad de una cartera de valores viene dada por su rendimiento esperado y su riesgo por la varianza de su rendimiento. Normalmente, un título está caracterizado (al ser una variable aleatoria) por su media y su varianza, media y varianza que se suele asimilar, por muchos autores, al binomio rentabilidad-riesgo del título individual. Esto es perfectamente válido cuando se analiza un título aisladamente. Pero es un error caer en la tentación de pensar que la rentabilidad y riesgo de un título individual, en el contexto de una cartera de valores, vienen dados por $E(\widetilde{R}_i)$ y $\sigma^2(\widetilde{R}_i)$. "En un mundo de dos parámetros, un inversor mira a un título individual en términos de su contribución a la media y a la varianza de la distribución del rendimiento de la cartera" (25).

El rendimiento esperado de la cartera es la media ponderada de los títulos que la componen y, por tanto, la contribución del rendimiento del título i al rendimiento de la cartera es: $x_i\ E(\widetilde{R}_i)$, es decir, el rendimiento esperado del título i multiplicado por la proporción que representa dicho título en el total de la cartera.

Para ver la contribución de un título i al riesgo de la cartera p, hagamos antes la siguiente transformación en la ecuación (2.13) con el fin de que dicha contribución se haga más evidente (26):

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_p) \qquad (2.14)$$

Por tanto, la contribución del título i al riesgo de la cartera p viene dada por la covarianza del rendimiento de ese título con el rendimiento de la cartera multiplicada por la proporción en que interviene el título i en el total de la cartera p. De este modo, la medida de la rentabilidad y del riesgo del título i son $E(\tilde{R}_i)$ y cov $(\tilde{R}_i, \tilde{R}_p)$.

Hay dos puntos que nos conviene remarcar respecto a la medida del riesgo de un título individual:

1) Que dicha medida cambia para las diferentes carteras, ya que cov $(\tilde{R}_i, \tilde{R}_p)$ es la covarianza del rendimiento del título i con el rendimiento de la cartera p, y, en consecuencia, variará de una cartera a otra.

2) Que uno de los términos de cov $(\tilde{R}_i, \tilde{R}_p)$ es $\sigma^2(\tilde{R}_i)$ siendo los (n-1) restantes las covarianzas de $\tilde{R}_i$ con el resto de los títulos de la cartera multiplicadas por las proporciones que dichos títulos representan en la misma. Es decir, que $\sigma^2(\tilde{R}_i)$ es uno de los n términos que componen la cov $(\tilde{R}_i, \tilde{R}_p)$ y que, al igual que afirmamos antes, es de esperar que en las carteras bien diversificadas tengan mayor peso las (n-1) covarianzas del título en cuestión en el riesgo de un título individual.

Como posteriormente al hablar de la selección de cartera, en ocasiones nos situaremos en los ejes (E,σ^2) mientras que otras veces lo haremos en los ejes (E,σ) (27), es conveniente que también encontremos cuál es la expresión del riesgo de un título individual cuando consideremos la desviación típica como medida del riesgo de la cartera:

$$\sigma(\widetilde{R}_p) = \frac{\sigma^2(\widetilde{R}_p)}{\sigma(\widetilde{R}_p)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{ij}}{\sigma(\widetilde{R}_p)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{ij}}{\sigma(\widetilde{R}_p)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\operatorname{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_p)}{\sigma(\widetilde{R}_p)} \qquad (2.15)$$

Expresión sobre la que se pueden hacer las mismas consideraciones respecto a su significado que a la (2.14). Las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) han sido expuestas con el fin de ver cuáles eran los rendimientos y riesgos de las carteras de valores y de los títulos individuales. Más adelante, al hablar del equilibrio en el mercado de capitales, se estudiará la relación que existe entre el rendimiento y el riesgo de un título y entre el rendimiento y el riesgo de las carteras eficientes.

2.5. Análisis de la Función de Utilidad cuando los Rendimientos de los Títulos se distribuyen normalmente (28)

En el capítulo anterior vimos que si la función de utilidad era cuadrática, entonces era posible expresar la utilidad esperada en función de los dos primeros momentos. Sin embargo, ya observamos entonces que la función de utilidad cuadrática únicamente conducía a la lógica conclusión de que la utilidad marginal era positiva en el interior de un intervalo, fuera del cual sus resultados eran incorrectos, ya que la utilidad marginal del dinero se volvía negativa. Otro inconveniente de las funciones de utilidad cuadráticas era que para comprobar que efectivamente un inversor se comportaba según sus directrices, se requería un largo proceso de encuestas a distintos individuos y el posterior ajuste de un polinomio cuadrático a la nube de puntos que proporcionaba la encuesta del individuo en cuestión.

Una vía alternativa para justificar que la utilidad esperada depende de los dos primeros momentos de la función de distribución de los rendimientos, consiste en suponer que los rendimientos de los valores mobiliarios siguen una función de distribución normal (29). Esta justificación tiene a favor, con respecto a la anterior desarrollada en el capítulo I, que puede ser verificada empíricamente de una forma directa a partir de los datos del mercado. Pero, además, también tiene un sustento teórico. Así, según (2.6), el rendimiento de un título i, durante un período arbitrario, es igual a:

$$\tilde{R}_i = \frac{\tilde{P}_{i2} - P_{i1} + \tilde{d}_{i1}}{P_{i1}} \qquad (2.16)$$

Si consideramos un período anual y lo dividimos, - por ejemplo, en 200 sesiones bursátiles:

$$\tilde{P}_{i2} - P_{i1} = \tilde{P}_{i,200} - P_{i1} = (\tilde{P}_{i,200} - \tilde{P}_{i,199}) + $$
$$+ (\tilde{P}_{i,199} - \tilde{P}_{i,198}) + \ldots + (\tilde{P}_{i2} - P_{i1}) \qquad (2.17)$$

Si ahora suponemos que el cambio de precios entre dos sesiones cualesquiera $(\tilde{P}_{j,t+1} - \tilde{P}_{jt})$ sigue una función de distribución conocida con una varianza finita y que dichos - cambios de precios son serialmente independientes, el Teorema Central del Límite nos permite asegurar que el $(\tilde{P}_{i2} - P_{i1})$ de (2.16) sigue una función de distribución normal (30).

Por tanto, a continuación vamos a añadir el supuesto de que los rendimientos de los valores mobiliarios son normales para así, conjuntamente con el supuesto de aversión al riesgo del inversor, intentar ver qué variables influyen en la utilidad esperada de un inversor individual y en qué dirección.

Nuestro individuo, al que suponemos un comportamiento racional, a principios del período debe elegir un consumo c_1 y una cartera p tal que la utilidad esperada $E(U(c_1, \tilde{c}_2))$ - sea máxima.

Si los rendimientos de los títulos son normales, el rendimiento de la cartera compuesta por los mismos (que es la media ponderada de los rendimientos de los títulos que la componen (31)) es también normal. Sea $\tilde{R}_p$ el rendimiento por peseta invertida en la cartera p, $E(\tilde{R}_p)$ su media y $\sigma(\tilde{R}_p)$ su desviación típica. Como se sabe una distribución normal está completamente determinada cuando se conocen sus dos primeros momentos, ya que la variable aleatoria tipificada:

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{R}_p - E(\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_p)} \qquad (2.18)$$

es la normal de media cero y desviación típica uno (N(0,1)) - que está tabulada y se puede encontrar en cualquier libro de estadística elemental.

En (2.2) vimos que existe la siguiente relación entre el consumo del período 2 y el rendimiento de la cartera p:

$$\tilde{c}_2 = (w_1 - c_1)\ (1 + \tilde{R}_p)$$

que teniendo en cuenta (2.18) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\tilde{c}_2 = (w_1 - c_1)\ (1 + E(\tilde{R}_p) + \tilde{r}\ \sigma(\tilde{R}_p)) \qquad (2.19)$$

y la utilidad esperada de la elección del nivel de consumo c_1 y la inversión en la cartera p, será (32):

$$E(U(c_1, \tilde{c}_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} U(c_1, (w_1 - c_1)\ \left[1 + E(\tilde{R}_p) + r\,\sigma(\tilde{R}_p)\right])\ f(r)\,dr \qquad (2.20)$$

donde f(r) es la función de densidad de la variable aleatoria N(0,1) y, por lo tanto, igual para todas las carteras. En consecuencia, la utilidad esperada depende unicamente de: c_1, $E(\widetilde{R}_p)$ y $\sigma(\widetilde{R}_p)$, de modo que cuando un individuo se enfrenta ante distintas decisiones de consumo-inversión, las evaluará de acuerdo con esos tres parámetros:

$$E(U(c_1,\widetilde{c}_2)) = V\,(c_1,\, E(\widetilde{R}_p),\, \sigma(\widetilde{R}_p)) \qquad (2.21)$$

En resumen, mediante el supuesto de que los rendimientos de los títulos son normales, hemos llegado a que la utilidad esperada es una función de los dos primeros momentos además del nivel de consumo corriente. Este resultado es similar al que se obtiene partiendo del supuesto de que la función de utilidad es cuadrática, pero coincidimos con Fama y Miller en que esta última aproximación es menos atractiva, menos elegante (33).

Nuestro próximo objetivo es demostrar que la utilidad esperada marginal del rendimiento esperado es positiva, mientras que por el contrario la utilidad esperada marginal de la desviación típica es negativa. Esto es, que al incrementar el rendimiento esperado, ceteris paribus, la utilidad esperada sube, ocurriendo lo contrario en el caso de la desviación típica. En definitiva, vamos a probar que el inversor "ama" el rendimiento: $E(\widetilde{R}_p)$ y "odia" el riesgo: $\sigma(\widetilde{R}_p)$.

La utilidad esperada marginal del rendimiento esperado es: (ver (2.20))

$$\frac{\partial E(U(c_1,\widetilde{c}_2))}{\partial E(R_p)} = (w_1-c_1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(c_1,c_2)}{\partial c_2}\, f(r)\, dr > 0$$

(2.22)

ya que la utilidad marginal del consumo (tanto del período 1 como del período 2) es siempre positiva, al igual que también es positiva la función de densidad de la N(0,1) sea cual sea el valor de r, por lo cual la integral de todos esos productos positivos es positiva.

La utilidad esperada marginal de la desviación típica es:

$$\frac{\partial E(U(c_1,\tilde{c}_2))}{\partial \sigma(\tilde{R}_p)} = (w_1-c_1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(c_1,c_2)}{\partial c_2}.r.f(r).dr < 0 \qquad (2.23)$$

La justificación del por qué es negativa esta derivada parcial es más problemática, viéndonos obligados a utilizar un procedimiento gráfico que analice cada uno de los componentes a integrar:

$$\frac{\partial U\ (c_1,c_2)}{\partial c_2} \quad , r \ , f(r)$$

La utilidad marginal del consumo del período 2 es siempre positiva, pero decreciente ya que hemos supuesto que el inversor tiene aversión al riesgo, con lo cual los sucesivos incrementos en el consumo de cualquier período le proporcionen una utilidad cada vez menor. Como c_2 es función directa de r (ver ecuación (2.19)), la utilidad marginal del consumo del período 2 también será positiva y decreciente con respecto a r. La función r es la bisectriz del primer cuadrante en los ejes (r,r) por lo que toma valores negativos a la izquierda del punto r=0 . f(r) es la función de densidad de la N(0,1) y, por lo tanto, es simétrica con valores siempre posi

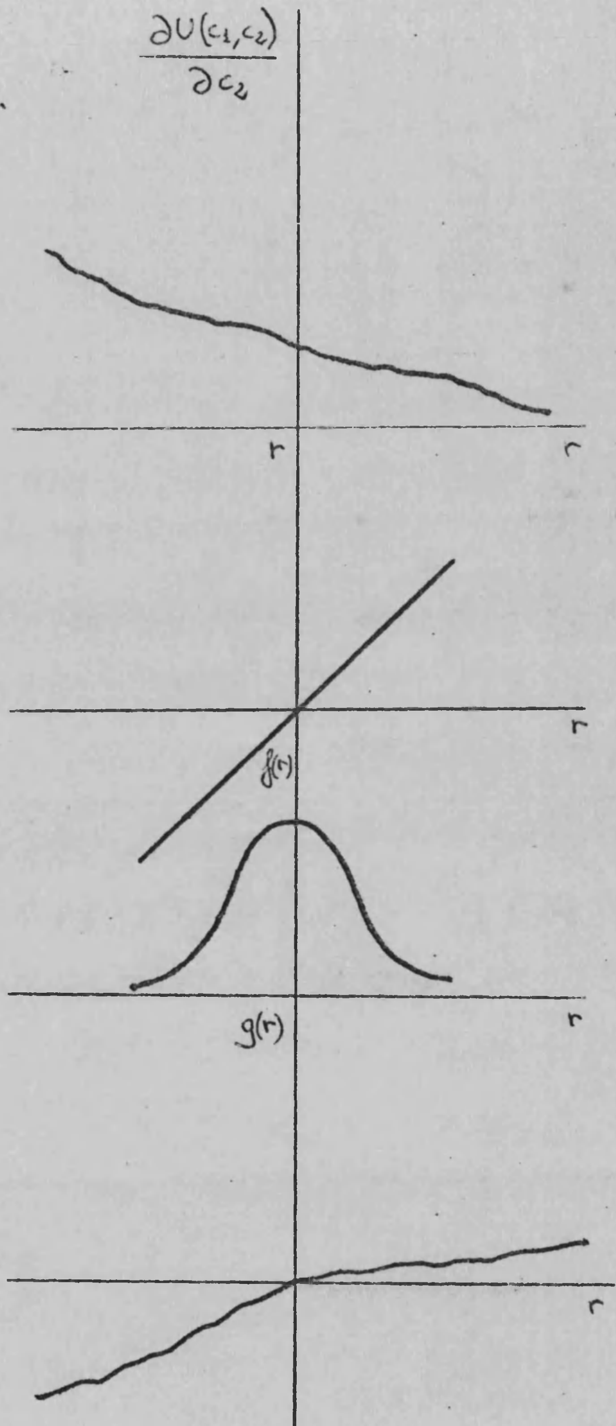


Figura 2.2 (35)

tivos. El producto de las tres funciones anteriores ($g(r)$ en la Figura 2.2), es una función que toma valores negativos cuando $r<0$ y positivos cuando $r>0$, pero con la particularidad de que $g(r)$ no es simétrica y la integral desde $-\infty$ a 0 es negativa y, en valor absoluto, superior a la integral desde 0 a ∞, que es positiva, con lo cual la integral de $g(r)$ desde $-\infty$ a ∞ es siempre negativa (34).

2.6. Análisis de las Curvas de Indiferencia cuando los Rendimientos son normales

Ahora vamos a demostrar que las curvas de indiferencia son crecientes y cóncavas en el plano (E,σ), apoyándonos en el supuesto de que los rendimientos de los títulos y, por lo tanto, los rendimientos de las carteras son normales. Recordemos que una curva de indiferencia es el conjunto de pares (rendimiento esperado, desviación típica) (36) para los cuales el individuo alcanza la misma utilidad esperada.

La utilidad esperada ya vimos, en la ecuación (2.21), que era una función del consumo corriente del período y del rendimiento esperado y desviación típica de una cartera:

$$E\ (U(c_1,\widetilde{c}_2)) \ = \ U\ (c_1,\ E(\widetilde{R}_p),\ \sigma(\widetilde{R}_p))$$

Manteniendo constante la utilidad esperada del inversor y diferenciando en la expresión anterior:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial U}{\partial E(\tilde{R}_p)} d\, E(\tilde{R}_p) + \frac{\partial U}{\partial \sigma(\tilde{R}_p)} d\, \sigma(\tilde{R}_p) \qquad (2.24)$$

en donde dc_1, $dE(\tilde{R}_p)$ y $d\sigma(\tilde{R}_p)$ son cambios infinitesimales en las respectivas variables. Esta última ecuación nos permite hallar la forma en que varían dos de las tres variables, manteniéndose invariante la tercera de ellas y sin modificarse el nivel de utilidad esperado. De este modo, si queremos hallar la tasa marginal de sustitución entre el rendimiento esperado y la desviación típica, hacemos $dc_1 = 0$ en (2.24) y despejamos $dE(\tilde{R}_p) / d\sigma(\tilde{R}_p)$:

$$\frac{dE(\tilde{R}_p)}{d\sigma(\tilde{R}_p)} = - \frac{\partial U / \partial \sigma(\tilde{R}_p)}{\partial U / \partial E(\tilde{R}_p)} > 0 \qquad (2.25)$$

como la utilidad esperada marginal del rendimiento esperado es positiva por (2.22), mientras que la utilidad esperada marginal de la desviación típica es negativa según (2.23), estando el cociente de ambas afectado de signo menos, la ecuación (2.25) es positiva. Por tanto, la tasa marginal de sustitución o pendiente de una curva de indiferencia en el plano (E,σ), es positiva, lo que equivale a decir que para que un inversor con aversión al riesgo se muestre indiferente entre dos carteras de valores, una de las cuales es más arriesgada que la otra, debe a su vez la cartera más arriesgada tener una mayor rentabilidad.

Visto ya que las curvas de indiferencia son crecientes en el plano (E,σ), vamos a ver a continuación que son -

cóncavas en dicho plano. Sean $(E(\tilde{R}_1), \sigma(\tilde{R}_1))$ y $(E(\tilde{R}_2), \sigma(\tilde{R}_2))$ dos puntos (37) de una curva de indiferencia tal como lo muestra la Figura 2.3, y supongamos que el nivel de utilidad esperado alcanzado en dicha curva de indiferencia es V_1 (38):

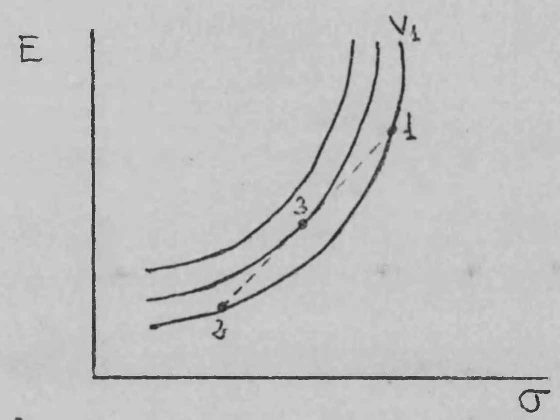


Figura 2.3

Nuestro propósito es demostrar como el segmento que une los puntos 1 y 2, que representa distintas combinaciones lineales de dichos puntos, cae por encima de la curva de indiferencia V_1. Es decir, que la utilidad esperada de cualquier tercer punto:

$$E(\tilde{R}_3) = x\,E(\tilde{R}_1) + (1-x)\,E(\tilde{R}_2) \quad ,$$

$$\sigma(\tilde{R}_3) = x\,\sigma(\tilde{R}_1) + (1-x)\,\sigma(\tilde{R}_2) \quad , \quad 0 < x < 1 \qquad (2.26)$$

es mayor que V_1.

Como el punto 3 es una combinación lineal de los puntos 1 y 2 para un nivel de c_1 constante, el consumo corriente del período 2 correspondiente al punto 3, también es una combinación lineal de los consumos corrientes del período 2 correspondientes a los puntos 1 y 2 (39):

$$c_2^3 = xc_2^1 + (1-x)c_2^2 \tag{2.27}$$

De (2.5), para un c_1 fijo, la aversión al riesgo del inversòr implicaba:

$$U(c_1, xc_2^1 + (1-x)c_2^2) > xU(c_1, c_2^1) + (1-x)\, U(c_1, c_2^2)$$

que teniendo en cuenta (2.27) se puede poner:

$$U(c_1, c_2^3) > x\, U(c_1, c_2^1) + (1-x)\, U(c_1, c_2^2) \tag{2.28}$$

como f(r) es positiva para todo valor de r, al tomar esperanzas en (2.28) el signo de la inecuación no cambia:

$$E\,(U(c_1, c_2^3)) > x\, E(U(c_1, c_2^1)) + (1-x)\, E(U(c_1, c_2^2))$$

y como por estar en la misma curva de indiferencia:

$$E\,(U(c_1, c_2^1)) = E\,(U(c_1, c_2^2) = V_1$$

llegamos a que

$$E\,(U(c_1, c_2^3)) > V_1$$

Por tanto, un punto que sea combinación lineal de otros dos puntos cualesquiera de una curva de indiferencia dada, corresponde a una curva de indiferencia situada más hacia arriba y más hacia la izquierda de la curva de indiferencia original, lo cual implica que las curvas de indiferencia son cóncavas o, lo que es lo mismo, que la tasa marginal de sustitución entre $E(\widetilde{R}_p)$ y $\sigma(\widetilde{R}_p)$, o pendiente de una curva de indiferencia, crece al aumentar el riesgo o deswiación típica.

2.7. La Eficiencia en un Mundo de dos Parámetros

En la introducción de este capítulo, en la nota a pie de página 6, dimos una definición de cartera eficiente intuitiva, de tipo gráfico, ya que en aquel momento carecíamos del conocimiento preciso sobre qué se entendía por rendimiento de un valor mobiliario y por rentabilidad y riesgo de una cartera de valores.

A estas alturas del capítulo, sin embargo, ya contamos con todos los útiles necesarios y vamos a tratar el tema de la eficiencia de las carteras de valores de una manera más formalizada.

Markowitz, en su obra pionera sobre selección de cartera, dice: "Para ser P una cartera eficiente debe cumplir las tres condiciones siguientes:

1) P es una cartera legítima;
2) Si cualquier cartera legítima tiene un rendimiento esperado mayor que la cartera P, debe también tener una varianza del rendimiento mayor.
3) Si cualquier cartera tiene una varianza del rendimiento más pequeña que la cartera P, debe también tener un rendimiento esperado menor.

Una cartera ineficiente cumple la primera condición pero falla en el cumplimiento de la segunda o tercera condición. Una cartera que falla en el cumplimiento de la primera condición no es ni eficiente ni ineficiente, sino simplemente no legítima" (40).

Markowitz califica de legítima a aquella cartera en que los pesos o ponderaciones de los distintos títulos que la componen son positivos. Es decir, que en una cartera legítima las x_i de la fórmula (2.11) son todas positivas.

Nosotros, a lo largo de este trabajo no tendremos en cuenta el cumplimiento de la primera condición de eficiencia de Markowitz para decir que una cartera es eficiente, ya que el tratamiento matemático que emplearemos para hallar las carteras eficientes, y también la cartera óptima, requiere que las x_i puedan ser indistintamente positivas o negativas.

Por tanto, en el contexto de nuestro trabajo, una cartera eficiente es aquélla que a la vez, 1) para un rendimiento esperado dado tiene la menor desviación típica (41), 2) para una desviación típica dada tiene el mayor rendimiento posible. En consecuencia, dos carteras distintas son a la vez eficientes si una de ellas tiene mayor rendimiento esperado pero también mayor desviación típica que la otra.

En(2.21) hemos llegado a que la utilidad esperada es una función del consumo corriente del período 1 del rendimiento esperado de la cartera en la que se invierte y de la desviación típica de la misma. Por otra parte, en (2.22) y (2.23) hemos demostrado que la utilidad esperada crece cuando se incrementa el rendimiento esperado de la cartera a elegir y decrece cuando se incrementa la desviación típica de la misma. Esto equivale a decir que un individuo racional con aversión al riesgo "ama" la rentabilidad y "odia" el riesgo, o lo que es lo mismo, que se guía por el criterio media-varianza explicado en el epígrafe primero de este tema.

Por tanto, dados c_1 y $\sigma(\tilde{R}_p)$ el inversor prefiere más rendimiento esperado a menos y, también, dados c_1 y $E(\tilde{R}_p)$, el inversor prefiere menos desviación típica a más, o lo que es lo mismo, dado un nivel de consumo corriente c_1, el inversor invertirá el resto de su riqueza siempre en una cartera eficiente. Esta división de la riqueza entre c_1 y una cartera eficiente, es lo que Fama y Miller llaman "teorema de la frontera eficiente" (42).

2.8. La Decisión Optima de Consumo-Inversión

Al hablar del teorema de la frontera eficiente, hemos visto cómo la decisión de consumo-inversión debía consistir en la elección de un nivel de consumo c_1 y una cartera eficiente p, aunque no hemos calculado qué cantidad de dinero había que invertir en cada título de la cartera eficiente ni qué nivel concreto debía alcanzar el consumo c_1.

Nosotros sabemos que el comportamiento racional del inversor le llevará a elegir aquellas c_1 y h_{ip} $(i=1,2,\dots,n)$ que maximicen su función de utilidad esperada, con la restricción de que el consumo e inversión del período 1 no sobrepasen la riqueza disponible por el inversor al inicio de dicho período.

$$\text{Max} \quad E\,(U(c_1,\tilde{c}_2))$$

$$\text{sujeto a:} \quad c_1 + h_1 = w_1 \qquad (2.29)$$

Teniendo en cuenta (2.19):

$$U(c_1,\tilde{c}_2) \;=\; U\,(c_1,(w_1-c_1)(1+E(\tilde{R}_p)+\tilde{r}\,\sigma(\tilde{R}_p)))$$

y sustituyendo $E(\tilde{R}_p)$ y $\sigma(\tilde{R}_p)$ por los valores hallados en (2.12) y (2.13) y recordando la definición de x_i:

$$U(c_1,\tilde{c}_2) = U\,(c_1,h_1(1+\sum_{i=1}^{n} x_i E(\tilde{R}_i) + \tilde{r}\,(\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} x_i x_j\ \sigma_{ij})^{\frac{1}{2}}))$$

$$U(c_1,\tilde{c}_2) = U\,(c_1,\sum_{i=1}^{n} h_{ip}(1+E(\tilde{R}_i)) + \tilde{r}\,(\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} h_{ip}h_{jp}\ \sigma_{ij})^{\frac{1}{2}})$$

$$(2.30)$$

Debemos notar que $\tilde{c}_2$ sigue una distribución normal ya que según (2.2) es una función de $\tilde{R}_p$, que también es normal. Por tanto, tipificando la variable aleatoria $\tilde{c}_2$, tenemos:

$$\tilde{r} \;=\; \frac{\tilde{c}_2 - E(\tilde{c}_2)}{\sigma(\tilde{c}_2)}$$

o equivalentemente:

$$\tilde{c}_2 = E(\tilde{c}_2) + \tilde{r}\,\sigma(\tilde{c}_2) \qquad (2.31)$$

Teniendo presente los resultados (2.30) y (2.31) podemos ahora expresar (2.29) del siguiente modo:

$$\text{Max } E\,(U(c_1,\tilde{c}_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} U(c_1,\ \sum_{i=1}^{n} h_{ip}\ (1+E(\tilde{R}_i))\ +$$

$$+\ \tilde{r}\,(\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} h_{ip}h_{jp}\sigma_{ij}\ )^{\frac{1}{2}})\ f(r)\ dr \ =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U\ (c_1,\ E(\widetilde{c}_2) + \widetilde{r}\ \sigma(\widetilde{c}_2))\ f(r)\ dr$$

$$\text{sujeto a:} \qquad c_1 + \sum_{i=1}^{n} h_{ip} = w_1 \qquad (2.32)$$

em donde c_1 y h_{ip} son las incógnitas del problema (43). Aplicando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, se tiene

$$L = E\ (U(c_1, \widetilde{c}_2)) + \lambda_1\ (w_1 - c_1 - \sum_{i=1}^{n} h_{ip}) \qquad (2.33)$$

y derivando parcialmente con respecto a cada una de las incógnitas y al multiplicador λ_1 e igualando a cero, obtenemos - las condiciones necesarias para la existencia de un máximo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_1} &= \frac{\partial E\ (U(c_1, \widetilde{c}_2))}{\partial c_1} - \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial h_{ip}} &= \frac{\partial E\ (U(c_1, \widetilde{c}_2))}{\partial h_{ip}} - \lambda_1 = 0 \qquad i=1,2,\dots,n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= w_1 - c_1 - \sum_{i=1}^{n} h_{ip} = 0 \end{aligned}\right\} (2{,}34)$$

Si ahora pasamos λ_1 al segundo miembro, en las - (n+1) primeras ecuaciones, y despejamos w_1, en la ecuación - (n+2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E\ (U(c_1, \widetilde{c}_2))}{\partial c_1} &= \lambda_1 \\ \frac{\partial E\ \ U(c_1, \widetilde{c}_2)}{\partial h_{ip}} &= \lambda_1 \qquad i=1,2,\dots,n \\ w_1 &= c_1 + \sum_{i=1}^{n} h_{ip} \end{aligned}\right\} \qquad (2.35)$$

El sistema de ecuaciones (2.35) consta de (n+2) ecuaciones con (n+2) incógnitas, teniendo por lo tanto una solución única y determinada, con lo cual hemos hallado una solución puntual, única, al problema del inversor. Observando el sistema de ecuaciones (2.35) vemos que la decisión óptima de consumo-inversión requiere que la utilidad esperada marginal del consumo del período 1 y la utilidad esperada marginal de las inversiones en cada uno de los n títulos o valores mobiliarios sean iguales, lo cual demuestra la interdependencia entre las decisiones de consumo y las decisiones de inversión que antes ya habíamos anticipado.

No obstante, conviene remarcar que para hallar los valores concretos de las variables c_1 y h_{ip} en el sistema de ecuaciones (2.35), es necesario hacer explícito el tipo de función matemática que se ajusta a la función de utilidad del inversor, lo cual, como vimos en el capítulo anterior, exige un largo y complejo proceso de encuestas. Además, también cabe esperar que la función de utilidad sea distinta para los diferentes inversores. Todo ésto deja claro el costo y la poca operatividad de los resultados cuando se tiene en cuenta explícitamente la función de utilidad del inversor y se intenta hallar la cartera óptima de un sólo paso.

2.9. Análisis de la Decisión Optima de Inversión

Para analizar más a fondo las consecuencias de la decisión óptima de inversión tomada y llegar a la relación que existe entre el rendimiento y el riesgo de dos títulos cualesquiera dentro de una cartera eficiente p, es necesario desarrollar más el resultado de la derivada de la utilidad esperada con respecto a las cantidades invertidas en los diversos títulos. En (2.35) hemos llegado a que para todos los títulos:

$$\frac{\partial E\,(U(c_1,\tilde{c}_2))}{\partial h_{ip}} = \lambda_1 \qquad (2.36)$$

Concentrando ahora nuestra atención en el primer miembro y desarrollando esa derivada:

$$\frac{\partial E(U(c_1,\tilde{c}_2))}{\partial h_{ip}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(c_1,\tilde{c}_2)}{\partial \tilde{c}_2} \cdot \frac{d\tilde{c}_2}{d\,h_{ip}} \cdot f(r) \cdot dr \qquad (2.37)$$

De (2.31): $\tilde{c}_2 = E(\tilde{c}_2) + \tilde{r}\,\sigma(\tilde{c}_2)$ y recordando que $\tilde{c}_2$ es una función de h_{ip}:

$$\frac{d\,\tilde{c}_2}{d\,h_{ip}} = \frac{d\,E(\tilde{c}_2)}{d\,h_{ip}} + \tilde{r}\,\frac{d\,\sigma(\tilde{c}_2)}{d\,h_{ip}} \qquad (2.38)$$

Según se desprende de (2.31) y (2.32):

$$E(\tilde{c}_2) = \sum_{i=1}^{n} h_{ip}\,(1 + E(\tilde{R}_i)) \qquad (2.39)$$

$$\sigma(\tilde{c}_2) = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ip}h_{jp}\,\sigma_{ij})^{\frac{1}{2}} \qquad (2.40)$$

De modo que para hallar el valor del segundo miembro de (2.38), debemos derivar (2.39) y (2.40) con respecto a h_{ip} (44), y tener en cuenta la expresión (2.14):

$$\frac{d\, E(\widetilde{c}_2)}{d\, h_{ip}} = 1 + E(\widetilde{R}_i) \qquad (2.41)$$

$$\frac{d\, \sigma(\widetilde{c}_2)}{d\, h_{ip}} = \frac{2 \sum_{j=1}^{n} h_{jp}\, \sigma_{ij}}{2\, \sigma(\widetilde{c}_2)} = \frac{h_1 \sum_{j=1}^{n} x_j\, \sigma_{ij}}{h_1\, \sigma(\widetilde{R}_p)} = \frac{\operatorname{cov}\,(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_p)}{\sigma(\widetilde{R}_p)} \qquad (2.42)$$

Llevando (2.38), (2.41) y (2.42) a (2.37):

$$\frac{\partial E(U(c_1,\widetilde{c}_2))}{\partial h_{ip}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(c_1,\widetilde{c}_2)}{\partial \widetilde{c}_2} \left[1 + E(\widetilde{R}_i) + r\, \frac{\operatorname{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_p)}{\sigma\,(\widetilde{R}_p)}\right] f(r)\, dr =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + E(\widetilde{R}_i)\right] \frac{\partial U(c_1,\widetilde{c}_2)}{\partial \widetilde{c}_2}\, f(r) dr + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_p)}{\sigma\,(\widetilde{R}_p)}\, \frac{\partial U(c_1,\widetilde{c}_2)}{\partial (\widetilde{c}_2)}\, r\, f(r)\, dr$$

y, por último, teniendo en cuenta (2.22) y (2.23):

$$\frac{\partial E(U(c_1,\widetilde{c}_2))}{\partial h_{ip}} = \frac{\dfrac{\partial E(U(c_1,\widetilde{c}_2))}{\partial E\,(\widetilde{R}_p)} \left[1 + E(\widetilde{R}_i)\right]}{w_1 - c_1} + \frac{\dfrac{\partial E(U(c_1,\widetilde{c}_2))}{\partial \sigma(\widetilde{R}_p)} \cdot \dfrac{\operatorname{cov}\,(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_p)}{\sigma\,(\widetilde{R}_p)}}{w_1 - c_1} \qquad (2.43)$$

Como λ_1 en (2.36) es igual para todos los títulos; en particular para cualquier par de títulos i y j, se sigue - que:

$$\frac{\partial E(U(c_1,\tilde{c}_2))}{\partial h_{ip}} = \frac{\partial E(U(c_1,\tilde{c}_2))}{\partial h_{jp}}$$

De donde teniendo en cuenta (2.43) se llega a que:

$$-\frac{\dfrac{\partial E(U(c_1,\tilde{c}_2))}{\partial \sigma(\tilde{R}_p)}}{\dfrac{\partial E(U(c_1,\tilde{c}_2))}{\partial E(\tilde{R}_p)}} = \frac{E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_j)}{\dfrac{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_p)} - \dfrac{cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_p)}} \qquad (2.44)$$

El primer miembro de (2.44) es la pendiente de una curva de indiferencia en el punto correspondiente a la cartera eficiente óptima (ver (2.25)), por lo que podemos escribir:

$$\frac{\partial E(\tilde{R}_p)}{\partial \sigma(R_p)} = \frac{E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_j)}{\dfrac{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_p)} - \dfrac{cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_p)}} \qquad (2.45)$$

En resumen, en (2.45) hemos llegado a que las cantidades de dinero invertidas en los títulos i y j: h_{ip} y h_{jp}, deben ser tales que el cociente de las diferencias de sus rentabilidades respecto a las diferencias de sus riesgos iguale a la pendiente de una curva de indiferencia en el punto - $(E(\tilde{R}_p),\ \sigma(\tilde{R}_p))$ correspondiente a la cartera óptima. Este resultado conviene tenerlo presente y no olvidarlo, porque será el utilizado en el siguiente capítulo cuando se tenga que elegir la cartera óptima del inversor de entre las distintas carteras que forman parte de la frontera eficiente.

NOTAS DEL CAPITULO II

(1) Esto no implica pérdida de generalidad puesto que la inversión en títulos valores la consideraremos como una inversión en un activo arriesgado caracterizado por los parámetros rentabilidad-riesgo y de la misma forma puede ser tratado cualquier proyecto de inversión en ámbientes de riesgo.

(2) MARKOWITZ, H.M.: "Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments". John Willey & Sons, Inc. New York 1959, p. 3.

(3) Posteriormente se verá como actúa la diversificación eficiente de Markowitz en la reducción del riesgo sin menoscabo en la rentabilidad.

(4) En el tercer epígrafe de este capítulo, se definirá la forma rigurosa qué se entiende por rendimiento y cómo se calcula el rendimiento esperado y la varianza del rendimiento de una cartera de valores.

(5) Markowitz considera que en una situación de riesgo, guiarse únicamente por el rendimiento esperado que proporciona una cartera de valores es inadecuado, ya que esta regla no obliga a la diversificación, sino todo lo contrario, se invierte únicamente en el título arriesgado que promete un mayor rendimiento esperado. Y, en lugar del criterio anterior, propone la regla de los "rendimientos esperados -varianza de los rendimientos", o lo que es lo mismo el

criterio media-varianza.

MARKOWITZ, H.M.: "Portfolio Selection". Journal of Finance marzo, 1952, p. 77-91.

(6) Más adelante se definirá de forma clara el concepto de cartera eficiente. De momento basta decir que una cartera eficiente es aquella cartera posible que, para una varianza dada, está situada lo más hacia arriba posible o que, para un rendimiento esperado dado, está situada lo más hacia la izquierda posible.

(7) Un especulador, con propensión al riesgo, seguramente encontrará más atractiva la cartera C, puesto que para él las posibles ganancias por encima de la media incrementan su utilidad esperada en mayor medida que los decrementos de utilidad producidos por las ganancias por debajo de la media. Sin embargo, como ya advertimos en el capítulo I, no consideramos que éste sea el caso que más se da en el mundo de los negocios y las finanzas.

(8) Sean dos carteras de valores caracterizadas por sus respectivos pares rentabilidad-riesgo:

$$E(\tilde{R}_1) \;,\; Var(\tilde{R}_1)$$
$$E(\tilde{R}_2) \;,\; Var(\tilde{R}_2)$$

Por distinto par media-varianza se entiende:

$$E(\tilde{R}_1) \neq E(\tilde{R}_2) \qquad Var(\tilde{R}_1) \neq Var(\tilde{R}_2)$$
$$E(\tilde{R}_1) \gtrless E(\tilde{R}_2) \qquad Var(\tilde{R}_1) \gtrless Var(\tilde{R}_2)$$

(9) En realidad, Sharpe lo que hace es recoger la sugerencia de Markowitz.

SHARPE, W.F.: "Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales". Ediciones Deusto. Bilbao, 1976, p. 50-51.
MARKOWITZ, H.M. (1959), op. cit.

(10) FAMA, E.F. y MILLER, M.H.: "The Theory of Finance". Holt. Rinehart and Winston, Inc. New York,1972, cap. VI.

(11) A efectos de simplificar el tema, supondremos que todos los activos del individuo se reducen a los valores mobiliarios adquiridos en períodos anteriores de su vida.

(12) Aquí sí hemos utilizado el término utilidad en el sentido clásico de satisfacción psicológica.

(13) COATES, C.R.: "Investment Strategy". McGraw-Hill Book Company. New York, 1978, p. 515.

(14) Los precios de los bienes de consumo se suponen dados.

(15) Observar como esta definición es análoga a la de la nota a pie de página 23 del capítulo I, pero adaptada al caso de dos variables.

(16) Para ello vamos a seguir los pasos dados por:
FAMA, E.F.: "Foundations of Finance". Basil Blacwell, Oxford, 1977, cap. 2.

(17) Como ya apuntamos en el capítulo I, con el fin de lograr una mayor claridad, usaremos las tildes para indicar que se trata de variables aleatorias. Cuando hagamos mención a un valor particular de la variable aleatoria, omitiremos la tilde. También por razones de comodidad, hablaremos indistintamente de rendimiento del título i ó rendi-

miento por peseta invertida en el título i.

(18) La suma de las proporciones invertidas en cada uno de los títulos como es natural debe ser igual a la unidad:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_{ip}}{h_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_{ip}}{h_1} = \frac{h_1}{h_1} = 1$$

(19) Como los rendimientos de los títulos son variables aleatorias, el rendimiento de una cartera es a su vez una variable aleatoria al ser el rendimiento de la misma una suma de variables aleatorias.

(20) Más adelante veremos que si los rendimientos de los títulos siguen una función de distribución normal, entonces no es necesario que la función de utilidad sea cuadrática para que unicamente se tengan en cuenta los dos primeros momentos.

(21) Recordemos que este resultado fue obtenido en el epígrafe 1.6 del capítulo anterior.

(22) Para referirnos a la covarianza del título i con el título j usaremos indistintamente σ_{ij} ó $\mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$. Asimismo, por conveniencias notacionales, para referirnos a la varianza en ocasiones utilizaremos $\sigma^2(\tilde{R}_i) = \sigma_{ii}$.

(23) Ello sólo sería cierto en el caso de que los rendimientos de los títulos fuesen completamente independientes, con lo cual las covarianzas entre los distintos títulos serían nulas y quedaría la varianza de la cartera como:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, \sigma^2(\tilde{R}_i)$$

Al estudiar el Modelo de Mercado veremos como no cabe esperar que los rendimientos de los diversos títulos sean independientes, ya que todas las empresas en alguna medida están influídas por las condiciones de mercado: si hay crisis todas la sufren y si hay auge todas se benefician, aunque claro está, puede haber excepciones aisladas de empresas con correlaciones nulas e incluso negativas con el mercado.

(24) Esta afirmación se verá con mayor claridad cuando hablemos de la diversificación ingenua. De momento es suficiente decir que si la cartera está compuesta por 40 títulos, por ejemplo, habrá 40 varianzas frente a 1560 covarianzas en la expresión (2.8).

(25) FAMA, E.F.: op. cit., p. 58.

(26) $\mathrm{Cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) = \mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \sum_{j=1}^{n} x_j\tilde{R}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{ij}$

(27) Más adelante veremos como cuando se supone que los rendimientos de los títulos son normales, y con el fin de tipificar las variables aleatorias de los distintos títulos, se emplea la desviación típica como medida del riesgo de una cartera. Mientras que al hablar de la frontera eficiente en el caso de n títulos arriesgados, y con el fin de evitar las raíces cuadradas que trae aparejado el trabajo con desviaciones típicas, se usa la varianza como medida del riesgo de una cartera.

(28) A partir de este epígrafe, y hasta el final del capítulo,

seguiremos los pasos dados por Fama y Miller:
FAMA, E.F. y MILLER, M.H., op. cit., p. 222-250.

(29) Tobin fue el primero en apuntar estas dos posibles alternativas: que las funciones de utilidad son cuadráticas ó que los rendimientos de los títulos son normales, en las cuales puede basarse el modelo de dos parámetros de selección de cartera.
TOBIN, J.: "Liquidity Preference as Behavior towards Risk" Review of Economic Studies, vol. 25, nº 1, febrero 1958, p. 65-86.

(30) Pero hay que recalcar que tal como acabamos de decir, la aplicación del Teorema Central del Límite requiere que la varianza de los cambios de precios de los títulos exista y sea finita. Sin embargo, existe una fuerte evidencia empírica en contra según se desprende de los trabajos de distintos autores, entre los cuales cabe citar a:
MANDELBROT, B.: "The Variation of Certain Speculative Prices". Journal of Business, vol. 36, octubre 1963, p. 394-419.
FAMA, E.F.: "The Behavior of Stock Market Prices". Journal of Business, vol. 38, enero 1965, p. 34-105.
BLUME, M.E.: "Portfolio Theory: A Step toward its Practical Application". Journal of Business, vol. 43, abril 1970, p. 152-173.
ROLL, R.: "The Behavior of Interest Rates: The Application of the Efficient Market Model to U.S. Treasury Bills" Basic Books, Inc., Publishers. New York, 1970.

Según estos trabajos que acabamos de citar, parece ser que los rendimientos de los títulos se ajustan mejor a una clase de funciones de distribución paretiano estables de las cuales la función de distribución normal es un caso particular.

Pues bien, Fama y Miller han demostrado que, aun en este caso, los principales resultados del modelo de dos parámetros de selección de cartera (resultados que a lo largo de éste y el siguiente capítulo intentaremos deducir) se siguen cumpliendo; es decir, que la cartera óptima viene dada por el punto de tangencia entre una curva de indiferencia cóncava y la frontera eficiente convexa. La única diferencia estriba en que la medida apropiada del riesgo, cuando se trata con funciones de distribución paretiano estables, no es la desviación típica, sino una medida de dispersión del rendimiento más general.

FAMA, E.F. y MILLER, M.H., op. cit., p. 261-275.

(31) Ver la ecuación (2.11).

(32) La función de distribución normal es una función contínua y, por lo tanto, los clásicos sumatorios que aparecen en el valor esperado de las variables aleatorias discretas son sustituídos por integrales a lo largo de todo el campo real.

(33) FAMA, E.F. y MILLER, M.H., op. cit., p. 259.

(34) Las ecuaciones (2.22) y (2.23) son análogas a las obtenidas en la nota a pie de página 38 del capítulo I.

(35) FAMA, E.F. y MILLER, M.H., op. cit., p. 225.

(36) Las varianzas deben cambiarse por desviaciones típicas si en vez de situarnos en el plano (E,V) lo hacemos en el plano (E,σ).

(37) Los puntos 1 y 2 pueden representar rendimientos y desviaciones típicas tanto de carteras como de títulos individuales.

(38) En la medida que la utilidad esperada en (2.21) depende de c_1, $E(\tilde{R}_p)$ y $\sigma(\tilde{R}_p)$, una curva de indiferencia en el plano (E,σ) solamente se puede dibujar cuando se ha fijado previamente un nivel en la variable c_1. De este modo, diferentes niveles de la variable c_1, darán lugar a diferentes curvas de indiferencia, con lo cual los mapas de curvas de indiferencia se modifican al cambiar c_1.

(39) c_2^3 debe ser igual a $(w_1-c_1)\ (1+E(\tilde{R}_3)+r\,\sigma(\tilde{R}_3)$. Veamos si efectivamente llegamos a dicho resultado suponiendo que $c_2^3 = xc_2^1 + (1-x)\ c_2^2$. Los consumos corrientes del período 2 correspondientes a los puntos 1 y 2, para un c_1 fijo, son:

$$c_2^1 = (w_1-c_1)\ \left[1+E(\tilde{R}_1)+r\,\sigma(\tilde{R}_1)\right]$$
$$c_2^2 = (w_1-c_1)\ \left[1+E(\tilde{R}_2)+r\,\sigma(\tilde{R}_2)\right]$$

si ahora sustituímos las dos expresiones anteriores en:

$$c_2^3 = xc_2^1 + (1-x)c_2^2$$

llegamos a que:

$$c_2^3 = (w_1-c_1)\ \left[1+E(\tilde{R}_3)+r\,\sigma(\tilde{R}_3)\right]$$

como queríamos demostrar.

(40) MARKOWITZ, H.M. (1959), op. cit., p. 140.

(41) Conviene dejar claro que una cartera eficiente en el plano (E, σ) es también eficiente en el plano (E, σ^2), y viceversa, ya que entre ambos planos la única diferencia está en la escala del eje de abscisas. Por lo que tal como indica Sharpe: "Indistintamente se pueden usar ambos criterios; el resultado ha de ser el mismo".
SHARPE, W.F., op. cit., p. 77.

(42) FAMA y MILLER, op. cit., p. 226.

(43) Para aplicar la técnica de los multiplicadores de Lagrange hay que hacer supuestos adicionales respecto a c_1, h_{ip}, y es que en tanto y cuanto esas variables pueden tomar cualquier valor del campo de los números reales, c_1 y h_{ip} pueden tomar valores negativos y los bienes de consumo y los títulos deben ser perfectamente divisibles. Volveremos más adelante a tratar esta cuestión.

(44) A la hora de derivar hay que tener en cuenta que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

CAPITULO III

LA FRONTERA EFICIENTE

3.1. Introducción

En este capítulo nos ocuparemos de la segunda fase, de las tres propuestas por Sharpe (1), para tratar el tema de la selección de cartera, tal como anteriormente habíamos anunciado. Esta segunda fase es eminentemente técnica y consiste en el cálculo de la frontera eficiente a partir de las estimaciones: $E(\tilde{R}_i)$, $\sigma^2(\tilde{R}_i)$, $cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_j)$ de los distintos títulos.

En el capítulo anterior llegamos a obtener cual es la cartera óptima de un inversor individual mediante un sólo paso, de forma directa. Sin embargo, vimos que para ello era necesario hacer explícito el tipo de función de utilidad que se ajustaba a las preferencias del inversor que estábamos tomando en consideración. Por lo que los resultados eran poco operativos, ya que si posteriormente intentábamos hallar la cartera óptima de otro inversor, probablemente nada de lo hecho hasta ese momento serviría para nada, puesto que los gustos y preferencias de este último inversor podrían ser completamente distintos a los del primero.

Un camino para evitar la complejidad y poca operatividad del sistema anterior, y llegar a los mismos resultados, consiste en partir de las estimaciones sobre los rendimientos esperados y la matriz de varianzas-covarianzas de los rendimientos de todos los títulos candidatos a formar parte de una cartera de valores, y no fijar la atención en el conjunto de todas las carteras posibles, sino únicamente en el subconjunto formado por las carteras eficientes ya que, como vimos en el capítulo anterior, todo inversor racional reparte su riqueza entre un cierto nivel de consumo: c_1 y una cartera eficiente.

Por lo tanto, en lo que sigue, nos preocuparemos de encontrar el subconjunto de las carteras eficientes o frontera eficiente de un individuo haciendo abstracción de cuáles son sus preferencias: 1) Respecto al binomio rentabilidad-riesgo, y 2) Respecto al consumo presente frente al consumo futuro o, lo que es lo mismo, respecto al valor de c_1.

Una vez tengamos la frontera eficiente dibujada en el plano (E, σ) (que, como se demostrará más adelante, es una curva convexa (2)), añadiremos las curvas de indiferencia (3) que son crecientes y cóncavas para el inversor con aversión al riesgo, con lo que se tendrá que ahora el problema del inversor consistirá en la elección de aquella cartera eficiente situada lo más hacia arriba y lo más hacia la izquierda posible. Es decir, que la cartera óptima se hallará en el punto de tangencia entre la frontera eficiente y una curva de indiferencia, tal como las expresiones (2.45) y (3.59) lo demuestran y en la Figura 3.1. se dibuja.

Si volvemos un poco la vista atrás, nos daremos cuenta que ahora el problema de la selección de la cartera óptima lo hemos dividido en tres pasos tal como la hace Suarez (4): 1) Determinación de la frontera eficiente, 2) Determina-

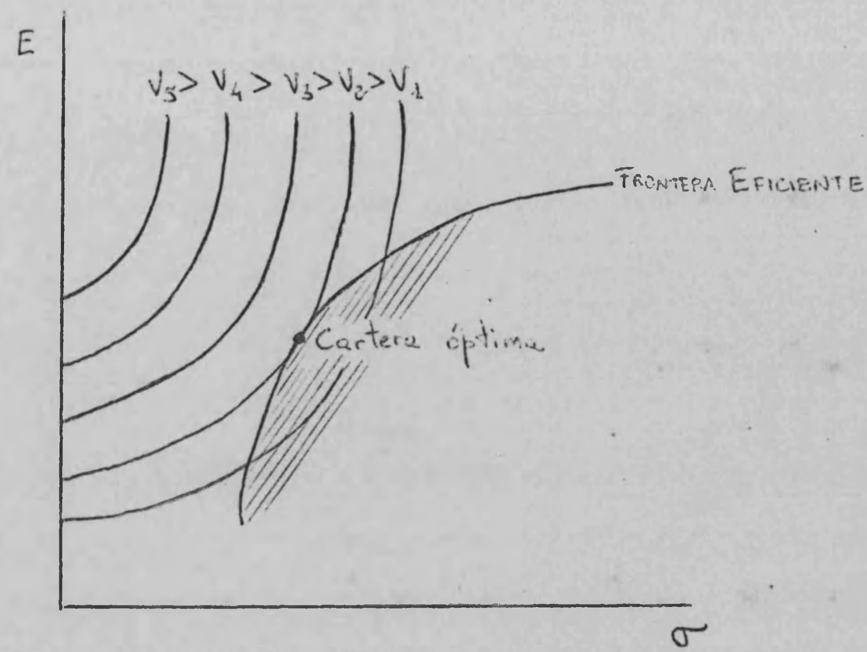


Figura 3.1

ción de las curvas de indiferencia, 3) Determinación de la cartera óptima (5). Esto aunque a primera vista puede considerarse como un paso atrás, al perder la interdependencia de las decisiones de consumo y de inversión, nos va a proporcionar resultados enormemente útiles al poder concentrar nuestra atención en la frontera eficiente de un inversor individual, haciendo abstracción de su función de utilidad. En todo caso, dejar de lado la interdependencia de las decisiones de consumo y de inversión, si tenemos en cuenta que una decisión óptima de consumo-inversión siempre implica la elección de un nivel de consumo c_1 y una cartera eficiente, también resulta válido.

Hay muchas formas de abordar el cálculo de la frontera eficiente. La mayoría de los autores especializados en el tema suelen hacer un tratamiento gráfico, de tipo intuiti vo, estudiando el caso de una cartera compuesta por dos títulos y generalizando, luego, los resultados para el caso de n activos. Sin embargo, nosotros nos hemos inclinado por un tratamiento estrictamente analítico, evitando todo lo posible tener que recurrir a argumentos y razonamientos de tipo gráfico.

3.2. Generación de la Frontera Eficiente

Dado el conjunto de carteras posibles expresado mediante distintos puntos en el plano (E, σ^2), en un mundo de dos parámetros, ya vimos que al inversor racional le interesa concentrar su atención en el subconjunto formado por las carteras eficientes. Esto es, el inversor debe buscar aquellas carteras que a la vez tienen el mínimo riesgo para una rentabilidad dada y la máxima rentabilidad para un riesgo dado.

Para generar la frontera eficiente vamos a proceder de la siguiente forma. La ecuación de una recta en los ejes (σ^2, E) es:

$$\sigma^2 (\tilde{R}_p) = \alpha + \lambda E(\tilde{R}_p) \qquad (3.1)$$

donde α es la ordenada en el origen y λ es la pendiente de la misma.

Si fijamos λ y hacemos variar α, obtendremos un conjunto de rectas paralelas. De modo que para hallar la

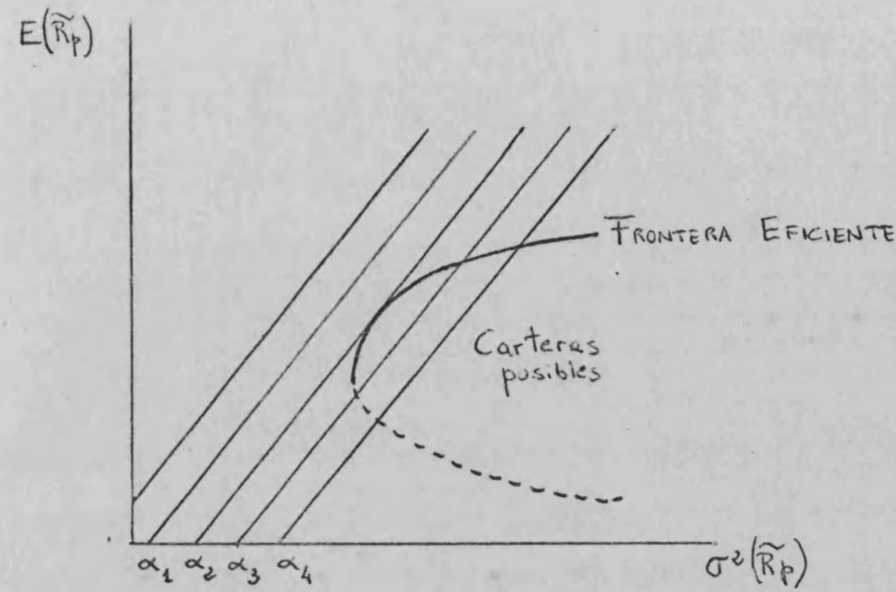


Figura 3.2

cartera eficiente correspondiente a un λ dado, debemos buscar aquella recta, perteneciente a este último conjunto, situada lo más hacia la izquierda posible sin perder el contacto con el conjunto de las carteras posibles (6); es decir, debemos minimizar α respetando la restricción de que la suma de las ponderaciones con que intervienen los distintos títulos sea igual a la unidad. La solución de este mínimo condicionado nos proporcionará la cartera eficiente correspondiente al λ dado (7):

$$\text{Min} \quad \alpha = \sigma^2(\tilde{R}_p) - \lambda E(\tilde{R}_p)$$

$$\text{sujeto a :} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (3.2)$$

Si suponemos que las carteras están compuestas por n títulos arriesgados, sus correspondientes medias y varianzas por (2.12) y (2.13) son:

$$E(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, E(\tilde{R}_i) \qquad (3.3)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad (3.4)$$

con lo cual el problema queda planteado definitivamente en los siguientes términos:

$$\text{Min } \alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \, E(\tilde{R}_i)$$

$$\text{sujeto a : } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (3.5)$$

Supongamos que hacemos variar λ progresivamente desde cero hasta infinito, para un α constante. Haciendo ésto, obtendríamos un haz de rectas tal como el dibujado en la Figura 3.3.

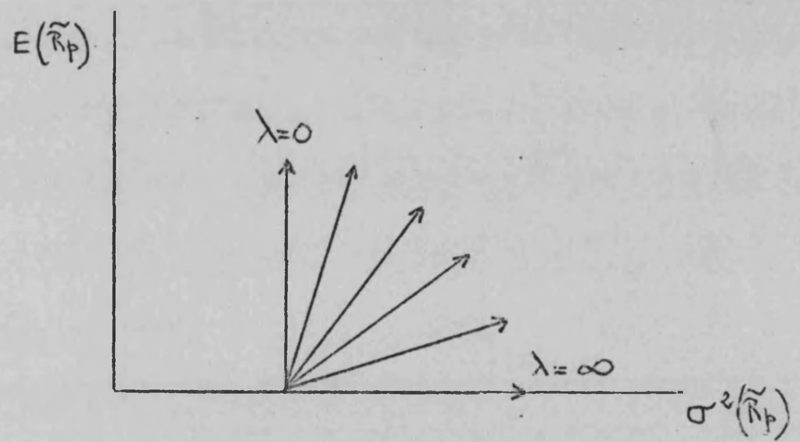


Figura 3.3

Si ahora al mismo tiempo que hacemos variar λ de cero a infinito, resolvemos simultáneamente el problema planteado en (3.5), generaremos la frontera eficiente tal como se observa en la figura siguiente:

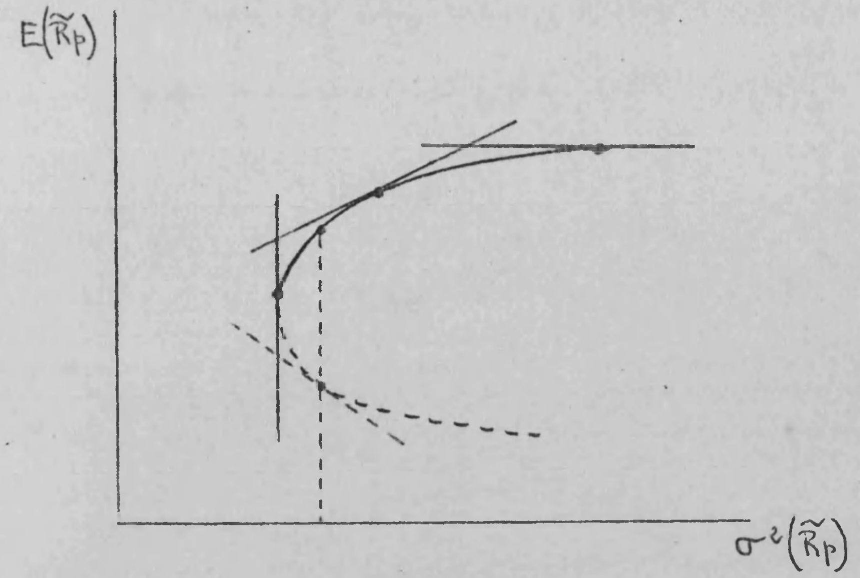


Figura 3.4

Por tanto, al variar λ se obtienen, luego de resolver (3.5), distintas carteras eficientes. A medida que λ crece se obtienen carteras eficientes correspondientes a un mayor nivel de riesgo. Y a la inversa, cuando λ decrece, mediante (3.5) se obtienen las carteras eficientes correspondientes a niveles de riesgo más bajos (8). De la definición de cartera eficiente, se desprende que λ no puede tomar valores negativos, ya que en ese caso estaríamos hallando la cartera de mínima varianza para un λ dado, pero esa cartera de mínima varianza no sería eficiente, puesto que para ese nivel de riesgo existiría una cartera con mayor rendimiento esperado tal como se observa en la figura 3.4. (9).

El problema tal como está planteado en (3.5) requiere para su resolución la aplicación de la programación cuadrática paramétrica, donde λ es el parámetro de la solución. Los algoritmos que nos dan la solución del problema caen fuera del ámbito de este trabajo y nos desvían de los objetivos que perseguimos (10), por lo que vamos a resolver (3.5) aplicando la técnica de los multiplicadores de Lagrange; para ello es necesario hacer antes los siguientes supuestos adicionales: 1) que los títulos arriesgados son completamente divisibles; 2) que las x_i resultantes de aplicar los máximos y mínimos condicionados de Lagrange pueden tomar cualquier valor dentro del campo de los números reales. Asimismo, también es necesario suponer que la matriz de varianzas-covarianzas es no singular con el fin de que el sistema resultante de las condiciones de primer orden de la minimización tenga una solución única y determinada.

Valores de x_i negativos implican posiciones a corto o ventas al descubierto en el título i. Mientras que valores positivos en los x_i suponen una posición a largo. En una posición a corto un inversor pide prestados los títulos a otra persona, comprometiéndose en un plazo determinado a la devolución de los títulos y de todos los dividendos percibidos. Cuando el prestatario recibe los títulos inmediatamente los vende en Bolsa y opera con el dinero que obtiene, y, cuando el plazo está próximo a cumplirse, rescata los títulos en Bolsa, devolviéndolos con sus correspondientes dividendos al prestamista. Cuando no se habla de acciones o títulos arriesgados, sino de activos sin riesgo, lo normal no es hablar de posiciones a largo y a corto, sino de prestar y pedir prestado. En muchas Bolsas las ventas al descubierto no están permitidas y la legislación referente a los Fondos de Inversión suele prohibir que estos tengan posiciones a corto en sus activos financieros (11).

Para nuestros propósitos, el permitir que las x_i tomen valores negativos no supone ninguna merma, ya que cuando posteriormente introduzcamos la posibilidad de prestar y pedir prestado libremente a la tasa pura de interés, veremos que las x_i de la solución correspondiente a los títulos arriesgados siempre serán positivas.

Volviendo a (3.5) y aplicando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, tendremos que el inversor deberá:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i E(\tilde{R}_i) - k\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) \qquad (3.6)$$

para todo $\lambda \geqslant 0$.

Las condiciones necesarias se obtienen al derivar parcialmente Z con respecto a las x_i y al multiplicador de Lagrange k (12):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial x_1} &= 2x_1\sigma_{11} + 2x_2\sigma_{12} + \ldots + 2x_n\sigma_{1n} - E(\tilde{R}_1) - k = 0 \\
\frac{\partial Z}{\partial x_2} &= 2x_1\sigma_{21} + 2x_2\sigma_{22} + \ldots + 2x_n\sigma_{2n} - E(\tilde{R}_2) - k = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial Z}{\partial x_n} &= 2x_1\sigma_{n1} + 2x_2\sigma_{n2} + \ldots + 2x_n\sigma_{nn} - E(\tilde{R}_n) - k = 0 \\
\frac{\partial Z}{\partial k} &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1 = 0
\end{aligned}\right\} (3.7)$$

Este sistema de (n+1) ecuaciones con (n+1) incógnitas: x_i (i=1,2,...,n) y k, se puede expresar matricialmente del siguiente modo (13):

$$\left.\begin{array}{l} 2\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E(\tilde{R}_1) \\ E(\tilde{R}_2) \\ \vdots \\ E(\tilde{R}_n) \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (3.8)$$

Llamando: - V, a la matriz de varianzas covarianzas:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & --- & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & --- & \sigma_{2n} \\ \hline \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & --- & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

- X, al vector columna de las x_i:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- X', al transpuesto de X:

$$X' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

- E, al vector columna de los rendimientos esperados:

$$E = \begin{bmatrix} E(\tilde{R}_1) \\ E(\tilde{R}_2) \\ \vdots \\ E(\tilde{R}_n) \end{bmatrix}$$

- $\left[1_n\right]$, al vector columna formado por n unos:

$$\left[1_n\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos expresar (3.6) de la siguiente forma más reducida:

$$\text{Min} \quad Z = X' V X - \lambda X' E - k (X' \left[1_n\right] - 1) \qquad (3.9)$$

y a las condiciones necesarias (3.8):

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = 2 \, VX - \lambda E - k \left[1_n\right] = 0 \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial k} = X' \left[1_n\right] - 1 = 0 \qquad (3.11)$$

3.3. Las x_i como Funciones Lineales de λ.

Tomando las n primeras ecuaciones del sistema de ecuaciones (3.10), para despejar el vector de las n primeras incógnitas del problema, esto es, el vector columna X:

$$V X = \tfrac{1}{2} (\lambda E + k \left[1_n\right]) \qquad (3.12)$$

Premultiplicando ambos miembros por V^{-1} (la inversa de la matriz de varianzas-covarianzas) y dado que la matriz V es no - singular, obtenemos:

$$X = V^{-1} \tfrac{1}{2} (\lambda E + k \left[1_n\right]) \qquad (3.13)$$

Por otra parte, de la última ecuación (3.11) del - sistema de ecuaciones de las condiciones de primer orden y teniendo en cuenta que el valor del vector columna X, hallado - en la expresión anterior (3.13), lo debemos transponer previa mente para llevarlo a dicha ecuación, tenemos que (14):

$$X'\left[1_n\right] = 1$$

$$\frac{1}{2}\left(\lambda E' + k \left[1_n\right]'\right) V^{-1} \left[1_n\right] = 1 \qquad (3.14)$$

o lo que es lo mismo:

$$\lambda E'V^{-1}\left[1_n\right] + k\left[1_n\right]'V^{-1}\left[1_n\right] = 2 \qquad (3.15)$$

En donde:

1) $E'V^{-1}\left[1_n\right]$ es un número que vamos a denotar por la letra minúscula b (15). Como el transpuesto de un número es el mismo número: $\left[1_n\right]'V^{-1}E$ también es igual a b.

2) $\left[1_n\right]'V^{-1}\left[1_n\right]$ es otro número que vamos a describirlo con la letra minúscula c. Por tanto:

$$b = E'V^{-1}\left[1_n\right] = \left[1_n\right]'V^{-1}E \qquad (3.16)$$

$$c = \left[1_n\right]'V^{-1}\left[1_n\right] \qquad (3.17)$$

Llevando (3.16) y (3.17) a (3.15):

$$\lambda b + kc = 2 \qquad (3.18)$$

y despejando el multiplicador de Lagrange k:

$$k = \frac{2 - \lambda b}{c} \qquad (3.19)$$

con lo cual k se queda en función del λ supuesto, ya que b y c son datos del problema al depender únicamente del vector columna de los rendimientos esperados y de la matriz de varianzas-covarianzas de los títulos.

Volviendo a (3.13), vemos que el vector columna de las proporciones a invertir en cada título es función de λ y k, y como acabamos de ver que k es función de λ, por lo que se puede poner X en función de λ únicamente:

$$X = V^{-1} \tfrac{1}{2} (\lambda E + k[1_n]) = V^{-1} \tfrac{1}{2} (\lambda E + (\frac{2-\lambda b}{c})[1_n]) =$$

$$= V^{-1} (\tfrac{1}{2}\lambda E + \frac{1}{c}[1_n] - \lambda \frac{b}{2c}[1_n]) =$$

$$= V^{-1} (\frac{1}{c}[1_n] + \lambda (\frac{E}{2} - \frac{b}{2c}[1_n])) =$$

$$= V^{-1} (\frac{1}{c}[1_n] + \lambda (\frac{Ec - b[1_n]}{2c})) \qquad (3.20)$$

Observando (3.20) vemos como cada x_i del vector columna X puede escribirse como:

$$x_i = a_i + b_i\lambda \qquad (3.21)$$

en donde a_i y b_i sólo dependen en última instancia de E y de V. Por lo tanto, hemos logrado expresar las x_i como funciones lineales del λ supuesto inicialmente. De este modo, una vez que se hallan los a_i y b_i de todos los títulos, se dan distintos valores a λ entre cero e infinito y se obtienen tantos puntos de la frontera eficiente como se deseen sustituyendo los X encontrados en (3.20) en las expresiones del rendimiento esperado y de la varianza de la cartera:

$$E(\tilde{R}_p) = X'E \qquad (3.22)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = X'VX \qquad (3.23)$$

3.4. Las x_i como Funciones Lineales de e^*.

A continuación vamos a obtener otra expresión alternativa del valor de las x_i como funciones lineales de un valor dado en el rendimiento esperado (e^*) (16).

Para generar la frontera eficiente existen distintos procedimientos, todos ellos igualmente válidos. En el epígrafe 3.2 de este capítulo, la frontera eficiente se obtenía al resolver (3.5) para valores de λ comprendidos entre cero e infinito. Ahora bien, teniendo en cuenta la primera condición que hemos dado para que una cartera sea eficiente, es decir, que dicha cartera debe tener la mínima varianza para un rendimiento esperado dado (e^*), se puede entonces generar la frontera eficiente resolviendo el siguiente problema para distintos valores posibles de e^* (17).

$$\text{Min} \quad Z' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$\text{condicionado a:} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i E(\tilde{R}_i) = e^* = \text{cte.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{3.24}$$

donde e^* es un valor fijado de antemano del rendimiento esperado de la cartera.

Más adelante, demostraremos que la frontera eficiente en los ejes (E, σ^2) es una parábola, de modo que la resolución de (3.24) nos proporciona la cartera de mínima varianza para un rendimiento esperado dado; pero esta cartera de mínima varianza no será siempre necesariamente eficiente, ya que para que una cartera sea eficiente no sólo debe cumplir la primera condición en que se basa el planteamiento del problema (3.24), sino también la segunda condición, es decir, que la cartera debe tener el máximo rendimiento esperado para una varianza dada.

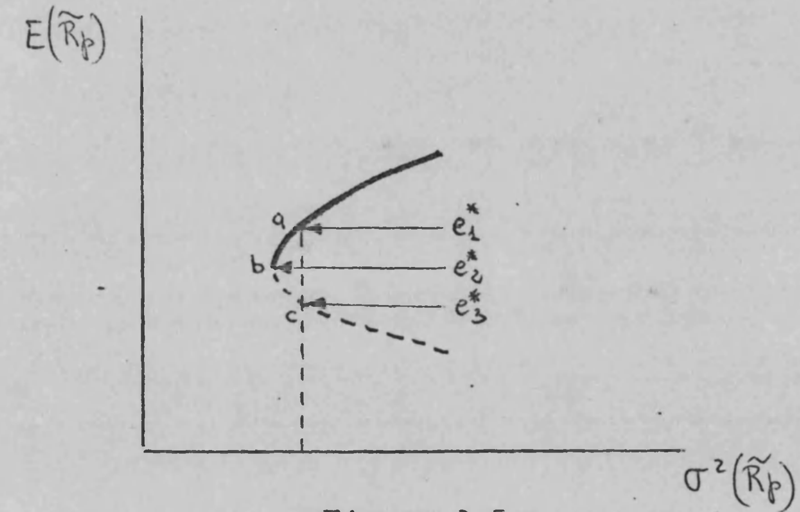


Figura 3.5

Por tanto, "el objetivo de la diversificación ... no es reducir la dispersión per se, sino obtener la mejor combinación del valor esperado del rendimiento y la desviación típica" (18). De modo que una cartera (por ejemplo la c de la figura 3.5) situada sobre la parábola, pero por debajo de la cartera b, no es eficiente puesto que para su nivel de riesgo existe una cartera a que tiene un rendimiento esperado mayor. El mérito de la diversificación de Markowitz, tal como se observa en la figura 3.5, es que logra un menor riesgo sin sacrificar la rentabilidad (19).

Aplicando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, (3.24) queda como sigue:

$$\text{Min } Z' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i E(\tilde{R}_i) - e^* \right) - k \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right) \qquad (3.25)$$

o lo que es lo mismo, expresado en forma matricial:

$$\text{Min } Z' = X'VX - \lambda (X'E - e^*) - k (X' [1_n] - 1) \qquad (3.26)$$

La condición necesaria para la existencia de mínimo se obtiene derivando (3.26) con respecto a X, λ y k, esto - es:

$$\frac{\partial Z'}{\partial X} = 2\, VX - \lambda E - k [1_n] = 0 \qquad (3.27)$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial \lambda} = X'E - e^* = 0 \qquad (3.28)$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial k} = X' [1_n] - 1 = 0 \qquad (3.29)$$

Despejando X en la expresión (3.27), se obtiene de nuevo:

$$X = \frac{1}{2} V^{-1} (\lambda E + k [1_n]) \qquad (3.30)$$

y sustituyendo este valor de X en (3.28):

$$X'E = e^*$$

$$\frac{1}{2} (\lambda E' + k [1_n]') V^{-1} E = e^*$$

$$\lambda E' V^{-1} E + k [1_n]' V^{-1} E = 2e^* \qquad (3.31)$$

Al igual que en el epígrafe anterior, llamamos b al escalar $[1_n]' V^{-1} E$. Y si observamos (3.31), veremos que -

$E'\,V^{-1}\,E$ es también un número que denotamos por a:

$$a = E'\,V^{-1}\,E \tag{3.32}$$

De modo que (3.31) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\lambda a + k b = 2e^{*} \tag{3.33}$$

que junto con:

$$\lambda b + k c = 2 \tag{3.34}$$

que obtendríamos, al igual que en (3.18), al llevar el valor de X a (3.29), forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: λ y k, que expresado matricialmente queda:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{*} \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Para resolverlo aplicamos Cramer:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{\begin{vmatrix} 2e^{*} & b \\ 2 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}} = \frac{2e^{*}c - 2b}{ac - b^2} \\[2ex] k &= \frac{\begin{vmatrix} a & 2e^{*} \\ b & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}} = \frac{2a - 2e^{*}b}{ac - b^2} \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

En consecuencia, tanto λ como k se pueden obtener de esas sencillas operaciones con los datos: a, b, c, e^{*}.

Las x_i de (3.30) están expresadas en función de λ y k, así que si tenemos en cuenta sus valores calculados en (3.36), obtenemos (20):

$$X = V^{-1} \frac{1}{2} (\lambda E + k [1_n])$$

$$X = V^{-1} \frac{1}{2} (\frac{2e^* c - 2b}{ac - b^2} E + \frac{2a - 2e^* b}{ac - b^2} [1_n])$$

$$X = V^{-1} (\frac{e^* c - b}{ac - b^2} E + \frac{a - e^* b}{ac - b^2} [1_n])$$

$$X = V^{-1} (e^* (\frac{c}{ac-b^2} E - \frac{b}{ac-b^2} [1_n]) - (\frac{b}{ac-b^2} E - \frac{a}{ac-b^2} [1_n])) \tag{3.37}$$

Si observamos (3.37), nos daremos cuenta que cada x_i del vector columna X es de la forma:

$$x_i = \alpha_i + \beta_i e^* \tag{3.38}$$

Es decir, que las x_i quedan expresadas como funciones lineales de e^* (e^* era el rendimiento esperado para el que queríamos encontrar la cartera eficiente correspondiente). Así, para distintos valores de e^*, aplicando (3.37) iremos encontrando los distintos X con las cuales poder calcular las varianzas de las carteras eficientes correspondientes:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = X' V X \tag{3.39}$$

3.5. Ecuación y Pendiente de la Frontera Eficiente (21)

A continuación vamos a deducir, en primer lugar, la ecuación de la frontera eficiente comprobando que es una curva convexa tanto en los ejes (E, σ^2), como si nos situamos en los ejes (E, σ). Para demostrarlo, es necesario poner la varianza, o la desviación típica, de una cartera eficiente en función del rendimiento esperado de dicha cartera.

La varianza de una cartera en general es:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = X' V X \qquad (3.40)$$

y la varianza de una cartera eficiente se obtiene al sustituir el vector columna X por los valores de las x_i correspondientes a la solución óptima. Es decir, al sustituir X por el valor encontrado en (3.30):

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = X'VX = \frac{1}{2} (\lambda E' + k [1_n]') V^{-1} V V^{-1} \frac{1}{2} (\lambda E + k [1_n]) =$$

$$= \frac{1}{4} \lambda^2 E' V^{-1} E + \frac{1}{4} \lambda k E' V^{-1} [1_n] +$$

$$+ \frac{1}{4} \lambda k [1_n]' V^{-1} E + \frac{1}{4} k^2 [1_n]' V^{-1} [1_n] \qquad (3.41)$$

y teniendo en cuenta (3.16), (3.17) y (3.32):

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \frac{1}{4} \lambda^2 a + \frac{1}{4} \lambda k b + \frac{1}{4} \lambda k b + \frac{1}{4} k^2 c = \frac{1}{4} (\lambda^2 a + 2 \lambda k b + k^2 c) \qquad (3.42)$$

Sustituyendo los valores de λ y k, hallados en (3.36), en la expresión de la varianza última:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{2e^* c - 2b}{ac - b^2}\right)^2 a + 2\left(\frac{2e^* c - 2b}{ac - b^2}\right)\left(\frac{2a - 2e^* b}{ac - b^2}\right) b + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2a - 2e^* b}{ac - b^2}\right)^2 c\right]$$

haciendo operaciones:

$$(ac - b^2)\ \sigma^2(\tilde{R}_p) = \left[ac^2 e^{*2} - 2\ abc\ e^* + ab^2 + \right.$$
$$+ 2\ abc\ e^* - 2b^2 c\ e^{*2} - 2\ ab^2 + 2b^3\ e^* +$$
$$\left. + a^2 c - 2\,abc\,e^* + b^2\,c\,e^*\right] / (ac - b^2)$$

simplificando,

$$(ac - b^2)\ \sigma^2(\tilde{R}_p) = \frac{c\,(ac - b^2)\,e^{*2} - 2b\,(ac - b^2)\,e^* + a\,(ac - b^2)}{ac - b^2}$$

se obtiene por último:

$$(ac - b^2)\ \sigma^2(\tilde{R}_p) = c\,e^{*2} - 2\,b\,e^* + a \qquad (3.43)$$

Recordemos que e^* eran los distintos valores que íbamos suponiendo tomaba $E(\tilde{R}_p)$ y para los cuales hallábamos - las correspondientes carteras eficientes, por lo que podemos poner (3.43) del siguiente modo:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \left[c\,(E(\tilde{R}_p))^2 - 2\,b\,E(\tilde{R}_p) + a\right] / (ac - b^2) \qquad (3.44)$$

que constituye la ecuación de una parábola con el eje horizontal en el plano (22) (σ^2, E) con un punto de mínimo relativo único, estrictamente cóncava hacia el eje de ordenadas y de la que únicamente la parte con trazo más grueso constituye la frontera eficiente (23):

$$\frac{d\,\sigma^2(\tilde{R}_p)}{d\,E(\tilde{R}_p)} = \frac{2\,c\,E(\tilde{R}_p) - 2\,b}{ac - b^2} = 0, \text{ de donde}$$

$$E(\tilde{R}_p) = \frac{b}{c} \tag{3.45}$$

$$\frac{d^2\,\sigma^2(\tilde{R}_p)}{d\,E(\tilde{R}_p)^2} = \frac{2\,c}{ac - b^2} > 0 \quad (24) \tag{3.46}$$

(En la figura 3.6 se ha dibujado la correspondiente parábola con un mínimo relativo en el punto: $E(\tilde{R}_p) = b/c$).

La misma ecuación (3.44) en los ejes (σ,E) constituye una hipérbola con centro en el eje de abscisas a la altura de $E(\tilde{R}_p) = b/c$:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = \sqrt{\frac{c\,(E(\tilde{R}_p))^2 - 2\,b\,E(\tilde{R}_p) + a}{ac - b^2}} \tag{3.47}$$

con un punto de mínimo relativo único y estrictamente cóncava. Por supuesto que la rama en que $\sigma(\tilde{R}_p)$ es negativa no tiene significado económico y, de la rama en que $\sigma(\tilde{R}_p)$ es positiva, únicamente es válida la parte de la frontera eficiente en que $\lambda \geqslant 0$, tal como se observa en las figuras 3.8 y 3.9:

$$\frac{d\,\sigma(\tilde{R}_p)}{d\,E(\tilde{R}_p)} = \frac{c\,E(\tilde{R}_p) - b}{(ac - b^2)\,\sigma(\tilde{R}_p)} = 0 \text{ , de donde}$$

$$E(\tilde{R}_p) = \frac{b}{c} \tag{3.48}$$

$$\frac{d^2\,\sigma(\tilde{R}_p)}{d\,E(\tilde{R}_p)^2} = \frac{1}{(ac - b^2)\;\sigma^3(\tilde{R}_p)} > 0 \tag{3.49}$$

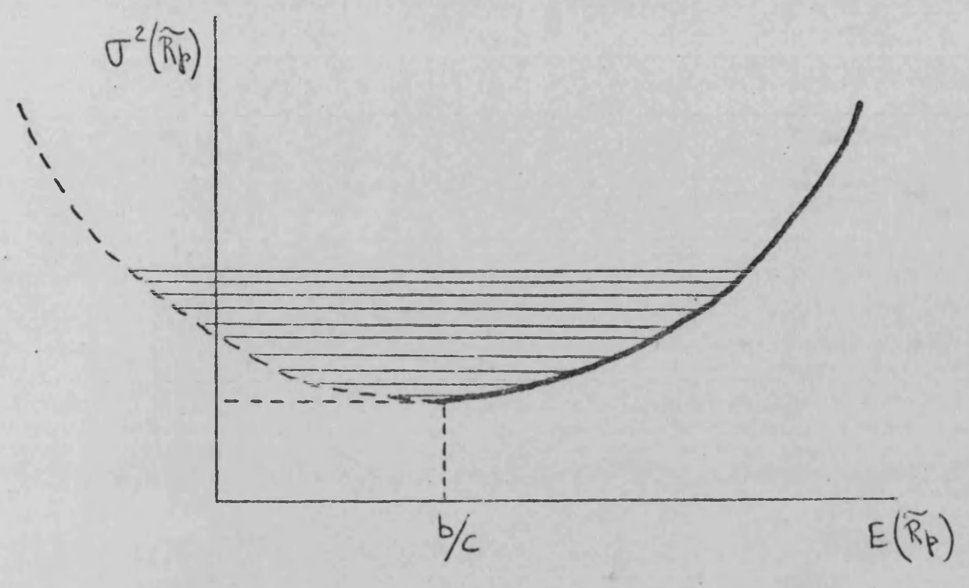


Figura 3.6

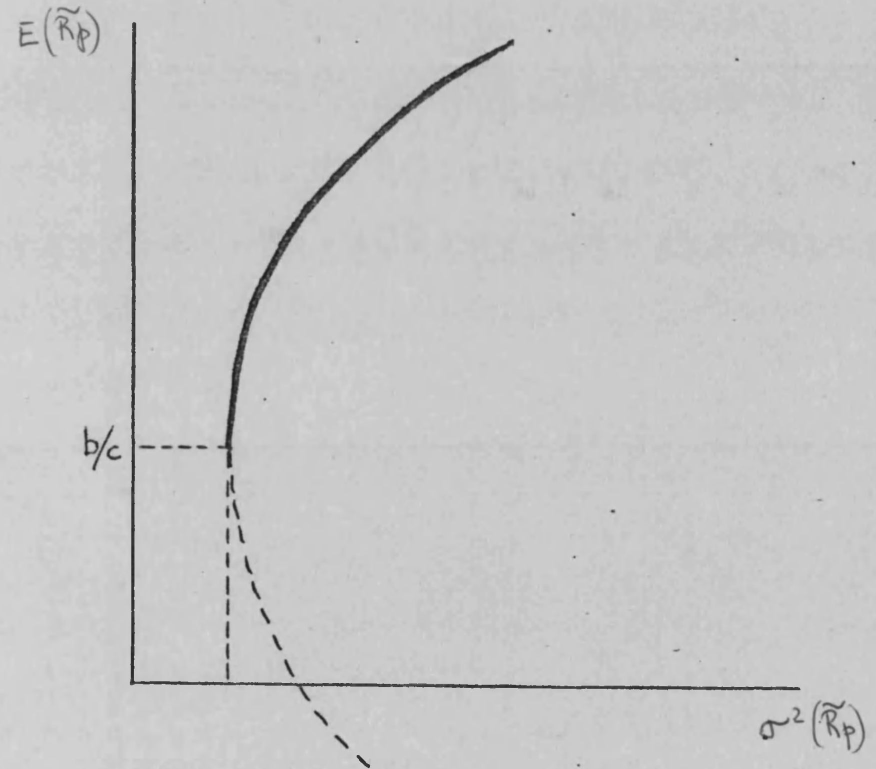


Figura 3.7

Por tanto, hemos llegado a que la frontera eficiente en los ejes (σ^2, E) ó (σ, E) es cóncava hacia el eje de ordenadas o, lo que es lo mismo, convexa cuando se intercambian los ejes, es decir, en los planos (E, σ^2) ó (E, σ).

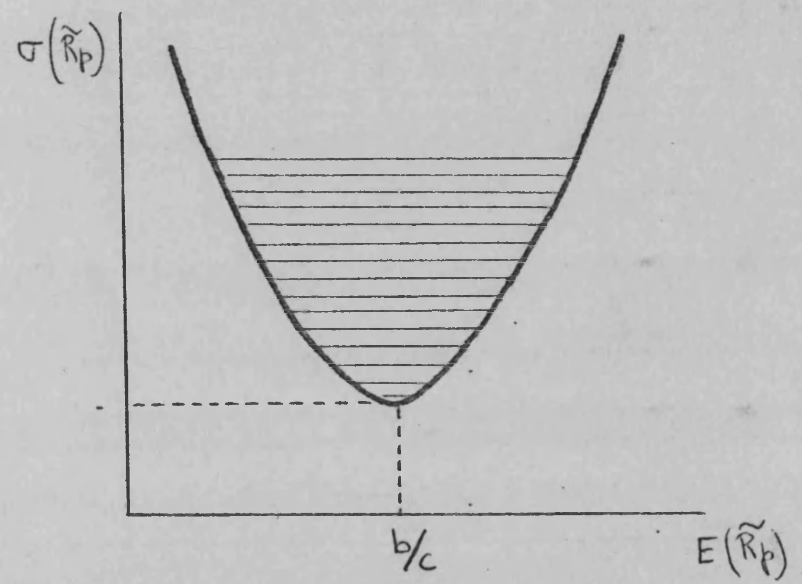


Figura 3.8

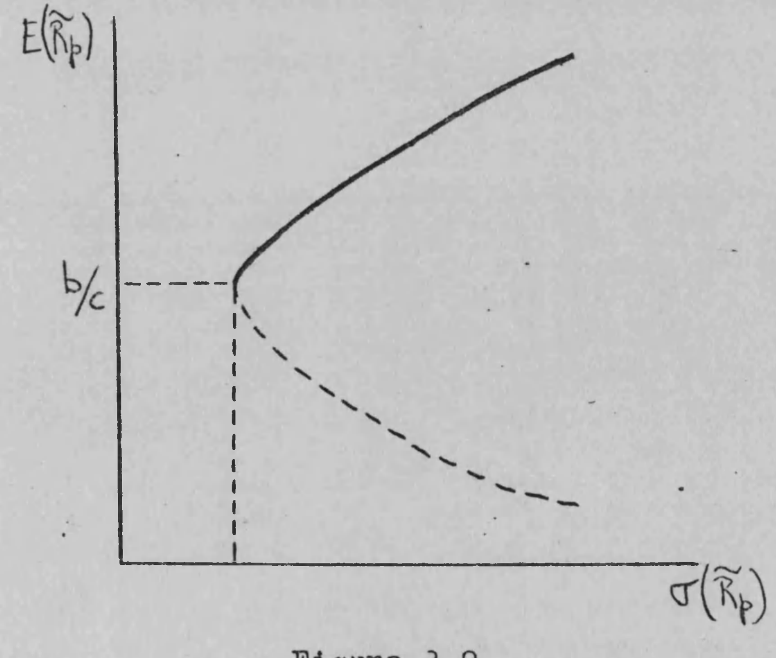


Figura 3.9.

Nuestro próximo objetivo es hallar la pendiente de la frontera eficiente en el plano (E, σ^2) y en el plano - (E, σ). Diferenciando en (3.44) y considerando a la varianza como una de las variables, es decir, situándonos en el plano (E, σ^2):

$$d\,\sigma^2(\tilde{R}_p) = \frac{2\,c\,E(\tilde{R}_p)\,.\,d\,E(\tilde{R}_p) - 2b\,.\,d\,E(\tilde{R}_p)}{ac - b^2}$$

$$d\sigma^2(\tilde{R}_p) = \frac{2\,c\,E(\tilde{R}_p) - 2b}{ac - b^2}\,d\,E(\tilde{R}_p) \tag{3.50}$$

como de (3.36):

$$\lambda = \frac{2\,c\,E(\tilde{R}_p) - 2b}{ac - b^2} \tag{3.51}$$

entonces:

$$\frac{d\sigma^2(\tilde{R}_p)}{d\,E(\tilde{R}_p)} = \lambda \quad \text{ó, también,} \quad \frac{d\,E(\tilde{R}_p)}{d\sigma^2(\tilde{R}_p)} = \frac{1}{\lambda} \tag{3.52}$$

Por lo que la pendiente de la frontera eficiente en un punto de la misma (en una cartera eficiente en particular) es el recíproco del multiplicador de Lagrange λ de esa cartera (25).

Para encontrar la pendiente de la tangente a la frontera eficiente, pero situándonos en los ejes (E, σ), debemos - diferenciar en (3.44), observando que ahora la variable del - eje de abscisas es $\sigma(\tilde{R}_p)$:

$$2\,\sigma(\tilde{R}_p)\,.\,d\,\sigma(\tilde{R}_p) = \left(\frac{2\,c\,E(\tilde{R}_p) - 2b}{ac - b^2}\right) d\,E(\tilde{R}_p) \tag{3.53}$$

y por (3.36):

$$\frac{d\,\sigma(\tilde{R}_p)}{d\,E(\tilde{R}_p)} = \frac{\lambda}{2\,\sigma(\tilde{R}_p)}$$ ó, también:

$$\frac{d\,E(\tilde{R}_p)}{d\,\sigma(\tilde{R}_p)} = \frac{2\,\sigma(\tilde{R}_p)}{\lambda} \qquad (3.54)$$

3.6. Relación entre la Rentabilidad y el Riesgo de los Títulos de una Cartera Eficiente

En el capítulo anterior vimos que las medidas adecuadas de la rentabilidad y del riesgo de una cartera, si nos situamos en el plano (E,σ), eran $E(\tilde{R}_p)$ y $\sigma(\tilde{R}_p)$ respectivamente. Asimismo, en dicho plano, la rentabilidad y el riesgo de un título que formaba parte de una cartera venían dados por $E(\tilde{R}_i)$ y $cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)/\sigma(\tilde{R}_p)$.

Al hablar de la ecuación de la frontera eficiente, hemos comprobado que la relación que existe entre $E(\tilde{R}_p)$ y $\sigma(\tilde{R}_p)$ en las carteras eficientes es la curva convexa dada por (3.47).

En este epígrafe estamos interesados en hallar la relación que existe entre la rentabilidad y el riesgo de los valores que componen una cartera eficiente (26). Es decir, la relación que se produce entre $E(\tilde{R}_i)$ y $cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)/\sigma(\tilde{R}_p)$.

Antes de entrar en el desarrollo de dicha relación, conviene recordar que, de acuerdo con la nota (26) del capítulo II, se deduce que:

$$\frac{\partial \sigma^2(\tilde{R}_p)}{\partial x_i} = 2\sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{ij} = 2\ \mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) \qquad (3.55)$$

Por lo que las n primeras ecuaciones del sistema (3.7) se pueden expresar del siguiente modo:

$$2\ \mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) - \lambda\ E(\tilde{R}_i) - k = 0 \qquad (3.56)$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

Particularizando (3.56) para los títulos i y j:

$$\left.\begin{array}{l} 2\ \mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) - \lambda\ E(\tilde{R}_i) - k = 0 \\ 2\ \mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_p) - \lambda\ E(\tilde{R}_j) - k = 0 \end{array}\right\} \qquad (3.57)$$

Despejando k en ambas ecuaciones y operando:

$$\frac{E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_j)}{\mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_p)} = \frac{2}{\lambda} \qquad (3.58)$$

De (3.54) y llamando S_p a la pendiente de la frontera eficiente en los ejes (E,σ):

$$\frac{2}{\lambda} = \frac{\dfrac{d\ E(\tilde{R}_p)}{d\ \sigma(\tilde{R}_p)}}{\sigma(\tilde{R}_p)} = \frac{S_p}{\sigma(\tilde{R}_p)}$$

por lo que ahora podemos poner (3.58) del siguiente modo (27):

$$\frac{E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_j)}{\dfrac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_p)} - \dfrac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_p)}} = S_p \qquad (3.59)$$

Si tenemos en cuenta que las medidas apropiadas de la rentabilidad y del riesgo de los títulos que componen una cartera en los ejes (E,σ), como acabamos de recordar, son $E(\tilde{R}_i)$ y $\text{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)/\sigma(\tilde{R}_p)$, entonces se comprenderá que (3.59) expresa cual es la relación que existe entre la pendiente a la frontera eficiente en un punto y el rendimiento y el riesgo de cualquier par de títulos que integren la cartera eficiente definida por ese punto.

