Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València

Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0

TESIS DOCTORAL

Doctorado en Didácticas Específicas
(Especialidad de Matemáticas)

PRESENTADA POR:

Patricia I. Edo Gual

DIRIGIDA POR:

Dr. M. Pedro Huerta Palau

Valencia, 2014

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València

Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0

TESIS DOCTORAL

Vº. Bº. El Director

Fdo. Dr. M. Pedro Huerta Palau

Fdo. Patricia I. Edo Gual

Valencia, 2014

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de tesis ha sido uno de los retos más importantes a los que me he enfrentado en mi trayectoria académica, reto que he superado con esfuerzo y dedicación pero también con el apoyo recibido de todas las personas que me han acompañado en este largo camino. A todas ellas quiero mostrarles mi más sincero agradecimiento.

En primer lugar, debo dar las gracias a mi director, el Dr. Pedro Huerta, por darme a conocer su proyecto de investigación y brindarme la oportunidad de formar parte de su equipo, siete años atrás. Fue esto lo que despertó en mí el interés por la Didáctica de la Probabilidad y me animó a emprender esta aventura. Durante todos estos años, sus valiosas enseñanzas y sus acertados consejos, junto con la confianza y la ilusión que ha depositado en esta tesis y el reconocimiento expreso de cada uno de los pequeños logros que he ido consiguiendo, han sido el principal motor de mi trabajo.

También quiero dar las gracias al Dr. Fernando Cerdán, de quien aprendí casi todo lo que sé sobre resolución de problemas y cuyo trabajo ha sido para mí una incesante fuente de inspiración; y al resto de miembros del equipo de investigación, en especial a la Dra. Mª Ángeles Lonjedo y a Marta Carles, por abrirme el camino con sus investigaciones, por su empatía y por toda la ayuda prestada.

No puedo olvidarme tampoco de los nueve estudiantes protagonistas de esta historia. A todos ellos, les agradezco su participación desinteresada en el proyecto y la manera tan responsable con la que desempeñaron su papel. Sin su colaboración, este trabajo no hubiera sido tan fructífero.

Por último, corresponde a mi familia un agradecimiento muy especial, por respetar y apoyar mi decisión de embarcarme en esta empresa tan exigente, que durante tantos ratos les ha privado de mi compañía y atención. A ellos les doy las gracias por hacerme sentir tan valorada, por escucharme pacientemente cuando mi conversación se volvía monotemática, por hacer más llevaderos los altibajos del camino y por toda la asistencia logística que me han prestado en el día a día y que me ha permitido disponer del tiempo necesario para llevar a cabo esta tesis.

A Jesús,

mi compañero de vida

Índice

Capítulo 1. Introducción.

Este trabajo de tesis tiene sus orígenes en el seno de un proyecto de I+D+i más amplio, el Proyecto EDU2008-03140, de tres años de duración, titulado "Bases para un modelo de enseñanza para el desarrollo de competencias en la resolución de problemas de probabilidad condicional en la enseñanza secundaria (12-18 años)", que aborda el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad condicional, desde la resolución de problemas. Informes internacionales como los de PISA (Instituto de Evaluación, 2007, 2008, 2010) e investigaciones previas en didáctica de la probabilidad (Borovcnik y Bentz, 1991; Scholz, 1991; Shaughnessy, 1992; Borovcnik y Peard, 1996; Serrano, Batanero y Ortiz, 1996; Saénz, 1998; Batanero, Navarro-Pelayo y Godino, 1997; Lonjedo, 2007; Díaz y Batanero, 2009; Borovcnik, 2012) ponen de manifiesto las dificultades existentes para lograr un aprendizaje significativo y funcional de la probabilidad y, en particular, de la probabilidad condicional. Al mismo tiempo, este campo de las Matemáticas cobra cada vez más fuerza en los currículos actuales (*B.O.E, 2007; D.O.C.V, 2007),* en los que también se da gran importancia a la resolución de problemas, que se presenta como el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos abarcados en cada curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

Lo que presentamos aquí es una contribución al proyecto más amplio antes mencionado, centrándonos en una parte de la muestra (estudiantes de 15-16 años) y el estudio de una tipología concreta de problemas escolares de probabilidad condicional, de enunciado verbal, que pueden identificarse con cierta facilidad en los libros de texto de la educación secundaria obligatoria. Así pues, asumimos aquella problemática y tratamos de aportar elementos para su resolución estudiando cómo son esos problemas, qué estructuras tienen, en qué contextos se formulan, qué dificultades presentan a los estudiantes y de qué dependen éstas, qué características tienen las resoluciones competentes de los problemas y qué errores cometen los estudiantes durante el proceso de resolución.

Por otra parte, la investigación hace un recorrido ascendente por los tres niveles de análisis o escenarios descritos en Puig (1996, p. 19) como sugerencia para el estudio de la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas educativos. Cada escenario se caracteriza por los elementos que se toman en consideración:

- En el escenario I: Los problemas, solamente.
- En el escenario II: Los problemas y los estudiantes resolviendo esos problemas.
- En el escenario III: Los problemas, los estudiantes y el profesor que enseña la competencia en la resolución de los problemas a dichos estudiantes.

Así, podríamos dividir la investigación desarrollada en tres etapas, correspondiendo la primera a estudios en el escenario I, en los que una familia particular de problemas de probabilidad condicional son los protagonistas; la segunda a estudios en el escenario II, ya que se incorpora a la investigación un grupo de estudiantes de 4º de la ESO; y la tercera, a estudios en el escenario III, puesto que hay un modelo de enseñanza presente que contempla al profesor, a los estudiantes y a los problemas que quieren ser enseñados. En la primera etapa, partimos de la clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional en niveles y categorías realizada por Lonjedo (2007), en su tesis, para llevar a cabo un análisis más detallado de la estructura matemática de los que van a usarse en esta investigación, a los que denominamos problemas de nivel N_0. Adelantamos aquí que estos problemas tienen la particularidad de que todos los datos conocidos del enunciado son probabilidades marginales y/o de la intersección y para que puedan ser considerados como problemas de probabilidad condicional, se pregunta necesariamente por una probabilidad de este tipo. En la segunda etapa de la investigación, observamos la actuación de los estudiantes ante esta clase de problemas, a través de dos cuestionarios que diseñamos y administramos antes de que los estudiantes recibieran instrucción en probabilidad. Al observar el proceso completo de resolución de los problemas, en lugar de limitarnos a cuantificar los éxitos o los fracasos, nos interesamos, principalmente, por identificar y describir las estrategias de resolución con éxito y por identificar y clasificar los errores hallados en las resoluciones sin éxito. La tercera y última etapa consistió en la experimentación de una unidad de enseñanza de probabilidad condicional, para cuyo diseño tomamos como referencia los principios de la Educación Matemática Realista y la resolución de problemas formulados en contexto. Esta unidad de enseñanza está caracterizada, primero, por la consideración de los factores contexto, estructura matemática y formato de datos a la hora de enunciar los problemas propuestos a los alumnos, factores que en las fases previas de la investigación se mostraron influyentes en la actuación de los estudiantes; y segundo, por fomentar la resolución de los problemas en el propio contexto en el que se formulan, con la ayuda de herramientas heurísticas, dejando para el final la formalización de los conceptos matemáticos a modo de modelización de los fenómenos implicados. Finalmente, tras la enseñanza, diseñamos y administramos a los estudiantes un nuevo cuestionario, para observar el efecto producido por la instrucción recibida en la forma de abordar los problemas, en las estrategias de resolución, en el uso de herramientas heurísticas y en los errores (nuevos o no) cometidos en el proceso de resolver dichos problemas.

Así pues, podemos decir que la investigación que hemos llevado a cabo es de tipo exploratorio, en tanto que no hay hipótesis que contrastar, sino que lo que se pretende es obtener información acerca de los fenómenos que ocurren en la resolución de problemas de probabilidad condicional por parte de estudiantes de secundaria. Es, además, empírica, pues da cuenta de los datos experimentales recabados a través de instrumentos diseñados a tal efecto; datos que son analizados, básicamente, desde un punto de vista cualitativo. Y por último, es de tipo naturalista, porque el ámbito de trabajo es un grupo de estudiantes de 4º curso de la ESO completo, tal y como surgió de la organización de grupos en el centro educativo al que pertenecían, por lo que los resultados obtenidos son de carácter local.

En cuanto a la estructura de la memoria de tesis que aquí presentamos, ésta se encuentra dividida en siete capítulos, el primero de los cuales es esta introducción.

En el capítulo 2, describimos la problemática concreta que abordamos, poniéndola en relación con la investigación previa en didáctica de la probabilidad, de la que hacemos una breve revisión histórica. También hacemos referencia a los trabajos de investigación que podemos considerar como antecedentes directos de esta tesis, principalmente el de Lonjedo (2007) y el de Carles (2007) y exponemos los objetivos concretos que nos proponemos alcanzar.

El capítulo 3 está dedicado al marco teórico de la investigación. En él definimos con precisión los problemas de probabilidad condicional que son objeto de estudio y tratamos aspectos relacionados con las tres variables de la tarea que hemos tenido en cuenta en el diseño de los enunciados de los problemas: el contexto en el que se sitúa el enunciado, la estructura matemática de los problemas y el formato de los datos. Así, analizamos las diferentes formas en que puede ser expresada la información numérica, referida o no a probabilidades, en situaciones de incertidumbre (frecuencias absolutas, porcentajes, números decimales comprendidos entre cero y uno, etc.) y cómo estas formas de expresión dependen muchas veces del contexto y del enfoque que se dé al concepto de probabilidad (clásico, frecuentista, subjetivista, etc.) en dichas situaciones. Por otra parte, delimitamos lo que aquí debe entenderse por situación y contexto y describimos las particularidades de las dos situaciones y los cuatro contextos tomados para la formulación de los problemas. En relación a la estructura matemática de los problemas, no sólo caracterizamos la familia de problemas por la que nos interesamos en esta tesis, sino que especificamos el sentido con el que usamos el término cantidad, basado en la definición de cantidad dada por Cerdán (2008), y mostramos una herramienta de tipo gráfico, el "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional" (GPPC), que representa la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades asociada a los problemas y que ha supuesto un elemento clave en nuestra metodología de investigación. Finalmente, hablamos de dos recursos usados frecuentemente en probabilidad, los diagramas en árbol y las tablas de contingencia, y de las fases que hemos identificado y caracterizado en la resolución de los problemas objeto de estudio, aspectos ambos que han jugado un papel destacado en el proceso de enseñanza experimentado.

En el capítulo 4 exponemos la metodología de investigación, describiendo, en primer lugar, cómo se realizó el estudio teórico de la estructura matemática de los problemas, con ayuda del GPPC. A continuación, formulamos las variables independientes de la investigación, presentamos y justificamos el contenido de los tres cuestionarios y de la propuesta de problemas para la enseñanza y describimos el modo en que éstos se administraron en el grupo de estudiantes; es decir, mostramos el método seguido para recabar información. Por último, explicamos el procedimiento usado para el análisis de las producciones de los estudiantes, que hemos diseñado expresamente para esta investigación, dada la escasez de investigaciones previas del mismo corte. Esta metodología de análisis comparte algunos elementos con otras investigaciones, por ejemplo la de Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo (2009), llevadas a cabo en el marco del proyecto más amplio antes mencionado, como son las variables que miden las dificultades de los problemas y las variables dependientes que dan cuenta de algunas características del proceso seguido y del resultado obtenido por los estudiantes en cada una de las resoluciones. Sin embargo, la observación de estas variables es apropiada para un análisis de tipo cuantitativo, pero es insuficiente para el análisis cualitativo exhaustivo que nos proponemos realizar. Para facilitar este último, e inspirándonos en la metodología usada por Cerdán (2008) para el estudio de los problemas aritmético-algebraicos, nos servimos de lo que hemos denominado el *grafo de la resolución*. Es decir, asociamos a cada resolución (cuando es posible) un grafo construido sobre la estructura del GPPC, en el que quedan representadas las cantidades y las relaciones entre cantidades usadas y los errores cometidos por el estudiante en el proceso de resolución del problema. Tanto el método seguido para la construcción de los grafos como la clasificación que hemos realizado de los errores están íntimamente ligadas a la división en fases del proceso de resolución. En cuanto a las ventajas de disponer de los grafos de las resoluciones destacaremos el hecho de que nos permite disponer de las principales características de cada resolución de manera sintética, observables de un solo golpe de vista, y en un formato que facilita las comparaciones entre resoluciones.

En el capítulo 5, mostramos los resultados de la investigación, agrupados en cuatro apartados. El primero de ellos está dedicado a los resultados que nos informan sobre alguna característica de los problemas que son objeto de estudio, como los *casos de problema* que pueden plantearse atendiendo a la estructura matemática del enunciado y los valores para las dificultades de los problemas. El segundo apartado, muy breve, muestra algunos resultados que describen la actuación de cada uno de los estudiantes. En el tercero, informamos de los resultados del análisis de los dos primeros cuestionarios (pre-test), previos a la enseñanza, y en el cuarto, informamos de los resultados del análisis del tercer cuestionario o post-test, administrado después de la enseñanza. En estos dos últimos apartados, hacemos un estudio con cierto detalle de las estrategias de resolución con éxito, los sistemas de representación usados y los errores observados en las producciones de los estudiantes. Respecto a los errores, nos permitimos adelantar aquí que hemos distinguido entre dos grandes tipos de error: los errores de cantidad, que son los que se cometen en torno a una cantidad en concreto; y los errores de relación, que se producen al establecer relaciones entre tres o más cantidades. Como veremos, los errores de cantidad más comunes consisten en interpretar de manera equivocada alguno de los datos conocidos, dados en el enunciado; usar un mismo número con dos sentidos diferentes; describir erróneamente el sentido con que se interpreta o usa un número y dar como resultado una probabilidad distinta de aquella por la que se pregunta.

El capítulo 6 está destinado al análisis de los resultados, que se acompaña de las conclusiones y las implicaciones para la enseñanza. Así, analizamos la información que hemos obtenido sobre los problemas en relación a su estructura matemática y las dificultades de los problemas. También analizamos los resultados que tienen que ver con las resoluciones de los estudiantes, centrándonos en la influencia que las variables de la tarea tienen en la actuación de éstos y en los efectos producidos por la enseñanza. Concretamente, analizamos las diferencias en las estrategias de resolución con éxito que se observan en los dos primeros cuestionarios, previos a la instrucción, respecto de las que se observan en el tercer cuestionario, después de la instrucción, y detallamos los tipos de error que se corrigen con la enseñanza, los que se mantienen a pesar de ella y los que surgen como consecuencia de la nueva forma de resolver los problemas. También examinamos dos fenómenos que hemos observado con frecuencia en las resoluciones de los estudiantes: la confusión entre probabilidades de la intersección y probabilidades condicionales, ya estudiada por Lonjedo (2007) para otra familia de problemas; y los errores ligados al contexto, es decir, los errores que los estudiantes cometen como consecuencia de concepciones erróneas relacionadas con el contexto en el que se sitúa el enunciado del problema. Finalmente, valoramos algunos aspectos metodológicos de la investigación, como las ventajas y limitaciones del uso de los grafos para el análisis de las producciones de los estudiantes, y hacemos algunas propuestas para futuras investigaciones que aborden el estudio de la resolución de problemas ternarios de probabilidad condicional.

Para terminar, completan la memoria de tesis el capítulo 7, con las referencias bibliográficas, y los anexos, que contienen, básicamente, los enunciados de los problemas usados en la investigación, los protocolos escritos de las filmaciones, todos los grafos construidos (tanto para el estudio teórico de los problemas como para la representación de la actuación de los estudiantes) y las tablas resumen de los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de los problemas.

Capítulo 2. Problema y objetivos.

Comenzaremos este capítulo con una breve revisión histórica de la investigación en enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, basada en el trabajo de Jones y Thornton (2005), con una doble intención: hacer notar la "juventud" de este campo de investigación en la historia de la educación matemática y ubicar nuestro trabajo en este marco histórico, poniendo en relieve las aportaciones que con él pretendemos realizar. A continuación, describiremos la problemática general en la que se encuadra la investigación desarrollada, que junto con los trabajos llevados a cabo por Lonjedo (2007), Cerdán y Huerta (2007), Carles (2007), Edo (2010), Amorós (2012) y Arnau (2012), pretende aportar métodos y resultados a la nueva línea de investigación iniciada en el campo del Pensamiento Probabilístico, línea que cuenta con cierto respaldo internacional (Huerta y Lonjedo, 2007; Carles y Huerta, 2007; Huerta, 2009; Lonjedo, Huerta y Carles, 2012 y Huerta, 2014). Hablaremos también de los antecedentes directos de esta tesis, es decir, de lo que sabemos sobre la problemática formulada, fruto de investigaciones precedentes. Y concluiremos el capítulo con la relación de los objetivos concretos que hemos pretendido alcanzar a lo largo de la investigación.

2.1 – REVISIÓN DE LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO. NOTAS HISTÓRICAS.

Jones y Thornton (2005) sitúan el inicio de la investigación sobre este campo en los años cincuenta y distinguen tres etapas en su evolución hasta la década de los dos mil: el Periodo Piagetiano, el Periodo Post-Piagetiano y el Periodo Contemporáneo. Veamos cuáles son los principales avances producidos en cada uno de estos periodos y sus implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

2.1.1 – Fase 1: El Periodo Piagetiano.

Llaman así al periodo marcado por las investigaciones de Piaget e Inhelder, que no sólo tuvieron una gran relevancia durante este periodo sino que, además, inspiraron muchas otras investigaciones en los periodos posteriores. Sin embargo, el foco de sus trabajos no estaba en la probabilidad sino que su objetivo era el desarrollo de una teoría sobre la evolución cognitiva de las personas en campos variados de las matemáticas (números, espacio, razonamiento proporcional, etc.) y lo que perseguían con sus trabajos acerca del pensamiento probabilístico era contribuir a este proyecto. Así, mediante entrevistas a 20 estudiantes entre 4 y 15 años, Piaget e Inhelder clasificaron el pensamiento de los estudiantes en tres grandes etapas evolutivas: preoperacional (de los 4 a 7 años), operaciones concretas (de los 8 a los 11 años) y operaciones formales (más allá de los 11 años). Afirmaron que el orden en que se suceden estas fases es invariable pero no así las edades que delimitan cada una de las etapas, que son variables en función de las características del niño, su historia personal y otros factores ambientales y culturales. En lo que al razonamiento probabilístico se refiere, sus investigaciones les condujeron a asegurar que los niños sólo estaban suficientemente capacitados para tratar con la probabilidad en la etapa de las operaciones formales, aunque habían observado que en las etapas anteriores ya eran capaces de distinguir entre situaciones de certidumbre e incertidumbre y de cuantificar probabilidades en algunas situaciones concretas. En aquel momento, el estudio de la probabilidad no estaba incluido en los currículos de la enseñanza primaria y las conclusiones de Piaget e Inhelder contribuyeron a que continuaran relegados a etapas superiores de la enseñanza (enseñanza secundaria y estudios universitarios) por más de tres décadas.

2.1.2 – Fase 2: El Periodo Post-Piagetiano.

Esta etapa fue muy prolífica y sus investigaciones estuvieron fuertemente influenciadas por los resultados de la etapa anterior. El centro de atención se situó en el desarrollo de las concepciones sobre probabilidad y, en especial, en las concepciones erróneas o sesgos. También surgió el interés por investigar la enseñanza de la probabilidad y sus efectos sobre el razonamiento probabilístico de los niños. Los máximos exponentes de esta etapa fueron Fischbein, por un lado, y Tversky y Kanheman, por otro, sin menoscabo de las aportaciones realizadas por otros investigadores como, por ejemplo, Shaghnessy y Green, citados en Jones y Thornton (2005), y Falk (1986, 1991).

Fischbein estudió las intuiciones probabilísticas de los estudiantes, entendiendo por intuición cualquier adquisición cognitiva o creencia que es espontánea, global y autoevidente para el sujeto que la tiene. Este autor defendía que las intuiciones sobre probabilidad pueden ser modificadas por medio de una enseñanza sistemática, lo que le llevó a distinguir entres dos tipos de intuiciones: las intuiciones primarias, que se derivan de la experiencia de cada individuo, sin instrucción de por medio; y las intuiciones secundarias, que son el resultado de la reestructuración de las primeras como consecuencia de la enseñanza (Fischbein, 1975). Como consecuencia de sus trabajos, Fischbein produjo una caracterización del desarrollo cognitivo de las intuiciones probabilísticas de los estudiantes ligadas a las etapas evolutivas que él llama preescolar, operacional concreta y operacional formal y que difieren en cierta manera de las que consideraron Piaget e Indhelder pues Fischbein incluye en su caracterización efectos de ciertas clases de actividades de enseñanza. Las intuiciones estudiadas tienen que ver, principalmente, con el azar, la frecuencia relativa, la estimación de casos favorables sobre casos posibles y operaciones en combinatoria. Finalmente, llegó a la conclusión de que, aunque la enseñanza puede ayudar a mejorar las ideas intuitivas sobre probabilidad, hay aspectos que todavía permanecen oscuros, bien por no haber sido estudiados o bien por las limitaciones de los instrumentos usados (Fischbein, Nello y Marino, 1991, p. 523).

Tversky y Kahneman también centran sus trabajos en las creencias de los sujetos acerca de aspectos probabilísticos, pero en lugar de intuiciones probabilísticas, estos autores hablan de juicios bajo incertidumbre. Su principal aportación fue la identificación y descripción de lo que ellos denominan *heurísticas*, es decir, estrategias que usan las personas no formadas en probabilidad para hacer juicios bajo incertidumbre (estimaciones de probabilidades). Como estos autores señalan, estas estrategias pueden resultar útiles a la hora de hacer estimaciones pero también pueden conducir a sesgos y a conceptos erróneos. En Tversky y Kahneman (1974) encontramos la descripción de tres de estas heurísticas (la de representatividad, la de disponibilidad y la de ajuste y anclaje) y algunos sesgos asociados a ellas.

La heurística más estudiada, por haberse observado en sujetos de todas las edades y con diferentes niveles de formación en probabilidad, es la de la representatividad. Esta estrategia consiste en evaluar la probabilidad de un suceso en base a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. Concretamente, Tversky y Kahneman dicen que la mayoría de las preguntas sobre probabilidad que se hacen las personas son de uno de estos tres tipos: primero, ¿cuál es la probabilidad de que el objeto A pertenezca a la clase B?; segundo, ¿cuál es la probabilidad de que A haya sucedido como consecuencia de B?; y tercero, ¿cuál es la probabilidad de que el proceso B genere el suceso A?. La heurística de la representatividad conduce a valores más altos para estas probabilidades si A es representativo de B o si guarda cierta similitud con B (Tversky y Kahneman, 1974, p. 1124). Algunos de los sesgos observados por estos autores en el uso de esta heurística tienen que ver con obviar los efectos que sobre las probabilidades tienen aspectos tales como las probabilidades a priori de los sucesos, el tamaño muestral o las características de los enunciados a partir de los cuales se asignan probabilidades, como su validez o su capacidad predictiva. Otro sesgo muy común, derivado de la heurística de la representatividad, consiste en esperar que una secuencia de sucesos generados por un proceso aleatorio sea siempre representativa de las características esenciales de dicho proceso, aunque la secuencia sea muy corta. Tversky y Kahneman ponen como ejemplo las secuencias de caras (C) y cruces (X) en el lanzamiento de una moneda: suele considerarse más probable una secuencia del tipo C-X-C-X-X-C que una secuencia del tipo C-C-C-X-X-X, que no aparenta ser aleatoria, o una del tipo C-C-C-C-X-C, que no sugiere la equiprobabilidad de la cara y la cruz (Tversky y Kahneman, 1974, p. 1125).

En cuanto a la heurística de la disponibilidad, es definida como la evaluación de la frecuencia de una clase o la probabilidad de un suceso por la facilidad con la que la clase o suceso en cuestión pueden ser evocados en la mente del sujeto que los evalúa. Esta heurística resulta acertada en determinadas ocasiones, por el hecho de que las ocurrencias más frecuentes son recordadas con mayor facilidad que las menos frecuentes. Sin embargo, también tiene sesgos asociados. Por ejemplo, ante la pregunta de si, en la lengua inglesa, son más numerosas las palabras que empiezan por la letra r o las palabras que tienen a la r como tercera letra, Tversky y Kahneman (1974, p. 1127) observaron que muchas personas tratan de responder a esta cuestión evocando palabras de ambos tipos. Como resulta más sencillo buscar palabras que tienen a determinada letra en primera posición que buscar palabras que la tienen en otras posiciones, la mayoría de las personas responden que hay más palabras que empiezan por r, cuando lo cierto es que, en inglés, son más frecuentes las palabras que tienen esta letra en tercera posición.

Otro sesgo que a veces se asocia a la heurística de la disponibilidad y otras a la heurística de la representatividad es la falacia de la conjunción, término acuñado por Tversky y Kahneman (1983, p. 298). Este sesgo, que ha sido ampliamente observado, estudiado y discutido (Fiedler, 1988; Gigerenzer, 1991; Gigerenzer, 1996; Hertwing and Gigerenzer, 1999; Sides, Osherson, Bonini y Viale, 2002; Tentori, Bonini y Osherson, 2004; Díaz, 2005; Crupi, Fitelson y Tentori, 2008), consiste en la violación de la regla de la conjunción[1], es decir, en otorgar mayor probabilidad a la ocurrencia de la intersección de dos sucesos que a la de uno solo de dichos sucesos. Una tarea clásica que da lugar al mismo es el “problema de Linda” (Tversky y Kahneman, 1983, p. 297).

Por último, la heurística de ajuste y anclaje consiste en estimar probabilidades partiendo de un valor inicial y ajustándolo, a partir de la información contenida en el enunciado del problema o a partir de cálculos parciales, hasta llegar a la respuesta final. Uno de los sesgos derivados de esta heurística tiene que ver, de nuevo, con la sobreestimación de la probabilidad de la intersección. En este caso el sesgo se produce al tomar como probabilidad de partida una de las probabilidades marginales asociadas y estimar la probabilidad de la intersección por ajuste. Como la probabilidad de la intersección siempre es menor que la probabilidad de la marginal, si el ajuste es insuficiente, la intersección queda sobreestimada. Análogamente, el uso de esta heurística para la estimación de la probabilidad de la unión de sucesos conduce a la subestimación de la misma (Tversky y Kahneman, 1974, p. 1129).

Los estudios de Tversky y Kahneman sobre heurísticas y sesgos inspiraron numerosos trabajos posteriores, como los de Konold, Shaghnessy y Falk.

Konold (1989) introduce la heurística que denomina “outcome approach". Con este nombre se refiere a la forma de razonar de algunos individuos, que ante preguntas formuladas sobre situaciones bajo incertidumbre entienden que su cometido es el de

[1] La regla de la conjunción establece que dados dos sucesos A y B, se tiene que $P(A \cap B) \leq P(B)$. Esta regla es, a su vez, consecuencia de la regla de extensión, según la cual, si $B \subset A$ entonces $P(B) \leq P(A)$. (Tversky y Kahneman, 1983, p. 294)

predecir el resultado de una única prueba o experimento aleatorio. En estos casos, los individuos suelen dar respuestas del tipo sí/no ("sí ocurrirá" o "no ocurrirá"), en lugar de hablar en términos de probabilidades, y evalúan dichas respuestas como correctas o incorrectas en función del resultado obtenido en una sola repetición del experimento.

Shaghnessy (1977), citado en Jones y Thornton (2005), investigó la influencia de la instrucción sobre el uso de las heurísticas en estudiantes universitarios, observando menor dependencia de las heurísticas tras la enseñanza. No obstante, subrayó la dificultad de modificar la forma de razonar de los estudiantes y manifestó sus dudas sobre hasta qué punto los sesgos permanecían anclados en el pensamiento probabilístico de los mismos.

Por último, Falk (1986, 1991) se interesó por los sesgos asociados a la probabilidad condicional. Uno de los más nombrados es el de la *falacia del eje temporal*, que se refiere a la dificultad de los estudiantes para determinar una probabilidad condicional cuando el suceso condicionante ocurre con posterioridad al suceso condicionado. Por ejemplo, ante el experimento consistente en realizar dos extracciones sin reemplazamiento de una urna con dos bolas blancas y dos bolas negras, la mayoría de estudiantes encuentran dificultades a la hora de determinar la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca, dado que la segunda ha sido blanca. Algunos de ellos incluso niegan la posibilidad de condicionar la probabilidad de un suceso a la ocurrencia de otro suceso posterior en el tiempo. Otro sesgo estudiado por Falk tiene que ver con la dificultad que entraña, en determinadas situaciones problemáticas, la correcta identificación del suceso condicionante. Es lo que se observa ante este clásico problema (Falk, 1986, p. 293): “Se dispone de tres tarjetas: una es verde por ambas caras, otra es azul por ambas caras y la tercera es verde por una cara y azul por la otra. Seleccionamos de manera aleatoria una de las tarjetas y mostramos una de sus caras. Si la cara mostrada es azul, ¿cuál es la probabilidad de que la cara escondida, en la misma tarjeta, sea también azul?”. Falk obtuvo con frecuencia la respuesta ½, porque los estudiantes condicionaban esta probabilidad al hecho de que la carta mostrada no puede ser la que tiene ambas caras verdes; sin embargo, el suceso consistente en descartar la carta con ambos lados verdes no forma parte del espacio muestral del experimento. Lo correcto es condicionar la probabilidad de que la otra cara sea azul al suceso “se ha mostrado una cara azul de entre las seis posibles caras que pueden mostrarse”, lo que conduce a la respuesta correcta: 2/3 (de las tres caras azules, sólo dos esconden otra cara azul). Mención especial merecen también los estudios de Falk acerca de la *falacia de la condicional transpuesta*, que consiste en la no discriminación entre las probabilidades $P(A|B)$ y $P(B|A)$ y que, como se verá más adelante, hemos observado en alguna resolución de nuestra muestra de estudiantes. Un ejemplo típico se da en el campo de la medicina, donde es habitual la confusión entre la probabilidad de padecer una enfermedad (E), dado que se ha obtenido un resultado positivo en una prueba diagnóstica (+), es decir, $P(E|+)$, y la probabilidad de obtener un resultado positivo en una prueba diagnóstica, dado que se padece la enfermedad, es decir, P(+|E). Si la prevalencia de la enfermedad es baja, la primera de las probabilidades suele ser menor que la segunda. Por último, señalar que estos y otros sesgos relacionados con la probabilidad condicional han sido investigados profusamente. Podemos encontrar una revisión de las principales investigaciones realizadas al respecto en Díaz y De la Fuente (2005).

Aparte de los trabajos desarrollados en torno a las heurísticas y los sesgos, fuertemente influenciados por los estudios de Tversky y Kahneman, en este periodo también se llevaron a cabo numerosas investigaciones que tratan sobre el razonamiento probabilístico y la enseñanza (Jones, 1974 y Green, 1983, citados en Jones y Thornton, 2005; Steinbring, 1984; Biehler, 1991) y que guardan más relación con los trabajos de Piaget y Fischbein.

Jones (1974) usó entrevistas clínicas para evaluar la capacidad de razonamiento de estudiantes de educación primaria acerca de determinados aspectos probabilísticos. Entre sus hallazgos se encuentra que una parte importante de los estudiantes no eran capaces o se resistían a tomar en consideración los diferentes resultados posibles de un experimento aleatorio simple y como consecuencia hacían predicciones de tipo determinista.

Por otra parte, destaca el trabajo de Green (1983), quien usó cuestionarios de lápiz y papel para estudiar el razonamiento probabilístico de una muestra de 3000 estudiantes de educación secundaria (11-16 años). Entre otras cosas, observó que tenían serias dificultades en aspectos como la definición de espacios muestrales, el uso de razones de probabilidad y la regla de la multiplicación. También llegó a la conclusión de que la mayoría de estudiantes de 16 años no habían alcanzado la fase de las operaciones formales de Piaget y mostraban limitaciones en la comprensión de los procesos aleatorios. Los resultados de un estudio posterior que llevó a cabo con 1600 estudiantes de educación primaria no fueron más alentadores. Para superar estas dificultades de los estudiantes, Green se muestra partidario de una instrucción extensa y sistemática de la probabilidad en los sistemas escolares (Shaughnessy, 1992)

Posteriormente, Steinbring (1984, 1991) examinó las conexiones entre probabilidades empíricas y teóricas y utilizó la figura del triángulo (véase Figura 2.1) para explicar el significado del azar y la probabilidad a través de las relaciones que se establecen entre el objeto (la probabilidad empírica), el signo (la probabilidad teórica) y el concepto (el azar y la probabilidad). Este triángulo fue propuesto, además, como un instrumento para organizar la instrucción.

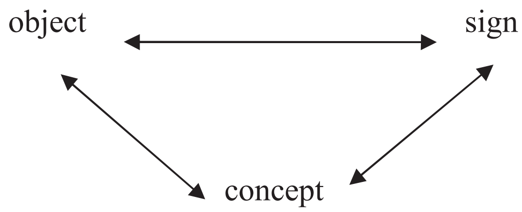


Figura 2.1. Triángulo de relaciones entre objeto, signo y concepto (Steinbring, 1991, p. 83).

Por último, hay que recordar que en las décadas de los setenta y ochenta empieza a generalizarse el uso de los ordenadores. En este contexto, Biehler (1991) reconoce el valor de la informática como instrumento de apoyo en la enseñanza de la probabilidad y la estadística, destacando su utilidad, por ejemplo, para el análisis de datos en muestras grandes y la simulación y el modelaje de procesos aleatorios. Asimismo, advierte de la ausencia de investigación al respecto y de la infrautilización de los recursos informáticos en las aulas.

En conclusión, la investigación llevada a cabo durante esta segunda fase proporcionó una amplia comprensión de las características del razonamiento probabilístico de estudiantes de todos los niveles educativos. Además, sentó las bases para futuras investigaciones en este terreno y proporcionó un buen caldo de cultivo para el desarrollo curricular de la estadística y la probabilidad que se produciría en la siguiente fase.

2.1.3 – Fase 3: El Periodo Contemporáneo.

Si los dos periodos anteriores se caracterizan por una intensa investigación sobre la cognición de los individuos ante situaciones aleatorias o de incertidumbre, el periodo del que nos ocupamos ahora, que Jones y Thornton (2005) llaman periodo contemporáneo, se caracteriza por el interés en aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Este área del conocimiento matemático pasa de tener una presencia testimonial en los currículos escolares, especialmente en los niveles más bajos, a jugar un papel importante en los mismos. Esto se debe, en gran parte, al creciente interés por la alfabetización matemática de los ciudadanos y por una enseñanza encaminada a la adquisición de competencias por parte de los estudiantes, lo cual se refleja no sólo en los currículos (NCTM, 2000; D.O.C.V., 2007) sino también en instrumentos de evaluación internacional como los usados por la OCDE en el marco del programa PISA (Instituto de Evaluación, 2007, 2008, 2010). Entre estas competencias se encuentra la competencia matemática y como una componente de la misma, la competencia en estadística y probabilidad, que se considera fundamental por su relevancia en multitud de disciplinas (sociología, economía, ciencias experimentales, etc.) y en la vida diaria de las personas. Como consecuencia, a partir de mediados de los noventa se aceleró la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en todos los niveles educativos y se diversificaron los focos de interés. Jones y Thornton (2005) señalan tres grandes líneas de investigación: la investigación para el desarrollo curricular de la probabilidad, la investigación en el aprendizaje de la probabilidad y la investigación en enseñanza de la probabilidad en entornos de instrucción.

En la línea de la investigación curricular, autores como Gal (2002, 2012) empiezan a desarrollar el concepto de "probability literacy" o "alfabetización probabilística" para todos los ciudadanos y sugieren un cambio en el enfoque de la enseñanza de la estadística y la probabilidad, sobre todo en los niveles bajos de instrucción. Con un enfoque clásico de la enseñanza, entendiendo por éste aquel que se centra casi exclusivamente en los aspectos formales de la teoría de la probabilidad, se corre el riesgo de no reflejar la amplia variedad de situaciones y contextos en los que es aplicable la probabilidad y las diferentes interpretaciones y usos que pueden hacerse de este concepto. Por este motivo, además de la inclusión de la enseñanza de la probabilidad en todos los niveles educativos, se sugiere que se preste atención al enfoque empírico del concepto y las relaciones que se establecen entre éste y el enfoque teórico, y que se tengan en cuenta contenidos relacionados con la probabilidad necesarios para desenvolverse eficazmente en situaciones de incertidumbre cotidianas, como por ejemplo aspectos lingüísticos y contextuales.

Otra línea de investigación identificada por Jones y Thornton (2005) aborda aspectos que tienen que ver con el aprendizaje de la probabilidad, al hilo de las reformas curriculares que se han ido desarrollando. Según estos autores, la investigación que sobre este tema se desarrolla en esta fase se caracteriza por prestar mayor atención a los niveles educativos y rangos de edad de los estudiantes y por ampliar el conjunto de contenidos o aspectos de la probabilidad que se estudian, lo cual está en consonancia con el creciente interés que suscitan los enfoques frecuentista y subjetivista de este concepto. Una revisión de la investigación en pensamiento probabilístico que incluye trabajos desarrollados durante el periodo que Jones y Thornton denominan contemporáneo, se puede encontrar en Batanero y Sánchez (2005), que se ocupa de estudios realizados con estudiantes de 14 a 18 años, y en Langrall y Mooney (2005), que se centran en investigaciones con estudiantes de educación primaria.

La tercera línea de investigación descrita en Jones y Thornton (2005) tiene que ver con la enseñanza de la probabilidad y los entornos de aprendizaje. Destacan los trabajos en los que se advierte de la importancia de tener en cuenta a la figura del profesor. Por una parte, se han observado carencias en los futuros profesores de educación primaria y secundaria en cuanto a sus conocimientos sobre probabilidad (Burgess 2001, 2002; Pereira-Mendoza, 2002; Stohl, 2005; Díaz, Contreras, Batanero y Roa, 2012; Contreras, Batanero, Díaz y Arteaga, 2013) lo que puede afectar a su capacidad para enseñar esta parte del curriculum. Por otra parte, se hace hincapié en la conveniencia de que el profesorado no sólo disponga de una sólida base de conocimientos teóricos, sino también de una comprensión profunda de los conceptos probabilísticos (diferentes enfoques e interpretaciones de la probabilidad, alcance de sus aplicaciones, etc.) y de conocimientos sobre la cognición de los estudiantes (ideas previas y sesgos y la forma como evoluciona el pensamiento probabilístico en los mismos), además de estrategias y recursos para llevar a cabo una enseñanza efectiva (Kvatinsky y Even, 2002; Sánchez, 2002; Stohl, 2005; Batanero y Díaz, 2012). Esto ha motivado diferentes trabajos encaminados a mejorar la formación en estadística y probabilidad de los profesores a través de los programas de formación de profesorado (Godino, Batanero y Roa, 2001; Batanero, Godino y Roa, 2004; Batanero, Godino y Cañizares, 2005). Otros trabajos destacables son aquellos sobre la evolución de las conexiones conceptuales entre las orientaciones clásica y frecuentista de la probabilidad (Langrall y Money, 2005; Batanero y Sánchez, 2005). Por último, en Pratt (2005) encontramos una revisión de trabajos que muestran las aplicaciones de la informática en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Otro de los temas de mayor interés para los investigadores en los últimos tiempos ha sido la investigación acerca de la probabilidad condicional, un concepto con múltiples perspectivas (Borovcnik, 2012, Borovcnik y Kapadia, 2009). Es general la opinión de que no se puede hablar de comprensión de la probabilidad sin que en ella se incluya a la probabilidad condicional. La investigación sobre este aspecto de la probabilidad ha sido atendida tanto por la psicología, donde destacan los trabajos de Gigerenzer y sus colaboradores, como por los educadores matemáticos (Rossman y Short, 1995; Díaz y de la Fuente, 2007a; Díaz y de la Fuente, 2007b; Díaz y Batanero, 2009).

Rossman y Short (1995) presentan ejemplos de problemas de probabilidad condicional para la instrucción, así como recomendaciones para su aplicación en el aula, con el objetivo de mostrar que es posible llevar a cabo la enseñanza de la probabilidad condicional siguiendo las recomendaciones que se hacen desde los movimientos reformistas en educación estadística (véase, por ejemplo, Cobb, 1993) tales como la promoción del aprendizaje activo y cooperativo, el uso de herramientas visuales que faciliten la compresión de los conceptos probabilísticos y estadísticos por parte de los estudiantes, el uso de las nuevas tecnologías y la resolución de tareas formuladas en contextos realistas.

Por otra parte, Gigerenzer y Hoffrage (1995) se interesan por el razonamiento bayesiano y relacionan las dificultades asociadas al uso del Teorema de Bayes con la manera en que se formula la información numérica en los enunciados de las tareas que se proponen a los estudiantes. Los autores afirman que si los enunciados de los problemas bayesianos se expresan en términos de frecuencias naturales, en lugar de porcentajes o probabilidades, los cálculos de los algoritmos implicados en la resolución resultan más simples e intuitivos. Sus investigaciones les llevan a la conclusión de que, formulados de esta manera, los problemas bayesianos están al alcance incluso de personas que carecen de una formación específica en probabilidad, lo cual tiene aplicaciones en la alfabetización probabilística de la ciudadanía, especialmente en el área de la salud, donde tanto pacientes como profesionales sanitarios se enfrentan a este tipo de problemas, por ejemplo, cuando han de interpretar resultados de pruebas diagnósticas (Hoffrage y Gigerenzer, 1998; Krämer y Gigerenzer, 2005; Hoffrage, Kurzenhäuser, y Gigerenzer, 2005). A la luz de estas conclusiones**,** Seldmeier y Gigerenzer (2001) proponen y experimentan un programa de instrucción sobre razonamiento bayesiano, con el que enseñan a estudiantes universitarios de diferentes especialidades a representar la información de los enunciados de las tareas, expresada en términos de probabilidades, mediante tablas o árboles de frecuencias naturales[2], usando para ello un tutorial informatizado. Este tipo de instrucción fue comparada, en varios estudios, con otros dos tipos de instrucción: uno consistente en el entrenamiento de los estudiantes en el uso de la fórmula del Teorema de Bayes y otro basado en el uso de árboles de probabilidad. Los programas de entrenamiento en la representación mediante tablas y árboles de frecuencias naturales ofrecieron mejores resultados que el resto, especialmente en cuanto a la durabilidad en el tiempo de los progresos obtenidos por los estudiantes.

Sin embargo, otros autores (Evans, Handley, Perham, Over y Thompson, 2000; Girotto y Gonzalez, 2001; Neace, Michaud, Bolling, Deer y Zecevic, 2008) opinan, en relación a los problemas bayesianos, que el formato de datos (frecuencias, probabilidades, etc.) per se, no es lo que hace fácil o difícil un problema, sino el hecho de si la forma en que se presenta la información favorece o no que el resolutor se forme una representación mental de los sucesos y las relaciones de inclusión entre sucesos (considerados éstos como conjuntos de individuos que comparten determinadas características), lo cual puede conseguirse por medio de diferentes formatos y no exclusivamente mediante el uso de frecuencias naturales. Es lo que se conoce como la hipótesis de los conjuntos anidados (*nested sets hypothesis*).

"We also argued that the reason that participants were more successful on the frequency versions was that these problems cued a mental model of set inclusion which made the problems much easier to understand." (Evans y otros, 2000)

"When the form of the question and the structure of the problem were framed so as to activate intuitive principles based on subset relations, naive individuals solved problems, whether they were stated in terms of probabilities or frequencies." (Girotto y Gonzalez, 2001)

---

[2] En el apdo 3.6.3 del marco teórico (p. 78) analizamos y comparamos los árboles de frecuencias y los árboles de probabilidad, en cuanto a su estructura y usos.

Ligada a esta cuestión aparece también la discusión sobre qué formatos deben entenderse por "frecuencias naturales" y qué formatos, por el contrario, representan "verdaderas probabilidades", siendo el formato "number of chances" el más cuestionado (Hoffrage, Gigerenzer, Krauss y Martignon, 2002; Girotto y Gonzalez, 2002).

Díaz y de la Fuente (2007a) también estudian la resolución de problemas bayesianos por parte de estudiantes de Psicología, antes y después de la enseñanza de la probabilidad condicional. Concluyen que son de alta complejidad, incluso cuando los datos se presentan en forma de frecuencias naturales y observan errores en diferentes pasos del proceso de resolución, como por ejemplo, la identificación de sucesos y sus probabilidades y la partición y subpartición del espacio muestral. En consecuencia, sugieren que para superar las dificultades asociadas a este tipo de problemas no basta con simplificar los enunciados de las tareas recurriendo a las frecuencias naturales, sino que se debe realizar un mayor esfuerzo en la enseñanza de la probabilidad, sin dejar de lado el Teorema de Bayes y sus aplicaciones.

Por otra parte, Díaz y De la Fuente (2007b) elaboran un cuestionario para evaluar de manera global la compresión del concepto de probabilidad condicional y los sesgos asociados a este concepto. Díaz y Batanero (2009) ponen en práctica el cuestionario con estudiantes de Psicología antes y después de recibir enseñanza formal en probabilidad condicional. Tras la instrucción, que incluye el estudio del Teorema de Bayes y el uso de diagramas en árbol y tablas de contingencia, se observa una mejora importante en los resultados en cuanto a la comprensión formal del concepto de probabilidad condicional y a la resolución de problemas, pero no en cuanto a la superación de algunos sesgos. Así, la falacia de la conjunción, la confusión entre causalidad y condicionalidad y la falacia del eje temporal seguían presentes en las respuestas de los estudiantes, a pesar de la enseñanza.

Por último, remitimos al lector al trabajo de Borovcnik y Kapadia (2009) donde podrá encontrar una revisión más reciente de las principales líneas de investigación en didáctica de la probabilidad abiertas hasta el momento y al trabajo sobre *Probabilistic Thinking* de Chernoff y Sriraman, en el que parte de nuestros resultados son publicados (Huerta, 2014).

2.2 – PROBLEMÁTICA GENERAL EN LA QUE SE ENCUADRA LA INVESTIGACIÓN.

Como ya hemos señalado, la Probabilidad y la Estadística forman un bloque de contenidos que está adquiriendo cada vez más presencia en los currículos actuales, como es el caso de España (D.O.C.V, 2007). Esto es debido, en parte, al importante reto que supone una enseñanza encaminada a la adquisición de competencias básicas, como se plasma en el Anexo I del Real Decreto 1631/2006 (BOE, 2007), y entre ellas, la competencia matemática (Instituto de Evaluación, 2008). Debido a sus múltiples aplicaciones, es evidente que unos conocimientos básicos de Probabilidad y Estadística son fundamentales para desenvolverse como ciudadano matemáticamente alfabetizado en la actual sociedad de la información.

Sin embargo, esto no ha tenido todavía una respuesta adecuada en la práctica. Por ejemplo, los informes PISA (Instituto de Evaluación, 2007, 2008 y 2010) atestiguan deficiencias en la competencia matemática de los estudiantes en todas las áreas de contenido y, en particular, en el área que en dicho informe aparece con el nombre de Incertidumbre, a la que pertenecerían los problemas de probabilidad condicional.

Por una parte, se sigue reservando poco espacio en las programaciones de aula para la enseñanza de la probabilidad, y menos aún para la enseñanza de la probabilidad condicional. Diversos motivos, como el peso de la tradición (durante mucho tiempo se ha dado prioridad a otros contenidos del currículum) o la insuficiente formación en probabilidad y en didáctica de la probabilidad por parte del profesorado pueden explicar en parte este fenómeno.

Pensamos que otra causa del bajo nivel de competencia que muestran los estudiantes en la resolución de problemas de probabilidad condicional podría estar en las características del modelo de enseñanza actual, tal y como se propone en los libros de texto. A pesar de las numerosas voces que proponen cambios en la metodología de enseñanza de la probabilidad (por ejemplo, Rossman y Short, 1995 o Tomlinson y Quinn, 1997), siguen estando muy extendidos los modelos de enseñanza de tipo mecanicista, basados en el formalismo y la profusión de fórmulas (Lonjedo, Huerta y Carles, 2012). Por lo general, primero se introduce el modelo matemático (la teoría) y, en segundo lugar, las aplicaciones de dicho modelo. Además, las actividades que se proponen a los estudiantes suelen consistir en "problemas tipo", es decir problemas en los que los estudiantes han de reproducir la manera de proceder del profesor ante problemas similares que se han planteado a modo de ejemplo. A esto se añade el hecho de que, en el caso de la enseñanza de la probabilidad condicional, los problemas de aplicación que aparecen en los libros de texto no son lo suficientemente variados como para mostrar la riqueza de significados y posibles interpretaciones de la probabilidad, ni cubren todos los casos posibles, en cuanto a la estructura matemática y los contextos en los que es posible formularlos (Lonjedo y otros, 2012).

En contraste con este tipo de instrucción, nosotros consideramos que un modelo de enseñanza para la probabilidad condicional que favorezca la adquisición de competencias en los estudiantes, debe basarse en la resolución de problemas en contextos variados y realistas, en la línea de la "Educación Matemática Realista" (EMR), desarrollada a partir de las ideas de Freudenthal. Además, abogamos por una matematización progresiva, recurriendo a la resolución de los problemas en el propio contexto, con el uso de herramientas heurísticas (especialmente los diagramas en árbol y las tablas de contingencia) y dejando para el final la introducción del modelo teórico.

Por otra parte, de la revisión bibliográfica realizada en el apartado anterior se desprende que las investigaciones en didáctica de la probabilidad se han decantado durante mucho tiempo por el estudio de aspectos cognitivos o psicológicos (heurísticas, sesgos, etc.) y, como consecuencia, los trabajos que versan sobre resolución de problemas de probabilidad son escasos, a pesar de la recomendaciones hechas por Shaugnhessy (1992) quien señaló que enseñar probabilidad y estadística es enseñar resolución de problemas: "teaching probability and statistics *is* teaching problem solving". Además, la mayoría de las investigaciones sobre resolución de problemas de probabilidad están centradas exclusivamente en los problemas bayesianos, cuya complejidad está fuera de dudas, pero no son los únicos problemas de probabilidad que presentan dificultades para los estudiantes. Por otro lado, como señala Huerta (2009), en algunos estudios que implican a la probabilidad condicional se pide a los estudiantes que resuelvan problemas que se consideran diferentes en la investigación cuando, en realidad, estos problemas tienen estructuras matemáticas isomorfas y solo varían en el formato en el que se expresan los datos. Esto conduce a la generalización de conclusiones sin tener en cuenta factores como la estructura matemática de los problemas o el contexto en el que están formulados, lo cual puede considerarse, al menos, como una debilidad metodológica de la investigación. Por ello, los resultados que dichas investigaciones proporcionan deberían considerarse locales y condicionados por los problemas usados en las mismas.

Finalmente, cabe señalar que la mayoría de los problemas de probabilidad condicional usados en las investigaciones son problemas en los que la asignación o el cálculo de probabilidades que se pide puede hacerse directamente a partir de la información numérica contenida en el enunciado del problema o aplicando una sola fórmula o relación, sin que se requiera para ello la obtención de cantidades intermedias de manera explícita. Es lo que Puig y Cerdán (1988) denominan problemas de una sola etapa para el caso de los problemas aritméticos escolares. El siguiente es un ejemplo de este tipo de problemas:

La probabilidad de que una mujer tenga una mamografía positiva es el 10.3%. La probabilidad de que una mujer tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0.8%. Una mujer se realiza una mamografía y resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer? (Eddy, 1982)

Para obtener la probabilidad por la que se pregunta en este problema, basta con dividir la probabilidad de la intersección entre la probabilidad marginal, dadas en el enunciado.

En cambio, poco se sabe sobre el comportamiento de los resolutores ante problemas que podríamos calificar como "de más de una etapa", que son aquellos por los que nos interesamos en esta tesis. Así, en los problemas que estudiamos, la probabilidad condicional se ve inmersa en una red de cantidades y relaciones entre cantidades, y lo que se espera del resolutor es que identifique correctamente las cantidades conocidas y la pregunta del problema para después encontrar un camino (una secuencia de relaciones entre cantidades) que le lleve desde los datos conocidos hasta la incógnita del problema. Un ejemplo de problema de este tipo sería el siguiente:

Una población con un alto riesgo de padecer SIDA se somete a un test para averiguar si la padecen o no. El test da positivo o negativo en cualquier caso. La probabilidad de que una persona de esta población de riesgo padezca SIDA es de 0,57 y la probabilidad de que dé positivo en el test es de 0,47. Se sabe, además, que hay una probabilidad de 0,23 de que una persona padezca de SIDA y el test le dé negativo. Las personas que no padecen SIDA, ¿qué probabilidad tienen de dar positivo en el test?

En conclusión, vista la problemática general en la que se encuentra la resolución de problemas de probabilidad en el ámbito educativo, centraremos nuestras investigaciones en la observación del proceso de resolución de problemas de probabilidad condicional, teniendo en cuenta diferentes factores influyentes en este proceso, no sólo de tipo cognitivo o psicológico sino también de otra índole, como la estructura de los problemas (estructura de datos y estructura semántica), la naturaleza de la pregunta, el formato de los datos y el contexto en que se plantea el problema. Desde nuestro punto de vista, este tema está poco investigado y requiere mayor atención. Por otra parte, aunque nos limitaremos al estudio de una familia particular de problemas (los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0, que describiremos con detalle en el próximo capítulo), consideramos que nuestro trabajo es ambicioso, pues abordamos dicho estudio en los tres niveles de análisis o escenarios propuestos por Puig (1996) para la investigación en resolución de problemas, de los que ya hemos hablado en la introducción. Es decir, estudiamos los problemas en sí mismos, como objetos matemáticos (escenario I), a través de las resoluciones de los estudiantes (escenario II) y por último, en un contexto de enseñanza (escenario III). El estudio será de tipo cualitativo y el trabajo en los diferentes escenarios presentará una característica común: la de tener en cuenta las variables de la tarea (estructura matemática, contexto, formato de datos, etc.) y analizar los resultados siempre en función de dichas variables.

2.3 – ANTECEDENTES.

El primero de los trabajos que aborda el estudio de los problemas de probabilidad condicional en la línea que acabamos de describir es la tesis doctoral de Lonjedo (2007), dedicada a la realización de un estudio exploratorio de los procesos de resolución de una familia particular de problemas, los problemas ternarios de probabilidad condicional, que describiremos con precisión en el marco teórico. Basándose en un trabajo previo de Huerta (2003), Lonjedo propone un esquema para la clasificación de este tipo de problemas teniendo en cuenta la tipología de las probabilidades dadas en el enunciado del problema y la probabilidad por la que se pregunta. Según este esquema, los problemas ternarios quedan clasificados en cuatro familias (y veinte subfamilias), siendo una de estas familias la de los problemas de nivel N_0, que son objeto de estudio en la presente tesis. Lonjedo también hace una revisión de los libros de texto españoles del periodo comprendido entre 1975 y 2002, dando cuenta de la ausencia o escasez con que se presentan en ellos determinadas familias y subfamilias de problemas ternarios de probabilidad condicional. A continuación, aborda el estudio de los procesos de resolución de una de estas familias con escasa presencia en los libros de texto (los problemas de nivel N_1) a través de cuestionarios escritos que administra a estudiantes de secundaria de diferentes niveles educativos. Tras analizar la actuación de los estudiantes, Lonjedo llega a la conclusión de que los problemas de nivel N_1 pueden ser resueltos por los estudiantes y, por tanto, no ve razón para excluirlos de los libros de texto, por lo que sugiere que se incluyan en las unidades de enseñanza de probabilidad condicional con el objetivo de enriquecer y hacer más variada la propuesta de actividades. Por otra parte, Lonjedo estudia posibles influencias de las características de las tareas (problemas) sobre las resoluciones de los estudiantes. Una de las variables que toma en consideración a la hora de diseñar los problemas de la investigación es el grado de complejidad de los mismos, que previamente describe en función del número y el tipo (aditivo o multiplicativo) de relaciones entre probabilidades que es necesario aplicar para la resolución del problema. En sus investigaciones esta variable no se revela como influyente. También analiza y toma en consideración algunos factores que investigaciones previas señalan como influyentes en la resolución de los problemas de probabilidad: la naturaleza de los datos conocidos y de la pregunta del problema y el lenguaje con el que se redacta el enunciado. Sus investigaciones respaldan la postura de autores como Gigerenzer y Hoffrage (1995) que sostienen que la formulación de los problemas mediante frecuencias naturales facilita el proceso de resolución, frente a otro tipo de formatos. Aunque en menor medida, también observa este efecto cuando se usan porcentajes. Además, si los problemas se formulan en frecuencias o porcentajes, Lonjedo observa que los estudiantes abordan los problemas usando el pensamiento aritmético, es decir, hacen una lectura del problema en términos de sucesos y de cardinales de los conjuntos que representan a esos sucesos para luego utilizar la aritmética en el cálculo de nuevas cantidades (Huerta y Lonjedo, 2007). En estos casos, la probabilidad que se da como resultado se obtiene por asignación. Por el contrario, si las cantidades del problema están expresadas en términos de probabilidad, la mayoría de los estudiantes que son capaces de resolver estos problemas se revelan conocedores de la teoría elemental de la probabilidad y en el proceso de resolución utilizan, generalmente, fórmulas que representan relaciones entre probabilidades. En cuanto a las variables de carácter lingüístico, Lonjedo presenta un estudio de las posibles estructuras gramaticales en castellano que pueden ser utilizadas para expresar una probabilidad condicional y usa varias de estas estructuras en los enunciados de las pruebas. Fruto del análisis de las resoluciones de los estudiantes, las expresiones que la autora señala como favorecedoras del éxito en la interpretación de la condicional son las del tipo "de los que" y las que usan el nexo "si". Por ejemplo: "De los seguidores del club B, la mitad lo son del club A" o "Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado matemáticas?". De la misma manera, Lonjedo sugiere evitar palabras que producen ambigüedad en el texto, como por ejemplo las palabras "y", "también" y "además", que usadas en las oraciones subordinadas condicionales provocan la interpretación de la condicional como si se tratara de una intersección. También apunta al orden de presentación de los datos conocidos en el enunciado del problema como un factor influyente en la manera en que los estudiantes interpretan la información. Por ejemplo, cuando un dato condicional se presenta el tercero, después de dos intersecciones, es más frecuente la confusión de la condicional con la intersección. Por último, Lonjedo se hace eco de Garfield y Ahlgren (1988) cuando afirman que dominar la idea de proporción y las operaciones con fracciones es un requisito para enfrentar con éxito las ideas de probabilidad. Y va más allá, proponiendo que se incluyan problemas ternarios de probabilidad condicional con los datos y la pregunta del problema expresados en frecuencias naturales y/o porcentajes, en las unidades de enseñanza sobre razón y proporción de los dos últimos cursos de secundaria obligatoria. Como Lonjedo señala, esto no supondría un cambio en el currículum, pues los problemas así formulados bien pueden ser considerados como problemas de porcentajes y, sin embargo, estos problemas estarían actuando como precursores de los problemas de probabilidad propiamente dichos. Profundizaremos sobre estas y otras cuestiones en el marco teórico.

Lonjedo (2007) nos aporta valiosa información acerca de la estructura matemática de los problemas y de la influencia de algunas variables de la tarea (complejidad estructural, formato de datos, estructura semántica de la condicionalidad, etc.) sobre los procesos de resolución de los problemas de nivel N_1. Es esperable que alguno de estos resultados se reproduzcan en los problemas de nivel N_0. Nosotros, además, vamos a prestar atención a otra variable de la tarea: la situación y el contexto en los que se sitúa el enunciado del problema. Por este motivo, otro trabajo sobre el que hemos basado nuestra investigación es el de Carles (2007). Se trata de una investigación de corte teórico y carácter preliminar que acomete el estudio de los contextos en los que interviene el concepto de probabilidad condicional. A través de una revisión de libros de texto y de entrevistas con profesores universitarios, Carles hace una recopilación de problemas de probabilidad condicional que se usan para la enseñanza en las diferentes asignaturas y modalidades de la educación secundaria obligatoria española y en las diferentes asignaturas de las diferentes titulaciones universitarias que se imparten en las universidades públicas de Valencia. Estos problemas son analizados desde el punto de vista del contexto en el que se sitúa el enunciado, tratando de recoger diferentes situaciones y contextos en los que es posible formular problemas de probabilidad condicional. De entre ellos, Carles se centra en el caso de las pruebas diagnósticas y estudia tres de los contextos donde éstas son frecuentes: el área de la salud, el área del control de calidad en la producción industrial y el área de la legislación y el derecho. El análisis de estos contextos se hace desde la fenomenología de Freudenthal (1983) lo que da lugar a la identificación en ellos de fenómenos que se refieren a sucesos ("padecer una enfermedad", "dar positivo en un test", "no padecer una enfermedad y dar positivo en un test", etc.) y fenómenos que se refieren a probabilidades ("probabilidad de padecer una enfermedad si se ha obtenido un resultado positivo en el test", etc.). Por otra parte, Carles también da cuenta de la terminología específica que se usa para algunos fenómenos en determinados contextos y del formato de datos que suele usarse con más frecuencia en los problemas para la expresión de la información numérica, según el contexto y el tipo de fenómeno al que hace referencia dicha información. Este trabajo motivó nuestra elección de las pruebas diagnósticas como una de las situaciones a considerar para el estudio de la influencia del contexto en los procesos de resolución de los problemas de nivel N_0, y sirvió de modelo para el análisis fenomenológico del resto de contextos explorados en esta tesis.

Las dos investigaciones que acabamos de describir han dado lugar a diferentes publicaciones (Huerta y Lonjedo, 2006; Lonjedo, 2007; Huerta y Lonjedo, 2007; Lonjedo y Huerta, 2007; Carles, 2007; Carles y Huerta, 2007; Huerta, 2009), pero destacaremos las de Huerta (2009, 2014), donde se puede encontrar un completo resumen de las diferentes aportaciones realizadas hasta el momento en relación al estudio de los problemas ternarios de probabilidad condicional y una descripción de las principales características del marco teórico y metodológico que define nuestra línea de investigación.

Finalmente, debemos hacer referencia a la tesis doctoral de Cerdán (2008) y a otros de sus trabajos previos (Puig y Cerdán, 1988; Cerdán y Huerta, 2007), puesto que de ellos hemos tomado y adaptado para este trabajo muchos aspectos metodológicos. Si bien Cerdán estudia una familia concreta de problemas (los problemas aritmético-algebraicos), algunos elementos de sus estudios son exportables al estudio de otros tipos de problema, como los problemas ternarios de probabilidad condicional. Entre estos elementos se encuentran, por ejemplo, los grafos trinomiales para el estudio teórico de los problemas y para el análisis de las resoluciones de los estudiantes, la definición de cantidad y de los tipos de cantidades y de relaciones entre cantidades; el modelo de fases para la descripción del proceso de resolución de los problemas y el procedimiento para medir las dificultades de los problemas a través de las resoluciones de los estudiantes. En los capítulos que siguen, especialmente en los dedicados al marco teórico y la metodología, veremos de qué manera nos han resultado útiles estos y otros elementos tomados de la investigación acerca de los problemas aritmético-algebraicos, siendo las referencias a Cerdán una constante a lo largo de toda esta memoria de tesis.

2.4 – OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.

Dada la problemática descrita anteriormente y partiendo de nuestro estado actual de conocimiento sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional proporcionados por las investigaciones previas, abordamos esta investigación con el planteamiento de tres objetivos concretos que deseamos alcanzar con su desarrollo:

Objetivo 1: Determinar la estructura matemática (cantidades básicas y relaciones básicas entre cantidades básicas) de la familia de problemas ternarios de probabilidad condicional que denominamos *problemas de nivel* N_0. Realizar lecturas teóricas de los problemas.

Lonjedo (2007) distingue tres subfamilias dentro de la familia N_0, para lo cual atiende al número de probabilidades marginales que se dan como datos conocidos en el enunciado. Nosotros nos proponemos afinar dicha clasificación, es decir, identificar casos de problemas dentro de cada una de estas subfamilias, atendiendo exclusivamente a la forma en que se relacionan entre sí los datos del enunciado (tanto los datos conocidos como el dato desconocido por el que se pregunta). Con ello aspiramos a poseer un conocimiento exhaustivo de la estructura matemática de los problemas de nivel N_0 que nos permita usar esta característica de los problemas como una variable independiente, de la que puede depender la actuación de los estudiantes, en los estudios de caracter experimental.

Objetivo 2: Observar la actuación de un grupo de estudiantes de 4º de ESO (15-16 años), sin docencia previa en probabilidad, resolviendo problemas de nivel N_0.

Con ello pretendemos hacer un estudio cualitativo de las estrategias previas de resolución con éxito, los errores previos y las dificultades iniciales de los estudiantes ante problemas con estructuras de cantidades como las que nos proporcionan los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0 pero formulados sin que las cantidades se expresen formalmente en términos de probabilidades. Así, los problemas iniciales (exploratorios) y los problemas en la parte final del experimento solamente difieren en el formato de expresión de las cantidades, no así en las estructuras matemáticas y contextos. También nos proponemos prestar atención a posibles influencias de determinadas variables de la tarea, tomadas éstas como variables independientes de la investigación.

Objetivo 3: Diseño e implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de la resolución de problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0.

Los dos primeros objetivos nos proporcionarán conocimiento sobre los problemas en sí mismos y sobre los comportamientos iniciales de los estudiantes tratando de resolver problemas de nivel N_0, versionados de tal manera que sean abordables por estudiantes que aún no han recibido enseñanza en probabilidad condicional, para, posteriormente, y teniendo en cuenta este conocimiento, producir enseñanza. Así, nos proponemos diseñar una secuencia de enseñanza coherente con los principios de la Educación Matemática Realista, en la que además se haga uso de los sistemas de representación propios de los problemas de probabilidad condicional (diagramas en árbol, tablas de contingencia, etc.). Dicha enseñanza la basaremos en la resolución de problemas en contexto, y pondremos en juego, al menos, las tres variables de la tarea antes mencionadas: estructura matemática, formato de datos y contexto en el que se formulan los enunciados. Tras la implementación de la unidad de enseñanza, pretendemos observar de nuevo la actuación de los estudiantes resolviendo problemas de nivel N_0 para obtener información sobre los errores y dificultades que persisten tras la enseñanza, los nuevos errores y dificultades que puedan aparecer y cómo varían las estrategias de resolución de los problemas.

Capítulo 3. Marco teórico.

Los problemas son el elemento central de nuestra investigación y a ellos dedicamos la mayor parte de este capítulo. Los que nos ocupan son problemas escolares en el sentido que le da Puig (1996, p. 30) al término: una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno, que éste desea abordar y para el cual no ha producido sentido. Por otra parte, se sitúan en el mundo que Puig (1996) describe como *"mundo de la resolución de problemas en que éstos se conciben como un campo asociado a los conceptos, cuyo significado está determinado precisamente por ser ése el campo de problemas que permite resolver, o se piensa que los problemas permiten proporcionar o ampliar el campo semántico de los conceptos"* (p. 13). En efecto, los problemas que estudiamos se utilizan en la enseñanza con la finalidad de contribuir a conformar y/o ampliar el campo semántico del concepto de probabilidad condicional. Por tanto, son problemas escolares, de enunciado verbal, en los que es necesario que en algún momento el resolutor considere la probabilidad condicional de un suceso. Y comenzamos el capítulo, precisamente, con una breve introducción sobre los conceptos matemáticos cuya enseñanza pretendemos mejorar: el de probabilidad y, más concretamente, el de probabilidad condicional.

A continuación, abordamos las tres características de los problemas de probabilidad condicional que hemos tenido en cuenta como variables de la tarea. En primer lugar, está el formato de presentación de la información numérica en el texto del problema, variable porque una probabilidad puede ser expresada de maneras diferentes (mediante una razón, un porcentaje, un número decimal, etc.) y porque, además, no todas las cantidades de las que se informa en el enunciado han de ser necesariamente probabilidades, siendo muy común, por ejemplo, expresar algunos o todos los datos conocidos en forma de frecuencias naturales. Otra variable que hemos tenido en cuenta es la situación y el contexto en que se formulan los enunciados, importante para nosotros por sentirnos identificados con la corriente realista de la enseñanza de las matemáticas, que promueve la resolución de problemas en contextos realistas, y por el hecho de que el contexto en que se formulan los problemas ha demostrado tener una influencia significativa en la actuación de los estudiantes. Por último, describimos la tercera de las variables: la estructura matemática de los problemas. Así, comenzamos recordando la definición de problema ternario de probabilidad condicional según Cerdán y Huerta (2007) y la clasificación de los problemas ternarios en niveles, categorías y tipos (Lonjedo, 2007), para centrarnos luego en la familia de problemas que nos proponemos estudiar en esta tesis: los problemas de nivel N_0.

Ligada a la estructura matemática de los problemas aparece la cuestión de lo que entendemos por cantidad en nuestro trabajo y de cómo se relacionan entre sí las cantidades involucradas en nuestros problemas. Introducimos aquí el "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional", diseñado por Cerdán y Huerta (2007), que ha supuesto una herramienta de gran utilidad para el estudio teórico de los problemas y también para el análisis de lo producido por los estudiantes.

Una vez descritos los problemas de la investigación, y para terminar, nos ocupamos de dos aspectos que tienen que ver con el proceso de resolución. En primer lugar, hablamos de las herramientas heurísticas (diagramas en árbol y tablas de contingencia) propias de la resolución de problemas de probabilidad, describiendo su estructura y justificando la conveniencia de su uso, en especial el uso de la tabla de contingencia, para la resolución de los problemas de nivel N_0. Y finalmente, nos ocupamos de las fases que hemos identificado en el proceso de resolución de este tipo de problemas, lo cual nos ha sido útil, principalmente, para la descripción de las estrategias de resolución con éxito y errores observados en las producciones de los estudiantes.

3.1 – SOBRE LA PROBABILIDAD Y LA PROBABILIDAD CONDICIONAL.

3.1.1 – Sobre la probabilidad.

Las situaciones de incertidumbre son inherentes a la vida de cualquier persona. Este es un hecho inevitable porque en la ocurrencia de determinados fenómenos o sucesos intervienen múltiples factores que escapan a nuestro control, por las limitaciones propias de la naturaleza humana. En estos casos se suele decir que determinados fenómenos suceden por azar. Nosotros somos de la opinión de que el azar no es un ente en sí mismo sino más bien una forma de hacer referencia a la incapacidad humana para predecir o determinar con certeza la ocurrencia de algunos fenómenos. Esto nos lleva a preferir hablar de situaciones de incertidumbre antes que de azar. Algunas de estas situaciones se presentan de manera natural o espontánea como por ejemplo, los cambios meteorológicos; en cambio, otras son provocadas mediante la realización de experimentos aleatorios, como es el caso de los juegos de azar. En cuanto al término probabilidad, que aparece ligado a este tipo de situaciones, lo entendemos en este trabajo en su sentido más amplio, como una medida de la facilidad con la que se cree que pueden ocurrir los sucesos. Y aquí aparece otro concepto clave: el de suceso. De nuevo, atribuimos a la palabra suceso el significado más amplio posible: un suceso será cualquier cosa que pueda suceder en una situación de incertidumbre. Los sucesos pueden ser referidos de diferentes maneras; en este trabajo, nos referiremos a ellos mediante proposiciones en lenguaje verbal o por medio del lenguaje matemático, como conjuntos de resultados posibles o de elementos que comparten determinada característica. Para ilustrar lo anterior, consideremos la situación de incertidumbre que se plantea cuando una persona se somete a un test para determinar si padece o no una enfermedad y obtiene un resultado negativo. La incertidumbre procede de la falibilidad de cualquier prueba diagnóstica. En esta situación, un suceso posible es que una persona padezca la enfermedad, a pesar de haber obtenido un resultado negativo. Hallar o asignar la probabilidad de dicho suceso sería obtener o proporcionar una medida del grado de confianza que nos merece esa posibilidad, es decir, cuantificar la verosimilitud de estar enfermo, aún habiendo obtenido un resultado negativo en el test. Quedaría por concretar cómo asignar un número a dicha medida.

Las diferentes maneras en que se pueden asignar números a las probabilidades de los sucesos están muy relacionadas con los diferentes enfoques que se le pueden dar al concepto de probabilidad, siendo los más nombrados el clásico, el frecuentista, el subjetivista y el formal. A continuación, esbozaremos las características más importantes de éstos, tomando como referencia los trabajos de Borovcnik y Bentz (1991), Batanero, Henry y Parzysz (2005), Batanero (2005) y Borovcnik (2012).

Enfoque clásico o Laplaciano

El enfoque clásico o Laplaciano está ligado a los orígenes del término probabilidad, que surgió en el contexto de los juegos de azar.

La definición Laplaciana de probabilidad se basa en la comparación del número de casos favorables a la ocurrencia de un determinado suceso frente al número de casos posibles, cuando todos ellos son igualmente probables:

$$P(suceso) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ posibles}$$

Como consecuencia de la definición, las medidas de probabilidad así obtenidas son razones de números naturales, los cuales pueden verse como cardinales o números cardinales. En estas razones el numerador siempre será menor que el denominador, pues el conjunto cuyo número cardinal está en el numerador está incluido en el conjunto cuyo número cardinal está en el denominador y que se conoce como espacio muestral o espacio de posibilidades. Esto las convierte en auténticas fracciones propias, es decir fracciones cuyo valor decimal se halla comprendido entre 0 y 1.

Un ejemplo típico del uso de esta regla es la asignación de probabilidades a los sucesos asociados al lanzamiento de un dado cúbico bien construido. Así, al lanzar un dado de estas características, son seis los casos posibles para el resultado $\{1,2,3,4,5,6\}$ y, a priori, nada hace pensar que alguno de los resultados pueda aparecer con mayor o menor facilidad que el resto. Si consideramos el suceso "obtener un número par" como resultado del lanzamiento, de los seis casos posibles, tres le son favorables a dicho suceso, por lo que su probabilidad, aplicando la regla de Laplace, resultaría en $\frac{3}{6}$.

Esta definición, que es la que suele utilizarse en los libros de texto para introducir el concepto de probabilidad, presenta su gran debilidad en la condición de la equiprobabilidad de los resultados posibles. En primer lugar, porque dicha condición es frecuente, o al menos comúnmente aceptada, en el contexto de los juegos de azar (lanzamiento de monedas o dados bien construidos, extracciones en una baraja de cartas, etc.) pero no en otros contextos en los que suelen presentarse situaciones de incertidumbre (meteorología, economía, sociología, etc.). Por otra parte, la verificación de la condición de equiprobabilidad de los casos posibles requiere del concepto de probabilidad (los casos posibles serán equiprobables si tienen la misma probabilidad de suceder). Por tanto, la regla de Laplace como definición de probabilidad hace uso del concepto que pretende definir, lo cual la convierte en una definición inconsistente, aunque al mismo tiempo útil, si el usuario acepta el principio de no dudar sobre la equiprobabilidad de los casos ("principio de la razón suficiente").

Enfoque frecuentista o empírico

El enfoque frecuentista consigue subsanar la deficiencia que acabamos de referir aunque, como veremos, también presenta sus limitaciones.

La probabilidad de un suceso se basa en la observación de la frecuencia relativa con la que se da dicho suceso en repeticiones sucesivas, bajo las mismas condiciones, de un mismo experimento aleatorio. Su base teórica se encuentra en la Ley de los Grandes Números, que establece que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse conforme aumentamos el número de repeticiones del experimento aleatorio. Este número límite sería la probabilidad teórica del suceso.

Si denotamos por A al suceso en cuestión, por P(A) a su probabilidad, por fr(A) a su frecuencia relativa, por n(A) a su frecuencia absoluta y por N al número total de experimentos, el teorema anterior podría expresarse de la siguiente manera:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} fr(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(A)}{N}$$

El número así obtenido viene expresado originalmente como una razón, puesto que la frecuencia relativa de un suceso se define como la razón entre su frecuencia absoluta o natural y el número de repeticiones del experimento aleatorio del cual el suceso en cuestión es un resultado posible. Como en el caso de las razones laplacianas, estas razones están formadas por números naturales y son fracciones propias, cuyo valor decimal está comprendido entre 0 y 1.

Para terminar con la descripción del enfoque frecuentista, hay que señalar que esta definición de probabilidad también admite críticas. En primer lugar, sólo es aplicable en aquellos casos en los que el experimento puede ser repetido, como por ejemplo, lanzamientos de dados y monedas o experiencias de laboratorio. Pero hay infinidad de situaciones en las que el suceso del cual se quiere obtener la probabilidad no es el resultado de un experimento replicable, sino que se trata de un suceso singular. Por ejemplo, este enfoque resulta inapropiado para determinar la probabilidad de que se llegue a descubrir la vacuna contra el SIDA durante el s.XXI. Por otra parte, aún en el caso de experimentos replicables, no siempre es posible garantizar que las repeticiones se lleven a cabo exactamente en las mismas condiciones. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando las probabilidades se obtienen a partir de estudios estadísticos. Por ejemplo, se sabe que el fracaso escolar en España ronda el 28,4%. Esto significa que un estudiante cualquiera, cuando accede a la ESO, tiene una probabilidad a priori del 28,4% de no terminar sus estudios. Sin embargo, cada estudiante tiene unas circunstancias particulares que lo hacen diferente del resto de estudiantes y su trayectoria escolar no puede considerarse como una repetición, en las mismas condiciones, de las trayectorias escolares de otros estudiantes. Así, si se consideran las circunstancias particulares de dicho estudiante (es decir, se condiciona la probabilidad del fracaso al conocimiento de las características particulares del estudiante) la cifra del 28,4% puede no ser muy representativa.

Enfoque subjetivista

La corriente subjetivista defiende la idea de que la probabilidad de un suceso refleja el grado de creencia de las personas en la ocurrencia de dicho suceso y que, por tanto, puede estar basada en múltiples factores: los conocimientos del observador, la información de la que dispone en cada momento (que puede incluir frecuencias relativas observadas en experimentos previos), las condiciones en las que se produce la situación de incertidumbre, etc. Esto convierte a la probabilidad en una medida subjetiva, de manera que la probabilidad de un suceso puede tomar valores diferentes para diferentes personas o para una misma persona en diferentes momentos, según las circunstancias particulares en las que esa persona la considere.

No obstante, el hecho de no ser tomada la probabilidad como una medida objetiva e invariable no la exime de cumplir ciertas reglas de coherencia y consistencia. Estas reglas no son más que los axiomas de la probabilidad, que recordaremos a continuación, al hablar del enfoque formalista de la probabilidad.

Por último, hay que señalar que la concepción subjetivista tiene la desventaja de no ofrecer un procedimiento para determinar o asignar probabilidades, como sí lo hacen la propuesta clásica y la frecuentista. Su ventaja, por otra parte, es que permite emitir juicios de probabilidad sobre sucesos únicos e irrepetibles.

Enfoque formal o axiomático

La teoría formal de la probabilidad se basa en un sistema de axiomas y una serie de definiciones y teoremas que de ellos se derivan.

Así, un suceso A es definido como un elemento de un σ-álgebra sobre un conjunto Ω y la probabilidad como una función P que a cada elemento de la σ–álgebra le asigna un número real del intervalo [0,1]. Para que una función de estas características sea una función de probabilidad debe cumplir tres axiomas (los axiomas básicos de la teoría de probabilidades):

- La probabilidad de un suceso A es un número real mayor o igual que 0.
- La probabilidad del total, Ω, es igual a 1.
- Si $A_1, A_2,...$ son sucesos mutuamente excluyentes (incompatibles dos a dos, disjuntos o de intersección vacía dos a dos), entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = \sum P(A_i)$.

Esta definición de probabilidad nada dice sobre la naturaleza de la misma ni de la forma en que ésta puede medirse, pero en ella encuentran acomodo todas las concepciones anteriores y sienta unas bases sólidas para el desarrollo de la teoría de la probabilidad como rama de las matemáticas (Doob, 1994).

En realidad, estos cuatro enfoques pueden concretarse en sólo dos visiones diferenciadas del concepto de probabilidad: la objetivista, que englobaría las definiciones laplaciana y frecuentista y defendería la idea de que la probabilidad es una propiedad inherente al objeto como una de sus propiedades físicas; y la visión subjetivista, para la cual la probabilidad no es más que una expresión personal del grado de credibilidad de una proposición (Borovcnik, 2012). El enfoque axiomático sería una formalización matemática que da soporte a ambas sin zanjar las diferencias entre ellas.

En el ámbito escolar, es esperable que la visión particular que tiene el profesor sobre el concepto de probabilidad ejerza cierta influencia sobre la idea que los estudiantes se forman de dicho concepto. Borovcnik (2012) advierte que la enseñanza de la probabilidad está actualmente dominada por el enfoque frecuentista, y esta simplificación del concepto, que esconde el carácter multifacético de la probabilidad, a largo plazo podría generar dificultades en los estudiantes. Por otra parte, Batanero y otros (2005) y Batanero (2005) también señalan la inconveniencia de que la enseñanza de la probabilidad se limite a una de sus diferentes perspectivas. En su opinión, un enfoque completamente experimental no es suficiente y afirman que un conocimiento genuino de probabilidad solo se alcanza con el estudio de alguna probabilidad formal, si bien debe ser gradual y estar apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes. Parece claro que el profesor debe tomar conciencia de la naturaleza de las probabilidades que aparecen en las tareas propuestas a los estudiantes y presentar tareas en las que sea posible entender la probabilidad desde diferentes perspectivas, tanto si estima conveniente hacer explícita esta cuestión en el aula como si no.

Volviendo a la investigación que nos ocupa, debemos aclarar que ésta versa sobre la resolución de problemas en los que el estudiante debe obtener una probabilidad desconocida a partir de otras cantidades conocidas (cantidades que generalmente serán también probabilidades, aunque no siempre). Por tanto, no centramos nuestra atención en los procesos cognitivos mediante los cuales los estudiantes asignan un número a una probabilidad sino en su forma de proceder a la hora de resolver problemas en los que la probabilidad preguntada se ve involucrada en una red de relaciones con otras cantidades. No obstante, la reflexión sobre la naturaleza de las probabilidades que aparecen en los problemas también tiene cabida en esta investigación y estará íntimamente ligada a determinadas variables de la tarea, como la forma en que se genera la situación de incertidumbre, el contexto en que se formula el problema y, sobre todo, el formato en que se presenta la información numérica (frecuencias absolutas, frecuencias relativas, números decimales entre 0 y 1, etc.). Profundizaremos en esta cuestión a lo largo del capítulo, a medida que el lector disponga de más información sobre las características de los problemas con los que trabajamos.

3.1.2 – Sobre la probabilidad condicional.

Hasta ahora hemos hablado sobre el concepto de probabilidad en general. Sin embargo, los problemas de los que nos ocupamos son problemas de probabilidad condicional, lo cual significa que en algún momento los resolutores han de considerar una probabilidad de este tipo. Como ya avanzamos en la introducción, en los problemas que estudiamos la probabilidad condicional aparece exclusivamente en la pregunta del problema, por lo que el resolutor se enfrenta a la tarea de obtener una probabilidad condicional, es decir, la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo de la ocurrencia de otro suceso B, a partir de los datos proporcionados en el enunciado, entre los que no se incluye ninguna probabilidad condicional. Esto exige al estudiante cierta comprensión de lo que significa la probabilidad condicional, cuya interpretación puede hacerse también desde los diferentes puntos de vista descritos anteriormente, pues no deja de ser una probabilidad.

Así, desde la perspectiva objetivista, en la que la probabilidad se reduce a una razón (entre casos favorables y casos posibles, o entre el número de ocurrencias de un suceso y el número de repeticiones del experimento del cual es un resultado posible), el conocimiento de la ocurrencia de B, al que llamamos suceso condicionante, produce una restricción del espacio muestral, que ahora queda reducido a todos aquellos sucesos compatibles con B. Esto altera, por tanto, el denominador de la razón: si el enfoque es laplaciano, los casos posibles pasan a ser sólo los casos posibles compatibles con B; si el enfoque es frecuentista, las realizaciones del experimento que son tenidas en cuenta ahora son aquellas en las que se produce B. Pero la consideración del suceso condicionante B, no sólo altera el denominador de la razón sino también el numerador: los casos favorables ya no son todos aquellos en los que se observa la ocurrencia de A, sino que se reducen a aquellos en que se observa la ocurrencia simultánea de ambos sucesos, A y B.

Desde la perspectiva subjetivista, todas las probabilidades son condicionales: la probabilidad de un suceso A siempre está condicionada a la información previa de la que se dispone en relación a la facilidad con que dicho suceso puede ocurrir. El conocimiento de información adicional, como la ocurrencia de otro suceso B, hace posible una revisión de la probabilidad a priori de A. Así, la probabilidad condicional de A dado B no es más que una actualización de la probabilidad de A a la luz de la nueva información que aporta el conocimiento de la ocurrencia del suceso condicionante B.

Finalmente, desde el punto de vista formal la probabilidad condicional de un suceso A, dado otro suceso B, se define como:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{donde B es un suceso tal que } P(B) \neq 0$$

Es decir, la probabilidad condicional de A dado B se obtiene como cociente entre la probabilidad de la intersección de A y B, $P(A \cap B)$, y la probabilidad marginal del suceso condicionante, P(B).

Como veremos, en los problemas de la investigación la tarea de obtener la probabilidad condicional por la que se pregunta suele reducirse a la tarea de obtener la probabilidad marginal y la probabilidad de la intersección directamente relacionadas con ella, mediante el uso de relaciones entre otras probabilidades marginales y/o de la intersección. En este proceso no es necesario que el resolutor considere ninguna otra probabilidad condicional y no se requiere, por tanto, del Teorema de Bayes ni de otros conceptos íntimamente ligados a la probabilidad condicional, como por ejemplo el de la independencia de sucesos. Por este motivo, estos conceptos no serán abordados aquí.

3.2 – SOBRE EL FORMATO DE PRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN NUMÉRICA EN LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD.

La probabilidad de un suceso puede expresarse de diferentes maneras: razones, porcentajes, números decimales del intervalo [0,1], etc. Así, por ejemplo, podemos decir que la probabilidad de padecer una determinada enfermedad en una determinada población es de 0,10 o que los individuos de dicha población tienen un 10% de probabilidad de padecer la enfermedad, o bien que 1 de cada 10 individuos de la población padecen la enfermedad. A veces, unas formas de expresión resultan más naturales o habituales que otras, dependiendo de factores como el contexto o el destinatario de la información.

Por otra parte, la información numérica que aparece en el enunciado de un problema de probabilidad puede tener naturalezas diversas y no todas las cantidades han de ser necesariamente probabilidades. Por ejemplo, en los libros de texto es muy común que los datos vengan expresados en forma de frecuencias naturales, como en el siguiente problema:

En un campamento de verano hay inscritos 90 jóvenes, de los cuales 70 hablan inglés con fluidez; 25, francés, y 15, ambos idiomas. Escogido un joven al azar, halla la probabilidad de que:

a) Hable los dos idiomas.

b) Hable francés, sabiendo que habla inglés.

(Vizmanos, Alcaide, Serrano, Moreno y Hernández, 2012, p. 275)

La influencia de la manera en que se formulan los datos numéricos sobre la resolución de problemas de probabilidad ha sido ampliamente estudiada (Fiedler, 1988; Gigerenzer y Hoffrage, 1995; Cosmides y Tooby, 1996; Evans y otros, 2000; Girotto y Gonzalez, 2001; Sedlmeier, 2002; Zhu y Gigerenzer, 2006; Lonjedo, 2007; Neace y otros, 2008) y el asunto no está exento de cierta controversia, como se vio en el capítulo anterior (apartado 2.1.3, p. 19)

Por otra parte, Huerta y Lonjedo (2003a, 2003b) distinguen entre dos tipos de problemas: los "problemas de asignación de probabilidades", caracterizados porque los resolutores pueden hacer una lectura del problema en términos de posibilidades y razones entre posibilidades y los "problemas de cálculo de probabilidades", que se caracterizan porque es necesario que el resolutor haga una lectura del problema en términos de probabilidades. El tipo de problema (de asignación o de cálculo) viene determinado, en gran parte, por la forma en que se formula la información numérica (frecuencias absolutas, probabilidades, etc.) en el enunciado.

En nuestro trabajo, hemos tomado en consideración esta variable (la manera en que se formulan los datos numéricos), con el nombre de *formato de datos*, por dos razones. En primer lugar, responde a nuestro objetivo de estudiar la resolución de un tipo particular de problemas de probabilidad condicional (los problemas de N_0) por parte de estudiantes de secundaria, prestando atención a las diferentes variables de la tarea susceptibles de tener cierta influencia sobre el proceso de resolución. El segundo motivo es el hecho de que la muestra de estudiantes no había recibido enseñanza previa en probabilidad en el momento en el que se administraron los dos primeros cuestionarios, por lo que los enunciados debían presentar la información en un formato que la hiciera comprensible y manejable para los estudiantes. Así, hemos tenido en cuenta la variable formato de datos tanto a la hora de diseñar los enunciados de los problemas usados en la experimentación como a la hora de analizar las resoluciones de los estudiantes. Como no era nuestra intención explorar todas las posibilidades, hemos escogido tres de los formatos posibles, a los que, siguiendo a Lonjedo (2007), hacemos referencia como "frecuencias absolutas", "porcentajes" y "probabilidades". Veamos a continuación qué entendemos por cada uno de estos términos.

Datos formulados en frecuencias absolutas

Por frecuencia absoluta o frecuencia natural entendemos la frecuencia con la que se da determinada característica en una determinada muestra o, equivalentemente, el cardinal del conjunto de individuos que presentan dicha característica. Las frecuencias absolutas, por sí solas, no representan probabilidades. Por ello, cuando en un problema de probabilidad los datos vienen expresados en forma de frecuencias absolutas se ha de informar, necesariamente, sobre el cardinal de la muestra; de otro modo, el problema no sería resoluble (Lonjedo, 2007).

Por otra parte, datos que se refieren a probabilidades condicionales no podrán expresarse como frecuencias, ya que A|B no es un suceso propiamente dicho y no tiene un conjunto asociado. No obstante, en algunas investigaciones (Jones, Langrall y Money, 2007) se habla de frecuencias condicionales, como aquellas que miden el cardinal de un conjunto (digamos A) en su relación con otro (digamos B), que es su referente[3]. Se distinguen así de las frecuencias absolutas cuyo referente es todo el espacio muestral. En el enunciado de los problemas objeto de nuestra investigación, el único dato que se refiere a una condicional aparece en la pregunta del problema y para los problemas con los datos en forma de frecuencias lo hemos expresado como un porcentaje, que es un formato de expresión de cantidades que a los estudiantes les resulta familiar.

A continuación, mostramos un ejemplo de problema de N_0 con la información numérica expresada en forma de frecuencias absolutas y la pregunta en forma de porcentaje:

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los chicos de la clase, ¿qué porcentaje usa gafas?

Así, en este problema no aparece la palabra probabilidad en ningún momento y sin embargo, el porcentaje por el que se pregunta puede ser considerado como una medida de probabilidad (de la probabilidad condicional de usar gafas, entre los chicos

[3] Entendemos por frecuencia condicional, por ejemplo, una expresión del tipo: $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$, donde $n(A \cap B)$ y $n(B)$ denotan los cardinales de los sucesos $A \cap B$ y B y $n(B) \neq 0$.

de la clase), si el resolutor opta por hacer una lectura del problema en términos de probabilidades.

Datos formulados en términos de porcentajes

Expresar los datos en forma de porcentajes no es más que expresarlos como un tipo particular de razones normalizadas. En efecto, para cada suceso su probabilidad se expresa como una frecuencia relativa donde el tamaño de la muestra es igual a 100. Un ejemplo de enunciado con los datos formulados en forma de porcentajes es el siguiente:

La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Los datos expresados en forma de porcentajes son fácilmente traducibles a frecuencias, tomando como tamaño muestral 100 o un múltiplo de 10 más grande. Por ejemplo, en el problema anterior, el resolutor podría optar por traducir la información numérica a frecuencias naturales de la siguiente manera: "Supongamos que en la clase de 4º de ESO hay 100 alumnos. Entonces habrá 15 chicas que usan gafas, 37 chicas que no las usan y 35 chicos que tampoco usan gafas."

También podría realizarse una traducción a números decimales, es decir, podría considerarse el tanto por uno equivalente a cada porcentaje y hablar en términos de probabilidades. Se trataría entonces de un problema como los que describimos a continuación.

Datos formulados en términos de probabilidad

Existen diferentes formatos a los que en la literatura se hace referencia como "probabilidades", entre ellos los porcentajes (Hoffrage y otros, 2002; Girotto y Gonzalez, 2002) y las razones laplacianas o "number of chances" (Girotto y Gonzalez, 2002). No obstante, cuando aquí hablemos de datos formulados en términos de probabilidades nos referiremos exclusivamente a números comprendidos entre 0 y 1, expresados en notación decimal. El que sigue es un enunciado con los datos en el formato que denominados probabilidades:

La probabilidad de que un estudiante use gafas es de 0,28. La probabilidad de que un estudiante sea chica y use gafas es de 0,15 y de que sea chica y no las use de 0,37. Los estudiantes que son chicos, ¿qué probabilidad tienen de usar gafas?

Por último, es evidente que la información numérica contenida en un enunciado no necesariamente debe estar expresada en un único formato de datos, sino que los diferentes formatos pueden aparecer en combinación (Lonjedo, 2007). En este trabajo, sin embargo, no hemos hecho uso de ese tipo de enunciados.

3.3 – SITUACIONES Y CONTEXTOS.

3.3.1 – El enfoque realista de la enseñanza de las matemáticas.

Nuestra investigación se inspira en la corriente denominada Educación Matemática Realista (EMR), cuyo máximo exponente es Hans Freudenthal. Este movimiento tuvo su origen en Holanda, a principios de los años setenta, a raíz de la búsqueda de una alternativa al enfoque mecanicista de la educación matemática que imperaba en la época y que basaba la enseñanza de las matemáticas en la realización de cálculos descontextualizados mediante la memorización de algoritmos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2010). Por este motivo, uno de los principios básicos de las matemáticas realistas es la idea de que las matemáticas que se enseñan en el ámbito escolar deben guardar relación con la realidad, para lo cual es necesario que las tareas propuestas a los estudiantes se sitúen en contextos realistas. Esto no significa que los problemas deban provenir de situaciones extraídas directamente de la realidad; basta con que sean problemas que tengan sentido para los estudiantes, es decir, situaciones que los estudiantes puedan imaginar y esto incluye también situaciones en el mismo mundo de las matemáticas.

Otra idea clave en la EMR es la concepción de las matemáticas como una actividad y no como un cuerpo cerrado de conocimientos:

"Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas." (Freudenthal, 1968, p.7)

En el párrafo anterior Freudenthal hace una distinción entre dos tipos de matematización, que Treffers (1978, 1987), citado en Van den Heuvel-Panhuizen (2010), describe como matematización horizontal y matematización vertical. La primera de ellas consiste en organizar y modelizar situaciones de la vida real mediante herramientas matemáticas. La segunda implica moverse dentro del mismo mundo de las matemáticas para organizar los conceptos y procedimientos matemáticos. Los modelos (como por ejemplo las tablas de contingencia en los problemas de probabilidad) pueden hacer de puente entre ambos tipos de matematización (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Por otra parte, al entender las matemáticas como una actividad humana y no como un cuerpo cerrado de conocimientos, la EMR promueve una metodología de enseñanza en la que el estudiante toma un papel activo. Se pretende que los estudiantes reinventen las matemáticas guiados por el profesor (Freudenthal, 1991) y que esta tarea se haga tanto desde el trabajo individual y la reflexión como desde el trabajo en grupo, de manera que los estudiantes tengan oportunidad de interactuar y compartir sus estrategias y descubrimientos. También se huye de la visión de las matemáticas como un conjunto de compartimentos de conocimiento estancos y se recomienda proponer a los estudiantes tareas ricas en las que se aprecien las interconexiones que existen entre los diferentes campos de las matemáticas (cálculo, geometría, probabilidad, etc.)

Todos estos principios de la EMR han tenido una gran influencia en nuestro trabajo tanto en el diseño de las tareas propuestas a los estudiantes como en el diseño y aplicación de la unidad de enseñanza, como veremos en los apartados 4.7 y 4.8. Sin embargo, ahora nos centraremos en uno solo de estos principios: la formulación de los problemas en contextos realistas.

3.3.2 – Situaciones y contextos.

Nuestro interés por el contexto como una de las variables a tener en cuenta en la investigación es doble. Por un lado está nuestra adhesión a los principios de la EMR y concretamente, al de formular problemas en contextos realistas y usar dichos contextos como elementos didácticos. Así, estamos de acuerdo con Martínez, Da Valle, Zolkower y Bressan (2002) en considerar el contexto como un aspecto intrínseco al problema y no como un mero ropaje a eliminar, de manera que los estudiantes puedan imaginar la situación planteada, representarla esquemáticamente mediante un modelo y, por medio de esta modelización, llegar al resultado del problema en cuestión. En Puig y Cerdán (1988) también se habla de diferentes maneras de usar los contextos en el desarrollo curricular. Según estos autores, una de las funciones que podría tener la formulación de problemas en diferentes contextos es la de reflejar la variedad de situaciones de la realidad en que están presentes los fenómenos para los cuales un determinado concepto matemático (en nuestro caso, la probabilidad condicional) es un medio de organización. Este enfoque, basado en la constitución de objetos mentales en contraposición con la adquisición de conceptos (Freudenthal 1983, p. 33), es el que tomaremos en la presente investigación. Así, nuestra clasificación de los enunciados de los problemas en situaciones y contextos procede de la exploración fenomenológica[4] previa del concepto de probabilidad condicional y del análisis fenomenológico (Puig, 1997).

Por otro lado, no podemos pasar por alto el hecho de que el contexto en que se sitúa el enunciado del problema ha demostrado ser un factor influyente en la actuación de los estudiantes ante problemas verbales de probabilidad condicional (Ojeda, 1996). De hecho, como señala Wiest (2002), los problemas de enunciado verbal son una de las actividades más arduas y ansiogénicas para los estudiantes y su desempeño ante este

[4] Basada en la noción de fenómeno de Hans Freudenthal (1983)

tipo de problemas suele ser bajo. Una causa de esto son las dificultades de tipo lingüístico que ofrece la lectura e interpretación del texto del problema y su posterior traducción a conceptos matemáticos (Pollatsek, Well, Konold, Hardiman y Cobb, 1987). Pero, además, los estudiantes pueden presentar dificultades que se derivan de su experiencia vital y de sus conocimientos previos acerca del contexto en que se enmarca la situación problemática que describe el enunciado, como veremos más adelante. En el caso de los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0, un estudio de nuestro equipo de investigación (Carles y otros, 2009) iniciado de manera paralela a esta tesis, confirmó que, efectivamente, el contexto era un factor influyente en las dificultades de los problemas. Nuestro objetivo aquí es estudiar la influencia del contexto en el proceso de resolución (competencias y errores ligados al contexto) para arrojar luz sobre cómo deben ser abordados estos problemas en el aula, pero sin ánimo de primar o recomendar unos contextos sobre otros por el hecho de ser más o menos favorecedores del éxito. Lo que para nosotros hace interesante un contexto para su uso en la enseñanza es su capacidad de mostrar situaciones realistas en las que la probabilidad condicional está involucrada, tratando de ofrecer al estudiante un abanico lo más amplio posible de significados y usos de este concepto.

El hecho de que las situaciones y contextos adquieran un papel tan relevante en la investigación hace necesaria una definición lo más precisa posible del significado con que van a ser utilizados estos términos, tarea que abordamos a continuación.

3.3.2.1 – Significados enciclopédicos de los términos situación y contexto.

En el Diccionario de la Real Academia Española (Real Academia Española, 2001), se define el término *situación* de la siguiente manera:

(De situar).

1. f. Acción y efecto de situar o situarse.
2. f. Disposición de una cosa respecto del lugar que ocupa.
3. f. Posición social o económica.
4. f. Estado o constitución de las cosas y personas.
5. f. Conjunto de factores o circunstancias que afectan a alguien o algo en un determinado momento.
6. f. Estado sociopolítico de un grupo o partido gobernante. Ser de LA situación.

Sobre el término *contexto*, se dice:

(Del lat. contextus)

1. m. Entorno lingüístico del cual depende el sentido y el valor de una palabra, frase o fragmento considerados.
2. m. Entorno físico o de situación, ya sea político, histórico, cultural o de cualquier otra índole, en el cual se considera un hecho.
3. m. p. us. Orden de composición o tejido de un discurso, de una narración, etc.
4. m. desus. Enredo, maraña o unión de cosas que se enlazan y entretejen.

Por otra parte, si consultamos el Diccionario de uso del español de María Moliner (Moliner, 2006), obtenemos las siguientes definiciones:

Para el término *situación*:

1. f. Accidente de las cosas por el que ocupan un lugar determinado.
2. Manera de estar algo o alguien, en cualquier aspecto.

Para el término *contexto*:

1. m. Textura o contextura.
2. (ant.) Enredo de cosas filamentosas.
3. Hilo o curso de un escrito, discurso, etc.
4. Entorno lingüístico que acompaña a una palabra, expresión, etc., del cual depende en muchas ocasiones el sentido de éstas.
5. Conjunto de circunstancias políticas, económicas, culturales, etc., que rodean un hecho.

Observamos, pues, que los términos situación y contexto tienen varias acepciones. Para el primero, podría decirse que las más cercanas a lo que debe entenderse por situación en nuestra investigación son la acepción número 5 del Diccionario de la Real Academia de la Lengua ("*conjunto de factores o circunstancias que afectan a alguien o algo en un determinado momento*") y la acepción número 2 del Diccionario de uso del español de María Moliner ("*manera de estar algo o alguien, en cualquier aspecto*"). Y para el término contexto, las más representativas del sentido con que se usará en este trabajo son la acepción 1 del Diccionario de la Real Academia de la Lengua ("*Entorno lingüístico del cual depende el sentido y el valor de una palabra, frase o fragmento considerados*"), la acepción 4 del Diccionario de uso del español de María Moliner, que expresa la misma idea, y también, la acepción 2 del Diccionario de la Real Academia de la Lengua ("*Entorno físico o de situación, ya sea político, histórico, cultural o de cualquier otra índole, en el cual se considera un hecho*"). Sin embargo, los significados concretos que adquieren los términos situación y contexto en la investigación presentan unas particularidades que pasamos a detallar en el apartado siguiente.

3.3.2.2 – Significados de los términos situación y contexto en nuestra investigación.

Por lo general, cuando se usan los términos situación y contexto en la investigación en Educación Matemática, no se suele precisar el significado concreto que se les da, por lo que cabe suponer que se usan con alguna de las acepciones de su significado enciclopédico. Parece ser, además, que el término situación no es tan utilizado como el de contexto y que cuando se usa no se suele hacer distinción entre ambos. Un trabajo en el que sí se concreta el uso del término situación y que tiene puntos de encuentro con lo que entendemos nosotros por dicho término, es el de Henry (2005, pp. 173-176) sobre modelización en probabilidad condicional. Este autor distingue entre tres tipos de situaciones para el caso de los problemas que implican a dos sucesos básicos A y B: las situaciones cronológicas ("situations chronologiques"), las situaciones causalistas ("situations causalistes") y las situaciones conjuntistas ("situations ensemblistes"). Henry llama situaciones cronológicas a las experiencias compuestas, es decir, a aquellas en las que es posible distinguir dos etapas o pruebas de manera que el resultado de la primera condiciona las probabilidades de los posibles resultados de la segunda. Es el caso, por ejemplo, de las extracciones sin reemplazamiento. Respecto a las situaciones causalistas, las define como aquellas en las que es esperable, a priori, la existencia de una relación causa-efecto entre los sucesos implicados, A y B. Henry pone como ejemplo la situación en la que unas cobayas son tratadas con diferentes químicos susceptibles de provocar una enfermedad en las mismas. Sin tratarse de un experimento determinista, la administración de los químicos puede verse como causa del desarrollo de la enfermedad. Finalmente, las situaciones conjuntistas son aquellas en las que los sucesos básicos A y B se refieren a sendas características de una población entre las que podría darse una relación estocástica (por ejemplo, la estatura y el peso de una persona). En ese caso la relación no sería de tipo causal sino casual. Como se verá en el apartado siguiente, nuestra clasificación de los enunciados en situaciones presenta conexiones con el esquema anterior, aunque nosotros sólo estudiamos dos situaciones distintas (no es un objetivo de este trabajo hacer un estudio exhaustivo de las situaciones que pueden ser modelizadas por medio de la probabilidad condicional) y la nomenclatura utilizada para ellas es diferente de la usada por Henry.

En cuanto al término contexto, el sentido con el que hacemos uso de él proviene del campo de la investigación en resolución de problemas y concretamente de Puig y Cerdán (1988). Estos autores expresan así lo que ha de entenderse por contexto en su investigación sobre los problemas aritméticos escolares: *"Aquí, esto es, en el contexto de este libro, los contextos son los responsables principales de la restricción semántica,* *esto es, de la fijación del campo semántico a partir del cual el sujeto produce sentido para el número y para las operaciones con ellos.”* (Puig y Cerdán, 1988, p. 55)

Así pues, en esta tesis, las situaciones se caracterizarán por lo que refieren los datos, es decir, por la forma en que se genera la incertidumbre y los contextos, como en Puig y Cerdán (1988), serán los responsables de la restricción del campo semántico. En cada situación y contexto, el concepto de probabilidad condicional tendrá un significado específico o se usará en un sentido concreto.

3.3.2.3 – Situaciones y contextos en los que se formulan los problemas de la investigación.

En este trabajo nos ceñimos a dos situaciones que hemos denominado *estadística* y *test de diagnóstico* y dos contextos dentro de cada una de ellas: *estadístico social* (Estsocial) y *estadístico salud* (Estsalud) para la primera; *test de diagnóstico en el contexto de la salud* (Diagsalud) *y test de diagnóstico en el contexto del control de calidad* (Diagcalidad), para la segunda. A continuación, explicaremos qué entendemos por cada uno de estos términos y reflexionaremos sobre las características más relevantes de las situaciones y contextos a los que hacen referencia. Más adelante, en el apartado 3.5.4 completaremos esta descripción mostrando el resultado del análisis fenomenológico del concepto de probabilidad condicional en estas situaciones y contextos.

<u>Situación Estadística</u>

Llamamos situación estadística a aquella en la que se consideran dos características dicotómicas en una determinada población y los datos proceden de un recuento estadístico, es decir, de la observación de sus frecuencias (absolutas o relativas). Es lo que Henry (2005) llama *situaciones conjuntistas*.

Veamos dos ejemplos de problemas planteados en la situación estadística, cada uno de ellos representativo de uno de los dos contextos que hemos considerado para esta situación:

Ejemplo de problema formulado en el contexto Estsocial:

> *La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Hay 12 estudiantes que usan gafas, 7 chicas que las usan y 8 chicos que no las usan. Entre las chicas, ¿qué porcentaje no usa gafas?*

Ejemplo de problema formulado en el contexto Estsalud:

Una población de 30 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han tratado un total de 12 personas, 7 se han tratado y se han curado y 8 no se han tratado y no se han curado. Si seleccionamos aleatoriamente una persona entre las curadas, ¿qué probabilidad hay de que no se haya tratado con el antibiótico?

La incertidumbre, elemento imprescindible para poder hablar en términos de probabilidades, no es inherente a la situación que hemos llamado estadística, ni tampoco a la obtención de los datos. Para introducir este elemento en los enunciados de los problemas, muchas veces se recurre a la elección al azar de un individuo de la población, para luego preguntarse por la probabilidad de que satisfaga determinada característica, sabiendo que satisface otra (como en el segundo de los ejemplos anteriores), lo cual no deja de ser algo artificioso si se compara con otras situaciones en las que sí está presente la incertidumbre de manera natural. Sin embargo, hay problemas formulados en situaciones estadísticas en los que la incertidumbre está presente para el resolutor simplemente por el uso de la palabra “probabilidad” a la hora de enunciar el dato desconocido; e incluso hay probemas en los que ni se recurre a la elección aleatoria de un elemento de la población ni hay referencias a la probabilidad, sino que la pregunta se formula directamente en términos de porcentajes. Es lo que ocurre en el primero de los ejemplos anteriores o en el siguiente problema extraído de las Pruebas de Acceso a la Universidad:

Al 80% de los miembros de una sociedad gastronómica le gusta el vino Raïm Negre. Entre estos, al 75% le gusta el queso de cabra. Además, a un 4% de los miembros de esta sociedad no le gusta el vino Raïm Negre ni el queso de cabra.

a) ¿A qué porcentaje le gusta tanto el vino Raïm Negre como el queso de cabra?

b) ¿A qué porcentaje no le gusta el queso de cabra?

c) Si a un miembro de la sociedad le gusta el queso de cabra, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el vino Raïm Negre?

d) ¿A qué porcentaje le gusta el vino Raïm Negre entre aquéllos a los que no les gusta el queso de cabra?

(Problemas PAU, 2010. Convocatoria de Junio, problema 3, op. B)

Por otra parte, hay que señalar que entre los dos contextos considerados dentro de la situación estadística existe una diferencia que tiene influencia sobre la actuación de los estudiantes y hace que el desempeño de éstos ante problemas formulados en un contexto u otro sea bastante desigual. La diferencia radica en el hecho de que en el Estsalud el resolutor puede asumir, a priori, una relación de causa efecto entre los sucesos básicos considerados (lo esperable es que un paciente que tome antibiótico se cure), mientras que esto no ocurre en el contexto que hemos llamado Estsocial (no se considera que sea más probable usar gafas o no usarlas por el hecho de ser chica o chico). Si atendemos a la clasificación de Henry (2005), el contexto Estsocial podría considerarse una situación de tipo conjuntista mientras que el contexto Estsalud cuadraría mejor como una situación de tipo causalista. Como consecuencia, aunque en ambos contextos el grado de dependencia entre los sucesos básicos viene determinada única y exclusivamente por los números del problema, es posible que el resolutor tenga la creencia de que existe una dependencia mayor o menor de la real, sin tomar en consideración la información numérica y basándose solamente en el contexto. Es muy común, por ejemplo, la creencia de que toda persona tratada necesariamente es curada, consecuencia de un razonamiento totalmente determinista. Como veremos más adelante en el capítulo de resultados, este tipo de sesgos dificultan la correcta identificación de todos los sucesos implicados en el problema y conducen a los estudiantes al uso de relaciones falsas entre cantidades.

<u>Situación Test de diagnóstico</u>

Es la situación en la que algo o alguien es sometido a un test que no es completamente fiable o infalible, lo que genera cierta dosis de incertidumbre en los resultados (los llamados falsos positivos o falsos negativos).

Un test puede ser aplicado a muchas cosas en muchos contextos. Como ya se ha señalado, en este trabajo nos centramos en dos de ellos: el contexto salud y el contexto control de calidad. En el contexto Diagsalud, hay una población susceptible de padecer cierta enfermedad y los pacientes se someten al test para determinar si efectivamente están enfermos o no. En el contexto Diagcalidad, el test evalúa artículos fabricados para determinar si son defectuosos o no. A continuación mostramos sendos ejemplos.

Ejemplo de problema formulado en el contexto Diagsalud:

Una población de riesgo para la tuberculosis formada por 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. El test les ha dado positivo a 12 personas. Hay 7 personas tuberculosas a las que el test les ha dado positivo y 8 personas no tuberculosas a las que el test les *ha dado negativo. Entre las personas tuberculosas, ¿cuál es la probabilidad de que el test dé negativo?*

Ejemplo de problema formulado en el contexto Diagcalidad:

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 30 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. Los resultados muestran que 12 piezas son calificadas de defectuosas por el dispositivo, 7 son defectuosas y el test las ha calificado de defectuosas y 8 piezas son correctas y el test las ha calificado de correctas. Si una pieza es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que el test la califique de correcta?

Al contrario de lo que ocurre con la situación estadística, entre los dos contextos considerados en la situación test de diagnóstico no observamos, a priori, diferencias importantes que hagan prever que los estudiantes vayan a actuar de manera diferente en la resolución de problemas formulados en uno y otro contexto. No obstante, también se dan prejuicios y creencias erróneas relacionadas con las pruebas diagnósticas, siendo la más común el considerar que los test son infalibles, lo cual conduce, como en el contexto Estsalud, a dificultades para identificar la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades del problema.

Por otra parte, cualquiera de las situaciones y contextos descritos anteriormente admite una formulación de la información numérica del enunciado en cualquiera de los formatos que hemos tomado en consideración (frecuencias naturales, porcentajes o probabilidades) y de hecho, los problemas de nuestra investigación presentan todas las combinaciones posibles entre los cuatro contextos y los tres formatos de datos. Sin embargo, hay formatos que resultan más naturales o realistas que otros a la hora de enunciar el problema, según el contexto elegido, lo cual guarda relación con la forma en que se genera la incertidumbre y con la naturaleza de las probabilidades que intervienen en el problema.

Así, en la situación estadística, lo que en nuestra opinión sería más razonable es que el enunciado informara sobre la frecuencia (absoluta o relativa) con la que se dan determinadas características en una determinada población. Así, informar de que en una determinada población el 20% son chicas con gafas resulta mucho más natural que decir que la probabilidad de ser chica y usar gafas en una determinada población es de 0,20. La primera manera de expresarse hace referencia a una razón: 20 de cada 100 individuos de la población son chicas con gafas, lo cual está en consonancia con el carácter estadístico del contexto, no evoca probabilidad ni incertidumbre, tan sólo recuento. Lo mismo ocurre si informamos del tamaño de la muestra y del número de chicas que usan gafas. De hecho, el mero hecho de que en una población haya chicos y chicas, personas sin gafas y personas con gafas no genera ningún tipo de incertidumbre. La incertidumbre es introducida artificialmente, mediante la selección al azar de uno de estos individuos, como señalamos anteriormente. Desde nuestro punto de vista, el contexto Estsalud, aun ajustándose a lo expuesto para el contexto Estsocial, por compartir el tipo de situación, vuelve a presentar una ligera diferencia respecto de este último. Opinamos (y es una visión totalmente subjetiva) que en una población de personas enfermas en la que algunas se tratan con un antibiótico y otras no y algunas se curan y otras no, resulta más fácil percibir cierta dosis de incertidumbre, aun antes de introducir la elección aleatoria de una persona de la población y preguntarse por alguna de las características anteriores. Para el lector, resultará sencillo ponerse en el lugar de una persona enferma que se ha tratado con antibiótico. Lo esperable (y lo deseable) es que una persona tratada se cure, pero esto no siempre es así. Una persona enferma que se ha tratado espera y desea curarse pero sufre la incertidumbre de no saber con seguridad si se curará o no. Evidentemente, en una población de chicos y chicas, algunos de los cuales llevan gafas y otros no, podemos plantearnos la situación análoga, es decir, dado un individuo, por ejemplo un chico, preguntarnos si éste lleva gafas o no. Sin embargo, resulta más difícil imaginar una situación realista en la que esta pregunta tenga relevancia y genere, por tanto, "incertidumbre", no sólo desde el punto de vista matemático del término sino también desde un punto de vista más subjetivo o psicológico.

Una vez introducido el elemento de la incertidumbre, es posible asignar probabilidades a los sucesos ("ser chica", "usar gafas", "ser una chica con gafas", etc. o sus análogos en el contexto Estsalud: "tratarse", "curarse", "tratarse y curarse", etc.). Si los datos están en forma de porcentajes, éstos pueden considerarse por sí mismos una medida de probabilidad o bien pueden ser expresados como números decimales, es decir, como tantos por uno. Si los datos están en frecuencias naturales lo más inmediato es recurrir a la regla de Laplace: asumiendo que cualquiera de los individuos tiene la misma probabilidad de ser seleccionado, la probabilidad de que el individuo seleccionado presente determinada característica puede obtenerse como cociente de la frecuencia absoluta de dicha característica y el tamaño de la muestra. Si se tratara de una probabilidad condicional, la razón tendría por antecedente la frecuencia absoluta de la intersección de los sucesos condicionado y condicionante, y por consecuente la frecuencia absoluta del suceso condicionante.

Examinemos ahora la situación del test de diagnóstico. Una diferencia fundamental con la situación anterior es el hecho de que la incertidumbre está presente debido a que las pruebas diagnósticas, como cualquier otro dispositivo fabricado por el hombre, son más o menos fiables pero nunca totalmente infalibles. En cuanto al formato de datos más apropiado para esta situación diríamos ahora que se trata de los porcentajes o probabilidades, sin que el formato de frecuencias naturales resulte inapropiado. En el mundo real, cuando se dan datos acerca de la fiabilidad de las pruebas diagnósticas o sobre la prevalencia de ciertas enfermedades, etc. los datos suelen provenir de estudios que manejan un gran volumen de información. La probabilidad de sucesos como padecer una enfermedad en una determinada población u obtener un falso positivo con un test suelen ser el resultado de la observación de una gran cantidad de casos y por tanto, este tipo de probabilidades suelen obtenerse mediante los procedimientos propios del enfoque frecuentista de la probabilidad. Es decir, las probabilidades de los sucesos involucrados en este tipo de situaciones se obtendrían como valor límite de las frecuencias relativas con que se dan dichos sucesos. También sería posible hacer una lectura de estas probabilidades desde el punto de vista subjetivista: las probabilidades de los sucesos implicados en la situación test de diagnóstico se basan en los conocimientos de que se disponen acerca del tema (incluyendo datos acerca de frecuencias obtenidas en estudios anteriores) y estas probabilidades se van actualizando conforme se tiene más información a partir de nuevas experiencias con las pruebas diagnósticas, o porque se tienen en cuenta nuevos factores que afectan a la población que es sometida a diagnóstico.

No obstante, el único objetivo de estas observaciones es el de mostrar una reflexión acerca de los contextos que se usan en esta investigación en relación con el formato de datos y la naturaleza de las probabilidades implicadas. Como ya hemos señalado, en la práctica hemos enunciado problemas en contextos y formatos de datos variados, pues lo que pretendemos es estudiar la actuación de los estudiantes ante problemas de características diferentes. En ningún caso, además, la información numérica de los enunciados ha sido tomada directamente de la realidad, sino que los números de los problemas han sido inventados por los investigadores, garantizando, eso sí, un mínimo de coherencia y realismo.

3.4 – SOBRE LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LOS PROBLEMAS QUE SON OBJETO DE ESTUDIO.

Hemos descrito los problemas de la investigación como problemas escolares de probabilidad condicional en contexto, es decir, problemas escolares de enunciado verbal, en los que, o bien en los datos, o bien en la pregunta del problema es necesario que el resolutor considere la probabilidad condicional de un suceso. Esta descripción resulta demasiado general y en este apartado vamos a describir con precisión el tipo de problemas escolares de probabilidad condicional que son objeto de estudio, desde el punto de vista de su estructura matemática, es decir, despojados del contexto en el que se formulan y atendiendo únicamente a los sucesos genéricos que intervienen, sus probabilidades y el tipo de relaciones que se dan entre ellas.

Comenzaremos señalando que nuestros problemas pertenecen a la familia de problemas que Cerdán y Huerta (2007, p. 4) definen como problemas ternarios de probabilidad condicional (PTPC). Son problemas que, leídos matemáticamente, cumplen las siguientes condiciones:

- En el enunciado del problema hay, al menos, una probabilidad condicional implicada, ya sea como probabilidad conocida o como probabilidad preguntada.
- Al menos se conocen tres probabilidades, no directamente relacionadas.
- Todas las probabilidades, tanto conocidas como desconocidas, están relacionadas mediante relaciones ternarias de los tipos:
  - Complementariedad: $P(A)+P(\overline{A})=1$; $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid B)=1$
  - Aditividad: $P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})=P(A)$
  - Multiplicatividad: $P(A\mid B)\cdot P(B)=P(A\cap B)$
- La pregunta del problema se hace sobre una probabilidad desconocida que está relacionada con las probabilidades conocidas por, al menos, una de las relaciones ternarias.

Por el hecho de ser ternarios, estos problemas verifican, además, que sólo involucran a dos sucesos básicos A y B, sus complementarios y sus intersecciones.

Las Tablas 3.1 y 3.2, basadas en la Tabla 1 de Huerta (2009), recogen los ocho sucesos, las dieciséis probabilidades (cuatro marginales, cuatro intersecciones y ocho condicionales) y las dieciocho relaciones ternarias (diez aditivas y ocho multiplicativas) que intervienen en los problemas ternarios de probabilidad condicional.

Sucesos		**Probabilidades**			
Básicos y sus complementarios	**Intersecciones**	**Marginales**	**Intersecciones**	**Condicionales**	
A	$A\cap B$	$P(A)$	$P(A\cap B)$	$P(B\mid A)$	$P(A\mid B)$
$\overline{A}$	$A\cap \overline{B}$	$P(\overline{A})$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{B}\mid A)$	$P(\overline{A}\mid B)$
B	$\overline{A}\cap B$	$P(B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B\mid \overline{A})$	$P(A\mid \overline{B})$
$\overline{B}$	$\overline{A}\cap \overline{B}$	$P(\overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B}\mid \overline{A})$	$P(\overline{A}\mid \overline{B})$

Tabla 3.1. Sucesos y probabilidades de sucesos que intervienen en un PTPC.

Relaciones ternarias entre probabilidades		
Aditivas		Multiplicativas (de condicionalidad)
De complementariedad	Suma de intersecciones	
$P(A)+P(\overline{A})=1$ $P(B)+P(\overline{B})=1$ $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid B)=1$ $P(A\mid \overline{B})+P(\overline{A}\mid \overline{B})=1$ $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid A)=1$ $P(B\mid \overline{A})+P(\overline{B}\mid \overline{A})=1$	$P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})=P(A)$ $P(\overline{A}\cap B)+P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(\overline{A})$ $P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(B)$ $P(A\cap \overline{B})+P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(\overline{B})$	$P(A)\cdot P(B\mid A)=P(A\cap B)$ $P(A)\cdot P(\overline{B}\mid A)=P(A\cap \overline{B})$ $P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})=P(\overline{A}\cap B)$ $P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}\mid \overline{A})=P(\overline{A}\cap \overline{B})$ $P(B)\cdot P(A\mid B)=P(A\cap B)$ $P(B)\cdot P(\overline{A}\mid B)=P(\overline{A}\cap B)$ $P(\overline{B})\cdot P(A\mid \overline{B})=P(A\cap \overline{B})$ $P(\overline{B})\cdot P(\overline{A}\mid \overline{B})=P(\overline{A}\cap \overline{B})$

Tabla 3.2. Relaciones ternarias entre las probabilidades involucradas en un PTPC.

Llegados a este punto, debemos recordar que nosotros nos limitaremos al estudio de una familia particular de problemas ternarios, los problemas de nivel N_0, según la clasificación que hace Lonjedo (2007) y que pasamos a describir.

Para que un PTPC tenga solución, deben conocerse al menos tres probabilidades, convenientemente escogidas entre las marginales, las intersecciones y las condicionales (Yáñez, 2001). En base a esto, se identifican nueve casos de problemas resolubles, que Huerta (2003) representa mediante vectores de tres componentes, (x, y, z), siendo la componente x el número de probabilidades marginales conocidas, la componente y el número de probabilidades de la intersección conocidas y la componente z el número de probabilidades condicionales conocidas, de manera que $x + y + z = 3$.

Esta clasificación es afinada en Lonjedo (2007), quien no sólo tiene en cuenta los datos conocidos (cantidades explícitamente mencionadas en el enunciado) sino también, la pregunta del problema. Recordemos que, matemáticamente, un PTPC queda determinado por 4 cantidades: tres conocidas y una desconocida, convenientemente escogidas. Así, Lonjedo clasifica los PTPC en niveles, categorías y tipos.

El nivel se define como el número de probabilidades condicionales conocidas: z. Se reconocen cuatro niveles: N_0, N_1, N_2 y N_3, donde el subíndice indica el número de probabilidades condicionales explícitamente mencionadas en el enunciado. Por tanto, los problemas de nivel N_0 (sobre los que versa este trabajo) son aquellos en los que no se da ninguna probabilidad condicional como dato conocido en el enunciado.

Dentro de un nivel, la categoría se define como el número de probabilidades marginales conocidas: *x*. Se distinguen tres categorías: C_0, C_1 y C_2, donde, análogamente, el subíndice indica el número de probabilidades marginales explícitamente mencionadas en el enunciado. La categoría no es independiente del nivel. Como consecuencia, el número de intersecciones conocidas, *y*, surge de la relación entre los tres tipos de datos: $x + y + z = 3$.

Finalmente, el tipo viene determinado por la pregunta del problema. Así, el problema será de:

- Tipo 1, si se pregunta por una probabilidad condicional.
- Tipo 2, si se pregunta por una probabilidad marginal.
- Tipo 3, si se pregunta por la probabilidad de una intersección.

Siguiendo este criterio, pueden identificarse 4 familias (una por cada nivel) y 20 subfamilias de problemas, que se muestran en la Tabla 3.3.

	N_0			N_1			N_2			N_3		
C_0	C_0T_1	∅[5]	∅	C_0T_1	C_0T_2	C_0T_3	C_0T_1	C_0T_2	C_0T_3	C_0T_1	C_0T_2	C_0T_3
C_1	C_1T_1	∅	∅	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	∅	∅	∅
C_2	C_2T_1	∅	∅	C_2T_1	∅	C_2T_3	∅	∅	∅	∅	∅	∅

Tabla 3.3. Clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional atendiendo a los niveles, categorías y tipos. (Tabla tomada de Lonjedo, 2007)

En dicha tabla, podemos apreciar también que todos los problemas de la familia N_0 son de tipo 1, ya que de preguntarse por otro tipo de probabilidad, el problema no contendría ninguna condicional en el enunciado y, por tanto, no verificaría la primera de las condiciones para ser un problema ternario de probabilidad condicional, tal y como los hemos definido en la p. 55. Así pues, la familia de problemas de N_0 se subdivide en tres subfamilias, que sólo se distinguen por su categoría. El siguiente es un ejemplo de PTPC de nivel N_0 y categoría C_2.

[5] El símbolo de conjunto vacío indica que no existen problemas ternarios de probabilidad condicional que verifiquen las características dadas por el nivel, la categoría y el tipo en cuestión. Sin embargo, esto no significa que no puedan formularse problemas con dichas características, simplemente éstos no serían problemas ternarios de probabilidad condicional tal y como los hemos definido en la p. 55, por incumplir alguna de las condiciones que allí se especifican.

Los individuos de una población con alto riesgo de padecer SIDA se someten a un test para averiguar si padecen esta enfermedad o no. El test da positivo o negativo en cualquier caso. La probabilidad de que una persona de esta población de riesgo padezca SIDA es de 0,57 y la probabilidad de que dé positivo en el test es de 0,47. Se sabe, además, que hay una probabilidad de 0,23 de que una persona padezca de SIDA y el test le dé negativo.

a) Las personas que no padecen SIDA, ¿qué probabilidad tienen de dar positivo en el test?

b) Las personas que dan positivo en el test, ¿qué probabilidad tienen de padecer SIDA?

3.5 – SOBRE LAS CANTIDADES Y LAS RELACIONES ENTRE CANTIDADES.

3.5.1 – Sobre el concepto de cantidad en este trabajo. Tipos de cantidades.

Hemos visto cómo la información numérica del enunciado de un problema de probabilidad puede expresarse en diferentes formatos. Otro aspecto a resaltar es que esta información numérica siempre estará ligada a los sucesos[6] involucrados en el problema. Así los números que aparecen en el enunciado de un problema de probabilidad pueden entenderse como medidas de probabilidad (en sentido amplio) y el formato de presentación de estos datos varía en función de la "escala de medición" que se tome.

Así, cuando los datos vienen expresados en forma de frecuencias naturales, se favorece la interpretación de los sucesos como conjuntos y los números asociados son sus cardinales. La escala de medida va de 0 a N, donde N representa el tamaño de la muestra. Si la información numérica aparece en forma de porcentajes, estamos ante medidas normalizadas, con un rango de medidas que se extiende de 0 a 100. Por último, el formato probabilidades aquí usado también supone una normalización de las medidas, que varían dentro de una escala de 0 a 1. La principal diferencia entre el formato probabilidades y el formato porcentajes es que si ambos formatos son considerados como frecuencias relativas, en el caso de los porcentajes se toma 100 como número total de observaciones (o cardinal del conjunto de referencia), mientras

[6] Se usará el término *suceso* en un sentido amplio y no necesariamente como un elemento de una σ-álgebra. Así, puede referirse también a proposiciones, como por ejemplo, "ser una chica con gafas" o a conjuntos, como el formado por todas las chicas con gafas en una determinada muestra.

que en el caso del formato probabilidades, las medidas hacen referencia a situaciones en las que la ocurrencia o no del suceso se da una única vez, es decir se toma el 1 como número total de observaciones.

En este trabajo consideraremos conjuntamente los números (como medidas de probabilidad), sus referentes (sucesos) y la escala de medida bajo el término *cantidad*. Basándonos en la definición de cantidad dada por Cerdán (2008), a cada cantidad le asociaremos una o más ternas (x, n, f) en las que x representará un número, n la descripción del referente de dicho número (un suceso, en sentido amplio) y la f hace referencia al formato de datos (Edo, Huerta y Cerdán, 2011; Huerta, 2014). Aquí, la componente f de las cantidades siempre tomará uno de estos tres valores: frecuencias (F), porcentajes (%) y probabilidades (P). Para un valor fijo de f, el valor numérico de la cantidad, x, es único. No ocurre así con la descripción del referente, es decir, con la componente n de la cantidad. Tal y como afirma Cerdán (2008) esta descripción puede ser expresada en el lenguaje vernáculo de diferentes maneras, todas ellas correctas desde un punto de vista lingüístico. Consideraremos que dos descripciones son equivalentes si su referente es el mismo. Por ejemplo, consideramos que la expresión "ser chica y usar gafas" es equivalente a la expresión "ser una chica con gafas", pues ambas se refieren a la misma intersección de sucesos: la intersección del suceso "ser una chica" con el suceso "usar gafas". Cerdán (2008) usa el término "diccionario de cantidades" para referirse al conjunto de cantidades involucradas en un problema aritmético-algebraico. En este diccionario, los diferentes valores que puede tomar la componente verbal de cada cantidad, es decir, las diferentes expresiones que pueden usarse para describir las cantidades, son consideradas como diferentes acepciones o nombres de dicha cantidad.

Por otra parte, en los problemas objeto de estudio distinguiremos tres tipos de cantidades: marginales, intersecciones y condicionales. Así, cuando decimos que un estudiante interpreta, usa, halla etc. una marginal, una intersección o una condicional nos referimos a la cantidad con sus tres componentes (x, n, f) y no sólo al número o al suceso al que se asocia, ya que la componente x y la componente n están íntimamente relacionadas y cuando el resolutor pone en juego una cantidad, suele tomar en consideración las tres componentes simultáneamente[7]. Hay que recordar también que para las cantidades condicionales, la componente f sólo tomará los valores % y P, ya que, estrictamente hablando, no existen los sucesos condicionales, puesto que no tienen un conjunto de referencia y, por tanto, no es posible asignarles una frecuencia natural, que sería el cardinal de su conjunto de referencia.

[7] Si no hay número (conocido o desconocido), no hay cantidad y si hay un número, aunque no venga descrito, ese número tiene algún sentido (correcto o incorrecto) para el resolutor. En realidad, el resolutor también podría operar números de manera arbitraria, tan sólo porque se le pide que resuelva el problema con esos números (caso del problema “La Edad del Capitán”, en Puig y Cerdán, 1988, pág. 39). Pero entonces, el análisis de su actuación más allá de esta observación, carecería de interés.

Analicemos, a modo de ejemplo, las cantidades que aparecen en el siguiente enunciado:

Un centro escolar está formado por chicos y chicas. Hay un 28% de estudiantes que usan gafas, un 15% de chicas que las usan y un 37% de chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Se comprueba que el problema proporciona tres cantidades conocidas:

- La marginal enunciada como "un 28% de estudiantes que usan gafas", cantidad cuyo vector asociado sería: (28, "estudiantes que usan gafas", %)
- La intersección enunciada como "un 15% de chicas que las usan", cantidad cuyo vector asociado sería: (15, "chicas que las usan", %). Aquí la proposición "chicas que las usan" se interpreta, semánticamente, como equivalente a "chicas que usan gafas".
- Y la intersección enunciada como "un 37% de chicas que no las usan", cantidad cuyo vector asociado sería: (37, "chicas que no las usan", %). Como antes, la proposición "chicas que no las usan" se interpreta, semánticamente, como equivalente a "chicas que no usan gafas".

Por último, se pregunta por una cantidad condicional "Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?", a la que asignaríamos el vector (x, "usan gafas entre los chicos", porcentajes), donde x es un número desconocido, es decir, la incógnita del problema.

3.5.2 – Sobre las relaciones entre cantidades.

En el apartado 3.4 ya hemos detallado las relaciones que se establecen entre las diferentes probabilidades involucradas en un problema ternario de probabilidad condicional. Tal y como están descritas, son relaciones entre números, que tienen asociados un referente y que, por tanto, descansan sobre relaciones entre sucesos.

En la Tabla 3.2, hemos distinguido entre tres tipos de relaciones: las relaciones de complementariedad, las relaciones que involucran a dos intersecciones y las relaciones de condicionalidad. Las de los dos primeros tipos son relaciones aditivas, mientras que las del tercer tipo se trata de relaciones multiplicativas. Respecto de las aditivas, la distinción entre relaciones de complementariedad y relaciones de suma de intersecciones se debe al hecho de que en el primer caso siempre interviene el número 1 o probabilidad total, por lo que el conocimiento de una de las otras dos probabilidades supone el conocimiento de la restante (Huerta, 2009).

Por otra parte, decíamos que las relaciones entre probabilidades descansan sobre relaciones entre sucesos.

Consideremos una relación del tipo $P(A)+P(\overline{A})=1$. Esta relación se da por el hecho de que A y $\overline{A}$, considerados como conjuntos, son mutuamente excluyentes y exhaustivos, es decir, verifican la relación $A \cup \overline{A} = \Omega$, donde Ω representa todo el espacio muestral. El mismo razonamiento es aplicable a las relaciones del tipo $P(B \mid A)+P(\overline{B} \mid A)=1$ en un espacio muestral restringido al suceso A.

De la misma manera, las relaciones aditivas del tipo $P(A \cap B)+P(A \cap \overline{B}) = P(A)$ se sustentan en el hecho de que los sucesos $A \cap B$ y $A \cap \overline{B}$ son mutuamente excluyentes y verifican la relación $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Y las relaciones del tipo $P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A \cap B)$ responden a la definición de probabilidad condicional, que a su vez es coherente con la relación de inclusión $(A \cap B) \subset B$ que implica $P(A \cap B) < P(B)$, conocida como *regla de la conjunción*.

Por tanto, la aplicación de estas relaciones durante la resolución de un problema siempre ha de venir precedida de un examen de las características y relaciones que se establecen entre los sucesos implicados.

Supongamos ahora que los datos vienen expresados en forma de frecuencias absolutas. Todas aquellas relaciones que involucren únicamente a marginales e intersecciones serán análogas a las que aparecen en la Tabla 3.2, si bien ahora se tratará de relaciones entre cardinales de conjuntos (sucesos) y la probabilidad total (que en el formato probabilidades toma el valor 1) será sustituida por el tamaño de la muestra, N. La Tabla 3.4 resume estas relaciones.

Aditivas	
De complementariedad	Suma de intersecciones
$n(A)+n(\overline{A}) = N$ $n(B)+n(\overline{B}) = N$	$n(A \cap B)+n(A \cap \overline{B}) = n(A)$ $n(\overline{A} \cap B)+n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A})$ $n(A \cap B)+n(\overline{A} \cap B) = n(B)$ $n(A \cap \overline{B})+n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{B})$

Tabla 3.4. Relaciones ternarias que se establecen entre las marginales y las intersecciones involucradas en un problema ternario de probabilidad condicional cuando vienen expresadas en el formato frecuencias naturales.

Cuando tomamos en consideración también a las condicionales, hay que tener en cuenta que A|B no es estrictamente un suceso (como se ha indicado reiteradamente) y no tiene un conjunto de referencia asociado. Sin embargo, como también hemos señalado anteriormente, para su expresión se puede recurrir a las frecuencias condicionales:

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \text{ donde } n(B) \neq 0$$

De esta manera, las relaciones de la Tabla 3.2 en las que intervienen condicionales se pueden reformular en términos de frecuencias, aunque lo que se obtiene no son relaciones ternarias.

Así, la relación de complementariedad $P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = 1$ quedaría, en términos de frecuencias, como $\frac{n(A \cap B)}{n(B)} + \frac{n(\overline{A} \cap B)}{n(B)} = 1$. Al implicar más de tres cantidades, a saber, $n(A \cap B)$, $n(\overline{A} \cap B)$, $n(B)$ y 1, no se trataría de una relación ternaria.

Por otra parte, las relaciones multiplicativas del tipo $P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A \cap B)$ quedarían en términos de frecuencias como $\frac{n(B)}{N} \cdot \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)}{N}$. Este tipo de relaciones tampoco son ternarias, ya que aunque involucran a tres cantidades, no son más que identidades.

No obstante, en los problemas de N_0, el resolutor sólo se ve obligado a considerar una cantidad condicional: aquella por la que se pregunta, que se puede calcular a partir de la intersección y la marginal directamente relacionadas con ella. Estas dos cantidades, a su vez, pueden ser obtenidas a partir de las relaciones contenidas en la Tabla 3.4, que no involucran cantidades condicionales. Por tanto, este tipo de relaciones no ternarias no son estrictamente necesarias para la resolución de problemas de N_0.

Por último, analicemos el caso en el que los datos vienen expresados en forma de porcentajes. En primer lugar, hay que tener en cuenta que los tantos por cien no son operables entre sí, a menos que compartan el conjunto de referencia y aún así una expresión del tipo 20% + 30% = 50% no es matemáticamente correcta si los porcentajes se toman como operadores, porque no aparece el conjunto de referencia de los mismos. Sin embargo, el resolutor siempre puede optar por transformar los porcentajes en probabilidades o incluso en frecuencias naturales. Esto último es especialmente sencillo en el caso de los problemas de N_0, donde los datos conocidos son marginales e intersecciones, pues este tipo de cantidades comparten como conjunto de referencia la muestra total, a la que es posible asignar un tamaño de 100 (u otro múltiplo de 10) y los tantos por cien (por sí mismos o multiplicados por la unidad seguida de ceros) coincidirán con las frecuencias absolutas en el problema transformado. Como veremos en el capítulo de resultados, esta forma de actuar es muy común entre los estudiantes participantes en la investigación.

3.5.3 – El Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional.

Investigaciones previas (Fridman, 1990; Cerdán, 2008; Cerdán y Huerta, 2007; Carles, 2007; Lonjedo, 2007; Huerta, 2009) muestran que el uso de los grafos tiene muchas aplicaciones, tanto para la investigación como para la enseñanza. En este trabajo haremos un uso extenso de un grafo particular: el "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional" (GPPC), diseñado por Cerdán y Huerta (2007) basándose en los grafos trinomiales de Fridman (1990).

En este grafo (Figura 3.1) se representan las 16 probabilidades que intervienen en un problema ternario de probabilidad condicional y las 18 relaciones en las que están implicadas, mostradas en las Tablas 3.1 y 3.2.

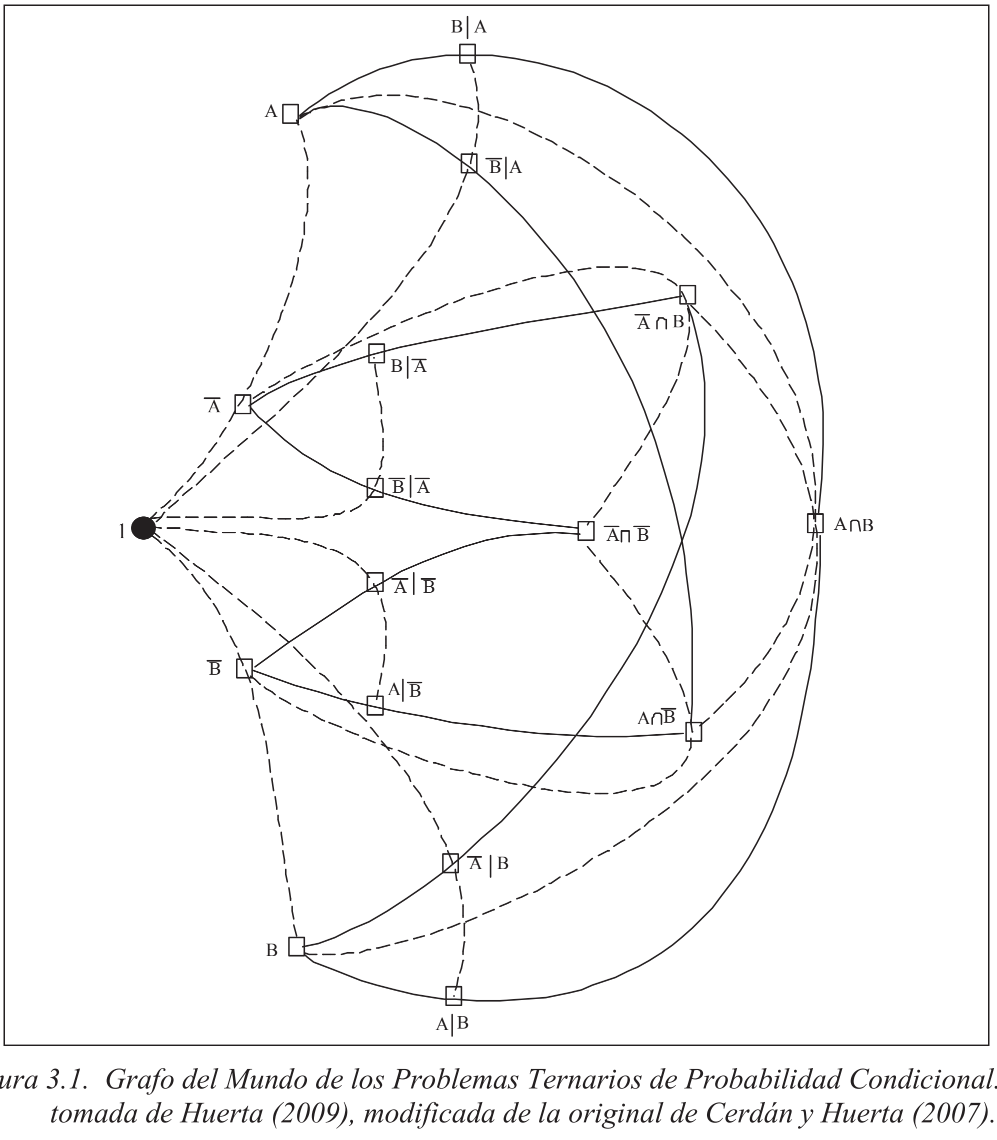


Figura 3.1. Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional. Figura tomada de Huerta (2009), modificada de la original de Cerdán y Huerta (2007).

En los vértices del grafo se representan, por un lado, los sucesos[8], con su notación habitual, y por otro, las probabilidades de estos sucesos, mediante cuadrados.

Por otra parte, el único vértice circular, que lleva asociado el valor 1, representa la probabilidad del suceso seguro Ω.

En cuanto a las aristas del grafo, cada una de ellas une tres vértices, ya que representan relaciones ternarias, es decir, relaciones entre tres cantidades. Las de trazo discontinuo representan relaciones aditivas (incluidas las de complementariedad a 1) y las de trazo continuo, relaciones multiplicativas. Son además, aristas orientadas multiplicativa o aditivamente de izquierda a derecha.

Puesto que cada cantidad aparece representada una única vez, por ella pasan todas las aristas que representan relaciones en las que esta cantidad interviene. Al número de aristas que concurren en un vértice se le llama orden, de manera que los vértices que representan condicionales son de orden 2, los vértices que representan marginales e intersecciones son de orden 4 y el vértice que representa la probabilidad del suceso seguro es de orden 6.

Veamos cómo dado un problema concreto, su estructura matemática puede ser estudiada con ayuda del grafo.

Para empezar, en todo problema se dispone de cantidades conocidas y de cantidades desconocidas (entre ellas la pregunta del problema). En el grafo las cantidades conocidas se representan mediante vértices oscuros, mientras que las cantidades desconocidas se representan mediante vértices claros.

Así, un problema queda determinado en el grafo (independientemente del contexto) cuando se oscurecen tres vértices convenientemente escogidos (los datos conocidos) y se señala el vértice correspondiente a la cantidad por la que se pregunta. A partir de ese momento, la resolución del problema con la ayuda del grafo consiste en encontrar una ruta o camino de resolución que nos lleve desde las cantidades conocidas hasta la cantidad preguntada. Así, entenderemos por ruta de resolución un conjunto ordenado de aristas encadenadas, que representan las relaciones ternarias que se usan, las cantidades intermedias[9] que se obtienen y el orden en que se hace, para resolver el problema.

---

[8] Nos tomamos la licencia de llamar a $A|B$ suceso, conscientes de que matemáticamente no lo es por no existir un conjunto de referencia para él.

[9] Tomamos el término “cantidad intermedia” de Cerdán (2008). Allí se define como “una incógnita auxiliar cuyo valor se ha determinado”, entendiendo por incógnita auxiliar toda cantidad desconocida cuyo cálculo no se pide expresamente en el enunciado del problema.

Para la determinación de una ruta de resolución podemos recurrir a dos métodos distintos: el primero consiste en aplicar la regla de análisis-síntesis[10] y el segundo, proceder directamente al cálculo de aquellas cantidades que se encuentren en aristas con dos de las cantidades conocidas y reiterar el proceso hasta llegar a la pregunta del problema. Este tipo de aristas que presentan dos vértices oscuros y uno claro reciben el nombre de entradas al grafo (Cerdán y Huerta, 2007; Cerdán, 2008) y son las que permiten comenzar con la resolución.

Tras activar todas las aristas y oscurecer todos los vértices determinados mediante cualquiera de los dos métodos anteriores, en el grafo queda representada la estructura matemática del problema, refiriéndonos tanto a la estructura de datos del enunciado como a la estructura del proceso de resolución, en términos de cantidades y relaciones entre cantidades que lo conforman. Decimos entonces que hemos hecho una lectura analítica del problema, es decir una lectura del problema que es independiente del contexto en el que se formula el enunciado, del valor numérico de las cantidades y del formato de los datos. Por otra parte, el grafo construido nos aporta un plan suficiente para resolver el problema (Cerdán y Huerta, 2007). Si, además, se ha aplicado el método de análisis y síntesis, estonces el plan que representa el grafo no sólo es suficiente sino también mínimo, ya que el grafo contendrá el menor número posible de aristas y vértices, lo que significa que para la resolución del problema se obtendrán el menor número posible de cantidades intermedias y se usarán el menor número posible de relaciones entre cantidades. A un grafo que representa dicho plan mínimo lo denominamos grafo mínimo del problema (Huerta, 2009).

De lo anterior se desprende que el grafo puede usarse como una herramienta para la resolución de problemas. En este trabajo, sin embargo, el grafo no es presentado a los estudiantes como tal, sino que su uso forma parte de la metodología de investigación, siendo un elemento clave de ésta, como ya se avanzó en la introducción. Así, el grafo ha resultado útil para el estudio y la clasificación de los problemas de N_0 según su estructura de datos, ya que permite hacer lecturas analíticas y estudiar isomorfías[11] entre los problemas. Posteriormente, esta clasificación ha sido tenida en cuenta para el diseño de los enunciados de los problemas de los cuestionarios y de la unidad de enseñanza, donde la estructura de datos era una de las variables a considerar. Finalmente, el grafo

[10] La regla del análisis-síntesis ha sido enunciada por Lakatos (1981), citado en Cerdán (2008), de la siguiente manera: "Si x es la incógnita del problema, supóngala conocida. Indague e investigue cuáles son aquellos antecedentes de los cuales x resulta y que permiten determinar x. Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar). Indague e investigue de nuevo, iterando el proceso, hasta que 1) o bien todos los antecedentes sean datos del problema, 2) o bien alguno de los antecedentes entre en contradicción con los datos del problema. En el caso 1), volviendo sobre sus pasos y trabajando hacia atrás, esto es, desde los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última. En el caso 2), abandone el problema: su solución es imposible."

[11] Diremos que dos problemas son isomorfos si dan lugar al mismo grafo mínimo (Cerdán, 2008; Huerta, 2009).

ha servido de base para el desarrollo de un método de análisis de las resoluciones de los estudiantes en los pre-test que facilita la identificación de estrategias de resolución, dificultades y errores. En el capítulo 4 veremos con detalle estos usos del grafo.

3.5.4 – Sobre las cantidades y las relaciones entre cantidades en las situaciones y contextos en los que se formulan los problemas de la investigación.

En Carles (2007) encontramos un análisis fenomenológico completo de la situación test de diagnóstico en tres contextos o ámbitos diferentes (la salud, el control de calidad y el Derecho). Carles identifica dos tipos de fenómenos: aquéllos que pueden interpretarse como sucesos y aquéllos que pueden interpretarse como probabilidades. Los primeros pueden ser organizados mediante conjuntos de referencia, mientras que los segundos expresan una medida o la necesidad de una medida para alguno de estos conjuntos de referencia, asociados a sucesos. Fruto de este análisis fenomenológico, obtiene una tabla en la que describe estos fenómenos (Carles, 2007; pp. 94 y 95).

A continuación, mostramos tablas similares para describir las cantidades involucradas en cada una de las situaciones y contextos de la investigación, teniendo en cuenta sus tres componentes: la componente verbal (asociada a los sucesos), la componente numérica (asociada a las medidas de la incertidumbre de esos sucesos) y la componente formato de datos, que hace referencia a la manera en que se expresa la componente numérica. Mención especial requiere el contexto Diagsalud, para el que se hace constar no sólo la descripción de los sucesos y probabilidades implicadas, sino también la terminología específica (extraída de Carles, 2007) que se usa en el ámbito sanitario para hablar de estos fenómenos.

Además, acompañamos estas tablas de los grafos que representan la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades en cada uno de los contextos, sin referirse a un problema concreto sino a todo el mundo de problemas que pueden enunciarse en cada situación y contexto. Se ha optado por denotar de manera genérica, con las letras A y B, a los dos sucesos básicos que intervienen en todo PTPC, sea cual sea el contexto en el que se formule el enunciado. Sin embargo, ésta es sólo su notación en lenguaje matemático y responde a un principio de practicidad. En cada situación y contexto, los sucesos así denotados (y todos los que se pueden formar a partir de ellos por complementariedad o mediante la intersección de sucesos) tienen un significado concreto que puede expresarse verbalmente de diferentes maneras. Todas estas formas equivalentes de describir los referentes de las cantidades involucradas en un problema forman parte del ya mencionado diccionario de cantidades. Como afirma Cerdán (2008), este diccionario está sujeto a un proceso de evolución y renovación permanente, pues no sólo recoge las expresiones usadas en los enunciados y las que podrían formularse como fruto de un estudio teórico, sino también todas las aportadas por los diferentes resolutores del problema (por ejemplo, cuando el problema es usado en el marco de una investigación de corte experimental que involucre al resolutor). Las expresiones que usamos en las tablas para describir los diferentes sucesos han sido formuladas por los investigadores tratando de que fueran gramaticalmente correctas y no presentaran ambigüedades.

CONTEXTO ESTSOCIAL				
Sucesos		Probabilidades		Formato
A	Ser chica	$P(A)$	Probabilidad de ser chica	Frecuencias naturales, porcentajes o probabilidades
$\overline{A}$	Ser chico	$P(\overline{A})$	Probabilidad de ser chico	
B	Llevar gafas	$P(B)$	Probabilidad de llevar gafas	
$\overline{B}$	No llevar gafas	$P(\overline{B})$	Probabilidad de no llevar gafas	
$A \cap B$	Ser chica y llevar gafas	$P(A \cap B)$	Probabilidad de ser chica y llevar gafas	
$\overline{A} \cap B$	Ser chico y llevar gafas	$P(\overline{A} \cap B)$	Probabilidad de ser chico y llevar gafas	
$A \cap \overline{B}$	Ser chica y no llevar gafas	$P(A \cap \overline{B})$	Probabilidad de ser chica y no llevar gafas	
$\overline{A} \cap \overline{B}$	Ser chico y no llevar gafas	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	Probabilidad de ser chico y no llevar gafas	
$A \mid B$	Ser chica, entre los que llevan gafas	$P(A \mid B)$	Probabilidad de ser chica, entre los que llevan gafas	Necesariamente en porcentajes o probabilidades.
$\overline{A} \mid B$	Ser chico, entre los que llevan gafas	$P(\overline{A} \mid B)$	Probabilidad de ser chico, entre los que llevan gafas	
$A \mid \overline{B}$	Ser chica, entre los que no llevan gafas	$P(A \mid \overline{B})$	Probabilidad de ser chica, entre los que no llevan gafas	
$\overline{A} \mid \overline{B}$	Ser chico, entre los que no llevan gafas	$P(\overline{A} \mid \overline{B})$	Probabilidad de ser chico, entre los que no llevan gafas	
$B \mid A$	Llevar gafas, entre las chicas	$P(B \mid A)$	Probabiliad de llevar gafas, entre las chicas	
$\overline{B} \mid A$	No llevar gafas, entre las chicas	$P(\overline{B} \mid A)$	Probabilidad de no llevar gafas, entre las chicas	
$B \mid \overline{A}$	Llevar gafas, entre los chicos	$P(B \mid \overline{A})$	Probabilidad de llevar gafas, entre los chicos	
$\overline{B} \mid \overline{A}$	No llevar gafas, entre los chicos	$P(\overline{B} \mid \overline{A})$	Probabilidad de no llevar gafas, entre los chicos	

Tabla 3.5. Cantidades en el contexto Estsocial. Un ejemplo.

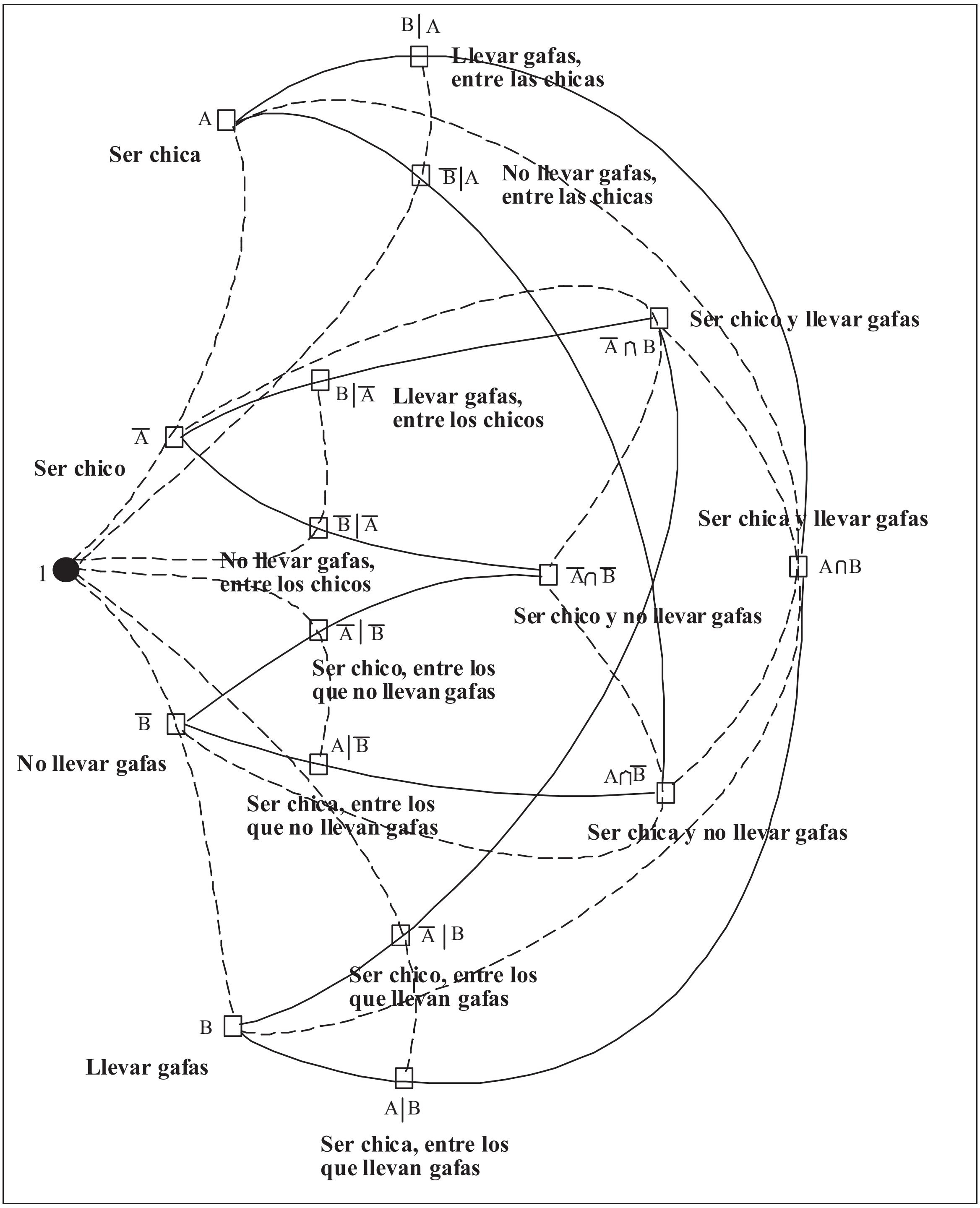


Figura 3.2. Grafo del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional en el contexto Estsocial. Un ejemplo.

CONTEXTO ESTSALUD				
Sucesos		Probabilidades		Formato
A	Tratarse con el antibiótico	$P(A)$	Probabilidad de tratarse con el antibiótico	Frecuencias naturales, porcentajes o probabilidades
$\overline{A}$	No tratarse con el antibiótico	$P(\overline{A})$	Probabilidad de no tratarse con el antibiótico	
B	Curarse	$P(B)$	Probabilidad de curarse	
$\overline{B}$	No curarse	$P(\overline{B})$	Probabilidad de no curarse	
$A \cap B$	Tratarse con el antibiótico y curarse	$P(A \cap B)$	Probabilidad de tratarse con el antibiótico y curarse	
$\overline{A} \cap B$	No tratarse con el antiabiótico y curarse	$P(\overline{A} \cap B)$	Probabilidad de no tratarse con el antiabiótico y curarse	
$A \cap \overline{B}$	Tratarse con el antibiótico y no curarse	$P(A \cap \overline{B})$	Probabilidad de tratarse con el antibiótico y no curarse	
$\overline{A} \cap \overline{B}$	No tratarse con el antibiótico y no curarse	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	Probabilidad de no tratarse con el antibiótico y no curarse	
$A \mid B$	Haber sido tratado con el antibiótico, habiéndose curado	$P(A \mid B)$	Probabilidad de haber sido tratado con el antibiótico, habiéndose curado	Necesariamente en porcentajes o probabilidades.
$\overline{A} \mid B$	No haber sido tratado con el antibiótico, habiéndose curado	$P(\overline{A} \mid B)$	Probabilidad de no haber sido tratado con el antibiótico, habiéndose curado	
$A \mid \overline{B}$	Haber sido tratado con el antibiótico, no habiéndose curado	$P(A \mid \overline{B})$	Probabilidad de haber sido tratado con el antibiótico, no habiéndose curado	
$\overline{A} \mid \overline{B}$	No haber sido tratado con el antibiótico, no habiéndose curado	$P(\overline{A} \mid \overline{B})$	Probabilidad de no haber sido tratado con el antibiótico, no habiéndose curado	
$B \mid A$	Curarse, habiendo sido tratado con el antibiótico	$P(B \mid A)$	Probabilidad de curarse, habiendo sido tratado con el antibiótico	
$\overline{B} \mid A$	No curarse, habiendo sido tratado con el antibiótico	$P(\overline{B} \mid A)$	Probabilidad de no curarse, habiendo sido tratado con el antibiótico	
$B \mid \overline{A}$	Curarse, no habiendo sido tratado con el antibiótico	$P(B \mid \overline{A})$	Probabilidad de curarse, no habiendo sido tratado con el antibiótico	
$\overline{B} \mid \overline{A}$	No curarse, no habiendo sido tratado con el antibiótico	$P(\overline{B} \mid \overline{A})$	Probabilidad de no curarse, no habiendo sido tratado con el antibiótico	

Tabla 3.6. Cantidades en el contexto Estsalud. Un ejemplo.

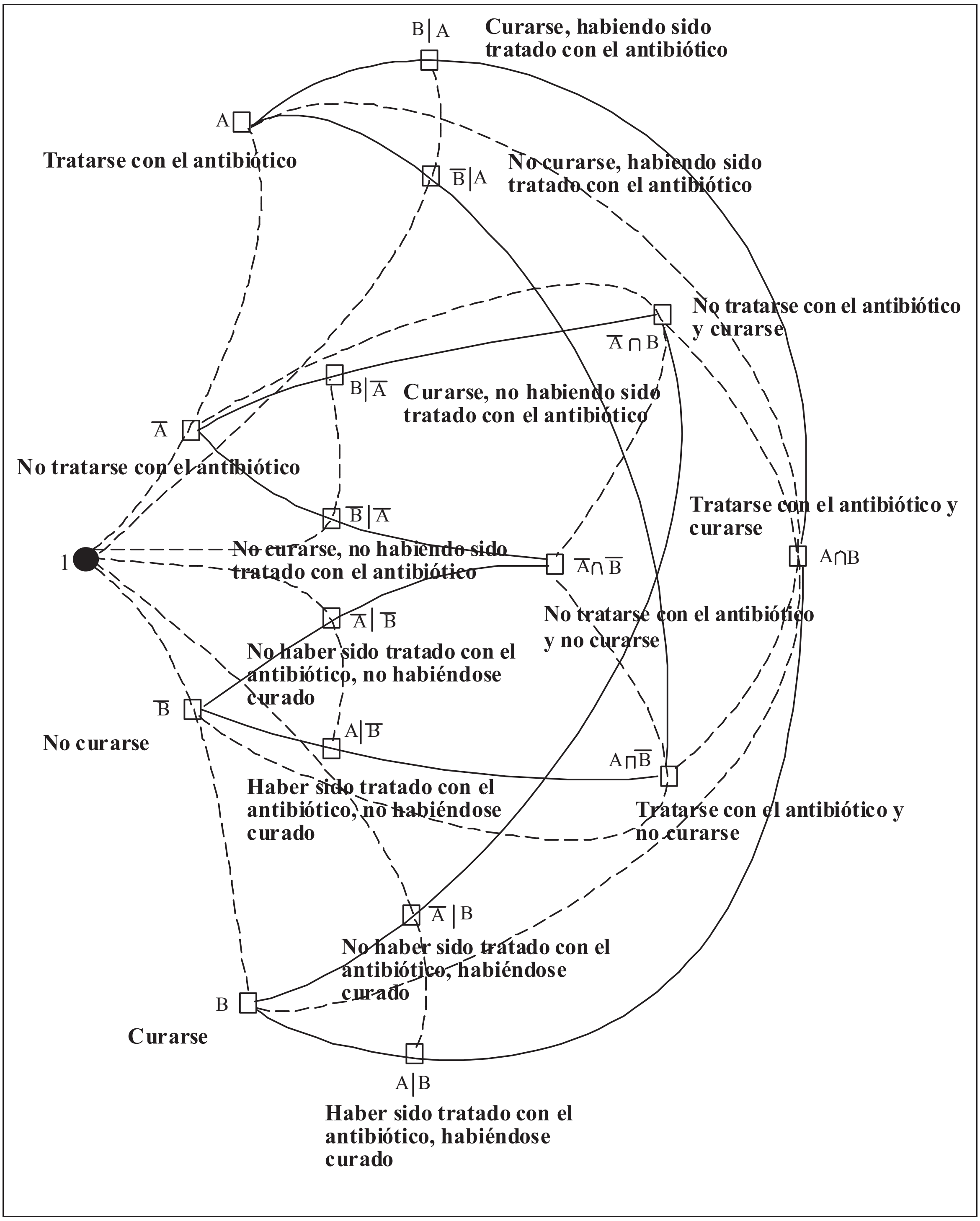


Figura 3.3. Grafo del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional en el contexto Estsalud. Un ejemplo.

<table>
<tr><th colspan="5">CONTEXTO DIAGSALUD</th></tr>
<tr><th colspan="2">Sucesos</th><th colspan="2">Probabilidades</th><th>Formato</th></tr>
<tr><td>A</td><td>Estar enfermo</td><td>$P(A)$</td><td>Probabilidad de estar enfermo (prevalencia de la enfermedad)</td><td rowspan="8">Frecuencias naturales, porcentajes o probabilidades</td></tr>
<tr><td>$\overline{A}$</td><td>No estar enfermo</td><td>$P(\overline{A})$</td><td>Probabilidad de no estar enfermo</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Dar positivo en el test</td><td>$P(B)$</td><td>Probabilidad de dar positivo en el test</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}$</td><td>Dar negativo en el test</td><td>$P(\overline{B})$</td><td>Probabilidad de dar negativo en el test</td></tr>
<tr><td>$A \cap B$</td><td>Estar enfermo y dar positivo en el test</td><td>$P(A \cap B)$</td><td>Probabilidad de estar enfermo y dar positivo en el test</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap B$</td><td>No estar enfermo y dar positivo en el test</td><td>$P(\overline{A} \cap B)$</td><td>Probabilidad de no estar enfermo y dar positivo en el test</td></tr>
<tr><td>$A \cap \overline{B}$</td><td>Estar enfermo y dar negativo en el test</td><td>$P(A \cap \overline{B})$</td><td>Probabilidad de estar enfermo y dar negativo en el test</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap \overline{B}$</td><td>No estar enfermo y dar negativo en el test</td><td>$P(\overline{A} \cap \overline{B})$</td><td>Probabilidad de no estar enfermo y dar negativo en el test</td></tr>
<tr><td>$A \mid B$</td><td>Estar enfermo, habiendo obtenido un resultado positivo en el test</td><td>$P(A \mid B)$</td><td>Probabilidad de estar enfermo, habiendo obtenido un resultado positivo en el test (Valor predictivo del positivo)</td><td rowspan="8">Necesariamente en porcentajes o probabilidades.</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \mid B$</td><td>No estar enfermo, habiendo obtenido un resultado positivo en el test</td><td>$P(\overline{A} \mid B)$</td><td>Probabilidad de no estar enfermo, habiendo obtenido un resultado positivo en el test (Falso positivo)</td></tr>
<tr><td>$A \mid \overline{B}$</td><td>Estar enfermo, habiendo obtenido un resultado negativo en el test</td><td>$P(A \mid \overline{B})$</td><td>Probabilidad de estar enfermo, habiendo obtenido un resultado negativo en el test (Falso negativo)</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \mid \overline{B}$</td><td>No estar enfermo, habiendo obtenido un resultado negativo en el test</td><td>$P(\overline{A} \mid \overline{B})$</td><td>Probabilidad de no estar enfermo, habiendo obtenido un resultado negativo en el test (Valor predictivo del negativo)</td></tr>
<tr><td>$B \mid A$</td><td>Obtener un resultado positivo en el test, estando enfermo</td><td>$P(B \mid A)$</td><td>Probabilidad de obtener un resultado positivo en el test, estando enfermo (Sensibilidad del test)</td></tr>
<tr><td>$\overline{B} \mid A$</td><td>Obtener un resultado negativo en el test, estando enfermo</td><td>$P(\overline{B} \mid A)$</td><td>Probabilidad de obtener un resultado negativo en el test, estando enfermo (Coeficiente falso negativo)</td></tr>
<tr><td>$B \mid \overline{A}$</td><td>Obtener un resultado positivo en el test, no estando enfermo</td><td>$P(B \mid \overline{A})$</td><td>Probabilidad de obtener un resultado positivo en el test, no estando enfermo (Coeficiente falso positivo)</td></tr>
<tr><td>$\overline{B} \mid \overline{A}$</td><td>Obtener un resultado negativo en el test, no estando enfermo</td><td>$P(\overline{B} \mid \overline{A})$</td><td>Probabilidad de obtener un resultado negativo en el test, no estando enfermo (Especificidad del test)</td></tr>
</table>

Tabla 3.7. Cantidades en el contexto Diagsalud. Un ejemplo.

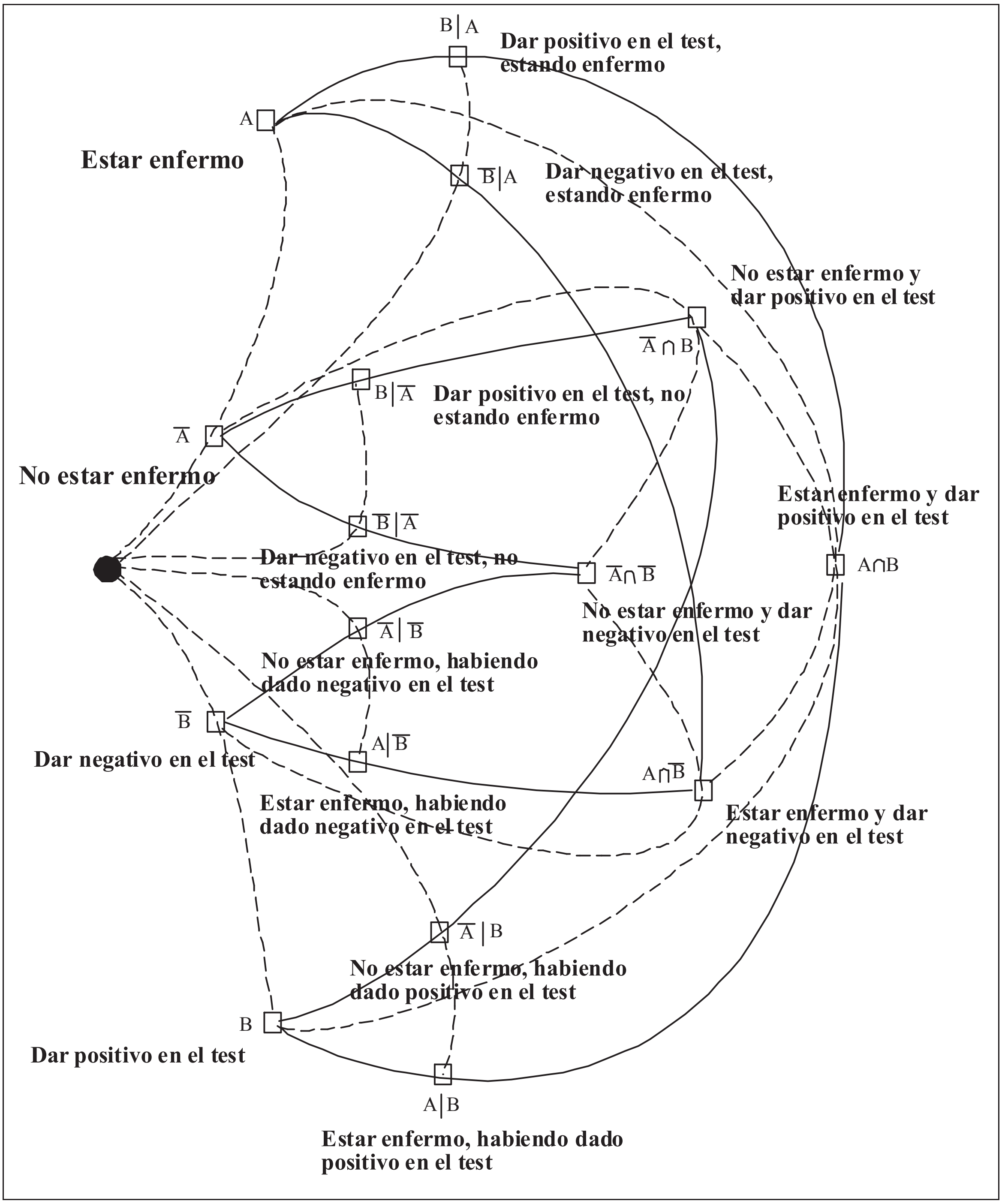


Figura 3.4. Grafo del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional en el contexto Diagsalud. Un ejemplo.

<table>
<tr><th colspan="5">CONTEXTO DIAGCALIDAD</th></tr>
<tr><th colspan="2">Sucesos</th><th colspan="2">Probabilidades</th><th>Formato</th></tr>
<tr><td>A</td><td>Ser una pieza correcta</td><td>$P(A)$</td><td>Probabilidad de ser una pieza correcta</td><td rowspan="8">Frecuencias naturales, porcentajes o probabilidades</td></tr>
<tr><td>$\overline{A}$</td><td>Ser una pieza defectuosa</td><td>$P(\overline{A})$</td><td>Probabilidad de ser una pieza defectuosa</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Ser calificada de correcta por el test</td><td>$P(B)$</td><td>Probabilidad de ser calificada de correcta por el test</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}$</td><td>Ser calificada de defectuosa por el test</td><td>$P(\overline{B})$</td><td>Probabilidad de ser calificada de defectuosa por el test</td></tr>
<tr><td>$A \cap B$</td><td>Ser una pieza correcta y ser calificada de correcta por el test</td><td>$P(A \cap B)$</td><td>Probabilidad de ser una pieza correcta y ser calificada de correcta por el test</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap B$</td><td>Ser una pieza defectuosa y ser calificada de correcta por el test</td><td>$P(\overline{A} \cap B)$</td><td>Probabilidad de ser una pieza defectuosa y ser calificada de correcta por el test</td></tr>
<tr><td>$A \cap \overline{B}$</td><td>Ser una pieza correcta y ser calificada de defectuosa por el test</td><td>$P(A \cap \overline{B})$</td><td>Probabilidad de ser una pieza correcta y ser calificada de defectuosa por el test</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap \overline{B}$</td><td>Ser una pieza defectuosa y ser calificada de defectuosa por el test</td><td>$P(\overline{A} \cap \overline{B})$</td><td>Probabilidad de ser una pieza defectuosa y ser calificada de defectuosa por el test</td></tr>
<tr><td>$A \mid B$</td><td>Ser una pieza correcta, habiendo sido calificada de correcta</td><td>$P(A \mid B)$</td><td>Probabilidad de ser una pieza correcta, habiendo sido calificada de correcta</td><td rowspan="8">Necesariamente en porcentajes o probabilidades.</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \mid B$</td><td>Ser una pieza defectuosa, habiendo sido calificada de correcta</td><td>$P(\overline{A} \mid B)$</td><td>Probabilidad de ser una pieza defectuosa, habiendo sido calificada de correcta</td></tr>
<tr><td>$A \mid \overline{B}$</td><td>Ser una pieza correcta, habiendo sido calificada de defectuosa</td><td>$P(A \mid \overline{B})$</td><td>Probabilidad de ser una pieza correcta, habiendo sido calificada de defectuosa</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \mid \overline{B}$</td><td>Ser una pieza defectuosa, habiendo sido calificada de defectuosa</td><td>$P(\overline{A} \mid \overline{B})$</td><td>Probabilidad de ser una pieza defectuosa, habiendo sido calificada de defectuosa</td></tr>
<tr><td>$B \mid A$</td><td>Ser calificada de correcta, siendo una pieza correcta</td><td>$P(B \mid A)$</td><td>Probabilidad de ser calificada de correcta, siendo una pieza correcta</td></tr>
<tr><td>$\overline{B} \mid A$</td><td>Ser calificada de defectuosa, siendo una pieza correcta</td><td>$P(\overline{B} \mid A)$</td><td>Probabilidad de ser calificada de defectuosa, siendo una pieza correcta</td></tr>
<tr><td>$B \mid \overline{A}$</td><td>Ser calificada de correcta, siendo una pieza defectuosa</td><td>$P(B \mid \overline{A})$</td><td>Probabilidad de ser calificada de correcta, siendo una pieza defectuosa</td></tr>
<tr><td>$\overline{B} \mid \overline{A}$</td><td>Ser calificada de defectuosa, siendo una pieza defectuosa</td><td>$P(\overline{B} \mid \overline{A})$</td><td>Probabilidad de ser calificada de defectuosa, siendo una pieza defectuosa</td></tr>
</table>

Tabla 3.8. Cantidades en el contexto Diagcalidad. Un ejemplo.

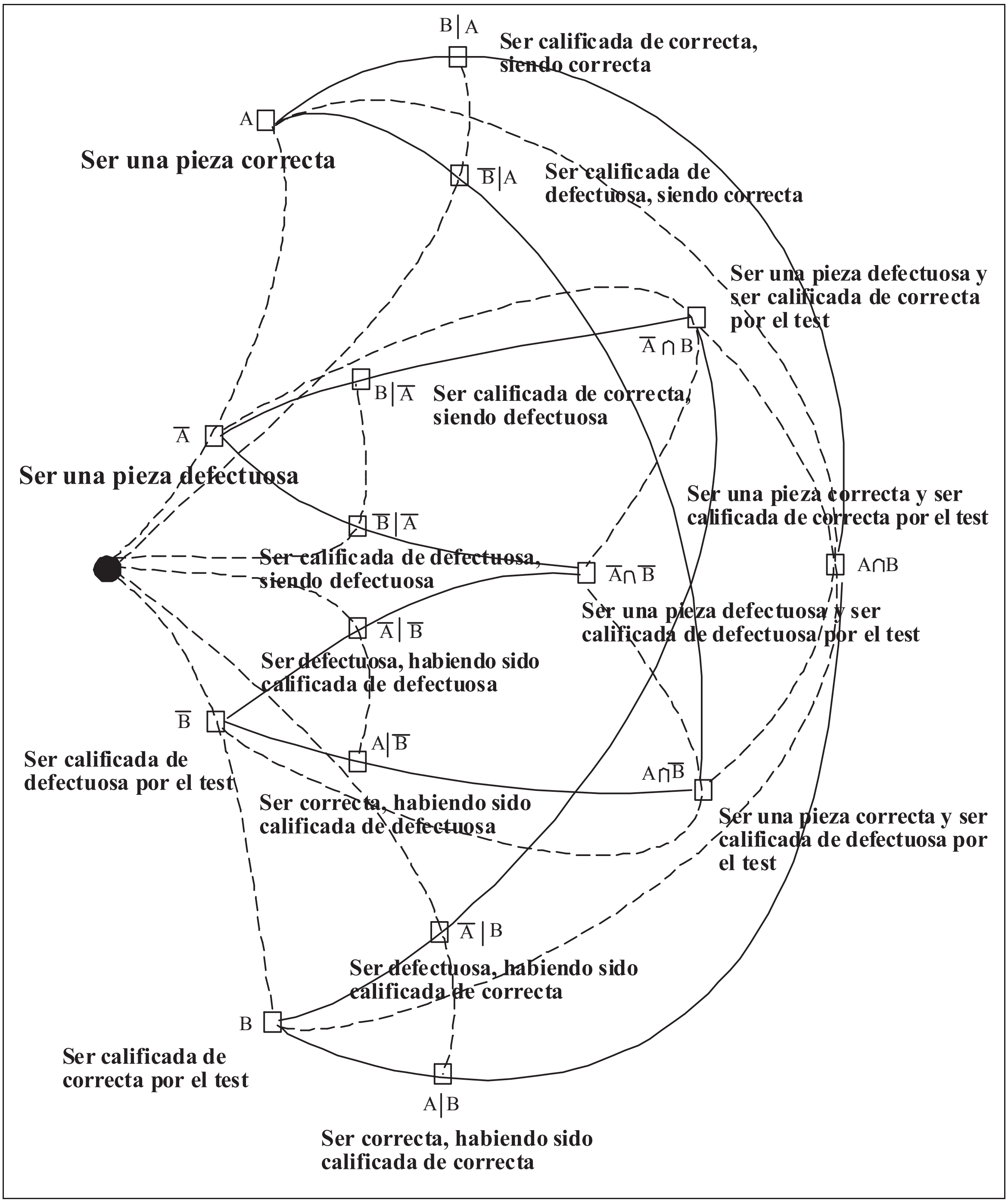


Figura 3.5. Grafo del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional en el contexto Diagcalidad. Un ejemplo.

3.6 – HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS: ÁRBOLES Y TABLAS DE CONTINGENCIA EN LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL.

3.6.1 – Sistemas de representación en los problemas de probabilidad.

En la resolución de problemas de probabilidad condicional suelen ponerse en juego diferentes registros de representación (lenguaje verbal, escritura simbólica, árboles, tablas, etc.), que están dotados de reglas de funcionamiento propias y que interaccionan entre sí a través de determinadas reglas de conversión (Dupuis y Rousset-Bert, 1996). Estos sistemas de representación desempeñan diferentes funciones en la resolución de un problema. Para Ojeda (1996) constituyen un medio no sólo para organizar las ideas, sino también para coordinarlas y para activar y estructurar el proceso de razonamiento. Por otra parte, Corter y Zahner (2007) identifican dos tipos de uso de los sistemas de representación: a) para la comprensión del problema, su formulación matemática o el diseño de un plan para la resolución y b) para el cálculo efectivo del resultado.

En este apartado nos ocuparemos de los dos sistemas de representación que juegan un papel más relevante en nuestra investigación: las tablas de contingencia y los diagramas en árbol, cuyo uso ha sido ampliamente estudiado y recomendado en la resolución de problemas de probabilidad (Parzysz, 1990; Rossman y Short, 1995; Dupuis y Rousset-Bert, 1996; Ojeda, 1996; Tomlison y Quinn, 1997; Ávila, 2001; Sedlmeier, 2002). Estas herramientas (tablas y árboles) poseen las dos funciones descritas por Corter y Zahnner: por un lado son útiles como medios de organización de la información contenida en el enunciado del problema y, por otro lado, proporcionan también un método para la resolución del problema, puesto que están dotadas de reglas de cálculo internas. Pueden ser calificadas, además, de herramientas heurísticas, en el sentido que le da Puig (1996) a este término: procedimientos independientes del contenido del problema que lo transforman en otro, de manera que la solución encontrada para este último es trasladable al problema original.

Veamos a continuación la estructura interna y las reglas de funcionamiento de estas dos herramientas.

3.6.2 – Tablas de contingencia 2x2.

Una tabla de contingencia 2x2 para los sucesos A y B es una tabla de doble entrada con la siguiente estructura:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Tabla 3.9. Tabla de contingencia 2x2 para datos formulados como probabilidades.

En la primera fila y en la primera columna se representan los sucesos básicos A y B, y sus complementarios. En las celdas centrales se escriben las cuatro probabilidades de la intersección. En los márgenes, es decir, en las últimas celdas de la segunda y la tercera columna y de la segunda y la tercera fila, aparecen las cuatro probabilidades marginales. Finalmente, en la celda donde se intersectan la última fila y la última columna se escribe 1, que es la probabilidad del espacio muestral.

Las relaciones ternarias que se establecen entre estas probabilidades son dos relaciones de complementariedad a uno y cuatro relaciones de aditividad:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$P(B) + P(\overline{B}) = 1$$

$$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$$

$$P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})$$

$$P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B})$$

En la práctica no se requiere hacer explícitas estas relaciones, ya que se resumen en una norma: las celdas de los márgenes (las marginales y la probabilidad del espacio muestral) siempre se obtienen sumando los valores de las dos celdas numéricas que tienen por encima en su misma columna o por delante en su misma fila. Cuando lo que se pretende obtener es una intersección, habrá que recurrir a la operación inversa, esto es, la resta.

Por otra parte, se comprueba que la tabla de contingencia que hemos representado no contiene probabilidades condicionales. Para obtenerlas, es necesario establecer razones entre las celdas adecuadas: $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$. Y si tenemos una probabilidad condicional como dato conocido, ésta, actuando sobre una marginal, permite "entrar" en la tabla, en forma de intersección: P(A|B) · P(B) = P(A∩B).

No obstante, es posible incorporar a la tabla las cuatro probabilidades condicionales así halladas, obteniendo la siguiente tabla ampliada (Tabla 3.10), adaptada de la que aparece en Yáñez (2001).

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">$\overline{A}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td colspan="2">$\mathrm{P}(A \cap B)$</td><td colspan="2">$\mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$</td><td>$\mathrm{P}(B)$</td><td>$\mathrm{P}(A \mid B)$</td><td>$\mathrm{P}(\overline{A} \mid B)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}$</td><td colspan="2">$\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$</td><td colspan="2">$\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$</td><td>$\mathrm{P}(\overline{B})$</td><td>$\mathrm{P}(A \mid \overline{B})$</td><td>$\mathrm{P}(\overline{A} \mid \overline{B})$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$\mathrm{P}(A)$</td><td colspan="2">$\mathrm{P}(\overline{A})$</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\mathrm{P}(B \mid A)$</td><td>$\mathrm{P}(\overline{B} \mid A)$</td><td>$\mathrm{P}(B \mid \overline{A})$</td><td>$\mathrm{P}(\overline{B} \mid \overline{A})$</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 3.10. Tabla 2x2 ampliada, adaptada de la que aparece en Yáñez (2001)

Por último, debemos recordar que también podemos hacer uso de las tablas de contingencia cuando los datos no vienen expresados en forma de probabilidades, sino en forma de frecuencias o porcentajes.

Cuando los datos vienen dados en forma de frecuencias, las probabilidades son sustituidas por los cardinales de los conjuntos de referencia de los sucesos, como se aprecia en la Tabla 3.11.

	A	$\overline{A}$	
B	$\mathrm{n}(A \cap B)$	$\mathrm{n}(\overline{A} \cap B)$	$\mathrm{n}(B)$
$\overline{B}$	$\mathrm{n}(A \cap \overline{B})$	$\mathrm{n}(\overline{A} \cap \overline{B})$	$\mathrm{n}(\overline{B})$
	$\mathrm{n}(A)$	$\mathrm{n}(\overline{A})$	N

Tabla 3.11. Tabla 2x2 para datos formulados como frecuencias absolutas.

Las relaciones ternarias que se establecen entre las frecuencias son las mostradas en la Tabla 3.4 del apartado anterior y son análogas a las que se dan cuando los datos vienen expresados en forma de probabilidades (basta sustituir las probabilidades marginales y de la intersección por las frecuencias naturales de los conjuntos de referencia de los sucesos marginales y de la intersección, y la probabilidad total, 1, por el tamaño muestral, N). Las enumeramos aquí a modo de recordatorio:

$\mathrm{n}(A) + \mathrm{n}(\overline{A}) = \mathrm{N}$

$\mathrm{n}(B) + \mathrm{n}(\overline{B}) = \mathrm{N}$

$\mathrm{n}(A \cap B) + \mathrm{n}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{n}(A)$

$\mathrm{n}(\overline{A} \cap B) + \mathrm{n}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathrm{n}(\overline{A})$

$\text{n}(A \cap B) + \text{n}(\overline{A} \cap B) = \text{n}(B)$

$\text{n}(A \cap \overline{B}) + \text{n}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \text{n}(\overline{B})$

En este caso, las condicionales se obtienen como frecuencias condicionales, es decir, a partir de cocientes del tipo $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$, como ya habíamos comentado.

Finalmente, si los datos vienen expresados en forma de porcentajes, basta hacer una traducción a probabilidades (hallando el tanto por uno) o a frecuencias, tomando N=100.

3.6.3 – Diagramas en árbol.

Un diagrama en árbol es una herramienta gráfica que consta de nodos, en los que se representan sucesos, y ramas, sobre las que se representan probabilidades. También puede verse como tránsitos entre “estados” representados por dos sucesos. En este caso, las probabilidades son probabilidades de transición de un estado a otro (Pluvinage, 2005).

Para el caso de los PTPC, que involucran únicamente a dos sucesos básicos *A* y *B*, es posible construir dos diagramas en árbol, según se considere la división del espacio muestral entre los sucesos complementarios A y $\overline{A}$ o entre los dos sucesos complementarios B y $\overline{B}$. Sobre las dos primeras ramas aparecen probabilidades marginales, mientras que sobre las siguientes ramas aparecen probabilidades condicionales. La Figura 3.6 muestra los dos diagramas en árbol.

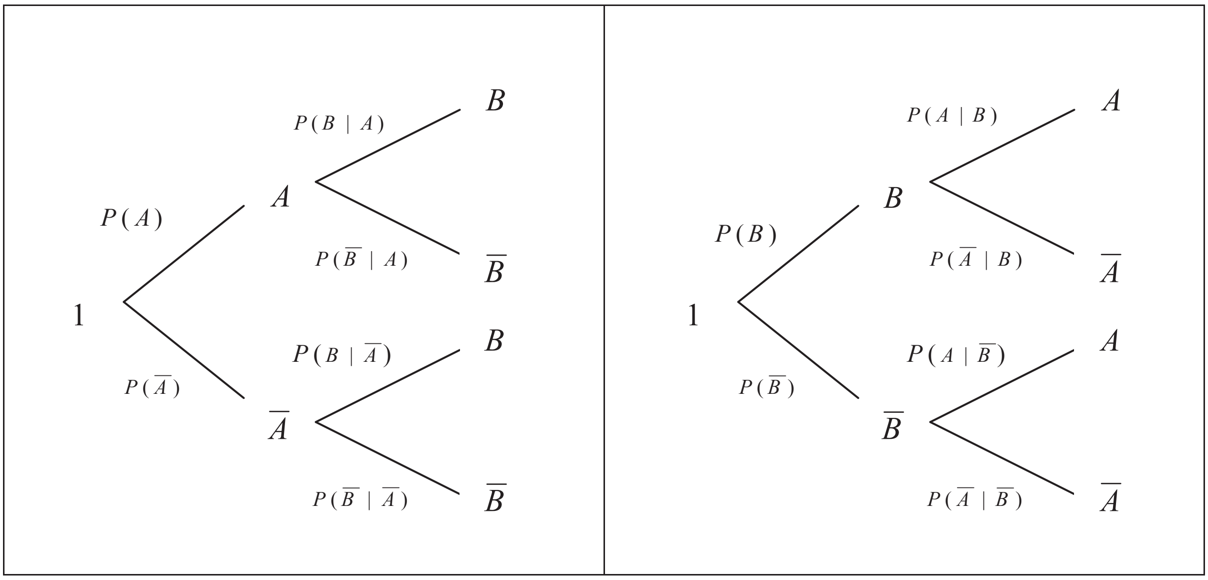


Figura 3.6. Diagramas en árbol para los sucesos A y B.

En los árboles se opera con las reglas del producto (relaciones multiplicativas) y las reglas de la suma (relaciones aditivas y de complementariedad a 1), como aparece descrito en Engel (1975).

Las reglas del producto consisten en multiplicar las probabilidades de las dos ramas de un camino y son del tipo: $P(A) \cdot P(B|A) = P(A \cap B)$. Así se obtienen las probabilidades de la intersección que no están representadas en el árbol.

Las reglas de la suma son de dos clases:

- Las que consisten en sumar las probabilidades de las dos ramas que parten de un mismo nodo (relaciones de complementariedad), que son de la forma:

(1) $1 = P(A) + P(\overline{A})$; $1 = P(B|A) + P(\overline{B}|A)$

- Y las que representan el Teorema de la Probabilidad Total, cuya estructura es la siguiente:

(2) $P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B)$

Por otra parte, ambos árboles están relacionados a partir de la igualdad:

(3) $P(A) \cdot P(B|A) = P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

En efecto, el hecho de que la intersección de sucesos presente la propiedad conmutativa hace que sea posible transferir probabilidades de un árbol a otro. Así, algunos problemas de probabilidad condicional no son resolubles mediante el uso de un único árbol, pero sí pueden resolverse usando ambos árboles en combinación. De hecho, existen otras versiones del diagrama en árbol en las que los dos árboles anteriores (Figura 3.6) ya aparecen totalmente o parcialmente combinados. Por ejemplo, los árboles bidireccionales que se muestran en la Figura 3.7 (Tomlison and Quinn, 1997) contienen todas las probabilidades implicadas en el problema.