Para profundizar en la relación que existe entre el riesgo y el rendimiento de los títulos que integran una cartera eficiente es conveniente expresar (3.59) de la siguiente manera:

$$E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_j) = \frac{S_p}{\sigma(\tilde{R}_p)} \left(\text{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) - \text{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_p)\right) \quad (3.60)$$

Multiplicando ambos miembros de (3.60) por x_j y sumando para todo j de 1 a n:

$$E(\tilde{R}_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j E(\tilde{R}_j) =$$

$$= \frac{S_p}{\sigma(\tilde{R}_p)} \left(\text{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j \, \text{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_p)\right)$$

$$E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_p) = \frac{S_p}{\sigma(\tilde{R}_p)} \left[\text{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) - \sigma^2(\tilde{R}_p)\right] \quad (3.61)$$

y despejando $E(\tilde{R}_i)$:

$$E(\tilde{R}_i) = \left[E(\tilde{R}_p) - S_p\sigma(\tilde{R}_p)\right] + S_p\frac{\text{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_p)} \quad (3.62)$$

por lo que hemos llegado a que existe una relación lineal entre el rendimiento y el riesgo de un título dentro de una cartera eficiente:

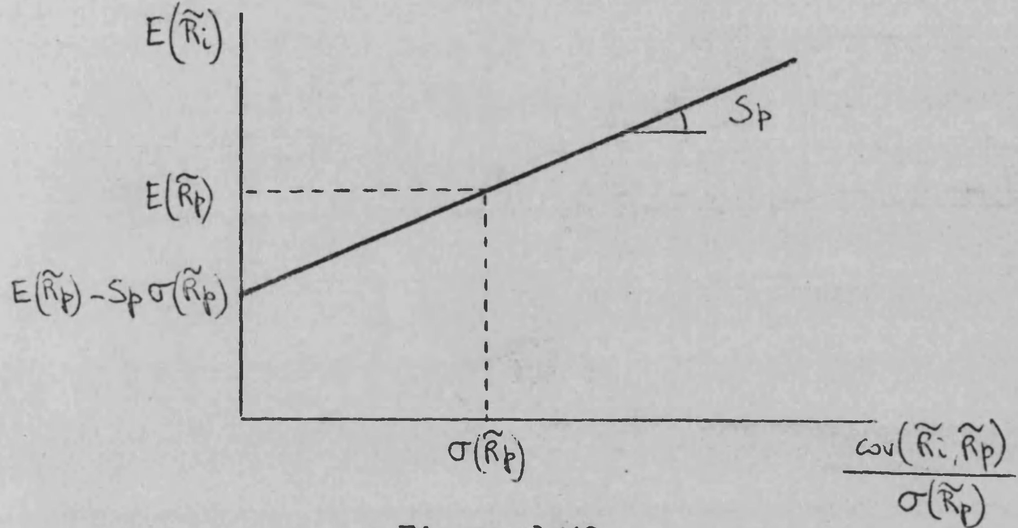


Figura 3.10

Por tanto, la relación entre el rendimiento y el riesgo de un título dentro de una cartera eficiente es lineal mientras que la relación entre el rendimiento y riesgo de las carteras eficientes no es lineal, sino que viene dada por una curva creciente y convexa tal como demostramos en (3.47).

Por último, conviene tener presente que esa relación lineal entre el rendimiento y el riesgo de un título será diferente, es decir, tendrá una ordenada en el origen y una pendiente diferente para las distintas carteras eficientes, tal como se desprende de la observación de la ecuación (3.62).

3.7. Introducción del Título Libre de Riesgo

En este epígrafe vamos a añadir un título o activo libre de riesgo a los n títulos arriesgados tomados en consideración hasta ahora y veremos "que la existencia de tal activo tiene considerables implicaciones para la teoría de la selección de cartera" (28), ya que en este caso la frontera eficiente se vuelve lineal.

Si no se supone la existencia del fenómeno inflacionario, es fácil imaginar un título libre de riesgo. Así, por ejemplo, una emisión de deuda pública cuyo plazo de amortización coincida con el horizonte temporal de planificación del inversor constituye un activo libre de riesgo, ya que con el 100% de probabilidad el inversor recibirá un rendimiento esperado por peseta invertida igual al tipo de interés de la emisión. Igualmente, la colocación de dinero en un banco a un plazo fijo igual al período arbitrario de tenencia o conservación de la cartera que el individuo se fije, constituye un activo libre de riesgo siempre, claro está, que no se tenga en cuenta la depreciación monetaria que se produce como consecuencia de la omnipresente inflación (29).

En el epígrafe 2.4 del capítulo anterior vimos como las medidas de la rentabilidad y del riesgo de un título i, dentro de una cartera determinada p cuando nos situábamos en los ejes (E,σ), eran: $E(\tilde{R}_i)$ y $cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)/\sigma(\tilde{R}_p)$.

Por tanto, afirmar que un título está libre de riesgo es afirmar que:

$$\frac{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_p)} = 0 \qquad (3.63)$$

o equivalentemente que:

$$cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{ij} = 0 \qquad (3.64)$$

Es decir, que sea cual sea la cartera p (y en particular también, cuando todos los x_j son positivos), los σ_{ij}, para todo j desde 1 hasta n, deben ser nulos o, lo que es lo mismo, la varianza y las covarianzas del título i con el resto de los títulos del mercado deben ser nulas.

Vamos a utilizar el subíndice n+1 para el título libre de riesgo, reservando los subíndices i=1,2,...,n para los n títulos arriesgados. Como viene siendo costumbre en la literatura financiera, llamaremos R_f al rendimiento del título sin riesgo (30):

$$E(R_{n+1}) = R_f \qquad (3.65)$$

y como ya hemos dicho, la varianza y covarianza del título libre de riesgo con el resto de los títulos del mercado es nula (31):

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_{n+1,j} = 0 & j=1,2,\dots,n \\ \sigma_{i,n+1} = 0 & i=1,2,\dots,n \end{array}\right\} \qquad (2.66)$$

Situémonos en los ejes (E,σ) y dibujemos la frontera eficiente creciente y convexa que encontramos en el epígrafe 3.5. A continuación añadimos el punto que representa al activo libre de riesgo en dichos ejes:

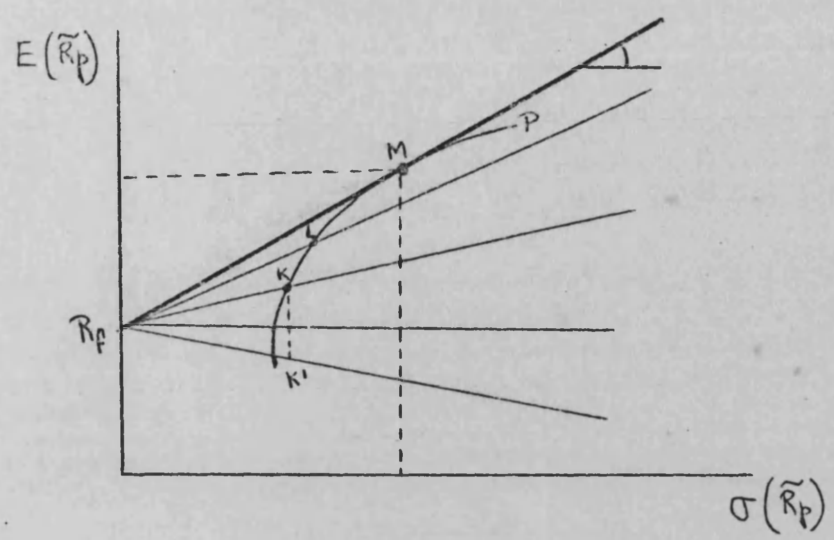


Figura 3.11

Sea K una cartera de la frontera eficiente y, por tanto, eficiente con un rendimiento $E(\tilde{R}_K)$ y un riesgo $\sigma(\tilde{R}_K)$. Si ahora formamos una cartera compuesta por la proporción x del título libre de riesgo y la proporción (1-x) de la cartera eficiente, el rendimiento resultante de la nueva cartera será:

$$\tilde{R}_p = x\, R_f + (1-x)\, \tilde{R}_K \tag{3.67}$$

Tomando esperanzas en (3.67):

$$E(\tilde{R}_p) = xR_f + (1-x)\, E(\tilde{R}_K) \tag{3.68}$$

Y tomando ahora varianzas en (3.67):

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = (1-x)^2\, \sigma^2(\tilde{R}_K)$$

Sacando raíz cuadrada en la última expresión:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = (1-x)\, \sigma(\tilde{R}_K) \tag{3.69}$$

Despejando la x en (3.68) y llevándola a (3.69):

$$x = \frac{E(\tilde{R}_p) - E(\tilde{R}_K)}{R_f - E(\tilde{R}_K)}$$

$\sigma(\tilde{R}_p) = (1-x)\ \sigma(\tilde{R}_K)$ ó también:

$$\frac{\sigma(\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_K)} = (1-x) = 1 - \frac{E(\tilde{R}_p) - E(\tilde{R}_K)}{R_f - E(\tilde{R}_K)}$$

$$\frac{\sigma(\tilde{R}_p)}{\sigma(\tilde{R}_K)} = \frac{R_f - E(\tilde{R}_p)}{R_f - E(\tilde{R}_K)} = \frac{E(\tilde{R}_p) - R_f}{E(\tilde{R}_K) - R_f}$$

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \frac{(E(\tilde{R}_K) - R_f)}{\sigma(\tilde{R}_K)}\ \sigma(\tilde{R}_p) \qquad (3.70)$$

que es una línea recta con origen en el eje de ordenadas en el punto R_f y con una pendiente $(E(\tilde{R}_K) - R_f) / \sigma(\tilde{R}_K)$, ó lo que es lo mismo, la recta que va del punto R_f al punto K.

- Si x = 1, el inversor coloca todos sus fondos (32) en el título libre de riesgo y el rendimiento por peseta invertida es R_f, por lo que se sitúa en el punto R_f de la figura 3.11.

- Si x = 0, entonces (1-x) es igual a la unidad y el individuo se situa en el punto K, invirtiendo todos sus recursos en la cartera eficiente K.

- Si $0 < x < 1$, nuestro inversor coloca parte de su capital en el título libre de riesgo y el resto en la cartera arriesgada K, situándose en algún punto intermedio del segmento (R_f, K).

- Si $x < 0$, entonces el individuo pide prestado a la tasa R_f, invirtiendo la totalidad de la cantidad pedida a préstamo y su propio capital en la cartera arriesgada K, situándose en algún punto, a la derecha de K, de la recta que pasa por los puntos R_f y K.

- Si $(1-x)<0$, el individuo toma una posición a corto en la cartera K e invierte todos sus fondos provenientes de las ventas al descubierto, de los títulos de la cartera K, y su capital propio en el título libre de riesgo. Si así ocurre, la expresión (3.69) hay que modificarla ya que la desviación típica por definición no puede ser negativa:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = |1-x| \; \sigma(\tilde{R}_K) = (x-1)\,\sigma(\tilde{R}_K) \qquad (3.71)$$

Operando como antes con (3.68) y (3.71), se llega a que:

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \frac{R_f - E(\tilde{R}_K)}{\sigma(\tilde{R}_K)}\,\sigma(\tilde{R}_p) \qquad (3.72)$$

que es la recta que pasa por los puntos R_f y K' en la figura 3.11, y que tiene pendiente negativa siempre que $R_f<E(\tilde{R}_K)$. Como se observa en la figura 3.11 todas las carteras situadas en la recta (R_f, K') caen por debajo de las carteras que se encuentran en la recta (R_f,K), esto es, las carteras de la recta (R_f,K), para una misma desviación típica, tienen un rendimiento superior y, por lo tanto, deben desecharse como ineficientes las carteras que proporciona la recta (R_f,K').

Por tanto, la nueva frontera eficiente en el caso de que se pueda prestar y pedir prestado a la tasa R_f sin limitación y el inversor forme su cartera con una combinación -

del título sin riesgo R_f y la cartera arriesgada K es: R_fKP.

Si en vez de la cartera eficiente K se invierte en el título libre de riesgo y la cartera eficiente L, la nueva frontera eficiente sería R_fLP, que al estar por encima de R_fKP la convertiría en ineficiente, y así sucesivamente, el haz de rectas que sale de R_f e intersecta a la frontera eficiente de los títulos arriesgados, iría proporcionando nuevas fronteras eficientes a medida que se incrementa la pendiente de las mismas, hasta que al formar carteras con el punto R_f y el punto M, la frontera eficiente se convierte por completo en una línea recta que sería la frontera eficiente definitiva, en el caso de que a los n títulos arriesgados añadiésemos el título libre de riesgo.

3.8. El Tema de la Separación

En el epígrafe anterior hemos visto qué se entiende por un título libre de riesgo, y, también, hemos ofrecido una argumentación en términos gráficos de la frontera eficiente en la nueva situación. El propósito de este epígrafe, y del siguiente, es llegar analíticamente a la ecuación de la frontera eficiente cuando se introduce el título libre de riesgo (33).

Si a los n títulos arriesgados añadimos el título -

sin riesgo y le asignamos el subíndice (n+1), debemos entonces ampliar la matriz de varianzas-covarianzas y el vector columna de los rendimientos esperados. Llamaremos:

$$\left[\frac{E}{R_f}\right] = \begin{bmatrix} E(\tilde{R}_1) \\ E(\tilde{R}_2) \\ \vdots \\ E(\tilde{R}_n) \\ R_f \end{bmatrix} \qquad V_A = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \dots & \sigma_{1n} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \dots & \sigma_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} \dots & \sigma_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\frac{X}{x_{n+1}}\right] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

(3.73)

Teniendo en cuenta estas últimas definiciones, la esperanza matemática y la varianza de la cartera que contiene n títulos arriesgados y un título libre de riesgo es:

$$E(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i\, E(\tilde{R}_i) = \left[X' \middle| x_{n+1}\right] \left[\frac{E}{R_f}\right] = X'E + x_{n+1} R_f \tag{3.74}$$

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x_i x_j \sigma_{ij} = \left[X' \middle| x_{n+1}\right] V_A \left[\frac{X}{x_{n+1}}\right] \tag{3.75}$$

Como la varianza y las covarianzas del título n+1 con el resto de los títulos son nulas, la ecuación (3.75) se puede poner del siguiente modo:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = X' V X \tag{3.76}$$

En la nueva situación, el problema de encontrar la cartera eficiente para un λ dado, tiene una expresión similar a la (3.5), pero ampliando los límites de les sumatorios de forma que recojan al título libre de riesgo:

$$\text{Min } W = \sigma^2(\tilde{R}_p) - \lambda E(\tilde{R}_p)$$

$$\text{sujeto a: } \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \qquad (3.77)$$

donde ahora $E(\tilde{R}_p)$ viene dada por (3.74) y $\sigma^2(\tilde{R}_p)$ por (3.76) Aplicando la técnica de Lagrange y expresándolo en forma matricial queda:

$$\text{Min } W = X'VX - \lambda \left[X' \middle| x_{n+1}\right] \left[\frac{E}{R_f}\right] - k \left(\left[X' \middle| x_{n+1}\right] \left[1_{n+1}\right] - 1\right) \qquad (3.78)$$

derivando e igualando a cero, se obtienen las condiciones necesarias de mínimo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial X} &= 2\,V\,X - \lambda E - k \left[1_n\right] = 0 \\
\frac{\partial W}{\partial x_{n+1}} &= -\lambda R_f - k = 0 \\
\frac{\partial W}{\partial k} &= \left[X' \middle| x_{n+1}\right] \left[1_{n+1}\right] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3.79)$$

(3.79) es un sistema de (n+2) ecuaciones con (n+2) incógnitas: x_i (i=1,2,...,n+1) y k, con una solución única y determinada. Despejando k de la ecuación (n+1) del sistema (3.79), tenemos:

$$k = -\lambda R_f$$

llevando este valor de k a las n primeras ecuaciones de (3.79)

$$2VX - \lambda E + \lambda R_f \left[1_n\right] = 0 \qquad (3.80)$$

y despejando el vector columna de las proporciones invertidas en los n títulos arriesgados:

$$V X = \frac{1}{2} \lambda \left(E - R_f \left[1_n\right]\right)$$

$$X = \frac{1}{2} \lambda V^{-1}\left(E - R_f \left[1_n\right]\right) \tag{3.81}$$

Si observamos esta última expresión, nos daremos - cuenta que las x_i de los títulos arriesgados pueden expresarse del siguiente modo:

$$x_i = p_i \lambda \tag{3.82}$$

donde λ es positivo ya que varía de cero a infinito y p_i también lo es, ya que V^{-1} es definida positiva y es de suponer que los rendimientos de cualquier activo arriesgado superen al rendimiento del título libre de riesgo.

La suma de las proporciones invertidas en los títulos arriesgados puede expresarse matricialmente como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = X' \left[1_n\right] = \left[1_n\right]' X$$

y teniendo en cuenta el valor del vector columna X hallado en (3.81):

$$\left[1_n\right]' X = \left[1_n\right]' \frac{1}{2} \lambda V^{-1}\left(E - R_f \left[1_n\right]\right) = \frac{1}{2} \lambda \left[1_n\right]' V^{-1}\left(E - R_f \left[1_n\right]\right) \tag{3.83}$$

en donde al escalar $\left[1_n\right]' V^{-1}\left(E - R_f \left[1_n\right]\right)$ le llamaremos d:

$$d = \left[1_n\right]' V^{-1} \left(E - R_f \left[1_n\right]\right) \tag{3.84}$$

observando las filas y columnas de las matrices y vectores que intervienen en la expresión anterior, vemos que $\left[1_n\right]' X$ es un número tal como cabía esperar.

Sea X_M el vector columna que nos muestra en qué proporción intervienen los títulos arriesgados dentro de la cartera arriesgada formada por ellos mismos, haciendo abstracción de la cantidad invertida en el título libre de riesgo:

$$X_M = \begin{bmatrix} x_1 / [1_n]' X \\ x_2 / [1_n]' X \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n / [1_n]' X \end{bmatrix} = \frac{X}{[1_n]' X} \qquad (3.85)$$

Veamos ahora cuál es el valor de X_M teniendo en cuenta la solución de X proporcionada por (3.81):

$$X_M = \frac{X}{[1_n]' X} = \frac{1/2 \lambda V^{-1} (E - R_f [1_n])}{1/2 \lambda [1_n]' V^{-1} (E - R_f [1_n])} =$$

$$= \frac{V^{-1} (E - R_f [1_n])}{[1_n]' V^{-1} (E - R_f [1_n])} \qquad (3.86)$$

Como el denominador de (3.86) es un número tal como vimos en (3.84), podemos expresar X_M como sigue:

$$X_M = \frac{V^{-1} (E - R_f [1_n])}{d} \qquad (3.87)$$

Con lo cual se ve que las proporciones en que intervienen los títulos arriesgados en la "subcartera" formada por ellos siempre son las mismas sea cual sea la actitud hacia el riesgo del inversor, ya que X_M únicamente depende de los datos E, R_f y V y no depende en absoluto del factor λ, que en nuestro contexto definía la actitud hacia el riesgo del inversor tal como mostramos en la nota (8). Asimismo, en (3.87) tampoco interviene para nada el valor supuesto del rendimiento esperado para el cual el individuo intentaba hallar la cartera eficiente: e^*, por lo cual X_M también es independiente de e^*.

Esta propiedad de X_M recibe el nombre de teorema de la separación (34) y responde a lo que ya de forma intuitiva vimos en el gráfico de la figura 3.11, donde el individuo racional únicamente invertía en el título libre de riesgo y la cartera arriesgada M. Podrá invertir más en el título libre de riesgo (menos en la cartera arriesgada) o menos (más en la cartera M), puede que tenga tenencias negativas del título sin riesgo o no, según cual sea su actitud hacia el riesgo, pero las proporciones en que intervienen los títulos arriesgados dentro de la cartera M son siempre las mismas y, en consecuencia, la cartera M es única.

Según el teorema de la separación, si los distintos individuos que operan en el mercado estuviesen de acuerdo en la estimación de E y V, entonces todos ellos, "tímidos y agresivos, deberían tener la misma combinación de valores en sus carteras. Deberían pues pedir prestado o prestar para alcanzar su clase preferida de riesgo. Esta conclusión es diametralmente opuesta al concepto popular de "decorador de interiores financieros que se tiene del gestor de carteras. De acuerdo con ello, este último debería confeccionar una cartera que se ajuste a la personalidad del cliente" (35).

El teorema de la separación, pues, demuestra que todos los inversores deberán tener el mismo tipo de subcartera de activos arriesgados, diferenciándose únicamente en la forma de financiarla.

3.9. La Nueva Frontera Eficiente

Ya se habrá observado que la suma de las proporciones de los títulos arriesgados contenidos en el vector columna X_M es la unidad. En efecto:

$$\left[1_n\right]' X_M = \left[1_n\right]' \frac{X}{\left[1_n\right]' X} = \frac{\left[1_n\right]' X}{\left[1_n\right]' X} = 1 \qquad (3.88)$$

Por tanto, M es por sí sola una cartera ya que la suma de los títulos que la componen es la unidad y, en consecuencia, es válido hablar de su rendimiento esperado y de su varianza.

La varianza de la cartera arriesgada M es:

$$\sigma^2(\widetilde{R}_M) = X'_M V X_M = \frac{(E' - R_f\left[1_n\right]')\, V^{-1}}{d} \cdot V \cdot \frac{V^{-1}(E - R_f\left[1_n\right])}{d}$$

$$\sigma^2(\widetilde{R}_M) = \frac{1}{d^2}\, (E' - R_f\left[1_n\right]')\, V^{-1}\, (E - R_f\left[1_n\right]) \qquad (3.89)$$

y sacando raíces cuadradas en ambos miembros se obtiene la desviación típica de la misma:

$$\sigma(\widetilde{R}_M) = \frac{1}{d}\left[(E' - R_f\left[1_n\right]')\, V^{-1}\, (E - R_f\left[1_n\right])\right]^{1/2} \qquad (3.90)$$

La esperanza matemática o rendimiento esperado de la cartera M es:

$$E(\widetilde{R}_M) = X'_M E = \frac{1}{d}\, (E' - R_f\left[1_n\right]')V^{-1} E \qquad (3.91)$$

Nuestro próximo objetivo es calcular qué valor toma la expresión:

$$\frac{E(\widetilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\widetilde{R}_M)}$$

como paso intermedio a la determinación por medios analíticos de la nueva frontera eficiente.

Restando R_f en ambos miembros de (3.91)

$$E(\tilde{R}_M) - R_f = \frac{1}{d} (E' - R_f [1_n]') V^{-1} E - R_f \tag{3.92}$$

En (3.84) vimos que d era un número que tomaba la - siguiente expresión:

$$d = [1_n]' V^{-1} (E - R_f [1_n]) \tag{3.93}$$

El transpuesto del segundo miembro de (3.93) es por lo tanto el mismo número. Por lo que multiplicando y dividiendo el segundo término del segundo miembro de (3.92) por el transpuesto de d:

$$E(\tilde{R}_M)-R_f = \frac{1}{d} (E'-R_f [1_n]')V^{-1}E - R_f \frac{(E'-R_f [1_n]')V^{-1} [1_n]}{d}$$

y sacando factor común $\frac{1}{d} (E'-R_f [1_n]')V^{-1}$:

$$E(\tilde{R}_M)-R_f = \frac{1}{d} (E' - R_f [1_n]')V^{-1} . (E - R_f [1_n]) \tag{3.94}$$

Por último, dividiendo (3.94) por (3.90), llegamos al valor de la expresión buscada:

$$\frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} = \left[(E' - R_f [1_n]') V^{-1} (E - R_f [1_n])\right]^{1/2} \tag{3.95}$$

Ahora ya estamos en condiciones de abordar la cuestión de la nueva frontera eficiente. Sea una cartera compuesta por n títulos arriesgados y un título libre de riesgo. Por (3.74) y (3.76) su rendimiento esperado y su varianza son:

$$E(\widetilde{R}_p) = X'E + x_{n+1}\,R_f \tag{3.96}$$

$$\sigma^2(\widetilde{R}_p) = X'VX \tag{3.97}$$

Para un λ dado, las proporciones en que intervienen los títulos arriesgados en la cartera eficiente correspondiente son, por (3.81):

$$X = \frac{1}{2}\,\lambda\, V^{-1}\,(E - R_f\,[1_n])$$

y la proporción invertida en el título libre de riesgo se deduce de la última ecuación del sistema (3.79):

$$X_{n+1} = 1 - X'\,[1_n] = 1 - [1_n]'X \tag{3.98}$$

Introduciendo el valor (3.98) en la expresión del rendimiento esperado de la cartera p (3.96):

$$E(\widetilde{R}_p) = X'E + (1 - [1_n]'X)\,R_f = X'E + R_f - R_f\,[1_n]'X$$

$$E(\widetilde{R}_p) - R_f = X'E - R_f\,[1_n]'X$$

y teniendo en cuenta (3.81):

$$E(\widetilde{R}_p) - R_f = \frac{1}{2}\lambda(E' - R_f\,[1_n]')V^{-1}E - R_f\,[1_n]'\,\frac{1}{2}\,\lambda\,V^{-1}(E - R_f\,[1_n])$$

Sacando factor común $1/2\,\lambda$:

$$E(\widetilde{R}_p) - R_f = \frac{1}{2}\,\lambda\left[(E' - R_f\,[1_n]')V^{-1}E - R_f\,[1_n]'V^{-1}(E - R_f\,[1_n])\right]$$

Como el factor que multiplica a R_f en el segundo término del segundo miembro, es el número d, su transpuesto también es igual a dicho número:

$$E(\widetilde{R}_p) - R_f = \frac{1}{2}\lambda\left[(E' - R_f\,[1_n]')V^{-1}E - (E' - R_f\,[1_n]')V^{-1}\,R_f\,[1_n])\right]$$

y sacando factor común $(E' - R_f [1_n]')V^{-1}$:

$$E(\tilde{R}_p) - R_f = \frac{1}{2} \lambda (E' - R_f [1_n]') V^{-1} (E - R_f [1_n]) \qquad (3.99)$$

Por otra parte, la desviación típica de la cartera p es la raíz cuadrada de la varianza dada por la expresión - (3.97):

$$\sigma(\tilde{R}_p) = (X'VX)^{1/2}$$

Introduciendo el valor óptimo del vector columna X, para un λ dado, o sea, sustituyendo X por su valor dado en - (3.81):

$$\sigma(\tilde{R}_p) = \left[\frac{1}{2} \lambda (E'-R_f [1_n]')V^{-1}.V.\frac{1}{2} \lambda V^{-1}(E - R_f [1_n])\right]^{1/2}$$

$$\sigma(\tilde{R}_p) = \frac{1}{2} \lambda \left[(E' - R_f [1_n]') V^{-1} (E - R_f [1_n])\right]^{1/2} \qquad (3.100)$$

Dividiendo (3.99) por (3.100), se tiene:

$$\frac{E(\tilde{R}_p) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_p)} = \left[(E' - R_f [1_n]') V^{-1} (E - R_f [1_n])\right]^{1/2} \qquad (3.101)$$

y como el segundo miembro de (3.101) es igual al segundo miembro de (3.95), podemos escribir:

$$\frac{E(\tilde{R}_p) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_p)} = \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)}$$

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \sigma(\tilde{R}_p) \qquad (3.102)$$

que es la nueva frontera eficiente cuando se introduce el título libre de riesgo a los n títulos arriesgados, por lo que la relación entre la rentabilidad y el riesgo de las carteras de valores eficientes se transforma en una línea recta en la nueva situación. Línea recta de ordenada en el origen R_f y pendiente $(E(\widetilde{R}_M) - R_f)/\sigma(\widetilde{R}_M)$:

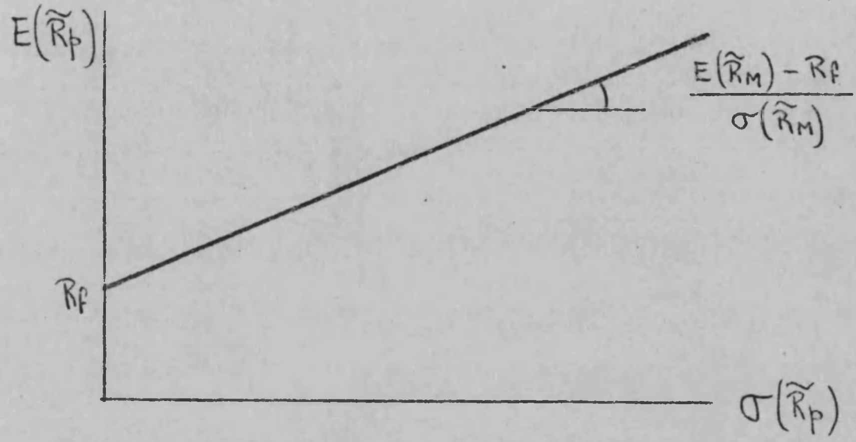


Figura 3.12

Por el teorema de la separación, las proporciones en que intervienen los títulos arriesgados dentro de la cartera M son siempre las mismas, por lo que las carteras de la frontera eficiente son siempre combinaciones del título libre de riesgo y la cartera M:

$$\widetilde{R}_p = x_{n+1} R_f + (1- x_{n+1}) \widetilde{R}_M \qquad (3.103)$$

La esperanza y la desviación típica de la variable aleatoria $\widetilde{R}_p$ son:

$$E(\widetilde{R}_p)= x_{n+1} R_f + (1 - x_{n+1}) E(\widetilde{R}_M) \qquad (3.104)$$

$$\sigma(\widetilde{R}_p)= (1-x_{n+1}) \sigma(\widetilde{R}_M) \qquad (3.105)$$

Ahora vamos a ver cómo el coeficiente de correlación de las carteras eficientes con la cartera M es la unidad:

$$\rho_{p,M} = \frac{cov(\tilde{R}_p, \tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_p) \cdot \sigma(\tilde{R}_M)} \qquad (3.106)$$

ya que llevando (3.103) y (3.105) a (3.106):

$$\rho_{p,M} = \frac{cov(x_{n+1}R_f + (1-x_{n+1})\tilde{R}_M, \tilde{R}_M)}{(1-x_{n+1}) \sigma(\tilde{R}_M) \cdot \sigma(\tilde{R}_M)}$$

$$\rho_{p,M} = \frac{(1-x_{n+1})cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_M)}{(1-x_{n+1}) \sigma^2(R_M)} = \frac{(1-x_{n+1}) \sigma^2(R_M)}{(1-x_{n+1}) \sigma^2(R_M)} = 1 \qquad (3.107)$$

Es decir, que existe una correlación lineal perfecta entre todas las carteras que forman la frontera eficiente, cosa por otra parte lógica desde el momento en que todas las carteras eficientes son combinaciones lineales de dos títulos: el título libre de riesgo y la cartera arriesgada M.

Resumiendo un poco, en este capítulo hemos demostrado por medios analíticos una serie de puntos importantes del modelo de dos parámetros de selección de cartera:

1) La frontera eficiente, en el caso de tratar con n activos arriesgados, es convexa. Con lo cual, si se añaden las curvas de indiferencia que son cóncavas, tal como vimos - en el punto de tangencia entre una curva de indiferencia, situada lo más hacia arriba y hacia la izquierda posible, y la frontera eficiente.

2) La relación entre el rendimiento y el riesgo de un título dentro de una cartera eficiente compuesta exclusivamente de activos arriesgados es lineal, aunque dicha relación cambia para las distintas carteras eficientes.

3) Cuando se introduce el activo libre de riesgo, la frontera eficiente se vuelve lineal y se cumple el teorema de la separación, en virtud del cual todo inversor racional únicamente invierte en el título libre de riesgo, y la cartera arriesgada M, que es única; por lo que existe una correlación lineal perfecta entre las distintas carteras que se encuentran sobre la nueva frontera eficiente.

NOTAS DEL CAPITULO III

(1) SHARPE, W.F.: "Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales". Ediciones Deusto. Bilbao, 1976, p. 50-51.

(2) La curva de la frontera eficiente que es creciente y convexa en el caso de tratar con n activos arriesgados, se transforma en una línea recta de pendiente positiva cuando a los n activos arriesgados se le añade el activo libre de riesgo. Ambos resultados se demostrarán más adelante en el desarrollo de este capítulo.

(3) Recordemos que para dibujar las curvas de indiferencia del consumidor previamente se fijaba un valor de c_1, es decir, una preferencia del consumo actual frente al consumo futuro determinada y que el mapa de las curvas de indiferencia cambiaba al modificar el valor de c_1.

(4) SUAREZ SUAREZ, A.S.: "Decisiones Optimas de Inversión y Financiación en la Empresa". Ediciones Pirámide. Madrid.1980 p. 425-429.

(5) El primer paso se corresponde con la segunda fase de Sharpe; y los pasos segundo y tercero con la tercera fase de Sharpe.

(6) Mirar la figura 3.2.

(7) Esta forma de encontrar las carteras eficientes fue ideada primeramente por Markowitz, y Sharpe la recoge también en su obra con el nombre de "problema básico".

MARKOWITZ, H.M.: "Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments". John Willey & Sons. New York, 1959.

SHARPE, W.F. op. cit., p. 76-86.

(8) λ puede ser interpretado como una medida de la aversión al riesgo. Cuanto menor es λ, mayor es la aversión al riesgo que tiene el inversor. Así, cuando $\lambda = 0$, (3.5) queda:

$$\text{Min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

lo que equivale a un grado sumo de aversión al riesgo en la medida que al inversor unicamente le preocupa minimizar la varianza de su cartera, sea cual sea el rendimiento esperado de la misma. A medida que λ crece y toma mayores valores, en la minimización de α actúa con mayor peso el crecimiento de $E(\tilde{R}_p)$ que el decrecimiento de $\sigma^2(\tilde{R}_p)$, es decir, que el inversor se preocupa más del rendimiento esperado y menos de la varianza y su comportamiento se vuelve cada vez más arriesgado, llegando al caso extremo en que $\lambda = \infty$ donde únicamente considera cuál es la cartera que le proporciona el mayor rendimiento esperado, haciendo completa omisión de la varianza.

(9) Hay autores como Sharpe que a la línea recta de la expresión (3.1) la consideran una curva de indiferencia lineal correspondiente a un inversor ficticio, en cuyo caso queda claro que λ no puede ser negativa, ya que la pendiente de las curvas de indiferencia siempre es positiva.

SHARPE, W.F., op. cit., p. 79.

(10) Quienes estén interesados en los métodos matemáticos de la programación cuadrática paramétrica pueden consultar:
MARKOWITZ, H.M.: "The Optimization of a Cuadratic Function Subject to Linear Constraints". Naval Research Logistics Quarterly. Marzo-junio, 1956, p. 111-133.
MARKOWITZ, H.M. (1959), op. cit., cap. 8.
BOOT, J.C.G.: "Quadratic Programming". North-Holland and Skokie, Ill, Rond McNally. Amsterdam, 1964.
Conviene remarcar que la programación cuadrática paramétrica supone que los títulos son completamente divisibles y que, por tanto, la solución del problema, lo normal, es que no sea entera. Así como en la programación lineal existen algoritmos que obligan a que la solución sea entera, la programación cuadrática en números enteros es un campo en el cual aún se está investigando sin haber llegado a algoritmos generales y definitivos.

(11) El funcionamiento de las ventas al descubierto que acabamos de exponer se corresponde con el "short selling" de las Bolsas norteamericanas. Una explicación resumida del mismo se puede encontrar en Fama.
En el mercado bursátil español, las ventas al descubierto han estado prohibidas hasta hace muy poco tiempo. Así, el 10 de abril de 1981, el Ministerio de Economía y Comercio ha dictado una Orden Ministerial que regula las condiciones del Crédito al Mercado an las operaciones bursátiles de compra-venta. El sistema de Crédito al Mercado, que tiene algún parecido con el "short selling" norteamericano, es una operación al contado, puesto que, aunque el

comprador o vendedor consiguen un aplazamiento en el cumplimiento de la operación de compra o venta de títulos, los cambios que se aplican son los que rigen en el momento de contratar la operación.

En un folleto publicado por el Servicio de Estudios de la Bolsa de Madrid se explica de una forma resumida las características y forma de operar de este sistema de Crédito al Mercado. Asimismo, en una selección de artículos recogida por Vallvé-Ribera de Hortala se puede encontrar una explicación de los contratos al contado y a plazo, así como del contrato de doble.

FAMA, E.F.: "Foundations of Finance". Basil Blackwell, Oxford. 1977, p. 224-225.

BOLSA DE MADRID: "¿Qué es el Crédito al Mercado". Servicio de Estudios de la Bolsa de Madrid. Madrid, 1981.

VALLVE-RIBERA HORTALA, M.A.: "Lecturas sobre Bolsa". Instituto de Estudios Fiscales. Ministerio de Hacienda. Madrid.1977, p. 241-313.

(12) A la hora de derivar hay que tener en cuenta que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

(13) Aunque en este epígrafe y el siguiente usamos una nomenclatura casi igual a la de Aftalion y Viallet, no estamos siguiendo los pasos de estos autores, sino simplemente resolviendo matricialmente el problema base planteado en (3.5).

AFTALION, F. y VIALLET, C.: "Theorie du Portefeuille". Presses Universitaires de France. Paris, 1977.

(14) Recordemos que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ para cualquier par de títu -

los. Por tanto, la matriz de varianzas-covarianzas V es - simétrica, de modo que: $V^{-1} = (V^{-1})'$.

(15) A lo largo del desarrollo matricial, usaremos las letras minúsculas para indicar números y las mayúsculas las reservaremos para las matrices.

(16) El por qué de este proceder no es puro capricho, sino que ambas expresiones de las x_i, en función de λ y e^*, respectivamente, nos serán de utilidad más adelante.

(17) La siguiente derivación matricial de la frontera eficiente fue primeramente expuesta y resuelta por Merton. Aftalion y Viallet, en su obra, anteriormente citada, también la usan.
MERTON, R.C.: "An Analitic Derivation of the Efficient - Portfolio Frontier". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 7, nº 4, septiembre 1972, p. 1851-1871.
AFTALION, F. y VIALLET, C., op. cit., cap. IV.

(18) VAN HORNE, J.: "Financial Management and Policy". Prentice Hall. International Editions. 4a. Ed. Londres, 1977, - p. 50.

(19) Como bien dicen Bellmore, Phillips y Ritchie: "No existe una teoría global de la diversificación antes de Marko- - witz".
BELLMORE, D.H., PHILLIPS, H.E. y RITCHIE, J.C.: "Investment Analysis and Portfolio Selection: An Integrate Approach". South-Western Publishing Co. Ohio, 1979, p. 179.

(20) En opinión de Rosenfeld, el modelo de selección de cartera de Markowitz "no ha conseguido un éxito práctico igual

al interés intelectual que ha suscitado y ello debido a que, además de exigir un uso intensivo del ordenador, no ahorra el Análisis Fundamental, sino todo lo contrario. Así, tanto en (3.20) como en (3.37) es necesario apoyarse en los datos E y V. "Los inputs $E(\tilde{R}_i)$, $\sigma(\tilde{R}_i)$ y σ_{ij} deben ser determinados por analistas y apoyarse en su determinación para conocer lo que serán en el futuro las características de los diversos títulos tomados en consideración. Destaquemos, también, que los errores y las aproximaciones en estas estimaciones son de tal naturaleza que limitan considerablemente la validez y los resultados obtenidos por cálculos aparentemente muy precisos y por medio de instrumentos de gran perfección".
El mismo Markowitz confirma la opinión de Rosenfeld cuando dice: "Los resultados de un análisis de cartera no son más que la lógica consecuencia de la información concerniente a los títulos".
ROSENFELD, F.: "Análisis Financiero y Gestión de Cartera" Editorial Hispano Europea. Barcelona, 1977, p. 298.
MARKOWITZ, H.M. (1959), op. cit., p. 205.

(21) En este epígrafe vamos a seguir principalmente a AFTALION y VIALLET, aunque nosotros partimos de un planteamiento y usamos una nomenclatura ligeramente diferentes.

(22) Usamos los ejes invertidos porque es más fácil despejar $\sigma^2(\tilde{R}_p)$ que $E(\tilde{R}_p)$.

(23) Tal como se observa en la figura 3.7, sólo tiene sentido económico la parte de la frontera eficiente en que $\lambda \geqslant 0$.

"El territorio por encima de la frontera es una especie - de "tierra de nadie". Ningún inversor puede alcanzar una combinación rentabilidad riesgo representada por un punto de este área. Por otra parte, el área por debajo de la - frontera corresponde a combinaciones que ningún inversor bien informado debería encontrar aceptables, ya que todas estas carteras son ineficientes".

COATES, C.R.: "Investment Strategy". McGraw-Hill Book Company, New York, 1978, p. 182.

(24) V es una matriz simétrica no singular por lo que las formas cuadráticas a que da lugar son definidas positivas y las de su matriz inversa también lo son.

a y c son formas cuadráticas de V^{-1} y, por lo tanto, también son definidas positivas. Igualmente, se puede demostrar que $(ac-b^2)>0$. (Ver Merton).

MERTON, R.C., op. cit., p. 1853.

(25) Téngase presente que los multiplicadores se Lagrange λ y k varían de una cartera eficiente a otra, tal como se desprende del análisis del sistema de ecuaciones (3.36), que al resolverlo toma diferentes valores cuando se modifica e^*.

Por otra parte, tal como vimos en la nota (9) de este capítulo, $1/\lambda$ puede considerarse como la pendiente de una curva de indiferencia lineal en el plano (E, σ^2), de modo que el resultado (3.52) era de esperar (ver la figura 3.2).

(26) Para ello nos basaremos en el análisis que hace Fama.

FAMA, E.F., op. cit., p. 283, y ss.

(27) El primer miembro de (3.59) es idéntico al segundo miembro de (2.45), por lo que se ha confirmado lo que en el epígrafe primero de este capítulo ya adelantamos y es que la cartera óptima del inversor estará situada en el punto de tangencia entre la frontera eficiente y una curva de indiferencia.

(28) RYAN, T.M.: "Theory of Portfolio Selection". The MadMillan Press LTD. London, 1978, p. 79.

(29) Un modelo de selección de cartera, parecido al expuesto aquí, pero que tiene en cuenta la inflación puede encontrarse en:
SOLNIK, B.H.: "Inflation and Optimal Portfolio Choices". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.13, nº 5, Diciembre 1978, p. 903-925.

(30) Hay autores como Sharpe que a R_f le denominan la "tasa pura de interés" porque unicamente recompensa el paso del tiempo, pero no ningún tipo de riesgo, ya que se supone que R_f se recibe con total certeza en un mundo sin inflación.
SHARPE, W.F.: "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk". Journal of Finance, vol. 19, nº 3, septiembre 1964, p. 425-442, p. 431.

(31) Observamos como hemos omitido la tilde en el rendimiento del título n+1, ya que al estar libre de riesgo equivale a decir que se va a obtener un rendimiento constante en cualquier situación. R_{n+1} no es una variable aleatoria, sino una constante y, como se sabe, tanto la varianza como

la covarianza de una constante con cualquier variable aleatoria son nulas, mientras que la esperanza matemática de una constante es la misma constante.

(32) Sería más exacto hablar de aquella parte de la riqueza que no consume. Por tanto, cuando hablamos de todos los fondos estamos hablando de todos los fondos o recursos que dedica a la inversión.

(33) Para el desarrollo de los dos epígrafes que restan, nos basaremos en la obra de Aftalion y Viallet, si bien nuestro planteamiento del problema a resolver es diferente y está basado en el que hace Sharpe.
AFTALION, F. y VIALLET, C., op. cit., p. 76-80
SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 298-304.

(34) El teorema de la separación fue primeramente demostrado por Tobin. En palabras de este autor: "El porcentaje óptimo utilizado en la composición de la parte de la cartera formada por activos arriesgados, acciones, es independiente de la proporción de la inversión total en acciones relativa a la inversión total neta..."
De este modo Tobin divide el proceso de selección de cartera en dos etapas separadas e independientes entre sí: 1) Hallar las proporciones con que intervienen los activos arriesgados en la subcartera formada por ellos mismos. Es decir, calcular el valor de X_M. 2) Decidir qué parte de los fondos se invierte en el título libre de riesgo y qué parte en la subcartera de los activos arriesgados.
TOBIN, J.: "Liquidity Preference as Behavior toward Risk"

Review of Economic Studies, vol. 6, nº 1, febrero 1958, p. 65-66.

(35) FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H.: "Análisis y Gestión de Cartera de valores". Ediciones ICE. Madrid, 1977, p. 131-132.

CAPITULO IV

EL MODELO DE PRECIOS DE EQUILIBRIO DE LOS ACTIVOS FINANCIEROS

4.1. Introducción

En capítulos anteriores analizamos el problema de la selección de cartera en un mundo de dos parámetros: la media como medida de la rentabilidad y la varianza (o desviación típica) como medida del riesgo. Así, mostramos, en primer lugar, como la selección de cartera podía encuadrarse dentro de una clase más amplia de problemas: las decisiones de consumo-inversión. Luego centramos nuestra atención en el problema del cálculo de la frontera eficiente deduciendo su ecuación y analizándola tanto en los ejes (E, σ^2) como en los ejes (E, σ). Finalmente, vimos como al añadir el título libre de riesgo a los n títulos arriesgados inicialmente considerados, la frontera eficiente, en los ejes (E, σ), se transformó en una línea recta.

En este capítulo intentaremos ver qué cabe esperar a nivel de mercado cuando todos los individuos efectúan sus decisiones de inversión de acuerdo con el modelo de dos parámetros de selección de cartera. Tal aplicación del modelo ha dado lugar al desarrollo de la teoría del mercado de capitales a la que muchas veces, por mayor comodidad y por ese extendido deseo de reducirlo todo a siglas, se hace mención con las iniciales inglesas CAPM (Capital Asset Pricing Model) o las francesas MEAF (Model d'Equilibre des Actives Financiers).

"Los académicos generalmente atribuyen a William -

Sharpe la creación de la versión más temprana de CAPM" (1) y si bien esto es cierto, ya que en el orden cronológico el primer artículo que habla de una teoría de equilibrio del mercado de capitales bajo condiciones de riesgo se debe a Sharpe, no obstante normalmente se hace referencia a tres autores: Sharpe, Lintner y Mossin (2) como responsables del inicio y desarrollo de la teoría del mercado de capitales.

Antes, muchos autores habían escrito sobre la utilidad esperada, la rentabilidad y el riesgo, la selección de cartera, etc. Pero hasta la aparición de los trabajos de Sharpe-Lintner-Mossin "nadie había combinado todos estos elementos en una explicación coherente de la formación de precios de los activos de capital" (3).

El modelo de dos parámetros de selección de cartera es un modelo normativo. El objetivo de una teoría normativa es servir como guía de acción. Así, la teoría normativa de la selección de cartera intenta explicar cómo deberían ser tomadas las decisiones de inversión en valores mobiliarios y no se preocupa en absoluto del efecto de esas decisiones de inversión de los individuos a nivel agregado, a nivel de mercado.

"El propósito de una teoría positiva, por el contrario, es ayudar a comprender una situación compleja. El entorno de las decisiones de inversión, por ejemplo, es extremadamente complejo. No es posible conocer todos los factores que afectan al precio de los activos de financieros; y suponer que la totalidad de tales factores permanecerá constante es -

un supuesto heroico. Sin embargo, la teoría del mercado de capitales intenta explicar las implicaciones positivas de la moderna teoría de cartera; esto es, cuáles serán las implicaciones del equilibrio general en los precios de los activos financieros y otras relaciones de mercado si todos los inversores se comportan de la manera prevista por la moderna teoría de cartera" (4).

Por tanto, la teoría del mercado de capitales se basa en los modelos de precios de equilibrio de los activos financieros que intentan explicar que ocurre a nivel de mercado cuando todos los inversores efectúan sus decisiones de inversión, bajo condiciones de incertidumbre parcial, de acuerdo con el modelo media-varianza (5).

4.2. Supuestos sobre el Comportamiento de los Inversores y sobre el Mercado

Como primer paso para poder desarrollar una teoría positiva del mercado de capitales, se debe hacer una serie de supuestos restrictivos que simplifiquen la complejidad del fenómeno a estudiar y construir un modelo explicativo en base a dichos supuestos. Lo importante, en este primer momento, no es el grado de realismo de los supuestos, sino la consistencia interna del modelo. En todo caso, hay que tener presente, que una teoría positiva es válida si proporciona conclusiones que sean coherentes con la realidad del fenómeno observado que se intenta comprender y explicar (6).

Puesto que la teoría del mercado de capitales parte del hecho de que los inversores son diversificadores eficientes de Markowitz, en primer lugar debemos hacer explícitos, y repetir nuevamente, los supuestos sobre el comportamiento de los inversores expuestos a lo largo de anteriores capítulos:

1. Se supone que todos los individuos se comportan racionalmente y que, por lo tanto, son maximizadores de su función de utilidad esperada.

2. La función de utilidad esperada del inversor depende únicamente de los dos primeros momentos de la distribución de probabilidad de los rendimientos de las carteras de valores: el rendimiento esperado $E(\tilde{R}_p)$, como medida de la rentabilidad y la varianza $\sigma^2(\tilde{R}_p)$ (o la desviación típica), como medida del riesgo. Es decir, que:

$$E\,(U(\tilde{R})) = f\,(E(\tilde{R}_p),\ \sigma^2(\tilde{R}_p))$$

3. Las funciones de utilidad de los inversores son monótonas crecientes, por lo que con referencia a las carteras de valores, para una misma varianza, se prefiere la cartera de mayor valor esperado:

$$\frac{\partial f}{\partial E(\tilde{R}_p)} > 0$$

4. Se supone que los inversores tienen aversión al

riesgo, lo que se traduce en que sus funciones de utilidad son convexas y, con referencia a las carteras de valores, en que para un mismo rendimiento esperado, se prefiere la cartera de menor varianza:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma^2(\tilde{R}_p)} < 0$$

Como antes ya hemos adelantado, estos cuatro supuestos sobre el comportamiento de los inversores se pueden resumir afirmando que los individuos son diversificadores eficientes de Markowitz y que, por tanto, se situarán en algún punto de la frontera eficiente, punto que dependerá de cuáles sean sus preferencias sobre el riesgo.

A los anteriores supuestos sobre el comportamiento de los inversores, es necesario añadir otros supuestos a nivel de mercado que permitan construir un modelo simplificado sobre su funcionamiento:

5. Los mercados de capitales son perfectos. Es decir se supone que la información es asequible para todo el mundo y sin coste alguno. No hay costes de transacciones en las operaciones de compra-venta de los títulos ni tampoco ningún tipo de impuesto. Los títulos son infinitamente divisibles y se supone que los inversores no tienen ningún tipo de influencia en la formación de los precios (7).

6. Todos los inversores tienen la misma amplitud en su horizonte de planificación, que es un período. Es decir, al principio del período, común para todos ellos, adquieren -

una cartera de valores determinada que venden al final del período en cuestión.

7. Los inversores tienen "expectativas homogéneas" (8), o sea, las distribuciones de probabilidad de los rendimientos de los títulos son idénticas para todos los inversores. Todos coinciden en la estimación del curso de evolución de los precios futuros de los títulos.

8. Cualquier cantidad de dinero puede ser prestada o pedida prestada a la tasa pura de interés libre de riesgo (9).

9. No existen cambios en el nivel de precios ni en el de tasa pura de interés.

10. Los mercados de capitales están en equilibrio al principio del período. Es decir, que la oferta de títulos iguala a la demanda de los mismos (10).

Evidentemente estos supuestos son excesivamente simplificadores y en muchas ocasiones irreales. Pero como señala Sharpe (11), "el realismo de los supuestos importa poco. Si las conclusiones son razonablemente consistentes con los fenómenos observados, puede decirse que la teoría "explica" la realidad. Aún más importante, puede proporcionar predicciones útiles. Una discusión sobre la admisibilidad de la teoría ha de tener en cuenta las consecuencias que se desprenden de sus conclusiones". Por tanto, poco importa de momento el que los supuestos enunciados sean excesivamente simplificadores de la realidad (12); más adelante, tendremos oportunidad de ver como responde el modelo a la relajación de los supuestos al intentar acercar el modelo al mundo real.

Conviene también puntualizar que el modelo en que se basa la teoría del mercado de capitales es un modelo estático, de equilibrio. El modelo predecirá cuáles serán los precios de equilibrio que se derivan de los supuestos sobre los inversores y sobre el mercado, pero en modo alguno, será capaz de explicar cómo se pasa de una situación de equilibrio a otra, o la forma cómo las fuerzas que conducen al equilibrio actuarán en una situación de desequilibrio.

Por último, aunque siempre hablamos de títulos o activos financieros, la selección de cartera puede ser aplicada a cualquier cuestión aunque no esté relacionada estrictamente con temas financieros siempre, claro está, que la elección tenga consecuencias contrapuestas: la media como medida de deseabilidad y la varianza como medida de rechazo.

La teoría del mercado de capitales únicamente se preocupa de los precios de equilibrio de los títulos arriesgados, tomando como dados los equilibrios en el mercado de bienes de consumo, en el mercado de trabajo y los factores productivos y en el mercado monetario de los títulos financieros sin riesgo. Por lo que respecta a este último mercado, convendría recordar que R_f era un dato más cuando calculábamos la frontera eficiente del inversor en el caso en que se añadía el título libre de riesgo. Asimismo, al enunciar el supuesto nº 8 de este epígrafe también hemos considerado R_f como dado. R_f es la tasa pura de interés que iguala la oferta y la deman da de los títulos libres de riesgo y que premia a aquéllas -- personas que posponen el consumo presente al futuro, en un - mundo de total certeza.

4.3. La Línea del Mercado de Capitales

En el capítulo anterior vimos como la frontera eficiente del inversor, en el caso de añadir un título sin riesgo a los n títulos arriesgados, dejaba de ser una curva para transformarse en una línea recta tal como la dibujada en la - Figura 4.1 y descrita por la ecuación (3.102), con una ordenada en el origen R_f y tangente a la rama superior de la antigua frontera eficiente, calculada sin el activo libre de riesgo.

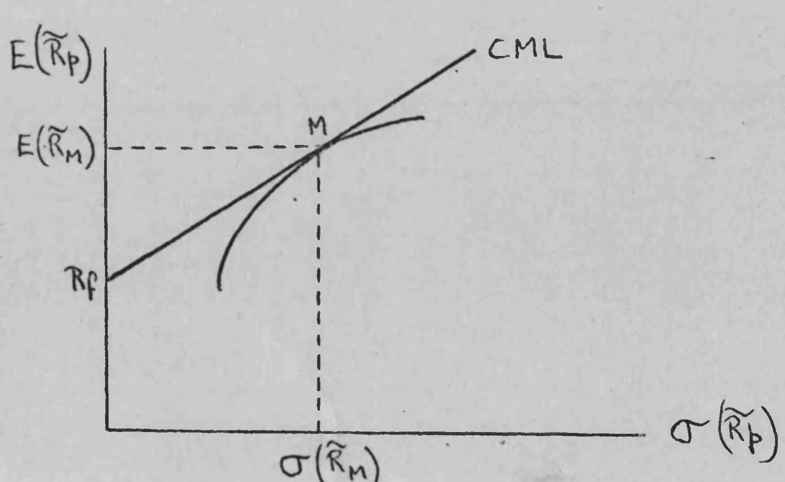


Figura 4.1.

Si $\left[E(\tilde{R}_p), \sigma(\tilde{R}_p)\right]$ representa el binomio rentabilidad-riesgo de una cartera eficiente p. La ecuación de la frontera eficiente del inversor, según (3.102) es:

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \cdot \sigma(\tilde{R}_p) \qquad (4.1)$$

Al hallar por medios analíticos la frontera eficiente de cualquier inversor, suponíamos dadas las $(3n + n^2)/2$ estimaciones (13) referentes a los rendimientos esperados, varianzas y covarianzas de los n títulos que podía contener una cartera. Asimismo, también R_f era un dato más del problema. - Por tanto, siempre que dos inversores hagan las mismas estimaciones sobre esos parámetros, la frontera eficiente será - igual para ambos.

Los supuestos 5 al 7, antes enunciados, nos aseguran que esas $(3n + n^2)/2$ estimaciones son comunes e iguales para todos los individuos que operan en el mercado de capitales y que, en consecuencia, la frontera eficiente, buscada por todos los inversores, de acuerdo con los supuestos 1 al 4, viene dada por la rama de hipérbola que se ha dibujado en la Figura 4.1. Si a continuación añadimos los supuestos 8 y 9 a - los anteriores, la tasa de interés sin riesgo, R_f, es un dato más a considerar en el problema y la frontera eficiente común a todos los individuos es una línea recta. Por último, el supuesto 10 nos asegura que esa frontera eficiente lineal dibujada en la Figura 4.1 es de equilibrio y que, por tanto, a lo largo de todo el período de planificación, que es el mismo para todos los inversores, no variará.

A la recta que representa la frontera eficiente de todos los inversores y que es una consecuencia directa de los 10 supuestos referentes al comportamiento de los inversores y el mercado, Sharpe (14) la denomina Línea del Mercado de Capitales (Capital Market Line) y normalmente en la literatura financiera se hace referencia a ella por las correspondientes siglas inglesas CML. Por tanto, bajo los supuestos enunciados, todo individuo se enfrenta a una frontera eficiente tal como la señalada por la CML.

Como vimos en el capítulo anterior, todas las carteras eficientes situadas en la CML son combinaciones lineales de dos únicos títulos: 1) El título libre de riesgo y 2) La cartera arriesgada M, que es única y no depende de la aversión al riesgo del decisor particular. Evidentemente, esto no significa que todos los inversores elijen siempre la misma cartera eficiente (15).

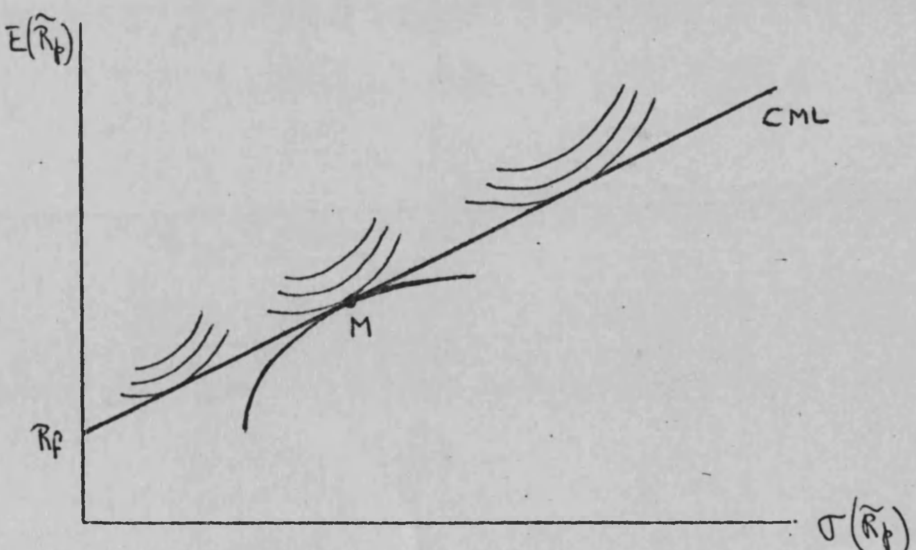


Figura 4.2.

El punto de la frontera eficiente en que se situará un inversor dependerá de cual sea su mapa de curvas de indiferencia, es decir, de su preferencia respecto al binomio rentabilidad-riesgo y de su preferencia por el consumo presente frente al consumo futuro; ya que hay que recordar que el inversor elegía el punto de la frontera eficiente donde una de sus curvas de indiferencia era tangente a dicha frontera (16).

Por tanto, todo el mundo que invierta parte de sus fondos en títulos arriesgados, lo hará en la cartera M, pero mientras unos pedirán prestado a la tasa pura de interés, R_f, otros prestarán a dicha tasa e incluso puede que haya quien únicamente invierta en la cartera arriesgada M ó en el título libre de riesgo (17), Es decir, lo que varía entre las carteras óptimas de los distintos individuos son las proporciones en que intervienen la cartera M y el título sin riesgo (18).

Dado que en equilibrio, la cantidad que se pide prestada (que se demanda) a la tasa R_f igualará a la cantidad que se presta (que se ofrece), nos podemos preguntar: ¿Cuál será la composición de la cartera M en estas circunstancias?

La cartera M estará compuesta por todos los títulos arriesgados existentes en el mercado y en las proporciones que representan el valor de dichos títulos en el valor total del conjunto de todos los títulos del mercado. El por qué de esta composición es relativamente fácil de explicar y nos limitaremos a observar los resultados absurdos a que daría lugar una composición diferente.

Si por ejemplo un título representa el 5% del valor de todos los títulos arriesgados, la proporción de dicho título dentro de la cartera M no puede ser del 6%, ya que en la medida que todo el mundo piensa que dicho título dentro de su cartera de valores arriesgados debe ser del 6%, al agregar las demandas de todos los inversores, se superaría la oferta del 5% existente y, por lo tanto, no se cumplirá el supuesto 10 referente a que la oferta iguala a la demanda. Del mismo modo, no podría darse el caso de un título que exista en el mercado y no intervenga en la cartera M, ya que bajo las condiciones expuestas por el supuesto 10, todos los títulos deben estar en manos de alguien.

Así, por ejemplo, si la proporción en que interviene uno de los títulos dentro del total de la cartera arriesgada M fuese negativa, ello equivaldría a que todo el mundo tomaría una posición a corto en ese título, pero ¿a qué persona se le podría vender ese título al descubierto si todo el mundo hace lo mismo?. Evidentemente, una proporción negativa de cualquiera de los títulos dentro de la cartera M no es coherente con una posición de equilibrio tal como la expresada por el supuesto 10 antes enunciado (19).

En consecuencia, la cartera M tiene la misma composición que la que tiene el mercado y, por ello, se la suele denominar cartera de mercado. Si denotamos por P_i y Q_i el precio y el número de títulos de cada uno de los valores arriesgados existentes en el mercado, la proporción en que interviene cada valor dentro de la cartera de mercado será (20):

$$x_i^M = \frac{P_i\ Q_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i} \qquad (4.2)$$

Así, todas las carteras de valores de los inversores son combinaciones lineales del título libre de riesgo y de la cartera de mercado M de los títulos arriesgados, por lo que existe una correlación perfecta positiva entre las carteras de los distintos inversores, tal como se desprende de la expresión (3.107) deducida en el capítulo anterior.

En la expresión analítica de la línea del mercado de capitales, llamando λ^* a la constante:

$$\lambda^* = \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \qquad (4.3)$$

Se puede poner la CML de la siguiente manera:

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \lambda^*\ \sigma(\tilde{R}_p) \qquad (4.4)$$

Recordemos que $E(\tilde{R}_p)$ y $\sigma(\tilde{R}_p)$ eran las medidas adecuadas de la rentabilidad y del riesgo de una cartera de valores, por lo que (4.4) nos muestra cuál es la relación que existe entre la rentabilidad y el riesgo de las carteras eficientes, que se sitúan sobre la línea del mercado de capitales.

Las carteras ineficientes se situarán, claro está, por debajo de la CML (21), por lo que no es de esperar que la relación entre su riesgo y su rentabilidad sea lineal. Igualmente, como un título arriesgado individual es claramente una cartera ineficiente, también se situará por debajo de la CML y la ecuación (4.4) no mostrará la relación que existe entre el rendimiento y la desviación típica de un título individual.

Por lo tanto, la ecuación (4.4) expresa cuál es la relación que existe entre la rentabilidad y el riesgo de las carteras eficientes. Si analizamos el segundo miembro de dicha ecuación, veremos que la rentabilidad de una cartera eficiente se descompone en dos partes:

1) R_f, la ordenada en el origen de la CML, es la tasa pura de interés o precio del tiempo, ya que representa el precio que se debe pagar por consumir ahora en vez de más tarde o, también, el premio por esperar y consumir más tarde, en lugar de hacerlo en el momento presente.

2) λ^*, la pendiente de la CML (22), es un factor que multiplica al riesgo de la cartera $\sigma(\tilde{R}_p)$ y por ello se le ha llamado a menudo impropiamente precio de mercado del riesgo o simplemente precio del riesgo. "El precio del riesgo no es una elección de términos muy afortunada: "precio de la reducción del riesgo" podría ser más satisfactorio, ya que es por la supresión del riesgo por lo que nosotros deberíamos suponer que los individuos quieren pagar" (23). Por tanto, λ^* se puede interpretar como la rentabilidad que el individuo debe sacrificar por reducir el riesgo o, lo que es lo mismo, el premio por asumir más riesgo. En resumen, para aumentar la rentabilidad esperada de una cartera eficiente, hay que aceptar un mayor riesgo.

Antes ya hemos adelantado que un título arriesgado individual no es una cartera eficiente y que, en consecuencia, la ecuación (4.4) no era una expresión adecuada de la relación entre el rendimiento esperado y la desviación típica de un título individual, ya que la desviación típica no es una medida apropiada de su riesgo, desde el momento en que el riesgo de un título i que forma parte de la cartera p, en los ejes (E, σ), viene dado por: $\mathrm{cov}\,(\tilde{R}_i, \tilde{R}_p) / \sigma(\tilde{R}_p)$ (24). De esta manera cabe preguntarse: ¿Qué relación existirá entre la rentabilidad y el riesgo de un título individual?

4.4. La Línea del Mercado de los Activos Financieros

El problema de analizar la relación entre la rentabilidad y el riesgo de los títulos individuales ya fue tratado anteriormente en el capítulo III, donde vimos que una relación lineal entre el rendimiento esperado y el riesgo de los títulos de una cartera eficiente en el caso de considerar únicamente los n activos arriesgados (25).

El inconveniente de la relación encontrada en (3.62) era que variaba entre las distintas carteras eficientes y, además, la medida del riesgo de un título individual también era propia de cada cartera eficiente, de modo que el riesgo de un título era diferente según que perteneciese a una u -

otra de las distintas carteras eficientes tomadas en considera ción.

Lo que ahora intentamos ver es si existe una relación lineal, del tipo de la ecuación (3.62), en el caso de añadir un activo libre de riesgo a los n títulos arriesgados, pero que sea única y que no varíe para las distintas carteras eficientes y en donde el riesgo de un título sea siempre el mismo, sea cual sea la cartera eficiente considerada (26).

Si tenemos en cuenta los 10 supuestos expuestos en el epígrafe segundo de este capítulo, entonces las proporciones óptimas a invertir en los n títulos arriesgados vendrán dadas para todos los individuos del mercado por el sistema de ecuaciones (3.80) del capítulo anterior:

$$2VX - \lambda (E - R_f [1_n]) = 0 \qquad (4.5)$$

Para resaltar que el vector columna X de la expresión anterior corresponde a las proporciones en que intervienen los títulos arriesgados dentro de una cartera eficaz, sustituiremos en (4.5) X por X_e y también, más adelante, $E(\tilde{R}_p)$ y $\sigma(\tilde{R}_p)$ por $E(\tilde{R}_e)$ y $\sigma(\tilde{R}_e)$:

$$2VX_e - \lambda (E - R_f [1_n]) = 0 \qquad (4.6)$$

1) Premultiplicando (4.6) por X_e' (27):

$$2X_e' V X_e - \lambda X_e' (E - R_f [1_n]) = 0$$

por (3.97):

$$2 \sigma^2(\tilde{R}_e) - \lambda (X_e' E - R_f X_e' [1_n]) = 0$$

y teniendo en cuenta (3.98):

$$2\,\sigma^2(\tilde{R}_e) - \lambda\,(X_e'\,E - R_f\,(1 - x_{n+1}^e)) = 0$$

$$2\,\sigma^2(\tilde{R}_e) - \lambda\,(X_e'\,E + R_f\,x_{n+1}^e - R_f) = 0$$

y de (3.96):

$$2\,\sigma^2(\tilde{R}_e) - \lambda\,(E(\tilde{R}_e) - R_f) = 0 \qquad (4.7)$$

A continuación vamos a definir una cartera de títulos arriesgados cualquiera (28), eficiente o no, de uno o varios títulos. Y para remarcar que no es necesariamente eficiente la denotaremos por el vector columna de n elementos X_q.

2) Premultiplicando (4.6) por X_q':

$$2\,X_q'\,V\,X_e - \lambda\,X_q'\,(E - R_f\,[1_n]) = 0$$

y teniendo en cuenta que $X_q'\,V\,X_e$ es la expresión matricial de covarianza entre la cartera q, que acabamos de definir, y la cartera eficiente e:

$$2\,\mathrm{cov}(\tilde{R}_q,\tilde{R}_e) - \lambda\,(X_q'\,E - R_f\,X_q'\,[1_n]) = 0$$

$$2\,\mathrm{cov}(\tilde{R}_q,\tilde{R}_e) - \lambda\,(X_q'\,E - R_f\,(1 - x_{n+1}^q)) = 0$$

$$2\,\mathrm{cov}(\tilde{R}_q,\tilde{R}_e) - \lambda\,(X_q'\,E + R_f\,x_{n+1}^q - R_f) = 0$$

$$2\,\mathrm{cov}(\tilde{R}_q,\tilde{R}_e) - \lambda\,(E(\tilde{R}_q) - R_f) = 0 \qquad (4.8)$$

3) Eliminando λ en (4.7) y (4.8):

$$\frac{E(\tilde{R}_q) - R_f}{E(\tilde{R}_e) - R_f} = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_q,\tilde{R}_e)}{\sigma^2\,(\tilde{R}_e)} \qquad (4.9)$$

y operando:

$$E(\tilde{R}_q) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_e) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_e)} \cdot cov(\tilde{R}_q, \tilde{R}_e) \qquad (4.10)$$

Como la cartera de mercado M es una cartera eficiente, podemos sustituir $\tilde{R}_e$ por $\tilde{R}_M$ en (4.10) (29):

$$E(\tilde{R}_q) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot cov(\tilde{R}_q, \tilde{R}_M) \qquad (4.11)$$

y como X_q era una cartera cualquiera, en particular puede estar compuesta por un sólo título i, con lo cual (4.11) queda de la siguiente manera:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) =$$

$$= R_f + \lambda^{**} cov(R_i, R_M) \qquad (4.12)$$

donde $\lambda^{**} = \dfrac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)}$ (4.13)

La $cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)$ vimos en el capítulo II, ecuación (2.14), que era una medida adecuada del riesgo de un título en los ejes (E, σ^2). Por lo que (4.12) nos dice que existe una relación lineal entre la rentabilidad y el riesgo de un título. Si expresamos (4.12) en el contexto de los ejes (E, σ), encontraremos una expresión similar a la (3.62) del capítulo anterior tal como íbamos buscando:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \cdot \frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma(R_M)} =$$

$$= R_f + \lambda^{*} \frac{cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} \qquad (4.14)$$

sólo que ahora al ser M la cartera de mercado y existir una correlación perfecta entre la cartera de mercado y el resto de las carteras eficientes de la CML (ver (3.107)), la relación (4.14) es fija y no varía de una cartera eficiente a otra, además de que el riesgo de un título individual en los ejes (E, σ^2), o en los ejes (E, σ), es único y tampoco varía de una cartera eficiente a otra.

A estos resultados se llega no tanto por haber supuesto las expectativas de los distintos inversores homogéneos, sino por haber introducido el título libre de riesgo, ya que aunque todos los individuos tuviesen expectativas homogéneas, la relación entre el rendimiento y el riesgo de un título seguiría siendo (3.62). Es la introducción del título libre de riesgo lo que permite llegar a (4.14) (30).

Si comparamos las ecuaciones (4.4) y (4.14), vemos que los precios por el paso del tiempo y por la reducción del riesgo: R_f y λ^* son los mismos, lo único que ocurre es que $\sigma(\tilde{R}_i)$ no es una medida adecuada del riesgo de un título, sino que en los ejes (E, σ), en los cuales expresábamos (4.4), el riesgo de un título viene dado por $\mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)/\sigma(\tilde{R}_M)$ y, en consecuencia, el precio por la reducción del riesgo no debe multiplicar a $\sigma(\tilde{R}_i)$ sino a $\mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)/\sigma(\tilde{R}_M)$ (31).

Representando gráficamente (4.12) y (4.14):

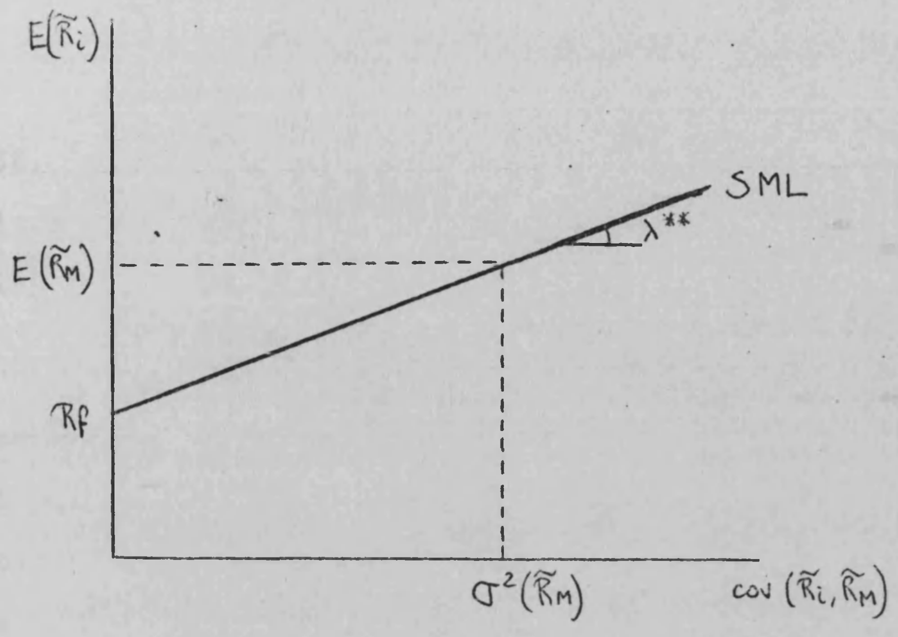


Figura 4.3.

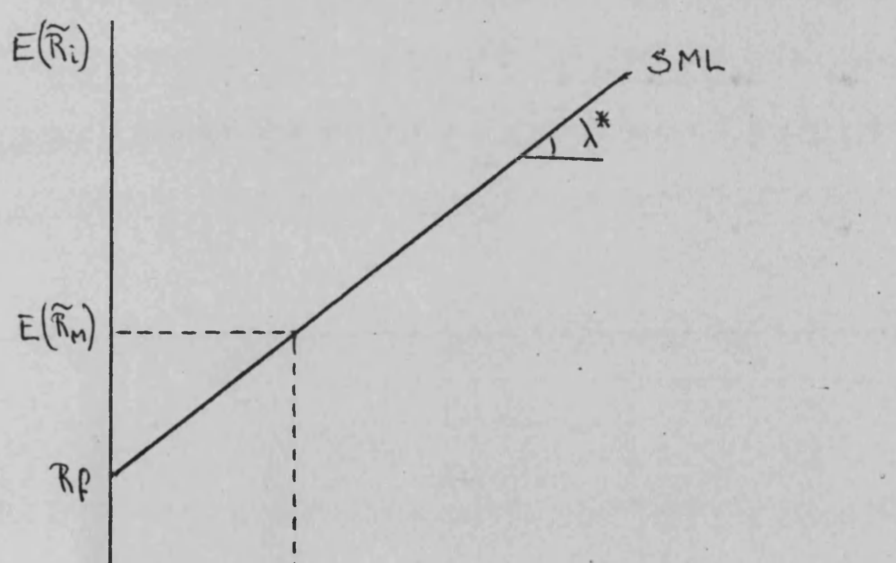


Figura 4.4.

A la recta proporcionada por (4.12) o (4.14) Sharpe (32) la llama Línea del Mercado de Títulos y en la literatura financiera, es común referirse a ella por las siglas SML (Security Market Line).

En la línea del mercado de títulos no se sitúan únicamente los títulos, sino también las carteras, tanto si son eficientes como si no lo son. El caso de que sea una cartera ineficiente la que se situe en la recta SML ya está demostrado en la expresión (4.11) anterior. Para ver que las carteras eficientes también están sobre la SML, no hay más que comprobar cómo se puede pasar de la expresión (4.1) a la (4.11).

La ecuación de la CML es por (4.1):

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \sigma(\tilde{R}_p) \tag{4.15}$$

en donde p hay que remarcar que era una cartera eficiente cualquiera. Como las carteras eficientes de la CML tienen un coeficiente de correlación con la cartera de mercado igual a la unidad:

$$\rho_{p,M} = \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_p, \tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_p)\, \sigma(\tilde{R}_M)} = 1$$

Despejando $\sigma(\tilde{R}_p)$:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_p, \tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} \tag{4.16}$$

y llevando (4.16) a (4.15):

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \cdot \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_p, \tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} =$$

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \mathrm{cov}(\tilde{R}_p, \tilde{R}_M) \qquad (4.17)$$

que es la expresión de la SML hallada en (4.11) (33).

Por lo tanto, como indica Sharpe (34), "en el equilibrio toda cartera y todo título han de estar en la línea del mercado de títulos". De modo que la ecuación (4.14) es la relación fundamental del modelo de precios de equilibrio de los activos financieros (35).

4.5. Los Precios de Equilibrio de los Activos Financieros

Se habrá observado que aunque acabamos de afirmar que (4.14) es la relación fundamental del modelo de precios de equilibrio de los activos financieros, en dicha relación no intervienen para nada los precios de los títulos, sino la media, varianza y covarianzas de los mismos. En realidad, en (4.14) lo que se está afirmando es que, bajo los supuestos enunciados en la sección segunda de este capítulo, los precios de los títulos al principio del período de planificación, común para todos los inversores, han de ser tales que (4.14) se cumpla para todo título y para toda cartera (36).

En el capítulo II, ecuación (2.6), expresábamos la rentabilidad de un título de una empresa i de la siguiente ma nera:

$$\tilde{R}_i = \frac{\tilde{P}_{i2} - P_{i1} + d_{i1}}{P_{i1}}$$

Si ahora, por comodidad, englobamos los dividendos d_{i1} en el precio del título al final del período 1 ó principios del período 2, podríamos expresar (2.6) de la forma siguiente:

$$\tilde{R}_i = \frac{\tilde{P}_{i2} - P_{i1}}{P_{i1}} \qquad (4.18)$$

Si llamamos:

V_{i1} al valor de mercado al principio del período 1 de todos los títulos de la empresa i.

$\tilde{V}_{i2}$ al valor de mercado al final del período 1 ó principios del período 2 de todos los títulos de la empresa i, incluyendo cualquier tipo de dividendo.

Es evidente que también puede expresarse la rentabilidad de los títulos de la empresa i del modo siguiente (37):

$$\tilde{R}_i = \frac{\tilde{V}_{i2} - V_{i1}}{V_{i1}} \qquad (4.19)$$

Denotando por:

$V_{M1} = \sum_{i=1}^{n} V_{i1}$ al valor de mercado al principio del período 1 de todos los títulos de todas las empresas. (4.20)

$\tilde{V}_{M2} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_{i2}$ al valor de mercado al final del período 1 ó principio del período 2 de todos los títulos de todas las empresas. (4.21)

podemos expresar el rendimiento de la cartera de mercado M por

$$\widetilde{R}_M = \frac{\widetilde{V}_{M2} - V_{M1}}{V_{M1}} \tag{4.22}$$

En la sección anterior vimos que la ecuación de la línea del mercado de títulos era:

$$E(\widetilde{R}_i) = R_f + \lambda^* \frac{\mathrm{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_M)}{\sigma(\widetilde{R}_M)} \tag{4.23}$$

A continuación vamos a calcular $E(\widetilde{R}_i)$, $\sigma(\widetilde{R}_M)$ y $\mathrm{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_M)$ basándonos en las expresiones (4.19) y (4.22), y posteriormente sustituiremos los valores encontrados en - (4.23) (38).

1) Aplicando el operador esperanza matemática en - (4.19), obtenemos el rendimiento esperado de los títulos de la empresa i:

$$E(\widetilde{R}_i) = \frac{E(\widetilde{V}_{i2}) - V_{i1}}{V_{i1}} \tag{4.24}$$

2) Tomando varianzas en (4.22), se obtiene la varianza de los rendimientos de la cartera de mercado:

$$\sigma^2(\widetilde{R}_M) = \frac{1}{V_{M1}^2}\, \sigma^2(\widetilde{V}_{M2}) \tag{4.25}$$

con lo cual la desviación típica de los rendimientos de la - cartera de mercado es:

$$\sigma(\widetilde{R}_M) = \frac{1}{V_{M1}}\, \sigma(\widetilde{V}_{M2}) \tag{4.26}$$

3) Finalmente, la covarianza entre el rendimiento -

del título de la empresa i y la cartera de mercado, teniendo en cuenta (4.19) y (4.22):

$$\operatorname{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_M) = \frac{1}{V_{i1}\,V_{M1}} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2}) \qquad (4.27)$$

Llevando (4.24), (4.26) y (4.27) a (4.23), se tiene:

$$\frac{E(\tilde{V}_{i2}) - V_{i1}}{V_{i1}} = R_f + \frac{\lambda^* \dfrac{1}{V_{i1}\,V_{M1}} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2})}{\dfrac{1}{V_{M1}} \quad \sigma(\tilde{V}_{M2})}$$

y operando queda (39):

$$\frac{E(\tilde{V}_{i2}) - V_{i1}}{V_{i1}} = R_f + \lambda^* \frac{1}{V_{i1}} \cdot \frac{\operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2})}{\sigma(\tilde{V}_{M2})}$$

$$E(\tilde{V}_{i2}) - V_{i1} = V_{i1}\,R_f + \lambda^* \frac{\operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2})}{\sigma(\tilde{V}_{M2})}$$

$$V_{i1}\,(1 + R_f) = E\,(\tilde{V}_{i2}) - \lambda^* \frac{\operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2})}{\sigma(\tilde{V}_{M2})}$$

$$V_{i1} = \frac{E(\tilde{V}_{i2}) - \lambda^* \dfrac{\operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2})}{\sigma(\tilde{V}_{M2})}}{1 + R_f} \qquad (4.28)$$

La expresión anterior nos proporciona cuál es el valor de equilibrio al principio del período 1 de la empresa i según las previsiones sobre los precios futuros de dicha empresa i y de todas las empresas del mercado. Para ver con mayor detalle el significado de (4.28) es necesario efectuar antes una serie de pasos previos.

Tomando esperanzas en (4.21):

$$E(\tilde{V}_{M2}) = \sum_{i=1}^{n} E(\tilde{V}_{i2}) \qquad (4.29)$$

Por otra parte, hay que tener en cuenta que:

$$\operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2}) = \operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2}, \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{j2}) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{j2}) \qquad (4.30)$$

de modo que la desviación típica del valor total de todas las empresas del mercado al final del período 1 es:

$$\sigma(\tilde{V}_{M2}) = \frac{\sigma^2(\tilde{V}_{M2})}{\sigma(\tilde{V}_{M2})} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{j2})}{\sigma(\tilde{V}_{M2})} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{j2}))}{\sigma(\tilde{V}_{M2})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2})}{\sigma(\tilde{V}_{M2})} \qquad (4.31)$$

Sumando ambos miembros de (4.28) para todas las empresas de 1 a n:

$$\sum_{i=1}^{n} V_{i1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(\tilde{V}_{i2}) - \lambda^{*} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2})}{\sigma(V_{M2})}}{1 + R_f} \qquad (4.32)$$

y teniendo presente (4.20), (4.29) y (4.31):

$$V_{M1} = \frac{E(\tilde{V}_{M2}) - \lambda^{*}\, \sigma(\tilde{V}_{M2})}{1 + R_f} \qquad (4.33)$$

de modo que el valor esperado y la desviación típica del valor total de todas las empresas son valorados por el mercado al principio del período 1. El precio de una unidad de valor esperado es $1/(1+R_f)$, mientras que el precio de una unidad de desviación típica es $-\lambda^*/(1+R_f)$. En la ecuación (4.29) se puede ver que la contribución de la empresa i a la media del valor de todas las empresas es $E(\widetilde{V}_{i2})$, mientras que la contribución de la empresa i a la desviación típica del valor de todas las empresas, por (4.31), es $cov(\widetilde{V}_{i2},\widetilde{V}_{M2})/\sigma(\widetilde{V}_{M2})$. Así que observando (4.28) se puede comprobar que esas contribuciones de la empresa i a la media y a la desviación típica del valor total de todas las empresas son igualmente valoradas a los precios $1/(1+R_f)$ y $-\lambda^*/(1+R_f)$, que antes se aplicaban a la media y a la desviación típica del valor total de todas las empresas, independientemente de cual sea la empresa en cuestión.

Ahora nos queda por ver cuáles son los precios de equilibrio de los títulos o acciones de las empresas. Para hallar estos precios es necesario tener en cuenta (4.19') y (4.19"). Es decir, suponiendo que el número de títulos de la empresa i sea n_i, entonces si no hay ampliaciones ni disminuciones de capital durante el período de estudio:

$$V_{i1} = n_i\ P_{i1} \qquad (4.34)$$

$$\widetilde{V}_{i2} = n_i\ \widetilde{P}_{i2} \qquad (4.35)$$

con lo que:

$$E(\widetilde{V}_{i2}) = n_i\ E(\widetilde{P}_{i2}) \qquad (4.36)$$

$$cov(\widetilde{V}_{i2},\widetilde{V}_{M2}) = cov(n_i\ \widetilde{P}_{i2},\widetilde{V}_{M2}) = n_i\ cov(\widetilde{P}_{i2},\widetilde{V}_{M2}) \qquad (4.37)$$

y llevando (4.34), (4.36) y (4.37) a (4.28):

$$V_{i1} = \frac{E(\widetilde{V}_{i2}) - \lambda^* \operatorname{cov}(\widetilde{V}_{i2},\widetilde{V}_{M2})/\sigma(\widetilde{V}_{M2})}{1 + R_f}$$

$$n_i P_{i1} = \frac{n_i E(\widetilde{P}_{i2}) - \lambda^* n_i \dfrac{\operatorname{cov}(\widetilde{P}_{i2},\widetilde{V}_{M2})}{\sigma(\widetilde{V}_{M2})}}{1 + R_f}$$

$$P_{i1} = \frac{E(\widetilde{P}_{i2}) - \lambda^* \dfrac{\operatorname{cov}(\widetilde{P}_{i2},\widetilde{V}_{M2})}{\sigma(\widetilde{V}_{M2})}}{1 + R_f} \qquad (4.38)$$

Esta última expresión (4.38) puede volver a interpretarse como lo hicimos con (4.28) y (4.33). Es decir, el mercado asigna al valor esperado de un título un precio $1/(1+R_f)$ y a la contribución de dicho título a la desviación típica del valor de todas las empresas el precio $-\lambda^*/(1+R_f)$. Pero además de esta interpretación también puede darse otra tal vez más interesante: si invertimos P_{i1} pesetas en un título libre de riesgo, al final del período 1 se nos retornará el dinero invertido y habremos obtenido una rentabilidad de R_f%. Es decir, al final del período tendremos $P_{i1}(1+R_f)$ pesetas con total certeza. Si observamos (4.39), nos daremos cuenta que $P_{i1}(1+R_f)$ es igual al primer miembro de dicha expresión, por lo que el segundo miembro de:

$$P_{i1}(1+R_f) = E(\widetilde{P}_{i2}) - \lambda^* \frac{\operatorname{cov}(\widetilde{P}_{i2},\widetilde{V}_{M2})}{\sigma(\widetilde{V}_{M2})} \qquad (4.39)$$

es el equivalente monetario cierto de P_{i1} pesetas invertidas en el título arriesgado i, ya que es igual al valor esperado del título i: $E(\widetilde{P}_{i2})$ menos un ajuste por el riesgo de dicho -

título, ajuste que es igual al precio por la disminución del riesgo multiplicado por el riesgo efectivo del título:

$$\lambda^{*} \frac{cov(\widetilde{P}_{i2},\widetilde{V}_{M2})}{\sigma(\widetilde{V}_{M2})}$$

Como tanto los valores esperados de las empresas, como sus desviaciones típicas, como sus covarianzas con el valor total de todas las empresas del mercado se suponen dados o conocidos al principio del período 1, si λ^{*} previamente lo hemos calculado al hallar la SML, entonces la ecuación (4.28) nos proporciona directamente cuál es el valor de cada una de las diferentes empresas. Si por el contrario, no queremos partir del λ^{*} previamente calculado, ya vimos en la nota a pie de página (39) que la ecuación (4.28), al expresar λ^{*} en función de (4.22), quedaba como sigue:

$$V_{i1} = \frac{1}{(1+R_f)}\left[E(\widetilde{V}_{i2}) - \left(\frac{E(\widetilde{V}_{M2}) - V_{M1}(1+R_f)}{\sigma^{2}(\widetilde{V}_{M2})}\right) cov(\widetilde{V}_{i2},\widetilde{V}_{M2})\right] \tag{4.40}$$

Si en (4.40) sustituimos V_{M1} por su correspondiente valor $\sum_{i=1}^{n} P_{i1}$ y tenemos en cuenta conjuntamente las n ecuaciones (4.40) correspondientes a las n empresas existentes en el mercado, entonces nos encontramos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: V_{i1} (i=1,2,...,n) que, por lo general, tendrá una solución única y determinada.

4.6. Las Decisiones de Consumo-Inversión y los Precios de Equilibrio: una Deducción Alternativa de la SML.

En este epígrafe vamos a deducir los precios de equilibrio de los activos financieros y la SML suponiendo que cada individuo se enfrenta a una decisión de consumo-inversión que debe optimizar (40).

Aunque este enfoque, desde el momento que obliga a hacer mención de las funciones de utilidad de los inversores, es más complejo y no permite un análisis tan detallado de los diversos aspectos del CAPM vistos hasta ahora, sin embargo resulta muy interesante ver cómo se consigue el equilibrio de mercado cuando se agregan las demandas de cada uno de los activos financieros de todos los inversores.

Al emplear valores agregados con expectativas homogéneas, desaparecerán los gustos de los consumidores resumidos en sus respectivas funciones de utilidad y así llegaremos a las ecuaciones de los precios de equilibrio y de la SML idénticas a las ya encontradas con anterioridad en este capítulo. Al mismo tiempo, este estudio de la agregación será utilizado posteriormente en el capítulo VI sobre la relajación de los supuestos del CAPM, cuando se traten las expectativas heterogéneas y el capital humano.

En el capítulo II, al hablar sobre las decisiones de consumo-inversión, suponíamos una situación simple, de dos períodos, donde el individuo debía decidir al comienzo de cada período cómo repartir su riqueza entre consumo e inversión.

La riqueza inicial del primer período suponíamos que incluía el valor de mercado de todos sus activos financieros (41) y las rentas de su trabajo personal que recibía al principio de dicho período. Esta riqueza inicial del período 1 la repartía entre un nivel de consumo c_1 y la adquisición de una cartera de valores de un importe h_1.

En el segundo período suponíamos que el individuo no trabajaba (42), y que toda su riqueza, proveniente de la venta a comienzos del período 2 de la cartera de valores adquirida a inicios del período 1, la dedicaba al consumo, siendo dicho consumo del período 2, según (2.2):

$$\tilde{c}_2 = h_1\ (1+\tilde{R}_p) = (w_1-c_1)\ (1+\tilde{R}_p) \qquad (4.41)$$

Asimismo, en el capítulo II hicimos el supuesto de que los rendimientos de los títulos seguían una distribución normal, por lo que el rendimiento de una cartera de valores era normal y, en consecuencia, el consumo aleatorio del período 2, de acuerdo con (4.41), era también una normal.

4.6.1. El equilibrio individual

La expresión (4.41), referente al consumo del período 2, si se tiene en cuenta el valor de las distintas firmas o empresas al principio del período 2, $\tilde{V}_{j2}$, puede expresarse de otra forma alternativa:

$$\tilde{c}_{2i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\ \tilde{V}_{j2} \qquad (4.42)$$

donde: - se incluye el subindice i para hacer mención al inversor i de entre los M inversores del mercado.

- x_{ij} es la fracción de V_{j1} y, por tanto, de $\widetilde{V}_{j2}$, demandada por el inversor i en el período 1, es decir la fracción de la firma j poseída por el inversor i después de elegir su cartera óptima al principio del período 1 (43).