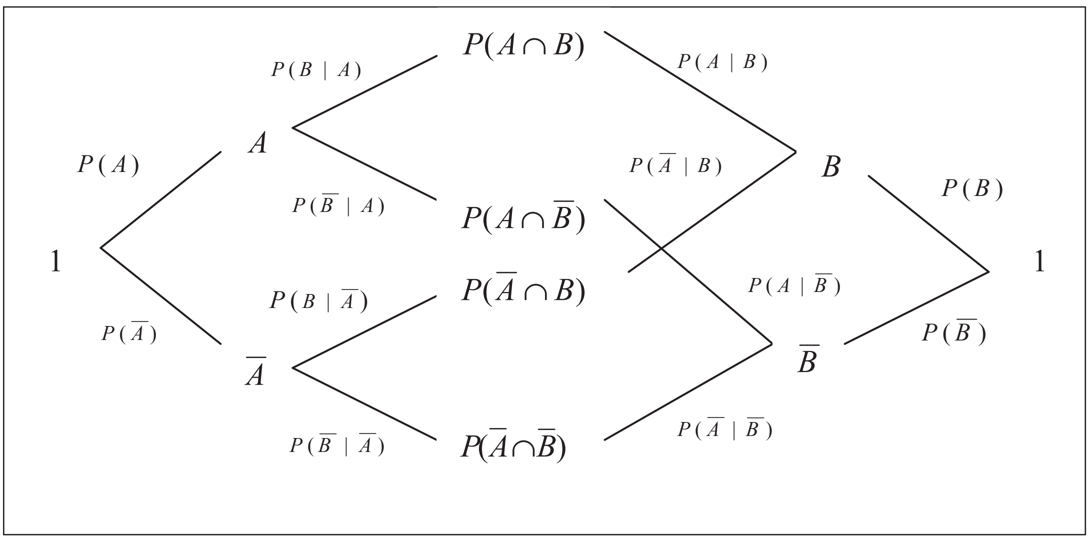


Figura 3.7. Árbol bidireccional, tomado de Tomlison and Quinn (1997)

Otro diagrama posible, no tan completo como el árbol bidireccional, es el que mostramos en la Figura 3.8, de Yáñez (2001). Se trata del primero de los árboles de la Figura 3.6 al que se han incorporado las probabilidades de la intersección y las probabilidades marginales $P(B)$ y $P(\overline{B})$, obtenidas a partir de la expresión (2).

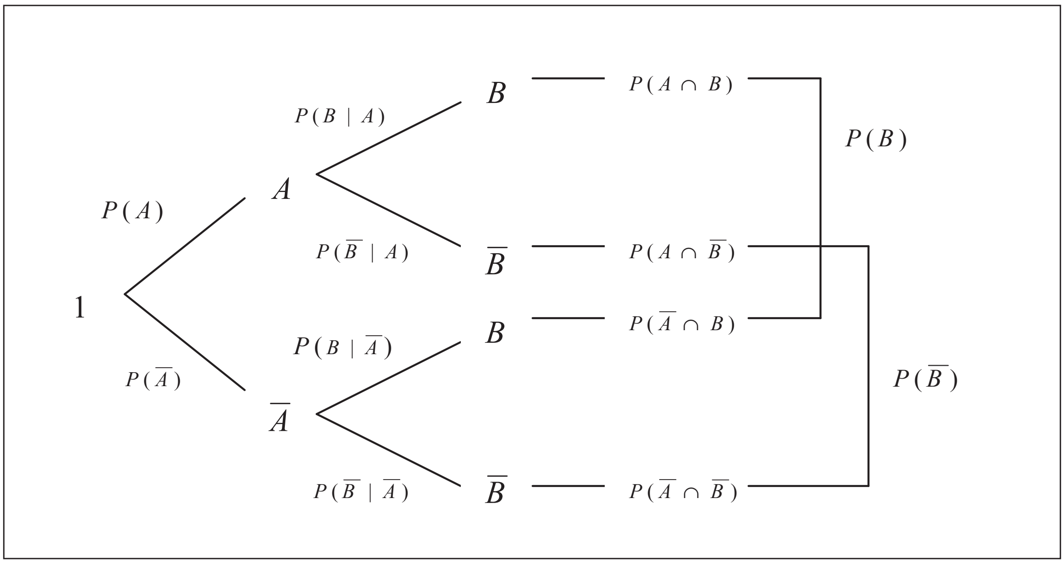


Figura 3.8. Árbol ampliado, tomado de Yáñez (2001)

Por otra parte, cuando los datos vienen enunciados en frecuencias absolutas se puede recurrir a los árboles de frecuencias (Gigerenzer y Hoffrage, 1995; Sedlmeier, 2002), cuya aspecto es similar al árbol de probabilidades, pero cuya estructura interna es diferente (Figura 3.9). En este tipo de árboles, las frecuencias no se suelen escribir sobre las ramas, sino bajo los nodos que representan a los sucesos. Además, cada uno de los árboles que se puede construir contiene dos frecuencias asociadas a marginales y cuatro asociadas a las intersecciones. Las condicionales no tienen cabida en los árboles de frecuencias, en coherencia con lo expresado anteriormente sobre la imposibilidad de expresar una condicional en forma de frecuencia natural.

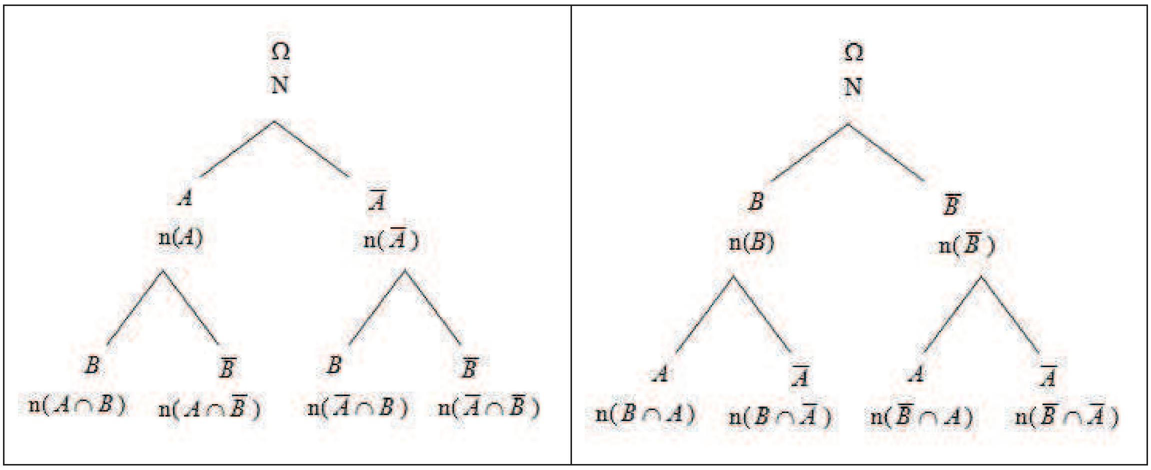


Figura 3.9. Árboles de frecuencias.

Las reglas de cálculo en un árbol de frecuencias son del siguiente tipo:

$N = n(A) + n(\overline{A})$

$n(A) = n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B})$

Al no contener condicionales, el árbol de frecuencias carece de la regla del producto, que sí encontramos en el árbol de probabilidades.

Pero ambos tipos de árbol no sólo se diferencian en su estructura, sino también en lo que representan y en el uso que se hace de ellos. Los árboles de probabilidad representan una experiencia aleatoria compuesta de dos pruebas y son usados para resolver el problema en términos de probabilidades. En cambio, el árbol de frecuencias se utiliza para realizar un análisis de los sucesos involucrados en el problema y las relaciones que se dan entre ellos, así como para representar la forma en que se distribuyen las frecuencias. La resolución del problema que se deriva del uso del árbol de frecuencias suele ser de tipo aritmético, es decir, basada en operaciones con frecuencias y si se responde con una probabilidad, ésta se obtiene por asignación, es decir, como razón de frecuencias y no por cálculo, es decir, como resultado de una operación que involucra a otras probabilidades[12].

Por último, si los datos vienen expresados en porcentajes puede usarse el árbol de probabilidades o bien hacer una traducción a frecuencias naturales, como ya se ha señalado en anteriores ocasiones.

3.6.4 – Sobre la efectividad de la tabla 2x2 frente al árbol para la resolución de problemas de nivel N_0.

Parte importante del éxito en la resolución de los problemas de probabilidad radica en saber seleccionar la representación adecuada, lo cual también debe tenerse en cuenta en la enseñanza (Ávila, 2001).

Dado un problema, Dupuis y Rousset-Bert (1996) hablan de representaciones congruentes o no congruentes con dicho problema, en función de la facilidad o dificultad que entraña la conversión entre sus respectivos registros (el registro usado para expresar la información del enunciado y el registro propio del medio de representación escogido).

Por otra parte, en Yánez (2001) y en Lonjedo (2007) encontramos una discusión teórica sobre la adecuación de las tablas de contingencia y los diagramas en árbol (usadas por separado o en combinación) para la resolución de los problemas ternarios,

[12] Aunque no hemos analizado cuantitativamente esta asociación entre el uso de uno u otro árbol y el enfoque (probabilista o aritmético) que se da a la resolución del problema, la observación de las resoluciones de los estudiantes en investigaciones previas (Lonjedo, 2007) y en esta misma investigación nos permite tomarla como una hipótesis razonable.

atendiendo al número de probabilidades marginales, de la intersección y condicionales conocidas. En Cerdán y Huerta (2007) también se hace un análisis del potencial de los árboles y las tablas de contingencia para la resolución de los problemas ternarios de probabilidad condicional mediante la representación en sendos grafos (subgrafos del GPPC) de las probabilidades y las relaciones entre probabilidades que están disponibles en estos sistemas de representación.

Si nos centramos en los problemas donde no se dan condicionales como datos conocidos (problemas de nivel N_0), que son los que nos ocupan, hay un amplio consenso (Dupuis y Rousset-Bert, 1996; Yáñez, 2001; Lonjedo, 2007) en que la tabla es más eficiente que el árbol de probabilidad básico representado en la Figura 3.6. En efecto, los árboles de probabilidad no resultan eficientes, ya que no hay ningún dato conocido que sea una probabilidad condicional y las probabilidades de la intersección no están "visibles" en el árbol, sino que han de ser calculadas. En cambio, la tabla de contingencia es suficiente para representar toda la información contenida en el enunciado, así como para calcular todas las probabilidades marginales y todas las probabilidades de la intersección involucradas en el problema. Para el cálculo de la probabilidad condicional, basta con establecer una razón entre las celdas adecuadas, como ya se ha visto anteriormente.

El hecho de que la tabla sea congruente (usando la terminología de Dupuis y Rousset-Bert) con los problemas de nivel N_0, hace que en los libros de texto de secundaria sea habitual encontrar problemas de este tipo en los que la información del enunciado aparece directamente en una tabla.

Un ejemplo lo encontramos en el problema de la Figura 3.10, extraído de Llácer (2010).

15. Utiliza la tabla de contingencia del ejemplo:

Variables		Sexo		
		Hombre	Mujer	Marginal
Fuma	Sí	85	80	165
	No	53	69	122
	Marginal	138	149	287

a) Indica la probabilidad de encontrar un hombre que no fume.

b) ¿Qué porcentaje de fumadores hay en esa muestra?

Figura 3.10

Problemas como éste están claramente sobredimensionados y su resolución se reduce a la asignación de probabilidades, previa selección en la tabla de las cantidades pertinentes. En realidad, lo que se pretende con el uso de la tabla en estos problemas es, simplemente, mostrar la información de manera que resulte fácilmente comprensible por parte del resolutor. Sin embargo, algunas investigaciones (Estrada y Díaz, 2007; Contreras, Estrada, Díaz y Batanero, 2010) apuntan a que este tipo de problemas también presentan dificultades para los estudiantes.

En nuestro trabajo no usamos enunciados como el del ejemplo anterior, sino que todos los enunciados están formulados íntegramente en lenguaje verbal, dejando en manos del resolutor el aportar la tabla (u otra herramienta heurística) como medio de organización de la información y como plan para la resolución del problema. No obstante, en coherencia con lo anterior, durante la implementación de la unidad de enseñanza los estudiantes serán instruidos en el uso de la tabla de contingencia para resolver los problemas de nivel N_0, sin menoscabo de la introducción del árbol para la resolución de otros problemas de probabilidad condicional.

3.7 – FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE NIVEL N_0.

Puesto que nuestra investigación se centra en la resolución de problemas, no podemos pasar por alto el archiconocido trabajo de Polya acerca de las fases en la resolución de un problema, que constituye el punto de arranque de todos los estudios posteriores en este campo. Recordemos aquí las cuatro fases que formuló Polya en su obra "¿Cómo plantear y resolver problemas?" (1945): primera, comprender el problema; segunda, trazar un plan para resolverlo; tercera, poner en práctica el plan y cuarta, comprobar los resultados. Este modelo de cuatro fases es un modelo de competencia, es decir, el modelo que describe el comportamiento del resolutor ideal. Por otra parte, el modelo de Polya es un modelo general para la resolución de problemas de matemáticas. Cuando el campo de problemas que se estudia es más restringido, el modelo se presta a adaptaciones que aportan un mayor nivel de concreción. Un ejemplo es la adaptación del modelo llevada a cabo por Puig y Cerdán (1988) para los problemas aritméticos escolares (PAE), definidos como aquellos que presentan las siguientes características: el enunciado tiene carácter cuantitativo (es decir, los datos son cantidades), la condición expresa relaciones de tipo cuantitativo, la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades, o relaciones entre cantidades y la resolución del problema consiste en la realización de una o varias operaciones aritméticas (Puig y Cerdán, 1988, p. 17).

En el proceso de resolución de este tipo de problemas, los autores distinguen seis fases: "Lectura", "Comprensión", "Traducción", "Cálculo", "Solución" y "Revisión. Comprobación", y hacen algunas aclaraciones sobre las cuatro primeras.

En primer lugar, explican que las fases de "Lectura" y "Comprensión" constituyen una subdivisión de la fase de comprensión del modelo de Polya, aunque, como los propios autores indican, no existe una línea divisoria exacta entre ambas. El objetivo de esta división es enfatizar la importancia que tiene la lectura del enunciado, per se, en un contexto escolar; diferenciando esta acción de otras que se asocian con la fase de comprensión, como las transformaciones que el resolutor realiza sobre la base del texto usando medios de organización de la información como por ejemplo esquemas, listas, etc.

La tercera fase es la equivalente a la fase “elaboración de un plan” de Polya y es denominada como “Traducción”. Hace referencia a la determinación de las operaciones que hay que realizar, los datos que intervienen y el orden en que lo hacen.

En cuanto a la fase de “Cálculo”, se corresponde con la fase de “ejecución del plan” de Polya, y se ha denominado de cálculo porque ésa es la naturaleza de la tarea que en ella predomina.

Por otra parte, las fases del modelo de Puig y Cerdán también son observables, en cierta manera, en la resolución de los problemas de nivel N_0, ya que estos problemas, y en general, todos los problemas ternarios de probabilidad condicional, pueden verse como un tipo particular de problema aritmético donde las cantidades representan probabilidades. En efecto, en los problemas de nivel N_0, los datos son cantidades (probabilidades), las condiciones dadas en el enunciado hacen referencia a relaciones cuantitativas (relaciones entre probabilidades), la pregunta se refiere a la determinación de una cantidad (una condicional) y las operaciones necesarias para la resolución del problema son de carácter aritmético. Podría decirse que lo que diferencia ambos tipos de problema es precisamente el marcado carácter conceptual de las cantidades cuando son vistas como probabilidades.

Así, tomando como base el modelo de fases de Puig y Cerdán y adaptándolo a las particularidades de los problemas que nos ocupan, consideraremos el proceso de resolución de un problema de nivel N_0 dividido en las siguientes fases: lectura del enunciado y organización de la información contenida en el mismo; obtención de cantidades intermedias; cálculo del porcentaje o probabilidad condicional por la que se pregunta y respuesta completa a la pregunta del problema.

Veamos con detalle en qué consiste cada una de ellas.

Fase I: Lectura del enunciado y organización de la información.

La primera fase se corresponde con las fases de lectura y comprensión de Puig y Cerdán e implica, básicamente, las siguientes acciones:

- Lectura del enunciado del problema.
- Identificación en el mismo de los sucesos básicos (A y B)
- Identificación de los sucesos (intersecciones y/o marginales) cuyas medidas de probabilidad se conocen y de la probabilidad condicional por la que se pregunta.

- Organización, mediante algún tipo de representación sobre el papel, de los datos conocidos y la pregunta del problema.

La organización de la información del enunciado puede realizarse de diferentes maneras. Constituye, de hecho, una de las variables dependientes de la investigación, que toma tres valores diferentes, correspondientes a los tres medios de organización observados experimentalmente en las resoluciones de los estudiantes: una lista (más o menos completa) de las cantidades conocidas y la pregunta del problema, el diagrama en árbol (en cualquiera de sus modalidades) y la tabla de contingencia.

Fase II: Obtención de cantidades intermedias.

Una vez organizada la información del enunciado, se trata de decidir qué cantidades son necesarias para obtener aquella por la que se pregunta y luego proceder a su cálculo efectivo.

La aplicación de la regla de análisis-síntesis proporciona una estrategia de resolución que implica calcular el menor número posible de cantidades intermedias y usar, en consecuencia, el menor número posible de relaciones entre cantidades. Sin embargo, no es la única forma de proceder en esta fase de cálculo. Otra estrategia válida es la de observar qué relaciones se establecen entre las cantidades dadas en el enunciado, y obtener cantidades directamente relacionadas con éstas con el objetivo de ampliar el número de cantidades conocidas, aún sin una reflexión previa de si son estrictamente necesarias para la resolución del problema. Es decir, se trataría de ir calculando nuevas cantidades a partir de las conocidas hasta dar con aquellas que están directamente relacionadas con la condicional por la que se pregunta y que permiten su cálculo. Evidentemente, esta manera de proceder no garantiza la eficiencia, desde el punto de vista del número de cantidades y relaciones entre cantidades que se usan, pero es una estrategia eficaz en cuanto que permite resolver el problema.

Por otra parte, en esta fase de la resolución también es posible hacer uso del diagrama en árbol o la tabla de contingencia, para la obtención de cantidades intermedias. Esto es así porque, como se vio en el apartado anterior, tanto los árboles como las tablas están dotados de reglas de cálculo internas que permiten generar nuevas cantidades a partir de las ya conocidas.

Fase III: Cálculo del porcentaje o probabilidad que se da como resultado.

Sea cuál sea la forma en que se haya procedido en la fase anterior, el último cálculo siempre consistirá en la aplicación de una relación multiplicativa para la obtención de la condicional por la que se pregunta a partir de la intersección y la marginal directamente relacionadas con ella.

Fase IV: Respuesta a la pregunta del problema.

La resolución termina cuando se da una respuesta completa a la pregunta del problema, entendiendo por respuesta completa aquella en la que el resultado se expresa en términos de cantidad, es decir, como terna de tres componentes: una numérica (la probabilidad por la que se pregunta), una verbal (la descripción del referente de dicha probabilidad) y una tercera, el formato en que se formula la componente numérica, que debe ser coherente con el formato que se usa para la cantidad preguntada en el enunciado del problema. Así, una respuesta completa no sólo incluye el número obtenido para la condicional, expresado en el formato adecuado, sino también la descripción de la cantidad pedida. Por otra parte, esto no constituye exactamente una comprobación del resultado, en el sentido que se da a este término cuando se resuelven otro tipo de problemas como los algebraicos, pero sí exige al resolutor releer la pregunta del problema y ver si la cantidad obtenida responde a dicha pregunta. Asimismo, se esperaría de un resolutor ideal que examinara con actitud crítica la solución obtenida.

La consideración de estas fases en la resolución de los problemas de nivel N_0 ha tenido influencia en varios aspectos del trabajo de investigación, como por ejemplo la definición de las variables dependientes (variables del proceso y del resultado), usadas a su vez para definir las medidas de las dificultades de los problemas, y la definición de categorías para la clasificación de los errores observados en las resoluciones de los estudiantes. Además, veremos cómo, durante la enseñanza, se entrena a los estudiantes a transitar por todas estas fases con el objetivo de mejorar su competencia en la resolución de este tipo de problemas.

Capítulo 4. Metodología.

Como ya señalamos en el capítulo 1, Puig (1996) propone una manera de abordar la investigación en resolución de problemas de matemáticas que implica hacerse preguntas en escenarios (o niveles, como dice su autor) en los que los protagonistas están perfectamente delimitados. Esta propuesta puede verse en ejecución en Cerdán (2008) para la familia de problemas aritmético- algebraicos, aunque sólo parcialmente, pues está ausente uno de los protagonistas: el profesor, con su modelo de enseñanza. Aquí, el tipo de investigación que desarrollamos, tanto a nivel teórico como experimental, y su metodología, cuantitativa o cualitativa, también dependen de los objetos que son observados, ya sea individualmente o a través de las relaciones que se establecen entre ellos.

El primero de los objetivos de nuestra investigación es el de estudiar en profundidad la estructura matemática de los problemas de nivel N_0, con la intención de poder ejercer un control lo más preciso posible de esta variable de la tarea (tomada como variable independiente) durante la parte experimental de la investigación y poder observar qué influencias puede ejercer sobre los resolutores. Esto nos conduce al estudio teórico de los problemas en el escenario I de los tres que se describen en Puig (1996) para la investigación en resolución de problemas: aquel que sólo tiene en cuenta a los problemas y deja de lado a los resolutores y al profesor. El apdo. 4.1 de este capítulo se ocupa del método seguido para ello.

Los otros dos objetivos de nuestra investigación son: primero, la observación de las competencias, errores y dificultades en la resolución de los problemas de nivel N_0 por parte de estudiantes pertenecientes a un nivel educativo concreto; y segundo, el diseño y experimentación de una unidad de enseñanza encaminada a mejorar la competencia de dichos estudiantes en la resolución de este tipo de problemas. Los métodos usados para dar respuesta a estos dos objetivos involucran a los problemas y a los estudiantes, en el primer caso, y a los problemas, los estudiantes y el profesor, en el segundo, situándose la investigación, respectivamente, en los escenarios II y III descritos por Puig (1996). Aunque pueda pensarse en investigaciones en las que lo observado tiene lugar en uno u otro escenario, independientemente de lo que ocurra en los otros, nuestra investigación se lleva a cabo relacionando los tres. Los resultados obtenidos en el escenario I condicionarán la investigación en los otros dos y lo observado en el escenario II condicionará la investigación en el escenario III.

Así, atendiendo a su desarrollo temporal, podemos distinguir varias fases en esta parte experimental de la investigación:

- Diseño de dos cuestionarios (pre-test) y administración de los mismos a una muestra de estudiantes, con carácter previo a su instrucción.
- Diseño y aplicación de una unidad de enseñanza a los estudiantes de la muestra.
- Diseño y aplicación de un tercer cuestionario (post-test) a la muestra de estudiantes observada para medir los efectos de la enseñanza.

Este capítulo da cuenta de los métodos usados en cada una de estas fases siguiendo, aproximadamente, el orden cronológico en el que se suceden. Así, en el apdo. 4.2 comenzamos hablando sobre las variables independientes de la investigación (Kilpatrick, 1978), es decir, las variables de la tarea (estructura matemática, contexto, formato de datos, etc.) y del sujeto (curso académico, etc.) que hemos decidido controlar y que han determinado las características de los tres cuestionarios administrados. A continuación, en los apdos. 4.3 y 4.4, mostramos y justificamos la estructura y el contenido de estos cuestionarios y en el apdo. 4.5 ofrecemos también un análisis de los problemas que contienen, en función de las variables de la tarea.

El siguiente apartado está dedicado a la descripción del grupo de estudiantes a los que se administraron las pruebas y la forma en que esto se llevó a cabo. La mayoría de las producciones recabadas son resoluciones escritas de los problemas realizadas por los estudiantes aunque, en el caso de los pre-test, disponemos también de la filmación de una pareja de estudiantes resolviendo cooperativamente los seis problemas de la prueba. Este último tipo de registro aporta más información que las resoluciones escritas acerca de los razonamientos que hay detrás de la actuación de los estudiantes y del origen de las dificultades y errores que cometen, lo cual ha resultado de gran utilidad para corroborar o refutar algunas hipótesis derivadas del análisis de las producciones escritas. En el apdo. 4.6 describimos cómo se obtuvieron dichos protocolos audiovisuales (y otros captados durante la enseñanza) y cómo se elaboraron a partir de ellos los correspondientes protocolos escritos.

Seguidamente, abordamos todo lo referente al diseño y aplicación de la unidad de enseñanza (apartados 4.7 y 4.8). Como veremos, todas las tareas propuestas para la enseñanza son problemas de probabilidad condicional y en su mayoría problemas ternarios de nivel N_0. Para la elaboración de los enunciados de dichos problemas se han tenido en cuenta, de nuevo, las variables independientes descritas en el apartado 4.2, especialmente las variables de la tarea estructura de datos, contexto y formato de datos, que ya han sido examinadas en profundidad en el marco teórico. Por otra parte, en el apartado 4.8.1 mostramos cómo el diseño de los materiales y la metodología de enseñanza aplicada en las clases se sustentan en los principios de la Educación Matemática Realista. Además, en el apartado 4.8.2 explicamos el uso que hacemos de la tabla de contingencia, no sólo como herramienta heurística para la resolución de los problemas, sino también como modelo, es decir, como herramienta para la matematización progresiva de los conceptos matemáticos que se pretenden enseñar. Finalmente, para acabar con la descripción de la fase de enseñanza, en el capítulo 4.8.3 analizamos el protocolo escrito correspondiente a la filmación de una de las sesiones de clase, con el objetivo de ejemplificar la forma en que se enseñó a los estudiantes a resolver problemas de nivel N_0 con el uso de la tabla de contingencia y prestando atención a las diferentes fases identificadas en el proceso de resolución de este tipo de problemas (véase apdo. 3.7, p. 84).

La última parte del capítulo (apdo. 4.9) trata de la metodología utilizada para el análisis de las producciones de los estudiantes. Primero, hablamos de las variables dependientes de la investigación (variables explicativas del proceso y del resultado para el análisis de resoluciones de problemas de nivel N_0) que fueron definidas y usadas en el marco del proyecto de investigación más amplio (proyecto EDU2008-03140) del que formaba parte, en sus orígenes, el trabajo que ahora nos ocupa. Estas variables han sido utilizadas para el análisis de muestras grandes de resoluciones y han dado lugar a estudios de tipo cuantitativo que han aportado valiosa información acerca de las dificultades de los problemas de nivel N_0 y su relación con las variables de la tarea (Carles y otros, 2009). En el presente trabajo, el reducido número de alumnos que componen la muestra (9 estudiantes) no se presta a análisis de tipo cuantitativo. Sin embargo, la observación de estas variables en esta muestra reducida nos ha permitido dos cosas: en primer lugar, observar que se reproducen en ella los resultados obtenidos en las citadas investigaciones (como mostraremos en el capítulo de resultados); y por otro lado, usar la estadística descriptiva para ofrecer una visión global de algunas características de las resoluciones de los estudiantes (medios de organización de la información dada en el enunciado, presencia o no de errores en los cálculos, tipo de respuesta dada a la pregunta del problema, etc.) y poder hacer comparaciones entre los estudiantes y entre los resultados obtenidos en los diferentes cuestionarios.

No obstante, como hemos señalado, el reducido tamaño de la muestra no se presta a un estudio cuantitativo de los datos sino que resulta mucho más apropiado un estudio de tipo cualitativo. Precisamente este trabajo pretende complementar los estudios cuantitativos antes mencionados con un estudio exhaustivo de dos aspectos relacionados con el proceso de resolución de los problemas de nivel N_0: primero, las estrategias de resolución usadas por los estudiantes y, segundo, las dificultades que se les presentan a los estudiantes y los errores que éstos cometen, tratando de identificar posibles influencias de las variables de la tarea. En el apartado 4.9.3 presentamos la metodología usada para realizar este análisis minucioso de las resoluciones, haciendo una distinción entre la metodología usada para analizar las resoluciones de los pre-test y la usada para las resoluciones del post-test. En el primer caso, la metodología de análisis usa el "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional" de Cerdán y Huerta (2007). Como veremos, el grafo resulta útil para representar sintéticamente las características más relevantes de una resolución (cantidades intermedias obtenidas, relaciones entre cantidades usadas, errores cometidos, etc.). Además, las resoluciones quedan expresadas en un lenguaje intermedio que permite hacer comparaciones entre ellas. Así, cada una de las resoluciones de los dos primeros cuestionarios ha sido representada mediante un grafo, al que hemos denominado grafo de la resolución, y el estudio de las competencias y los errores cometidos por los estudiantes se ha llevado a cabo a partir de la observación y comparación de los diferentes grafos obtenidos. En cuanto al análisis de las resoluciones del post-test, para su realización no hemos creído conveniente el uso del grafo por dos motivos: primero, la gran uniformidad observada en las resoluciones (producto de la enseñanza) que permite explicar la actuación mayoritaria de los estudiantes mediante un único modelo de resolución; y segundo, el hecho de que en las resoluciones escritas la mayoría de los estudiantes construyen y completan una tabla de contingencia sin hacer explícitos los cálculos, lo cual dificulta la identificación de las relaciones que efectivamente ha usado el resolutor, requisito indispensable para la construcción del grafo de la resolución. La identificación de errores se ha realizado, pues, a partir de la observación directa de las resoluciones y su clasificación, eso sí, se ha efectuado de la misma manera que en los pre-test, lo que ha permitido confeccionar un único catálogo de errores que guarda relación con las fases del proceso de resolución de problemas de nivel N_0 y que contiene errores observados exclusivamente en los pre-test, errores observados exclusivamente en el post-test y errores observados en ambos.

Resumiendo, hemos llevado a cabo una investigación mayormente de tipo experimental, que responde a la estructura clásica de pre-test-enseñanza-post-test, sobre una muestra reducida de estudiantes, con la intención de realizar un estudio de tipo cualitativo sobre las estrategias de resolución y errores cometidos por dichos estudiantes al resolver problemas de nivel N_0. Este análisis incluye la observación de la forma en que evoluciona la actuación de los estudiantes ante este tipo de problemas, como consecuencia de la enseñanza, y también, la identificación de influencias de las variables de la tarea sobre los errores que los estudiantes cometen en los procesos de resolución. Para acabar, señalar que lo más destacable de la metodología de análisis de las producciones de los estudiantes es el uso de los grafos para la representación de las características más relevantes de las resoluciones de los problemas, lo cual aporta importantes ventajas al investigador.

4.1 – ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS DE NIVEL N_0.

Para comenzar con el estudio pormenorizado de la estructura matemática de los problemas de nivel N_0, retomamos la clasificación en niveles, categorías y tipos mostrada en Lonjedo (2007). Los problemas de nivel N_0, sin probabilidades condicionales conocidas, pueden presentar tres valores diferentes para la categoría (C_0, C_1 y C_2) pero un solo valor para el tipo: todos ellos son necesariamente de Tipo 1 (se pregunta por una probabilidad condicional), ya que, de lo contrario, no podrían considerarse problemas de probabilidad condicional tal y como los hemos definido en el apartado 3.4 (p. 55), pues involucrarían únicamente probabilidades marginales y de la intersección. Así pues, todos los problemas ternarios de probabilidad condicional (PTPC) de nivel N_0 tienen asociado uno de los tres vectores siguientes: $N_0C_0T_1$, $N_0C_1T_1$ o $N_0C_2T_1$, donde el nivel y el tipo permanecen constantes y sólo varía la categoría.

Por otra parte, sin tener en cuenta el contexto, un PTPC viene determinado por tres datos conocidos (convenientemente escogidos) y un dato desconocido por el que se pregunta. Si situamos estos cuatro datos en el "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional" (Figura 3.1, p. 63) podemos hacer un análisis de posibilidades, derivado de las lecturas analíticas de los problemas. Recordemos que por lectura analítica se entiende aquí aquella que se realiza de un problema reduciéndolo a datos (cantidades) y relaciones entre ellos. Por este procedimiento, se han definido *casos* dentro de cada categoría en el nivel N_0, según las relaciones que se establecen entre las marginales y las intersecciones que se dan como datos conocidos, es decir, cantidades explícitamente mencionadas en el enunciado del problema.

Para ilustrar cada uno de los casos, en el apdo. 5.1.1 (p. 187), mostraremos tablas de contingencia en las que se han representado los datos conocidos, como un modo de leer el problema de forma organizada. Intercambiando los papeles de los sucesos A, B y sus complementarios pueden obtenerse diferentes configuraciones de tablas que representan un mismo *caso*. Las tablas que se muestran corresponden a lo que hemos llamado *casos básicos*, que son los representantes de cada uno de los casos y los que se han tomado como modelo para el diseño de los enunciados de las pruebas.

Dentro de cada *caso*, determinado por las cantidades conocidas, distinguimos, además, entre una o más opciones de pregunta. Consideramos que una de las posibles probabilidades condicionales es una opción de pregunta si da lugar a un problema ternario tal y como lo hemos definido en la p. 55. Esto implica, por ejemplo, que la obtención de la probabilidad preguntada exija el cálculo de cantidades auxiliares o intermedias, usando todos los datos del enunciado y, por tanto, no se trate de un problema de una etapa, en el sentido en que Puig y Cerdán usan dicho término para los problemas aritméticos escolares (Puig y Cerdán, 1988, p. 90). Hay que señalar que al hablar de opciones de pregunta, no hacemos distinción entre probabilidades condicionadas y sus complementarias. Es decir, consideramos que $P(A|B)$ y $P(\overline{A}|B)$ son una "misma" opción de pregunta para un caso básico, puesto que basta aplicar una relación aditiva de complementariedad a uno para obtener una a partir de la otra[13]. En consecuencia, de las 8 opciones posibles consideramos solamente 4 básicas: $P(B \mid A)$,

[13] Esta decisión se ha tomado fruto del estudio teórico, pero no se ha observado empíricamente la equivalencia entre preguntar por una condicional y su complementaria desde el punto de vista de su influencia en el proceso de resolución. Queda esto para investigaciones posteriores.

$P(B \mid \overline{A})$, $P(A \mid \overline{B})$ y $P(A \mid B)$. El análisis posterior de cada *caso básico* con estas 4 *opciones básicas* determinará si da lugar a un problema ternario de probabilidad condicional o no.

Así, cada *caso básico* (determinado por los datos que son conocidos en el enunciado) tiene asociadas una o varias *opciones de pregunta básicas*, que se muestran junto a las tablas representativas de cada caso en el apdo. 5.1.1 (p. 187). Cada *caso básico* junto a una de las *opciones básicas de pregunta* asociadas a dicho caso básico da lugar a un *problema ternario de probabilidad condicional básico*. Así, el nivel, la categoría, el caso y la opción de pregunta determinan la estructura de datos de todo enunciado de un problema de la familia de PTPC de nivel N_0.

4.2 – VARIABLES EN LA INVESTIGACIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. VARIABLES INDEPENDIENTES EN LA INVESTIGACIÓN.

En esta investigación tratamos de poner al resolutor en relación con los problemas, de manera que podamos observar la influencia de las características de las tareas en su comportamiento. Por ello hemos considerado lo que Kilpatrick (1978) denomina Problem-Solving Research Variables (variables en la investigación en resolución de problemas), retomadas y adaptadas en Kulm (1979) y en Puig y Cerdán (1988). Una primera clasificación de estas variables nos lleva a distinguir entre variables independientes, que son aquellas que pueden medirse antes de la ejecución de la tarea y variables dependientes, las que se obtienen de la medida de las respuestas de los sujetos a las tareas que se les plantean (Puig y Cerdán, 1988).

Las variables independientes en las que hemos centrado nuestra atención son las variables de la tarea, aquellas que describen alguna característica del problema. Concretamente, hemos tomado en consideración la estructura matemática del problema, la situación y el contexto en que se formula el enunciado y el formato de datos.

La estructura de datos hace referencia a la estructura matemática del problema. Los diferentes valores que toma vienen determinados por los datos (los sucesos[14] y sus medidas) explícitamente mencionados en el enunciado del problema, la medida (probabilidad o porcentaje) por la que se pregunta y las relaciones que existen entre ellos. Así, la estructura de datos de cada problema vendrá definida por el nivel, la categoría, el tipo, el caso y la opción de pregunta, siendo el nivel (N_0) y el tipo (T_1) constantes en todos los problemas objeto de estudio. En el apartado 5.1.1 (p. 187)

[14] Recordemos que usamos el término "suceso" en un sentido amplio y no necesariamente como un elemento de una σ-álgebra. Pueden ser, además, proposiciones y conjuntos.

encontramos la clasificación de los problemas según su estructura de datos, que da los valores a esta variable.

Sobre las situaciones y contextos usados en la investigación ya tratamos en el capítulo anterior (apdo. 3.3, p. 44). Allí explicábamos que hemos considerado dos situaciones (la situación estadística y la situación test de diagnóstico) y dos contextos en cada una de estas situaciones, que hemos denotado por Estsocial, Estsalud, Diagsalud y Diagcalidad, como una forma abreviada de hacer referencia a la situación y al contexto conjuntamente.

Respecto al formato de datos, en el apdo. 3.2 (p. 40) vimos que la información numérica de un problema de probabilidad condicional podía tener naturalezas diversas y expresarse en formatos diversos. En esta investigación, la variable formato de datos toma tres valores diferentes: frecuencias, que representan los cardinales de los conjuntos de referencia de los sucesos, porcentajes y probabilidades, entendidas estas últimas como números decimales comprendidos entre cero y uno. Como ya hemos hecho notar anteriormente, los diferentes formatos de datos pueden interpretarse como el resultado de expresar las medidas de probabilidad usando diferentes escalas de medida. Así, las frecuencias se mueven en el intervalo [0, N], donde N es el tamaño total de la muestra; los porcentajes varían en [0, 100] y las probabilidades en el intervalo [0, 1].

Por otra parte, hemos tenido en cuenta también la variable *expresión de la condicional en la pregunta del problema*, que hace referencia a la construcción gramatical utilizada para expresar un dato condicional en los problemas de enunciado verbal. Siguiendo a Puig y Cerdán (1988, p. 31), se trataría de una variable de la tarea de carácter sintáctico, puesto que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema. En Lonjedo (2007) se muestra un estudio de las diferentes construcciones que expresan condicionalidad. En nuestra investigación fijaremos esta variable, asignándole dos de los valores que, a la luz de las investigaciones de Lonjedo (2007), generan menos errores de interpretación y que sintácticamente se caracterizan por mostrar primero la restricción del espacio muestral y después, preguntar por la probabilidad del suceso condicionado:

Para los dos primeros cuestionarios (pre-test): "Entre los que… ¿qué porcentaje…?"

En el tercer cuestionario (post-test): "Los/as que…, ¿qué probabilidad tienen de …?"

Otro tipo de variables independientes son las llamadas variables del sujeto, que son las que describen o miden alguna característica del sujeto, es decir, del resolutor del problema. Respecto a este tipo de variables, en nuestra investigación hemos prestado atención al nivel académico (que hemos fijado en 4º de la ESO) y al hecho de haber recibido o no instrucción previa en probabilidad. Esta última característica de la trayectoria escolar de los estudiantes ha tenido influencias de tipo metodológico sobre la variable de la tarea *formato de los datos*, pues ninguno de los estudiantes había recibido instrucción en probabilidad en el periodo del curso escolar previo al inicio de la investigación y la mayoría de ellos tampoco había estudiado la probabilidad en los cursos académicos anteriores. Esto nos obligó a expresar los datos en forma de frecuencias y porcentajes, en lugar de probabilidades, en los dos primeros cuestionarios previos al experimento de enseñanza.

A modo de resumen, la siguiente tabla recoge el conjunto de las variables independientes consideradas en la investigación:

	Variables que se activan	**Variables que se fijan**
Variables de la tarea	Estructura de datos. Situación y contexto. Formato de datos.	Estructura semántica y sintáctica para la expresión de la condicionalidad en la pregunta del problema.
Variables del sujeto	—	El nivel académico. El hecho de no haber recibido instrucción previa en probabilidad durante el curso escolar en el que se llevó a cabo la investigación.

Tabla 4.1. Variables independientes en la investigación .

Quedaría hablar de las variables dependientes de la investigación, es decir, de aquellas variables explicativas de lo producido por los estudiantes que nos permitirán, entre otras cosas, observar las influencias de las variables independientes sobre la actuación de los resolutores. Aquí nos limitaremos a señalar que hemos considerado un conjunto de variables del proceso y del resultado (Kulm, 1979), que trataremos detalladamente en el apdo. 4.9 (p. 144), cuando abordemos la metodología de análisis de las resoluciones de los estudiantes. Sólo avanzaremos que las variables del proceso son las que describen cualquier característica del proceso de resolución del problema (estrategias de resolución, uso de herramientas heurísticas, algoritmos, errores cometidos, etc.) y las variables del resultado tienen que ver con el resultado o respuesta dada por el resolutor (correcta/incorrecta; completa/incompleta; etc.).

4.3 – DISEÑO DE LOS ENUNCIADOS PARA LAS PRUEBAS.

El diseño de los enunciados para las pruebas se realizó en el marco del proyecto más amplio mencionado anteriormente, el proyecto EDU2008-03140. Los miembros del equipo de investigación elaboramos un listado de problemas de nivel N_0, de enunciado verbal, con los datos expresados en frecuencias, que recorrían todas las categorías, casos y opciones de pregunta, para cada uno de los cuatro contextos objeto de estudio:

Estsocial, Estsalud, Diagsalud y Diagcalidad. El objetivo era disponer de una batería de problemas a partir de la cual poder diseñar las diferentes pruebas que se administrarían en los estudios empíricos del proyecto, entre los que destacan el de las dificultades de los problemas (Carles y otros, 2009) y el de las influencias del contexto y la estructura de datos (Edo, 2010). En estos problemas usamos un único formato de datos, las frecuencias para las cantidades conocidas y los porcentajes condicionales para las preguntas, forzados por las características de la muestra de estudiantes, sin enseñanza previa en probabilidad. Estos enunciados son fácilmente transformables a enunciados con los datos en forma de porcentajes o probabilidades, conservando no sólo el resto de características del problema (estructura de datos y contexto) sino también el valor numérico de las probabilidades implicadas, por lo que sirvieron de base para el diseño de los tres cuestionarios usados en la investigación de la que damos cuenta en esta memoria. El listado completo, que se encuentra en el Anexo 1 (p. 383), consta de 30 enunciados verbales, que podemos agrupar en cinco bloques. Cada bloque incluye un problema de cada categoría y caso (excepto del caso 1 de la categoría C_1, para el que todos los problemas son algebraicos e indeterminados) y se caracterizan por lo siguiente:

Los problemas del *1* al *6* se plantean en la situación estadística, contexto social (Estsocial), considerando para los sucesos básicos A y B, las características dicotómicas: "ser chica / ser chico" y "usar gafas / no usar gafas".

Los problemas del *7* al *12* se plantean en la situación estadística, contexto salud (Estsalud), considerando, para los sucesos básicos A y B, las características dicotómicas: "tratarse con un antibiótico / no tratarse con antibiótico" y "curarse / no curarse".

Los problemas del *13* al *18* se plantean en la situación test de diagnóstico, contexto salud (Diagsalud), considerando para los sucesos básicos A y B, las características dicotómicas: "estar enfermo / no estar enfermo" y "dar positivo en el test / dar negativo en el test".

Los problemas del *1a* al *6a* sólo se diferencian de los problemas del *1* al *6*, en la información numérica (tamaño de la muestra y frecuencias).

Los problemas del *13a* al *18a* se plantean en la situación test de diagnóstico, contexto control de calidad (Diagcalidad), considerando las características dicotómicas para piezas fabricadas: "ser una pieza correcta / ser una pieza defectuosa" y "ser calificada de correcta / ser calificada de defectuosa".

Cada enunciado incluye tantos apartados para la pregunta como opciones de pregunta tiene según su categoría y caso. Teóricamente, tendríamos un PTPC diferente por cada apartado pero, a efectos prácticos, hemos englobado bajo un mismo nombre (Problema 1, Problema 2, etc.) a todos los PTPC que tienen en común la parte informativa del enunciado. Debemos aclarar, también, que el objetivo de incluir el cuarto bloque (problemas del *1a* al *6a*) es el de evitar el "efecto memoria" que podría producirse en los estudiantes cuando en un mismo cuestionario aparecen dos problemas con los mismos sucesos elementales y las mismas medidas (frecuencias, porcentajes o probabilidades) para dichos sucesos. Sólo se consideró necesaria esta precaución para la situación estadística, contexto social, ya que, como veremos, se trata del contexto menos influyente en las dificultades de los problemas.

La Tabla 4.2 (p. 97) resume las características de cada uno de los 30 problemas.

4.4 – DISEÑO DE LAS PRUEBAS.

Las tres pruebas que se administraron a los estudiantes en la parte experimental de la investigación (Fases II y III) constaban de seis problemas cada una, para cuya formulación se tomaron en consideración las variables de la tarea detalladas en el punto 4.2 (p. 92). A continuación mostramos los enunciados que incluía cada prueba.

4.4.1 – Diseño de la primera prueba: Pre-test(F).

La primera prueba, a la que denominamos Pre-test(F), se elaboró para abordar los objetivos 1 y 2 previstos en nuestra investigación y con el fin de obtener información para abordar el objetivo 3. Para esta prueba se seleccionaron los problemas 1, 2a, 9, 10 (con los datos multiplicados por 2), 17 y 18a del listado descrito en el apartado anterior. Su formulación, tal como fueron administrados, es la siguiente:

Problema 1 (1)

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 2 (2a)

Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 3 (9)

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. En total, se han curado 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

Problema	Categoría	Caso	Situación	Contexto	Sucesos básicos
1	C_0	Caso único	Estadística	Social	Ser chica / ser chico Usar gafas / no usar gafas
2	C_1	Caso 2			
3	C_1	Caso 3			
4	C_2	Caso 1			
5	C_2	Caso 2			
6	C_2	Caso 3			
7	C_0	Caso único	Estadística	Salud	Tratarse con un antibiótico / no tratarse con un antibiótico Curarse / no curarse
8	C_1	Caso 2			
9	C_1	Caso 3			
10	C_2	Caso 1			
11	C_2	Caso 2			
12	C_2	Caso 3			
13	C_0	Caso único	Test de diagnóstico	Salud	Estar enfermo / no estar enfermo Dar positivo en el test / dar negativo en el test
14	C_1	Caso 2			
15	C_1	Caso 3			
16	C_2	Caso 1			
17	C_2	Caso 2			
18	C_2	Caso 3			
1a	C_0	Caso único	Estadística	Social	Ser chica / ser chico Usar gafas / no usar gafas
2a	C_1	Caso 2			
3a	C_1	Caso 3			
4a	C_2	Caso 1			
5a	C_2	Caso 2			
6a	C_2	Caso 3			
13a	C_0	Caso único	Test de diagnóstico	Control de calidad	Ser una pieza correcta / ser una pieza defectuosa Ser calificada como correcta por el test / ser calificada como defectuosa por el test
14a	C_1	Caso 2			
15a	C_1	Caso 3			
16a	C_2	Caso 1			
17a	C_2	Caso 2			
18a	C_2	Caso 3			

Tabla 4.2. Características de los problemas de N_0 usados en los cuestionarios del Proyecto EDU2008-03140 .

Problema 4 (10x2)

Una población de 240 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 120 personas, 100 se han tratado con el antibiótico y 84 se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

Problema 5 (17)

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les da positivo?

Problema 6 (18a)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado fue que 95 piezas fueron correctas, 77 fueron calificadas como correctas por el dispositivo y que 4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

Por tanto, el cuestionario incluía un problema de cada categoría y caso, con una sola de sus opciones de pregunta. El hecho de no incluir todos los apartados se debe a la limitación de tiempo (50 minutos) para la realización de las pruebas por los estudiantes.

Por otra parte, cuatro de los seis enunciados se presentaban en la situación estadística (dos en el contexto social y dos en el contexto salud) y dos en la situación test de diagnóstico (uno en el contexto salud y otro en el contexto control de calidad) de manera que se usaban las dos situaciones y los cuatro contextos escogidos para la investigación, cuyas características hemos detallado en el marco teórico (apdo. 3.3.2.3, p. 49).

En cuanto al formato de los datos, se mantuvo constante a lo largo de toda la prueba. Como ya se ha señalado, no hubiera sido pertinente expresar los datos del enunciado y la pregunta del problema en términos de probabilidades porque los estudiantes no habían recibido enseñanza previa en probabilidad. Así, las medidas de los sucesos se expresaban en frecuencias absolutas y se preguntaba por un porcentaje, que expresado en tanto por uno, sería una probabilidad condicionada[15].

Tal y como adelantamos en el punto 4.2 (p. 92) se fijó la variable *expresión de la condicional* para la que se optó por la fórmula que, según estudios anteriores (Lonjedo, 2007), generaba menos errores de interpretación: "Entre los que… ¿qué porcentaje…?"

4.4.2 – Diseño de la segunda prueba: Pre-test(%).

La segunda prueba, a la que haremos referencia como Pre-test(%), incluía también los problemas 1, 2a, 9, 10, 17 y 18a, pero en distinto orden y con las cantidades expresadas en porcentajes. Se preguntaba, como en el cuestionario anterior, por un porcentaje que, en tanto por uno, representaría una probabilidad condicional. Cada enunciado constaba de una única opción de pregunta para cuya expresión se escogió, de nuevo, la fórmula: "Entre los que… ¿qué porcentaje…?". En cuanto a la parte informativa del enunciado, el hecho de expresar los datos en forma de porcentaje nos obligó a modificar no sólo los números sino también las estructuras sintácticas de los enunciados. Así, en la redacción se puso especial cuidado en enfatizar el conjunto de referencia de cada porcentaje, que para los datos conocidos es siempre la muestra total (al ser todos estos datos o bien marginales o bien intersecciones) y para la pregunta del problema, el conjunto de referencia del suceso condicionante. De esta manera pretendíamos minimizar la frecuente confusión entre probabilidades conjuntas y condicionales por parte de los estudiantes, como consecuencia de una interpretación equivocada del conjunto de referencia de los porcentajes (Lonjedo, 2007).

Finalmente, los problemas quedaron enunciados de la siguiente manera:

Problema 1 (1)

La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 2 (9)

Un conjunto de personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado un 53% de dichas personas. Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

---

[15] La decisión de formular la pregunta del problema en términos de porcentajes, en lugar de probabilidades, no es novedosa en la investigación (véase, por ejemplo, Pollatsek y otros, 1987)

Problema 3 (17)

Una población con riesgo de padecer tuberculosis se somete a un test para averiguar si padecen tuberculosis o no. El test da positivo o negativo para la enfermedad en cualquier caso. Un 57% de las personas eran tuberculosas. Los resultados muestran que hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo. Además, los resultados mostraron que un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo. Entre las personas que no eran tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les dio positivo?

Problema 4 (2a)

Un centro escolar está formado por chicos y chicas. Hay un 28% de estudiantes que usan gafas, un 15% de chicas que las usan y un 37% de chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 5 (18a)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El 95% de las piezas eran correctas, el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo y el 4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

Problema 6 (10)

Una población sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado el 53% de las personas, un 42% se han tratado con el antibiótico y un 35% se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

El hecho de administrar una segunda prueba a los estudiantes, antes de que recibieran enseñanza en probabilidad, se debe al interés por estudiar la posible influencia de la variable *formato de datos* en la actuación de los estudiantes, puesto que en la tesis de Lonjedo (2007) se observó que esta influencia era significativa para los problemas de nivel N_1. Los problemas de ambas pruebas presentan isomorfía en cuanto a estructura de datos y contextos, aunque no completamente por las diferencias de los formatos. Así, cualquier variación en los resultados sería imputable a la diferencia de formato.

4.4.3 – Diseño de la tercera prueba: Test(P).

La tercera prueba, a la que haremos referencia como Test(P), se administró tras la secuencia de enseñanza. Incluía, de nuevo, los problemas 1, 2a, 9, 10, 17 y 18a, pero en distinto orden que en las dos pruebas anteriores y con los datos y la pregunta del problema expresados en términos de probabilidades. El formato de datos, distinto en cada caso, hace que los problemas sean isomorfos pero no idénticos en las tres pruebas.

En cuanto a la redacción del enunciado, en la pregunta del problema se mantuvo la estructura utilizada en los otros dos cuestionarios: primero aparece la restricción del espacio muestral dada por el suceso condicionante y después se pregunta por la probabilidad del suceso condicionado. En cuanto a la expresión de las probabilidades de la intersección en la parte informativa del enunciado, se evitaron las palabras "también" y "además" que Lonjedo (2007) había señalado como problemáticas para la correcta interpretación de las probabilidades. Así la fórmula que usamos para expresar la probabilidad de la intersección es la siguiente: "la probabilidad de que una persona/pieza/estudiante" + "suceso A" + "y" + "suceso B"+"es de ...". Por ejemplo: "*La probabilidad de que una persona se trate con el antiviral y se cure de la gripe es de 0,35"*.

Por otra parte, a diferencia de lo que ocurre en los otros dos cuestionarios, en éste todos los enunciados incluyen, en diferentes apartados, todas las opciones de pregunta posibles para la categoría y el caso. Se estimó oportuno hacerlo así porque en el momento en que se administró el Test(P) los estudiantes ya estaban entrenados en la resolución de problemas de N_0 y el tiempo para el desarrollo de la prueba (50 minutos) ya no debía suponer una limitación. Así, en el post-test, todos los problemas contenían dos apartados (menos el problema 2, con opción de pregunta única), de manera que uno de ellos diera lugar a un problema isomorfo a su análogo en los pre-test. Concretamente, los apartados que daban lugar a problemas isomorfos a los de los dos primeros cuestionarios son los apartados a) de los problemas 2a (con pregunta única), 9 y 17 y los apartados b) de los problemas 1, 10 y 18a. En el problema 10, apartado b), se preguntaba por la condicional complementaria de aquella por la que se preguntaba en el problema 10 de los pre-test, pero como ya señalamos en el apartado 4.1 (p. 90), dos condicionales complementarias representan una misma opción de pregunta.

Los enunciados de los problemas del post-test son los siguientes:

Problema 1 (1)

Las matemáticas y el inglés se encuentran entre las asignaturas más difíciles de aprobar en la secundaria. En un instituto la probabilidad de que un estudiante apruebe a la vez matemáticas e inglés es de 0,15; la probabilidad de que apruebe *matemáticas y no apruebe inglés es de 0,37 y la probabilidad de que no apruebe ninguna de las dos es 0,35.*

a) Los estudiantes que no han aprobado matemáticas, ¿qué probabilidad tienen de aprobar inglés?

b) Los estudiantes que han aprobado inglés, ¿qué probabilidad tienen de aprobar matemáticas?

Problema 2 (17)

Una población con un alto riesgo de padecer SIDA se somete a un test para averiguar si la padecen o no. El test da positivo o negativo en cualquier caso. La probabilidad de que una persona de esta población de riesgo padezca SIDA es de 0,57 y la probabilidad de que dé positivo en el test es de 0,47. Se sabe, además, que hay una probabilidad de 0,23 de que una persona padezca de SIDA y el test le dé negativo.

a) Las personas que no padecen SIDA, ¿qué probabilidad tienen de dar positivo en el test?

b) Las personas que dan positivo en el test, ¿qué probabilidad tienen de padecer SIDA?

Problema 3 (9)

Un grupo de personas sufre de la conocida gripe porcina. Unas han sido tratadas con el antiviral Tamiflú y otras no. La probabilidad de que una persona se trate con el antiviral y se cure de la gripe es de 0,35 y la probabilidad de que una persona no se trate con el antiviral y no se cure es de 0,40. Además, la probabilidad que tiene una persona de este grupo de curarse la gripe es de 0,53.

a) Las personas tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de no curarse?

b) Las personas no tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de curarse?

Problema 4 (18a)

Un dispositivo comprueba si una pieza recién fabricada es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se comprueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. La probabilidad de que una pieza sea correcta es de 0,95 y la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza como correcta es de 0,77. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa y el dispositivo la califique como defectuosa es de 0,04.

a) Las piezas que son correctas, ¿qué probabilidad tienen de ser calificadas como correctas por el dispositivo?

b) Las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué probabilidad tienen de ser correctas?

Problema 5 (10)

Una población sufre una infección en la piel. Algunas personas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. La probabilidad de que una persona haya sido tratada con el antibiótico es de 0,42. La probabilidad que tiene una persona de curarse de esta infección es de 0,53. Se sabe también que la probabilidad de tratarse con el antibiótico y curarse de la infección es de 0,35.

a) Las personas que no se han tratado con el antibiótico, ¿qué probabilidad tienen de curarse de la infección?

b) Las personas que no se han curado, ¿qué probabilidad tienen de no haber sido tratadas con el antibiótico?

Problema 6 (2a)

La probabilidad de que un estudiante use gafas es de 0,28. La probabilidad de que un estudiante sea chica y use gafas es de 0,15 y de que sea chica y no las use, de 0,37. Los estudiantes que son chicos, ¿qué probabilidad tienen de usar gafas?

4.4.4 – Estructura y formato de los cuestionarios.

Los tres cuestionarios, tal y como se entregaron a los estudiantes para su resolución escrita pueden consultarse en el Anexo 2 (p. 391), Anexo 3 (p. 397) y Anexo 4 (p. 403), respectivamente. Como allí puede observarse, constaban de cuatro partes:

- Portada, donde se hacía referencia al proyecto EDU2008-03140 y se daba información sobre los problemas que componían el test: nivel, tipo de cuestionario y código de los problemas que incluía.
- Contraportada, a cumplimentar por los estudiantes, indicando su nombre (sin apellidos), edad, curso, centro educativo y fecha. La información sobre el centro era necesaria porque dentro del proyecto EDU2008-03140, se administraron estos y otros cuestionarios similares en diferentes centros.
- Instrucciones (en ocho puntos).
- Enunciados de los problemas.

Las instrucciones constituyen el contrato investigador-estudiante, en el sentido en que usa el término Cerdán (2008): *"La actividad mental de la que el resolutor da cuenta, o es capaz de dar cuenta, es fruto de un contrato "ad hoc" entre el resolutor y el investigador [...]."* (p. 115) Tal y como señala Cerdán (2008), la razón de ser de dicho contrato se encuentra en las intenciones del investigador. Puesto que el objetivo era obtener la mayor cantidad de información posible sobre el modo de razonar y sobre las dificultades que pudieran surgirles a los estudiantes durante la resolución de los problemas, se incluyeron entre las instrucciones las siguientes:

- Razona cada paso de las resoluciones. Es decir, explica a cada paso por qué haces las cosas como las haces.
- Realiza todas las operaciones en la hoja. No uses calculadora[16].
- No borres nada. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas con la resolución del problema.
- Cuando en un problema no sepas continuar y quieras dejarlo, explica por qué lo dejas y pasa al siguiente problema.

En los dos primeros cuestionarios los enunciados aparecían en bloque y los estudiantes resolvían los problemas en hojas en blanco proporcionadas por la investigadora. Se les pidió que resolvieran cada problema en una hoja diferente, con el objetivo de que las resoluciones quedaran claramente diferenciadas. En cambio, en el post-test, entre el enunciado de un problema y el siguiente los estudiantes tuvieron espacio suficiente para escribir las resoluciones, siendo entonces todos los registros contenidos en ese espacio lo que constituiría la fuente de información para la investigación.

[16] Esta condición sólo aparecía en los dos primeros cuestionarios y se eliminó en el tercero, el Test(P), porque la naturaleza de las cantidades (números decimales) podía dificultar los cálculos, entorpeciendo la actuación de los resolutores. Hay que tener en cuenta, además, que cinco de los seis enunciados del Test(P) contenían dos preguntas en lugar de una, lo que exigía realizar un mayor número de cálculos que en el pre-test.

4.4.5 – Análisis de los problemas de los cuestionarios.

En este apartado analizamos los problemas propuestos en los cuestionarios, comparándolos de tal manera que el lector pueda apreciar qué variables de la tarea se dejan constantes y cuáles no.

Para ello, hacemos una lectura teórica de las cantidades del enunciado y construimos la tabla de contingencia y el grafo teórico del problema, con la intención de proporcionar un modelo de actuación competente en la resolución del problema que pueda ser comparado con las resoluciones de los estudiantes. Por grafo teórico entendemos el grafo que resulta de aplicar el método de análisis-síntesis. Como consecuencia, se trata del grafo que representa una resolución en la que se obtiene el menor número posible de cantidades intermedias y se usa el menor número posible de relaciones entre cantidades, es decir, un gafo mínimo, tal y como lo describimos en el marco teórico (apdo. 3.5.3, p. 65). Para todos los problemas que nos ocupan existe un único grafo con estas características, excepto para el Problema 18a. En efecto, debido a la simetría que presenta este problema en los datos conocidos, es posible construir dos grafos simétricos con el mismo número de aristas activadas. Aquí mostraremos, para cada apartado de este problema, uno de los grafos posibles. Los otros pueden consultarse en el Anexo 5 (p. 411). Por otra parte, en los grafos, los vértices correspondientes a las cantidades conocidas dadas en el enunciado se han coloreado de negro, el vértice correspondiente a la condicional por la que se pregunta, en verde y los vértices correspondientes a las cantidades intermedias, en azul.

Finalmente, debemos aclarar que en las tablas de contingencia que mostramos a continuación, hemos representado en negrita las cantidades conocidas, dadas en el enunciado, incluyendo el tamaño muestral y/o la probabilidad total, aunque esta última no se mencione explícitamente en el enunciado. El resto de cantidades de la tabla han sido calculadas aplicando las reglas de cálculo propias de las tablas de contingencia. Por otra parte, algunas de estas cantidades son superfluas para la resolución del problema. Así, la tabla da cuenta de todas las marginales e intersecciones involucradas en el problema[17], mientras que el grafo muestra cuáles de esas cantidades son estrictamente necesarias para resolver el problema, si se sigue la estrategia de resolución representada en dicho grafo. En cuanto al resultado (probabilidad por la que se pregunta) aparece en todos los casos junto a la tabla de contingencia correspondiente y precedida de los cálculos pertinentes para su obtención.

[17] Como se verá en el capítulo de resultados, cuando los estudiantes usan las tablas de contingencia para la resolución de los problemas, es habitual que las completen aunque esto suponga el cálculo de cantidades intermedias que no son estrictamente necesarias para llegar a la solución del problema.

Problema 1

	PRE-TEST(F)	**PRE-TEST(%)**	**TEST(P)**
Sucesos básicos	A = ser chica B = llevar gafas	A = ser chica B = llevar gafas	A = aprobar matemáticas B = aprobar inglés
Cantidades mencionadas en el enunciado	Cantidades conocidas: N = 30 $n(A\cap B)=7$ $n(A\cap \overline{B})=10$ $n(\overline{A}\cap \overline{B})=8$ Cantidad por la que pregunta: $P(A\mid B)$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: (N = 100) $n(A\cap B)=15$ $n(A\cap \overline{B})=37$ $n(\overline{A}\cap \overline{B})=35$ Cantidad por la que pregunta: $P(A\mid B)$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: $P(A\cap B)=0{,}15$ $P(A\cap \overline{B})=0{,}37$ $P(\overline{A}\cap \overline{B})=0{,}35$ Cantidad por la que pregunta: a) $P(B\mid \overline{A})$ b) $P(A\mid B)$

Tabla 4.3. Análisis de las cantidades que aparecen en el enunciado del Problema 1 .

PRE-TEST(F)

	A	$\overline{A}$	
B	**7**	5	12
$\overline{B}$	**10**	**8**	18
	17	13	**30**

$$P(A\mid B)=\frac{7}{12}\cdot 100=58{,}33\%$$

PRE-TEST(%)

	A	$\overline{A}$	
B	**15**	13	28
$\overline{B}$	**37**	**35**	72
	52	48	**100**

$$P(A\mid B)=\frac{15}{28}\cdot 100=53{,}57\%$$

TEST(P)

	A	$\overline{A}$	
B	**0,15**	0,13	0,28
$\overline{B}$	**0,37**	**0,35**	0,72
	0,52	0,48	**1**

a) $P(B\mid \overline{A})=\dfrac{0{,}13}{0{,}48}=0{,}2708$

b) $P(A\mid B)=\dfrac{0{,}15}{0{,}28}=0{,}5357$

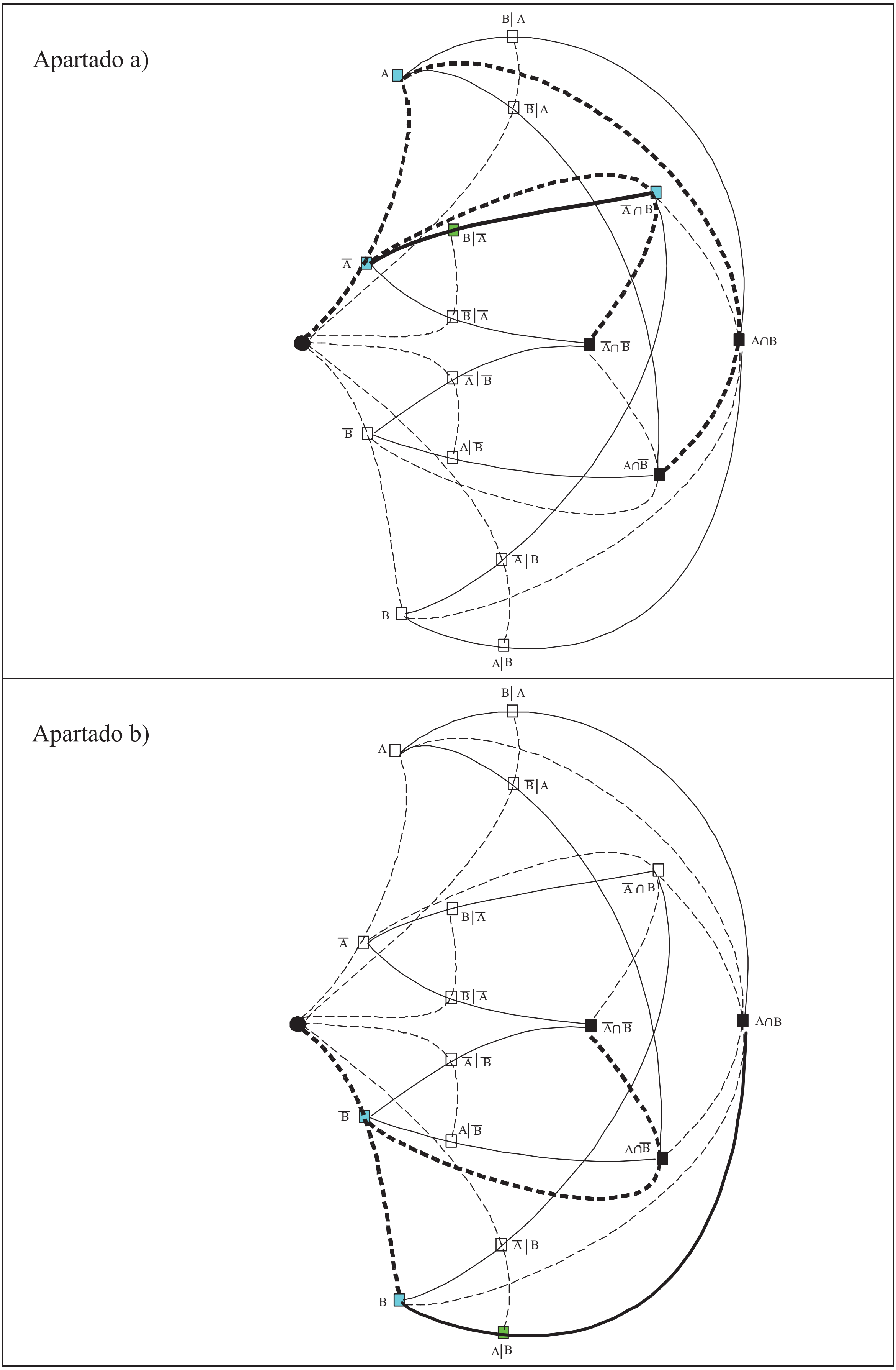


Figura 4.1. Grafos teóricos asociados al Problema 1.

Problema 2a

	PRE-TEST(F)	**PRE-TEST(%)**	**TEST(P)**
Sucesos básicos	A = ser chica B = usar gafas	A = ser chica B = usar gafas	A = ser chica B = usar gafas
Cantidades mencionadas en el enunciado	Cantidades conocidas: N = 1.000 $n(B) = 282$ $n(A \cap B) = 147$ $n(A \cap \overline{B}) = 368$ Cantidad por la que pregunta: $P(B \mid \overline{A})$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: (N = 100) $n(B) = 28$ $n(A \cap B) = 15$ $n(A \cap \overline{B}) = 37$ Cantidad por la que pregunta: $P(B \mid \overline{A})$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: $P(B) = 0{,}28$ $P(A \cap B) = 0{,}15$ $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}37$ Cantidad por la que pregunta: $P(B \mid \overline{A})$

Tabla 4.4. Análisis de las cantidades que aparecen en el enunciado del Problema 2a .

PRE-TEST(F)

	A	$\overline{A}$	
B	**147**	135	**282**
$\overline{B}$	**368**	350	718
	515	485	**1.000**

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{135}{485} \cdot 100 = 27{,}84\%$$

PRE-TEST(%)

	A	$\overline{A}$	
B	**15**	13	**28**
$\overline{B}$	**37**	35	72
	52	48	**100**

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{13}{48} \cdot 100 = 27{,}08\%$$

TEST(P)

	A	$\overline{A}$	
B	**0,15**	0,13	**0,28**
$\overline{B}$	**0,37**	0,35	0,72
	0,52	0,48	**1**

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{0{,}13}{0{,}48} = 0{,}2708$$

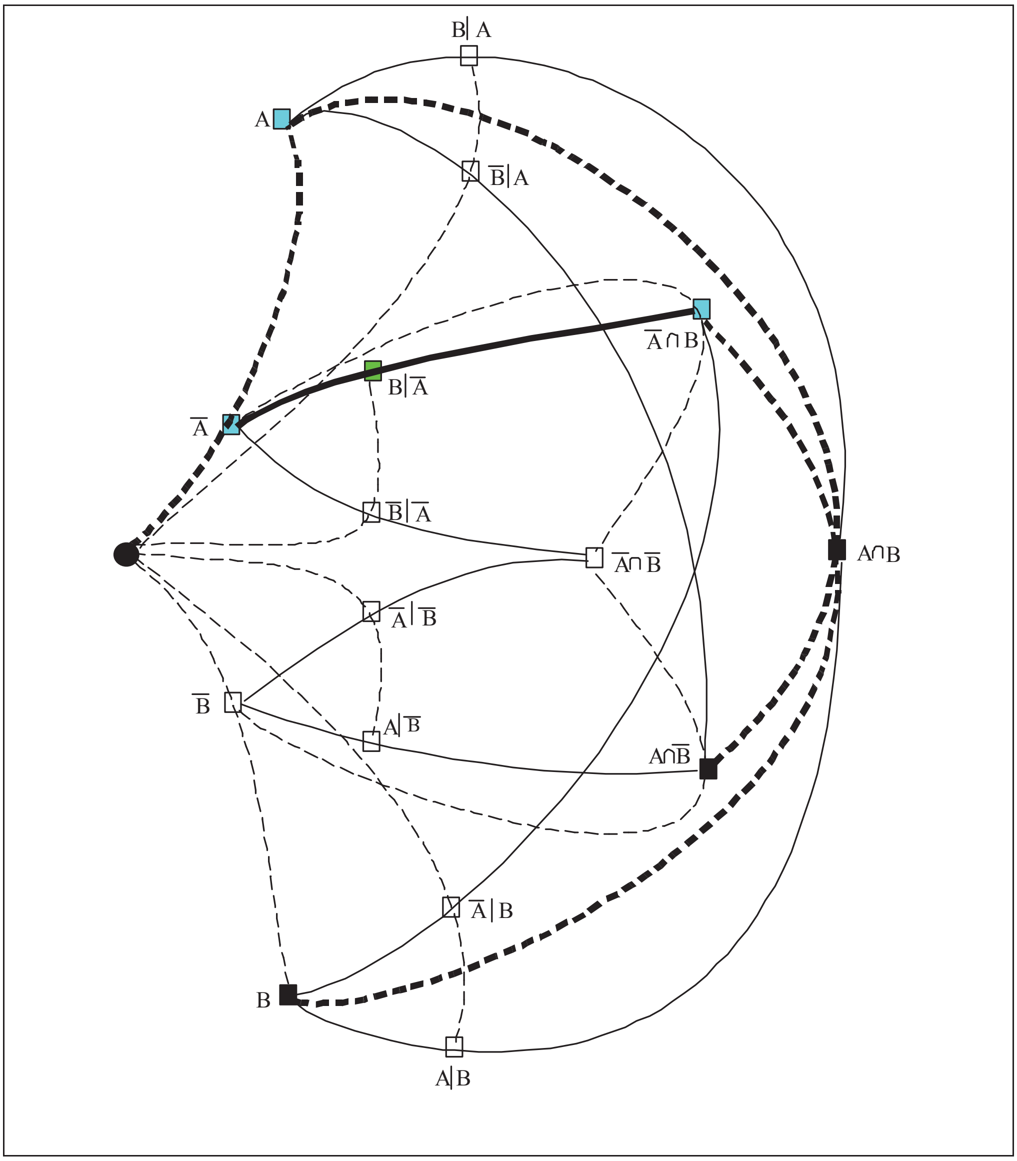


Figura 4.2. Grafo teórico asociado al Problema 2a.

Problema 9

	PRE-TEST(F)	**PRE-TEST(%)**	**TEST(P)**
Sucesos básicos	A = tratarse con el antibiótico B = curarse de la infección	A = tratarse con el antibiótico B = curarse de la infección	A = tratarse con el antiviral B = curarse de la gripe
Cantidades mencionadas en el enunciado	Cantidades conocidas: N = 120 $n(A \cap B) = 42$ $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 48$ $n(B) = 64$ Cantidad por la que pregunta: $P(\overline{B} \mid A)$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: (N = 100) $n(A \cap B) = 35$ $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 40$ $n(B) = 53$ Cantidad por la que pregunta: $P(\overline{B} \mid A)$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: $n(A \cap B) = 0{,}35$ $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}40$ $n(B) = 0{,}53$ Cantidad por la que pregunta: a) $P(\overline{B} \mid A)$ b) $P(B \mid \overline{A})$

Tabla 4.5. Análisis de las cantidades que aparecen en el enunciado del Problema 9 .

PRE-TEST(F)

	A	$\overline{A}$	
B	**42**	22	**64**
$\overline{B}$	8	**48**	56
	50	70	**120**

$$P(\overline{B} \mid A) = \frac{8}{50} \cdot 100 = 16\%$$

PRE-TEST(%)

	A	$\overline{A}$	
B	**35**	18	**53**
$\overline{B}$	7	**40**	47
	42	58	**100**

$$P(\overline{B} \mid A) = \frac{7}{42} \cdot 100 = 16{,}67\%$$

TEST(P)

	A	$\overline{A}$	
B	**0,35**	0,18	**0,53**
$\overline{B}$	0,07	**0,40**	0,47
	0,42	0,58	**1**

a) $P(\overline{B} \mid A) = \dfrac{0{,}07}{0{,}42} = 0{,}1667$

b) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{0{,}18}{0{,}58} = 0{,}3103$

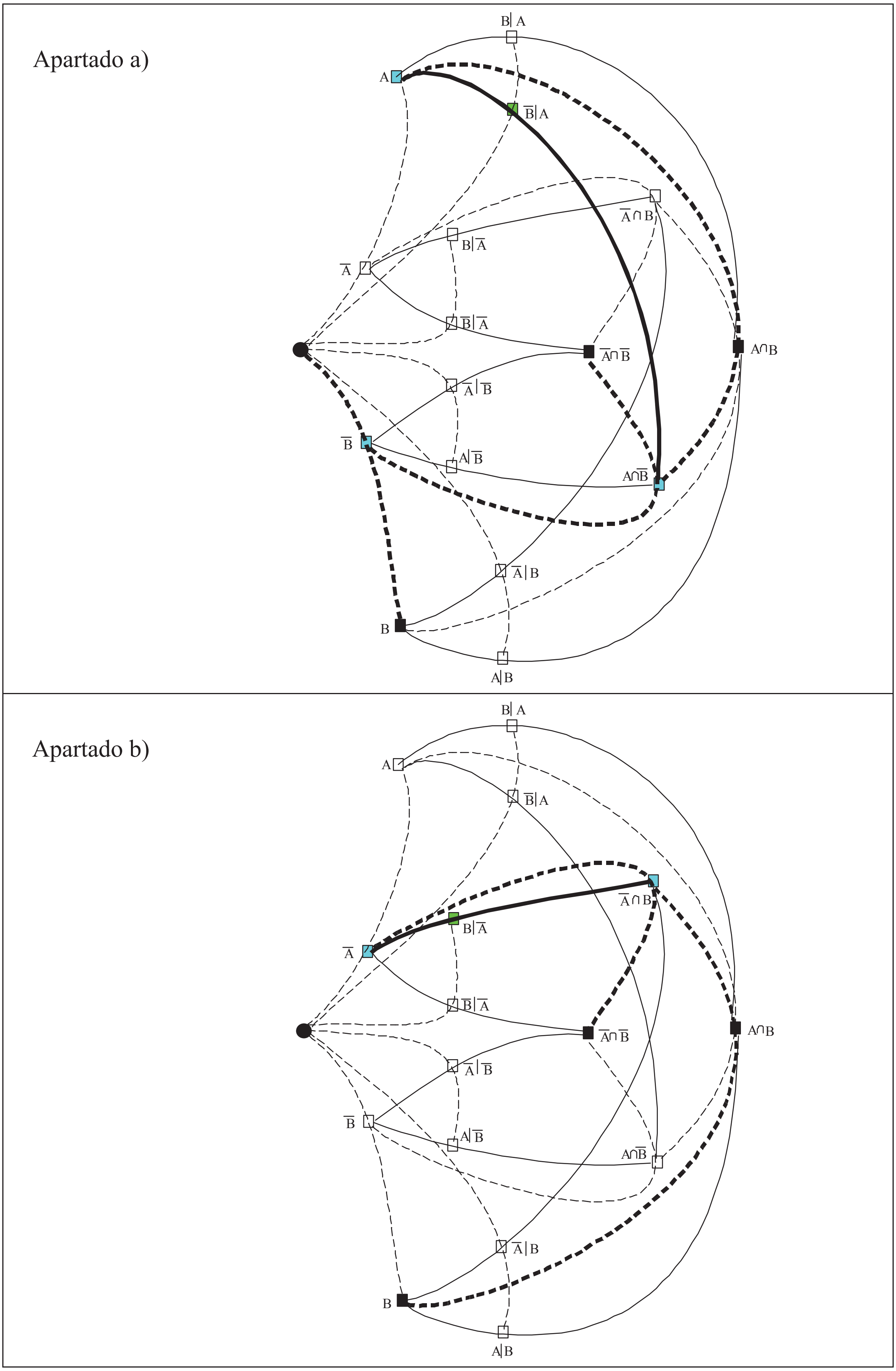


Figura 4.3. Grafos teóricos asociados al Problema 9.

Problema 10

	PRE-TEST(F)	**PRE-TEST(%)**	**TEST(P)**
Sucesos básicos	A = tratarse con el antibiótico B = curarse de la infección	A = tratarse con el antibiótico B = curarse de la infección	A = tratarse con el antibiótico B = curarse de la infección
Cantidades mencionadas en el enunciado	Cantidades conocidas: N = 240 $n(B) = 120$ $n(A) = 100$ $n(A \cap B) = 84$ Cantidad por la que pregunta: $P(A \mid \overline{B})$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: (N = 100) $n(B) = 53$ $n(A) = 42$ $n(A \cap B) = 35$ Cantidad por la que pregunta: $P(A \mid \overline{B})$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: $P(B) = 0{,}53$ $P(A) = 0{,}42$ $P(A \cap B) = 0{,}35$ Cantidad por la que pregunta: a) $P(B \mid \overline{A})$ b) $P(\overline{A} \mid \overline{B})$

Tabla 4.6. Análisis de las cantidades que aparecen en el enunciado del Problema 10 .

PRE-TEST(F)

	A	$\overline{A}$	
B	**84**	36	**120**
$\overline{B}$	16	104	120
	100	140	**240**

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{16}{120} \cdot 100 = 13{,}33\%$$

PRE-TEST(%)

	A	$\overline{A}$	
B	**35**	18	**53**
$\overline{B}$	7	40	47
	42	58	**100**

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{7}{47} \cdot 100 = 14{,}89\%$$

TEST(P)

	A	$\overline{A}$	
B	**0,35**	0,18	**0,53**
$\overline{B}$	0,07	0,40	0,47
	0,42	0,58	**1**

a) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{0{,}18}{0{,}58} = 0{,}3103$

b) $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \dfrac{0{,}40}{0{,}47} = 0{,}8511$

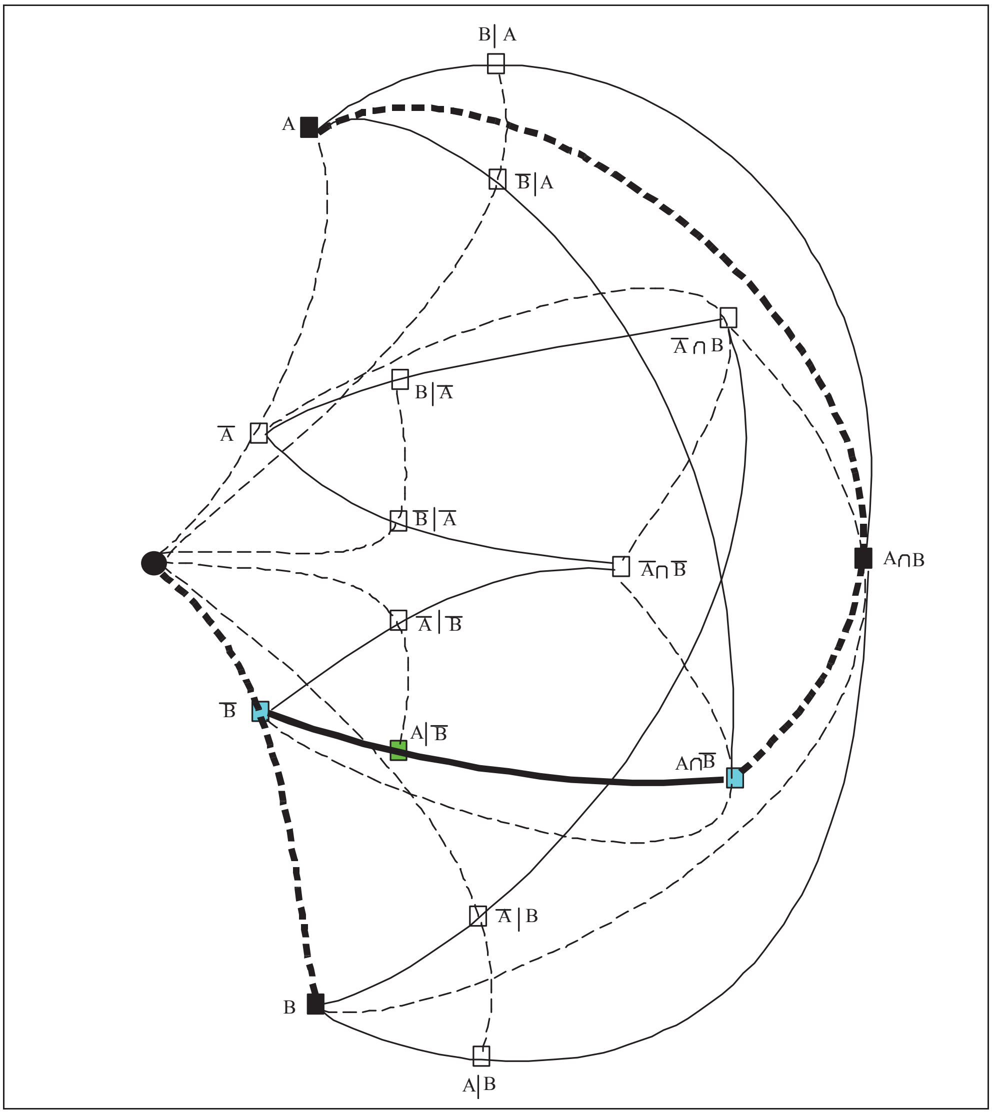


Figura 4.4. Grafo teórico asociado al Problema 10x2 en los pre-test.

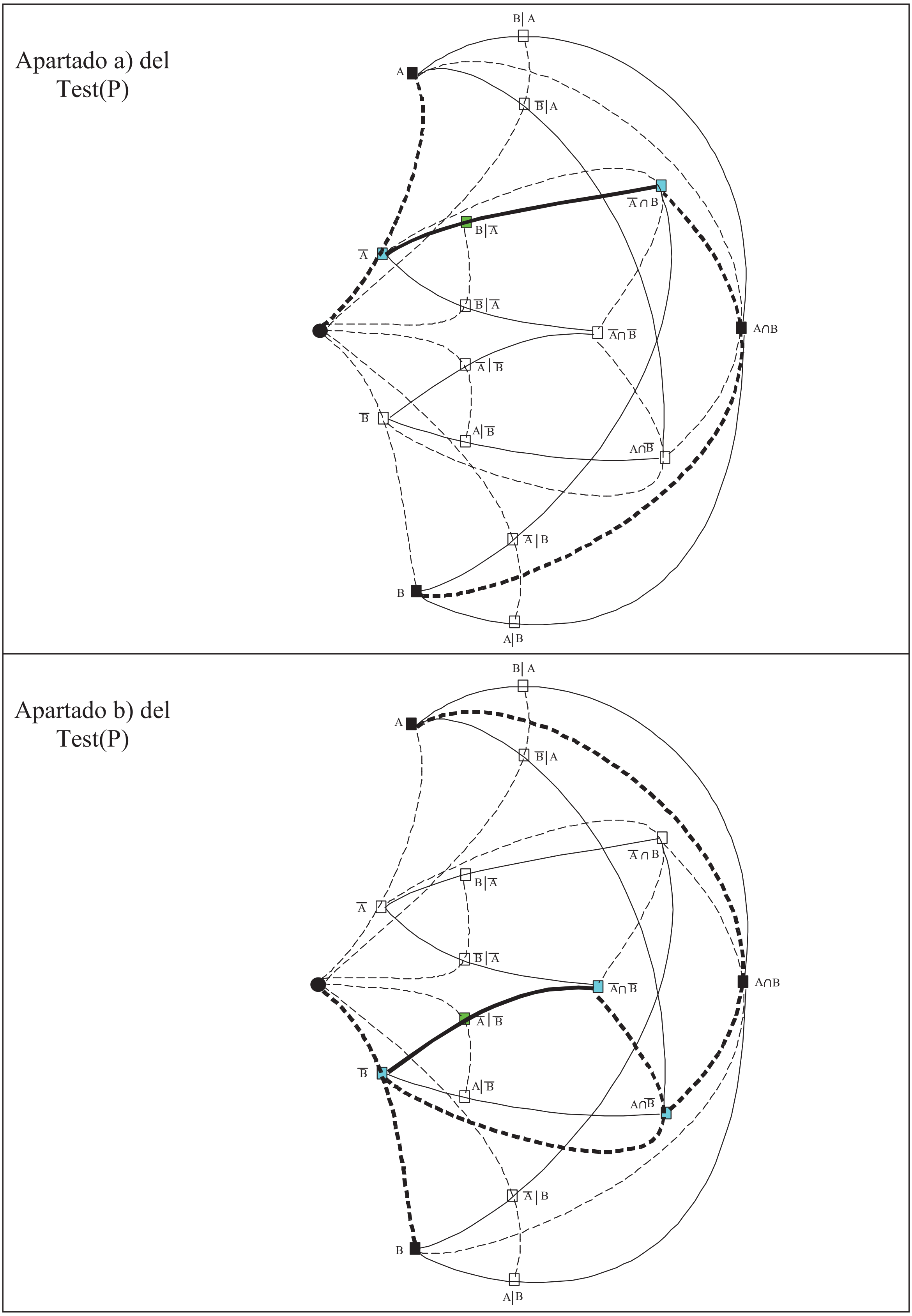


Figura 4.5. Grafos teóricos asociados al Problema 10x2 en el Test(P).

Problema 17

	PRE-TEST(F)	**PRE-TEST(%)**	**TEST(P)**
Sucesos básicos	A = padecer tuberculosis B = dar positivo en el test	A = padecer tuberculosis B = dar positivo en el test	A = padecer SIDA B = dar positivo en el test
Cantidades mencionadas en el enunciado	Cantidades conocidas: N = 30 $n(A)=17$ $n(B)=14$ $n(A \cap \overline{B})=7$ Cantidad por la que pregunta: $P(B \mid \overline{A})$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades Conocidas: (N = 100) $n(A)=57$ $n(B)=47$ $n(A \cap \overline{B})=23$ Cantidad por la que pregunta: $P(B \mid \overline{A})$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: $P(A)=0{,}57$ $P(B)=0{,}47$ $P(A \cap \overline{B})=0{,}23$ Cantidad por la que pregunta: a) $P(B \mid \overline{A})$ b) $P(A \mid B)$

Tabla 4.7. Análisis de las cantidades que aparecen en el enunciado del Problema 17 .

PRE-TEST(F)

	A	$\overline{A}$	
B	10	4	**14**
$\overline{B}$	**7**	9	16
	17	13	**30**

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{4}{13} \cdot 100 = 30{,}77\%$$

PRE-TEST(%)

	A	$\overline{A}$	
B	34	13	**47**
$\overline{B}$	**23**	30	53
	57	43	**100**

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{13}{43} \cdot 100 = 30{,}23\%$$

TEST(P)

	A	$\overline{A}$	
B	0,34	0,13	**0,47**
$\overline{B}$	**0,23**	0,30	0,53
	0,57	0,43	**1**

a) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{0{,}13}{0{,}43} = 0{,}3023$

b) $P(A \mid B) = \dfrac{0{,}34}{0{,}47} = 0{,}7234$

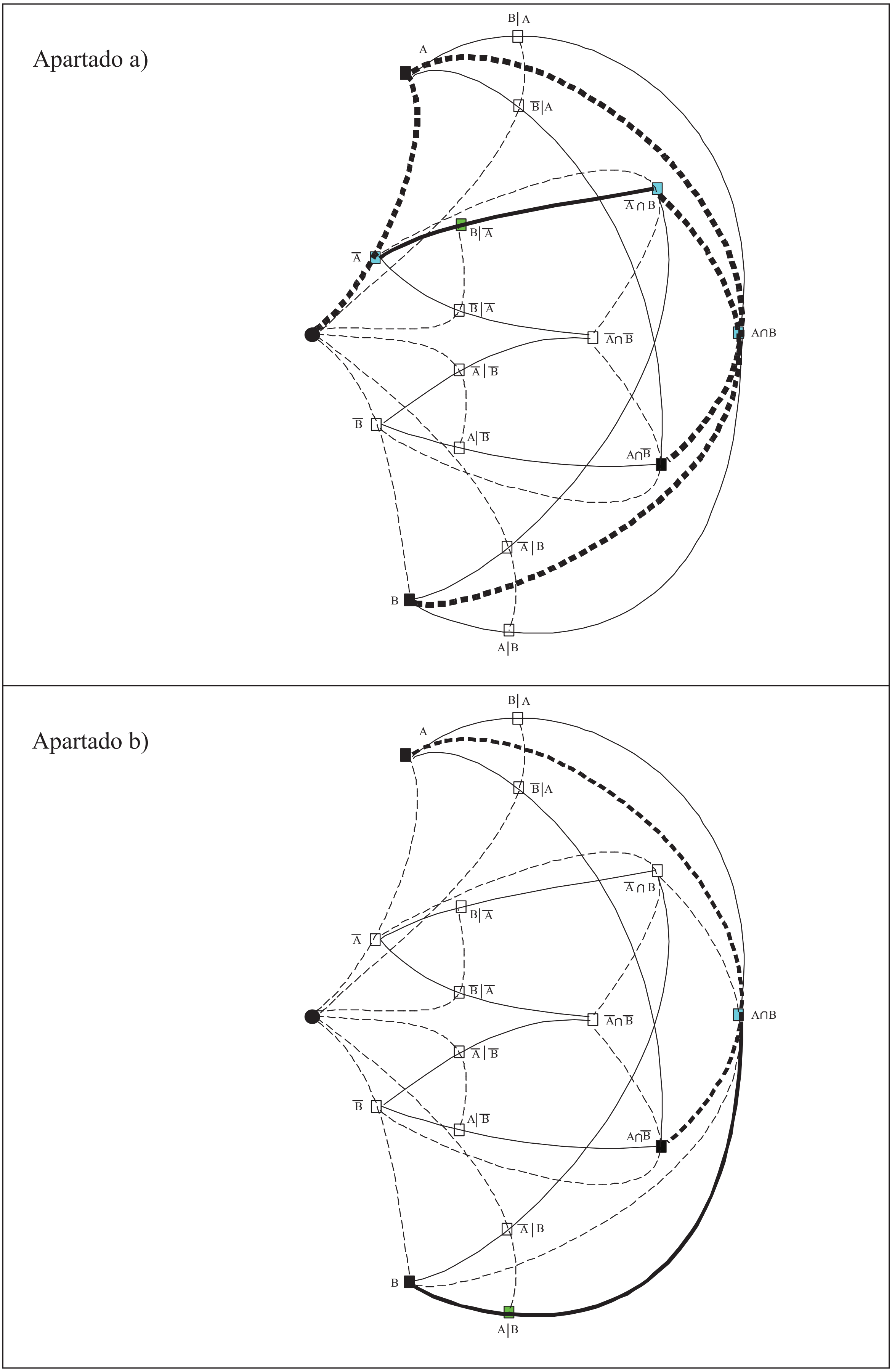


Figura 4.6. Grafos teóricos asociados al Problema 17.

Problema 18a

	PRE-TEST(F)	PRE-TEST(%)	TEST(P)
Sucesos básicos	A = ser una pieza correcta B = ser una pieza calificada como correcta por el dispositivo	A = ser una pieza correcta B = ser una pieza calificada como correcta por el dispositivo	A = ser una pieza correcta B = ser una pieza calificada como correcta por el dispositivo
Cantidades mencionadas en el enunciado	Cantidades conocidas: N = 100 $n(A)=95$ $n(B)=77$ $n(\overline{A}\cap\overline{B})=4$ Cantidad por la que pregunta: $P(A\mid B)$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades Conocidas: (N = 100) $n(A)=95$ $n(B)=77$ $n(\overline{A}\cap\overline{B})=4$ Cantidad por la que pregunta: $P(A\mid B)$ (expresada en tanto por cien)	Cantidades conocidas: $P(A)=0{,}95$ $P(B)=0{,}77$ $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}04$ Cantidad por la que pregunta: a) $P(B\mid A)$ b) $P(A\mid B)$

Tabla 4.8. Análisis de las cantidades que aparecen en el enunciado del Problema 18a .