Tomando esperanzas y varianzas en (4.42), se tiene:

$$E(\widetilde{c}_{2i}) = E_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, E(\widetilde{V}_{j2}) \qquad (4.43)$$

$$\sigma^2(\widetilde{c}_{2i}) = \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ij} x_{ik} \operatorname{cov}(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{k2}) \qquad (4.44)$$

Como ya se demostró (44) cuando los rendimientos de los títulos son normales, la utilidad esperada se puede poner en función de c_1, $E(\widetilde{R}_p)$ y $var(\widetilde{R}_p)$, siendo dicha utilidad esperada una función creciente de c_1 y $E(\widetilde{R}_p)$ y decreciente con respecto a $var(\widetilde{R}_p)$. Teniendo en cuenta que por (4.41), el consumo del período 2 es una función directa de $\widetilde{R}_p$, se puede generalizar que la utilidad esperada de un inversor i es una función de c_{1i}, E_i y σ_i^2:

$$U_i\ (c_{1i}, E_i, \sigma_i^2) \qquad (4.45)$$

Dicha función es creciente para c_{1i} y E_i, pero decreciente respecto a σ_i^2. Es decir, que un inversor con aversión al riesgo, "ama" o le gusta el consumo del período presente y el consumo esperado del período 2, pero "odia" o le disgusta la dispersión de la función de distribución del consumo del período 2.

En este nuevo contexto, el problema con que se enfrenta el inversor i al principio del período 1, es elegir los valores de c_{1i}, x_{ij}, $j=1,2,\ldots,n$, que maximicen su utilidad esperada sujetos a la restricción de que el valor del consumo corriente del período 1 y la inversión en las distintas empresas no supere su riqueza inicial del período 1. Es decir:

$$\text{Max} \quad U_i(c_{1i}, E_i, \sigma_i^2)$$

$$\text{sujeto a:} \quad w_{1i} = c_{1i} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} V_{j1} \qquad (4.46)$$

Si suponemos que la función U_i es derivable, se puede aplicar la técnica de los multiplicadores de Lagrange y plantear la función objetivo:

$$U_i(c_{1i}, E_i, \sigma_i^2) + \lambda_i \left(w_{1i} - c_{1i} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} V_{j1}\right) \qquad (4.47)$$

Las condiciones necesarias de primer grado están formadas por el sistema de ecuaciones resultante de derivar parcialmente (4.47) con respecto a c_{1i}, x_{ij}, $j=1,2,\ldots,n$, y λ_i e igualar a cero el conjunto de estas derivadas:

$$\frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} = \frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} - \lambda_i = 0 \qquad (4.48)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial E_i} E(\tilde{V}_{j2}) + \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_i^2} 2 \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2} \tilde{V}_{k2}) - \lambda_i V_{j1} = 0$$

$$j=1,2,\ldots,n \qquad (4.49)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i} = w_{1i} - c_{1i} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} V_{j1} = 0 \qquad (4.50)$$

Llevando el valor de λ_i, resultante de (4.48), a (4.49):

$$\frac{\partial U_i}{\partial E_i} E(\tilde{V}_{j2}) + \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_i^2} 2 \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2}) - \frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} V_{j1} = 0$$

$$j=1,2,\ldots,n \qquad (4.51)$$

Por tanto, cada inversor se enfrenta a un problema tal como el planteado en (4.46) y mediante el sistema de ecuaciones expresado por (4.51) y (4.50), determina el valor óptimo de su consumo corriente en el período 1: c_{1i}, así como las distintas participaciones a comprar de las diferentes empresas al principio del período 1: x_{ij}, j=1,2,...,n. Esas fracciones deben ser tales que, si sumamos las participaciones de una empresa en particular j poseídas por todos los individuos se obtenga la unidad:

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (4.52)$$

con el fin de que se pueda conseguir el equilibrio del mercado.

Si antes de efectuar esta agregación, dividimos ambos miembros de (4.51) por $\partial U_i/\partial \sigma_i^2$, se tiene:

$$\frac{\partial U_i/\partial E_i}{\partial U_i/\partial \sigma_i^2} E(\tilde{V}_{j2}) + 2\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2}) - \frac{\partial U_i/\partial c_{1i}}{\partial U_i/\partial \sigma_i^2} V_{j1} = 0$$

$$j=1,2,\ldots,n \qquad (4.53)$$

Para ver el significado de los cocientes de las derivadas parciales de (4.53), no hay más que hallar la diferen -

cial de U_i en (4,45):

$$\frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} d\, c_{1i} + \frac{\partial U_i}{\partial E_i} d\, E_i + \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_i^2} d\, \sigma_i^2 = 0 \qquad (4.54)$$

esta ecuación nos expresa cómo puede variar c_{1i}, E_i y σ_i^2 manteniéndose constante el nivel de la utilidad esperada. En (4.54) se puede analizar cómo varían 2 cualesquiera de las 3 variables de que depende U_i dejando invariante la utilidad esperada por el inversor. Así, si queremos hallar la tasa marginal de sustitución del consumo esperado en el período 2 con respecto a la varianza del consumo del mismo período no hay más que igualar dc_{1i} a cero y despejar $d\sigma_i^2/dE_i$:

$$\frac{d\, \sigma_i^2}{d\, E_i} = - \frac{\partial U_i / \partial E_i}{\partial U_i / \partial \sigma_i^2} \qquad (4.55)$$

Del mismo modo, haciendo $dE_i = 0$ en (4.54) y despejando apropiadamente, se puede hallar la tasa marginal de sustitución del consumo del período 1 con respecto a la varianza del consumo del período 2:

$$\frac{d\, \sigma_i^2}{d\, c_{1i}} = - \frac{\partial U_i / \partial c_{1i}}{\partial U_i / \partial \sigma_i^2} \qquad (4.56)$$

Por tanto, los dos cocientes de las derivadas parciales que intervienen en (4.53) son las tasas marginales de sustitución calculadas en (4.55) y (4.56), de modo que (4.53), que representa la parte de la firma j demandada por el inversor i, puede expresarse de la siguiente manera:

$$- \frac{d\sigma_i^2}{d\, E_i} E(\tilde{V}_{j2}) + 2 \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2}) + \frac{d\sigma_i^2}{dc_{1i}} V_{j1} = 0 \qquad (4.57)$$
$$j = 1,2,\ldots,n$$

4.6.2. El equilibrio del mercado

Para hallar una expresión del valor de equilibrio de la firma j al principio del período 1, V_{j1}, es necesario agregar todas las ecuaciones de demanda de la firma j de los distintos inversores y tener en cuenta la restricción de equilibrio (4.52) (45):

$$-\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{dE_i} E(\tilde{V}_{j2}) + 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{k2}) + \sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{dc_{1i}} V_{j1} = 0$$

$$j = 1,2,\ldots,n \qquad (4.58)$$

y llamando:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{dE_i} \qquad (4.59)$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{dc_{1i}} \qquad (4.60)$$

se puede expresar (4.58) de forma más reducida como sigue:

$$-\gamma E(\tilde{V}_{j2}) + 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{k2}) + \delta V_{j1} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (4.61)$$

Para hallar el valor de mercado de equilibrio de la firma j al principio del período 1, no hay más que despejar V_{j1} en (4.61):

$$V_{j1} = \frac{\gamma}{\delta} E(\tilde{V}_{j2}) - \frac{2}{\delta}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{k2}) \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (4.62)$$

de modo que dicho valor de mercado de equilibrio de la firma j depende de su valor esperado en el período 2, de las covarianzas de su valor en el período 2 con los valores de todas las firmas del mercado en dicho período y de los gustos de los consumidores resumidos en γ y δ.

A continuación vamos a interpretar los cocientes γ/δ y $2/\delta$ con el fin de llegar a una expresión más concreta de (4.62). Como vimos en el epígrafe anterior, los valores de mercado al principio del período 1 y 2 de todos los títulos de todas las empresas eran según (4.20) y (4.21):

$$V_{M1} = \sum_{j=1}^{n} V_{j1} \qquad (4.63)$$

$$\tilde{V}_{M2} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{j2} \qquad (4.64)$$

donde la media y la varianza de $\tilde{V}_{M2}$ (que puede ser interpretada como el valor de toda la riqueza invertida en el período 1) vienen dadas por:

$$E(\tilde{V}_{M2}) = \sum_{j=1}^{n} E(\tilde{V}_{j2}) \qquad (4.65)$$

$$\sigma^2(\tilde{V}_{M2}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{k2}) \qquad (4.66)$$

Si ahora agregamos (4.62) para todas las firmas y tenemos en cuenta (4.65) y (4.66), podemos despejar y obtener la expresión explícita de $2/\delta$:

$$V_{M1} = \frac{\gamma}{\delta} E(\tilde{V}_{M2}) - \frac{2}{\delta} \sigma^2(\tilde{V}_{M2}) \qquad (4.67)$$

$$\frac{2}{\delta} = \frac{\gamma/\delta\ E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2})} \qquad (4.68)$$

y llevando el valor de (4.68) a (4.62):

$$V_{j1} = \frac{\gamma}{\delta} E(\tilde{V}_{j2}) - \left[\frac{\gamma/\delta \; E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}}{\sigma^2 \; (\tilde{V}_{M2})} \right] \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2})$$

$$j=1,2,\ldots,n \qquad (4.69)$$

Por otra parte, como:

$$\operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{M2}) = \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \sum_{k=1}^{n} \tilde{V}_{k2}) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2}) \qquad (4.70)$$

se puede escribir (4.69) del siguiente modo:

$$V_{j1} = \frac{\gamma}{\delta} E(\tilde{V}_{j2}) - \left[\frac{\gamma/\delta \; E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}}{\sigma^2 \; (\tilde{V}_{M2})} \right] \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{M2})$$

$$j=1,2,\ldots,n \qquad (4.71)$$

y si efectuamos el cambio de variable:

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{\theta} \qquad (4.72)$$

(4.71) quedaría como sigue:

$$V_{j1} = \frac{1}{\theta} \left[E(\tilde{V}_{j2}) - \left(\frac{E(\tilde{V}_{M2}) - \theta \cdot V_{M1}}{\sigma^2 (\tilde{V}_{M2})} \right) \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{M2}) \right] \qquad (4.73)$$

$$j= 1,2,\ldots,n$$

Ya hemos dado antes una interpretación del cociente $2/\delta$, y ahora nos queda por interpretar el otro cociente γ/δ o, lo que es lo mismo, $1/\theta$. Supongamos que existe una firma, llamémosle firma cero, cuyo valor de mercado en el período 2 no esté correlacionado con el valor total de mercado de todas las firmas en el período 2, esto es: $\operatorname{cov}(\tilde{V}_{02}, \tilde{V}_{M2}) = 0$. Para esta firma en particular, (4.73) se reduciría a:

$$V_{01} = \frac{1}{\theta} E(\tilde{V}_{02})$$

y despejando θ :

$$\Theta = \frac{E(\widetilde{V}_{02})}{V_{01}} = 1 + E(\widetilde{R}_0) \tag{4.74}$$

Por tanto, Θ puede ser interpretado como uno más el rendimiento esperado de los títulos de una empresa cuyo valor de mercado en el período 2 no esté correlacionado con el valor de las restantes firmas en dicho período (46).

Al mismo tiempo, si $cov(\widetilde{V}_{02},\widetilde{V}_{M2}) = 0$, se tiene que $cov(\widetilde{R}_0,\widetilde{R}_M) = 0$, ya que:

$$cov(\widetilde{R}_0,\widetilde{R}_M) = cov(\frac{\widetilde{V}_{02}}{V_{01}} - 1, \frac{\widetilde{V}_{M2}}{V_{M1}} - 1) =$$

$$= \frac{1}{V_{01}\ V_{M1}} cov\ (\widetilde{V}_{02},\widetilde{V}_{M2}) = 0 \tag{4.75}$$

Si en el mercado existe un activo libre de riesgo, de modo que se puede prestar o pedir prestado sin limitación alguna cualquier cantidad de dinero a la tasa de interés R_f, entonces podemos sustituir $E(\widetilde{R}_0)$ por R_f en (4.74), ya que por definición (47) un título libre de riesgo, denotado por el subíndice n+1, es aquel que sea cual sea la cartera arriesgada p:

$$cov(R_{n+1},\widetilde{R}_p) = 0$$

y en particular, cuando p es la cartera de mercado:

$$cov(R_{n+1},\widetilde{R}_M) = 0 \tag{4.76}$$

Por tanto, en el caso de que exista un título libre de riesgo, Θ quedaría expresado como sigue:

$$\Theta = 1 + R_f \tag{4.77}$$

En resumen, dada la interpretación de γ/δ y $2/\delta$ sólo nos queda por sustituir el valor de θ en la expresión (4.73):

$$V_{j1} = \frac{1}{1+R_f}\left[E(\tilde{V}_{j2}) - \left(\frac{E(\tilde{V}_{M2}) - (1+R_f)V_{M1}}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2})}\right)\operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2})\right] \quad j=1,2,\ldots,n \tag{4.78}$$

de modo que se obtiene una expresión del valor de mercado de la firma j al principio del período 1 idéntica a la ecuación (4.40) deducida anteriormente por otros medios.

A la expresión (4.78) se le puede dar una interpretación similar a las expresiones (4.28) y (4.39) de este capítulo. Es decir, una firma j cualquiera ofrece al posible inversor en el período 1: una rentabilidad $E(\tilde{V}_{j2})$, y el riesgo o covarianza de su valor de mercado en el período 2 con el valor total de mercado de todas las firmas en dicho período: $\operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2})$. El precio de mercado en el período 1 de una unidad de rentabilidad es:

$$\frac{1}{1+R_f} \tag{4.79}$$

mientras que el precio de mercado de una unidad de riesgo es:

$$-\frac{\left(\dfrac{E(\tilde{V}_{M2}) - (1+R_f)\,V_{M1}}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2})}\right)}{1+R_f} \tag{4.80}$$

Por otra parte, al igual que hicimos en el epígrafe anterior, se puede decir que el valor de mercado de la firma j en el período 1 es el valor actual del valor de mercado esperado ajustado al riesgo de la misma en el período 2.

Por último, queda por demostrar cómo se puede pasar de las ecuaciones de precios de equilibrio de los activos financieros dados por (4.78) a la expresión de la Línea del Mercado de los Activos Financieros. Para ello, vamos a partir de la definición (4.19) del epígrafe anterior que expresaba el rendimiento de los títulos arriesgados en función del valor que los mismos tomaban en el período 1 y 2 y tomar esperanzas como lo hicimos en (4.24):

$$E(\tilde{R}_j) = \frac{E(\tilde{V}_{j2}) - V_{j1}}{V_{j1}} \qquad (4.81)$$

y luego utilizaremos la expresión de los precios de equilibrio de los activos financieros. Así, operando en (4.78) se tiene:

$$V_{j1} - V_{j1}R_f = E(\tilde{V}_{j2}) - \left(\frac{E(\tilde{V}_{M2}) - (1+R_f)V_{M1}}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2})}\right) \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2})$$

de donde:

$$E(\tilde{V}_{j2}) - V_{j1} = V_{j1}R_f + \left(\frac{E(\tilde{V}_{M2}) - (1+R_f)V_{M1}}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2})}\right) \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2})$$

$$E(\tilde{R}_j) = \frac{E(\tilde{V}_{j2}) - V_{j1}}{V_{j1}} = R_f + \left(\frac{E(\tilde{V}_{M2}) - (1+R_f)V_{M1}}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2})}\right) \frac{\operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2})}{V_{j1}} \qquad (4.82)$$

Por otra parte, de (4.24) sabemos que:

$$\tilde{V}_{M2} = V_{M1}\,(1+\tilde{R}_M) \qquad (4.83)$$

y tomando esperanzas y varianzas en (4.83), se tiene:

$$E(\tilde{V}_{M2}) = V_{M1}(1+E(\tilde{R}_M)) \qquad (4.84)$$

$$\sigma^2(\tilde{V}_{M2}) = V_{M1}^2\,\sigma^2(\tilde{R}_M) \qquad (4.85)$$

Si ahora llevamos los valores de (4.84) y (4.85) a (4.82), nos queda:

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \left(\frac{V_{M1}(1+E(\tilde{R}_M)) - (1+R_f)V_{M1}}{V_{M1}^2\ \sigma^2(\tilde{R}_M)}\right) \frac{cov(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2})}{V_{j1}}$$

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \frac{cov(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2})}{V_{j1}\ V_{M1}} \tag{4.86}$$

y finalmente, teniendo en cuenta (4.27):

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M)$$

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \lambda^{**} cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) \tag{4.87}$$

donde (4.87) es igual a la expresión (4.12) de la SML demostrada anteriormente.

En resumen, se pueden deducir las ecuaciones de los precios de equilibrio de los activos financieros y de la SML basándose en las decisiones de consumo-inversión que debe adoptar un individuo racional.

El sistema de n+1 ecuaciones (4.50) y (4.51) proporciona los valores óptimos de c_{1i} y las x_{ij} (j=1,2,...,n) de uno cualquiera de los M inversores del mercado. Si a las ecuaciones (4.50) y (4.51) de todos y cada uno de los inversores, se añade las n ecuaciones de equilibrio del mercado dadas por (4.52), se puede determinar el equilibrio individual de cada uno de los inversores y los n valores de equilibrio de cada una de las firmas del mercado.

Aunque a primera vista parece que se determinan pre cios absolutos, como bien advierte Fama (48), "en realidad, el modelo determina únicamente los precios relativos. Hay n+1 bienes en el mercado en el período 1: las n acciones de las firmas individuales más el consumo corriente. El modelo determina los precios de las n acciones en términos de -esto es, en unidades- consumo corriente, así que el consumo corriente es numerario".

Volviendo un poco la vista atrás, en este capítulo hemos demostrado la ecuación de la SML, que es la relación fundamental del modelo de precios de equilibrio de los activos financieros, por dos vías alternativas: una, a partir de la generalización del modelo de dos parámetros de selección de carteras de Markowitz y del hecho de que la cartera de mercado es eficiente, y otra, a partir de la agregación de las decisiones de consumo-inversión de los individuos, sin necesidad de apoyarnos en la eficiencia de la cartera de mercado.

Asimismo, también conviene remarcar que tanto la SML (donde se encuentran todos los títulos y carteras, eficientes o no) como la CML (en la que únicamente se situan las carteras eficientes) se deducen en base al mismo sistema de ecuaciones (3.79), pudiéndose además pasar directamente de la CML a la SML, por lo que no resulta lógico tratarlas separadamente como si fuesen cosas completamente diferentes. En definitiva, tanto en la CML como en la SML se viene a decir lo mismo: que el mercado únicamente recompensa al individuo por soportar aquella parte del riesgo de una cartera de valores ó de un título que no se puede eliminar mediante una diversificación adecuada.

NOTAS DEL CAPITULO IV

(1) COATES, C.R.: "Investment Strategy", McGraw-Hill Book Company, New York, 1978, p. 190.

(2) SHARPE, W.F.: "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk". Journal of Finance vol. 19, nº 3, septiembre 1964, p. 425-442.
LINTNER, J.: "Security, Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification". Journal of Finance, vol. 20, nº 4, diciembre 1965, p. 587-615.
MOSSIN, J.: "Equilibrium in a Capital Asset Market". Econometrica, vol. 34, nº 4, octubre 1966, p. 768-783.

(3) COATES, C.R., op. cit., p. 190.

(4) BELLMORE, D.N., PHILLIPS, H.E. y RITCHIE, J.C.: "Investment Analysis and Portfolio Selection: An Integrate Approach". South-Western Publishing Co. Ohio, 1979, p. 200.

(5) "La línea entre teoría normativa y teoría positiva es difícil de trazar... En general, la expresión teoría de cartera se usará para referirse al enfoque normativo y la expresión teoría del mercado de capitales para designar el tratamiento positivo. No obstante, la diferencia estriba, principalmente en el uso que se ha de dar a la respectiva teoría. Solamente hay un modelo fundamental".
SHARPE, W.F.: "Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales". Ediciones Deusto. Bilbao, 1976, p. 19.

(6) "La cuestión relevante a plantearse sobre los supuestos de

la teoría no es si son realistas descriptivamente, que nunca lo son, sino si son lo suficientemente buenas aproximaciones para el propósito que se maneja".

FRIEDMAN, M.M.: "The Methodology of Positive Economics". The University of Chicago Press. Chicago, 1953, p. 15.

(7) O lo que es lo mismo, en terminología inglesa, que los inversores son "price takers".

(8) SHARPE, W.F. (1964), op. cit., p. 433.

(9) Esto implica que existe el activo libre de riesgo con el cual hemos trabajado en el capítulo anterior.

(10) "Si partimos de la inexistencia de instituciones creadoras de dinero tales como los bancos comerciales, también debe cumplirse en nuestro modelo que la suma tomada a préstamo por la totalidad de los inversores tiene que ser igual a la cantidad por ellos prestada".

No obstante, tal como se desprende del supuesto 8 sobre el funcionamiento del mercado, la tasa pura de interés R_f viene dada exógenamente al modelo, al contrario de lo que ocurre con los precios de los activos financieros arriesgados, que como se verá más adelante, son determinados por el modelo CAPM.

JEAN, W.M.: "Teoría Analítica de la Financiación". Editorial Ariel. Barcelona, 1976, p. 217.

(11) SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 103.

(12) "El atractivo del CAPM se debe a su testabilidad potencial Es un paradigma, precisamente porque está montado en térmi

nos de variables que son, al menos en principio y con la normal excepción de la distinción ex ante-ex post, observables empíricamente y testables estadísticamente. Su orientación positiva y su intuición aparentemente simple lo han hecho el modelo de equilibrio central de la economía financiera".
ROSS, S.A.: "The Current Status of the Capital Asset Pricing Model (CAMP)". Journal of Finance, vol. 33, nº 3, junio 1978, p. 885-901, p. 885.

(13) Es decir, el inversor debe estimar los n rendimientos esperados de cada uno de los títulos arriesgados, las n varianzas correspondientes y las (n(n-1))/2 covarianzas de los títulos entre sí.

(14) SHARPE, W.F. (1964), op. cit., p. 781.

(15) "En esencia el enfoque del individuo para invertir se divide en dos fases. Primero, determina una cartera óptima de activos arriesgados y luego determina la combinación más deseable del título libre de riesgo y esta cartera. Solamente la segunda fase depende de sus preferencias de utilidad".
VAN HORNE, J.: "Financial Management and Policy". Prentice-Hall International Editions. 4ª Edición. Londres, 1977 p. 56.

(16) A partir de ahora y hasta el final de este epígrafe vamos a seguir principalmente a Sharpe en su obra en castellano. SHARPE, W.F. (1976), op. cit., cap. 5.

(17) "El nivel de riesgo se obtiene prestando o tomando prestado más o menos, pero todo el mundo invierte en la misma cartera de acciones M".
JACQUILLAT, B. y SOLNIK, B.: "Mercados Financieros y Gestión de Cartera de Valores". Tecniban. Madrid, 1975, p. 111.

(18) "La cartera particular que un inversor elige dependerá de su actitud hacia el riesgo y la rentabilidad, pero la cartera óptima para todos los inversores individuales incluirá alguna combinación del activo sin riesfo f y la cartera de mercado de los activos arriesgados M".
FAMA, E.F.: "Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments". Journal of Finance, vol. 23, nº 1, marzo 1968, p. 29-40, p. 32.

(19) "Según la definición de equilibrio de un mercado, el exceso de demanda es cero para todas las mercancías. Esto es, todos los títulos del mercado deben estar en manos de alguien".
FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H.: "Análisis y Gestión de Carteras de Valores". Ediciones ICE. Madrid, 1977, p. 132.

(20) SHARPE, W.F. (1976), op.cit., p. 109.

(21) Es decir, que para una misma desviación típica tendrán un rendimiento esperado menor.

(22) La pendiente de la CML "nos dice la cantidad de rendimiento esperado adicional que es requerida por un incremento en la desviación típica".
VAN HORNE, J., op. cit., p. 55.

(23) MOSSIN, J., op. cit., p. 781.

(24) Tal como se demostró en el epígrafe 2.4 del capítulo II.

(25) Dicha relación lineal venía expresada por (3.62).

(26) Para llegar a la ecuación de la línea del mercado de los activos financieros, seguiremos el desarrollo matricial de Aftalion y Viallet, aunque con ligeras modificaciones: AFTALION, F. y VIALLET, C.: "Theorie du Portefeuille". - Presses Universitaires de France. Paris, 1977, cap. V.

(27) Los pasos necesarios para poder encontrar la relación lineal entre la rentabilidad y el riesgo de un título individual serán: Premultiplicar la expresión (4.6) por X'_e, luego por X'_q y, finalmente, eliminar λ de las dos expresiones resultantes.

(28) En la expresión (4.5) podríamos haber actuado con la matriz de varianzas-covarianzas ampliada, V_A y con un vector columna de (n+1) elementos, $\left[X | x_{n+1}\right]$ y entonces hablar de una cartera cualquiera que no contuviese únicamente títulos arriesgados, sino también al título libre de riesgo, pero ello es innecesario desde el momento en que la fila (n+1) y la columna (n+1) de la matriz ampliada están formadas por ceros, y, por tanto:

$$\left[X' \middle| x_{n+1}\right] V_A \left[\frac{X}{x_{n+1}}\right] = X' V X$$

(29) "Así, la eficiencia de la cartera de mercado y el modelo de equilibrio de los activos financieros son inseparables." COPELAND, T.E. y WESTON, J.F.: "Financial Theory and Cor-

porate Policy". Addisson-Wesley Publishing Company. United States. 1979, p. 161.

(30) Para una más amplia exposición del papel que juega el activo libre de riesgo en el CAPM, mirar:
FAMA, E.F. y MILLER, M.H.: "The Theory of Finance". Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York, 1972, p. 286-295.

(31) "El riesgo que es atribuido a los títulos es completamente exógeno. Los títulos son arriesgados porque sus precios fluctúan. Pero la causa de esta fluctuación de los precios rara vez se especifica. La literatura parece asociar el "riesgo del mercado" con el ciclo económico y el riesgo de los títulos individuales con cambios tecnológicos aleatorios o la demanda incierta. Pero cualquiera que sea la atribución hecha, tal riesgo permanece fuera del modelo".
COOTNER, P.H.: "Capital Asset Pricing in a General Equilibrium Framework". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, nº 4, noviembre 1978, p. 613-624, p. 613.

(32) SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 117.

(33) En realidad, no hacía falta hacer esta demostración, ya que al definir la cartera q dijimos que era una cartera cualquiera, no necesariamente eficiente, pero que podría serlo, por lo que la cartera q de (4.11) puede ser eficiente o no.

(34) SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 118.

(35) En realidad, la expresión (4.1) de la CML y la (4.14) de la SML son una misma cosa desde el momento que ambas se deducen desde el sistema de ecuaciones (3.79) del capítulo anterior. Aunque nosotros hemos demostrado (4.14) por medios analíticos a partir de (3.79), existe otra demostración alternativa de (4.14) a partir de (4.1).

Acabamos de ver cómo se puede pasar de (4.1) a (4.17) teniendo en cuenta que el coeficiente de correlación entre el rendimiento de cualquier cartera eficiente y el rendimiento de la cartera de mercado es la unidad. En (4.17), el mercado recompensa al precio $\lambda^* = (E(\tilde{R}_M)-R_f)/\sigma(\tilde{R}_M)$, - el riesgo de la cartera eficiente p: $cov(\tilde{R}_p,\tilde{R}_M)/\sigma(\tilde{R}_M)$. El rendimiento de una cartera eficiente compuesta por n títulos arriesgados más el título libre de riesgo es según - (3.74):

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i\tilde{R}_i + x_{n+1} R_f \qquad (4.17')$$

Llevando (4.17') a (4.17), se tiene:

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M)-R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \cdot \frac{cov(\tilde{R}_p,\tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} = R_f + \lambda^* \frac{cov(\sum_{i=1}^{n} x_i\tilde{R}_i + x_{n+1}R_f,\tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} \qquad (4.17'')$$

y recordando que debido a (3.66): $cov(R_f,\tilde{R}_M) = 0$, (4.17") queda del siguiente modo:

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \lambda^* \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} \right] \qquad (4.17''')$$

Los x_i de (4.17''') corresponden a las proporciones de los títulos arriesgados invertidos en una cartera eficiente. - Si un individuo no mantiene una cartera eficiente, sino - que se empeña en invertir la totalidad de sus recursos en un título i arriesgado, siendo nulas las proporciones invertidas en el resto de los títulos arriesgados y en el título libre de riesgo, la valoración del mercado (4.17''') para el caso particular de este individuo, quedaría como sigue:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \lambda^* \frac{cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} \qquad (4.17^{IV})$$

siendo la expresión (4.17^{IV}) idéntica a la (4.14) demostrada antes por otros medios.

Por tanto, como la contribución de un título arriesgado al riesgo o desviación típica de una cartera eficiente p, $\sigma(\tilde{R}_p)$, es según (4.17'''): $cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)/\sigma(\tilde{R}_M)$, dicha contribución es la que hay que multiplicar por λ^* a la hora de valorar el rendimiento de un título individual.

(36) "Si cada inversor debe poseer la misma combinación de títulos con riesgo, entonces el precio de los títulos debe ser tal que le induzca a poseer tal combinación".
JEAN, W.M., op. cit., p. 216.

(37) Ya que si n_i es el número de títulos de la empresa i:

$$V_{i1} = n_i \; P_{i1} \qquad (4.19')$$
$$\tilde{V}_{i2} = n_i \; \tilde{P}_{i2} \qquad (4.19'')$$

y sustituyendo (4.19') y (4.19") en (4.19):

$$\tilde{R}_i = \frac{n_i \tilde{P}_{i2} - n_i \; P_{i1}}{n_i \; P_{i1}} = \frac{\tilde{P}_{i2} - P_{i1}}{P_{i1}} \qquad (4.19''')$$

llegamos a la expresión (4.18).

(38) Para desarrollar este epígrafe nos hemos basado principalmente en la obra de:

FAMA, E.F. y MILLER, M.H., op. cit., p. 295-298.

(39) En ocasiones el valor de $\lambda^* = (E(\tilde{R}_M) - R_f)/\sigma(\tilde{R}_M)$ también se desarrolla de acuerdo con (4.22). Y así, tomando esperanzas y varianzas en (4.22) y sustituyendo los valores encontrados en λ^*:

$$\lambda^* = \frac{\dfrac{E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}}{V_{M1}} - R_f}{\dfrac{1}{V_{M1}}\,\sigma(\tilde{V}_{M2})} = \frac{E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}(1+R_f)}{\sigma(\tilde{V}_{M2})}$$

y llevándo el valor de λ^* encontrado a (4.28):

$$V_{i1} = \frac{1}{1+R_f}\left[E(\tilde{V}_{i2}) - \left(\frac{E(\tilde{V}_{M2})-V_{M1}(1+R_f)}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2})}\right)\operatorname{cov}(\tilde{V}_{i2},\tilde{V}_{M2})\right]$$

AFTALION, F. y VIALLET, C., op. cit., p. 96.

(40) Para ello nos basaremos en Fama:
FAMA, E.F.: "Foundations of Finance". Basil Blackwell. Oxford, 1977, p. 305-314.

(41) Para simplificar suponíamos que no existía otro tipo de activos.

(42) Este supuesto es necesario si se quiere evitar el tener que tratar ahora la cuestión del capital humano.

(43) Las x_{ij} suponemos que (al igual que sus equivalentes x_i del capítulo III) pueden tomar valores negativos. Por tanto, no hay restricciones en cuanto a los ventas al descubierto.

(44) En el capítulo II, ecuación (2.21).

(45) Obsérvese como en las ecuaciones de demanda de la firma j - de los distintos inversores, el valor esperado de la firma j ($E(\tilde{V}_{j2})$), su varianza (($\sigma^2(\tilde{V}_{j2}$) y covarianzas de su valor con el resto de los valores de todas las empresas (cov ($\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{k2}$)) no dependen de subíndices i alguno, es decir que estamos suponiendo que hay expectativas homogéneas, por lo que las previsiones sobre el valor futuro de las distintas empresas del mercado coinciden para los diferentes inversores.

(46) En ausencia de un activo libre de riesgo, la firma cero podría ser sustituida por la cartera beta cero del modelo de Black que veremos más adelante en el capítulo VI.
BLACK, F.: "Capital Market Equilibrium with Restrictec Borrowing". Journal of Business, vol. 45, nº 3, julio 1972, - p. 444-455.

(47) Mirar el epígrafe 3.7. del capítulo anterior.

(48) FAMA, E.F. (1977), op. cit., p. 314.

CAPITULO V

EL MODELO DE MERCADO

5.1. INTRODUCCION

Los epígrafes 5.2 y 5.3 del presente capítulo, referentes al modelo diagonal, tal vez deberían haber sido explicados a continuación del capítulo III, en el cual estudiamos el tema de la selección de cartera y la determinación de la frontera eficiente. No obstante, los restantes epígrafes, sobre el modelo de mercado, parece que tiene más sentido tratarlos ahora una vez que se conoce el modelo CAPM.

La razón por la cual hemos preferido tratar conjuntamente, en este momento, el modelo diagonal y el modelo de mercado está en que no se pueden separar ambos modelos puesto que, en nuestra opinión, el modelo de mercado es un caso particular del modelo diagonal, aunque se usa con una finalidad diferente.

Sobre el modelo diagonal de un índice y el modelo de mercado, existe una amplia confusión, como tendremos ocasión de comprobar a lo largo de los epígrafes siguientes, y tal vez aún sea mayor la confusión cuando se habla del modelo de mercado y del CAPM.

Por tanto, el objetivo de este capítulo va a ser intentar dar luz a estos problemas y aclarar, en lo posible, la confusión y controversia que se produce sobre el modelo de mercado en los artículos de los distintos autores especializa dos en temas financieros.

5.2. Los Parámetros del Modelo de un Indice

Al calcular la frontera eficiente, en el caso de n títulos arriesgados, ya advertimos que era necesario realizar una estimación previa de $(3n+n^2)/2$ parámetros. Es decir, que hay que estimar los n rendimientos esperados de cada uno de los n títulos arriesgados que componen la cartera, sus n varianzas correspondientes y las $n(n-1)/2$ covarianzas de los títulos entre sí, antes de pasar al cálculo de la frontera eficiente.

De este modo, si consideramos que una cartera puede estar compuesta por 50 títulos por ejemplo, será necesario realizar 1325 estimaciones. Si incrementamos a 75 el número de títulos candidatos a formar parte de la cartera, el número de estimaciones necesarias pasa a ser 2925. Como puede comprenderse, esto conlleva un enorme esfuerzo de cálculo previo al planteamiento del problema de determinar las carteras eficientes.

Las estimaciones de estos parámetros pueden basarse en datos históricos, siempre que se disponga de ellos y que se piense que el comportamiento futuro de los valores no va a variar sensiblemente respecto al comportamiento de los mismos observado en el pasado. Si no se dispone de estos datos históricos o si parece estar claro que el futuro no va a ser una simple prolongación del pasado, no habrá más remedio que recurrir a asignar unas probabilidades subjetivas a los distintos rendimientos posibles de los diferentes títulos que componen la cartera en base a los juicios emitidos por los analistas financieros, para finalmente con los rendimientos posibles de cada uno de los valores y sus probabilidades subjetivas calcular los rendimientos esperados, varianzas y covarianzas necesarios para plantear el problema (1).

Para tratar de paliar la laboriosa tarea de estimar el gran número de parámetros necesarios para el cálculo de la frontera eficiente Sharpe (2), recogiendo y ampliando una idea apuntada por su maestro Markowitz (3), desarrolló el modelo diagonal que supuso una notable simplificación en la determinación de la frontera eficiente al reducir considerablemente el número de estimaciones necesarias.

Sharpe supone que el rendimiento de cualquier título es explicado en su mayor parte por la relación existente entre el rendimiento de dicho título con algún índice referente al nivel o estado del mercado:

$$\tilde{R}_i = A_i + B_i \tilde{I} + \tilde{C}_i \qquad (5.1)$$

donde:

A_i: es un parámetro que indica la ordenada en el origen y expresa la parte del rendimiento $\tilde{R}_i$ explicada por variables omitidas distintas de $\tilde{I}$, es decir, la parte del rendimiento del título i que es independiente del índice de mercado.

B_i: es un parámetro que refleja la pendiente de la relación lineal entre $\tilde{R}_i$ e $\tilde{I}$. Indica la intensidad y la dirección de la influencia de $\tilde{I}$ sobre $\tilde{R}_i$.

$\tilde{C}_i$: es una perturbación aleatoria o parte del rendimiento de $\tilde{R}_i$ debida a factores desconocidos y que muchas veces actúan en sentido opuesto, por lo que tienden a compensarse. La perturbación aleatoria $\tilde{C}_i$ se supone que tiene un valor esperado nulo y una varianza positiva finita:

$$E(\tilde{C}_i) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (5.2)$$

$$\mathrm{var}(\tilde{C}_i) = \sigma^2(\tilde{C}_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (5.3)$$

$\tilde{I}$: es un índice del nivel del mercado. Puede ser el Producto Nacional Bruto, la Renta per Capita, el Indice de Precios al Consumo, un índice bursátil o cualquier otro índice que tenga una influencia importante en los rendimientos de los títulos o valores mobiliarios.

Sharpe supone, además, que:

$$\tilde{I} = A_{n+1} + \tilde{C}_{n+1} \qquad (5.4)$$

donde:

A_{n+1}: es un parámetro o valor esperado del índice $\tilde{I}$.

$\tilde{C}_{n+1}$: es una perturbación aleatoria con valor esperado nulo y varianza finita:

$$E(\widetilde{C}_{n+1}) = 0 \qquad (5.5)$$

$$\mathrm{var}(\widetilde{C}_{n+1}) = \sigma^2(\widetilde{C}_{n+1}) \qquad (5.6)$$

Por último, se supone que la covarianza entre las perturbaciones aleatorias de cualquier par de títulos es nula (4):

$$\mathrm{cov}(\widetilde{C}_i,\widetilde{C}_j) = 0 \qquad \begin{array}{c} i,j = 1,2,\ldots,n \\ i \neq j \end{array} \qquad (5.7)$$

Sharpe resume todo el modelo hasta ahora expuesto en la siguiente representación gráfica (5):

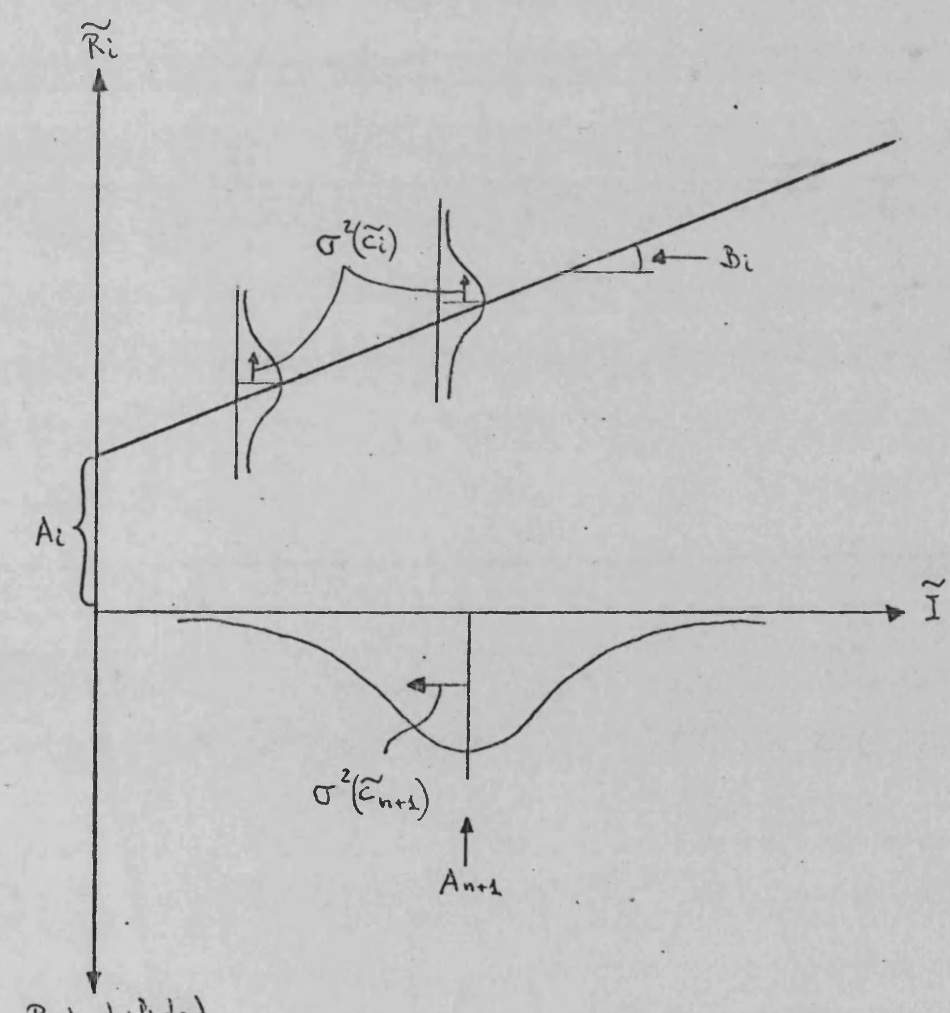


Figura 5.1

Con este modelo de generación de rendimientos, podemos calcular el rendimiento esperado de cualquiera de los títulos arriesgados tomando esperanzas en (5.1):

$$E(\tilde{R}_i) = A_i + B_i\, E(\tilde{I}) \tag{5.8}$$

y como el valor esperado del índice $\tilde{I}$, teniendo en cuenta (5.4), es:

$$E(\tilde{I}) = A_{n+1} \tag{5.9}$$

podemos poner (5.8) de la siguiente forma:

$$E(\tilde{R}_i) = A_i + B\, A_{n+1} \tag{5.10}$$

Por otra parte, tomando varianzas en (5.1) y recordando que por la nota a pie de página 4 de este capítulo:

$$\mathrm{cov}(\tilde{I},\tilde{C}_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{5.11}$$

tenemos:

$$\sigma^2(\tilde{R}_i) = B_i^2\, \sigma^2(\tilde{I}) + \sigma^2(\tilde{C}_i) \tag{5.12}$$

y como $\sigma^2(\tilde{I})$, tomando varianzas en (5.4), es:

$$\sigma^2(\tilde{I}) = \sigma^2(\tilde{C}_{n+1}) \tag{5.13}$$

llevando (5.13) a (5.12) se tiene finalmente que:

$$\sigma^2(\tilde{R}_i) = B_i^2\, \sigma^2(\tilde{C}_{n+1}) + \sigma^2(\tilde{C}_i) \tag{5.14}$$

Por último, la covarianza entre los rendimientos de cualquier par de títulos, apoyándonos en (5.1), queda:

$$\mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_j) = E\left[(\tilde{R}_i - E(\tilde{R}_i))\ (\tilde{R}_j - E(\tilde{R}_j))\right] =$$

$$\mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_j) = E\left[(B_i(\tilde{I}-A_{n+1}) + \tilde{C}_i)\ (B_j(\tilde{I}-A_{n+1}) + \tilde{C}_j)\right] =$$

$$= E\left[B_iB_j(\tilde{I}-A_{n+1})^2 + B_i(\tilde{I}-A_{n+1})\tilde{C}_j + B_j(\tilde{I}-A_{n+1})\tilde{C}_i + \tilde{C}_i\tilde{C}_j\right] \quad (5.15)$$

y recordando (5.11) y (5.7), resulta que las esperanzas de todos los términos contenidos en el corchete de (5.15) son nulas con la excepción del primero de los términos, es decir:

$$\mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_j) = B_iB_j\,\sigma^2(\tilde{I}) = B_iB_j\,\sigma^2(\tilde{C}_{n+1}) \qquad (5.16)$$

Las expresiones (5.10), (5.14) y (5.16) nos proporcionan las estimaciones necesarias para plantear y resolver un problema de selección de cartera. Pero con la ventaja de que ahora para calcular los $(3n+n^2)/2$ datos de partida, únicamente es necesario estimar:

1) Los parámetros A_i, B_i y $\sigma^2(\tilde{C}_i)$ de cada uno de los n títulos arriesgados.

2) La media (A_{n+1}) y la varianza ($\sigma^2(\tilde{C}_{n+1})$) del índice $\tilde{I}$.

Es decir, solamente es necesario realizar 3n+2 estimaciones frente a las $(3n+n^2)/2$ de antes. Con lo cual por ejemplo en el caso de una cartera compuesta por 75 títulos, las estimaciones se reducen de 2825 a 227, lo que es una muestra de la gran simplificación conseguida (6).

Pero solamente se obtienen ventajas reduciendo el número de estimaciones necesarias para resolver el problema, sino que si planteamos directamente el problema de la determinación de la frontera eficiente en base al proceso generador de rendimientos que nos ofrece la ecuación (5.1), los cálculos a realizar para obtener una cartera eficiente también se simplifican, ya que la matriz de varianzas-covarianzas se transforma en una matriz diagonal (7). Veámoslo.

5.3. El Modelo Diagonal de Sharpe

En el capítulo II, vimos que el rendimiento de una cartera de valores era la media ponderada de los rendimientos de los títulos que la componían:

$$\widetilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \widetilde{R}_i \qquad (5.17)$$

Sustituyendo (5.1) en (5.17), se tiene que:

$$\widetilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i (A_i + B_i \widetilde{I} + \widetilde{C}_i) \qquad (5.18)$$

Si centramos nuestra atención en uno cualquiera de los sumandos de (5.17), veremos que la contribución del rendimiento de uno de los títulos al rendimiento de la cartera puede ser dividida en dos partes:

$$x_i(A_i + B_i\widetilde{I} + \widetilde{C}_i) = x_i(A_i + \widetilde{C}_i) + x_i B_i \widetilde{I}$$

una que depende de las características propias del título: $x_i(A_i + \widetilde{C}_i)$ y otra que depende de la relación del título en cuestión con el índice del mercado: $x_i B_i \widetilde{I}$.

Del mismo modo, operando en (5.17) se puede llegar a que una cartera está compuesta por una inversión en las características propias de los n títulos que la componen y otra inversión en el índice:

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i(A_i+\tilde{C}_i) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i B_i\right) \tilde{I} \qquad (5.19)$$

llamando:

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i B_i \qquad (5.20)$$

y teniendo en cuenta (5.4), podemos expresar (5.19) como sigue:

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i(A_i+\tilde{C}_i) + x_{n+1}\,(A_{n+1} + \tilde{C}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(A_i+\tilde{C}_i) \qquad (5.21)$$

Finalmente, tomando esperanzas y varianzas en (5.21):

$$E(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i\, A_i \qquad (5.22)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\; \sigma^2(\tilde{C}_i) \qquad (5.23)$$

Con las expresiones (5.22) y (5.23), acabadas de calcular, ya estamos en condiciones de poder plantear el problema de la determinación de las carteras eficientes tal como lo hicimos en el epígrafe 3.2 del tercer capítulo. Es decir:

$$\text{Min } \alpha = \sigma^2(\tilde{R}_p) - \lambda\, E(\tilde{R}_p)$$

$$\text{sujato a: } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (5.24)$$

pero ahora, al sustituir (5.22) y (5.23) en (5.24), habrá que tener en cuenta que se ha añadido una nueva restricción con la definición (5.20), por lo que el problema quedará definitivamente planteado como:

$$\text{Min } \alpha = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \, \sigma^2(\tilde{C}_i) - \lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i A_i \qquad (5.25)$$

$$\text{sujeto a: } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (5.26)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i B_i = x_{n+1} \qquad (5.27)$$

El paso siguiente sería aplicar mínimos condicionados de Lagrange y resolver el problema. Pero no lo haremos, ya que nuestro objetivo en este epígrafe es simplemente mostrar la simplificación obtenida con este nuevo planteamiento.

Si observamos (5.23), veremos que la varianza de la cartera p se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \sigma^2(\tilde{C}_i) =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2(\tilde{C}_1) \cdots & 0 & 0 \\ 0 \quad \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ 0 \quad \cdots & \sigma^2(\tilde{C}_n) \cdots & 0 \\ 0 \quad \cdots & 0 & \sigma^2(\tilde{C}_{n+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

es decir, que ahora la matriz de varianzas-covarianzas es diagonal y todas las covarianzas son nulas. De ahí el nombre de "modelo diagonal" dado por Sharpe (8) a su formulación.

Como la matriz inversa de una matriz diagonal es mucho más fácil de calcular, el planteamiento del problema de la selección de cartera en base al modelo diagonal no sólo permite reducir el número de estimaciones necesarias de $(3n+n^2)/2$ a $(3n+2)$, sino que hace que los cálculos siguientes, cuando ya se está resolviendo el problema, sean mucho más rápidos.

A continuación podríamos introducir el título libre de riesgo a los n títulos arriesgados hasta ahora considerados, con lo cual llegaríamos a los mismos resultados del epígrafe 3.7, sólo que ahora la frontera eficiente sería la recta que partiendo del punto $(R_f,0)$ es tangente a la frontera eficiente de los títulos arriesgados calculada con el uso del modelo diagonal (ecuaciones (5.25), (5.26) y (5.27)). Sin embargo, no realizaremos todos los pasos necesarios para probar ésto ya que lo consideramos falto de interés; como antes ya lo apuntamos, el objetivo fundamental de esta sección es simplemente mostrar la simplificación introducida con el modelo diagonal en el problema de la selección de cartera.

Al igual que en los análisis de regresión lineal, la variable dependiente puede estar en función de una o más variables independientes, podemos plantear un modelo donde los rendimientos de los títulos dependen de más de un índice, es decir, podemos trabajar con modelos de dos índices o de tres índices o de índices múltiples. Aunque con la introducción de más de un índice los cálculos son más complicados, cabría esperar como contrapartida que las fronteras eficientes de un modelo de dos índices dominasen a las fronteras eficientes de un modelo con un índice (es decir, que estuviesen situadas más hacia arriba y más hacia la izquierda en los ejes rentabilidad-riesgo), puesto que un modelo con dos índices usa mayor información y tiene en cuenta un mayor número de interrelaciones. Sin embargo, aunque han sido pocos los estudios que se han llevado a cabo sobre ésto, parece ser que hay una cierta unanimidad (9) en que la frontera eficiente obtenida por el modelo de la selección de cartera de Markowitz domina a las fronteras eficientes de modelos con uno o varios índices (10). Pero en cambio, por lo que respecta a la comparación entre modelos de un índice y modelos de índices múltiples, Cohen y Pogue (11) han llegado a la sorprendente conclusión de que el modelo de un sólo índice de Sharpe es superior en eficiencia al modelo de índices múltiples.

Wallingford (12) por su parte analizando una muestra menor, de sólo 20 títulos frente a los dos casos de 75 y 150 títulos respectivamente analizados por Cohen y Pogue, llega a la conclusión contraria.

Por tanto, no se está en condiciones de establecer conclusiones definitivas sobre la eficiencia de los modelos de uno o varios índices, más si se tiene en cuenta que la frontera eficiente de cualquiera de los modelos es muy sensible al número de títulos que previamente se eligen al azar para formar parte de la cartera a optimizar.

5.4. El Modelo de Mercado

El modelo diagonal hemos visto que tiene como única finalidad simplificar el cálculo de la frontera eficiente de Markowitz, de modo que se reduzca el número de estimaciones necesarias y que los cálculos consiguientes sean más rápidos al ser diagonal la matriz de varianzas-covarianzas. Al tratar este modelo en los dos epígrafes anteriores, definimos a $\tilde{I}$ como un índice que influía sobre los rendimientos de los títulos y que reflejaba el nivel del mercado o la marcha de la economía como un todo.

Cabe resaltar como en ningún momento concretamos cuál de entre los posibles índices que proporcionan los servicios de estadística y de uso frecuente entre los economistas era al que hacía referencia $\tilde{I}$. La razón de ello está en que si concretamos que $\tilde{I}$ es un índice que refleja el rendimiento de la cartera de mercado (13): $\tilde{R}_M$, entonces el modelo diagonal pasa a llamarse en la literatura financiera "modelo de mercado" (14). En palabras de Hagin (15), "el modelo de mercado describe la relación entre el rendimiento de los títulos individuales (o las carteras) y el rendimiento de la cartera de mercado". Es por ello que "el modelo de mercado constituye una potente herramienta para la comprensión del comportamiento de los mercados financieros" (16).

Nosotros siguiendo la costumbre ya establecida hemos preferido separar los dos modelos ya que sus finalidades son diferentes: el modelo diagonal intenta simplificar la determinación de la frontera eficiente, mientras que el modelo de mercado se ha usado como un modelo empírico ex-post de rendimientos de equilibrio similar en apariencia al modelo de precios de equilibrio ex-ante de los activos financieros desarrollado en el capítulo anterior, siendo utilizado en ocasiones para probar la validez empírica del CAPM. De modo que "mientras el CAPM es una abstracción y una simplificación de la teoría del mercado de capitales, el modelo de mercado no está explícitamente ligado a ninguna teoría en particular. El modelo de mercado es simplemente una descripción de la relación que existe entre los rendimientos de los títulos y del mercado... La construcción que es usada para describir la relación del modelo de mercado es la línea característica del título" (17).

Por otra parte, el modelo de mercado también ha sido usado de forma complementaria al CAPM cuando partiendo de la SML se supone luego que el proceso generador de los rendimientos es el modelo de mercado y se intenta expresar los rendimientos de los títulos o carteras en función de su Beta ex-post.

Por ello, como los términos modelo diagonal y modelo de mercado se usan como cosas distintas, aunque en realidad el modelo de mercado no es más que un caso particular del modelo diagonal en el caso que $\tilde{I}$ sea $\tilde{R}_M$, hemos preferido tratarlos por separado y usar símbolos distintos en la exposición de ambos modelos. Además, ahora vamos a desarrollar el modelo de mercado partiendo directamente del modelo de regresión lineal de dos variables. Las dos variables de la regre -

sión serán $\tilde{R}_i$ y $\tilde{R}_M$. Así si ajustamos una línea recta por mínimos cuadrados a la nube de puntos proporcionada por los datos ex-post de $\tilde{R}_i$ y $\tilde{R}_M$, tendríamos que hacer la siguiente hipótesis previa (18):

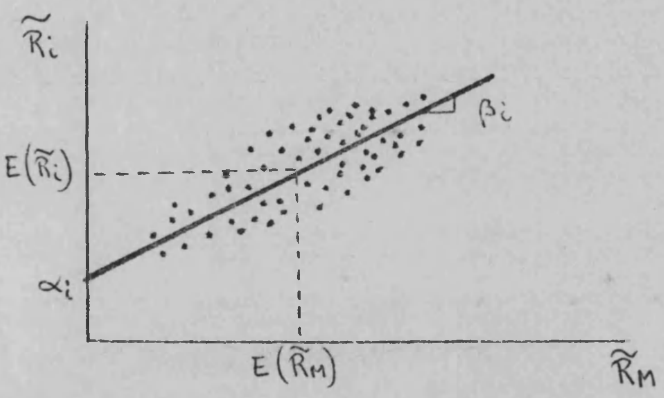


Figura 5.2

$$\tilde{R}_{it} = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_{Mt} + \tilde{\varepsilon}_{it} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\ldots,n \\ t=1,2,\ldots,T \end{matrix} \tag{5.28}$$

y haciendo omisión del subíndice t con el fin de simplificar la expresión:

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_M + \tilde{\varepsilon}_i \tag{5.29}$$

donde α_i y β_i son parámetros propios de cada título a estimar en base a las observaciones sobre $\tilde{R}_i$ y $\tilde{R}_M$ de que se dispongan y $\tilde{\varepsilon}_i$ es la perturbación aleatoria con media cero y varianza finita (19):

$$E(\tilde{\varepsilon}_i) = 0 \tag{5.30}$$

$$Var(\tilde{\varepsilon}_i) = \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i) \tag{5.31}$$

Además, se hacen los supuestos de que son independientes las perturbaciones aleatorias de los diferentes títulos, así como también las perturbaciones aleatorias de los títulos con respecto al índice $\widetilde{R}_M$:

$$\mathrm{cov}(\widetilde{\varepsilon}_i, \widetilde{\varepsilon}_j) = 0 \qquad i,j=1,2,\ldots,n \quad i\neq j \qquad (5.32)$$

$$\mathrm{cov}(\widetilde{\varepsilon}_i, \widetilde{R}_M) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (5.33)$$

A la expresión (5.28) Treynor (20) la llama "recta característica del título i" y es la base de todo el modelo de mercado.

Si consideramos distintas muestras de $\widetilde{R}_i$ y $\widetilde{R}_M$, los parámetros α_i y β_i también pueden considerarse como variables aleatorias con su función de distribución particular. Como en el análisis de regresión lineal se hace el supuesto de que las perturbaciones aleatorias siguen una distribución normal de media cero y varianza finita constante y al ser los parámetros α_i y β_i funciones de las $\widetilde{\varepsilon}_i$, se tiene que α_i y β_i también siguen una distribución normal, con lo cual los rendimientos de los títulos son normales (ver ecuación (5.29)). En consecuencia, tanto en el modelo de mercado como en el CAPM se hace el supuesto de que los rendimientos de los títulos siguen una distribución normal, aunque en el modelo de mercado el supuesto de la normalidad está implícito en el supuesto de que las perturbaciones aleatorias se comportan como una normal de media cero y varianza finita constante.

Si tomamos esperanzas en la ecuación (5.29) llegamos a que:

$$E(\widetilde{R}_i) = \alpha_i + \beta_i E(\widetilde{R}_M) \qquad (5.34)$$

Si ahora suponemos que $\alpha_i = R_f(1-\beta_i)$ y llevamos este valor a (5.34):

$$E(\tilde{R}_i) = R_f\,(1-\beta_i) + \beta_i E(\tilde{R}_M) = R_f + \beta_i(E(\tilde{R}_M)-R_f) \tag{5.35}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que β_i de acuerdo con la estimación proporcionada por el modelo de regresión lineal es (21):

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}\,(\tilde{R}_i,\tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \tag{5.36}$$

llegamos a que (5.35) puede expresarse como:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \cdot \frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} \tag{5.37}$$

Por tanto, cuando la estimación de α_i proporcionada por el método de los mínimos cuadrados coincide con el valor: $R_f(1-\beta_i)$, el modelo de mercado, de carácter empírico, se puede usar como un medio para testar la validez del CAPM en base a datos ex-post (22).

La coincidencia entre (5.37) y (4.14) es la causa de que muchas veces se use el modelo de mercado para contrastar la validez del CAPM. En la medida en que en la SML proporcionada por (4.14) estaban todos los títulos y todas las carteras, eficientes o no, se puede usar la ecuación (5.29) tanto a nivel de títulos individuales como de carteras. Normalmente, los resultados a que se llega expresando (5.29) a nivel de carteras son mejores, ya que en las carteras los errores -

de medida suelen compensarse y las estimaciones son mejores - que usando (5.29) a nivel de títulos individuales.

5.5. Análisis del Riesgo. Volatilidad

Vista esta aplicación del modelo de mercado como medio para testar el modelo de precios de equilibrio de los activos financieros, vamos a pasar a ver dos conceptos muy usados a nivel teórico y empírico: el riesgo sistemático (o riesgo no diversificable) y el resgo no sistemático (o riesgo diversificable).

"Una línea característica de un título es una aproximación de la verdadera relación entre R_i y R_M. Los puntos - que no están en la línea son posibles y probables. Existen - dos orígenes de incertidumbre con respecto a la rentabilidad real de un título:

1. El valor real de R_M es incierto.
2. El grado de divergencia entre el punto real y la línea característica del título es incierto.

A estas dos fuentes de incertidumbre se les puede - dar una definición formal. A la primera se le llama riesgo - sistemático y a la segunda riesgo no sistemático" (23).

Así, si tomamos varianzas en (5.29) y teniendo en -

cuenta (5.34) y (5.35):

$$\sigma^2(\tilde{R}_i) = E\left[(\tilde{R}_i - E(\tilde{R}_i))^2\right] = E\left[(\beta_i(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M)) + \tilde{\mathcal{E}}_i)^2\right] =$$

$$= E\left[\beta_i^2(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M))^2 + 2\beta_i(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M))\tilde{\mathcal{E}}_i + \tilde{\mathcal{E}}_i^2\right] =$$

$$= \beta_i^2\,\sigma^2(\tilde{R}_M) + \sigma^2(\tilde{\mathcal{E}}_i) \qquad (5.38)$$

Por tanto, la varianza de un título puede descomponerse en dos partes (24):

$$\beta_i^2\,\sigma^2(\tilde{R}_M) = \text{Riesgo sistemático} \qquad (5.39)$$

$$\sigma^2(\tilde{\mathcal{E}}_i) = \text{Riesgo no sistemático} \qquad (5.40)$$

El riesgo sistemático se debe a la relación existente entre el rendimiento del título con el rendimiento de la cartera de mercado y veremos, más adelante, que no se puede eliminar o diversificar dentro de una cartera. En cambio, el riesgo no sistemático se puede diversificar o eliminar por completo en una cartera eficiente.

Al igual que se habla de riesgo sistemático y no sistemático a nivel de títulos individuales, también se puede extender ambos conceptos a nivel de carteras. Como el rendimiento de una cartera es la media ponderada del rendimiento de los títulos que la componen, se tiene que:

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\tilde{R}_i \qquad (5.41)$$

Si ahora sustituimos $\tilde{R}_i$ por el valor que proporciona la ecuación (5.29) del modelo de mercado:

$$\widetilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i + \beta_i \widetilde{R}_M + \widetilde{\mathcal{E}}_i) \qquad (5.42)$$

$$\widetilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i \widetilde{R}_M + \sum_{i=1}^{n} x_i \widetilde{\mathcal{E}}_i \qquad (5.43)$$

y llamando

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = \alpha_p \qquad (5.44)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i = \beta_p \qquad (5.45)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \widetilde{\mathcal{E}}_i = \widetilde{\mathcal{E}}_p \qquad (5.46)$$

se puede finalmente expresar el rendimiento de una cartera - del siguiente modo:

$$\widetilde{R}_p = \alpha_p + \beta_p \widetilde{R}_M + \widetilde{\mathcal{E}}_p \qquad (5.47)$$

Por tanto, la ecuación que proporciona el modelo de mercado para el rendimiento de una cartera ((5.47)) es igual a la media ponderada de las ecuaciones de los títulos i ((5.29)) que componen dicha cartera, siendo x_i los coeficientes de ponderación.

Tomando varianzas en (5.43), y teniendo presente - (5.32) y (5.33), se llega a que:

$$\sigma^2(\widetilde{R}_p) = \beta_p^2\, \sigma^2(\widetilde{R}_M) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma^2(\widetilde{\mathcal{E}}_i) = \beta_p^2 \sigma^2(\widetilde{R}_M) + \sigma^2(\widetilde{\mathcal{E}}_p) \qquad (5.48)$$

La varianza de una cartera es una medida adecuada - de su riesgo si nos situamos en los ejes (E, σ^2), tal como vimos en el epígrafe 2.3 del capítulo II, por lo que el riesgo total de una cartera puede dividirse en dos partes:

$$\beta_p^2 \sigma^2(\tilde{R}_M) = \text{Riesgo sistemático o no diversificable} \quad (5.49)$$

$$\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_p) = \text{Riesgo no sistemático o diversificable} \quad (5.50)$$

Si consideramos una cartera compuesta por n títulos que intervienen en la misma proporción:

$$x_i = 1/n \qquad (5.51)$$

y llevamos el valor de x_i supuesto en (5.51) a (5.48), podremos comprender por qué el riesgo sistemático no es diversificable, mientras que el riesgo no sistemático se puede prácticamente eliminar:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \beta_p^2 \sigma^2(\tilde{R}_M) + (\tfrac{1}{n})^2 \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_1) + (\tfrac{1}{n})^2 \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_2) + \dots +$$

$$+ (\tfrac{1}{n})^2 \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_n) =$$

$$= \beta_p^2 \sigma^2(\tilde{R}_M) + \frac{\left[(\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_1) + \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_2) + \dots + \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_n))/n\right]}{n}$$

(5.52)

Si ahora suponemos que el promedio de las varianzas de las perturbaciones aleatorias es un número finito K, se - puede expresar (5.52) como sigue:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \beta_p^2 \sigma^2(\tilde{R}_M) + \frac{k}{n} \qquad (5.53)$$

Haciendo tender n a infinito, es decir, suponiendo que la cartera está compuesta por un número lo suficientemente grande - de valores, la varianza de dicha cartera queda aproximadamente igual a su riesgo sistemático, habiéndose eliminado en su mayor parte el riesgo no sistemático:

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) \simeq \beta_p^2 \sigma^2(\tilde{R}_M) \qquad (5.54)$$

En la medida que $\sigma^2(\tilde{R}_M)$ es una constante para cualquier cartera en la ecuación (5.48), el riesgo de una cartera dependerá de las características propias de los títulos que contiene:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i)$$

y de la respuesta del rendimiento de la cartera a las fluctuaciones del rendimiento de la cartera de mercado:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i$$

Al parámetro β_p se le suele denominar coeficiente de volatilidad o coeficiente beta y como $\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i)$ se puede eliminar casi en su totalidad, como acabamos de ver, β_p se puede tomar como una medida del riesgo en las carteras bien diversificadas. Así, según (5.54), a mayor β_p, mayor riesgo. Pero al mismo tiempo, como cabía esperar, las carteras más arriesgadas son las que ofrecen un mayor rendimiento esperado ya que si tomamos esperanzas en (5.47):

$$E(\tilde{R}_p) = \alpha_p + \beta_p E(\tilde{R}_M) \qquad (5.55)$$

Es decir, que se vuelve a llegar al mismo (25) resultado del CAPM referente a que el inversor racional únicamente acepta correr un mayor riesgo si con ello espera obtener una mayor rentabilidad.

A continuación vamos a calcular cuál es la beta de la cartera de mercado con el fin de poder clasificar las carteras de valores en agresivas o defensivas, según que sus betas sean mayores o menores que la beta de la cartera de mercado. Como la cartera de mercado está compuesta por todos los títulos y en las proporciones que los mismos intervienen en el mercado, el rendimiento de la cartera de mercado será:

$$\tilde{R}_M = \sum_{i=1}^{n} x_i^M \tilde{R}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^M (\alpha_i + \beta_i \tilde{R}_M + \tilde{\mathcal{E}}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^M \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^M \beta_i \tilde{R}_M + \sum_{i=1}^{n} x_i^M \tilde{\mathcal{E}}_i =$$

$$= \alpha_M + \beta_M \tilde{R}_M + \tilde{\mathcal{E}}_M \qquad (5.56)$$

Pero teniendo en cuenta que el valor del parámetro β_i es $\mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)/\sigma^2(\tilde{R}_M)$:

$$\beta_M = \sum_{i=1}^{n} x_i^M \beta_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^M \ \mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} = \frac{\sigma^2(\tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} = 1 \qquad (5.57)$$

y además, como la estimación mínimo cuadrática de α_i es $E(\tilde{R}_i) - \beta_i E(\tilde{R}_M)$:

$$\alpha_M = \sum_{i=1}^{n} x_i^M \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^M (E(\tilde{R}_i) - \beta_i E(\tilde{R}_M)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^M E(\tilde{R}_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i^M \beta_i \cdot E(\tilde{R}_M) \qquad (5.58)$$

y por (3.91) y (5.57):

$$\alpha_M = E(\tilde{R}_M) - 1 \cdot E(\tilde{R}_M) = 0 \qquad (5.59)$$

por lo que (5.56) queda:

$$\tilde{R}_M = \tilde{R}_M + \sum_{i=1}^{n} x_i^M \tilde{\mathcal{E}}_i \tag{5.60}$$

y para que (5.60) tenga sentido, debe darse que:

$$\tilde{\mathcal{E}}_M = \sum_{i=1}^{n} x_i^M \tilde{\mathcal{E}}_i = 0 \tag{5.61}$$

Por tanto, la beta de la cartera de mercado es por (5.57) igual a 1, de modo que las carteras que tienen una beta superior a 1 son llamadas carteras agresivas, ya que cuando el mercado sube (baja), dichas carteras suben (bajan) pero con mayor fuerza, de una forma más que proporcional al cambio experimentado por el mercado. Mientras que las carteras con betas inferiores a la unidad se les llama carteras defensivas porque las alzas o bajas de sus rendimientos son menos que proporcionales a las alzas o bajas del mercado.

Como es evidente, si se espera que el mercado va a subir es conveniente proveerse de una cartera agresiva, ya que con ello se conseguirán unas ganancias superiores a la media del mercado, mientras que si se espera que el mercado va a bajar, hay que invertir en una cartera defensiva.

Por último, antes de pasar al siguiente epígrafe sobre el modelo de mercado y el CAPM, vamos a sacar a la luz una inconsistencia interna que tiene el modelo de mercado.

Por muchos autores relevantes (26) ha sido generalmente aceptado el hecho de que el modelo de mercado no respeta uno de los supuestos en que se basa (27), en concreto, el supuesto (5.33):

$$\operatorname{cov}(\tilde{\mathcal{E}}_i, \tilde{R}_M) = 0$$

ya que se afirma que en la medida que $\tilde{R}_M$ contiene a $\tilde{R}_i$, por (5.56), y $\tilde{R}_i$ depende a su vez de $\tilde{\varepsilon}_i$, por (5.29), resulta que la covarianza de la perturbación aleatoria de cualquier título i con el rendimiento de la cartera de mercado debe ser distinta de cero, al ser por (5.31) la varianza de la perturbación aleatoria de un título finita: $\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_i) = \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i) \neq 0$. Es decir, que:

$$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{R}_M) \neq 0$$

Esta inconsistencia del modelo de mercado, según Fama (28), introduce un error aunque es muy pequeño. Y la solución a dicha inconsistencia está siempre en que $\tilde{R}_M$ no sea un índice bursátil que contenga a $\tilde{R}_i$, sino otro índice económico cualquiera.

Sin embargo, la inconsistencia que acabamos de apuntar no es cierta, ya que como el mismo Bama demuestra en otro artículo posterior (29), la $\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{R}_M)$ es siempre nula. Así, si sustituímos en (5.33) $\tilde{\varepsilon}_i$ por el valor que se deduce de (5.29):

$$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{R}_M) = \mathrm{cov}(\tilde{R}_i - \alpha_i - \beta_i \tilde{R}_M, \tilde{R}_M)$$

y sustituyendo β_i por su valor estimado en (5.36):

$$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{R}_M) = \mathrm{cov}\left(\tilde{R}_i - \alpha_i - \frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \tilde{R}_M, \tilde{R}_M\right) =$$

$$= \mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) - \frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \sigma^2(\tilde{R}_M) =$$

$$= \mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) = 0 \qquad (5.62)$$

Donde sí que se produce la inconsistencia (30) es en el supuesto (5.32), ya que según se afirma en tal supuesto la covarianza entre las perturbaciones aleatorias de cualquier par de títulos es siempre nula desde el momento en que dichas perturbaciones aleatorias se suponen independientes:

$$\operatorname{cov}(\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_j) = 0 \qquad i,j = 1,2,\ldots,n \qquad i \neq j$$

pero sin embargo, según se desprende de (5.61), existe una relación lineal entre las perturbaciones aleatorias del modelo de mercado, ya que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^M \tilde{\varepsilon}_i = 0$$

lo cual es inconsistente con (5.32) desde el momento que (5.61) asegura que existe una interdependencia entre las perturbaciones aleatorias de los títulos individuales dentro de la cartera de mercado (31).

5.6. El Modelo de Mercado y el CAPM

En el capítulo III llegamos a que la ecuación (4.14) o SML, era la relación fundamental del CAPM:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \cdot \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} =$$

$$= R_f + \lambda^* \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} \qquad (5.63)$$

Asimismo, también vimos que (4.14) se podía derivar de (4.17''') cuando en vez de ser p una cartera eficiente, p era una cartera ineficiente compuesta por un solo título. Por otra parte, la ecuación (4.17''') era la expresión de la CML teniendo en cuenta que el coeficiente de correlación entre el rendimiento de una cartera eficiente cualquiera y el rendimiento de la cartera de mercado era siempre la unidad:

$$E(\widetilde{R}_p) = R_f + \lambda^* \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_M)}{\sigma(\widetilde{R}_M)} \right] \qquad (5.64)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo sumando del segundo término de (5.63) por la desviación típica de la cartera de mercado y llamando β_i^* a la beta del título i en base a los valores ex-ante de $\widetilde{R}_i$ y $\widetilde{R}_M$, esto es (32):

$$\beta_i^* = \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_M)}{\sigma^2(\widetilde{R}_M)} \qquad (5.65)$$

puede ponerse (5.63) como sigue:

$$E(R_i) = R_f + \lambda^* \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_M)}{\sigma(\widetilde{R}_M)} = R_f + \lambda^* \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_M)}{\sigma^2(\widetilde{R}_M)} \sigma(\widetilde{R}_M) =$$

$$= R_f + \lambda^* . \beta_i^* . \sigma(\widetilde{R}_M) \qquad (5.66)$$

A esta misma expresión se puede llegar partiendo de (5.64) (recordemos que p era una cartera eficiente). Así, si operamos en (5.64) tal como lo hemos hecho en (5.63) a la hora de deducir (5.65):

$$E(\widetilde{R}_p) = R_f + \lambda^* \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_M)}{\sigma(\widetilde{R}_M)} \right] =$$

$$= R_f + \lambda^* \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\operatorname{cov}(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_M)}{\sigma^2(\widetilde{R}_M)} \cdot \sigma(\widetilde{R}_M) \right] =$$

$$= R_f + \lambda^* \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i^* \sigma(\widetilde{R}_M) \right] = R_f + \lambda^* \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i \right] \sigma(\widetilde{R}_M) \tag{5.67}$$

y definiendo:

$$\beta_p^* = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i^* \tag{5.68}$$

puede finalmente expresarse (5.67) de la siguiente manera:

$$E(\widetilde{R}_p) = R_f + \lambda^* \beta_p^* \sigma(\widetilde{R}_M) \tag{5.69}$$

Es decir, que en las carteras eficientes, el mercado recompensa al precio por reducir el riesgo, λ^*, el riesgo de dicha cartera $\beta_p^* \sigma(\widetilde{R}_M)$.

Si al igual que hicimos en la nota 35 del capítulo anterior, suponemos un indivíduo que no mantiene una cartera eficiente, sino que invierte todos sus fondos en el título arriesgado i, siendo nulas las proporciones invertidas en el resto de los títulos arriesgados y en el título sin riesgo, (5.67) quedaría como sigue:

$$E(\widetilde{R}_i) = R_f + \lambda^* \beta_i^* \sigma(\widetilde{R}_M) \tag{5.70}$$

expresión que coincide con la (5.65) antes demostrada.

A continuación, antes de seguir adelante, vamos a ver que la versión ex-post del CAPM guarda un estrecho parecido con el modelo de mercado. Asi si tenemos en cuenta (4.3), la expresión (5.66) puede ponerse como sigue:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \beta^*_i \sigma(\tilde{R}_M) = R_f + \beta^*_i (E(\tilde{R}_M) - R_f) \tag{5.71}$$

o también de esta otra forma alternativa:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f (1 - \beta^*_i) + \beta^*_i E(R_M) \tag{5.72}$$

Esta relación ex-ante del CAPM, en los estudios empíricos puede ser reemplazada por la siguiente relación ex-post (33):

$$\tilde{R}_{it} = R_{ft} (1 - \beta^*_i) + \beta^*_i \tilde{R}_{Mt} + \tilde{\varepsilon}_{it} \tag{5.73}$$

donde β^*_i es el parámetro a estimar y $\tilde{R}_{it}$ y $\tilde{R}_{Mt}$ son los rendimientos ex-post en el período (t-1, t) del activo i y la cartera de mercado M; debiéndose además cumplir que:

$$\begin{aligned} &E(\tilde{\varepsilon}_{it}) = 0 \\ &cov(\tilde{\varepsilon}_{it}, \tilde{\varepsilon}_{i,t+1}) = 0 \\ &cov(\tilde{\varepsilon}_{it}, \tilde{\varepsilon}_{jt}) = 0 \\ &cov(\tilde{\varepsilon}_{it}, \tilde{R}_{Mt}) = 0 \end{aligned} \tag{5.74}$$

La línea característica del modelo de mercado según (5.28) es:

$$\tilde{R}_{it} = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_{Mt} + \tilde{\varepsilon}_{it} \tag{5.75}$$

donde α_i y β_i son los parámetros a estimar. En el modelo de mercado, la estimación del parámetro α_i puede que dé un resultado mayor, igual o menor que $(1-\beta_i)R_{ft}$. Por lo que como bien dicen Pettit y Westerfield (34), la única diferencia entre el modelo de mercado expresado por la ecuación (5.75) y la versión ex-post del CAPM dada por (5.73), estriba en que -

el CAPM restringe el posible valor de α_i a $(1-\beta_i)R_{ft}$ (35). Por tanto, "el modelo de mercado tiene un estrecho parecido con la versión ex-post del CAPM, postulando ambas una relación lineal entre los rendimientos de los títulos individuales y los rendimientos de la cartera de todos los activos"(36).

Por otra parte, Fama y Jensen (37) han demostrado que la beta ex-ante del CAPM y la beta ex-post del modelo de mercado son aproximadamente iguales, por lo que se puede estimar la beta del CAPM mediante el modelo de mercado. Esta forma de proceder se ve además reforzada por el hecho de la estabilidad de las betas a través del tiempo (38). De modo que, en lo que sigue y hasta el final de este capítulo sustituiremos β^*_i por β_i en todas las expresiones del CAPM.

Así, (5.69) puede ahora ponerse de la siguiente forma:

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \lambda^* \beta_p \, \sigma(\tilde{R}_M) \qquad (5.76)$$

Ahora bien, $\beta_p \, \sigma(\tilde{R}_M)$ representa el riesgo total o desviación típica, $\sigma(\tilde{R}_p)$, en aquellas carteras bien diversificadas en las cuales el riesgo no sistemático ha desaparecido, ya que como vimos en (5.54):

$$\sigma^2(\tilde{R}_p) = \beta_p^2 \, \sigma^2(\tilde{R}_M) \qquad (5.77)$$

y sacando raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = \beta_p \, \sigma(\tilde{R}_M) \qquad (5.78)$$

Por tanto, según (4.16) y (5.78), en las carteras eficientes se cumple que:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_p, \tilde{R}_M)}{\sigma(\tilde{R}_M)} = \beta_p \, \sigma(\tilde{R}_M) \qquad (5.79)$$

y ello debido a que $\rho_{p,M} = 1$.

Recapitulando un poco, en (5.69) hemos demostrado que las carteras eficientes carecen de riesgo no sistemático y que, debido a ello, el mercado únicamente recompensa en los títulos individuales su riesgo sistemático (ecuación (5.70)), ya que el riesgo no sistemático se elimina en las carteras eficientes o bien diversificadas. En palabras de Sharpe: "Las carteras eficaces carecen de riesgo no sistemático... Una cartera (o título) con riesgo no sistemático no es eficaz. La medida significativa del riesgo de un título es su volatilidad (es decir, su riesgo sistemático). Esta parte se mantiene si el título se combina con otros para formar una cartera eficaz. El riesgo no sistemático, no es significativo; se "esfumará" cuando el título se combine con otros.

El riesgo total de un título no es significativo si el título ha de formar parte de una cartera diversificada (como tenía que ocurrir). Solamente se necesita considerar la parte sistemática del riesgo; y el resto se elimina por la diversificación" (39).

Todos estos resultados son lógicos, ya que el rendimiento de una cartera cualquiera según el modelo de mercado es por (5.47):

$$\tilde{R}_p = \alpha_p + \beta_p \tilde{R}_M + \tilde{\varepsilon}_p$$

Pero desde el momento que existe una correlación li neal perfecta entre R_p y R_M (en donde p y M son carteras eficientes), toda la nube de puntos debe de estar situada sobre la recta (5.47), con lo cual:

$$\tilde{\mathcal{E}}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{\mathcal{E}}_i = 0 \qquad (5.80)$$

y teniendo en cuenta la correlación perfecta entre los rendimientos de las carteras p y M:

$$\tilde{\mathcal{E}}_M = \sum_{i=1}^{n} x_i^M \tilde{\mathcal{E}}_i = 0 \qquad (5.81)$$

Con respecto a (5.81), recordemos que ya había sido deducido con anterioridad cuando, al hablar del modelo de mercado y de la cartera de mercado, llegamos a la expresión (5.61).

Hasta ahora, en lo que llevamos de esta sección, parece ser que hemos actuado con una gran coherencia, que todos los resultados deducidos son lógicos y válidos. Sin embargo, si aplicamos el modelo de mercado a la SML deducida por Lintner (40), se llega a resultados diferentes, ya que el riesgo no sistemático no resulta totalmente eliminado. La SML de Lintner con nuestros símbolos es (41):

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^M \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) \qquad (5.82)$$

La expresión (5.82) de Lintner es equivalente a la (5.63) de Sharpe, ya que en efecto:

$$\operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) = \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \sum_{j=1}^{n} x_j^M \tilde{R}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j^M \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) \qquad (5.83)$$

En el sumatorio: $\sum_{j=1}^{n} x_j^M \operatorname{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_j)$, existen (n-1) covarianzas del título i con el resto de los títulos del mercado y la covarianza del título i consigo mismo, o lo que es igual, su varianza. Según el modelo de mercado, y tal como vimos en la expresión (5.38):

$$\operatorname{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_i) = \sigma^2(\widetilde{R}_i) = \beta_i^2\,\sigma^2(\widetilde{R}_M) + \sigma^2(\widetilde{\mathcal{E}}_i) \qquad (5.84)$$

Mientras que la covarianza entre el rendimiento del título i y el rendimiento de cualquier otro título del mercado es:

$$\operatorname{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_j) = E\left[(\widetilde{R}_i - E(\widetilde{R}_i)(\widetilde{R}_j - E(\widetilde{R}_j)\right] =$$

$$= E\left[(\beta_i(\widetilde{R}_M - E(\widetilde{R}_M) + \widetilde{\mathcal{E}}_i)(\beta_j(\widetilde{R}_M - E(\widetilde{R}_M) + \widetilde{\mathcal{E}}_j)\right]$$

y teniendo en cuenta (5.32) y (5.33) se llega a que:

$$\operatorname{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_j) = \beta_i\;\beta_j\;\sigma^2(\widetilde{R}_M) \qquad (5.85)$$

Llevando (5.84) y (5.85) a (5.82), tenemos:

$$E(\widetilde{R}_i) = R_f + \frac{E(\widetilde{R}_M)-R_f}{\sigma^2(\widetilde{R}_M)}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^M \beta_i\,\beta_j\,\sigma^2(\widetilde{R}_M) + x_i^M\sigma^2(\widetilde{\mathcal{E}}_i)\right) =$$

$$= R_f + \frac{E(\widetilde{R}_M)-R_f}{\sigma^2(\widetilde{R}_M)}\left(\sigma^2(\widetilde{R}_M)\,\beta_i\sum_{j=1}^{n} x_j^M\beta_j + x_i^M\sigma^2(\widetilde{\mathcal{E}}_i)\right) \qquad (5.86)$$

y por último, de acuerdo con (5.87) se puede poner (5.86) como sigue:

$$E(\widetilde{R}_i) = R_f + \frac{(E(\widetilde{R}_M)-R_f)}{\sigma(\widetilde{R}_M)}\left[\beta_i\,\sigma(\widetilde{R}_M) + \frac{x_i^M\,\sigma^2(\widetilde{\mathcal{E}}_i)}{\sigma(\widetilde{R}_M)}\right] \qquad (5.87)$$

Si comparamos (5.87) con (5.70), veremos que ambas -

expresiones no coinciden, ya que el riesgo no sistemático en (5.87) no es completamente eliminado. Debe quedar claro que la falta de coincidencia se produce al aplicar el modelo de mercado a dos expresiones de la SML que son equivalentes.

Pero al aplicar el modelo de mercado a la SML de Lintner, se ha dejado completamente de lado el hecho de que según se deduce del CAPM en (3.107) existe una correlación lineal perfecta entre $\tilde{R}_p$ y $\tilde{R}_M$, con lo cual las carteras eficientes no tienen riesgo no sistemático y entonces al particularizar (5.69) en (5.70) no puede ni debe aparecer ningún tipo de riesgo no sistemático.

La diferencia entre los resultados (5.70) y (5.87) no se debe por tanto a la falsa inconsistencia del modelo de mercado apuntada en la sección anterior tal como así lo afirma Fama (42), sino a la omisión en la deducción que se hace a partir de la SML de Lintner del hecho de que: $\rho_{p,M} = 1$.

NOTAS DEL CAPITULO V

(1) SUAREZ SUAREZ, A.S.: "Decisiónes Optimas de Inversión y Financiación en la Empresa". Ediciones Pirámide. Madrid 1980 p. 432.

(2) SHARPE, W.F.: "A Simplified Model for Portfolio Analysis". Management Science, vol. 9, nº 1, Enero 1963, p. 277-293.

(3) MARKOWITZ, H.M.: "Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments". John Willey and Sons. New York, 1959, p. 97-101.

(4) Aunque Sharpe no hace referencia explícita al supuesto de que la perturbación aleatoria de cualquier título es independiente del nivel del índice $\tilde{I}$. Es decir, a que:

$$cov(\tilde{C}_i, \tilde{I}_i) = 0 \qquad i=1,2,...,n$$

este supuesto está subyacente en la formulación del modelo, ya que cuando posteriormente calcula la $\sigma^2(\tilde{R}_i)$ y $cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$ hace uso de él.

(5) Aunque tampoco Sharpe hace explícito el supuesto de que los rendimientos de los títulos siguen una distribución normal, implícitamente lo está haciendo, ya que en la figura 1 se han dibujado las clásicas campanas de Gauss. Además, si se tiene en cuenta que tal como se hace en el modelo de regresión lineal, las perturbaciones aleatorias se supone que tienen una distribución normal de media cero y varianza constante, entonces los estimadores de A_i y B_i son también normales y, en consecuencia, el rendimiento de cualquier título es normal.

SHARPE, W.F., op. cit., p. 283.

(6) En realidad, si se acude a los métodos estadísticos corrientes y se calcula la varianza y covarianza de cualquier par de títulos a partir de las series históricas de los rendimientos mediante las fórmulas:

$$E(\widetilde{R}_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} R_{it}$$

$$\sigma^2(\widetilde{R}_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - E(\widetilde{R}_i))^2$$

$$\mathrm{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - E(\widetilde{R}_i))(R_{jt} - E(\widetilde{R}_j))$$

Entonces, la simplificación del modelo de un índice de Sharpe respecto al modelo completo de varianzas-covarianzas de Markowitz, visto en el capítulo III, no es tal, ya que en ambos modelos, bien para calcular la $\mathrm{cov}(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_j)$ en Markowitz o la β_i en Sharpe, es necesario tener la misma información histórica de las series de los rendimientos. Es más, en el modelo diagonal de Sharpe incluso es necesaria la serie de rendimientos pasadas de $\widetilde{R}_M$, mientras que en el modelo de Markowitz no lo es.

"El modelo de mercado, que es el tema de este capítulo, estaba originalmente destinado como un medio para simplificar la tarea del analista de proporcionar los inputs necesarios. Esta argumentación, aunque está ampliamente tratada por escrito, es en realidad incorrecta; supone que los inputs necesarios podrían ser obtenidos por el análisis fundamental de los títulos. Desafortunadamente, los inputs necesarios para los modelos de selección de cartera que siguen la tradición de Markowitz tratan con abstracciones -

tales como la covarianza o la beta. El análisis fundamental de títulos... no está equipado para tratar eficazmente con abstracciones matemáticas de esta clase. Los inputs necesarios para la efectiva utilización de estos modelos de selección de cartera son obtenidos por métodos estadísticos... Contrariamente a la errónea concepción popular, el modelo de mercado no da por resultado ninguna clase de "simplificación" sino justamente lo contrario".
BELLMORE, D.H., PHILLIPS, H.E. y RITCHIE, J.C.: "Investment Analysis and Portfolio Selection". South-Western Publishing Co. Ohio 1979, p. 196.

(7) Por ello; "el tiempo requerido por el ordenador para resolver los modelos simplificados es una pequeña parte del requerido si se emplea la técnica completa de Markowitz".
FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H.: "Análisis y Gestión de Cartera de Valores". Ediciones ICE. Madrid, 1977, p. 108.

(8) SHARPE, W.F., op. cit., p. 281.

(9) En los artículos de:
COHEN, K.J. y POGUE, J.A.: "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio Selection Models". Journal of Business vol. 40, nº 2, Abril 1967, p. 166-193.
WALLINGFORD, B.A.: "A Survey and Comparison of Portfolio Selection Models". Journal of Financial and Quantitative Analysis. Junio 1967, p. 85-106.
FRANKFURTER, G.M., PHILLIPS, H.E. y SEAGLE, J.P.: "Performance of the Sharpe Portfolio Selection Model: A Comparison". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.

11, nº 2, Junio 1976, p. 195-204.
Se llega a este resultado sobre la mayor eficiencia de las fronteras de Markowitz frente a las que proporcionan los modelos de uno o varios índices.

(10) "Como es de esperar, las soluciones obtenidas empleando estas simplificaciones son sólo aproximadamente eficientes". FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H., op. cit., p. 108.

(11) COHEN, K.J. y POGUE, J.A., op. cit., p. 178-181.

(12) WALLINGFORD, B.A., op. cit.

(13) Una aproximación suficiente al rendimiento de la cartera de mercado viene dada por el rendimiento que se desprende del índice bursátil corregido por la reinversión de los dividendos. Es decir, que el rendimiento que se deriva de las series temporales del Indice Largo Total de la Bolsa de Madrid es una aproximación adecuada del rendimiento de la cartera de mercado.
BOLSA DE MADRID: "Indice Largo Total de Acciones 1941-1975" Servicio de Estudios e Información. Madrid 1975.

(14) Sobre los términos "modelo diagonal" y "modelo de mercado" ha habido en general bastante confusión, así casi todos los autores calificados de Finanzas coinciden en afirmar que Sharpe desarrolla el modelo de mercado en su famoso artículo sobre los precios de equilibrio de los activos financieros y en dicho artículo su autor afirma en la nota a pie de página 25 que dicho modelo ha sido llamado diagonal y que el mismo lo desarrolló en otro artículo anterior. De

este modo los autores hacen referencia a que el modelo de mercado es desarrollado por Sharpe y Sharpe dice que dicho modelo se llama diagonal.

SHARPE, W.F.: "Capital Asset Prices: A Theory of Market - Equilibrium under Conditions of Risk". Journal of Finance, vol. 19, nº 3, Septiembre 1964, p. 425-442.

(15) HAGIN, R.L.: "Modern Portfolio Theory". Dow Jones-Irwin. - Illinois 1979, p. 173.

(16) JACQUILLAT, B. y SOLNIK, B.: "Mercados Financieros y Gestión de Carteras de Valores". Tecniban. Madrid 1975, p.75.

(17) HAGIN, R.L., op. cit., p. 174.

(18) Los datos ex-post de $\widetilde{R}_i$ y $\widetilde{R}_M$ hacen referencia a T períodos de tiempo de igual longitud.

(19) Por supuesto, a nivel de cada título individual se hacen - los supuestos clásicos de los mínimos cuadrados:

$$\widetilde{\varepsilon}_{it} \longrightarrow N(0, \sigma^2(\widetilde{\varepsilon}_i)) \qquad t=1,2,\dots,T$$

$$\mathrm{cov}(\widetilde{\varepsilon}_{is}, \widetilde{\varepsilon}_{it}) = 0 \qquad s,t=1,2,\dots,T$$

$$\mathrm{cov}(\widetilde{\varepsilon}_{it}, \widetilde{R}_{Mt}) = 0 \qquad t=1,2,\dots,T$$

(20) TREYNOR, J.L.: "How to rate Management of Investment Funds". Harvard Business Review, Enero-Febrero 1965, p. 63-75.

(21) Recordemos que la estimación mínima cuadrática del parámetro α_i es:

$$\alpha_i = E(\widetilde{R}_i) - \beta_i E(\widetilde{R}_M)$$

(22) Hay que tener en cuenta que, aunque (5.37) coincide con -

(4.14), la expresión (5.37) se apoya en datos ex-post de las series temporales de rendimientos, mientras que la expresión (4.14) es una relación teórica deducida a partir de una serie de supuestos sobre el comportamiento de los inversores y del mercado en donde $E(\widetilde{R}_i)$, $cov(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_M)$, $\sigma(\widetilde{R}_M)$ y $E(\widetilde{R}_M)$ son estimaciones o valores ex-ante.

(23) SHARPE, W.F.: "Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales". Ediciones Deusto. Bilbao 1976, p. 124.

(24) Recordemos que $\sigma^2(\widetilde{R}_i)$ no era una medida apropiada del riesgo de un título en el contexto de una cartera de valores, según vimos en las ecuaciones (2.14) y (2.15).

(25) Con la lógica salvedad de que el CAPM es un modelo ex-ante mientras que el modelo de mercado trabaja con datos ex-post.

(26) FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H., op. cit., p. 134.
JENSEN, M.C.: "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-64". Journal of Finance, vol. 23, nº 2, Mayo 1968, p. 389-416.
FAMA, E.F.: "Risk Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments". Journal of Finance, vol. 23, nº 1, marzo 1968, p. 29-40.
AFTALION, F. y VIALLET, C.: "Theorie du Portefeuille". Presses Universitaires de France. Paris, 1977, p. 102.
ETC.

(27) Esto ha llevado a algunos autores como Jensen a trabajar con un modelo de mercado "idéntico en espíritu al modelo diagonal", y que se deduce como sigue:

De (5.29) y (5.34), se tiene que:

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_M + \tilde{\varepsilon}_i$$

$$E(\tilde{R}_i) = \alpha_i + \beta_i E(\tilde{R}_M)$$

restando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones y llamando $\tilde{\pi}$ a $(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M))$, se obtiene finalmente:

$$\tilde{R}_i - E(\tilde{R}_i) = \beta_i(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M)) + \tilde{\varepsilon}_i$$

$$\tilde{R}_i = E(\tilde{R}_i) + \beta_i \tilde{\pi} + \tilde{\varepsilon}_i$$

Según Jensen, esta nueva especificación del modelo de mercado evita la inconsistencia antes apuntada.

JENSEN, M.C.: "Risk, the Pricing of Capital Assets, and the Evaluation of Investment Portfolios". Journal of Business, vol. 42, nº 2, abril 1969, p. 167-247, p. 179.

(28) FAMA, E.F., op. cit., p. 39.

(29) FAMA, E.F.: "A Note on the Market Model and the Two-Parameter Model". Journal of Finance, vol. 28, nº 5, Diciembre 1973, p. 1181-1185, p. 1183.

(30) FAMA, E.F. (1973), op. cit., p. 1184.

(31) Por tanto, aunque "ha habido alguna confusión en la literatura financiera sobre este punto, en la que el autor Fama (1968,1973) es desafortunadamente responsable en alguna medida", también es cierto que el propio Fama rectifica en 1973 y recoge también dicha rectificación en su libro de 1977.

FAMA, E.F.: "Foundations of Finance". Basil Blackwell, Oxford.1977, p. 74.

(32) "Este no es el mismo término beta mostrado antes en la expresión característica del modelo de mercado". De ahí que le hallamos añadido un arterisco para distinguir la beta ex-ante del CAPM y la beta ex-post del modelo de mercado. BELLMORE, D.A., PHILLIPS, H.E. y RITCHIE, J.C., op. cit., p. 210-211.

(33) En el artículo de Jensen de 1968, puede encontrarse la forma de pasar de (5.72) a (5.73). JENSEN, M.C. (1968), op. cit.

(34) PETTIT, R.R. y WESTERFIELD, R,: "Using the Capital Asset Pricing Model and the Market Model to Predict Security Returns". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 9, nº 4, septiembre 1974, p. 579-605, p. 582.

(35) Obviamente, si $\alpha_i = (1-\beta_i)R_{ft}$, la β^*_i del CAPM y la β_i del modelo de mercado coinciden.

(36) PETTIT, R.R. y WESTERFIELD, R., op. cit., p. 579.

(37) FAMA, E.F. (1968), op. cit.
JENSEN, M.C. (1969), op. cit.

(38) "El trabajo empírico sobre la estabilidad de las betas históricas a lo largo del tiempo sugiere que las betas pasadas son útiles para predecir las betas futuras... Cuanto mayor es el número de títulos en una cartera, mayor es la estabilidad de la beta para esa cartera a través del tiempo. Sin embargo, incluso para títulos individuales, la información de las betas pasadas se ha encontrado que tiene un valor predictivo razonable".

VAN HORNE, J.: "Financial Management and Policy". Prentice Hall International Editions. 4ª Edición. Londres 1977, p. 60.

(39) SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 125-126.

(40) LINTNER, J.: "Security Prices, Risk, and Maximal Goins - from Diversification". Journal of Finance, vol. 20, nº 4, diciembre 1965, p. 587-615, p. 596.

(41) Desde aquí en adelante seguiremos el desarrollo hecho por Fama en su artículo de 1968.
FAMA, E.F. (1968), op. cit., p. 36-37.

(42) FAMA, E.F. (1968), op. cit., p. 38.

ANEXO A

LOS LIMITES DE LA DIVERSIFICACION.

LA DIVERSIFICACION INGENUA.

A.1. Introducción

La relación entre el riesgo de una cartera, medido por la varianza o desviación típica de la misma, y el número de títulos que la componen ha sido una preocupación constante para los estudiosos de temas financieros y el inicio de los trabajos sobre este tema puede remontarse a los primeros estudios sobre la selección de cartera (1).

El estudio de esta relación se realiza en el contexto clásico de un universo con dos parámetros: media-varianza, donde la media se considera como una medida apropiada de la rentabilidad y la varianza del riesgo. Ahora bien, en los estudios empíricos que se han hecho sobre la relación riesgo-tamaño de la cartera, se suele hacer omisión del rendimiento de la cartera, para concentrar la atención del análisis en la forma en que varía la varianza o desviación típica de una cartera de valores a medida que aumenta el número de títulos que la componen. En dichos trabajos empíricos se supone además que los títulos, que intervienen en la composición de una cartera de un tamaño determinado, tienen el mismo peso o ponderación y que se escogen al azar de entre los valores que forman parte de la muestra estudiada.

Cuando el inversor no posee información sobre el rendimiento esperado, varianza y covarianza de los títulos, se puede llegar a una reducción efectiva del riesgo mediante este tipo de diversificación. Pero en el caso de que se dis - ponga de tal información, Johnson y Shannon (2) han demostrado que es posible, invirtiendo cantidades distintas en cada - uno de los títulos, lograr una mayor reducción del riesgo, - sea cual sea el tamaño de la cartera en cuestión.

La diversificación que se consigue con este tipo de carteras igualmente ponderadas no tiene nada que ver con la - diversificación eficiente que proporciona el modelo de selección de cartera de Markowitz. Se trata de analizar simplemente cómo suponiendo un total desconocimiento de las caracterís ticas de cada uno de los títulos del mercado (medias, varianzas y covarianzas), ver qué cabría esperar del comportamiento del riesgo, medido por la desviación típica, cuando aumenta - el número de títulos que aleatoriamente entran a formar parte de una cartera. Es por ello, que Francis y Archer (3), han denominado "ingenua" a este tipo de diversificación, en contraposición a la diversificación eficiente de Markowitz.

Las ventajas de la diversificación ingenua no sólo han sido advertidas por los inversores en valores mobiliarios que carecen de la información y el tiempo necesario para poder aplicar técnicas de selección de cartera más complejas, - sino también por los empresarios. "Los empresarios... inten - tan en lo posible "diluir el riesgo" procurar no poner "todos los huevos en la misma cesta", o, lo que es lo mismo, "no jugárselo todo a una carta", aunque exista un enorme porcentaje de posibilidades de tener la carta ganadora" (4).

También Hagin recoge en su libro una cita muy expre siva sobre las ventajas de la diversificación ingenua, cita - debida a Clint Murchison, un famoso inversor de los años veinte: "El dinero es como el abono -cuando se amontona huele mal- cuando usted lo esparce, hace crecer las cosas" (5).

Se debe señalar que la omisión del estudio de los rendimientos en la diversificación ingenua no tendrá importancia si el mercado de capitales es eficiente, ya que entonces es de esperar que cada nivel de riesgo esté recompensado por su correspondiente rendimiento.

Por otro lado, si como se desprende de los estudios empíricos hechos hasta ahora (6), con una cartera compuesta - por 10 ó 15 títulos se consigue una diversificación suficiente, entonces no tendrá mucho sentido acudir a carteras compuestas por muchos más títulos, ya que se incurriría entonces en una diversificación superflua y, en consecuencia, en unos costes de transacción (corretajes, administración, etc.) excesivos. Este es el caso de muchos Fondos de Inversión que, - unas veces por esa ingenua creencia de que cuanto mayor sea la diversificación mejor, y, otras veces, por imperativo legal, mantienen carteras con un excesivo número de títulos. - Así, por ejemplo, en el caso norteamericano, la ley obliga a que un Fondo de Inversión no tenga más de un cinco por ciento de su activo total invertido en un determinado valor, si no - quiere perder el trato de favor que la normativa fiscal le - otorga.

El atractivo que estos Fondos de Inversión o Sociedades de Cartera proporcionan a un inversionista, sería que en la medida que los mercados de capitales no sean eficientes en su forma fuerte (7), ellos estarían en condiciones de proporcionar una rentabilidad por encima de la media del mercado, cosa que por ahora no parece estar demostrada en el caso español tal como se desprende del trabajo que sobre este tema ha hecho Mateos-Aparicio (8) y menos aún en los grandes mercados de valores europeos y americanos (9).

A.2. Relación entre el Riesgo y el Número de Títulos que componen una Cartera

En el capítulo II, ecuación (2.13), vimos que la varianza de una cartera p, compuesta por N títulos, viene dada por:

$$\operatorname{var}(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \operatorname{var}(\tilde{R}_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} x_i x_j \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) \qquad (A.1)$$

De forma que la varianza de una cartera no sólo depende de las varianzas de los rendimientos de los distintos títulos que la componen, sino que también depende de la covarianza o correlación entre los diferentes títulos. Además, desde el momento que en la expresión (A.1) hay N varianzas frente a las $N(N-1) = (N^2-N)$ covarianzas, es de esperar que, en una cartera bien diversificada, el peso específico de las covarianzas supere al de las varianzas.

Más adelante, al hablar de la diversificación ingenua, veremos cómo en las carteras compuestas por muchos títulos el primer sumando de (A.1) disminuye hasta llegar a desaparecer por completo cuando N tiende a infinito. No así el segundo sumando que representa el riesgo no diversificable.

Si particularizamos (A.1) para el caso de una cartera compuesta por N títulos, donde cada uno de los títulos tiene igual peso o ponderación, la varianza de la cartera p queda expresada del siguiente modo:

$$\mathrm{Var}(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} \mathrm{Var}(\tilde{R}_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{1}{N^2} \mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) \qquad (A.2)$$

Si suponemos que tanto la varianza media de todos los títulos como la covarianza media entre cualquier par de títulos son números finitos, esto es, si:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var}(\tilde{R}_i) / N = \overline{\mathrm{var}} \qquad (A.3)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) \;/\; (N(N-1)) = \overline{\mathrm{cov}(R_i, R_j)} \qquad (A.4)$$

al tomar esperanzas matemáticas en la expresión (A.2) y teniendo en cuenta (A.3) y (A.4), quedaría:

$$E(\mathrm{Var}(\tilde{R}_p)) = \frac{1}{N^2} N \,\overline{\mathrm{var}} + \frac{1}{N^2} (N(N-1)) \,\overline{\mathrm{cov}(R_i, R_j)}$$

$$E(\mathrm{Var}(\tilde{R}_p)) = \frac{1}{N} \overline{\mathrm{var}} + \frac{N-1}{N} \overline{\mathrm{cov}(R_i, R_j)} \qquad (A.5)$$

Cabe resaltar que al introducir $\overline{\mathrm{var}}$ y $\overline{\mathrm{cov}(R_i, R_j)}$ en la expresión de la varianza de los rendimientos de la cartera p, se debe ya hablar de la esperanza de la varianza de la cartera p y no simplemente de la varianza de la cartera p(10).

Si suponemos un número de títulos suficientemente grande, la expresión (A.5) en el límite, cuando N tiende a infinito, toma el valor:

$$E(Var(\tilde{R}_p)) \simeq \overline{cov(R_i,R_j)} \qquad (A.6)$$

lo cual demuestra que la parte de la varianza de una cartera debida a las características propias de los títulos (el primer sumando de la ecuación (A.2)) se puede diversificar o anular en una cartera lo suficientemente grande; no así la parte de la varianza debida a la correlación de cada título con el mercado, ya que la esperanza de la varianza de una cartera cuando N tiende a infinito es igual a la covarianza media de las covarianzas entre cualquier par de títulos.

Hay autores, como Klemkosky y Martin (11), que parten de la expresión del rendimiento de un título dada por el Modelo de Mercado:

$$\tilde{R}_{jt} = \alpha_j + \beta_j \tilde{R}_{Mt} + \tilde{\mathcal{E}}_{jt} \qquad \begin{matrix} t=1,2,\ldots,T \\ j=1,2,\ldots,N \end{matrix}$$

de forma que la expresión de la esperanza de la varianza de los rendimientos de una cartera p compuesta por N títulos con igual ponderación queda:

$$E\ (Var(\tilde{R}_p)) = \beta_p^2\ Var(\tilde{R}_M) + \overline{var(\mathcal{E})}\frac{1}{N}\ .$$

y al tomar límites cuando N tiende a infinito:

$$E(Var(\tilde{R}_p)) \simeq \beta_p^2\ Var(\tilde{R}_M)$$

Como $\widetilde{R}_M$ es el rendimiento de la cartera de mercado compuesta por todos los títulos del mercado en las proporciones que dichos títulos están en el mercado, $Var(\widetilde{R}_M)$ es una constante para las distintas carteras, con lo cual, en las carteras bien diversificadas, β_p^2 es una medida apropiada del riesgo que puede usarse en lugar de $Var(\widetilde{R}_p)$.

Nosotros en cambio hemos preferido trabajar con el modelo de varianzas-covarianzas completo, ya que como han observado estos autores existe una relación entre la β_j y ε_j de los activos individuales, con lo cual para alcanzar el mismo nivel de diversificación hacen falta más títulos en las carteras con valores altos de beta que en las carteras con valores de beta más pequeños.

Evidentemente, la expresión (A.6) es simplemente una aproximación, pudiéndose conseguir una expresión de $E(Var(\widetilde{R}_p))$ que sea exacta (12). Para ello, debemos tener en cuenta que en el mercado real sólo existe un número finito de títulos M. Llamando:

$\widetilde{R}_m$ al rendimiento aleatorio de la cartera compuesta por todos los títulos del mercado tomados con igual ponderación (13):

$$\widetilde{R}_m = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \widetilde{R}_i = \sum_{i=1}^{M} \frac{\widetilde{R}_i}{M} \qquad (A.7)$$

$\overline{R}_m$ a la media o rendimiento esperado de dicha cartera:

$$\overline{R}_m = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} E(\widetilde{R}_i) = \sum_{i=1}^{M} \frac{E(\widetilde{R}_i)}{M} \qquad (A.8)$$

La expresión de la varianza de la cartera de mercado igualmente ponderada sería:

$$Var(\widetilde{R}_m) = E(\widetilde{R}_m - \overline{R}_m)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{M} \frac{\widetilde{R}_i}{M} - \sum_{i=1}^{M} \frac{E(\widetilde{R}_i)}{M}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{M^2} E((\widetilde{R}_1 - E(\widetilde{R}_1)) + (\widetilde{R}_2 - E(\widetilde{R}_2)) + \ldots + (\widetilde{R}_M - E(\widetilde{R}_M))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \frac{E(\widetilde{R}_i - E(\widetilde{R}_i))^2}{M^2} + \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{M} \frac{E((\widetilde{R}_i - E(\widetilde{R}_i))(\widetilde{R}_j - E(\widetilde{R}_j)))}{M^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \frac{Var(\widetilde{R}_i)}{M^2} + \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{M} \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_j)}{M^2} \qquad (A.9)$$

que teniendo en cuenta (A.3) y (A.4), quedaría como sigue:

$$Var(\widetilde{R}_m) = \frac{1}{M} \overline{var} + \frac{M-1}{M} \overline{cov(R_i, R_j)} \qquad (A.10)$$

Despejando $\overline{cov(R_j, R_j)}$ en (A.10), se obtiene:

$$\overline{cov(R_i, R_j)} = \frac{M}{M-1} var(\widetilde{R}_m) - \frac{1}{M-1} \overline{var} \qquad (A.11)$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (A.5), se llega a la expresión final de la esperanza de la varianza de la cartera p:

$$E(Var(\widetilde{R}_p)) = \frac{1}{N} \overline{var} + \frac{N-1}{N} \overline{cov(R_i, R_j)} =$$

$$= \frac{1}{N} \overline{var} + \frac{N-1}{N} \left(\frac{M}{M-1} var(\widetilde{R}_m) - \frac{1}{M-1} \overline{var}\right) =$$

$$= \frac{1}{N} \overline{var}\left(1 - \frac{N-1}{M-1}\right) + \frac{N-1}{N} \cdot \frac{M}{M-1} var(\widetilde{R}_m) \qquad (A.12)$$

Debemos resaltar que (A.12) nos da una expresión exacta de la media de las varianzas de las carteras de 1,2,...,N - títulos, en la que únicamente se requieren (2M-1) estimaciones previas:

$$\text{Var}(\tilde{R}_1),\ \text{Var}(\tilde{R}_2),\ \ldots,\ \text{Var}(\tilde{R}_{M-1}),\ \text{Var}(\tilde{R}_M)$$

$$\text{cov}(\tilde{R}_1,\tilde{R}_M),\ \text{cov}(\tilde{R}_2;\tilde{R}_M),\ldots,\ \text{cov}(\tilde{R}_{M-1},\tilde{R}_M)$$

De esta forma se evita el cálculo completo de la matriz de varianzas-covarianzas de los rendimientos de los M títulos, que supondría M^2 estimaciones previas necesarias para obtener $\overline{\text{var}}$ y $\overline{\text{cov}(R_i,R_j)}$, antes de aplicar la fórmula (A.5).

Por último, si en vez de N títulos, se consideran los M títulos que existen en el mercado, la cartera p coincidiría con la cartera m y la ecuación (A.12) conduce a la conclusión lógica de que:

$$E(\text{Var}(\tilde{R}_p)) = \text{Var}\ (\tilde{R}_m) \qquad (A.13)$$

Los estudios empíricos realizados hasta el momento (14), y el que hemos efectuado no es una excepción, suelen basarse directamente en la utilización de la expresión (A.2). Después de estimar la matriz de varianzas-covarianzas de los M títulos del mercado, se generan carteras aleatorias de, por ejemplo, 1,2,...,30 títulos, calculando sus respectivas varianzas. El proceso se repite 40 veces, por ejemplo, y finalmente, se calculan las varianzas medias de dichas carteras, con lo que se obtiene sólo una expresión aproximada de (A.6) en el caso de 30 títulos y la expresión aproximada de (A.12) ó de (A.5) en los casos 1,2,...,29 títulos.

Ahora bien, si utilizamos directamente la expresión (A.12), no es necesario todo este proceso previo del cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas y la generación, en el caso del ejemplo anterior, de 30 x 40 = 1200 carteras aleatorias y el cálculo de sus respectivas varianzas, sino que basta sencillamente con las 2M-1 estimaciones que permiten el cálculo de $\overline{var}$ y $var(\widetilde{R}_m)$ y aplicar (A.12) para carteras de 1,2,...,30 títulos, con lo que se obtiene una expresión exacta de la varianza de dichas carteras, sin necesidad de todo el largo proceso de las simulaciones (15).

Como es evidente, en un análisis riguroso, no sólo debe calcularse la media de las varianzas de las carteras formadas por 1,2,...,30 títulos, sino que también es interesante calcular la varianza de las varianzas de dichas carteras:

$$Var(Var(\widetilde{R}_p)) = E(Var(\widetilde{R}_p) - E(Var(\widetilde{R}_p)))^2 \qquad (A.14)$$

La expresión analítica de esta varianza de la varianza de la cartera p, requiere un proceso intermedio de deducción muy largo, razón por la cual remitimos al lector interesado a Elton y Gruber (16), y omitimos su representación aquí. Al nivel de análisis que pretendemos realizar, es suficiente saber que $var(var(\widetilde{R}_p))$ es una función que decrece y tiende a cero cuando N tiende a M.

A.3. Estudio Empírico. Base de Datos

Para la estimación de la matriz de varianzas-covarianzas de los rendimientos de los títulos nos hemos basado en los valores trimestrales del Indice Largo Total de la Bolsa de Madrid durante el período 1970-79.

Dicho índice recoge tanto las ganancias de capital - como el reparto de dividendos, además de tener en cuenta los ajustes necesarios cuando se producen ampliaciones de capital según el concepto de suscripción blanca. Al estar incluídos en el índice los dividendos repartidos, su variación porcentual - trimestre a trimestre mide la rentabilidad trimestral de los títulos que forman parte del mismo:

$$R_{it} = \frac{I_{it} - I_{i,t-1}}{I_{i,t-1}} \qquad (A.15)$$

Por tanto, la base de datos la constituyen los valores trimestrales que durante el período de estudio de 10 años tomaron los 115 títulos que en uno u otro año formaron parte - del Indice Largo Total de la Bolsa de Madrid.

Naturalmente, en el índice se produjeron entradas y salidas de valores de un año a otro según la importancia de - sus respectivas capitalizaciones bursátiles en el año ante- - rior; por lo que, para todos los títulos no se disponía de - los valores que tomaba el índice trimestralmente. Así, por - ejemplo, sólo había 57 títulos con 28 o más valores trimestrales de sus respectivos índices y únicamente 41 títulos tenían los 40 valores trimestrales de sus índices completos.

Como durante el período de estudio 1970-79 se produjo la primera crisis mundial derivada del alza en los preeios de los crudos petrolíferos, crisis que la Bolsa española reflejó con retraso en el transcurso del año 1974, es de espe -

rar que el comportamiento de las cotizaciones de los títulos sea distinto antes y después de esa fecha, debido al cambio estructural producido. Además, dado que no se disponía de los respectivos índices de muchos títulos, bien en los tres o cuatro primeros años del período de estudio o bien en los tres o cuatro últimos años, decidimos trabajar únicamente con aquellos títulos que tenían completos los 40 valores trimestrales del índice.

Todo ésto nos llevó a realizar tres análisis distintos y paralelos, teniendo en cuenta el período completo de los 10 años, por una parte, y los dos subperíodos de cinco años: 1970-74 y 1975-79, por otra parte. Los cuarenta y un títulos que formaron parte de la muestra están recogidos en el Cuadro 1.

A.4. Método de Trabajo

En cada uno de los tres períodos estudiados se generaron carteras aleatorias de 1,2,..,30 títulos, en las cuales cada título interviene con igual peso o ponderación en el conjunto de la cartera y, posteriormente, se calcularon las respectivas varianzas de los rendimientos de las carteras según la expresión (A.2). Este proceso se repitió 40 veces en cada uno de los tres períodos. Y, finalmente, se calculó la media -

aritmética de las varianzas de las carteras de 1,2,...,30 títulos en cada uno de los tres períodos de estudio. Los resultados obtenidos se recogen en los Cuadros 2,3, y 4.

Como se observará en los Cuadros 2,3,y 4, el decrecimiento de la desviación típica media a medida que aumenta el número de títulos que forman parte de la cartera no es homogéneo y continuado, como se desprende de la teoría y así, en ocasiones, una cartera con más títulos que otra, tiene una desviación típica media mayor, lo cual no parece lógico. La razón de ello está en que las desviaciones típicas medias reflejadas en dichos Cuadros son sólo aproximaciones y no los valores exactos resultantes de la aplicación de las expresiones (A.5) o (A.12)

Posiblemente, si el número de repeticiones del proceso hubiese sido mayor, las aproximaciones hubiesen sido mejores y los fallos o altibajos no se hubiesen producido, pero dado que el problema teórico se resuelve usando las fórmulas (A.5) o (A.12), no tiene sentido aumentar el número de simulaciones.

El siguiente paso consiste en calcular las varianzas medias exactas aplicando la fórmula (A.12), en el caso en que M=41, para N=1,2,...,30, en cada uno de los tres períodos de estudio. Los resultados hallados están recogidos en los Cuadros 5, 6 y 7.

Finalmente, basándonos en los datos de los Cuadros 5, 6 y 7 que nos proporcionan las desviaciones típicas medias exactas de las carteras de 1,2,...,30 títulos en los tres perío dos estudiados: 1970-79, 1970-74 y 1975-79, hemos confeccionado los cuadros 8,9 y 10 que nos permiten ver con mayor claridad, en cada período, cómo disminuye el riesgo que soporta un inversor a medida que aumenta el número de títulos que forman parte de la cartera y cuál es el riesgo mínimo que no puede diversificarse por más que aumente el tamaño de una cartera (17).

A.5. Resultados

Analizando los datos del Cuadro 8, que se refieren al período completo de los 10 años de la década de los 70, vemos cómo a medida que crece el número de títulos que forman parte de una cartera igualmente ponderada, el riesgo medido por la desviación típica decrece, pero no de una forma lineal.

Así, por ejemplo, una cartera compuesta por 5 títulos consigue reducir el riesgo en un 74,73%, mientras que una cartera de doble tamaño únicamente consigue una reducción suplementaria del riesgo del 12,07%. De igual modo, un inversor que posea una cartera de por ejemplo 15 títulos, si doblase el número de títulos formando una cartera de 30 valores, solamente conseguiría una reducción adicional del riesgo del 4,4%. Por tanto, con una diversificación no muy amplia, de 15 títulos como la que acabamos de considerar, se consigue reducir el riesgo potencial de una cartera en un 91,06% por término medio (18), de forma que generalmente no compensa la reducción adicional del riesgo que se puede conseguir con una cartera más diversificada, por los mayores costes de transacción y administración que ello supone.

Siguiendo con los datos que proporciona el Cuadro 8, vemos que existe un tanto por ciento del riesgo en relación al riesgo medio de un título que no es posible diversificar, de manera que aunque aumente mucho el tamaño de la cartera, e incluso tienda a infinito, se seguirá soportando un 56,37% del riesgo medio de los títulos individuales. Este es un porcentaje que considerado en sí mismo es demasiado elevado y que tal vez se deba a la estrechez del mercado español que no ofrece títulos lo suficientemente diferenciados (19).

Ese porcentaje del riesgo que no puede disminuirse por más que aumente el tamaño de una cartera, en el estudio de Solnik (20), referente al período 1966-71, era para los principales países occidentales el siguiente:

Bélgica	20%
Países Bajos	24,1%
Estados Unidos	27%
Francia	32,67%
Reino Unido	34,5%
Italia	40%
Alemania	43,8%
Suiza	44%

Por lo que se refiere a las comparaciones intertemporales dentro del caso español, aquí estudiado, cabe destacar que cuando se comparan los dos subperíodos 1970-74 y 1975-79, se observan los siguientes detalles:

Primero: el margen de variación de la desviación típica media, según se desprende de los Cuadros 6 y 7, es mayor en el período 1975-79: 17,06% a 8,16%, que en el período 1970-74: 13,93% a 9,83%. Así, en el segundo período el riesgo medio de un título individual es mayor, pero también se consiguen riesgos más bajos en carteras de 4 o más títulos. Por ejemplo, una cartera compuesta por 15 títulos con igual ponderación tiene, por término medio, un riesgo del 8,62% en el período 1975-79, mientras que en el período 1970-74 el riesgo es casi del 10%.

Segundo: la razón por la cual el riesgo de las carteras de 4 o más títulos es menor en el segundo período se debe a que la covarianza media entre cualquier par de títulos es mayor en el primer período: 9,3282 E-3, que en el segundo: 5,8916 E-3.

Pensamos que esto se debe a que mientras el mercado estuvo en alza en el período 1970-74, todos los valores fluctuaban en sus cotizaciones más o menos al unísono, lo cual provocaba que existiese una fuerte correlación entre los rendimientos de los mismos, subiendo todos más o menos a la vez. Unicamente 5 valores tuvieron una rentabilidad media trimestral negativa en el primer período. Sin embargo, en el segundo período, en medio de la crisis generalizada e imperando el "sálvese quien pueda", los títulos siguieron cursos distintos unos de otros de una forma más acentuada que en el primer período; es decir, que unos valores bajaron mucho más fuerte que otros e incluso hubo 15 títulos con rentabilidades medias trimestrales positivas. Todo ello por supuesto se refleja en una menor correlación entre los rendimientos de los valores en este segundo período.

Tercero: las carteras formadas por 1,2,3 títulos, en el primer período tuvieron una desviación típica media menor que sus homólogas del período segundo, debido a que en el segundo período la varianza media de todos los títulos fue de 0,029099, mientras que dicha varianza media fue más baja en el primer período: 0,019391; y como la varianza media en la expresión (A.5) actúa con mayor peso en las carteras con pocos títulos, eso provoca que la parte de la varianza debida al primer sumando de (A.5), mayor en el segundo período, supere al segundo término de (A.5), que es menor en el segundo período. A partir de carteras con 4 o más títulos, el decrecimiento del segundo miembro de (A.5) supera al crecimiento del primer término de (A.5) con relación al primer período, produciéndose la situación antes comentada en el punto segundo.

Finalmente, queremos señalar que, aunque con este trabajo no se ha pretendido llegar a resultados definitivos que cierren el estudio del tema de la diversificación ingenua en el caso español, sí creemos que es de enorme interés el camino que hemos seguido, tratando de contrastar con estudios empíricos las conclusiones que se extraen de la teoría. Y si bien es cierto que ello normalmente requiere largas horas tecleando los datos y haciendo los programas necesarios que el ordenador luego ha de ejecutar, el esfuerzo realmente vale la pena.

CUADRO 1: Relación de las acciones que forman parte de la muestra.

1.- Banco Exterior de España, S.A.
2.- Banco Español de Crédito, S.A.
3.- Banco Hispano Americano, S.A.
4.- Banco Central, S.A.
5.- Banco Popular Español, S.A.
6.- Unión Eléctrica, S.A.
7.- Hidroeléctrica Española, S.A.
8.- Hidroeléctrica Ibérica, Iberduero, S.A.
9.- Compañía Sevillana de Electricidad, S.A.
10.- Fuerzas Eléctricas del Noroeste, S.A.
11.- Hidroeléctrica del Cantábrico, S.A.
12.- Electra de Viesgo, S.A.
13.- Fuerzas Eléctricas de Cataluña, S.A.
14.- Hidroeléctrica de Cataluña, S.A.
15.- Sociedad General Azucarera de España, S.A.
16.- Ebro-Compañía de Azúcares y Alcoholes, S.A.
17.- Sociedad Anónima "El Aguila".
18.- Portland Valderrivas, S.A.
19.- Compañía Inmobiliaria Metropolitana, S.A.
20.- Dragados y Construcciones, S.A.
21.- Inmobiliaria Urbis, S.A.
22.- Vallehermoso, S.A.
23.- Cementos Alba, S.A.
24.- Cristalería Española, S.A.
25.- Compañía General de Inversiones, S.A.
26.- Cartera de Títulos, S.A.
27.- Compañía Arrendataria del Monopolio de Petróleo, S.A.
28.- Tabacalera, S.A.
29.- Compañía Telefónica Nacional de España, S.A.
30.- Altos Hornos de Vizcaya, S.A.
31.- Sociedad Española de Automóviles de Turismo, S.A.
32.- Fabricación de Automóviles Renault España, S.A.
33.- Unión Explosivos Rio Tinto, S.A.
34.- Sociedad Anónima Cros.
35.- Compañía Española de Petróleos, S.A.
36.- Energías e Industrias Aragonesas, S.A.
37.- La Papelera Española, S.A.
38.- Sociedad Nacional Industrias Aplicaciones Celulosas Española, S.A.
39.- Hidro Nitro Española, S.A.
40.- La Unión y el Fénix Español, S.A.
41.- Galerías Preciados, S.A.

CUADRO 2: Desviación típica media de las carteras generadas aleatoriamente (Período 1970-79)

Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media
1	0,168756	11	0,098538	21	0,094688
2	0,127073	12	0,098281	22	0,095628
3	0,121738	13	0,097837	23	0,095862
4	0,112099	14	0,097446	24	0,094281
5	0,110785	15	0,096000	25	0,092976
6	0,104907	16	0,096160	26	0,094246
7	0,104202	17	0,097241	27	0,093055
8	0,102069	18	0,094592	28	0,093626
9	0,099071	19	0,096481	29	0,093764
10	0,098869	20	0,095451	30	0,093907

CUADRO 3: Desviación típica media de las carteras generadas aleatoriamente (Período 1970-74)

Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media
1	0,145484	11	0,101659	21	0,098497
2	0,118052	12	0,100806	22	0,100745
3	0,117908	13	0,101192	23	0,100037
4	0,108025	14	0,102364	24	0,099360
5	0,107668	15	0,100579	25	0,098315
6	0,105125	16	0,099006	26	0,099149
7	0,105057	17	0,101146	27	0,097475
8	0,104911	18	0,098664	28	0,097742
9	0,101900	19	0,100588	29	0,098701
10	0,101502	20	0,098660	30	0,098582

CUADRO 4: Desviación típica media de las carteras generadas aleatoriamente (Período 1975-79)

Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media
1	0,177704	11	0,088456	21	0,084001
2	0,127837	12	0,088938	22	0,083127
3	0,117533	13	0,087365	23	0,084575
4	0,108394	14	0,084940	24	0,081596
5	0,107568	15	0,083555	25	0,080636
6	0,097149	16	0,086644	26	0,081932
7	0,095825	17	0,086307	27	0,081886
8	0,092255	18	0,083622	28	0,082500
9	0,090016	19	0,085250	29	0,082061
10	0,089242	20	0,085362	30	0,082460

CUADRO 5: Desviaciónes típicas medias aplicando la expresión (A.12) (Período 1970-79)

Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media
1	0,1601964	11	0,0987185	21	0,0948017
2	0,1300317	12	0,0980444	22	0,0946016
3	0,1182794	13	0,0974703	23	0,0944186
4	0,1119416	14	0,0969755	24	0,0942504
5	0,1079604	15	0,0965447	25	0,0940955
6	0,1052226	16	0,0961661	26	0,0939522
7	0,1032227	17	0,0958308	27	0,0938194
8	0,1016969	18	0,0955318	28	0,0936959
9	0,1004941	19	0,0952635	29	0,0935808
10	0,0995215	20	0,0950213	30	0,0934732
$var(\tilde{R}_m)=8{,}58065$ E-3		$\overline{var} = 0{,}0256629$		$\overline{cov(R_i,R_j)}=8{,}153591$ E-3	

CUADRO 6: Desviaciones típicas medias aplicando la expresión (A.12) (Período 1970-74)

Nº títulos	Desviacion típica media	Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media
1	0,1392510	11	0,1012074	21	0,0990320
2	0,1198311	12	0,1008301	22	0,0989220
3	0,1126161	13	0,1005098	23	0,0988214
4	0,1088294	14	0,1002343	24	0,0987291
5	0,1064927	15	0,0999950	25	0,0986441
6	0,1049060	16	0,0997851	26	0,0985656
7	0,1037578	17	0,0995996	27	0,0984929
8	0,1028883	18	0,0994344	28	0,0984253
9	0,1022068	19	0,0992863	29	0,0983623
10	0,1016584	20	0,0991529	30	0,0983035

$var(\tilde{R}_m) = 9,57363$ E-3 $\overline{var} = 0,0193509$ $\overline{cov(R_i,R_j)} = 9,3281571$ E-3

CUADRO 7: Desviaciones típicas medias aplicando la expresión (A.12)(Período 1975-79)

Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media	Nº títulos	Desviación típica media
1	0,1705846	11	0,0894503	21	0,0836463
2	0,1322700	12	0,0884621	22	0,0833455
3	0,1167366	13	0,0876172	23	0,0830699
4	0,1081363	14	0,0868865	24	0,0828165
5	0,1026309	15	0,0862482	25	0,0825826
6	0,0987902	16	0,0856858	26	0,0823662
7	0,0959528	17	0,0851865	27	0,0821652
8	0,0937685	18	0,0847402	28	0,0819782
9	0,0920337	19	0,0843388	29	0,0818037
10	0,0906220	20	0,0839760	30	0,0816405

$var(\tilde{R}_m) = 6,45763$ E-3 $\overline{var} = 0,0290991$ $\overline{cov(R_i,R_j)} = 5,891588$ E-3

CUADRO 8: Período 1970-79

Número de títulos	Reducción del riesgo potencial en %	Riesgo en % del riesgo medio de 1 título
1	0 %	100 %
2	43,15 %	81,17 %
3	59,97 %	73,83 %
4	69,03 %	69,88 %
5	74,73 %	67,39 %
10	86,80 %	62,12 %
12	88,92 %	61,20 %
15	91,06 %	60,27 %
20	93,24 %	59,32 %
30	95,46 %	58,35 %
41	96,66 %	57,82 %
∞	100 %	56,37 %

CUADRO 9: Período 1970-74

Número de títulos	Reducción del riesgo potencial en %	Riesgo en % del riesgo medio de 1 título
1	0 %	100 %
2	45,51 %	86,05 %
3	62,42 %	80,87 %
4	71,30 %	78,15 %
5	76,77 %	76,47 %
10	88,10 %	73 %
12	90,04 %	72,41 %
15	92 %	71,81 %
20	93,98 %	71,20 %
30	95,97 %	70,59 %
41	97,04 %	70,26 %
∞	100 %	69,36 %

CUADRO 10: Período 1975-79

Número de títulos	Reducción del riesgo potencial en %	Riesgo en % del riesgo medio de 1 título
1	0 %	100 %
2	40,83 %	77'54 %
3	57,39 %	68,43 %
4	66,56 %	63,39 %
5	72,42 %	60,16 %
10	85,22 %	53,12 %
12	87,52 %	51,86 %
15	89,88 %	50,56 %
20	92,31 %	49,23 %
30	94,79 %	47,86 %
41	96,16 %	47,11 %
∞	100 %	45 %

NOTAS DEL ANEXO A

(1) Markowitz ya establece en 1959 la fórmula de la varianza - de los rendimientos de una cartera diversificada ingenuamente.

MARKOWITZ, H.: "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments". John Willey & Sóns. New York, 1959. p. 111.

(2) JOHNSON, A. y SHANNON, B.: "A Note on the Diversification and the Reduction of Dispersion". Journal of Financial Economics, vol. 1, Diciembre 1974, p. 365-372.

(3) FRANCIS, J.C., y ARCHER, S.H.: "Análisis y Gestión de Carteras de Valores". ICE. Madrid 1977, p. 176.

(4) CASADO ABAD, J.: "La Diversificación del Riesgo". Alta Dirección, año VIII, nº 44, julio-agosto 1972, p. 13-18, p. 14.

(5) HAGIN, R.: "Modern Portfolio Theory". Dow Jones-Irwin. - Illinois, 1979, p. 132.

(6) Entre los principales estudios sobre la relación entre el riesgo y el número de títulos de una cartera, cabe citar a

Evans y Archer, en el caso norteamericano

Pogue y Solnik, en el caso francés

Solnik, para distintos países europeos: Gran Bretaña, Alemania, Italia, Bélgica, Países Bajos, Suiza. Además de Francia y los Estados Unidos.

Goula Suriñach, en el caso español.

EVANS, J.L. y ARCHER, S.H.: "Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis". Journal of Fi-

nance, vol. 23, diciembre 1968, p. 761-767.
POGUE, G. y SOLNIK, B.: "Risque, Diversification et Gestion de Portefeuille". Analyse Financière, nº 10, 3er. Trimestre 1972, p. 1-6.
SOLNIK, B.: "Les Avantages de la Diversification Nationale et Internationale". Banque, nº 328, Abril 1974, p. 395-402.
GOULA SURIÑACH, J.: "Análisis y Cálculo del Riesgo en el Mercado de Valores". Banca Más Sardá. Servicio de Estudios Barcelona, 1974.

(7) Un estupendo resumen sobre los trabajos teóricos y empíricos en torno al tema de los mercados de capitales eficientes puede encontrarse en:
FAMA, E.F.: "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". Journal of Finance, vol. 25, nº 2, mayo 1970, p. 383-417.

(8) MATEOS-APARICIO MORALES, P.: "Inversión Mobiliaria Colectiva". Bolsa de Madrid, Servicio de Estudios. Madrid 1977.

(9) Sharpe, Treynor y Jensen, aplicando sus respectivos índices de performance, han llegado a la conclusión de que los Fondos de Inversión, en su conjunto, no tienen una performance superior a la de una cartera no gestionada, tal como la cartera de mercado, representada por un índice bursátil como el Dow-Jones Industrial Average o el Standard and Poor Composite de las Bolsas americanas.
SHARPE, W.F.: "Mutual Fund Performance". Journal of Business, vol. 39, nº 1, enero 1966, p. 119-138.
TREYNOR, J.L.: "How to Rate Management of Investment Funds"

Harvard Business Review, enero-febrero 1965, p. 63-75.
JENSEN, M.C.: "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-64". Journal of Finance, vol. 23, nº 2, mayo 1968, p. 389-416.

(10) En la mayoría de los trabajos publicados se suele omitir este hecho, no así en el de Elton y Gruber, en el cual está basado parte de este anexo.
ELTON, E.J. y GRUBER, M.J.: "Risk Reduction and Portfolio Size: An Analitical Solution". Journal of Business, vol. 50, nº 4, octubre 1977, p. 415-437.

(11) KLEMKOSKY, R.C. y MARTIN, J.D.: "The Effect of Market Risk on Portfolio Diversification". Journal of Finance, vol. 30 nº 1, marzo 1975, p. 147-154.

(12) La expresión (A.6) es una aproximación de la expresión (A.5) cuando el número de títulos que componen la cartera p es lo suficientemente grande. Por tanto (A.5) es la expresión exacta de la esperanza de la varianza de los rendimientos de una cartera integrada por 1,2,...,N valores. Pero para poder aplicar (A.5) se requieren las M^2 estimaciones (suponiendo que en el mercado haya M títulos) de la matriz de varianzas-covarianzas completa con las cuales poder calcular $\overline{var}$ y $\overline{cov(R_i,R_j)}$. Lo que nos proponemos a continuación es hallar una expresión exacta como la (A.5), pero que requiera menos estimaciones previas.

(13) Conviene resaltar que m no es la cartera de mercado que tanta relevancia tiene en el CAPM, ya que aunque es cierto que m contiene todos los títulos del mercado, también lo

es que se supone que todos los títulos tienen igual ponderación; mientras que en el CAPM, las ponderaciones de la cartera de mercado M son distintas para los diferentes títulos.

(14) En la nota 6 ya dimos una relación de los principales estudios empíricos llevados a cabo hasta el momento. Pero hay que destacar que en alguno de ellos, como por ejemplo el de Evans y Archer, op. cit., no se utiliza la expresión (A.2) para calcular la varianza de los rendimientos de una cartera, sino que a partir de las series de los rendimientos de los títulos que forman parte de una cartera, calculan la media aritmética y, con la serie de rendimientos resultante, calculan su media y su varianza.

(15) Como advertimos en la nota a pie de página 12, para hallar una expresión exacta de las esperanzas de la varianza de los rendimientos de carteras de 1,2,..., 30 títulos también se puede aplicar la ecuación (A.5) para N=1,2,...,30 pero ello requiere estimar M^2 parámetros en lugar de los (2M-1) necesarios para poder trabajar con la fórmula (A.12).

(16) ELTON, E.J. y GRUBER, M.J., op. cit., p. 419-421.

(17) Para confeccionar la penúltima línea de cada uno de los Cuadros 8, 9, 10, el lector interesado puede aplicar (A.5) y de esta forma calcular la varianza media de una cartera compuesta por 41 títulos y luego, extrayendo la raíz cuadrada, obtendrá la desviación típica media.

(18) Y con una desviación típica muy pequeña: 0'1493 según los

datos empíricos en base a los cuales se construyó el Cuadro 2.

(19) Es justo señalar, que tal como se desprende de los Cuadros 9 y 10, ese porcentaje tiende a bajar y así en el período 1975-79 fue del 45%.

(20) SOLNIK, B., op. cit., p. 396-397.

ANEXO B

CONTRASTE DEL MODELO CAPM EN EL MERCADO BURSATIL ESPAÑOL

B.1. Introducción

En el capítulo IV vimos que la relación fundamental del modelo de precios de equilibrio de los activos financieros era la SML:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) \qquad (B.1)$$

que también puede expresarse en función del coeficiente beta ex-ante de la siguiente forma alternativa (1):

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + (E(\tilde{R}_M) - R_f)\, \beta_i^* \qquad (B.2)$$

Es decir, que según la teoría del mercado de capitales, el mercado unicamente recompensa al inversor por correr con el riesgo sistemático o no diversificable medido por el coeficiente beta de un título o cartera. De forma que si un título tiene un coeficiente beta cero, entonces su rendimiento esperado será igual al rendimiento del título libre de riesgo o tasa pura de interés. Y a medida que aumenta el coeficiente beta, se incrementa el rendimiento esperado de una forma lineal.

Si usamos el modelo de mercado como proceso generador de los rendimientos de los títulos:

$$\tilde{R}_{it} = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_{Mt} + \tilde{\varepsilon}_{it} \qquad \begin{array}{l} t=1,2,\dots,T \\ i=1,2,\dots,n \end{array} \qquad (B.3)$$

entonces la varianza del rendimiento de un título i viene dada, según (5.38), por:

$$\sigma^2(\tilde{R}_i) = \beta_i^2 \ \sigma^2(\tilde{R}_M) + \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i) \qquad \text{(B.4)}$$

y, como acabamos de ver, el CAPM considera que el riesgo de un título individual no viene dado por $\sigma^2(\tilde{R}_i)$, sino por β^*_i, - ya que parte del riesgo de $\sigma^2(\tilde{R}_i)$, en concreto $\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i)$, puede ser eliminado en una cartera diversificada adecuadamente.

De ahí que algunos tests sobre el CAPM, como los de Douglas, Miller y Scholes, Fama y MacBeth, y Foster (2), parten de la siguiente ecuación (3):

$$E(\tilde{R}_i) = a + b\,\beta_i + c\,\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i) + \mu_i \qquad \text{(B.5)}$$

con el fin de ver si el coeficiente c es significativamente distinto de cero, en cuyo caso el mercado no sólo premiaría al inversor por soportar el riesgo sistemático, sino que también le recompensará por correr con el riesgo no sistemático. Si este fuese el caso, la evidencia empírica daría lugar a un rechazo del modelo CAPM.

Los resultados de estos tests han sido muy diversos. Mientras Douglas, Miller y Scholes llegan a que el coeficiente c es significativamente distinto de cero (4); Fama y MacBeth, y Foster encuentran que el riesgo sistemático describe suficientemente el riesgo de un título y que, en consecuencia, no existe una evidencia estadística relevante de que el riesgo no sistemático explique las diferencias entre los rendimientos esperados de los distintos títulos.

B.2. Método de Trabajo

El test que nosotros vamos a aplicar para estudiar el mercado bursátil español no es del tipo de los que acabamos de hacer referencia, sino que se deriva de la versión ex-post de la SML:

$$\tilde{R}_{it} = R_{ft} + (\tilde{R}_{Mt} - R_{ft})\,\beta_i + \tilde{\varepsilon}_{it} \qquad \begin{matrix} t=1,2,\dots,T \\ i=1,2,\dots,n \end{matrix} \qquad (B.6)$$

que también puede expresarse de esta otra forma:

$$\tilde{R}_{it} = R_{ft}(1-\beta_i) + \beta_i \tilde{R}_{Mt} + \tilde{\varepsilon}_{it} \qquad \begin{matrix} t=1,2,\dots,T \\ i=1,2,\dots,n \end{matrix} \qquad (B.7)$$

El paso de la versión ex-ante del CAPM (B.2) a la versión ex-post (B.6) del mismo, puede justificarse por dos caminos distintos:

1) Suponer que el proceso generador de los rendimientos de los títulos viene dado por el modelo de mercado siguiente:

$$\tilde{R}_i = E(\tilde{R}_i) + \beta_i(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M)) + \tilde{\varepsilon}_i \qquad (B.8)$$

tal como lo hace Jensen (5).

2) Suponer, como lo hacen Roll y Fama (6), que la función de distribución conjunta de los rendimientos de los activos financieros es normal multivariante.

Cuando se trabaja con el modelo econométrico (B.6), normalmente se hace el supuesto adicional de que β_i se mantiene constante en el tiempo (7) y que su valor viene dado por el ajuste resultante de aplicar el modelo de mercado (B.3). De modo que aplicando el método de los mínimos cuadrados, el estima dor de β_i es:

$$\hat{\beta}_i = \frac{cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \qquad (B.9)$$

con lo cual, el valor estimado de los rendimientos de cualquier título arriesgado viene expresado por:

$$\hat{R}_{it} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \tilde{R}_{Mt} \qquad (B.10)$$

De la observación de (B.10) y (B.7), se puede deducir que la versión ex-post del CAPM coincide con el modelo de mercado cuando:

$$\hat{\alpha}_i = R_f (1 - \hat{\beta}_i) \qquad (B.11)$$

donde R_f es el valor medio de la tasa pura de interés durante el período de estudio. Con lo cual, un posible método para testar el CAPM es hallar $\hat{\alpha}_i$ para cada título, mediante el modelo de mercado, y ver si coincide con el valor (B.11) que prevé el CAPM.

Tal como afirman Modigliani, Pogue, Scholes y Solnik (8), si bien es cierto que se podría probar el CAPM acción por acción, tal como acabamos de sugerir, hay que tener en cuenta que "constituirá un procedimiento ineficaz, que no haría uso de toda la información disponible".

Por ésto, nosotros, siguiendo a estos autores, hemos hecho, en primer lugar, todas las regresiones de los rendimientos de cada título de la muestra con el rendimiento de la cartera de mercado, estimando los coeficientes beta de los mismos ($\hat{\beta}_i$) y, posteriormente, con el rendimiento medio de cada título ($E(\tilde{R}_i)$) más su correspondiente coeficiente beta ($\hat{\beta}_i$), hemos hecho un análisis de corte transversal aplicando la siguiente ecuación de regresión (9):

$$E(\tilde{R}_i) = a + b\hat{\beta}_i + \tilde{\mu}_i \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (B.12)$$

Si tomamos esperanzas matemáticas (10), en (B.6), tenemos:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + (E(\tilde{R}_M)) - R_f)\,\beta_i \qquad (B.13)$$

Por lo que si aplicamos el operador esperanza matemática a (B.12) y comparamos el resultado con (B.13), se comprueba que para que la ecuación (B.7) prevista por el CAPM se cumpla, ha de darse que:

$$\hat{a} = R_f \qquad (B.14)$$

$$\hat{b} = E(\tilde{R}_M) - R_f \qquad (B.15)$$

Los estimadores $\hat{a}$ y $\hat{b}$ que proporciona el método de los mínimos cuadrados son las más eficientes. Sin embargo, para que ésto ocurra tienen que cumplirse los supuestos en que se basa la aplicación de este método.

En las regresiones de coste transversal, la variable independiente, en nuestro caso $\hat{\beta}_i$, contiene errores de medida con lo cual se viola uno de los supuestos de los mínimos cuadrados, y los estimadores $\hat{a}$ y $\hat{b}$ ya no son insesgados; así $\hat{a}$ está supervalorado y $\hat{b}$, en cambio, está subvalorado.

Para evitar estos sesgos existen distintos métodos que pueden encontrarse en los manuales de econometría clásicos (11). Uno de ellos, que se ha revelado como particularmente eficaz, y que ha sido muy utilizado en los tests del CAPM, consiste en clasificar los títulos de menor a mayor coeficiente -

beta y luego agruparlos por carteras: no superpuestas, superpuestas, divididas, etc. De modo que no se trabaja con las $\hat{\beta}_i$ de los títulos individuales, sino con las $\hat{\beta}_p$ de las carteras construidas (12).

No obstante, nosotros nos hemos limitado a trabajar a nivel de títulos, aún siendo conscientes de que los resultados a nivel de carteras son mejores. El objeto de este estudio empírico es presentar los primeros datos de una investigación que está en curso como un primer intento de aproximación (13) sin intentar, en ningún momento, llegar a conclusiones definitivas, puesto que para ello sería necesario completar el análisis con períodos anteriores al que vamos a considerar: 1970-79, ver si los coeficientes beta son estables, trabajar con datos mensuales, semestrales, anuales, analizar la función de distribución de los rendimientos, etc.

Finalmente, antes de pasar a hablar de la base de datos y los resultados obtenidos, conviene no dejar de mencionar algunos otros tests que se han hecho sobre el CAPM en el mercado de valores norteamericano. En particular, los trabajos de Friend y Blume (14), por una parte, así como el de Black, Jensen y Scholes (15). Estos autores, en sus respectivos contrastes del CAPM, llegan a la conclusión de que la SML empírica tiene una ordenada en el origen mayor y una pendiente menor que la SML teórica y proponen un modelo de mercado de dos índices para explicar el comportamiento del rendimiento de las acciones. Modelo de dos índices que en opinión de Black Jensen y Scholes da resultados positivos.

Sin embargo, para Friend y Blume (1973) "los resultados empíricos arrojan serias dudas sobre la validez de la teoría del mercado de capitales" (16), tanto en la versión de un índice como en la de dos índices, siendo la causa probable de ello el que el mecanismo de ventas al descubierto no tiene un funcionamiento tan perfecto como el previsto por la teoría.

B.3. Base de Datos

La base de datos utilizada es la misma que empleamos en el anexo anterior sobre el estudio de la diversificación ingenua, por lo que vamos a pasar por alto las características de la misma y únicamente haremos algunos comentarios sobre el período de estudio y la amplitud de los intervalos a considerar en las series históricas de cada uno de los valores.

Por lo que respecta al período de estudio más adecuado, es una cuestión abierta a la investigación y sobre la cual se sigue discutiendo, ya que el período debe tener una longitud tal que la relación entre el rendimiento de un título particular y el mercado sea estable y consistente.

Si el período de estudio es demasiado largo, entonces se entremezclan demasiadas situaciones distintas como para deducir una relación rentabilidad-riesgo digna de crédito. Por otra parte, si el período de estudio es demasiado corto, puede que entonces en la relación encontrada jueguen más los factores coyunturales del mercado que los estructurales.

Normalmente se suelen tomar períodos de 5 años de amplitud o un período mayor subdividido en períodos de 5 años. De modo que nosotros hemos tenido en cuenta la década de los 70 y la hemos dividido en dos subperíodos de 5 años cada uno: 1970-74 y 1975-79.

El otro problema previo a resolver es si se trabaja con datos diarios, quincenales, mensuales, trimestrales, anuales, etc. El Indice Largo Total de la Bolsa de Madrid que, al incluir no sólo los ajustes por ampliaciones de capital sino también los ajustes por los dividendos repartidos, es el índice que debe usarse para poder calcular la rentabilidad de los títulos, tal como la hemos definido en (2.6), se presenta en la forma de series históricas mensuales, con lo cual ya de antemano el intervalo entre dos puntos del índice no puede ser diario ni quincenal (17).

Así que podríamos haber trabajado con datos mensuales, trimestrales, semestrales o anuales, por ejemplo. En muchos estudios empíricos se suele utilizar los valores mensuales del índice. Sin embargo, hay que tener presente que, tal como afirman Pogue y Solnik (18), por lo que se refiere a los errores de medida, y a los efectos de retardos en la cotización de un valor, conviene que el intervalo sea lo más grande posible. Ahora bien, existen también factores contrapuestos, como los errores standard, que recomiendan que el intervalo sea lo más corto posible. En consecuencia, el intervalo más apropiado no parece ser una cuestión obvia, de fácil solución, sino que por el contrario es un tema aún abierto a la discusión.

Nosotros hemos elegido un intervalo trimestral (19), principalmente porque un intervalo mensual desbordaba nuestras posibilidades (20).

En resumen, en el test que hemos hecho del CAPM, hemos trabajado con los rendimientos trimestrales de una muestra compuesta por 41 títulos (21) más la cartera de mercado representada por el índice general. Al igual que en el anexo anterior y debido al cambio estructural producido por la crisis, como consecuencia del fuerte alza del precio de los crudos a finales de 1973, que nuestra Bolsa reflejó con retraso a lo largo de 1974, hemos analizado la relación rentabilidad-riesgo de los títulos en el mercado bursátil español en el período completo de 10 años: 1970-79 y los dos subperíodos de cinco años contenidos en el: 1970-74 y 1975-79.

B.4. Resultados Empíricos

En primer lugar, calculamos, para el período 1970-79, el rendimiento medio $E(\tilde{R}_i)$ y el coeficiente $\hat{\beta}_i$ de los 41 títulos (22) que formaban la muestra más la cartera de mercado (23), representada por los títulos que integraban el índice general. Con esos valores efectuamos la regresión (B.12) y los resultados obtenidos, como era de esperar, fueron muy pobres. La recta ajustada tenía una ordenada en el origen negativa y un coeficiente de correlación prácticamente nulo.

La causa de estos resultados pensamos que está en la excesiva amplitud del período de estudio: 10 años, en el transcurso de los cuales se produjeron cambios cualitativos en la economía. Así, se acabó el período de crecimiento económico, más o menos continuado, iniciado en los años 60 para entrar en una etapa de estancamiento con inflación, una vez que se produjeron los reajustes económicos derivados del alza en el precio del petróleo a finales de 1973.

En el epígrafe B.2 de este anexo, hemos dicho que el análisis de corte transversal (B.12) se basaba en la estabilidad de los coeficientes beta. Pues bien, esta estabilidad no existió en el período 1970-79, ya que la regresión efectuada entre los coeficientes $\hat{\beta}_i$ relativos a los subperíodos 1970-74 y 1975-79 ofreció un coeficiente de correlación muy bajo: $r = 0'213$, con una ordenada en el origen positiva y una pendiente de 0'18, muy por debajo de la unidad que corresponde a la recta de 45º que se hubiese dado si los coeficientes beta hubiesen permanecido completamente estables de uno a otro subperíodo.

El siguiente paso fue calcular los rendimientos medios de los títulos y los coeficientes beta de los mismos en cada uno de los dos subperíodos (24): 1970-74 y 1975-79 y efectuar, en base a ellos, los respectivos ajustes según (B.12).

Vamos a empezar por el segundo subperíodo: 1975-79.

Si se mira el Cuadro 2, se puede comprobar que de los 42 valores de la muestra más de la mitad: 26, tienen un rendimiento medio trimestral negativo. El mismo rendimiento medio de la cartera de mercado fue negativo: -1'82% en términos trimestrales, -7'08% en términos anuales. Esto está en completa contradicción con lo que se entiende por un funcionamiento normal del mercado. Así, con independencia de las afirmaciones de la teoría, intuitivamente se puede ver que el inversor exigirá a las acciones un rendimiento superior al tipo de interés que le pueden proporcionar sus ahorros colocados en un banco a plazo fijo, ya que las acciones tienen un riesgo mayor (25). De modo que no tiene ningún sentido invertir en acciones que no sólo no lleguen a ofrecer el tipo de interés del activo libre de riesgo, sino que además su rendimiento, en muchos casos, no alcanza ni siquiera una tasa positiva.

Por tanto, durante el período 1974-79, el mercado de valores se hundió y su trayectoria escapa por completo de lo que cabría esperar de un comportamiento económico normal. El ajuste, al igual que en el caso del período completo 1970-79, vuelve a ser poco significativo: el coeficiente de correlación es muy bajo: r = 0'1319 y la ordenada en el origen vuelve a ser negativa.

Por último, en el subperíodo 1970-74 es donde aparecen unos resultados más aceptables dado que, aunque sigue apareciendo una ordenada en el origen negativa que está en completo desacuerdo con la teoría del mercado de capitales, la pendiente de la recta es positiva, como en los casos anteriores, pero ahora ésto está reforzado por el hecho de que el coeficiente de correlación es mucho más elevado.

Así, los resultados del ajuste para los 42 valores de la muestra en el subperíodo 1970-74 fueron (26):

	$\hat{a}$	$\hat{b}$
Valor de los parámetros	-1'472	3'821
Desviación típica		0'912
Valor de t		4'191
Valor de F = 17'57		
Coeficiente de correlación = 0'5524		

Tanto mediante el contraste de la t de Student como de la F de Snedecor (27), se acepta la hipótesis de que $b \neq 0$ al nivel de significación $\alpha = 0'01$.

Como advertimos en el epígrafe B.2 de este anexo, es mejor trabajar a nivel de carteras y no de títulos individuales como lo hemos hecho aquí. En todo caso, los resultados de Modigliani, Pogue, Scholes y Solnik (28) referentes a los principales mercados de valores europeos y al mercado de valores norteamericano no son mejores que los que se producen en el mercado bursátil español. El estudio de estos autores abarca el período que va de marzo de 1966 a mayo de 1971 y, salvo el caso de Suecia en el que se trabaja con una muestra de sólo 6 títulos, en la mayoría de los restantes casos el coeficiente de correlación es muchísimo menor que el que hemos encontrado para el mercado de valores español. Incluso en algunas Bolsas europeas, la pendiente de la recta ajustada es negativa.

Como en el subperíodo 1970-74 seguían existiendo al gunos títulos con rendimientos medios negativos (29):

17 El Aguila	Grupo de Alimentación
31 SEAT 32 FASA	Grupo Siderometalúrgico
34 CROS	Grupo Químico-Textil

decidimos eliminar estos títulos de la muestra y ver cuál era entonces el ajuste resultante:

	$\hat{a}$	$\hat{b}$
Valor de los parámetros	-1'258	4'022
Desviación típica		0'796
Valor de t		5'056

Valor de F = 25'56

Coeficiente de correlación = 0'6444

Como puede comprobarse, la ordenada en el origen sigue siendo negativa, pero el coeficiente de correlación ha pasado de 0'5524 a 0'6444. Además, el coeficiente b sigue siendo significativamente distinto de cero al nivel α = 0'01.

El paso siguiente fue eliminar algunos títulos que - se apartaban del comportamiento previsto por el modelo CAPM, y que tenían, bien un rendimiento medio trimestral alto en relación a su coeficiente beta:

8 Iberduero 14 Hidroeléctrica de Cataluña	Grupo de Eléctricas
28 Tabacalera 29 Telefónica	Grupo de Monopolios
37 Papelera Española	Grupo Químico-Textil

o bien un rendimiento medio trimestral muy bajo para su correspondiente nivel de riesgo:

21 Inmobiliaria Urbis	Grupo de Inversión
33 Explosivos Riotinto 35 CEPSA	Grupo Químico-Textil

Con la muestra resultante de 29 títulos más la cartera de mercado, volvimos a efectuar el ajuste (B.12), obteniendo los siguientes resultados:

	$\hat{a}$	$\hat{b}$
Valor de los parámetros	-2'615	5'174
Desviación típica		0'606
Valor de t		8'535

Valor de F = 72'85

Coeficiente de correlación = 0'8499

De la observación de estos resultados se deduce que se siguen dando las mismas características que en los ajustes anteriores, pero con un coeficiente de correlación bastante más elevado.

Finalmente, con la misma muestra que en el caso anterior, hicimos el siguiente ajuste:

$$E(\tilde{R}_i) = c + d\,\hat{\beta}_i^2 + \tilde{\varepsilon}_i \qquad \text{(B.13)}$$

es decir, que a la nube de puntos le ajustamos una función de segundo grado con respecto a $\hat{\beta}_i$, obteniendo en esta ocasión los siguientes valores:

	$\hat{c}$	$\hat{d}$
Valor de los parámetros	-0'187	2'295
Desviación típica		0'174
Valor de t		13'16

Valor de F = 173'15

Coeficiente de correlación = 0'9278

Por tanto, la nube de puntos se ajusta mejor a una función de segundo grado que a una línea recta, puesto que tanto el coeficiente de correlación como los valores de t y F son mucho más elevados. Además, ahora la ordenada en el origen es negativa pero con un valor mucho más pequeño. En una función del tipo de la (B.13), el rendimiento medio sube más que proporcional con respecto a $\hat{\beta}_i$, en consecuencia, el precio de mercado del riesgo ya no es una cantidad fija, sino que dicho precio sube con el nivel del riesgo.

De los resultados de todos estos ajustes, se desprende que la única conclusión, más o menos definitiva, es que el modelo CAPM no es aplicable para el período 1975-79, ya que en una situación de estancamiento con inflación al tipo de interés nominal es siempre positivo, mientras que el rendimiento de muchas acciones puede ser negativo en términos nominales debido a la situación de estancamiento. De modo que, no cabe hablar de que el mercado recompensa al tenedor de una acción con la tasa pura de interés nominal, que rige en el mercado, más un premio de acuerdo con el nivel de riesgo de la acción.

En épocas de crecimiento económico con inflación, -

como en el período 1970-74, hemos encontrado resultados más acordes con la idea de que un título cuanto más arriesgado sea, mayor será su rentabilidad aunque, como hemos visto, hay aspectos del CAPM que no están validados tales como: 1) que la ordenada en el origen de la SML, en base a los datos ex-post, es negativa. 2) El hecho de que el mejor ajuste es aquel en que el precio del mercado del riesgo no es constante, como prevé el CAPM, sino que crece con el nivel de riesgo.

No queremos acabar este trabajo empírico sin antes remarcar la provisionalidad de los resultados encontrados. Nuestro propósito no ha sido establecer conclusiones definitivas, sino hacer un acercamiento a la problemática que lleva aparejada este tipo de tests.

Para obtener resultados más fiables sería necesario ampliar la muestra elegida, hacer los tests tanto a nivel de títulos como de carteras, trabajar no sólo con datos trimestrales, sino también con datos mensuales, bimensuales, etc. y, además, aplicar el test a otros períodos de estudio distintos de la década de los 70 y comprobar si efectivamente se puede hablar de estabilidad de los coeficientes beta.

Esperamos que nuestra tarea investigadora en curso sobre todos estos aspectos acabados de esbozar, así como la que pueden emprender otros especialistas en el tema, permitan en el futuro llegar a resultados más definitivos y seguir avanzando en esta interesante área de la Economía de la Empresa.

CUADRO 1: Relación de las acciones que forman parte de la muestra

Grupo de Bancos Comerciales

1.- Banco Exterior de España, S.A.

2.- Banco Español de Crédito, S.A.

3.- Banco Hispano Americano, S.A.

4.- Banco Central, S.A.

5.- Banco Popular Español, S.A.

Grupo de Eléctricas

6.- Unión Eléctrica, S.A.

7.- Hidroeléctrica Española, S.A.

8.- Hidroeléctrica Ibérica, Iberduero, S.A.

9.- Compañía Sevillana de Electricidad, S.A.

10.- Fuerzas Eléctricas del Noroeste, S.A.

11.- Hidroeléctrica del Cantábrico, S.A.

12.- Electra de Viesgo, S.A.

13.- Fuerzas Eléctricas de Cataluña, S.A.

14.- Hidroeléctrica de Cataluña, S.A.

Grupo de Alimentación

15.- Sociedad General Azucarera de España, S.A.

16.- Ebro-Compañía de Azúcares y Alcoholes, S.A.

17.- Sociedad Anónima "El Aguila"

Grupo de Construcción

18.- Portland Valderribos, S.A.

19.- Compañía Inmobiliaria Metropolitana, S.A.

20.- Dragados y Construcciones, S.A.

21.- Inmobiliaria Urbis, S.A.

22.- Vallehermoso, S.A.

23.- Cementos Alba, S.A.

24.- Cristalería Española, S.A.

Grupo de Inversión

25.- Compañía General de Inversiones, S.A.

26.- Cartera de Títulos, S.A.

Grupo de Monopolios

27.- Compañía Arrendataria del Monopolio de Petróleos, S.A.

28.- Tabacalera, S.A.

29.- Compañía Telefónica Nacional de España, S.A.

Grupo Siderometalúrgico

30.- Altos Hornos de Vizcaya, S.A.

31.- Sociedad Española de Automóviles de Turismo,S.A.

32.- Fabricación de Automóviles Renault España, S.A.

Grupo Químico-Textil

33.- Unión Explosivos Rio Tinto, S.A.

34.- Sociedad Anónima Cros.

35.- Compañía Española de Petróleos, S.A.

36.- Energía e Industrias Aragonesas, S.A.

37.- La Papelera Española, S.A.

38.- Sociedad Nacional Industrias Aplicaciones Celulosa Española, S.A.

39.- Hidro Nitro Española, S.A.

Grupo de Varios

40.- La Unión y el Fénix Español, S.A.

41.- Galerías Preciados, S.A.

42.- Indice General.

CUADRO 2: Rendimientos medios trimestrales en % y coeficientes beta estimados

	1970 - 79		1970 - 74		1975 - 79	
	$E(\tilde{R}_i)$	$\hat{\beta}_i$	$E(\tilde{R}_i)$	$\hat{\beta}_i$	$E(\tilde{R}_i)$	$\hat{\beta}_i$
1	6'44	1'23	3'29	1'46	9'59	1'31
2	0'64	1'19	2'00	1'20	-0'72	1'24
3	1'48	0'97	1'98	1'05	0'97	0'98
4	0'91	1'29	4'37	1'22	-2'54	1'32
5	-0'37	1'33	3'19	1'42	-3'94	1'22
6	1'60	0'51	2'15	0'41	1'04	0'63
7	2'31	0'76	2'20	0'59	2'41	0'99
8	1'07	0'62	3'45	0'56	-1'32	0'62
9	1'26	0'69	1'91	0'77	0'61	0'67
10	0'91	0'28	1'45	0'27	0'37	0'29
11	0'59	0'57	1'05	0'77	0'13	0'43
12	0'85	0'68	1'62	0'81	0'07	0'60
13	0'72	0'49	0'52	0'72	0'91	0'36
14	1'70	0'47	2'52	0'48	0'88	0'48
15	-0'71	0'66	0'75	0'81	-2'17	0'52
16	-1'17	0'50	0'92	0'57	-3'25	0'39
17	-2'75	0'69	-0'34	1'00	-5'17	0'37
18	0'48	1'02	2'64	1'30	-1'68	0'78
19	-0'04	0'72	2'11	0'87	-2'18	0'56
20	2'67	2'00	9'87	2'12	-4'53	1'75
21	-3'45	1'04	0'20	1'52	-7'11	0'56
22	0'17	0'71	0'33	0'84	0'02	0'67
23	2'38	0'99	3'92	1'41	0'85	0'66
24	2'62	1'55	0'83	0'87	4'41	2'40
25	1'86	1'62	11'24	2'03	-7'53	0'98
26	-0'40	0'58	1'15	0'98	-1'95	0'22
27	2'30	0'89	1'10	1'18	3'49	0'79
28	3'84	0'76	9'79	1'17	-2'10	0'19
29	0'72	0'80	4'43	0'82	-2'98	0'68
30	-4'16	1'22	5'36	1'54	-13'68	0'60
31	-3'71	1'00	-3'11	1'22	-4'30	0'88
32	1'01	0'44	-0'81	1'18	2'11	-0'11
33	-2'05	1'26	2'24	1'70	-6'34	0'81
34	-3'70	0'71	-0'64	1'11	-6'77	0'28
35	1'44	1'39	0'93	1'23	1'94	1'70
36	-3'51	0'73	1'73	0'60	-8'75	0'66
37	-2'78	0'96	4'34	0'92	-9'90	0'75
38	-1'97	1'15	1'92	1'10	-5'86	1'12
39	2'52	0'94	9'91	1'94	-4'88	-0'19
40	-0'03	0'76	-0'02	0'53	-0'05	1'03
41	-2'15	1'50	3'78	1'38	-8'08	1'48
42	0'40	1'00	2'62	1'00	-1'82	1'00

NOTAS DEL ANEXO B

(1) Recordar que en el capítulo V usamos β^* para referirnos al coeficiente beta ex-ante, mientras que β indicaba el coeficiente beta ex-post. Asimismo, conviene remarcar que los estudios de Fama y Jensen han demostrado que el coeficiente beta ex-ante del CAPM y el coeficiente beta ex-post del modelo de mercado son aproximadamente iguales, por lo que muchas veces en lugar de β^* usaremos β . En la mayor parte de los estudios teóricos y empíricos sobre el CAPM no se hace, sin embargo, esta distinción.

FAMA, E.F.: "Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments". Journal of Finance, vol. 23, nº 1, marzo 1968, p. 29-40.

JENSEN, M.C.: "Risk, the Pricing of Capital Assets, and the Evaluation of Investment Portfolios". Journal of Business, vol. 42, nº 2, abril 1969, p. 167-247.

(2) DOUGLAS, G.W.: "Risk in the Equity Markets: An Empirical Appraisal of Market Efficiency". Yale Economic Essays, vol. 9, 1969, p. 3-45.

MILLER, M. y SCHOLES, M.: "Rates of Return in Relation to Risk: A Reexamination of Some Recent Findings". En "Studies in the Theory of Capital Markets", editado por Jensen, M.C., Praeger Publishing Co., New York, 1972, p. 47-48.

FAMA, E.F. y MacBETH, J.D,: "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests". Journal of Political Economy, vol. 81, 1973, p. 607-636.

FOSTER, G.: "Asset Pricing Models: Further Tests". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, nº 1, marzo 1978, p. 39-53.

(3) $\hat{\beta}_i$ y $\widehat{\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i)}$ son los respectivos estimadores de β_i y $\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i)$. En lo que sigue, cuando coloquemos encima de una variable el signo "$\wedge$", lo haremos para indicar que se trata del estimador de esa variable.

(4) Miller y Scholes atribuyen estos resultados contrarios al CAPM a la existencia de algunos problemas econométricos como: multicolinealidad entre $\hat{\beta}_i$ y $\widehat{\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i)}$, violación del supuesto sobre la normalidad de los rendimientos y posibles errores en la estimación de β_i.

MILLER, M. y SCHOLES, M., op. cit.

(5) JENSEN, M.C.: "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-64". Journal of Finance, vol. 23, nº 2, mayo 1968, p. 389-416.

JENSEN, M.C. (1969), op. cit.

(6) ROLL, R.: "Bias in Fitting the Sharpe Model to Time Series Data". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 4, nº 3, septiembre 1969, p. 271-289.

FAMA, E.F.: "A Note on the Market Model and the Two-Parameter Model". Journal of Finance, vol. 28, nº 5, diciembre 1973, p. 1181-1185.

(7) Estudios empíricos sobre la estacionalidad de los coeficientes beta han sido llevados a cabo, entre otros, por los siguientes autores:

BLUME, M.: "On the Assessment of Risk". Journal of Finanee, marzo 1971, p. 1-10.

LEVY, R.A,: "Stationarity of Beta Coefficients". Financial Analysts Journal, noviembre-diciembre 1971, p. 55-62.

POGUE, G.A. y SOLNIK, B.H.: "The Market Model Applied to - European Common Stocks: Some Empirical Results". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 9, nº 6, diciembre 1974, p. 917-944.

ALTMAN, E.I., JACQUILLAT, B. y LAVASSEUR, M.: "Comparative Analysis of Risk Measures: France and the United States". Journal of Finance, diciembre 1974, p. 1495-1511.

LEVITZ, G.D.: "Market Risk and the Management of Institutional Equity Portfolios". Financial Analyst Journal, enero-febrero 1974, p. 53-60.

BAESEL, J.B.: "On the Assessment of Risk: Some Further Considerations". Journal of Finance, diciembre 1974, p. 1491-1494.

En general, parece ser que la estabilidad de los coeficientes beta es mucho más fuerte cuando se trata de - carteras que cuando se trata de títulos individuales. Asimismo, también se ha comprobado que la amplitud del período elegido tiene su influencia. "La previsión de las betas basadas en períodos anteriores de 4 años son más fiables - para los posteriores 4, 3 y 2 años que para el próximo año. Sin embargo, si se desea hacer la previsión para el año -- próximo, es mejor basarla en los cuatro años anteriores - que simplemente usar el año inmediatamente precedente".

ROENFELDT, R., GRIEPENTRAG, G.L. y PFLAUM, Ch.C.: "Further Evidence on the Stationarity of Beta Coefficients". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, nº 1, marzo 1978, p. 117-121.

(8) MODIGLIANI, F., POGUE, A., SCHOLES, M. y SOLNIK, B.: "Efficiency of European Markets and with the American Market" Proceeding of the First International Conference on Stock Exchanges, CISMEC, 1972.

Una versión de este trabajo traducida al castellano puede encontrarse en:

VALLVE-RIBERA DE HORTALA, M.A.: "Lecturas sobre Bolsa". Instituto de Estudios Fiscales. Ministerio de Hacienda. Madrid, 1977, p. 451-484.

(9) En un artículo reciente, Roll ha hecho una dura crítica a los tests que sobre el CAPM se han hecho hasta el momento. Este artículo ha sembrado la confusión y la consternación entre sus colegas.

En opinión de Roll, la única hipótesis testable del CAPM, en la versión más general del modelo debida a Black, es que la cartera de mercado es eficiente, de forma que la relación lineal que se produce entre el rendimiento esperado de los títulos y sus respectivos coeficientes beta, no es más que una consecuencia de la eficiencia de la cartera de mercado.

Por tanto, para testar el CAPM, en primer lugar, hay que identificar la cartera de mercado, incluyendo en ella todos los activos, negociables y no negociables, y luego comprobar si efectivamente es eficiente.

En los tests clásicos del CAPM que se han hecho hasta ahora, en lugar del rendimiento de la cartera de mercado se utiliza un sustituto del mismo, como puede ser - el rendimiento que se desprende de las series históricas de un índice general como el Dow-Jones Industrial Average o el Standard and Poor 500, en el caso de las Bolsas norteamericanas, o el Indice Largo Total de la Bolsa de Madrid, en el caso español. Según Roll, usar un sustituto de estas características puede llevar aparejados dos tipos de problemas: En primer lugar, el sustituto de la cartera de mercado representada por los títulos que componen el índice general, y en las proporciones que los mismos entran a formar parte del mismo, puede ser eficiente aún en el caso de que la verdadera cartera de mercado no lo sea. En segundo lugar, el - sustituto de la cartera de mercado puede ser ineficiente, - pero eso no implica nada a favor ni en contra de la eficiencia de la cartera de mercado.

Como bien dice Ross, "la respuesta a la crítica de Roll ha sido en gran parte un rechazo de lo que erróneamente se ha interpretado como un mensaje nihilista". Así, en opinión de algunas personas, si las objeciones de Roll son ciertas, ninguna teoría es testable.

Sin embargo, la crítica de Roll ha servido para llamar la atención sobre la provisionalidad de los resultados de los diferentes tests que se han hecho sobre el CAPM. Así, Fama afirma que "en verdad todo lo que nosotros podemos decir en este momento es que la literatura no ha producido todavía un test significativo de las hipótesis de - Sharpe-Lintner".

ROLL, R.: "A Critique of Asset Pricing Theory's Test. Part I: On Past and Potential Testability of the Theory". Jour-

nal of Financial Economics, vol. 4, marzo 1977, p. 129-176.
ROSS, S.A.: "The Current Status of the Capital Asset Pri - cing Model (CAPM)". Journal of Finance, vol. 33, nº 3, junio 1978, p. 885-901.
FAMA, E.F.: "Foundations of Finance". Basic Books. New York 1976, p. 370.

(10) Sería más correcto hablar de rendimiento medio y no de rendimiento esperado, puesto que estamos trabajando con datos ex-post. Del mismo modo, en vez de hablar de la desviación típica de los rendimientos, sería más propio hablar de la variabilidad de los mismos.

(11) JHONSTON, J.: "Métodos de Econometría". Editorial Vicens-Vives. Barcelona, 1975.
MALINAUD, E.: "Métodos Estadísticos de la Econometría". - Ariel. Barcelona, 1967.

(12) Black, Jensen y Scholes, así como Modigliani, Pogue, Scholes y Solnik, usan estas técnicas de agrupar los títulos - en carteras en sus tests:
BLACK, F., JENSEN, M.C. y SCHOLES, M.S.: "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests". En "Studies in the Theory of Capital Markets", editado por Jensen, M.C., Praeger Publishing Co., New York, 1972.
MODIGLIANI, F., POGUE, A., SCHOLES, M. y SOLNIK, B.; op. - cit.

(13) Goula Suriñach ha realizado interesante trabajo sobre la - relación rentabilidad-riesgo en el mercado bursátil espa - ñol. El período de estudio por él considerado fue de tres

años: 1970-72 y utilizó datos quincenales, extraídos del índice ponderado de la Bolsa de Barcelona, referentes a 58 títulos. Como tasa pura de interés tomó la media del tipo de interés de los depósitos bancarios a plazo fijo de tres meses. Los valores de los parámetros $\hat{a}$ y $\hat{b}$ fueron respectivamente:

$$\hat{a} = 0'096$$
$$\hat{b} = 0'3336$$

mientras que R_f y $(E(\tilde{R}_M)-R_f)$, en base a los datos ex-post, tomaron los siguientes valores:

$$R_f = 0'1207$$
$$E(\tilde{R}_M) - R_f = 0'2483$$

GOULA SURIÑACH, J.: Análisis y Cálculo del Riesgo en el Mercado de Valores". Banca Más Sardá. Servicio de Estudios. Barcelona, 1974.

(14) FRIEND, I. y BLUME, M.: "Measurement of Portfolio Performance under Uncertainty". American Economic Review, vol. 60, septiembre 1970.
FRIEND, I. y BLUME, M.: "A New Look at the Capital Asset Pricing Model". Journal of Finance, vol. 28, nº 1, marzo 1973, p. 19-33.

(15) BLACK, F., JENSEN, M.C. y SCHOLES, M.S., op. cit.

(16) FRIEND, I. y BLUME, M. (1973), op. cit., p. 19.

(17) Un intervalo diario no es el más correcto para este tipo de tests, ya que muchas veces la cotización de un título tiene retrasos y no depende únicamente de la cotización del índice del mercado en ese día, sino también del valor

que haya tomado el índice del mercado en sesiones precedentes.

(18) POGUE, G.C. y SOLNIK, B.H., op. cit., p. 922-924.

(19) Hay que tener en cuenta que por ejemplo en el trabajo de Pogue y Solnik, cuanto mayor es la amplitud del intervalo, mayor es el coeficiente de determinación. Estos autores trabajan con períodos diarios, semanales, quincenales y mensuales.
POGUE, G.A. y SOLNIK, B.H., op. cit.

(20) Aunque como es lógico hay títulos con series históricas muy incompletas debido a las entradas y salidas en el índice de los mismos; en un principio se grabaron datos correspondientes a los 115 títulos que en uno u otro momento formaron parte del Indice Largo Total de la Bolsa de Madrid, en el período 1970-79. Si hubiesemos elegido un intervalo mensual, hubiésemos tenido que teclear 13.800 valores y la matriz de varianzas-covarianzas hubiese tenido 13.225 elementos. Mientras que el ordenador IBM-S110 de nuestra Facultad, con el cual hemos trabajado, tiene una memoria de 64 K que permite únicamente trabajar con 7.000 u 8.000 valores al mismo tiempo.

(21) Mirar el epígrafe A.2 del anexo anterior en donde se justifica porque, una vez grabados los datos de los 115 títulos, se redujo la muestra a los 41 títulos que tenían los 40 valores trimestrales de sus índices completos.

(22) La relación de las empresas que forman parte de la muestra

así como los respectivos sectores a los que pertenecen se muestra en el Cuadro 1. Los valores de $E(\tilde{R}_i)$ y $\hat{\beta}_i$ de cada uno de los 41 títulos y la cartera de mercado puede verse en el Cuadro 2.

(23) En lo que sigue no haremos la distinción entre la cartera de mercado y su sustituto y hablaremos siempre de la cartera de mercado aunque usemos, claro está, el sustituto.

(24) Los valores de los mismos se encuentran en el Cuadro 2.

(25) Está claro que si se introduce la inflación en el planteamiento, la tasa pura de interés en términos reales también es aleatoria. Pero la erosión monetaria de la inflación juega en contra tanto del tipo de interés nominal de los depósitos bancarios a plazo fijo como del rendimiento de las acciones de nuestra muestra que está expresado también en términos nominales.

(26) No vamos a comparar los coeficientes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ con los valores ex-post de R_f y $(E(\tilde{R}_M)-R_f)$, puesto que desde el momento en que $\hat{a}$ es negativo ya no tiene sentido hablar de la mayor o menor proximidad de estos coeficientes con los valores que se deberían haber dado.

(27) En realidad ambos contrastes son idénticos en los mínimos cuadrados ordinarios de dos variables.

(28) MODIGLIANI, F., POGUE, A., SCHOLES, M. y SOLNIK, B., op. cit., p. 480-481.

(29) Las acciones de la Sociedad El Fenix, del grupo de varios, tuvieron también un rendimiento medio trimestral negativo, pero muy próximo a cero: -0'02%, por lo que no las eliminamos de la muestra.

CAPITULO VI

LA ADAPTACION DE LOS SUPUESTOS DEL C.A.P.M. AL MUNDO REAL

6.1. Introduccion

En los capítulos anteriores hemos analizado y deducido el CAPM en su versión standard. También lo hemos relacionado con el modelo de mercado a fin de poder expresar la SML de los títulos o carteras de valores en función de sus respectivas betas ex-post. Se muestra así como las carteras eficientes carecen de riesgo no sistemático, de forma que el mercado únicamente recompensa el riesgo sistemático bien de un título o bien de una cartera:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + (E(\tilde{R}_M) - R_f)\ \beta_i \qquad (6.1)$$

Esta versión standard del CAPM está basada en una serie de supuestos, algunos de ellos muy restrictivos y poco reales; por ejemplo, la no existencia de cambios en el nivel de precios, existencia en el mercado de un activo libre de riesgo el cual se puede prestar o pedir prestado a la misma tasa de interés en cantidades ilimitadas, etc.

El CAPM resultante de ese conjunto de supuestos tan restrictivos ha sido sometido a numerosos tests de tipo empírico con el fin de comprobar si, a pesar de la irrealidad de sus supuestos, desde un punto de vista positivista, sus predicciones eran válidas. En general, aunque hay autores que piensan que sale airoso en esos tests, lo cierto es que la mayoría de los trabajos son cuestionables y se han observado una serie de sesgos que el CAPM no llega a explicar.

Algunos autores han hecho sus estudios empíricos basándose en el ajuste de la SML por medio de la sencilla ecuación (1):

$$\tilde{R}_i = c_i + d_i \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) + \tilde{\mu}_i \qquad (6.2)$$

pero otros han intentado añadir otros factores además de la $\operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)$, con el fin de ver si un modelo de dos o más índices se ajustaba mejor que ese modelo de regresión simple, de forma que las desviaciones respecto a los rendimientos observados fuesen menores.

Aunque este es un camino empíricamente válido, no parece permitir un mejor conocimiento de la relación real entre el riesgo y la rentabilidad de los títulos o carteras de valores. En el plano formal, es más lógico relajar los supuestos, es decir, abandonar uno o más supuestos y deducir una nueva relación teórica entre el rendimiento y el riesgo de los títulos que fuese más explicativa y no diese lugar a esos sesgos observados en los trabajos empíricos.

A pesar de que este trabajo incluye una parte empírica, de contraste del CAPM y de estudio de los límites de la diversificación en el caso del mercado de capitales español, nuestro estudio es eminentemente teórico, por lo que nos parece más válido seguir este último camino de relajar supuestos y tratar de hallar las nuevas relaciones teóricas que se establecen cuando se abandonan sucesivamente las hipótesis básicas del modelo de precios de equilibrio de los activos financieros desarrollado en capítulos anteriores.

Así, iremos eliminando una tras otra las hipótesis más restrictivas, analizando los efectos aislados que se dan sobre el modelo cuando se abandona cada una de ellas. Lo ideal, claro está, sería ver el efecto acumulado provocado por el abandono conjunto de todos los supuestos restrictivos, pero por el momento la Moderna Teoría Analítica de la Financiación no está lo suficientemente desarrollada para ello(2), por lo que la relajación de los supuestos se irá realizando de forma sucesiva en los próximos epígrafes (3).

6.2. El Modelo de Black

6.2.1. La no existencia en el mercado de un activo libre de riesgo

En primer lugar, vamos a analizar el efecto que produce sobre el CAPM el abandonar la hipótesis de que existe un título libre de riesgo, en el mercado de capitales, a cuya tasa de interés se puede prestar o pedir prestado en cantidades ilimitadas.

Como se puede adivinar, las razones por las cuales se elige la eliminación de este supuesto son obvias. En el mundo real, no son iguales las tasas a las que se puede prestar y pedir prestado el dinero; y aún es más irreal pensar - que a un cierto tipo de interés, alguna institución financiera esté dispuesta a prestar la cantidad que se desee, sea cual sea su cuantía.

En la práctica, cada persona tiene un crédito potencial que varía según los ingresos que regularmente percibe y según cual sea el patrimonio que esté avalando su posible solvencia en un momento dado. Además, desde el momento en que la inflación futura es incierta y no se puede prever con total - exactitud cuál será su tasa real, el rendimiento real de un - préstamo será también incierto. Es decir, que la tasa pura de interés se vuelve incierta cuando se tiene en cuenta el fenómeno inflacionario.

Black fue el primer autor que trató esta relajación del modelo CAPM y prácticamente todo lo tratado sobre el tema gira en torno a su trabajo (4). Black observa que Friend y - Blume, por una parte, y Black, Jensen y Scholes, por otra(5), al realizar diferentes tests sobre el CAPM, llegan a la conclusión de que en la realidad las carteras de coeficientes beta elevados están recompensadas por debajo de lo que la teoría predice, mientras que ocurre lo contrario en las carteras cuyas betas son bajas. Por eso Black, Jensen y Scholes plantean un modelo de mercado de dos índices cuyos resultados indican que explica mucho mejor la relación entre el rendimiento y el riesgo que el modelo de mercado de un solo índice. El modelo de dos índices que utilizan estos autores es el siguiente:

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_M + (1-\beta_i) \tilde{R}_z + \tilde{\varepsilon}_i \qquad (6.3)$$

donde $\tilde{R}_z$ es el retorno de un segundo factor explicativo con coeficiente beta cero y, por tanto, independiente del mercado.

De la observación de este nuevo modelo se desprende que cuando $\tilde{R}_z$ es positivo, las carteras de bajos valores del coeficiente beta tendrán mayores rendimientos que los previstos por la SML del CAPM standatd (expresión (6.1)), mientras que ocurrirá lo contrario en carteras con coeficientes beta altos; de esta forma, el modelo de dos índices tiene un mayor poder explicativo del comportamiento real de los rendimientos de los títulos que el modelo standard del CAPM.

Como sugiere Black, una posible razón de la obtención de estos resultados empíricos puede estar en que el supuesto referente a la existencia de un activo libre de riesgo no se cumple en la realidad.

6.2.2. El nuevo modelo de precios de equilibrio de los activos financieros en ausencia de un activo libre de riesgo.

6.2.2.1. Propiedades de las carteras frontera

Cuando no existe un activo libre de riesgo y todos los activos son arriesgados, ya estudiamos en el capítulo III como la frontera eficiente era la rama superior de la hipérbola representada en la Figura 3.9.

Antes de entrar de lleno en el modelo de Black, es necesario demostrar tres teoremas sobre las carteras de mínima varianza (6), teoremas que luego permitirán demostrar que la cartera de mercado es una cartera eficiente (7).

En el capítulo III se demostró que los pesos o ponderación con que intervienen los distintos títulos dentro de una cartera frontera vienen dados por la siguiente expresión:

$$X_q = \frac{1}{ac - b^2} V^{-1} \left[e_q^* (cE - b[1_n]) - (bE - a[1_n]) \right] \qquad (6.4)$$

en donde hemos introducido un pequeño cambio en los símbolos utilizados allí, al poner e_q^* en lugar de e^* para hacer mayor hincapié en que e_q^* es el supuesto rendimiento esperado de la cartera q:

$$e_q^* = E(\tilde{R}_q) = \text{cte. dada}$$

Si ahora consideramos una cartera p formada por una combinación lineal de dos carteras frontera: e y g (de mínima varianza), los pesos de esa cartera p pueden expresarse de la siguiente manera:

$$X_p = w\, X_e + (1-w)\, X_g \qquad (6.5)$$

donde w representa la proporción en que interviene la cartera e dentro de la cartera p y (1-w) la proporción en que lo hace la cartera g.

Teniendo ésto en cuenta, el rendimiento esperado de la cartera p, vendrá dado por la expresión:

$$E(\tilde{R}_p) = X_p' E = w\, E(\tilde{R}_e) + (1-w)\, E(\tilde{R}_g) = e_p^* \qquad (6.6)$$

Desde el momento que e y g son dos carteras frontera, las proporciones en que intervienen los distintos títulos dentro de ellas vendrán dadas por:

$$X_e = \frac{1}{ac-b^2} V^{-1} \left[e_e^* \left(cE - b\left[1_n\right]\right) - \left(bE - a\left[1_n\right]\right) \right] \qquad (6.7)$$

$$X_g = \frac{1}{ac-b^2} V^{-1} \left[e_g^* \left(cE - b\left[1_n\right]\right) - \left(bE - a\left[1_n\right]\right) \right] \qquad (6.8)$$

Llevando (6.7) y (6.8) a (6.5), se tiene:

$$X_p = \frac{1}{ac-b^2} V^{-1} \left[\left(we_e^* + (1-w)e_g^*\right) \left(cE - b\left[1_n\right]\right) - \left(bE - a\left[1_n\right]\right) \right]$$

y recordando (6.6), se puede finalmente escribir:

$$X_p = \frac{1}{ac-b^2} V^{-1} \left[e_p^* \left(cE - b\left[1_n\right]\right) - \left(bE - a\left[1_n\right]\right) \right] \qquad (6.9)$$

Por tanto, tal como indica esta última expresión, se comprueba que la cartera p es una cartera frontera, por lo que podemos afirmar que cuando se tienen en cuenta únicamente los n activos arriesgados, y se hace caso omiso sobre la existencia de un activo libre de riesgo, cualquier combinación lineal de dos carteras frontera es otra cartera frontera. Afirmación que constituye el enunciado del teorema 1 sobre las propiedades de las carteras de mínima varianza.