PRE-TEST(F)

	A	$\overline{A}$	
B	76	1	**77**
$\overline{B}$	9	**4**	13
	95	5	**100**

$$P(A\mid B)=\frac{76}{77}\cdot 100=98{,}70\%$$

PRE-TEST(%)

	A	$\overline{A}$	
B	76	1	**77**
$\overline{B}$	9	**4**	13
	95	5	**100**

$$P(A\mid B)=\frac{76}{77}\cdot 100=98{,}70\%$$

TEST(P)

	A	$\overline{A}$	
B	0,76	0,01	**0,77**
$\overline{B}$	0,19	**0,04**	0,23
	0,95	0,05	**1**

a) $P(B\mid A)=\dfrac{0{,}76}{0{,}95}\cdot 100=0{,}8000$

b) $P(A\mid B)=\dfrac{0{,}76}{0{,}77}\cdot 100=0{,}9870$

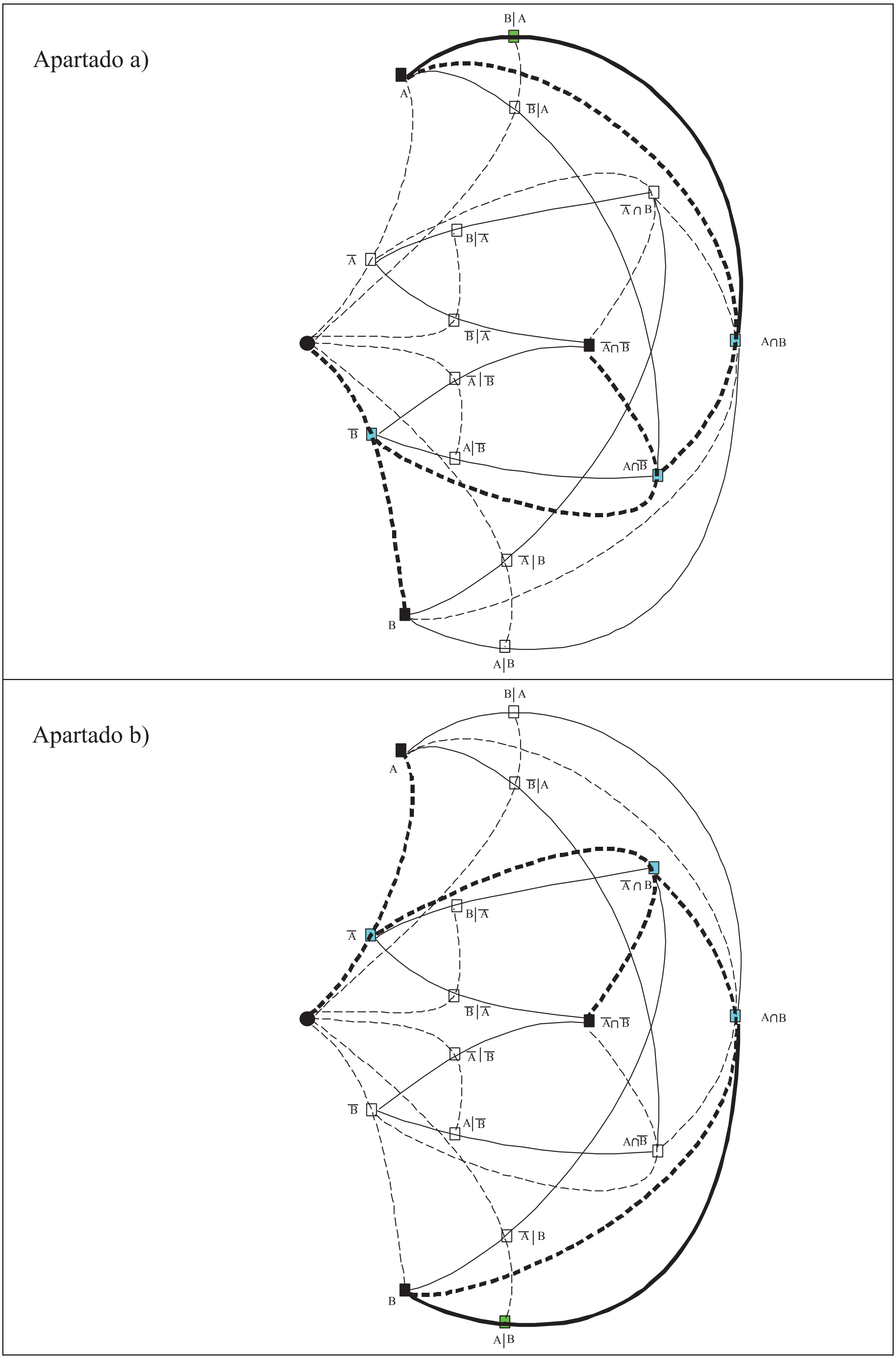


Figura 4.7. Grafos teóricos asociados al Problema 18a.

4.5 – ADMINISTRACIÓN DE LAS PRUEBAS.

Se administraron las pruebas a un grupo de nueve estudiantes de 4º de la ESO, que cursaban la asignatura de Matemáticas Opción B[18], en la Sección de Educación Secundaria Obligatoria del IES Alto Palancia, en Viver (Castellón). Esta muestra de estudiantes constituye el estudio local del más amplio realizado en el proyecto EDU2008-03140.

De ellos, se sabe con certeza que ocho no habían recibido enseñanza previa en probabilidad. En cambio, un estudiante (al que identificamos por R.), recién incorporado al centro y repitiendo curso, sí había estudiado probabilidad anteriormente.

Las pruebas fueron administradas en horario lectivo, por la investigadora que era, además, la profesora de Matemáticas del grupo. Cada una de las pruebas se realizó en una sesión de la asignatura de Matemáticas, por lo que el tiempo estaba limitado a 50 minutos. En cada sesión, una vez entregados los cuestionarios y antes de comenzar, la investigadora leía las instrucciones en voz alta e insistía en la importancia de su cumplimiento para el éxito de la investigación.

Puesto que las pruebas se realizaron sin previo aviso a los estudiantes y debido a varias circunstancias (entre ellas, la falta de asistencia a clase por parte de algunos alumnos en el momento de administrar las pruebas), hay ciertas variaciones en el número de pruebas y el tipo de registro que disponemos de cada estudiante:

Las estudiantes designadas con las letras M. y A. realizaron el Pre-test(F) con posterioridad al resto de estudiantes, por estar ausentes el día en que se administró dicha prueba. Se decidió entonces filmarlas resolviendo los problemas conjuntamente, en la pizarra, para disponer también de resoluciones con este tipo de registro.

El estudiante R. no realizó el Pre-test(%).

Las Tablas 4.9 y 4.10 resumen las pruebas recabadas.

---

[18] El DECRETO 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana, vigente en el curso escolar en el que se llevó a cabo la investigación, contempla dos opciones para la asignatura de Matemáticas, con currículos diferenciados, tal y como se indica en el artículo 7, punto 2, del citado decreto, que reza textualmente:

> *"En las condiciones que establezca la conselleria competente en materia de educación, la materia de Matemáticas de cuarto curso se organizará en dos opciones, de las que el alumnado cursará una. La opción A tendrá carácter terminal y la opción B carácter propedéutico. Los respectivos currículos se incluyen en el anexo de este decreto."*

En cuanto a los contenidos sobre Probabilidad, la diferencia más destacable entre los currículos de ambas opciones es el hecho de que para la Opción B se hace mención expresa a la Probabilidad Condicionada, mientras que esto no ocurre en el caso de la Opción A.

Pre-test(F)		Pre-test(%)	Test(P)
Producciones escritas	Filmaciones	Producciones escritas	Producciones escritas
7	1 (de dos estudiantes)	8	9

Tabla 4.9. Número de pruebas recabadas para cada cuestionario.

Más detalladamente, considerando caso por caso:

Caso	Instrucción previa en Probabilidad	Pre-test(F)		Pre-test(%)	Test(P)
		Producción escrita	Filmación	Producción escrita	Producción escrita
C.	No	✓	∅	✓	✓
B.	No	✓	∅	✓	✓
R.	Sí	✓	∅	∅	✓
L.	No	✓	∅	✓	✓
T.	No	✓	∅	✓	✓
V.	No	✓	∅	✓	✓
H.	No	✓	∅	✓	✓
A.	No	∅	✓	✓	✓
M.	No	∅	✓	✓	✓

Tabla 4.10. Pruebas recabadas por cada estudiante.

4.6 – LA OBTENCIÓN DE PROTOCOLOS AUDIOVISUALES Y SUS CORRESPONDIENTES PROTOCOLOS ESCRITOS.

A lo largo de la investigación se obtuvieron protocolos audiovisuales en dos ocasiones: con motivo de la realización del Pre-test(F) por parte de las estudiantes A. y M. y durante la secuencia de enseñanza, con la filmación parcial de dos sesiones de clase. Para su obtención se tuvo en cuenta la metodología aplicada en investigaciones previas en resolución de problemas en las que se usa esta técnica (Puig, 1996; Villegas y Castro, 2003; Villegas, Castro y Gutiérrez, 2009)

En el primer caso la filmación se llevó a cabo en el aula habitual del grupo y la cámara enfocaba a las dos resolutoras que estaban colocadas de cara a la pizarra y resolvían los problemas en ella. El contrato que se estableció con las estudiantes fue que trabajaran cooperativamente y hablaran en voz alta y clara. Durante la sesión de grabación, se encontraban presentes, además de la investigadora, el investigador principal del proyecto EDU2008-03140 y otro de los investigadores. La intervención de los investigadores fue mínima. Se intentó en lo posible no interrumpir a las resolutoras, salvo en contadas ocasiones en las que éstas parecían encontrarse atascadas y se estimó oportuno hacer algún comentario para desbloquear el proceso de resolución.

En cuanto a las dos sesiones de clase filmadas, éstas tuvieron lugar también en el aula habitual del grupo y consistieron en la puesta en común y discusión (a nivel grupal) de la resolución de sendos problemas de nivel N_0. La grabación se realizó sin asistencia alguna, por lo que la cámara se encontraba fija, sobre la mesa de la profesora, y sólo captaba una pequeña zona del aula. Por este motivo, para su análisis no se tuvo en cuenta el contenido visual sino el audio, es decir, las producciones orales registradas.

Una vez obtenidos los protocolos audiovisuales se procedió a la trascripción de los mismos, obteniendo los correspondientes protocolos escritos. Este trabajo fue realizado por la investigadora. El primer paso consistió en segmentar el protocolo oral en diferentes ítems. Siguiendo a Puig (1996) hemos considerado como ítem cualquier fragmento de conversación que se produce sin interrupción. Así, los ítems vienen delimitados por cada alternancia de interlocutor o por silencios prolongados entre dos intervenciones seguidas de un mismo interlocutor. Por otra parte, hemos puesto especial cuidado en reflejar aspectos que tienen que ver con las pausas y la entonación a través de los signos de puntuación.

El protocolo escrito, dividido en ítems, nos proporcionó un material de trabajo para el análisis de las producciones orales y la forma en que se realizó este análisis vino determinada por los objetivos que se perseguían en cada caso. Así, los protocolos correspondientes a las resoluciones de los problemas del Pre-test(F) realizadas por A. y M. se analizaron con ayuda del "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional", tal y como se explicará en el apdo. 4.9.3.1 de este capítulo (p. 155), con el objetivo de detectar las actuaciones competentes, errores y dificultades en el proceso de resolución. En el caso de los protocolos correspondientes a las filmaciones realizadas durante las sesiones de enseñanza, lo que nos interesaba era observar y poder mostrar cómo se enseñó la competencia en la resolución de problemas de nivel N_0 con el uso de la tabla de contingencia y siguiendo el modelo de fases descrito en el apdo. 3.7 del marco teórico (p. 84). En ambos casos, pero especialmente en este último caso, resulta útil la división de los protocolos en episodios, entendiendo por episodio cada espacio de tiempo en el que un resolutor o un grupo de resolutores están ocupados en una acción específica (Villegas y otros, 2009). Las acciones sobre las que vamos a centrar la atención son las propias de las distintas fases que hemos definido para la resolución de los problemas de nivel N_0 (organización de la información contenida en el enunciado; obtención de cantidades intermedias; cálculo del porcentaje o probabilidad condicional por la que se pregunta y respuesta completa a la pregunta del problema). Así, cada episodio se caracterizará porque las acciones que en él se desarrollan corresponden a una misma fase. En el caso de la resolución en grupo de un problema de nivel N_0 durante la enseñanza, la división en episodios es bastante clara y el modelo de fases se recorre de manera lineal, al tratarse de una resolución dirigida por la profesora. Mostraremos esta división en episodios cuando analicemos y comentemos dicho protocolo en el apdo. 4.8.3 (p. 131) . En el caso de la resolución de los problemas del Pre-test(F) por parte de las estudiantes son frecuentes las "vueltas atrás" durante el proceso de resolución, cuando aparecen dificultades y bloqueos, por lo que las fases no siempre se recorren linealmente y la división en episodios resulta más compleja. Lo que mostraremos de cada una de estas resoluciones es un grafo, el *grafo de la resolución* (véase apdo. 4.9.3.1.1, p. 156), que sintetiza todo el proceso en términos de cantidades y relaciones entre cantidades usadas, y en el que quedan reflejados los errores cometidos por las estudiantes. La división en episodios en este caso no se muestra explícitamente pero está implícita en el proceso de traducción de la resolución al grafo realizado por la investigadora y cuyo método se expone en el citado apdo. 4.9.3.1.1.

4.7 – DISEÑO DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA.

Lo que hemos identificado como Fase III de nuestra investigación consistió en el diseño y aplicación de una unidad didáctica sobre probabilidad (y en particular, sobre probabilidad condicional) basada, exclusivamente en la resolución de problemas de probabilidad en contexto, tal y como éstos se entienden en el ámbito de la Educación Matemática Realista (véase, por ejemplo, Gravemeijer y Doorman, 1999).

Para el diseño de los problemas se tuvieron en cuenta las tres variables de la tarea que hemos descrito anteriormente: la estructura de datos, el formato de los datos y el contexto. Así, la gran mayoría de los problemas propuestos son PTPC de nivel N_0, en los que va variando la estructura de datos (categorías y casos), el formato de los datos (frecuencias absolutas, porcentajes o probabilidades) y los contextos en los que se formulan.

En total, se prepararon 18 problemas, organizados en 4 fichas que contenían entre 4 y 6 problemas cada una. El único objetivo de la división en fichas era proporcionar el material en diferentes entregas y poder modificar así la propuesta, en función de la evolución del proceso. Las fichas incluían tanto PTPC como otro tipo de problemas de probabilidad condicional que la profesora estimó oportuno incluir para que el modelo de enseñanza no sólo estuviera al servicio de la investigación sino que también permitiera cubrir los contenidos que marcaba el currículo oficial, los cuales pueden consultarse en el Anexo 6 (p. 413).

Las Tablas 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14 resumen las principales características de los problemas de cada ficha. Hay que señalar que la mayoría de problemas presentan más de un apartado para la pregunta. Rigurosamente, esto daría lugar a tantos problemas como apartados presentase el enunciado. En el caso de los PTPC, estos problemas tendrían en común la parte informativa y como consecuencia, todos ellos serían del mismo nivel y categoría, pudiendo diferenciarse en el tipo (T_1, T_2 y T_3). No obstante, tal y como se hizo para la elaboración del listado de problemas de $N_{0,}$ se han englobado bajo un mismo nombre a todos los problemas que comparten la parte informativa del enunciado. Sobre la estructura de datos, las tablas ofrecen información sólo acerca del nivel, de la categoría y, cuando el problema es de nivel N_0, del caso. Los enunciados de estos problemas, con todas sus preguntas, pueden consultarse en el Anexo 7 (p. 415).

Dejando de lado los problemas de probabilidad condicional no ternarios y los problemas ternarios de nivel N_1 y N_2 (puesto que no son objeto de esta investigación), justificaremos, a continuación, el orden de presentación de los PTPC de nivel N_0.

Puesto que ocho de los nueve estudiantes no habían estudiado probabilidad anteriormente, se decidió comenzar por un problema de categoría C_0, en el contexto estadístico social y con los datos expresados en frecuencias absolutas, que son los tres valores de las variables para los que era esperable que surgieran menos dificultades (Carles y otros, 2009). Constaba de once apartados en los que se preguntaba por un porcentaje (porcentajes que en tanto por uno serían probabilidades marginales, de la intersección y condicionales por las que se podría preguntar) y un último apartado en el que aparece por primera vez el concepto de probabilidad. A partir de ese momento, en todos los PTPC las preguntas se expresan en términos de probabilidad, puesto que se trata de una unidad de enseñanza sobre probabilidad.

En los tres problemas siguientes se fija la variable formato de datos y sólo se modifican las variables contexto y estructura de datos. Así, le siguen tres problemas, con los datos expresados en forma de frecuencias absolutas pero de diferentes categorías y planteados en los otros tres contextos objeto de estudio: estadístico salud, test de diagnóstico en el contexto del control de calidad y test de diagnóstico en el contexto de la salud. De esta manera, quedan explorados los cuatro contextos y las tres categorías, en el formato de datos que, según estudios anteriores (Lonjedo, 2007), resulta más natural para los estudiantes.

A continuación, se presentan dos problemas con los datos numéricos expresados en porcentajes y, por último, cuatro problemas en los que los datos numéricos son probabilidades. Estos seis últimos problemas de nivel N_0 presentan diferentes estructuras de datos (variando tanto la categoría como los casos dentro de cada categoría) y se formulan en los diferentes contextos antes mencionados.

Ficha I

Problema	Contexto	Estructura de datos	Formato de datos
Problema 1	Estsocial	N_0C_0 Caso único	Frecuencias
Problema 2	Estsalud	N_0C_2 Caso 3	Frecuencias
Problema 3	Diagcalidad	N_0C_1 Caso 3	Frecuencias
Problema 4	Juegos de azar	–	–
Problema 5	Juegos de azar	–	–

Tabla 4.11. Características de los problemas de la Ficha I de la unidad de enseñanza.

Ficha II

Problema	Contexto	Estructura de datos	Formato de datos
Problema 1	Diagsalud	N_0C_0 Caso único	Frecuencias
Problema 2	Estsalud	N_0C_0 Caso único	Porcentajes
Problema 3	Estsocial	N_0C_2 Caso 3	Porcentajes
Problema 4	Juegos de azar	–	–
Problema 5	Elecciones aleatorias	–	–
Problema 6	Juegos de azar	–	–

Tabla 4.12. Características de los problemas de la Ficha II de la unidad de enseñanza.

Ficha III

Problema	Contexto	Estructura de datos	Formato de datos
Problema 1	Estsalud	N_0C_1 Caso 3	Probabilidades: decimales
Problema 2	Diagsalud	N_0C_2 Caso 2	Probabilidades: decimales
Problema 3	Estsocial	N_0C_2 Caso 1	Probabilidades: fracciones
Problema 4	Juegos de azar	–	–
Problema 5	Estsocial	N_1C_2	Porcentajes
Problema 6	Matemático no simbólico	N_1C_2	Probabilidades

Tabla 4.13. Características de los problemas de la Ficha III de la unidad de enseñanza.

Ficha IV

Problema	Contexto	Estructura de datos	Formato de datos
Problema 1	Estsocial	N_2C_1	Probabilidades
Problema 2	Estsocial	N_1C_1	Frecuencias
Problema 3	Estsocial	N_2C_1	Frecuencias
Problema 4	Test de diagnóstico en el contexto del Derecho	N_0C_2 Caso 1	Probabilidades: decimales

Tabla 4.14. Características de los problemas de la Ficha IV de la unidad de enseñanza.

4.8 – APLICACIÓN DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA.

La enseñanza se llevó a cabo al final del tercer trimestre, como último bloque de contenidos, en 13 sesiones de 50 minutos cada una. En la sesión número 12 se realizó el examen final de la asignatura de Matemáticas (que incluía 3 TPCP de nivel N_0) y en la sesión número 13 se administró el Test(P). El resto de sesiones se dedicó a la resolución de los problemas descritos en el apartado anterior. Los problemas se resolvieron en el orden en que aparecían en las fichas, ya que la secuenciación no era casual sino intencionada, y guardaba relación con las variables de la tarea: formato de datos, estructura de datos y contexto. Hay que destacar que no se llegaron a resolver los dos últimos problemas (Ficha IV, problemas 3 y 4) por falta de tiempo.

4.8.1 – Metodología de enseñanza.

La metodología de enseñanza que se usó está en consonancia con los principios de la Educación Matemática Realista, que han sido enunciados por Van den Heuvel-Panhuizen (2010, pp. 4 y 5) como: principio de actividad ("activity principle"), principio de realidad ("reality principle"), principio de los niveles ("level principle"), principio de las interconexiones ("intertwinement principle"), principio de interactividad ("interactivity principle") y principio del descubrimiento dirigido ("guidance principle"). Seguidamente, describimos cómo se han aplicado estos principios en el contexto particular de nuestra investigación.

Principio de realidad

En primer lugar, las tareas propuestas a los estudiantes fueron, exclusivamente, problemas formulados en contextos realistas. De hecho, se dedicó gran parte de las sesiones a la exploración de los contextos y de los fenómenos involucrados en esos contextos que podían ser modelizados por la probabilidad condicional (efectividad de un tratamiento con antibióticos, falsos positivos en el uso de pruebas diagnósticas, etc.). Además, los problemas no se presentaron únicamente al final de la unidad de enseñanza, como problemas de aplicación, sino que se plantearon y resolvieron problemas desde un principio, es decir, los problemas actuaron como precursores de los contenidos matemáticos a enseñar y no sólo como tareas para la puesta en práctica de estos contenidos, como ocurriría en una enseñanza de corte mecanicista.

Principio de las interconexiones

Por otra parte, la EMR promueve un curriculum de matemáticas integrador, que se despliegue en el aula por medio de actividades que pongan de manifiesto las numerosas interrelaciones entre los diferentes campos de conocimiento de las matemáticas (principio de las interconexiones). Aunque los problemas de nuestra propuesta de enseñanza se sitúan en el campo de la probabilidad y concretamente, en el de la probabilidad condicional, también son susceptibles de ser tratados como problemas interdisciplinares: primero, porque el hecho de usar formatos variados en la formulación de los datos (frecuencias, porcentajes, fracciones, etc.) hizo que los estudiantes pusieran en juego contenidos propios de otras áreas de las matemáticas, especialmente de la aritmética y el álgebra; y segundo, porque a través de los contextos en los que estaban formulados, fue posible establecer conexiones con áreas de conocimiento de otras disciplinas. Así, por ejemplo, los problemas formulados en el contexto Diagsalud, permitieron tratar conceptos propios de las ciencias de la salud, como el de prevalencia de una determinada enfermedad o los errores en el uso de pruebas diagnósticas (los denominados falsos positivos y falsos negativos).

Principio de actividad y principio de interacción

Centrándonos ahora en la actividad en el aula, debemos destacar que los estudiantes tuvieron una participación muy activa durante las clases. Al final de cada sesión se pedía a los estudiantes que trataran de resolver uno o dos problemas en casa que al día siguiente eran resueltos en clase mediante las aportaciones de todo el grupo, lo cual daba lugar a pequeños debates en los que se discutían los diferentes puntos de vista y estrategias usadas por los estudiantes. El reducido número de alumnos en el grupo hizo posible crear un ambiente de trabajo distendido y colaborativo, en el que los estudiantes se hacían propuestas, se planteaban preguntas y se resolvían dudas entre sí con gran espontaneidad.

Principio del descubrimiento dirigido

Por otra parte, el papel de la profesora se limitó al de guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así, no se presentó un método de resolución para un problema modelo que los estudiantes tuvieran que reproducir en problemas similares, como es habitual cuando se aplica una metodología de enseñanza de tipo mecanicista. Por el contrario, los estudiantes se enfrentaron a los problemas con sus conocimientos previos y sus propias estrategias de resolución y ante la aparición de dificultades y preguntas, la profesora fue introduciendo conceptos matemáticos (como el de suceso, probabilidad, etc.), notación (para los diferentes tipos de sucesos, para denotar la probabilidad condicional, etc.) y el uso de herramientas heurísticas, como la tabla de contingencia.

Principio de los niveles

El principio de los niveles consiste en ofrecer al estudiante la oportunidad de adquirir progresivamente mayores niveles de comprensión, abstracción y formalidad en relación a los contenidos matemáticos que son objeto de aprendizaje, proceso en el que los modelos juegan un papel muy importante (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). En el apartado siguiente veremos cómo usamos la tabla de contingencia como modelo para la enseñanza de la probabilidad condicional y cómo esta herramienta fue útil para atender al principio de los niveles.

4.8.2 – La tabla de contingencia como modelo.

La tabla de contingencia fue un elemento clave en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas de nivel N_0, no sólo por el hecho de ser una herramienta heurística útil para la resolución de estos problemas, como avanzamos en el marco teórico, sino también por su capacidad de actuar como modelo, en el sentido con el que se usa este término en la EMR, es decir, como elemento matematizador.

Los enunciados de los problemas que se presentaron a los estudiantes eran textos que describían situaciones de incertidumbre más o menos realistas, expresados en lenguaje verbal, no matemático. El uso de la tabla de contingencia como medio de organización de la información contenida en los enunciados supuso un primer paso hacia la matematización (horizontal) de estos problemas, ya que su construcción exige un análisis de las cantidades proporcionadas en el enunciado. Este análisis incluye identificar los sucesos básicos y sus complementarios, determinar cuáles son las cantidades conocidas y de qué tipo son (marginales o intersecciones) y disociar la información que hace referencia a probabilidades (o porcentajes o frecuencias, es decir, la componente numérica de la cantidad) y la que hace referencia a sucesos (descripción de la cantidad) para situar cada dato en el lugar correspondiente de la tabla. Este proceso de lectura, comprensión y análisis del enunciado del problema (que se corresponde con la fase 1 de nuestro modelo de fases descrito en el apartado 3.7, p. 84) es un requisito para la construcción de la tabla pero al mismo tiempo viene favorecido por el uso de la misma pues, como veremos, la estructura de la tabla sirve de guía en este proceso.

Hay que añadir que el efecto matematizador de esta herramienta no se limita a la primera fase de la resolución sino que se prolonga en la fase de cálculos, ya que la organización de la información mediante una tabla de contingencia hace visible la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades del problema (al menos de las cantidades que se refieren a marginales e intersecciones) y la tabla está dotada de reglas de cálculo internas que facilitan la obtención de nuevas cantidades.

Por otra parte, la tabla de contingencia también resultó ser un elemento favorecedor de la matematización vertical, por actuar como puente, o mejor dicho como ascensor, entre diferentes niveles de abstracción ("level principle"). Por ejemplo, consideramos que resolver problemas con los datos formulados en términos de probabilidades se sitúa en un nivel de abstracción superior a resolver problemas formulados en términos de porcentajes y esto, a su vez, se encuentra en un nivel superior a resolver problemas donde la información numérica viene dada en forma de frecuencias naturales. En nuestra experiencia de enseñanza, el uso de la tabla de contingencia para la resolución de los problemas ayudó a los estudiantes a transitar entre estos niveles de abstracción, gracias al alto grado de analogía existente entre la estructura y las reglas de cálculo propias de una tabla que contiene frecuencias naturales en sus celdas y las de una tabla que contiene probabilidades[19]. Asimismo, en un momento avanzado de la enseñanza, el trabajo con tablas de contingencia en probabilidad facilitó la formalización matemática del concepto de probabilidad condicional y la expresión de las relaciones entre probabilidades[20] mediante fórmulas matemáticas. En efecto, el hecho de manejar estas relaciones en los contextos en que estaban formulados los problemas y con ayuda de la estructura de la tabla, hizo que dichas relaciones cobraran sentido para los estudiantes antes de que se introdujera la notación matemática para ellas. Así, la expresión de estas relaciones mediante fórmulas supuso el colofón en el proceso de matematización y no el punto de partida, con lo cual las fórmulas no eran introducidas como una "receta" para la obtención de probabilidades sino como un medio de representación de unas relaciones que ya resultaban familiares a los estudiantes. En resumen, la tabla permitió llevar a cabo una *matematización progresiva* de los conceptos asociados a estos problemas, que es una de las ideas clave de la EMR.

Sin embargo, como señalan Dupuis y Rousset-Bert (1996) la tabla de contingencia no es una herramienta que los estudiantes produzcan de manera espontánea, sino que requiere de una enseñanza sistemática, conclusión suscrita también por Ávila (2001) y Yáñez (2001) y corroborada en nuestro propio experimento de enseñanza.

La profesora introdujo la tabla en la primera sesión, para resolver el primero de los problemas, después de que los estudiantes lo hubieran resuelto individualmente por sus propios medios. Sin embargo, su uso no fue adoptado de manera inmediata por los estudiantes para la resolución del resto de problemas porque encontraban dificultades a la hora de aplicarla, como se muestra en la trascripción que mostramos a continuación. Se trata de un fragmento correspondiente a la resolución del problema número 2 de la

---

[19] Véase apdo. 3.6.2 (p. 76) en el que mostramos tablas de frecuencias y tablas de probabilidades y sugerimos la manera en que se puede construir una tabla de frecuencias o de probabilidades, a partir de un enunciado donde la información se expresa en forma de porcentajes.

[20] Nos referimos a la relaciones entre probabilidades descritas en la Tabla 3.2 (p. 56) .

ficha I, durante la segunda sesión del proceso de enseñanza, cuya versión íntegra puede consultarse en el Anexo 8 (p. 423).

> *{5} P: […] Vale, lo primero de todo, ¿cómo habéis organizado la información? ¿Habéis organizado la información de alguna manera?*
>
> *{6} C.: Yo, con la tabla que nos diste.*
>
> *{7} P: Habéis utilizado la tabla…*
>
> *{8} Varios estudiantes en grupo: No, no.*
>
> *{9} P: Seguís sin utilizar la tabla…*
>
> *{10} A.: Yo, es que con la tabla…*
>
> *{11} L.: Es que yo, en esto, me aclaraba más con lo mío.*
>
> *{12} P: Te aclarabas más con lo tuyo… Y además, no has utilizado la tabla ¿por no saber cómo completarla o porque no la has creído útil?*
>
> *{13} L.: Porque… porque es que no… no sabía cómo…*
>
> *{14} T. (interrumpiendo a L., que sigue hablando): Pero es que… una cosa… yo es que me hice el esquema para luego hacer la tabla, pero cuando hice el esquema me di cuenta que faltan personas.*
>
> *{15} P: Vale, hiciste el esquema y ¿probaste con la tabla?*
>
> *{16} T.: No, porque como (interrupción de H.) me di cuenta de que faltaban personas, que no sabía dónde estaban esas personas, no hice la tabla…*
>
> *{17} P: No hiciste la tabla, vale. ¿A todo el mundo le han faltado personas? ¿O hay alguien que las ha encontrado todas?*
>
> *{18} B.: Yo las tengo todas.*

Algunos estudiantes encontraban dificultades en el análisis de las cantidades del problema, paso que ya hemos señalado como un requisito indispensable para la construcción de la tabla:

> *{19} P: B., tú las tienes todas. Bueno, vamos a ver, tenemos una situación ¿no? A ver, en la que en una población, pues determinados habitantes se han visto afectados por una diarrea ¿no? Y paralelamente a esto se ha descubierto que una fuente está contaminada ¿vale? y luego nos dan ciertos datos ¿vale? comparando personas que han bebido de la fuente, personas que tienen diarrea o que no la tienen…¿vale? Mmm, a ver, ¿qué cosas*

pueden pasar? O sea, seleccionamos una persona al azar ¿y qué puede pasar? ¿cuáles son los sucesos implicados aquí?

{20} L.: Que tenga diarrea o que no tenga.

{21} C.: Y que haya bebido o que no.

{22} P: Y que haya bebido o que no. Vale. Eso principalmente y, después, ¿pueden pasar otras cosas?

{23} B.: Que no haya bebido y la tenga. Y que haya bebido y no la tenga.

{24} P: ¿Esas dos cosas, sólo?

{25} C.: A ver, se pueden combinar ¿sabes?

{26} A.: Que tenga la diarrea y no haya bebido…

{27} L.: Que haya…que haya bebido y que no la tenga, no.

{28} B.: Siiií…

{29} A.: Que la tenga y no haya bebido o que la tenga y haya bebido.

{30} P: ¿Por qué no, L.? ¿Por qué, por qué si ha bebido, o sea, tú dices que si ha bebido…?

{31} L.: Porque si la fuente está contaminada, se tiene que, que contaminar…

{32} T.: Pero, a lo mejor, no le ha hecho reacción.

{33} P: A lo mejor no le ha hecho reacción…A ver, esto nos lo van a decir los números ¿vale? Los números nos van a decir también qué posibilidades hay… ¿alguien ha utilizado la tabla?

(B. y C. levantan la mano)

{34} P: ¿Dos personas sólo? O sea, que no os convencí mucho el otro día, con esto de la tabla…

En un momento posterior ({31}) encontramos que la no identificación de “las personas que faltan” puede deberse a la influencia del contexto. Es la estudiante L. quien nos da la clave, al manifestar que no cree posible que una persona haya bebido de la fuente y no tenga diarrea. En la base de estas creencias se encuentran ideas equivocadas sobre las relaciones de dependencia entre los sucesos básicos, lo cual es característico de las situaciones llamadas causalistas (Henry, 2005), como ya adelantamos en el apartado 3.3.2.3 del marco teórico (p. 49) cuando describimos el contexto Estsalud, en el que se formula este problema. Para algunos estudiantes, una persona que bebe de la fuente contaminada necesariamente tiene diarrea, de la misma manera que un paciente que sufre una infección de la piel y se trata con el antibiótico, necesariamente se cura. Una de las consecuencias es la no consideración de sucesos posibles como, por ejemplo, la intersección “haber bebido de la fuente y no padecer diarrea”, lo cual acarrea dificultades en el uso de la tabla, ya que estas cantidades “imposibles” tienen un lugar en ella. De hecho, para la resolución de este problema sólo dos de los nueve estudiantes habían hecho uso de la tabla, como queda registrado en los ítems {33} y {34}. Nos permitimos avanzar aquí una conclusión a la que llegamos tras el análisis de la actuación de los estudiantes en las diferentes fases de la investigación (en los pre-test, durante la enseñanza y en el post-test): cuando el estudiante todavía no es competente con la tabla, pesa más la influencia del contexto; cuando el estudiante ya es competente con la tabla, el conocimiento de la estructura interna de la tabla ayuda a vencer las influencias del contexto. Esto guarda relación con el doble significado que Freudenthal otorga al término modelo:

“Models of something are after-images of a piece of given reality; models for something are pre-images for a piece of to be created reality” (Freudenthal, 1975, p. 6, citado en Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

En los primeros estadios del uso de la tabla por parte de los estudiantes, ésta es una forma de organizar la información contenida en un enunciado concreto y está al servicio de la resolución de ese problema en concreto: es una post-imagen de dicha situación problemática. Posteriormente, cuando el estudiante domina su uso, la tabla actúa de pre-imagen para la resolución de los problemas; es decir, el estudiante dispone de una estructura "vacía" de cantidades y relaciones entre cantidades y busca en el enunciado información que pueda servirle para comenzar a llenarla. En otras palabras, el análisis de las cantidades del enunciado se hace desde la perspectiva de la tabla.

Así pues, la tabla de contingencia no sólo supuso una herramienta clave para la matematización de los fenómenos asociados a las situaciones y contextos en los que se formulaban los problemas sino que, además, se convirtió en un contenido de enseñanza más, tal y como establecía el currículo oficial vigente en aquel momento (D.O.C.V, 2007; véase Anexo 6 en la p. 413). En el apartado siguiente mostramos un ejemplo de cómo se enseñó a los estudiantes a resolver los problemas de nivel N_0 recorriendo todas las fases descritas en el marco teórico (apdo. 3.7, p. 84) con el uso de la tabla como herramienta heurística.

4.8.3 – Enseñanza y aprendizaje de las fases en la resolución de problemas de nivel N_0. Un ejemplo.

Como ya habíamos avanzado, para mostrar la forma en que se enseñó a los estudiantes a resolver problemas de nivel N_0 nos basaremos en la trascripción de la filmación correspondiente a la puesta en común en el aula de la resolución del problema 3 de la ficha I, en la tercera sesión de clase. Se trata de un problema de categoría C_1

(caso 3), formulado en el contexto Diagcalidad y con los datos conocidos en frecuencias absolutas, del que mostramos la parte informativa y la pregunta abierta que formula:

> *"Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 60 piezas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. Los resultados muestran que hay 6 piezas defectuosas, 5 piezas defectuosas que el test ha calificado de defectuosas y 52 piezas correctas que el test ha calificado de correctas. El dispositivo, ¿es fiable?"*

Este enunciado había sido leído en clase al final de la sesión anterior (sesión número 2) y propuesto a los estudiantes como tarea para casa.

A partir de la filmación, obtuvimos el protocolo escrito por el procedimiento descrito en el apartado 4.6 (p. 120) : primero se llevó a cabo la división en ítems y a continuación, la división en episodios, que se corresponden con las distintas fases del proceso de resolución. Concretamente, hemos distinguido los siguientes episodios en la trascripción:

- Comentarios de inicio de la clase: ítems {1} al {15}
- Fase 1 del proceso de resolución. Lectura del enunciado y organización de la información: ítems {16} al {128}
- Fase 2 del proceso de resolución. Obtención de cantidades intermedias: ítems {129} al {157}
- Fase 3 del proceso de resolución. Cálculo del porcentaje o probabilidad que se da como resultado: ítems {158} al {453}
- Fase 4 del proceso de resolución. Respuesta a la pregunta del problema: ítems {454} al {513}

Puede resultar llamativo el hecho de que la secuencia correspondiente a la fase 3 resulte tan extensa. Esto se debe a que el problema en cuestión se trata de un problema de respuesta abierta, en el que no se pregunta por una probabilidad en concreto sino que se deja en manos del resolutor decidir cómo dar una respuesta razonada a la pregunta del problema (si el dispositivo es fiable o no). Esto conduce al cálculo de todas las probabilidades condicionales posibles, pues cada una de ellas informa sobre un aspecto diferente de la fiabilidad del dispositivo y sólo es posible formarse una idea completa de la fiabilidad global del aparato si se dispone de todas ellas.

Por otra parte, aquí no mostraremos ni comentaremos todos los ítems de la trascripción (que puede encontrarse de manera íntegra en el Anexo 9, p. 433) sino aquellos que nos parecen más pertinentes para lograr nuestro objetivo de exponer la forma en que se resolvieron los problemas durante la enseñanza.

Fase 1

Para comenzar con la resolución, algunos estudiantes proponen de inmediato el uso de la tabla. Como hemos señalado anteriormente, esta herramienta había sido introducida en la primera sesión para la resolución del problema 1 de la ficha I, después de que los estudiantes se hubieran enfrentado a dicho problema con sus propias estrategias y como una manera alternativa de organizar la información del enunciado y el cálculo de cantidades intermedias. Después, en la segunda sesión de clase, la tabla fue utilizada para resolver en gran grupo el problema 2 de la ficha I, que ya había sido resuelto por los estudiantes en casa.

Volviendo a la resolución del problema que nos ocupa ahora, la profesora hace notar a los estudiantes que como paso previo a la construcción de la tabla, es necesario identificar los sucesos básicos que intervienen en el problema y representarlos de manera conveniente. Para ello es necesario distinguir entre la información numérica y las descripciones de esos números, para centrar la atención en estas últimas (la información que hace referencia a sucesos), lo cual no siempre resulta fácil para los estudiantes (veánse ítems {44} y {45}).

{19} H.: Yo he hecho una tabla.

{20} B.: Una tabla.

{21} P.: Hacemos la tabla lo primero, para organizar los sucesos ¿no? las cosas que pueden pasar…

[…]

{38} P (a la vez que A.): Vamos a ver, ¿por qué no empezamos…

{39} B.: Con la tablita…

{40} P.: ¿Por qué no empezamos desde el principio? A ver, ¿qué sucesos, qué cosas pueden pasar?

{41} B.: Que sea correcta y el test la califique como correcta.

{42} P.: Seleccionamos una pieza ¿vale?, seleccionamos una pieza al azar y pueden pasar las siguientes cosas: que sea defectuosa o que no lo sea ¿no?. ¿Cómo le llamamos a eso?

{43} B.: D, le llamamos.

{44} H.: Probabilidad de que C…

{45} P.: No, de momento, estamos hablando de sucesos ¿vale? Vamos a ver qué información nos da el problema acerca de los sucesos, las cosas que pueden pasar. Luego veremos qué información numérica

tenemos sobre esos sucesos ¿vale? A ver, sucesos, cogemos una pieza y puede ser…

{46} B.: C.

{47} P.: Puede ser C, que es correcta ¿vale?

{48} L.: O C negada.

{49} P.: O lo contrario de C, que sería…

{50} T.: Defectuosa.

{51}P.: Defectuosa. Puede ser correcta… (Escribo en la pizarra C = "la pieza es correcta") ¿vale? o …

{52} B.: La pieza no es correcta.

{53} P.: La pieza es defectuosa ¿vale? (Escribo en la pizarra $\overline{C}$ *= "la pieza es defectuosa") Vale, ¿qué más puede pasar?*

{54} B.: Que el test…

{55} T. (interrumpiendo a B.): Que la haya calificado bien…

{56} L.: Que el test haya resultado correcto o incorrecto…

{57} P.: Esa pieza es correcta o es defectuosa, ahora le pasamos el test, y el test puede calificarla como correcta o puede calificarla como…

{58} Varios: Incorrecta…

{59} P.: Defectuosa, ¿vale? Y…¿qué notación habéis utilizado?

{60} Varios (entre ellos B. y C.): Más y menos…

[…]

Así, se identifican los dos sucesos básicos y sus complementarios y se nombran usando la notación matemática habitual: letras mayúsculas, la barra para indicar la condición de suceso complementario y los signos matemáticos "+" y "-", cuyo uso es frecuente en el contexto para simbolizar, respectivamente, un resultado positivo y un resultado negativo en el test.

Una vez identificados y nombrados los sucesos básicos, se procede a construir la tabla y situar en ella la información numérica conocida. En este proceso, sin embargo, no se dejan de lado los sucesos porque como ya señalamos en el apdo. 3.5.1, pp. 58-60, cuando el resolutor toma en consideración una cantidad, lo hace teniendo en cuenta todas sus componentes, aunque sólo opere explícitamente con una de ellas. En efecto, en la tabla sólo hay cuatro celdas en las que se representan sucesos (los dos sucesos básicos y sus complementarios), pero cada una de las celdas numéricas tiene un suceso asociado, de cuya correcta interpretación depende que los datos numéricos se sitúen correctamente en la tabla.

{66} P.: Vale, eso son los sucesos, las cosas básicas que pueden suceder. Ahora tenemos que organizar, vale, la información referente a números, vale, que se refieren a esos sucesos ¿no?. Vale, a ver cómo organizamos esos números.

{67} Varios: Con la tabla.

{68} P.: Con la tabla, ¿verdad? Con la tabla.

(Dibujo en la pizarra una tabla vacía)

{69} P.: Habéis hecho la tabla… ¿cómo la habéis… cómo lo habéis dispuesto?

{70} T.: Las C arriba…

{71} L.: Yo también.

{72} P.: Correcta y no correcta (Escribo en el lugar correspondiente las letras C y $\overline{C}$)

{73} Varios: Y positivo y negativo.

{74} P.: Positivo y negativo (Escribo en el lugar correspondiente las letras + y -)

{75} T.: Yo he puesto el total, ya.

{76} P.: Vale, el total son…

{77} T. y otros: Sesenta.

{78} P.: Sesenta. El total siempre viene aquí. Sesenta. (Escribo en el lugar correspondiente el total)

{79} P.: Vale, y ahora tenemos que organizar esa información que aparece en el enunciado. Dice…

{80} B.: Seis son defectuosas.

{81} P.: Dice que seis son defectuosas.

{82} B.: En la columna de C con la barrita, abajo.

(Señalo el lugar correspondiente en la tabla)

{83} Varios: Ahí, sí.

{84} P.: Ahí, seis. Vale, muy bien.

{85} L.: ¡Ah! Y cinco…

{86} T.: Hay cinco defectuosas ...

{87} B.: ...que el test ha calificado de defectuosas. Arriba del…

En los ítems que siguen, del {89} al {112}, vemos que la estudiante T. toma como suceso básico "ser una pieza con un diagnóstico acertado". Además denota este suceso por "+" y a su complementario, "ser una pieza con un diagnóstico erróneo", por "-", signos que, en ese momento, están siendo utilizados para denotar a los sucesos "ser una pieza calificada como correcta" y "ser una pieza calificada como defectuosa", respectivamente. Esto le genera confusión y le hace discrepar de la manera en que se sitúan los números en la tabla (ítem {94}):

{88} P: A ver, a ver, a ver… no leáis tan rápido. Despacito.

{89} B.: (Lee) Cinco piezas defectuosas que el test ha calificado como de defectuosas.

{90} P: Vale.

{91} T.: En C negada, positivo.

{92} B.: Negativo.

{93} P: Lo contrario de C, negativo.

{94} T.: Nooo… No, porque las ha calificado bien. Son defectuosas y las ha calificado…

{95} B. (interrumpe a T.): Pero las ha calificado…las ha calificado como defectuosas.

{96} A. (interrumpe a B. y habla a la vez que ella): Pero… tú no te preguntas si se califican bien o mal, tú te preguntas de qué las ha calificado.

{97} L.: El test te las califica bien.

{98} T.: Pero, claro, eso es la C. Pero luego el test…

{99} A.: Nooo… El test dice que el dispositivo la ha calificado de defectuosa, negativo.

{100} B.: Está bien, porque las ha calificado bien pero…las ha calificado de negativas.

{101} A.: A ti no te importa…

{102} L.: Claro, porque el test sí que las va a calificar bien…

(Hablan todos a la vez)

[...]

{110} T.: Porque yo puse, o sea, el positivo, ha calificado bien y el negativo, ha calificado mal, no que el dispositivo las haya calificado en defectuosas.

{111} P: ¡Ah, vale! Tú habías llamado de otra manera… Le habías dado otro significado al positivo y al negativo ¿no?

{112} T.: Claro.

Este fragmento muestra cómo la fase de lectura y comprensión del enunciado y un análisis acertado de las cantidades involucradas en el problema es un requisito imprescindible para la construcción de la tabla. Una interpretación incorrecta de los sucesos básicos del problema (los correspondientes a las cantidades marginales) hace que no sea posible organizar la información del enunciado mediante la tabla, ya que la estructura de cantidades que representa viene determinada por los sucesos que se sitúan en los márgenes, es decir, los sucesos básicos y sus complementarios.

Fase 2

Este episodio comienza cuando se han situado todos los números dados en el enunciado y la profesora pide a los estudiantes que tomen en consideración la pregunta del problema. La intención de la profesora es que los estudiantes determinen qué probabilidades se deberían obtener para dar una respuesta razonada a la pregunta de si el test es fiable o no, y a continuación, que hagan análisis para ver qué cantidades son necesarias para obtener estas probabilidades. No obstante, los estudiantes sugieren que, primero, se termine de completar la tabla y la profesora accede (para evitar que la resolución resulte excesivamente dirigida):

{128} P.: […] Vale, bueno, eso es lo que nos da el enunciado. Ahora tenemos que decidir si el test es fiable o no. ¿Cómo?

{129} C.: Pero primero completas.

{130} B.: Claro. Acaba. El uno y el siete…

{131} P: Completamos la tabla, para tener todos los números ¿no?

Como consecuencia, los estudiantes no hacen análisis para resolver el problema, sino que hallan todas las marginales e intersecciones posibles, sin tomar en consideración la pregunta del problema y, por tanto, sin plantearse qué probabilidad o probabilidades necesitan hallar para dar una respuesta. Quizás, este modo de actuar venga propiciado por la naturaleza de las cantidades y las relaciones entre cantidades que se dan en la tabla: al involucrar únicamente relaciones aditivas muy intuitivas, completar la tabla resulta más inmediato que hacer análisis para averiguar qué cantidades intermedias son necesarias. También es posible que el hecho de disponer de todas las cantidades contenidas en la tabla ofrezca seguridad y confianza a los estudiantes en el proceso de resolución. Pero esto son sólo hipótesis.

Por otra parte, cuando se introdujo la tabla al final de la primera sesión de enseñanza, ésta se diseñó y se completó de manera razonada, es decir, produciendo un sentido para cada una de las marginales e intersecciones asociadas al problema y las relaciones que se establecían entre ellas. Sin embargo, el proceso acaba automatizándose y en este problema (el tercero de nivel N_0 que resuelven durante la enseñanza) los estudiantes ya completan la tabla sin reparar en el significado de las relaciones que aplican:

{132} H.: Cinco más una, y abajo el seis.

{133} P: Aquí tiene que venir una, ¿verdad?

{134} C.: Y ahí el cincuenta y tres…

{135} H.: Ahí el cincuenta y tres.

{136} C.: Un siete… El dos, a la izquierda.

{137} P: Muy bien…

{138} C.: Y un cincuenta y cuatro.

(Voy escribiendo todos estos números en la tabla)

Fase 3

Una vez construida y completada la tabla, es cuando los estudiantes dirigen su atención hacia la pregunta del problema. Como se trata de una pregunta abierta, su tarea no es interpretar la probabilidad por la que se pregunta sino decidir qué probabilidad o probabilidades necesitan obtener para dar una respuesta. La estudiante C. propone una condicional: la probabilidad de que una pieza sea calificada de correcta, dado que es una pieza correcta.

{158} C.: Yo cogí y miré la probabilidad de, entre las que ha calificado como buenas y son buenas, entre el total de buenas, ¿sabes lo que te digo? De todas las buenas que hay realmente, cuántas ha calificado de buenas, para saber…

{159} B.: Yo también. Yo hice las dos.

{160} P.: Muy bien… Tú has mirado sólo las que son buenas, y has dicho: de las que son buenas, …

{161} C.: ¿Cuántas ha calificado bien?

{162} P.: … ¿Cuántas ha calificado bien? Vale, muy bien.

{163} C.: Yo he hecho eso.

{164} P.: ¿Y cómo lo has hecho, a ver? Exactamente, ¿qué…

{165} C.: He hecho P…

{166} P.: Tú es como si seleccionaras una pieza al azar ¿vale? Seleccionamos una pieza al azar entre cuáles…

{167} C.: Entre las buenas.

{168} P.: Entre las buenas. Y tú te preguntas, ¿cuál es la probabilidad…

{169} C.: De que sea buena.

{170} P.: …de que el test te diga que es buena? Tú te sitúas en la situación en la que sabes las que son buenas y las que son malas ¿no? Tú te fijas sólo en las que son buenas, ¿no? Coges una entre las buenas ¿vale? Y te preguntas… A ver, el test ¿la calificará como buena o la calificará como mala? ¿Seguís todos a C.?

{171} Varios: Sí.

{172} P.: Vale, entonces tú vas a hallar la probabilidad de ¿qué? De que el test dé…

{173} C.: Eh… Bien.

{174} P.: Positivo, dado que…

{175} C.: Está bien.

{176} P.: Dado que la pieza es correcta. Es decir, tú vas a calcular la probabilidad de que acierte, en el caso de que la pieza sea correcta.

{177} C.: Sí.

En el fragmento anterior, la profesora adopta un papel más influyente de lo habitual y guía a la estudiante para que exprese la probabilidad que se pretende calcular en un lenguaje matemático y verbal más formal, propio de la Teoría de la Probabilidad. En concreto, está reforzando el uso del conector "dado que" para introducir, verbalmente, el suceso condicionante y la notación "P(A|B)" para la expresión matemática de la probabilidad condicionada.

A continuación, se procede a la obtención de dicha probabilidad:

[…]

{179} C.: Cincuenta y dos partido cincuenta y cuatro.

{180} P.: Cincuenta y dos partido cincuenta y cuatro.

{181} C.: Cero coma …

(Escribo en la pizarra "P(+|C) =" y a continuación, el número que C. me dicta)

{184} P.: Cero coma…

{185} C.: Nueve, seis…

{186} P.: Nueve seis…

{187} C.: Dos, nueve…

{188} P.: Dos, nueve…

{189} C.: Seis.

{190} P.: Vale, y vamos a redondear un poquito ¿no?

{191} C.: Cero coma noventa y seis, ¿no? ¿o qué?

{192} P.: Cero coma noventa y seis… (Escribo, a continuación, "$\approx 0{,}96 = 96\%$") Vale, cero coma noventa y seis. En el noventa y seis por cien de los casos, ¿no?, en el noventa y seis por cien de los casos una pieza que es buena ¿vale? es calificada como buena. ¿Vale?

Esto es, se seleccionan en la tabla las cantidades oportunas: la intersección número de piezas correctas calificadas de correctas, 52, y la marginal número de piezas correctas, 54 y se halla el cociente de la primera entre la segunda. Esto supone la asignación de una probabilidad conocidas las dos cantidades anteriores mediante una razón que puede expresarse como:

$$P(+\mid C) = \frac{n(+\cap C)}{n(C)}$$

De esta manera, los estudiantes están haciendo uso de la regla de Laplace sobre el espacio muestral restringido por el suceso condicionante. Además, esta relación puede considerarse como precursora de la fórmula que habitualmente se usa para definir la probabilidad condicional y que representa un cálculo de y entre probabilidades:

$$P(+\mid C) = \frac{P(+\cap C)}{P(C)}$$

Por tanto, los estudiantes se están familiarizando con esta relación antes de que se les introduzca formalmente.

Por otra parte, como resultado de dividir el número de piezas correctas calificadas de correctas y el número de piezas correctas se obtiene un número decimal comprendido entre cero y uno (0,96), es decir, un tanto por uno: la probabilidad de ser calificada de correcta una determinada pieza de la que se sabe que es correcta. La profesora expresa este número también en forma de porcentaje (96%) porque considera que este último es un formato más comprensible para los estudiantes. Sin embargo, así expresada, la medida tiene un significado un poco diferente, ya que puede leerse como el número de piezas que se espera sean calificadas de correctas, en una muestra de 100 piezas correctas. La profesora no se detiene sobre esta cuestión porque ya ha sido tratada en la primera sesión de clase[21] y los alumnos están familiarizados con ambos tipos de expresión. De hecho, no hacen ningún comentario al respecto.

Volviendo a la resolución del problema, la estudiante B. propone a continuación el cálculo de otra condicional, la probabilidad de que una pieza sea calificada de defectuosa dado que es defectuosa:

{193} B.: Yo he hecho lo mismo pero con las que no son correctas…

{194} P.: Claro, porque estamos viendo eh… la probabilidad de que acierte, si es buena. Pero esa probabilidad, ¿será la misma, si la pieza es mala?

{195} B.: No, es otra.

{196} P.: No tiene por qué… A lo mejor el test funciona mejor para detectar piezas…

{197} H. (interrumpiendo a la profesora): Defectuosas que correctas…

{198} P.: Que para piezas correctas. O al revés. ¿Lo veis o no? ¿Vale? ¿Qué otra probabilidad…?

{199} H.: De que el test la coja como correc… como… incorrecta, siendo correcta.

{200} B.: Siendo incorrecta.

{201} P. (a H.): Entonces, ¿entonces acierta el test?

{202} H. (rectifica): Siendo defectuosa.

{203} P.: Vale, ahora vamos a mirar, vamos a coger una pieza de entre las defectuosas, una al azar, y vamos a ver cuál es la probabilidad de que el test…

{204} A.: La califique como defectuosa.

{205} P.: El test la califique como defectuosa, que es la probabilidad de que acierte, en ese caso ¿no?

---

[21] En el apartado g) del problema 1 aparece el término "probabilidad" por primera vez, lo cual dio lugar a la discusión sobre cómo asignar un número a dicha medida y sobre las diferentes formas de expresar dicha medida, conservando su valor numérico. Aquí mostramos la parte informativa del enunciado del problema y la pregunta que se formula en el apartado g) :

La clase de 4º de la ESO está formada por 19 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 4 chicas que usan gafas, 6 chicas que no las usan y 7 chicos que tampoco usan gafas. Apdo. g) Llama un estudiante de 4º de la ESO a la puerta. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica sin gafas?

El enunciado completo puede consultarse en el Anexo 9 (p. 433).

{206} P. (a B., que parece distraída): B., ¿nos sigues o no?

{207} B.: Sí, sí.

{208} P.: ¿Sí? Vale.

(Escribo en la pizarra " $P(-\mid\overline{C})=$*")*

{209} P.: Vale. Y esa probabilidad, H.,... H..

{210} H.: Del uno partido seis...

Seguidamente, se obtienen el resto de condicionales posibles, lo que va ofreciendo a los estudiantes elementos de juicio para opinar sobre la fiabilidad del test (ítems {211} al {453}).

Para terminar, señalaremos que la profesora aprovecha el hecho de disponer de todas las condicionales para hacer ver a los estudiantes las relaciones de complementariedad a uno que se dan entre ellas. En el siguiente fragmento, vemos cómo la estudiante C. es capaz de identificar y justificar la complementariedad entre $P(+\mid C)$ y $P(-\mid C)$:

{270} P.: O el cuatro por cien, si lo redondeamos todavía más... ¿Veis alguna relación con...?

{271} C.: Sí, es lo que le queda al noventa y seis, más o menos...

{272} P.: Es lo que le queda al noventa y seis... ¿por qué...saldrá lo que le queda al noventa y seis?

{273} C.: Porque... tienes... el... de entre las correctas, las probabilidades de que lo haga bien y la que haga mal, entonces, si no lo hace bien, lo hace mal. Entonces, si sacas lo que lo hace bien, lo restas y te queda lo que lo hace mal.

{274} L.: Al cien por cien, le restas...

{275} C.: Claro.

{276} P.: Por ahí detrás... ¿estáis en lo que dice C.?

{277} Varios: Sí, sí.

{278} P.: Fijaros, en estos dos casos, tanto en éste como en éste (señalo las probabilidades correspondientes en la pizarra) estamos mirando entre las piezas correctas, ¿verdad?

{279} C.: Claro, le restas y da, da lo de arriba.

{280} P.: Y da lo de arriba, ¿verdad? O sea...eh... como miramos entre las piezas correctas, vale, las que no... las que el test no diga positivo, dirá...

{281} C.: Negativo.

{282} P.: Dirá negativo ¿no? Luego… estas probabilidades, estas probabilidades ¿cuánto suman estas probabilidades?

{283} B.: Cien.

{284} A.: Cien partido cien.

{285} P.: El cien por cien, si las expresamos en porcentajes…

{286} C.: Uno.

{287} P.: Y si las expresamos como número decimal, comprendido entre cero y uno, suman uno.

{288} C.: Entonces no hace falta, por ejemplo, los que… si tienes cuando el test es correcto no hace falta sacar cuando se equivoca, porque es restar y ya está. No hace falta hacer todo ese…

Por otra parte, la observación de la estudiante C. (ítem {288}) apoya nuestra decisión metodológica de considerar que dos probabilidades complementarias son vistas por los resolutores como opciones de pregunta equivalentes, en el sentido de que una vez obtienes una de ellas, basta aplicar una simple resta para obtener la otra.

Fase 4

El último episodio, ítems del {454} al {513} corresponde a la discusión sobre la fiabilidad del test: se comparan los valores obtenidos para diferentes probabilidades, se discute sobre las consecuencias negativas que se derivan de los errores de diagnóstico, etc. En definitiva, se reflexiona sobre los resultados obtenidos poniéndolos en relación con el contexto en que se sitúa el problema. En realidad, estas reflexiones comienzan a hacerse desde el primer momento en que se dispone de probabilidades condicionales, esto es, en el episodio anterior. Sin embargo, es en este último episodio en el que se trata de dar una respuesta razonada a la pregunta de si el test es fiable o no, aunque sólo se haga oralmente y de manera cualitativa e incluso subjetiva. A continuación mostramos cuatro ítems que resultan representativos de esto último:

{509} P.: [...] Bueno… son reflexiones. Vale. Bueno, la cuestión es que ahora podríamos decir si nos fiamos o no, pero ahora con números ¿verdad? Y con una opinión fundamentada, ¿no? Vosotros, leísteis el enunciado y dijisteis pues sí, o no, cada uno tiene una opinión ¿no? ¿Habéis mantenido esa opinión?

{510} Varios: No.

{511} P.: Primero os fiabais y ahora, no os fiais mucho ¿verdad? Porque vemos que hay casos, ¿verdad?, en los que falla bastante.

{512} C.: Porque es que… a mí ese setenta y uno por cien se me ha quedado. Eso es muy poco.

{513} P.: Eso es muy poco, ¿verdad?

Así pues, podemos resumir la manera cómo se enseñó la resolución de problemas de nivel N_0 a través de tres características: el trabajo cooperativo en gran grupo bajo la supervisión y guía de la profesora, el uso de la tabla de contingencia como herramienta heurística y la ejecución sistemática de todas las fases identificadas en la resolución de problemas de nivel N_0. El protocolo escrito que acabamos de analizar es una muestra de cómo se aplicó la unidad de enseñanza en el aula.

4.9. – ANÁLISIS DE LAS RESOLUCIONES. OBTENCIÓN DE INFORMACIÓN.

4.9.1. – Variables dependientes en la investigación.

En este apartado describiremos las variables dependientes (en el sentido de Kulm, 1979) que hemos utilizado para el análisis del comportamiento de los resolutores ante problemas de nivel N_0 y para dar cuenta de los objetivos de la investigación, entre ellos, las posibles influencias que puedan tener las variables de la tarea en este comportamiento. Estas variables surgen de la comparación de las resoluciones de los estudiantes con lo que podría considerarse una "resolución ideal", es decir, una resolución que recorre de manera exhaustiva y con éxito todas las fases descritas en nuestro modelo de fases, que recordamos de nuevo:

- Fase I: Lectura del enunciado y organización de la información.
- Fase II: Obtención de cantidades intermedias.
- Fase III: Cálculo del porcentaje o probabilidad que se da como resultado.
- Fase IV: Respuesta a la pregunta del problema.

Por otra parte, basándonos en la clasificación de Kulm (1979), hemos distinguido entre dos tipos de variables: variables del proceso y variables del resultado. Las primeras describen o miden características que tienen que ver con el proceso de resolución, es decir, con lo que el resolutor hace desde que decide abordar el problema (si lo aborda) hasta que da una respuesta a la pregunta formulada por el problema (si llega a dar una) y, por tanto, describen acciones que un resolutor ideal llevaría a cabo en las fases I, II y III del proceso de resolución. Las variables del resultado, por su parte, son las que tienen que ver con lo que el resolutor declara como respuesta a la pregunta del problema y están relacionadas con la fase IV del proceso de resolución. En nuestra investigación, todas ellas tienen en común el hecho de ser variables dicotómicas, es decir, variables con sólo dos valores posibles: el 0, que generalmente será sinónimo de ausencia de la característica o acción en cuestión; y el 1, que por el contrario, simbolizará presencia de la misma característica o acción.

A continuación, pasamos a describir con detalle cada una de las variables, indicando también las fases del proceso de resolución "ideal" con las que se relacionan.

4.9.1.1 – Variables del proceso.

Como variables del proceso hemos considerado cuatro: las variables "Abordado" y "Organización" (correspondientes a la fase I), la variable "Cálculos intermedios" (correspondiente a la fase II) y la variable "Cálculo final" (correspondiente a la fase III).

Abordado

Indica si el alumno ha abordado el problema o no. Asignamos el valor 1 a esta variable si el estudiante aborda el problema y 0 si no lo aborda. Se considera que el estudiante no aborda el problema si lo deja en blanco o simplemente escribe algún comentario explicando el motivo por el que no aborda el problema.

Organización

Hace referencia a la presencia o no de algún tipo de organización de la información proporcionada en el enunciado, por parte del estudiante, cuando realiza una lectura del problema. Describimos esta variable mediante un vector de tres componentes: (Lista, Árbol, Tabla).

Lista

Asignamos el valor 1 a la componente *Lista* cuando alguno o todos los datos del enunciado aparecen ordenados formando una lista, y el valor 0 en caso contrario. Por lista entendemos cualquier enumeración, más o menos completa, de los datos conocidos y/o desconocidos del problema, colocados uno a continuación de los otros y procedentes de una lectura analítica del enunciado. El siguiente (Figura 4.8) es un ejemplo de organización en forma de lista:

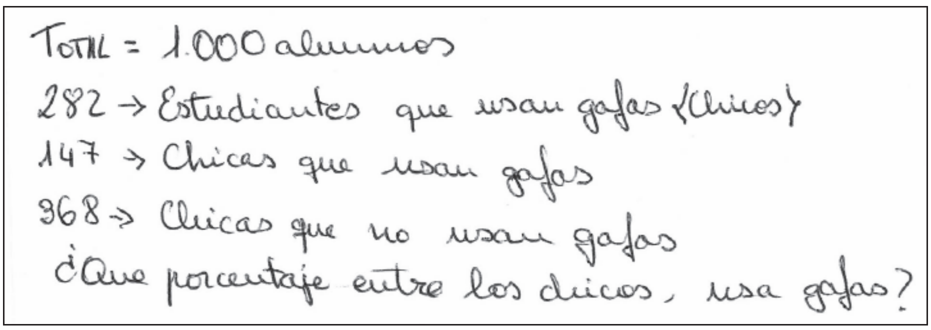


Figura 4.8. Representación de la información codificada como lista.

Árbol

Asignamos el valor 1 a la componente *Árbol*, cuando alguno o todos los datos del enunciado se organizan mediante un árbol, y el valor 0 en caso contrario. La forma canónica de este sistema de representación es la que describimos en el apartado 3.6.3 (p. 78), es decir, aquella que consiste en una ramificación del espacio muestral en dos sucesos complementarios y cada uno de estos, a su vez, en otros dos sucesos complementarios dando lugar a cuatro caminos que conducen a las cuatro intersecciones posibles. Sin embargo, esta forma de representación estándar, que suele ser proporcionada por la enseñanza, no es la única que hemos codificado como árbol. También hemos catalogado como árboles aquellos modos de organizar la información que implican o bien una distribución de las cantidades numéricas del problema a partir de la cantidad total de la muestra o bien un análisis de posibilidades para los sucesos, mostrando relaciones de complementariedad e inclusión entre éstos. Así, incluimos en esta categoría los árboles de frecuencias, descritos en el apdo. 3.6.3 (véase Figura 3.9 en la p. 80), los árboles incompletos y representaciones cuya apariencia no se asemeja a la del árbol canónico pero que verifican alguna de las condiciones anteriores.

Por ejemplo, las representaciones mostradas en las Figuras 4.9, 4.10 y 4.11 han sido codificadas como árboles:

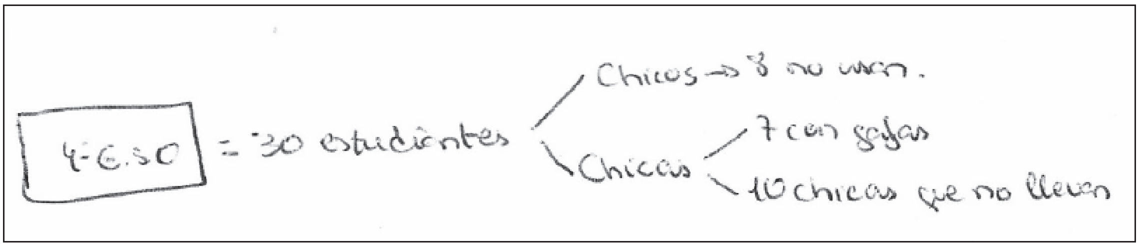


Figura 4.9. Representación de la información codificada como árbol.

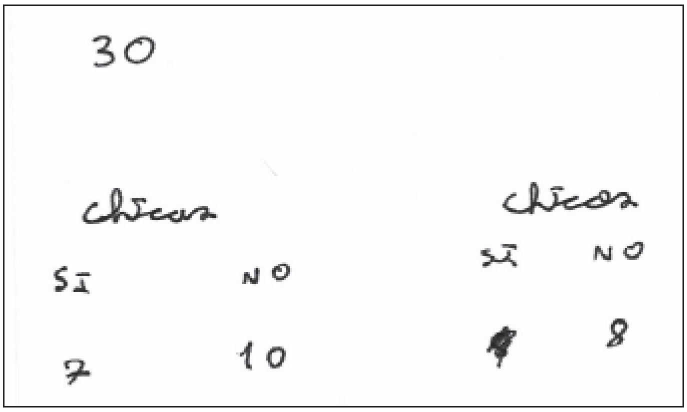


Figura 4.10. Representación de la información codificada como árbol.

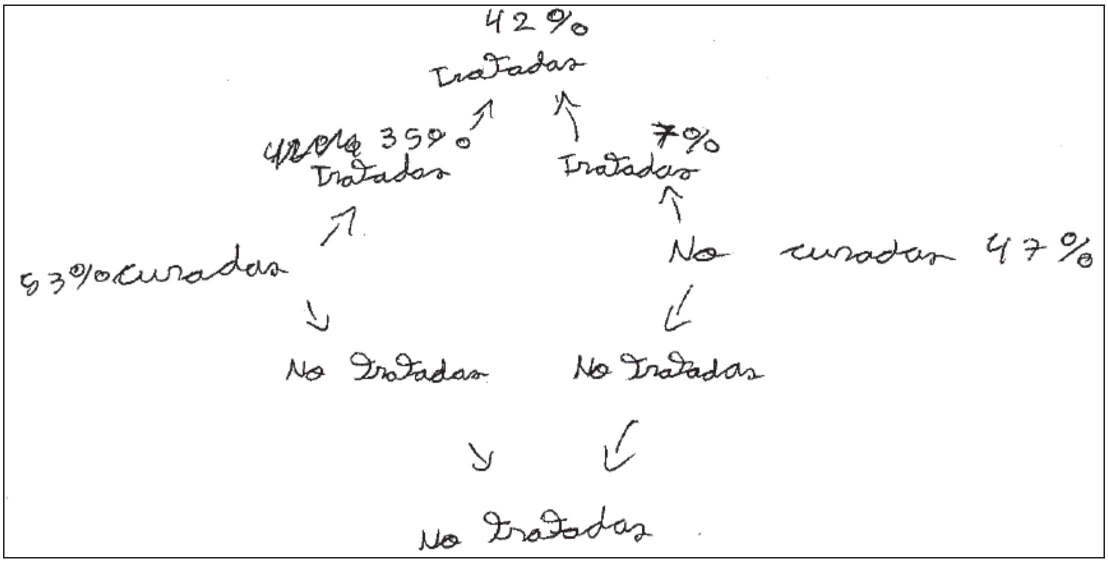


Figura 4.11. Representación de la información codificada como árbol.

Tabla

Asignamos el valor 1 a la componente *Tabla*, cuando algunos o todos los datos del enunciado aparecen organizados en una tabla de contingencia, y el valor 0 en caso contrario. Por tabla de contingencia entendemos una tabla 2x2, ampliada o de cualquier otro modo, en la que aparezcan representados por etiquetas de cualquier índole los sucesos básicos y sus complementarios, dando lugar a celdas donde representar las cuatro intersecciones, las cuatro marginales y el tamaño muestral o probabilidad total. La forma canónica de las tablas de contingencia puede consultarse en el apdo. 3.6.2 (p. 76) y, al igual que ocurre con el diagrama en árbol, suele ser proporcionada por la enseñanza. De hecho, en los pre-test ningún estudiante hace uso de la tabla, como veremos en el capítulo de resultados. El siguiente ejemplo (Figura 4.12) ha sido tomado de una resolución del post-test:

	S	$\bar{S}$	
+	0'34	0'13	0'47
-	0'23	0'3	0'53
	0'57	0'43	1

Figura 4.12. Representación de la información codificada como tabla..

Para terminar con la variable *Organización*, debemos señalar que las resoluciones pueden contener más de un tipo de representación para organizar la información del enunciado o no contener ninguno. Por ese motivo en el vector (Lista, Árbol, Tabla) es posible que una o más componentes tomen el valor 1 o que las tres componentes sean 0.

Cálculos intermedios

Después de la lectura del enunciado y la organización de la información que éste proporciona (si es que se produce dicha organización), el proceso de resolución continúa con la obtención de cantidades intermedias, es decir, cantidades no proporcionadas por el enunciado que se calculan a partir de las cantidades conocidas para llegar hasta la cantidad por la que se pregunta. La variable *Cálculos intermedios* indica si el estudiante ha realizado cálculos para obtener cantidades intermedias y si estos son todos correctos o ha cometido algún error. Describimos la variable mediante un vector de dos componentes: (Sí/No, Error)

La primera componente toma el valor 1, si el estudiante ha realizado algún cálculo y el valor 0, en caso contrario. Para que la variable tome el valor 1 no es necesario que los cálculos sean explícitos. También consideramos que el estudiante ha realizado cálculos si los realiza mentalmente y se limita a usar los resultados. En todo caso, el estudiante ha utilizado relaciones entre las cantidades de que dispone para producir nuevas cantidades.

Si la primera componente vale 0, la segunda también vale 0. En cambio, si la primera componente vale 1, la segunda toma el valor 1 si aparece algún error en los cálculos ó 0, en caso contrario.

Sobre lo que es considerado un error se hablará más adelante, pero debemos aclarar que no consideramos errores las equivocaciones en cálculos aritméticos. Tampoco consideramos que sea un error el no calcular todas las cantidades necesarias para la resolución del problema, aunque en este caso es evidente que el estudiante no podrá llegar a dar una respuesta correcta a la pregunta del problema.

Cálculo final

Esta variable hace referencia al cálculo final que el resolutor realiza para producir la condicional que finalmente se da como resultado. Este cálculo puede consistir en una regla de tres, una relación multiplicativa o una relación aditiva o incluso ser expresado de forma literal. Ahora bien, si la cantidad señalada como resultado ha sido elegida entre alguna de las cantidades conocidas proporcionadas por el enunciado o entre las cantidades intermedias calculadas, consideramos que no existe un cálculo final.

Con el objetivo de registrar no sólo si el resolutor realiza o no este cálculo, sino también si lo hace con errores o no, de nuevo usamos un vector de dos componentes de la forma: (Sí/No, Error). La primera componente toma el valor 1 si el estudiante realiza dicho cálculo y 0 en caso contrario. Si la primera componente vale 0, la segunda también vale 0. En cambio, si la primera componente vale 1, la segunda vale 1 si el estudiante comete algún error ó 0 si no comete ninguno.

Sobre lo que es considerado error, seguimos el mismo criterio que para la variable *Cálculos intermedios*.

4.9.1.2 – Variables del resultado o variables del producto.

Una vez obtenida la cantidad que se da como resultado, el siguiente paso en una "resolución ideal" sería dar una respuesta completa a la pregunta del problema, lo que hemos descrito como fase IV del proceso de resolución. Por respuesta completa entendemos una que tenga en cuenta las tres componentes de la cantidad preguntada: su valor numérico, en el formato pertinente según la pregunta del problema, y la descripción verbal de dicho número. Por ese motivo, hemos definido la variable *Resultado* como un vector de cuatro componentes: (Sí/No, Número, Descripción Correcta, Descripción Incorrecta)

La componente *Sí/No* toma el valor 1 si el estudiante llega a dar una respuesta y 0 en caso contrario. Si toma el valor 0, el resto de componentes también toman el valor 0.

Veamos qué ocurre con el resto de componentes, si la primera componente toma el valor 1.

La componente *Número* toma el valor 1 si el estudiante da un resultado numérico correcto y 0 en caso contrario. Si el valor numérico de la respuesta es incorrecto debido a un error de cálculo aritmético, esta variable no debería de ser evaluada como incorrecta (es decir, no se le debería de asignar el valor 0) siempre y cuando las cantidades y las relaciones entre cantidades conducentes a la respuesta numérica sí fueran las adecuadas. También puede ocurrir que el estudiante dé respuesta a la pregunta pero ésta no sea numérica. En este caso, la componente *Número* tomaría el valor 0.

La componente *Descripción Correcta* toma el valor 1 si el estudiante da un resultado numérico y lo describe correctamente. Es decir, el estudiante explica qué representa dicho número, y la descripción es correcta, en el sentido en que responde a la pregunta del problema. Esta componente tomará el valor 0 en cualquier otro caso. Hay que hacer notar que en el caso de que el número sea incorrecto (componente *Número* = 0), se considerará que la descripción es correcta si responde a la pregunta del problema y no si es coherente con el número hallado. Más adelante veremos cómo se ha resuelto esta dificultad metodológica en el análisis de las resoluciones. En cuanto a la componente *Descripción Incorrecta* toma el valor 1 si el estudiante da un resultado numérico y aparece la descripción del mismo, pero ésta no se corresponde con la pregunta del problema. Tomará el valor 0 en cualquier otro caso. Si las dos últimas componentes toman el valor 0, significa que el estudiante no ha escrito una descripción para el número dado como resultado.

En resumidas cuentas, el resolutor debe medir una “probabilidad condicional” formulada como pregunta del problema y la variable *Resultado* refleja si el resolutor, al dar la medida, sabe lo que está midiendo y lo expresa correcta o incorrectamente. Y con esta variable, termina el proceso de codificación de la resolución.

El siguiente esquema (Figura 4.13) muestra los diferentes itinerarios que un resolutor puede seguir a la hora de resolver un problema de nivel N_0, en función de las variables definidas anteriormente:

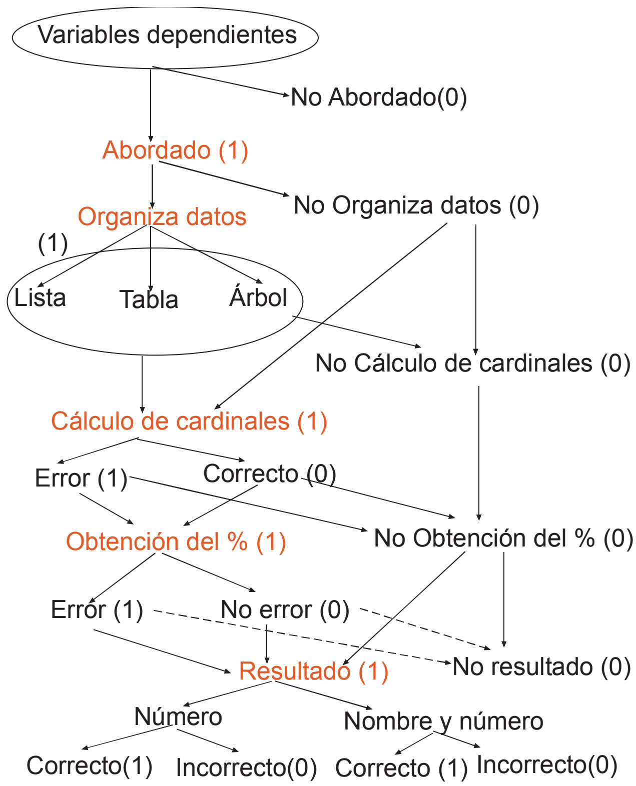


Figura 4.13. Posibles itinerarios en la resolución de un PTPC de nivel N_0, atendiendo a las variables dependientes definidas. (Elaborada por el equipo de investigación del Proyecto EDU2008-03140)

La observación de las variables anteriores en las resoluciones de los estudiantes condujo a su codificación en una hoja de cálculo, dando lugar a tablas para cada cuestionario, con el formato que se muestra en la Tabla 4.15. Hay que aclarar que en esta tabla los nombres de algunas componentes de las variables han sido sustituidos por abreviaturas. La leyenda para una correcta interpretación de las mismas es la siguiente: L por *Lista*, T por *Tabla*, S/N por *Sí/No*, E por *Error*, Núm por *Número*, DC por *Descripción Correcta* y DI por *Descripción Incorrecta*.

De esta manera, obtuvimos un total de dieciocho tablas (seis por cada cuestionario) en las que la información aparece codificada en forma de ceros y unos. Estas tablas pueden consultarse en el Anexo 10 (p. 457) y sobre ellas hablaremos en el capítulo de resultados.

<table>
<tr><th colspan="14">Problema</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Estudiante</th><th rowspan="2">Abordado</th><th colspan="3">Organización</th><th colspan="2">Cálculos intermedios</th><th colspan="2">Cálculo final</th><th colspan="4">Resultado</th></tr>
<tr><th>L</th><th>A</th><th>T</th><th>S/N</th><th>E</th><th>S/N</th><th>E</th><th>S/N</th><th>Núm</th><th>DC</th><th>DI</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 4.15. Modelo de tabla que informa sobre un problema de un cuestionario.

4.9.2. – Medidas para las dificultades de los problemas.

Las variables que acabamos de describir en el apartado anterior fueron definidas por el equipo de investigación del Proyecto EDU2008-03140 y han sido utilizadas para el análisis de 990 resoluciones de estudiantes de 15-16 años resolviendo problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal de nivel N_0 (Carles y otros, 2009). Además, esta metodología de análisis ha supuesto el punto de partida para investigaciones posteriores sobre otros tipos de problemas ternarios de probabilidad condicional (Amorós, 2012; Arnau, 2012), de las que ha surgido un esquema de análisis general, un poco más complejo que el que se acaba de mostrar.

En Carles y otros (2009) también se describen los problemas en términos de dificultades y se definen nuevas variables para la medida de estas dificultades, a partir de las variables dependientes *Abordado*, *Resultado-S/N*, *Resultado-Número*, *Resultado-DC* y *Resultado-DI*. Así, se miden las dificultades de los problemas a través de las resoluciones de los estudiantes y se estudian posibles influencias de las variables de la tarea sobre estas dificultades.

Todos estos indicadores se expresan en porcentajes (un valor del 100% indica la dificultad máxima y un valor del 0% la mínima) y en su definición intervienen las siguientes variables, relacionadas con las variables dependientes mencionadas:

Estudiantes, que representa el número de estudiantes a los que se les ha administrado la prueba en la que aparece dicho problema.

Abordados, que representa el número de estudiantes que ha abordado dicho problema.

Resultado, que representa el número de estudiantes que ha llegado a dar un resultado.

Número, que representa el número de estudiantes que han dado un resultado en el que el número (probabilidad o porcentaje) es el correcto.

Descripción, que representa el número de estudiantes que han dado un resultado en el que el número viene acompañado de una descripción del mismo.

Descorrecta, que representa el número de estudiantes que han dado una descripción correcta del resultado.

En total, se han definido seis indicadores de las dificultades: la dificultad apreciada del problema (DAP), la dificultad global del problema (DP), la dificultad del problema (DPR), la dificultad de la solución del problema (DSP), la dificultad de la descripción del resultado (DDRES) y la dificultad de la descripción correcta del resultado (DDRESC). Veamos en qué consiste cada una de estas medidas.

Dificultad apreciada del problema (DAP)

Se define como:

$$\mathrm{DAP} = 100 - \left(\frac{abordados}{estudiantes}\right)\times 100$$

La dificultad apreciada del problema pretende medir hasta qué punto el problema se aprecia como difícil de ser resuelto, basándose en el número de estudiantes que ni siquiera abordan el problema. Evidentemente las causas para no abordar un problema pueden ser variadas, pero aceptamos como mayoritaria la de apreciar el problema tan "difícil" que el estudiante no puede comenzar su resolución o simplemente decide no hacerlo. Esto, sin embargo, debería confirmarse a través de entrevistas o registros filmados.

Dificultad global del problema (DP)

Se define como:

$$\mathrm{DP} = 100 - \left(\frac{resultado}{estudiantes}\right)\times 100$$

Esta variable mide la dificultad de llegar hasta un resultado, es decir, la dificultad de llegar a dar una respuesta a la pregunta del problema, tomando en consideración todos los estudiantes a los que se les administraron los cuestionarios.

Dificultad del problema (DPR)

Se define como:

$$\mathrm{DPR} = 100 - \left(\frac{resultado}{abordados}\right)\times 100$$

Esta dificultad mide, como la anterior, la dificultad de llegar a obtener un resultado, pero únicamente entre los estudiantes que han abordado el problema. Si un estudiante aborda la resolución pero no llega a dar una respuesta es porque la abandona en pleno proceso, bien sea en la fase de lectura y comprensión del problema o bien en la fase de cálculos.

Dificultad de la solución del problema (DSP)

Se define como:

$$\text{DSP} = 100 - \left(\frac{\textit{número}}{\textit{abordados}}\right) \times 100$$

Esta variable es el mejor indicativo de la dificultad que entraña resolver con éxito el problema. En efecto, es la que mide la dificultad no ya de obtener un resultado, sino de que el resultado sea numérico y ese número sea correcto, es decir, mida la probabilidad condicional por la que se pregunta. El cálculo de la DSP se realiza sólo sobre los estudiantes que han abordado el problema, pero podrían obtenerse diferentes versiones de esta dificultad variando el denominador de la fracción en la expresión anterior, o sea, comparando el número de estudiantes que dan una respuesta numérica correcta (*número*) con otras variables diferentes de *abordados*, como por ejemplo, el número de estudiantes que componen la muestra (variable *estudiantes*) o el número de estudiantes que llegan a dar una respuesta a la pregunta del problema (variable *resultado*). El uso de unas u otras depende de las intenciones del investigador. En este trabajo sólo mostraremos los resultados obtenidos para la primera, por considerarla la más representativa de la dificultad que entraña tener éxito en la resolución del problema, una vez el estudiante decide abordarlo.

Dificultad de la descripción del resultado (DDRES)

Se define como:

$$\text{DDRES} = 100\text{-}\left(\frac{\textit{descripción}}{\textit{resultado}}\right) \times 100$$

Esta variable pretende medir la dificultad de dar una respuesta completa a la pregunta del problema, es decir, de responder a la pregunta no sólo con un número (porcentaje o probabilidad) sino también con una descripción del significado de ese número que permita saber qué interpretación hace el estudiante de la cantidad que da como resultado. Es un indicador, por tanto, de hasta qué punto los estudiantes que llegan a un resultado numérico responden a la pregunta mediante una expresión en lenguaje verbal que explique el sentido del número resultante.

Dificultad de la descripción correcta del resultado (DDRESC)

Se define como:

$$\text{DDRESC} = 100 - \left(\frac{\textit{desccorrecta}}{\textit{descripciones}}\right) \times 100$$

Esta variable está relacionada con la anterior y la complementa. Mide la dificultad de que, habiendo hecho una descripción del número que se da como resultado, dicha descripción sea correcta, entendiendo por descripción correcta aquella que describe la cantidad por la que se pregunta, independientemente de cuál sea el significado real del número que el estudiante ofrece como resultado. Cuando la descripción no es correcta o hay una incoherencia o discordancia entre el número y la descripción, el estudiante ha cometido errores, pero de esto nos ocuparemos más adelante.

En el capítulo de resultados mostraremos los datos brutos surgidos de la observación de estas variables en la muestra local, haciendo un análisis descriptivo de los mismos. Asimismo, compararemos algunos resultados obtenidos en la muestra local con los obtenidos en la investigación más amplia realizada en el marco del Proyecto *EDU2008-03140*. Para terminar, señalaremos que la observación de estas variables en grandes muestras de estudiantes permite obtener valores representativos para las dificultades de los problemas, de manera que pueden ser usadas para caracterizar a los problemas o tomadas, incluso, como variables de la tarea en futuras investigaciones.

4.9.3 – Análisis de estrategias de resolución, errores y dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas de nivel N_0.

Las variables dependientes descritas en el apartado 4.9.1 (p. 144) resultan útiles para tener una primera aproximación a las características de las resoluciones de los estudiantes y, también, para definir medidas para las dificultades de los problemas, como hemos visto en el apartado anterior. Sin embargo, es evidente que la mera observación de las variables descritas resulta insuficiente si lo que pretendemos es hacer un análisis en profundidad de las competencias, errores y dificultades de los estudiantes en la resolución de estos problemas.

Así, la variable *Cálculos intermedios*, con sus dos componentes nos informa de si el estudiante calcula cantidades intermedias o no, y en caso afirmativo, de si comete errores o no. Pero no nos permite saber qué cantidades son esas ni qué relaciones entre cantidades ha usado para su obtención, ni qué tipo de errores comete el estudiante, si los comete.

De la misma manera, la variable *Cálculo final* nos informa de si el estudiante ha hecho un cálculo específico para obtener el porcentaje o probabilidad que luego da como resultado pero no la manera en que ha hecho ese cálculo. Además, siempre que dicho cálculo involucre cantidades erróneas (en alguna de sus tres componentes) o la relación que se establezca entre ellas no sea correcta, asignamos un 1 a la componente *Error* de la variable *Cálculo final*. Esto no permite discriminar entre los casos en los que este cálculo contiene cantidades erróneas por errores arrastrados y los casos en los que el error se origina en el momento de proceder al cálculo del porcentaje. Evidentemente, tampoco se indica qué tipo de error se está cometiendo (uso de una cantidad no pertinente, uso de una relación falsa entre cantidades, etc.)

En cuanto a la variable *Resultado*, también resulta insuficiente si lo que pretendemos es analizar en profundidad las resoluciones. Supongamos, por ejemplo, que un estudiante llega a dar un número como resultado y describe dicho número. Si la descripción se corresponde con la de la condicional por la que se pregunta se asigna el valor 1 a la variable DC; si no, se le asigna a la variable DI. Sin embargo, al proceder de esta manera no se está teniendo en cuenta si la descripción del resultado es coherente o no (concuerda o no) con el número que describe. Así, podría darse el caso de que un estudiante respondiera a la pregunta del problema con una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta (como consecuencia de un error en la interpretación de la pregunta, por ejemplo) y que la descripción dada fuera coherente, es decir, fuera la que correspondiese a dicha cantidad que da como resultado. En ese caso, la variable DI tomaría el valor 1, pero el estudiante no estaría cometiendo un error de descripción, sino que el error consistiría, más bien, en responder con una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta.

En conclusión, las variables definidas hasta el momento son adecuadas para un tratamiento cuantitativo de la información aportada por las resoluciones de los estudiantes. Sin embargo, en este trabajo nos proponemos un análisis de las resoluciones más exhaustivo, de carácter cualitativo, que complemente la información aportada por las variables dependientes definidas y permita cumplir con el objetivo de estudiar competencias, errores y dificultades en la resolución de problemas de nivel N_0. En los siguientes apartados, explicaremos el método seguido para realizar este análisis.

4.9.3.1 – Análisis de las resoluciones de los pre-test.

Para el análisis de las resoluciones de los pre-test, nos ha resultado útil, de nuevo, el uso del "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional". Como ya hemos señalado anteriormente, un problema ternario de probabilidad condicional queda determinado en el grafo (independientemente del contexto) cuando se colorean tres datos convenientemente escogidos y la pregunta del problema. Partiendo de ellos, podemos señalar rutas o caminos de resolución, es decir, conjuntos ordenados de aristas encadenadas, con sus respectivos vértices, que representan las relaciones que se usan y las cantidades intermedias que se obtienen para resolver el problema. Al grafo que contiene toda esta información acerca de una resolución lo denominamos "grafo de la resolución".

Las ventajas obtenidas de la traducción de la resolución de un problema al grafo son principalmente dos: que nos permite sintetizar la información más relevante de la actuación del resolutor (el camino seguido, las cantidades intermedias obtenidas, competencias mostradas y errores cometidos) y que esta información queda expresada en un metalenguaje que permite la comparación entre resoluciones. De hecho, la identificación y clasificación de las estrategias de resolución con éxito y de los errores cometidos por los estudiantes en los pre-test se ha realizado a partir de los grafos de las resoluciones.

4.9.3.1.1 – Grafo de una resolución. Método de traducción de una resolución al grafo.

En este apartado detallaremos el método[22] empleado para la obtención del grafo de una resolución a partir de las producciones escritas o filmadas de los estudiantes, método que lleva implícito también las pautas para realizar la lectura de las resoluciones de los estudiantes. En efecto, cada vez que se colorea un vértice o se resalta una arista estamos atribuyendo al resolutor una interpretación determinada de la cantidad o relación en cuestión, por lo que es necesario indicar los elementos que se han tenido en cuenta a la hora de interpretar lo que hacen los estudiantes en la resolución de los problemas. En ocasiones, cabe más de una interpretación ante lo que queda registrado (por escrito o en una filmación) de la actuación del resolutor. En esos casos, hemos procedido como Arnau en su tesis doctoral (2010), respetando el principio de parsimonia de Guillermo de Ockham, según el cual cuando dos teorías en igualdad de condiciones tienen las mismas consecuencias, la teoría más simple tiene más probabilidades de ser correcta que la compleja; y el de presunción de competencia, según el cual el investigador tenderá a calificar como correctas las producciones en caso de duda. Aún así, como señala Arnau (2010), la lectura analítica que se plasma en el grafo de la resolución no escapa a la subjetividad de las decisiones del investigador.

Por otra parte, en la exposición del método, hemos tenido en cuenta las fases en la resolución de los problemas de N_0. Veamos la manera en que hemos representado en el grafo la actuación de los resolutores en cada una de estas fases.

4.9.3.1.1.1 – Representación de las cantidades dadas en el enunciado y la pregunta del problema.

Para comenzar con la elaboración del grafo de la resolución, señalaremos los vértices que corresponden a las cantidades dadas en el enunciado y la cantidad por la que se pregunta: los datos en negro y la condicional por la que se pregunta, en verde. Esto se hará independientemente de que sea correcta o no la interpretación que hace el resolutor de estas cantidades.

La forma en que el resolutor organiza la información, si la hay, no es representable en el grafo. Sin embargo, si el resolutor organiza la información del enunciado de alguna manera y en dicha organización aparece un dato numérico acompañado de una descripción, entenderemos que el estudiante interpreta el dato según

---

[22] Un adelanto de este método puede verse en Edo, Huerta y Cerdán (2011)

lo describe. Si la interpretación es correcta escribiremos junto al vértice correspondiente (ya coloreado de negro) las componentes *x* y *n* de la cantidad, es decir, el número y la expresión usada por el resolutor para describirlo. La componente *f* no se escribirá de manera explícita, ya que puede ser inferida del formato usado al escribir el número. En cambio, si la interpretación que hace del número es incorrecta, pintaremos de rojo el vértice que corresponde a la interpretación del resolutor. Así, la componente *n* se corresponderá con ese vértice, pero no así la componente *x*, que escribiremos en rojo para señalar el error. Habrá por tanto, una discordancia entre la componente *x* y la componente *n*.

Excepcionalmente, si es muy evidente que el resolutor ha cometido un error en la descripción del número (por dificultades relacionadas con la competencia lingüística, uso de expresiones ambiguas o incompletas, etc.) podemos desestimar la componente *n* de la cantidad a la hora de colorear el vértice que la representará y tomar esta decisión en base al uso posterior que el estudiante hace del número.

De la misma manera, si un número del enunciado no aparece en la organización de la información pero el estudiante lo usa, describiéndolo en el momento de realizar el cálculo, procederemos como antes. Si lo usa sin describirlo, atenderemos a ese uso para determinar si la interpretación del dato es correcta o no y también procederemos como antes: si la interpretación es correcta, escribiremos junto al vértice ya coloreado de negro la componente x de la cantidad; si es incorrecta, pintaremos de rojo el vértice que corresponde a la interpretación del estudiante, y escribiremos la componente x en rojo. Si el estudiante no describe el número, la componente n de la cantidad no aparecerá junto al vértice.

4.9.3.1.1.2 – Representación de las cantidades intermedias y relaciones entre cantidades que se usan para la obtención de las mismas.

A la hora de asignar un vértice del grafo a una cantidad intermedia hay tres elementos a tener en cuenta: su forma de obtención (la operación de la que resulta, que por sí misma ya le confiere un sentido), su descripción (su componente n) y el uso posterior que hace el estudiante de esa cantidad.

Así, pueden darse diferentes situaciones.

Situación 1

Supongamos que la cantidad ha sido obtenida operando dos cantidades de manera correcta, es decir, que esas cantidades se relacionan de la manera en que las relaciona el estudiante, y al operarlas, se obtiene una cantidad que tiene un referente en el contexto del problema, independientemente de la interpretación que haga el estudiante de ella.

Si el número obtenido de esta operación (componente *x* de la cantidad) está descrito y esta descripción es coherente con el número (no hay discordancia entre las componentes x y n), pintaremos de azul el vértice correspondiente a dicha cantidad y junto a él escribiremos el número y la descripción. Si el número no está descrito, por el principio de presunción de competencia, procederemos de la misma manera, con la salvedad de que, junto al vértice, escribiremos únicamente el número. En cuanto a la relación usada, en ambos casos se resaltará en negro.

Si el número está descrito pero hay una discordancia entre las componentes x y n de la cantidad, atenderemos al uso posterior que el estudiante hace de dicha cantidad para decidir qué vértice le asignamos. A la hora de valorar el uso de la cantidad atenderemos de nuevo al principio de competencia, es decir, supondremos que el resolutor usa la cantidad con el significado que hace correcta la relación en la que es usada. En caso de que no haya un uso posterior, se será fiel a la componente n.

En el caso de que el vértice asignado sea el que corresponde a la componente x, entenderemos que ha habido un error de expresión por parte del estudiante. Pintaremos el vértice de azul pero escribiremos la componente n en rojo para señalar el error. La relación usada la resaltaremos en negro.

En el caso de que el vértice asignado sea el que corresponde a la componente n, consideraremos que ha habido un error de relación (la relación usada es falsa, si tenemos en cuenta tanto las cantidades que se operan como el resultado de la operación tal y como lo describe el estudiante). Entonces, señalaremos en rojo el vértice y la componente x de la cantidad. La relación (que no aparecerá en el grafo) se representará con una línea resaltada en rojo que será discontinua si la relación es aditiva y continua si es multiplicativa.

Si el número no está descrito y hay discordancia entre el sentido que le confiere su construcción y el uso posterior, optaremos por la doble asignación: asignaremos el número a dos vértices diferentes, uno acorde a la construcción de la cantidad y otro acorde al significado que hace correcta la relación posterior en la que se usa dicho número. Se entiende, entonces, que el estudiante atribuye dos significados distintos al número a lo largo de la resolución.

Las Tablas 4.16, 4.17 y 4.18 resumen el protocolo de actuación en la “Situación 1” ante discordancias entre los elementos de decisión a la hora de asignar vértices a las cantidades intermedias: su construcción (en adelante C), su descripción (D) y su uso posterior (U).

Caso 1: No falta ninguna de las tres componentes	
Concuerdan	**Lectura**
C-D-U	Hay una única opción posible.
C-D	Se asigna el vértice según descripción. Vértice azul. Componentes x y n correctas. Si su uso posterior no es correcto, el estudiante está cometiendo un error al relacionar las cantidades.
C-U	Error de descripción. Se asigna el vértice que le corresponde según construcción. Vértice azul. Componente n errónea (en rojo).
D-U	El estudiante usa una relación falsa en la construcción de la cantidad. Se asigna el vértice que corresponde a la componente n. Vértice rojo. Componente x errónea (en rojo).
Ninguna con ninguna	Atendemos al principio de presunción de competencia y al principio de parsimonia para construir el grafo que más se aproxime a nuestra interpretación de la actuación del estudiante.

Tabla 4.16. Traducción al grafo. Discordancias entre elementos de decisión. Caso 1.

Caso 2: Falta la descripción	
Concuerdan C-U	Hay una única opción posible.
No concuerdan C-U	Doble asignación.

Tabla 4.17. Traducción al grafo. Discordancias entre elementos de decisión. Caso 2.

Caso 3: No hay uso posterior.	
Concuerdan C-D	Hay una única opción posible.
No concuerdan C-D	Prevalece la descripción (D). Error de relación en la construcción de la cantidad. Vértice rojo. Componente x errónea (en rojo)

Tabla 4.18. Traducción al grafo. Discordancias entre elementos de decisión. Caso 3.

Por otra parte, si una relación es correcta pero no está en el grafo, se unirán todas las cantidades relacionadas mediante una línea, resaltada en negro, que será discontinua si la relación es aditiva y continua si es multiplicativa, al igual que las ya representadas. Si la cantidad intermedia obtenida de esta forma no apareciese en el grafo, se añadiría también un nuevo vértice. Esto siempre y cuando la relación usada sea ternaria, es decir, involucre a tres cantidades. Si el estudiante usa una relación correcta pero no ternaria, como ocurre en muchas resoluciones del Problema 1 y en algunas del Problema 9, sólo se representará el vértice correspondiente a la cantidad intermedia así obtenida y se coloreará de un azul más oscuro que el usado para el resto de cantidades intermedias, para indicar que se obtiene de una relación no ternaria, no representable en el grafo. Algunas de estas relaciones son estudiadas con detalle en el apartado 5.3.3 (p. 226).

También hay que señalar que cuando la componente *x* no sea correcta sólo por errores arrastrados, es decir, porque en una relación correcta se opere con cantidades cuyas componentes *x* sean erróneas, el vértice también se pintará de azul, pero la componente *x* se escribirá en rojo, para indicar que el valor numérico no es correcto.

Situación 2

Supongamos que la cantidad ha sido obtenida operando dos cantidades que no se relacionan de esa manera. Esto quiere decir que o bien esas cantidades no están relacionadas o bien están relacionadas, pero de manera distinta a como las relaciona el estudiante. Por tanto, al operar las cantidades como lo hace el estudiante se obtiene una cantidad cuyo único significado es el que le confiere su construcción y no tiene referente en el contexto del problema.

En este caso la relación no será correcta y se representará con una línea resaltada en rojo y al igual que en el caso anterior, esta línea será discontinua si la relación es aditiva y continua si es multiplicativa. Si el estudiante describe la cantidad intermedia obtenida de esta manera y esta descripción se corresponde con la de alguna de las cantidades representadas en el grafo, la línea que representa la relación pasará por dicho vértice, que se coloreará de rojo y junto a él se escribirán la componente *x* y la componente *n*. La componente *x* aparecerá en rojo, puesto que al proceder de una relación falsa, será incorrecta con toda seguridad. Si el resultado de la operación no viene descrito, sólo podemos atribuir a dicha cantidad el sentido que le confiere su modo de determinación. En este caso o en el caso de que el número venga descrito pero sin referente en el contexto del problema, la cantidad no tendrá ningún vértice asociado en el grafo y se añadirá un nuevo vértice, que será pintado de rojo. Junto a él escribiremos la componente *x* de la cantidad y, si la hay, también la componente *n*.

Finalmente, si el estudiante usa un número que no ha sido dado en el enunciado, ni es el resultado de una operación, sino que procede de un cálculo mental o una asignación (hecha a partir de algún razonamiento que puede haber hecho explícito o no) procederemos de la siguiente manera:

- Si el número está descrito, es la componente x de alguna de las cantidades representadas en el grafo y no hay discordancia entre número y descripción, pintaremos de azul el vértice correspondiente, escribiremos junto a él las componentes x y n de la cantidad y, siguiendo de nuevo el principio de presunción de competencia, resaltaremos la arista que representa la relación mediante la cual se obtendría dicha cantidad a partir de las cantidades ya conocidas. Cuando haya varias opciones, se optará por la más simple (principio de parsimonia). Únicamente cuando haya serias dudas sobre la forma de obtención de la cantidad, no se resaltará ninguna arista.

- Si el número está descrito y hay discordancia entre el número y la descripción, pintaremos de rojo el vértice que se corresponda con la descripción y escribiremos en rojo la componente ***x*** de la cantidad.
- Si el número no está descrito y es la componente ***x*** de alguna de las cantidades representadas en el grafo, colorearemos de azul el vértice correspondiente y escribiremos junto a él dicho número. En cuanto a la relación que conduce a la obtención de la cantidad, se procederá de la misma manera que en el primer supuesto.
- Si el número no está descrito y no es la componente ***x*** de ninguna de las cantidades involucradas en el problema, añadiremos un nuevo vértice, que pintaremos de rojo.

Sucede a veces que el resolutor asigna diferentes valores a la componente x de una cantidad o expresa dicha cantidad usando diferentes formatos de datos. En ese caso, se procederá a la duplicación (o triplicación, etc.) del vértice que representa a la cantidad: se creará un nuevo vértice por cada cambio en el valor y/o en el formato en el que se exprese la componente x de la cantidad. Así, las aristas que representen una relación en la que intervenga dicha cantidad, pasarán por el vértice que corresponda al valor y formato con que opera el estudiante, evitando ambigüedades.

También es posible que un mismo número sea descrito varias veces usando expresiones diferentes con el mismo significado, es decir, que la componente n de una cantidad adopte diferentes valores equivalentes a lo largo del proceso de resolución. Cuando esto suceda, no será necesario duplicar el vértice correspondiente a la cantidad, sino que bastará con escribir todas las descripciones junto al vértice.

4.9.3.1.1.3 – Representación del cálculo del porcentaje que se da como resultado.

En los problemas de los pre-test, los datos vienen expresados en frecuencias naturales o porcentajes y la pregunta del problema es un porcentaje, que se corresponde con una condicional. Para el cálculo de dicha condicional es necesario poner en razón una intersección y una marginal:

$$[1] \quad P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Y para expresar dicha condicional en forma de porcentaje basta multiplicar por cien:

$$[2] \quad P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\cdot 100$$

Otra forma de calcularla es usando una regla de tres, como en [3]. En ella, n(B) representa el cardinal del suceso B, n(A∩B) el cardinal del suceso A∩B y x es el tanto por cien por el que se pregunta.

[3]
$$\begin{array}{lcl} n(B) & \text{-------} & 100 \\ n(A\cap B) & \text{-------} & x \end{array}$$

Cuando el resolutor obtenga una condicional de manera correcta, aunque sea mediante el uso de la regla de tres ([3] o equivalente), asociaremos a la operación la arista multiplicativa del grafo teórico correspondiente a la relación ternaria multiplicativa [1].

El resolutor también puede calcular porcentajes que no produzcan nuevas cantidades, sino que simplemente supongan un “cambio de escala”, es decir, un cambio en el formato de presentación de una cantidad. Sucede, por ejemplo, cuando la información numérica del enunciado viene dada en frecuencias naturales y el resolutor plantea una regla de tres como en [4], donde N representa el tamaño de la muestra (cardinal de Ω), n(A) el cardinal del suceso A y x el tanto por cien que representa n(A) sobre N.

[4]
$$\begin{array}{lcl} N & \text{-------} & 100 \\ n(A) & \text{-------} & x \end{array}$$

Este tipo de operaciones no tendrán asociada ninguna arista, pero quedarán reflejadas en el grafo mediante la duplicación de vértices antes mencionada.

Ahora bien, en el caso de que el resolutor cometa errores en el planteamiento de una regla de tres y no sea posible asignarle una relación multiplicativa de las contenidas en el grafo teórico, usaremos para la representación de la misma el método usado en Cerdán (2008). Esto es, reducir las relaciones de proporcionalidad directa a dos relaciones ternarias, poniendo en juego la constante de proporcionalidad. Así, la relación de proporcionalidad:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Se representa como se muestra en la Figura 4.14.:

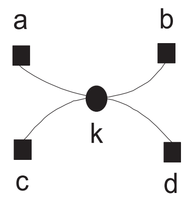


Figura 4.14. Grafo de una relación de proporcionalidad.

Donde se distinguen dos relaciones ternarias multiplicativas:

$$a = b \cdot k$$

$$c = d \cdot k$$

Puesto que en el grafo hemos usado esta representación únicamente para las relaciones de proporcionalidad erróneas, las aristas se representarán en rojo y al menos el vértice correspondiente a la nueva cantidad obtenida (el cuarto proporcional) será rojo.

4.9.3.1.1.4 – Representación de la cantidad que se da como resultado.

En el caso de que el resolutor responda a la pregunta del problema con una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta, el vértice que represente a dicha cantidad será rodeado de rojo.

Si consideramos que la interpretación que hace el estudiante de la cantidad con la que responde es la de la condicional por la que se pregunta, pero ésta no está bien construida porque procede de una relación falsa entre cantidades, le asignaremos a esta cantidad el vértice verde correspondiente a la condicional pedida, pero señalaremos el error resaltando el borde en rojo.

Por otra parte, cuando la condicional esté bien construida, priorizaremos la forma de obtención de esta cantidad sobre la descripción de la cantidad para determinar el vértice al que asignaremos el porcentaje así obtenido. Es decir, si la condicional se obtiene estableciendo una razón correcta entre la marginal y la intersección directamente relacionadas con ella, le asignaremos a esta cantidad el vértice que le corresponde en el grafo, aunque la descripción de la cantidad no concuerde (por ejemplo, porque sea la descripción de una intersección).

Por lo demás, respecto de la cantidad desconocida se actuará como con las cantidades intermedias.

Y con ello, se completa el proceso de traducción de una resolución al grafo.

4.9.3.1.2 – Competencias y errores derivados del grafo de la resolución.

Las competencias y errores en el grafo se identifican, básicamente, a través de los colores con los que se representan los diferentes elementos del grafo de la resolución. En efecto, todo aquello que aparece en rojo es fruto de un error y todo aquello que aparece en otro color representa una actuación competente por parte del resolutor.

Un grafo en el que no aparece ningún elemento en rojo representa una resolución que no contiene ningún error. Si, además, el estudiante llega a obtener la condicional preguntada, podemos decir que su actuación, en conjunto, ha sido competente. Si la resolución contiene errores, no podemos declarar la actuación global del estudiante como competente, pero esto no significa que el resolutor no muestre ningún tipo de competencia, pues puede mostrarse competente en algunas de las fases de la resolución del problema.

Por otra parte, no entendemos lo mismo por *actuación competente* que por *éxito* en la resolución. Una *resolución con éxito* es para nosotros aquella en la que el estudiante llega a dar un número correcto como respuesta a la pregunta del problema (salvo errores de cálculo). Es decir, siempre que la variable *Número* tome el valor 1. Esto no significa necesariamente que la resolución no contenga errores, pues puede contener errores que no hayan impedido al estudiante llegar al resultado numérico correcto (por ejemplo, errores en la descripción de cantidades por dificultades de expresión). De la misma manera, hay resoluciones que no contienen errores pero no son resoluciones con éxito porque el resolutor abandona la resolución sin dar una respuesta a la pregunta del problema (por un bloqueo, falta de tiempo, etc.).

A la hora de analizar los resultados no haremos una distinción entre actuaciones competentes y no competentes, sino entre procesos de resolución con éxito y procesos de resolución sin éxito. De los primeros nos interesan las diferentes estrategias de resolución empleadas por los estudiantes (*estrategias de resolución con éxito*) y de todos ellos (los procesos con éxito y sin éxito) nos interesan también los errores que contienen.

4.9.3.1.2.1 – Estrategias de resolución con éxito.

Para identificar las diferentes estrategias de resolución con éxito hemos atendido únicamente a las cantidades y a las relaciones entre cantidades que aparecen en las resoluciones de los estudiantes, es decir, a las lecturas analíticas de las resoluciones realizadas en el grafo. Sin embargo, debemos hacer algunas observaciones al respecto.

En primer lugar, existen resoluciones escritas que, conteniendo las mismas cantidades intermedias y las mismas relaciones, difieren en el orden en que éstas aparecen. Dos resoluciones escritas con estas características darán lugar a un mismo grafo y las consideraremos como una misma forma de resolver el problema, es decir, como una misma estrategia de resolución derivada de lo representado en el grafo. Así entendemos por ruta de resolución un conjunto ordenado de aristas con sus respectivos vértices, que nos lleva desde los datos conocidos hasta la condicional por la que se pregunta. En cambio, una estrategia de resolución será, para nosotros, cada conjunto de aristas y vértices que nos lleva desde los datos conocidos hasta la pregunta del problema, sin importar el orden en que se despliegan en la resolución escrita (cuando hay más de una posibilidad para esta ordenación).

Por otra parte, existen resoluciones con éxito que contienen cantidades intermedias y relaciones superfluas, es decir, cantidades intermedias y relaciones que no son estrictamente necesarias para obtener la respuesta del problema. Estos casos no los consideramos como nuevas estrategias de resolución, sino como casos particulares de la estrategia de resolución que resulta tras la eliminación de las cantidades y aristas superfluas. El grafo de una resolución con aristas superfluas no coincide exactamente con el grafo que representa a la estrategia de resolución asociada, pero este último siempre estará contenido en el primero.

En el apartado 5.3.3 (p. 226) describiremos todas las estrategias de resolución con éxito observadas para cada problema, atendiendo a estos criterios.

4.9.3.1.2.2 – Errores.

Lo que en esta tesis entendemos por error en las resoluciones de los estudiantes se ajusta al significado enciclopédico del término (Real Academia Española, 2013):

"1. m. Concepto equivocado o juicio falso.

2. m. Acción desacertada o equivocada.

3. m. Cosa hecha erradamente."

Y aunque es evidente la necesidad de precisar el significado con que se usa aquí dicho término, su definición no se hará por comprensión sino por extensión. Así, en las líneas que siguen explicaremos lo que hemos calificado de error en las resoluciones de los estudiantes y en las Tablas 4.19 y 4.20 mostraremos los diferentes tipos de error identificados. Evidentemente, esta caracterización de los errores es de carácter local (específica para la investigación que nos ocupa) y no pretende agotar todas las posibilidades de error que pueden darse en la resolución de un problema de N_0, por lo que queda abierta a futuras ampliaciones o modificaciones en próximas investigaciones.

En primer lugar, hemos distinguido entre errores de cantidad y errores de relación.

Los errores de cantidad son aquellos que se producen en relación a una determinada cantidad (errores de interpretación, de descripción, etc.). Como norma general, si el resolutor comete un error de cantidad, alguna de las componentes de la terna asociada a la cantidad en cuestión (el número, x, la descripción, n, o el formato, f) será incorrecta. Pero también hemos considerado como error de cantidad el responder a la pregunta del problema con una cantidad distinta de aquella por la que se pregunta, aunque todas las componentes de dicha cantidad sean correctas.

Por otra parte, los errores de relación son aquellos que se producen al establecer relaciones entre tres o más cantidades y para identificarlos es necesario considerar conjuntamente estas cantidades y la forma en que las relaciona el resolutor. Los errores de relación también generan cantidades con alguna componente errónea: como mínimo la componente x de la nueva cantidad producida a partir de la relación errónea, será incorrecta.

En el grafo, las relaciones entre cantidades se representan mediante aristas y las cantidades mediante vértices, por lo que la representación de los errores de relación tiene que ver con las aristas y la de los errores de cantidad con los vértices. Así, un error de relación siempre se representará en el grafo resaltando en rojo la arista correspondiente (o el par de aristas correspondientes, si se produce en el uso de la regla de tres). Los errores de cantidad presentan más variaciones en su representación porque pueden ser de naturalezas más diversas, y no todos originan vértices en rojo.

Un vértice en rojo representa sólo una de tres cosas: una cantidad que el resolutor ha interpretado erróneamente; una cantidad mal construida, es decir, una cantidad obtenida de una relación falsa; o una cantidad sin sentido en el contexto del problema, incorporada por el resolutor sin hacer explícito el modo de obtención. Pero si el estudiante comete, por ejemplo, un error de expresión (un error en la componente n), el vértice correspondiente a la cantidad descrita incorrectamente no se obscurece en rojo, sino en azul (sólo se escribe en rojo la descripción errónea).

Por otra parte, la componente x de todo vértice rojo será errónea y estará escrita en rojo. A la inversa no sucede lo mismo: la componente x de una cantidad puede estar señalada en rojo por ser errónea y el vértice correspondiente ser de color azul. Esto es así cuando la cantidad está bien construida (procede de la aplicación de una relación verdadera entre cantidades) pero su componente x es errónea porque para su obtención se ha usado alguna cantidad cuya componente x era errónea. Esto permite identificar rápidamente el origen y la naturaleza de los errores que hemos llamado de cantidad, es decir, permite distinguir entre errores de cantidad originarios y errores de cantidad derivados de otros errores.

Las Tablas 4.19 y 4.20 resumen los diferentes tipos de error de cantidad y de relación identificados en los pre-test y la forma en que se representan en el grafo, según el método expuesto en el apartado anterior. En el apartado 5.3.4 (p. 248) ejemplificamos y describimos con detalle estos errores.

ERRORES DE CANTIDAD		
Fase del proceso de resolución en las que se observan	**Tipos de error**	**Representación en el grafo**
Fase I - Organización de la información	**E1**: Errores de interpretación de las cantidades conocidas dadas en el enunciado.	Se obscurece en rojo el vértice al que se le asigna la cantidad interpretada erróneamente y, también, la componente x de dicha cantidad.
Fase I – Fase II - Organización de la información - Obtención de cantidades intermedias	**E2**: Uso de un mismo número para dos sucesos distintos, es decir, dos cantidades coinciden erróneamente en la componente x.	Se escribe dicho número junto a dos vértices distintos. Al menos uno de éstos se obscurece en rojo y junto a él se escribe la componente x en rojo.
Fase I - Fase II - Organización de la información - Obtención de cantidades intermedias	**E3**: Uso de dos números diferentes para un mismo suceso, es decir, dos cantidades difieren en la componente x pero sus respectivas componentes n son equivalentes.	Se duplica el vértice correspondiente a la cantidad y se obscurece en azul aquel al que le corresponda la componente x correcta (si le corresponde a alguno de los dos) y en rojo aquel al que le corresponda la componente x errónea. La componente x errónea se escribe en rojo.
Fase I - Fase II - Fase III - Fase IV - Organización de la información - Obtención de cantidades intermedias - Obtención del porcentaje que se da como resultado. - Respuesta a la pregunta del problema	**E4**: Discordancia entre las componentes x y n de una cantidad, por error de expresión.	La componente n errónea se escribe en rojo junto al vértice correspondiente.
Fase IV - Respuesta a la pregunta del problema	**E5**: Dar como resultado una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta.	Se rodea con una línea roja la cantidad que se da como resultado cuando ésta es distinta de la condicional por la que se pregunta.

Tabla 4.19. Tipos de error de cantidad observados en los pre-test.

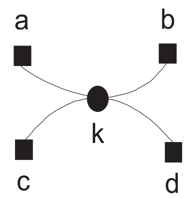
ERRORES DE RELACIÓN		
Fase del proceso de resolución en el que se observa	**Tipo de error**	**Representación en el grafo**
Fase II - Obtención de cantidades intermedias	**E6.1:** Error de relación en el uso de relaciones ternarias aditivas.	Se incorpora al grafo una arista de trazo discontinuo y de color rojo.
Fase III - Obtención del porcentaje que se da como resultado.	**E6.2:** Error en el uso de la regla de tres para el cálculo del porcentaje que se da como resultado.	Se representará la relación de proporcionalidad directa con el formato: 

Tabla 4.20. Tipos de error de relación observados en los pre-test.

4.9.3.1.3 – Ejemplos de obtención del grafo asociado a una resolución escrita.

Para ilustrar lo expuesto en los apartados anteriores, mostraremos dos resoluciones escritas del mismo problema, el Problema 9 del Pre-test(F), realizadas por dos estudiantes, V. y R. y sus correspondientes grafos de la resolución. La resolución de V. es una resolución que calificamos de resolución con éxito (a pesar de que contiene un error de cálculo y un error de descripción) y nos permitirá ejemplificar lo que entendemos por estrategia de resolución con éxito. La resolución de R. es una estrategia de resolución que calificamos de resolución sin éxito y veremos cómo los errores que comete el estudiante, que le impiden llegar al resultado correcto, quedan reflejados en el grafo de la resolución.

Recordemos el enunciado del problema:

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. En total, se han curado 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

El primer paso para la construcción del grafo de la resolución es independiente de la actuación del resolutor. Consiste en obscurecer en negro los vértices asociados a las tres cantidades conocidas y en verde el vértice que representa la condicional por la que se pregunta. Así, el grafo de partida para los dos ejemplos que mostraremos será el mismo (Figura 4.15, p. 170). Este grafo se irá completando en cada caso, al tiempo que se hace una lectura analítica de lo que se observa en la resolución escrita.

Caso de V.

A través de las Figuras 4.16 a 4.21 (pp. 171-176), mostramos una lectura de la resolución escrita del Problema 9 realizada por V. y su traducción al grafo, paso a paso. Y en la Figura 4.22 (p.177) mostramos, a modo de resumen, el grafo de la resolución, junto al análisis de la actuación del estudiante en términos de cantidades y relaciones entre cantidades.

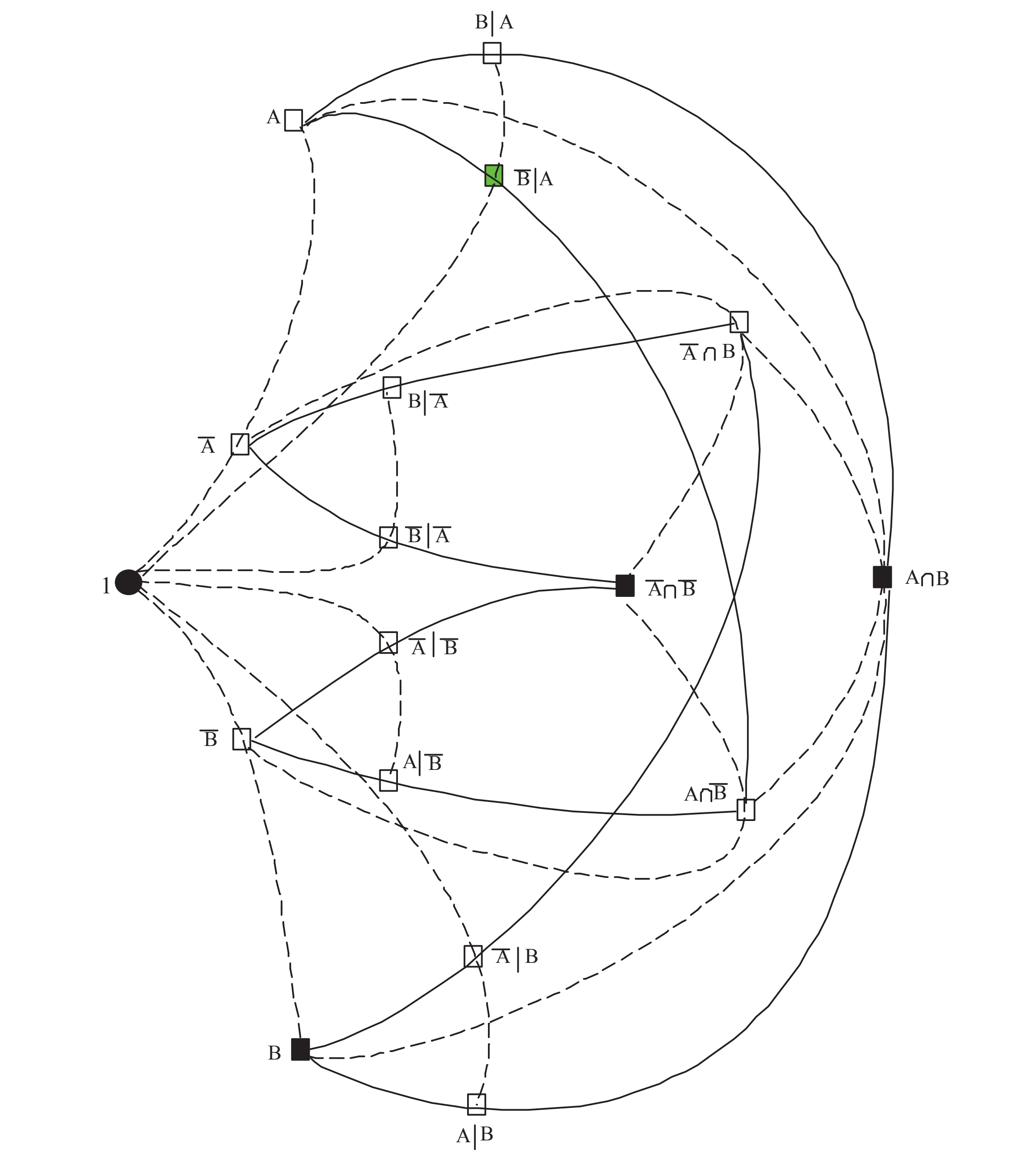
Vemos que el estudiante llega a un resultado numérico correcto, salvo por un error de cálculo. Puesto que no estimamos relevantes los errores de cálculo, consideramos que la del estudiante V. es una resolución con éxito.

Finalmente, en la Figura 4.23 (p. 178) pueden compararse el grafo de la resolución y el grafo teórico del problema. Se observa que la actuación de V. proporciona una relación aditiva más, porque halla una cantidad intermedia superflua (el número de personas no tratadas y curadas). No obstante, consideramos que ambos grafos representan una misma estrategia de resolución con éxito, puesto que el grafo teórico está contenido en el grafo de la resolución de V.

Caso de R.

Como antes, a través de las Figuras 4.24 a 4.28 (pp. 179-183), mostramos una lectura de la resolución escrita del Problema 9 realizada por R. y su traducción al grafo, paso a paso. Y en la Figura 4.29 (p. 184) mostramos, a modo de resumen, el grafo de la resolución, junto al análisis de la actuación del estudiante en términos de cantidades y relaciones entre cantidades.

A diferencia del caso anterior, el estudiante R. no tiene éxito en la resolución, al cometer varios errores que le conducen a la no obtención de una respuesta correcta a la pregunta del problema. De hecho, si comparamos el grafo de la resolución de R. con el grafo teórico vemos que este último no está contenido en el primero (véase Figura 4.30, p. 185).



A = "tratarse con el antibiótico" y B = "curarse de la infección".

Datos conocidos:

"42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado" → n($A \cap B$)

"48 no se han tratado con el antibiótico y no se han curado" → n($\overline{A} \cap \overline{B}$)

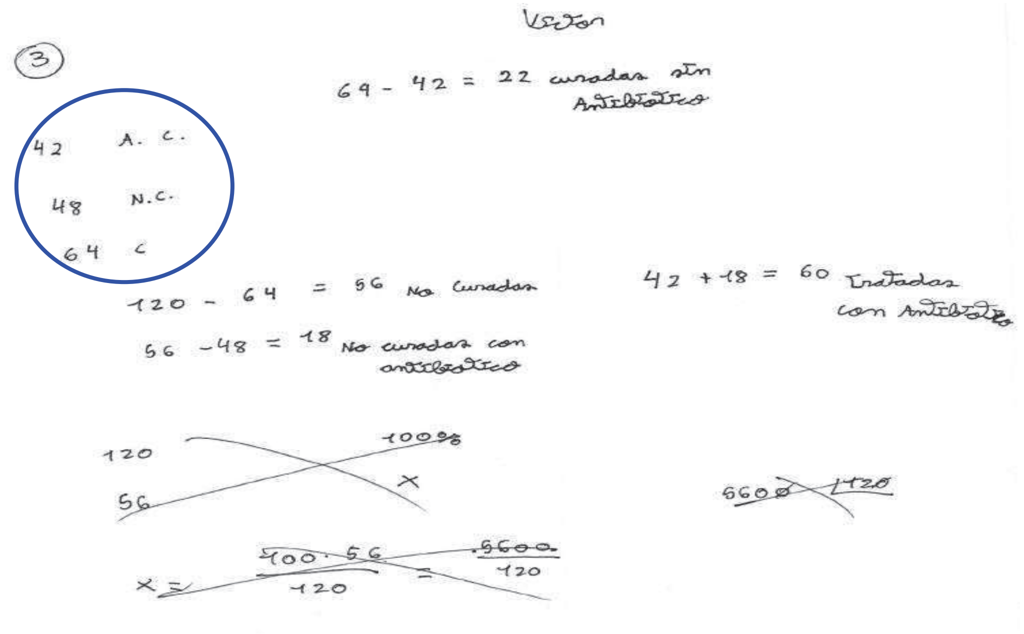
"En total, se han curado 64 personas" → n(B)

Pregunta del problema: "Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?" → $P(\overline{B} \mid A)$

Figura 4.15. Lectura analítica del enunciado del problema mediante el uso del grafo.

Caso de V. Construcción del grafo de la resolución, paso a paso.

I) Organiza la información del enunciado en forma de lista y describe los números de las cantidades conocidas por las iniciales de los referentes: C. (por curados), A. C. (por antibiótico y curados) y N. C. (por no antibiótico y no curado). La última descripción es incorrecta por incompleta (error de tipo E4, véase Tabla 4.19), ya que parece hacer referencia sólo al suceso “no curadas”. Sin embargo, el uso posterior de la cantidad confirma la interpretación correcta de la misma por parte del estudiante. Escribimos, junto a cada vértice ya obscurecido en negro, las componentes x (los números) y las componentes n (las descripciones) de estas cantidades. La descripción “N.C.” en rojo para señalar el error de descripción.



[...]

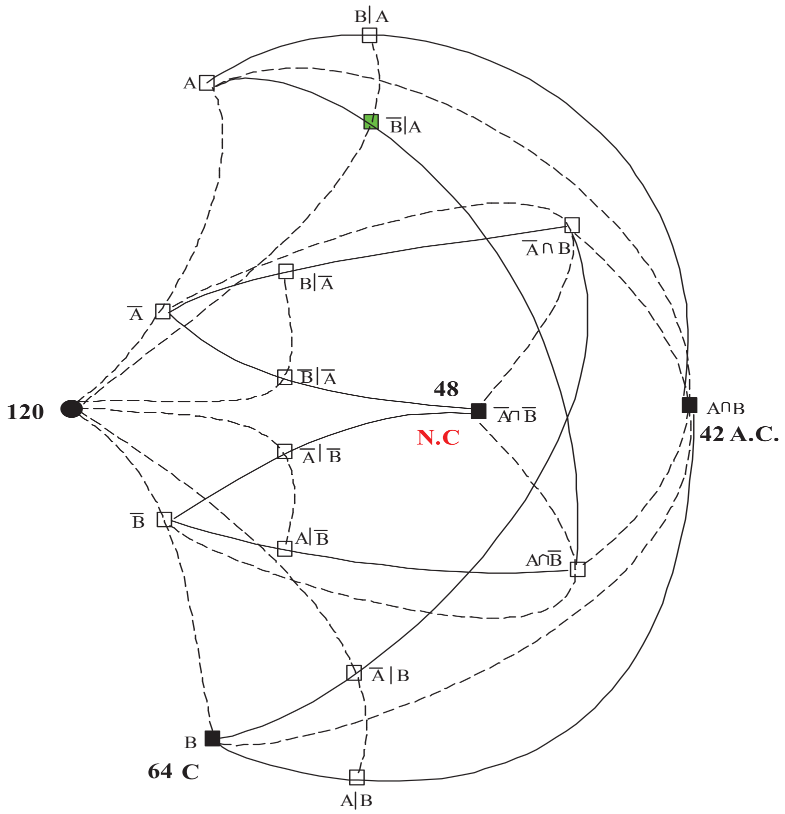
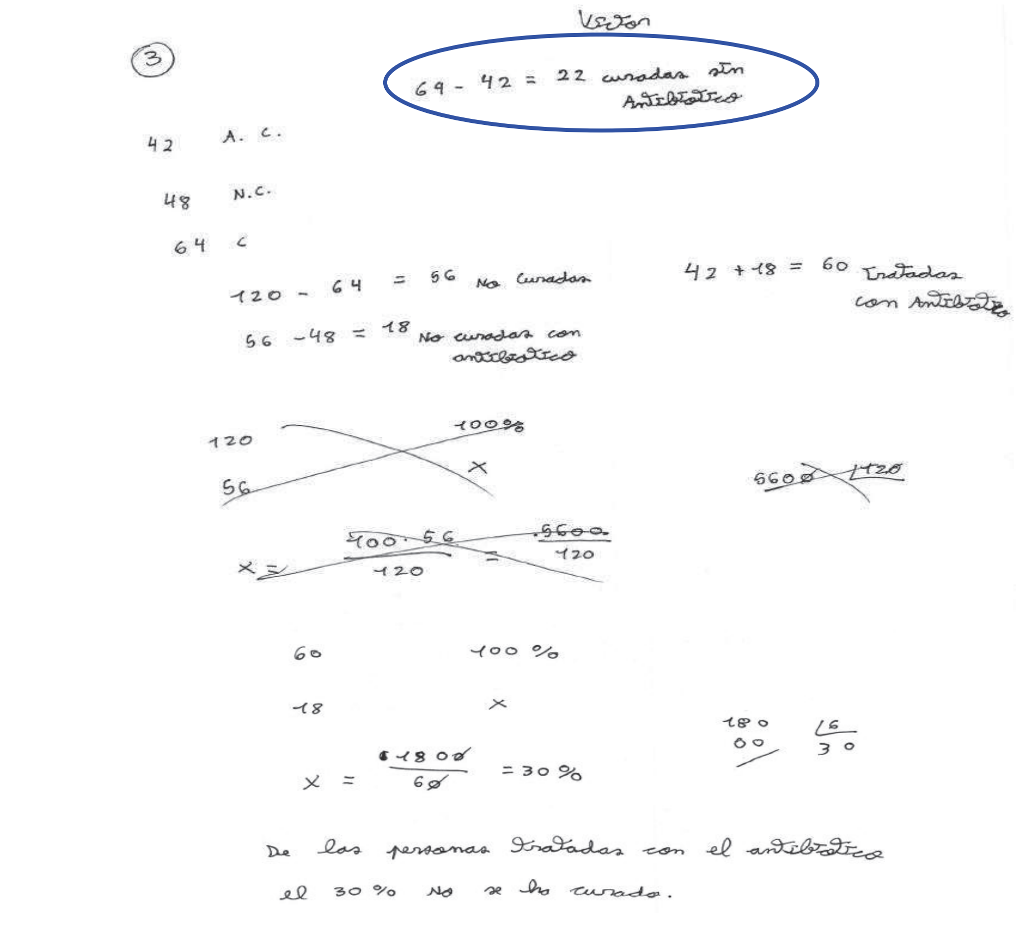


Figura 4.16.

II) Obtiene la intersección “no tratadas y curadas”, mediante el uso de la relación n(curadas) – n(tratadas y curadas) = n(no tratadas y curadas) o, en términos de A y B: n(B) – n(A∩B) = n($\overline{A}$ ∩B). Resaltamos en negro la arista correspondiente, obscurecemos en azul el vértice que representa la nueva cantidad y escribimos junto a él el número (22) y su descripción “curadas sin antibiótico”.



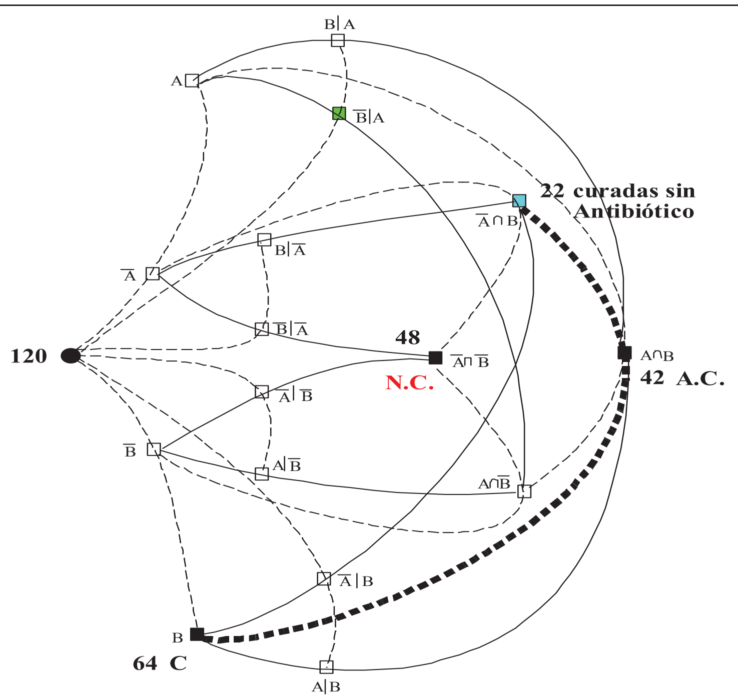


Figura 4.17.

III) Obtiene la marginal "no curadas", mediante la relación N - n(curadas) = n(no curadas) o, en términos de A y B, $N - n(B) = n(\overline{B})$. Resaltamos en negro la arista correspondiente, obscurecemos en azul el vértice que representa la nueva cantidad y escribimos junto a él el número (56) y su descripción "No Curadas".

Vector

3

$64 - 42 = 22$ curadas sin Antibiótico

42 A. C.

48 N.C.

64 C

$120 - 64 = 56$ No Curadas

$42 + 18 = 60$ Tratadas con Antibiótico

$56 - 48 = 18$ No curadas con antibiótico

120 — 100%

56 — x

$x = \frac{100 \cdot 56}{120} = \frac{5600}{120}$

5600 | 120

60 — 100 %

18 — x

$x = \frac{1800}{60} = 30\%$

180 | 6
00 | 30

De las personas tratadas con el antibiótico el 30 % no se ha curado.

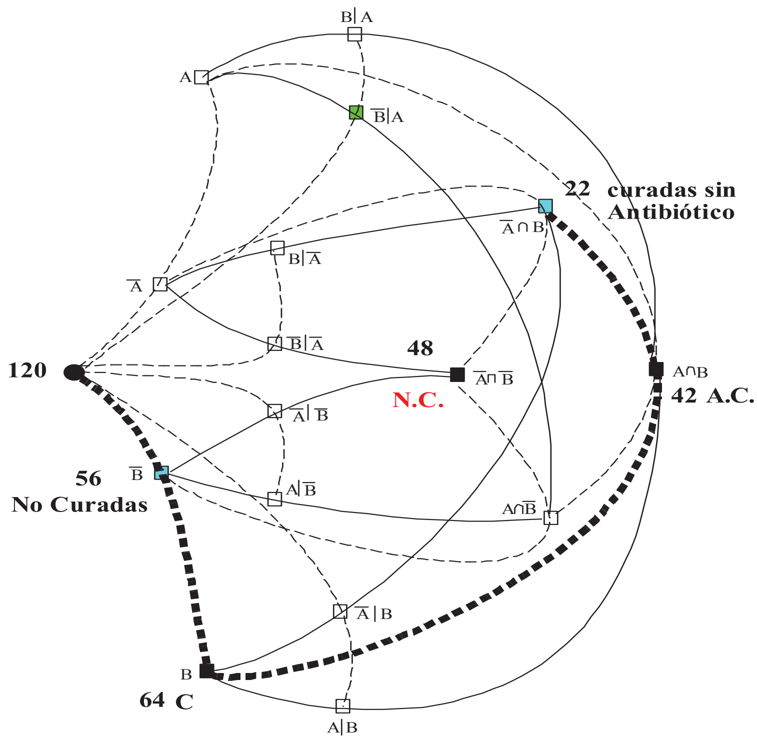
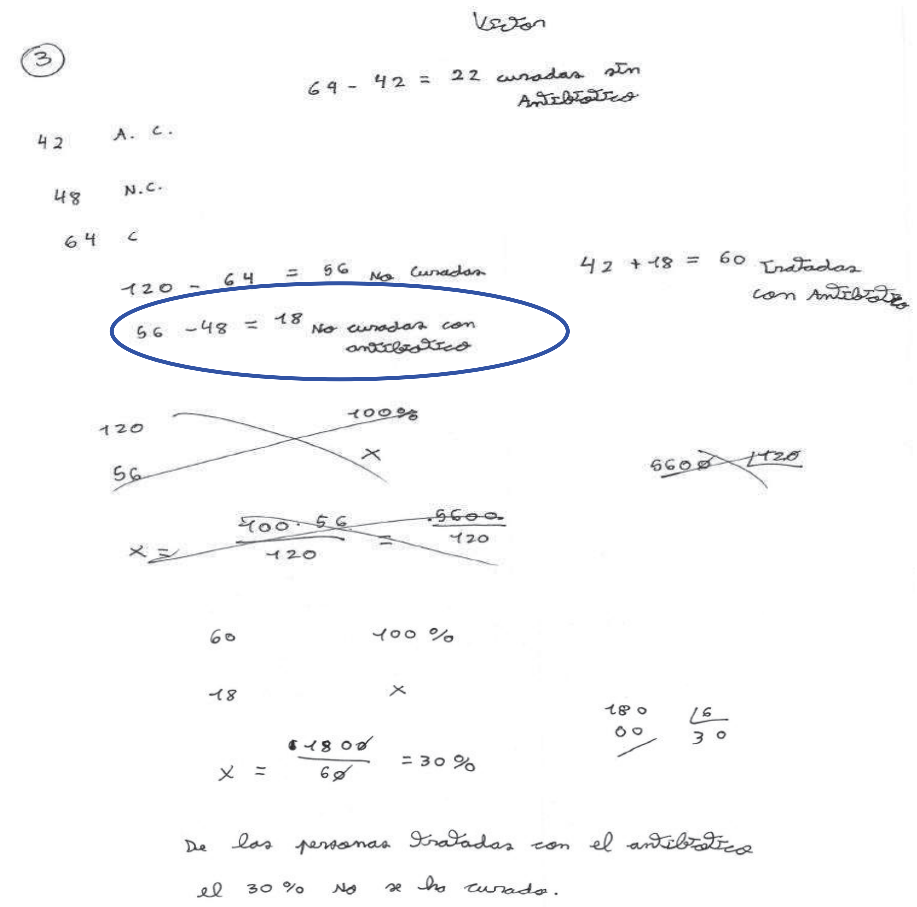


Figura 4.18

IV) Obtiene la intersección directamente relacionada con la condicional preguntada, “tratadas y no curadas”, mediante la relación: n(no curadas) - n(no tratadas y no curadas) = n(tratadas y no curadas) o, en términos de A y B, $n(\overline{B}) - n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(A \cap \overline{B})$. En ella comete un error de cálculo y escribe 18 en lugar de 8 como resultado de la operación. Por ese motivo, en el grafo resaltamos la arista correspondiente en negro, escribimos en rojo la componente numérica de la cantidad (18) y en negro la descripción “No curadas con antibiótico”.


Víctor

(3)

64 - 42 = 22 curadas sin Antibiótico

42 A. C.

48 N.C.

64 C

120 - 64 = 56 No curadas

56 - 48 = 18 No curadas con antibiótico

42 + 18 = 60 Tratadas con Antibiótico

~~120 100%~~

~~56 x~~

~~5600 |120~~

~~x = 100 · 56 / 120 = 5600 / 120~~

60 100 %

18 x

180 |6

00 30

x = 1800 / 60 = 30 %

De las personas tratadas con el antibiótico el 30 % No se ha curado.

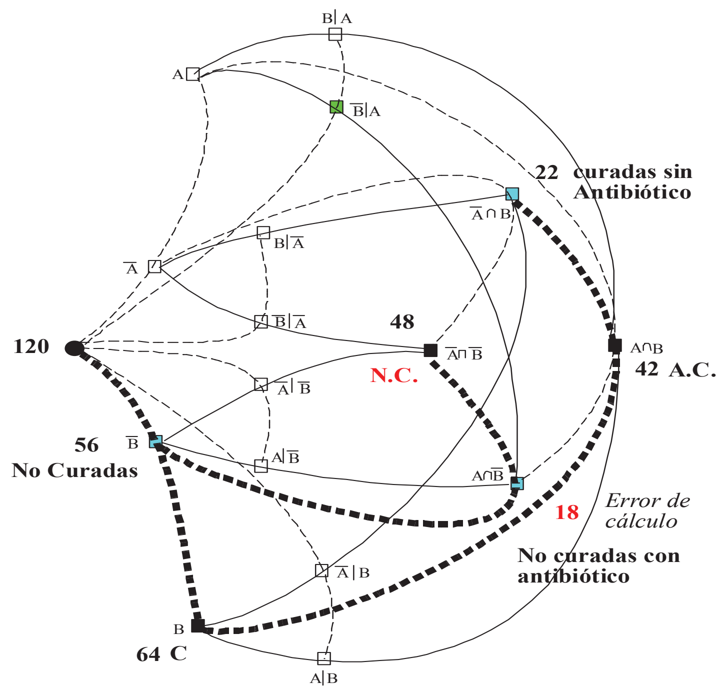


Figura 4.19.

V) Obtiene la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta, "tratadas", mediante la relación n(tratadas y curadas) + n(tratadas y no curadas) = n(tratadas) o, en términos de A y B, n($A \cap B$) + n($A \cap \overline{B}$) = n(A).

Víctor

3

64 - 42 = 22 curadas sin Antibiótico

42 A. C.

48 N.C.

64 C

120 - 64 = 56 No curadas

56 - 48 = 18 No curadas con antibiótico

42 + 18 = 60 Tratadas con Antibiótico

120 100%

56 x

~~5600 | 120~~

~~$x = \frac{100 \cdot 56}{120} = \frac{5600}{120}$~~

60 100 %

18 x

$x = \frac{1800}{60} = 30\,\%$

180 | 6
00 30

De las personas tratadas con el antibiótico el 30 % No se ha curado.

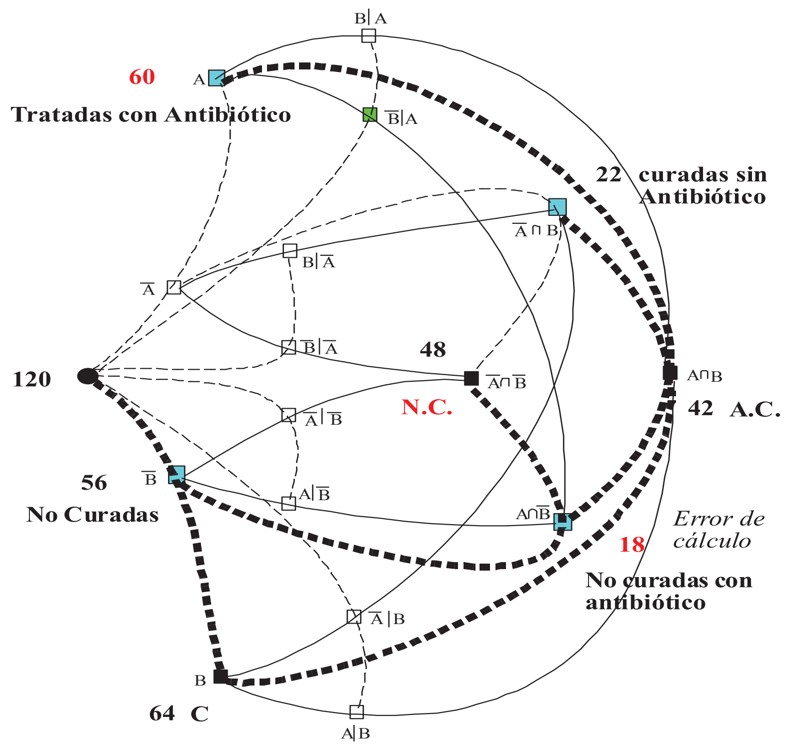
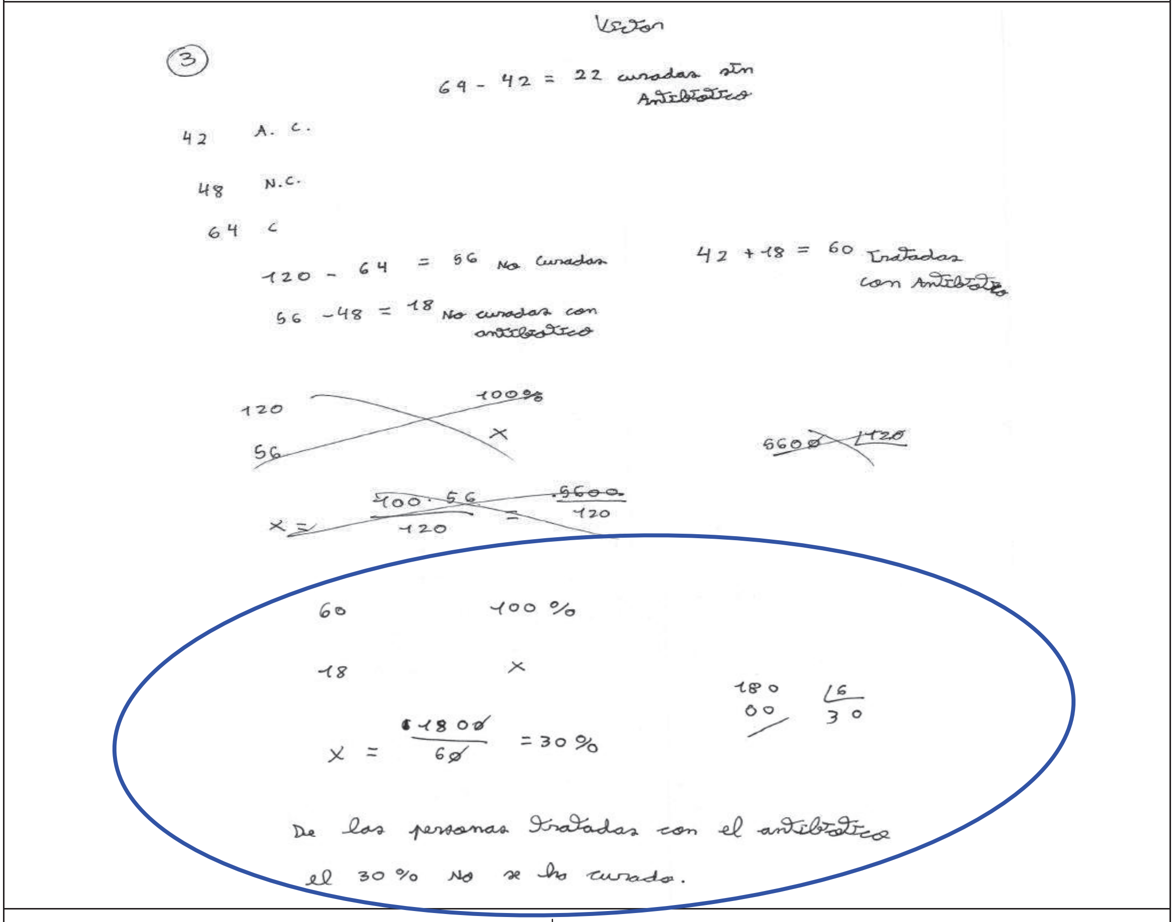


Figura 4.20.

VI) Finalmente, plantea una regla de tres para el cálculo del porcentaje pedido. Las cantidades que intervienen en la regla de tres son pertinentes, ya que usa la marginal y la intersección directamente relacionadas con la condicional buscada (el número de personas tratadas y el número de personas tratadas y no curadas). Por tanto, resaltamos en negro la arista multiplicativa correspondiente y escribimos, junto al vértice verde que representa a la condicional pedida, la componente numérica y la descripción de esta cantidad.


Víctor

3

64 - 42 = 22 curadas sin Antibiótico

42 A. C.

48 N.C.

64 C

120 - 64 = 56 No curadas

42 + 18 = 60 Tratadas con Antibiótico

56 - 48 = 18 No curadas con antibiótico

~~120 — 100%~~

~~56 — x~~

~~6600 | 120~~

~~x = 100 · 56 / 120 = 5600 / 120~~

60 — 100 %

18 — x

x = 1800 / 60 = 30 %

180 | 6
00 | 30

De las personas tratadas con el antibiótico el 30 % No se ha curado.

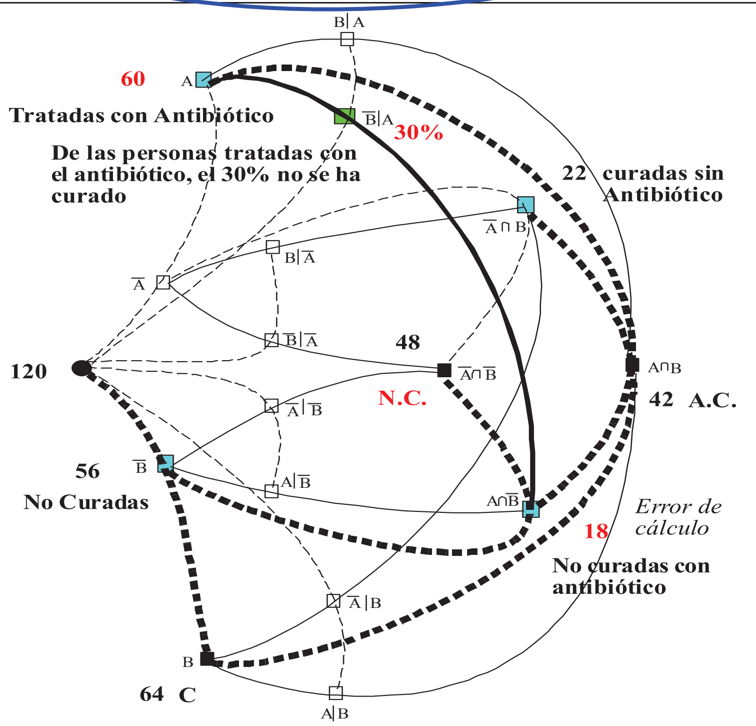
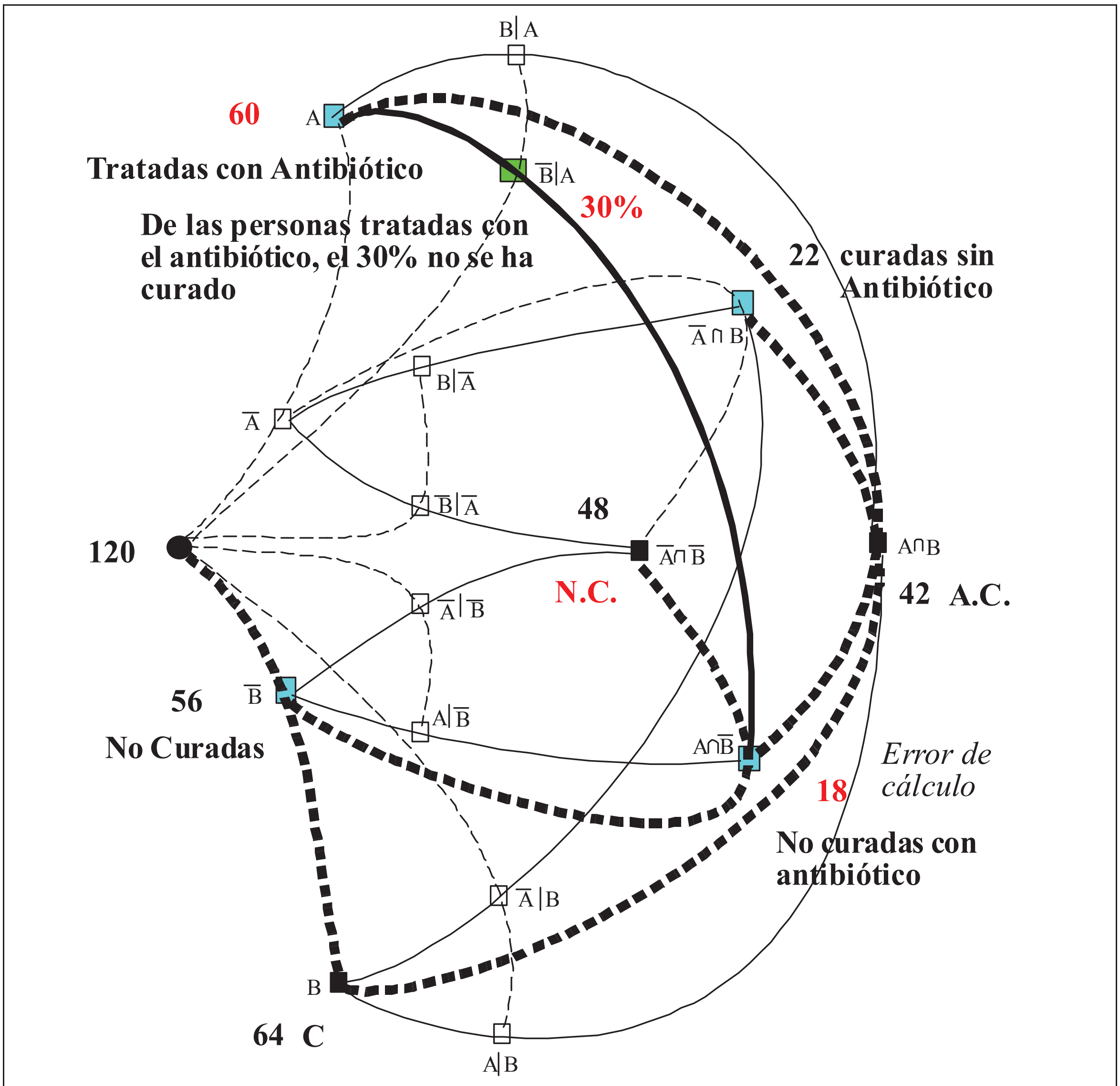


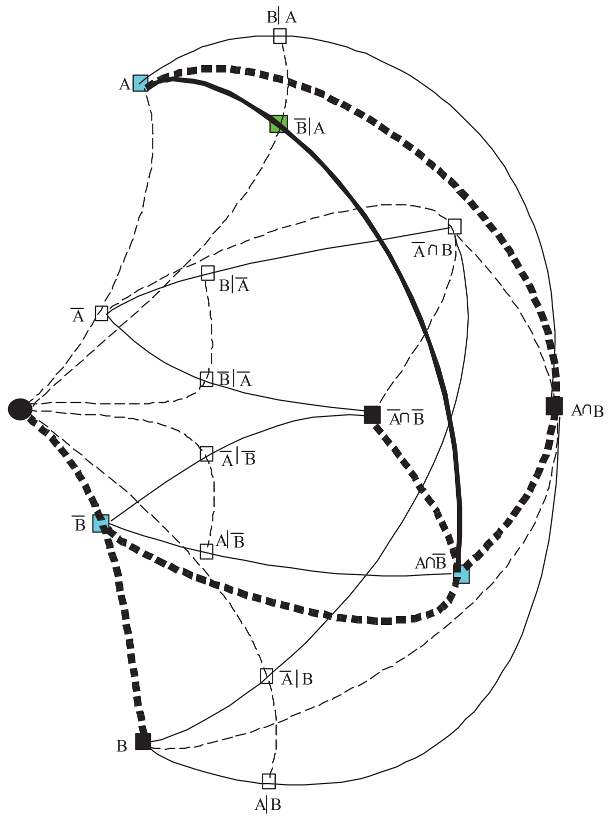
Figura 4.21.



Cantidades conocidas: (42, A.C., f) (48, N.C., f) (64, C, f) **Cantidad desconocida:** (30%, De las personas tratadas con el antibiótico el 30% no se ha curado, %) **Cantidades intermedias:** (22, curadas sin Antibiótico, f) (56, no curadas, f) (18, No curadas con antibiótico, f) (60, Tratadas con antibiótico, f)	**Relaciones ternarias:** Cuatro relaciones aditivas: • n(C) – n(A.C.) = n(curadas sin Antibiótico) • N – n(C) = n(No curadas) • n(No curadas) – n(N.C.) = n(No curadas con antibiótico) • n(A.C.) + n(No curadas con antibiótico) = n(Tratadas con antibiótico) Y una relación multiplicativa que representa la obtención de la condicional a partir de la intersección y de la marginal directamente relacionadas (este cálculo se hace mediante regla de tres en la resolución escrita)

Figura 4.22. Análisis de cantidades y de relaciones entre cantidades en el grafo de la resolución del Problema 9 del Pre-test(F) realizada por el estudiante V.

Grafo teórico



Grafo de la resolución de V.

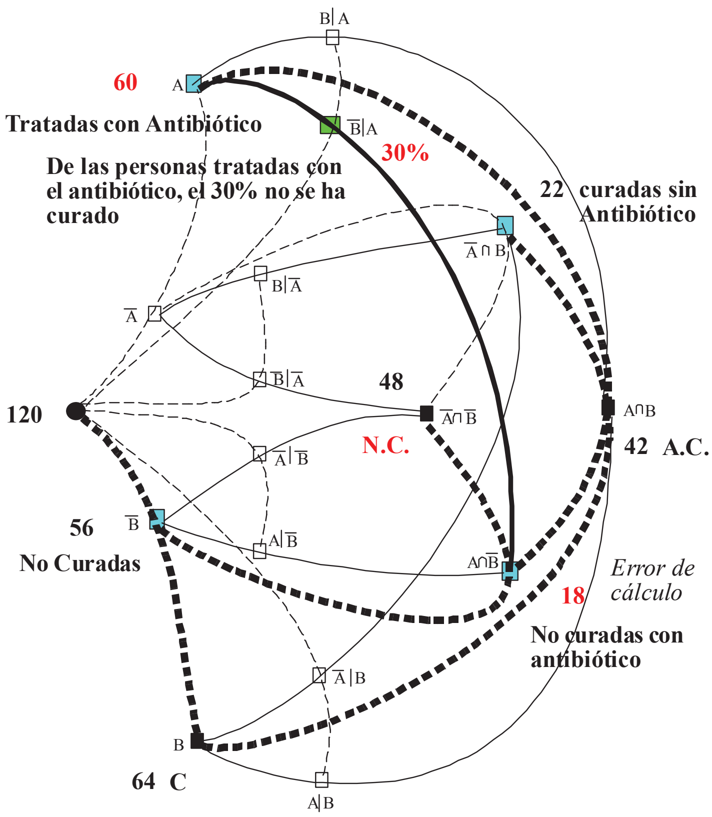
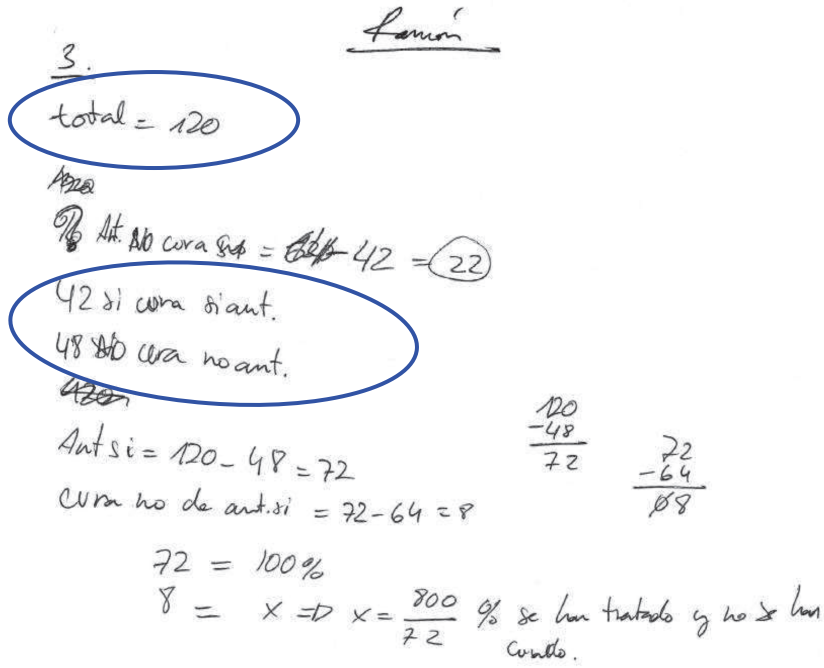


Figura 4.23. Grafo teórico de la resolución del Problema 9 y grafo asociado a la resolución escrita del Problema 9 del Pre-test(F) realizada por el estudiante V.

Caso de R. Construcción del grafo de la resolución, paso a paso.

I) Interpreta correctamente las cantidades conocidas, dadas en el enunciado y las organiza en forma de lista. En ella incluye el total de la muestra (120) y las intersecciones (42 y 48), que describe como "sí cura sí ant.", "no cura no ant." No incluye la cantidad 64 personas curadas, pero la usa correctamente más adelante, sin llegar a describirla. Por tanto, escribimos, junto a cada vértice ya obscurecido en negro, las componentes x (los números) y las componentes n (las descripciones) de estas cantidades.



Ramón

3.

total = 120

Ant. no cura sí = ~~64~~ − 42 = 22

42 sí cura sí ant.

48 no cura no ant.

Ant sí = 120 − 48 = 72

cura no de ant. sí = 72 − 64 = 8

$\begin{array}{r} 120 \\ -48 \\ \hline 72 \end{array}$ $\begin{array}{r} 72 \\ -64 \\ \hline 08 \end{array}$

72 = 100%

8 = x ⇒ $x = \frac{800}{72}$ % se han tratado y no se han curado.

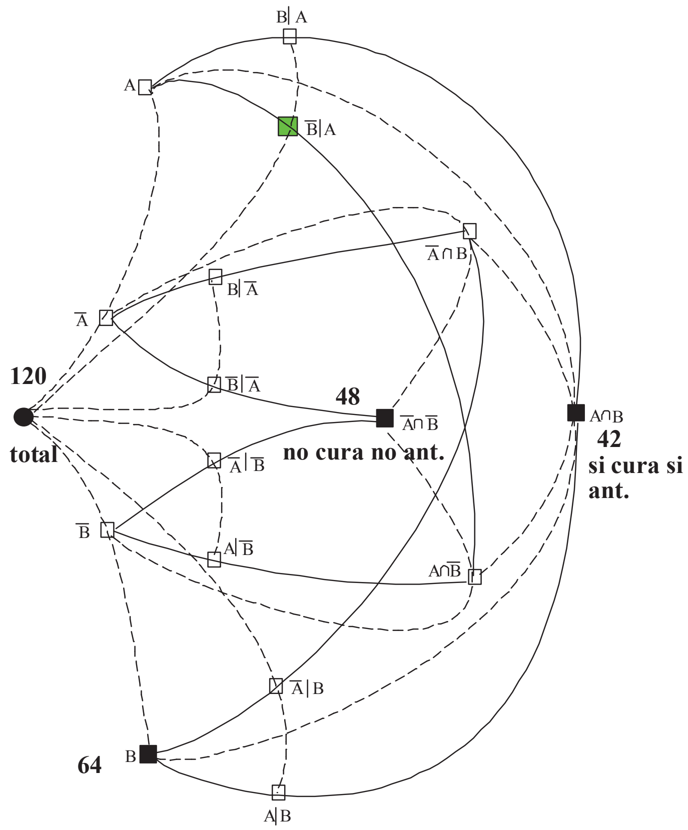


Figura 4.24.

II) Obtiene la intersección “no tratadas y curadas”, mediante el uso de la relación n(curadas) – n(tratadas y curadas) = n(no tratadas y curadas) o, en términos de A y B, n(B) – n(A∩B) = n($\overline{A}$∩B). Resaltamos en negro la arista correspondiente, obscurecemos en azul el vértice que representa la nueva cantidad y escribimos junto a él el número (22) y su descripción “Ant. No cura Sí”.

Ramón

3.

total = 120

~~A120~~

~~6%~~ Ant. No cura ~~sí~~ = ~~64~~ - 42 = 22

42 si cura si ant.

48 ~~No~~ cura no ant.

~~420~~

Ant si = 120 - 48 = 72

cura no de ant. si = 72 - 64 = 8

$$\begin{array}{r} 120 \\ -48 \\ \hline 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ -64 \\ \hline 08 \end{array}$$

72 = 100%

8 = x ⇒ x = $\frac{800}{72}$ % se han tratado y no se han curado.

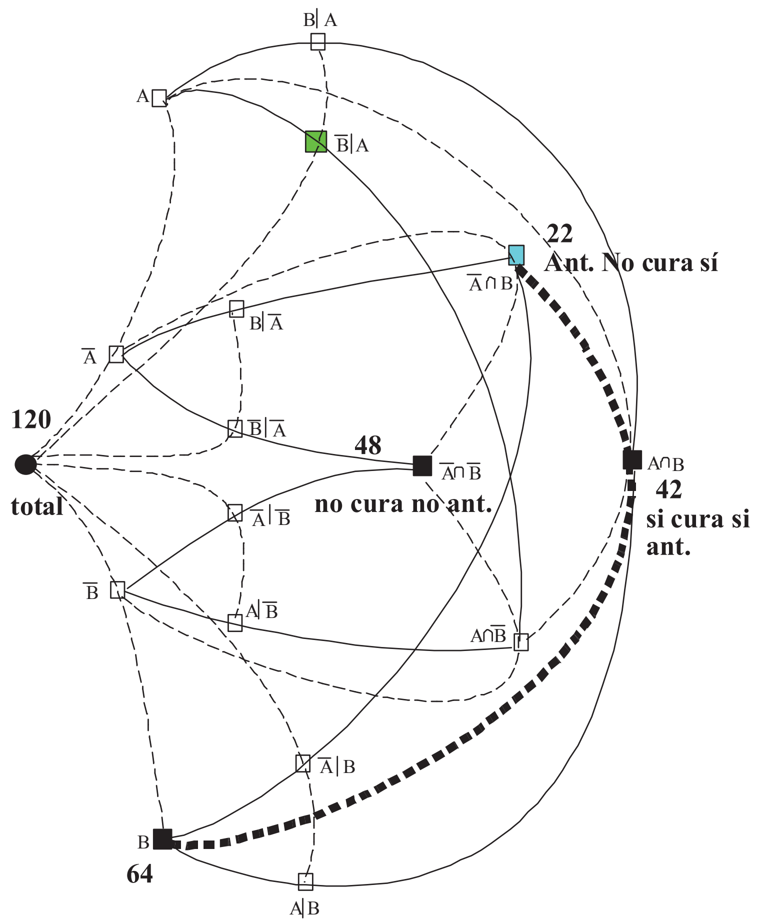


Figura 4.25.

III) Obtiene la marginal directamente relacionada con la condicional preguntada, “tratadas”, mediante la relación falsa entre cantidades N - n(no tratadas y no curadas) = n(tratadas) o, en términos de A y B, N - n($\bar{A} \cap \bar{B}$) = n(A). Por tanto, está cometiendo un error de relación de tipo E6.1. En el grafo, incorporamos una arista roja de trazos discontinuos para representar la relación y obscurecemos en rojo el vértice al que asignamos la cantidad intermedia que resulta. Junto a este vértice escribimos en rojo la componente numérica de la cantidad (72) por ser errónea, y en negro la descripción (Ant si), que sí es correcta porque se corresponde con el suceso que representa dicho vértice.

Ramón

3.

total = 120

Ant. No cura sí = 42 = 22

42 si cura si ant.

48 ~~No~~ cura no ant.

Ant si = 120 − 48 = 72

cura no de ant si = 72 − 64 = 8

$$\begin{array}{r} 120 \\ -48 \\ \hline 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ -64 \\ \hline 08 \end{array}$$

72 = 100%

8 = x ⇒ x = $\frac{800}{72}$ % se han tratado y no se han curado.

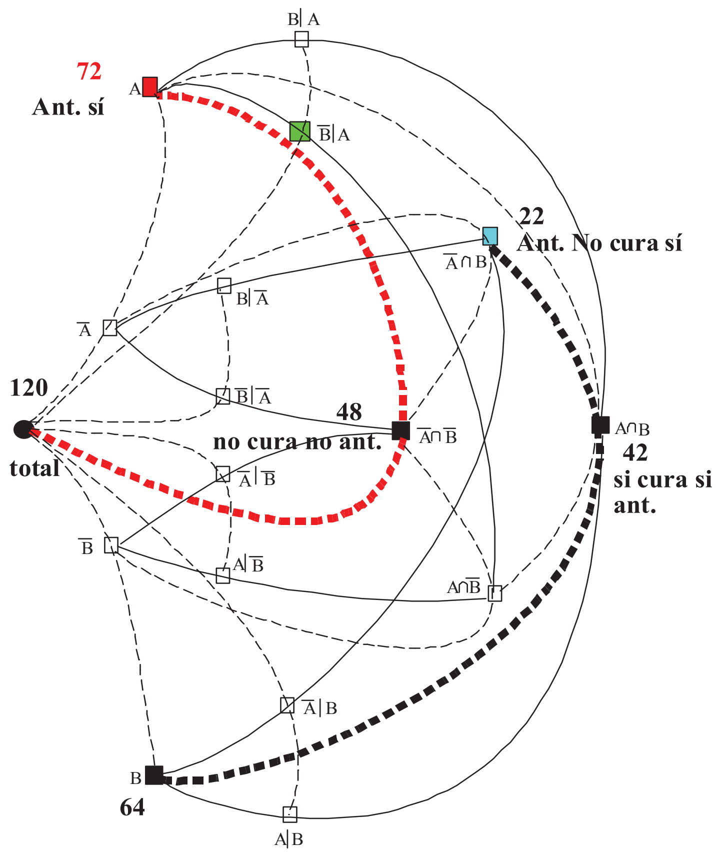
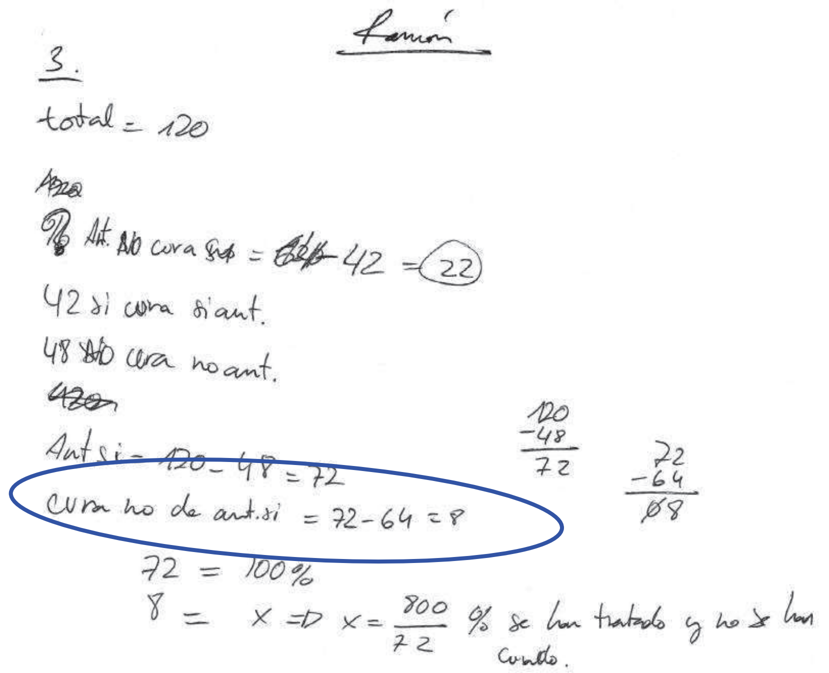


Figura 4.26.

IV) Obtiene la intersección directamente relacionada con la condicional preguntada, "tratadas y no curadas", mediante la relación falsa entre cantidades: n(tratadas) - n(curadas) = n(tratadas y no curadas) o, en términos de A y B, $n(A) - n(B) = n(A \cap \overline{B})$. Por tanto, vuelve a cometer un error de relación de tipo E6.1. Como antes, incorporamos al grafo una arista roja de trazos discontinuos para representar la relación y obscurecemos en rojo el vértice al que asignamos la cantidad intermedia que resulta. Junto a este vértice escribimos en rojo la componente numérica de la cantidad (8), errónea por construcción (aunque casualmente el número es el correcto), y la componente n ("cura no de ant. si") en negro por corresponderse con el suceso que representa dicho vértice.



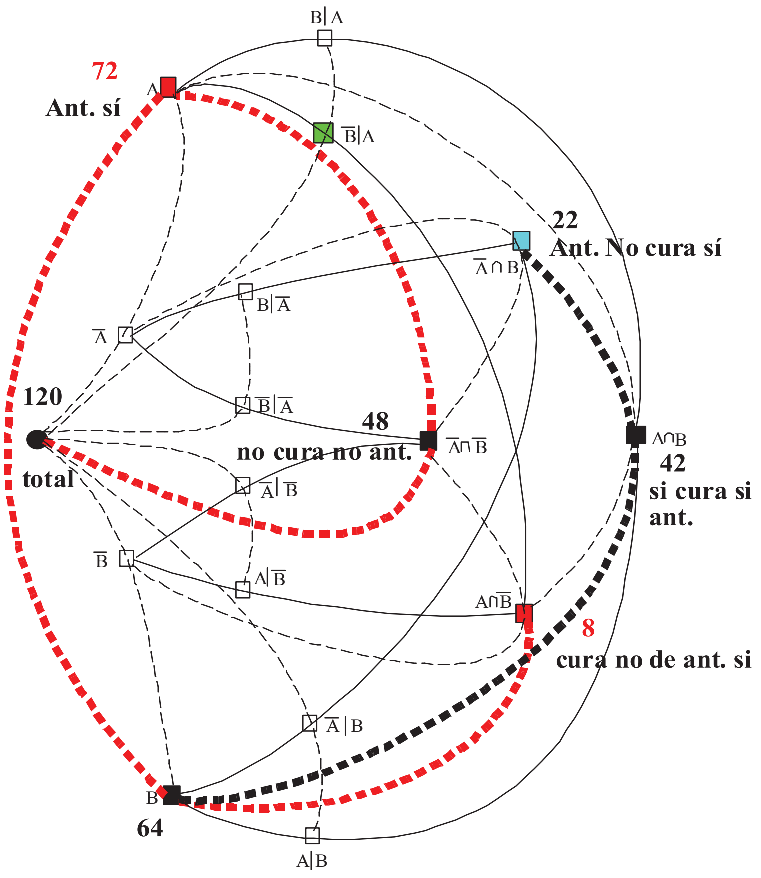
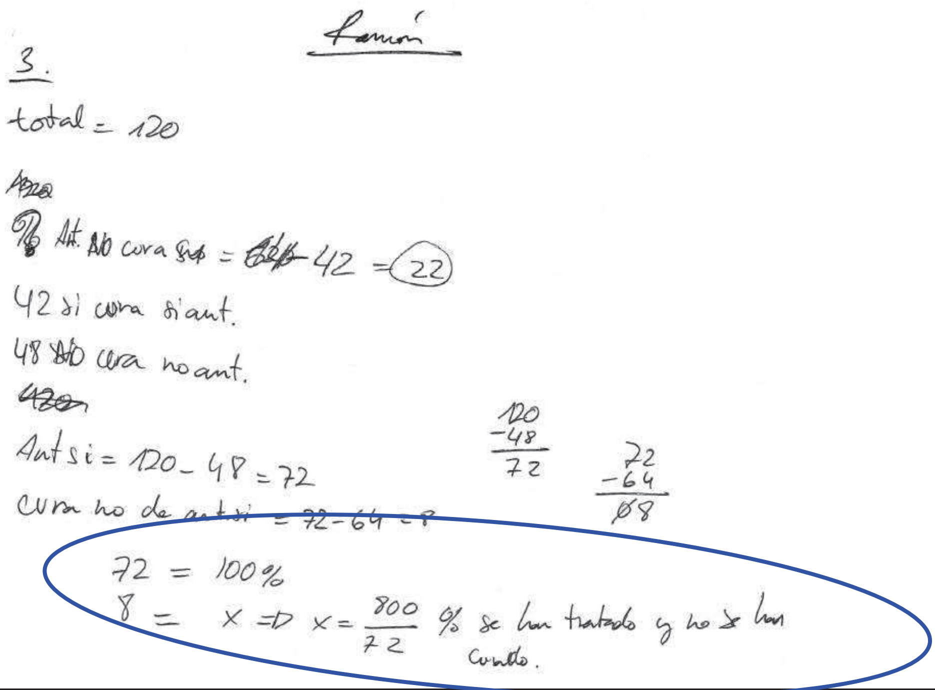


Figura 4.27.

V) Finalmente, plantea una regla de tres para el cálculo del porcentaje pedido. Las cantidades que intervienen en la regla de tres son pertinentes, ya que usa la marginal y la intersección directamente relacionadas con la condicional buscada (el número de personas tratadas y el número de personas tratadas y no curadas). Por tanto, resaltamos en negro la arista multiplicativa correspondiente y escribimos junto al vértice verde que representa a la condicional pedida las componentes numérica y verbal de esta cantidad. Ambas componentes se escriben en rojo: el número porque es incorrecto por errores arrastrados y la descripción porque también es incorrecta, al tener como referente una intersección, la intersección directamente relacionada con la condicional preguntada. El estudiante ha cometido, por tanto, un error de descripción (error de tipo E4).


Ramón
3.
total = 120
~~A120~~
% Ant. ~~No~~ cura sí = ~~64~~ – 42 = 22
42 si cura si ant.
48 ~~No~~ cura no ant.
~~420~~
Ant si = 120 – 48 = 72
cura no de ant. si = 72 – 64 = 8
120 − 48 = 72
72 − 64 = 08
72 = 100%
8 = x ⇒ x = 800/72 % se han tratado y no se han curado.

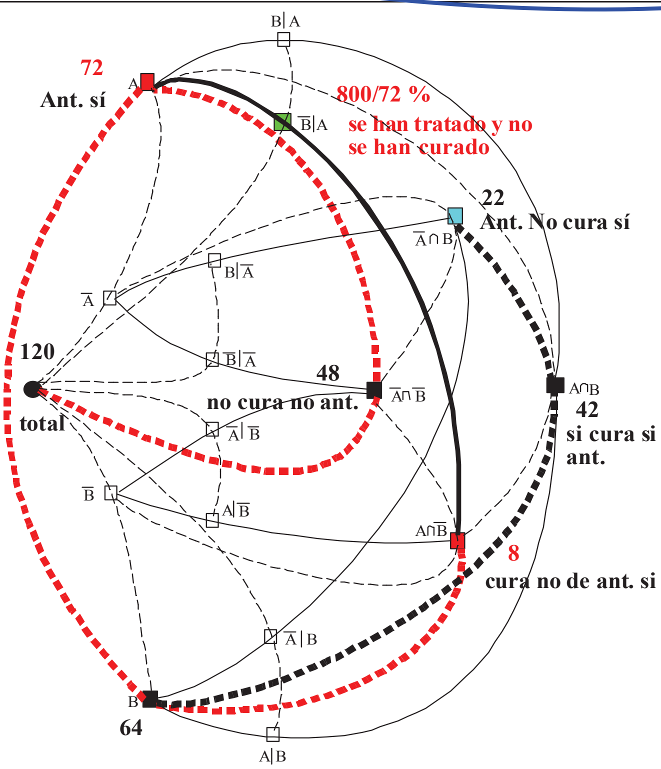
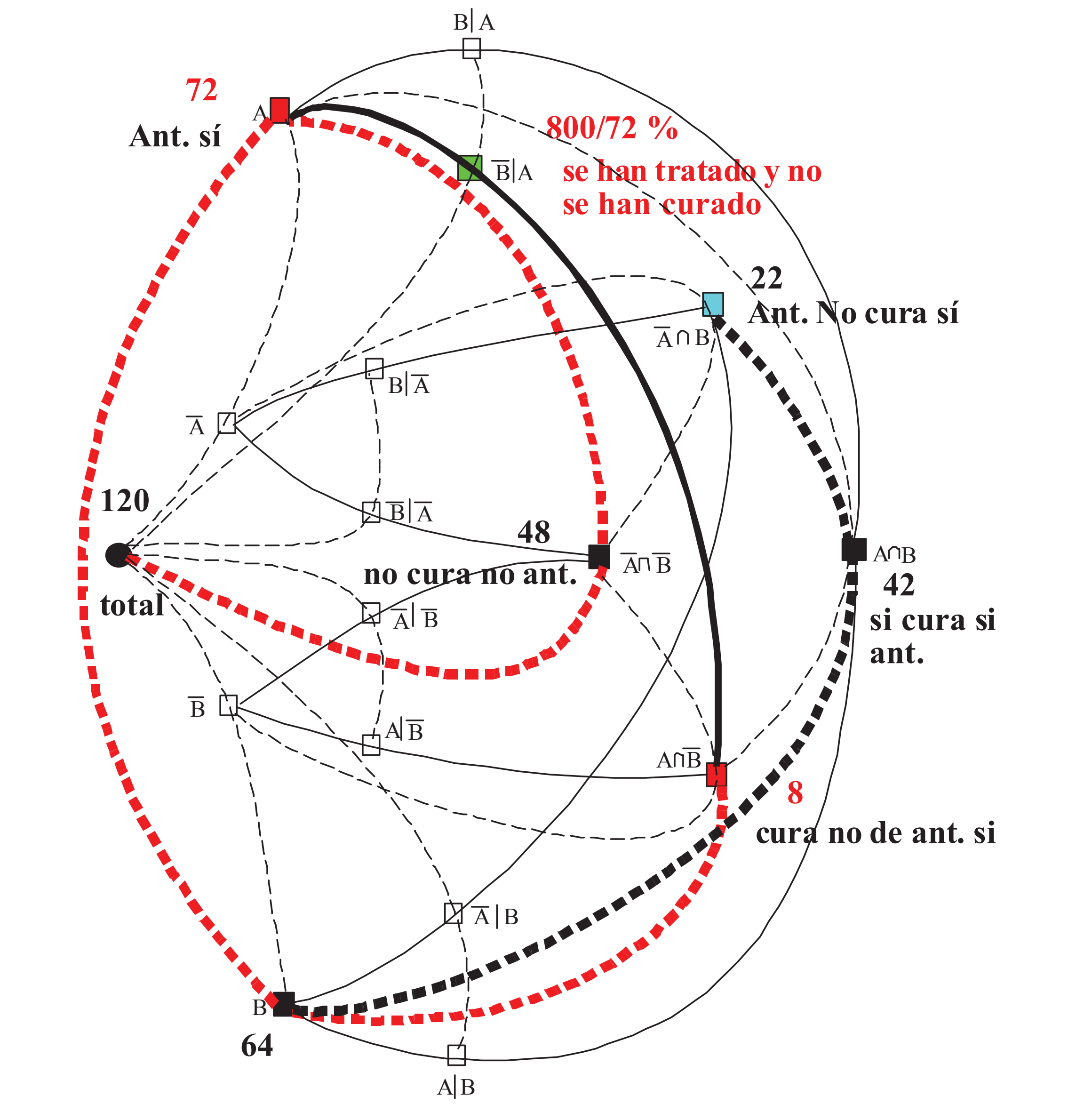


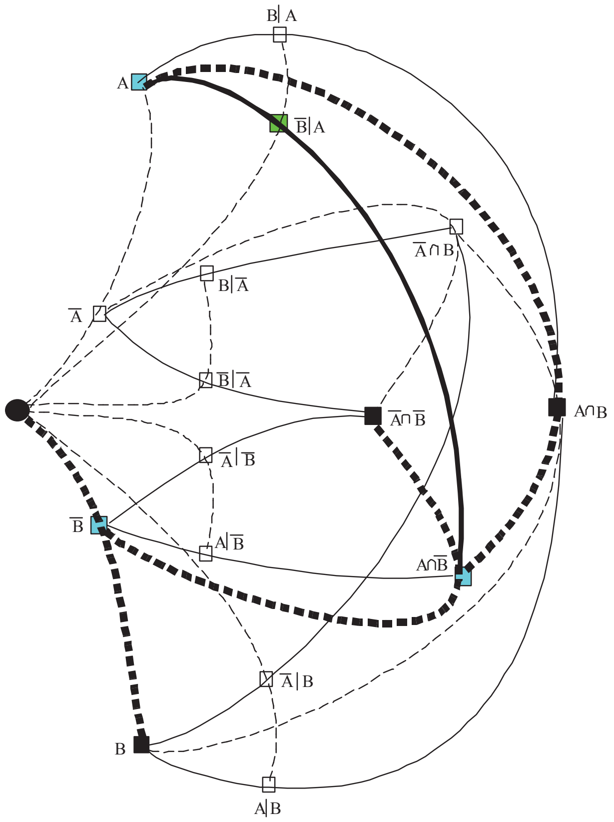
Figura 4.28.



Cantidades conocidas: (120, total, f) (42, si cura si ant., f) (48, no cura no ant., f) (64, - , f) **Cantidad desconocida:** (800/72, se han tratado y no se han curado, %) **Cantidades intermedias:** (22, Ant. No cura sí, f) (72, Ant sí, f) (8, cura no de ant. si, f)	**Relaciones ternarias** Una relación aditiva correcta: • n(curadas) – n(si cura si ant.) = n(Ant. No cura sí) Dos relaciones aditivas incorrectas: • n(total) - n(no cura no ant.) = n(Ant. sí) • n(Ant. sí) - n(curadas) = n(cura no de ant. si) Una relación multiplicativa que representa la obtención de la condicional a partir de la intersección y de la marginal directamente relacionadas (este cálculo se hace mediante regla de tres en la resolución escrita)

Figura 4.29. Análisis de cantidades y de relaciones entre cantidades en el grafo de la resolución del Problema 9 del Pre-test(F) realizada por el estudiante R.

Grafo teórico



Grafo de la resolución de R.

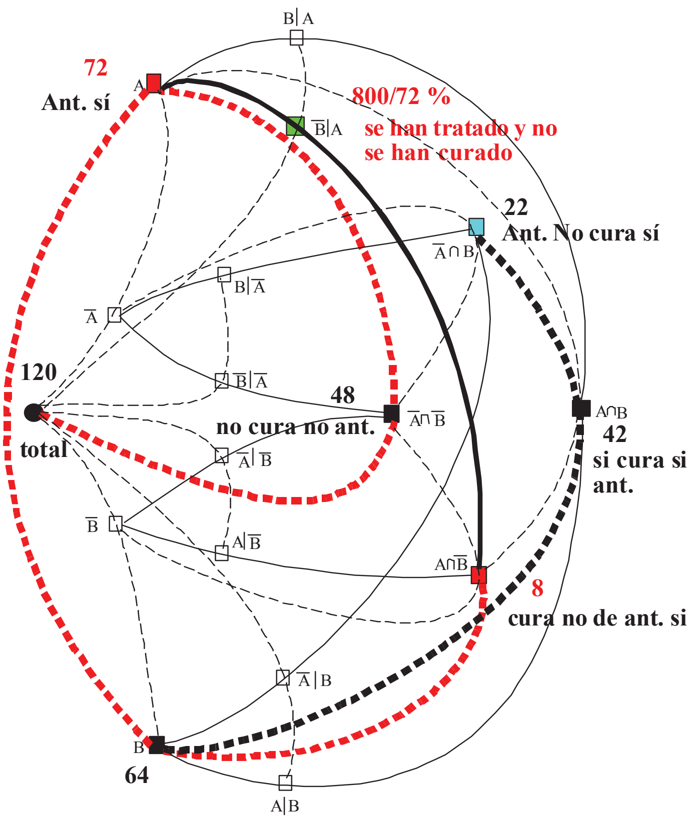


Figura 4.30. Grafo teórico de la resolución del Problema 9 y grafo asociado a la resolución escrita del Problema 9 del Pre-test(F) realizada por el estudiante R.

4.9.3.2 – Análisis de las resoluciones del post-test.

A la hora de analizar las resoluciones del post-test, no hemos usado el grafo para representar la actuación de los estudiantes, como en el caso de las resoluciones de los pre-test. Esto se debe a que en la mayoría de los casos, los estudiantes hacen uso de la tabla no sólo para organizar la información del enunciado, sino también para calcular cantidades intermedias. Invariablemente, los estudiantes completan las tablas, es decir, hallan las cuatro intersecciones y las cuatro marginales del problema siguiendo las reglas de cálculo de la tabla pero sin hacer explícitas las relaciones entre cantidades usadas. Al disponer únicamente de registros escritos de las resoluciones, ante una tabla completa que no viene acompañada de cálculos explícitos de las cantidades que contiene, no siempre es posible observar qué relaciones se han activado exactamente, ni mucho menos el orden en que se ha hecho, lo cual sería necesario para construir el grafo de la resolución. Por otra parte, como se verá, existe una gran uniformidad en los procesos de resolución, hasta el punto de que la lectura que se hace de una única resolución con éxito se repite en la mayor parte de las resoluciones restantes y, por tanto, puede ser adoptada como modelo de la forma general de proceder de los estudiantes en el post-test.

En cuanto al análisis de los errores cometidos por los estudiantes, se ha realizado tomando como base los descriptores empleados para el análisis de los errores en las resoluciones de los pre-test y adoptando la misma nomenclatura en su codificación, de manera que se pudiera construir un único catálogo que englobara los errores observados en las tres pruebas (Anexo 27, p. 661). No obstante, como puede comprobarse en el capítulo de resultados, los errores en el post-test son mucho más escasos y no todos los errores observados en las resoluciones de los pre-test aparecen en las resoluciones del post-test. Al mismo tiempo, en estas últimas se observan nuevos errores, la mayoría relacionados con el formato en que se formulan los datos (que no se presta al uso de la regla de tres para el cálculo de la condicional, sino que obliga a usar la definición de probabilidad condicionada) y con la nueva manera de resolver los problemas por parte de los estudiantes con el uso de la tabla. Todo esto queda reflejado en el citado catálogo de errores.

Así pues, para el análisis de las estrategias de resolución con éxito (que se halla en el apdo. 5.4.1, p. 309) hemos tenido en cuenta, básicamente, las fases en la resolución de un problema de N_0 mediante tabla de contingencia.

Capítulo 5. Resultados.

5.1 – SOBRE LOS PROBLEMAS DE NIVEL N_0 .

En este primer apartado centraremos nuestra atención en los problemas, mostrando aquellos resultados de la investigación que permitan hablar de alguna característica de los mismos. En primer lugar, presentaremos los resultados del estudio de su estructura matemática, que responde al primero de los objetivos marcados y se ha llevado a cabo en el escenario I, es decir, tomando en consideración a los problemas como objetos independientes del resolutor. A continuación, hablaremos de algunas características de los problemas observadas a partir de las resoluciones de los estudiantes (en el escenario II), para lo cual haremos uso de las variables dependientes de la investigación. El conjunto de variables definidas describen si el problema ha sido abordado o no, si hay algún tipo de organización de la información y de qué tipo, si aparecen cálculos intermedios y si son correctos o no, si existe un cálculo específico para el resultado y si es correcto o no, si se ha dado como resultado un número correcto, si está descrito y si la descripción es correcta o incorrecta (véase apdo. 4.9.1, p. 144). Por último, mostraremos los valores que toman en esta investigación las variables que miden las dificultades de los problemas. Recordemos que estas variables eran seis: la dificultad apreciada (DAP), la dificultad global del problema (DP), la dificultad del problema (DPR), la dificultad de la solución del problema (DSP), la dificultad de la descripción del resultado (DDRES) y la dificultad de la descripción correcta del resultado (DDRESC), todas ellas definidas en el apartado 4.9.2 (p. 151) . En todo momento somos conscientes de que el escaso tamaño de la muestra de estudiantes con la que trabajamos hace inviable un estudio cuantitativo cuyos resultados sean generalizables y, de hecho, esto no figura entre los objetivos de esta tesis. Sin embargo, un estudio de este tipo lo encontramos en Carles y otros (2009) quienes miden las dificultades de los problemas de nivel N_0 en una muestra grande de estudiantes (990 resoluciones) y estudian posibles influencias de las variables de la tarea *estructura de datos* y *contexto* en dichas dificultades. Aquí nos limitaremos a mostrar como los resultados obtenidos en nuestra investigación son coherentes con los obtenidos en dicho estudio.

5.1.1 – Resultados del estudio teórico de la estructura matemática de los problemas. Problemas básicos de nivel N_0.