A continuación vamos a demostrar el recíproco de este teorema, esto es, que en las condiciones que acabamos de enunciar, toda cartera frontera puede ser obtenida por una combinación lineal de dos carteras frontera cualesquiera(8).

Cuando planteamos el problema de la selección de cartera en el capítulo III, vimos como las condiciones de primer grado para la existencia de la frontera eficiente venían expresadas por (3.27), (3.28) y (3.29) que constituían un sistema de (n+2) ecuaciones con (n+2) incógnitas. Nuestro propósito ahora es trabajar unicamente con (3.27) y teniendo en cuenta que por (3.54):

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\sigma(\tilde{R}_p)}{\dfrac{d\,E(\tilde{R}_p)}{d\,\sigma(\tilde{R}_p)}} = \frac{\sigma(\tilde{R}_p)}{S_p} \qquad (6.10)$$

(en donde $S_p = \dfrac{dE(\tilde{R}_p)}{d\sigma(\tilde{R}_p)}$ es la pendiente a la frontera eficiente en el punto representado por la cartera eficiente p), ver qué valor debe tomar k para que:

$$X' \left[1_n\right] = 1 \qquad (6.11)$$

Por tanto, según (3.27) tenemos (9):

$$2\,V\,X_p = \lambda\,E + k\left[1_n\right] \qquad (6.12)$$

Premultiplicando (6.12) por V^{-1} se logra despejar X_p:

$$X_p = \frac{\lambda}{2}\,V^{-1}\,E + \frac{k}{2}\,V^{-1}\left[1_n\right] \qquad (6.13)$$

llamando v_{ij} a los elementos de V^{-1} y teniendo en cuenta que

$$X_p = \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix} \qquad (6.14)$$

podemos expresar un elemento cualquiera i del vector columna X_p de la siguiente forma:

$$x_{ip} = \frac{\lambda}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} v_{ij} \, E(\widetilde{R}_j) \right] + \frac{k}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} v_{ij} \right] \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (6.15)$$

En (6.15) hay n ecuaciones que junto con (6.10) suman (n+1) ecuaciones, quedando por ver qué valor hay que darle a k para que se cumpla (6.11):

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip} = 1 \qquad (6.16)$$

y así poder hallar las (n+2) incógnitas: x_{ip} (i=1,2,...,n), λ y k.

Por tanto, hay que standarizar la ecuación (6.15) - de forma que se cumpla (6.16). De esta forma, si definimos:

$$x_{ie} = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \, E(\widetilde{R}_j) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \, E(\widetilde{R}_j) \qquad (6.17)$$

$$x_{ig} = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \qquad (6.18)$$

no hay duda que se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ie} = 1 \qquad (6.19)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ig} = 1 \qquad (6.20)$$

y llamando:

$$y_{pe} = \frac{\lambda}{2} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \, E(\widetilde{R}_j) \right] \qquad (6.21)$$

$$y_{pg} = \frac{k}{2} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \right] \qquad (6.22)$$

estamos en condiciones de expresar (6.15) de la siguiente forma:

$$x_{ip} = y_{pe}\, x_{ie} + y_{pg}\, x_{ig} \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (6.23)$$

donde k debe ser tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip} = 1 \qquad (6.24)$$

Así que tomando sumatorios en (6.23), desde i=1 - hasta n, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip} = y_{pe}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ie}\right) + y_{pg}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ig}\right) = 1 \qquad (6.25)$$

y recordando (6.19) y (6.20), podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip} = y_{pe} + y_{pg} = 1 \qquad (6.26)$$

El rendimiento de la cartera p puede expresarse como:

$$\widetilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_{ip}\widetilde{R}_i \qquad (6.27)$$

e, igualmente, los rendimientos de las carteras e y g serán:

$$\widetilde{R}_e = \sum_{i=1}^{n} x_{ie}\widetilde{R}_i \qquad (6.28)$$

$$\widetilde{R}_g = \sum_{i=1}^{n} x_{ig}\widetilde{R}_i \qquad (6.29)$$

Por lo que teniendo en cuenta (6.23), (6.28) y (6.29) podemos expresar el rendimiento de la cartera p en función de los rendimientos de las carteras e y g:

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} x_{ip}\tilde{R}_i = \sum_{i=1}^{n} ((y_{pe}x_{ie} + y_{pg}x_{ig})\tilde{R}_i) =$$

$$= y_{pe}\,(\sum_{i=1}^{n} x_{ie}\tilde{R}_i) + y_{pg}(\sum_{i=1}^{n} x_{ig}\tilde{R}_i) = y_{pe}\tilde{R}_e + y_{pg}\tilde{R}_g \qquad (6.30)$$

De este modo, cualquier cartera de mínima varianza p, puede ser expresada como una combinación lineal de las dos carteras e y g. Pero además, e y g son dos carteras de mínima varianza, ya que ambas se corresponden con los siguientes casos particulares de la ecuación (6.30):

$$\tilde{R}_e \begin{cases} y_{pe} = 1 \\ y_{pg} = 1 - y_{pe} = 0 \end{cases} \qquad \tilde{R}_g \begin{cases} y_{pe} = 0 \\ y_{pg} = 1 - y_{pe} = 1 \end{cases} \qquad (6.31)$$

Por otra parte, g es la cartera de mínima varianza que está situada en el centro de la hipérbola, ya que según (6.21):

$$y_{pe} = \frac{\lambda}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\; E(\tilde{R}_j)\right]$$

$$0 = \frac{\lambda}{2}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\; E(\tilde{R}_j)\right]$$

$$\lambda = 0 \qquad (6.32)$$

y despejando la pendiente de la frontera eficiente en el punto representado por la cartera g en (6.10), y llevando el valor de (6.32), resulta:

$$S_g = \frac{\sigma(\tilde{R}_p)}{\lambda/2} = \frac{\sigma(\tilde{R}_p)}{0/2} = \longrightarrow \infty \qquad (6.33)$$

En términos gráficos, la posición de la cartera g -

dentro del segmento de hipérbola que representa la frontera - eficiente es:

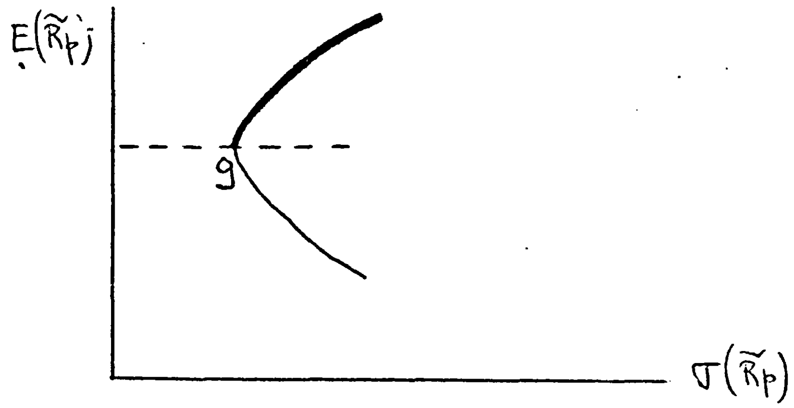


Figura 6.1

En resumen, queda demostrado el teorema 2 que dice que toda cartera de mínima varianza puede ser expresada como una combinación lineal de dos carteras frontera.

Ahora, combinando los teoremas 1 y 2, estamos en condiciones de poder afirmar que en ausencia de un activo libre - de riesgo, toda combinación lineal de un número cualquiera de carteras frontera es otra cartera frontera y, en particular, - por lo que respecta a la parte superior de la hipérbola, que toda combinación lineal de carteras eficientes es otra cartera eficiente. Esto último constituye el teorema 3 que, como es lógico, no necesita demostración adicional.

6.2.2.2. La cartera de mercado es una cartera eficiente

El teorema 3 nos va a permitir confirmar que la cartera de mercado es una cartera eficiente. En efecto, la cartera de mercado está compuesta por todos los títulos del mercado y en las proporciones que los mismos se dan en el mismo. Los títulos de la cartera de mercado se encuentran distribuídos en las distintas carteras individuales cuya suma en equilibrio debe ser igual a la cartera de mercado. Pues bien, como todos los inversores son individuos racionales que escogen distintas carteras de la frontera eficiente, según cual sea su aversión al riesgo y su preferencia del consumo presente frente al consumo futuro, a partir del teorema 3, estamos en condiciones de afirmar que desde el momento que la cartera de mercado es una combinación lineal de carteras eficientes, dicha cartera de mercado será por lo tanto eficiente y estará situada sobre la frontera eficiente.

Por otra parte, según el teorema 2, también sabemos que una cartera frontera puede ser expresada como una combinación lineal entre una cartera frontera cualquiera y, por ejemplo, la cartera de mercado.

6.2.3. <u>La cartera beta cero</u> (10)

Ya hemos adelantado que cualquier cartera frontera de mínima varianza se puede generar a partir de una combinación lineal entre dos carteras frontera. Una de ellas hemos visto que puede ser la cartera de mercado M, y la otra será la cartera de mínima varianza con coeficiente beta cero.

De este modo, al igual que en el modelo standard del CAPM, cualquier individuo únicamente invertía en el activo libre de riesgo y la cartera de mercado M; ahora, en ausencia de un activo libre de riesgo, cualquier individuo únicamente invertirá en la cartera Z de beta cero y la cartera de mercado M, donde tanto Z como M son dos carteras frontera de mínima varianza. Las proporciones que invertirá en cada una de las dos carteras frontera dependerán de su aversión al riesgo y de su preferencia del consumo presente frente al consumo futuro.

A continuación vamos a demostrar cuál es la relación que se da entre el rendimiento y el riesgo de un título en ausencia de un activo libre de riesgo, y luego generalizaremos la expresión para cualquier cartera eficiente o no.

Para ello vamos a situarnos sobre la hipérbola deducida en el Capítulo III, hipérbola que representaba todas las carteras de mínima varianza (eficientes o no) y trazaremos la tangente a dicha hipérbola en el punto M que representa la cartera de mercado:

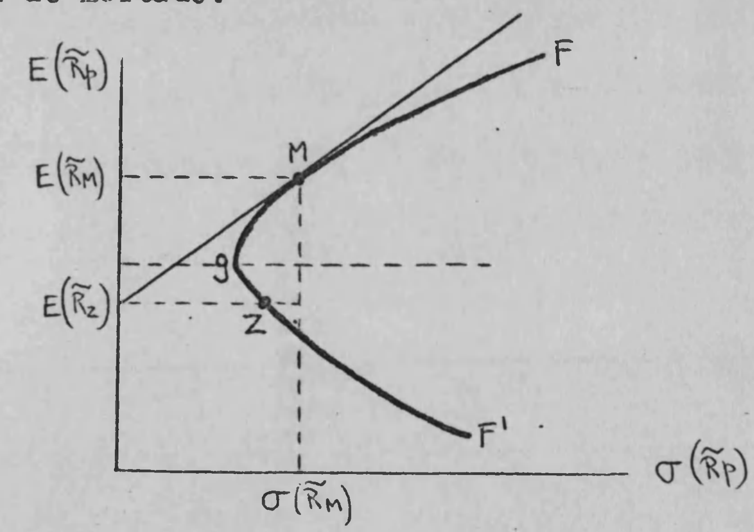


Figura 6.2.

La pendiente de esa tangente es:

$$S_M = \frac{E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)}{\sigma(\tilde{R}_M)} \qquad (6.34)$$

Por otra parte, como vimos en el capítulo III, al hablar de la relación entre el rendimiento y el riesgo de los títulos que forman parte de una cartera eficiente, se puede escribir según la expresión (3.61) que:

$$S_p = \frac{E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_p)}{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p) - \sigma^2(\tilde{R}_p)} \sigma(\tilde{R}_p) \qquad (6.35)$$

donde p es una cartera eficiente cualquiera y, en particular, cuando hacemos referencia a la cartera eficiente de mercado M:

$$S_M = \frac{E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_M)}{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_M) - \sigma^2(\tilde{R}_M)} \sigma(\tilde{R}_M) \qquad (6.36)$$

igualando las dos expresiones (6.36) y (6.34), referentes a la pendiente de la frontera eficiente en el punto M, tenemos:

$$S_M = \frac{E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_M)}{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_M) - \sigma^2(R_M)} \sigma(\tilde{R}_M) = \frac{E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)}{\sigma(\tilde{R}_M)}$$

$$\frac{E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_M)}{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_M) - \sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \sigma^2(\tilde{R}_M) = E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)$$

$$\frac{E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_M)}{\dfrac{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} - 1} = E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)$$

$$E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_M) = E(\tilde{R}_Z) - E(\tilde{R}_M) + \left[E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)\right] \frac{cov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)}$$

$$E(\tilde{R}_i) = E(\tilde{R}_Z) + \left[E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)\right] \cdot \beta_i \qquad (6.37)$$

Esta expresión, válida para todo título, también lo es para toda cartera eficiente o no, ya que si multiplicamos ambos miembros de (6.37) por x_{ip} y sumamos desde i igual a uno hasta n:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip}\, E(\widetilde{R}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_{ip}\, E(\widetilde{R}_Z) + \left[E(\widetilde{R}_M) - E(\widetilde{R}_Z)\right] \sum_{i=1}^{n} x_{ip}\, \beta_i$$

$$E(\widetilde{R}_p) = E(\widetilde{R}_Z) + \left[E(\widetilde{R}_M) - E(\widetilde{R}_Z)\right] \beta_p \qquad (6.38)$$

Como la cartera p puede ser una cartera cualquiera podemos concretar sustituyendo p por Z:

$$E(\widetilde{R}_Z) = E(\widetilde{R}_Z) + \left[E(\widetilde{R}_M) - E(\widetilde{R}_Z)\right] \beta_Z$$

y despejando β_Z queda:

$$\beta_Z = \frac{E(\widetilde{R}_Z) - E(\widetilde{R}_Z)}{E(\widetilde{R}_M) - E(\widetilde{R}_Z)} = \frac{0}{E(\widetilde{R}_M) - E(\widetilde{R}_Z)} = 0 \qquad (6.39)$$

y, en consecuencia:

$$\operatorname{cov}(\widetilde{R}_Z, \widetilde{R}_M) = \beta_Z\, \sigma^2(\widetilde{R}_M) = 0 \qquad (6.40)$$

Por tanto, la cartera Z tiene un coeficiente beta igual a cero, por lo que no está correlacionada con la cartera de mercado. De entre las múltiples carteras que verifican esta condición, se reserva el nombre de cartera beta cero a aquella cartera que entre ellas tiene una varianza mínima, es decir, que la cartera Z de coeficiente beta cero se sitúa sobre la frontera o hipérbola; con lo cual tanto la cartera beta cero Z como la cartera de mercado M son dos carteras frontera. Y así, aplicando directamente el teorema 2, toda cartera frontera y, en particular, toda cartera eficiente, será una combinación lineal de la cartera de mercado y de la cartera beta cero.

Como M es una cartera frontera pero además eficiente, está situada en la parte superior de la hipérbola, y, según las propiedades de esta curva, toda tangente a la parte superior de la misma debe cortar al eje de ordenadas en un punto situado por debajo de su centro. Por tanto, tal como se observa en la Figura 6.2., Z está situada por debajo de la cartera g, cuya ordenada coincide con la del centro de la hipérbola, por lo que la cartera Z siendo una cartera frontera de mínima varianza, no es una cartera eficiente.

En ausencia de un activo libre de riesgo, con expectativas homogéneas, todos los inversores se enfrentan a una frontera eficiente tal como la señalada por la curva gMF de la Figura 6.2. El punto de la misma sobre el cual decida situarse un inversor individual dependerá de la forma que tengan sus curvas de indiferencia, que depende de su aversión al riesgo y de su preferencia temporal entre el consumo presente y el consumo futuro.

Si el inversor se sitúa en algún punto de la frontera eficiente entre g y M, su cartera estará formada por una combinación lineal de las carteras M y Z ambas con pesos o ponderaciones positivas.

Pero si elige un punto entre M y F, entonces únicamente invertirá en la cartera M, adoptando una posición a corto o al descubierto en la cartera Z (11).

Finalmente, si se sitúa en M, únicamente invierte en la cartera de mercado y el peso de la cartera Z no es positivo ni negativo, sino nulo.

Por tanto, aunque todo inversor reparta sus fondos entre las carteras Z y M, como hay inversores que adoptan posiciones a corto en la cartera Z, otros a largo y otros que - ni siquiera invierten en ella, resercando todos sus fondos para la cartera de mercado, no todos los inversores tienen carteras cuya composición de activos arriesgados sea la misma, - ya que dicha composición dependerá del peso que tenga la cartera Z y, en consecuencia, el teorema de la separación ya no se cumple.

En el equilibrio, la agregación de todas las carteras individuales debe dar la cartera de mercado. Pero según - acabamos de ver, cada individuo, según cuáles sean sus curvas de indiferencia, adopta una combinación lineal distinta de - las carteras M y Z. Por lo que, para que la agregación de todas las carteras individuales resulte ser la cartera de mercado, es necesario que la suma de todos los recursos invertidos en la cartera beta cero sea nula.

Por último, como ya hemos visto, en ausencia de un activo libre de riesgo, R_f, éste es sustituído por $E(\tilde{R}_Z)$ en - la expresión que relaciona el rendimiento y el riesgo de un título, con lo cual si $E(\tilde{R}_Z) > R_f$ (12), entonces la expresión (6.38) sería la respuesta teórica al fenómeno observado por - Black, Jansen y Scholes referente al sesgo que se producía en el test del modelo standard de precios de equilibrio de los - activos financieros, ya que (6.38), en el supuesto de que - $E(\tilde{R}_Z) > R_f$, tendrá una ordenada en el origen mayor y una pendiente menor.

6.3. El Modelo de Precios de Equilibrio con una Tasa de Préstamo Libre de Riesgo

Acabamos de ver en el epígrafe anterior cual es la relación entre el rendimiento y el riesgo de un activo individual o de una cartera de valores cuando no existe un activo libre de riesgo. Ahora nos proponemos estudiar una situación intermedia entre el CAPM standard estudiado en el capítulo IV y el modelo de Black con la cartera beta cero. Para ello, vamos a suponer que existe un activo libre de riesgo que los inversores pueden prestar, pero no pedir prestado.

El estudio de esta situación intermedia es necesario para abordar posteriormente el análisis del modelo de equilibrio cuando existe divergencia entre las tasas de interés a las cuales se puede prestar y pedir prestado el activo libre de riesgo.

Vasicek (13), en un artículo publicado, demuestra que se siguen cumpliendo las principales características del modelo de precios de equilibrio, aunque la relación lineal entre el rendimiento y el riesgo de un título esté compuesta por dos segmentos lineales de distinta pendiente.

En el capítulo III, vimos que la frontera eficiente en el caso de tratar únicamente con n activos arriesgados venía dada por una curva convexa (una hipérbola) tal como la dibujada en la Figura 6.3; y que al añadir el activo libre de riesgo, a cuya tasa de interés se podía prestar y pedir prestado en cantidades ilimitadas, la nueva frontera eficiente -

era aquélla línea del haz de rectas que partiendo de R_f era tangente a la frontera eficiente anterior en el punto T y se prolongaba hasta T'.

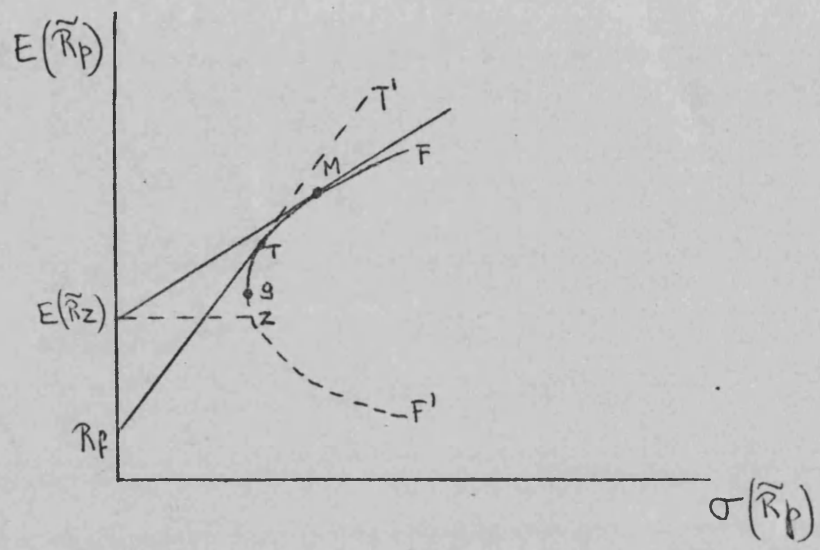


Figura 6.3

Pero es obvio que cuando no se puede pedir prestado a la tasa de interés del activo libre de riesgo, los puntos de la recta entre T y T' no son accesibles, por lo que la frontera eficiente, bajo el supuesto planteado en este epígrafe, está compuesta por el segmento de recta $R_f T$ y el segmento curvo TMF (siendo M la cartera de mercado).

Se habrá observado que en la Figura 6.3, la cartera de mercado M está situada por encima de la cartera arriesgada T, lo cual equivale a suponer que $R_f < E(\tilde{R}_Z)$, es decir, que la tasa pura de interés es inferior al rendimiento esperado de la cartera beta cero de mínima varianza. Vamos a demostrar que esto es cierto.

Imaginemos una cartera eficiente "e" compuesta por -

una combinación lineal de un préstamo a la tasa pura de interés R_f y la cartera arriesgada T. Como la cartera T está situada sobre la frontera eficiente de los activos arriesgados, ya vimos en el epígrafe anterior que, por el teorema 2, se puede expresar T como una combinación lineal de dos carteras cualesquiera, y en particular de las carteras frontera Z y M, es decir, de la cartera beta cero de mínima varianza y de la cartera de mercado. Por tanto, la cartera eficiente "e" estará compuesta por el préstamo sin riesgo a la tasa R_f, la cartera beta cero y la cartera de mercado. Si designamos por w_f, w_Z y w_M a las respectivas proporciones en que intervienen cada uno de los tres componentes de la cartera eficiente "e", podemos expresar su rendimiento de la siguiente manera:

$$\tilde{R}_e = w_f R_f + w_Z \tilde{R}_Z + w_M \tilde{R}_M \qquad \text{con} \begin{cases} w_i > 0 \ (14) \quad i=f,Z,M \\ w_f + w_Z + w_M = 1 \end{cases} \tag{6.41}$$

y aplicando el operador esperanza matemática, se tiene:

$$E(\tilde{R}_e) = w_f R_f + w_Z E(\tilde{R}_Z) + w_M E(\tilde{R}_M) \tag{6.42}$$

Por otra parte, aplicando el operador varianza en (6.41) y recordando que la cartera beta cero no está correlacionada con la cartera de mercado, como tampoco lo está el rendimiento del activo libre de riesgo con ningún otro activo o cartera arriesgada, podemos escribir:

$$\sigma^2(\tilde{R}_e) = w_Z^2\, \sigma^2(\tilde{R}_Z) + w_M^2\, \sigma^2(\tilde{R}_M) \tag{6.43}$$

Supongamos contrariamente a como lo hemos hecho en la figura 6.3 que $E(\tilde{R}_Z) < R_f$. En este caso, si se aumenta la proporción en que interviene el activo libre de riesgo en la cartera eficiente "e" y se disminuye la participación de la cartera beta cero en la misma, por (6.42) y (6.43) se tendrá que aumenta el rendimiento esperado de la cartera eficiente "e", al mismo tiempo que habremos disminuido su varianza. Del mismo modo, si suponemos que $E(\tilde{R}_Z) = R_f$, volviendo a efectuar el mismo trasvase de fondos desde la cartera beta cero al activo libre de riesgo, según (6.42) y (6.43), el rendimiento esperado de la cartera eficiente "e" será el mismo, pero su varianza será menor. En ambos casos, al aumentar w_f a expensas de w_Z se obtendrá una cartera que será preferida a la cartera "e" primitiva, con lo cual la cartera "e" dejará de ser eficiente en contra del supuesto inicial de partida. Por tanto, se puede concluir que $E(\tilde{R}_Z) > R_f$ tal como lo hemos plasmado en la Figura 6.3.

Por último, $E(\tilde{R}_Z)$ y R_f son las ordenadas en el origen de las rectas tangentes a la frontera eficiente de los activos arriesgados en los puntos M y T respectivamente. Como la frontera eficiente de los activos arriesgados es una curva creciente sin puntos de inflexión, el punto M debe estar situado por encima del punto T.

En resumen, cuando se puede prestar a la tasa pura de intereses pero no pedir prestado a dicha tasa, la nueva frontera eficiente es el segmento curvilíneo R_fTMF, cumpliéndose que:

$$R_f < E(\tilde{R}_Z) < E(\tilde{R}_T) < E(\tilde{R}_M) \qquad (6.44)$$

El inversor se situará en distintos puntos de la frontera eficiente R_fTMF según cuáles sean sus curvas de indi ferencia. Si elige algún punto del segmento de frontera eficiente lineal entre R_f y T (sin incluir los extremos) su cartera óptima está compuesta (tal como acabamos de ver en (6.41)) por una combinación lineal del activo libre de riesgo, la cartera beta cero y la cartera de mercado.

Cuando el punto de tangencia entre las curvas de indiferencia y la frontera eficiente es algún punto del segmento curvo TM, la cartera óptima estará compuesta por las carteras frontera Z y M, ya que la cartera T, según el teorema 2 del epígrafe anterior, se puede expresar como una combinación lineal de Z y M.

Finalmente, si la cartera óptima se encuentra en algún punto entre M y F, el inversor tomará una posición a corto en la cartera beta cero e invertirá sus fondos propios y los provenientes de la venta al descubierto de Z en la cartera de mercado.

En cualquier caso, cuando se agregan las demandas individuales de todos los inversores, las compras netas de la cartera beta cero deben ser nulas y la suma de las carteras de todos los inversores debe ser la cartera de mercado en el equilibrio. Ahora, al igual que en el caso estudiado en el epígrafe anterior, el teorema de la separación no se cumple y las proporciones en que intervienen los activos arriesgados difieren de unos individuos a otros.

A continuación vamos a ver cuál es la relación entre la rentabilidad de un título o cartera (eficiente o no) y su riesgo expresado por su correspondiente coeficiente beta.

Para las carteras (eficientes o no) que únicamente contienen activos arriesgados, ya comprobamos al estudiar la cartera beta cero (ecuación (6.38)) que la relación de equilibrio entre su rendimiento esperado y su respectivo coeficiente beta era:

$$E(\tilde{R}_p) = E(\tilde{R}_Z) + \left[E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)\right] \beta_p \qquad (6.45)$$

y tal como se observa en la Figura 6.4, únicamente es válida para carteras con coeficientes beta superiores al de la cartera T.

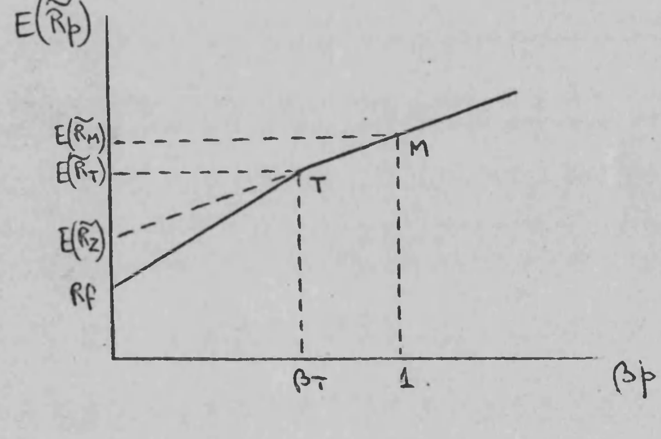


Figura 6.4

A la izquierda del punto T de la figura 6.3, las carteras eficientes contienen además de las carteras Z y M, el título libre de riesgo, por lo que (6.45) no es una relación válida para ellas.

Una cartera compuesta por el título libre de riesgo y la cartera T, tiene un rendimiento que se puede expresar del siguiente modo:

$$\tilde{R}_e = w_T \tilde{R}_T + (1 - w_T) R_f \qquad (6.46)$$

Teniendo en cuenta (6.46), el coeficiente beta de la cartera eficiente "e" toma el siguiente valor:

$$\beta_e = \frac{cov(\widetilde{R}_e,\widetilde{R}_M)}{\sigma^2(\widetilde{R}_M)} = w_T \frac{cov(\widetilde{R}_T,\widetilde{R}_M)}{\sigma^2(\widetilde{R}_M)} = w_T \beta_T \qquad (6.47)$$

Asimismo, tomando esperanzas en (6.46)

$$E(\widetilde{R}_e) = w_T\, E(\widetilde{R}_T) + (1-w_T)\, R_f \qquad (6.48)$$

y como la cartera T es una cartera arriesgada, entonces verifica la ecuación (6.45), por lo que podemos llevar el valor correspondiente de $E(\widetilde{R}_T)$ a (6.48), con lo cual:

$$E(\widetilde{R}_e) = w_T\, (E(\widetilde{R}_Z) + \left[E(\widetilde{R}_M) - E(\widetilde{R}_Z)\right] \beta_T) + (1-w_T)R_f$$

Si ahora tenemos presente (6.47) y reagrupamos, se obtiene:

$$E(\widetilde{R}_e) = R_f + \left[E(\widetilde{R}_M) - E(\widetilde{R}_Z) + \frac{E(\widetilde{R}_Z) - R_f}{\beta_T} \right] \beta_e \qquad (6.49)$$

Por tanto, el rendimiento esperado de una cartera eficiente que contiene el activo libre de riesgo es una función lineal de su riesgo β_e, pero la relación difiere de la correspondiente a carteras eficientes arriesgadas en la ordenada en el origen, que ahora es R_f en lugar de $E(\widetilde{R}_Z)$, y en el precio por la reducción del riesgo, que ahora se ve aumentado por la cantidad positiva $(E(\widetilde{R}_Z) - R_f)/\beta_T$, que hace que la pendiente de la relación (6.49) sea mayor que la correspondiente pendiente de la relación (6.45).

Por último, cabe destacar que el mercado premia al individuo que corre un riesgo a una tasa igual a la pendiente de la relación lineal entre la rentabilidad y el riesgo, y -

que el riesgo que el mercado recompensa es el riesgo sistemático; es decir, el coeficiente beta bien sea de una cartera - eficiente o no, o de un título individual. Por lo tanto, si un individuo, en vez de invertir sus fondos en una cartera - eficiente, lo hace en un activo individual, desde el momento en que:

$$\beta_e = \sum_{i=1}^{n} x_{ie}\beta_i \qquad (6.50)$$

entonces el mercado sólo le recomensa por correr el riesgo β_i y la relación entre el rendimiento y el riesgo de un activo - individual podrá deducirse de (6.49) teniendo en cuenta (6.50) y el hecho de que el individuo únicamente desea invertir en el activo arriesgado i:

$$E(\widetilde{R}_i) = R_f + \left[E(\widetilde{R}_M) - E(\widetilde{R}_Z) + \frac{E(\widetilde{R}_Z) - R_f}{\beta_T} \right] \beta_i \qquad (6.51)$$

expresión que junto a la (6.37) nos proporciona los dos segmentos de la relación lineal entre la rentabilidad y el riesgo de un activo individual en el caso de que se pueda prestar pero no pedir prestado a la tasa de interés del activo libre de riesgo.

6.4. El Modelo de Brennan

En esta sección, al igual que en la anterior, supondremos que existe un activo libre de riesgo, pero que las tasas de interés a las que se puede prestar (R_L) y pedir prestado (R_B) no coinciden, siendo $R_B > R_L$ (15). En ausencia de inflación incierta, este supuesto no está muy alejado de la realidad; la tasa pura de interés podría ser el tipo de interés que los bancos comerciales ofrecen por la colocación de los fondos a plazo fijo y, como todo el mundo sabe, no es el mismo tipo de interés que recibe el que coloca el dinero a plazo fijo, que el cobrado por el banco a las empresas y particulares que piden un préstamo, siendo por supuesto este último mayor.

Friend y Blume (16) han sugerido que esta desigualdad entre las tasas de interés a las que se presta y se pide prestado, puede ser la posible causa de la discrepancia entre la relación rentabilidad-riesgo de un título calculado en base a los datos ex-post y la relación predicha ex-ante por el modelo teórico CAPM.

Brennan (17), recoge la sugerencia apuntada por Friend y Blume y construye un modelo de equilibrio con tasas de interés diferentes para prestar y pedir prestado, mostrando como el CAPM standard y las versiones de Black y Vasicek son casos particulares de su modelo más general. Los principales resultados a los que llega Brennan son dos: 1) En todos los casos, en equilibrio, el retorno esperado ($E(\tilde{R}_i)$) de un activo individual es una función lineal de su respectiva co-

$v(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)$

varianza ($cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)$). 2) Todas las carteras de activos arriesgados son combinaciones lineales de dos carteras de activos arriesgados: la cartera arriesgada de mínima varianza y la cartera arriesgada óptima cuando $R_L = R_B = 0$.

Sin embargo, no seguiremos el mismo camino tomado por Brennan, sino que aprovechando los resultados que acabamos de obtener en el epígrafe anterior, añadiremos el supuesto de que se puede pedir prestado a una tasa superior a R_f, argumentando de una forma similar a la realizada por Fama(18) y Aftalion y Viallet (19).

Así, si en la Figura 6.3. añadimos la posibilidad de pedir prestado sin limitación a una tasa de interés superior a la tasa a la que se puede prestar fondos, tendríamos la siguiente situación:

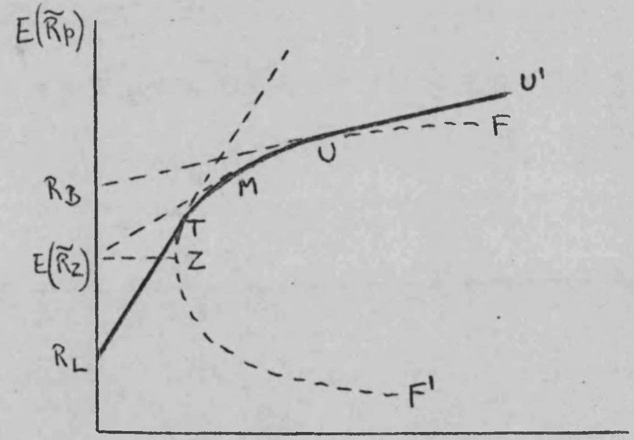


Figura 6.5

Ahora, siguiendo un razonamiento similar al empleado anteriormente (20), la nueva frontera eficiente estaría constituida por: 1) El segmento de recta R_LT, en donde el in-

inversor presta parte de sus fondos a la tasa de interés R_L e invierte el resto en la cartera arriesgada T (que tal como ya hemos visto con anterioridad es una combinación lineal de las carteras Z y M, ambas con pesos positivos). 2) El segmento curvo TU, en el cual toda cartera arriesgada situada en el mismo se puede poner en función de Z y M. 3) El segmento de recta UU' donde cada cartera está compuesta por una cantidad que se pide prestada a la tasa R_B, invirtiendo el individuo sus fondos propios más el préstamo a la tasa R_B en la cartera arriesgada U, que a su vez se puede expresar como una combinación lineal de las carteras Z y M, en donde Z tiene un peso negativo.

Por lo que respecta a la relación entre la rentabilidad y el riesgo de los activos individuales, dicha relación será siempre lineal, pero su representación estará formada por tres segmentos de recta con distintas pendientes, tal como muestra la figura siguiente:

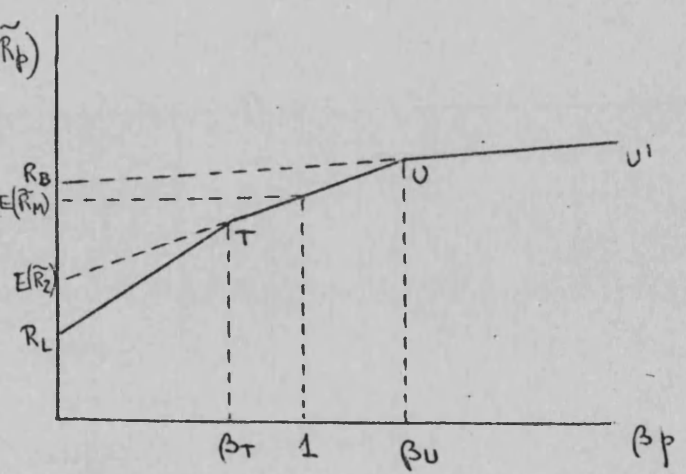


Figura 6.6

Con respecto a los dos primeros segmentos de recta $R_L T$ y TU, no añadiremos aquí nada, puesto que su deducción es idéntica a la realizada en el epígrafe anterior, por lo cual concentraremos nuestra atención en la relación lineal que debe producirse en las carteras de coeficientes beta superiores a β_U.

Para carteras situadas en el segmento TU de la Figura 6.6, hemos visto anteriormente que la relación de equilibrio entre el rendimiento esperado y su coeficiente era:

$$E(\tilde{R}_p) = E(\tilde{R}_Z) + \left[E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)\right] \beta_p \qquad (6.52)$$

A la derecha del punto U en la figura 6.5, las carteras eficientes son una combinación lineal de un préstamo pedido por el inversor a la tasa R_B y una inversión de todos sus fondos, los propios más los del préstamo, en la cartera U:

$$\tilde{R}_e = w_U \tilde{R}_U - (w_U - 1) R_B \qquad (6.53)$$

El coeficiente beta de la cartera eficiente "e", teniendo en cuenta (6.53), se puede expresar del siguiente modo:

$$\beta_e = \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_e, \tilde{R}_M)}{\sigma^2(R_M)} = w_U \frac{\operatorname{cov}(\tilde{R}_U, \tilde{R}_M)}{\operatorname{var}(\tilde{R}_M)} = w_U \beta_U \qquad (6.54)$$

Además, tomando esperanzas en (6.54), se tiene:

$$E(\tilde{R}_e) = w_U E(\tilde{R}_U) - (w_U - 1) R_B \qquad (6.55)$$

como la cartera U está situada sobre la frontera, es por tanto una cartera arriesgada que verifica la relación (6.52):

$$E(\tilde{R}_U) = E(\tilde{R}_Z) + \left[E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)\right] \beta_U \qquad (6.56)$$

llevando el valor de (6.56) a la expresión (6.55):

$$E(\tilde{R}_e) = w_U \cdot (E(\tilde{R}_Z) + \left[E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z)\right] \beta_U) - (w_U - 1) R_B \qquad (6.57)$$

que, finalmente, teniendo presente la ecuación (6.54) se puede reagrupar (6.57) del siguiente modo:

$$E(\tilde{R}_e) = R_B + \left[E(\tilde{R}_M) - E(\tilde{R}_Z) + \frac{E(\tilde{R}_Z) - R_B}{\beta_U} \right] \beta_e \qquad (6.58)$$

Por tanto, este tercer segmento que expresa la relación lineal entre rentabilidad y riesgo de una cartera (21), tiene una ordenada en el origen superior a la de las carteras con coeficientes beta, comprendidos entre β_T y β_U, y una pendiente menor, ya que como $E(\tilde{R}_Z) < R_B$, el término añadido en la pendiente de (6.52) es negativo. De modo que la pendiente de (6.58) será positiva pero menor que la pendiente de (6.52).

En resumen, en los tres modelos de precios de equilibrio estudiados hasta ahora, que se corresponden con distintos grados de relajación del supuesto sobre la existencia de un activo libre de riesgo (que se puede prestar y pedir prestado ilimitadamente a la tasa R_f), se sigue manteniendo la relación lineal entre el rendimiento esperado de un activo individual $E(\tilde{R}_i)$ y su riesgo β_i, aunque el premio por soportar un riesgo mayor no es siempre el mismo y varía según el nivel de las β_i en los modelos presentados.

Sin embargo, el teorema de la separación no se cumple en ninguno de los tres modelos. Además, es necesario introducir el supuesto de que se pueden dar ventas al descubierto en los activos arriesgados, con lo que parece que se pierde generalidad.

6.5. Expectativas Heterogéneas

Siguiendo la línea de abandonar cada vez una sóla de las hipótesis del CAPM, dejando inalteradas las restantes, en este epígrafe vamos a suponer que existen expectativas heterogéneas entre los distintos inversores y que, en consecuencia, su visión sobre el curso futuro de las cotizaciones de los títulos así como de los futuros dividendos varía de un inversor a otro. Por tanto, existen expectativas heterogéneas en cuanto al futuro valor de los títulos arriesgados, pero se admite que existe un activo libre de riesgo sobre cuyo tipo de interés están de acuerdo todos los inversores, pudiéndose prestar y pedir prestado en cantidades ilimitadas a dicha tasa de interés.

$$R_f = \frac{V_{F2}}{V_{F1}} \qquad (6.59)$$

Las expectativas homogéneas evidentemente no se dan en la realidad. No puede existir concordancia entre las previsiones futuras de los distintos inversores y prueba palpable de ello es la negociación diaria que se produce en la Bolsa, donde hay personas que venden un valor pensado que es probable que en el futuro ya no vuelva a alcanzar cotas tan altas (o que subirá muy poco en relación con otros valores), mientras que otras personas compran ese mismo valor pensando que subirá en el futuro y así podrán obtener ganancias de capital sustanciosas. En definitiva, hay gente que tiene expectativas alcistas mientras que otras las tienen a la baja y debido a ello es posible que todos los días se pueda abrir una nueva sesión donde se produzca una compra-venta de valores que queda reflejada en un volumen de contratación bursátil mayor o menor.

Al tener expectativas heterogéneas, los inversores diferirán en la estimación de los $(3n+n^2)/2$ parámetros necesarios para resolver el problema de selección de cartera. Es decir, que los inversores harán previsiones diferentes sobre los rendimientos esperados, varianzas y covarianzas de los títulos existentes en el mercado y, en consecuencia, cada inversor tendrá una frontera eficiente de activos arriesgados distinta, que luego, al añadir el activo libre de riesgo, dará lugar a nuevas fronteras eficientes lineales pero también distintas para los diferentes inversores. Por tanto, cada inversor tendrá su propia línea del mercado de capitales tal como refleja la figura 6.7.

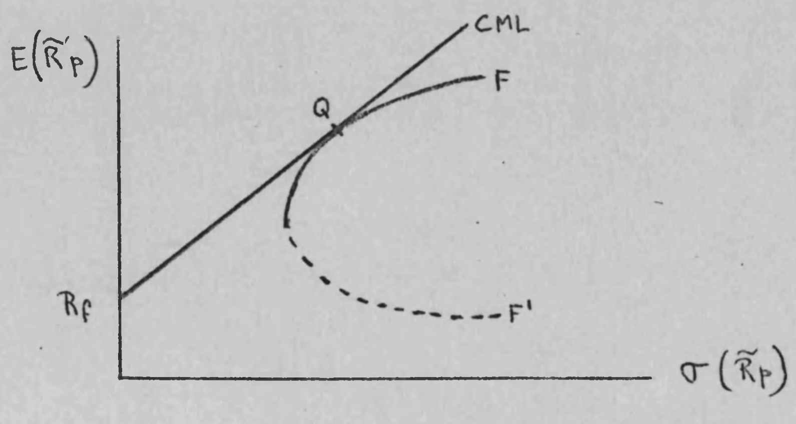


Figura 6.7.

Si cada inversor calcula una hipérbola distinta como frontera eficiente de activos arriesgados, es evidente, que el punto en que la recta que parte de R_f es tangente a dicha hipérbola (cartera arriesgada Q) es distinto, con lo cual la cartera eficiente que elija cada inversor (combinación lineal de R_f y Q) será también diferente. La cartera arriesgada Q ya no tiene por qué ser la cartera de mercado y, es más, para muchos inversores puede que la cartera de mercado M sea una cartera ineficiente (21). Por otra parte, el precio por la reducción del riesgo, que viene dado por la pendiente de la CML, será también distinto para los diferentes inversores.

Además, hay que tener en cuenta que según las deducciones hechas en el capítulo IV, si no existe una Línea del Mercado de Capitales (CML) común a todos los inversores, tampoco existirá una Línea del Mercado de los Activos Financieros (SML) tal como la reflejada por la expresión (4.14) del capítulo IV. Sin embargo, cabe preguntarse si a pesar de todo esto no existirá una relación de equilibrio entre la rentabilidad y el riesgo de cualquier activo individual y, por tanto, unos precios de equilibrio de todos los activos individuales para los cuales:

- Las cantidades prestadas y tomadas a préstamo a la tasa R_f se igualen.
- La oferta total de cada uno de los títulos arriesgados iguale a la demanda de los mismos hecha por los inversores individuales.

La búsqueda de los precios de equilibrio de los activos financieros cuando existen expectativas heterogéneas va a ser nuestra próxima tarea. Para ello, en lugar de partir de la expresión (4.40) del capítulo IV, particularizada para las distintas previsiones de los diferentes inversores y efectuar luego la agregación de dicha expresión para todos los inversores del mercado, tal como lo hacen autores como Lintner(22) y Sharpe(23), partiremos del análisis de las decisiones de consumo-inversión tal como ya lo hicimos en el último epígrafe del capítulo IV, pero teniendo en cuenta en el momento de la agregación el hecho de que las expectativas de los diferentes inversores son heterogéneas (24).

La razón de este proceder está en que creemos que este segundo enfoque es más completo, ya que contempla un contexto más amplio, las decisiones de consumo-inversión, y tiene en cuenta las diferentes funciones de utilidad de los inversores así como la riqueza inicial de los mismos, de modo que al efectuar la agregación, no se calcula simplemente la media aritmética de los distintos precios previstos por los diferentes inversores, sino una media ponderada de acuerdo con las preferencias y situación particular de cada inversor.

Con expectativas heterogéneas, cada inversor se comporta como si estuviese resolviendo una optimización tal como la planteada en las ecuaciones (4.46) del capítulo IV, pero adaptando las expresiones (4.43) y (4.44) añadiendo el subíndice i en $E(\widetilde{V}_{j2})$ y $cov(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{k2})$, $j,k=1,2,\ldots,n$, con el fin de recoger la distinta visión que sobre el futuro valor de las firmas tienen los inversores:

$$E_i = E(\tilde{c}_{2i}) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, E_i(\tilde{V}_{j2}) \tag{6.60}$$

$$\sigma_i^2 = \sigma^2(\tilde{c}_{2i}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ij} x_{ik}\, \mathrm{cov}_i(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2}) \tag{6.61}$$

Las condiciones necesarias para que cada inversor maximice su utilidad esperada vienen dadas como antes por (4.48) y (4.50), pero en (4.49) es necesario sustituir $E(\tilde{V}_{j2})$ y $\mathrm{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2})$ por $E_i(\tilde{V}_{j2})$ y $\mathrm{cov}_i(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2})$ con el fin de reflejar las expectativas heterogéneas de los distintos inversores, con lo cual, siguiendo los mismos pasos que en el capítulo IV nos condujeron de (4.51) a (4.57), ahora tendríamos como expresión equivalente de la (4.57) la siguiente que recoge el hecho de que existen expectativas heterogéneas:

$$-\frac{d\sigma_i^2}{d\,E_i} E_i(\tilde{V}_{j2}) + 2 \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\, \mathrm{cov}_i(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2}) + \frac{d\sigma_i^2}{dc_{1i}} V_{j1} = 0$$

$$j=1,2,\ldots,n \tag{6.62}$$

Para poder hallar una expresión del valor de equilibrio de la firma j al principio del período 1, nuevamente es necesario agregar todas las ecuaciones de la firma j de todos los inversores y despejar V_{j1}:

$$V_{j1} = \frac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d\,E_i} E_i(\tilde{V}_{j2})}{\delta} - \frac{2}{\delta} \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} x_{ik}\, \mathrm{cov}_i(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2})$$

$$j=1,2,\ldots,n \tag{6.63}$$

donde δ es según (4.60):

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \frac{d\,\sigma_i^2}{d\, c_{1i}} \tag{6.64}$$

Observando conjuntamente (6.63) y (4.62), se ve que en lugar de $\gamma\ E(\widetilde{V}_{j2})$ ahora aparecen los valores de mercado esperados en el período 2 por cada individuo: $E_i(\widetilde{V}_{j2})$ ponderados por sus respectivas tasas marginales de sustitución del consumo esperado en el período 2 por la varianza del consumo en el período 2: $d\,\sigma_i^2/dE_i$. Asimismo, en el segundo término del segundo miembro de (6.63), en lugar de encontrarnos con $\sum_{k=1}^{M} cov(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{k2})$, ahora aparece el mismo sumatorio pero extendido a las covarianzas propias de cada inversor ponderadas por la fracción de la firma k que dicho inversor i tiene: $\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} x_{ik} cov_i(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{k2})$. Evidentemente, cuando existen expectativas homogéneas, los subíndices que aparecen en $E_i(\widetilde{V}_{j2})$ y $cov_i(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{k2})$ desaparecen y teniendo en cuenta (4.52) y (4.59) la expresión (6.63) se convierte en la (4.62) antes considerada en el capítulo IV.

El siguiente paso es transformar (6.63) en la expresión equivalente a la (4.69), pero teniendo presente las expectativas heterogéneas de los inversores. Para ello, es necesario señalar que:

$$cov_i(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{c}_{2i}) = cov_i(\widetilde{V}_{j2},\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\widetilde{V}_{k2}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} cov_i(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{k2}) \qquad (6.65)$$

de modo que (6.63) puede ahora escribirse de la siguiente manera:

$$V_{j1} = \frac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\,\sigma_i^2}{dE_i} E_i(\widetilde{V}_{j2})}{\delta} - \frac{2}{\delta}\sum_{i=1}^{M} cov_i(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{c}_{2i})$$

$$j=1,2,\ldots,n \qquad (6.66)$$

Si ahora sumamos en (6.66) para todas las firmas del mercado y operamos conveninntemente, podemos conseguir la intepretación del cociente $2/\delta$:

$$\frac{2}{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d\,E_i} E_i(\tilde{V}_{M2}) / \delta - V_{M1}}{\sum_{i=1}^{M} \text{cov}_i(\tilde{V}_{M2}, \tilde{c}_{2i})} \qquad (6.67)$$

donde $E_i(\tilde{V}_{M2})$ es la estimación del inversor i del valor de mercado esperado de todos los títulos de todas las empresas en el período 2, y $\text{cov}_i(\tilde{V}_{M2}, \tilde{c}_{2i})$ es la estimación del inversor i de la covarianza entre el valor de mercado de todas las firmas y su consumo en el período 2. Llevando (6.67) a (6.66) se tiene:

$$V_{j1} = \frac{1}{\delta}\left[\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d\,E_i} E_i(\tilde{V}_{j2}) - \left\langle \frac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d\,E_i} E_i(\tilde{V}_{M2}) - \delta V_{M1}}{\sum_{i=1}^{M} \text{cov}_i(\tilde{V}_{M2}, \tilde{c}_{2i})} \right\rangle \cdot \sum_{i=1}^{M} \text{cov}_i(\tilde{V}_{j2}, \tilde{c}_{2i})\right] \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (6.68)$$

Por otra parte, si multiplicamos y dividimos ambos miembros de (6.68) por la expresión γ dada en (4.59) y teniendo en cuenta la definición de Θ que dimos en (4.72), se tiene:

$$V_{j1} = \frac{1}{\Theta}\left[\frac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{dE_i} E_i(\tilde{V}_{j2})}{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{dE_i}} - \left[\frac{\frac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{dE_i} E_i(\tilde{V}_{M2})}{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{dE_i}} - \Theta V_{M1}}{\sum_{i=1}^{M} \text{cov}_i(\tilde{V}_{M2}, \tilde{c}_{2i})}\right] \sum_{i=1}^{M} \text{cov}_i(\tilde{V}_{j2}, \tilde{c}_{2i})\right] \qquad (6.69)$$

Recordando que

$$\widetilde{V}_{M2} = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{V}_{j2} = \sum_{i=1}^{M} \widetilde{c}_{2i} \qquad (6.70)$$

en el supuesto de que exista concordancia, es decir, expectativas homogéneas, podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{M} \mathrm{cov}_i(\widetilde{V}_{M2},\widetilde{c}_{2i}) = \sum_{i=1}^{M} \mathrm{cov}(\widetilde{V}_{M2},\widetilde{c}_{2i}) = \mathrm{cov}(\widetilde{V}_{M2},\sum_{i=1}^{M} \widetilde{c}_{2i}) =$$

$$= \mathrm{cov}(\widetilde{V}_{M2},\widetilde{V}_{M2}) = \sigma^2(\widetilde{V}_{M2}) . \qquad (6.71)$$

$$\sum_{i=1}^{M} \mathrm{cov}_i(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{c}_{2i}) = \sum_{i=1}^{M} \mathrm{cov}(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{c}_{2i}) = \mathrm{cov}(\widetilde{V}_{j2},\sum_{i=1}^{M} \widetilde{c}_{2i}) =$$

$$= \mathrm{cov}(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{M2}) \quad . \qquad (6.72)$$

De modo que, con expectativas homogéneas (6.69) se convierte en (4.73).

Ahora nos queda llegar a una expresión similar a la (4.78) del capítulo IV, pero que recoja el supuesto de expectativas heterogéneas. Para ello es necesario dar una interpretación de Θ en el nuevo contexto de las expectativas heterogéneas. Así, si imaginamos una firma, llamémosle firma cero - (25), tal que:

$$\sum_{i=1}^{M} \mathrm{cov}_i(\widetilde{V}_{02},\widetilde{c}_{2i}) = 0 \qquad (6.73)$$

entonces, operando y despejando Θ en (6.69), llegamos a:

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d\,E_i} \frac{E_i(\widetilde{V}_{02})}{V_{01}}}{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d\,E_i}} \qquad (6.74)$$

Si al mismo tiempo suponemos que existe un activo libre de riesgo, el cual se puede prestar y pedir prestado - sin limitación alguna y sobre cuyo rendimiento, dado por (6.59), están todos los inversores de acuerdo, entonces se puede sustituir el rendimiento de los títulos de la firma cero por el rendimiento o tasa pura de interés del activo libre - de riesgo:

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d E_i} \frac{V_{F2}}{V_{F1}}}{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d E_i}} = \frac{V_{F2}}{V_{F1}} = 1 + R_f \qquad (6.75)$$

Finalmente, si llevamos el valor de Θ encontrado - en (6.75) a (6.69), tenemos (26):

$$V_{j1} = \frac{1}{1+R_f}\left[\frac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d E_i} E_i(\tilde{V}_{j2})}{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d E_i}} - \left[\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d E_i} E_i(\tilde{V}_{M2})}{\sum_{i=1}^{M} \frac{d\sigma_i^2}{d E_i}} - (1+R_f)V_{M1}}{\sum_{i=1}^{M} cov_i(\tilde{V}_{M2},\tilde{c}_{2i})}\right] \cdot \sum_{i=1}^{M} cov(\tilde{V}_{j2},\tilde{c}_{2i})\right] \qquad (6.76)$$

$$j=1,2,\ldots,n$$

La expresión (6.76) nos proporciona cual es el valor de equilibrio de una firma al principio del período 1 bajo el supuesto de expectativas heterogéneas. Si en (6.76) tenemos en cuenta que:

$$V_{M1} = \sum_{j=1}^{n} V_{j1}$$

(6.76) nos proporcionará un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, que por lo general es de esperar que tenga una solución única y determinada.

Evidentemente, (6.76) se reduce a (4.78) si se hace el supuesto de que las expectativas son homogéneas, por tanto (4.78) es un caso particular de la expresión (6.76), que acabamos de obtener. Es decir, el modelo standard CAPM, una de cuyas hipótesis básicas es la de expectativas homogéneas, no es más que un caso particular del modelo más general de precios de equilibrio plasmado en la ecuación (6.76).

En resumen, hemos logrado relajar el supuesto referente a las expectativas homogéneas obteniendo una expresión más general para el modelo CAPM, pero a un coste muy elevado; ahora no basta con estimar, en base a los datos del mercado, $E(\tilde{V}_{j2})$, $E(\tilde{V}_{M2})$, $cov(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2})$ y $\sigma^2(\tilde{V}_{M2})$ $(j=1,2,\ldots,n)$ y resolver el sistema de ecuaciones dado por (4.78), sino que es necesario disponer de previsiones a nivel individual de $E_i(\tilde{V}_{j2})$, $E_i(\tilde{V}_{M2})$, $cov_i(\tilde{V}_{j2},\tilde{c}_{2i})$ y $cov_i(\tilde{V}_{M2},\tilde{c}_{2i})$, además de las tasas marginales de sustitución de cada individuo del consumo esperado en el período 2 por la varianza del consumo en el período 2: $d\sigma_i^2/dE_i$, con lo cual el modelo se convierte, a nivel empírico, en un modelo inoperativo desde el momento en que resulta realmente imposible efectuar todas esas previsiones correctamente (27).

"Cuanto más realista es un modelo, más generales -

son sus conclusiones. Pero cuanto más explícito, menor es su valor... La teoría considerada en la sección precedente de este capítulo no tiene ninguna fuerza. Sus deducciones son lo suficientemente generales para ser coherentes casi con cualquier experiencia observada. Al explicar todo, no explica nada" (28).

En definitiva, lo que se ha ganado en generalización al introducir el supuesto de las expectativas heterogéneas, se ha perdido en poder predictivo, por lo que en los estudios empíricos no hay más remedio que usar el modelo standard planteado en el capítulo IV si se quiere llegar a algún resultado práctico.

6.6. Los Activos no Negociables: el Capital Humano

Cuando tratamos de las decisiones de consumo-inversión (29) que llevaban a cabo los inversores, en el contexto de dos períodos, suponíamos que la riqueza inicial de cada individuo estaba compuesta por el valor de mercado de la venta de todos sus activos financieros, realizada al principio del período 1, y por el salario o rentas del trabajo personal de todo el período 1, que suponíamos recibía al principio de dicho período. En base a esta riqueza inicial, y según sus preferencias, el individuo efectuaba una decisión de consumo-inversión a principios del período 1, según la cual, dedicaba al consumo corriente del período 1 c_1 unidades monetarias y el resto, h_1, lo invertía en los n activos arriesgados disponibles en el mercado; todo ello de acuerdo con un proceso de optimización de selección de cartera, Asimismo, suponíamos que el individuo no trabajaba en el período 2.

Posteriormente (30), volvimos a efectuar un desarrollo similar y mediante un planteamiento ligeramente distinto, hallamos el equilibrio individual de cada inversor suponiendo que existían n activos arriesgados, después agregamos las demandas individuales a nivel de mercado y, luego de identificar el activo libre de riesgo, conseguimos calcular los precios de equilibrio de los n activos arriesgados de la economía.

Por tanto, el individuo unicamente podía invertir en los n activos financieros correspondientes a las n firmas que actuaban en la economía, donde las operaciones de compraventa de las acciones se efectuaban en la Bolsa. Sin embargo, reducir todos los activos a los hasta ahora tratados no deja de ser una simplificación de lo que ocurre en la realidad. En el Mercado de Valores no se negocian más que una parte de los activos de una economía, existiendo una parte importante de los mismos: empresas que no cotizan en Bolsa, bienes inmobiliarios, oro, dividas, objetos de arte, bienes de consumo duradero (31), etc., cuyas operaciones de compra-venta no se realizan en la Bolsa, aunque pueden tener sus mercados particulares en donde se pueden efectuar transacciones con ellos.

Por otra parte, los individuos también poseen activos que no son negociables, que no son vendibles, pero que, sin embargo, les proporcionan unas rentas o ingresos a lo largo de su vida: el capital humano.

"El capital humano se define como el conjunto de habilidades, talentos y conocimientos productivos de un individuo" (32). Pero como ya hemos dicho, no existe un mercado que cuantifique su valor; sólo sabemos la renta actual que produce (salario que percibe el individuo en el período actual), siendo necesario efectuar previsiones en cuanto a los salarios a percibir en el futuro.

Esta ausencia de un mercado donde negociar el capital humano ha llevado a Thurow, Coates y otros (33) a calcular su valor en base a la capitalización de los salarios futuros inciertos, pero ese camino plantea más interrogantes de los que resuelve. ¿Cuáles son las probabilidades asociadas a los posibles salarios futuros? ¿Cuál será la vida del activo? ¿Qué tipo de interés debe utilizarse en la actualización?¿Qué prima de riesgo debe sumarse al tipo de interés para plasmar la incertidumbre que comporta el cobro de esos futuros salarios?

Por tanto, el tratamiento del capital humano es un problema muy complejo, sobre todo en los modelos multiperíodo. Sin embargo, en el contexto de un modelo de dos períodos y si tratamos la renta que produce tanto el capital humano como cualquiera de los otros activos omitidos como algo exógeno al modelo, el tratamiento se simplifica bastante tal como se observará más adelante.

Si contrariamente a lo hecho en el capítulo II, ahora suponemos que el individuo recibe un salario por el trabajo efectuado en el período 2 al principio de dicho período, la situación es distinta. No tendríamos ningún problema si existiese un mercado perfecto de capital humano donde el individuo pudiese emitir acciones sobre la renta futura de su trabajo y venderlas. En este caso, el valor de mercado del capital humano de un individuo entraría a formar parte de w_1 y el individuo unicamente mantendría acciones de su propio capital humano si esas acciones formasen parte de su cartera óptima; pudiéndose dar el caso de que un individuo compre todas las acciones de su capital humano, en cuyo caso, el valor de las mismas entraría a formar parte de h_1.

Pero si no existe un mercado perfecto donde negociar el capital humano, como en la realidad ocurre, el salario recibido al principio del período 2 no es negociable y, por tanto, no se puede hacer líquido en el período 1, por lo que no forma parte ni de w_1 ni de h_1, sino de $\tilde{w}_2$; es decir, que la riqueza inicial del período 2 (incierta) estará constituída por el valor de mercado de la cartera de activos negociables comprada a principios del período 1,y enajenada al final del mismo, más las rentas del trabajo del período 2 recibidas al inicio de dicho período. Por tanto, en ausencia de un mercado perfecto del capital humano, el individuo está obligado a mantener en cualquier cartera posible su propio capital humano (34).

A continuación vamos a construir un modelo de dos períodos que recoja y tenga en cuenta el capital humano y los restantes activos no considerados en el capítulo IV, donde únicamente tratamos con n activos financieros negociables en Bolsa. Para ello partimos de la formulación del modelo de dos períodos (35) utilizada en aquel capítulo y así vamos a suponer que el inversor tiene una función de utilidad esperada que depende del consumo corriente del período 1, c_1, del valor esperado del consumo en el período 2, E_i, y de la varianza del consumo en el período 2, σ_i^2, tal como lo hicimos en (4.45):

$$U_i(c_{1i}, E_i, \sigma_i^2) \qquad (6.77)$$

para la cual:

$$\frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} > 0 \qquad \frac{\partial U_i}{\partial E_i} > 0 \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_i^2} < 0 \qquad (6.78)$$

Asimismo, definimos $\tilde{V}_{H2}^{i}$ como la cantidad aleatoria en unidades monetarias recibida por el inversor i al final del período 1, o principios del período 2, por las rentas derivadas de su capital humano y otros activos no negociables (36). Por tanto, $\tilde{V}_{H2}^{i}$ es una cantidad exógena en el modelo que vamos a tratar aquí (37). Sin embargo, como bien observa Williams (38), existe una interrelación entre la inversión en educación y la inversión en los activos negociables, debiendo el individuo decidir, de acuerdo con sus preferencias, qué parte de su tiempo dedica al trabajo, qué parte a la mejora de su formación profesional y qué parte al ocio (39).

Definida $\tilde{V}_{H2}^{i}$ como una cantidad aleatoria exógena al modelo, las expresiones (4.43) y (4.44) del capítulo IV, referentes al consumo esperado en el período 2 y a la varianza del consumo del período 2, quedarán modificadas como sigue:

$$E_i = E(\tilde{c}_{2i}) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, E(\tilde{V}_{j2}) + E(\tilde{V}_{H2}^{i}) \qquad (6.79)$$

$$\sigma_i^2 = \sigma^2(\tilde{c}_{2i}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ij} x_{ik} \sigma_{jk} + 2 \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{H2}^{i}, \tilde{V}_{j2}) \qquad (6.80)$$

El problema a resolver por el inversor i, al principio del período 1, consiste en elegir los valores: c_{1i}, x_{ij} ($j=1,2,\ldots,n$) que maximicen su utilidad esperada, respetando la restricción del presupuesto, es decir, que el valor total del consumo corriente y la inversión en los títulos de las diferentes empresas iguale a su riqueza inicial del período 1 sin sobrepasarla:

$$\text{Max} \quad U_i\ (c_{1i}, E_i, \sigma_i^2) \qquad (6.81)$$

$$\text{sujeto a:} \quad w_{1i} = c_{1i} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} V_{j1} \qquad (6.82)$$

Luego de formar la expresión Lagrangiana y derivar con respecto a c_{1i}, x_{ij} ($j=1,2,\ldots,n$) y λ_i, quedaría:

$$\frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} = \frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} - \lambda_i = 0 \qquad (6.83)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial E_i} E(\tilde{V}_{j2}) + 2 \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_i^2} \Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{k2}) + $$

$$+ \operatorname{cov}(\tilde{V}_{H2}^{i}, \tilde{V}_{j2})\Big) - \lambda_i V_{ji} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,n \quad (6.84)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i} = w_{1i} - c_{1i} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} V_{j1} = 0 \qquad (6.85)$$

Si despejamos el valor de λ_i en (6.83) y lo llevamos a (6.84), dividimos ambos miembros de (6.84) por $\partial U_i / \partial \sigma_i^2$ y teniendo en cuenta (4.55) y (4.56), la expresión (6.84) queda de la siguiente forma:

$$- \frac{d\sigma_i^2}{d E_i} E(\tilde{V}_{j2}) + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{k2}) + \operatorname{cov}(\tilde{V}^i_{H2},\tilde{V}_{j2})\right) +$$

$$+ \frac{d\sigma_i^2}{d c_{1i}} V_{j1} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (6.86)$$

Para que el equilibrio del mercado sea posible es necesario que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (6.87)$$

Así, si agregamos las ecuaciones de demanda de los activos de la firma j de los distintos inversores (6.86) y tenemos en cuenta (6.87), llegamos al valor de equilibrio de la firma j en el período 1:

$$V_{j1} = \gamma/\delta \; E(\tilde{V}_{j2}) - 2/\delta \; \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{k2}) + \operatorname{cov}(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{j2})\right)$$

$$j=1,2,\ldots, n \qquad (6.88)$$

donde:

$$\tilde{V}_{H2} = \sum_{i=1}^{M} \tilde{V}^i_{H2} \qquad (6.89)$$

y γ y δ ya han sido definidos en (4.59) y (4.60)

La expresión (6.88) es similar a la (4.62) del capítulo IV, pero con el término corrector $\operatorname{cov}(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{j2})$ que refleja la covarianza entre el valor de mercado de la firma j y las rentas en unidades monetarias de todos los activos no negociables en el período 2.

Para interpretar los cocientes γ/δ y $2/\delta$ y poder llegar a una expresión más concreta de V_{j1}, en la cual hayan desaparecido los gustos de los inversores resumidos en γ y δ, operaremos como en el capítulo IV. Así, si en (6.88) sumamos para todas las empresas y tenemos presente las expresiones (4.65) y (4.66):

$$V_{M1} = \gamma/\delta \quad E(\widetilde{V}_{M2}) - 2/\delta \quad (\sigma^2(\widetilde{V}_{M2}) + cov(\widetilde{V}_{H2},\widetilde{V}_{M2})) \qquad (6.90)$$

y despejando $2/\delta$:

$$2/\delta = \frac{\gamma/\delta \quad E(\widetilde{V}_{M2}) - V_{M1}}{\sigma^2(\widetilde{V}_{M2}) + cov(\widetilde{V}_{H2},\widetilde{V}_{M2})} \qquad (6.91)$$

Si ahora llevamos (6.91) a (6.88) y recordando (4.70) y (4.72), tenemos:

$$V_{j1} = \frac{1}{\Theta}\left[E(\widetilde{V}_{j2}) - \left(\frac{E(\widetilde{V}_{M2}) - V_{M1}\,\Theta}{\sigma^2(\widetilde{V}_{M2}) + cov(\widetilde{V}_{H2},\widetilde{V}_{M2})}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\ (cov(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{M2}) + cov(\widetilde{V}_{H2},\widetilde{V}_{j2}))\right] \qquad (6.92)$$

Del mismo modo, razonando como en el epígrafe 6 del capítulo IV, si existe un activo libre de riesgo, por (4.77) se tiene que:

$$\Theta = 1 + R_f \qquad (6.93)$$

Por lo que (6.92) se puede finalmente expresar como:

$$V_{j1} = \frac{1}{1 + R_f}\left[E(\widetilde{V}_{j2}) - \left(\frac{E(\widetilde{V}_{M2}) - V_{M1}(1 + R_f)}{\sigma^2(\widetilde{V}_{M2}) + cov(\widetilde{V}_{H2},\widetilde{V}_{M2})}\right) \cdot \right.$$

$$\cdot\ (cov(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{M2}) + cov(\widetilde{V}_{H2},\widetilde{V}_{j2})) \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (6.94)$$

A esta expresión se le puede dar una interpretación similar a la (4.78) del capítulo IV. Así, una empresa cualquiera j ofrece dos cosas distintas al inversor al principio del período 1: su rentabilidad o valor de mercado esperado en el período 2($E(\tilde{V}_{j2})$ y el riesgo, o suma de la covarianza de su valor de mercado con el valor total de todas las firmas en el período y de la covarianza de su valor de mercado con el valor de todas las rentas monetarias de todos los activos no negociables ($cov(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2}) + cov(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{H2})$).

El precio de mercado de una unidad de rentabilidad es:

$$\frac{1}{1 + R_f} \tag{6.95}$$

mientras que el precio de mercado de una unidad de riesgo es:

$$-\left[\left(\frac{1}{1 + R_f}\right)\left(\frac{E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}(1 + R_f)}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2}) + cov(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{M2})}\right)\right] \tag{6.96}$$

siendo ($\sigma^2(\tilde{V}_{M2}) + cov(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{M2})$) el riesgo total de todas las empresas del mercado.

Finalmente, si en (6.94) tenemos en cuenta que $V_{M1} = \sum_{j=1}^{n} V_{j1}$, (6.94) nos proporciona un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que generalmente cabe esperar que tenga una solución única y determinada, pudiéndose determinar de este modo los precios de equilibrio de todos los activos financieros negociables.

A continuación vamos a calcular la expresión de la nueva SML correspondiente a este nuevo contexto. Para ello seguiremos unos pasos parecidos a los que nos condujeron de (4.78) a (4.87) en el capítulo IV. De este modo, según (4.81) el rendimiento esperado de los títulos de la firma j es:

$$E(\tilde{R}_j) = \frac{E(\tilde{V}_{j2}) - V_{j1}}{V_{j1}} \tag{6.97}$$

Operando en (6.94) y despejando $E(\tilde{V}_{j2}) - V_{j1}$, se tiene:

$$E(\tilde{V}_{j2}) - V_{j1} = V_{j1}\, R_f + \left[\left(\frac{E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}\,(1 + R_f)}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2}) + cov(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{M2})} \right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\ (cov(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2}) + cov(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{j2}) \right] \tag{6.98}$$

y llevando (6.98) a (6.97):

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \left[\left(\frac{E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}(1 + R_f)}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2}) + cov(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{M2})} \right) \cdot (\right.$$
$$\left. \cdot \left(\frac{cov(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2}) + cov(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{j2})}{V_{j1}} \right) \right] \tag{6.99}$$

Teniendo en cuenta (4.84) y (4.85) y que:

$$cov(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{M2}) = V_{M1}\ cov(\tilde{R}_M,\tilde{V}_{H2}) \tag{6.100}$$

$$cov(\tilde{V}_{j2},\tilde{V}_{M2}) = V_{j1}\ V_{M1}\ cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) \tag{6.101}$$

$$cov(\tilde{V}_{H2},\tilde{V}_{j2}) = V_{j1}\ cov(\tilde{R}_j,\tilde{V}_{H2}) \tag{6.102}$$

podemos expresar (6.99) como sigue:

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \left[\left(\frac{V_{M1}(1 + E(\tilde{R}_M)) - V_{M1}(1 + R_f)}{V_{M1}^2\ \sigma^2(\tilde{R}_M) + V_{M1} cov(\tilde{R}_M,\tilde{V}_{H2})} \right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\frac{V_{j1}V_{M1}\ cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) + V_{j1}\ cov(\tilde{R}_j,\tilde{V}_{H2})}{V_{j1}} \right) \right]$$

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{V_{M1}\,\sigma^2(\tilde{R}_M) + cov(\tilde{R}_M,\tilde{V}_{H2})}\,(V_{M1}\ cov(\tilde{R}_j\tilde{R}_M) +$$

$$+ cov(\tilde{R}_j,\tilde{V}_{H2})) \qquad (6.103)$$

Esta expresión se corresponde con la nueva formulación de la SML cuando el individuo recibe rentas tanto de los n activos negociables como de los activos no negociables. Como es lógico, se convierte en la ecuación de la SML standard cuando $cov(\tilde{R}_M,\tilde{V}_{H2}) = 0$ y $cov(\tilde{R}_j,\tilde{V}_{H2}) = 0$, cosa que en general no será cierta. Por lo que según cuales sean los valores de $cov(\tilde{R}_M,\tilde{V}_{H2})$ y $cov(\tilde{R}_j,\tilde{V}_{H2})$, los valores de $E(\tilde{R}_j)$ pueden ser mayores o menores que los previstos por la SML del modelo standard, "sin que se pueda prever el sentido y la importancia de las desviaciones a menos que se conozcan las características de la parte no visible o no líquida del mercado. Pero de todas formas, la relación lineal entre $E(\tilde{R}_j)$ y $cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)$ existirá siempre" (40).

Queda por demostrar que cuando un inversor recibe rentas no solo de los activos negociables, sino también de los activos no negociables, tal como por ejemplo el capital humano, aunque existe siempre una relación lineal entre la rentabilidad y el riesgo de los activos financieros negociables, el teorema de la separación, sin embargo, no se cumple.

Para ver ésto, vamos a expresar las condiciones de primer grado del equilibrio individual ((6.86)) con una notación matricial, con el fin de poder resolver el sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Llamando:

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} E(\tilde{V}_{12}) \\ E(\tilde{V}_{22}) \\ \vdots \\ E(\tilde{V}_{n2}) \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \sigma^2(\tilde{V}_{12}) & \dots & cov(\tilde{V}_{12},\tilde{V}_{n2}) \\ \vdots & & \vdots \\ cov(\tilde{V}_{n2},\tilde{V}_{12}) & \dots & \sigma^2(\tilde{V}_{n2}) \end{bmatrix} \tag{6.104}$$

$$V_i^H = \begin{bmatrix} cov(\tilde{V}^i_{H2},\tilde{V}_{12}) \\ cov(\tilde{V}^i_{H2},\tilde{V}_{22}) \\ \vdots \\ cov(\tilde{V}^i_{H2},\tilde{V}_{n2}) \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ \vdots \\ V_{n1} \end{bmatrix} \tag{6.105}$$

podemos expresar el sistema de n ecuaciones (6.86) como sigue:

$$-\frac{d\,\sigma_i^2}{d\,E_i} E + 2(VX_i + V_i^H) + \frac{d\,\sigma_i^2}{d\,c_{1i}} P = 0 \tag{6.106}$$

Suponiendo que V es una matriz no singular, podemos despejar X_i:

$$X_i = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma_i^2}{d\,E_i}\right)V^{-1}E - \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma_i^2}{dc_{1i}}\right)V^{-1}P - V^{-1}V_i^H \tag{6.107}$$

Al término $V^{-1}V_i^H$ lo llama Mayers (41) "vector de ajuste", ya que en el caso del modelo standard, si partimos de (4.57) y lo expresamos en forma matricial, despejando X_i finalmente se obtiene:

$$X_i = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma_i^2}{d\,E_i}\right) V^{-1}E - \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma_i^2}{dc_{1i}}\right) V^{-1}P \tag{6.108}$$

Sabemos que según el teorema de la separación, en el modelo standard, cada inversor comprará el número de títulos de cada una de las firmas que le indica X_i de forma que la proporción en que intervienen cada uno de los activos arriesgados dentro de la cartera de activos arriesgados negociables es la misma para todo inversor. Sin embargo, cuando incluimos el capital humano, la expresión adecuada de los X_i no es (6.108), sino (6.107) y en ella el vector de ajuste $V^{-1}V_i^H$ es propio de cada inversor en la medida que los inversores tienen expectativas heterogéneas en lo que se refiere a V_i^H, ya que en ese vector columna hemos guardado y respetado el subíndice i. En consecuencia, los inversores pueden mantener carteras arriesgadas que pueden diferir ampliamente de unos a otros y el teorema de la separación ya no se cumplirá.

Por último, interesa resaltar que aunque en este epígrafe hemos incluído las rentas que proporcionan el capital humano y otros activos no negociables de una forma exógena al modelo, es decir, de la forma más simple posible, a nadie se le escapa la dificultad que conlleva usar este modelo con fines empíricos, ya que sería necesario efectuar estimaciones de $\mathrm{cov}(\widetilde{V}_{H2},\widetilde{V}_{M2})$ y $\mathrm{cov}(\widetilde{V}_{j2},\widetilde{V}_{H2})$, $j=1,2,\dots,n$, para cada participante en el mercado, lo cual es complejísimo por no decir imposible.

NOTAS DEL CAPITULO VI

(1) Del mismo modo que existen distintas formas para expresar la SML, también se pueden hacer diferentes tests sobre la misma. Así, por ejemplo, si la SML viene expresada de la siguiente forma:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + (E(\tilde{R}_M) - R_f)\beta_i$$

entonces la expresión adecuada con la cual hacer el ajuste por mínimos cuadrados sería

$$\tilde{R}_i = c_i + d_i\tilde{\beta}_i + \tilde{f}_i$$

Asimismo, conviene recordar que, tal como vimos en el capítulo anterior, la versión ex-post del CAPM coincidirá con el modelo de mercado cuando $\alpha_i = (1-\beta_i)R_f$, por lo que el CAPM también puede ser contrastado mediante el modelo de mercado.

(2) AFTALION, F. y VIALLET, C.: "Theórie du Portefeuille". P.U.F. Paris, 1977, p. 107.

(3) La existencia de cambios en el nivel de precios se abordará más adelante en capítulo aparte.

(4) BLACK, F.: "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing". Journal of Business, vol. 45, nº 3, Julio 1972, p. 444-455.

(5) FIREND, I. y BLUME, M.: "Measurement of Portolio Performance under Uncertainty". American Economic Review, vol. 60 Septiembre 1970.

BLACK, F., JENSEN, M.C. y SCHOLES, M.: "The Capital Asset

Pricing Model: Some Empirical Tests", en "Studies in the Theory of Capital Markets", editado por Jensen, M.C., - Praeger Publishing Co., New York, 1972.

(6) Cuando hablemos de cartera frontera o cartera de mínima - varianza, estaremos haciendo mención a toda la rama superior de la hipérbola dibujada en la Figura 3.9 del capítulo III, mientras que cuando nos referimos a carteras eficientes es obvio que únicamente estamos hablando de la - parte de la misma señalada con trazo grueso y contínuo. - Por lo tanto, toda cartera eficiente es una cartera de mínima varianza, pero no toda cartera de mínima varianza es una cartera eficiente.

(7) Para demostrar el primer teorema nos basaremos en la obra de AFTALION, F. y VIALIET, C., op. cit., p. 108-110.

(8) Para demostrar el segundo teorema seguiremos los pasos dados por:

FAMA, E.F.: "Foundations of Finance". Basil Blacjwell, Oxford. 1977, p. 278-287.

BLACK, F., op. cit., p. 446-449.

(9) Nuevamente hay un ligero cambio en los símbolos utilizados. Así, en vez de usar X hemos preferido poner X_p para remarcar que son las ponderaciones o pesos con que intervienen los distintos títulos dentro de la cartera p.

(10) Para desarrollar este subepígrafe, nos apoyaremos sobre - todo en:

AFTALION, F. y VIALIET, C., op. cit., p. 112-115.

(11) En el modelo de Sharpe-Lintner-Mossin desarrollado en el capítulo IV no era necesario suponer que podían haber ventas al descubierto de los activos arriesgados. Aunque nosotros con el fin de poder dar un desarrollo matricial al modelo las permitimos, advirtiendo que ello no le restaba generalidad desde el momento en que las ponderaciones en que intervenían los títulos arriesgados en la cartera óptima eran positivas cuando intervenía el activo libre de riesgo.

En el modelo de Black, sin embargo, el supuesto de que las x_i pueden tomar valores negativos es necesario desde un principio, digamos que sería el precio que paga el modelo por abandonar el supuesto de que se puede prestar y pedir prestado ilimitadamente a la tasa pura de interés del activo libre de riesgo.

(12) En el siguiente epígrafe de este capítulo, veremos como esa desigualdad se cumple cuando existe una tasa libre de riesgo a la cual se puede prestar en cantidades ilimitadas, pero no pedir prestado.

(13) VASICEK, O.A.: "Capital Market Pricing Model with no Riskless Borrowing". Unpublished Manuscript, Wells Fargo Bank, marzo 1971.

Black, y Aftalion y Viallet recogen el contenido de este manuscrito, estando este epígrafe basado en el trabajo de dichos autores:

BLACK, F.: op. cit.

AFTALION, F. y VIALLET, C., op. cit.

(14) $w_f > 0$ ya que en el segmento R_fT de la frontera eficiente, el activo libre de riesgo siempre actúa con un peso positivo al igual que el activo T. Por otra parte, desde el momento que T es una cartera frontera que se encuentra entre las carteras de mínima varianza Z y M, se desprende que $w_Z > 0$ y $w_M > 0$.

(15) FAMA, E.F.: "Foundations of Finance". Basil Blackwell, Oxford, 1977.

Este autor en la página 293 de la obra acabada de citar, atribuye las diferencias entre estas tasas a que se relaja el supuesto sobre la no existencia de costes de transacción, en lo que respecta al activo libre de riesgo, de modo que los intermediarios financieros hacen que el señor que presta a la tasa pura de interés no recibe R_f, sino una tasa inferior R_L; y el señor que pide prestado a R_f, no paga R_f de interés, sino una tasa superior R_B.

(16) FRIEND, I. y BLUME, M., op. cit.

(17) BRENNAN, M.J.: "Capital Market Equilibrium with Divergent Borrowing and Lending Rates". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 6, nº 5, Diciembre 1971, p. 1197-1205.

(18) FAMA, E.F., op. cit., p. 293-298.

(19) AFTALION, F. y VIALLET, C., op. cit., p.120-121.

(20) En el capítulo IV y en el epígrafe 6.3.

(21) "La cartera de mercado puede aparecer como ineficaz para algunos inversores, y quizá para todos".
SHARPE, W.F.: "Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales". Ediciones Deusto. Bilbao, 1976, p. 193.

(22) LINTNER, J.: "Security Prices, Risk and Maximal Gains - from Diversification". Journal of Finance, vol. 20, nº 4, diciembre 1965, p. 587-615.

(23) SHARPE, W.F., op. cit., cap. 6.

(24) El tratamiento de las expectativas heterogéneas en el contexto de las decisiones de consumo-inversión está basado en la obra de
FAMA, E.F., op. cit., p. 314-319.

(25) Como $\tilde{c}_{2i} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\tilde{V}_{k2}$, según (6.73), el valor de mercado de la firma cero en el período 2 no está correlacionado con ninguno de los valores de mercado de las distintas firmas que intervienen en el mercado.

(26) Lintner, partiendo de una función de utilidad de los inversores exponencial y suponiendo un coeficiente de aversión absoluta al riesgo constante para cada individuo, desarrolla un modelo de equilibrio con expectativas heterogéneas, cuyo principal hallazgo, al igual que el modelo aquí desarrollado, es que los precios de equilibrio siguen teniendo una estructura lineal.
LINTNER, J.: "The Aggregation of Investors' Diverse Judgements and Preferences in Purely Competitive Security Markets". Journal of Financial and Quantitative Analysis, - vol. 4, nº 4, diciembre 1969, p. 347-400.

(27) Gonedes, sin embargo, demuestra que los parámetros del modelo CAPM para una clase de expectativas heterogéneas pueden ser observados, con lo cual da alguna esperanza sobre la aplicación práctica del mismo.
GONEDES, N.J.: "Capital Market Equilibrium for a Class of Heterogenons Expectations in a Two Parameter World". Journal of Finance, vol. 31, nº 1, marzo 1976, p. 1-15.

(28) SHARPE, W.F., op. cit., p. 141-142.

(29) Recuérdese que el tema de las decisiones de consumo-inversión fue abordado en primer lugar en el capítulo II.

(30) En el epígrafe 4.6 del capítulo IV.

(31) Como bien señalan Fama y Miller, los bienes de consumo duradero: coches, yates, frigoríficos, lavadoras, etc., son en parte bienes de consumo y en parte bienes de inversión. Así, si un individuo compra un activo duradero al principio del período 1, el valor de mercado del servicio que dicho bien presta durante dicho período hay que restarlo de su precio de adquisición e incluirlo en c_1: el consumo corriente del período 1. De forma que el precio de adquisición menos el valor del servicio que presta hay que considerarlo como inversión e incluirlo en h_1: la inversión total del período 1. Cuando al final del período 1, se venden todos los activos del individuo (en el contexto de un modelo de dos períodos), el precio de venta de esos bienes de consumo duradero nos permiten ver cual ha sido su rentabilidad. Por tanto, los bienes de consumo duradero no presentan problemas siempre que existan merca

dos de compra-venta de coches de segunda mano, frigorífi - cos usados, etc.

FAMA, E.F. y MILLER, M.H.: "The Theory of Finance". Holt, Rinehart and Winston, New York, 1972. p. 251.

(32) THUROW, L.C.: "Inversión en Capital Humano". Editorial - Trillas. México, 1978, p. 11.

(33) THURON, L.C., op. cit.
COATES, R.C.: "Investment Strategy". McGraw-Hill Book Com pany, New York, 1978.

(34) FAMA, E.F., y MILLER, M.H., op. cit., p. 252.

(35) Brito estudia este mismo tema en el contexto de un modelo uniperiódico tal como el utilizado en los primeros epígra fes del capítulo IV.
BRITO, N.O.: "Marketability Restrictions and the Valuation of Capital Assets under Uncertainty". Journal of Finance, vol. 32, nº 4, septiembre 1977, p. 1109-1123.

(36) Al igual que en el capítulo IV, supondremos que existen - expectativas homogéneas entre los distintos inversores - con respecto a la función de distribución de los activos financieros negociables, es decir, con respecto a la distribución de la variable aleatoria $\tilde{V}_{j2}$ (j=1,2,...,n); pero las expectativas serán heterogéneas en cuanto a la distri bución de $\tilde{V}^{i}_{H2}$, que suponemos se comporta como una normal con parámetros propios para cada inversor.

(37) Aunque con una nomenclatura distinta, el modelo que vamos a desarrollar se basa en el trabajo de Mayers:

MAYERS, D.: "Nonmarketable Assets and the Determination of Capital Asset Prices in the Absence of a Riskless Asset". Journal of Business, vol. 44, nº 2, abril 1973, p. 258-267.

(38) WILLIAMS, J.T.: "Risk, Human Capital, and the Investor's Portfolio". Journal of Business, vol. 51, nº 1, enero - 1978, p. 65-89.

(39) Williams hace abstracción del ocio en su modelo y únicamente trata de qué parte del tiempo una persona dedica a trabajar y qué parte dedica a incrementar su capital humano mediante la educación y cursos de formación.

Al mismo tiempo, demuestra que en el caso particular que el individuo dedica todo su tiempo a obtener un salario, su modelo se reduce al modelo de Mayers, por lo que el modelo de Mayers es un caso particular del modelo de Williams.

WILLIAMS, J.T., op. cit.

(40) AFTALION, F. y VIALLET, C., op. cit., p. 106.

(41) MAYERS, D., op. cit., p. 264.

CAPITULO VII

LA INFLACION Y EL C.A.P.M.

7.1. Introducción

En el capítulo IV desarrollamos el CAPM en su versión standard. Dicha versión estaba basada en una serie de supuestos, algunos de ellos tan restrictivos como irreales. En el capítulo anterior, nos hemos ocupado de la relajación de varios de dichos supuestos, pero sin embargo no tratamos el abandono del supuesto referente a la no existencia de cambios en el nivel de precios. Precisamente, por la importancia y amplitud que el tratamiento del caso requeriría, hemos preferido abordar este tema en capítulo aparte.

Como indica el profesor Suarez (1), "la inflación es ya una constante de nuestro tiempo". Desde hace ya décadas, todos los países occidentales (incluso también los países de economía planificada) están sufriendo de una forma contínua el fenómeno inflacionario, por lo que muchos economistas estamos empezando a pensar que la inflación es algo consustancial con el sistema de economía de mercado.

Este problema ha trascendido de la preocupación de los estudiosos, "la inflación ha tomado carta de naturaleza de tal forma en la economía moderna (últimamente con carácter de inflación continuada, creciente y en algunos casos acompañada de estancamiento o recesión económica), que las autoridades económicas han tenido que olvidar - el viejo principio de "evitar la inflación", sustituyéndolo por el más pragmático de "conseguir que la inflación no supere tal o cual cuota" (2).

Nos encontramos con una omnipresencia de la inflación en casi todo tipo de sistema económico y con unas medidas de política económica que no intentan su erradicación, - sino simplemente su contención a una tasa adecuada, considerada como inevitable o mal menor. Sin embargo, a pesar de la persistencia y continuidad en el tiempo de las alzas en el nivel de precios, resulta extraño el retraso con que se ha - introducido su tratamiento en el modelo de precios de equilibrio de los activos financieros en relación con la mayor - prontitud con que ha sido abordada la relajación de otros supuestos tal vez menos restrictivos.

Como hemos visto en el capítulo IV, el origen del CAPM en su versión standard se puede situar a mediados de la década de los sesenta con los trabajos de Sharpe, Lintner y Mossin (3). El análisis de las principales relajaciones en - los supuestos del mismo, tratadas en el capítulo anterior, - se producen a últimos de los sesenta y principios de los setenta. Sin embargo, a pesar de que Lintner en 1969 y Roll y Gaviria en 1973 (4) hacen los primeros intentos por tener en cuenta la inflación en el modelo, realmente es a partir de - 1975 y 1976 (5) cuando aparecen los primeros trabajos en que se plantean con más rigor el abandono del supuesto de la no existencia del fenómeno inflacionario y tratan, de una forma más general y con mayor profundidad, el CAPM resultante del nuevo contexto llegando a la formalización de la relación que se produce en términos nominales entre la rentabilidad y el riesgo de un título o cartera en épocas de cambio en el nivel de precios.

7.2. La Inflación y el Precio de las Acciones

El CAPM es un modelo que determina los precios de equilibrio de los activos financieros en base a unos supuestos de partida, más o menos restrictivos, sobre el comportamiento de los consumidores y del mercado. Sin embargo, antes de abordar la relajación del supuesto referente a la no existencia de cambios en el nivel de precios en el CAPM y de ver cuáles serán los nuevos precios de equilibrio de los activos financieros en el nuevo contexto, cabe preguntarnos que nos dice la evidencia empírica sobre la relación entre los precios de las acciones y la inflación.

Según la teoría clásica de Irving Fisher (6), ante un incremento en el nivel de precios, las acciones verán aumentado su valor en la tasa que lo haga la inflación, por lo que si bien el rendimiento nominal de los títulos sube, su rendimiento real se mantiene inalterable dentro de un entorno inflacionario, así como también la tasa real de interés de la economía.

Hasta hace relativamente poco tiempo, los trabajos publicados referentes a los efectos de la inflación sobre la valoración de las acciones, no se ocuparon directamente de la regresión entre los rendimientos reales observados de las acciones y la tasa de inflación, sino que contrastaban la hipótesis deudor-acreedor neto (7). Así, en los estudios de Kessel, Alchian y Kessel, Bach y Stephenson, referentes a los Estados Unidos (8), y de Alessi por lo que respecta al Reino Unido (9), se demuestra que la riqueza efectivamente se redistribuye entre empresas con una posición monetaria negativa y empresas con una posición monetaria neta positiva, tal como prevé la hipótesis deudor-acreedor neto, como resultado de una subestimación sobre el nivel que la inflación va a alcanzar en el futuro (10).

Sin embargo, artículos recientes sobre el modo como varían los precios de las acciones en una situación inflacionaria, han llegado a conclusiones que están en contradicción con la hipótesis clásica de que las acciones son un buen refugio contra la inflación.