Si bien la determinación y el estudio teórico de los problemas según su estructura de datos se han llevado a cabo usando el "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional", tal y como se indica en el apdo. 4.1 (p. 90), la representación de los casos mediante tablas de contingencia permite visualizarlos de manera rápida y sencilla.

A continuación, se muestran las tablas correspondientes a los *casos básicos*, dentro de cada categoría, para los datos conocidos y las *opciones de pregunta básicas*, para cada caso básico. Recordemos que una probabilidad condicional será una opción de pregunta para un determinado caso básico si da lugar a un problema ternario de probabilidad condicional tal y como se han definido en el apartado 3.4 (p. 55). Cada combinación de caso básico con una de las opciones de pregunta básicas que tiene asociadas da lugar a un *problema básico* de nivel N_0.

Categoría C_0

Un problema de nivel N_0 es de categoría C_0 si no presenta ninguna probabilidad marginal entre los datos conocidos y por tanto, los tres datos conocidos son probabilidades de la intersección. Esto da lugar a un único *caso* para esta categoría: aquél en el que los datos son tres intersecciones cualesquiera. Si tomamos, por ejemplo, las probabilidades $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, las opciones de pregunta correspondientes serían $P(B \mid \overline{A})$ y $P(B \mid A)$, como se muestra en la Tabla 5.1.

	A	$\overline{A}$	
B	α		
$\overline{B}$	β	γ	
			1

Opciones de pregunta
$P(B \mid \overline{A})$
$P(B \mid A)$

Tabla 5.1. Lectura organizada de un caso básico de problema perteneciente a la subfamilia $N_0C_0T_1$. Un caso básico con dos opciones de pregunta.

Desde un punto de vista analítico[23], los sucesos A y B son intercambiables y también lo son cada suceso y su complementario. Por este motivo, cualquier otra combinación de tres intersecciones daría lugar a un enunciado equivalente al anterior en cuanto a la forma en que se relacionan entre sí los datos conocidos, que es lo que en definitiva determina cada *caso* dentro de una misma categoría (véase apdo. 4.1, p. 90). Es decir, se trataría del mismo *caso* y las opciones de pregunta asociadas se deducirían a partir de las anteriores, por analogía. Así, si intercambiamos los sucesos B y $\overline{B}$ en el ejemplo anterior, es decir, si las intersecciones conocidas fueran $P(A \cap \overline{B})$, $P(A \cap B)$ y $P(\overline{A} \cap B)$ en lugar de $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, entonces las opciones de pregunta asociadas serían $P(\overline{B} \mid \overline{A})$ y $P(\overline{B} \mid A)$, obtenidas cambiando B por $\overline{B}$ en $P(B \mid \overline{A})$ y $P(B \mid A)$. La configuración de la Tabla 5.1 es la que hemos tomado como

[23] Reduciendo el problema a datos (cantidades) y relaciones entre ellos.

representante del caso. En adelante, cuando hablemos de *caso básico* (en cualquiera de las categorías) nos referiremos a la configuración que hemos seleccionado como representante para cada *caso* en cada categoría.

Categoría C_1

Los problemas de nivel N_0 y categoría C_1 son aquellos que presentan una probabilidad marginal y dos probabilidades de la intersección como datos conocidos. Atendiendo a las relaciones que pueden darse entre estos tres datos, podemos distinguir tres *casos básicos*:

- **Caso 1:** Los datos son dos intersecciones que tienen en común uno de los sucesos que se intersectan y la marginal del suceso que no interviene en ninguna de las dos intersecciones. En la tabla de contingencia (véase Tabla 5.2), esto se traduce en la siguiente situación: intersecciones en línea (fila o columna) y marginal en la celda que no comparte ni fila ni columna con ninguna de las anteriores. Por ejemplo, $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$ y $P(\overline{A})$.

	A	$\overline{A}$	
B	α		
$\overline{B}$	β		
		γ	1

Opciones de pregunta
$P(B \mid A)$
$P(B \mid \overline{A})$
$P(A \mid B)$
$P(A \mid \overline{B})$

Tabla 5.2. Lectura organizada de un caso básico de problema perteneciente a la subfamilia $N_0C_1T_1$. Caso 1 con cuatro opciones de pregunta.

El problema así planteado es indeterminado, ya que existen datos redundantes y no es posible completar la tabla:

	A	$\overline{A}$	
B	α		
$\overline{B}$	β		
	$\alpha+\beta=1-\gamma$	γ	1

Tabla 5.3. Cálculos posibles en la tabla de contingencia asociada al caso básico de problema de $N_0C_1T_1$. Caso 1.

Como consecuencia, lo descartamos en el diseño de los enunciados de las pruebas.

- **Caso 2:** Los datos son dos intersecciones que tienen en común uno de los sucesos que se intersectan, y la marginal de uno de los dos sucesos no comunes. En la tabla, intersecciones en línea y marginal no alineada con éstas, compartiendo fila o columna con una de las dos intersecciones. Por ejemplo, $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$ y $P(B)$, como se muestra en la Tabla 5.4.

	A	$\overline{A}$	
B	α		γ
$\overline{B}$	β		
			1

Opciones de pregunta
$P(B \mid \overline{A})$

Tabla 5.4. Lectura organizada de un caso básico de problema perteneciente a la subfamilia $N_0C_1T_1$. Caso 2 con una opción de pregunta.

- **Caso 3**: Los datos son dos intersecciones que no tienen ningún suceso en común y una marginal cualquiera. En la tabla, dos intersecciones no alineadas (distinta fila y columna) y una marginal cualquiera. Por ejemplo, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ y $P(B)$, como se observa en la Tabla 5.5.

	A	$\overline{A}$	
B	α		γ
$\overline{B}$		β	
			1

Opciones de pregunta
$P(B \mid A)$
$P(B \mid \overline{A})$

Tabla 5.5. Lectura organizada de un caso básico de problema perteneciente a la subfamilia $N_0C_1T_1$. Caso 3 con dos opciones de pregunta.

Categoría C_2

Los problemas de nivel N_0 y categoría C_2 son aquellos que presentan dos probabilidades marginales y una probabilidad de la intersección como datos conocidos. Al igual que antes, atendiendo a las relaciones que pueden darse entre estos tres datos, podemos distinguir tres *casos básicos*:

- **Caso 1:** Los datos son una intersección y las marginales de los sucesos que intervienen en dicha intersección. En la tabla, una intersección y las marginales correspondientes a la fila y la columna donde se sitúa. Por ejemplo, P(A), P(B) y P(A∩B) como se muestra en la Tabla 5.6.

	A	$\overline{A}$	
B	γ		α
$\overline{B}$			
	β		1

Opciones de pregunta
$P(B \mid \overline{A})$
$P(A \mid \overline{B})$

Tabla 5.6. Lectura organizada de un caso básico de problema perteneciente a la subfamilia $N_0C_2T_1$. Caso 1 con dos opciones de pregunta.

- **Caso 2:** Los datos son una intersección y dos marginales no complementarias, de manera que una sea la marginal de uno de los sucesos que intervienen en la intersección y la otra, la marginal de uno de los sucesos que no intervienen en la intersección. En la tabla, una intersección, una de las marginales que comparten fila o columna con ésta y otra marginal que no comparte ni fila ni columna con la intersección y que no es la complementaria de la anterior. Por ejemplo, P(A), P(B) y P($A \cap \overline{B}$), como aparecen en la Tabla 5.7.

	A	$\overline{A}$	
B			α
$\overline{B}$	γ		
	β		1

Opciones de pregunta
$P(B \mid \overline{A})$
$P(A \mid B)$

Tabla 5.7. Lectura organizada de un caso básico de problema perteneciente a la subfamilia $N_0C_2T_1$. Caso 2 con dos opciones de pregunta.

- **Caso 3:** Los datos son una intersección y las dos marginales de los sucesos que no intervienen en ella. En la tabla, una intersección y las dos marginales que no comparten con ella ni fila ni columna. Por ejemplo, $P(A)$, $P(B)$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ como se muestra en la Tabla 5.8.

	A	$\overline{A}$	
B			α
$\overline{B}$		γ	
	β		1

Opciones de pregunta
P(B| A)
P(A| B)

Tabla 5.8. Lectura organizada de un caso básico de problema perteneciente a la subfamilia $N_0C_2T_1$. Caso 3 con dos opciones de pregunta.

La Tabla 5.9 resume todos los casos básicos de problemas de nivel N_0 identificados, junto a las opciones de pregunta básicas asociadas, que forman el conjunto de valores que toma la variable de la tarea *estructura de datos* en esta investigación:

Categoría	Caso básico	Datos conocidos	Opciones básicas de pregunta	Nomenclatura abreviada (Nivel N_0-Categoría-Tipo 1, caso)
C_0	Caso único	$P(A\cap B)$, $P(A\cap \overline{B})$ y $P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(B\mid \overline{A})$ y $P(B\mid A)$	(N_0-0-1)
C_1	Caso 1	$P(A\cap B)$, $P(A\cap \overline{B})$ y $P(\overline{A})$	$P(B\mid A)$, $P(B\mid \overline{A})$, $P(A\mid B)$ y $P(A\mid \overline{B})$	(N_0-1-1, 1)
	Caso 2	$P(A\cap B)$, $P(A\cap \overline{B})$ y $P(B)$	$P(B\mid \overline{A})$	(N_0-1-1, 2)
	Caso 3	$P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap \overline{B})$ y $P(B)$	$P(B\mid A)$ y $P(B\mid \overline{A})$	(N_0-1-1, 3)
C_2	Caso 1	$P(A)$, $P(B)$ y $P(A\cap B)$	$P(B\mid \overline{A})$ y $P(A\mid \overline{B})$	(N_0-2-1, 1)
	Caso 2	$P(A)$, $P(B)$ y $P(A\cap \overline{B})$	$P(B\mid \overline{A})$ y $P(A\mid B)$	(N_0-2-1, 2)
	Caso 3	$P(A)$, $P(B)$ y $P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(B\mid A)$ y $P(A\mid B)$	(N_0-2-1, 3)

Tabla 5.9. Casos básicos de problemas de nivel N_0.

Por tanto, atendiendo a los datos conocidos y las relaciones que se dan entre ellos, se han identificado siete casos básicos de problema dentro del nivel N_0, de los cuales uno es indeterminado (N_0-1-1,1). Esto justifica que cada cuestionario conste de 6 problemas: uno por cada caso básico no indeterminado. Si además tenemos en cuenta la pregunta del problema, combinando cada caso básico con cada una de las opciones de pregunta posibles para ese caso básico se obtienen once problemas básicos de nivel N_0 no indeterminados. Como ya se explicó en el apartado 4.4 (p. 96), en los pre-test se escogió una única opción de pregunta para cada caso básico, con lo que cada una de las dos pruebas constaba de seis problemas básicos. En cambio, en el post-test cada enunciado constaba de tantas preguntas como opciones de pregunta básicas pueden asociarse al caso básico correspondiente, de manera que en los seis enunciados de esta última prueba están contenidos los once problemas básicos, no indeterminados, que se han identificado.

5.1.2 – Valores de las variables dependientes de la investigación para cada problema, a partir de la actuación de los estudiantes.

En el capítulo anterior (apdo 4.9.1, p. 144) definimos las variables dependientes de la investigación, cuya observación permite realizar un primer análisis, de tipo cuantitativo, de la actuación de los estudiantes resolviendo los problemas de la investigación. Concretamente, estas variables describen algunas características del proceso de resolución y de lo que el resolutor ofrece como resultado en cada problema. En el Anexo 10 (p. 457) se muestran las tablas completas que contienen los valores que toman dichas variables para cada estudiante ante cada problema en cada uno de los cuestionarios. Sin embargo, como estamos poniendo el foco de atención sobre los problemas, aquí sólo mostramos una tabla resumen (Tabla 5.10) de los valores acumulados que toman las variables dependientes para cada problema, en cada cuestionario.

Hay que recordar que todos los enunciados del post-test, excepto el del Problema 2a, presentaban dos preguntas, una de las cuales daba lugar a un problema isomorfo (en cuanto a estructura de datos y contexto se refiere) a los análogos en los pre-test. Aquí y en los puntos 5.1.3 (p. 195) y 5.2 (p. 206), sólo mostraremos los valores de las variables dependientes correspondientes a estos apartados, con el objetivo de facilitar la comparación de datos entre los tres cuestionarios. Así, por ejemplo, los valores mostrados para el Problema 1 del post-test se refieren sólo al problema cuya pregunta es la del apartado b) del enunciado correspondiente, que es la que da lugar a un problema isomorfo al Problema 1 en los pre-test. En cambio, en el estudio de competencias y errores mostrados por los estudiantes en el post-test (véase apdo. 5.4, p. 307) sí tendremos en cuenta los enunciados completos.

Por otra parte, para una correcta interpretación de la tabla, hay que tener en cuenta que en la celda, la fila indica el problema, la columna la variable observada y el valor de la celda es la suma de los valores asignados a dicha variable (uno por cada estudiante) tras la observación de todas las resoluciones. Por tanto, los siguientes datos son frecuencias absolutas, sobre una muestra de 9 estudiantes para el Prestest(F) y el Test(P) y de 8 estudiantes para el Pre-test(%).

Por ejemplo, para el Problema 1 del Pre-test(F), la tabla nos da la siguiente información: Todos los estudiantes han abordado el Problema 1. Tres de nueve han organizado la información en forma de lista, cinco de nueve en forma de árbol y ninguno de ellos ha usado la tabla. Ocho de los nueve han realizado cálculos para la obtención de cantidades intermedias, y ninguno de ellos ha cometido errores en estos cálculos. Los nueve estudiantes han calculado un porcentaje para dar respuesta a la pregunta del problema, habiéndose observado algún error en cinco casos. En cuanto al resultado, todos los estudiantes han dado un número como repuesta, que ha sido el correcto en cuatro ocasiones. Dicho número venía acompañado por una descripción correcta en tres de los casos y por una descripción incorrecta en los seis restantes.

	Problema	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
			L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
Pre-test(F)	1	9	3	5	0	8	0	9	5	9	4	3	6
	2a	9	5	2	0	9	0	9	4	9	5	5	4
	9	9	6	2	0	9	5	7	6	7	1	3	4
	10x2	9	6	2	0	9	2	9	5	9	4	4	5
	17	8	1	6	0	8	5	7	5	5	3	2	3
	18a	7	0	5	0	5	5	4	4	4	0	1	3
Pre-test(%) (8 estudiantes)	1	8	5	3	0	7	0	7	2	8	5	6	2
	2a	8	3	5	0	8	1	6	2	8	4	4	4
	9	8	4	4	0	8	3	4	2	7	2	3	3
	10	7	4	4	0	6	1	6	5	7	1	3	4
	17	8	4	4	0	8	4	5	3	8	2	1	7
	18a	7	4	3	0	5	4	5	5	6	0	3	3
Test(P)	1	9	0	0	9	8	2	8	2	8	6	6	1
	2a	9	0	1	9	9	0	8	2	8	6	7	1
	9	9	0	0	9	9	0	9	3	9	6	7	2
	10	9	0	0	9	9	0	9	3	9	6	7	2
	17	9	0	0	9	9	0	9	1	9	8	6	2
	18a	9	0	0	9	9	0	9	3	9	6	7	2

Tabla 5.10. Tabla que informa de los valores acumulados que toman las variables dependientes en las resoluciones de cada problema, en cada cuestionario.

De la información ofrecida en la tabla, lo más destacable son las diferencias que existen entre los valores de la variable *Resultado-Núm*. para los diferentes problemas de las dos primeras pruebas, Pre-test(F) y Pre-test(%). El valor de esta variable en la tabla anterior indica, para cada problema, el número de estudiantes que han conseguido llegar al resultado numérico correcto (salvo errores de cálculo). El siguiente gráfico muestra dichos valores y, además, permite comparar los resultados en las tres pruebas:

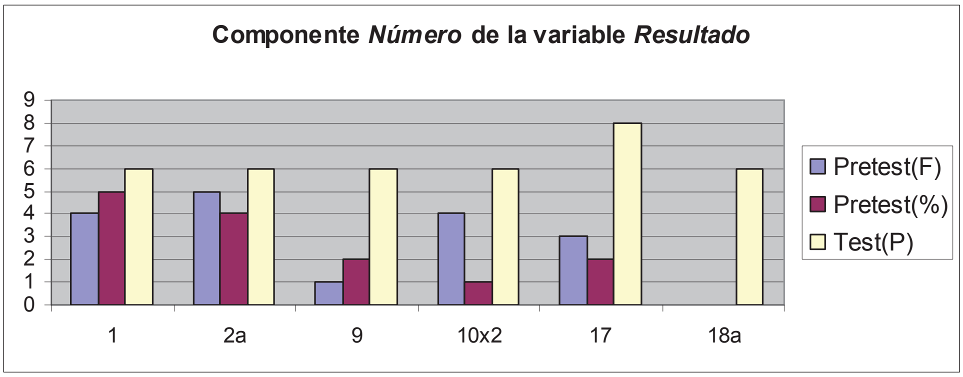


Figura 5.1. Gráfico que representa el número de estudiantes que han dado un número correcto como respuesta en cada problema de cada cuestionario.

Se observa que los Problemas 1 y 2a son los que se consiguen resolver correctamente en un mayor número de casos. Especialmente llamativo es el caso del Problema 18a, que no consigue resolver con éxito ningún estudiante en los pre-test, es decir, antes de la enseñanza. En el capítulo 6 analizaremos las posibles causas de estas diferencias entre problemas, que nosotros atribuimos, en gran parte, a las variables de la tarea.

5.1.3 – Dificultades de los problemas, a partir de la actuación de los estudiantes.

5.1.3.1 – Dificultades de los problemas en esta investigación.

En el Anexo 11 (p. 465) encontramos las tablas que recogen los valores que toman las dificultades para los problemas agrupados según el formato de datos, la categoría y el contexto. Aquí expondremos dicha información gráficamente y comentaremos los aspectos más destacados, aunque sin entrar en el análisis de los resultados, que dejamos para el capítulo siguiente.

5.1.3.1.1 – Resultados globales.

La Figura 5.2 muestra los resultados para las dificultades de los problemas, cuando se consideran conjuntamente las resoluciones de las tres pruebas, Pre-test(F), Pre-test(%) y Test(P). Recordemos que un valor del 100% indica una dificultad máxima, mientras que un valor del 0% indica una dificultad nula. La dificultad apreciada (DAP) nos indica en qué medida los problemas han sido abordados por los estudiantes. Por otra parte, hemos definido la dificultad de llegar a dar una respuesta a la pregunta del problema, tanto sobre la muestra total de estudiantes (dificultad global del problema o DP) como sobre el conjunto de aquellos que abordan el problema (dificultad del problema o DPR). Naturalmente, siempre se obtendrán valores más altos para la DP que para la DPR. En cuanto a la dificultad de la solución del problema (DSP), recordemos que mide la dificultad de dar un resultado numérico correcto, entre los que han abordado el problema. La dificultad de la descripción de la respuesta (DDRES), por su parte, nos informa de hasta qué punto el número que se da como resultado viene acompañado de una descripción verbal del mismo. Por último, la dificultad de la descripción correcta de la respuesta (DDRESC) hace referencia a la dificultad de describir correctamente el número que se da como resultado, entre los que llegan a dar una respuesta numérica a la pregunta del problema y además la describen. En la Figura 5.2 observamos que los valores más altos se obtienen para la dificultad de dar un número correcto como resultado o dificultad de la solución del problema (DSP) y la dificultad de la descripción correcta del resultado (DDRESC), mientras que la dificultad de abordar el problema o dificultad apreciada (DAP) y la dificultad de la descripción del resultado (DDRES) son casi despreciables.

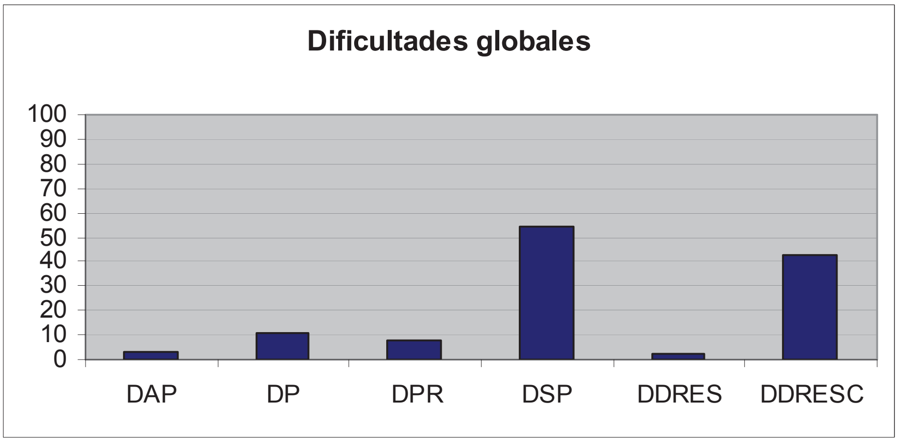


Figura 5.2. Dificultades del conjunto de problemas de N_0 incluidos en los cuestionarios.

Veamos a continuación cómo se comportan estas variables, si las ponemos en relación con las variables de la tarea. Comenzaremos con el formato de los datos.

5.1.3.1.2 – Dificultades según el formato de datos.

En los capítulos anteriores ya hemos hablado de la posible influencia del formato de los datos en la resolución de problemas de probabilidad condicional (véase apdo. 1.1, p. 21 y apdo. 3.2, p. 40). Hay autores (Gigerenzer y Hoffrage, 1995; Cosmides y Tooby, 1996; Lonjedo, 2007) que sostienen que la expresión de los datos en forma de frecuencias facilita la resolución frente a otros formatos. El siguiente gráfico (Figura 5.3) nos permite comparar las dificultades obtenidas para los problemas en cada uno de los tres cuestionarios de nuestra investigación, cuyos enunciados se diferencian, precisamente, en el formato en que se formulan los datos[24].

[24] Recordemos que los datos en el primero de los cuestionarios, el Pre-test(F), venían formulados como frencuencias; en el segundo, el Pre-test(%), como porcentajes y en el tercero, el Test(P), como probabilidades.

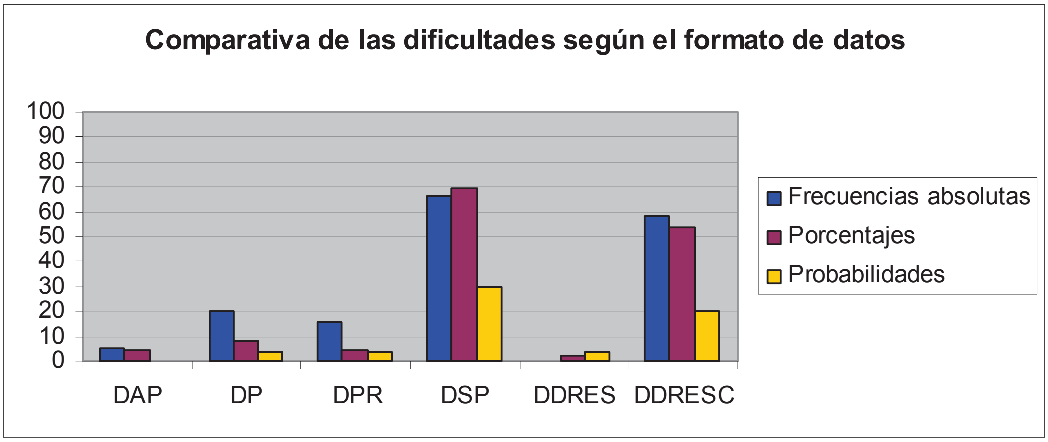


Figura 5.3. Dificultades de los problemas por cuestionario.

Si nos fijamos en las dos dificultades que alcanzan valores más elevados en los tres cuestionarios (la dificultad de la solución del problema y la dificultad de la descripción correcta del resultado), vemos que no hay diferencias importantes entre los formatos "frecuencias absolutas" y "porcentajes" y, en cambio, se observa una importante disminución de los valores de las dificultades para el formato "probabilidades". A simple vista, esto parecería contradecir las conclusiones a las que han llegado las investigaciones previas antes mencionadas, pero hay que recordar que el cuestionario con los datos expresados en términos de probabilidades se administró después de la enseñanza, lo cual explicaría en gran parte esta reducción en los valores de las dificultades.

5.1.3.1.3 – Dificultades por categorías.

En Carles y otros (2009), se encontró que las variables estructura de datos (categoría) y contexto eran influyentes en las dificultades de los problemas de nivel N_0. Con el objetivo de comprobar si estas influencias se observan también en la investigación que ahora nos ocupa, en este apartado mostraremos los valores obtenidos para las dificultades cuando los problemas se agrupan por categorías y en el apartado siguiente mostraremos los valores de las dificultades cuando los problemas se agrupan por contextos.

Así pues, tomando como variable independiente la estructura del problema (nivel, categoría y tipo) vemos, primero globalmente y después en cada prueba, las dificultades que se obtienen para cada uno de los valores: $N_0C_0T_1$, $N_0C_1T_1$, $N_0C_2T_1$, que únicamente se distinguen en la categoría. No tendremos en cuenta el caso y la opción de pregunta en la comparativa, puesto que cada problema se formula en una categoría y caso distintos y no es posible una agrupación por casos.

Globalmente (considerando las resoluciones de las tres pruebas)

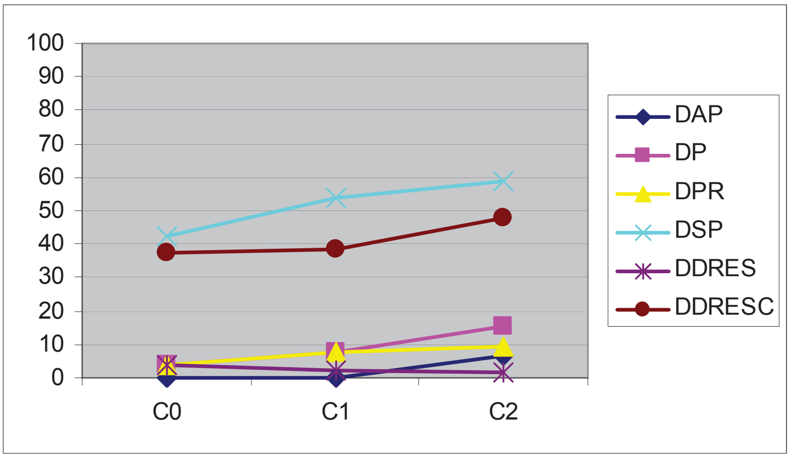


Figura 5.4. Dificultades del conjunto de problemas de N_0 incluidos en los cuestionarios, por categorías.

En la Figura 5.4 se observa que las dificultades aumentan conforme aumenta el número de marginales en el enunciado. La dificultad de la solución del problema (DSP) es la que se ve más influida por la estructura de datos.

Veamos los resultados para cada prueba por separado.

Pre-test(F)

En la Figura 5.5 observamos que, al igual que en el estudio global, en el Pre-test(F) las dificultades aumentan con la categoría, pero con valores más altos para las dificultades y con la salvedad de que la dificultad de la descripción correcta del resultado (DDRESC) alcanza su valor más bajo para los problemas de categoría C_1.

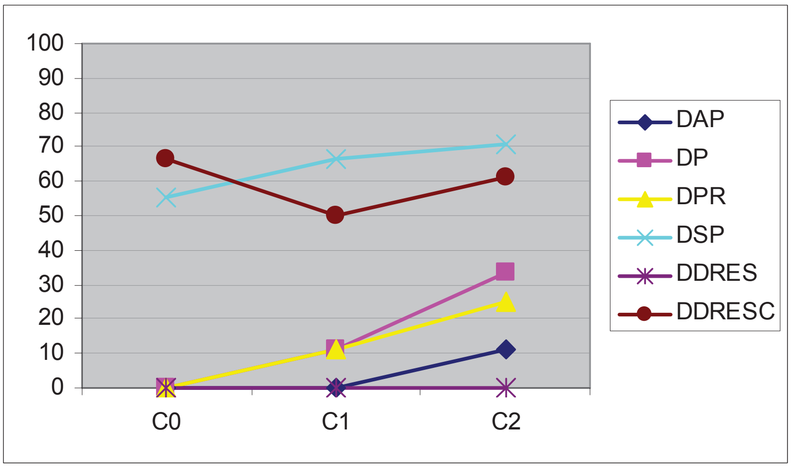


Figura 5.5. Dificultades de los problemas del Pre-test(F), por categorías.

Pre-test(%)

En el Pre-test(%) (Figura 5.6), llaman la atención las enormes diferencias entre categorías que se observan para la DSP, que parte de un valor inferior al 40% para la C_0 y se sitúa por encima del 80% para la C_2. También destaca el hecho de que cambia el comportamiento de las variables que tienen que ver con la descripción del resultado, la DDRES y la DDRESC. La DDRES sólo es distinta de cero para la categoría C_1. En cuanto a la DDRESC aumenta conforme aumenta la categoría, a diferencia de lo que ocurría en el Pre-test(F).

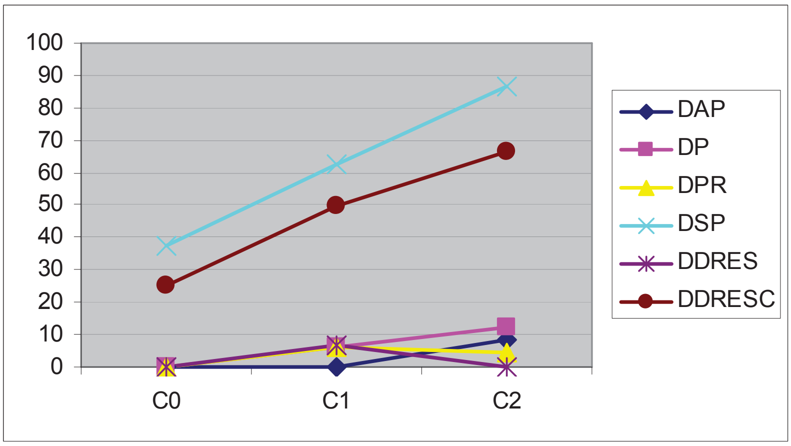


Figura 5.6. Dificultades de los problemas del Pre-test(%), por categorías.

Test(P)

Es destacable el hecho de que en el Test(P) la influencia de la estructura disminuye, pues las diferencias son mínimas e incluso se invierte el signo de las mismas para algunas dificultades, como se aprecia en la Figura 5.7. También resalta la drástica disminución en los valores de la DSP y la DDRESC, situándose por debajo del 40% la primera y por debajo del 30% la segunda, para las tres categorías.

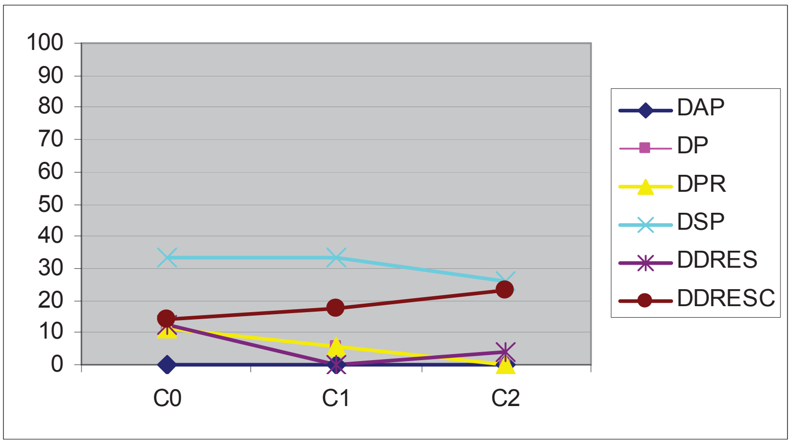


Figura 5.7. Dificultades de los problemas del Test(P), por categorías.

5.1.3.1.4 – Dificultades por contextos.

Tomemos ahora el contexto como variable independiente. Observaremos los valores que toman las dificultades cuando se estudian conjuntamente las tres pruebas y, a continuación, cuando se consideran por separado.

<u>Globalmente (considerando las resoluciones de las tres pruebas)</u>

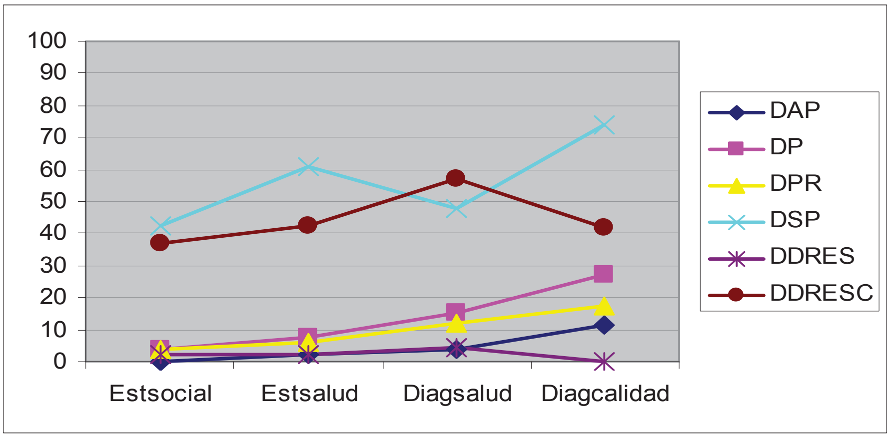


Figura 5.8. Dificultades del conjunto de problemas de N_0 incluidos en los cuestionarios, por contextos.

En la Figura 5.8 se aprecia claramente que el contexto Estsocial presenta los valores más bajos para las dificultades, mientras que el contexto Diagcalidad presenta los valores más altos, con pocas excepciones. Si nos centramos en la dificultad de la solución del problema (DSP), alcanza su valor máximo en el contexto Diagcalidad (73,91%), seguido del contexto Estsalud (60,78%). Por debajo se sitúa el Diagsalud (48%) y finalmente, el Estsocial con un 42,31%.

Veamos qué ocurre en cada prueba por separado.

<u>Pre-test(F)</u>

Las variables se comportan como en el estudio global (Figura 5.8), en cuanto a las diferencias entre contextos. No obstante, las dificultades presentan valores más elevados (véase Figura 5.9, más adelante). En concreto, destaca el valor de la DSP para el contexto Diagcalidad, (representado exclusivamente por el Problema 18a) que alcanza el 100%. Esto significa que ningún estudiante ha conseguido resolver con éxito este problema en el Pre-test(F), lo cual ya se había hecho notar en el apartado 5.1.2, a la vista de la Figura 5.1 (p. 195) .

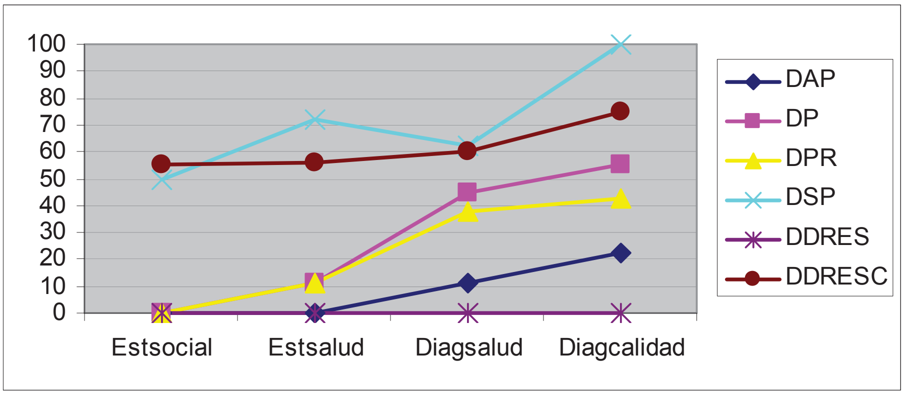


Figura 5.9. Dificultades de los problemas del Pre-test(F), por contextos.

Pre-test(%)

En la Figura 5.10 podemos comprobar como para el contexto Diagsalud, se observa una disminución importante del valor de la dificultad apreciada del problema (DAP), la dificultad global de llegar a un resultado (DP) y la dificultad de llegar a un resultado, siendo que se aborda el problema (DPR) y, al mismo tiempo, se da un aumento de la dificultad de la descripción correcta del resultado (DDRESC), respecto de los valores que tomaban en el Pre-test(F). El contexto Diagcalidad sigue siendo el que presenta mayores valores para las dificultades (excepto para la DDRESC), siendo especialmente llamativa la DSP en este contexto, que alcanza, como en el Pre-test(F), un valor del 100%.

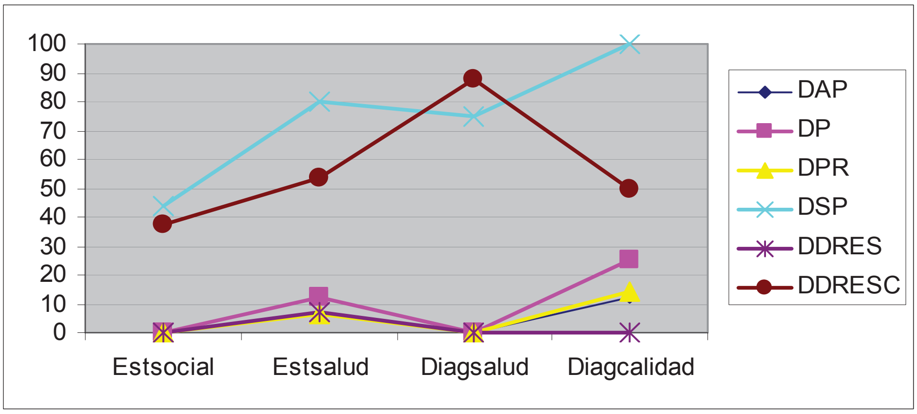


Figura 5.10. Dificultades de los problemas del Pre-test(%), por contextos.[25]

[25] Los valores de las dificultades que no se aprecian correctamente en el gráfico (por ser cercanos a cero o coincidentes para varias dificultades) pueden consultarse en el Anexo 11 (p. 465).

Test(P)

Como ocurría con la estructura de datos, el contexto resulta menos influyente en el Test(P), puesto que en todos los casos se obtienen dificultades por debajo del 40% y las diferencias son menos pronunciadas (véase Figura 5.11). Lógicamente, esto es achacable a la enseñanza recibida por los estudiantes, encaminada a mejorar su competencia en la resolución de estos problemas.

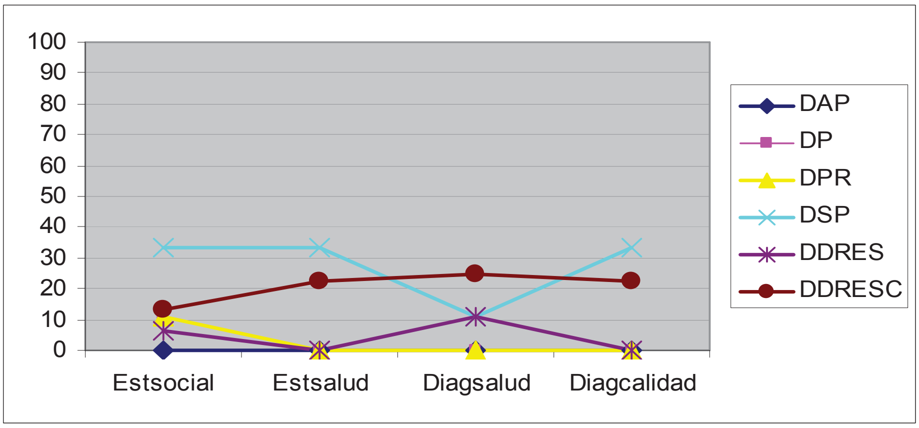


Figura 5.11. Dificultades de los problemas del Test(P), por contextos.

5.1.3.2 – Comparativa con un estudio más amplio, realizado en el marco del Proyecto EDU2008-03140.

En la mencionada investigación más amplia llevada a cabo (Carles y otros, 2009), se muestran los valores obtenidos de las diferentes dificultades para una muestra de 990 resoluciones de problemas de N_0 con los datos expresados en frecuencias absolutas. Dicha investigación pone de manifiesto que la variable independiente *estructura de datos* es influyente sobre las variables DAP y DP. También se muestra cómo la variable independiente c*ontexto* tiene influencia sobre las dificultades y, especialmente, sobre la DSP.

Los gráficos de las Figuras 5.12, 5.13 y 5.14 permiten comparar dichos resultados con los obtenidos en la investigación particular que nos ocupa. Para ello, de la muestra local, hemos considerado únicamente las 54 resoluciones de problemas de N_0 con los datos expresados en frecuencias absolutas (resoluciones del Pre-test(F))[26]

[26] En realidad disponemos de 42 resoluciones escritas y 6 resoluciones filmadas. Las resoluciones filmadas fueron llevadas a cabo por una pareja de estudiantes, por tanto hay un total de 9 estudiantes resolviendo los seis problemas de la prueba. Esto nos da un total de 54 "actuaciones" de estudiantes ante problemas de nivel N_0, dos de las cuales (las de la pareja filmada) proporcionan los mismos valores para las variables dependientes de la investigación, a partir de las cuales se definen las variables que miden las dificultades de los problemas. Así, cuando hablamos de las 54 resoluciones del Pre-test(F) nos referimos en realidad a estas 54 "actuaciones". Por otra parte, estas resoluciones no están incluidas en las 990 del estudio más amplio.

5.1.3.2.1 – Comparativa de las dificultades por categorías.

Los gráficos de la Figura 5.12 permiten comparar los valores obtenidos para la dificultad apreciada del problema (DAP), la dificultad global del problema (DP), la dificultada del problema (DPR) y la dificultad de la solución del problema (DSP) en la muestra local con los obtenidos en el estudio más general (Carles y otros, 2009).

Se observa que la DAP y la DP toman valores inferiores en la muestra de la investigación particular que en la más amplia, pero el comportamiento es “paralelo”. En cuanto a la DPR y la DSP alcanzan valores muy próximos en las dos muestras, por lo que podríamos decir que la muestra local se comporta como la global.

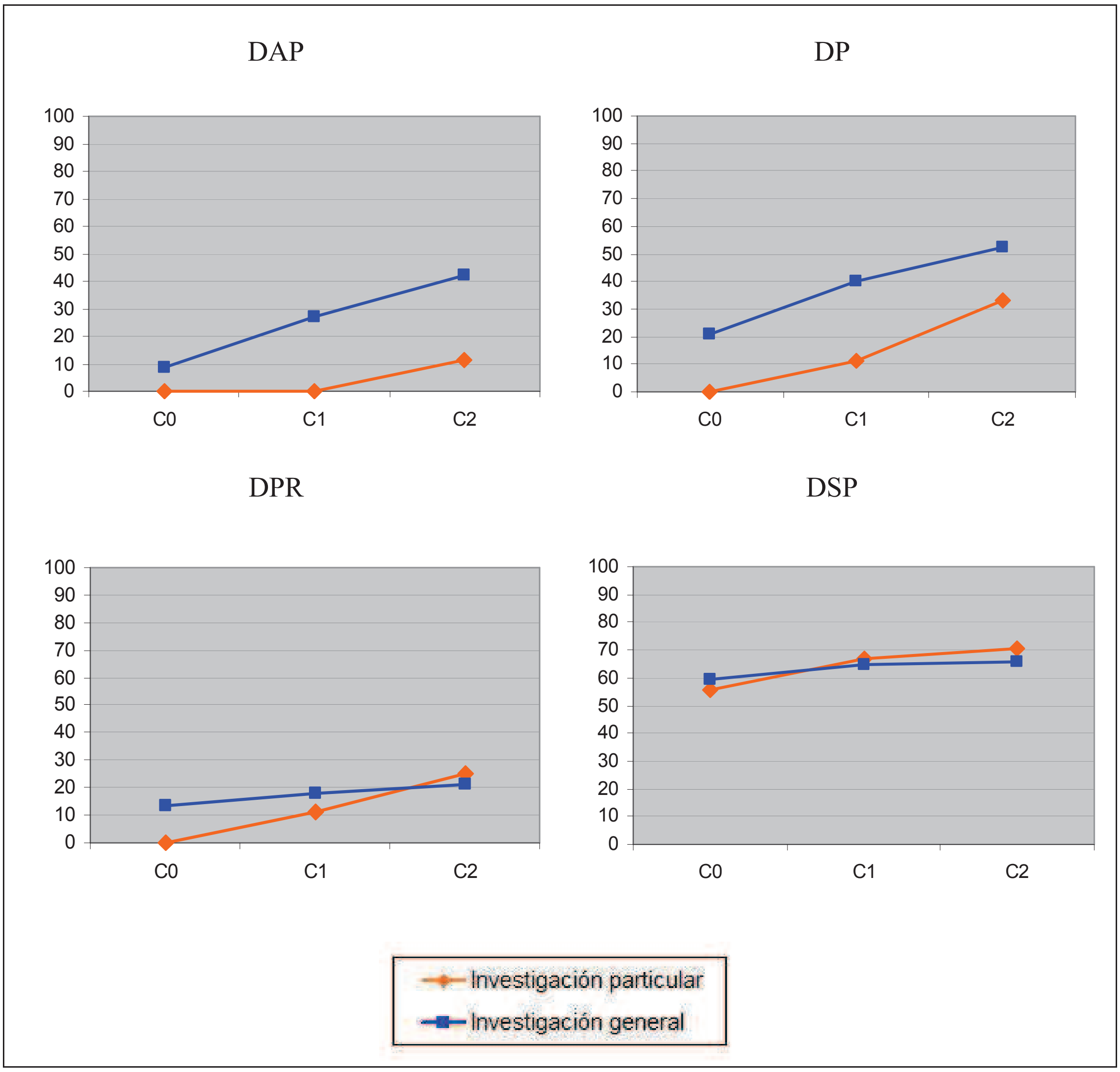


Figura 5.12. Gráfico comparativo (estudio local frente al estudio general) de las dificultades DAP, DP, DPR y DSP, por categorías.

5.1.3.2.2 – Comparativa de las dificultades por contextos.

Hay que señalar que en el estudio más amplio todos los problemas planteados en la situación test de diagnóstico usan el contexto salud, mientras que en esta investigación particular, de los dos problemas en la situación test de diagnóstico que aparecen en cada cuestionario, uno se presenta en el contexto salud (Problema 17) y el otro en el contexto del control de calidad (Problema 18a). Como consecuencia, hemos hecho la comparativa de dos formas distintas: primera, considerando todos los problemas del Pre-test(F) de la investigación particular e incluyendo ambos contextos (Diagsalud y Diagcalidad) bajo la etiqueta Diag; y segunda, dejando de lado el Problema 18a de la investigación particular, formulado en el contexto Diagcalidad.

Los resultados, con la primera opción son los que se observan en la Figura 5.13. En general, los valores de las dificultades no difieren mucho entre las dos muestras. Sin embargo, los valores para la muestra de la investigación particular son en todos los casos más bajos, excepto para la DPR y la DSP en el contexto Diag.

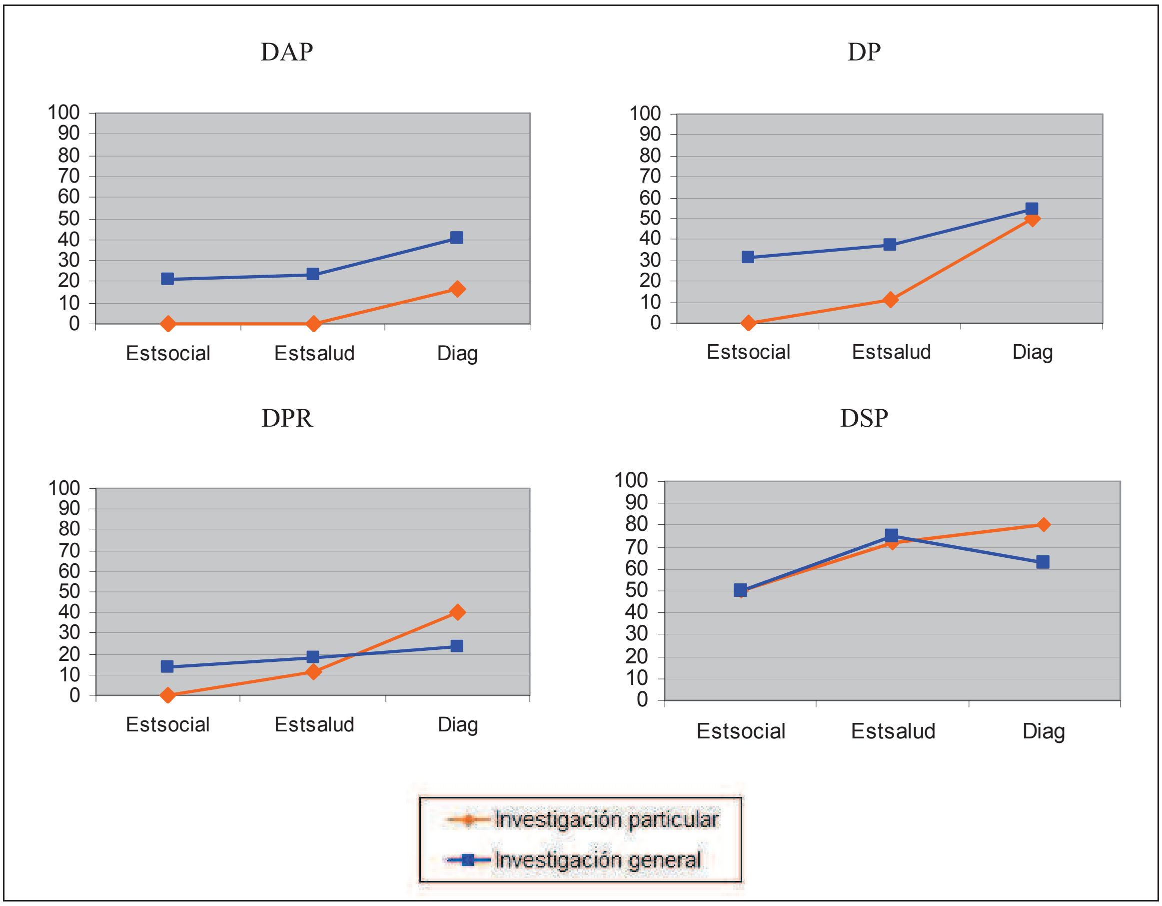


Figura 5.13. Gráfico comparativo (estudio local frente al estudio general) de las dificultades DAP, DP, DPR y DSP, por contextos, incluyendo el Problema 18a.

En la Figura 5.14 podemos ver qué ocurre si excluimos el problema formulado en el contexto Diagcalidad. Se observa que, ahora, en el contexto Diagsalud, las dificultades DAP y DP toman valores más bajos para la muestra de la investigación particular y, por tanto, aumenta ligeramente la diferencia con los valores obtenidos para la muestra más amplia. Para la DPR y la DSP se obtienen valores menores que antes en la muestra local, reduciéndose, como consecuencia, las diferencias con la muestra mayor. De hecho, las diferencias entre ambas muestras son mínimas para la DSP.

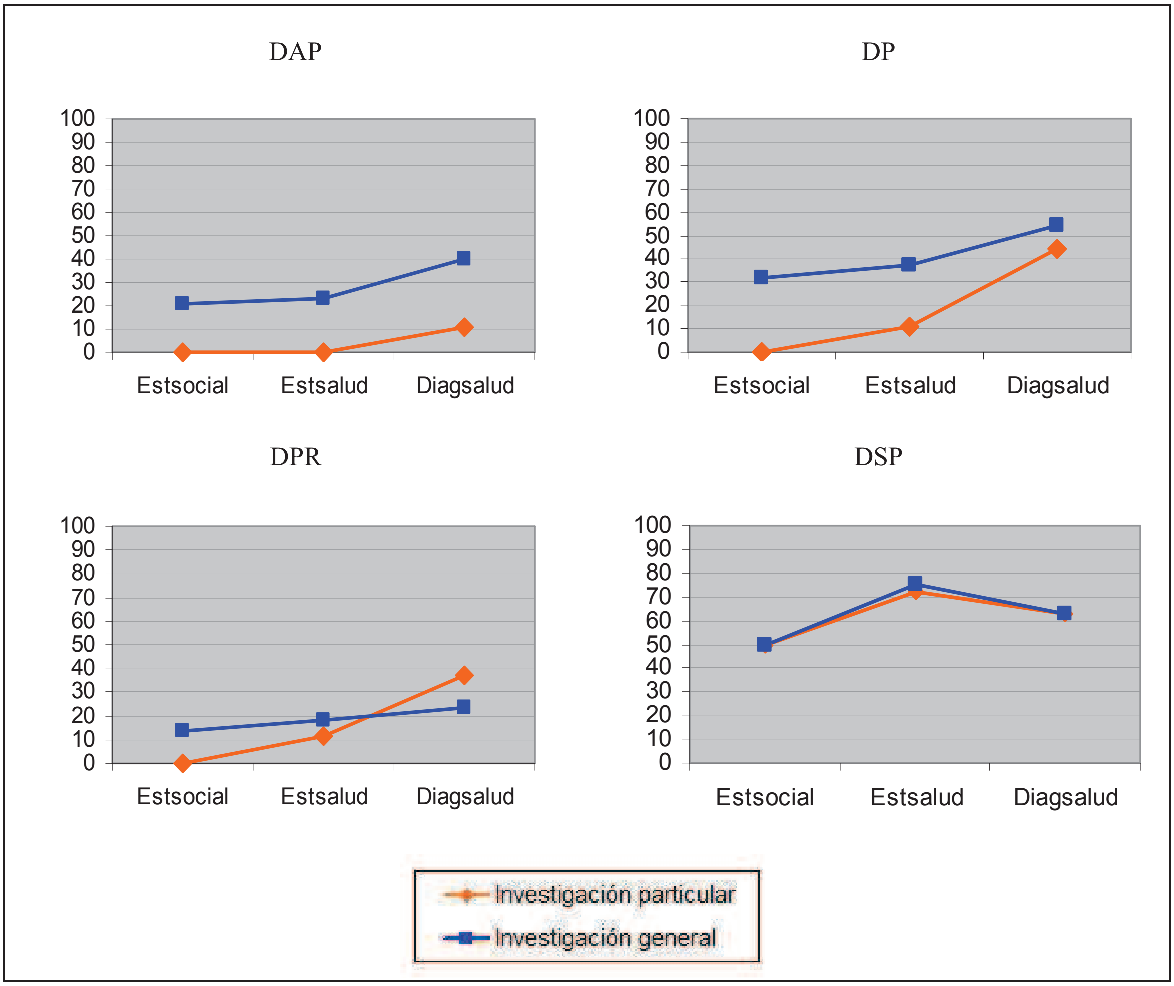


Figura 5.14. Gráfico comparativo (estudio local frente al estudio general) de las dificultades DAP, DP, DPR y DSP, por contextos, excluyendo el Problema 18a.

5.2 – SOBRE LOS ESTUDIANTES.

Si bien uno de los objetivos de esta tesis era el estudio de la resolución de problemas de nivel N_0 por parte de estudiantes de secundaria (estrategias de resolución, errores y dificultades etc.), no pretendíamos analizar las particularidades de la actuación de cada uno de los individuos. Dicho de otra manera, no era nuestro objetivo el hacer un estudio de casos. No obstante, es innegable que las variables del sujeto influyen en los resultados obtenidos y que existen diferencias importantes entre los comportamientos de algunos estudiantes. En este apartado describiremos, sin profundizar, los rasgos más relevantes del comportamiento de cada estudiante a lo largo de la investigación.

Comenzaremos mostrando una tabla resumen de los totales para cada estudiante y variable, para cada una de las tres pruebas (Tabla 5.11) similar a la Tabla 5.10 (p. 194), que muestra los valores de las variables dependientes por problemas y cuestionarios. En la celda, la fila indica el estudiante, la columna la variable observada y el valor de la celda es la suma de los valores asignados a dicha variable (uno por cada problema) tras la observación de todas las resoluciones llevadas a cabo por el referido estudiante.

Por ejemplo, sobre la actuación de la estudiante C. en el Pre-test(F), la tabla nos da la siguiente información:

Ha abordado los 6 problemas. En tres de ellos ha organizado la información mediante una lista y en uno de ellos mediante un árbol. En ninguno ha usado la tabla de contingencia. Ha realizado cálculos en los seis problemas, cometiendo errores en 2 de ellos. En cuanto al cálculo del porcentaje pedido, lo ha llevado a cabo en 4 problemas cometiendo algún error en un caso. Ha llegado a un resultado en cuatro de los seis problemas, siendo el número correcto en 3 de ellos. Dicho número venía acompañado de una descripción correcta en las cuatro respuestas.

Para una correcta interpretación de la variable organización, hay que tener en cuenta que un estudiante puede usar varios métodos para organizar la información en un mismo problema. Así, por ejemplo, la estudiante B. ha usado árbol en los seis problemas del Pre-test(F) y, en uno de ellos, ha elaborado también una lista como se puede comprobar en la tabla.

Se observa que la mayoría de estudiantes abordan todos los problemas en las tres pruebas (véase columna *Abordado*). En ocasiones, un estudiante aborda un problema pero no llega a dar un resultado, aunque son pocos los casos en los que esto ocurre. Además, el número de problemas abordados sin resultado disminuye en el Pre-test(%) respecto del Pre-test(F) y en el Test(P) respecto de los dos anteriores (compárense columnas *Abordado* y *Resultado-S/N* en la Tabla 5.11).

	Estudiante	Abordado	Org.			Cálculo		Cálculo %		Resultado			
			L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
Pre-test(F)	C.	6	3	1	0	6	2	4	1	4	3	4	0
	B.	6	1	6	0	5	2	5	5	5	0	1	4
	R.	5	5	0	0	5	2	5	1	5	4	1	4
	L.	6	0	6	0	6	1	5	4	5	1	3	2
	T.	6	0	0	0	4	2	5	5	5	0	0	5
	V.	6	2	3	0	6	1	5	0	5	5	5	0
	H.	4	4	0	0	4	1	4	4	4	0	1	2
	A.	6	3	3	0	6	3	6	4	5	2	1	4
	M.	6	3	3	0	6	3	6	4	5	2	1	4
Pre-test(%)	C.	6	6	0	0	5	1	6	3	6	3	1	4
	B.	6	5	2	0	5	0	1	0	6	1	2	4
	R.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	L.	6	0	6	0	6	1	5	3	6	2	6	0
	T.	6	0	6	0	6	1	6	4	6	2	4	2
	V.	6	0	6	0	6	1	6	1	6	5	5	1
	H.	6	6	0	0	5	4	1	1	5	0	0	5
	A.	4	1	3	0	4	2	3	2	3	1	1	2
	M.	6	6	0	0	5	3	5	5	6	0	1	5
Test(P)	C.	6	0	0	6	6	0	6	0	6	6	5	1
	B.	6	0	0	6	6	0	6	0	6	6	6	0
	R.	6	0	0	6	6	0	6	0	6	6	3	3
	L.	6	0	1	6	6	1	6	5	6	1	5	0
	T.	6	0	0	6	6	0	6	0	6	6	6	0
	V.	6	0	0	6	6	0	6	0	6	6	6	0
	H.	6	0	1	6	5	0	4	2	4	2	3	0
	A.	6	0	0	6	6	0	6	0	6	6	6	0
	M.	6	1	0	5	6	1	6	6	6	0	0	6

Tabla 5.11. Tabla que informa sobre la actuación de los estudiantes en el Pre-test(F), el Pre-test(%) y el Test(P).

En el caso de que un estudiante aborde un problema y dé un resultado, el valor de la componente *número* de la variable *resultado* nos indica si el número que el estudiante ha dado como resultado es correcto o no. Sin menoscabo del resto de variables, se puede decir que esta componente de la variable *resultado* es el mejor indicador del éxito de cada estudiante en la resolución de los problemas (al fin y al cabo, lo que pide el enunciado del problema es la obtención de un número, que será un porcentaje o una probabilidad condicionada). Recordemos que la componente *número* toma el valor 1 si el número dado como resultado es la medida (porcentaje o probabilidad) por la que se pregunta, salvo errores de cálculo en su obtención, y 0 en caso contrario. Por tanto, los datos de la columna *Resultado-Núm.* en la Tabla 5.11 representan el número de problemas, dentro de cada cuestionario, para los que el estudiante ha obtenido un resultado numérico correcto.

En la Figura 5.15 (que mostramos a continuación) podemos ver una comparativa del valor global que toma dicha variable en las diferentes pruebas (representadas cada una de ellas mediante una barra de diferente color), para cada estudiante. En el eje horizontal hemos representado a los estudiantes, mediante el uso de las iniciales con las que los identificamos, y en el eje vertical el número de problemas para los que el estudiante llega a un resultado numérico correcto (salvo errores de cálculo), el cuál coincide con el valor acumulado de la variable "*Número*" para dicho estudiante en cada prueba. Por tanto, la gráfica nos permite observar la evolución del éxito de cada estudiante a lo largo de la investigación (desde el punto de vista de la obtención del resultado numérico correcto en los diferentes problemas de la prueba) y, además, comparar a los estudiantes, según su puntuación en esta variable. Para su correcta interpretación, hay que recordar de nuevo que R. no realizó el Pre-test(%) y por ese motivo no aparece la barra representativa del número de problemas resueltos con éxito para este cuestionario. En el resto de los casos en que se aprecia ausencia de alguna de las tres barras (véase estudiantes B., T., H. y M.), se debe a que los estudiantes no consiguieron llegar al resultado numérico correcto en ninguno de los problemas de la prueba correspondiente.

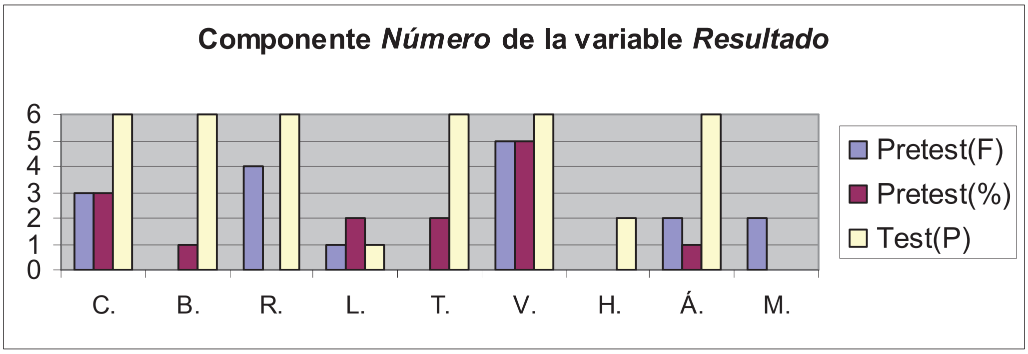


Figura 5.15. Gráfico que representa para cada estudiante, el número de problemas de cada cuestionario en los que da como respuesta un número correcto.

En primer lugar, se observa que tras la enseñanza, en el cuestionario Test(P), el éxito obtenido por los estudiantes es elevado: seis de los nueve estudiantes obtienen correctamente la probabilidad condicionada por la que se pregunta en los seis problemas de la prueba, lo que supone una mejora importante respecto de los pre-test para la mayoría de ellos. En el lado opuesto se hallan H., L. y M. con un éxito muy reducido en el post-test. Son especialmente llamativos los casos de L. y M. cuyo éxito en la obtención del número correcto incluso disminuye en el post-test respecto de los pre-test. En el apartado 5.4.2.2 (p. 314) estudiaremos con detalle los errores que cometen estos tres estudiantes en el post-test y que explican estas bajas tasas de éxito.

También destaca el hecho de que, contrariamente a lo esperado, muchos estudiantes (C., B., L., T. y V.) obtienen mejores resultados para la variable número en el Pre-test(%), donde los datos vienen expresados en forma de porcentajes, que en el Pre-test(F), donde los datos vienen expresados en forma de frecuencias.

Por norma general, el resultado numérico viene acompañado por una descripción que puede ser correcta o incorrecta (compárese columna *Resultado-S/N* con la suma de *Resultado-DC* y *Resultado-DI*). El número de descripciones incorrectas se reduce drásticamente en el Test(P) respecto de los anteriores, lo cual es achacable a la enseñanza recibida, ya que en coherencia con nuestra concepción del término cantidad (apdo. 3.5.1, p. 58) durante la enseñanza se entrena a los estudiantes en el uso de las cantidades teniendo en cuenta su triple dimensión: número, descripción y formato de datos.

Por último, haremos referencia a la variable *organización de la información,* que recordemos indica la presencia o no de algún tipo de organización de la información proporcionada en el enunciado, por parte del estudiante, cuando realiza una lectura del enunciado del problema. Como ya señalamos en el capítulo de metodología (apdo. 4.9.1.1, p. 145), en la investigación que nos ocupa esta variable toma tres valores diferentes: lista, árbol y tabla. Por *lista* entendemos la enumeración (más o menos completa) de los datos del enunciado formando una lista; por árbol, aquellos modos de organizar la información que muestran las relaciones (de inclusión, complementariedad, etc.) que se dan entre las cantidades representadas y finalmente, por tabla entendemos la organización de la información en una tabla 2x2, en su forma canónica o ampliada. Observaremos, a continuación, la frecuencia con que cada estudiante usa listas, árboles y tablas de contingencia en las diferentes pruebas. Para ello mostramos gráficos en los que usamos una barra de diferente color para cada sistema de representación. En el eje horizontal representamos, como antes, a los estudiantes y en el eje vertical la frecuencia absoluta con la que se utiliza cada sistema de representación. El primero de estos gráficos (Figura 5.16) corresponde a la primera prueba, el Pre-test(F).

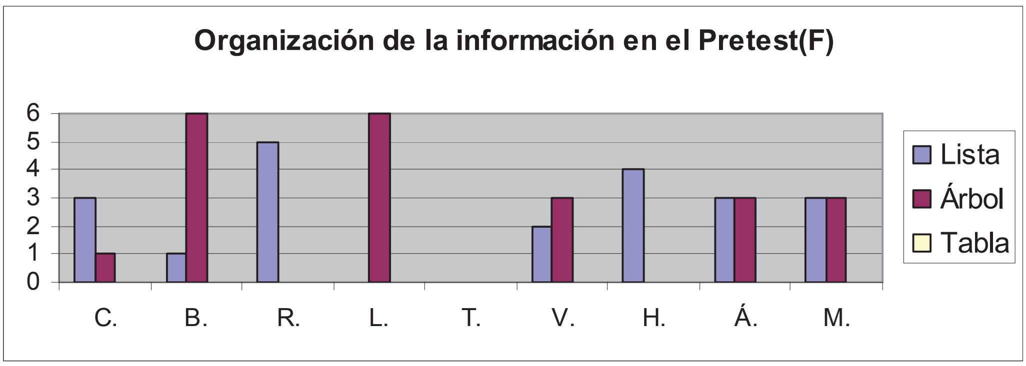


Figura 5.16. Gráfico que representa para cada estudiante, la frecuencia con que usa listas, árboles y tablas en el Pre-test(F).

Se puede ver que todos los estudiantes, excepto T., organizan la información de alguna manera en todos o casi todos los problemas de la prueba. Hay tres estudiantes (R., L. y H.) que usan un único medio de organización y otros que alternan las listas con los árboles. Destaca el hecho de que ningún estudiante usa la tabla de contingencia.

El siguiente gráfico (Figura 5.17) muestra los medios de organización de la información en la segunda prueba, el Pre-test(%).

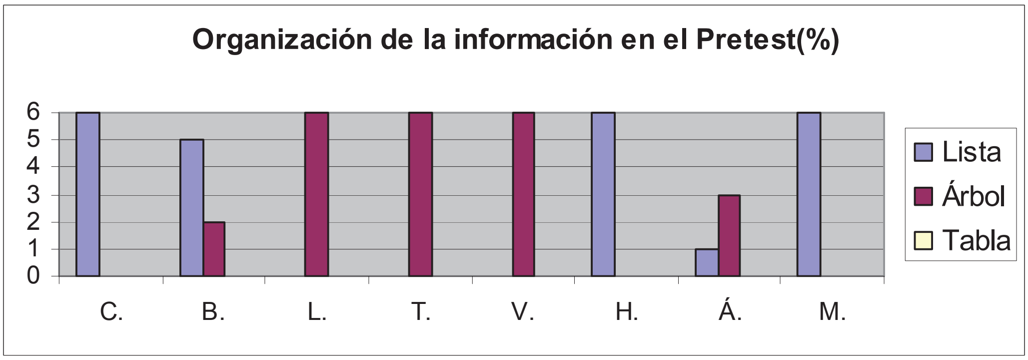


Figura 5.17. Gráfico que representa para cada estudiante, la frecuencia con que usa listas, árboles y tablas en el Pre-test(%).

Al igual que en el Pre-test(F), ningún estudiante hace uso de la tabla. Es destacable, también, el hecho de que, excepto B. y A., los estudiantes mantienen constante el medio de organización a lo largo de toda la prueba. Es decir, la mayoría de los estudiantes se decantan por un modo de organizar la información y lo usan en todos los problemas de la prueba. Especialmente llamativo es el efecto que parece tener el uso del árbol por parte de T. y V., pues si lo relacionamos con el gráfico de la Figura 5.15 (p. 208) vemos que, para estos dos estudiantes, el éxito en la obtención del porcentaje pedido en el Pre-test(%) aumenta considerablemente respecto del Pre-test(F), donde no hacían un uso tan extenso del árbol.

Finalmente, el gráfico de la Figura 5.18 muestra los medios de organización de la información en el Test(P).

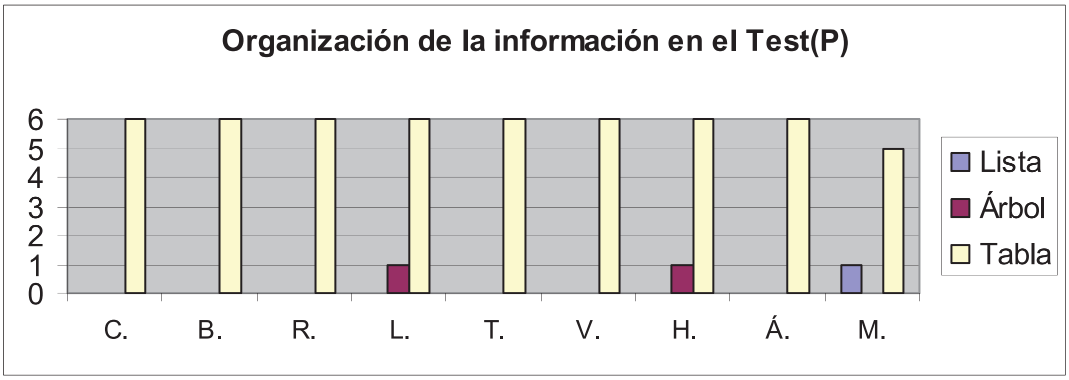


Figura 5.18. Gráfico que representa para cada estudiante, la frecuencia con que usa listas, árboles y tablas en el Test(P).

Se observa que, tras la enseñanza, aparece el uso de la tabla y desplaza casi completamente a la lista y al árbol. Si lo relacionamos, de nuevo, con el gráfico de la Figura 5.15 (p. 208), vemos que, excepto L. H. y M., los estudiantes consiguen resolver correctamente todos los problemas de la prueba. Los estudiantes L., H. y M. son, precisamente, los que en este test no abandonan del todo el árbol y la lista.

5.3 – SOBRE LAS RESOLUCIONES DE LOS ESTUDIANTES EN LOS PRE-TEST.

En los dos apartados anteriores hemos dado cuenta del primero de los objetivos de esta tesis (el estudio teórico de los problemas de N_0, según su estructura matemática) y hemos mostrado algunos resultados, de carácter macroscópico y cuantitativo, que describían algunas características de los problemas, por un lado, y de los estudiantes de la muestra, por otro. En este apartado informaremos sobre los resultados que tienen que ver con el segundo de los objetivos de nuestra investigación: el estudio cualitativo de la actuación de los estudiantes ante problemas de nivel N_0 antes de recibir instrucción en probabilidad condicional, con la intención de observar sus estrategias de resolución, las dificultades mostradas y los errores cometidos y su posible relación con las variables de la tarea. El método de análisis de las resoluciones, basado en el uso del "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional", permite sintetizar las características más relevantes del proceso de resolución, resultando de gran ayuda para el estudio que nos proponemos hacer. Sin embargo, hay un aspecto de las resoluciones que no es representable en el grafo: los medios de organización de la información del enunciado usados por los estudiantes. Así pues, antes de mostrar los grafos de las resoluciones y los resultados que de ellos se derivan, comenzaremos este apartado con una descripción detallada de las características de estos medios de organización, la cual complementa y amplía el estudio cuantitativo con el que finalizaba el apartado anterior (Figuras 5.16, 5.17 y 5.18).

5.3.1 – Sobre los medios de organización de la información.

A la hora de analizar los medios de organización de la información del enunciado usados por los estudiantes, es importante no perder de vista que los pre-test se administraron antes de la enseñanza. Por ese motivo, es pertinente aquí la distinción que hacen Corter y Zahner (2007) entre dos tipos de medios de organización en la resolución de problemas de probabilidad por parte de los estudiantes: los generados espontáneamente por ellos mismos[27] y los proporcionados por el profesor o el

[27] Entre los que vamos a considerar no incluiremos aquellos que proporcionan los estudiantes para representar a los sucesos y a las operaciones entre sucesos. Antes de la enseñanza, los signos que usan los estudiantes para representar a los sucesos son idiosincráticos, como podrá verse en las mayoría de las resoluciones mostradas como ejemplos.

investigador. Así, a diferencia de lo que ocurrirá en el post-test, donde el uso de los medios de organización estará influido por la enseñanza recibida, los medios de organización que encontramos en las resoluciones de los dos primeros cuestionarios pueden considerarse como medios generados espontáneamente por los estudiantes, al margen de que en su trayectoria escolar previa hayan podido tener contacto con estos sistemas de representación en otras áreas o para la resolución de otro tipo de problemas de matemáticas.

Por otra parte, en las Figuras 5.16 y 5.17, podemos observar que todos los medios de organización usados por los estudiantes en los pre-test entran dentro de la categoría de "listas" o de la categoría de "árboles". A continuación, mostraremos ejemplos de los diferentes tipos de listas y árboles observados.

5.3.1.1 – Medios de organización codificados como "listas".

En primer lugar, podemos clasificar las "listas" observadas en dos tipos: las *listas completas* y las *listas incompletas*. Las primeras son listas que enumeran todas las cantidades mencionadas en el enunciado, tanto las conocidas como la desconocida, con expresión no sólo del número, en el formato de datos correspondiente, sino también de la descripción de dicho número. En la Figura 5.19 se muestra un ejemplo de este tipo de lista, que podríamos calificar de prototípica.

Enunciado: Un centro escolar está formado por 1.000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

TOTAL = 1.000 alumnos
282 → Estudiantes que usan gafas {Chicos}
147 → Chicas que usan gafas
368 → Chicas que no usan gafas
¿Que porcentaje entre los chicos, usa gafas?

Figura 5.19. Lista elaborada por el estudiante H. en la resolución del Problema 2a del Pre-test(F).

Una lista incompleta será aquella a la que le falta alguno de los elementos de la lista completa. El caso más frecuente de lista incompleta es el de una lista que contiene todas las cantidades conocidas, pero no la pregunta del problema. En la Figura 5.20 mostramos un ejemplo.

Enunciado: La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

15% chicas con gafas

37% no los usan (chicas)

35% chicos sin gafas

Figura 5.20. Lista elaborada por la estudiante M. en la resolución del Problema 1 del Pre-test(%).

Otro tipo de lista incompleta que hemos observado en las resoluciones es aquella en la que no sólo falta la cantidad por la que se pregunta (condición que presentan todas las listas incompletas halladas en los pre-test) sino también una o varias de las cantidades conocidas, como en el ejemplo de la Figura 5.21.

Enunciado: Un centro escolar esta formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

2. total = 1000

chicas con = 147

chicos con = 282 − 147 = 135

chicos sin = 100 − 282 − 368 = 350

Figura 5.21. Lista elaborada por el estudiante R. en la resolución del Problema 2a del Pre-test(F).

En esta resolución (Figura 5.21), las dos cantidades conocidas que faltan en la lista ("282 estudiantes que usan gafas" y "368 chicas que no las usan") se utilizan, sin describirse, en dos cálculos que aparecen a continuación de las cantidades conocidas listadas. Además, estos cálculos adoptan, en su expresión, el formato de la lista, por lo que podríamos considerar que también forman parte de ella. Esto nos lleva a hablar de "listas ampliadas", es decir, listas que no sólo enumeran cantidades que aparecen explícitamente en el enunciado, sino que también incluyen otras cantidades calculadas por el resolutor. Debemos señalar que en nuestra muestra de resoluciones no hemos encontrado ninguna lista completa y ampliada; curiosamente, todas las listas ampliadas encontradas son listas incompletas.

El siguiente ejemplo (Figura 5.22), sería otra lista de este tipo. Es una lista incompleta, por no incluir a una de las cantidades conocidas (la intersección "7 personas tuberculosas con test positivo") ni a la pregunta del problema. Sin embargo, es una lista ampliada por contener las marginales complementarias a las que se proporcionan en el enunciado. En efecto, el enunciado proporciona las marginales "17 personas que son tuberculosas" (representada en la lista por "si son = 17") y "14 personas a las que el test les resultó positivo" (representada en la lista por "test si = 14"), y el estudiante incorpora a la lista las expresiones "no son = 13" y "test no = 16", que son las marginales complementarias de la primeras.

Enunciado: Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test da positivo?
5. total = 30 si son = 17 no son = 13 test si = 14 test no = 16

Figura 5.22. Lista elaborada por el estudiante R. en la resolución del Problema 17 del Pre-test(F).

Con los ejemplos mostrados hemos ilustrado los diferentes tipos de listas encontrados en las resoluciones de los pre-test. Para ello hemos tenido en cuenta si la lista enumeraba o no todas las cantidades conocidas y la desconocida por la que se pregunta, y si aparecían o no cantidades calculadas en la misma. Lo que no hemos tenido en cuenta son los diferentes errores cometidos por los estudiantes al confeccionar las listas, como por ejemplo, los derivados de interpretaciones equivocadas de las cantidades del enunciado o los errores de expresión a la hora de describir dichas cantidades. Sobre estos errores hablaremos más adelante, en el apdo. 5.3.4 (p. 248).

5.3.1.2 – Medios de organización codificados como "árboles".

En cuanto a los árboles, recordemos que hemos adoptado un sentido amplio para este término cuando se usa para describir lo producido por los estudiantes. De hecho, muchas representaciones que hemos catalogado como árboles presentan una estructura que no se corresponde con ninguna de las formas canónicas descritas en el marco teórico (apdo. 3.6.3, p. 78). Además, al no disponer los estudiantes de un modelo de diagrama en árbol proporcionado por la enseñanza en el que basarse ni haber recibido instrucción sobre todas las posibilidades que esta herramienta ofrece, la mayoría de los árboles se construyen con la única finalidad de organizar la información del enunciado. No obstante, algunos estudiantes van más allá, incluyendo en sus representaciones otras cantidades y relaciones entre cantidades distintas de las que aparecen en el enunciado, con lo que están haciendo uso del árbol, también, para la resolución del problema. Así, podemos encontrar árboles más completos que otros en cuanto al número y tipo de cantidades y relaciones entre cantidades que representan, lo cual a veces viene condicionado por la estructura matemática del enunciado.

Si atendemos a la información numérica representada en los árboles, podríamos calificar a la mayoría de los árboles encontrados como árboles de frecuencias (véase Figura 3.9, p. 80), lo cual era esperable dado que en los enunciados los datos venían expresados en frecuencias naturales o en porcentajes y al no haber recibido los estudiantes enseñanza previa en probabilidad, era improbable que hicieran una traducción de los datos a probabilidades. Cuando los datos vienen expresados en forma de porcentajes, consideramos que a la hora de construir los árboles la mayor parte de los estudiantes realizan una traducción implícita a frecuencias naturales sobre una muestra de tamaño 100, aún cuando los números vengan acompañados del símbolo "%", lo cual se deduce de la forma en que operan con estos datos. Como se verá, sólo en el caso de tres resoluciones[28] en las que las estudiantes cometen el error de interpretar datos que se refieren a intersecciones como si se trataran de condicionales, encontramos árboles en los que podríamos considerar que los números no representan frecuencias naturales.

Por otra parte, observamos que cada uno de los estudiantes que hace uso de los árboles, les confiere un diseño particular. A continuación, mostraremos ejemplos de árboles construidos por cada uno de los estudiantes que usan este tipo de representación en las resoluciones escritas de los pre-test.

<u>Árboles construidos por la estudiante B.</u>

La estudiante B. usa los árboles de manera bastante profusa: en los seis problemas del Pre-test(F) y en dos de los problemas del Pre-test(%). Estos árboles se caracterizan porque algunos sucesos se representan mediante pictogramas y porque se construyen en vertical, es decir, distribuyendo las cantidades de arriba abajo al estilo de los árboles de frecuencias. Por otra parte, observamos cierta influencia de la estructura matemática de los enunciados en la forma que adoptan los árboles de B. En otras palabras, los árboles no responden todos a un mismo patrón, sino que su forma se adapta a las cantidades y relaciones entre cantidades que se dan en el enunciado. Esto se puede observar, por ejemplo, si comparamos los árboles que mostramos en las Figuras 5.23 y 5.24.

[28] Se trata de las resoluciones de los problemas P2a y P17 del Pre-test(%) realizadas por la estudiante A. y la resolución del Problema 9 del Pre-test(%) realizada por la estudiante L.

El árbol de la Figura 5.23 organiza la información del enunciado del Problema 1 del Pre-test(F), que es un problema de categoría C_0 y por tanto, sólo proporciona intersecciones como cantidades conocidas. Como se aprecia en dicha figura, el árbol contiene las tres intersecciones conocidas y una cantidad calculada (la intersección que falta) y representa, simplemente, la partición del espacio muestral en las cuatro intersecciones posibles.

Enunciado: La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

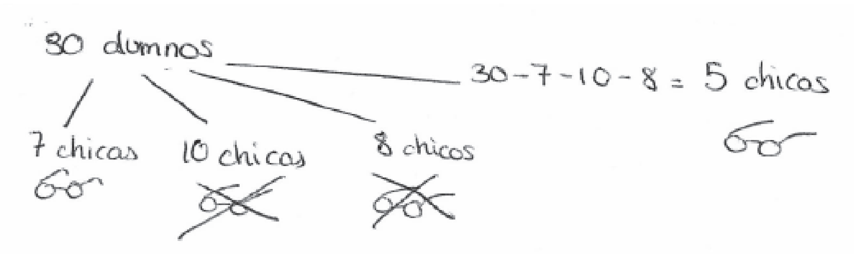


Figura 5.23. Árbol construido por la estudiante B. en la resolución del Problema 1 del Pre-test(F).

El árbol de la Figura 5.24 organiza la información del Problema 2a del Pre-test(%), de categoría C_1 (caso 1), cuyos datos conocidos son dos intersecciones, las "chicas con gafas" y las "chicas sin gafas", y la marginal "estudiantes con gafas". Este árbol ya no representa la partición del espacio muestral en las cuatro intersecciones (pues sólo se dispone de dos de ellas), sino la partición del espacio muestral en chicos y chicas y la partición del conjunto de las chicas en chicas con gafas y chicas sin gafas. La representación de esta última partición conduce al cálculo de la marginal "chicas". En cambio, no se representa la partición análoga del conjunto "chicos", del que sólo "cuelga" una cantidad, que podemos interpretar como "los chicos con gafas" y que parece representar la pregunta del problema, lo cual delataría un error de interpretación de la misma (es interpretada como una intersección en lugar de una condicional). Sobre este tipo de errores, no obstante, hablaremos más adelante. Finalmente, el dato conocido "estudiantes con gafas" se representa separadamente, al no encajar en la partición inicial del espacio muestral que representa el árbol.

Así pues, vemos como ante dos enunciados de estructuras matemáticas diferentes, la estudiante B. construye dos árboles de estructuras también diferentes.

Enunciado: Un centro escolar esta formado por chicos y chicas. Hay un 28% de estudiantes que usan gafas, un 15% de chicas que las usan y un 37% de chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

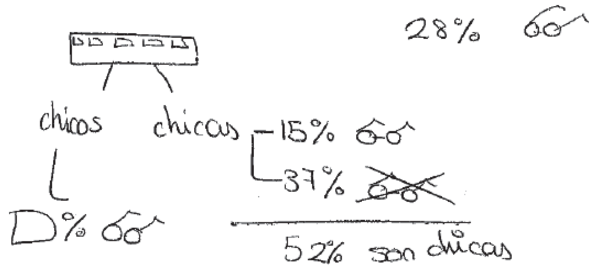


Figura 5.24. Árbol construido por la estudiante B. en la resolución del Problema 2a del Pre-test(%).

Árbol construido por la estudiante C.

La única representación realizada por la estudiante C. que hemos calificado como árbol es la que aparece en la Figura 5.25 y corresponde a la resolución del problema P.17 del Pre-test(F). A pesar de que la disposición de los datos en esta representación hace pensar en una lista, nos hemos decantado por el árbol a la hora de clasificarla, simplemente, porque refleja relaciones de inclusión entre las cantidades que la forman. Así, se aprecia la relación de inclusión que se da entre "7 → test negativo" (que representa a la intersección "7 personas tuberculosas con test negativo") y la marginal "17 → tuberculosas". También aparece una cantidad calculada ("→ sólo a 10 les dio positivo"), que mediante el uso del signo "→" se incorpora a la representación, quedando señalada su relación con las dos cantidades anteriores, que son las cantidades a partir de las cuales se obtiene. Se trata, por tanto, de un árbol que no responde a ninguna de las formas canónicas y que se usa, básicamente, para organizar la información del enunciado.

Enunciado: Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da positivo el test?

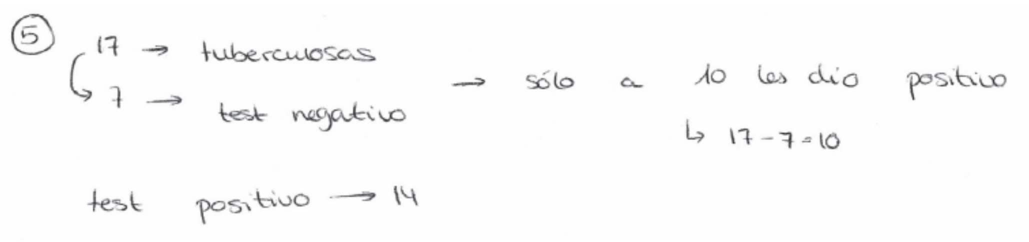


Figura 5.25. Árbol construido por la estudiante C. en la resolución del Problema 17 del Pre-test(F).

Árboles construidos por las estudiantes A. y M. en las resoluciones filmadas del Pre-test(F)

Las estudiantes A. y M. construyen árboles para la resolución de los Problemas 1, 17 y 18.

En el Problema 1, el árbol que construyen (Figura 5.26) tiene apariencia de lista, como el construido por C. (Figura 5.25) y se ha optado por calificar esta representación como árbol porque, al igual que el de C., deja ver ciertas relaciones de inclusión entre las cantidades implicadas. Por otra parte, la representación sólo contiene tres de las cantidades conocidas ("30 estudiantes entre chicos y chicas", "7 chicas que usan gafas" y "8 chicos que tampoco usan gafas"). Falta, por tanto, la cantidad conocida "10 chicas que no las usan". Por otra parte, aparece la cantidad intermedia "17 chicas", para cuyo cálculo es necesario hacer uso de la cantidad anterior (es el resultado de sumar el número de chicas con gafas con el número de chicas sin gafas). También aparece la cantidad "13 chicos", complementaria de la cantidad "17 chicas".

Enunciado: La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

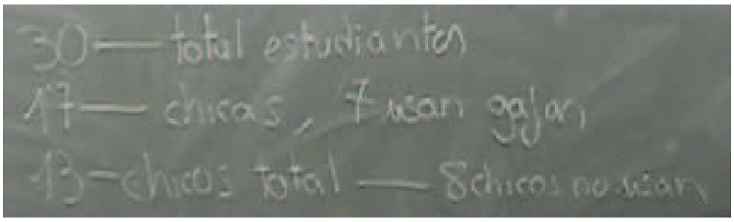


Figura 5.26. Árbol construido por las estudiantes A. y M. en la resolución del Problema 1 del Pre-test(F).

En el Problema 17, las estudiantes construyen varios árboles, de los cuales comentaremos el que se muestra en la Figura 5.27, por ser el más completo. En este árbol se observan dos particiones del espacio muestral, es decir, las 30 personas que se someten al test, representadas por "30 pers". La primera, que se extiende hacia abajo, muestra la división entre personas tuberculosas y personas no tuberculosas, mientras que la segunda, que se extiende hacia la derecha, muestra la división entre personas con resultado positivo en el test y personas con resultado negativo en el test. Además, muestra la subdivisión de las personas con test negativo en dos grupos: las que dan negativo en el test y padecen la enfermedad y las que dan negativo en el test y no padecen la enfermedad. De esta manera, el árbol contiene las tres cantidades conocidas del enunciado y también, otras calculadas a partir de éstas.

Enunciado: Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿qué porcentaje el test da positivo?

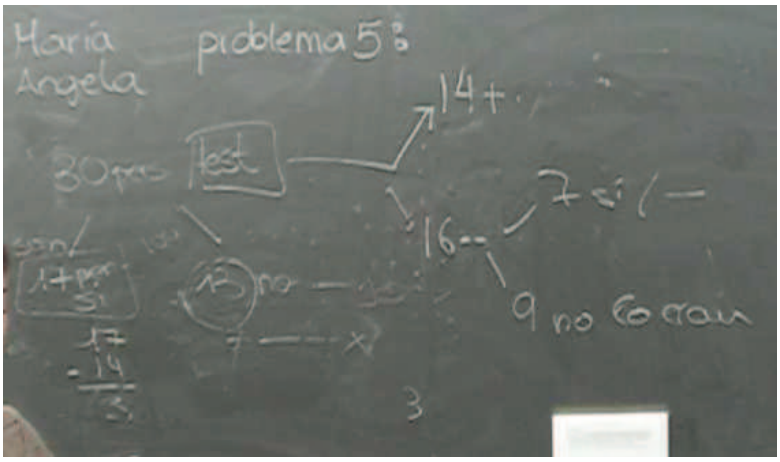


Figura 5.27. Árbol construido por las estudiantes A. y M. en la resolución del Problema 17 del Pre-test(F).

Finalmente, en el Problema 18a, las estudiantes combinan el árbol con la lista (Figura 5.28). Así, el árbol representa la partición del conjunto total de piezas en piezas correctas, que es una cantidad conocida, y piezas defectuosas, que es una cantidad calculada. En cuanto a la lista, contiene las otras dos cantidades conocidas, dadas en el enunciado.

Enunciado: Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado fue que 95 piezas fueron correctas, 77 fueron calificadas como correctas por el dispositivo y que 4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

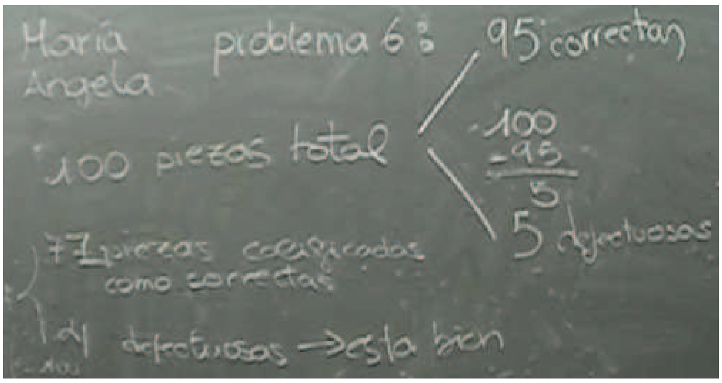


Figura 5.28. Árbol construido por las estudiantes A. y M. en la resolución del Problema 18a del Pre-test(F).

Árboles construidos por la estudiante A.

Las Figuras 5.29, 5.30 y 5.31 muestran los tres árboles construidos por la estudiante A.

Los árboles de las Figuras 5.29 y 5.30 son árboles incompletos, en el sentido de que no representan todas las cantidades conocidas del enunciado, aunque incorporan alguna cantidad calculada. El primero de ellos (Figura 5.29) se basa en la división del espacio muestral en los sucesos complementarios: "curados" y "no curados". Para ello usa la marginal "53% de personas curadas", proporcionada en el enunciado y su complementaria ("47% de personas no curadas") que no aparece en el enunciado pero que la estudiante produce al hacer una lectura del mismo. Sin embargo, el árbol no se completa, siendo la intersección "40% de personas no tratadas y no curadas" la única cantidad que se incorpora y quedando sin representar una de las cantidades conocidas: la intersección "35% de personas tratadas y curadas". Notemos que para incluir esta última cantidad en el árbol bastaría trazar una nueva rama desde la marginal "curados".

Enunciado: Un conjunto de personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado un 53% de dichas personas. Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

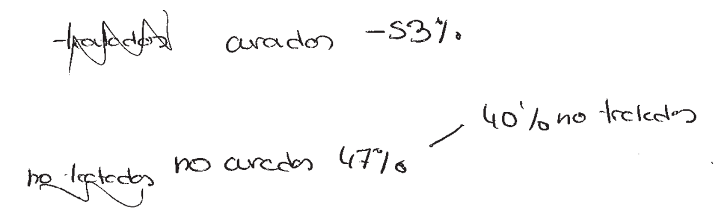


Figura 5.29. Árbol construido por la estudiante A. en la resolución del Problema 9 del Pre-test(%).

En el árbol de la Figura 5.30 se aprecia la división del espacio muestral en los sucesos complementarios "personas tuberculosas" y "personas no tuberculosas". La estudiante incorpora la cantidad conocida "23% de personas tuberculosas con test negativo" y otra ("77 positivo") calculada a partir de la primera, por complementariedad a 100, lo que delata la interpretación equivocada de esta intersección como si se tratara de una condicional (profundizaremos en este tipo de error más adelante). De nuevo, el árbol se deja incompleto y no se representa la marginal conocida "47% personas con test positivo", que por otra parte, no tendría cabida en este árbol, salvo que derivara en un árbol ampliado, al estilo de los descritos en el marco teórico (véase Figura 3.8, p. 80).

Enunciado: Una población con riesgo de padecer tuberculosis se somete a un test para averiguar si padecen tuberculosis o no. El test da positivo o negativo para la enfermedad en cualquier caso. Un 57% de las personas eran tuberculosas. Los resultados muestran que hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo. Además, los resultados mostraron que un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo. Entre las personas que no eran tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les dio positivo?

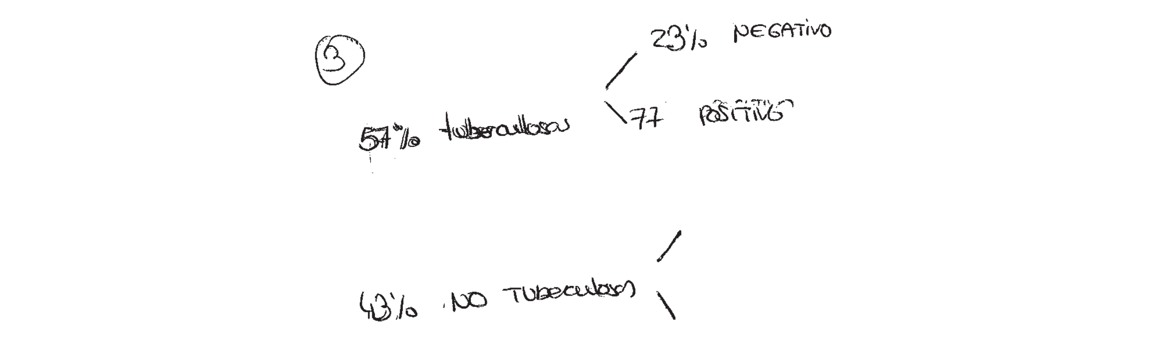


Figura 5.30. Árbol construido por la estudiante A. en la resolución del Problema 17 del Pre-test(%).

Por último, el árbol de la Figura 5.31 es el más completo de los tres y contiene las tres cantidades conocidas, dadas en el enunciado. Se parte de la división del espacio muestral en los sucesos complementarios "llevar gafas" y "no llevar gafas" y se incorporan las dos intersecciones dadas en el enunciado ("un 15% son chicas que las usan" y "un 37% son chicas que no las usan"). Sin embargo, la manera de completar el árbol (usando relaciones de complementariedad a 100) denota, otra vez, una interpretación equivocada de las intersecciones como si se tratara de condicionales.