Lintner (11) afirma que, aunque se usen las técnicas contables más apropiadas para tener en cuenta el fenómeno de la inflación: asignar los costes de acuerdo con el método LIFO en vez de FIFO, amortizar de acuerdo con el coste de reemplazamiento en vez de tener en cuenta el coste histórico, etc., y, aún suponiendo que se mantuviesen los márgenes de beneficio y las tasas de crecimiento de las ventas; cuanto más alta sea la inflación (tanto esperada como no prevista), mayor será la dependencia relativa de la empresa res pecto a la financiación exterior y, en consecuencia, menor será el valor de las acciones en circulación al ser mayor su riesgo financiero.

En diferentes trabajos empíricos,Oudet, Bodie, Jaffe y Mandelker, Nelson, Fama y Schwert (12), han llegado a la conclusión de que las tasas nominales de rendimiento de las acciones están negativamente correlacionadas con la tasa de inflación. Esta correlación negativa además salta a la vista si contemplamos lo ocurrido en el mercado de valores sobre todo en estos últimos años, ya que basta comprobar que hemos estado sufriendo presiones inflacionistas de dos dígitos y, al mismo tiempo, la Bolsa ha caído en picado como consecuencia de la crisis económica generalizada que vive el mundo occidental.

En opinión de Feldstein (13), "la relación inversa entre la inflación más alta y los precios de las acciones más bajos durante la pasada década no fue debida a la casualidad o a otros acontecimientos económicos independientes. Por el contrario, una parte importante del efecto adverso del incremento de la inflación sobre los precios de las acciones resulta de los fracasos básicos de las actuales leyes sobre impuestos de los Estados Unidos, particularmente, la amortización a costes históricos y los impuestos sobre ganancias nominales de capital". Este comportamiento no neutral de los impuestos por lo que respecta a sus efectos sobre la valoración de los títulos, presionando a la baja de los mismos en épocas de inflación también ha sido sostenido por Hong(14).

Sin embargo, otros autores como Johnson, Relly y Smith y también Oudet (15), asocian la baja de los precios de las acciones que se producen durante los períodos de inflación, con las alzas simultáneas que se dan en los tipos nominales de interés. Pero si bien es cierto que, en términos nominales, las tasas de interés suben con la inflación; como demuestra Friedman (16), por cada punto de incremento en la inflación esperada, el tipo de interés sube 0'65% requiriendo dicho ajuste un período de cuatro años. De este modo, generalmente la tasa real de interés más bien cae en épocas de inflación, lo cual tal vez sea debido a que como se demuestra en el estudio de Fama y Schwert (17), la tasa de interés responde únicamente a la parte de la inflación esperada debida a las variaciones no estacionales en los precios de los bienes de consumo que integran la cesta de la compra del Indice de Precios al Consumo, mientras que dicha tasa de interés permanece inalterada ante las variaciones estacionales de los precios de los bienes de consumo.

Asimismo, Feldstein (18), también piensa que la tasa real de interés, una vez aplicado el impuesto sobre la renta de las personas físicas, realmente cae en épocas que se producen alzas en el nivel de precios.

Finalmente, para concluir este breve epígrafe referente a si las acciones son o no un buen refugio contra la inflación, Fama y Schwert (19), en un estudio sobre la forma y amplitud en que los diferentes activos ofrecen una protección contra la erosión monetaria, han llegado a las siguientes conclusiones examinando el período 1953-71:

1) Los bonos y pagarés del gobierno de los Estados Unidos ofrecieron una protección completa contra la inflación esperada.

2) Los bienes raíces privados residenciales fueron un refugio completo contra los dos tipos de inflación: la esperada y la no esperada.

3) Al menos para intervalos de tiempo superiores a los 6 meses, las rentas del trabajo provenientes del capital humano, en el mejor de los casos, fueron una barrera parcial contra la inflación esperada y la no esperada.

4) Los rendimientos de las acciones estuvieron relacionados negativamente con la inflación esperada en el período de estudio.

En definitiva, parece ser, tal como se desprende de los últimos estudios sobre el tema hechos en los Estados Unidos, que las acciones o títulos de renta variable no ofrecen una protección ni consistente ni completa contra la inflación.

7.3. Antecedentes del Modelo de Precios de Equilibrio de los Activos Financieros bajo Inflación Incierta

En este epígrafe, siguiendo el camino emprendido en el capítulo anterior, vamos a relajar el modelo CAPM abandonando uno de sus supuestos y dejando el resto de los supuestos inalterados. En concreto, supondremos que, tal como se observa en la realidad, se prodúcen cambios en el nivel de precios.

Como ya apuntamos al inicio de este capítulo, la toma en consideración de la inflación y la consiguiente relajación del supuesto concerniente a la misma, ha sido tratada con un relativo retraso en comparación con la relajación más temprana de otros supuestos, tal vez no tan importantes como éste, ya que nadie había cuestionado ni puesto en duda la existencia del fenómeno inflacionario en los países de economía de mercado y, sin embargo, su tratamiento no había sido recogido en el modelo teórico del CAPM.

Los primeros antecedentes del CAPMUI (Capital Asset Pricing Model under Uncertain Inflation) se remontan a Lintner, Roll y Gaviria (20). "No obstante, los parámetros clave de sus modelos están aún en términos reales más bien que nominales y, por tanto, los efectos de la inflación incierta sobre las decisiones financieras no pueden ser analizadas explícitamente" (21). Además, el modelo de Roll, por ejemplo, partía de la existencia de un activo libre del riesgo de inflación, es decir, de un activo cuyo rendimiento tiene un coeficiente de correlación con respecto a la tasa de inflación positivo e igual a la unidad. Sin embargo, en opinión de Solnik (22), es altamente improbable que exista un activo de estas características.

Chen y Boness (23) son de los primeros en dar una versión del CAPMUI en términos nominales. Su modelo es discreto y uniperiódico, sólo consideran dos momentos del tiempo: ahora y más tarde. Pero el modelo de Chen y Boness tiene la limitación de que suponen que la función de utilidad de cualquier inversor es cuadrática, lo cual no está probado y, en todo caso, parece más bien improbable que dicho supuesto se cumpla.

Poco después, aparece la versión del CAPMUI de Friend, Landskroner y Losq (24) que, siguiendo los antecedentes de Merton y Ross (25), trabajan con un modelo contínuo, ya que parten del supuesto de que la tasa nominal de rendimiento de un título cualquiera se genera por un proceso Gaussiano (Wiener) contínuo. Pyun (26) demuestra que el modelo de Chen y Boness es un caso particular del modelo de Friend, Landskroner y Losq, cuando todos los activos son negociables y ninguna variable aleatoria entra en la determinación de la riqueza final del inversor en términos reales.

Sólnik (27) incorpora el tratamiento de la inflación a un modelo de selección de cartera semejante al usado por nosotros en el capítulo III. Se apoya en el supuesto de que los rendimientos de los títulos son normales y que los precios de los bienes de consumo también siguen una función de distribución normal. Con respecto a los trabajos descritos hasta ahora, su principal diferencia es que parte del supuesto de que los inversores no tienen expectativas homogéneas en cuanto a la tasa de inflación esperada ni tampoco por lo que se refiere a las covarianzas entre los rendimientos de los distintos títulos con la tasa de inflación. Su principal conclusión es que, tanto cuando existe un activo libre de riesgo en términos nominales como cuando no existe, la frontera eficiente de un inversor particular es siempre una hipérbola en los ejes (E, σ) o una parábola en los ejes (E, σ^2).

Schneller (28) formula una versión del CAPMUI en tiempo discreto partiendo de la expresión (6.37) del modelo de Black. Pero Schneller considera que la expresión (6.37), que muestra la relación entre la rentabilidad y el riesgo de un activo cualquiera cuando no existe un activo libre de riesgo, es válida tanto cuando se expresa en términos nominales (como lo hace Black) como cuando se expresa en términos reales (caso en el que él se basa). Nosotros pensamos que ésto es erróneo, ya que Black hizo la demostración para rendimientos nominales y la introducción de la inflación en el modelo CAPM no se produce por el simple abandono del supuesto sobre la existencia del activo libre de riesgo. Esta opinión nuestra también es sostenida por Solnik, el cual dice: "sería atractivo suponer que los resultados de Black tienen relación con el caso general de equilibrio del mercado de capitales bajo inflación" (29). Pero más adelante aclara: "el efecto de la inflación es más perverso que el simple reemplazamiento del activo libre de riesgo por una cartera beta-cero. Esto es incorrecto"(30).

Finalmente, en este breve repaso sobre los antece - dentes del CAPMUI, cabe destacar el trabajo reciente de Elaine Chen (31) que basándose en el supuesto de que los rendimientos de los títulos y la tasa de inflación tienen una función de distribución normal, plantea una versión en tiempo - discreto del CAPMUI,pero sin hacer ningún supuesto restrictivo sobre la forma que toma la función de utilidad del inver - sor. Aunque el modelo de E. Chen es uniperiódico, nosotros replantearemos a continuación dicho modelo en el marco de las - decisiones de consumo-inversión y, por tanto, consideraremos dos períodos de tiempo.

7.4. La Utilidad Esperada en Términos Reales.

Suponiendo que los rendimientos de los títulos y la tasa de inflación son variables aleatorias con funciones de distribución normales, entonces es suficiente tener en cuenta los dos primeros momentos: la media y la varianza; por lo que si planteamos el modelo en el contexto de las decisiones de - consumo-inversión tratados en el capítulo II, nos encontramos con que la función de utilidad esperada del inversor, al igual que en el último epígrafe del capítulo IV, va a ser una función del consumo corriente del período 1, del consumo esperado del período 2, y de la varianza del consumo del período 2.

Pero claro está, al introducir la inflación en el modelo, - tanto el consumo esperado del período 2, como la varianza - del consumo del período 2, deben estar expresados en términos reales y no nominales, ya que ahora el inversor maximiza la utilidad esperada por el consumo de los períodos 1 y 2, estando el inversor interesado por el nivel que dicho consumo del período 2 puede alcanzar en términos reales. Por tanto, la función de utilidad esperada del inversor i será:

$$U_i(c_{1i}, e_i, v_i) \qquad (7.1)$$

donde:

c_{1i} = consumo corriente del período 1.
e_i = $E(\tilde{C}_{2i})$ = consumo real esperado en el período 2.
v_i = $\sigma^2(\tilde{C}_{2i})$ = varianza del consumo real del período 2.
$\tilde{C}_{2i}$ = consumo aleatorio en términos reales del período 2.

cumpliéndose además que:

$$\frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} > 0 \qquad \frac{\partial U_i}{\partial e_i} > 0 \qquad \frac{\partial U_i}{\partial v_i} < 0 \qquad (7.2)$$

ya que suponemos que el individuo tiene aversión al riesgo.

La tasa de inflación incierta se define como sigue:

$$\tilde{R}_I = \frac{\tilde{I}_2 - I_1}{I_1} = \frac{\tilde{I}_2}{I_1} - 1 \qquad (7.3)$$

siendo I_1 e $\tilde{I}_2$ los valores que toma el índice de precios al - consumo al principio de los períodos 1 y 2 respectivamente.

El rendimiento nominal de un título vimos en (4.19) que se puede expresar del siguiente modo:

$$\tilde{R}_j = \frac{\tilde{V}_{j2} - V_{j1}}{V_{j1}} = \frac{\tilde{V}_{j2}}{V_{j1}} - 1 \qquad (7.4)$$

y operando en (7.4) se puede llegar a que:

$$1 + \tilde{R}_j = \frac{\tilde{V}_{j2}}{V_{j1}} \qquad (7.5)$$

De igual manera, para expresar el rendimiento real de un título de una forma similar a (7.5), es necesario deflatar antes los valores de la firma j, al principio del período de que se trate, con el valor que toma el índice de precios al consumo en dichos momentos:

$$1 + \tilde{r}_j = \frac{\tilde{V}_{j2}/\tilde{I}_2}{V_{j1}/I_1} = \frac{\tilde{V}_{j2}/V_{j1}}{\tilde{I}_2/I_1} \qquad (7.6)$$

y teniendo en cuenta (7.5) y (7.3), podemos escribir (7.6) de la siguiente manera:

$$1 + \tilde{r}_j = \frac{1 + \tilde{R}_j}{1 + \tilde{R}_I} \qquad (7.7)$$

Si ahora operamos en (7.7), tenemos:

$$1 + \tilde{R}_j = (1 + \tilde{r}_j)\,(1 + \tilde{R}_I) = 1 + \tilde{r}_j + \tilde{R}_I + \tilde{r}_j \tilde{R}_I \qquad (7.8)$$

simplificando y despreciando el término $(\tilde{r}_j . \tilde{R}_I)$ finalmente queda (32):

$$\tilde{R}_j = \tilde{r}_j + \tilde{R}_I \qquad (7.9)$$

Si esta última ecuación la particularizamos para el caso del activo libre de riesgo y tomamos esperanzas matemáticas:

$$R_f = E(\tilde{r}_f) + E(\tilde{R}_I) \qquad (7.10)$$

llegamos a la hipótesis de Fisher (33), que viendo como las tasas de interés tienden a subir cuando suben los precios y a bajar, en el caso contrario, hizo la hipótesis de que la tasa nominal de interés puede ser formulada como la suma de la tasa real de interés y la tasa esperada de inflación (34). Como $E(\tilde{r}_f)$ no puede ser observada, tal como afirma Schneller (35), (7.10) constituye más bien una definición de $E(\tilde{r}_f)$ que una relación de equilibrio que pueda ser contrastada. De ahí que (7.9) normalmente aparezca de la siguiente forma en la mayoría de los estudios sobre el tema:

$$\tilde{r}_j = \tilde{R}_j - \tilde{R}_I \qquad (7.11)$$

Es decir, que para poder trabajar con rendimientos reales no hay mas que restar al rendimiento nominal la tasa de inflación.

Chen y Boness, Solnik y E.Chen usan (7.11) para referirse a los rendimientos reales aleatorios de los activos arriesgados. Friend, Landskroner y Losq critican el uso de (7.11), ya que para llegar a dicha expresión, tal como hemos visto en la nota a pie de página 33, se desprecian una serie de términos, por lo que (7,11) no es más que una aproximación que luego provoca que los resultados del modelo de Chen y Boness no coincidan exactamente con los del modelo de Friend, Landskroner y Losq; si bien es cierto que cuando se aplican ambos modelos a datos reales, los resultados son similares.

Antes de seguir adelante, vamos a definir los siguientes símbolos que utilizaremos posteriormente: (36)

h_{ij}: cantidad en pesetas que compra el inversor i del activo j al principio del período 1. Hay n activos arriesgados en la economía y M inversores.

$h_{i,n+1}$: cantidad neta en pesetas que pide prestada el inversor i al principio del período 1 del activo libre de riesgo en términos nominales. $h_{i,n+1}$ es, por tanto, igual a lo que pide prestado menos lo que presta el inversor i.

$x_{ij} = h_{ij} / \sum_{j=1}^{n} h_{ij}$, la proporción en que interviene el activo j dentro de la cartera de activos arriesgados en términos nominales poseída por el inversor i.

X_{Mj}: la proporción que representa el activo arriesgado j dentro de la cartera de mercado.

$$H = \begin{bmatrix} h_{i1} \\ h_{i2} \\ \vdots \\ h_{in} \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_I) \\ cov(\tilde{R}_2, \tilde{R}_I) \\ \vdots \\ cov(\tilde{R}_n, \tilde{R}_I) \end{bmatrix}$$

Utilizaremos las variables h_{ij}, $h_{i,n+1}$, x_{Mj} para referirnos al CAPMUI (es decir, cuando se considera la presencia de la inflación) y para referirnos a las mismas variables en el CAPM o modelo standard utilizaremos h^{+}_{ij}, $h^{+}_{i,n+1}$, x^{+}_{ij}, x^{+}_{Mj}.

En el marco de las decisiones de consumo-inversión para el caso de dos períodos, tal como vimos en el capítulo II, se supone que un individuo tiene una riqueza inicial, w_{1i}

que debe repartir entre el consumo corriente del período 1(c_{1i}) y la inversión (h_{1i}) en una cartera de valores.

Suponiendo que el individuo no trabaja en el período 2, su riqueza al comienzo del período 2, que como sabemos la dedica toda al consumo, está compuesta por el valor de la venta de la cartera de valores adquirida al principio del período 1, valor que incluye el desembolso inicial debido a la compra de la misma más el rendimiento obtenido. Es decir, que tal como vimos en (2.2):

$$\widetilde{w}_{2i} = \widetilde{c}_{2i} = h_{1i}(1+\widetilde{R}_p) = h_{1i}(1+\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{+}\widetilde{R}_j) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{+}(1+\widetilde{R}_j) \qquad (7.12)$$

Pero en (7.12) se deben efectuar una serie de cambios para ajustar dicha expresión a un mundo donde existe la inflación. Y, por tanto, no cabe hablar de rendimientos nominales ($\widetilde{R}_j$), sino de rendimientos reales. Por otra parte, desde un comienzo ya suponemos que existe un activo libre de riesgo en términos nominales que puede formar parte de la cartera que el inversor adquiere al principio del período 1. De todo lo dicho, se desprende que (7.12) debe ser corregida como sigue para adaptarla al CAPMUI y poder expresar el consumo del período 2 en términos reales (37).

$$\widetilde{c}_{2i} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(1+\widetilde{r}_j) - h_{i,n+1}(1+\widetilde{r}_f) \qquad (7.13)$$

Si ahora tenemos en cuenta (7.11), el consumo real aleatorio del período 2 puede ser expresado de la siguiente manera:

$$c_{2i} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(1+\widetilde{R}_j-\widetilde{R}_I) - h_{i,n+1}(1+R_f-\widetilde{R}_I) \qquad (7.14)$$

y operando llegamos a:

$$\tilde{C}_{2i} = (\sum_{j=1}^{n} h_{ij} - h_{i,n+1}) + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\tilde{R}_j - (\sum_{j=1}^{n} h_{ij} - h_{i,n+1})\tilde{R}_I - h_{i,n+1}R_f \tag{7.15}$$

con lo cual hemos sustituido los rendimientos reales por los nominales que son de más fácil manipulación.

Asimismo, según afirmamos antes, el individuo reparte su riqueza inicial del período 1 entre consumo e inversión, es decir:

$$w_{1i} = c_{1i} + h_{1i} = c_{1i} + \sum_{j=1}^{n} h_{ij} - h_{i,n+1} \tag{7.16}$$

Tomando esperanzas y varianzas en (7.15) se obtiene respectivamente:

$$e_i = E(\tilde{C}_{2i}) = (\sum_{j=1}^{n} h_{ij} - h_{i,n+1}) + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\, E(\tilde{R}_j) -$$

$$- (\sum_{j=1}^{n} h_{ij} - h_{i,n+1})\, E(\tilde{R}_I) - h_{i,n+1}\, R_f \tag{7.17}$$

$$v_i = \sigma^2(\tilde{C}_{2i}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} h_{ij}h_{ik}\mathrm{cov}(\tilde{R}_j\tilde{R}_k) + (\sum_{j=1}^{n} h_{ij} - h_{i,n+1})^2 \cdot$$

$$\cdot\, \sigma^2(\tilde{R}_I) - 2\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\sum_{k=1}^{n} h_{ik} - h_{i,n+1})\, \mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I) \tag{7.18}$$

Y llevando la expresión (7.16) a (7.18), se tiene (38):

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} h_{ij}h_{ik}\mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_k) + (\sum_{j=1}^{n} h_{ij} - h_{i,n+1})^2\, \sigma^2(\tilde{R}_I) -$$

$$- 2\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(w_{1i} - c_{1i})\mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I) \tag{7.19}$$

7.5. La Demanda de Activos Arriesgados en un Entorno Inflacionario

Dentro del mundo de dos parámetros en que nos movemos, la cuestión de ver cuál es la decisión óptima de consumo -inversión que el inversor i debe realizar, se reduce a la solución del problema de cómo maximizar la utilidad esperada sujeta a la restricción de su presupuesto inicial:

$$\text{Max} \quad U_i(c_{1i}, e_i, v_i)$$

$$\text{sujeto a:} \quad w_{1i} = c_{1i} + \sum_{j=1}^{n} h_{ij} - h_{i,n+1} \qquad (7.20)$$

Es decir, que se trata de encontrar las cantidades c_{1i}, h_{ij} $(j=1,2,\ldots,n)$, $h_{i,n+1}$ que maximicen su función de utilidad esperada respetando la restricción de que el consumo corriente del período 1 y la inversión en la cartera de valores iguale a su riqueza inicial.

Aplicando la técnica de máximos y mínimos condicionados de Lagrange, la expresión lagrangiana sería:

$$L_i = U_i\ (c_{1i}, e_i, v_i) + k(w_{1i} - c_{1i} - \sum_{j=1}^{n} h_{ij} + h_{i,n+1}) \qquad (7.21)$$

donde k es el multiplicador de Lagrange, y h_{ij} se supone que puede tomar valores negativos, lo cual equivale a suponer que están permitidas las ventas al descubierto.

Las condiciones de primer grado, de un máximo condicionado de Lagrange, se obtienen igualando a cero las derivadas de (7.21) con respecto a las incógnitas del problema: c_{1i},

h_{ij} $(j=1,2,\ldots,n)$, $h_{i,n+1}$, k (39):

$$\frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} = \frac{\partial U_i}{\partial c_{1i}} - k = 0 \tag{7.22}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial h_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial e_i}\left[1 + E(\tilde{R}_j) - E(\tilde{R}_I)\right] +$$

$$+ \frac{\partial U_i}{\partial v_i}\, 2\left[\sum_{k=1}^{n} h_{ik}\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_k) + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\,\sigma^2(\tilde{R}_I) - \right.$$

$$\left. - h_{i,n+1}\,\sigma^2(\tilde{R}_I) - (w_{i1} - c_{1i})\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)\right] - k = 0$$

$$j = 1,2,\ldots,n \tag{7.23}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial h_{i,n+1}} = \frac{\partial U_i}{\partial e_i}\left[- 1 + E(\tilde{R}_I) - R_f\right] +$$

$$+ \frac{\partial U_i}{\partial v_i}\, 2\left[- \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\,\sigma^2(\tilde{R}_I) + h_{i,n+1}\,\sigma^2(\tilde{R}_I)\right] +$$

$$+ k = 0 \tag{7.24}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial k} = w_{1i} - c_{1i} - \sum_{j=1}^{n} h_{ij} + h_{i,n+1} = 0 \tag{7.25}$$

El sistema de ecuaciones (7.22) a (7.25) consta de (n+3) ecuaciones con (n+3) incógnitas, que por lo general es de esperar que tenga una solución única y determinada, solución que proporciona los resultados de la decisión óptima de consumo-inversión del individuo i.

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (7,23) y (7.24), se tiene:

$$\frac{\partial U_i}{\partial h_{ij}} + \frac{\partial U_i}{\partial h_{i,n+1}} = \frac{\partial U_i}{\partial e_i}\left[E(\widetilde{R}_j) - R_f\right] +$$

$$+ 2\,\frac{\partial U_i}{\partial v_i}\left[\sum_{k=1}^{n} h_{ik}\ \mathrm{cov}(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_k) -\right.$$

$$\left. - (w_{1i},c_{1i})\ \mathrm{cov}(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_I)\right] = 0 \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (7.26)$$

Esta última expresión es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas h_{ij} $(j=1,2,\ldots,n)$. Dicho sistema de ecuaciones también puede ser expresado matricialmente como sigue:

$$\frac{\partial U_i}{\partial e_i}\left[E - R_f\,[1_n]\right] + 2\,\frac{\partial U_i}{\partial v_i}\left[VH - (w_{1i}-c_{1i})\ I\right] = 0 \qquad (7.27)$$

Suponiendo que la matriz de varianzas-covarianzas V no es singular, podemos premultiplicar (7.27) por V^{-1} y despejar el vector columna H, que nos proporciona las cantidades en pesetas que el individuo debe invertir en cada uno de los n activos arriesgados (40):

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_i}{\partial e_i}\,V^{-1}\left[E - R_f\,[1_n]\right] + (w_{1i} - c_{1i})V^{-1}I \qquad (7.28)$$

Llamando v_{jk} al elemento de la fila j, columna k de la matriz V^{-1}, podemos particularizar (7.28) para un elemento concreto del vector columna H:

$$h_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_i}{\partial e_i}\sum_{k=1}^{n} v_{jk}\ (E(\widetilde{R}_k) - R_f) +$$

$$+ (w_{1i} - c_{1i})\sum_{k=1}^{n} v_{jk}\ \mathrm{cov}(\widetilde{R}_k,\widetilde{R}_I) \qquad (7.29)$$

y recordando que el coeficiente de correlación entre el rendi miento del activo k con la tasa de inflación es $\rho_{kI} = \mathrm{cov}(\tilde{R}_k, \tilde{R}_I)/(\sigma(\tilde{R}_k)\,\sigma(\tilde{R}_I))$, se obtiene la siguiente ecuación que expresa la demanda de un individuo de los n activos arriesgados:

$$h_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_i}{\partial e_i}\,\sum_{k=1}^{n} v_{jk}\,(E(\tilde{R}_k) - R_f) + $$

$$+ (w_{1i} - c_{1i})\sum_{k=1}^{n} v_{jk}\,\rho_{kI}\,\sigma(\tilde{R}_k)\,\,\sigma(\tilde{R}_I) \qquad (7.30)$$

$$j = 1,2,\ldots,n$$

donde:

$\partial v_i / \partial e_i$ es la tasa marginal de sustitución entre la varianza del consumo real del período 2 y el consumo real esperado de dicho período.

7.6. La Inflación y el Teorema de la Separación

Si partimos de (7.21), pero suponemos que no existe inflación incierta, esto es, que la tasa de imflación es nula o es igual a una constante (41), y operamos de una forma paralela a como lo hemos hecho hasta ahora, se llega a que:

$$h^{+}_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_i}{\partial e_i}\,\sum_{k=1}^{n} v_{jk}\,(E(\tilde{R}_k) - R_f) \qquad j=1,2,\ldots,n$$

$$(7.31)$$

Esta expresión (42) nos proporciona las cantidades en pesetas que el individuo i debe invertir en cada uno de los activos arriesgados cuando no existen cambios en el nivel de precios, es decir, que (7.31) es la solución del problema standard de la selección de cartera cuando junto con los n activos arriesgados se considera el activo libre de riesgo.

Por tanto, comparando las ecuaciones de demanda (7.29) y (7.31) se ve como la cartera óptima de los activos arriesgados que selecciona el inversor, con y sin inflación, no es la misma.

Según se desprende de (7.30), la demanda del inversor i del activo j tiene dos componentes: 1) El primer miembro de dicha ecuación que coincide con (7.31) y que, por tanto, representa la cantidad que un individuo desea adquirir de un título particular en base a la rentabilidad-riesgo del mismo, en un entorno no inflacionario, de acuerdo con el modelo standard CAPM. 2) El segundo miembro de (7.30) que refleja la cantidad que un inversor demanda de un activo concreto para protegerse contra la inflación o erosión monetaria.

Para ver como influye la inflación en la cuantía del segundo componente que acabamos de mencionar, no hay más que derivar parcialmente con respecto a ρ_{ji} en (7.30):

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial \rho_{ji}} = (w_{1i} - c_{1i})\ v_{jk}\ \sigma(\tilde{R}_k)\ \sigma(\tilde{R}_I) > 0 \qquad (7.32)$$

de modo que, ceteris paribus, la demanda del activo j será mayor cuanto mayor sea el coeficiente de correlación entre el rendimiento de dicho activo y la tasa de inflación.

A partir de (7.31), es decir, del modelo tradicional, si queremos hallar la proporción en que interviene cada uno de los activos arriesgados dentro de la cartera de activos arriesgados, sin tomar en consideración el activo libre de riesgo, debemos calcular:

$$x^{\div}_{ij} = \frac{h^{\div}_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} h^{\div}_{ij}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial e_i}\sum\limits_{k=1}^{n} v_{jk}(E(\tilde{R}_k)-R_f)}{\frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial e_i}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} v_{jk}(E(\tilde{R}_k)-R_f)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} v_{jk}\,(E(\tilde{R}_k)-R_f)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} v_{jk}(E(\tilde{R}_k)-R_f)} \qquad (7.33)$$

que expresado matricialmente, toma la siguiente forma simplificada (43):

$$X_M = \frac{V^{-1}\,(E - R_f\,[1_n])}{[1_n]'\,V^{-1}\,(E-R_f\,[1_n])} \qquad (7.34)$$

En consecuencia, las proporciones en que intervienen un activo arriesgado, dentro de la cartera óptima de activos arriesgados, son independientes de la riqueza inicial del individuo y de sus gustos (o aversión al riesgo) reflejados por la tasa marginal de sustitución $\partial v_i/\partial e_i$; siendo estas proporciones idénticas para todos los inversores del mercado.

La parte de h_{1i} que cada individuo invierta en la cartera arriesgada (lo que a su vez determina que el resto de h_{1i} se invierta en el activo libre de riesgo) dependerá de su actitud hacia el riesgo reflejada en $\partial v_i/\partial e_i$. Es decir, -

que el nivel absoluto que alcancen las h^{+}_{ij} dependerá en cada inversor de la tasa marginal de sustitución entre la varianza del consumo real y el consumo real esperado en el período 2, pero las proporciones que representan los distintos activos en el conjunto de la cartera arriesgada (x^{+}_{ij}) serán idénticas para todos los individuos, con lo cual todos elegirán los mismos títulos para formar parte de sus respectivas carteras óptimas.

A este resultado ya llegamos con anterioridad en el capítulo III partiendo de un planteamiento inicial ligeramente distinto y constituye lo que Tobin (44) llama "Teorema de la Separación".

Sin embargo, en un mundo con inflación, el teorema de la separación no se cumple, ya que si nos basamos en las ecuaciones de demanda del inversor i de los distintos activos j (expresión 7.28), tenemos:

$$x_{ij} = \frac{h_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} h_{ij}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial e_i}\left(\sum_{k=1}^{n} v_{jk}(E(\tilde{R}_k)-R_f)\right)+(w_{1i}-c_{1i})\sum_{k=1}^{n} v_{jk}\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)}{\frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial e_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_{jk}(E(\tilde{R}_k)-R_f)\right)+(w_{1i}-c_{1i})\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_{jk}\operatorname{cov}(\tilde{R}_j\tilde{R}_I)} \tag{7.35}$$

Por lo que, tal como se observa en (7.35), las proporciones que representan los distintos activos arriesgados dentro de la cartera óptima de activos arriesgados (sin tener en cuenta el activo libre de riesgos en términos nominales) dependen de w_{1i}, c_{1i}, $\partial v_i/\partial e_i$, variables estas que son propias de cada individuo, lo cual provoca que las proporciones x_{ij} sean distintas para los diferentes inversores, por lo que el teorema de la separación ya no se cumple (45).

7.7. La Relación Rentabilidad-Riesgo en el CAPMUI

Hasta ahora nos hemos movido a nivel del equilibrio de un inversor particular, pero debemos dar un paso más y llegar al equilibrio del mercado, hallando cual es la relación rentabilidad-riesgo y los precios de equilibrio de los activos financieros en un entorno inflacionario.

Para ello, debemos basarnos en las ecuaciones de demanda de los activos arriesgados por parte de los inversores particulares y agregar éstas demandas a nivel de mercado. Así si dividimos previamente ambos miembros de (7,26) por $\partial U_i/\partial v_i$ y despejamos $\partial v_i/\partial e_i$ (46):

$$\frac{\partial v_i}{\partial e_i} = \frac{2\left(\sum_{k=1}^{n} h_{ik}\ \mathrm{cov}(\tilde{R}_j\tilde{R}_k) - (w_{1i}-c_{1i})\ \mathrm{cov}(\tilde{R}_j\tilde{R}_I)\right)}{E(\tilde{R}_j) - R_f} \qquad (7.36)$$

$$j=1,2,\ldots,n$$

En equilibrio, $\partial v_i/\partial e_i$ es una constante propia de cada inversor e igual para todo activo j, De modo que si particularizamos (7.36) para los activos: j y l, ambas expresiones pueden ser igualadas:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} h_{ik} \operatorname{cov}(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_k) - (w_{1i}-c_{1i}) \operatorname{cov}(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_I)}{E(\widetilde{R}_j) - R_f} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} h_{ik} \operatorname{cov}(\widetilde{R}_l,\widetilde{R}_k) - (w_{1i}-c_{1i}) \operatorname{cov}(\widetilde{R}_l,\widetilde{R}_I)}{E(\widetilde{R}_l) - R_f} \qquad (7.37)$$

Para que el mercado se halle en equilibrio es necesario que la oferta iguale a la demanda, por lo que deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$\sum_{i=1}^{M} h_{ij} = V_{j1} \qquad (7.38)$$

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} h_{ij} = \sum_{j=1}^{n} V_{j1} = V_{M1} \qquad (7.39)$$

$$\sum_{i=1}^{M} (w_{1i}-c_{1i}) = w_1 - c_1 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} - \sum_{j=1}^{M} h_{i,n+1} =$$

$$= V_{M1} - D = V_{M1} \qquad (7.40)$$

Es decir, 1) que la demanda de las acciones de la firma j al comienzo del período 1 por parte de todos los individuos debe de ser igual al valor de la firma j en ese momento; 2) que la demanda agregada de todos los títulos de todas las empresas debe de ser igual al valor de mercado de los mismos a principios del período 1; 3) que el valor total de las acciones de todas las empresas del mercado debe de ser igual al total invertido por todos los individuos al comienzo del primer período.

donde:

w_1: es el total de la riqueza de todos los inversores al principio del período 1.

c_1: es el consumo corriente total de todos los individuos del mercado.

D : es el total de lo pedido prestado menos el total de lo prestado por todos los inversores. Por lo que en equilibrio, D = 0.

La expresión (7.37) es una condición de equilibrio individual. Si ahora sumamos esta condición de todos los inversores particulares, tenemos (47):

$$\frac{V_{M1}\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}\frac{h_{ik}}{V_{M1}}\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_k)-\sum_{i=1}^{M}(w_{1i}-c_{1i})\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_j)-R_f}=$$

$$=\frac{V_{M1}\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}\frac{h_{ik}}{V_{M1}}\operatorname{cov}(\tilde{R}_1,\tilde{R}_k)-\sum_{i=1}^{M}(w_{1i}-c_{1i})\operatorname{cov}(\tilde{R}_1,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_1)-R_f} \qquad (7.41)$$

y teniendo presente las condiciones de equilibrio (7.38) a (7.40), la expresión (7.41) se reduce a (48):

$$\frac{V_{M1}\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M)-(w_1-c_1)\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_j)-R_f}=$$

$$\frac{V_{M1}\operatorname{cov}(\tilde{R}_1,\tilde{R}_M)-(w_1-c_1)\operatorname{cov}(\tilde{R}_1,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_1)-R_f}$$

$$\frac{V_{M1}\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M)-V_{M1}\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_j)-R_f}=$$

$$=\frac{V_{M1}\operatorname{cov}(\tilde{R}_1,\tilde{R}_M)-V_{M1}\operatorname{cov}(\tilde{R}_1,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_1)-R_f}$$

$$\frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_j) - R_f} = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_l,\tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_l,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_l) - R_f} \qquad (7.42)$$

Matemáticamente, se puede demostrar que si:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = C \qquad (7.43)$$

entonces también se cumple que:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \qquad (7.44)$$

por lo que, teniendo en cuenta esta propiedad, podemos multiplicar y dividir antes el segundo miembro de (7.42) por X_{Ml} y luego sumar dicho segundo miembro para todo l desde 1 hasta n:

$$\frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_j) - R_f} =$$

$$= \frac{\sum_{l=1}^{n} x_{Ml}\ \mathrm{cov}(\tilde{R}_l,\tilde{R}_M) - \sum_{l=1}^{n} x_{Ml}\ \mathrm{cov}(\tilde{R}_l,\tilde{R}_I)}{\sum_{l=1}^{n} x_{Ml}\ (E(\tilde{R}_l) - R_f)} \qquad (7.45)$$

que operando queda (49):

$$\frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_j) - R_f} = \frac{\sigma^2(\tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)}{E(\tilde{R}_M) - R_f} \qquad (7.46)$$

y despejando $E(\tilde{R}_j)$, se obtiene la relación de equilibrio entre la rentabilidad y el riesgo de un activo individual cuando se considera explícitamente la existencia de la inflación:

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)} \cdot \left[\mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)\right] \qquad (7.47)$$

esta expresión en el CAPMUI juega un papel equivalente a la SML del CAPM y es válida tanto para títulos como para carteras, eficientes o no (50).

A idéntica expresión se puede llegar partiendo de las condiciones de primer grado del equilibrio individual de Solnik, pero suponiendo además, como lo hemos hecho nosotros aquí, que los inversores tienen expectativas homogéneas en cuanto a la inflación y que la cartera de mercado es eficiente (51).

7.8. Riesgo Sistemático y Precio de Mercado del Riesgo en el CAPM y en el CAPMUI

Si no se espera que se vaya a producir una inflación incierta, esto es, si $\widetilde{R}_I$ es igual a cero o a una constante, entonces:

$$\mathrm{cov}(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_I) = \mathrm{cov}(\widetilde{R}_M,\widetilde{R}_I) = 0 \tag{7.48}$$

y la ecuación (7.47) del CAPMUI se reduce a la SML del CAPM standard:

$$E(\widetilde{R}_j) = R_f + \frac{E(\widetilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\widetilde{R}_M)} \mathrm{cov}(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_M) \tag{7.49}$$

que también puede expresarse de las dos siguientes formas alternativas:

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \lambda^{**} cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_M) \qquad (7.50)$$

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + (E(\tilde{R}_M) - R_f)\, \beta_j \qquad (7.51)$$

siendo:

$\lambda^{**} = \dfrac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)}$ lo que como vimos en el capítulo IV se llama indebidamente precio de mercado del riesgo (7.52)

$\beta_j = \dfrac{cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_M)}{\sigma^2(\tilde{R}_M)}$ el riesgo sistemático (7.53)

En el marco del CAPMUI, de la observación de (7.47), se deduce que el precio de mercado del riesgo y el riesgo sistemático son respectivamente:

$$\lambda' = \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M) - cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I)} \qquad (7.54)$$

$$\beta'_j = \frac{cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_M) - cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_I)}{\sigma^2(\tilde{R}_M) - cov\,(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I)} \qquad (7.55)$$

Debemos resaltar que el riesgo total en el CAPM standard es: $\sigma^2(\tilde{R}_M)$, mientras que en el CAPMUI es: $\sigma^2(\tilde{R}_M) - cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I)$. De manera que si el rendimiento de la cartera de mercado tiene una relación negativa con la tasa de inflación (52): $cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I) < 0$, el riesgo total en el CAPMUI será mayor que en el CAPM. Asimismo, si $cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I) > 0$, ocurrirá lo contrario, el riesgo total en el CAPM será mayor que en el CAPMUI, ya que el inversor, en una situación inflacionista (53), considera menos arriesgado a aquel activo o cartera de valores que se mueve en el mismo sentido que la inflación.

De todo lo dicho hasta ahora se deduce que, si se espera que se produzca una inflación incierta, y, al mismo tiempo, el rendimiento de la cartera de mercado tiene una relación positiva con la tasa de inflación, entonces el modelo tradicional subestima el valor que toma el precio del mercado del riesgo: $\lambda^{**} < \lambda'$.

"Por supuesto esto no significa que en presencia de una inflación incierta "el precio de mercado del riesgo" aumente precisamente en proporción al término de covarianza, sino simplemente, que la fórmula del "precio de mercado del riesgo" tradicional subestima el verdadero valor, dado que realmente los valores nominales que aparecen en las dos fórmulas no son iguales" (54).

Cuando $cov(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I) < 0$ y se espera una inflación incierta, se da el caso contrario (55): $\lambda^{**} > \lambda'$.

Por lo que respecta a si el CAPM subestima o sobrestima el riesgo sistemático en relación con el CAPMUI, no se puede dar un resultado único a cada caso (como con el precio de mercado del riesgo), sino que depende de los valores (positivos, negativos o nulos) que tomen $cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)$ y $cov(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)$. En el siguiente cuadro se recogen todos los casos posibles (56):

$cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_M)$	$cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I)$	β_j y β'_j
	> 0	$\beta_j < \beta'_j$
$= 0$	$= 0$	$\beta_j = \beta'_j$
	< 0	$\beta_j > \beta'_j$
	> 0	?
> 0	$= 0$	$\beta_j > \beta'_j$
	< 0	$\beta_j > \beta'_j$
	> 0	$\beta_j < \beta'_j$
< 0	$= 0$	$\beta_j < \beta'_j$
	< 0	?

7.9. Precios de Equilibrio en el CAPMUI

La relación (7.47) nos proporciona la relación de equilibrio que se produce entre la rentabilidad y el riesgo en un entorno inflacionario. Ahora nos queda por hallar cuáles son los precios de equilibrio de los activos financieros en dicha situación.

Según vimos en el capítulo IV, el rendimiento de un título cualquiera y el rendimiento de la cartera de mercado se podrían expresar en función de sus respectivos precios de la siguiente manera:

$$\tilde{R}_j = \frac{\tilde{V}_{j2}}{V_{j1}} - 1 \qquad (7.56)$$

$$\tilde{R}_M = \frac{\tilde{V}_{M2}}{V_{M1}} - 1 \qquad (7.57)$$

Llevando (7.56) y (7.57) a la relación rentabilidad -riesgo del CAPMUI (7.47) y operando, se tiene:

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I)} \; \mathrm{cov}(\tilde{R}_j, \tilde{R}_M) - \mathrm{cov}(\tilde{R}_j, \tilde{R}_I)$$

$$E\left(\frac{\tilde{V}_{j2}}{V_{j1}} - 1\right) = R_f + \frac{E\left(\frac{\tilde{V}_{M2}}{V_{M1}} - 1\right) - R_f}{\sigma^2\left(\frac{\tilde{V}_{M2}}{V_{M1}} - 1\right) - \mathrm{cov}\left(\frac{\tilde{V}_{M2}}{V_{M1}} - 1, \tilde{R}_I\right)} \cdot \left[\mathrm{cov}\left(\frac{\tilde{V}_{j2}}{V_{j1}} - 1, \frac{\tilde{V}_{M2}}{V_{M1}} - 1\right) - \mathrm{cov}\left(\frac{\tilde{V}_{j2}}{V_{j1}} - 1, \tilde{R}_I\right)\right]$$

$$\frac{E(\tilde{V}_{j2})}{V_{j1}} = (1 + R_f) + \frac{\frac{E(\tilde{V}_{M2})}{V_{M1}} - 1 - R_f}{\frac{1}{V_{M1}^2}\, \sigma^2(\tilde{V}_{M2}) - \frac{1}{V_{M1}}\, \mathrm{cov}(\tilde{V}_{M2}, \tilde{R}_I)} \cdot \left[\frac{1}{V_{j1}V_{M1}}\, \mathrm{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{M2}) - \frac{1}{V_{j1}}\, \mathrm{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{R}_I)\right]$$

$$E(\tilde{V}_{j2}) = V_{j1}(1+R_f) + \frac{(E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1} - V_{M1}R_f)/V_{M1}}{(\sigma^2(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}\; \mathrm{cov}(\tilde{V}_{M2}, \tilde{R}_I))/V_{M1}^2} \cdot \left[(\mathrm{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{M2}) - V_{M1}\; \mathrm{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{R}_I))/V_{M1}\right]$$

$$V_{j1} = \frac{E(\tilde{V}_{j2}) - \frac{E(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}(1+R_f)}{\sigma^2(\tilde{V}_{M2}) - V_{M1}\; \mathrm{cov}(\tilde{V}_{M2}, \tilde{R}_I)} \cdot \left[\mathrm{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{V}_{M2}) - V_{M1}\; \mathrm{cov}(\tilde{V}_{j2}, \tilde{R}_I)\right]}{1 + R_f} \qquad j=1,2,\dots,n \quad (7.58)$$

Si en (7.58) sustituimos V_{M1} por su valor equivalente:

$$V_{M1} = \sum_{j=1}^{n} V_{j1} \qquad (7.59)$$

tendremos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas del que cabe esperar que tenga una solución única y determinada. Solución que nos dará los precios de equilibrio de todos los activos financieros arriesgados, en términos nominales, a principios del período 1.

7.10. Una posible explicación de las Discrepancias entre los Resultados Teóricos y Empíricos del CAPM

En el capítulo anterior vimos como en diferentes tests que se han hecho sobre el CAPM, principalmente los trabajos de Friend y Blume, por una parte, y de Black, Jensen y Scholes por otra parte (57), se observa un sesgo en los resultados empíricos encontrados con respecto a los previstos por la teoría. Así, las carteras de coeficiente beta alto están recompensadas por debajo de lo que la teoría predice, mientras que ocurre lo contrario en las carteras de coeficiente -

beta bajo:

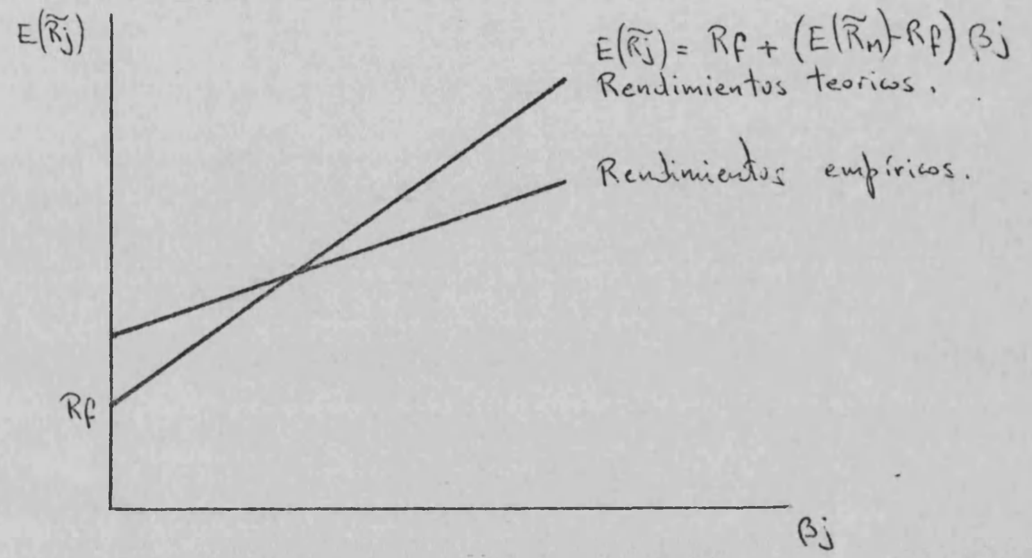


Figura 7.1

Dicho con otras palabras, la SML empírica tiene una pendiente menor y una intersección en el origen mayor que la SML teórica.

Tal como analizamos en el capítulo anterior, Black (58) pensaba que una posible explicación de esa discrepancia entre los resultados teóricos y empíricos, podía estar en que en la realidad no existía el activo libre de riesgo.

Nosotros ahora, siguiendo a E.Chen (59), vamos a dar otra posible explicación a dicha discrepancia. Interpretación que, desde el punto de vista teórico, pensamos que es más completa que la de Black.

Si trabajamos con rendimientos nominales en exceso sobre el rendimiento del activo libre de riesgo, tenemos que:

$$\tilde{R}'_j = \tilde{R}_j - R_f \tag{7.60}$$

$$\tilde{R}'_M = \tilde{R}_M - R_f \tag{7.61}$$

con lo cual, la SML del CAPM standard se puede expresar del siguiente modo:

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + (E(\tilde{R}_M) - R_f)\, \beta_j$$

$$E(\tilde{R}_j) - R_f = (E(\tilde{R}_M) - R_f)\, \beta_j$$

$$E(\tilde{R}'_j) = E(\tilde{R}'_M)\, \beta_j \qquad (7.62)$$

y la figura 7.1., en los nuevos ejes $(E(\tilde{R}'_j), \beta_j)$, queda como sigue:

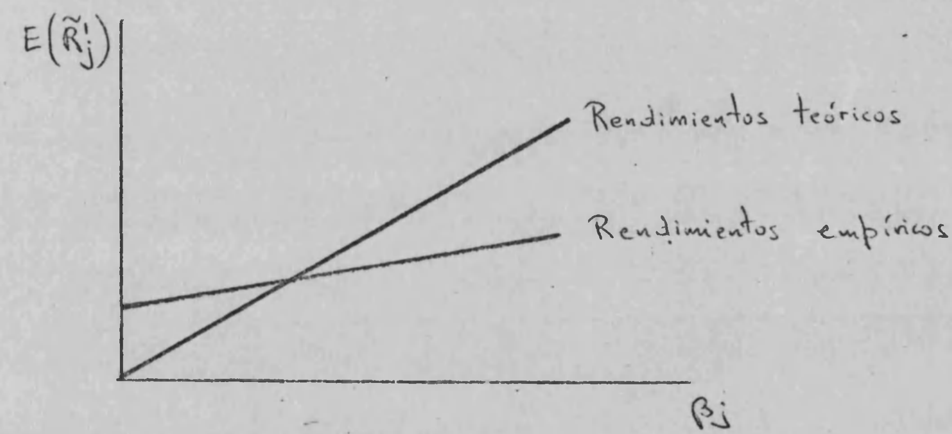


Figura 7.2

La relación de equilibrio entre la rentabilidad y el riesgo de un activo en el CAPMUI, según (7.47) es:

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M) - cov(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)} \cdot \left[cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) - cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)\right]$$

$$E(\tilde{R}_j) - R_f = (E(\tilde{R}_M) - R_f) \cdot \frac{cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) - cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)}{\sigma^2(\tilde{R}_M) - cov(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)}$$

$$E(\tilde{R}'_j) = E(\tilde{R}'_M) \cdot \beta'_j \qquad (7.63)$$

donde:

$$\beta'_j = \frac{cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) - cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)}{\sigma^2(R_M) - cov(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)} \qquad (7.64)$$

Si ahora dividimos el numerador y el denominador de β_j' por $\sigma^2(\tilde{R}_M)$, llevamos el valor resultante a (7.63) y tenemos presente la definición de β_j, se puede escribir que:

$$E(\tilde{R}_j') = E(\tilde{R}_M') \cdot \frac{(\operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M) - \operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I))/\sigma^2(\tilde{R}_M)}{(\sigma^2(\tilde{R}_M) - \operatorname{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I))/\sigma^2(\tilde{R}_M)}$$

$$E(\tilde{R}_j') = E(\tilde{R}_M') \cdot \frac{\beta_j - \operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M)}{1 - \operatorname{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M)}$$

$$E(\tilde{R}_j') = \frac{-E(\tilde{R}_M')}{1 - \operatorname{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M) +$$

$$+ \frac{E(\tilde{R}_M')}{1 - \operatorname{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \beta_j$$

$$E(\tilde{R}_j') = a + b\,\beta_j \qquad (7.65)$$

donde:

$$a = \frac{-E(\tilde{R}_M')}{1 - \operatorname{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M) \qquad (7.66)$$

$$b = \frac{E(\tilde{R}_M')}{1 - \operatorname{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M)} \qquad (7.67)$$

La expresión (7.65) demuestra que en presencia de una inflación incierta, la SML del modelo CAPM standard (7.62) ya no es la relación correcta entre $E(\tilde{R}_j')$ y β_j, sino que dicha relación viene dada por (7.65) que tiene una pendiente "b" en vez de $E(\tilde{R}_M')$ y una ordenada en el origen "a" en vez de ser nula. De modo que si las siguientes condiciones se cumplen, - entonces ya se puede dar una explicación teórica a la discrepancia entre los resultados de los tests empíricos y aquéllos previstos por la teoría:

1) Primera condición, referente a la pendiente:

$$\frac{E(\tilde{R}'_M)}{1 - cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M)} < E(R'_M)$$

Para que esta condición se cumpla basta con que $cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I) < 0$ es decir, que exista una correlación negativa entre el rendimiento de la cartera de mercado, y la tasa de inflación incierta, lo cual está confirmado por bastantes estudios recientes tal como acabamos de ver en el segundo epígrafe de este capítulo.

2) Segunda condición, referente a la ordenada en el origen:

$$\left[\frac{-E(\tilde{R}'_M)}{1 - cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_I)/\sigma^2(\tilde{R}_M)\right] > 0$$

Para que esta condición se verifique es necesario que $cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_I) < 0$ y que $cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_I) < 0$, lo cual también está apoyado por los mismos estudios empíricos que acabamos de hacer referencia y que citamos en la nota a pie de página 12 del presente capítulo.

En resumen, en este capítulo hemos tratado la relajación del supuesto del CAPM referente a la no existencia de cambios en el nivel de precios y hemos visto que el abandono de tal supuesto modifica las conclusiones del CAPM sobre la relación de equilibrio rentabilidad-riesgo que, aunque sigue siendo lineal, en un entorno inflacionario tiene una ordenada en el origen y una pendiente distinta, lo cual puede que sea la explicación de la discrepancia que se produce entre los resultados teóricos previstos por el CAPM y los resultados empíricos encontrados en distintos tests sobre el mismo (60).

NOTAS DEL CAPITULO VII

(1) SUAREZ SUAREZ, A.B.: "Decisiones Optimas de Inversión y Financiación en la Empresa". Ediciones Pirámide. Madrid 1980, p.107.

(2) FERNANDEZ BLANCO, M.: "La Inflación y la Teoría Analítica de la Financiación". Cuadernos de Economía, vol. 7, nº 18 enero-abril 1979, p. 51-86, p. 52.

(3) SHARPE, W.F.: "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk". Journal of Finance vol 19, nº 3, septiembre 1964, p. 425-442.
LINTNER, J.: "Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification". Journal of Finance, vol. 20, nº 4, diciembre 1965, p. 587-615.
MOSSIN, J.: "Equilibrium in a Capital Asset Market". Econométrica, vol. 34, nº 4, octubre 1966, p. 768-783.

(4) LINTNER, J.: "The Aggregation of Investor's Diverse Judgements and Preferences in a Purely Competitive Security Markets". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 4, diciembre 1969, p. 347-400.
ROLL, R.: "Assets, Money and Commodity Price Inflation under Uncertainty". Journal of Money, Credit and Banking, noviembre 1973.
GAVIRIA, N.G.: "Inflation and Capital Asset Prices, Theory and Tests". Tesis Doctoral. Stanford University, 1973.

(5) CHEN, A.H. y BONESS, A.J.: "Effects of Uncertain Inflation on the Investment and Financing Decisions of a Firm". Journal

of Finance, vol. 30, nº 2, mayo 1975, p. 469-483.

FRIEND, I., LANDSKRONER, Y. y LOSQ, E.: "The Demand for Risky Assets under Uncertain Inflation". Journal of Finance, vol. 31, nº 5, diciembre 1976, p. 1287-1297.

(6) FISHER, I.: "The Theory of Interest". New York, 1930.

(7) La hipótesis deudor-acreedor neto surge de la combinación de las teorías de Fisher y Keynes y mantiene que, en presencia de una inflación no prevista, las empresas que tienen una posición monetaria neta (diferencia entre el valor nominal de sus activos monetarios y sus pasivos monetarios) deudora ganan a costa de las empresas que mantienen una posición monetaria neta acreedora. Para un estudio más profundo sobre el soporte teórico de la hipótesis deudor-acreedor neto ver:

BRADFORD, W.D.: "Inflation and the Value of the Firm: Monetary and Depreciation Effects". Southern Economic Journal, vol. 40, nº 3, enero 1974, p. 414-427.

(8) KESSEL, R.A.: "Inflation-Induced Wealth Redistribution: A test of a Hypothesis". American Economic Review, vol. 46, marzo 1956, p. 128-141.

ALCHIAN, A.A. y KESSEL, R.A.: "Redistribution of Wealth through Inflation". Science, nº 130, septiembre 1959, p. 535-539.

BACH, G.L. y STEPHENSON, J.B.: "Inflation and the Redistribution of wealth". Review of Economic and Statistics, febrero 1974, p. 1-13.

(9) DE ALESSI, L.: "The Redistribution of Wealth by Inflation:

An Empirical Test with United Kingdom Data". Southern Economic Journal, vol. 30, octubre 1963, p. 113-127.

(10) También hay tests en contra de la hipótesis deudor-acreedor neto, como por ejemplo:
BRADFORD, W.D., op. cit.
HONG, H.: "Inflation and the Market Value of the Firm: Theory and Tests". Journal of Finance, vol. 32, nº 4, septiembre 1977, p. 1031-1048.

(11) LINTNER, J.: "Inflation and Security Returns". Journal of Finance, vol. 30, nº 2, mayo 1975, p. 274.

(12) OUDET, B.A.: "The Variation of the Return on Stocks in Periods of Inflation". Journal of Financial and Quantitative Analysis. Marzo, 1973, p. 247-258.
BODIE, Z.: "Common Stocks as a Hedge against Inflation". Journal of Finance, vol. 31, nº 2, mayo 1976, p. 459-470.
JAFFEE, J.E. y MANDELKER, G.: "The Fisher Effect for Risky assets: An Empirical Investigation". Journal of Finance, vol. 31, nº 2, mayo 1976, p. 447-458.
NELSON, CH. R.: "Inflation and Rates of Return on Common Stocks". Journal of Finance, vol. 31, nº 2, mayo 1976, p. 471-483.
FAMA, E.F. y SCHWERT, G.W.: "Asset Returns and Inflation". Journal of Financial Economics, vol. 5, nº 2, noviembre 1977, p. 115-146.

(13) FELDSTEIN, M.: "Inflation and the Stock Market". American Economic Review, vol. 70, nº 5, diciembre 1980, p. 839-846 p. 839.

(14) HONG, H., op. cit., p. 1044.

(15) JOHNSON, G.L., REILLY, F.K. y SMITH, R.E.: "Individual Common Stocks as Inflation Hedges". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 6, junio 1971, p. 1015-1024.
OUDET, B.A., op. cit.

(16) FRIEDMAN, B.M.: "Price Inflation, Portfolio Choice and Nominal Interest Rates". American Economic Review, vol. 70, nº 1, marzo 1980, p. 32-48, p. 47.

(17) FAMA, E.F. y SCHWERT, G.W.: "Inflation, Interest and Relative Prices". Journal of Business, vol. 52, nº 2, abril 1979, p. 183-209, p. 208.

(18) FELDSTEIN, M., op. cit., p. 840.

(19) FAMA, E.D. y SCHWERT, G.W. (1977), op. cit., p. 144.

(20) LINTNER, J. (1969), op. cit.
ROLL, R., op. cit.
GAVIRIA, N.G., op. cit.

(21) CHEN, A.H., y BONESS, A.J., op. cit., p. 472.

(22) SOLNIK, B.H.: "Inflation and Optimal Portfolio Choices". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, nº 5, diciembre 1978, p. 903-925.

(23) CHEN, A.H., y BONESS, A.J., op. cit.

(24) FRIEND, I., LANDSKRONER, Y. y LOSQ, E., op. cit.

(25) Nosotros hemos trabajado a lo largo de los capítulos anteriores con una versión en tiempo discreto del CAPM. De todos modos, cabe recordar que Merton y Samuelson han demostrado que las versiones en tiempo discreto y en tiempo continuo del CAPM son equivalentes:

MERTON, R.C.: "Optimun Consumption and Portfolio Rules in a Continuos Time Model". Journal of Economic Theory, diciembre 1971.

ROSS, S.A.: "Uncertainty and the Heterogeneous Capital Good Model". Review of Economic Studies, enero 1975.

MERTON, R.C. y SAMUELSON, P.A.: "Fallacy of the Long-Normal Approximation to Optimal Portfolio Decision Making under Uncertainty". Journal of Financial Economics, mayo 1974.

(26) PYUN, C.S.: "A Note on Capital Asset Pricing Model under Uncertain Inflation". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 15, nº 2, junio 1980, p. 425-434, p.426.

(27) SOLNIK, B.H., op. cit.

(28) SCHNELLER, M.I.: "The CAPM in face of Price-Level Changes" En "Inflation and Capital Markets", editado por Sarnat, M. Cambridge, Estados Unidos, 1978, p. 139-146.

(29) SOLNIK, B.H., op. cit., p. 903.

(30) SOLNIK, B.H., op. cit., p. 920.

(31) CHEN, E.: "Uncertain Inflation and Capital Asset Prices". Southern Economic Journal, vol. 46, nº 3, enero 1980, p. 763-776.

(32) A idéntico resultado se llega partiendo de (7,7) y efectuando un desarrollo de Taylor del término $1/1+\tilde{R}_I$:

$$1+\tilde{r}_j = \frac{1+\tilde{R}_j}{1+\tilde{R}_I} = (1+\tilde{R}_j)\cdot\left[1-\tilde{R}_I+\tilde{R}_I^2-\tilde{R}_I^3+\ldots\right]$$

$$1+\tilde{r}_j = 1+\tilde{R}_j-\tilde{R}_I-\tilde{R}_j\tilde{R}_I$$

y despreciando a partir del tercer elemento del segundo término; luego de operar queda:

$$\tilde{R}_j = \tilde{r}_j + \tilde{R}_I$$

(33) El activo libre de riesgo en términos nominales es obvio que si tiene riesgo en términos reales, debido a la existencia de la inflación y, por tanto, se convierte en un activo arriesgado más a añadir a los n activos arriesgados tomados en principio en consideración.

(34) FISHER, I.: "Appreciation and Interest". Mac Millan. New York, 1896.

Por supuesto, Fisher trabaja en universos deterministas y, por tanto, el operador esperanza matemática no aparece en su formulación.

(35) SCHNELLER, M.I., op. cit., p. 144.

(36) Los símbolos que utilizamos sin estar definidos explícitamente en este capítulo, hacen referencia a notaciones usadas en capítulos anteriores, por lo que no repetiremos aquí su definición.

(37) $h_{i,n+1}$ fue definida con anterioridad como la cantidad en pesetas resultante de la diferencia entre lo que un inversor pide prestado y lo que presta. En el caso de que lo

que presta supere a lo que pide prestado, $h_{i,n+1}$ tendrá signo negativo y como en (7.12) $h_{i,n+1}$ está afectada de un signo menos, resultará ser en definitiva una cantidad positiva, tal como era de esperar.

(38) Observando (7.19) vemos como $cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)$ no tiene subíndice i. Es decir, que las previsiones de los inversores sobre la covarianza de los valores $\tilde{R}_j,\tilde{R}_I$ suponemos que son homogéneas. Según Solnik, ésto no se cumple en la realidad. La inflación no esperada $\tilde{R}_I$ por los diferentes inversores es distinta, ya que éstos, al tener diferentes gustos, tienen también diferentes cestas de la compra, con lo cual no todos sufrirán los efectos del alza en el nivel de precios de los bienes de consumo con la misma amplitud e intensidad.

SOLNIK, B.H., op. cit., p. 906.

(39) Al derivar L_i con respecto a h_{ij}, hay que tener presente la regla para derivar una función de función:

$$\frac{\partial L_i}{\partial h_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial e_i} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial h_{ij}} + \frac{\partial U_i}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial h_{ij}} - k = 0$$

(40) Al operar, debemos recordar que $\partial U_i / \partial v_i < 0$.

(41) Conviene recordar que la covarianza entre una variable aleatoria y una constante es nula, por lo que en el caso de que la inflación no fuese incierta, sino que se conociera con total certeza que va a alcanzar tal cota positiva, los términos $cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)$ serían todos nulos y el problema se reduciría al caso standard del CAPM.

(42) (7.31) es una expresión similar a la (3.81) del capítulo III, pero recordemos que el vector columna X del capítulo III representaba las proporciones invertidas en los distintos activos arriesgados y no las cantidades en pesetas invertidas en los mismos que refleja H.

(43) La expresión (7.34) es idéntica a la expresión (3.87) del capítulo III, tal como era lógico esperar.

(44) TOBIN, J.: "Liquidity Preference as Behavior towards Risk" Review of Economic Studies, vol. 25, febrero 1958, p.65-86.

(45) CHEN, E., op. cit., p. 767-768, demuestra que en el caso de que exista un activo libre de riesgo de inflación, la cartera de un inversor particular estaría compuesta por una combinación lineal de la cartera de mercado, el activo libre de riesgo de inflación y el activo libre de riesgo en términos nominales, cumpliéndose entonces el teorema de la separación generalizado a tres fondos.

Como nosotros, a lo largo de este capítulo, no vamos a suponer que el activo libre de riesgo de inflación existe (por no ser necesario para los fines que perseguimos) no hemos incluido en el texto dicha versión del teorema de la separación generalizado.

(46) Debe tenerse en cuenta que $\partial U_i / \partial v_i < 0$.

(47) Antes de efectuar la agregación, hemos multiplicado y dividido por V_{M1} el primer término del numerador tanto en el primero como en el segundo miembro de la ecuación (7.39).

(48) $$V_{M1} \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} \frac{h_{ik}}{V_{M1}} \operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_k) = V_{M1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} \frac{h_{ik}}{V_{M1}} \operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_k) =$$

$$= V_{M1} \sum_{k=1}^{n} \frac{V_{k1}}{V_{M1}} \operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_k) = V_{M1} \sum_{k=1}^{n} X_{Mk} \operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_k) =$$

$$= V_{M1} \operatorname{cov}(\tilde{R}_j,\tilde{R}_M).$$

(49) $$\sum_{l=1}^{n} X_{Ml} \operatorname{cov}(\tilde{R}_l,\tilde{R}_M) = \operatorname{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_M) = \sigma^2(\tilde{R}_M)$$

$$\sum_{l=1}^{n} X_{Ml} \operatorname{cov}(\tilde{R}_l,\tilde{R}_I) = \operatorname{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)$$

$$\sum_{l=1}^{n} X_{Ml} \left[E(\tilde{R}_l) - R_f\right] = \sum_{l=1}^{n} X_{Ml} E(\tilde{R}_l) - R_f \sum_{l=1}^{n} X_{Ml} = E(\tilde{R}_M) - R_f.$$

(50) Para demostrar que (7.47) es válida para todo tipo de carteras de valores, eficiente o no, no hay más que multiplicar ambos miembros de (7.47) por x_{pj} (que representa las proporciones en que intervienen los distintos títulos en la cartera p) y luego efectuar un sumario en ambos miembros para todo j, desde 1 hasta n, con lo cual tendríamos:

$$E(\tilde{R}_p) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M) - \operatorname{cov}(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)} \left[\operatorname{cov}(\tilde{R}_p,\tilde{R}_M) - \operatorname{cov}(\tilde{R}_p,\tilde{R}_I)\right]$$

(51) Según Solnik, unicamente en el caso en que los consumidores tengan los mismos gustos y, por tanto, tengan idéntica cesta de la compra, con lo cual la inflación entonces les afectará por igual, solamente en ese caso la cartera de mercado será eficiente en términos reales.
SOLNIK, B.H., op. cit., p. 914.

(52) En el epígrafe segundo de este capítulo ya vimos que existía una evidencia empírica bastante fuerte sobre la relación negativa entre los rendimientos de los títulos y la tasa de inflación.

(53) En la relación rentabilidad riesgo del CAPMUI de Friend, Landskroner y Losq, así como en la deducida en este capítulo (que se basa en el trabajo de E. Chen) no aparece de forma explícita el valor que tomará la inflación o deflación esperada: $E(\tilde{R}_I)$. Por lo que únicamente hay que tener en cuenta el signo de $cov(\tilde{R}_j,\tilde{R}_I)$ y de $cov(\tilde{R}_M,\tilde{R}_I)$ en el momento de ver el valor que alcanzarán los rendimientos esperados de los títulos. Siempre que el signo de estas covarianzas no se modifique al pasar de una situación inflacionista a otra deflacionaria, o viceversa, ceterís paribus, los rendimientos esperados de los títulos con y sin inflación serán los mismos.

Sin embargo, en el modelo de Chen y Boness, sí que aparece explícitamente el término $E(\tilde{R}_I)$ en la relación de equilibrio entre la rentabilidad y el riesgo en un mundo en el que se supone se producen cambios en el nivel de precios.

(54) FERNANDEZ BLANCO, M., op. cit., p.80-81.

(55) A idénticos resultados llegan Friend, Landskroner y Losq Hay que destacar que la principal diferencia entre el trabajo de estos autores y el de Chen y Boness está precisamente en las conclusiones respecto al precio del mercado del riesgo, por lo que los resultados de E. Chen sobre este tema también están en contraposición con los resultados de Chen y Boness.
FRIEND, I., LANDSKRONER, Y. y LOSQ, E., op. cit., p. 1294

(56) CHEN, E., op. cit., p. 771.

(57) FRIEND, I., y BLUME, M.: "Measurement of Portfolio Performance under Uncertainty". American Economic Review, vol. 60, septiembre 1970.
BLACK, F., JENSEN, M.C. y SCHOLES, M.: "The Capital Asset Pricing Model:Some Empirical Tests". En "Studies in the Theory of Capital Markets", Editado por Jensen, M.C., Praeger Publishing Co., Nueva York, 1972.

(58) BLACK, F.: "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing". Journal of Business, vol. 45, nº 3, julio 1972, p. 444-455.

(59) Mirar la nota a pie de página (12) donde se da una relación de esos tests empíricos que prueban la relación negativa entre el rendimiento de los títulos y la tasa de inflación.

(60) "Estos análisis muestran claramente que nuestro modelo modificado proporciona una vía potencial de explicación de las discrepancias entre los resultados encontrados por Black, Jensen y Scholes y aquéllos previstos por el modelo de la SML".
CHEN, E., op. cit., p. 773.

CAPITULO VIII

LA PERFORMANCE DE LAS CARTERAS DE VALORES Y DE LOS TITULOS

8.1. Introducción. Concepto de Performance

A lo largo de los capítulos anteriores hemos desarrollado el modelo CAPM en su versión standard y, posteriormente, hemos abandonado algunos de sus supuestos más restrictivos e irreales, con el fin de estudiar entonces la naturaleza de la relación entre la rentabilidad y el riesgo de activos arriesgados en el nuevo contexto resultante.

En este capítulo, analizamos una de las aplicaciones concretas del modelo CAPM standard: la relativa a la medida de la performance y el problema de la comparación de títulos y carteras. Se trata de elaborar un índice que permita medir a posteriori los resultados de la gestión de una cartera de valores mobiliarios.

"Performance" es una palabra inglesa que se utiliza para designar un concepto difícil de expresar mediante una sóla palabra en castellano. La traducción literal es "resultado" o "rendimiento" y, aunque en ocasiones así aparece traducida, lo cierto es que la mayoría de las veces se ha preferido no hacerlo porque induce a error, y se mantiene el anglicismo hablando de la performance de las carteras de valores o de los títulos (1). De hecho, los autores norteamericanos o ingleses no se refieren sólo al rendimiento ex-post de las carteras de valores cuando utilizan la palabra performance, sino también al riesgo, o mejor aún a la combinación rendimiento-riesgo del activo considerado.(2).

Por lo tanto, tal como apunta Treynor (3), el rendimiento realizado durante un período de tiempo no es una buena medida de la performance de las carteras de valores. En los fondos de inversión, se han hecho análisis sobre el curso seguido por el rendimiento conseguido por un mismo fondo a lo largo de varios períodos y se han observado amplias oscilaciones de un período a otro y, sin embargo, el fondo en cuestión no había cambiado, de forma sustancial, su política de inversiones. En consecuencia, el rendimiento realizado no sirve, por sí sólo, para efectuar comparaciones intertemporales de un mismo fondo, ni tampoco para hacer comparaciones interfondos.

La idea fundamental, basada en los resultados del modelo CAPM ya estudiado, es que un individuo que invierte en valores mobiliarios sólo puede obtener una rentabilidad superior a la que espera conseguir otro individuo con una cartera distinta, en la medida que el primer inversor acepte correr un riesgo mayor. "No se puede comparar la rentabilidad... de dos carteras más que si el número que mide su riesgo es el mismo" (4).

Sabemos que en el supuesto de que los rendimientos de los títulos sean normales o que la función de utilidad del individuo sea cuadrática, un inversor con aversión al riesgo únicamente tendrá en cuenta los dos primeros momentos de la función de distribución: la media, como medida de la rentabilidad, y la desviación típica o varianza, como medida del riesgo.

La rentabilidad y el riesgo con que trabajamos en los capítulos anteriores eran conceptos ex-ante, es decir previsiones o anticipaciones. Estas previsiones pueden estar basadas en datos pasados, en tanto y cuanto se piense que el futuro va a ser una extrapolación del pasado, pero también pueden basarse en juicios subjetivos, en las opiniones de los expertos en temas financieros, etc. En cualquier caso, lo que interesa resaltar es que para medir la performance de las carteras, nosotros vamos a partir de la información proporcionada por las series históricas de los rendimientos de los títulos, es decir, que será una performance ex-post, que puede diferir mucho de la performance ex-ante (5).

Para diferenciar entre datos ex-ante y datos ex-post en lugar del rendimiento esperado y la desviación típica, utilizaremos tal como lo hace Sharpe (6), el rendimiento medio y la variabilidad. Si ahora situamos una cartera cualquiera q sobre los ejes rendimiento medio ($\bar{R}_p$) y variabilidad (V_p):

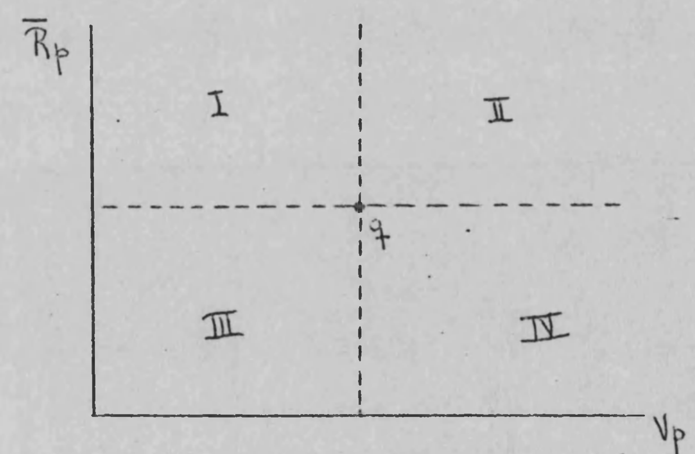


Figura 8.1.

y hacemos pasar una recta vertical y otra horizontal por el punto representado por dicha cartera, la Figura 8.1 queda dividida en cuatro partes: I, II, III, IV. Si tomamos una cartera representada por un punto dentro de la zona I, y la comparamos con la cartera q, podemos asegurar que dicha cartera tiene una performance superior a la de la cartera q, ya que ha obtenido una rentabilidad superior con un riesgo menor. Por el contrario, las carteras situadas en la zona IV tendrán una performance menor que la cartera q, desde el momento en que toda cartera situada en la zona IV tiene una rentabilidad menor y un riesgo mayor que la cartera q.

Pero las carteras situadas en la zona II y III dan lugar a comparaciones cuyo resultado no es inmediato. Por ejemplo, las carteras ubicadas en la zona II tienen un rendimiento superior a la cartera q, pero también es cierto que su riesgo es mayor. La situación se invierte en las carteras de la zona III. Por lo tanto, no basta con el conocimiento del rendimiento medio y la variabilidad de las carteras para poderlas comparar.

Para resolver los casos dudosos que se producen en las zonas II y III de la Figura 8.1., Sharpe, Treynor y Jensen (7) han propuesto unos índices donde se resume en un único número la rentabilidad y el riesgo de un título. Así, se pueden ordenar las carteras ubicadas en dichas zonas según sus respectivos índices, lo que permite efectuar comparaciones entre la performance de dos o más carteras.

Antes de entrar en el estudio de los índices de performance que acabamos de apuntar, conviene señalar que se puede comparar la performance de las carteras gestionadas por -

las diferentes sociedades de cartera o los fondos de inversión con la performance de una cartera no gestionada tal como la cartera de mercado. Estas comparaciones entre la performance de los distintos fondos tiene una doble utilidad. Por una parte, permiten analizar si un fondo está bien gestionado, cosa que le interesa al inversor individual que participa en el mismo. Pero además, permiten comprobar si el mercado de capitales es eficiente, ya que efectivamente este tipo de estudios constituye un test en la forma fuerte de la eficiencia del mercado de capitales (8).

Estas sociedades de cartera o fondos de inversión son los que disponen de mejores informaciones y, en consecuencia, están mejor situados para obtener mejores resultados y "batir" (9) al mercado o a un inversor individual que siga una simple política de compra al azar y retención. Pero si de los tests que se hagan, se llega a deducir que estos intermediarios financieros no son capaces en su conjunto de obtener una performance superior a la performance de la cartera de mercado, de una forma continua y sistemática a lo largo del tiempo, se puede entonces decir que el mercado de capitales es eficiente en su forma fuerte (10).

Por último, antes de pasar al epígrafe siguiente de este capítulo, vamos a hablar brevemente de la política de inversión de los fondos de inversión.

En general, los fondos de inversión cuando analizan un título se fijan en la evolución histórica de su cotización (Análisis Técnico) y aplican, normalmente, métodos que capita lizan las futuras corrientes de dividendos con el fin de calcular su valor teórico (11) y compararlo con su valor real en Bolsa (Análisis Fundamental).

Los fondos de inversión no suelen hacer uso de los hallazgos de la moderna Teoría del Mercado de Capitales (12), cuando buscan títulos infravalorados o estudian el binomio rentabilidad-riesgo de los distintos títulos y carteras de valores (13).

No vamos a tratar aquí el Análisis Técnico y el Análisis Fundamental, puesto que ello desborda los límites y fines de este trabajo (14). Unicamente haremos referencia a la diversificación superflua en que incurren a veces los fondos de inversión.

Así, en ocasiones por imperativo legal y otras veces por esa ingenua creencia de que la diversificación cuanto mayor sea es mejor, se produce el hecho de que las carteras gestionadas por los fondos de inversión están compuestas por un excesivo número de títulos, lo cual, en opinión de Francis y Archer (15), provoca al menos tres tipos de insuficiencia:

1) La experiencia muestra que las carteras eficientes de Markowitz, sin apalancamiento y sin restricciones en cuanto al número de títulos que pueden formar parte de las mismas, normalmente no pasan de 20 títulos. Además, las carteras con más bajo riesgo suelen estar compuestas por unos pocos títulos con un nivel de correlación bajo o negativo.

2) Una cartera integrada por más de cien títulos, -

como suelen ser común en muchos fondos de inversión, provoca la necesidad de tener una información periódica y puntual de los mismos, con el fin de poder revisar los títulos que deben formar parte de la cartera. Todo lo cual conlleva unos costes administrativos excesivamente elevados.

3) En los mercados de valores amplios y altamente eficientes, como la Bolsa de Nueva York, suelen ser muy pocos los títulos infravalorados, por lo que una cartera compuesta por cien o más títulos, necesariamente estará integrada por una serie de títulos de poca calidad.

De todos modos, es justo reconocer el servicio que prestan los fondos de inversión al pequeño inversionista, ya que le ofrece unas posibilidades de diversificación y unos servicios de gestión que el pequeño inversionista difícilmente alcanzaría por su cuenta.

8.2. El Indice de Sharpe.

El índice de Sharpe está basado en la CML (Línea del Mercado de Capitales) vista en el epígrafe 3 del capítulo IV. Conviene recordar que la pendiente de la CML es el precio que un inversor debe pagar por la reducción del riesgo en una cartera eficiente y según la expresión (4.3) toma el valor siguiente:

$$\lambda^* = \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma(\tilde{R}_M)} \tag{8.1}$$

Todos los valores que intervienen en (8.1) son predicciones, a excepción de R_f que se supone conocido con total certeza. Pero ahora intentamos medir la performance ex-post de las carteras, por lo que la expresión para la cartera de mercado, en base a datos históricos, será:

$$S_M = \frac{\bar{R}_M - R_f}{V_M} \tag{8.2}$$

donde:

S_M : es el índice de Sharpe de la cartera de mercado.

$\bar{R}_M$: es el rendimiento medio de la cartera de mercado según los datos históricos.

V_M : es la variabilidad (o desviación típica del tipo de rendimiento realizado) de la cartera de mercado.

R_f : es la tasa pura de interés real que en un período de estudio concreto puede sufrir variaciones, por lo que en ocasiones R_f será el valor medio que tome la tasa pura de interés en el período de que se trate.

Y en general, la performance de una cartera cualquiera p se puede resumir, según Sharpe (16), utilizando una relación premio a variabilidad (o ratio premio/variabilidad) tal como:

$$S_p = \frac{\bar{R}_p - R_f}{V_p} \tag{8.3}$$

Para comparar la bondad de las carteras vamos a seguir un ejemplo gráfico, analizando con él esta medida de la performance. Sean i y j dos carteras de valores tales como las indicadas por los puntos i y j en la Figura 8.2. Y sea R_f la tasa pura de interés del activo libre de riesgo.

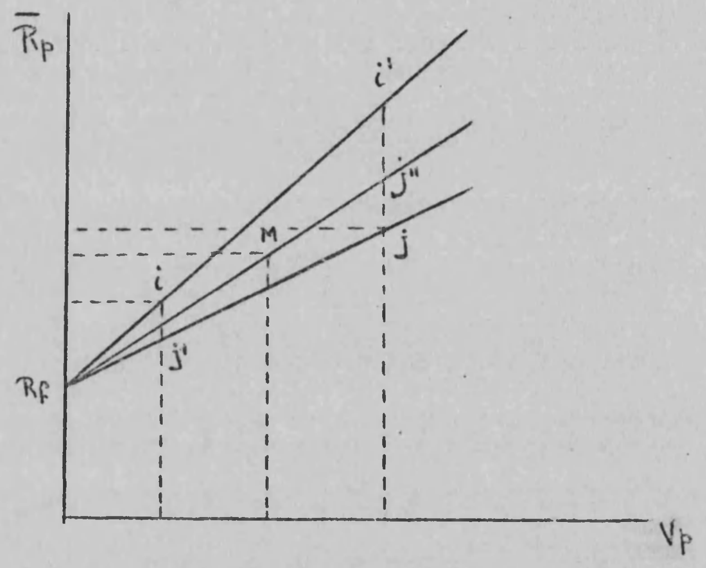


Figura 8.2.

Desde el punto de vista de la rentabilidad, la cartera j ha sido mejor, pues ha ofrecido un mayor rendimiento medio realizado. Sin embargo, desde el punto de vista del riesgo, la cartera j ha sido peor que la cartera i, ya que al tener una mayor variabilidad, ha resultado ser una cartera más arriesgada. Es decir, que nos volvemos a tropezar con los casos dudosos de las zonas II y III de la Figura 8.1.

No obstante, si hacemos el supuesto de que existe un activo libre de riesgo a cuya tasa de interés (R_f) se puede prestar y pedir prestado en cantidades ilimitadas, entonces estamos en condiciones de poder decir más cosas y, en concreto, de responder a la pregunta de qué cartera es mejor.

Así, formando carteras que estén compuestas por distintas proporciones del activo libre de riesgo (con pesos positivos o negativos) y la cartera i (con un peso o ponderación positiva) podemos alcanzar cualquier punto de la recta R_f i i'. Asimismo, combinando la petición de créditos o préstamos del activo libre de riesgo con una inversión en la cartera j (con un peso positivo), se puede alcanzar cualquier punto de la línea R_f j'j y, en concreto, se puede alcanzar el punto j', donde la cartera i tiene una performance superior a la de la cartera j', ya que para un mismo riesgo, la cartera i ha realizado un rendimiento superior al de la cartera j'.

Pero en general, desde el momento en que la recta $R_f$ii' está siempre encima de la recta R_fj'j, podemos decir que la performance de toda cartera situada en $R_f$ii' es superior a la performance de cualquier otra cartera situada en R_fj'j.

Por lo tanto, la medida de la performance de Sharpe es igual a la pendientte de la línea recta que pasa por R_f y por el punto que representa dicha cartera en los ejes $(\overline{R}_p, V_p)$ Esa pendiente es el ratio premio/variabilidad y cuanto mayor sea la pendiente o ratio, mayor será la performance de la cartera en cuestión.

En la medida que R_f es un tipo mínimo de rentabilidad que se puede conseguir con total certeza invirtiendo en el activo libre de riesgo, el ratio premio/variabilidad indica la prima que el mercado ha pagado por término medio por unidad de riesgo total.

Como indicamos en el primer epígrafe de este capítulo, muchas veces se compara la performance de las carteras de los fondos de inversión y sociedades de cartera con la performance de la cartera de mercado. Supongamos que las carteras i y j de la Figura 8.2. se corresponden con las carteras gestionadas por dos fondos de inversión. Los índices de Sharpe de las tres carteras son respectivamente:

$$S_i = \frac{\overline{R_i} - R_f}{V_i} > S_M = \frac{\overline{R_M} - R_f}{V_M} > S_j = \frac{\overline{R_j} - R_f}{V_j} \qquad (8.4)$$

De lo cual se deduce que el fondo de inversión que gestiona la cartera i ha batido al mercado, mientras que el fondo de inversión que gestiona la cartera j ha sido batido por el mercado. Un inversor que tenga participaciones en el fondo j debería poner en duda la gestión realizada por los especialistas de su fondo, ya que él mismo, sin ayuda de ningún estudio previo, podría haber obtenido, para el mismo tipo de riesgo de su fondo: V_j, una rentabilidad superior tal como la indicada por el punto j", sin más que combinar adecuadamente la petición de créditos o préstamos del activo libre de riesgo con una inversión a largo en la cartera de mercado.

8.3. El Indice de Treynor

El índice de Treynor, al igual que el índice de Sharpe, es una medida de la performance ex-post de una cartera, es decir, que mide la remuneración por encima de la tasa pura de interés con que premia el mercado el riesgo que corre un inversor. Pero mientras Sharpe considera el riesgo total soportado por el individuo (la variabilidad de la cartera), Treynor toma como medida adecuada del riesgo de una cartera su volatilidad.

La volatilidad de una cartera, β_p, se define por la pendiente de la recta de regresión que relaciona los rendimientos realizados por la cartera p con los rendimientos realizados por la cartera de mercado a lo largo de un período de estudio. A esta recta, Treynor (17) la llama "recta característica". Es decir, que la volatilidad de una cartera se corresponde con el coeficiente beta de dicha cartera, que en las carteras bien diversificadas es una medida adecuada del riesgo total, y la recta característica es equivalente al modelo de mercado Sharpe. Por lo tanto, aunque en este epígrafe vamos a hablar de volatilidad y recta característica de un título, nosotros con el fin de homogenizar la nomenclatura vamos a seguir usando el modelo de mercado del capítulo V con los símbolos allí definidos.

$$\widetilde{R}_p = \alpha_p + \beta_p \widetilde{R}_M + \widetilde{\varepsilon}_p \qquad (8.5)$$

Teniendo en cuenta los símbolos utilizados para referirnos a los datos ex-post y diferenciarlos de las previ -

siones ex-ante y recordando los supuestos en que se basaba el modelo de mercado, tomando medias y varianzas en (8.5) nos queda:

$$\overline{R}_p = \alpha_p + \beta_p \overline{R}_M \qquad (8.6)$$

$$V_p^2 = \beta_p^2 V_M^2 + V_\varepsilon^2 \qquad (8.7)$$

Ya apuntamos antes, al hablar del concepto de performance, que Treynor había observado grandes oscilaciones en las series históricas de los rendimientos realizados por un mismo fondo de inversión. Sin embargo, si se relaciona, para un período dado, los rendimientos obtenidos por un fondo con los rendimientos de la cartera de mercado, la línea característica que se ajusta a la nube de puntos, en el estudio de Treynor, es altamente significativa, ya que en 4 de cada 5 casos, de los 54 Fondos Mutuos americanos estudiados por Treynor, sus líneas características tenían coeficientes de correlación igual o superior al 90%. Por otra parte, a lo largo del período de estudio abordado por Treynor (1954-63), aproximadamente el 80% de los fondos de inversión, por él estudiados, mantuvieron una postura constante con respecto al riesgo sistemático, aunque de unos fondos a otros la volatilidad fluctuaba ampliamente desde aproximadamente 1/3 hasta casi 2.

Volviendo al índice de Treynor, antes ya hemos apuntado que es similar al de Sharpe, sólo que en vez de considerar el riesgo total, únicamente tiene en cuenta el riesgo sistemático. Es decir, que el índice de Treynor mide la prima que el mercado ha pagado por término medio por cada unidad de volatilidad de la cartera o título individual:

$$T_p = \frac{\overline{R}_p - R_f}{\beta_p} \tag{8.8}$$

Aunque Treynor no da un nombre específico a su medida de la performance, Sharpe (18) propone llamarla relación premio a volatilidad (o ratio premio/volatilidad).

Treynor parte de la SML (o Línea del Mercado de los Activos Financieros) para definir su índice de performance. Así observa que el mercado únicamente recompensa el riesgo sistemático que se corre con la posesión de un título o cartera de valores, por lo que la variabilidad o riesgo total de una cartera de valores no es una medida apropiada del riesgo, puesto que un individuo siempre puede reducir el riesgo total, representado por la variabilidad, mediante la diversificación y de esta manera únicamente soporta el riesgo sistemático o no diversificable.

Por tanto, la prima de riesgo: $\overline{R}_p - R_f$ recompensa al indivíduo por correr con el riesgo β_p y, en consecuencia, el índice adecuado de performance es (8.8) que sirve tanto para medir la performance ex-post de un título como la de una cartera. Mientras que el índice de Sharpe unicamente es válido cuando se utiliza con carteras bien diversificadas.

Si ahora situamos dos carteras: i, j, en los ejes $(\overline{R}_p, \beta_p)$, podemos preguntarnos cuál ha tenido una performance superior:

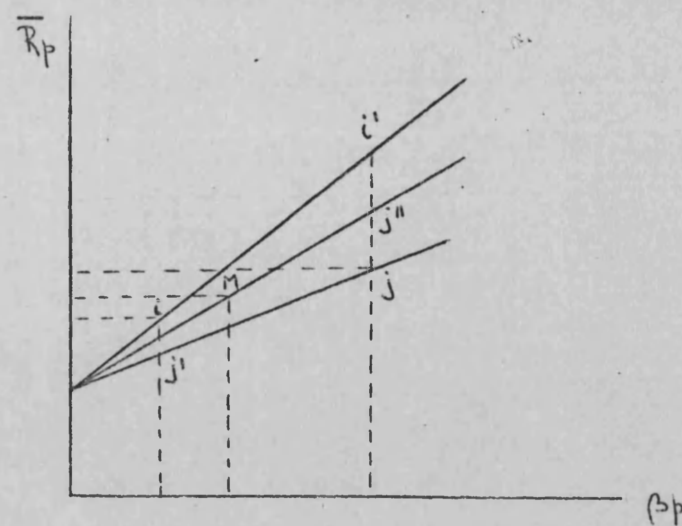


Figura 8.3.

Para contestar a esta pregunta podemos razonar de forma similar a la indicada en el epígrafe anterior. Así, - si introducimos la existencia de un activo libre de riesgo, a cuya tasa de interés R_f se puede prestar y pedir prestado en cantidades ilimitadas y combinamos adecuadamente la cartera i con el activo libre de riesgo, entonces se puede alcanzar cualquier punto de la recta $R_f ii'$. Mientras que haciendo lo propio con la cartera j, el inversor se puede situar en cualquier punto de la línea $R_f j'j$. Como la recta - $R_f j'j$ está dominada por la recta $R_f ii'$, se puede concluir - que la cartera i tiene una performance superior a la cartera j. Del mismo modo, comparando la performance de las carteras i, j, que podrían ser dos carteras gestionadas por - dos fondos de inversión, con la performance de la cartera de mercado, se tiene:

$$T_i = \frac{\overline{R}_i - R_f}{i} > T_M = \frac{\overline{R}_M - R_f}{M} > T_j = \frac{\overline{R}_j - R_f}{j} \qquad (8.9)$$

De lo cual se deduce que el fondo que gestiona la cartera i ha batido al mercado, mientras que el fondo que gestiona la cartera j ha sido batido por el mercado, de forma que un inversor individual que combinase adecuadamente el crédito o préstamo a la tasa R_f con una inversión a largo en la cartera M, podría obtener, para el mismo nivel de riesgo del fondo j: β_j, un rendimiento medio superior, tal como lo indica la cartera j" en la Figura 8.3.

Treynor (19) también propone otro índice alternativo para medir la performance de un título o cartera a partir de la gráfica de la recta característica:

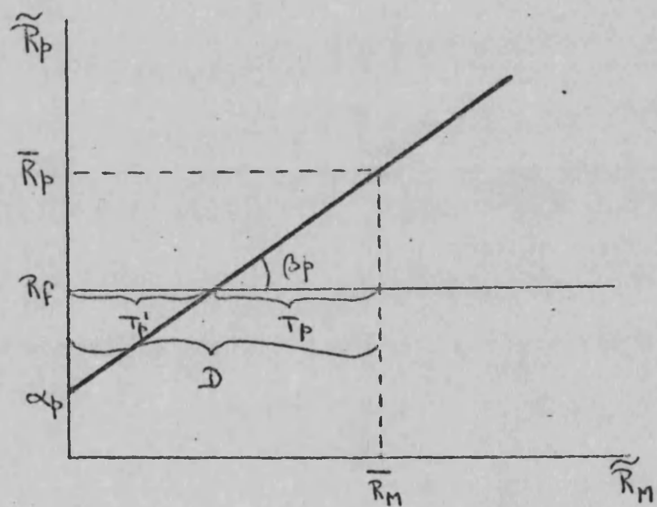


Figura 8.4.