Enunciado: Un centro escolar está formado por chicos y chicas. Hay un 28% de estudiantes que usan gafas, un 15% de chicas que las usan y un 37% de chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

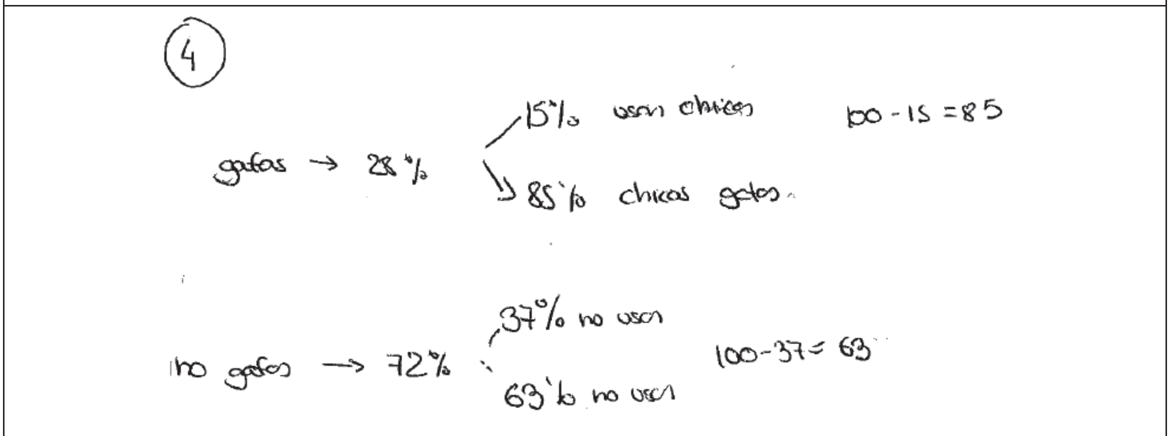


Figura 5.31. Árbol construido por la estudiante A. en la resolución del Problema 2a del Pre-test(%).

<u>Tipo de árboles construidos por la estudiante L.</u>

La estudiante L. usa el árbol como herramienta habitual para organizar la información del enunciado en los problemas de ambos cuestionarios. Aunque todos los árboles tienen un formato similar, la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades que presentan es muy variada. Además, son frecuentes los errores, sobre todo en el Pre-test(F), pero no nos detendremos en ellos aquí.

Así, encontramos árboles que comienzan con la partición del espacio muestral en dos sucesos complementarios (véase Figura 5.32) y otros, como el que aparece en la Figura 5.33, en los que se representa una sola de las marginales en las que se puede dividir el espacio muestral. En este último ejemplo vemos cómo el hecho de no comenzar el árbol con la partición en las dos marginales "usar gafas" y "no usar gafas", hace que la estudiante no pueda engarzar una de las cantidades conocidas ("368 no usan") en la estructura del árbol. La estudiante sitúa esta cantidad junto a la cantidad "Chicas 147 usan gafas", con lo que da a entender que con la expresión "368 no usan" se refiere, en realidad, a "368 *chicas* no usan *gafas*"; sin embargo, la cantidad queda descolgada porque el suceso "ser chica y no usar gafas" debería partir del suceso "no usar gafas", que no está en el árbol.

Enunciado: La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

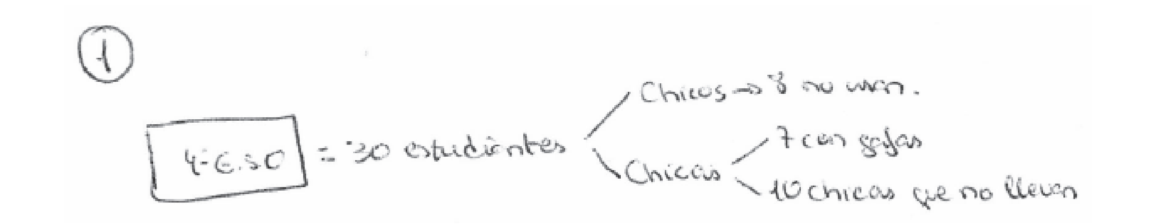


Figura 5.32. Árbol construido por la estudiante L. en la resolución del Problema 1 del Pre-test(F).

Enunciado: Un centro escolar esta formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

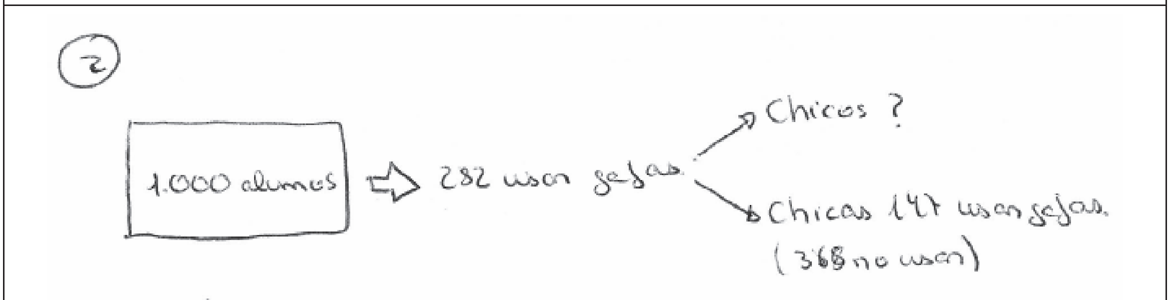


Figura 5.33. Árbol construido por la estudiante L. en la resolución del Problema 2a del Pre-test(F).

Por otra parte, en algunas resoluciones del Pre-test(%), la estudiante construye dos árboles, cada uno representando una de las dos particiones posibles del espacio muestral en dos marginales complementarias (véase Figura 5.34)

Enunciado: Una población sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado el 53% de las personas, un 42% se han tratado con el antibiótico y un 35% se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

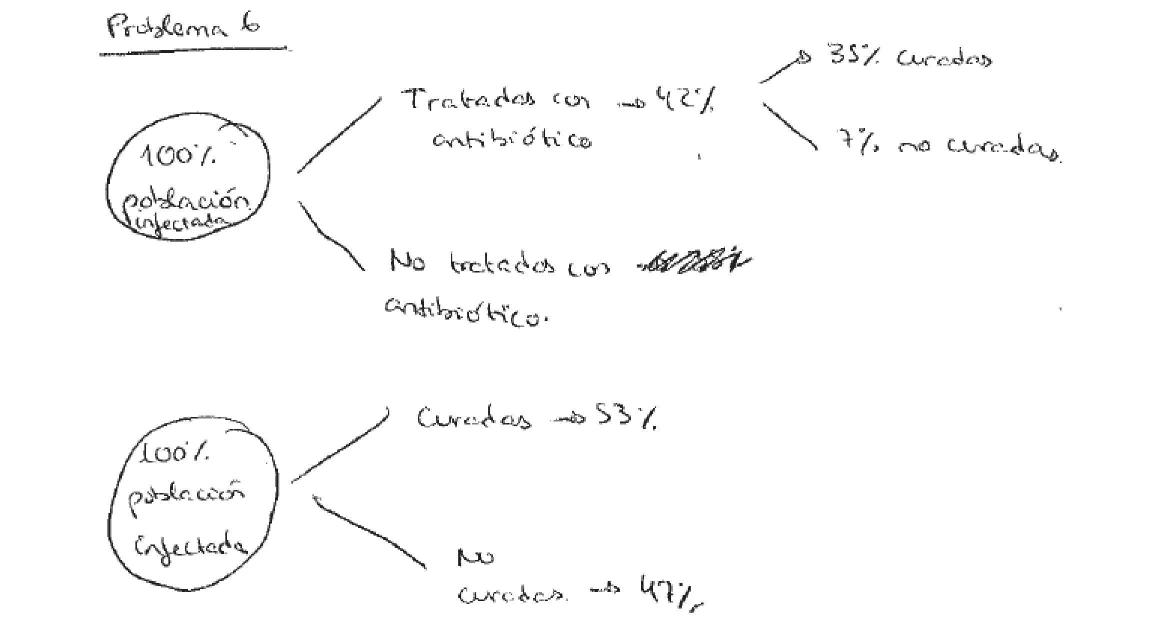


Figura 5.34. Árboles construidos por la estudiante L. en la resolución del Problema 10 del Pre-test(%).

Tipo de árboles construidos por la estudiante T.

La estudiante T. no usa árboles en ninguna de las resoluciones del Pre-test(F) y, sin embargo, los usa en todas las del Pre-test(%). Estos árboles son de estructuras muy similares entre sí. Comienzan con la partición del espacio muestral en dos sucesos básicos complementarios, que a su vez se dividen en las cuatro intersecciones posibles. Además, son árboles que no sólo se usan para organizar la información, sino también para el cálculo de cantidades intermedias. De hecho, tres de los árboles que construye T. (los que aparecen en los problemas 17, 2a y 10) son árboles ampliados, al incluir también una de las marginales que no formaba parte de la partición inicial y que es calculada aplicando una relación del tipo:

$$P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = P(B)$$

En la Figura 5.35 mostramos uno de estos árboles.

Enunciado: Una población sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado el 53% de las personas, un 42% se han tratado con el antibiótico y un 35% se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

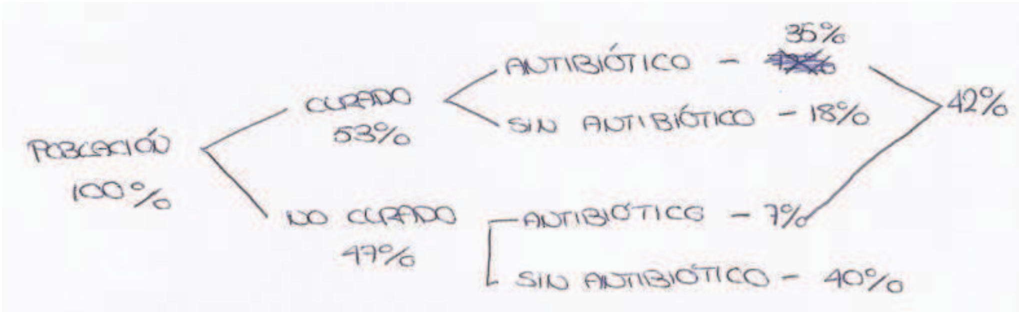


Figura 5.35. Árbol ampliado construido por la estudiante T. en la resolución del Problema 10 del Pre-test(%).

<u>Tipo de árboles construidos por el estudiante V.</u>

El estudiante V. usa árboles en tres de los problemas del Pre-test(F) y en todos los problemas del Pre-test(%).

Las representaciones que hemos calificado de árboles en las resoluciones de V. en el Pre-test(F) distan mucho de la forma canónica del diagrama en árbol y están orientados a la organización de la información del enunciado y no al cálculo de nuevas cantidades (véase Figura 5.36).

Enunciado: La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

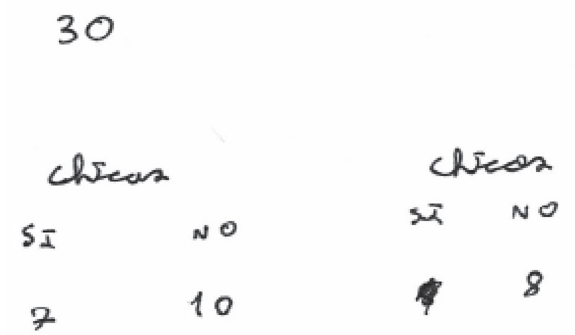


Figura 5.36. Árbol construido por el estudiante V. en la resolución del Problema 1 del Pre-test(F).

En cambio, los árboles que construye el estudiante V. en el Pre-test(%) tienen un formato completamente distinto a los que construye en el Pre-tet(F), pues representan un entramado de cantidades unidas mediante flechas que representan las relaciones que se dan entre ellas, y son usados, no sólo para la organización de la información, sino también para la resolución del problema. El ejemplar más completo de estos árboles lo encontramos en la resolución del Problema 18a y se muestra en la Figura 5.37.

Enunciado: La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

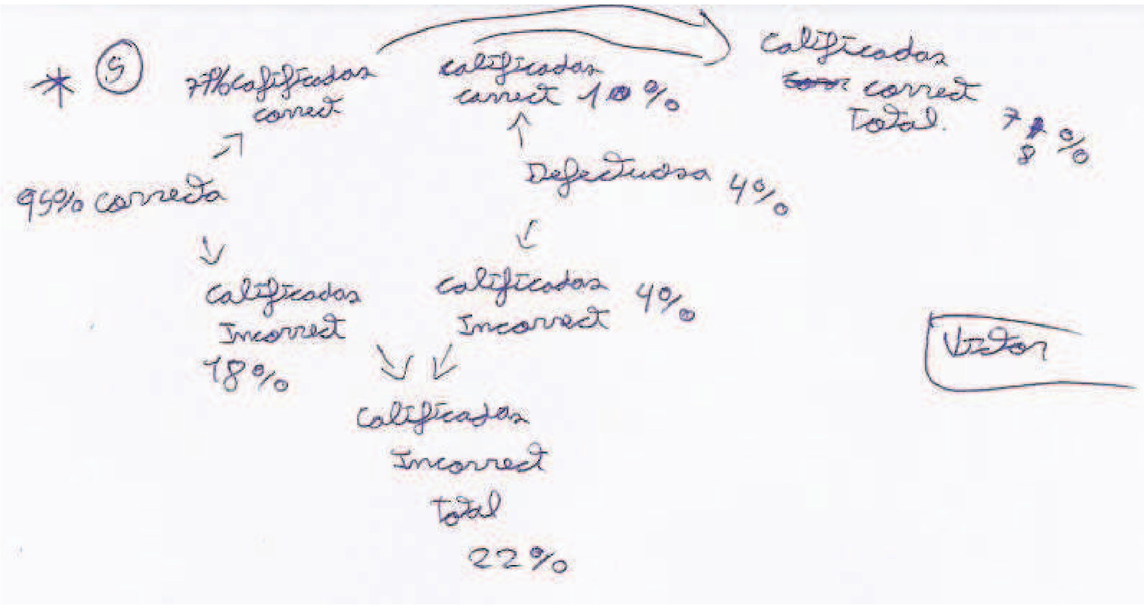


Figura 5.37. Árbol construido por el estudiante V. en la resolución del Problema 18a del Pre-test(%).

Este árbol guarda cierto parecido con el diagrama en árbol bidireccional descrito en el marco teórico (Figura 3.7, p. 79), ya que contiene todas las marginales e intersecciones involucradas en el problema. Por otra parte, este árbol proporciona un método de resolución de los problemas similar al que proporciona el uso de la tabla de contingencia: una vez se completa el árbol, basta seleccionar la marginal y la intersección adecuadas en el entramado de cantidades resultante, para obtener la condicional por la que se pregunta. Por tanto, dicho árbol puede ser considerado no sólo como un medio de organización de la información sino como una herramienta heurística para la resolución del problema. Además, el estudiante se muestra consciente del potencial de la herramienta, ya que usa árboles similares (más o menos completos) a lo largo de toda la prueba y consigue dar un resultado correcto en cinco de los seis problemas que la componen (véase Figura 5.15, p. 208). Sin embargo, tras la enseñanza el estudiante abandona esta herramienta en favor de la tabla de contingencia, como se puede comprobar en la Figura 5.18 (p. 210) .

5.3.2 – Grafos de las resoluciones de los estudiantes en los pre-test.

Como ya se explicó en el capítulo de metodología, para el análisis de las resoluciones de los estudiantes en los pre-test hemos hecho uso de los grafos trinominales. El resultado de traducir la resolución escrita o filmada al lenguaje del grafo, lo identificamos con el nombre de *grafo de la resolución* (de un problema *P* por un estudiante *E*). Así, siguiendo el método expuesto en el apartado 4.9.3.1.1 (p. 156) hemos realizado una lectura de cada una de las resoluciones, tanto escritas como filmadas, y hemos traducido esta lectura al lenguaje del grafo, obteniendo los grafos que se muestran en los anexos (del Anexo 12 al Anexo 17, pp. 469 - 571), agrupados por problema.

Cada resolución escrita o filmada se ha nombrado usando la siguiente notación:

inicial del nombre del estudiante _ problema_ formato de datos

Y nos referiremos al grafo de una resolución así:

G_inicial del nombre del estudiante _ problema_ formato de datos

Por ejemplo, a la resolución del Problema 1 por la estudiante C. en el Pre-test(F) la denotamos por C_P1_F y al grafo de dicha resolución G_C _P1_F. De la misma manera, a la resolución del mismo problema llevada a cabo por la misma estudiante en el Pre-test(%), la denotamos por C_P1_% y al grafo asociado, G_C_P1_%.

Por cada resolución hemos obtenido un grafo, excepto en el caso de la resolución filmada del Problema 17 del Pre-test(F), llevada a cabo por las estudiantes A. y M., para cuya representación ha sido necesario usar varios grafos. Esto se debe a que las estudiantes se bloquean en varias ocasiones, tras lo cual borran todo o gran parte de lo escrito en la pizarra, reinterpretando la información disponible y tratando de encontrar nuevos enfoques para la resolución del problema, como puede apreciarse en el protocolo escrito de la resolución que se encuentra en el Anexo 22 (p. 607). Como consecuencia, decidimos construir un grafo por cada vez que las estudiantes borran parcial o totalmente la pizarra porque revisan y modifican lo realizado hasta el momento. Así, en el Anexo 16 (p. 547) encontramos seis grafos diferentes asociados a diferentes secuencias en el proceso de resolución de este problema.

En los dos siguientes apartados mostramos las estrategias de resolución con éxito y los errores cometidos por los estudiantes en los pre-test, que hemos identificado y clasificado a partir de los grafos de las resoluciones.

5.3.3 – Estrategias de resolución con éxito.

La metodología con la que abordamos el estudio de las estrategias de resolución de los problemas por parte de los estudiantes está descrita en el apdo. 4.9.3.1.2.1 del capítulo anterior (p. 164) y, como allí se indica, centraremos nuestra atención en las estrategias de resolución con éxito. Por *estrategia de resolución con éxito* entendemos, en esta tesis, un conjunto de cantidades y de relaciones entre cantidades que permiten llegar desde las cantidades conocidas del problema hasta la cantidad por la que se pregunta y ofrecer un resultado numérico correcto (salvo errores de cálculo). Decimos que dos resoluciones de un mismo problema comparten estrategia de resolución si en sus grafos asociados (los *grafos de la resolución*) se han activado los mismos vértices (cantidades) y las mismas aristas (relaciones entre cantidades), sin importar el orden. También decimos que dos resoluciones de un mismo problema comparten estrategia de resolución, si no dan lugar exactamente al mismo grafo de la resolución pero uno de ellos está estrictamente contenido en el otro. Esto significa que la resolución en cuyo grafo se han activado más vértices y aristas contiene cantidades intermedias superfluas, es decir, cantidades que no son estrictamente necesarias para llegar a la solución del problema.

Antes de proceder a describir las diferentes estrategias de resolución con éxito observadas en las resoluciones de cada uno de los problemas de los pre-test, llevadas a cabo por los estudiantes, creemos necesarias también un par de aclaraciones en relación al formato en que se formulan los datos del enunciado (frecuencias o porcentajes).

En primer lugar, a la hora de identificar estrategias de resolución y errores hemos considerado conjuntamente las resoluciones de ambos pre-test, el Pre-test(F) y el Pre-test(%). Esto se debe a que en esta investigación particular no hemos observado influencias del formato de datos en las dificultades de los problemas ni en las estrategias de resolución ni en los errores cometidos, lo que atribuimos a las características propias de los problemas de nivel N_0, ya que sí se han observado dichas influencias en investigaciones previas con otras familias de problemas (Lonjedo, 2007). De hecho, cuando se opera con porcentajes, los estudiantes actúan como si se tratara de frecuencias. Así, en expresiones como las que mostramos en las Figuras 5.38 y 5.39 se hacen cálculos con frecuencias (los tantos por cien), aunque se escriba junto a los números el símbolo %.

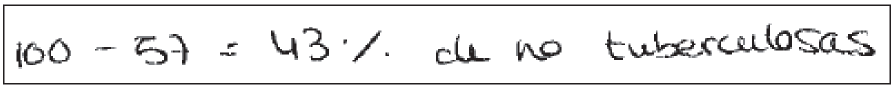


Figura 5.38. Operación extraída de la resolución del Problema 17 en el Pre-test(%) realizada por la estudiante C.

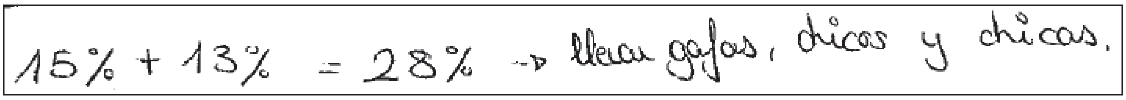


Figura 5.39. Operación extraída de la resolución del Problema 1 en el Pre-test(%), realizada por la estudiante B.

En efecto, los cálculos llevan de manera implícita una asignación de frecuencias: el 100% de la muestra se convierte en una muestra de tamaño 100. Si el 57% de las personas son tuberculosas, esto quiere decir que sobre un total implícito de 100, el número de personas no tuberculosas es 57. En los problemas de nivel N_0 esta traducción es directa porque todas las cantidades conocidas son marginales y/o intersecciones, para las que el conjunto total de referencia (el que representa al 100% de la muestra) es el mismo. Por este motivo, cuando describimos la secuencia de operaciones de las diferentes rutas de resolución, siempre representamos las componentes numéricas de las cantidades intermedias de la forma *n(suceso)*, es decir, haciendo referencia al cardinal del suceso (entendido el suceso como subconjunto del espacio muestral), independientemente de si los datos del enunciado vienen expresados en frecuencias o en porcentajes.

Veamos, ahora, las diferentes estrategias de resolución con éxito encontradas para cada problema. Para cada una de ellas mostraremos una resolución con su respectivo grafo de la resolución, representativos de la estrategia en cuestión. Por otra parte, en el Anexo 23 (p. 623) se encuentran los grafos teóricos que representan todas las estrategias de resolución con éxito para cada problema y que permiten observar, además, el diccionario de cantidades del problema, en el sentido con el que usa este término Cerdán (2008). En dicho anexo mostramos también una tabla resumen de todas las resoluciones de los estudiantes en las que es posible observar estas estrategias.

5.3.3.1 – Estrategias de resolución con éxito del "Problema 1".

Enunciado

En el Pre-test(F):

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

En el Pre-test(%):

La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Características del problema

Atendiendo a las variables de la tarea, es un problema de categoría C_0 formulado en el contexto que hemos denominado Estadístico Social. Las cantidades conocidas son tres intersecciones que se relacionan dos a dos. La pregunta del problema es una condicional que mide la probabilidad de un suceso básico en relación con el otro suceso básico.

En adelante, denotaremos por A al suceso "ser chica" y por B al suceso "llevar gafas". Así, los datos conocidos son $n(A \cap B), n(A \cap \overline{B})\ y\ n(\overline{A} \cap \overline{B})$ y la pregunta del problema, que es un porcentaje, nos tomaremos la licencia de representarla como $\%(A \mid B)$[29].

Estrategia de resolución. Caso 1.

Esta estrategia se ha observado en ocho de las nueve resoluciones con éxito que se han encontrado. Por tanto, puede considerarse como una estrategia espontánea para este problema. Se caracteriza por el uso de relaciones no ternarias en las que intervienen las tres intersecciones conocidas para la obtención de la intersección desconocida, como primer paso en el cálculo de cantidades intermedias. Tras ella se encuentra la idea de considerar el espacio muestral dividido en 4 subconjuntos disjuntos: las chicas que llevan gafas, las chicas que no llevan gafas, los chicos que llevan gafas y los chicos que no llevan gafas. Como el enunciado proporciona la medida de tres de estos conjuntos, la medida del cuarto se obtiene por complementariedad a la del total.

El uso de relaciones no ternarias en las resoluciones que los estudiantes han hecho del resto de problemas es muy infrecuente[30], lo que nos hace pensar que esta forma de proceder puede guardar relación con las variables de la tarea. En concreto, vemos una influencia de la estructura de datos del problema: el conocer tres de las cuatro intersecciones hace que el resolutor pueda evocar con facilidad la cuarta. Además, esto vendría reforzado por el hecho de que el problema está formulado en el contexto menos influyente desde el punto de vista de las dificultades (Carles y otros, 2009), lo que facilita la identificación y correcta interpretación de los sucesos implicados y, en particular, de las cuatro intersecciones posibles.

Por otra parte, hemos observado dos modos de llevar a cabo esta estrategia, a las que hemos denominado *modo aditivo* y *modo sustractivo*.

El primero, que puede observarse en la resolución mostrada en la Figura 5.40 (p. 232), se usa en cinco resoluciones y se caracteriza por el uso de una relación no ternaria en la que se suman las tres intersecciones conocidas, lo que conduce a la obtención de una unión de sucesos:

$$n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B}) + n(\overline{A} \cap B) = n(A \cup B)$$

En todos los casos, este cálculo viene seguido del uso de la relación ternaria:

[29] En adelante, usaremos expresiones de este tipo para representar, de manera abreviada, cantidades en el formato de datos *porcentajes*. Así una expresión del tipo %(A) significará el porcentaje de individuos que verifican el suceso A sobre el total de la muestra, una expresión del tipo $\%(A \cap B)$ significará el porcentaje de individuos que verifican simultáneamente los sucesos A y B sobre el total de la muestra y una expresión del tipo %(A|B) significará el porcentaje de individuos que verifican A, entre aquellos que verifican B.

[30] Aparece de nuevo en dos resoluciones, ambas del Problema 9, realizadas por los estudiantes B. y V. Concretamente, se trata de las resoluciones codificadas como B_P9_F y V_P9_%.

$$N - n(A \cup B) = n(\overline{A} \cap \overline{B})$$

De las cinco resoluciones en las que aparece esta secuencia de cálculos, sólo en dos la primera cantidad obtenida está descrita. La estudiante A., en el Pre-test(%), la describe como “el total de datos que nos dan” y la estudiante B., también en el Pre-test(%), la describe como “los datos que nos dan”. En cambio, el número o porcentaje de chicos sin gafas sí viene descrito en todos los casos. Con ello queda patente que la unión es una cantidad intermedia sin más importancia que la de servir de enlace entre los datos conocidos (“lo que nos dan” en el enunciado) y la cantidad intermedia realmente buscada, que es el número o porcentaje de chicos con gafas.

En cuanto al que hemos denominado modo sustractivo, puede observarse en la resolución mostrada en la Figura 5.41 (p. 233). Aparece en tres resoluciones y se caracteriza por el uso de una relación no ternaria en la que las tres intersecciones conocidas se van restando del total, lo que conduce directamente a la obtención de la cuarta intersección:

$$N - n(A \cap B) - n(A \cap \overline{B}) - n(\overline{A} \cap B) = n(\overline{A} \cap \overline{B})$$

Para una correcta interpretación de los grafos que se muestran en las citadas Figuras 5.40 y 5.41, debemos recordar que las relaciones cuaternarias no aparecen en el grafo inicial ni tampoco son incorporadas al mismo; sólo se incorpora el vértice que representa la cantidad resultante de aplicar dicha relación, el cual se colorea de un azul más oscuro que el resto para indicar que procede de una relación cuaternaria. Para comprobar cuál es esa relación cuaternaria, se hace necesario recurrir a la resolución del estudiante.

Una vez obtenida la intersección desconocida, en ambas estrategias (aditiva y sustractiva) se procede de la misma manera.

Para el cálculo de la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta se usa la relación:

$$n(A \cap B) + n(\overline{A} \cap B) = n(B)$$

Y el último paso es la obtención de la condicional, que en todos los casos se hace mediante la regla de tres: $n(B)$ es a $n(A \cap B)$ como 100 es a x, siendo x la medida de la condicional buscada.

Estrategia de resolución. Caso 2.

Esta estrategia, que se muestra en la Figura 5.42 (p. 234), difiere de la anterior en que se usan únicamente relaciones ternarias (cuatro aditivas y una multiplicativa), ya que no se consideran las tres intersecciones simultáneamente para comenzar con el cálculo de cantidades intermedias, sino que se toman sólo dos de estas intersecciones para el primer cálculo. La secuencia de relaciones aditivas usadas y cantidades intermedias obtenidas es la siguiente:

1º) $n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B}) = n(A)$

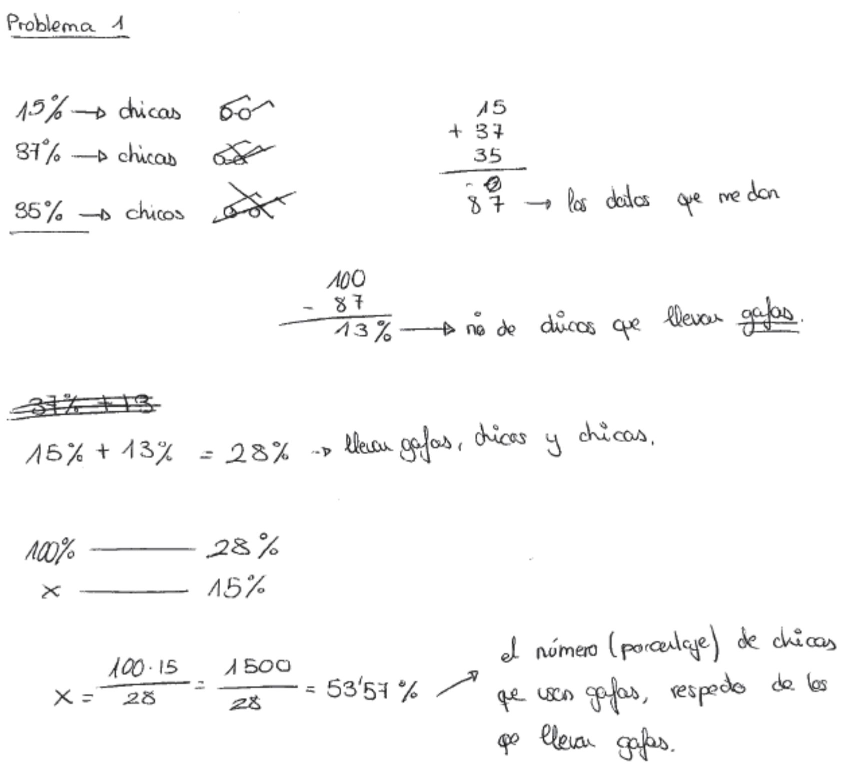
2º) $N - n(A) = n(\overline{A})$

3º) $n(\overline{A}) - n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A} \cap B)$

4º) $n(\overline{A} \cap B) + n(A \cap B) = n(B)$

Finalmente, se procede a la obtención de la condicional por la que se pregunta. En la única resolución con éxito en la que se ha observado el uso de esta estrategia de resolución, este cálculo se hace mediante la regla de tres descrita para la estrategia de resolución 1: n(estudiantes con gafas) es a n(chicas con gafas) como 100 es a x, donde x representa la condicional por la que se pregunta.

B_P1_%



Problema 1

15% → chicas

37% → chicas

35% → chicos

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 37 \\ 35 \\ \hline 87 \end{array}$$ → los datos que me dan

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 87 \\ \hline 13\% \end{array}$$ → nº de chicos que llevan gafas.

~~37% + 13~~

15% + 13% = 28% → llevan gafas, chicos y chicas.

100% —— 28%

x —— 15%

$x = \frac{100 \cdot 15}{28} = \frac{1500}{28} = 53'57\,\%$ ↗ el número (porcentaje) de chicas que usan gafas, respecto de los que llevan gafas.

G_B_P1_%

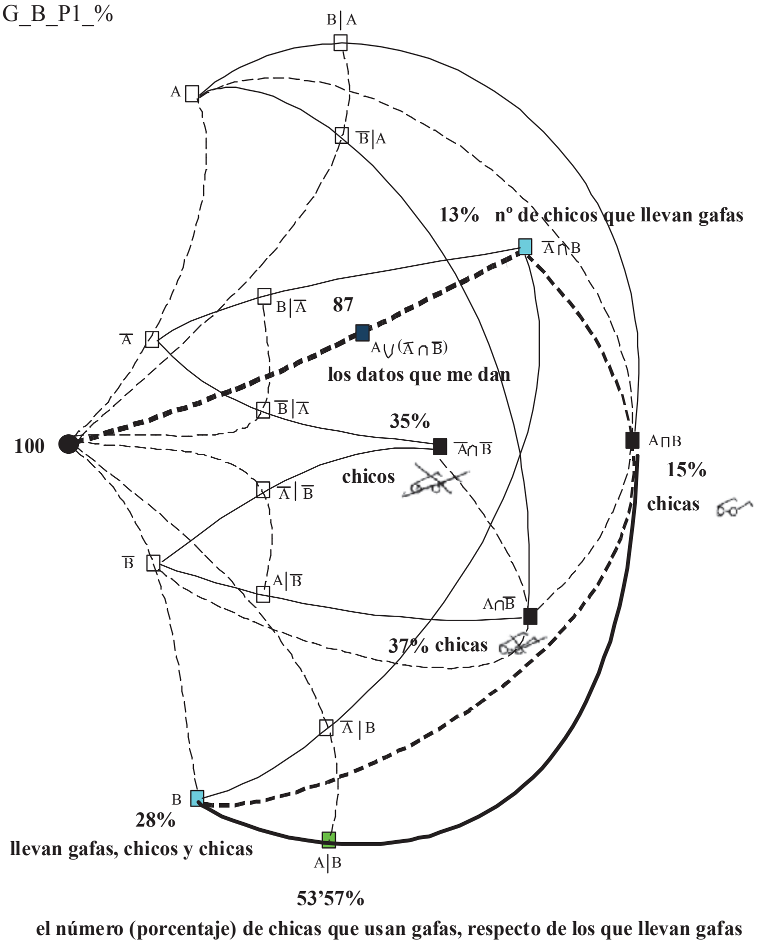
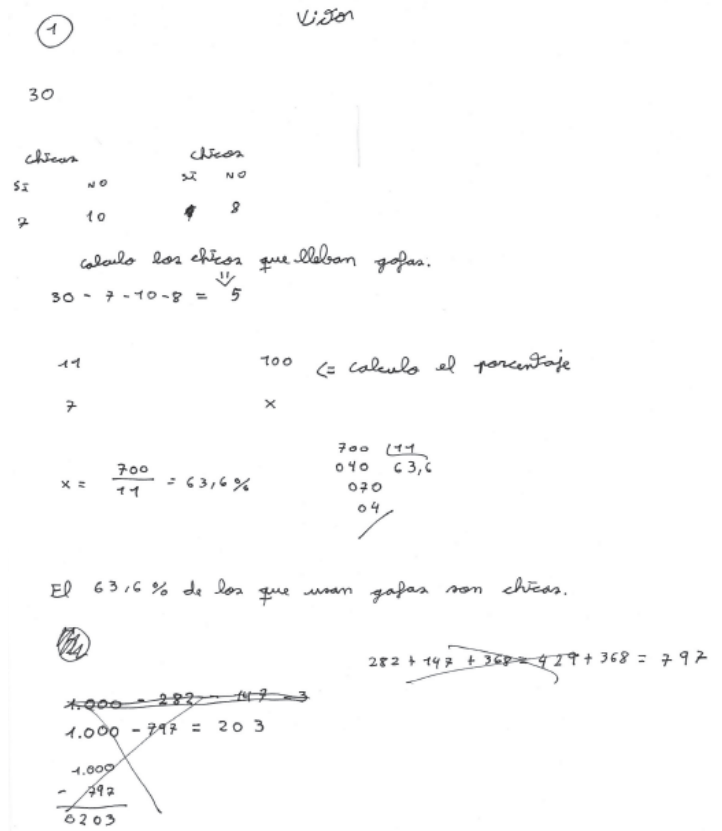
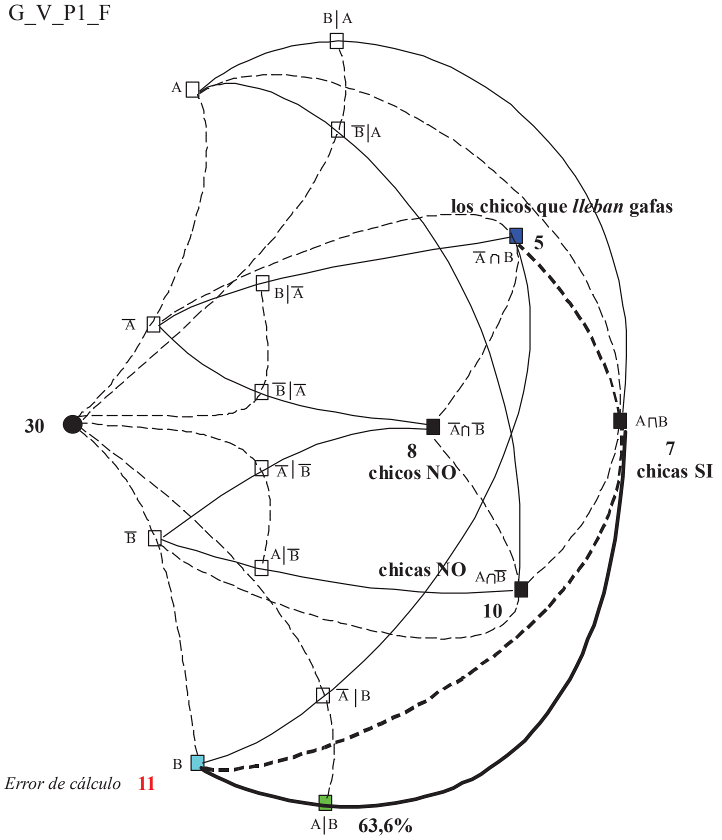


Figura 5.40. Resolución del Problema 1 en el Pre-test(%) realizada por la estudiante B. en la que se observa la estrategia de resolución definida como caso 1, en modo aditivo.

V_P1_F


1
Víctor
30
chicos
SI NO
7 10
chicas
SI NO
4 8
calculo los chicos que lleban gafas.
30 - 7 - 10 - 8 = 5
11 100 ⇐ calculo el porcentaje
7 x
x = 700/11 = 63,6 %
700 | 11
040 63,6
070
04
El 63,6 % de los que usan gafas son chicas.
2
282 + 147 + ~~368 = 429~~ + 368 = 797
~~1.000 - 282 - 147 = 3~~
1.000 - 797 = 203
1.000
- 797
0203

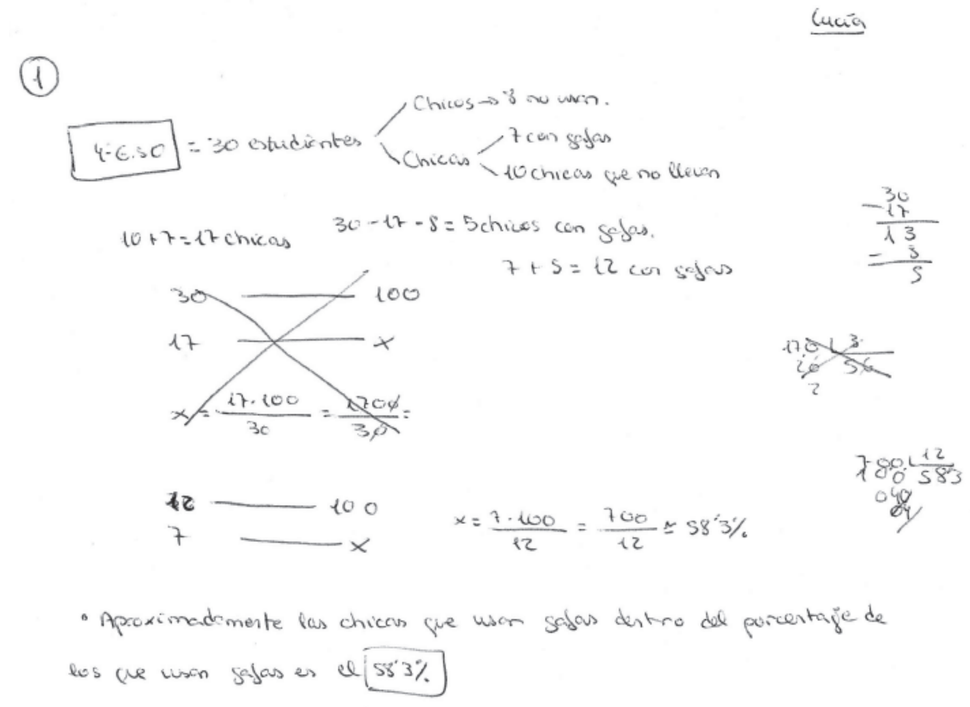
G_V_P1_F



El 63,6% de los que usan gafas son chicas.

Figura 5.41. Resolución del Problema 1 en el Pre-test(F) realizada por el estudiante V. en la que se observa la estrategia de resolución definida como caso 1, en modo sustractivo.

L_P1_F



G_L_P1_F

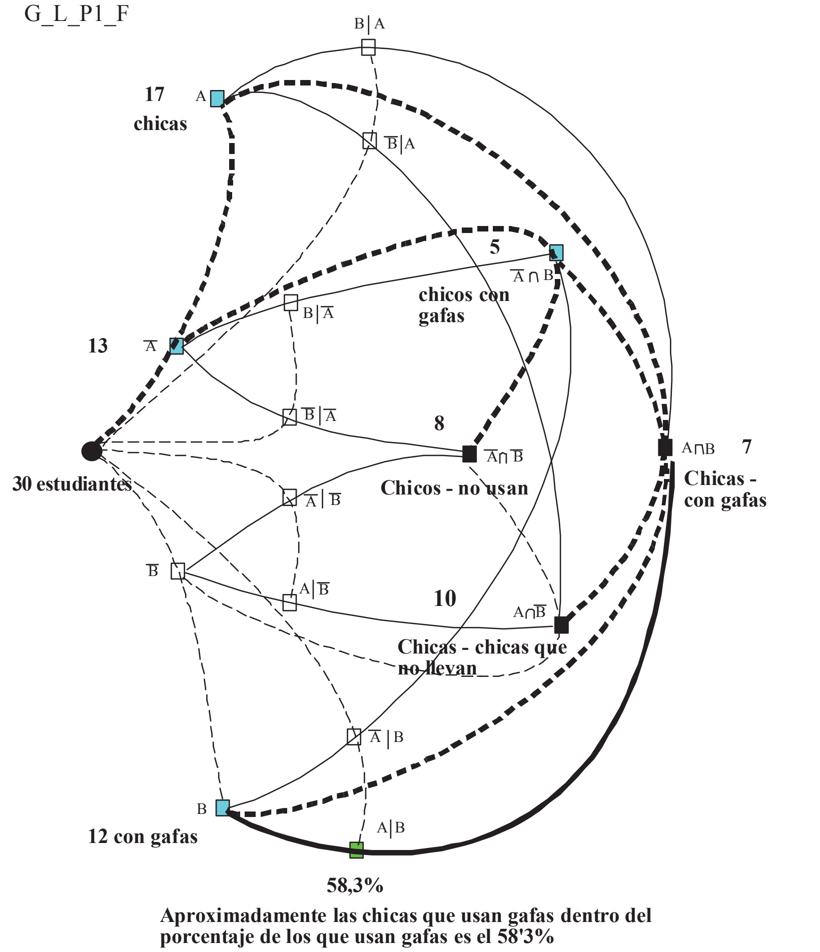


Figura 5.42. Resolución del Problema 1 en el Pre-test(F) realizada por la estudiante L. en la que se observa la estrategia de resolución definida como caso 2.

5.3.3.2 – Estrategias de resolución con éxito del "Problema 2a".

Enunciado

En el Pre-test(F):

Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

En el Pre-test(%):

Un centro escolar está formado por chicos y chicas. Hay un 28% de estudiantes que usan gafas, un 15% de chicas que las usan y un 37% de chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Características del problema

Atendiendo a las variables de la tarea, es un problema de categoría C_1 formulado en el contexto que hemos denominado Estadístico Social. Las cantidades conocidas son dos intersecciones directamente relacionadas y una marginal relacionada con una de las dos intersecciones. La pregunta del problema es una condicional en la que el suceso condicionante no se relaciona directamente con los datos conocidos.

Si denotamos por A al suceso "ser chica" y por B al suceso "llevar gafas", los datos conocidos son $n(B), n(A \cap B)\ y\ n(A \cap \overline{B})$ y la pregunta del problema, $\%(B \mid \overline{A})$.

Hay tres relaciones que involucran a las cantidades conocidas del problema que pueden usarse para comenzar a obtener cantidades intermedias, es decir, para comenzar con la resolución del problema. Son las siguientes:

$$n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B}) = n(A)$$

$$n(B) - n(A \cap B) = n(\overline{A} \cap B)$$

$$N - n(B) = n(\overline{B})$$

Estrategia de resolución. Caso 1.

Esta estrategia de resolución se ha observado en cinco de las ocho resoluciones con éxito y encontramos una muestra de la misma en la Figura 5.44 (p. 238). Se caracteriza por usar las dos primeras relaciones para comenzar con la resolución. Una de las secuencias posibles en el uso de las relaciones aditivas, observada en dos resoluciones, es la siguiente:

1º) $n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B}) = n(A)$

2º) $N - n(A) = n(\overline{A})$

3º) $n(B) - n(A \cap B) = n(\overline{A} \cap B)$

Otra secuencia observada ha sido la que resulta de invertir el orden de los elementos de la secuencia anterior de esta manera: 3º) – 1º) – 2º). Aún existe otra secuencia posible, que no ha sido observada: 1º) – 3º) – 2º). Pero recordemos que no tenemos en cuenta el orden en que se llevan a cabo las operaciones a la hora de caracterizar las diferentes estrategias de resolución.

Finalmente, se obtiene la condicional por la que se pregunta mediante una regla de tres análoga a la descrita para las estrategias de resolución del Problema 1: *n(chicos)* es a *n(chicos con gafas)* como 100 es a x.

Estrategia de resolución. Caso 2.

Esta estrategia ha sido observada en dos resoluciones y se caracteriza por comenzar la resolución mediante el uso de las relaciones:

$n(B) - n(A \cap B) = n(\overline{A} \cap B)$

$N - n(B) = n(\overline{B})$

La secuencia de relaciones aditivas y cantidades intermedias en una de las dos resoluciones que presentan esta estrategia (la que se muestra en la Figura 5.45, p. 239) es la siguiente:

1º) $n(B) - n(A \cap B) = n(\overline{A} \cap B)$

2º) $N - n(B) = n(\overline{B})$

3º) $n(\overline{B}) - n(A \cap \overline{B}) = n(\overline{A} \cap \overline{B})$

4º) $n(\overline{A} \cap B) + n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A})$

En la otra resolución, la secuencia se diferencia de la anterior por intercambiar el orden de la 1ª) y la 2ª) relación.

Finalmente, se obtiene la condicional por la que se pregunta mediante la regla de tres: n(chicos) es a n(chicos con gafas) como 100 es a x.

Hay que aclarar que en la resolución que mostramos como ejemplo, el estudiante escribe una expresión que podría tomarse por una relación cuaternaria (véase Figura 5.43, a continuación). Sin embargo, teniendo en cuenta la operación que aparece en disposición vertical junto a ella, nosotros la vemos descompuesta en dos relaciones ternarias: "100 - 282 = 718" por un lado y "718 - 368 = 350", por otro. Estas dos relaciones se corresponden con los pasos 2º) y 3º) de la descripción anterior.

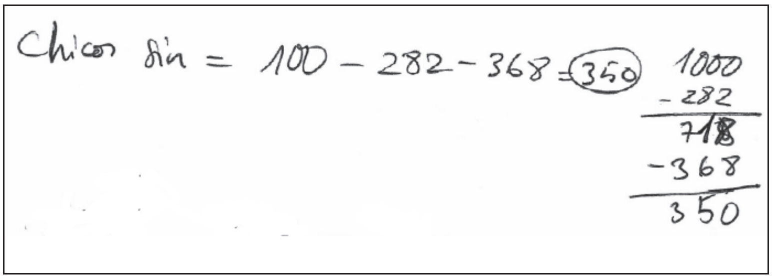


Figura 5.43. *Cálculo extraído de la resolución del Problema 2a en el Pre-test(F) realizada por el estudiante R.*

Estrategia de resolución. Caso 3.

Esta estrategia tiene la peculiaridad de usar una unión de sucesos, “chicas o estudiantes con gafas” aunque para su obtención no se aplican relaciones no ternarias, como ocurría en el caso 1 de las estrategias de resolución del primer problema. De nuevo, parece que el resolutor ve el espacio muestral dividido en cuatro subconjuntos disjuntos (las cuatro intersecciones), ya que sus primeros pasos van encaminados a disponer de las cuatro intersecciones, calculando las dos que faltan. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en el Problema 1, donde era una estrategia mayoritaria, esta forma de proceder ha sido observada en una única resolución, la del estudiante V. en el Pre-test(F), que se muestra en la Figura 5.46 (p. 240).

La secuencia de cantidades intermedias y relaciones aditivas usadas es la siguiente:

1º) $n(B) - n(A \cap B) = n(\overline{A} \cap B)$

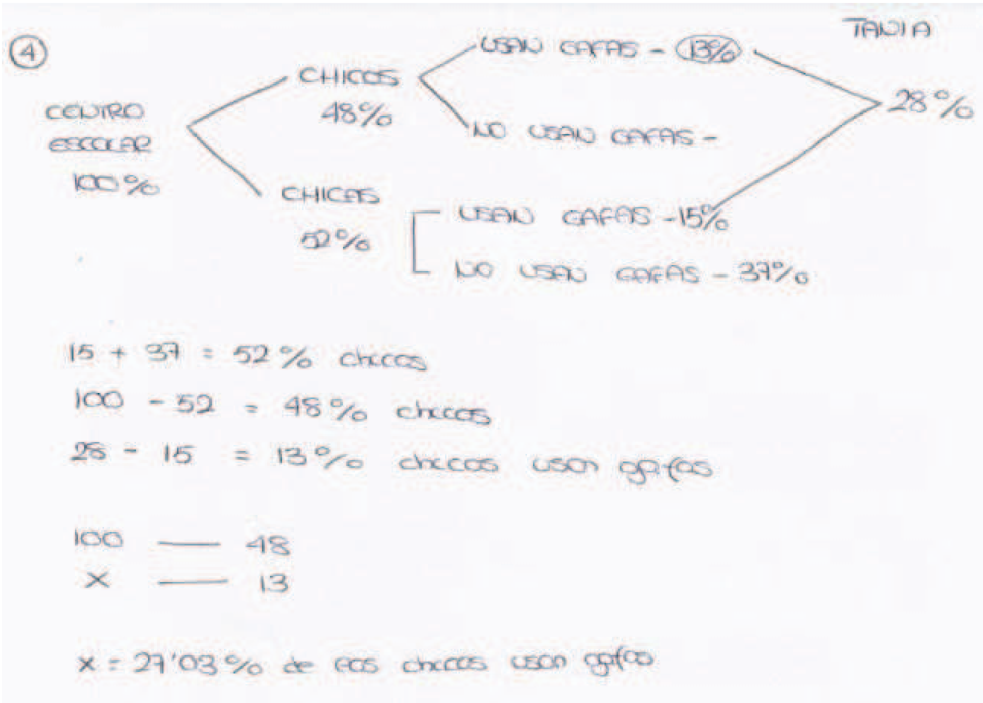
2º) $n(A \cap \overline{B}) + n(B) = n(A \cup B)$

3º) $N - n(A \cup B) = n(\overline{A} \cap \overline{B})$

4º) $n(\overline{A} \cap B) + n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A})$

Finalmente, se obtiene la condicional por la que se pregunta mediante la regla de tres: n($\overline{A}$) es a n($\overline{A} \cap B$) como 100 es a x.

T_P2a_%



G_T_P2a_%

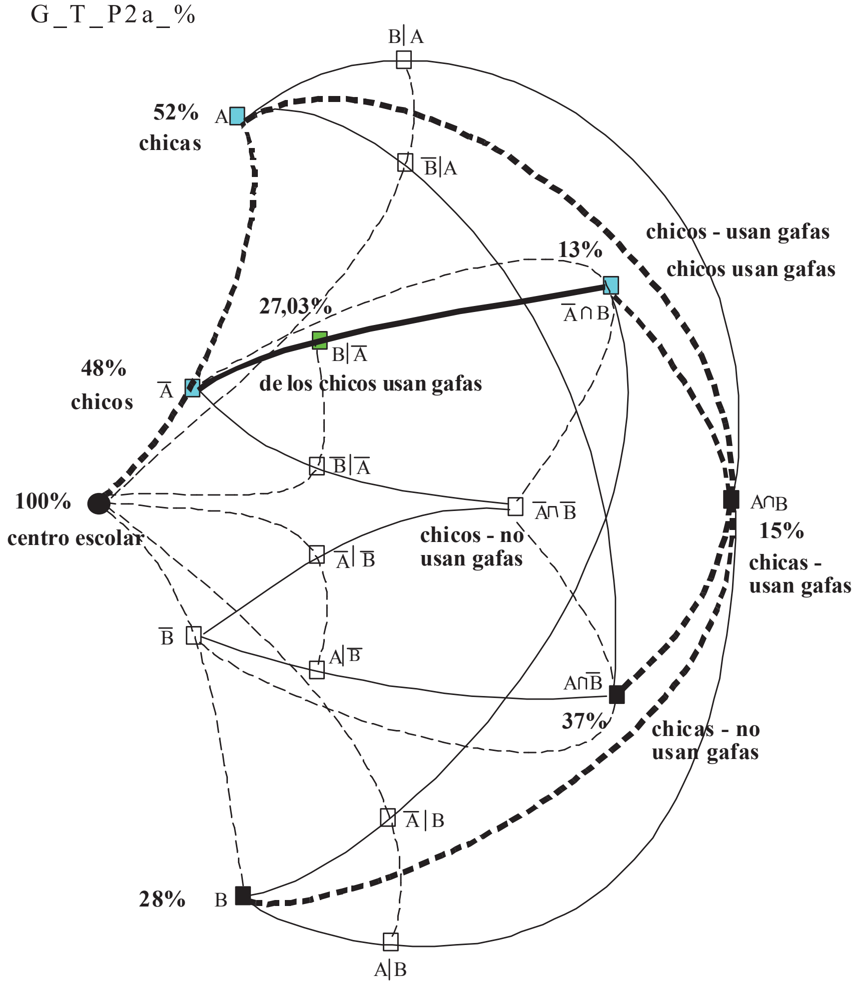


Figura 5.44. Resolución del Problema 2a en el Pre-test(%) realizada por la estudiante T. en la que se observa la estrategia de resolución definida como caso 1.

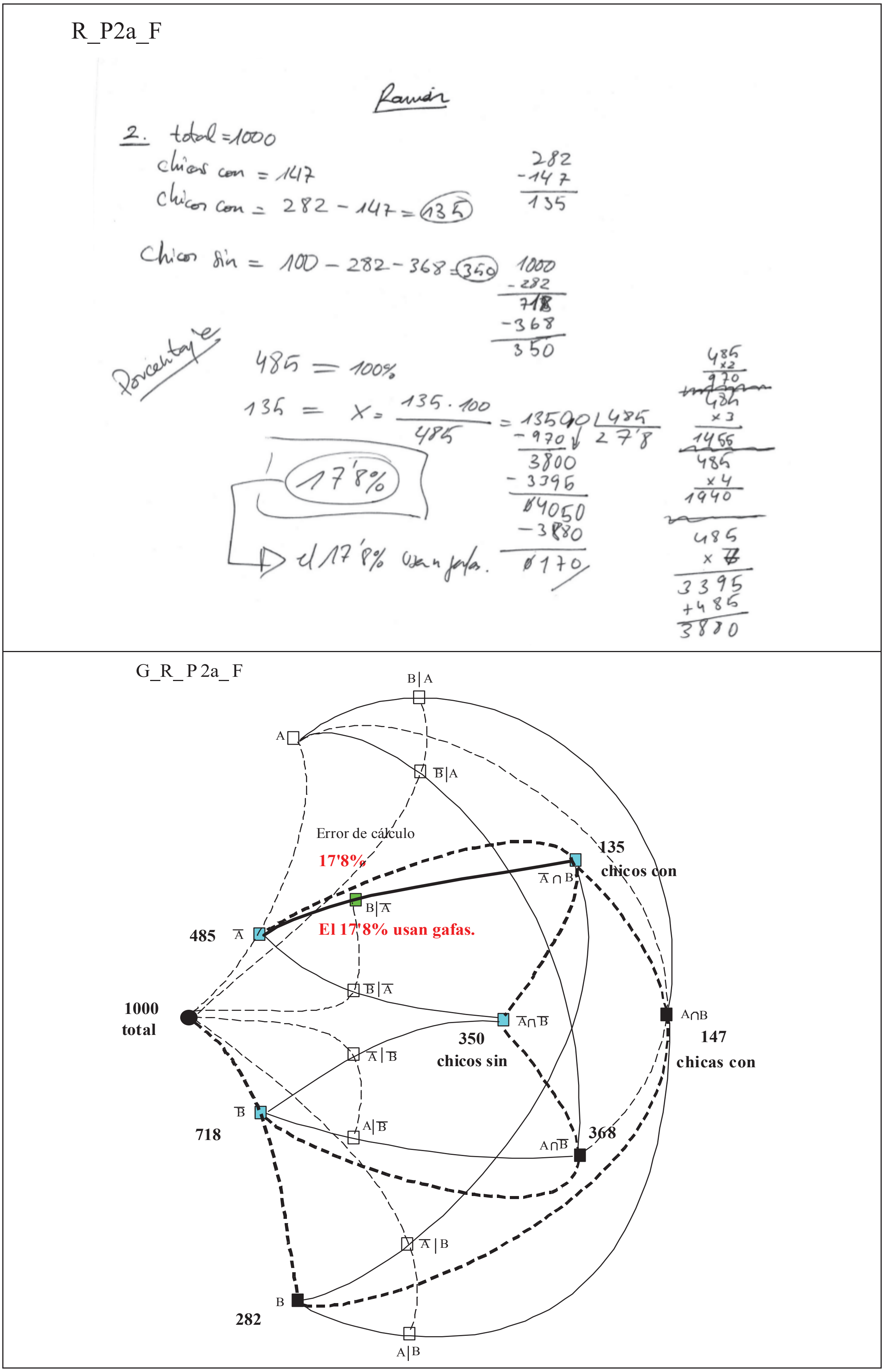


Figura 5.45. Resolución del Problema 2a en el Pre-test(F) realizada por el estudiante R. en la que se observa la estrategia de resolución definida como caso 2.

V_P2a_F


2

282 - 147 = 135 chicos con gafas.

~~1.000 - 147 - 135 - 368 = 205~~

282 + 368 = 650

1000 - 650 = 350 chicos sin gafas.

350 + 135 = 485 chicos.

485 100

135 x

$x = \frac{135 \cdot 100}{485} = \frac{13500}{485} = 29\%$

13500 | 485

4800 2989

435

El 29% de los chicos lleban gafas.

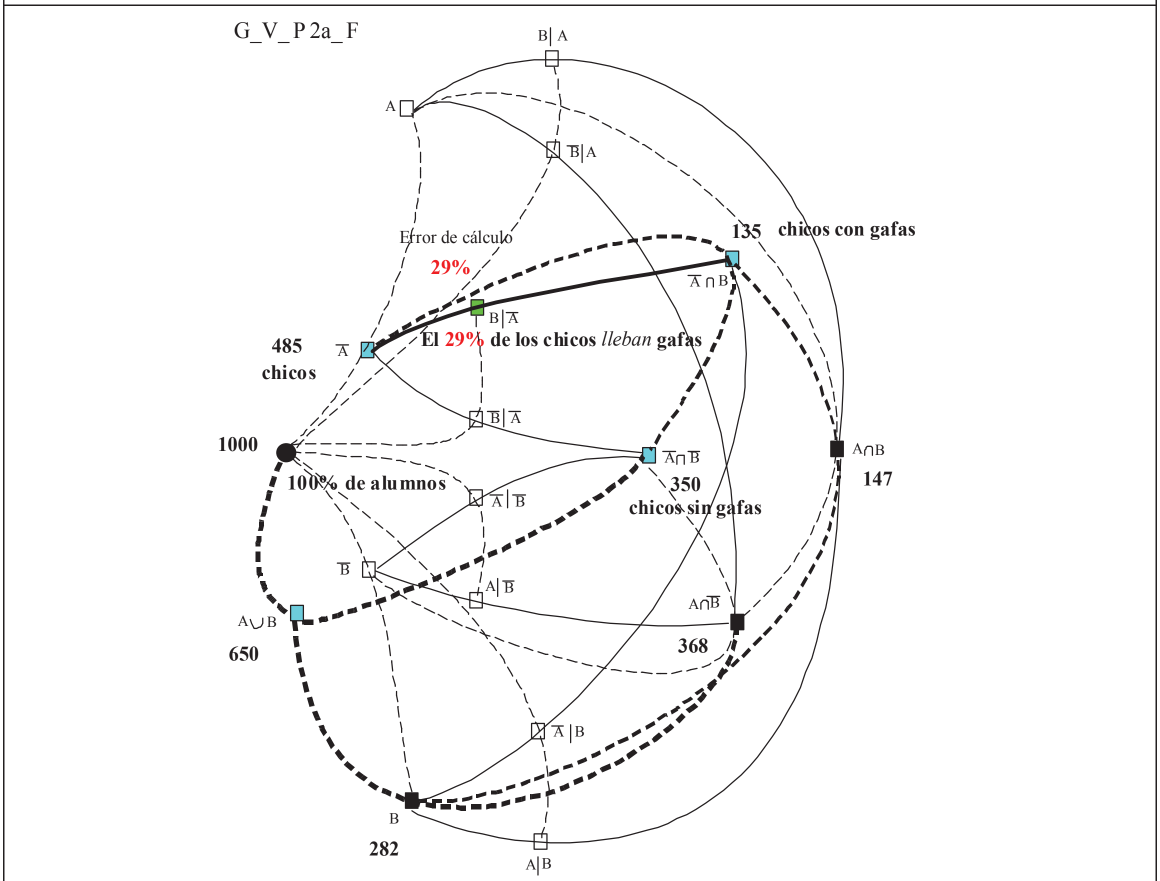


Figura 5.46. Resolución del Problema 2a en el Pre-test(F) realizada por el estudiante V., en la que se observa la estrategia de resolución definida como caso 3.

5.3.3.3 – Estrategias de resolución con éxito del "Problema 9".

Enunciado

En el Pre-test(F):

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. En total, se han curado 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

En el Pre-test(%):

Un conjunto de personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado un 53% de dichas personas. Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

Características del problema

Atendiendo a las variables de la tarea, es un problema de categoría C_1 formulado en el contexto que hemos denominado Estadístico Salud. Los datos numéricos conocidos son una marginal, una intersección directamente relacionada con la marginal y otra intersección que no está directamente relacionada con ninguno de los otros dos datos. La pregunta del problema es una condicional que no está directamente relacionada con ninguna de las dos intersecciones, pero en la que el suceso condicionante está relacionado con la primera de ellas y, el suceso condicionado, con la otra. Denotando por A al suceso "tratarse con el antibiótico" y por B al suceso "curarse", los datos conocidos son $n(B), n(A \cap B)\ y\ n(\overline{A} \cap \overline{B})$ y la pregunta del problema, $\%(\overline{B} \mid A)$.

Tan sólo hemos observado tres resoluciones con éxito para este problema, todas ellas con la misma estrategia de resolución, aunque dos de ellas contenían cantidades y relaciones superfluas[31].

[31] Cuando hablamos de cantidades y relaciones superfluas lo hacemos desde la perspectiva de la estructura mínima de cantidades y relaciones entre cantidades que son necesarias para resolver el problema y no desde la perspectiva del resolutor, que puede no considerarlas superfluas.

Estrategia de resolución. Caso único.

La secuencia de cantidades intermedias y relaciones aditivas usadas es la siguiente:

1º) $N - n(B) = n(\overline{B})$

2º) $n(\overline{B}) - n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(A \cap \overline{B})$

3º) $n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B}) = n(A)$

Finalmente, se obtiene la condicional por la que se pregunta mediante la regla de tres: n(A) es a n($A \cap \overline{B}$) como 100 es a x, donde x es el tanto por cien buscado.

En la Figura 5.47 (p. 243) mostramos un ejemplo de resolución con éxito del Problema 9 que usa esta estrategia.

5.3.3.4 – Estrategias de resolución con éxito del "Problema 10x2".

Enunciado

En el Pre-test(F):

Una población de 240 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 120 personas, 100 se han tratado con el antibiótico y 84 se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

En el Pre-test(%):

Una población sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado el 53% de las personas, un 42% se han tratado con el antibiótico y un 35% se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

C_P9_%

Problema 2:

Curado → 53%

Antibiótico → se ha curado el 35%

No antibiótico → no se han curado el 40%

¿% que no se ha curado con antibiótico?

~~53% → 100% de personas curadas~~

~~35% con antibiótico → X~~

~~$x = \frac{35 \cdot 100}{53} = 66\%$ personas con antibiótico curadas~~

~~53% → 100% de personas curadas~~

100 − 53 = 47% son personas no curadas.

~~47% → 100% de personas no curadas~~

Si de ese 47% de personas no curadas, el 40% no ha tomado antibiótico, el 7% restante sí lo ha tomado.

Si un 35% han tomado antibiótico y se han curado, y un 7% lo ha tomado, pero no se ha curado, un 42% ha tomado antibiótico.

42% → 100% de personas que han tomado antibiótico

7% → x

$x = \frac{7 \cdot 100}{42} = \boxed{16'7\%}$

G_C_P9_%

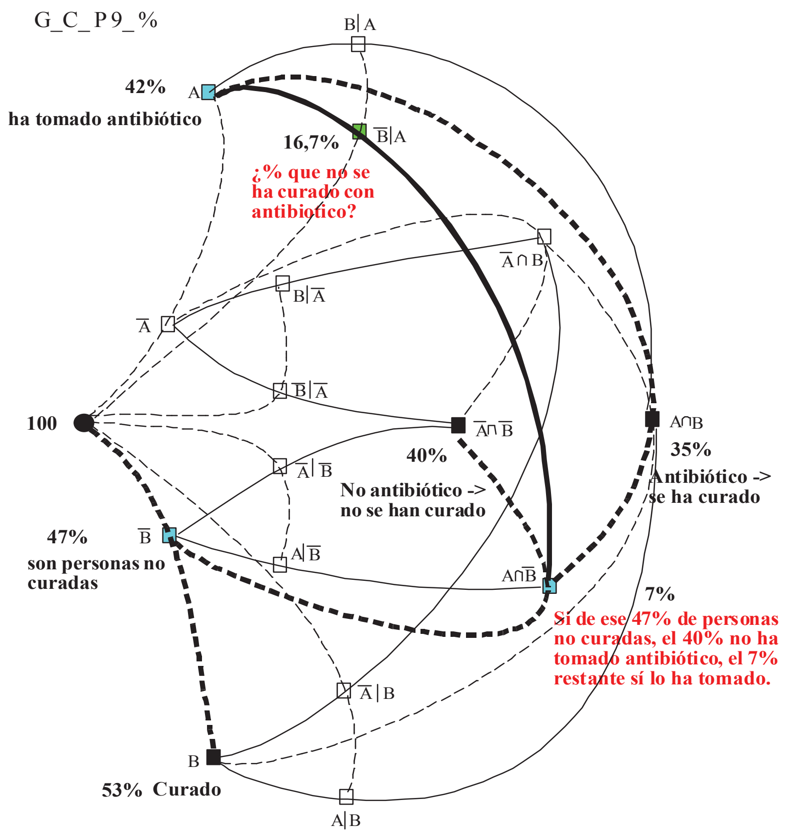


Figura 5.47. Resolución del Problema 9 en el Pre-test(%) realizada por la estudiante C. en la que se observa la única estrategia de resolución con éxito identificada en las resoluciones de los estudiantes para este problema.

Características del problema

Es un problema de categoría C_2 formulado en el contexto que hemos denominado Estadístico Salud. Los datos numéricos conocidos son dos marginales no complementarias y la intersección que está directamente relacionada con las dos. La pregunta del problema es una condicional que tiene por suceso condicionante el complementario de la primera de las marginales dadas, y por suceso condicionado a la otra marginal. Si denotamos por A al suceso "tratarse con el antibiótico" y por B al suceso "curarse", los datos conocidos son $n(B), n(A)\ y\ n(A \cap B)$ y la pregunta del problema, $\%(A \mid \overline{B})$.

Al igual que ocurría con el Problema 9, hemos observado tres resoluciones del Problema 10x2 con éxito. En las tres observamos la misma estrategia de resolución, encontrando cantidades intermedias superfluas en una de ellas.

Estrategia de resolución. Caso único.

La secuencia de cantidades intermedias y relaciones aditivas usadas es:

1º) $n(A) - n(A \cap B) = n(A \cap \overline{B})$

2º) $N - n(B) = n(\overline{B})$

Se halla la condicional por la que se pregunta mediante la regla de tres: n($\overline{B}$) es a n($A \cap \overline{B}$) como 100 es a x, donde x es la condicional buscada.

En la Figura 5.48 (p. 245) mostramos un ejemplo de resolución con éxito del Problema 10x2.

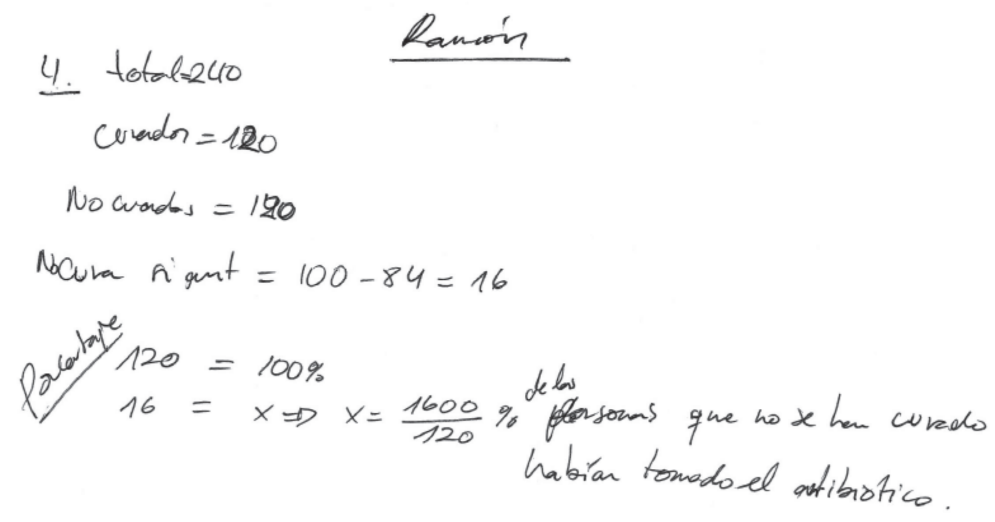
5.3.3.5 – Estrategias de resolución con éxito del "Problema 17".

Enunciado

En el Pre-test(F):

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿qué porcentaje el test da positivo?

R_P10x2_F



Ramón

4. total=240

Curados = 120

No curados = 120

NoCura si ant = 100 - 84 = 16

Porcentaje
120 = 100%
16 = x ⇒ x = 1600/120 % de las personas que no se han curado habían tomado el antibiótico.

G _ R _ P 10x2_ F

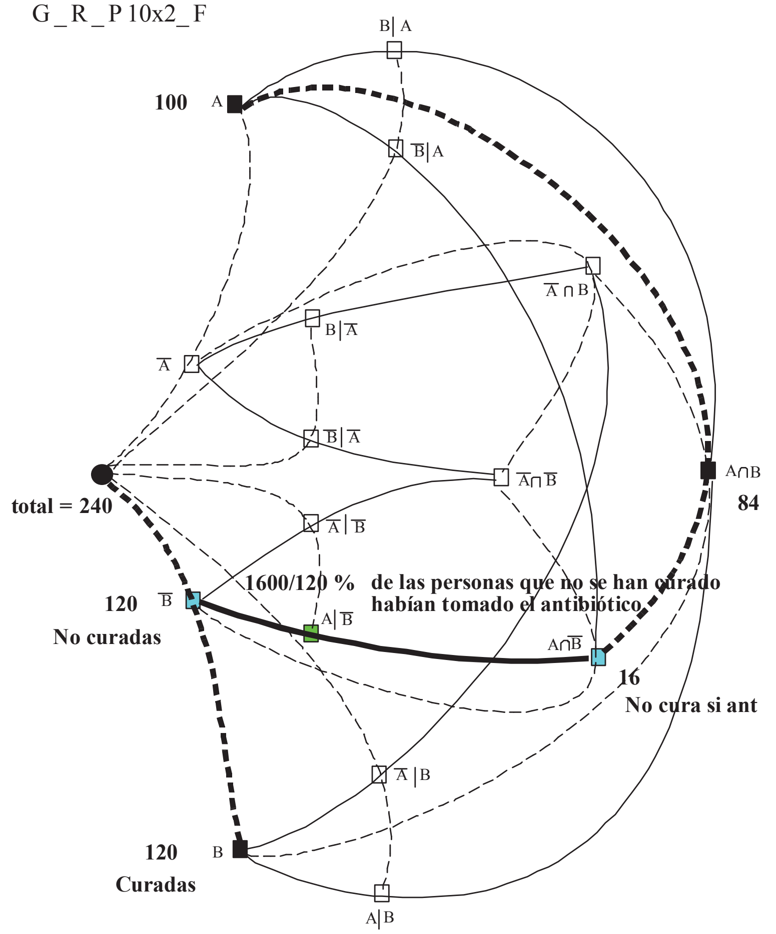


Figura 5.48. Resolución del Problema 10x2 en el Pre-test(F) realizada por el estudiante R. en la que se observa la única estrategia de resolución con éxito identificada en las resoluciones de los estudiantes para este problema.

En el Pre-test(%):

Una población con riesgo de padecer tuberculosis se somete a un test para averiguar si padecen tuberculosis o no. El test da positivo o negativo para la enfermedad en cualquier caso. Un 57% de las personas eran tuberculosas. Los resultados muestran que hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo. Además, los resultados mostraron que un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo. Entre las personas que no eran tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les dio positivo?

Características del problema

Se trata de un problema de categoría C_2 formulado en el contexto que hemos denominado Test de Diagnóstico en el área de la salud. Los datos numéricos conocidos son dos marginales no complementarias y una intersección, directamente relacionada sólo con la primera de las marginales. La pregunta del problema es una condicional en la que el suceso condicionante es el complementario del correspondiente a la primera marginal dada y el suceso condicionado se corresponde con la otra marginal. Si denotamos por A al suceso "estar enfermo" y por B al suceso "dar positivo en el test", los datos conocidos son $n(A), n(B)\ y\ n(A \cap \overline{B})$ y la pregunta del problema, $\%(B \mid \overline{A})$.

Hemos observado, también, tres resoluciones del Problema 17 con éxito, todas con la misma estrategia de resolución y conteniendo dos de ellas, cantidades intermedias y relaciones superfluas.

Estrategia de resolución. Caso único.

La secuencia de cantidades intermedias y relaciones aditivas observada es la siguiente:

1º) $n(A) - n(A \cap \overline{B}) = n(A \cap B)$

2º) $n(B) - n(A \cap B) = n(\overline{A} \cap B)$

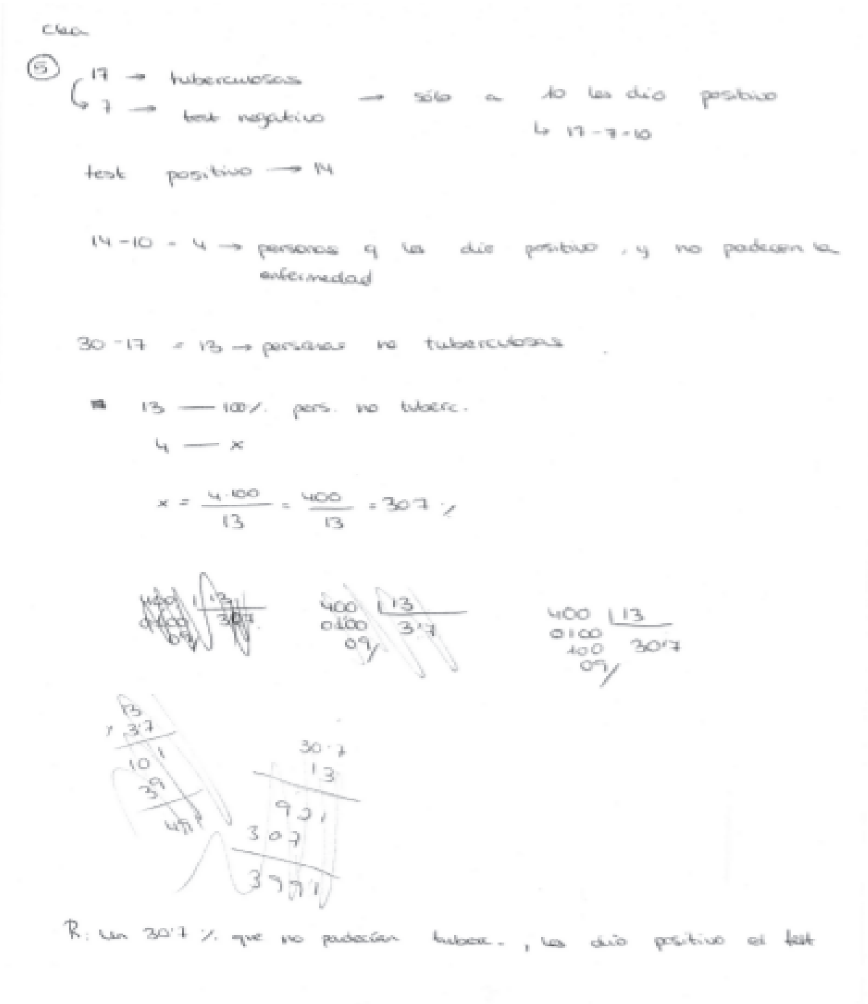
3º) $N - n(A) = n(\overline{A})$

Finalmente, se obtiene la condicional por la que se pregunta mediante la regla de tres: n($\overline{A}$) es a n($\overline{A} \cap B$) como 100 es a x, donde x es el tanto por cien buscado.

En la Figura 5.49 (p. 247) mostramos un ejemplo de resolución con éxito del Problema 17 en la que aparece esta estrategia.

Finalmente, debemos recordar que ningún estudiante ha conseguido resolver con éxito el Problema 18a ni en el Pre-test(F) ni en el Pre-test(%).

C_P17_F


Clea

(5) 17 → tuberculosas
7 → test negativo → sólo a 10 les dio positivo
↳ 17 - 7 = 10

test positivo → 14

14 - 10 = 4 → personas q les dio positivo, y no padecen la enfermedad

30 - 17 = 13 → personas no tuberculosas.

13 —— 100% pers. no tuberc.
4 —— x

$x = \frac{4 \cdot 100}{13} = \frac{400}{13} = 30'7\ \%$

400 | 13
0100 30'7
09

R: Un 30'7 % que no padecían tuber., les dio positivo el test

G_C_P17_F

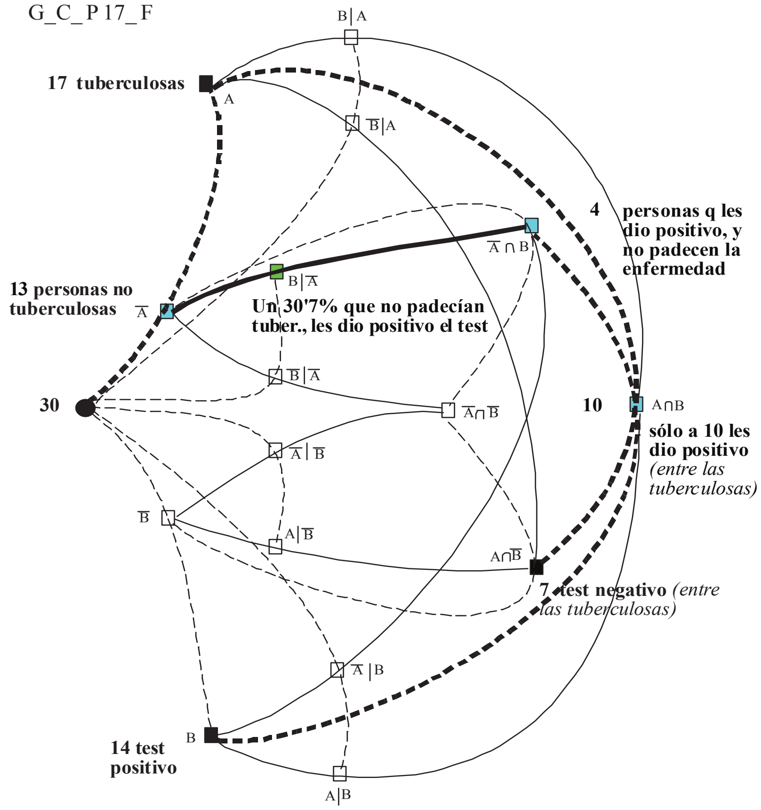


Figura 5.49. Resolución del Problema 17 en el Pre-test(F) realizada por la estudiante C.

5.3.4 – Errores. Identificación y clasificación.

En el apdo. 4.9.3.1.2.2 (p. 165) describimos lo que entendemos por error en esta tesis, así como la forma en que los errores quedan representados en el grafo de la resolución como consecuencia de la traducción de cada resolución escrita o filmada al lenguaje del grafo. Hicimos notar también dos aspectos que caracterizan el estudio de los errores en este trabajo: la distinción entre errores de cantidad y errores de relación y el hecho de que los tipos de error definidos pueden ponerse en relación con las fases en la resolución de problemas de N_0 (véanse Tablas 4.19 y 4.20, p. 167 y 168)

Mostraremos a continuación los diferentes errores de cada tipo que hemos observado en las resoluciones de los pre-test, recordando en cada caso cómo identificar estos errores en el grafo.

5.3.4.1 – Errores de cantidad.

Los errores de cantidad son, como su propio nombre indica, aquellos que se cometen en torno a una determinada cantidad. Recordemos que en esta tesis, por cantidad entendemos una terna formada por un número (el valor numérico de la cantidad), una componente verbal (la descripción de dicho número) y una tercera componente que hace referencia al formato de expresión del número. Así, todo error de cantidad afectará a una o varias de estas componentes.

Como ya adelantamos en la Tabla 4.19 (p. 167) del capítulo anterior, hemos clasificado este tipo de errores en cinco categorías:

- E1: Interpretación equivocada de una cantidad conocida, dada en el enunciado.
- E2: Uso de un mismo número para dos sucesos distintos, es decir, dos cantidades coinciden erróneamente en la componente numérica.
- E3: Uso de dos números diferentes para un mismo suceso, es decir, dos cantidades difieren en la componente numérica pero sus respectivas componentes verbales son equivalentes.
- E4: Discordancia entre las componentes numérica y verbal de una cantidad, por error de expresión.
- E5: Dar como resultado una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta.

Veamos, con ejemplos, en qué consiste cada uno de estos errores.

5.3.4.1.1 – E1: Errores de interpretación.

Los errores de interpretación tienen que ver con la lectura que el estudiante hace de la información proporcionada en el enunciado. Así, decimos que el resolutor ha cometido un error de interpretación cuando consideramos que ha interpretado de manera incorrecta alguna de las cantidades conocidas dadas en el enunciado[32]. En el grafo de la resolución, este tipo de error se representa obscureciendo en rojo el vértice al que se le asigna la cantidad interpretada erróneamente y, también, la componente x de dicha cantidad.

Los errores de interpretación que hemos identificado en las resoluciones son de cuatro tipos:

- E1.1: Interpreta una marginal como si fuera una intersección.
- E1.2: Interpreta una intersección como si fuera una condicional.
- E1.3: Interpreta una intersección como si fuera otra intersección.
- E1.4: Interpreta una intersección como si fuera una marginal.
- E1.5: Interpreta una intersección como si fuera otra cantidad, que no tiene sentido en el contexto del problema.

E1.1: Interpretación de una marginal como si fuera una intersección.

Hemos observado este error, por ejemplo, en la resolución del Problema 18a del Pre-test(%) realizada por el estudiante V.

Recordemos el enunciado del problema:

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El 95% de las piezas eran correctas, el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo y el 4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

El estudiante comete un error en la interpretación de la marginal *"el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo"*, ya que no la interpreta como tal sino como la intersección "piezas correctas calificadas como correctas".

[32] En esta tesis, cuando hablamos de errores de interpretación nos referimos a errores en la interpretación de los datos conocidos y no de la pregunta del problema. La forma en que el estudiante interpreta la pregunta del problema puede empezar a deducirse de la forma en que representa esta cantidad en la organización de la información del enunciado. Sin embargo, lo más frecuente es que la pregunta del problema no aparezca en dicha organización, por lo que en esos casos el mejor indicador de la interpretación que el estudiante hace de ella es la cantidad que da como resultado. Por este motivo, en esta tesis hemos preferido no hablar de interpretaciones equivocadas de la pregunta del problema sino del error de responder a la pregunta con una cantidad distinta de la condicional preguntada, tanto si se debe a un error de interpretación de la pregunta o a otra causa.

Se deduce, en primer lugar, de la descripción del número 77% y de su posición en el árbol con el que el estudiante organiza la información, pues se sitúa al final de la flecha que parte del extremo superior de la cantidad "95% correcta", lo cual indica que el estudiante ve relación de inclusión entre los conjuntos de referencia de ambas cantidades (véase Figura 5.50).

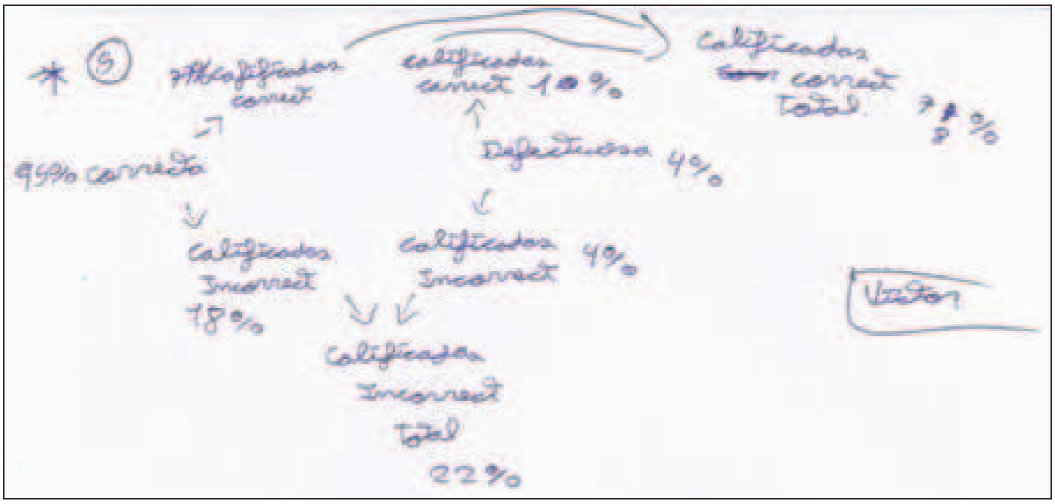


Figura 5.50.

Se confirma en el uso de la cantidad para el cálculo de las piezas correctas calificadas como defectuosas (resta las piezas correctas calificadas de correctas del total de piezas correctas) como se aprecia en la Figura 5.51.

Figura 5.51.

Y por último, es usado con ese significado equivocado en la regla de tres mediante la que se calcula el porcentaje pedido y en la que se establece la siguiente proporción: el tanto por cien de piezas calificadas como correctas es a el tanto por cien de piezas correctas calificadas de correctas como 100 es a x (véase Figura 5.52):

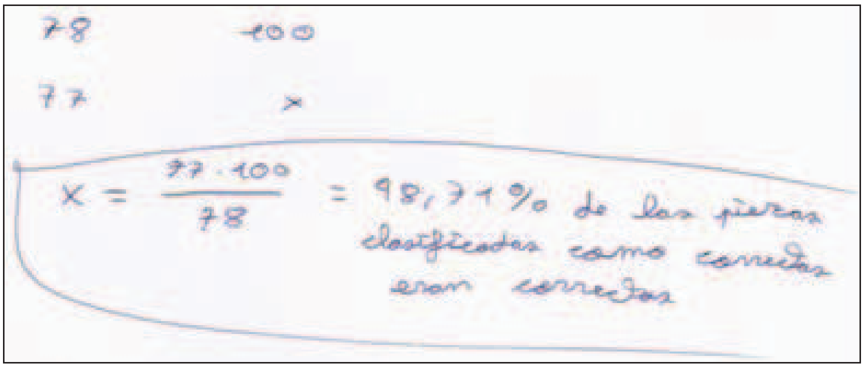


Figura 5.52.

La Tabla 5.12 resume todos los casos en los que se ha localizado un error de este tipo.

Interpreta la marginal …	… como si se tratara de la intersección …	Resoluciones
"282 estudiantes que usan gafas"	chicos con gafas	H_P2a_F
"100 se han tratado con el antibiótico"	tratados y no curados	L_P10x2_F
"había 14 personas a las que el test les resultó positivo"	tuberculosas positivas	AyM_P17_F(1)
"77 piezas fueron calificadas como correctas por el dispositivo" / "el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo"	piezas correctas calificadas como correctas	AyM_P18a_F
		T_P18a_%
		V_P18a_%

Tabla 5.12. Errores de tipo E1.1 identificados en los pre-test.

E1.2: Interpretación de una intersección como si fuera una condicional.

Encontramos un ejemplo de este error en la resolución del Problema 9 del Pre-test(%), realizada por la estudiante L.

El enunciado del problema dice:

Un conjunto de personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado un 53% de dichas personas. Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

La estudiante L. interpreta la intersección *"Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado"* como si fuera la condicional "el 35% de las personas tratadas con antibiótico, se ha curado" y la intersección *"un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado"* como si fuera la condicional "el 40% de las personas que no se han tratado con el antibiótico, no se han curado".

Llegamos a esta conclusión a partir del árbol construido para organizar la información junto a los cálculos en los que se usan las dos cantidades en cuestión (véase Figura 5.53).

Las cantidades "*35% curadas*" y "*65% no*", cuyas ramas en el árbol parten de la cantidad *"Tratadas con antibiótico (100%)"* son complementarias respecto del 100%, lo que atiende a la relación de complementariedad entre condicionales:

$$1 - P(\text{curada} \mid \text{tratada}) = P(\text{no} \mid \text{tratada})$$

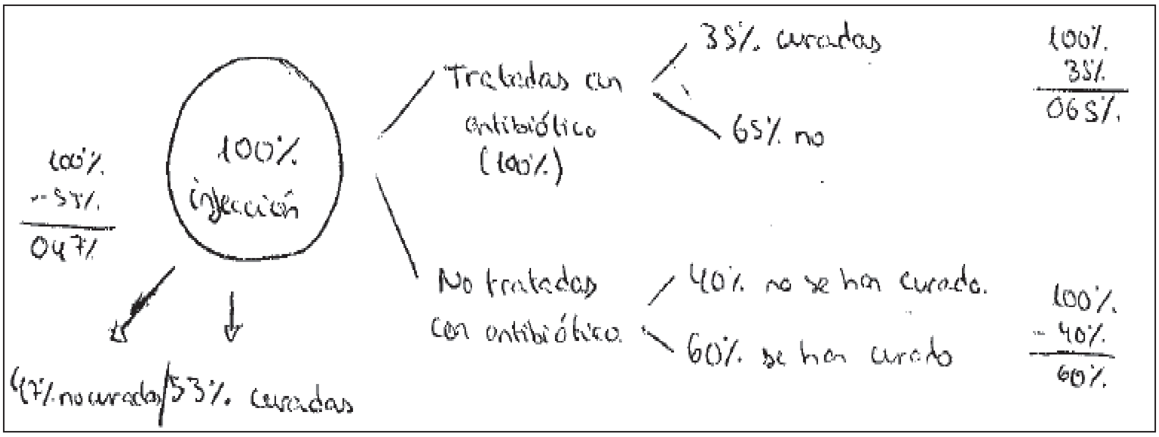


Figura 5.53.

Lo mismo ocurre con las cantidades *"40% no se han curado"* y *"60% se han curado"*, cuyas ramas en el árbol salen de la cantidad *"No tratadas con antibiótico"* y que han sido obtenidas haciendo uso de la relación:

$$1 - P(\text{no curada} \mid \text{no tratada}) = P(\text{curada} \mid \text{no tratada})$$

La interpretación anterior se confirma con la descripción que hace la estudiante del número 65%, que se corresponde claramente con una condicional (véase Figura 5.54).

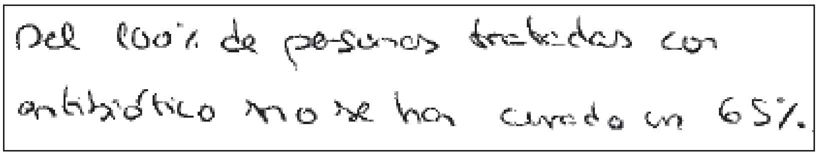


Figura 5.54.

La Tabla 5.13 resume los casos en los que se ha observado este tipo de error.

Interpreta la intersección …	**… como si se tratara de la condicional …**	**Resoluciones**
"un 15% de chicas que las usan"	un 15% de los que usan gafas, son chicas	A_P2a_%
"un 37% de chicas que no las usan"	un 37% de los que no usan gafas, son chicas	
"un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado"	el 35% de las personas tratadas con antibiótico, se ha curado	L_P9_%
"un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado"	el 40% de las personas que no se han tratado con el antibiótico, no se han curado	
"un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo"	el 23% de las personas tuberculosas dieron negativo en el test	A_P17_%

Tabla 5.13. Errores de tipo E1.2 identificados en los pre-test.

E1.3: Interpreta una intersección como si fuera otra intersección.

Hemos observado este error en una resolución del Problema 17 y dos resoluciones del Problema 18a. Veamos como ejemplo lo que ocurre en la resolución del Problema 18a, llevada a cabo por la estudiante M. en el Pre-test(%), cuyo enunciado repetimos a continuación:

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El 95% de las piezas eran correctas, el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo y el 4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

La estudiante interpreta la información *"4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó de defectuosas"* como si se tratara de la intersección "piezas defectuosas calificadas de correctas", lo cual se aprecia claramente en la forma en que organiza los datos conocidos. En la Figura 5.55 vemos cómo M. describe el número 4% con la expresión "de ellas no lo eran". Por la flecha que sale del tanto por cien de piezas calificadas como correctas, entendemos que "de ellas" hace referencia a las piezas calificadas como correctas, y por otra parte, consideramos que "no lo eran" significa que no eran correctas (no eran aquello de lo que habían sido calificadas).

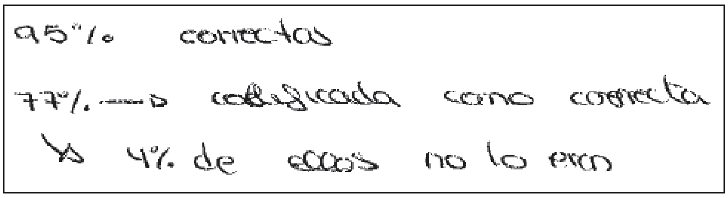


Figura 5.55.

Por último, el uso confirma esta interpretación, pues como se observa en la Figura 5.56, la estudiante resta las piezas defectuosas calificadas de correctas del total de piezas calificadas de correctas, obteniendo lo que serían las piezas correctas calificadas de correctas.

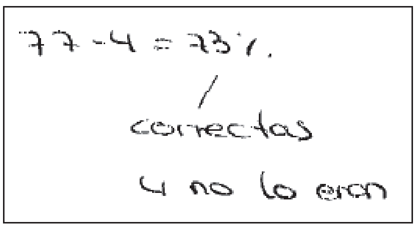


Figura 5.56.

La Tabla 5.14 resume los tres casos en los que se ha observado el error.

Interpreta la intersección …	… como si se tratara de la intersección …	Resoluciones
"a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo"	no tuberculosos negativos	AyM_P17_F(1)
" 4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas" / "4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó de defectuosas"	piezas defectuosas calificadas de correctas	L_P18a_F
		M_P18a_%

Tabla 5.14. Errores de tipo E1.3 identificados en los pre-test.