Según se desprende de esta figura, la volatilidad de la cartera p, que es la pendiente de la recta característica, se puede expresar del siguiente modo:

$$\beta_p = \frac{\bar{R}_p - R_f}{T_p} = \frac{\bar{R}_p - R_f}{D - T'_p} \qquad (8.10)$$

y despejando T'_p:

$$T'_p = D - \frac{\bar{R}_p - R_f}{\beta_p} \qquad (8.11)$$

T'_p es una medida alternativa de la performance de Treynor, y si tenemos en cuenta (8.9) se puede expresar del siguiente modo:

$$T'_p = D - T_p \qquad (8.12)$$

Ya hemos demostrado que cuanto mayor sea T_p, mayor será la performance de una cartera. Pero cuanto más grande es T_p, menor será T'_p, ya que D es una constante. En consecuencia, un índice alternativo del índice de Treynor es T'_p que es la distancia sobre la horizontal que pasa por R_f, desde R_f al punto en que la recta característica corta a dicha horizontal. Cuanto menor sea esa distancia, es decir, cuanto menor sea T'_p, mayor será la performance de la cartera.

Así, sean i y j dos carteras cuyas rectas características vienen dadas en la siguiente figura:

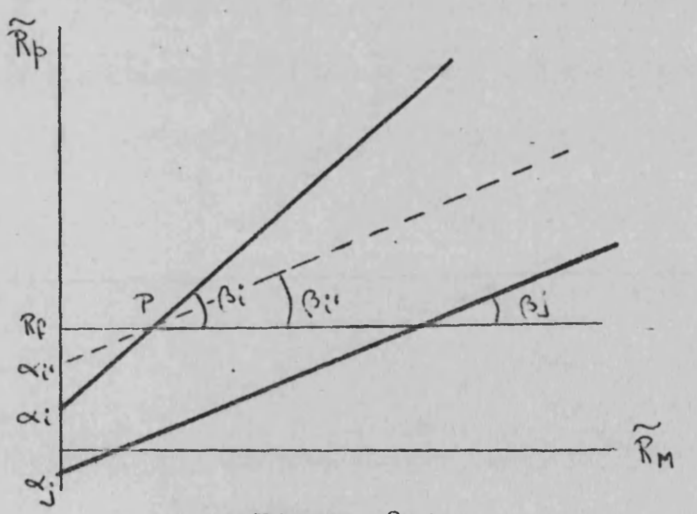


Figura 8.5.

Como la recta característica de la cartera i corta a la horizontal que parte de R_f en un punto más próximo al eje de ordenadas que la recta característica de la cartera j, la performance de la cartera i es superior a la performance de la cartera j.

Esta conclusión también puede apoyarse en un argumento de tipo gráfico. Si dos rectas características tienen la misma pendiente, no hay duda que la que tiene una mayor ordenada en el origen, α, tiene también una performance superior, ya que para una misma β, la cartera de mayor α obtiene un rendimiento medio superior.

Las rectas características de las carteras i y j de la Figura 8.5 no son paralelas, no tienen la misma β, en concreto: $\beta_i > \beta_j$ y, por lo tanto, no se puede sacar una conclusión inmediata sobre la performance de las carteras i y j. Pero si se añade el supuesto de que se puede prestar y pedir prestado sin limitación alguna a la tasa pura de interés, se podría formar una cartera i' compuesta por una combinación de la cartera i y el activo libre de riesgo, cuyo rendimiento medio realizado sería:

$$\overline{R}_{i'} = wR_f + (1-w)\overline{R}_i \qquad (8.13)$$

Como el rendimiento medio de la cartera i tiene la siguiente expresión:

$$\overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_M \qquad (8.14)$$

Llevando (8.14) a (8.13), se tiene:

$$\overline{R}_{i'} = wR_f + (1-w)(\alpha_i + \beta_i \overline{R}_M) = \alpha_{i'} + \beta_{i'} \overline{R}_M \qquad (8.15)$$

donde:

$$\alpha_{i'} = wR_f + (1-w)\alpha_i \qquad (8.16)$$

$$\beta_{i'} = (1-w)\beta_i \qquad (8.17)$$

(8.15) es la recta característica de la nueva cartera i'. Se puede verificar que dicha recta característica pasa por el punto P de la Figura 8.5, de coordenadas (20):

abscisa: $\tilde{R}_M = \dfrac{R_f - \alpha_i}{\beta_i}$; y ordenada: $\tilde{R}_p = R_f$

Así, cuando se hace variar la proporción en que interviene el activo libre de riesgo en i', la pendiente de la recta característica de i' varía y la recta pivota sobre el punto P. Existirá, por tanto, un valor de w que hará que las rectas características de las carteras i' y j sean paralelas es decir, un valor de w para el cual: $\beta_{i'} = \beta_j$, y para esa pendiente, tal como se puede ver en la Figura 8.5, se tiene que $\tilde{R}_{i'} > \tilde{R}_j$ sea cual sea el valor de $\tilde{R}_M$. Por lo tanto, cuando existe un activo libre de riesgo, la cartera i tiene una performance superior a la de la cartera j.

Se puede concretar (21) cual es el porcentaje a invertir en el activo libre de riesgo, de modo que las rectas características de las carteras de dos fondos, 1 y 2, sean paralelas: $w = 1 - \beta_2/\beta_1$. Así, si consideramos dos fondos cuyas volatilidades respectivas son: 1,25 y 0'5, siendo $\alpha_1 > \alpha_2$; para transformar la recta característica del primero en una línea paralela a la recta característica del segundo fondo, basta con invertir $\beta_2/\beta_1 = 0{,}5/1{,}25 = 0{,}4$, es decir, un 40% en el primer fondo, y el resto $1 - \beta_2/\beta_1 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, es decir, el 60% en el activo libre de riesgo, para que el primer fondo tenga una volatilidad igual a la del segundo fondo, pero cayendo su nueva línea por encima de la del segundo (22).

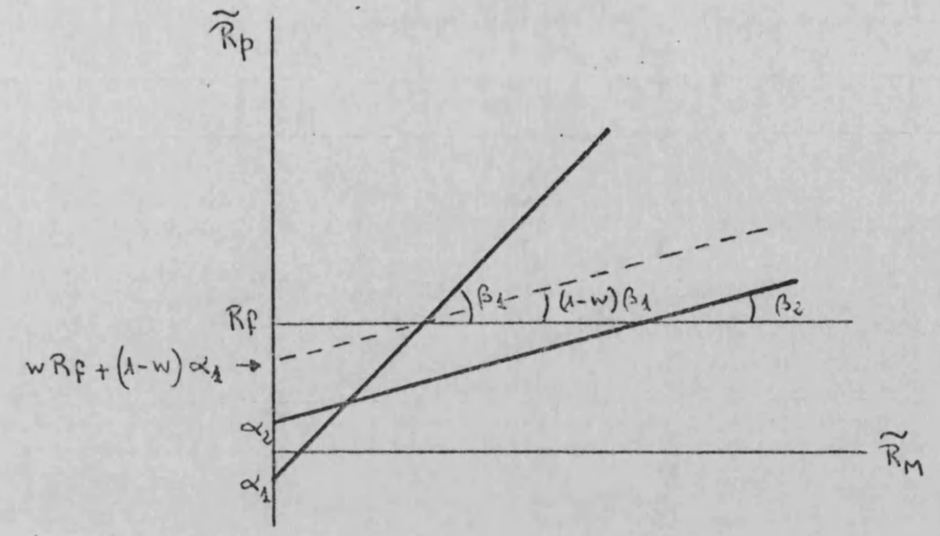


Figura 8.6.

Finalmente, Smith y Tito (23) elaboraron un tercer índice similar al índice de performance de Treynor que también se basa en los parámetros que proporciona la recta característica de un título o cartera. La medida alternativa por ellos propuesta es el complemento del índice de Treynor T_p a la rentabilidad media realizada por el mercado:

$$T''_p = \overline{R}_M - T_p \tag{8.18}$$

Que teniendo en cuenta (8.6) y (8.8) se puede poner como:

$$T''_p = \overline{R}_M - \frac{\overline{R}_p - R_f}{\beta_p} = \frac{\beta_p \overline{R}_M - (\alpha_p + \beta_p \overline{R}_M - R_f)}{\beta_p}$$

$$T''_p = \frac{R_f - \alpha_p}{\beta_p} \tag{8.19}$$

De (8.18) se deduce que como $\overline{R}_M$ es una constante, cuanto mayor es T_p, menor es T''_p y, en consecuencia, mayor es la performance de la cartera en cuestión.

8.4. El Indice de Jensen

La medida de la performance de Jensen (24), a la que Sharpe (25) llama "rentabilidad diferencial", tiene su origen en el test que Jensen propone para validar la SML (o recta del mercado de los activos financieros).

Partiendo del CAPM y del modelo de mercado, Jensen llega al siguiente modelo econométrico para testar el CAPM:

$$\tilde{R}_{jt} = R_{ft} + \beta_j \left[\tilde{R}_{Mt} - R_{ft} \right] + \tilde{e}_{jt} \qquad (8.20)$$

donde $\tilde{R}_{jt}$ y $\tilde{R}_{Mt}$ son los rendimientos realizados por el activo j (o la cartera j) y la cartera de mercado en el período t, y $\tilde{e}_{jt}$ es la perturbación aleatoria de media cero y varianza finita. Jensen introduce la posibilidad de que la tasa pura de interés varíe de un período a otro, de ahí el subíndice t que acompaña a R_f. Si los datos sobre los cuales se va a aplicar el modelo econométrico abarcan un período de 10 años, entonces t sería cada uno de los subperíodos anuales de que consta el período completo.

Con fines de simplificación, y tal como lo hicimos en el modelo de mercado en el capítulo V, vamos a omitir el subíndice t y suponer que la tasa pura de interés no varía a lo largo del período de estudio, así podremos luego relacionar el índice de Jensen con los otros índices de performance hasta ahora estudiados. Por tanto, la expresión (8.20) queda del siguiente modo:

$$\tilde{R}_j = R_f + \beta_j \left[\tilde{R}_M - R_f \right] + \tilde{e}_j \qquad (8.21)$$

donde si se toman medias, se obtiene la expresión de la SML empírica:

$$\overline{R}_j = R_f + \beta_j \left[\overline{R}_M - R_f\right] \tag{8.22}$$

La expresión (8.22) se puede reordenar como sigue, haciendo hincapié que ahora el activo o cartera de que se trata es p y no el activo o cartera j:

$$\overline{R}_p - R_f = \beta_p(\overline{R}_M - R_f) \tag{8.23}$$

Como se desprende de (8.23), en el análisis de regresión sobre los ejes ($\widetilde{R}_p - R_f$, $\widetilde{R}_M - R_f$) estamos obligados a que la recta de regresión pase por el origen. En el equilibrio del mercado, según el CAPM, toda cartera y todo título deben estar sobre la recta (8.23), pero puede ocurrir que en la realidad haya carteras por encima o por debajo de la SML empírica en una cantidad J_p significativa, según que el administrador de la cartera sea un buen o mal previsor de las futuras cotizaciones de los títulos. Con lo cual, si no obligamos a que la recta de regresión pase por el origen, el modelo econométrico (8.21) quedaría:

$$\widetilde{R}_j - R_f = J_j + \beta_j \left[\widetilde{R}_M - R_f\right] + \widetilde{e}_j \tag{8.24}$$

tomando medias en (8.24) y cambiando el subíndice j por el subíndice p:

$$\overline{R}_p - R_f = J_p + \beta_p \left[\overline{R}_M - R_f\right] \tag{8.25}$$

Se sobreentiende que para que el CAPM resulte apoyado por los datos empíricos, el parámetro J_p debe ser nulo o muy próximo a cero. Pero ahora, de lo que se trata no es de eso, sino de ver en qué medida un título o cartera ha batido o no al mercado, de ahí la posibilidad que hemos introducido de que $J_p \gtrless 0$.

Despejando J_p se obtiene la cantidad en que la cartera p ha mejorado o no los resultados que cabían esperar según la SML:

$$J_p = (\overline{R}_p - R_f) - \beta_p(\overline{R}_M - R_f) \qquad (8.26)$$

Esta rentabilidad diferencial permite clasificar a los títulos o carteras en superiores, inferiores o neutros, según que J_p sea positiva, negativa o nula. "Si J_p es positiva, el gerente es capaz de prever los cambios de valores y practicar una buena selección y, ello tanto más, cuanto J_p sea más grande. Si J_p es nula, el gerente ha realizado igualmente una política de selección al azar y de compra-conservación. Quizás haya hecho lo mejor, pero estas ganancias nacidas de una buena selección han podido compensarse por gastos de gestión o gastos de transacción. Si J_p es negativa, el gerente ha actuado mal, es decir, que su capacidad de selección es mediocre y los costes ocasionados por la gestión son demasiado elevados" (26). A mayor J_p, mayor será la performance de un título o cartera en particular.

Sean dos carteras i y j, cuyas rectas características son las indicadas en la figura 8.7. Si tomamos los ejes $(\widetilde{R}_p - R_f, \widetilde{R}_M - R_f)$, entonces estamos en condiciones de hallar los valores J_i y J_j: $J_i > 0$ y $J_j < 0$. Por lo tanto, la performance de la cartera i es superior a la performance de la cartera j. Como el índice de Jensen de la cartera de mercado es $J_M = 0$, entonces la cartera i ha batido al mercado, mientras que la cartera j ha sido batida por el mercado.

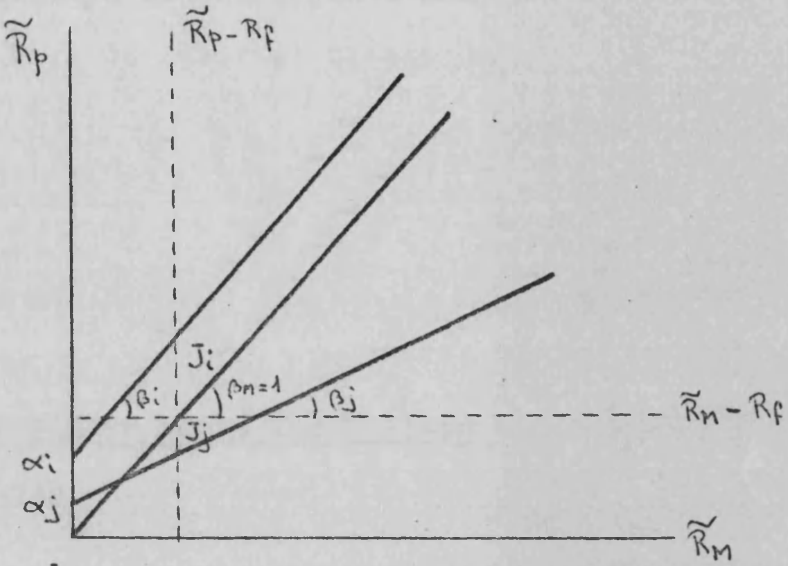


Figura 8.7.

Según Jensen, "esta medida puede utilizarse legítimamente para realizar comparaciones entre Fondos de diferentes riesgos y entre diferentes períodos temporales cualesquiera que sean las condiciones económicas generales y del mercado" (27).

Sin embargo, según Smith y Tito (28), desde el momento en que J_p mide únicamente desviaciones verticales de la SML, haciendo omisión por completo del nivel de riesgo, no puede utilizarse para la ordenación de acuerdo a la performance de carteras con diferentes niveles de riesgo tal como los índices de Sharpe o Treynor. Por lo que recomiendan usar lo que ellos llaman el "índice de Jensen modificado":

$$J'_p = \frac{J_p}{\beta_p} \qquad (8.27)$$

El índice de Jensen modificado tiene como principal ventaja sobre el índice de la rentabilidad diferencial - que no excluye el coeficiente beta que tanta importancia tiene a la hora de medir el riesgo de un título o cartera.

8.5. Relaciones entre los Indices de Sharpe, Treynor y Jensen

En este epígrafe vamos a deducir las relaciones de tipo matemático que existen entre los tres índices de performance vistos anteriormente, relaciones que en todos los casos van a ser de tipo lineal; demostrándose que, al menos - por lo que respecta a la ordenación de los fondos de inversión según su performance, es indiferente el tipo de índice utilizado (29).

8.5.1. Sharpe-Treynor

Según hemos visto con anterioridad, si tomamos medias y varianzas en la expresión del modelo de mercado dada por (8.5), se obtiene:

$$\overline{R}_p = \alpha_p + \beta_p \overline{R}_M \qquad (8.28)$$

$$V_p^2 = \beta_p^2 V_M^2 + V^2 \varepsilon_p \qquad (8.29)$$

La variabilidad de cualquier título o cartera dada

(8.28) puede ser descompuesta en dos partes (30):

$\beta_p^2 \, V_M^2$ parte debida al riesgo sistemático o no diversificable.

$V^2 \varepsilon_p$ parte debida al riesgo no sistemático o diversificable.

Si suponemos que mediante la diversificación, el riesgo no - sistemático o diversificable se consigue anular, (8.29) quedaría:

$$V_p^2 = \beta_p^2 \, V_M^2$$

y extrayendo raíces cuadradas en ambos miembros se reduce a:

$$V_p = \beta_p \, V_M \qquad (8.30)$$

Dado que el índice de Sharpe viene dado por la siguiente expresión:

$$S_p = \frac{\overline{R}_p - R_f}{V_p} \qquad (8.31)$$

Si ahora sustituimos en (8.31) $\overline{R}_p$ y V_p por los valores hallados en (8.28) y (8.30), se tiene:

$$S_p = \frac{\overline{R}_p - R_f}{V_p} = \frac{\alpha_p + \beta_p \overline{R}_M - R_f}{\beta_p \, V_M} = \frac{\overline{R}_M}{V_M} - \frac{1}{V_M} \left[\frac{R_f - \alpha_p}{\beta_p} \right]$$

y recordando la expresión (8.19), finalmente se tiene:

$$S_p = \frac{\overline{R}_M}{V_M} - \frac{1}{V_M} \, T''_p$$

donde $\overline{R}_M / V_M$ y $1/V_M$ son constantes numéricas, ya que se refieren a la cartera de mercado. Por tanto, existe una relación - lineal entre S_p y T''_p. Cuanto menor sea T''_p (mayor performance tiene la cartera según Treynor), mayor será S_p (mayor performance tiene la cartera según Sharpe). De modo que los índices de Sharpe (S_p) y Treynor (T''_p) son dos medidas de performance equivalentes cuando las carteras de valores están bien diversificadas y carecen de riesgo no sistemático.

8.5.2. Treynor-Jensen (31).

Según (8.26) la rentabilidad diferencial de Jensen era:

$$J_p = (\bar{R}_p - R_f) - \beta_p(\bar{R}_M - R_f) \qquad (8.32)$$

Dividiendo ambos miembros por β_p, se tiene:

$$\frac{J_p}{\beta_p} = \frac{\bar{R}_p - R_f}{\beta_p} - (\bar{R}_M - R_f) \qquad (8.33)$$

y como el coeficiente beta de la cartera de mercado es 1, también puede expresarse como:

$$\frac{J_p}{\beta_p} = \frac{\bar{R}_p - R_f}{\beta_p} - \frac{\bar{R}_M - R_f}{\beta_M} \qquad (8.34)$$

Si ahora tenemos en cuenta (8.8) y (8.27), podemos finalmente poner (8.34) del siguiente modo, una vez despejado T_p:

$$T_p = J'_p + T_M \qquad (8.35)$$

donde T_M es una constante desde el momento que sólo depende de la cartera de mercado y de la tasa pura de interés, por lo que el índice de Treynor (T_p) es una transformación lineal del índice de Jensen modificado (J'_p). Cuanto mayor sea J'_p (mejor es la performance de acuerdo con el índice modifi cado de Jensen) mayor será T_p (mejor será la performance según el índice de Treynor).

A partir de (8.32), también puede deducirse una relación lineal entre el índice de Jensen modificado (J'_p) y la tercera expresión alternativa del índice de Treynor (T''_p) Así, si sustituimos en (8.32) $\overline{R}_p$ por su valor dado en (8.28) tenemos:

$$J_p = (\overline{R}_p - R_f) - \beta_p(\overline{R}_M - R_f)$$

$$J_p = (\alpha_p + \beta_p \overline{R}_M - R_f) - \beta_p(\overline{R}_M - R_f)$$

$$J_p = \alpha_p - R_f + \beta_p R_f \qquad (8.36)$$

Y dividiendo ambos miembros de (8.36) por β_p:

$$\frac{J_p}{\beta_p} = R_f - \left(\frac{R_f - \alpha_p}{\beta_p}\right)$$

Finalmente, recordando las expresiones (8.19) y (8.27), llegamos a:

$$J'_p = R_f - T''_p \qquad (8.37)$$

Esta última expresión fue dada por Treynor (32) para mostrar la relación entre su índice T''_p y el índice de Jensen modificado J'_p. Como se ve, la relación vuelve a ser lineal. Cuanto menor es T''_p (mejor es la performance de la cartera según Treynor), mayor será J'_p (mejor será la performance de la cartera de acuerdo con Jensen).

8.5.3. Sharpe-Jensen

Nos queda por ver la relación entre los índices de Sharpe y Jensen. Para tratar dicha relación vamos a partir -

de la expresión del índice de Jensen dada por (8.26):

$$J_p = (\overline{R}_p - R_f) - \beta_p(\overline{R}_M - R_f) \qquad (8.38)$$

Si dividimos ambos miembros por la variabilidad o riesgo total de la cartera, tenemos:

$$\frac{J_p}{V_p} = \left(\frac{\overline{R}_p - R_f}{V_p}\right) - \beta_p \left(\frac{\overline{R}_M - R_f}{V_p}\right) \qquad (8.39)$$

Como el coeficiente beta de la cartera p, calculada a partir de los datos históricos es:

$$\beta_p = \frac{r_{pM} \cdot V_p \cdot V_M}{V_M^2} \qquad (8.40)$$

sustituyendo (8.40) en (8.39) y suponiendo que en una situación de equilibrio toda cartera eficiente debe estar situada sobre la CML y, en consecuencia, $r_{pM} = 1$, se tiene:

$$\frac{J_p}{V_p} = \frac{\overline{R}_p - R_f}{V_p} - \frac{1 \cdot V_p \cdot V_M}{V_M^2} \left(\frac{\overline{R}_M - R_f}{V_p}\right)$$

$$\frac{J_p}{V_p} = \frac{\overline{R}_p - R_f}{V_p} - \frac{\overline{R}_M - R_f}{V_M} \qquad (8.41)$$

Recordando la expresión (8.3), podemos poner (8.41) como sigue:

$$\frac{J_p}{V_p} = S_p - S_M \qquad (8.42)$$

Finalmente, despejando S_p en (8.42) y llamando J''_p a J_p/V_p, obtenemos la siguiente expresión:

$$S_p = J''_p - S_M \qquad (8.43)$$

donde S_M es una constante ya que depende de la cartera de mercado y de la tasa pura de interés, por lo que el índice de Sharpe (S_p) es una transformación lineal de este nuevo índice de Jensen que acabamos de introducir (J''_p), en el caso de que $r_{pM} = 1$, y que por tanto la cartera en cuestión únicamente tenga riesgo sistemático. Los índices J''_p y J'_p se diferencian en el divisor, que ahora es el riesgo total en vez de ser el riesgo sistemático, siendo necesario hablar de J''_p al tratar de la relación entre los índices de Sharpe y Jensen, ya que el índice de Sharpe tiene en cuenta la prima pagada por el mercado por unidad de riesgo total.

Según se desprende de (8.43), cuanto mayor sea J''_p (mejor es la performance de la cartera según Jensen), mayor será S_p(mejor será la performance según Sharpe).

En opinión de Francis y Archer (33), "las tres medidas del rendimiento de las carteras estudiadas anteriormente tienen un serio defecto que produce cierto sesgo en contra de la selección de carteras de elevado riesgo". Tal sesgo se produce cuando existen diferentes tasas de interés para prestar y pedir prestado, ya que como vimos en el epígrafe 4 del tema VI, Figuras 6.5 y 6.6, tanto la CML como la SML tenían rendimientos esperados de equilibrio más bajos que los previstos en el modelo standard del CAPM para niveles de riesgo altos. Mientras se producía la situación contraria en las carteras de bajo riesgo. Como las tres medidas de la performance estudiadas en este capítulo se basan en el modelo standard de CAPM (aunque claro está en base a datos ex-post), es indudable que si en la realidad las tasas de in terés para prestar y pedir prestado son diferentes, el mencionado sesgo se va a producir.

8.5.4. Comparación entre carteras usando los diferentes índices

Hasta aquí hemos visto los índices de performance más usuales y las relaciones de tipo matemático que se dan entre ellos.

Smith y Tito (34) estudiando una muestra de 38 fondos de inversión, elegidos al azar de entre un total de 77, y basándose en datos trimestrales a lo largo del período 1958-67, calcularon los rendimientos trimestrales continuos para cada uno de los fondos de la muestra, así como los rendimientos trimestrales contínuos de la cartera de mercado representada por el índice Standard and Poor que consta de 500 títulos. Una vez tuvieron calculados $\tilde{R}_i$, $\tilde{R}_M$ y R_f hicieron dos análisis de regresión, sobre cada uno de los 38 fondos, en base a los modelos econométricos (8.5) y (8.24). Con los parámetros estimados por los modelos calcularon los índices de performance de todos los fondos de acuerdo con los criterios de Sharpe, Treynor, Jensen y Jensen modificado y, posteriormente, ordenaron de menor a mayor, de acuerdo con los cuatro criterios de performance utilizados, a cada uno de los fondos de la muestra. Finalmente, compararon las ordenaciones dadas por los cuatro criterios de performance utilizados. Así, se compararon las ordenaciones Sharpe-Treynor, Treynor-Jensen, Sharpe-Jensen y Treynor-Jensen modificado, llegando a los resultados expresados en la Figura 8.8. (35).

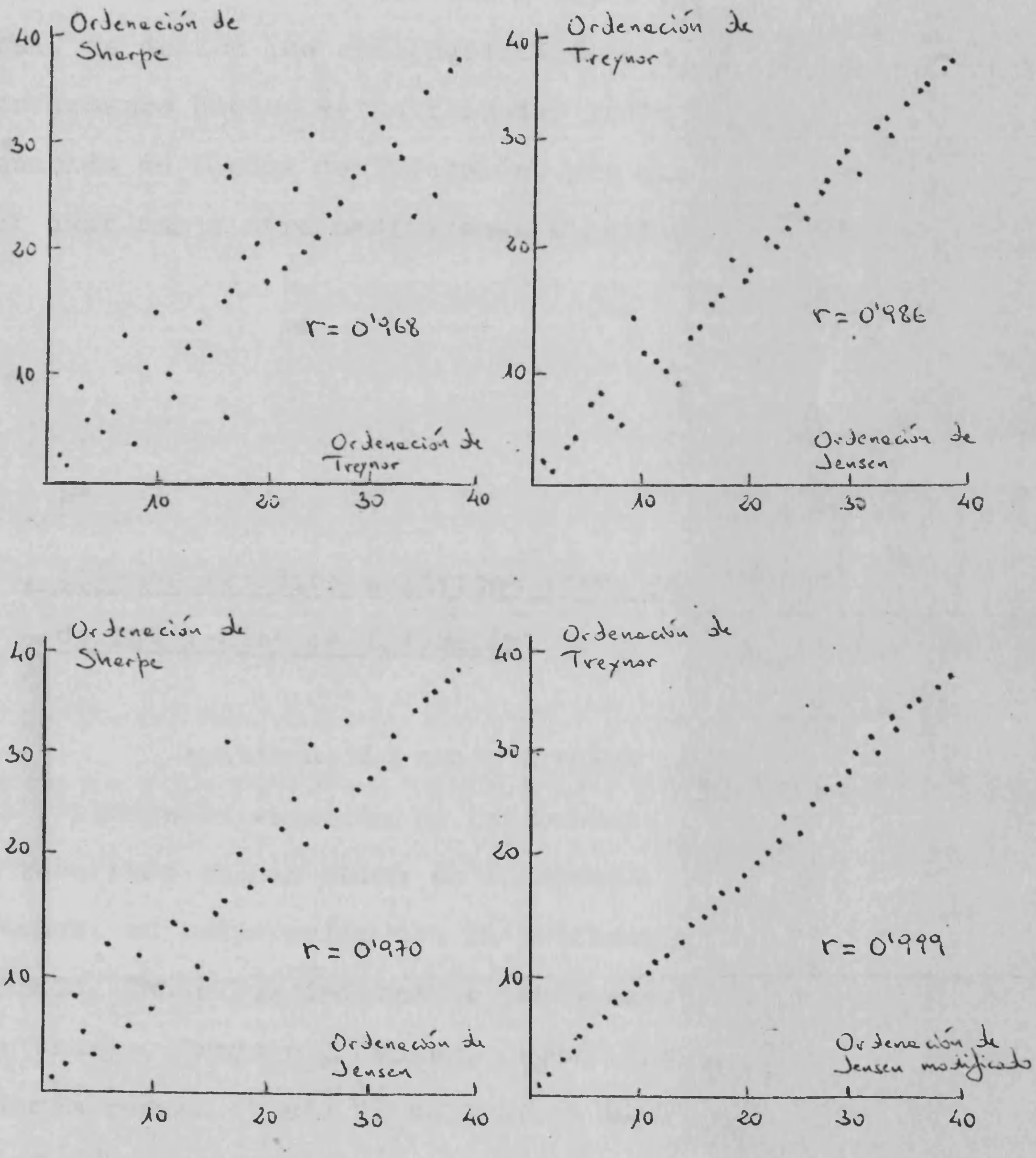

Ordenación de Sharpe
Ordenación de Treynor
r = 0'968
Ordenación de Treynor
Ordenación de Jensen
r = 0'986
Ordenación de Sharpe
Ordenación de Jensen
r = 0'970
Ordenación de Treynor
Ordenación de Jensen modificado
r = 0'999
10
20
30
40

Figura 8.8.

Como se observa en la Figura 8.8, las comparaciones de las ordenaciones entre los cuatro pares de índices de performance tienen coeficientes de correlación muy fuertes, en cualquiera de los casos superior al 0,95. De lo cual, se deduce que cualesquiera de las cuatro medidas de performance pueden ser utilizadas indistintamente en la ordenación de fondos de inversión, sin que las diferencias por usar una u otra medida sean significativas.

8.6. Algunos estudios empíricos sobre la Performance de los Fondos de Inversión

A continuación vamos a hacer un breve repaso de los principales estudios de performance que sobre los fondos de inversión se han hecho en el mercado de valores norteamericanos, en comparación con la performance de la cartera de mercado. Todos los índices de performance vistos anteriormente: Sharpe, Treynor y Jensen, fueron desarrollados por estos autores con el objeto de valorar la buena o mala gestión de los fondos de inversión.

Los fondos de inversión suelen poseer carteras altamente diversificadas, por lo que sus rendimientos están estrechamente relacionados con los rendimientos de la cartera de mercado. Según Jensen (36), en su estudio sobre 115 fondos de inversión, durante el período 1945-64, en promedio, el 85% de la varianza de los rendimientos de los fondos se puede atribuir a las fluctuaciones del mercado:

$$0'85\ V_p^2 \simeq \beta_p^2\ V_M^2$$

por lo que la volatilidad β_p de las carteras puede ser un buen sustituto de su variabilidad V_p. Así, Sharpe (37) relaciona el orden basado en el índice de Treynor con el orden que se desprende de la utilización de su propio índice y llega a la conclusión de que las ordenaciones son muy semejantes. Esto vuelve a corroborar lo que antes ya vimos en el estudio de Smith y Tito sobre las ordenaciones a que dan lugar las diferentes medidas de performance y la alta correlación existente entre ellas.

Si bien las rectas características de los fondos suelen tener una alta correlación con el mercado (recordemos que según Treynor 4 de cada 5 fondos tenían coeficientes de correlación igual o superior al 90%), sus correspondientes betas varían ampliamente de unos fondos a otros: desde 0,4 hasta 1,5 según se desprende de los datos utilizados por Jensen (38). "Siempre y holgadamente, sucede que los fondos de inversión hacen lo que prometen que van a hacer" (39). Es decir, que no se suelen apartar de los objetivos y políticas que se fijan.

Otra cosa distinta es si su gestión es buena y si su rentabilidad ex-post es superior a la de otras carteras aleatorias de igual riesgo.

Sharpe (40) estudió la performance de 34 fondos de inversión durante el período 1954-1963, usando como sustituto de la cartera de mercado el índice Dow-Jones Industrial Average. Luego de medir la performance de los 34 fondos y la cartera de mercado con su índice antes estudiado, solamente 11 fondos tuvieron un ratio premio/variabilidad superior al ratio premio/variabilidad de la cartera de mercado; el resto, 23 fondos, tuvieron un ratio más pequeño. "Tales resultados no son especialmente estimulantes para los defensores de los fondos de inversión. Se puede atribuir la menor efectividad a una diversificación insuficiente; pero la verdadera naturaleza de las carteras que poseen así como la gran correlación entre la rentabilidad de los fondos y las fluctuaciones del mercado, desautoriza esta explicación. Parece muy improbable que, en término medio, los gestores de los fondos razonen equivocadamente. Es más probable que generen gastos excesivamente altos en la búsqueda de las inversiones deseadas" (41).

Los resultados de Sharpe acabados de mencionar se basan en rentabilidades netas obtenidas por el inversor luego de deducir los gastos de gestión y las comisiones de los agentes. Si se añaden estos gastos deducidos a las rentabilidades netas se obtendrán las correspondientes rentabilidades brutas. Los índices de Sharpe calculados en base a las rentabilidades brutas muestran los siguientes resultados: 19 fondos tienen un ratio premio/variabilidad superior al de la cartera de mercado y únicamente 15 tenían ratios más bajos. "... ceteris paribus, cuanto menor es el ratio de gastos del fondo, mejores son los resultados obtenidos por los accionistas" (42). De manera que los buenos índices de performance de los fondos están relacionados de una forma directa con los bajos ratios de gastos.

Treynor (43) utilizando datos de rentabilidades anuales netas de 20 fondos y usando como cartera de mercado el índice Dow-Jones Industrial Average, dibuja las rectas características de dichos fondos. Así, comparando estas rectas características con la recta característica de la cartera de mercado (la bisectriz del primer cuadrante en los ejes ($\widetilde{R}_p$, $\widetilde{R}_M$)), se ve que para una misma tasa de interés del 4%, sólo 8 fondos tienen mejor índice de performance T'_p que la cartera de mercado, mientras que el resto, 12 fondos, lo tienen peor. Estos resultados vuelven a poner otra vez el dedo en la llaga poniendo en duda la gestión realizada por los fondos de inversión.

Finalmente, Jensen (44) estudiando 115 fondos de inversión durante el período 1945-64 en base a rentabilidades anuales y usando como sustituto de la cartera de mercado el índice Standard and Poor Composite, calcula las rentabilidades diferenciales (J_p) de los 115 fondos, y la cartera de mercado en base a rentabilidades netas en primer lugar y luego en base a rentabilidades brutas.

Con rentabilidades netas, la rentabilidad diferencial media de los 115 fondos fue de -0,011, de modo que 67 fondos tuvieron rentabilidades diferenciales negativas (peores que la rentabilidad diferencial del mercado, que es nula por definición).

En base a rentabilidades brutas, es decir, sin deducir de la rentabilidad los gastos de investigación, costes de administración, etc., o lo que es igual, incluyendo todos los gastos excepto corretajes, comisiones e impuestos, la rentabilidad diferencial media de los 115 fondos fue de -0,0004, con 60 fondos para los cuales $J_p > 0$ y 55 en los que $J_p < 0$.

Por lo que respecta a la capacidad de los fondos para predecir correctamente las fluctuaciones futuras del mercado, cabe decir que no existe evidencia en tal sentido, ya que si los gestores de los fondos de inversión fueran capaces de adivinar las futuras oscilaciones del mercado, administrarían las carteras de sus fondos de forma que sus respectivas betas fuesen superiores en épocas de alza y menores en épocas de baja, de modo que la nube de puntos $(\tilde{R}_p, \tilde{R}_M)$ se pudiese ajustar mejor mediante una curva tal como la dibujada en la Figura 8.9 que mediante una recta. Treynor y Mazuy (45) estudiaron 57 fondos de inversión durante el período 1953-62 y solamente en un caso una curva se ajustó mejor que

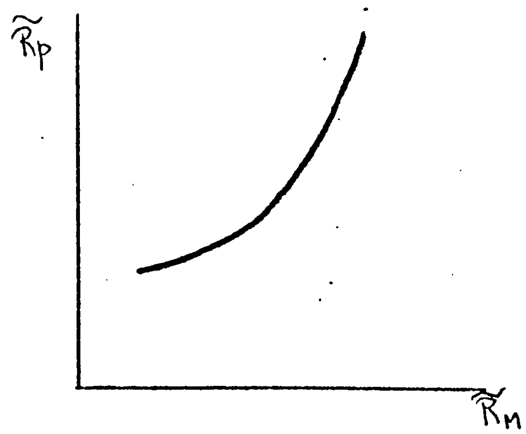


Figura 8.9.

una línea recta a la nube de puntos situada en los ejes ($\tilde{R}_p$, $\tilde{R}_M$), e incluso en ese único caso, la curva no era muy pronunciada.

En los estudios empíricos vistos hasta ahora, los fondos de inversión en promedio no han tenido mejores performances que la cartera de mercado. No obstante, hay fondos que baten al mercado y cabría preguntarse si un fondo que bate al mercado en un período dado lo vuelve a batir en el período siguiente. Sharpe (46) estudia esta situación comparando las ordenaciones de 34 fondos según el ratio premio/variabilidad en los períodos 1944-53 y 1954-63, tanto en base a rentabilidades brutas como netas y, aunque aparece una ligera relación positiva en ambos casos, pocos son los fondos que obtuvieron resultados sistemáticamente mejores que los del mercado.

En opinión de Sharpe (47), las principales conclusiones que se derivan de los estudios sobre la performance ex-post de los fondos de inversión son los siguientes:

1. Las carteras de los fondos suelen estar bien diversificadas.

2. La mayoría de los gestores escogieron el tipo de riesgo que más se ajustaba a la política de inversiónes de sus respectivos fondos y lo mantuvieron razonadamente bien en el futuro.

3. Antes de considerar gastos, los fondos de inversión, por término medio, no batieron al mercado.

4. Después de considerar gastos, los fondos, por término medio, tuvieron peores resultados aún y, por tanto, no batieron al mercado.

5. Pocos, si hubo alguno, de los fondos batieron al mercado de una forma continua y sistemática a través del tiempo.

6. La mayoría de los fondos parece ser que incurrieron en unos gastos excesivos buscando títulos que estuviesen infravalorados.

NOTAS DEL CAPITULO VIII

(1) En el libro de Sharpe, se traduce performance por eficacia, pero ésto puede provocar confusión, ya que normalmente se reserva el término eficacia para hablar de las carteras eficientes de Markowitz.
SHARPE, W.F.: "Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales". Ediciones Deusto. Bilbao, 1976, p. 187.

(2) "En la mayor parte de los casos carece de sentido expresar por un sólo número el resultado de una cartera. Este debe presentarse en forma de vector, ya que son varios y no uno solo los parámetros que definen el rendimiento de una cartera. Con la voz performance más que el "resultado" se quiere expresar la estructura o composición de ese "resultado"."
SUAREZ SUAREZ, A.S.: "Decisiones Optimas de Inversión y Financiación en la Empresa". Ediciones Pirámide. Madrid, 1980. p. 464.

(3) TREYNOR, J.L.: "How to Rate Management of Investment Funds". Harward Business Review, Enero-Febrero 1965, p. 63-75, p. 65.

(4) JACQUILLAT, B. y SOLNIK, B.: "Mercados Financieros y Gestión de Cartera de Valores". Editorial Tecniban. Madrid, 1975. p. 131.

(5) "La utilidad de las medidas ex-post de la performance para el análisis y selección de inversiones mobiliarias es evidente en tanto las relaciones existentes entre los re

sultados generados por los distintos activos en el pasado se mantengan en el futuro. Pero aún cuando esto no ocurriera y se diera poca consistencia en las relaciones existentes entre las performances de los distintos activos, tales medidas no dejarían de tener gran utilidad para los inversores, en tanto a éstos les interesa conocer la bondad de la gestión realizada por los profesionales a los que ha encomendado sus recursos financieros", SUAREZ SUAREZ, A.S., op.cit., p. 464-465.

(6) SHARPE, W.F., op. cit., p. 167.

(7) SHARPE, W.F.: "Mutual Fund Performance". Journal of Business, vol. 39, nº 1, enero 1966, p. 119-138.
TREYNOR, J.L., op. cit.
JENSEN, M.C.: "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-64". Journal of Finance, vol. 23; nº 2, mayo 1968, p. 389-416.

(8) FAMA, E.F.: "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". Journal of Finance, vol. 25, nº 2 mayo 1970, p. 383-417.
En este artículo hay un excelente resumen sobre los trabajos teóricos y empíricos en torno al tema de los mercados de capitales eficientes en sus diferentes formas.

(9) "Para que un inversor consiga batir el mercado realmente, debe, o conseguir un tanto más elevado de rentabilidad que el mercado sin asumir un mayor riesgo que el medio o, por el contrario, encontrar una inversión que sea menos arriesgada que la media del mercado pero que obtenga un

tanto de rentabilidad equivalente".
FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H.: "Análisis y Gestión de Cartera de Valores". Ediciones ICE. Madrid 1977, p. 209.

(10) En la obra de Mateos-Aparicio aparece un test sobre la eficiencia del mercado de capitales español en la forma fuerte.
MATEOS-APARICIO, P.: "Inversión Mobiliaria Colectiva". Bolsa de Madrid. Servicio de Estudios. Madrid 1977.

Por otra parte, a nivel de activos individuales, Goula Surinach ha calculado la performance de 58 títulos aplicando distintos índices a los datos quincenales de la Bolsa de Barcelona en el período 1970-72.
GOULA SURINACH, J.: "Análisis y cálculo del riesgo en el mercado de Valores". Banca Más Sardá. Servicio de Estudios. Barcelona. 1974.

(11) Dentro del Análisis Fundamental también es muy utilizado el método PER (Price Earning Ratio), que consiste en calcular el ratio precio-ganancia y luego multiplicar el beneficio futuro esperado por dicho ratio para así hallar el precio teórico de las acciones de una empresa determinada.

(12) Si bien es cierto que un reducido número de entidades europeas y norteamericanas calculan y utilizan los coeficientes beta de los títulos en la gestión de sus carteras de valores.

En opinión de Jacquillat y Solnik, el análisis financiero tradicional y la Teoría del Mercado de Capita les no son contrapuestos, sino que, por el contrario, ambos análisis se refuerzan.

JACQUILLAT, B. y SOLNIK, B., op. cit., p. 180.

(13) Refiriéndose a la gestión de cartera por parte de los fondos de inversión y las sociedades de cartera, Mateos-Aparicio afirma que "en la práctica española se utiliza sobre todo el Análisis Fundamental. Menos frecuente es el Análisis Técnico. La utilización de los conceptos de riesgo y volatilidad se utiliza sólo de forma ocasional."

MATEOS-APARICIO, P.: op. cit., p. 145.

(14) Un excelente tratamiento de estos temas en castellano puede encontrarse en la obra de:

SUAREZ SUAREZ, A.S., op. cit., caps. 26 y 27.

También pueden encontrarse referencias al Análisis Técnico y al Fundamental en todos los trabajos sobre eficiencia del mercado de capitales, ya que en dichos trabajos se intenta demostrar la poca utilidad del Análisis Técnico y del Análisis Fundamental a medida que los mercados de capitales son más eficientes en su comportamiento.

(15) FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H., op. cit., p. 187-188.

(16) SHARPE, W.F (1976), op. cit., p. 187.

(17) TREYNOR, J.L., op. cit., p. 64.

(18) SHARPE, W.F.,(1976), op. cit., p. 189.

(19) TREYNOR, J.L., op. cit., p. 75.

(20) La abscisa se obtiene al hacer $\overline{R}_i = R_f$ en (8.14).

(21) JACQUILLAT, B. y SOLNIK, B., op. cit., p. 134.

(22) Sean dos fondos cuyas rectas características son:

$$\overline{R}_1 = \alpha_1 + 1'25\ \overline{R}_M \qquad \overline{R}_2 = \alpha_2 + 0'5\ \overline{R}_M$$

Si formamos una nueva cartera compuesta por el primer fondo con el peso (1-w) y el resto por el activo libre de riesgo, tendríamos:

$$\overline{R}_{1'} = wR_f + (1-w)\overline{R}_1 = 0'6R_f + 0'4\left[\alpha_1 + 1'25\ \overline{R}_M\right] =$$
$$= (0'6\ R_f + 0'4\ \alpha_1) + 0'5\ \overline{R}_M$$

Es decir, que habríamos conseguido que el nuevo fondo tuviese la misma volatilidad que el segundo fondo.

(23) SMITH, K.V. y TITO, D.A.: "Risk-Return Measures of Ex-post Performance". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 4, nº 4, diciembre 1969, p. 449-471, p. 454.

(24) JENSEN, M.C., op. cit.

(25) SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 193.

(26) JACQUILLAR, B. y SOLNIK, B., op. cit., p. 139.

(27) JENSEN, M.C., op. cit., p. 401.

(28) SMITH, K.V. y TITO, D.A., op. cit., p. 457.

(29) El contenido de este epígrafe va a estar principalmente basado en los desarrollos de:
FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H., op. cit., p. 205-206.
SMITH, K.V. y TITO, D.A., op. cit.

(30) Tal como vimos en el epígrafe quinto del capítuloV.

(31) Interesa resaltar que las relaciones que vamos a establecer son entre J'_p y T_p y entre J'_p y T''_p, pero en ningún caso trabajaremos con J_p. En realidad, si se comparan las performances de los títulos de acuerdo con J_p y T'_p, pueden surgir situaciones contradictorias tal como apunta Sharpe.

SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 194-195.

(32) TREYNOR, J.L.: "Discussion: The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-64". Journal of Finance, vol. 23, mayo 1968, p. 418-419.

(33) FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H., op. cit., p. 199.

(34) SMITH, K.V. y TITO, D.A., op. cit.

(35) La figura 8.8 está tomada de:

Ibid, p. 462.

(36) JENSEN, M.C., op. cit.

(37) SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 199.

(38) JENSEN, M.C., op. cit.

(39) SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 199.

(40) SHARPE, W.F. (1966), op. cit.

(41) SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 200-201.

(42) SHARPE, W.F. (1966), op. cit., p. 137.

(43) TREYNOR, J.L., op. cit., p. 71.

(44) JENSEN, op. cit.

(45) TREYNOR, J.L. y MAZUY, K.K.: "Can Mutual Funds Outguess the Market?" Harward Business Review, Julio-Agosto 1966, p. 131-136.

(46) SHARPE, W.F. (1966), op. cit.

(47) SHARPE, W.F. (1976), op. cit., p. 212.

CAPITULO IX

LAS DECISIONES DE FINANCIACION E INVERSION EN EL MARCO DEL CAPM

9.1. Introducción

En este capítulo vamos a desarrollar algunas aplicaciones del CAPM standard en distintas áreas de la Economía de la Empresa; en particular en el área de inversión y financiación. La importancia de los problemas financieros dentro de la Economía de la Empresa es evidente y hay autores como Suarez que definen la empresa "desde el punto de vista de la fenomenología económica como una sucesión en el tiempo de proyectos de inversión y financiación" (1).

Normalmente, las decisiones de inversión y financiación se estudian y analizan por separado. Sin embargo, aunque se justifique desde el punto de vista didáctico, es evidente que ambas decisiones están estrechamente interrelacionadas, siendo el nexo de unión el coste del capital.

El coste del capital es relativamente fácil de definir, pero presenta muchos problemas importantes el medirlo. Gordon (2) lo define de la siguiente manera: "El coste de capital de una empresa es aquella tasa de descuento que reune la propiedad de que una inversión con una rentabilidad interna superior (inferior) a esta tasa aumentará (reducirá) el valor de la empresa". Por lo tanto, el coste del capital es la tasa mínima de rentabilidad que se le debe exigir a un proyecto de inversión con el fin de que el valor de la empresa no disminuya y el proyecto de inversión se pueda considerar acep table, de acuerdo con el objetivo del enfoque moderno de la gestión financiera.

Ribas da una definición operativa del coste del capiral en base a la cual se puede medir su cuantía (3). Para este autor, el coste del capital "no es sino la media ponderada de los costes explícitos de los recursos ajenos y de los implícitos de los propios" (4).

De acuerdo con esta última definición del coste del capital, cabe esperar que un cambio en la estructura financiera de la empresa (al cambiar las ponderaciones en que intervienen los distintos recursos financieros), modifique el coste del capital, por lo que las decisiones de inversión y financiación están íntimamente relacionadas.

La cuestión de si el coste del capital depende o no de la estructura del capital de la empresa, o lo que es lo mismo, del ratio de endeudamiento (5) ha sido, y continúa siéndolo, uno de los temas más discutidos y polémicos del área financiera. La importancia de una correcta medición de su cuantía queda clara desde el momento en que una vez que se determina el coste del capital, inmediatamente se puede calcular el valor de la empresa, ya que el coste del capital puede también considerarse como la tasa de capitalización que hay que aplicar al ingreso neto operativo (antes de impuestos y de deducir intereses) con el fin de hallar el valor de la empresa. De forma que si el coste del capital alcanza un mínimo para un ratio de endeudamiento dado, el valor de la empresa será máximo.

Aunque es costumbre señalar el año 1952 como fecha del comienzo de los estudios sobre el coste del capital con el trabajo de Durand (6), lo cierto es que hay antecedentes muy anteriores sobre el tema. Así, Williams en 1938 ya afirmaba que "ningún cambio en el valor de la inversión de la empresa como un todo resulta de un cambio en su capitalización" (7). Si bien es justo reconocer que fue Durand el primero en hablar de los dos métodos fundamentales y contrapuestos de valoración de acciones: métodos NOI y NI (8).

En el artículo de Durand, al que acabamos de hacer referencia, se llega a la conclusión de que ambos métodos de valoración se corresponden con posturas extremas que no se dan en la realidad, ya que el coste del capital en el mundo real, decrece en un comienzo a medida que se incrementa el ratio de endeudamiento alcanzando un mínimo, a partir del cual la variación es creciente con respecto al ratio de endeudamiento o "leverage" financiero. Por tanto, según Durand, existe una estructura financiera óptima para la cual el valor de la empresa es máximo. Esta posición de Durand constituye lo que luego ha dado en llamarse tesis tradicional, tesis que ha sido defendida entre otros por los siguientes autores: Schwartz, Gordon, Solomón, Brigham y Gordon (9).

La tesis tradicional fue la postura generalmente aceptada hasta que en 1958 apareció el artículo de Modigliani y Miller (10) (M-M) que marcó un verdadero hito en la literatura financiera. Modigliani y Miller apoyándose en una construcción teórica, completamente correcta desde el punto de vista lógico, demostraron que, en ausencia de impuestos y suponiendo la existencia de un mercado de capitales perfecto, el coste de capital y, en consecuencia, el valor de la empresa, son independientes del "leverage" financiero, con lo cual la estructura financiera no tiene ningún efecto sobre la valoración de una empresa.

"Se había iniciado así una polémica que ha hecho correr ríos de tinta, pero que a pesar de las múltiples y a veces valiosas aportaciones recibidas aún no ha llegado a una solución definitiva" (11).

Si se aceptan los supuestos de base, de M-M, como ya hemos indicado, la estructura deductiva es irreprochable en términos lógicos; por lo cual lo único que se puede criticar al armazón teórico de M-M es que "las hipótesis de base están demasiado alejadas de lo que ocurre en el mundo real" (12).

Así, cuando se acerca el modelo de M-M a la realidad y se supone la existencia del impuesto sobre sociedades, los mismos autores se ven obligados a corregir su modelo y modificar sus conclusiones (13): en un mundo con impuestos, según M-M, cuanto más se endeuda la empresa, mayor será su valor.

Sin embargo, como observan Brennan y Schwartz (14): "La mayoría de las empresas evitan las estructuras de capital altamente endeudadas" en contra de lo que se desprende de las conclusiones de M-M con impuestos.

Esta discrepancia la justifican M-M, en parte, por la existencia del impuesto sobre la renta de las personas físicas que provoca que la financiación con beneficios no distribuidos sea más barata que la deuda y, en parte también, debido al hecho de que las empresas se reservan a menudo un potencial de endeudamiento, al no utilizar la deuda al máximo, con el fin de asegurarse una mayor flexibilidad en su gestión financiera.

Sin embargo, otros autores como Robicheck y Myers, y Kraus y Litzenberger, piensan que una de las razones de la discrepancia entre la teoría de M-M y la realidad se debe a la posibilidad de insolvencia de las empresas endeudadas.(15) Una empresa con deuda en su estructura de capital puede presentar una posición de insolvencia al final del período si no puede hacer frante a sus obligaciones, por ello debe tenerse en cuenta explícitamente esta posibilidad y penalizar tal situación con unos "costes de quiebra", siendo la existencia de los costes de quiebra el eslabón que le falta a la teoría de M-M para poder explicar el mundo real (16). Así, mediante el uso de diversos modelos, los trabajos de Robicheck y Myers, Batxer, Kraus y Litzenberger, Scott, Lee y Barker, Chen, Kim, Turnbull (17), demuestran que, con impuesto sobre sociedades y costes de quiebra, existe una estructura óptima de capital para la empresa.

Por tanto, al introducir la posibilidad de insolvencia de las empresas y que éstas incurran en los correspondientes costes de quiebra "se refuerza la concepción tradicional de que existe una estructura óptima de capital que maximiza el valor de la empresa para sus accionistas; quedando entonces -

las Proposiciones de M-M sólo como un caso particular cuando los costes de quiebra sean cero o no exista posibilidad de - quiebra" (18).

9.2. El CAPM y las Decisiones de Financiación

A continuación vamos a analizar la relación que existe entre la estructura financiera de la empresa y su valor de mercado en base al modelo de precios de equilibrio de los activos financieros.

Aunque hay trabajos iniciales sobre esta aplicación del CAPM, como los de Hamada y Rubinstein (19), que demuestran la validez de las proposiciones I y II de M-M en un mundo con y sin impuestos, nosotros, teniendo en cuenta que es necesario introducir la posibilidad de insolvencia si se quiere acercar el modelo a la realidad y llegar a resultados que estén en consonancia con lo que se observa en ella, vamos a - basarnos en el trabajo más general de Kim (20) que supone la existencia de impuestos y costes de quiebra.

Nuestro primer objetivo va a ser establecer un modelo de valoración de la empresa en base al CAPM y demostrar - que las Proposiciones I y II de M-M del artículo de 1958 son un caso particular del modelo que expondremos cuando no existan impuestos ni costes de quiebra (21).

Pero mientras que M-M basan su argumentación en un modelo de equilibrio parcial y se apoyan en el concepto de clases de riesgo y el proceso de arbitraje, nosotros vamos a trabajar con un modelo de equilibrio general: el CAPM (22).

Por último, conviene advertir que, en los capítulos anteriores, los activos arriesgados del CAPM hacían referencia a títulos o valores mobiliarios, mientras que en este capítulo se va a ampliar el concepto de activo arriesgado para incluir también en él a las empresas; empresas que, como cualquier otro activo en un mundo de dos parámetros, estarán caracterizadas por los dos primeros momentos de la función de distribución de sus rendimientos.

En el contexto de la estructura uniperíodo del CAPM, esto exige tener que introducir el supuesto fuertemente restrictivo de que la empresa se disuelve al final del período. Más adelante, volveremos a tratar de esta cuestión.

9.3. Rendimiento de las Acciones de una Empresa sin Deudas

Admitiendo que se dan ciertas imperfecciones en el mercado de capitales, suponemos que existe un impuesto que grava los beneficios de las sociedades (23) y unos costes de quiebra.

Contemplamos el caso sencillo de una empresa que al comienzo del período de estudio, no tiene deudas pendientes -

con antiguos obligacionistas, de forma que está completamente financiada por capital propio al inicio del período (24).

Asimismo, con el fin de separar las decisiones de - inversión y financiación, suponemos que la empresa ya ha seleccionado, por el procedimiento que sea, el o los proyectos de inversión a realizar, pero no ha decidido aún como va a financiarlos.

El coste del nuevo proyecto de inversión es de A - unidades monetarias y el ingreso que se espera obtener (sin - descontar ni los impuestos, ni los posibles intereses), es decir, el ingreso después de pagar a todos los factores productivos que no sean factores de capital, es la variable aleatoria $\widetilde{X}$.

Como nos movemos en el contexto de un modelo uniperíodo y con el fin de evitar posibles efectos sobre la valoración de las firmas distintas del ratio de endeudamiento, tales como por ejemplo la política de dividendos, sistemas de - amortización, etc., supondremos que la firma se disuelve al final del período, con lo cual los ingresos netos operativos serán: $\widetilde{X} - A$. Estos ingresos operativos también pueden considerarse como la suma de los dividendos más las ganancias de capital realizadas durante el período de estudio.

Si la empresa decide financiar el total de la inversión con acciones, entonces su valor de mercado será:

$$V_A = S_A \qquad (9.1)$$

donde S_A es el valor de mercado de las acciones de una empresa A sin deudas. De modo que el rendimiento aleatorio obtenido por los accionistas, después de pagar los impuestos al Gobierno, expresado en términos de uno más el rendimiento aleatorio obtenido por unidad monetaria invertida en las acciones de la empresa A, será:

$$\widetilde{R}_A = \frac{\widetilde{X} - t\,(\widetilde{X} - A)}{S_A} = \frac{(1-t)\,\widetilde{X} + At}{S_A} \qquad (9.2)$$

siendo t el tipo de gravamen del impuesto sobre el beneficio de las sociedades.

9.4. Rendimiento de las Acciones de una Empresa con Deudas

Si la empresa decide financiar parte o todo el proyecto de inversión mediante la emisión de D unidades monetarias en obligaciones, el valor de la firma, por definición, será:

$$V_B = S_B + D \qquad (9.3)$$

donde S_B es el valor de mercado de las acciones de la empresa B que tiene obligaciones en su estructura de capital (25).

Evidentemente, desde el momento en que los ingresos $\widetilde{X}$ son una variable aleatoria y la empresa debe hacer frente a unos pagos fijos: amortizar las obligaciones emitidas y pagar los intereses al final del período, existe la posibilidad de que la empresa sea insolvente en el caso en que:

$$\tilde{X} < \hat{r} D \qquad (9.4)$$

siendo $\hat{r}$ uno más la tasa de interés prometida a los obligacionistas.

En el marco de un modelo uniperiódico, como éste, no se suele distinguir entre quiebra o bancarrota e insolvencia. En un modelo multiperíodo, sí que habría que distinguir entre ambas situaciones, ya que en el caso de producirse la insolvencia, siempre sería posible diferir los pagos por intereses a costa, claro está, de un mayor tipo de interés.

Al contemplar explícitamente la posibilidad de insolvencia de la firma endeudada, hay que introducir una nueva variable que no aparece en los planteamientos clásicos: Los costes de quiebra. Dichos costes de quiebra han sido analizados, entre otros autores, por Baxter, Van Horne y Kim (26). Kim distingue en ellos tres componentes (27):

a) En el caso de que la quiebra tome la forma de liquidación, los costes que se derivan de la venta de los activos a precios de "miseria" debido a que los mercados secundarios de los activos físicos son imperfectos, o bien, en el caso de que la situación de insolvencia tome la forma de una simple reorganización de la empresa, los costes que Baxter llama "costes indirectos" y que comprenden, entre otros, la reducción de las ventas a los clientes debido a la desconfianza de éstos hacia la empresa, dificultad para obtener créditos, costes de producción mál altos debido a la reorganización, el tiempo que pierden los ejecutivos en el proceso de reorganización, etc.

b) Los gastos administrativos de la quiebra debidos a los pagos a abogados, administradores, subastadores, árbitros, contables, etc. Este segundo tipo de costes recibe la máxima prioridad en el procedimiento de quiebra.

c) El tercer tipo de costes se deriva de las leyes fiscales norteamericanas y no parece tener un homólogo claro en el caso español. Este tercer tipo de costes se refiere a los créditos de impuestos a los cuales la empresa hubiese tenido derecho en el caso de no haber quebrado.

Por tanto, si se reconoce que existe una probabilidad no nula de que la empresa endeudada sea insolvente o quiebre al final del período (produciéndose este hecho cuando $\tilde{X} < \hat{r}D$), el rendimiento que espera obtener un obligacionista (28), es una variable aleatoria que se define de la siguiente manera:

$$\tilde{r} = \begin{cases} \hat{r} & \text{si } \tilde{X} \geq \hat{r}D \\ \dfrac{\tilde{X} - \tilde{C}}{D} & \text{si } \tilde{X} < \hat{r}D \end{cases} \qquad (9.5)$$

siendo $\tilde{C}$ la variable aleatoria que representa los costes de quiebra (29).

Los costes de quiebra a su vez se definen del siguiente modo:

$$\tilde{C} = \begin{cases} 0 & \text{si } \tilde{X} \geq \hat{r}D \\ C(\tilde{X}) & \text{si } \tilde{X} < \hat{r}D \end{cases} \qquad (9.6)$$

donde $C(\widetilde{X})$ es una función directa de $\widetilde{X}$, pero sin llegar a superar a $\widetilde{X}$: $C(\widetilde{X}) \leqslant \widetilde{X}$, ya que los obligacionistas tienen una responsabilidad limitada y, en ningún caso, se puede producir un rendimiento negativo.

De todo lo dicho hasta ahora, se desprende que el rendimiento aleatorio que espera obtener el accionista, luego de devolver el principal y pagar los intereses a los obligacionistas y de satisfacer los impuestos al Gobierno, expresado en términos de uno más el rendimiento obtenido sobre cada unidad monetaria invertida en acciones de la empresa B, será (30):

$$\widetilde{R}_B = \frac{\widetilde{X} - (\widetilde{X} - A - D - (\widetilde{r}-1)D)t - \widetilde{r}D - (1-t)\widetilde{C}}{S_B}$$

$$\widetilde{R}_B = \frac{(1-t)\ (\widetilde{X} - \widetilde{r}D) - (1-t)\ \widetilde{C} + At}{S_B} \qquad (9.7)$$

Es decir, que al ingreso que resulta luego de pagar a todos los factores productivos que no sean factores de capital, $\widetilde{X}$, hay que restarle el impuesto sobre sociedades que se aplica a $\widetilde{X}$ de la que se ha deducido previamente: el pago del principal y los intereses de la deuda, la amortización A y los posibles costes de quiebra. Y de la cantidad resultante hay que descontar el pago de la deuda y sus correspondientes intereses así como los costes de quiebra con el fin de hallar el rendimiento en términos absolutos que les corresponde a los accionistas. Rendimiento absoluto que al dividirlo por S_B nos da el rendimiento relativo de las acciones de la empresa B.

9.5. Valor de la Empresa

En el capítulo IV vimos que la relación de equilibrio entre la rentabilidad y el riesgo de los activos arriesgados era según el CAPM standard:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \lambda^{**} \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) \qquad (9.8)$$

donde $\lambda^{**} = (E(\tilde{R}_M) - R_f)/\sigma^2(\tilde{R}_M)$ es lo que impropiamente se llama precio de mercado del riesgo. Esta ecuación también es válida cuando los rendimientos están expresados en términos de uno más el tanto por ciento correspondiente, ya que:

$$E(1+\tilde{R}_i) = (1+R_f) + \frac{E(1+\tilde{R}_M) - (1+R_f)}{\sigma^2(1+\tilde{R}_M)} \cdot \operatorname{cov}(1+\tilde{R}_i, 1+\tilde{R}_M)$$

$$1+E(\tilde{R}_i) = 1 + R_f + \frac{1 + E(\tilde{R}_M) - 1 - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \cdot \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)$$

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \frac{E(\tilde{R}_M) - R_f}{\sigma^2(\tilde{R}_M)} \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) = R_f + \lambda^{**} \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) \qquad (9.9)$$

Además, Kim (31) ha demostrado que (9.8) sigue siendo la relación que se cumple entre la rentabilidad y el riesgo de los activos financieros en el caso de que tanto $\tilde{R}_i$ como $\tilde{R}_M$ se definan como rendimientos después de descontar los costes de quiebra. Por lo tanto, aplicando (9.8) a los rendimientos de las acciones de las firmas A y B, se obtiene (32):

Para la firma A:

$$\frac{(1-t)\, E(\tilde{X}) + At}{S_A} = R_f + \lambda^{**} \frac{(1-t)}{S_A} \operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{R}_M) \qquad (9.10)$$

$$(1-t)\, E(\tilde{X}) + At = R_f\, S_A + \lambda^{**} (1-t) \operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{R}_M) \qquad (9.11)$$

Para la firma B:

$$\frac{(1-t)\,E(\tilde{X}) - (1-t)\,DE(\tilde{r}) - (1-t)\,E(\tilde{C}) + At}{S_B} =$$

$$= R_f + \lambda^{**}\frac{(1-t)}{S_B}\operatorname{cov}(\tilde{X},\tilde{R}_M) - \lambda^{**}\frac{(1-t)D}{S_B}\operatorname{cov}(\tilde{r},\tilde{R}_M) -$$

$$- \lambda^{**}\frac{(1-t)}{S_B}\operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_M) \qquad (9.12)$$

$$(1-t)E(\tilde{X}) + At = R_f S_B + \lambda^{**}(1-t)\operatorname{cov}(\tilde{X},\tilde{R}_M) +$$

$$+ (1-t)D\left[E(\tilde{r}) - \lambda^{**}\operatorname{cov}(\tilde{r},\tilde{R}_M)\right] + (1-t)\left[E(\tilde{C}) - \lambda^{**}\operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_M)\right] \qquad (9.13)$$

Igualando (9.11) y (9.13), recordando que las obligaciones, al ser un activo arriesgado, también cumplen la relación (9.8) y simplificando, se obtiene:

$$R_f S_A + \lambda^{**}(1-t)\operatorname{cov}(\tilde{X},\tilde{R}_M) = R_f S_B + \lambda^{**}(1-t)\operatorname{cov}(\tilde{X},\tilde{R}_M) +$$

$$+ (1-t)\,DR_f + (1-t)\left[E(\tilde{C}) - \lambda^{**}\operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_M)\right]$$

$$R_f S_A = R_f S_B + DR_f - DtR_f + (1-t)\left[E(\tilde{C}) - \lambda^{**}\operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_M)\right]$$

$$S_A = (S_B + D) - Dt + (1-t)\,\frac{E(\tilde{C}) - \lambda^{**}\operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_M)}{R_f} \qquad (9.14)$$

Asimismo, teniendo en cuenta (9.1) y (9.3) y denotando por:

$$V(\tilde{C}) = \frac{E(\tilde{C}) - \lambda^{**}\operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_M)}{R_f} \qquad (9.15)$$

el valor actual ajustado al riesgo de los costes de quiebra - (33), la expresión (9.14) puede finalmente ponerse del siguiente modo:

$$V_B = V_A + tD - (1-t)\ V(\widetilde{C}) \qquad (9.16)$$

Esta ecuación (9.16) constituye la alternativa a la Proposición I de M-M en una situación con impuesto sobre sociedades y con probabilidad de insolvencia en las empresas. - De modo que, en dicho contexto, el valor de mercado de una - firma endeudada es igual al valor de mercado de una firma que no tenga deudas, y a su vez posea una composición del activo idéntica a la de la firma con deudas, más el tipo impositivo del impuesto sobre sociedades por el valor actual de la deuda menos la fracción (1-t) del valor actual de los costes de - quiebra.

En (9.16) se observan perfectamente los efectos contrapuestos de los impuestos y los costes de quiebra. Cuanto - más se endeuda la empresa, mayor es el valor de V_B como consecuencia del ahorro de impuestos, pero también mayor es la probabilidad de quiebra y, en consecuencia, mayor será $V(\widetilde{C})$, - con lo cual el valor de V_B disminuirá. La estructura financiera óptima será aquella en que ambos efectos contrapuestos queden convenientemente compensados (34).

9.6. Las Proposiciones I y II de M-M sin Impuesto sobre Sociedades

Si suponemos que no existen impuestos ni costes de quiebra:

$$t=0 \tag{9.17}$$

$$V(\tilde{C})=0 \tag{9.18}$$

entonces (9.16) se reduce a (35):

$$V_B = V_A \tag{9.19}$$

La expresión (9.19) constituye la I Proposición de M-M sin impuesto sobre sociedades y asegura que el valor de una firma es invariante con respecto a su estructura financiera; de forma que dicho valor únicamente depende de la capacidad de los activos de la empresa para generar renta. Así, si llevamos (9.17) y (9.18) a las expresiones (9.2) y (9.7) correspondientes a los rendimientos de las firmas A y B, se tiene:

$$\tilde{R}_A = \frac{\tilde{X}}{S_A} \tag{9.20}$$

$$\tilde{R}_B = \frac{\tilde{X}-\tilde{r}D}{S_B} \tag{9.21}$$

Pero como se supone, según (9.18), que no existe posibilidad de quiebra, el rendimiento de las obligaciones se puede considerar que ya no es una variable aleatoria $\tilde{r}$, sino la tasa de interés libre de riesgo R_f (expresada en términos de uno más el tipo de interés del activo libre de riesgo), por lo que (9.21) puede expresarse como sigue, una vez aplicado el operador esperanza matemática en ambos miembros:

$$E(\tilde{R}_B) = \frac{E(\tilde{X}) - R_f}{S_B} \qquad (9.22)$$

La expresión (9.20), a su vez, se puede poner de la siguiente manera:

$$S_A = V_A = \frac{\tilde{X}}{\tilde{R}_A} \qquad (9.23)$$

y tomando esperanzas en (9.23), se llega a que:

$$V_A = \frac{E(\tilde{X})}{E(\tilde{R}_A)} \qquad (9.24)$$

con lo cual (9.19) puede expresarse como:

$$V_B = V_A = \frac{E(\tilde{X})}{E(\tilde{R}_A)} \qquad (9.25)$$

En resumen, según (9.25) el valor de una empresa únicamente depende de la capacidad de sus activos para generar renta, pudiéndose expresar dicho valor "como la capitalización del retorno esperado a la tasa apropiada de una firma que no tiene deudas en su estructura de capital" (36).

Para deducir la II Proposición de M-M vamos a tener en cuenta la opinión de Suárez, opinión que compartimos plenamente, referente a que la II Proposición de M-M no es nueva ni distinta de la Proposición I, sino que es un corolario o consecuencia de la primera Proposición (37).

Así, de acuerdo con la primera Proposición de M-M, reflejada en la ecuación (9.25), y teniendo en cuenta (9.3), se puede llegar a que:

$$E(\tilde{X}) = V_B \cdot E(\tilde{R}_A) = (S_B + D)\, E(\tilde{R}_A) \qquad (9.26)$$

Si ahora llevamos (9.26) a (9.22), finalmente se obtiene:

$$E(\widetilde{R}_B) = \frac{E(\widetilde{X}) - R_f D}{S_B}$$

$$E(\widetilde{R}_B) = \frac{(S_B + D)\ E(\widetilde{R}_A) - R_f D}{S_B}$$

$$E(\widetilde{R}_B) = (1 + D/S_B)\ E(\widetilde{R}_A) - R_f\ D/S_B$$

$$E(\widetilde{R}_B) = E(\widetilde{R}_A) + (E(\widetilde{R}_A) - R_f)\ D/S_B \qquad (9.27)$$

La expresión (9.27) (38) es la II Proposición de M-M (1958), según la cual el rendimiento esperado de las acciones de una empresa endeudada es una función lineal del ratio de endeudamiento o "leverage" financiero.

9.7. Las Proposiciones I y II de M-M con Impuesto sobre Sociedades

Siguiendo un razonamiento paralelo al efectuado para demostrar las Proposiciones I y II de M-M (1958), se puede asimismo llegar a las Proposiciones I y II de M-M en un mundo con impuestos (1963). Para ello, no hay más que particularizar la ecuación (9.16) para el caso en que no existen costes de quiebra. De modo que si tenemos en cuenta (9.18), la expresión (9.16) queda como sigue:

$$V_B = V_A + tD \qquad (9.28)$$

con lo cual se obtiene directamente la Proposición I de M-M con impuesto sobre sociedades. Dicha proposición nos dice que el valor de una empresa con deudas en su estructura de capital es igual al valor de mercado de una firma equivalente que no tuviese deudas, más el tipo impositivo del impuesto sobre sociedades multiplicado por el valor de la deuda. De modo que si se tiene en cuenta la existencia del impuesto sobre sociedades, el valor de una firma ya no es independiente de su estructura financiera, sino que por el contrario a la firma le interesa endeudarse todo lo que le sea posible, pudiéndose llegar al caso extremo de que dicha estructura financiera esté compuesta exclusivamente por obligaciones y que el ratio de endeudamiento (D/V), en consecuencia, sea del 100%.

Este efecto se produce porque los intereses de las obligaciones son deducibles del impuesto sobre sociedades, con lo cual al aumentar la deuda, disminuye la parte de $\widetilde{X}$ que va a parar a manos del Gobierno y, por consiguiente, aumenta el rendimiento residual de las acciones (39).

Al igual que antes, en un mundo con impuestos, si se cumple la I Proposición de M-M, también se cumple la II, ya que ésta se deduce de la primera, tal como vamos a demostrar a continuación.

Las expresiones de los rendimientos de una firma sin deuda y con deuda: (9.2) y (9.7) teniendo en cuenta (9.18) es decir, en el caso de que no existan costes de quiebra, son (40):

$$\widetilde{R}_A = \frac{(1-t)\ \widetilde{X} + At}{S_A} \qquad (9.29)$$

$$\widetilde{R}_B = \frac{(1-t)\ (\widetilde{X} - R_f D) + At}{S_B} \qquad (9.30)$$

Si ahora definimos $\widetilde{X}_t$ como el ingreso que obtiene la firma endeudada B después de impuestos, pero antes de devolver el principal y pagar los intereses, esto es:

$$\widetilde{X}_t = \widetilde{X} - (\widetilde{X} - A - R_f D)\ t = \widetilde{X}(1-t) + At + R_f Dt =$$

$$= \widetilde{X}(1-t) + At + R_f\ Dt + R_f\ D - R_f\ D =$$

$$= (\widetilde{X} - R_f D)\ (1-t) + At + R_f\ D \qquad (9.31)$$

entonces (9.30) también puede expresarse de la siguiente manera:

$$\widetilde{R}_B = \frac{(1-t)\ (\widetilde{X} - R_f D) + At}{S_B} = \frac{\widetilde{X}_t - R_f D}{S_B} \qquad (9.32)$$

Tomando esperanzas matemáticas en (9.29) y operando se tiene:

$$E(\widetilde{R}_A) = \frac{(1-t)\ E(\widetilde{X}) + At}{S_A}$$

$$S_A = V_A = \frac{(1-t)\ E(\widetilde{X}) + At}{E(\widetilde{R}_A)} \qquad (9.33)$$

y llevando el valor de V_A dado por (9.33) a la I Proposición de M-M con impuestos, esto es, a (9.28), se tiene:

$$V_B = V_A + tD = \frac{(1-t)\ E(\widetilde{X}) + At}{E(\widetilde{R}_A)} + tD$$

$$(1-t)\ E(\widetilde{X}) + At = V_B\ E(\widetilde{R}_A) - tD\ E(\widetilde{R}_A) \qquad (9.34)$$

Por otra parte, tomando esperanzas matemáticas en (9.30) y recordando (9.34) y (9.3), tenemos:

$$E(\widetilde{R}_B) = \frac{(1-t)\,E(\widetilde{X}) - (1-t)\,R_f D + At}{S_B} =$$

$$= \frac{V_B\,E(\widetilde{R}_A) - tD\,E(\widetilde{R}_A) - (1-t)\,R_f D}{S_B} =$$

$$= E(\widetilde{R}_A) + \frac{D}{S_B}\,E(\widetilde{R}_A) - t\,\frac{D}{S_B}\,E(\widetilde{R}_A) - (1+t)\,\frac{D}{S_B}\,R_f =$$

$$= E(\widetilde{R}_A) + (E(\widetilde{R}_A) - R_f)\,\frac{(1-t)\,D}{S_B} \qquad (9.35)$$

Aplicando el operador esperanza matemática a (9.32), $E(\widetilde{R}_B)$ también puede expresarse como:

$$E(\widetilde{R}_B) = \frac{E(\widetilde{X}_t) - R_f D}{S_B} \qquad (9.36)$$

y llevando (9.36) a (9.35) y operando, se obtiene:

$$\frac{E(\widetilde{X}_t) - R_f D}{S_B} = E(\widetilde{R}_A) + (E(\widetilde{R}_A) - R_f)\,\frac{(1-t)\,D}{S_B}$$

$$E(\widetilde{X}_t) - R_f D = E(\widetilde{R}_A)S_B + (E(\widetilde{R}_A) - R_f)\,(D - tD)$$

$$E(\widetilde{X}_t) = R_f D + E(\widetilde{R}_A)S_B + E(\widetilde{R}_A)D - E(\widetilde{R}_A)tD - R_f D + R_f Dt$$

$$E(\widetilde{X}_t) = E(\widetilde{R}_A)\,(S_B + D) - (E(\widetilde{R}_A) - R_f)Dt \qquad (9.37)$$

Finalmente, dividiendo por V_B y teniendo presente (9.3) se - llega a que (41):

$$\frac{E(\widetilde{X}_t)}{V_B} = E(\widetilde{R}_A) - t\,(E(\widetilde{R}_A) - R_f)\,\frac{D}{V_B} \qquad (9.38)$$

La ecuación (9.38) es la Proposición II de M-M - (1963) (42) donde el primer miembro, que es el coste de capital después de los impuestos, es una función inversa del ratio de endeudamiento (que ahora está expresado por D/V_B) ponderado por el tipo impositivo del impuesto sobre sociedades; por lo que la influencia del ratio de endeudamiento en el coste del capital, en un mundo con impuestos, según M-M (43), - "es considerablemente más pequeña que en la ingenua versión - tradicional", donde no se produce la ponderación por el coeficiente t (44).

9.8. Capacidad de Endeudamiento de la Empresa

En un mundo con impuestos, según la Proposición I de M-M, a la empresa le conviene endeudarse tanto como le - sea posible. Sin embargo, como ya hemos comentado con anterioridad, las empresas no mantienen estructuras financieras - altamente endeudadas, entre otras razones, porque existe una capacidad de endeudamiento de la firma que ésta no puede sobrepasar.

Donaldson (45) define la capacidad de endeudamiento como el punto donde la probabilidad de que existan problemas se vuelve inaceptablemente alta, pero no define posteriormente que entiende él por problemas.

En cambio, Myers (46) supone que no es la empresa la que se fija el límite, sino que la capacidad de endeudamiento le viene dada por el mercado exógenamente. Jaffee (47) ha demostrado que incluso aunque los prestamistas sean indiferentes al riesgo, desde el momento en que cuando se produce la quiebra se incurre en unos costes que reciben la máxima prioridad, para los prestamistas es conveniente limitar el crédito que van a proporcionar a una empresa. Por tanto, "la existencia de una cantidad máxima de crédito que los prestamistas están dispuestos a dar a la empresa proporciona una definición natural de la capacidad de deuda" (48).

Por último, para Kim (49) "la capacidad de deuda se define como la cantidad máxima que una firma con unas inversiones dadas puede pedir prestado en un mercado de capitales perfecto".

Para la empresa únicamente existirá una estructura financiera óptima en el caso de que la cantidad de deuda óptima, para la cual el valor de la empresa es máximo (50), se alcance antes de llegar a la capacidad de endeudamiento (51). Asimismo, es necesario que la capacidad de endeudamiento se produzca antes de que la posibilidad de quiebra o insolvencia se convierta en cierta. Naturalmente, para que el concepto de capacidad de endeudamiento tenga sentido es necesario que esta cantidad máxima de crédito, que los prestamistas están dispuestos a dar a la empresa, se alcance antes de que el ratio de endeudamiento (D/V) sea igual al 100%.

Vamos a denotar por $\bar{D}$ la capacidad de endeudamiento de la firma. En un mercado de capitales perfecto, siempre que la empresa no haya alcanzado aún su capacidad de endeudamiento, es posible conseguir crédito adicional prometiendo pagar a los prestamistas los intereses y el principal al final del período.

Una vez que se ha alcanzado la capacidad de endeudamiento, ya no es posible, por definición, pedir prestado cantidades adicionales con independencia de lo que se prometa pagar por ello. En términos matemáticos:

$$\frac{d\,D}{d\,\hat{r}\,D} > 0 \qquad \text{para } \hat{r}D < \hat{r}\bar{D} \tag{9.39}$$

$$\frac{d\,D}{d\,\hat{r}\,D} = 0 \qquad \text{para } \hat{r}D = \hat{r}\,\bar{D}\,. \tag{9.40}$$

Vamos a demostrar, siguiendo a Kim (52), que en el caso de que existan costes de quiebra, la capacidad de endeudamiento se alcanza antes de que la quiebra o insolvencia sea cierta, aun suponiendo un mundo en el que exista una actitud de neutralidad ante el riesgo; con lo cual quedará claro que no es la aversión al riesgo la causa de que exista una capacidad de endeudamiento.

Como vimos en el capítulo I, un individuo con indiferencia ante el riesgo unicamente tiene en cuenta el primer momento de la función de distribución, por lo que el valor actual de mercado de la deuda en esta situación es simplemente el valor que los obligacionistas esperan recibir a fin de período descontado a la tasa libre de riesgo:

$$D = \frac{E\,(\tilde{r}\,D)}{R_f} \tag{9.41}$$

El valor esperado por los obligacionistas es igual a la cantidad que van a recibir, en caso de que no se produzca la quiebra, multiplicado por la probabilidad de que la quiebra no se dé, más la cantidad que van a recibir si se produce la quiebra por la probabilidad de que la quiebra se produzca. Por tanto, el valor actual de la deuda (9.41) teniendo en cuenta (9.5) y (9.6) se puede expresar del siguiente modo:

$$D = \frac{\left[\hat{r}\, D\left[1-F(\hat{r}D)\right]\right] + \int_{-\infty}^{\hat{r}D} \tilde{X}\, f(\tilde{X})\, d\tilde{X} - \int_{-\infty}^{\hat{r}D} C(\tilde{X})\, f(\tilde{X})\, d\tilde{X}}{R_f} \qquad (9.42)$$

donde:

$f(\tilde{X})$ es la función de densidad de la variable aleatoria $\tilde{X}$

$F(\hat{r}D) = \int_{-\infty}^{\hat{r}D} f(\tilde{x})\, d\tilde{x}$, es la probabilidad de que la quiebra se produzca al final del período.

Si existe una capacidad de deuda, entonces D debe alcanzar un máximo relativo, esto es $dD/d\hat{r}D = 0$ y $d^2D/d(\hat{r}D)^2 < 0$. Calculemos pues, en primer lugar, la derivada de D con respecto a $\hat{r}D$ (53):

$$\frac{dD}{d\hat{r}D} = \left(\left[1 - F(\hat{r}D)\right] - \hat{r}D\,\frac{dF(\hat{r}D)}{d\hat{r}D} + \hat{r}D\, f(\hat{r}D) - C(\hat{r}D)\, f(\hat{r}D)\right)/R_f$$

$$\frac{dD}{d\hat{r}D} = \left(\left[1 - F(\hat{r}D)\right] - \hat{r}D\, f(\hat{r}D) + \hat{r}D\, f(\hat{r}D) - C(\hat{r}D)\, f(\hat{r}D)\right)/R_f$$

$$\frac{dD}{d\hat{r}D} = \frac{\left[1 - F(\hat{r}D)\right] - C(\hat{r}D)\, f(\hat{r}D)}{R_f} \qquad (9.43)$$

Por tanto, un cambio en $\hat{r}D$ tiene dos efectos sobre el valor actual de la deuda (D), uno positivo y otro negativo:

1) Al incrementar $\hat{r}D$, se incrementa $F(\hat{r}D)$ y, por tan

to, $1-F(\hat{r}D)$ disminuye, con lo cual D también disminuye.

2) Al incrementar $\hat{r}D$, $C(\hat{r}D)$ también se incrementa, ya que $C(\hat{r}D)$ es una función directa de $\hat{r}D$ (tal como vimos con anterioridad), y como $f(\hat{r}D)$ siempre es positiva, resulta finalmente que D aumenta (54).

A continuación demostraremos que si $\widetilde{X}$ está distribuida normalmente, entonces $\left[1-F(\hat{r}D)\right]$ se iguala con $C(\hat{r}D)f(\hat{r}D)$ antes de que la probabilidad de quiebra sea uno (antes de que la quiebra sea cierta). Es decir, que existe un valor de $\hat{r}D$ para el cual: $dD/d\hat{r}D = 0$ y $F(\hat{r}D) < 1$.

Para un $\hat{r}D$ muy pequeño según se desprende de (9.43), se tiene que:

$$\frac{dD}{d\hat{r}D} \simeq \frac{1}{R_f} > 0 \qquad (9.44)$$

Si llegamos a demostrar que $dD/d\hat{r}D < 0$, para un $\hat{r}D$ grande pero finito, entonces está claro que debe haber un $\hat{r}D$ que vamos a denotar por $\hat{r}\overline{D}$, tal que $dD/d\hat{r}D = 0$. Veámoslo.

Cuando $\hat{r}D$ aumenta ya hemos visto que $C(\hat{r}D)$ también aumenta y al mismo tiempo, $\sigma^2(\widetilde{X})/(\hat{r}D - E(\widetilde{X}))$ debe disminuir, ya que $E(\widetilde{X})$ y $\sigma^2(\widetilde{X})$ son constantes. De modo que:

$$c(\hat{r}D) > \frac{\sigma^2(\widetilde{X})}{\hat{r}D - E(\widetilde{X})} \quad \text{para un } \hat{r}D \text{ lo suficientemente grande.} \qquad (9.45)$$

Una propiedad de las funciones de distribución normales es que:

$$\frac{\sigma^2(\widetilde{X})}{\hat{r}D - E(\widetilde{X})} f(\hat{r}D) > \left[1 - F(\hat{r}D)\right] \quad \text{para } \hat{r}D > E(\widetilde{X}) \qquad (9.46)$$

por lo que debe existir un $\hat{r}D$ grande y finito para el cual

$$C(\hat{r}D)\ f(\hat{r}D) > \frac{\sigma^2(\tilde{X})}{\hat{r}D - E(\tilde{X})}\ f(\hat{r}D) > \left[1 - F(\hat{r}D)\right]$$

$$C(\hat{r}D)\ f(\hat{r}D) > \left[1 - F(\hat{r}D)\right] \qquad (9.47)$$

de modo que (9.43) tomará un valor negativo, esto es:

$$\frac{d\,D}{d\,\hat{r}\,D} < 0 \qquad (9.48)$$

como queríamos demostrar.

Queda por probar que la condición de segundo orden $d^2D/d(\hat{r}D)^2 < 0$, también se satisface en el punto en que $\hat{r}D = \hat{r}\bar{D}$, pero con el fin de no recargar excesivamente la exposición, remitimos al lector interesado al artículo de Kim -- (1978).

Por tanto, ya hemos demostrado que se llega a la capacidad de endeudamiento $\bar{D}$ antes de que la quiebra se haga - cierta, esto es, antes de que $F(\hat{r}D) = 1$, así que siempre - existirá alguna posibilidad de que $\tilde{X} > \hat{r}D$.

Ahora nos queda por ver que la capacidad de endeudamiento se alcanza antes de que $\bar{D}/V_B = 1$. Es decir, antes de que la firma esté financiada única y exclusivamente por deuda.

La ecuación del rendimiento de las acciones de una firma endeudada, según la nota a pie de página 30, podría expresarse como sigue:

$$\tilde{R}_B = \begin{cases} \dfrac{(1-t)\ (\tilde{X} - \hat{r}D) + At}{S_B} & \text{si } \tilde{X} \geqslant \hat{r}D \\ 0 & \text{si } \tilde{X} < \hat{r}D \end{cases}$$

De tal forma que si existe alguna probabilidad de que $\widetilde{X} > \hat{r}D$ (como efectivamente ocurre), entonces S_B será positivo, de manera que cuando D alcance el valor $\overline{D}$, el valor de la firma ($V_B = S_B + \overline{D}$) será también positivo y por tanto:

$$\frac{\overline{D}}{V_B} < 1 \qquad (9.49)$$

tal como queríamos demostrar.

9.9. La Estructura Financiera Optima de la Empresa

La estructura financiera óptima de la empresa se alcanza en aquel valor de $\hat{r}D$ que haga que el valor de la misma alcance un máximo, esto es, para aquel valor de $\hat{r}D$ tal que:

$$\frac{d\,V_B}{d\,\hat{r}D} = t\,\frac{d\,D}{d\,\hat{r}D} - (1-t)\,\frac{d\,V(\widetilde{C})}{d\,\hat{r}\,D} = 0 \qquad (9.50)$$

Según se desprende de la expresión (9.50), un cambio en $\hat{r}$ D tiene dos efectos sobre el valor de la firma, uno positivo y el otro negativo. "Por una parte, un aumento en $\hat{r}D$ significa un incremento en el valor actual de los ahorros de impuestos (PVTS). Por otra parte, significa un incremento en el valor actual de los costes de quiebra (PVBC)" (55).

Para probar si efectivamente existe un valor de $\hat{r}D$ tal que la derivada del valor de la empresa con respecto a $\hat{r}D$

se iguale a cero, vamos a ver el signo que toma dicha derivada en dos valores distintos de $\hat{r}D$. Por un lado, un valor de $\hat{r}D$ que se aproxime al mínimo valor posible que puede alcanzar $\widetilde{X}$ y, por otro lado, un valor de $\hat{r}D$ igual a $\hat{r}\bar{D}$. De forma que si logramos demostrar que la derivada expresada por (9.50) pasa de un valor positivo a otro negativo, entonces está claro que la función del valor de la empresa es una curva convexa hacia el eje de ordenadas que alcanza un máximo relativo en algún punto intermedio entre los dos valores extremos que vamos a estudiar.

Cuando $\hat{r}D$ está lo suficientemente próximo al mínimo valor posible que pueda tomar $\widetilde{X}$, ya vimos anteriormente que:

$$\frac{dD}{d\hat{r}D} \longrightarrow \frac{1}{R_f} \qquad (9.51)$$

Asimismo, un valor pequeño de $\hat{r}D$ implica una probabilidad baja de quiebra, con lo cual:

$$\frac{d\,V(\widetilde{C})}{d\,\hat{r}\,D} \longrightarrow 0 \qquad (9.52)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (9.51) y (9.52), al analizar (9.50), se desprende que para este primer valor de $\hat{r}D$ estudiado, $dV_B/d\hat{r}D$ será estrictamente positiva.

Cuando $\hat{r}D$ toma un valor igual a $\hat{r}\bar{D}$, es decir, cuando el endeudamiento alcanza el límite señalado por la capacidad de deuda de la empresa, según demostramos antes:

$$\frac{d\,D}{d\,\hat{r}\,D} = 0 \qquad (9.53)$$

En ese punto donde $\hat{r}D$ es igual a $\hat{r}\bar{D}$, también vimos que la -

quiebra permanece incierta ($F(\hat{r}\bar{D}) < 1$), por lo que un aumento de $\hat{r}D$ por encima de $\hat{r}\bar{D}$, significa un incremento en la probabilidad de quiebra y, por consiguiente, un incremento en el valor actual de los costes de quiebra:

$$\frac{d\,V(\widetilde{C})}{d\,\hat{r}\,D} > 0 \qquad (9.54)$$

En consecuencia, si analizamos el signo que toma (9.50) en -- las proximidades de $\hat{r}\bar{D}$, teniendo presente las expresiones -- (9.53) y (9.54), se deduce que $dV_B/d\hat{r}D$ será estrictamente negativa.

Por lo tanto, debe haber algún valor intermedio de $\hat{r}D$ (llamémosle $\hat{r}D^*$) para el cual $dV_B/d\hat{r}D$ sea igual a cero y, en consecuencia, V_B alcance su máximo: V_B^*. Además, dado que $dV_B/d\hat{r}D$ es estrictamente negativa cuando $\hat{r}D$ toma el valor $\hat{r}\bar{D}$, está claro que:

$$\hat{r}\,D^* < \hat{r}\,\bar{D} \qquad (9.55)$$

De esta forma, se ha demostrado que existe una cantidad óptima de deuda (D^*) que maximiza el valor de la empresa y que da lugar a una estructura financiera óptima; cumpliéndose además que el valor D^* se alcanza antes de llegar al límite señalado por la capacidad de endeudamiento de la empresa (56). Esa estructura financiera óptima, según (9.50), viene dada por el valor de $\hat{r}D$ para el cual:

$$t\,\frac{d\,D}{d\,\hat{r}\,D} = (1-t)\,\frac{d\,V(\widetilde{C})}{d\,\hat{r}\,D} \qquad (9.56)$$

La expresión (9.56) se puede cumplir cuando ambos - miembros son cero en el caso de que la quiebra sea cierta. Pe ro no es ésta la situación aquí vista, ya que la capacidad de endeudamiento se alcanza antes de que la quiebra sea cierta y además, la estructura óptima de capital, según (9.55) implica un endeudamiento menor que el límite señalado por la capacidad de endeudamiento (57).

9.10. Las Decisiones de Inversión y el CAPM

En primer lugar, conviene advertir que el CAPM, en su versión standard, es un modelo uniperíodo, mientras que los proyectos de inversión de las empresas se deben estudiar y analizar en una estructura multiperíodo, con lo cual se produce una serie de dificultades al intentar aplicar el CAPM en la selección de inversiones, siendo necesario tener que formular unos supuestos restrictivos para resolver estas dificultades.

Por otra parte, hay que recordar que en los epígrafes siguientes también se considerará a la empresa como un activo arriesgado caracterizado por los dos primeros momentos de la función de distribución de sus rendimientos.

Por lo tanto, antes de entrar en el análisis de las decisiones de inversión, vamos a aclarar algunas cuestiones referentes a las características que deben tener los flujos de fondos de los proyectos de inversión para poder aplicar co rrectamente el modelo CAPM.

En la nota a pie de página 33 hemos visto como el valor que asigna el CAPM a un activo que genera una renta $\tilde{X}$, es:

$$V = \frac{E(\tilde{X}) - \lambda^{**} \operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{R}_M)}{R_f} \qquad (9.57)$$

Si ahora sumamos $\lambda^{**} \operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{R}_M)$ en el numerador y denominador del segundo miembro de(9.57), dicho valor V también puede expresarse como sigue:

$$V = \frac{E(\tilde{X})}{R_f + \lambda^{**} \operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{R}_M)} \qquad (9.58)$$

En (9.57) lo que se hace es descontar el equivalente cierto de la renta esperada del activo a la tasa libre de riesgo. Mientras que en (9.58) se aplica al ingreso esperado del activo una tasa de descuento ajustada al riesgo del mencionado activo.

La variable aleatoria $\tilde{X}$ puede ser interpretada de dos formas:

1) Como una renta perpetua; en cuyo caso $\tilde{R}_j = \tilde{X}/V$ debe ser considerado como el rendimiento aleatorio del activo j expresado en términos de tanto por ciento.

2) Como el precio futuro del activo j. En este caso, $\tilde{R}_j$ es equivalente a uno más la tasa de rendimiento del activo j.

Esta aclaración previa es necesaria porque los problemas de presupuesto de capital, de los cuales nos vamos a ocupar a continuación, normalmente están planteados en un contexto multiperíodo, con lo cual al aplicar el modelo uniperíodo CAPM, tropezaremos con fuertes limitaciones. Así, en opinión de Rubinstein (58): "el modelo es incapaz de valorar corrientes de ingresos en el tiempo irregulares o no perpetuas y, por tanto, no ha sido rigurosamente aplicado en el análisis de la política de dividendos y los proyectos de presupuesto de capital con ingresos multiperíodo. Solamente si las firmas pueden en alguna forma estimar la distribución de probabilidad del valor de mercado de un proyecto al final del primer período (sin conocer las futuras tasas de descuento) y venden el proyecto en este preciso momento y no se producen pérdidas de sinergia el modelo media-varianza será apropiado".

Para poder analizar las decisiones de inversión en el marco del CAPM, vamos a suponer una empresa que está totalmente financiada con acciones (59) y que se plantea la cuestión de si debe aceptar o no un proyecto de inversión cuyo coste es V^o_{ji} y que promete un rendimiento absoluto en pesetas de $\tilde{X}^o_j$ al final del primer período. En base a lo que acabamos de mencionar, el rendimiento del proyecto será (60):

$$\tilde{R}^o_j = \frac{\tilde{X}^o_j}{V^o_{j1}} \qquad (9.59)$$

Por otra parte, el ingreso operativo neto de la empresa j, antes de plantearse la decisión de inversión, es la variable aleatoria $\tilde{X}_j$, de modo que el rendimiento que esperan obtener los accionistas de la misma, en un mundo sin impuestos ni costes de quiebra, puede expresarse por (61):

$$\tilde{R}_j = \frac{\tilde{X}_j}{V_{j1}} \qquad (9.60)$$

donde

$$V_{j1} = n_j P_{j1} \qquad (9.61)$$

es el valor de la empresa j al principio del período. Valor - que es igual al número de acciones (n_j) multiplicado por el precio de las mismas en ese instante (P_{j1}).

En un mercado de capitales en equilibrio, el rendimiento de las acciones de la empresa j debe cumplir la relación dada por la SML, esto es:

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \lambda^{**} \operatorname{cov}(\tilde{R}_j, \tilde{R}_M) \qquad (9.62)$$

de forma que llevando (9.60) a (9.62) y teniendo en cuenta - (9.61), se tiene:

$$E\left(\frac{\tilde{X}_j}{V_{j1}}\right) = R_f + \lambda^{**} \operatorname{cov}\left(\frac{\tilde{X}_j}{V_{j1}}, \tilde{R}_M\right)$$

$$E(\tilde{X}_j) = R_f\, n_j\, P_{j1} + \lambda^{**} \operatorname{cov}(\tilde{X}_j, \tilde{R}_M) \qquad (9.63)$$

Si ahora denotamos por:

n_j^o : el número de acciones que es necesario emitir con el fin de financiar el nuevo proyecto de inversión.

P'_{j1} : el precio de las acciones de la firma j luego de aceptar el nuevo proyecto de inversión.

el rendimiento de la empresa j, luego de tomar su decisión de inversión y aceptar llevar a cabo el nuevo proyecto de inversión, será:

$$\widetilde{R}_j = \frac{\widetilde{X}_j + \widetilde{X}_j^o}{(n_j + n_j^o)\ P'_{j1}} \qquad (9.64)$$

con lo cual, llevando (9,64) a (9.62) y luego de operar, tenemos que:

$$E\left(\frac{\widetilde{X}_j + \widetilde{X}_j^o}{(n_j + n_j^o)P'_{j1}}\right) = R_f + \lambda^{**}\ cov\left(\frac{\widetilde{X}_j + \widetilde{X}_j^o}{(n_j + n_j^o)P'_{j1}}\ ,\ \widetilde{R}_M\right)$$

$$E(\widetilde{X}_j + \widetilde{X}_j^o) = R_f(n_j + n_j^o)P'_{j1} + \lambda^{**} cov(\widetilde{X}_j + \widetilde{X}_j^o\ ,\ \widetilde{R}_M) \qquad (9.65)$$

Finalmente, si restamos (9.63) a (9.65), se obtiene lo que Rubinstein (62) llama "criterio de expansión del activo" y que no es más que la regla para aceptar o rechazar un proyecto de inversión:

$$E(\widetilde{X}_j^o) = R_f\ n_j\ (P'_{j1} - P_{j1}) + R_f\ n_j^o\ P'_{j1} + \lambda^{**} cov(\widetilde{X}_j^o, \widetilde{R}_M) \qquad (9.66)$$

y teniendo en cuenta que según la definición de n_j^o y P'_{j1}:

$$V_{j1}^o = n_j^o\ P'_{j1} \qquad (9.67)$$

así como la expresión (9.59), puede por último expresarse (9.66) como sigue:

$$R_f\, n_j\ (P_{j1} - P'_{j1}) = V_{j1}^o\left[R_f + \lambda^{**} cov(\widetilde{R}_j^o, \widetilde{R}_M) - E(\widetilde{R}_j^o)\right] \qquad (9.68)$$

Como R_f, n_j y V_{j1}^o son por definición constantes positivas, de (9.68) se sigue que para que el valor de las acciones sufra un incremento luego de aceptar el proyecto de inversión j $(P_{j1} - P'_{j1}) < 0$), es necesario que:

$$E(\widetilde{R}_j^o) > R_f + \lambda^{**}\ cov(\widetilde{R}_j^o, \widetilde{R}_M) \qquad (9.69)$$

o también:

$$E(\widetilde{R}_j^o) > R_f + (E(\widetilde{R}_M) - R_f)\ \beta_j^o \qquad (9.70)$$

donde β_j^o es la beta del proyecto de inversión.

Es decir, que para aceptar un proyecto de inversión es necesario que su tasa interna de rentabilidad (63): $E(\tilde{R}_j^o)$, supere a la tasa de descuento ajustada al riesgo del proyecto $R_f + \lambda^{**} cov(\tilde{R}_j^o, \tilde{R}_M)$, siendo esta tasa de descuento ajustada al riesgo igual al rendimiento esperado de un activo financiero que tenga el mismo riesgo que el proyecto.

Gráficamente, el criterio de expansión del activo de Rubinstein lleva a aceptar a aquellos proyectos de inversión cuyo par rentabilidad-riesgo cae por encima de la SML y a rechazar aquellos otros que están situados por debajo de la misma (64):

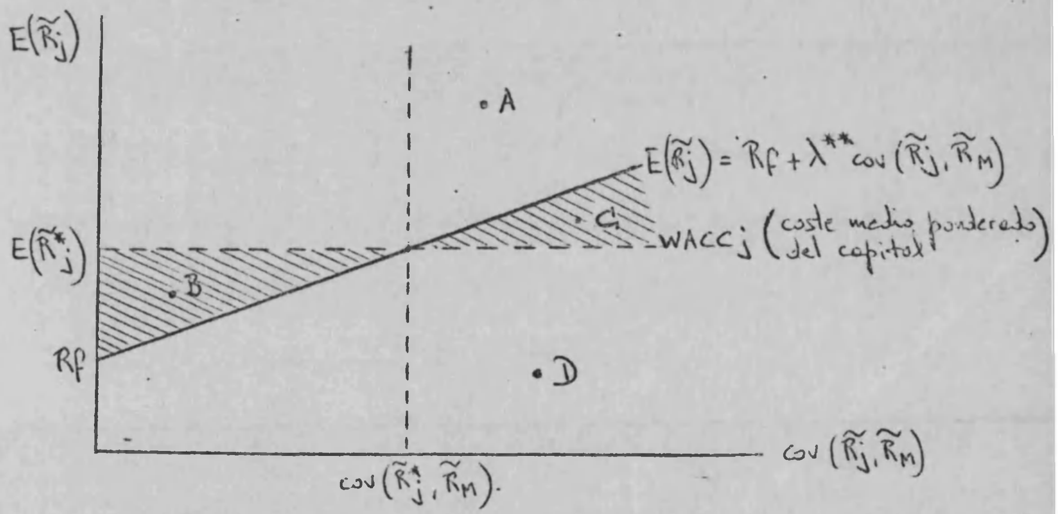


Figura 9.1.

Así, según el criterio de expansión del activo, los proyectos de inversión A y B son aceptables, mientras que los proyectos C y D no lo son.

Si $cov(\tilde{R}_j^o, \tilde{R}_M)$ es positiva, entonces el criterio de Rubinstein también puede expresarse de la siguiente manera(65):

$$\frac{E(\tilde{R}_j^o) - R_f}{\text{cov}(\tilde{R}_j^o, \tilde{R}_M)} > \lambda^{**} \qquad (9.71)$$

donde λ^{**} puede interpretarse como el coste de capital para un riesgo standarizado aplicable para todos los proyectos de todas las empresas. La expresión (9.71) coincide, por tanto, con el criterio propuesto por Mossin (66), pero conviene resaltar que unicamente da lugar a decisiones correctas en el caso en que $\text{cov}(\tilde{R}_j^o, \tilde{R}_M) > 0$.

Hay otros autores como Hamada, Stapleton, Bierman y Hass, Bogue y Roll (67) que aunque proponen criterios que en apariencia son distintos al aquí expuesto, Senbet y Thompson demuestran que "todos ellos, en realidad, pueden ser reducidos a un equivalente común" (68). De modo que los distintos modelos propuestos por estos autores para analizar las decisiones de presupuesto de capital en base al modelo media-varianza son equivalentes.

9.11. Análisis de la decisión de inversión

Según (9.70), dada la β_j^o del proyecto de inversión, la tasa de retorno requerida para dicho proyecto de inversión es la misma para toda empresa que se plantee la conveniencia o no de invertir en tal proyecto. "Esto no quiere decir que el proyecto es igualmente valorado por todas las firmas. A causa de las diferencias en habilidad, eficiencia administrativa, sinergia, etc., el rendimiento esperado puede variar entre las firmas. Consecuentemente, el proyecto tendrá más valor para unas firmas que para otras. Sin embargo, el standard de aceptación será el mismo para todas las firmas que consideren el proyecto" (69).

Por tanto, al analizar un proyecto de inversión únicamente se tiene en cuenta su riesgo sistemático y no la contribución al riesgo total de la empresa ($\sigma^2(\tilde{R}_j)$) a que da lugar este proyecto por separado o en combinación con otros proyectos. Por lo que "la primera y más importante implicación es que el mercado de valores no premia a una empresa por diversificar sus proyectos porque el inversor individual puede diversificar su propia cartera. El criterio de aceptación está basado solamente en las características rentabilidad-riesgo relativas al mercado del proyecto individual. Esto es, si la teoría es correcta no tenemos que estar preocupados con la combinación de proyectos múltiples" (70).

En consecuencia, según el CAPM standard, en las decisiones de presupuesto de capital, la empresa no debe preocuparse por diversificar sus proyectos de inversión, ya que el inversor individual puede diversificar el riesgo hasta el máximo posible, eliminando todo el riesgo no sistemático, mediante la elección de una cartera eficiente.

Pero como bien observa Van Horne (71), esta conclusión depende de que se cumplan en la realidad los supuestos en que se basa el CAPM, principalmente el supuesto referente a un mercado de capitales perfecto, y el de la existencia de un activo libre de riesgo, a cuya tasa se puede prestar y pedir prestado en cantidades ilimitadas.

Cuando estos supuestos no se cumplen, entonces el inversor estará más preocupado por el riesgo total de la firma que por el riesgo sistemático, con lo cual la aplicación de un modelo de selección de cartera (Markowitz) a las decisiones de inversión es de esperar que sea más apropiada y conduzca a mejores resultados. Esto es, un modelo de selección de inversiones que minimice la varianza de la suma de los valores actuales netos (VAN) de varios proyectos de inversión sujeto a la restricción de que se alcance un valor dado en la esperanza matemática de la suma de los VAN de dichos proyectos de inversión, así como alguna otra posible restricción de tipo financiero (72).

La resolución de este problema de programación cuadrática paramétrica nos daría distintos puntos de la "frontera eficiente" de los proyectos de inversión, al hacer variar la esperanza matemática de la suma de los VAN de los proyectos de inversión, y luego, mediante la toma en consideración de las curvas de indiferencia, se elegiría el proyecto o la combinación de proyectos de inversión óptima.

9.12. Comparación de los criterios de selección de inversiones MPR y TIR

Pero dejemos de lado este problema y supongamos que los supuestos base del CAPM se cumplen. Antes hemos visto, - ecuación (9.71), como cuando la covarianza del rendimiento - del proyecto con el rendimiento de la cartera de mercado era positiva, podía usarse λ^{**} (el precio de mercado del riesgo: MPR) como valor de corte para cualquier tipo de proyecto y todo tipo de empresa. Esta concepción del criterio de expansión del activo está en fuerte contradicción con el criterio tradicional, de la tasa interna de rentabilidad (TIR), donde es necesario calcular el coste medio ponderado de las fuentes de financiación para cada empresa en particular (73).

Según el criterio TIR, un proyecto de inversión únicamente debe ser aceptado si su tasa interna de rentabilidad supera al coste medio ponderado de capital de la empresa en - cuestión, esto es:

$$E(\tilde{R}_j^o) > WACC_j \qquad (9.72)$$

Así, tal como se observa en la Figura 9.1., los proyectos de inversión A y C deberían ser aceptados, mientras que los proyectos B y D deberían ser rechazados, o lo que es lo mismo, - sólo se aceptan aquellas inversiones que se sitúan por encima de la línea horizontal con ordenada igual a $WACC_j$.

Por lo tanto, los criterios MPR y TIR entran en contradicción en las zonas rayadas de la Figura 9.1. La razón por la cual el criterio TIR no es válido y no conduce a los mis -

mos resultados que el criterio MPR está en que no tiene en cuenta el riesgo del proyecto de inversión. Con lo cual, un proyecto con $E(\widetilde{R}_j^o) > WACC_j$, pero con un alto riesgo, tal como el proyecto C, es erróneamente aceptado; mientras que ocurre lo contrario con proyectos de inversión que tienen un riesgo muy bajo.

"En realidad, el criterio TIR unicamente conducirá a la tasa de corte correcta en proyectos de la misma "clase de riesgo" que la firma; esto es, proyectos para los cuales cov $(\widetilde{R}_j^o,\widetilde{R}_M)$ = cov$(\widetilde{R}_j^*,\widetilde{R}_M)$ donde $\widetilde{R}_j^*$ (variable aleatoria) es la tasa de rendimiento que los accionistas recibirían si la firma mantuviese sus inversiones existentes intactas pero alterase su estructura de capital con el fin de quedarse libre de deudas. por lo tanto, cov$(\widetilde{R}_j^*,\widetilde{R}_M)$ refleja únicamente el "riesgo operativo" o "económico" de la firma a diferencia de su "riesgo financiero"" (74).

A continuación vamos a demostrar como el punto de la Figura 9.1 indicado por el par (WACC$_j$, cov$(\widetilde{R}_j^*,\widetilde{R}_M)$) está sobre la SML. Si únicamente suponemos que existen acciones y obligaciones como fuentes de financiación de la empresa j, la definición del coste medio ponderado del capital de dicha empresa, en un mundo sin impuestos ni costes de quiebra, es la siguiente (75):

$$WACC_j = R_f\left(\frac{D_j}{V_j}\right) + E(\widetilde{R}_j)\left(\frac{S_j}{V_j}\right) = \frac{E(\widetilde{X})}{V_j} \qquad (9.73)$$

Ahora bien, según la Proposición I de M-M (1958), el valor de una empresa con y sin deuda era el mismo:

$$V_B = V_A = \frac{E(\widetilde{X})}{E(\widetilde{R}_A)} = \frac{E(\widetilde{X})}{E(R_j^*)} \qquad (9.74)$$

donde $\widetilde{R}_A$ y $\widetilde{R}_j^*$ se corresponden con el mismo concepto (76). De modo que llevando (9.74) a (9.73), se tiene:

$$WACC_j = \frac{E(\widetilde{X})}{V_j} = \frac{E(\widetilde{X})}{V_B} = \frac{E(\widetilde{X})}{V_A} = E(\widetilde{R}_A) = E(\widetilde{R}_j^*) \qquad (9.75)$$

En consecuencia, como $WACC_j = E(\widetilde{R}_j^*)$, el par $(WACC_j, cov(\widetilde{R}_j^*, \widetilde{R}_M))$ está situado sobre la SML tal como gráficamente se indica en la Figura 9.1. Y solamente en ese punto, los criterios MPR y TIR son coincidentes en sus reglas de aceptar o rechazar un proyecto de inversión.

Con el criterio de expansión del activo de Rubinstein, se pueden analizar con facilidad los casos de proyectos de inversión mutuamente excluyentes, situaciones de racionamiento y proyectos de inversión interdependientes.

Si dos proyectos de inversión son mutuamente excluyentes y están situados por encima de la SML, según se desprende de la expresión (9.68), debe elegirse aquel proyecto con mayor: $V_{j1}^o \left[E(\widetilde{R}_j^o) - R_f - \lambda^{**}cov(\widetilde{R}_j^o, \widetilde{R}_M)\right]$, esto es, aquel proyecto cuya tasa interna de rentabilidad en exceso sobre la tasa de descuento ajustada al riesgo del proyecto y ponderada por el coste del proyecto sea mayor.

Cuando existe racionamiento de capital, previamente deben rechazarse, al igual que en el caso anterior, todos los proyectos de inversión que caen por debajo de la SML y con -

los proyectos de inversión que quedan se forman todos los conjuntos posibles mutuamente excluyentes que satisfagan la restricción del presupuesto, eligiendo aquel conjunto de proyectos con mayor:

$$\sum_{j=1}^{n} V_{j1}^{o} \left[E(\tilde{R}_j^o) - R_f - \lambda^{**} cov(\tilde{R}_j^o, \tilde{R}_M) \right]$$

Finalmente, en el caso de proyectos interdependientes, además de tratar los proyectos individuales por separado rechazando aquellos que están situados por debajo de la SML, hay que analizar los distintos proyectos interdependientes como si fuesen distintos proyectos individuales mutuamente excluyentes.

NOTAS DEL CAPITULO IX

(1) SUAREZ SUAREZ, A.S.: "Decisiones Optimas de Inversión y Financiación en la Empresa". Ediciones Pirámide. Madrid, 1980, p. 30.

(2) GORDON, M.J.: "The Investment, Financing and Valuation of the Corporation". Homewood Richard D. Irwin. Illinois, 1962, p. 218.

(3) Más adelante veremos como esa definición del coste del capital como media ponderada de los costes de los recursos financieros de la empresa puede conducir a error en la selección de proyectos de inversión en ambientes de riesgo.

(4) RIBAS MIRANGELS, E.: "El Coste de Capital y los Fundamentos de la Polémica en torno a su Comportamiento". Revista Española de Financiación y Contabilidad, vol. VI, nº 22, octubre-diciembre 1977, p. 91-103, p. 93.

(5) En las grandes empresas, las acciones y las obligaciones constituyen las dos principales fuentes de financiación, por lo que suele hacerse abstracción del resto de los recursos financieros. Es por ésto que el ratio de endeudamiento suele definirse como el cociente entre el valor de mercado de las obligaciones y el valor de las acciones, o también en ocasiones, como el cociente entre el valor de mercado de las obligaciones y el valor de la empresa.

(6) DURAND, D.: "Cost of Debt and Equity Funds for Business Trends and Problems of Measurement". Conference on Re-

search on Business Finance, National Bureau of Economic Research, New York, 1952, p. 215-247.

(7) WILLIAMS, J.B.: "The Eheory of Investment Value". Harvard University Press. 1938, p. 72-73.

(8) NOI y NI son las siglas de las palabras inglesas Net Operating Income y Net Income, que SUAREZ, op. cit., p. 516, traduce por RE (Resultado de Explotación) y RN (Resultado Neto).

Según la aproximación NOI, el coste del capital y, por tanto, el valor de la empresa, son invariables con respecto al ratio de endeudamiento. Mientras que, según - la otra postura extrema (NI), el coste del capital decrece y el valor de la empresa crece a medida que incrementa el ratio de endeudamiento.

(9) SCHWARTZ, E.: "The Theory of the Capital Structure of the firm". Journal of Finance, vol. 14, nº 1, marzo 1959, p. 18-39.

GORDON, M.J., op. cit.

SOLOMON, E.: "Leverage and the cost of Capital". Journal of Finance, mayo 1963, p. 273-279.

BRIGHAM, E. y FORDON, M.J.: "Leverage, Dividend Policy - and the Cost of Capital". Journal of Finance, marzo 1968, p. 85-103.

(10) MODIGLIANI, F. y MILLER, M.: "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment". American - Economic Review, vol. XLIII, nº 3, junio 1958, p.261-297.

(11) RIBAS MIRANGELS, E., op. cit., p. 760.

(12) FERNANDEZ BLANCO, M.: "Estructura Financiera y Valor de la Empresa". Cuadernos Universitarios de Planificación Empresarial, vol. 5, 1979, p. 405-433.

(13) MODIGLIANI, F. y MILLER, M.: "Corporate Income, Taxes and the Cost of Capital: A Correction". American Economic Review, vol. 53, nº 3, junio 1963, p. 433-443.

(14) BRENNAN, M.J. y SCHWARTZ, E.S.: "Corporate Income Taxes, Valuation and the Problem of Optimal Capital Structure". Journal of Business, vol. 51, nº 1, Enero 1978, p. 103-114, p. 103.

(15) ROBICHECK, A.A. y MYERS, S.C.: "Problems in the Theory of Optimal Capital Structure". Journal of Financial and Quantitative Analysis. Junio 1966.
KRAUS, A. y LITZENBERGER, R.: "A State-Preference Model of Optimal Finance Leverage". Journal of Finance, septiembre 1973.

Aunque a lo largo de este capítulo se suele hablar indiferentemente de insolvencia o quiebra como si fuesen la misma cosa. Estrictamente hablando se corresponden con situaciones financieras distintas por las cuales puede atravesar una empresa.

Una situación de insolvencia surge cuando la suma del neto patrimonial y el exigible a largo plazo es inferior al activo fijo, de modo que el exigible a corto plazo está financiando parte de los elementos del activo fijo, con lo cual más pronto o más tarde aparecen problemas de liquidez. Mientras que en una situación de quiebra, el activo de la empresa es inferior al exigible total y, por tanto, aunque se liquide todo el activo, ni siquiera se llega a pagar a los acreedores.

Más adelante, justificaremos por qué usamos indistintamente estos dos términos que, si bien hacen referencia a estados de inestabilidad financiera de una empresa, como acabamos de ver no son idénticos.

(16) Hay trabajos, como el de Ben-Shahar, que sin necesidad de introducir los costes de quiebra demuestran que, tanto con impuestos como sin impuestos, las proposiciones de M-M son válidas siempre que se suponga la existencia de un mercado de capitales perfecto.

Cuando este supuesto no se cumple, el propio modelo de M-M conduce a la tesis tradicional de que el coste del capital varía con el ratio de endeudamiento de la empresa.

Otros autores, como Donaldson y Jensen y Meckling, piensan que las empresas no alcanzan ratios de endeudamiento del 100%, como sugiere el modelo de M-M de 1963, porque los directores están más interesados en la propia seguridad de su trabajo que en maximizar la riqueza de los accionistas.

BEN-SHAHAR, H.: "The Capital Structure and the Cost of Capital: A Suggested Exposition", Journal of Finance, vol. XXIII, nº 4, septiembre 1968, p. 639-653.

DONALDSON, G.: "Financial Goals: Management VS. Stockholders" Harvard Business Review, vol. 41, mayo 1963, p. 116-129.

JENSEN, M.C. y MECKLING, W.H.: "Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and the Ownership Structure" Journal of Financial Economics, octubre 1976, p.305-360.

(17) ROBICHECK y MYERS, op. cit.

BATXER, N.D.: "Leverage, Risk of Ruin and the Cost of Capital". Journal of Finance, septiembre 1967.

KRAUS, A. y LITZENBERGER, R., op. cit.

SCOTT, J.H.: "A Theory of Optimal Capital Structure". The Bell Journal of Economics and Managerial Science. Primavera, 1976.

LEE, W.Y. y BARKER, H.H.: "Bankruptcy Costs and the Firm's Optimal Debt Capacity". Southern Economic Journal, marzo, 1977.

CHEN, A.H.: "A Theory of Corporate Bankruptcy and Optimal Capital Structure". En "Handbook of Financial Economics", editado por J. Bickslen, 1978.

KIN, E.H.: "A Mean-Variance Theory of Optimal Capital Structure and Corporate Debt Capacity". Journal of Finance, vol. 33, nº 1, marzo 1978, p. 45-63.

TURNBULL, S.M.: "Debt Capacity". Journal of Finance, vol. 34, nº 4, septiembre 1979, p. 931-940.

(18) FERNANDEZ BLANCO, M.: op. cit., p. 423.

(19) HAMADA, R.S.: "Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporation Finance". Journal of Finance, vol. 24, nº 1, marzo 1969, p. 13-31.

RUBINSTEIN, M.E.: "A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory". Journal of Finance, vol. 28, nº 1, marzo 1973, p. 167-181.

(20) KIM. E.H., op. cit.

(21) Las Proposiciones I y II de M-M con impuestos serán el caso particular del modelo de Kim cuando no existen costes de quiebra, pero si se sigue suponiendo la existencia de un impuesto sobre sociedades.

(22) Para probar la validez de las Proposiciones de M-M teniendo en cuenta el equilibrio del mercado de capitales también se ha utilizado el modelo de preferencias tiempo-estado (Hirschleifer y Stiglitz), que aunque es más general que el CAPM es poco operativo en la práctica.

Asimismo, también se ha utilizado por Turnbull un modelo de precios de opción en tiempo-continuo que, según demuestra Chen, llega a la misma expresión del valor de mercado de una firma que el modelo estático CAPM.

Finalmente, también se han hecho algunos intentos en base a un modelo CAPM multiperíodo por Fama y Myers y Turnbull.

HIRSCHLEIFER, J.: "Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach". Quarterly Journal of Economics, mayo 1966.

STIGLITZ, J.E.: "A Re-examination of the Modigliani-Millèr Theorem". American Economic Review, Diciembre 1969.

STIGLITZ, J.E,: "On the Irrelevance of Corporate Financial Policy". American Economic Review, Diciembre 1974.

TURNBULL, S.M.: "Capital Structure, Debt Capacity and the Investment Decision". Working Paper, Departament of Political Economy, University of Toronto, Septiembre 1977.

CHEN, A.H., op. cit.

FAMA, E.F.: "Risk-Adjusted Discount Rates and Capital Budgeting under Uncertainty". Journal of Financial Economics Agosto 1977.

MYERS, S.C. y TURNBULL, S.M.: "Capital Budgeting and the Capital Asset Pricing Model: Good News and Bad News". - Journal of Finance, vol. 32, nº 2, mayo 1977, p. 321-336.

(23) Kim, en la línea principal de su trabajo, contempla el caso de que existe un impuesto sobre los ingresos de las sociedades, de forma que las empresas tributan tanto por - los beneficios que obtienen como por la parte de su ingreso neto operativo destinado a amortizar el principal de la deuda. Unicamente en las notas a pie de página Kim trata de una forma resumida el caso que nosotros contemplamos.

(24) Si antes de tomar las decisiones de financiación, con vistas a cubrir los gastos de los nuevos proyectos de inversión del período presente, resulta que la empresa ya tiene obligaciones pendientes de amortizar de ejercicios anteriores, será necesario arbitrar una regla de "me-first" que proteja a los antiguos obligacionistas en el caso de que se decida financiar parte de la inversión con la emisión de nuevas obligaciones, ya que como demuestran Fama y Miller y Kim, Mc.Connell y Greenwood, si no se actúa - así y suponiendo que existan mercados de capitales perfectos, las acciones de la empresa subirán a costa de la pérdida en el valor de las antiguas obligaciones (esto en el caso de que no existan impuestos). Mientras que en el caso de que existan impuestos, los accionistas ganarán a ex

pensas del gobierno y de los antiguos obligacionistas.
FAMA, E.F. y MILLER, M.H.: "The Theory of Finance". Halt, Rinehart and Winston, New York, 1972, p. 152 y ss.
KIM, E.H., Mc. CONELL, J.J. y GREENWOOD, P.R.: "Capital Structure Rearrangements and me-first Rules in a Efficient Capital Market". Journal of Finance, vol. 32, nº 3, junio 1977, p. 789-809.

(25) Evidentemente A y B son la misma firma real desde el momento en que ambas tienen la misma composición en su activo. Pero nosotros a efectos de exposición las trataremos como dos firmas por separado, sin entrar en la cuestión de si una firma como la A existe o no en la realidad.

(26) BATXER, N.D., op. cit.
VAN HORNE, J.C.: "Optimal Initation of Bankruptcy Proceedings by Debt Holders". Journal of Finance, Junio 1976,
KIM, E.H., op. cit.

(27) Hay autores, como Batker, que sugieren que los costes de quiebra sobre cuya naturaleza empírica y significación se ha escrito muy poco, no son más que una hipótesis conveniente para reconciliar la teoría con la realidad.
BATXER, N.D., op. cit.

(28) A lo largo de todo este capítulo los rendimientos siempre van a estar expresados en términos de uno más la tasa de rendimiento correspondiente.

(29) Cuando se produce la quiebra, lo primero que se debe hacer es pagar los gastos administrativos de la quiebra que

reciben la máxima prioridad por ley. De manera que en el caso que $\tilde{X} < \hat{r}D$, los accionistas no recibirán nada, mientras que los obligacionistas cobrarán $\tilde{X} - \tilde{C}$.

(30) Otra definición equivalente de $\tilde{R}_B$ es:

$$\tilde{R}_B = \begin{cases} \dfrac{(1-t)(\tilde{X}-\hat{r}D) + At}{S_B} & \text{si } \tilde{X} \geq \hat{r}D \\ 0 & \text{si } \tilde{X} < \hat{r}D \end{cases}$$

(31) KIM, E.H.; "A Theory of Optimal Financial Structure in - Market Equilibrium: A Critical Examination of the Effects of Bankruptcy and Corporate Income Taxation". Ph. D. Dissertation. State University of New York at Buffalo. Diciembre 1974, p. 100-104.

(32) Recordemos que aunque A y B eran la misma firma real, sus estructuras financieras eran distintas, por lo que cuando se aplica la relación de equilibrio a A ó a B, λ^{**} y $\tilde{R}_M$ - no son exactamente iguales en ambos casos. Aunque desde - el momento en que λ^{**} y $\tilde{R}_M$ recogen todos los activos del mercado, es de esperar que la diferencia sea realmente insignificante.

(33) Si se define el rendimiento aleatorio de un título como:

$$\tilde{R}_i = \frac{\tilde{X}}{V}$$

y se lleva dicha expresión del rendimiento del título a - la SML del modelo de equilibrio:

$$E(\tilde{R}_i) = R_f + \lambda^{**} \operatorname{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)$$

$$E\left(\frac{\tilde{X}}{V}\right) = R_f + \lambda^{**} \operatorname{cov}\left(\frac{\tilde{X}}{V}, \tilde{R}_M\right)$$

$$\frac{E(\tilde{X})}{V} = R_f + \frac{\lambda^{**}}{V} \operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{R}_M)$$

$$V = \frac{E(\tilde{X}) - \lambda^{**} cov(\tilde{X}, \tilde{R}_M)}{R_f}$$

se obtiene el valor actual de mercado ajustado al riesgo (V) del activo que genera unos ingresos aleatorios de $\tilde{X}$ (tanto si R_i ha sido definido en tanto por ciento, como si se ha utilizado la expresión de uno más el tanto por ciento del rendimiento).

(34) Haugen y Senbet reconocen que cuando se supone la existencia de costes de quiebra, entonces existe una estructura óptima de capital con lo cual se reconcilian los hallazgos teóricos de M-M con lo que se observa en la realidad, donde no existen empresas que maximicen su ratio de endeudamiento. Sin embargo, según estos autores los costes de quiebra no tienen la suficiente magnitud como para compensar los ahorros de impuestos debidos a un incremento en el "leverage" financiero. Para demostrar esta afirmación no se basan en estudios empíricos, sino que su argumentación es puramente teórica.
HAUGEN, R.A. y SENBET, L.W.: "The Insignificance of Bankruptcy Costs to the Theory of Optimal Capital Structure". Journal of Finance, vol. 33, nº 2, mayo 1978, p. 383-393.

(35) Hamada y Rubinstein llegan al mismo resultado aplicando el modelo CAPM y suponiendo de entrada que no existen impuestos ni costes de quiebra.

Scott demuestra, mediante un modelo de valoración multiperíodo, que una empresa que procure seguir una política óptima, debería emitir tanta deuda asegurada (avalada mediante un activo) como le sea posible, aún en ausencia de un impuesto sobre sociedades.

HAMADA, R.S., op. cit.

RUBINSTEIN, M.E., op. cit.

SCOTT, J.R.: "Bankruptcy, Secured Debt and Optimal Capital Structure". Journal of Finance, vol. 32, nº 1, marzo 1977.

(36) FERNANDEZ BLANCO, M., op. cit., p. 413.

(37) SUAREZ SUAREZ, A.S., op. cit., p. 540.

(38) Aunque esta expresada en términos de uno más el tanto por ciento de rendimiento, es igualmente válida para el caso en que los rendimientos estén expresados como tantos por ciento.

(39) Miller introduce, además del impuesto sobre sociedades, - el impuesto personal sobre la renta llegando entonces al resultado de que "la ganancia del leverage desaparecen enteramente o incluso se vuelve negativa".

MILLER, M.H.: "Debt and Taxes". Journal of Finance, vol. 32, nº 2, Mayo 1977, p. 267.

(40) Al igual que hicimos antes, supondremos que la deuda es un activo no arriesgado, por lo que su tipo de interés se corresponde con el del activo libre de riesgo.

(41) Aquí cabe también hacer la misma observación que en la nota pie de página 38.

(42) En el artículo de Fernández Blanco puede encontrarse una completa demostración de las proposiciones I y II de M-M con y sin impuestos, en el caso de que la deuda, aun supo

niendo que no existen costes de quiebra, se considere que es un activo arriesgado.

FERNANDEZ BLANCO, M., op. cit., p. 415-417.

(43) MODIGLIANI, F. y MILLER, M. (1963), op. cit., p. 439.

(44) Una correcta y simple exposición de la tesis tradicional (según la versión RN) con impuestos puede encontrarse en: SUAREZ SUAREZ, A.S., op. cit., p. 545 y 546.

(45) DONALDSON, G.: "New Framework for Corporate Debt Policy". Harvard Business Review, vol. 42, 1962.

(46) MYERS, S.C.: "Interactions of Corporate Financing and Investment Decision-Implications for Capital Budgeting". Journal of Finance, vol. 29, marzo 1974.

(47) JAFFEE, D.M.: "Credit Rationing and the Commercial Loan Market". John Willey, New York, 1971.

(48) TURNBULL, S.M. (1979), op. cit., p. 931.

(49) KIM, E.H. (1978), op. cit., p. 52.

(50) En este capítulo se considera que el objetivo de la empresa consiste en maximizar su valor. Aún siendo conscientes de que resulta improbable que la empresa persiga un solo y único objetivo, ya que parece más lógico pensar que una empresa tiene una serie de objetivos y subjetivos que guían su acción, no consideraremos tal posibilidad, puesto que una discusión sobre los objetivos de la empresa así como el tratamiento de la planificación por objetivos se alejan bastante de nuestro tema de estudio.

(51) En cualquier otro caso, las Proposiciones de M-M (1963) vuelven a ser válidas nuevamente.

(52) KIM, E.H., op. cit., p. 52 y ss.

(53) Recuérdese que la derivada de la función:

$$I = \int_{A(t)}^{B(t)} F(x)dx$$

es:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{dF(x)}{dt} dx + \frac{dB(t)}{dt} F\left[B(t)\right] - \frac{dA(t)}{dt} F\left[A(t)\right]$$

(54) Se debe tener en cuenta que $C(\hat{r}D) \cdot f(\hat{r}D)$ está afectado de signo menos.

(55) KIM, E.H., op. cit., p. 55.

(56) Chen, bajo diferentes condiciones, llega también a los mismos resultados que Kim en el marco de un modelo de valoración estática de dos parámetros.

Turnbull, mediante un modelo de precios de opción en tiempo continuo, llega asimismo a idénticos resultados a los alcanzados aquí por nosotros siguiendo a Kim.

CHEN, A.H.: "Recent Developments in the Cost of Debt Capital". Journal of Finance, vol. 33, nº 3, junio 1978, p. 863-877.

TUNRBULL, S.M. (1979), op. cit.

(57) González, Litzenberger, y Rolfo demuestran que en un mundo con impuestos, donde las cargas financieras son deducibles del impuesto sobre sociedades, y la deuda es un activo arriesgado, el CAPM está mal especificado y conduce a

resultados absurdos debido a que la deuda no sigue una función de distribución normal y, por lo tanto, es necesario apoyar la estructura de dos parámetros del CAPM en el supuesto de que las funciones de utilidad del inversor son cuadráticas y, como ya vimos en el capítulo I, dichas funciones de utilidad no son válidas para todo valor de la riqueza del individuo.

GONZALEZ, N., LITZENBERGER, R. y ROLFO, J.: "On the Mean-Variance Models of Capital Structure and the Absurdity of their Predictions". Journal of Financial and Quantitative Analysis, junio 1977, p. 165-179.

(58) RUBINSTEIN, M.E., op. cit., p. 168.

(59) Este supuesto, aunque es conveniente en aras a simplificar la exposición, no es estrictamente necesario.

(60) Para desarrollar este epígrafe nos basaremos principalmente en Rubinstein y Van Horne:

RUBINSTEIN, M.E., op. cit.

VAN HORNE, J.: "Financial Management and Policy". Prentice-Hall International Editions, 4ª Edición. Englewood Cliffs N.J., 1977.

(61) Tanto $\widetilde{X}_j^o$ como $\widetilde{X}_j$ pueden interpretarse como rentas perpetuas o como el valor final del proyecto y el valor final de la empresa al final del período de estudio. En uno u otro caso, la única diferencia está en que los rendimientos, o bien vienen expresados en términos de tanto por ciento, o bien en términos de uno más el tanto por ciento correspondiente.

(62) RUBINSTEIN, M.E., op. cit., p. 172-173.

(63) El cálculo de la tasa interna de rentabilidad implica normalmente tratar con situaciones multiperíodo, mientras que la relación de equilibrio de la SML responde a un modelo uniperiódico, por lo que, en principio, la regla de decisión dada por (9.69) parece inadecuada.

Pero recordemos que ya advertimos antes que:

$$\tilde{R}_j^o = \tilde{X}_j^o / V_{j1}$$

donde $\tilde{X}_j^o$ debe considerarse como una renta perpetua o bien como el valor del proyecto de inversión al final del período (incluyendo en dicho valor los flujos netos de caja recibidos durante el período en cuestión).

Para el cálculo del valor del proyecto de inversión al final del período no hay problema si existen mercados secundarios desarrollados donde se produzcan operaciones de compraventa de bienes de equipo de segunda mano, pero éste no es siempre el caso.

Cuando por las razones que sea no existan esos mercados secundarios, Van Horne propone buscar empresas que sean lo suficientemente similares al proyecto de inversión analizado y usar la beta de una de estas empresas como sustituto de la beta del proyecto de inversión, con lo cual ya se puede aplicar el criterio dado por (9.70).

VAN HORNE, J., op. cit., p. 173.

(64) Según Van Horne, si los mercados de productos fuesen perfectos (y no hubiesen barreras de entrada, poder monopolista, etc.) no cabría esperar que hubiese proyectos de inversión que cayesen por encima de la SML, sino que los

los proyectos de inversión estarían situados sobre la SML o por debajo de ella, con lo cual los proyectos que estuviesen sobre la SML serían aceptados.

VAN HORNE, op. cit., p. 170.

(65) El criterio dado por (9.71) Rubinstein lo rebautiza con el nombre de criterio MPR (Market Price of Risk) y coincide con el propuesto por Mossin.

RUBINSTEIN, M.E., op. cit., p. 173.

MOSSIN, J.: "Security Pricing and Investment Criteria in Competitive Markets". American Economic Review, Diciembre 1969, p. 749-756.

(66) Aftalion y Viallet también llegan al mismo resultado partiendo de un modelo que intenta maximizar la riqueza del accionista, definiendose la riqueza del accionista como la suma del valor de sus acciones más los dividendos recibidos.

AFTALION, F. y VIALLET, C.: "Theorie du Portefeuille". P.U.F., Paris, 1977, p. 135-138.

(67) HAMADA, R.S., op. cit.

STAPLETON, R.C.: "Portfolio Analysis, Stock Valuation and Capital Budgeting Decision Rules for Risky projets". Journal of Finance, Marzo 1971, p. 95-117.

BIERMAN, H. (Jr) y HASS, J.E., "Capital Budgeting under Uncertainty: A Reformulation". Journal of Finance, Marzo, 1973, p. 119-129.

BOGUE, M.C., y ROLL, R.: "Capital Budgeting of Risky Projects with "Imperfect Markets" for Physical Capital". Journal of Finance, mayo 1974, p. 601-613.

(68) SENBET, L.W. y THOMPSON, H.E.: "The Equivalence of Alternative Mean-Variance Capital Budgeting Models". Journal - of Finance, vol. 32, nº 2, mayo 1978, p. 395-401, p.395.

(69) VAN HORNE, J., op. cit., p. 170.

(70) OSTERYOUNG, J.: "Capital Budgeting: Long-term Asset Selection". Grid, Inc. Ohio, 1974, p. 184.

(71) BAN HORNE, op. cit., p. 182-183.

(72) Sobre la aplicación del modelo de Markowitz a los problemas de presupuesto de capital pueden consultarse las - obras de:

SUAREZ SUAREZ, A.S., op. cit., p. 429-430.

MAO, J.C.T.: "Análisis Financiero". El Ateneo, Buenos Aires 1974, p. 252-258.

(73) En el criterio TIR pueden utilizarse distintas tasas de corte: el tipo de interés existente en el mercado financiero, una tasa de rendimiento mínima aceptable - para la empresa, el coste del capital, etc. Nosotros vamos a usar esta última versión y la definición tradicional - del coste del capital como media ponderada del coste de - los recursos financieros de la empresa.

Las siglas WACC con las cuales se hace mención al coste del capital, corresponden a las iniciales de: - Weighted Average Cost of Capital.

(74) RUBINSTEIN, op. cit., p. 174.

(75) Recordemos que como consecuencia de la definición dada de $\tilde{X}$ en el epígrafe anterior, los rendimientos estaban expre

sados en términos de uno más el tanto por ciento correspondiente del rendimiento.

(76) Rubinstein denota por $\widetilde{R}_j$ el rendimiento de la firma j si tiene deudas en su estructura de capital y por $\widetilde{R}_j^*$ el rendimiento de la misma firma j en el caso de que esté totalmente financiada por capital propio. Igualmente, usa las variables V_j y V_j^* con el mismo significado que nuestras V_B y V_A del epígrafe anterior.

CONCLUSIONES

Nuestro trabajo tiene un contenido eminentemente teórico, a pesar de que contenga dos anexos de tipo empírico. Por ello, las conclusiones de este estudio consisten, en su mayoría, en un compendio de los principales resultados teóricos que se han ido demostrando a lo largo de los capítulos precedentes. Hay que advertir, no obstante, que éstos y otros resultados se comentan con mayor extensión y profundidad en sus respectivos capítulos.

Aunque parece estar claro, intuitivamente, que el inversor prefiere más dinero a menos y que, por tanto, su función de utilidad debe de ser creciente, hemos formalizado esta idea demostrando cómo, a partir de unos axiomas de racionalidad del inversor, es posible deducir el teorema de la utilidad esperada, en virtud del cual, todo individuo racional intenta maximizar su utilidad esperada. Igualmente, se ha demostrado que un inversor que se guía por el teorema de la utilidad esperada, tiene una función de utilidad creciente.

La forma concreta que toma la función de utilidad: una curva convexa, una línea recta o una curva cóncava, depende de la actitud hacia el riesgo del inversor: aversión al riesgo, indiferencia al riesgo o preferencia por el riesgo. Un individuo puede tener una función de utilidad que presente esas tres formas, dependiendo de la cantidad de dinero que se halle en juego. Debido a las características de las inversiones, en el mundo de los negocios y las finanzas, es normal suponer que el inversor tiene aversión al riesgo.

Es posible expresar la utilidad esperada en función de los dos primeros momentos de la función de distribución de los rendimientos, bien suponiendo que la función de utilidad es cuadrática o bien a partir de la hipótesis de que los rendimientos de los títulos siguen una distribución normal. Pensamos que el segundo camino es más correcto, ya que se puede comprobar más fácilmente si efectivamente este supuesto se cumple en la práctica; además, una función de utilidad cuadrática no conduce a conclusiones válidas en cierto intervalo del eje de abscisas.

A partir del supuesto de normalidad de los rendimientos de los títulos juntamente con el supuesto de aversión al riesgo del inversor, se puede probar, de forma rigurosa, el aserto de que el individuo "ama" el rendimiento y "odia" el riesgo, así como que las curvas de indiferencia son crecientes y estrictamente cóncavas hacia el eje de ordenadas.

La selección de la cartera óptima puede hacerse directamente, con un sólo paso, mediante la aplicación del enfoque teórico de las decisiones de consumo-inversión, maximizando la función de la utilidad esperada del inversor. Esta aproximación es la más general porque tiene en cuenta la interdependencia de las decisiones de consumo e inversión, aunque es poco operativa, puesto que obliga a hacer explícita el tipo de función de utilidad del inversor.

A idénticos resultados se puede llegar mediante la determinación en primer lugar de la frontera eficiente, añadiendo luego el mapa de curvas de indiferencia del inversor y seleccionando finalmente aquella cartera de valores que se encuentra situada en el punto de tangencia entre la frontera eficiente y la curva de indiferencia de mayor nivel de utilidad esperada.

Cuando se considera únicamente el caso de n activos arriesgados, se demuestra que la frontera eficiente es creciente y convexa hacia el eje de ordenadas: una parábola en los ejes (E, σ^2) o una hipérbola en los ejes (E,σ). Si se añade el activo libre de riesgo, la frontera eficiente se vuelve lineal y se cumple el teorema de la separación, según el cual, todo inversor racional únicamente invierte en el título libre de riesgo y la cartera arriesgada M, que es única, existiendo una correlación lineal perfecta entre las distintas carteras que se encuentran en la frontera eficiente.

La teoría del mercado de capitales intenta averiguar las consecuencias, a nivel de mercado, que se siguen del supuesto de que todos los inversores son diversificadores eficientes en el sentido propuesto por Markowitz. Si este es el caso y se añade una serie de hipótesis sobre el funcionamiento del mercado, entonces la frontera eficiente lineal del inversor, que se producía cuando se tenía en cuenta el activo libre de riesgo, pasa a ser la Línea del Mercado de Capitales (CML = Capital Market Line) y la cartera arriesgada M se convierte en la cartera de Mercado. La cartera de mercado está compuesta por todos los títulos del mercado y -

en las mismas proporciones en que estos títulos están en el mercado. Todas las carteras eficientes se sitúan sobre la CML, siendo $E(\tilde{R}_p)$ y $\sigma(\tilde{R}_p)$ las medidas adecuadas de la rentabilidad y el riesgo respectivamente.

Pero también existe una relación lineal entre la rentabilidad de un título: $E(\tilde{R}_i)$ y su riesgo medido por: cov $(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)$. Esta relación lineal, que se conoce con el nombre de Línea del Mercado de los Activos Financieros (SML = Security Market Line), es la relación fundamental del modelo de precios de equilibrio de los activos financieros y es válida tanto para títulos individuales como para carteras, eficientes o no. Dicha relación se puede probar por dos vías alternativas: una a partir de los supuestos de la teoría del mercado de capitales y del hecho de que la cartera de mercado es eficiente y, la otra, a partir de la agregación de las decisiones de consumo-inversión de los individuos, sin necesidad de tener que recurrir a la eficiencia de la cartera de mercado.

Tanto la CML como la SML se deducen a partir del mismo sistema de ecuaciones, por lo que no se las puede tratar separadamente como si fuesen cosas distintas. En realidad, la CML y la SML expresan la misma idea: el mercado únicamente recompensa al inversor por correr con aquella parte del riesgo, de una cartera o de un título, que no se puede eliminar mediante la diversificación eficiente de Markowitz.

El modelo diagonal de Sharpe constituye una simplificación mediante la cual no sólo se consigue reducir el número de estimaciones necesarias para calcular la frontera - eficiente, sino que, si se plantea el problema de la determinación de la frontera eficiente en base al proceso generador de rendimientos propuesto por el mismo, los cálculos a realizar se reducen, ya que la matriz de varianzas-covarianzas se transforma en una matriz diagonal.

El modelo de mercado es el caso particular del modelo diagonal de un sólo índice cuando dicho índice es precisamente el rendimiento del índice general de la Bolsa. Pero los fines de ambos modelos son distintos. El fin del modelo diagonal es simplificar los cálculos para la obtención de la frontera eficiente, mientras que el modelo de mercado no es más que un modelo econométrico que expresa la relación - existente entre los rendimientos de los títulos individuales y el rendimiento del mercado y guarda, además, un estrecho - parecido con la versión ex-post del modelo CAPM.

El modelo de mercado permite diferenciar dentro - de la varianza de un título o cartera, aquella parte del - riesgo que es diversificable (riesgo no sistemático) de la que no lo es (riesgo sistemático). Dicho modelo tiene una inconsistencia interna pero que no consiste, como generalmente se admite, en que las perturbaciones aleatorias y el rendimiento de la cartera de mercado no son independientes, sino que la inconsistencia se produce porque hay autocorrelación entre los residuos de los diferentes títulos.

Si se supone que los coeficientes beta ex-ante pueden ser estimados en base a los coeficientes beta ex-post, - que proporciona el modelo de mercado, entonces se demuestra que las carteras eficientes carecen de riesgo no sistemático.

Cuando se relaja el modelo CAPM, abandonando algunas de sus hipótesis más restrictivas, se sigue cumpliendo la relación lineal entre la rentabilidad y el riesgo de un título o cartera, pero en todos los casos deja de cumplirse el teorema de la separación. Además, en el caso de las expectativas heterogéneas y el caso en que se introduce el capital humano, ello da lugar a modelos poco operativos y difícilmente contrastables en la práctica. Este efecto negativo no se produce, sin embargo, en el modelo de equilibrio resultante de abandonar el supuesto sobre la existencia de un activo de riesgo, ya que en este caso, el papel que antes jugaba el título libre de riesgo, pasa a ocuparlo la cartera beta-cero de mínima varianza.

Si se tiene en cuenta el fenómeno inflacionario, nuevamente se vuelve a encontrar una relación lineal entre la rentabilidad y el riesgo, aunque, al igual que en los casos anteriores, con una ordenada en el origen y una pendiente distinta. Dada la existencia de la inflación en los mercados reales, esto puede que sea la explicación de la discrepancia que se ha producido en algunos tests entre los resultados empíricos que de ellos se derivan y los resultados teóricos previstos por el CAPM standard. En el modelo de precios de equilibrio bajo inflación incierta, se puede probar que el teorema de la separación no se cumple aunque, bajo ciertas condiciones especiales, sí se cumple un teorema de la separación generalizado a tres fondos.

Una de las aplicaciones del modelo CAPM standard - que ha tenido una mayor difusión y que ha sido utilizada no sólo a nivel teórico, sino también a nivel práctico por algunas instituciones financieras, como los Fondos de Inversión, consiste en la medida de la performance de títulos y carteras. Existen diversos índices para medir la performande ex-post - de los títulos y carteras de valores: índice de Sharpe, de Treynor, de Jensen, así como algunas modificaciones de los mismos. El índice de Sharpe es válido únicamente para carteras, mientras que tanto el índice de Treynor como el de Jensen pueden utilizarse a nivel de títulos individuales o carteras.

Entre los distintos índices de performance existen relaciones de tipo lineal, por lo que las ordenaciones de - las carteras a que dan lugar en la práctica tienen coeficientes de correlación muy altos.

Otra aplicación del CAPM, muy interesante a nivel teórico, es la que hace referencia a la toma de decisiones - de financiación en la empresa y al problema de si existe o - no una estructura financiera óptima para la cual el valor -- de la empresa sea máximo.

Si se tiene en cuenta la existencia del impuesto - de sociedades y los costes de quiebra, la aplicación del - CAPM permite obtener los rendimientos de equilibrio de cualquier empresa, con o sin deudas en su estructura financiera, así como el valor de equilibrio de una empresa endeudada en función de: el valor de equilibrio de una empresa sin deudas, las deudas de la misma, el tipo impositivo del impuesto sobre sociedades y el valor actual de los costes de quiebra.

Las proposiciones I y II de M-M (1958) son el caso particular del modelo de valoración planteado cuando no existen impuestos ni costes de quiebra. Mientras que las correspondientes Proposiciones I y II de M-M (1963) son el caso particular del mismo modelo cuando no existen costes de quiebra, pero si se tiene en cuenta la existencia del impuesto de sociedades.

Si los ingresos que obtiene una empresa, luego de pagar a todos los factores productivos que no sean factores de capital, se distribuyen normalmente, entonces se demuestra que la capacidad de deuda de la misma se alcanza antes de que la quiebra se vuelva cierta, aún en el caso de que los inversores no tengan aversión al riesgo. Además, esto siempre se produce antes de que el ratio de endeudamiento alcance el 100%.

Según el modelo de valoración analizado, existe una estructura financiera óptima para la empresa que se consigue antes de que el endeudamiento supere la capacidad de deuda de la misma.

El modelo CAPM no sólo se puede aplicar para resolver el problema de la toma de decisiones de financiación, sino que también puede utilizarse en la toma de decisiones de inversión de la empresa. La aplicación del modelo CAPM standard a las decisiones de inversión de una empresa produce los siguientes resultados:

- Se debe aceptar aquellos proyectos de inversión cuyo par rentabilidad-riesgo caiga por encima de la SML.

- El coste de capital, para un riesgo standarizado, es el mismo para todas las empresas.

- Las empresas no deben preocuparse por diversificar sus proyectos de inversión, ya que el inversor particular puede diversificar el riesgo, hasta el máximo posible, mediante la elección de una cartera eficiente.

- El criterio TIR únicamente coincide con el criterio MPR (Market Price of Risk), aquí propuesto, cuando la empresa no tiene deudas en su estructura de capital. En todos los demás casos, las tasas de corte que proponen ambos criterios son diferentes, ya que el criterio TIR no tiene en cuenta el riesgo de los proyectos de inversión.

Hasta ahora hemos presentado las conclusiones de la parte principal del trabajo que hemos realizado, cuyo contenido es fundamentalmente teórico. Pero nos queda hacer referencia a los resultados obtenidos en los dos estudios de tipo empírico que hemos llevado a cabo sobre el mercado bursátil español: uno, sobre la diversificación ingenua y los límites de la diversificación y, otro, sobre un test del CAPM standard.

Por lo que respecta al anexo A, sobre la diversificación ingenua en el mercado bursátil español, las principaconclusiones son las siguientes:

1) A medida que aumenta el número de títulos que - forman parte de una cartera, en la que cada título tiene - igual ponderación, el riesgo medido por la desviación típica de los rendimientos decrece, pero no de una forma lineal. - Así, por ejemplo, trabajando con los datos del período completo de 10 años: 1970-79, se ve como con una cartera de 5 títulos se consigue reducir por término medio el riesgo en un - 74'73%, mientras que con una cartera de tamaño doble, 10 títulos, unicamente se consigue una reducción suplementaria del riesgo del 12'07%.

2) Con una diversificación no muy grande, de 15 títulos por ejemplo, se consigue reducir el riesgo potencial - en un 91'06% por término medio y si se ampliase el número de títulos hasta 30 valores solamente se conseguiría una reducción adicional del 4'4%, que generalmente no compensará los mayores costes de transacción y administración que una cartera de ese tamaño lleva consigo.

3) Existe una parte del riesgo en relación con el riesgo medio de un título que no es posible diversificar, de forma que aunque aumente mucho el tamaño de una cartera, e - incluso tienda a infinito, el inversor la seguirá soportando: esa parte es el 56'37% del riesgo medio de los títulos individuales.

4) Si se estudia los dos subperíodos: 1970-74 y - 1975-79, se ve que existe una tendencia descendente en el - riesgo no diversificable que por término medio tienen los tí-

tulos individuales, ya que el porcentaje del riesgo en relación con el riesgo medio de un título que no se puede diversificar pasa del 69'36% al 45% respectivamente.

Por último, por lo que se refiere al anexo B, sobre el test del CAPM en el mercado de valores español, cabe resaltar que:

1) Hay que dividir necesariamente el período de estudio 1970-79 en dos subperíodos: 1970-74 y 1975-79, ya que la crisis subsiguiente al fuerte alza de los crudos a finales de 1973, y que la Bolsa reflejó con retraso a lo largo de 1974, provoca un cambio estructural, estando poco correlacionados los coeficientes beta de los títulos individuales de uno y otro subperíodo.

2) En el subperíodo 1975-79, la nube de puntos sobre los ejes $(E(\tilde{R}_i), \hat{\beta}_i)$ está muy dispersa y, como consecuencia de ello, el coeficiente de correlación de la recta ajustada es muy bajo. Además, 26 de los 42 títulos de la muestra tienen un rendimiento medio negativo y el mismo índice general tiene un rendimiento medio anual negativo: -7'08%. Estos hechos no tienen ninguna explicación lógica posible, ni mediante el CAPM ni mediante ninguna otra teoría, ya que intuitivamente está claro que el mercado debe recompensar a un accionista, como mínimo, con el tipo de interés que rinde el dinero colocado a plazo fijo en los bancos comerciales, que siempre es positivo en términos nominales, más una prima por el riesgo mayor que tienen las acciones respecto al activo libre de riesgo.

El mercado de valores se hundió y, como consecuencia de este hecho, muchos títulos aparecen con una cotización muy por debajo de su valor teórico según los datos del balance.

3) En el subperíodo 1970-74 se obtienen mejores resultados, sobre todo si se hace uso de la muestra reducida de 30 títulos. La recta ajustada a los pares de valores: $E(\tilde{R}_i)$, $\hat{\beta}_i$ tiene una ordenada en el origen negativa, lo cual está en contra de lo previsto por el CAPM. En general, los títulos de coeficientes beta bajos están recompensados por debajo de lo que la teoría prevé, mientras que ocurre lo contrario con los títulos de coeficiente beta altos. De todos modos, lo que sí parece estar respaldado por los datos ex-post es el hecho de que existe una relación positiva entre el rendimiento medio de los títulos y sus respectivos coeficientes beta, es decir, que los títulos con mayor riesgo ofrecen una mayor rentabilidad, tal como resulta lógico pensar y la teoría prevé.

Los resultados de los dos estudios empíricos son provisionales y no pretenden ser en absoluto definitivos. En los respectivos anexos se explica la limitación del trabajo realizado y los métodos empleados. Su único fin consiste en presentar los primeros resultados experimentales que hemos obtenido de una investigación más amplia y completa que estamos realizando apoyándonos en el trabajo que presentamos como tesis. Esta investigación está en fase de elaboración y esperamos publicar sus resultados a medida que éstos se vayan produciendo.

B I B L I O G R A F I A

AFTALION, F. y VIALLET, C.: "Theorie du Portefeuille". Presses Universitaires de France. Paris, 1977.

ALCHIAN, A.A. y KESSEL, R.A.: "Redistribution of Wealth through Inflation". Science, nº 130, septiembre 1959, p. 535-539.

ALTMAN, E.I., JACQUILLAT, B. y LAVASSEUR, M.: "Comparative Analysis of Risk Measures: France and the United States". Journal of Finance, Diciembre 1974, p. 1495-1511.

BACH, G.L. y STEPHENSON, J.B.: "Inflation and the Redistribution of Wealth". Review of Economics and Statistics, Febrero 1974, p. 1-13

BAESEL, J.B.: "On the Assessment of Risk: Some Further Considerations". Journal of Finance, Diciembre 1974, p. - 1491-1194.

B A T X E R, N.D.: "Leverage, Risk of Ruin and the Cost of Capital". Journal of Finance, Septiembre 1967.

BECKER; J.: "General Proof of Modigliani-Miller Propositions I and II Using Parameter-Preference Theory". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, nº 1, - marzo 1978, p. 65-70.

BELLMORE, D.A.: PHILLIPS, H.E. y RITCHIE, J.C.: "Investment Analysis and Portfolio Selection: An Integrate Approach". - South-Western Publishing Co. Ohio, 1979.

BEN-HORIM, M. y LEVY, H.: "Total Risk, Diversificable Risk and non-diversificable Risk: A Pedagogic Note". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 15, nº 2, -- Junio, 1980, p. 289-297.

BEN-SHAHAR, H.: "The Capital Structure and the Cost of Capital: A Suggested Exposition". Journal of Finance, vol. 23, nº 4, Septiembre 1968, p. 639-653.

BIERMAN, H. (Jr.) y HASS, J.E.: "Capital Budgeting under Uncertainty: A Reformulation". Journal of Finance, Marzo - 1973, p. 119-129.

BLACK, F.: "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing". Journal of Business, vol. 45, nº 3, Julio 1972, p. 444-454.

BLACK, F., JENSEN, M.C. y SCHOLES, M.S.: "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests". En "Studies in the Theory of Capital Markets", editado por Jensen M.C., Praeger Publishing Co., New York, 1972.

BLUME, M.: "Portfolio Theory: A Step towards its Practical Application". Journal of Business, Abril 1970, p. 163-164.

BLUME, M.: "On the Assessment of Risk". Journal of Finance, marzo 1971, p. 1-10.

BLUME, M.E. y FRIEND, I: "A New Look at the Capital Asset Pricing Model". Journal of Finance, vol. 28, nº 1, marzo 1973, p. 19-33.

BODIE, Z.:"Common Stocks as a Hedge against Inflation". Journal of Finance, vol. 31, nº 2, mayo 1976, p. 459-470.

BOGUE, M.C. y ROLL, R.: "Capital Budgeting of Risk Projects with "Imperfect Markets" for Physical Models". Journal of Finance, vol. 32, nº 2, mayo 1978, p: 395-401.

BOLSA DE MADRID: "Indice de Acciones 1941-1971". Servicio de Estudios Económicos. 1973.

BOLSA DE MADRID: "Indice Largo Total de Acciones 1941-1975". Servicio de Estudios e Información. Madrid 1977.

BOLSA DE MADRID: "¿Qué es el Crédito al Mercado?". Servicio de Estudios de la Bolsa de Madrid. Madrid, 1981.

BOOT, J.C.G.: "Quadratic Programming". North-Holland and Skokie, Ill. Round McNally. Amsterdam 1964.

BRADFORD, W.D.: "Inflation and the Value of the Firm: Monetary and Depreciation Effects". Southern Economic Journal, vol. 40, nº 3, enero 1974, p. 414-427.

BRENNAN, M.J.: "Capital Market Equilibrium with Divergent Borrowing and Lending Rates". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 6, nº 5, diciembre 1971, p. 1197-1205.

BRENNAN, M.J. y SCHWARTZ, E.S.: "Corporate Income Taxes, Valuation and the Problem of Optimal Capital Structure". Journal of Business, vol. 51, nº 1, enero 1978, p. 103-114.

BRIGHAM, E. y GORDON, M.J.: "Leverage, Dividend Policy and the Cost of Capital". Journal of Finance, marzo 1968, p. 85-103.

BRITO, N.O.: "Marketability Restrictions and the Evaluation of Capital Assets under Uncertainty". Journal of Finance, vol. 32, nº 4, septiembre 1977, p. 1109-1123.

CASADO ABAD, J.: "La Diversificación del Riesgo". Alta Dirección, año VIII, nº 44, julio-agosto 1972, p. 13-18.

COATES, C.R.: "Investment Strategy". McGraw-Hill Book Company. New York, 1978.

COHEN, K.J. y POGUE, J.A.: "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio Selection Models". Journal of Business vol. 40, nº 2, abril 1967, p. 166-193.

COOTNER, P.H.: "Capital Asset Pricing in a General Equilibrium Framework". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, nº 4, noviembre 1978, p. 613-624.

COPELAND, T.E. y WESTON, J.F.: "Financial Theory and Corporate Policy". Addisson-Wesley Publishing Company. United States. 1979.

CHEN, A.H.: "A Theory of Corporate Bankruptcy and Optimal Capital Structure". En "Handbook of Financial Economics" editado por J. Bickslen. 1978.

CHEN, A.H.: "Recent Developments in the Cost of Debt Capital". Journal of Finance, vol. 33, nº 3, junio 1978, p. 863-877.

CHEN, A.H. y BONESS, A.J.: "Effects of Uncertain Inflation on the Investment and Financing Decisions of a firm". Journal of Finance, vol. 30, nº 2, mayo 1975, págs. 469-483.

CHEN, A.H. y KIM, E.H.: "Theories of Corporate Debt Policy: A Synthesis". Journal of Finance, vol. 34, nº 2, mayo, 1979, p. 371-384.

CHEN, E.T.: "Uncertain Inflation and Capital Asset Prices". - Southern Economic Journal, vol. 46, nº 3, enero - 1980, p. 763-776.

DE ALESSI, L.: "The Redistribution of Wealth by Inflation: An Empirical Test with United Kingdom Data". Southern Economic Journal, vol. 30, octubre 1963, p. 113-127.

DE ALESSI, L.: "Do Business Firms Gain from Inflation?. Reprise". Journal of Business, vol. 48, nº 2, abril 1975, p. 264-266.

DONALDSON, G.: "New Framework for Corporate Debt Policy". Harvard Business Review, vol. 42, 1962.

DONALDSON, G.: "Financial Goals: Management vs. Stockholders". Harvard Business Review, vol. 41, mayo 1963, p. 116-129.

DOUGLAS, G.W.: Risk in the Equity Markets: An Empirical Appraisal of Markets Efficiency". Yale Economic Essays, - vol. 9, 1969, p. 3-45.

DUNCAN LUCE, R. y RAIFFA, H.: "Games and Decisions". John Wiley, New York, 1957.

DURAN HERRERA, J.J.: "La Diversificación como Estrategia Empresarial". Ediciones Pirámice. Madrid 1977.

DURAND, D.: "Cost of Debt and Equity Funds for Business Trends and Problems of Measurement". Conference on Research on Business Finance. National Bureau of Economic Research, New York, 1952.

ELTON, E.J. y GRUBER, M.J.: "Risk Reduction and Portfolio Size: An Analytical Solution". Journal of Business, vol. 50, nº 4, octubre 1977, p. 415-437.

EVANS, J.L. y ARCHER, S.H.: "Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis". Journal of Finance, vol. 23, diciembre 1968, p. 761-767.

FAMA, E.F.: "The Behavior of Stock Market Prices". Journal of Business, vol. 38, nº 1, enero 1965, p. 34-105.

FAMA, E.F.: "Random Walks in Stock Market Prices". Financial Analysis Journal, vol. 21, nº 5, septiembre-octubre 1965, p. 55-59.

FAMA, E.F.: "Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments". Journal of Finance, vol. 23, nº 1, marzo 1968, p. 29-40.

FAMA, E.F.: "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". Journal of Finance, vol. 25, nº 2, mayo 1970, p. 383-417.

FAMA, E.F.: "A Note on the Market Model and the Two-parameter Model". Journal of Finance, vol. 28, nº 5, diciembre 1973, p.1181-1185.

FAMA, E.F.: "Risk-Adjusted Discount Rates, and Capital Budgeting under Uncertainty". Journal of Financial Economics, agosto 1977.

FAMA, E.F.: "Foundations of Finance". Basil Blackwell. Oxford, 1977.

FAMA, E.F. y MacBETH, J.D.: "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests". Journal of Political Economy, vol. 81, - 1973, p. 607-636.

FAMA, E.F. y MILLER, M.H.: "The Theory of Finance". Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York, 1972.

FAMA, E.F. y SCHWERT, G.W.: "Asset Returns and Inflation". Journal of Financial Economics, vol. 5, nº 2, noviembre - 1977, p. 115-146.

FAMA, E.F. y SCHWERT, G.W.: "Inflation, Interest and Relative - Prices". Journal of Business, vol. 52, nº 2, Abril - 1979, p. 183-209.

FARRAR, D.E.: "The Investment Decision under Uncertainty". Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. New Jersey 1962.

FELDSTEIN, M.: "Inflation and the Stock Market". American Economic Review, vol. 70, nº 5, diciembre 1980, p. 839-846.

FERNANDEZ AMATRIAIN, J.: "La Bolsa". Ediciones Deusto. Bilbao, 1974.

FERNANDEZ BLANCO; M.: "La Inflación y la Teoría Analítica de la Financiación". Cuadernos de Economía, vol. 7, nº 18, 1979, p. 51-86.

FERNANDEZ BLANCO, M.: "Estructura Financiera y Valor de la Empresa". Cuadernos Universitarios de Planificación empresarial, vol. 5, nº 3, 1979, p. 405-434.

FISHER, I.: "Appreciation and Interest". MacMillan. New York, 1896.

FISHER, I.: "The Theory of Interest". New York, 1930.

FOSTER, G.: "Asset Pricing Models, Further Test". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, nº 1, marzo 1978, p. 39-54.

FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H.: "Análisis y Gestión de Carteras de Valores". Ediciones ICE. Madrid 1977.

FRANKFURTER, G.M., PHILLPS; H.E. y SEAGLE, J.P.: "Performance of the Sharpe Portfolio Selection Model: A Comparison". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.11 nº 2, junio 1976, p. 195-204.

FRIEDMAN, B.M.: "Price Inflation, Portfolio Choice and Nominal Interest Rates". American Economic Review, vol. 70, nº 1, marzo 1980, pp. 32-48.

FRIEDMAN, M.M.: "The Methodology of Positive Economics". The University of Chicago Press. Chicago, 1953.

FRIEDMAN, M. y SAVAGE, L.J.: "The Utility Analysis of Choices Involving Risk". Journal of Political Economy, vol. 56, agosto 1948, p. 279-304.

FRIEND, I. y BLUME, M.: "Measurement of Portfolio Performance under Uncertainty". American Economic Review, vol. 60, -

Septiembre 1970.

FRIEND, I., LANDSKRONER, Y. y LOSQ, E.: "The Demand of Risky Assets under Uncertain Inflation". Journal of Finance, - vol. 31, nº 5, diciembre 1976, p. 1287-1297.

GAVIRIA, N.G.: "Inflation and Capital Asset Prices: Theory and - Tests". Tesis Doctoral. Stanford University. 1973.

GONEDES, N.J.: "Capital Market Equilibrium for a Class of Heterogeneous Expectations in a Two-Parameter World". Journal of Finance, vol. 31, nº 1, marzo 1976, p. 1-15.

GONZALEZ, N., LITZENBERGER, R. y ROLFO, J.: "On the Mean-Variance Models of Capital Structure and the Absurdity of - their Predictions". Journal of Financial and Quantitative Analysis, junio 1977, p. 165-179.

GORDON, M.J.: "The Investment, Financing and the Valuation of - the Corporation". Homewood Richard D. Irwin. Illinois. 1962.

GOULA SURIÑACH, J.: "Análisis y Cálculo del Riesgo en el Mercado de Valores". Banca Más Sardá, Servicio de Estudios. - Barcelona, 1974.

HAGIN, R.: "Modern Portfolio Theory". Dow Jones-Irwin. Illinois. 1979.

HAMADA, R.S.: "Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporation Finance". Journal of Finance, vol. 29, nº 1, - marzo 1969, p. 13.

HAMADA, R.S.: "Investment Decisions with a General Equilibrium -

Mean-Variance Approach". Quarterly Journal of Economics vol. 85, noviembre 1971.

HAUGEN, R.A. y SENBET, L.W.: "The Insignificance of Bankruptcy Costs to the Theory of Optimal Capital Structure". - Journal of Finance, vol. 33, nº 2, mayo 1978, p. 383-393.

HIRSCHLEIFER, J.: "Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State Preference Approach". Quarterly - Journal of Economics, Mayo 1966.

HIRSLEIFER, J.: "Investment, Interest, and Capital". Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1970.

HONG, H.: "Inflation and the Market Value of the Firm: Theory - and Tests". Journal of Finance, vol. 32, nº 4, septiembre 1977, p. 1031-1048.

HOROWITZ, I.: "An Introduction to Quantitative Business Analysis" McGraw-Hill Book Company. New York, 1965.

JACQUILLAT, B. y SOLNIK, B.: "Mercados Financieros. Gestión de - Cartera de Valores". Tecniban. Madrid, 1975.

JAFFEE, D.M.: "Credit Rationing and the Commercial Loan Market". John Wiley, New York, 1971.

JAFFEE, J.E. y MANDELKER, G.: "The Fisher Effect for Risky Assets: An Empirical Investigation". Journal of Finance, vol. - 31, nº 2, mayo 1976, p. 447-458.

JEAN, W.H.: "Teoría Analítica de la Financiación". Editorial Ariel. Barcelona, 1976.

JENSEN, M.: "The Performance of Mutual Funds in the period 1945--1964". Journal of Finance, vol. 23, nº 2, mayo 1968, p. 389-416.

JENSEN, M.: "Risk, the Pricing of Capital Asset and the Evaluation of Investment Portfolio". Journal of Business, - vol. 42, nº 2, Abril 1969, p. 167-247.

JENSEN, M.C.: "Studies in the Theory of Capital Markets". Praeger Publishiers. Londres. 1972.

JENSEN, M.C. y MECKLING, W.A.: "Theory of the Firms Managerial Behavior, Agency Costs and the Ownership Structure". Journal of Financial Economics, Octubre 1976, p. 305-360.

JOHNSON, G.L., REILLY, F.K. y SMITH, R.E.: "Individual Common Stocks as Inflation Hedges". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 6, junio 1971, p. 1015- - 1.024.

JOHNSON, A. y SHANNON, B.: "A Note on the Diversification and the Reduction of Dispersion". Journal of Financial Econo - mics, vol. 1, diciembre 1974, p. 365-372.

JOHNSTON, J.: "Métodos de Econometría". Editorial Vicens-Vives. Barcelona, 1975.

KENDALL, M.G.: "The Analysis of Economic Time Series, I: Prices" Journal of the Royal Statistical Society, sec. A, 1953 p. 11-25.

KESSEL, R.A.: "Inflation-Induced Wealth Redistribution: A Test of a Hypothesis". American Economic Review, vol. 46, marzo 1956, p. 128-141.

KIM, E.H.: "A Theory of Optimal Financial Structure in Market Equilibrium: A Critical Examination of the Effects of Bankruptcy and Corporate Income Taxation". Ph. D. Dissertation, State University of New York at Buffalo. Diciembre 1974.

KIM, E.H.: "A Mean-Variance Theory of Optimal Structure and Corporate Debt Capacity". Journal of Finance, vol. 33, nº 1, marzo 1978, p. 45-63.

KIM, E.H., McCONNELL, J.J. y GREENWOOD, P.R.: "Capital Structure Rearrangements and Me-first Rules in a Efficient Capital Market". Journal of Finance, vol. 32, nº 3, junio 1977, p. 789-809.

KLEMKOSKY, R.C. y MARTIN, J.D.: "The Effect of Market Risk on Po Portfolio Diversification". Journal of Finance, vol.30 nº 1, marzo 1975, p. 147-154.

KRAUS, A. y LITZENBERGER, R.: "A State-Preference Model of Optimal Finance Leverage". Journal of Finance, septiembre 1973.

LEE, W.Y. y BARKER, H.H.: "Bankruptcy Costs and the Firm's Optimal Debt Capacity". Southern Economic Journal, marzo 1977.

LEVITZ, G.D.: "Market Risk and the Management of Institutional Equity Portfolios". Financial Analyst Journal, Enero-Febrero 1974, p. 53-60.

LEVY, R.A.: "Stationarity of Beta Coefficients". Financial Ana - lysts Journal, Noviembre-diciembre 1971, p. 55-62.

LINTNER, J.: "The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets". Review of Economics and Statistics, vol. 47, nº 1, Febrero 1965, p. 13-37.

LINTNER, J.: "Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diver sification". Journal of Finance, vol. 20, nº 4, Diciem bre 1965. p. 587-615.

LINTNER, J.: "The Aggregation of Investor's Diverse Judgements - and Preferences in Purely Competitive Security Markets" Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 4 nº 4, Diciembre 1969, p. 347-400.

LINTNER, J.: "Inflation and Security Returns". Journal of Finance. Vol. 30, nº 2, mayo 1975.

LORENTE, M.A. y MARTINEZ FERNANDEZ DE LIGIER, P.L.: "Operaciones y Servicios: Bolsa y Valores". Banco de Vizcaya. Bilbao, 1978.

MALINVAUD, E.: "Métodos Estadísticos de la Econometría". Ariel. Barcelona, 1967.

MANDELBROT, B.: "The Variation of Certain Speculative Prices". Journal of Business, vol. 36, octubre 1963, p. 394-419.

MAO, J.C.T.: "Análisis Financiero". El Ateneo. Buenos Aires. - 1974.

MARKOWITZ, H.: "Portfolio Selection". Journal of Finance, Marzo 1952, p. 77-91.

MARKOWITZ, H.M.: "The Optimization of a Cuadratic Function Subject to Linear Constraints". Naval Research Logistics Quarterly, marzo-junio 1956, p. 111-133.

MARKOWITZ, H.M.: "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments". John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1959.

MATEOS-APARICIO MORALES, P.: "Inversión Mobiliaria Colectiva". Bolsa de Madrid, Servicio de Estudios, Madrid 1977.

MAYERS, D.: "Nonmorketable Assets and the Determination of Capital Asset Prices in the Absence of a Riskless Asset". Journal of Business, vol. 46, nº 2, 1973, p. 258-267.

MERTON, R.C.: "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuos Time Model". Journal of Economic Theory, diciembre 1971.

MERTON, R.C.: "An Analitic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 7, nº 4, septiembre 1972, p. 1851-1871.

MERTON, R.C. y SAMUELSON, P.A.: "Fallacy of the Long-Normal Approximation to Optimal Portfolio Decision Making under Uncertainty". Journal of Financial Economics, mayo 1974.

MILLER, M.H.: "Debt and Taxes". Journal of Finance, vol. 32, nº 2, mayo 1977, p. 267 y ss.

MILLER, M. y SCHOLES, M.: "Rates of Return in Relation to Risk: A Reexamination of Some Recent Findings". En "Studies in the Theory of Capital Markets", editado por Jensen M.C., Praeger Publishing Co., New York, 1972, p. 47-78.

MODIGLIANI, F. y MILLER, M.: "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment". American Economic Review, vol. 43, junio 1958, p. 261-297.

MODIGLIANI, F. y MILLER, M.: "Corporate Income, Taxes and the Cost of Capital: A Correction". American Economic Review, vol. 53, nº 3, junio 1963, p. 433-443.

MODIGLIANI, F., POGUE, G.A., SCHOLES, M.S. y SOLNIK, B.H.: "Efficiency of European Capital Markets and Comparison with the American Market". Proceedings of the First International Conference on Stock Exchanges. CISMEC, 1972. Traducido al castellano en "Lecturas sobre Bolsa" de la autora Vallve-Ribera de Hortala, M.A. Instituto dd Estudios Fiscales, Madrid 1977.

MOSSIN, J.: "Equilibrium in a Capital Asset Market". Econometrica, vol. 34, nº 4, Octubre 1966, p. 768-783.

MOSSIN, J.: "Security Pricing and Investment Criteria in Competitive Markets". American Economic Review, Diciembre, 1969, p. 749-756.

MOSSIN, J.: "Theory of Financial Markets". Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

MYERS, S.C.: "A Time-State Preference Model of Security Valuation". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 3, nº 1, Marzo 1968, p. 1-33.

MYERS, S.C.: "Interactions of Corporate Financing and Investment Decision-Implications for Capital Budgeting". Journal of Finance, vol. 29, marzo 1974.

MYERS, S.C. y TURNBULL, S.M.: "Capital Budgeting and the Capital Asset Pricing Model: Good News and Bad News". Journal of Finance, vol. 32, nº 2, mayo 1977, p. 321-336.

NELSON, Ch. R.: "Inflation and Rates of Return on Common Stocks" Journal of Finance, vol, 31, nº 2, mayo 1976, p. 471-483.

OSBORNE, M.F.M.: "Brownian Motion in the Stock Market". Operation Research, vol. 7, 1957, p. 145-177.

OSTERYOUNG, J.: "Capital Budgeting: Long-Term Asset Selection". Grid, Inc. Ohio, 1974.

OUDET, B.A.: "The Variation of the Return on Stocks in Periods of Inflation". Journal of Financial and Quantitative Analysis, marzo 1973, p. 247-258.

PETIT, R.R. y WESTERFIELD, R.: "Using the Capital Asset Pricing Model and the Market Model to Predict Security Returns" Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 9, nº 4, septiembre 1974, p. 579-605.

PFLAUM, C.C., ROENFELDT, R.L. y GRIEPENTROG, G.L.: "Further Evidence on the Stationary of Beta Coefficients". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, nº 1, marzo 1978, p. 117-122.

PHILIPPATOS, G.C.: "Financial Management". Holden-Day, Inc. San Francisco, 1973.

POGUE, G. y SOLNIK, B.: "Risque, Diversification et Gestion de Portefeuille". Analyse Financière, nº 10, 3er trimestre 1972, p. 1-6.

POGUE, G.A. y SOLNIK, B.H.: "The Market Model Applied to European Common Stocks: Some Empirical Results". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 9, nº 6, diciembre 1974, p. 917-944.

PRIETO PEREZ, E.: "Teoría de la Inversión". Ediciones ICE, Madrid 1973.

PYUN, C.S.: "A Note on Capital Asset Pricing Model under Uncertain Inflation". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 15, nº 2, junio 1980, p. 425-434.

RAIFFA, H.: "Analyse de la Decision: Introduction aux Choix en Avenir Incertain". Dunod. Paris 1973. La versión original en inglés está editada por Addisson-Wesley Publishing, Inc. Massachussets, 1968.

RENAU PIQUERAS, J.J.: "Política de Dividendos y Mercado de Capitales". Panorama Bursatil, nº 14, octubre 1979, p. 13-22.

RIBAS MIRANGELS, E.: "El Coste de Capital y los Fundamentos de la Polémica en torno a su Comportamiento". Revista Española de Financiación y Contabilidad, vol. 6, nº 22, octubre-diciembre 1977, p. 91-103.

ROBICHECK, A.A. y MYERS, S.C.: "Problems in the Theory of Optimal Capital Structure". Journal of Financial and Quantitative Analysis, junio 1966.

ROBICHECK, A.A. t MYERS, S.C.: "Decisiones Optimas Financieras". Editorial Herrero Hermanos, México 1968.

ROLL, R.: "Bias in Fitting the Sharpe Model to Time Series Data". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 4, nº 3, septiembre 1969, p. 221-289.

ROLL, R.: "The Behavior of Interest Rates: The Application of the Efficient Market Model to U.S. Treasury Bills". Basic Book, Inc. New York, 1970.

ROLL, R.: "Assets, Money and Commodity Price Inflation under Uncertainty". Journal of Money, Credit and Banking, noviembre 1973.

ROLL, R.: "A Critique of the Asset Pricing Theory's Test; Part I: On Past and Potential Testability of the Theory". Journal of Financial Economics, vol. 4, marzo 1977, p. 129-176.

ROSENFELD, F.: "Análisis Financiero y Gestión de Cartera". Editorial Hispano Europea. Barcelona, 1977.

ROSS, S.A.: "Uncertainty and the Heterogeneous Capital Good Model". Review of Economic Studies, enero 1975.

ROSS, S.A.: "The Current Status of the Capital Asset Pricing Model (CAPM)". Journal of Finance, vol. 33, nº 3, junio 1978, p. 885-901.

RUBINSTEIN, M.E.: "The Fundamental Theorem of Parameter Preference Security Valuation". Journal of Financial and Quantitative ANalysis, vol. 8, nº 1, enero 1973, p. 61-69.

RUBINSTEIN, M.E.: "A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory". The Journal of Finance, vol. 28, nº 1, marzo 1973, p. 167-181.

RYAN, T.M.: "Theory of Portfolio Selection". The Mac Millan Press LTD. London 1978.

SARNAT, M.: "Inflation and Capital Markets". Ballinger Publishing Co. Cambridge. Estados Unidos 1978.

SCOTT, J.H.: "A Theory of Optimal Capital Structure". Bell Journal of Economics and Managerial Science, Primavera 1976.

SCOTT, James H., Jr.: "Bankruptcy, Secured Debt, and Optimal Capital Structure". Journal of Finance, vol. 32, nº 1, - marzo 1977, p. 1-19.

SCHALAIFER, R.: "Analysis of Decisions under Uncertainty". Mc Graw-Hill Bock Company, New York, 1969.

SCHENELLER, M.I.: "The CAPM in face of Price-Level Changes". En "Inflation and Capital Markets", editado por Sarnat, M. Ballinger Publishing, Co., Cambridge, Estados Unidos, 1978, p. 139-146.

SCHWARTZ, E.: "The Theory of Capital Structure of the Firm", Journal of Finance, vol. 14, nº 1, marzo 1959, p. 18-39.

SENBET, L.W. y THOMPSON, H.E.: "The Equivalence of Alternative -

Mean-Variance Capital Budgeting Models". Journal of Finance, vol. 32, nº 2, mayo 1978, p. 395-401.

SHARPE, W.F.: "A Simplified Model for Portfolio Analysis". Management Science, vol. 9, nº 1, enero 1963, p. 277-293.

SHARPE, W.F.: "Capital Assets Prices: A Theory of Markat Equilibrium under Conditions of Risk". Journal of Finance, - vol. 19, nº 3, septiembre 1964, p. 425-442.

SHARPE, W.F.: "Mutual Fund Performance". Journal of Business, - vol. 39, nº 1, enero 1966, p. 119-138.

SHARPE; W.F.: "Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales". - Ediciones Deusto, Bilbao 1976.

SMITH, K.V. y TITO, D.A.: "Risk-Return Measures of Ex-post Performance". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 4, nº 4, Diciembre 1969, p. 449-417.

SOLNIK, B.: "Les Avantages de la Diversification Nationale et Internationale". Banque, nº 328, abril 1974, p. 395-402.

SOLNIK, B.: "Inflation and Optimal Portfolio Choices". Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, nº 5, diciembre 1978, p. 903-926.

SOLOMON; E.: "Leverage and the Cost of Capital". Journal of Finance, mayo 1963, p. 273-279.

STAPLETON, R.C.: "Portfolio Analysis, Stock Valuation and Capital Budgeting Decision Rules for Risky Projects". Journal of Finance, vol. 26, marzo 1971, p. 95-118.

STIGLITZ, J.E.: "A Re-examination of the Modigliani-Miller Theorem". American Economic Review, Diciembre 1969.

STIGLITZ, J.E.: "On the Irrelevance of Corporate Financial Policy". American Economic Review, Diciembre 1974.

SUAREZ SUAREZ, A.S.: "Decisiones Optimas de Inversión y Financiación en la Empresa". Ediciones Pirámide. Madrid, 1980.

SUAREZ SUAREZ, A.S.: "La Eficiencia de los Mercados de Valores". Revista Española de Economía, año 7, nº 3, Diciembre 1977, p. 199-210.

SWALM: "Utility Theory". Harvard Business Review, vol. 44, noviembre-diciembre 1966, p. 123-136.

THUROW, L.C.: "Inversión en Capital humano". Editorial Trillas, Mexico, 1978.

TOBIN, J.: "Liquidity Preference as Behavior towards Risk". Review of Economic Studies, vol. 25, nº 1, febrero 1958, p. 65-86.

TREYNOR, J.L.: "How to Rate Management of Investment Funds". Harvard Business Review, enero-febrero 1965, p. 63-75.

TREYNOR, J.L.: "Discussion: The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-64". Journal of Finance, vol. 23, mayo 1968, p. 418-419.

TREYNOR, J.L. y MAZUY, K.K.: "Can Mutual Funds Outguess the Market". Harvard Business Review, Julio-agosto 1966, p. 131-136.

TURNBULL, S.M.: "Capital Structure, Debt Capacity and the Investment Decision". Working Paper, Department of Political Economy, University of Toronto, Septiembre 1977.

TURNBULL, S.M.: "Debt Capacity". Journal of Finance, vol. 34, nº 4, septiembre 1979, p. 931-940.

VALLVE-RIBERA DE HORTALA, M.A.: "Lecturas sobre Bolsa". Instituto de Estudios Fiscales, Ministerio de Hacienda. Madrid, 1977.

VAN HORNE, J.C.: "Optimal Initiation of Bankruptcy Proceeding by Debt Holders". Journal of Finance, junio 1976.

VAN HORNE, J.: "Financial Management and Policy". Prentice-Hall International Editions. Londres 1977.

VASICEK, O.A.: "Capital Market Pricing Model with no Riskless Borrowing". Unpublished Manuscript, Wells Fargo Bank, marzo 1971.

VON NEUMANN, J. y MORGENSTERN, O.: The Theory of Games and Economic Behavior". Princeton University Press. Princeton, N.J. 1947.

WAGNER, W.H. y LAU, S.: "The Effect of Diversification on Risk". Financial Analyst Journal, vol.26, diciembre 1971, p. 48-53.

WALLINGFORD, B.A.: "A Survey and Comparison of Portfolio Selection Models". Journal of Financial and Quantitative - Analysis, Junio 1967, p. 85-106.

WAUD, R.N.: "Public Interpretation of Discount Rate Changes: Some Evidence on the "Announcement Effect"". Econométrica, vol. 38, nº 2, marzo 1970, p. 231-250.

WESTON, J. y WOODS, D.: "Teoría de la Financiación de la Empresa". Editorial Gustavo Gili, Barcelona 1970.

WILLIAMS, J.B.: "The Theory of Investment Value". Harvard University Press. 1938.

WILLIAMS, J.T.: "Risk, Human Capital, and the investor's Portfolio". Journal of Business, vol. 51, nº 1, enero 1978, p. 65-90.