E1.4: Interpreta una intersección como si fuera una marginal.

Este es el error de interpretación más frecuente. Al igual que el anterior, aparece exclusivamente en resoluciones de los problemas P17 y P18a.

Recordemos, de nuevo, el enunciado del Problema 17 en el Pre-test(F):

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿qué porcentaje el test da positivo?

En la resolución filmada del Problema 17, realizada por A. y M., las estudiantes interpretan la intersección "a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo" como si se tratara de la marginal *personas con resultado negativo en el test*. En el protocolo escrito encontramos el error entre los ítems {33} y {37}:

{33} A.: El test…

(A. recuadra la palabra "test" que aparece junto a "30 pers")

{34} M.: Claro. (Pausa) Mira.

(A. saca dos ramas a partir de la palabra test)

{35} A.: Catorce te dice que dieron positivo.

(En una rama escribe "14 +")

{36} M.: Y siete dieron negativo.

{37} A.: Y siete dieron negativo.

(A. escribe en la otra rama "7 -")

En cuanto al error en el Problema 18a, aparece en ocho resoluciones y se da siempre en relación a la misma cantidad: la intersección dada en el enunciado como “4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas” en el Pre-test(F) y como “4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas” en el Pre-test(%).

Unas veces es interpretada como la marginal “piezas defectuosas”, como es el caso del estudiante H., en el Pre-test(%), que describe el número 4% de esta manera (Figura 5.57)

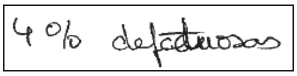


Figura 5.57.

Otras veces es interpretada como la otra marginal directamente relacionada con la intersección, “piezas calificadas de defectuosas”. Por ejemplo, en la resolución llevada a cabo por C. también en el Pre-test(%), donde el número es descrito como se observa en la Figura 5.58.

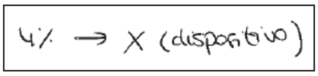


Figura 5.58.

Por último, en algunas resoluciones el número 4 es asignado simultáneamente a las dos marginales directamente relacionadas con la intersección, lo cual constituye también un error de tipo E2, que luego describiremos. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, en la resolución realizada por el estudiante V. en el Pre-test(F), donde encontramos el árbol que se muestra en la Figura 5.59. En dicho árbol interpretamos la letra *c* como abreviatura de *correctas*, la letra *d* como abreviatura de *defectuosas*, las letras *cc* como abreviatura de *calificadas de correctas* y las letras *cd* como abreviatura de *calificadas de defectuosas*. En ese caso, el estudiante estaría asignando el número 4 tanto a la marginal “piezas defectuosas” como a la marginal “piezas calificadas de defectuosas”.

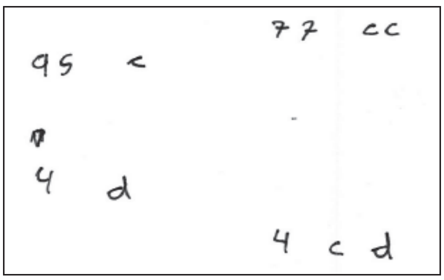


Figura 5.59.

En la Tabla 5.15 se resumen todos los casos observados para este error.

Interpreta la intersección …	… como si se tratara de la marginal …	Resoluciones
"a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo"	negativos	AyM_P17_F(2)
"4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas" / "4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas"	piezas defectuosas	C_P18a_F
		C_P18a_%
	piezas calificadas de defectuosas	AyM_P18a_F
		H_P18a_%
		L_P18a_%
	- piezas defectuosas - piezas calificadas defectuosas	V_P18a_F
		B_P18a_F
		B_P18a_%

Tabla 5.15. Errores de tipo E1.4 identificados en los pre-test.

E1.5: Interpreta una intersección como si fuera otra cantidad, que no tiene sentido en el contexto del problema.

En la resolución filmada del Problema 17, las estudiantes A. y M. interpretan la información "a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo" como si se tratara de la cantidad "personas que eran tuberculosas y ya no lo son", que no tiene sentido en el contexto del problema y no pertenece a la estructura teórica de cantidades representada en el grafo.

El error se observa entre los ítems {191} y {207} del protocolo escrito:

{191} M.: Espérate. Siete personas que eran tuberculosas.

(M y A miran ambas el enunciado)

{192} M.: Que eran tuberculosas, aunque el test haya dicho que es negativo.

{193} A.: Esto quiere decir que se han curado ¿no?

{194} M.: Claro.

{195} A.: Siete personas…

{196} M.: Sí…

{197} A.: … eran tuberculosas y el test les resultó negativo.

{198} M.: …que eran…

{199} A.: Claro, tía. Eso quiere decir que ya no son tuberculosas. (Pausa) ¡No fastidies!

{200} M.: A lo mejor es que…

{201} A.: Es que si es eran, es pasado.

{202} M.: Vale.

{203} A.: Eran tuberculosas

{204} M.: Y les dio negativo. Eso quiere decir que siete personas ...

{205} A.: Siete personas (A escribe "7")

{206} M.: ... no son tuberculosas. Lo eran pero ya no son.

{207} A.: Lo eran pero ya no.

(A escribe junto al 7, "lo eran pero ya no")

De lo anterior deducimos que la estudiante A. otorga una fiabilidad del cien por cien al diagnóstico del test. Así, ante la información "a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo" la estudiante no deduce que el test haya producido falsos negativos sino que esas personas se han curado, es decir, que padecían de tuberculosis en algún momento pero cuando se realizaron el test ya no padecían la enfermedad. Y apoya este razonamiento basándose en la forma verbal "eran" (ítem {201}).

5.3.4.1.2 – E2: Uso de un mismo número para dos sucesos distintos.

Este tipo de error consiste en la asignación errónea de un mismo número a dos cantidades distintas, con lo que estas dos cantidades coinciden erróneamente en su componente numérica, siendo diferentes sus componentes verbales. El número duplicado a veces se corresponde con una de las dos cantidades asignadas y, otras veces, con ninguna de las dos. Por otra parte, unas veces se trata de un número dado en el enunciado y otras, de una cantidad intermedia. Hay que señalar también que este error suele aparecer asociado a otros errores. Por ejemplo, cuando el número que ha sido doblemente asignado es un dato proporcionado en el enunciado, se estará cometiendo un error de interpretación, como mínimo, respecto a una de las dos cantidades a la que es asignado el número. En el grafo dicho número aparece junto a dos vértices distintos y al menos uno de éstos es rojo.

Según el tipo de cantidades implicadas (marginales, intersecciones o condicionales), hemos observado tres modalidades de este error:

- E2.1: Marginal e intersección directamente relacionadas comparten componente numérica por error.
- E2.2: Dos marginales comparten componente numérica por error.
- E2.3: Condicional e intersección directamente relacionada comparten componente numérica por error.

E2.1: Marginal e intersección directamente relacionadas comparten componente numérica por error.

Es el error cometido, por ejemplo, por la estudiante B. en el Problema 9 del Pre-test(F), cuyo enunciado recordamos a continuación:

> *Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. En total, se han curado 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?*

Cuando organiza la información del enunciado, la estudiante describe el dato "*48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado*" usando dibujos, tal y como se aprecia en la Figura 5.60.

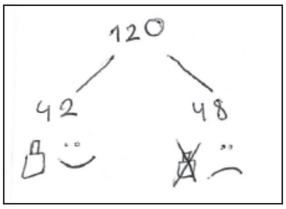


Figura 5.60.

Podemos asumir, sin demasiadas dudas, que el dibujo  representa "no tratadas" y el dibujo  representa "no curadas", y que ambos signos juntos hacen referencia a la intersección de dichos sucesos, con lo cual la interpretación de la cantidad por parte de la estudiante sería la correcta.

A continuación, usa la cantidad en la relación aditiva que se muestra en la Figura 5.61.

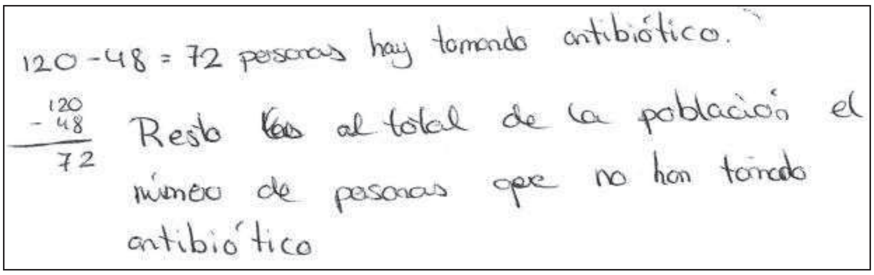


Figura 5.61.

Y en la justificación que hace de la operación, se refiere al número 48 simplemente como "personas que no han tomado antibiótico". Además, este es el significado con el que la relación cobraría sentido: el número total de personas en la población menos el número de personas no tratadas con el antibiótico es igual al número de personas tratadas con el antibiótico. Sin embargo, el resultado de esta operación no es usado en ningún momento y, en cambio, el número 48 sí es usado de nuevo en la relación que aparece en la Figura 5.62.

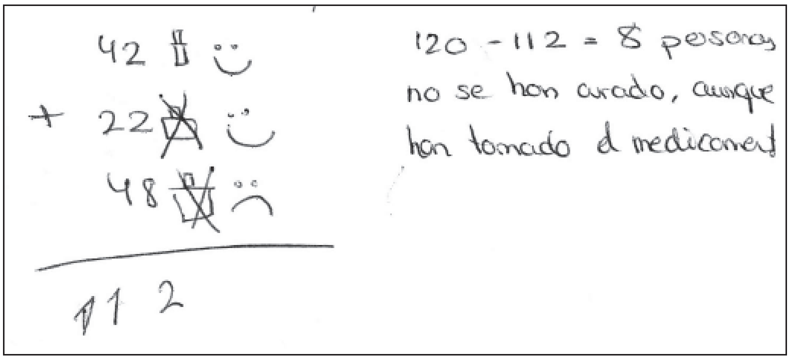


Figura 5.62.

En este caso, el uso y la descripción del número confirman la interpretación correcta de la cantidad que ya se reflejaba en la organización de la información.

Por tanto, basándonos en las descripciones y los usos del número 48 a lo largo de la resolución consideramos que la estudiante ha cometido el error de asociar un mismo número, el 48, a dos cantidades diferentes: la intersección *personas no tratadas y no curadas* y la marginal *personas no tratadas*; si bien, el error de asociar el número 48 a la marginal *personas no tratadas* no ha tenido repercusión alguna en el resto de la resolución.

Los casos en los que se ha observado este tipo de error están recogidos en la Tabla 5.16.

Asigna la componente numérica de …	… a las cantidades…	Resoluciones
“48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado”	- personas no tratadas - personas no tratadas y no curadas	B_P9_F
“hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo”	- positivas - tuberculosas positivas	C_P17_%
“4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas”	- piezas defectuosas - piezas defectuosas calificadas de defectuosas	V_P18a_%

Tabla 5.16. Errores de tipo E2.1 identificados en los pre-test.

E2.2: Dos marginales comparten componente numérica por error.

En la Tabla 5.17 aparece un resumen de todos los casos en los que se ha observado este tipo de error y para ilustrarlo, tomaremos como ejemplo la resolución del Problema 18a del Pre-test(%) realizada por la estudiante B., que mostramos en la Figura 5.63. A partir de la información “4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas", la estudiante asigna el número 4% a dos marginales: "piezas defectuosas" y "piezas calificadas de defectuosas por el dispositivo". El error se observa en la representación de la información, donde distingue entre lo que ocurre en *realidad* (las piezas son correctas o defectuosas) y lo que el *dispositivo* indica (si son calificadas de correctas o defectuosas). Vemos que el 4% aparece en las dos columnas: representa tanto el porcentaje de piezas defectuosas que existen (en *realidad*) como el porcentaje de piezas (sobre el total de la muestra) que el dispositivo califica de defectuosas. Por tanto, estamos ante un caso en el que ninguna de las dos cantidades a las que se les asigna el mismo número, es la que correspondería a dicho número (piezas defectuosas calificadas de defectuosas). El error viene asociado a un error de interpretación de la intersección, dando lugar a dos marginales.

Enunciado: Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El 95% de las piezas eran correctas, el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo y el 4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

Problema 5

Realidad
95% → correctas
4% → defectuosas

Dispositivo
77% correctas
4% defectuosas

Del porcentaje de correctas clasificadas por el dispositivo, el 100% son correctas, ya que si en realidad son 95% corectas y él solo recoge el 77% son todas.

Figura 5.63.

<table>
<tr><th>Asigna la componente x (el número) de …</th><th>… a las cantidades…</th><th>Resoluciones</th></tr>
<tr><td>"En total, se han curado 64 personas"</td><td>- curadas
- tratadas</td><td>AyM_P9_F</td></tr>
<tr><td>13 personas no tuberculosas</td><td>- personas no tuberculosas
- personas tuberculosas</td><td>L_P17_F</td></tr>
<tr><td rowspan="2">"4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas"</td><td rowspan="3">- piezas defectuosas
- piezas calificadas de defectuosas</td><td>B_P18a_F</td></tr>
<tr><td>V_P18a_F</td></tr>
<tr><td>"4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas"</td><td>B_P18a_%</td></tr>
</table>

Tabla 5.17. Errores de tipo E2.2 identificados en los pre-test.

E2.3: Condicional e intersección directamente relacionadas comparten componente numérica por error.

Hemos encontrado tres resoluciones que contienen este error: la del Problema 17 del Pre-test(%) realizada por la estudiante A. y las resoluciones del Problema 10x2 del Pre-test(%) realizadas por las estudiantes C. y L. (véase Tabla 5.18).

Como ejemplo, tomaremos el caso de la estudiante C., cuya resolución completa se muestra más adelante, junto al enunciado del problema, en la Figura 5.66.

En esta resolución, consideramos que el número 16,7% es, por construcción, la componente numérica de una cantidad intermedia: la condicional “no curadas, entre las tratadas”. Pero el número aparece descrito de manera ambigua (Figura 5.64).

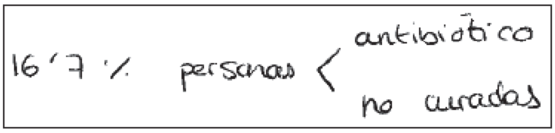


Figura 5.64.

Esta descripción bien podría corresponderse con la de la intersección directamente relacionada con dicha condicional: “tratadas y no curadas”. Sin embargo, a la hora de resolver la discordancia, nos hemos decantado por considerar que el error está en la descripción. Por un lado, porque la descripción presenta cierta ambigüedad (no es claramente la descripción de una intersección). Por otro lado, el número está bien construido, es decir, el considerarlo como componente numérica de la condicional “no curadas, entre las tratadas” hace correcta la relación de la que se obtiene (Figura 5.65), donde 83,3 es, por construcción, la condicional complementaria “curadas, entre las tratadas”.

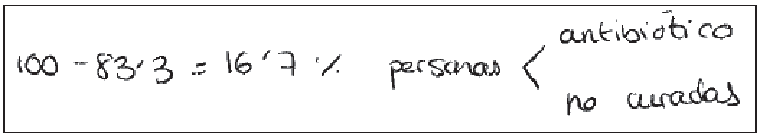


Figura 5.65.

Por tanto, llegamos a la conclusión de que la estudiante interpreta el número 16,7% como la condicional antes mencionada y que comete un error al describirlo. Sin embargo, lo usa posteriormente como si se tratara de la componente numérica de la intersección “tratadas y no curadas”. Por ese motivo, consideramos que reinterpreta el número (quizás como consecuencia de la ambigüedad de la descripción), asociándolo esta vez a dicha intersección.

Enunciado: Una población sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado el 53% de las personas, un 42% se han tratado con el antibiótico y un 35% se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

53% → curadas
42% → antibiótico
35% → " " y curado

100 − 53 = 47% personas no curadas.

42% → 100% personas con antibiótico
35% → x

$x = \frac{3500}{42} = 83'3\%$ personas $\left\langle \begin{array}{l} \text{antibiótico} \\ \text{curadas} \end{array} \right.$

$100 - 83'3 = 16'7\%$ personas $\left\langle \begin{array}{l} \text{antibiótico} \\ \text{no curadas} \end{array} \right.$

47% → 100% personas no curadas
16'7% personas $\left\langle \begin{array}{l} \text{antibiótico} \\ \text{no curadas} \end{array} \right.$ → x

$x = \frac{16'7 \cdot 100}{47} = 35\%$ personas tratadas con $\left\langle \begin{array}{l} \text{antibiótico} \\ \text{no curadas} \end{array} \right.$

Figura 5.66. Resolución del Problema 10x2 del Pre-test(%) realizada por la estudiante C.

Asigna la componente x (el número) de …	**… a las cantidades…**	**Resoluciones**
16,6% no curados, entre los tratados	- no curados, entre los tratados - tratados y no curados	C_P10x2_% L_P10x2_%
23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo	- tuberculosas y con test negativo - personas con test negativo, entre las tuberculosas	A_P17_%

Tabla 5.18. Errores de tipo E2.3 identificados en los pre-test.

5.3.4.1.3 – E3: Uso de dos números diferentes para un mismo suceso, es decir, dos cantidades difieren en la componente numérica pero sus respectivas componentes verbales son equivalentes.

El error de asignar dos números distintos a un mismo suceso aparece en dos ocasiones: la resolución filmada del Problema 17 del Pre-test(F) y la resolución del mismo problema en el Pre-test(%), llevada a cabo por la estudiante A. En la resolución filmada, las estudiantes asignan los números 3 y 7 a la misma intersección, personas tuberculosas con resultado negativo en el test (véase el grafo G_AyM_P17_F en el Anexo 16, p. 547, correspondiente a los ítems {244}-{288} del protocolo escrito de la resolución, que puede consultarse en el Anexo 22, p. 607)

El número 7 es la componente numérica que concuerda con el suceso en cuestión y es un dato que aparece en el enunciado y que las estudiantes interpretan correctamente.

El número 3, en cambio, es asignado a ese mismo suceso como consecuencia del uso de una relación falsa entre cantidades, a saber:

"16 personas con resultado negativo en el test" $-$ "13 personas no tuberculosas" $=$ "3 personas tuberculosas con resultado negativo en el test"

Y a su vez, el uso de esta relación tiene su origen en un error conceptual ligado al contexto: todas las personas no tuberculosas dan negativo en el test. Bajo esta premisa, si restamos el número de personas no tuberculosas del total de personas con resultado negativo, obtenemos las personas tuberculosas que existen, entre las que han obtenido un resultado negativo en el test. El hecho de que el número de personas tuberculosas con resultado negativo sea un dato conocido del problema no impide que las estudiantes describan el resultado de este cálculo de la misma manera.

En el grafo G_AyM_F_P17(6), citado anteriormente, hemos representado esta situación duplicando el vértice correspondiente a la cantidad "personas tuberculosas con resultado negativo en el test". Uno de estos vértices es negro y le hemos hecho corresponder el número 7, también en negro. El otro vértice es rojo (porque la cantidad que representa es el resultado de una relación falsa entre cantidades) y le hemos hecho corresponder el número 3, que aparece también en rojo, por no ser correcto.

En cuanto al segundo caso donde se observa, mostramos la resolución completa del problema en la Figura 5.67.

Enunciado: Una población con riesgo de padecer tuberculosis se somete a un test para averiguar si padecen tuberculosis o no. El test da positivo o negativo para la enfermedad en cualquier caso. Un 57% de las personas eran tuberculosas. Los resultados muestran que hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo. Además, los resultados mostraron que un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo. Entre las personas que no eran tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les dio positivo?

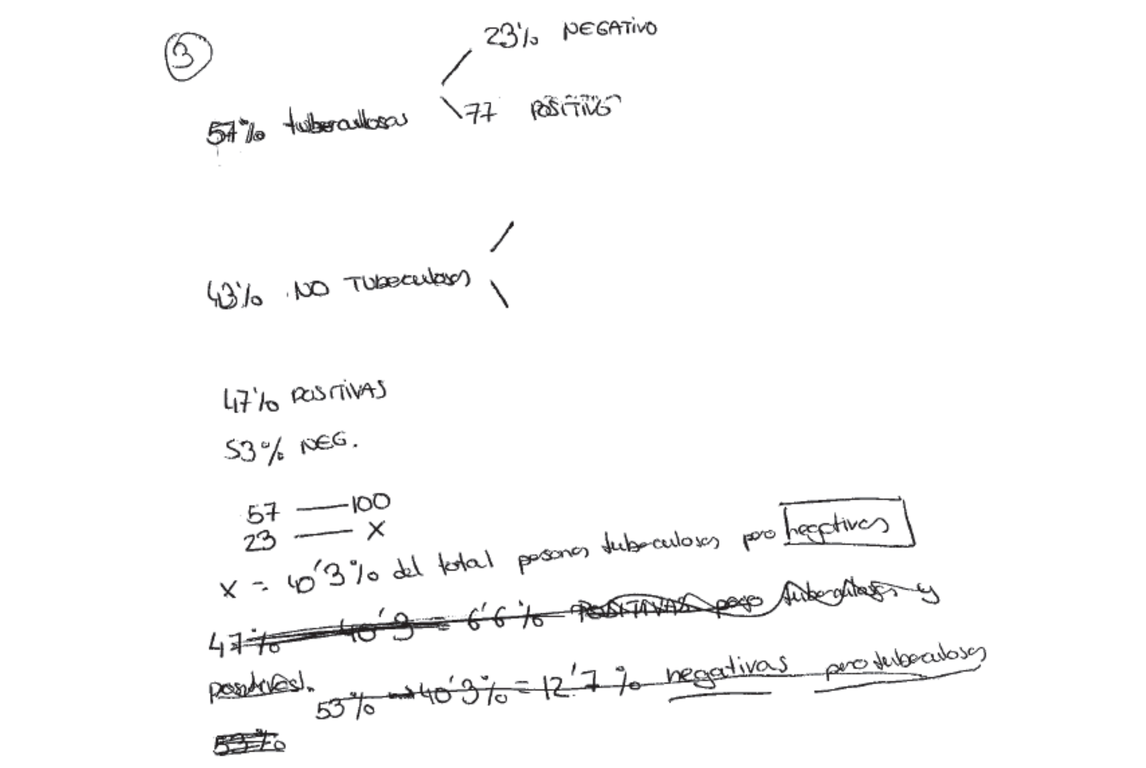


Figura 5.67. Resolución del Problema 17 del Pre-test(%) realizada por la estudiante A.

A juzgar por la relación de complementariedad a 100 que existe entre "23% negativo" y "77 positivo" en el primero de los árboles, consideramos que la estudiante ha interpretado la intersección "un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test dio negativo" como la condicional "porcentaje de negativos entre las personas tuberculosas" (error que ya fue señalado en la Tabla 5.13, p. 252). Sin embargo, el uso que hace del número 23 en la regla de tres que plantea sugiere que en ese momento de la resolución su interpretación de la cantidad ha cambiado y es la correcta (error que también ha sido señalado ya en la Tabla 5.18, p. 262). De esta manera la regla de tres cobraría sentido, como el cálculo de una condicional: de nuevo, la condicional "porcentaje de negativos entre las personas tuberculosas" (observemos que se restringe el espacio muestral al conjunto de personas tuberculosas). Por tanto, dicha condicional estaría asociada a dos números diferentes, el 23 y el 40,3, en diferentes momentos de la resolución.

5.3.4.1.4 – E4: Discordancia entre las componentes numérica y verbal de una cantidad por error de expresión.

Este tipo de error aparece cuando existe una discordancia entre las componentes numérica y verbal de la cantidad y ésta se resuelve a favor de la componente numérica, es decir, considerando como incorrecta la componente verbal o descripción que el resolutor hace del número. Por tanto, son errores derivados de dificultades en el uso de la lengua, a las que nos referiremos como dificultades de expresión.

Hemos distinguido ocho casos de errores de descripción:

- E4.1: Condicional descrita como intersección.
- E4.2: Marginal descrita como otra marginal.
- E4.3: Intersección descrita como marginal.
- E4.4: Condicional descrita como su condicional transpuesta.
- E4.5: Intersección descrita como otra intersección.
- E4.6: Condicional descrita como la marginal que representa el suceso condicionado.
- E4.7: Intersección descrita como condicional directamente relacionada.
- E4.8: Condicional descrita como la marginal que representa el suceso condicionante.

En el grafo, el vértice de la cantidad donde se aprecia el error está coloreado de negro o azul, siempre y cuando la componente numérica sea correcta. Sin embargo, la componente verbal errónea aparece en rojo para señalar el error.

E4.1: Condicional descrita como intersección.

Este es el tipo de error de descripción más frecuente. Aparece en diferentes fases de la resolución: en la organización de la información, en el cálculo de cantidades intermedias y, sobre todo (por el hecho de que se pregunte por una condicional) en la descripción del número que se da como resultado.

Por ejemplo, la pregunta del Problema 2a en el Pre-test(%) es la condicional: "*Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?*". Y la estudiante C., cuando organiza la información (véase Figura 5.68), hace referencia a ella como "¿% chicos con gafas?", que claramente describe una intersección (la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta).

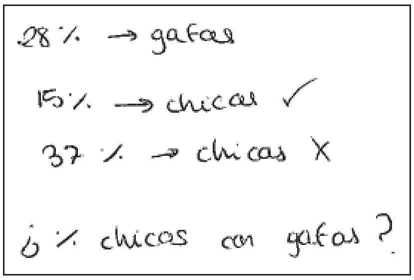


Figura 5.68.

Después, como se puede observar en la Figura 5.69, vuelve a cometer el mismo error en la descripción del resultado, cuyo valor numérico es correcto y se corresponde, por tanto, con la condicional pedida en el enunciado.

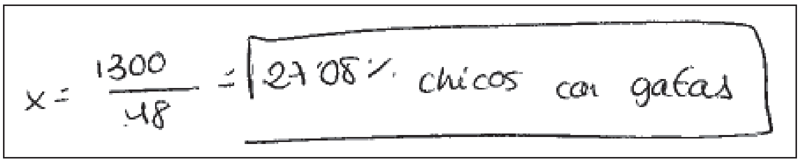


Figura 5.69.

Como ejemplo de la ocurrencia del error en la descripción de cantidades intermedias, consideraremos la resolución del Problema 10x2 del Pre-test(%), realizada también por la estudiante C.

La resolutora obtiene dos números, 83,3% y 16,7%, que representan las condicionales "no curados entre los tratados" y "tratados, entre los no curados", respectivamente. Pero describe estos números mediante expresiones que pueden interpretarse como intersecciones (véase Figura 5.70)

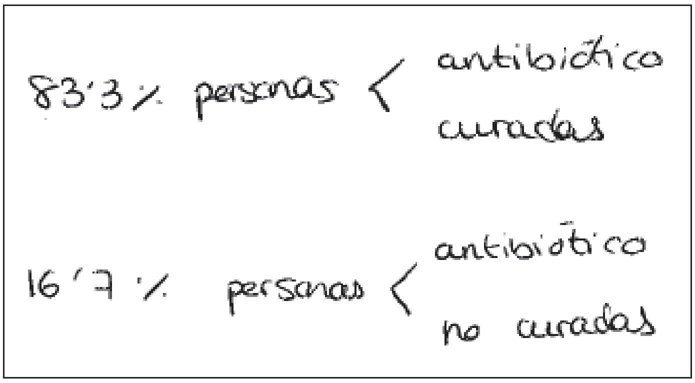


Figura 5.70.

En la Tabla 5.19 aparece la relación de resoluciones que contienen errores de este tipo, junto a la condicional que se describe erróneamente y la intersección a la que corresponde la descripción de la primera.

<table>
<tr><th>Describe la condicional …</th><th>… como si se tratara de la intersección…</th><th>Resoluciones</th></tr>
<tr><td rowspan="4">chicas, entre los estudiantes con gafas</td><td rowspan="4">chicas con gafas</td><td>A_P1_%</td></tr>
<tr><td>C_P1_%</td></tr>
<tr><td>R_P1_F</td></tr>
<tr><td>A_P2a_%</td></tr>
<tr><td>chicos, entre los estudiantes con gafas</td><td rowspan="3">chicos con gafas</td><td>A_P2a_%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">estudiantes con gafas, entre los chicos</td><td>A_P2a_%</td></tr>
<tr><td>C_P2a_%;</td></tr>
<tr><td rowspan="3">no curados, entre los tratados</td><td rowspan="3">tratados y no curados</td><td>AyM_P9_F</td></tr>
<tr><td>R_P9_F</td></tr>
<tr><td>C_P10x2_%</td></tr>
<tr><td>curados, entre los tratados</td><td>tratados y curados</td><td>C_P10x2_%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">tratados, entre los no curados</td><td rowspan="2">tratados y no curados</td><td>AyM_P10x2_%</td></tr>
<tr><td>C_P10x2_%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">positivos, entre los no tuberculosos</td><td rowspan="2">no tuberculosos y positivos</td><td>R_P17_F</td></tr>
<tr><td>V_P17_%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">piezas correctas, entre las calificadas como correctas</td><td rowspan="2">piezas correctas calificadas de correctas</td><td>AyM_P18a_F</td></tr>
<tr><td>C_P18a_%</td></tr>
</table>

Tabla 5.19. Errores de tipo E4.1 identificados en los pre-test.

E4.2: Marginal descrita como otra marginal.

Hemos observado este error en la resolución filmada del Problema 18a, donde viene precedido de un error de interpretación: las estudiantes interpretan la intersección “el dispositivo calificó como defectuosas cuatro piezas que eran defectuosas” como si se tratara de la marginal “piezas calificadas de defectuosas”, lo cual se deduce de la descripción que hacen de la cantidad a nivel oral:

{34} M.: Setenta y siete…piezas…calificadas…

{35} A.: Como correctas…

{36} M.: …como…correctas…

{37} A.: Y cuatro…

{38} M.: Y cuatro como defectuosas.

{39} A.: Y, además el dispositivo calificó como 4 defectuosas.

(M. escribe “4 defectuosas” debajo de la expresión “77 piezas calificadas como correctas”)

El error de descripción lo cometen al incorporar la cantidad a la pizarra, ya que la describen como si se tratara de la marginal “piezas defectuosas”, tal y como se aprecia en el protocolo escrito y en la parte inferior de la Figura 5.71.

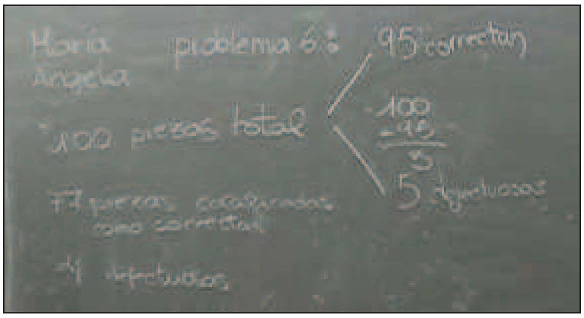


Figura 5.71.

Hemos catalogado el error como un error de descripción, aunque pensamos que detrás de este error podría existir un error conceptual ligado al contexto: la identificación como una misma cosa de los sucesos “ser una pieza defectuosa” y “ser una pieza calificada de defectuosa”. Es decir, las estudiantes podrían no distinguir claramente entre los dos sucesos por la creencia errónea de que el test no produce diagnósticos equivocados. En ese caso, además, la expresión “el dispositivo calificó como defectuosas cuatro piezas que eran defectuosas” contendría una redundancia y podría ser identificada por las estudiantes con cualquiera de las dos marginales directamente relacionadas.

E4.3: Intersección descrita como marginal.

Un ejemplo de este tipo de error lo encontramos en la resolución del Problema 1 en el Pre-test(%) llevada a cabo por la estudiante C.

Cuando organiza la información del enunciado, como se observa en la Figura 5.72, la estudiante describe la intersección “un 37% de chicas que no las usan” con la expresión “que no usan gafas”, como si fuera la marginal “estudiantes que no usan gafas”; y la intersección “un 35% de chicos que tampoco usa gafas” con la expresión “sin gafas”, como si fuera la marginal “estudiantes sin gafas”.

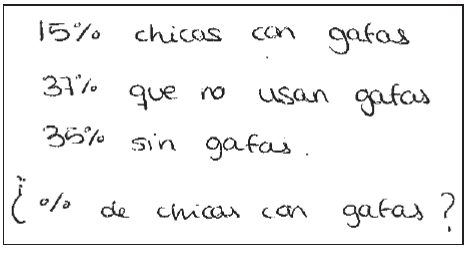


Figura 5.72.

En ocasiones, las descripciones de intersecciones como si se trataran de marginales son, en realidad, descripciones incompletas, en el sentido de que la resolutora omitiría parte de la descripción, dándola por supuesta. Por ejemplo, en este caso la primera intersección ha sido descrita correctamente: “15% chicas con gafas”. En la descripción de la siguiente, “37% que no usan gafas”, sólo se indica que no usan gafas (y podría sobreentenderse que son chicas, por venir inmediatamente detrás del porcentaje de chicas que sí llevan gafas). La descripción de la última intersección, “35% sin gafas”, resulta más difícil de explicar.

Otras veces, el error se debe a dificultades derivadas del contexto. Es lo que ocurre, por ejemplo, en la resolución del Problema 17 del Pre-test(%), realizada por la misma estudiante, C. Recordemos el enunciado del problema:

Una población con riesgo de padecer tuberculosis se somete a un test para averiguar si padecen tuberculosis o no. El test da positivo o negativo para la enfermedad en cualquier caso. Un 57% de las personas eran tuberculosas. Los resultados muestran que hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo. Además, los resultados mostraron que un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo. Entre las personas que no eran tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les dio positivo?

De la lista en la que organiza la información del enunciado (Figura 5.73) se desprende que inicialmente interpreta correctamente las cantidades conocidas y en concreto la marginal "hubo un 47% de personas a las que el test resultó positivo".

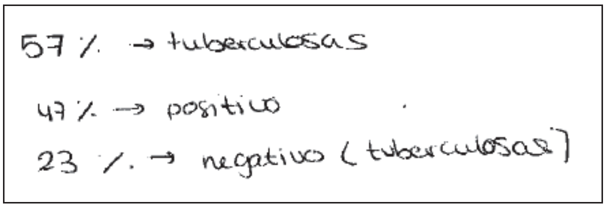

57% → tuberculosas
47% → positivo
23% → negativo (tuberculosas)

Figura 5.73.

En un momento posterior de la resolución, describe la marginal “47% positivas” como si se tratara de la marginal “tuberculosas” (véase Figura 5.74.). Sin embargo, por el uso y atendiendo al principio de competencia, concluimos que interpreta esta cantidad como la intersección “tuberculosas positivas”, que es la interpretación que hace verdadera la relación que aparece a continuación.

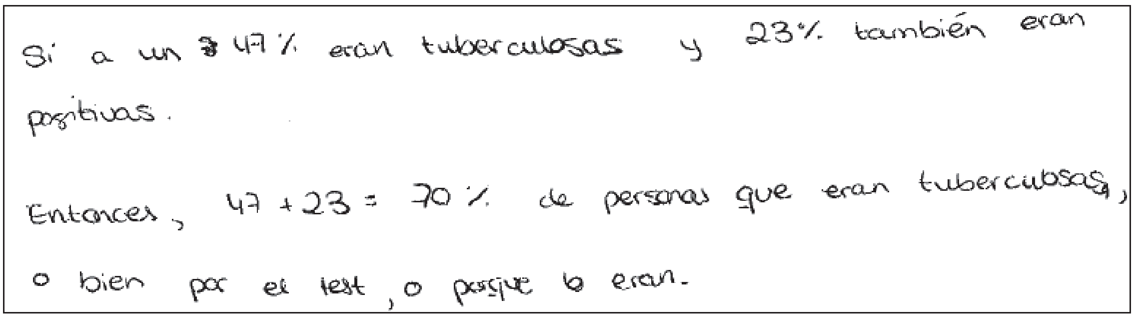

Si a un 47% eran tuberculosas y 23% también eran positivas.
Entonces, 47 + 23 = 70% de personas que eran tuberculosas, o bien por el test, o porque lo eran.

Figura 5.74.

Por tanto, asocia el número 47% a una intersección y, sin embargo, lo describe como una marginal. Por otra parte, la intersección “23% tuberculosas negativas” aparece descrita en el fragmento anterior como si se tratara de la marginal “positivas”. Resulta fácil deducir que, para la estudiante, aquí positivas significa tuberculosas, puesto que anteriormente ha descrito el 23% como “negativo (tuberculosas)”. Por tanto, bajo este error de descripción, subyace un razonamiento erróneo, basado en la infalibilidad del test: dar positivo implica ser tuberculoso.

La Tabla 5.20 recoge todas las resoluciones en las que aparece una intersección descrita como una marginal.

Describe la intersección …	**… como si se tratara de la marginal…**	**Resoluciones**
chicas sin gafas	estudiantes sin gafas	C_P1_%
chicos sin gafas	estudiantes sin gafas	C_P1_%
	chicos	M_P1_%
chicas con gafas	estudiantes con gafas	H_P1_F
	chicas	H_P1_%
chicos con gafas	estudiante con gafas	H_P2a_F
personas tratadas y curadas	personas tratadas	H_P9_%
tratados y no curados	no curados	L_P9_F
		V_P9_F
tuberculosos positivos	tuberculosos	B_P17_%
		C_P17_%
tuberculosos negativos	positivos	C_P17_%
piezas correctas calificadas de correctas	calificadas de correctas	L_P18a_F
piezas defectuosas calificadas como correctas	piezas defectuosas	AyM_P18a_F

Tabla 5.20. Errores de tipo E4.3 identificados en los pre-test.

E4.4: Condicional descrita como su condicional transpuesta.

Se ha observado únicamente en la resolución del Problema 1 del Pre-test(F) realizada por las estudiantes A. y M.

La pregunta del problema es: “*Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?”* y las estudiantes responden con un número equivocado pero que podría atribuirse, por construcción, a la condicional por la que se pregunta. Sin embargo, describen dicho número como si se tratara de la condicional transpuesta: “porcentaje de estudiantes que usan gafas, entre las chicas”, como se aprecia en la Figura 5.75.

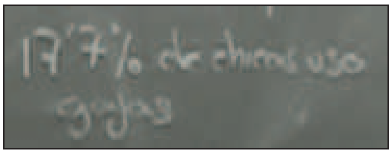


Figura 5.75.

E4.5: Intersección descrita como otra intersección.

Al igual que el error anterior, se ha observado en una única resolución: la del Problema 2a del Pre-test(F), realizada por la estudiante B.

En la representación que hace de la información “368 chicas que no las usan” emplea los mismos símbolos (dibujos) que en la representación de la información *“147 chicas que las usan”* (véase Figura 5.76). Como no usa 368 con ese significado (de hecho, no usa el número 368 en ningún momento) y sí usa con ese significado el número 147, consideramos que se trata de un error de descripción.

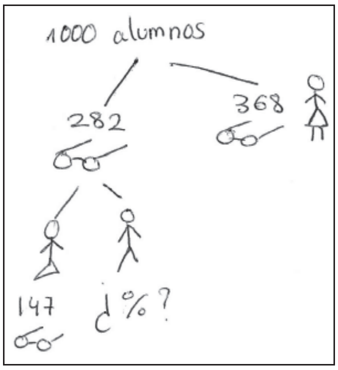


Figura 5.76.

E4.6: Condicional descrita como la marginal que representa el suceso condicionado.

Se ha observado en la resolución del Problema 2a del Pre-test(F) realizada por el estudiante R. y en la resolución del Problema 18a del Pre-test(F) realizada por la estudiante T.

El estudiante R. obtiene de manera correcta la componente numérica de la condicional por la que se pregunta en el Problema 2a: *“Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?”*. Sin embargo, la describe como si se tratara de la marginal que representa el suceso condicionado: “El 17,8% usan gafas”, como se observa en la Figura 5.77.

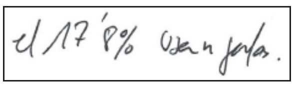


Figura 5.77.

En el caso de la estudiante T., resolviendo el Problema 18a, hemos supuesto que el significado que la estudiante da al resultado es el de la condicional por la que se pregunta (el porcentaje de piezas correctas, entre las calificadas de correctas), aunque su componente numérica es errónea porque procede de una regla de tres errónea[33]. El error de expresión lo comete al describir este número, ya que lo hace como si se tratara de la marginal "piezas correctas", es decir, la marginal que hace de suceso condicionado, como se observa en la Figura 5.78.

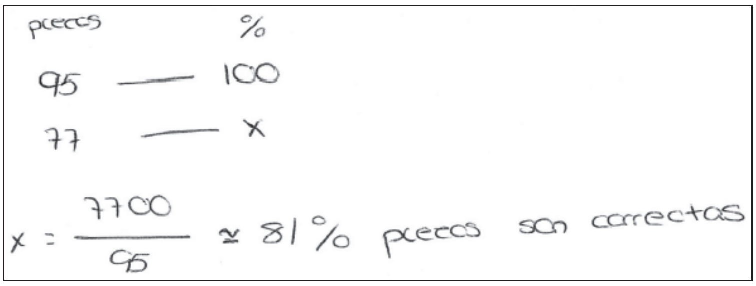


Figura 5.78.

Haremos aquí una observación similar a la que hemos hecho para el error E4.3: las descripciones podrían ser incorrectas por incompletas. Quizás los resolutores únicamente hacen referencia al suceso condicionado porque dan por supuesto o sobreentendido el condicionante.

E4.7: Intersección descrita como condicional directamente relacionada.

Se ha observado en dos resoluciones, ambas del Problema 9 en el Pre-test(F) y en relación a la misma cantidad. En los dos casos, las estudiantes dan como resultado el porcentaje de tratadas y no curadas, es decir la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta ("*Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?*"). Sin embargo, la describen como si se tratara de la condicional, quizás porque para responder, toman como referencia el texto de la pregunta del enunciado. También podría deberse a que consideran dicha expresión como sinónima de la que sería propia de la intersección; es decir, no hacen distinción en la forma de describir una intersección y una condicional.

En la Figura 5.79 mostramos el fragmento de la resolución de L. en el que se aprecia el error. Mediante regla de tres halla el porcentaje que representan las personas tratadas y no curadas, sobre el número total de personas en la muestra (120). Sin embargo, en la descripción refiere el porcentaje al total de personas tratadas y no al total de la muestra.

---

[33] Puesto que la cantidad que da como resultado no es correcta ni por construcción ni por descripción, bien podríamos haber considerado que se trata de una cantidad arbitraria. El hecho de atribuirle a la estudiante una interpretación correcta de la cantidad se debe a la analogía entre esta resolución y la resolución del mismo problema realizada por C. en el Pre-test(%), véase anexo 17 (p. 571). En esta última resolución, la estudiante plantea la misma regla de tres y describe el resultado como si se tratara de la condicional por la que se pregunta. Dando prioridad a la descripción y teniendo en cuenta que hay un intento de restringir el espacio muestral, consideramos que la interpretación que hace la estudiante de la cantidad que da como resultado es la de la condicional pedida.

La Tabla 5.21 recoge los dos casos en los que se ha observado este tipo de error.

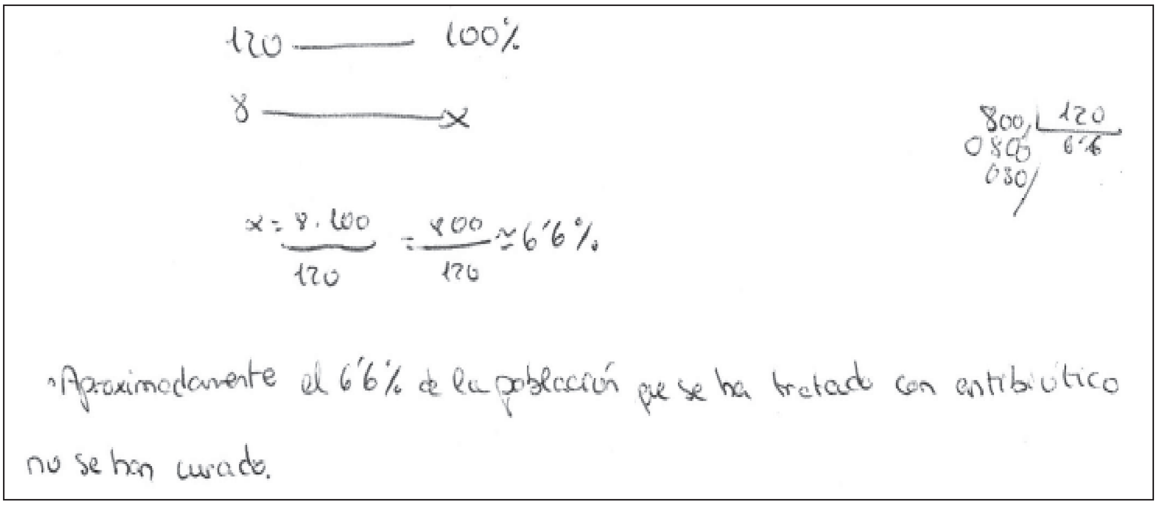


Figura 5.79.

Describe la intersección …	… como si se tratara de la condicional…	Resoluciones
tratadas y no curadas	no curadas, entre las tratadas	L_P9_F
		B_P9_F

Tabla 5.21. Errores de tipo E4.7 identificados en los pre-test.

E4.8: Condicional descrita como la marginal que representa el suceso condicionante.

Este último error de descripción también aparece en una única resolución: la del Problema 10x2, del Pre-test(F), realizada por la estudiante T.

La resolutora responde a la pregunta del problema (*"Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?"*) con la condicional transpuesta (porcentaje de no curados, entre los tratados) y la describe como si se tratara de la marginal "tratados" (véase Figura 5.80), que es el suceso condicionado en la pregunta del problema y el condicionante en la transpuesta.

Figura 5.80.

5.3.4.1.5 – E5: Dar como resultado una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta.

Es muy habitual que los estudiantes respondan a la pregunta del problema con una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta. En la mayoría de los casos se trata de una cantidad calculada, aunque en ocasiones también responden con alguna de las cantidades conocidas, proporcionadas en el enunciado, asignándola a la cantidad preguntada.

Hemos distinguido siete casos:

- E5.1: Da como resultado la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.
- E5.2: Da como resultado la condicional transpuesta.
- E5.3: Da como resultado la marginal correspondiente al suceso condicionante, es decir, la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.
- E5.4: Da como resultado una cantidad sin otro sentido en el contexto del problema que el de su propia construcción.
- E5.5: Da como resultado la marginal correspondiente al suceso condicionado, es decir, la marginal directamente relacionada con la condicional transpuesta.
- E5.6: Da como resultado 100%.
- E5.7: Da como resultado una condicional que no es ni aquella por la que se pregunta ni su transpuesta.

En el grafo de la resolución, el error se reconoce porque la cantidad que se da como resultado cuando ésta es distinta de la condicional por la que se pregunta aparece rodeada con una línea roja.

E5.1: Da como resultado la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.

Es el error más común, en esta categoría. Se ha observado en resoluciones de todos los problemas, excepto del Problema 18a. En la Figura 5.81 mostramos, a modo de ejemplo, la resolución que hace la estudiante T. del Problema 1 en el Pre-test(F). Se observa que la estudiante no halla cantidades intermedias. Mediante una regla de tres, calcula directamente el porcentaje de chicas con gafas sobre el total de la muestra y da este número como respuesta a la pregunta del problema. Por tanto, está respondiendo con la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta, lo que podría deberse a una interpretación equivocada de la pregunta del problema.

La Tabla 5.22 resume los casos en que se ha observado este error.

Enunciado: La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

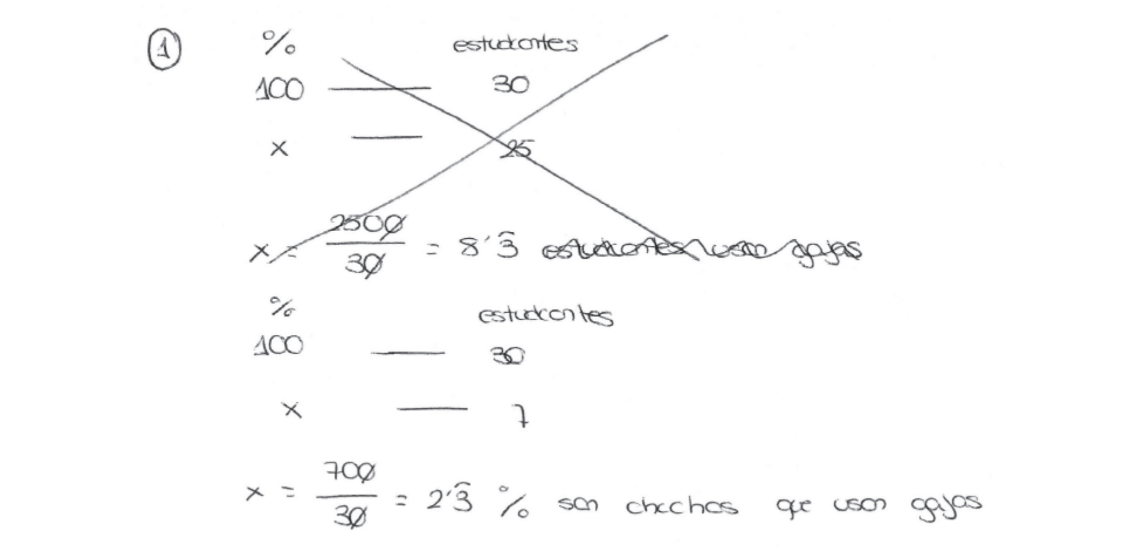


Figura 5.81. Resolución del Problema 1 en el Pre-test(F), realizada por la estudiante T.

Responde con la cantidad …	…en lugar de la condicional…	Resolución
chicas con gafas	chicas, entre los estudiantes que usan gafas	B_P1_F
		H_P1_F
		H_P1_%
		T_P1_F
chicos con gafas	estudiantes con gafas, entre los chicos	B_P2a_F
		B_P2a_%
		H_P2a_%
		T_P2a_F
tratados y no curados	no curados, entre los tratados	B_P9_F
		B_P9_%
		H_P9_%
		L_P9_F
		M_P9_%
	tratados entre los no curados	B_P10x2_F
		B_P10x2_%
		H_P10x2_%
personas no tuberculosas con test positivo	positivos, entre las personas no tuberculosas	B_P17_%
		C_P17_%
		M_P17_%

Tabla 5.22. Errores de tipo E5.1 identificados en los pre-test.

E5.2: Da como resultado la condicional transpuesta.

Este error se ha dado en tres resoluciones, de las cuales mostraremos como ejemplo la del Problema 10x2 del Pre-test(F), llevada a cabo por la estudiante L. (Figura 5.82). En ella observamos que la estudiante halla una cantidad intermedia: 16 personas han sido tratadas y no se han curado. Esta intersección es la que está directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta: porcentaje de personas tratadas, entre las no curadas. Sin embargo, al plantear la regla de tres, usa la marginal "100 personas tratadas", que es la marginal asociada al suceso condicionado y no al condicionante. Es decir, la marginal directamente relacionada con la condicional transpuesta. Por tanto, acaba calculando esta última y comete, también, un error de descripción, ya que la describe como si se tratara de la marginal "personas tratadas".

Enunciado: Una población de 240 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 120 personas, 100 se han tratado con el antibiótico y 84 se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

4

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 84 \\ \hline 16 \end{array}$$

16 personas se han tratado con el antibiótico y no se han curado

personas		%
100	——	100
16	——	x

x = 16% ha sido tratado con antibiótico

Figura 5.82. Resolución del Problema 10x2 del Pre-test(F), realizada por la estudiante L.

La Tabla 5.23 resume los tres casos en los que se ha producido este error:

Responde con la cantidad …	**…en lugar de la condicional…**	**Resolución**
chicos, entre los estudiantes con gafas	estudiantes con gafas, entre los chicos	L_P2a_F
personas no curadas, entre las tratadas	personas tratadas, entre las no curadas	T_P10x2_F
piezas calificadas como correctas, entre las correctas	piezas correctas, entre las calificadas de correctas	T_P18a_%

Tabla 5.23. Errores de tipo E5.2 identificados en los pre-test.

E5.3: Da como resultado la marginal correspondiente al suceso condicionante, es decir, la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.

Este error se ha observado en dos resoluciones: la del Problema 10x2 del Pre-test(F) realizada por el estudiante H. y la del Problema 17 del Pre-test(F) realizada por la estudiante B. Mostraremos como ejemplo la última (Figura 5.83)

Enunciado: Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿qué porcentaje el test da positivo?

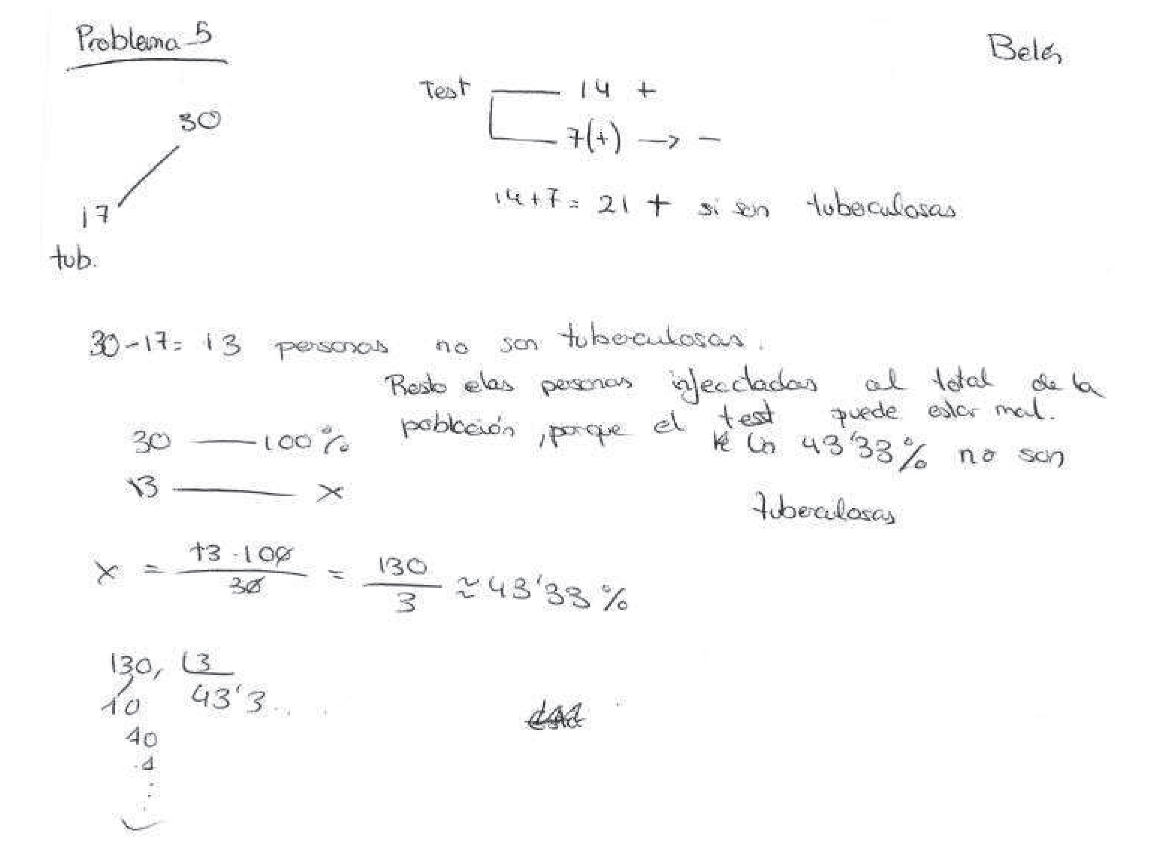

Problema 5
Belén
Test — 14 +
7(+) → –
14+7 = 21 + si son tuberculosas
30
17
tub.
30−17 = 13 personas no son tuberculosas.
Resto a las personas infectadas al total de la población, porque el test puede estar mal.
30 — 100%
13 — x
43'33% no son tuberculosas
$x = \frac{13 \cdot 10\cancel{0}}{3\cancel{0}} = \frac{130}{3} \simeq 43'33\%$
130 |3
10 43'3
40
4

Figura 5.83. Resolución del Problema 17 del Pre-test(F) realizada por la estudiante B.

Se observa que la estudiante usa una relación falsa para calcular la cantidad "21 + si son tuberculosas", que no usa después. Calcula una cantidad intermedia más, esta vez de manera correcta: "13 personas no son tuberculosas". Se trata de la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta, es decir, la marginal que representa el suceso condicionante. A continuación, expresa esta marginal en forma de porcentaje sobre el total de la muestra y responde con este número a la pregunta del problema. Por tanto, no da como resultado la condicional preguntada, sino la marginal directamente relacionada con ella, es decir, la marginal que corresponde al suceso condicionante.

La Tabla 5.24 resume los dos casos donde se ha observado el error.

Responde con la cantidad …	…en lugar de la condicional…	Resolución
no curadas	tratadas, entre las no curadas	H_P10x2_F
no tuberculosas	positivos, entre las no tuberculosas	B_P17_F

Tabla 5.24. Errores de tipo E5.3 identificados en los pre-test.

E5.4: Da como resultado una cantidad sin otro sentido en el contexto del problema que el de su propia construcción.

Es habitual que como consecuencia de un error o de la confluencia de varios errores, los estudiantes construyan cantidades sin otro sentido en el contexto del problema que el de su propia construcción. A pesar de todo, cuando hemos analizado las resoluciones y hemos encontrado una cantidad de este tipo, en la mayoría de los casos le hemos atribuido el significado que supuestamente le ha atribuido el resolutor, para lo cual nos hemos basado en su descripción, en las cantidades que se usan para su obtención o en el uso posterior que se hace de ella. Sin embargo, en ocasiones no nos ha sido posible atribuir significado alguno a la cantidad. Es el caso, por ejemplo, de la cantidad que la estudiante M. da como resultado en el Problema 1 del Pre-test(%), cuya resolución se muestra en la Figura 5.84.

La estudiante interpreta la información del enunciado de manera correcta, como se aprecia en la lista mediante la que organiza esta información. Halla una cantidad intermedia de manera correcta: el porcentaje de chicas sobre el total. Sin embargo, las cantidades que intervienen en la regla de tres (la intersección "chicas con gafas" y la intersección "chicas que no las usan") y la disposición de los datos, dan lugar a proporciones incorrectas, cuyo resultado no tiene más sentido que el de su propia construcción. Por otra parte, la descripción no aclara el significado que le atribuye la estudiante, puesto que la expresión "son chicas, las que usan gafas" no deja claro sobre qué total es referido el porcentaje. Bien podría significar "el 5,5 % de las chicas usan gafas" como "el 5,5 % son chicas que usan gafas" o cualquier otra cosa.

Por tanto, consideramos que la estudiante comete un error al responder con esta cantidad a la pregunta del problema y no nos ha sido posible atribuirle significado alguno.

Enunciado: La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

problema 1

15% chicas con gafas

37% no las usan (chicas)

35% chicos sin gafas

37 + 15 = 52% → son chicas

15% gafas(chicas) 35% → son chicos

Solo hay un 15% que usa gafas y son chicas

~~52%~~ ~~[illegible]~~

~~el 52% son chicas~~.

~~problema 2~~

100 → 15

37 → x

$\frac{37 \cdot 15}{100} = 5'5\%$

son chicas, las que usan gafas

Figura 5.84. Resolución del Problema 1 del Pre-test(%) realizada por la estudiante M.

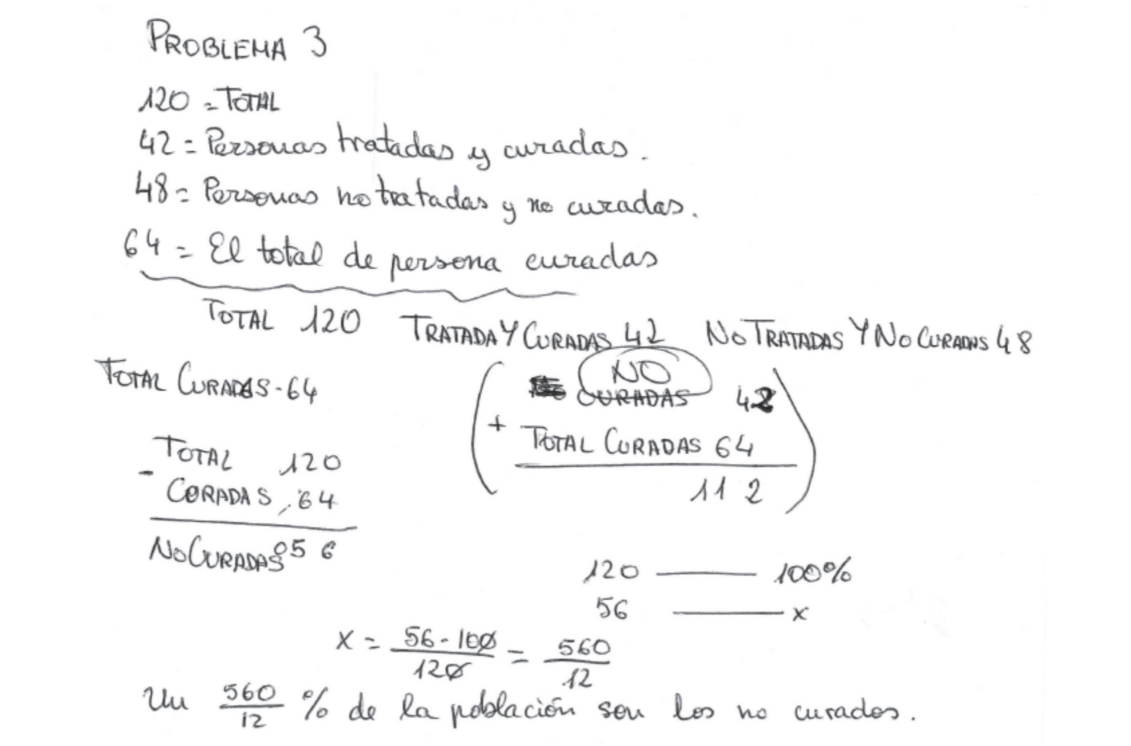
E.5.5: Da como resultado la marginal asociada al suceso condicionado, es decir, la marginal directamente relacionada con la condicional transpuesta.

Este error consiste en responder a la pregunta del problema con la marginal que representa el suceso condicionado.

Hemos observado el error en cuatro resoluciones, como se puede comprobar en la Tabla 5.25.

Veamos como ejemplo la resolución del Problema 9 del Pre-test(F) realizada por el estudiante H. (Figura 5.85)

Enunciado: Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. En total, se han curado 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?


PROBLEMA 3

120 = TOTAL

42 = Personas tratadas y curadas.

48 = Personas no tratadas y no curadas.

64 = El total de persona curadas

TOTAL 120 TRATADA Y CURADAS 42 NO TRATADAS Y NO CURADAS 48

TOTAL CURADAS - 64

$$\begin{array}{r} \text{NO CURADAS } 42 \\ + \text{ TOTAL CURADAS } 64 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{TOTAL } 120 \\ - \text{ CURADAS } 64 \\ \hline \text{NO CURADAS } 56 \end{array}$$

120 ——— 100%

56 ——— x

$$x = \frac{56 \cdot 10\cancel{0}}{12\cancel{0}} = \frac{560}{12}$$

Un $\frac{560}{12}$ % de la población son los no curados.

Figura 5.85. Resolución del Problema 9 del Pre-test(F) realizada por el estudiante H.

El estudiante interpreta de manera correcta las cantidades del enunciado y halla, también de manera correcta, la cantidad intermedia “56 personas no curadas”. Mediante una regla de tres, expresa esta cantidad en forma de porcentaje sobre el total de la muestra y da como resultado este porcentaje. Por tanto, está respondiendo a la pregunta del problema con una marginal (el porcentaje de personas no curadas) que es la marginal asociada al suceso condicionado de la condicional por la que se pregunta.

Responde con la cantidad …	…en lugar de la condicional…	Resolución
no curados	no curados, entre los tratados	H_P9_F
personas tratadas	tratadas, entre las no curadas	M_P10x2_%
positivas	positivas, entre las tuberculosas	H_P17_%
piezas correctas	piezas correctas, entre las calificadas de correctas	M_P18a_%

Tabla 5.25. Errores de tipo E5.5 identificados en los pre-test.

E5.6: Da como resultado 100%.

Este error ha sido observado en la resolución del Problema 18a, del Pre-test(%), por parte de la estudiante B. Recordemos el enunciado de dicho problema:

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El 95% de las piezas eran correctas, el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo y el 4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

La estudiante responde a la pregunta del problema (porcentaje de piezas correctas, entre las calificadas de correctas) como se muestra en la Figura 5.86.

Del porcentaje de correctas clasificadas por el dispositivo, el 100% son correctas, ya que si en realidad son 95% corectas y el solo recoge el 77% son todas.

Figura 5.86.

Por tanto, la estudiante considera que todas las piezas calificadas de correctas son correctas. Es llamativo el uso de la forma verbal "recoge" en la respuesta de B., pues da a entender que las piezas calificadas de correctas han sido "recogidas" de entre el total de piezas correctas. Es decir, el conjunto de piezas calificadas de correctas está incluido en el conjunto de piezas correctas, razonamiento que parece venir reforzado por el hecho de que el porcentaje de piezas calificadas de correctas es menor que el porcentaje de piezas correctas.

Esta es la única resolución en la que se da esta respuesta a la pregunta del problema. Sin embargo, en un momento temprano de la resolución filmada del mismo problema las estudiantes A. y M. consideran la misma respuesta, aunque no la adoptan como definitiva y siguen con la resolución del problema. Ocurre entre los ítems {45} y {49} del protocolo escrito, que mostramos a continuación:

{45} A.: (Mirando el enunciado) Entre, entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, que eran setenta y siete (A señala el dato en la pizarra) ¿qué porcentaje eran piezas correctas? ¡Todas!

(Silencio. Miran la pizarra)

{46} M.: Todas las que calificaron correctas.

{47} A.: Claro.

{48} M.: Claro, mhm

{49} A.: Sí, sí, pero…

5.3.4.2 – Errores de relación.

5.3.4.2.1 – Errores de relación en el uso de relaciones ternarias aditivas.

Incluimos en este apartado todos los errores de relación que se cometen al aplicar relaciones aditivas entre cantidades. En el grafo, las relaciones erróneas se han de incorporar, puesto que no se corresponden con ninguna de las del grafo inicial, y se representan en rojo. Cuando la cantidad que se obtiene es interpretada por el estudiante como una de las cantidades del grafo teórico, la relación pasará por el vértice correspondiente a esta cantidad, que aparecerá en rojo. Si la cantidad no se encuentra entre las que componen el grafo teórico se añade un nuevo vértice y se colorea en rojo.

Es destacable el hecho de que no se ha observado ninguno de estos errores en las resoluciones de los Problemas 1 y 2a, formulados en el contexto Estsocial, sino que aparecen exclusivamente en los problemas formulados en los contextos más influyentes en las dificultades: el Estsalud y los dos contextos de la situación Test de Diagnóstico, Diagsalud y Diagcalidad. Esto es así porque, como veremos a continuación, estos errores guardan una gran relación con el contexto. En consecuencia, hemos organizado su presentación por contextos.

5.3.4.2.1.1 – Errores de relación en el contexto Estsalud.

Encontramos un error de relación en este contexto, por ejemplo, en la resolución filmada del Problema 9 del Pre-test(F), realizada por las estudiantes A. y M.

Recordemos el enunciado del problema:

> *Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Se han curado un total de 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?*

En un momento dado de la resolución, las estudiantes usan la relación:

n(curadas) – n(tratadas y curadas) = n(tratadas y no curadas)

Esta relación surge, posiblemente, de la dificultad para identificar la intersección “no tratadas y curadas”, tras la cual se encuentra la concepción equivocada de que toda persona curada ha sido tratada, o lo que es lo mismo, que una persona no tratada no ha podido curarse. Al no reconocer dicha intersección, la estudiante A. recurre a alternativas para dar sentido al resultado de la resta:

{24} A.: Si se han curado un total de sesenta y cuatro personas, sesenta y cuatro menos cuarenta y dos, sesenta y cuatro, que son las personas que se han curado, menos cuarenta y dos y sacamos las personas que se han tratado con otra cosa, pero es que no te sirve tampoco para nada.

(Breve silencio)

{25} A.: No, sí que te sirve. ¡Claro! Si tú sacas sesenta y cuatro, que son las curadas, y le restas el cuarenta y dos que son las que sí que están tratadas con antibiótico, te sale el porcentaje de personas tratadas con antibiótico pero que no se han curado. Entonces, ya está.

Si restamos las tratadas y curadas de las curadas, obtenemos las no tratadas y curadas. Pero al asumir que una persona no puede curarse si no se trata, la estudiante A. concluye que estas personas curadas que no se han tratado con el antibiótico necesariamente "se han tratado con otra cosa". Sin embargo, ese dato no le resulta útil ("pero es que no te sirve tampoco para nada"). Así que lo reinterpreta como "personas tratadas con antibiótico pero que no se han curado", lo cual, a pesar de convertir la relación en un absurdo, le conviene porque es la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta (como ella misma indica, "entonces, ya está").

Otra prueba bastante clarificadora de que las estudiantes tienen la concepción errónea de que las personas curadas han sido necesariamente tratadas, la encontramos en un momento posterior del proceso de la resolución, cuando se produce este diálogo en relación a la información *"Se han curado un total de 64 personas"*:

{44} M.: "Sesenta y cuatro limpias, sesenta y cuatro que no están infectadas."

{45} A.: Si las curan, sabes, si se curan, si se curan será porque las han tratado.

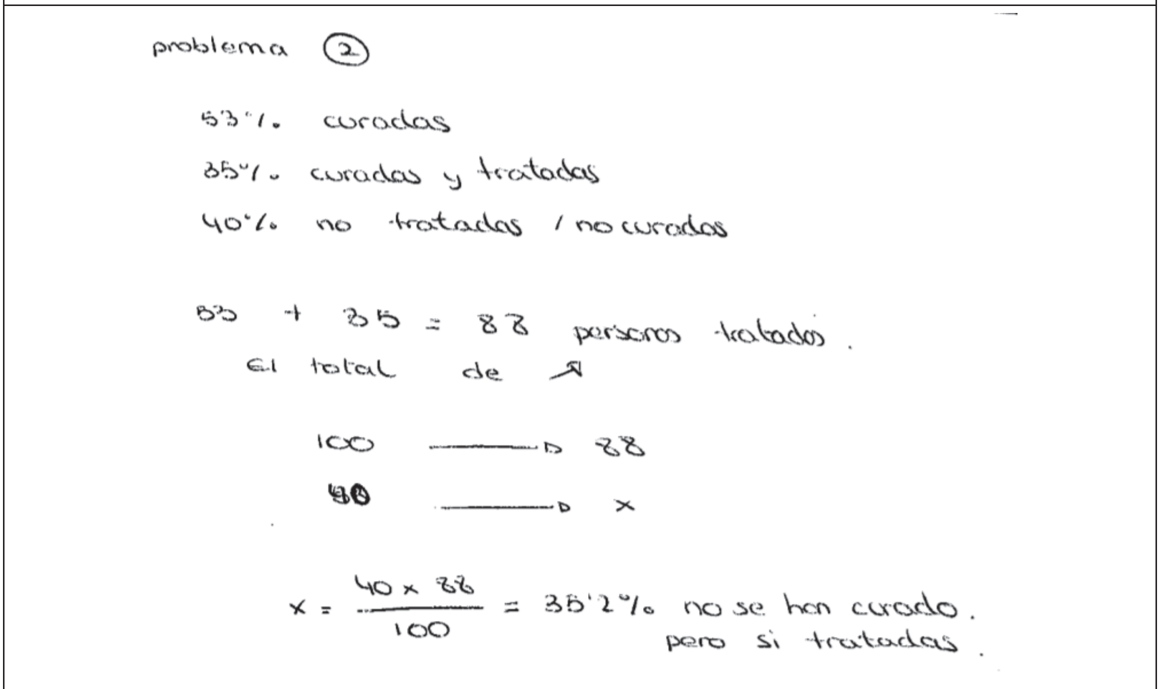
(Breve silencio)

{46} A.: Si se curan (risa) a ver, si se curan es porque las han tratado. Milagros, no.

Claramente, la estudiante A. no contempla la posibilidad de que una persona se cure si no ha sido tratada (eso sería un milagro).

Esta misma creencia también podría estar detrás del error cometido por la estudiante M. (una de las integrantes de la pareja del ejemplo anterior) en la resolución del mismo problema en el Pre-test(%). Veamos con detalle en qué ha consistido el error. El enunciado del problema y la resolución realizada por la estudiante se muestran en la Figura 5.87.

Enunciado: Un conjunto de personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado un 53% de dichas personas. Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?


problema 2

53% curadas

35% curadas y tratadas

40% no tratadas / no curadas

53 + 35 = 88 personas tratadas.

El total de ↗

100 ——▷ 88

40 ——▷ x

$x = \frac{40 \times 88}{100} = 35'2\%$ no se han curado. pero si tratadas.

Figura 5.87. Resolución del Problema 9 en el Pre-test(%) realizada por la estudiante M.

Observamos que la estudiante interpreta y organiza de manera correcta la información del enunciado, tras lo cual calcula una única cantidad intermedia, “el total de personas tratadas”, mediante la relación errónea:

53 + 35 = 88

Relación que transformando porcentajes a frecuencias y atendiendo a las descripciones que hace de las tres cantidades, se podría enunciar como:

n(curadas) + n(curadas y tratadas) = n(tratadas)

El error parece venir motivado por el razonamiento erróneo señalado (una persona curada necesariamente ha sido tratada con el antibiótico), junto con el razonamiento también erróneo de que toda persona tratada con el antibiótico se cura. Asumiendo estas premisas, la relación anterior cobra sentido: el enunciado informa sobre el porcentaje de personas curadas y sobre el porcentaje de personas tratadas y curadas. Las primeras han sido tratadas porque si no, no se hubieran curado. Las segundas, han sido tratadas porque así lo indica la descripción de las mismas. Y si no se contempla la posibilidad de que una persona sea tratada y no se cure, las “curadas” y las “tratadas y curadas” hacen el total de personas tratadas.

Veamos un ejemplo más en el que parece estar presente la concepción errónea de que si una persona se ha curado necesariamente ha sido tratada, pero en su forma equivalente: si una persona no ha sido tratada no ha podido curarse. Lo encontramos en la resolución realizada por la estudiante C. del Problema 10x2 del Pre-test(F), cuyo enunciado recordamos a continuación:

Una población de 240 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 120 personas, 100 se han tratado con el antibiótico y 84 se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

En la Figura 5.88 mostramos un fragmento de la resolución en el que aparecen los cálculos correctos de dos cantidades intermedias, el número de personas no tratadas (56) y el número de personas tratadas que no se han curado (16), seguidos de una relación falsa en la que intervienen estas dos cantidades:

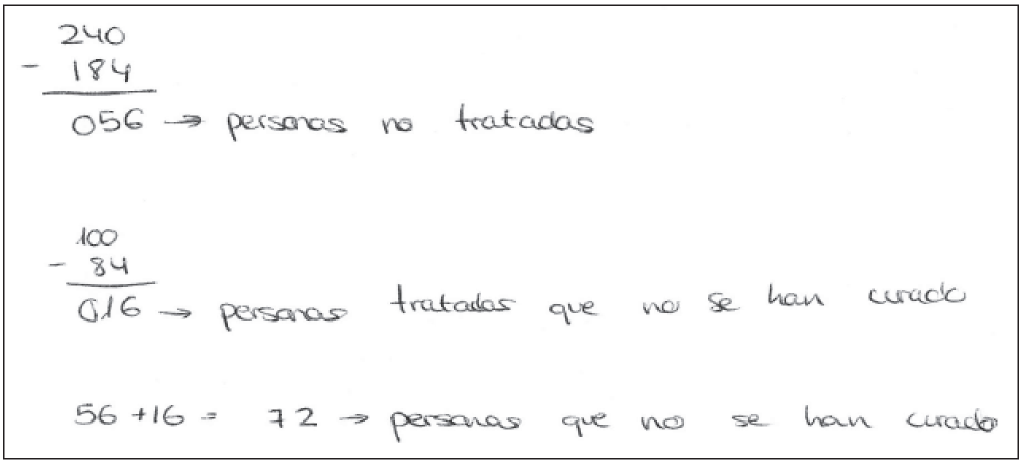


Figura 5.88.

Se observa que la estudiante establece la relación errónea:

n(no tratadas) + n(tratadas y no curadas) = n(no curadas)

La relación sólo cobra sentido bajo la suposición de que las personas no tratadas no se curan. En ese caso, las no tratadas (y por tanto, no curadas) y las tratadas y no curadas harían el total de personas no curadas.

Así pues, vemos que los estudiantes muestran concepciones equivocadas relacionadas con el contexto en que se formulan los problemas. Concretamente realizan razonamientos falsos derivados de la creencia de que la relación de dependencia entre los sucesos “tratados” y “curados” y entre los sucesos “no tratados” y “no curados” es total y por tanto determinista, en uno o ambos sentidos. Esto es:

- Si una persona se trata con el antibiótico es seguro que se cura o, equivalentemente, si una persona no se ha curado es seguro que no se ha tratado con el antibiótico

- Si una persona no se trata con el antibiótico, es seguro que no se cura o, equivalentemente, si una persona se cura, es seguro que se ha tratado con el antibiótico.

Y como se observa en los ejemplos anteriores, estas concepciones equivocadas conducen a errores de relación. Un resumen de todos los errores de este tipo observados en las resoluciones de los problemas P9 y P10x2, lo encontramos en la Tabla 5.26.

<table>
<tr><th>Resolución</th><th>Relación</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>AyM_P9_F</td><td>$n(B) - n(A \cap B) = n(A \cap \overline{B})$</td><td>“curadas” – “tratadas y curadas” = “tratadas y no curadas”</td></tr>
<tr><td>M_P9_%</td><td>$n(B) + n(A \cap B) = n(A)$</td><td>“curadas” + “tratadas y curadas” = “tratadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H_P9_%</td><td>$n(B) + n(A \cap B) = n(\text{c.a.})$</td><td>“curadas” + “tratadas y curadas” = cantidad arbitraria</td></tr>
<tr><td>$100 - n(\text{c.a.}) = n(A \cap B)$</td><td>100 – cantidad arbitraria = “tratadas y curadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_P9_F</td><td>$n(A) - n(B) = n(A \cap \overline{B})$</td><td>"tratadas" - "curadas" = “tratadas y no curadas”</td></tr>
<tr><td>$N - n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(A)$</td><td>N – “no tratadas y no curadas” = “tratadas”</td></tr>
<tr><td>T_P9_F</td><td>$n(\overline{B}) - n(A \cap \overline{B}) = n(A \cap B)$</td><td>“no curadas” – “tratadas y no curadas” = “tratadas y curadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C_P10x2_F</td><td>$n(\overline{A}) + n(A \cap \overline{B}) = n(\overline{B})$</td><td>“no tratadas” + “tratadas y no curadas” = “no curadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n(A \cap B) - n(A) = n(A)$</td><td rowspan="2">“tratadas y curadas” – “tratadas” = “tratadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H_P10x2_F</td></tr>
<tr><td>$n(A) - n(B) = n(\overline{B})$</td><td>“tratadas” – “curadas” = “no curadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H_P10x2_%</td><td>$n(A \cap B) + n(B) = n(B)$</td><td>“tratadas y curadas” + “curadas” = “curadas”</td></tr>
<tr><td>$n(B) - n(A) = n(A \cap \overline{B})$</td><td>“curadas” – “tratadas” = “tratadas y no curadas”</td></tr>
</table>

Tabla 5.26. Errores de relación identificados en los pre-test en el uso de relaciones aditivas en el contexto Estsalud.

5.3.4.2.1.2 – Errores de relación en el contexto Diagsalud.

La mayoría de las relaciones erróneas que establecen los estudiantes en el contexto Diagsalud también vienen motivadas por concepciones erróneas acerca de las relaciones de dependencia entre los sucesos básicos: “ser una persona tuberculosa” y “dar positivo en el test”. Y estas relaciones de dependencia, a su vez, tienen que ver con prejuicios sobre la infalibilidad de las pruebas diagnósticas.

Veamos, a modo de ejemplo, el error que comete la estudiante B. en el Problema 17 del Pre-test(F). Para ello, recordemos primero el enunciado del problema:

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les da positivo?

La Figura 5.89 corresponde al fragmento de la resolución donde se observa el error de relación.

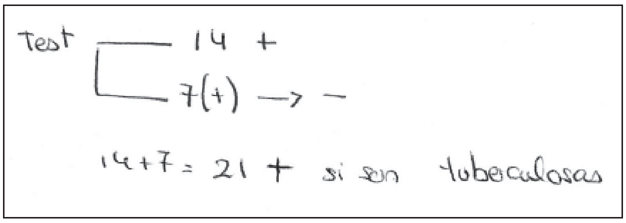


Figura 5.89.

Consideramos que la estudiante interpreta correctamente la información "había 14 personas a las que el test les resultó positivo", representada como "14 +", y también la información "a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo", representada como "7(+) → –".

Sin embargo, ya en la representación de esta información, aparece la primera señal de que la estudiante identifica los sucesos "dar positivo" y "ser tuberculosa" como una misma cosa, puesto que hace referencia a dichos sucesos de la misma manera, con el signo "+". Es decir el signo "+" significa tanto "dar positivo" como "ser tuberculosa".

Luego establece la relación:

14 + 7 = 21

Que puede interpretarse como:

n(positivas) + n(tuberculosas negativas) = n(tuberculosas)

Esta relación sólo tiene sentido bajo la suposición de que todas las personas positivas son tuberculosas, es decir, bajo la suposición de que el test no produce falsos positivos. En ese caso, el número total de personas tuberculosas será el número de personas con resultado positivo (todas tuberculosas) y el número de personas que, siendo tuberculosas, han obtenido un resultado negativo en el test.

Otro claro ejemplo de influencia del contexto en un error de relación lo encontramos en la resolución filmada del Problema 17 del Pre-test(F), realizada por las estudiantes A. y M. A lo largo del proceso de resolución, las estudiantes borran varias veces todo o gran parte de lo escrito en la pizarra, reinterpretando la información del enunciado y abordando el problema desde el principio en cada una de estas ocasiones. La relación falsa en cuestión aparece hasta tres veces, y numéricamente puede expresarse como 17 – 14 = 3. El sentido de esta relación depende de la interpretación que hacen las estudiantes de los números, es decir de las componentes verbales de las cantidades que intervienen. La primera vez que aparece, consideramos que corresponde a la relación entre sucesos:

n(tuberculosas) – n(positivas) = n(cantidad arbitraria)[34]

Esto se desprende del árbol que construyen para organizar la información (véase Figura 5.90) y del diálogo que mantienen entre los ítems {32} y {49}:

{32} M.: Mira, de treinta, vale, diecisiete, o sea, mmm, sí que tienen y trece no la tienen.

{33} A.: El test…

(A recuadra la palabra "test" que aparece junto a "30 pers")

{34} M.: Claro. (Pausa) Mira.

(A saca dos ramas a partir de la palabra test)

{35} A.: Catorce te dice que dieron positivo.

(En una rama escribe "14 +")

[…]

{38} M.: Lo cual quiere decir que aquí (señala el lugar donde está escrito "14 +") faltan tres personas que no…, no sabemos que pasó. Vale, que supuestamente…

{39} A.: Faltan tres personas… (A escribe "-> faltan 3 pers" junto a "14+")

{40} M.: Claro. Supuestamente les daría negativo. Porque si no salen ahí…

En el ítem {38}, M. habla de tres personas que faltan, señalando la cantidad "14 +", por lo que entendemos que son personas que faltan para llegar a diecisiete. Es decir, la estudiante M. parece considerar que las catorce personas con diagnóstico positivo están incluidas en el conjunto de las diecisiete personas tuberculosas. Así, el conjunto de personas tuberculosas estaría formado por las catorce personas con diagnóstico positivo y otras tres para las cuales, en palabras de M., "no sabemos qué pasó". A

[34] Recordemos que usamos el término cantidad arbitraria para referirnos a una cantidad cuya componente verbal es desconocida, es decir, aquella que, aún teniendo una componente numérica conocida (en este caso el número 3), ésta no viene descrita y no es posible atribuirle un sentido, salvo el que le confiere su propia construcción.

continuación, en el ítem {40}, M. añade “Supuestamente les daría negativo. Porque si no salen ahí…”, pero la reflexión queda en el aire y no se modifica la descripción del número 3 en la pizarra.

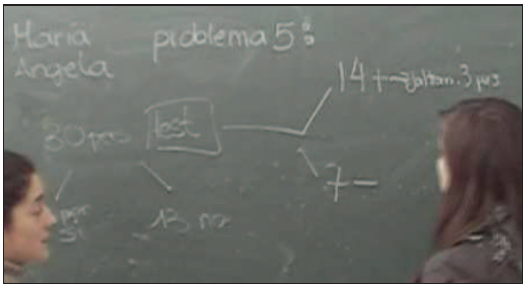


Figura 5.90.

La segunda vez que aparece esta relación, la expresión “faltan 3 pers” ya ha sido borrada de la pizarra y sucede entre los ítems {94} y {114} del siguiente episodio:

{94} M.: De las que sí que lo tienen (M señala “17 per si”), catorce les da positivo. Vale, diecisiete menos catorce…

{95} A y M (a la vez): tres.

{96} M.: Esas tres… les dio negativo.

{97} A.: No son tuberculosas y les da positivo.

{98} M.: Claro.

[...]

{102} M.: Diecisiete, menos catorce (M escribe la resta 17-14 = 3)

{103} A.: Tres.

{104} M.: Son tres.

{105} A.: Tres personas les da…

{106} M.: … les da negativo…

{107} A.: …les da positivo, pero no lo son. ¿No?

{108} M.: No. Les da negativo y lo son. Porque mira…

{109} A.: No, les da positivo y no lo son.

{110} M.: Pero esto es que sí que lo tienen (señalando donde pone 17 per. si) No que les da positivo, que sí que lo padecen.

{111} A.: Catorce personas (señala donde pone 14 +)

{112} M.: Que son tuberculosas. Estas de aquí son. (M. recuadra la expresión 17 per. si y escribe en la parte superior izquierda del recuadro, por fuera, la palabra “son”)

{113} A.: (Leyendo) A ver, entre las personas que no son tuberculosas, (señala describiendo círculos con el dedo donde pone "13 no") ¿a qué porcentaje les da positivo el test?

(Silencio)

{114} M.: A estos les da positivo (señala el 14 de la resta 17 – 14 = 3) pero no son el total de diecisiete que lo padecen, y faltan tres, que no les da positivo, que les da el test negativo.

En el ítem {94} la estudiante M. dice "De las que sí que lo tienen, catorce les da positivo. […]". Según esta expresión, la interpretación de la cantidad asociada al número catorce se acerca más a una intersección que a una marginal, pero la estructura del árbol que se muestra en la Figura 5.91, nos hace mantenernos en la consideración inicial de que la interpretación que hacen las estudiantes es la correcta, es decir, que interpretan la cantidad como la marginal "14 personas con test positivo".

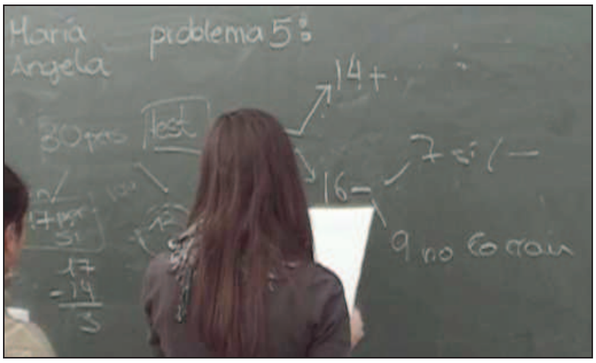


Figura 5.91.

Por otra parte, se confirma de nuevo la creencia de que todos los positivos corresponden a personas tuberculosas, es decir, que el test no arroja falsos positivos. Y esta creencia es la que les lleva a considerar otra vez la relación 17 – 14 = 3. Sin embargo, las dos estudiantes no se ponen de acuerdo a la hora de interpretar la nueva cantidad obtenida. La estudiante A. considera que se trata de "personas no tuberculosas positivas" (ítem {107}) mientras que la estudiante M. interpreta la cantidad como "personas tuberculosas negativas" (ítem {108}). Finalmente, abandonan la cantidad y no llegan a escribir su descripción.

Posteriormente, modifican el árbol y la ubicación del número 14 en el nuevo árbol nos hace cambiar de opinión en torno al significado que le atribuyen a esta cantidad, ya que en este caso su representación apunta hacia la conjunción *tuberculosas positivas*, en lugar de la marginal *positivas* (véase Figura 5.92). En efecto, la cantidad "14 +" parte directamente de la cantidad "17 tuberculosas" en el árbol y este es el motivo por el que la asociamos a la intersección *tuberculosas positivas* y no a la marginal *positivas* como antes.

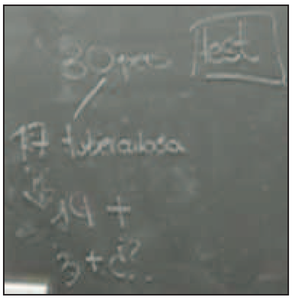


Figura 5.92.

En cuanto a la relación falsa que nos ocupa (17-14=3), aparece por tercera y última vez, en el periodo en el que transcurren los ítems {173} y {179}:

{173} A.: De esas diecisiete, salen catorce positivas.

{174} M.: De aquí (saca una flecha desde 17)…

{175} A. y M. (a la vez): Catorce.

(M escribe 14 +)

{176} A.: Te faltan tres positivas, porque…

{177} M.: Sí, sí, está claro.

{178} A.: Tres positivas (ininteligible por coincidir con ruido de tiza).

(A escribe 3 + ¿?)

{179} M.: Vale.

Esta vez, no escriben la operación en la pizarra pero sí el resultado, que aparece con una descripción ambigua ("3 + ¿?"), que podría interpretarse como "hay tres personas con test positivo pero no sabemos si son tuberculosas o no", lo cual entraría en contradicción con la representación de la Figura 5.92, que sugiere que estas 3 personas se encuentran entre las 17 tuberculosas.

En conclusión, las estudiantes usan en repetidas ocasiones una relación entre cantidades que les conduce a un resultado, el número 3, para el que no son capaces de producir un sentido. El uso recurrente de esta operación viene motivado por la concepción equivocada de que las 14 personas positivas se encuentran entre las 17 tuberculosas. Sólo hay una ocasión, entre los ítems {84} y {86}, en la que las estudiantes ponen en duda sus creencias acerca de la relación entre padecer o no la enfermedad y el resultado del test:

{84} A.: Pero, ¿qué dices, tío? Catorce positivas… Es que ¿sabes que pasa? Es que decimos que cuando diecisiete personas son negativas (señala "17 per si"), catorce (señala "14 +"), sabes, que cuando es que tienen tuberculosis sale positivo ¿y tú que sabes? ¿a ti te lo ha dicho? (risas)

{85} M.: Aquí sólo te dicen, diecisiete personas tuberculosas…

{86} A.: (Entre risas) ¿Y el test sabes si es positivo o no, Dios mío? Anda que… (Lee) El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay diecisiete personas que son tuberculosas.

Sin embargo, estas reflexiones no les hacen abandonar la relación "17 - 14 = 3", a cuyo resultado no es posible asignarle un sentido en el contexto del problema (salvo el que le confiere su propia construcción).

Para acabar, debemos admitir que no en todas las resoluciones del Problema 17 (el único formulado en el contexto Diagsalud) que contienen errores de relación de este tipo, se aprecian tan claramente los razonamientos falsos que hay detrás, sobre todo cuando se calculan cantidades arbitrarias no descritas a las que nos ha sido imposible atribuir un significado. Sin embargo, también en estos casos nos parece que los errores se derivan de dificultades en la identificación de cantidades y relaciones entre cantidades, motivadas por el contexto, lo cual sería coherente con el hecho de que este contexto es uno de los más influyentes en las dificultades de los problemas (Carles y otros, 2009). Un resumen de todos los errores de relación observados en las resoluciones del Problema 17, lo encontramos en la Tabla 5.27.

5.3.4.2.1.3 – Errores de relación en el contexto Diagcalidad.

Un ejemplo de error de relación en este contexto lo encontramos en la resolución del Problema 18a en el Pre-test(F) realizada por el estudiante V. En la Figura 5.93, mostramos el enunciado del problema y la resolución realizada por el estudiante.

Al no tener en cuenta el primer árbol mediante el que organiza la información, puesto que está tachado, y atenernos a lo que viene a continuación, consideramos que el estudiante interpreta correctamente la información “95 piezas fueron correctas” (representada como “95 c”) y “77 fueron calificadas de correctas por el dispositivo” (representada como “77 cc”). En ese caso, el cálculo 95 – 77 = 18, atiende a la relación errónea:

n(correctas) – n(calificadas de correctas) = n(calificadas como incorrectas, siendo correctas)

Sólo hay dos maneras de dar sentido a esta relación establecida por el estudiante.

La primera, aceptando que en realidad hubiera interpretado la información “77 fueron calificadas de correctas por el dispositivo” como si se tratara de la intersección “77 correctas calificadas de correctas” (como parece haberlo interpretado en primera instancia, al construir el primer árbol).

Resolución	Relación	Descripción (sólo en términos de sucesos)
AyM_P17_F(2,3)	n(A) – n(B) = c.a	“tuberculosas” – “positivas” = “personas que faltan”
AyM_P17_F(4)	n(A) – n($A \cap B$) = c.a.	“tuberculosas” – “tuberculosas positivas” = “+ ¿?"
AyM_P17_F(6)	n($\overline{B}$) – n($\overline{A}$) = n($A \cap \overline{B}$)	“negativas” – “no tuberculosas” = “tuberculosas negativas”
AyM_P17_F(6)	n(B) – n($A \cap \overline{B}$) = c.a.	“positivas” – “tuberculosas negativas” = c.a. (descrita como “positiva”)
A_P17_%	100 – n($A \cap \overline{B}$) = n($A \cap B$)	100 – “tuberculosas negativas” = “tuberculosas positivas”
B_P17_F	n(B) + n($A \cap \overline{B}$) = n(A)	“positivas” + “tuberculosas negativas” = “tuberculosas”
C_P17_%	c.a. – 100 = n($\overline{A} \cap B$)	c.a. – 100 = “no tuberculosas positivas”
H_P17_%	n($A \cap \overline{B}$) + n(B) = n(B)	“tuberculosas negativas” + “positivas” = “positivas”
	n(B) – n(A) = n(B)	“positivas” – “tuberculosas” = “positivas”
M_P17_%	n($A \cap \overline{B}$) + n(B) = n(T)	“tuberculosas negativas” + “positivas” = “personas que se hicieron el test”
	n(T) – n(A) = n($\overline{A} \cap B$)	“personas que se hicieron el test” – “tuberculosas” = “no tuberculosas positivas”
R_P17_F	n(A) – n(B) = c.a.$_1$	“tuberculosas” – “positivas” = c. a.$_1$
	c.a.1 + n($A \cap \overline{B}$) = c.a.$_2$	c. a. 1 + “tuberculosas negativas” = c. a.$_2$
	n(B) – c.a.$_2$ = n($\overline{A} \cap B$)	“positivas” – c. a.$_2$ = “no tuberculosas positivas”

Tabla 5.27. Errores de relación identificados en los pre-test en el uso de relaciones aditivas en el contexto Diagsalud.

La segunda, asumiendo que para el estudiante todas las piezas calificadas de correctas son correctas (es decir, asumiendo que identifica las cantidades “número de piezas calificadas de correctas” y “número de piezas calificadas de correctas que son correctas” como una misma cosa). Si restamos esta cantidad del número total de correctas obtenemos, efectivamente, el número de piezas calificadas de incorrectas, siendo correctas. Nos hemos decantado por esta segunda interpretación de la actuación del estudiante y observamos en ella, nuevamente, concepciones equivocadas acerca de la fiabilidad del test: todas las piezas calificadas de correctas, son correctas. El estudiante no contempla la existencia de falsos positivos.

Como ocurre con el Problema 17, otros errores de relación observados en la resolución del Problema 18a no son fácilmente explicables, aunque las dificultades relacionadas con el contexto podrían estar detrás de todos ellos. La Tabla 5.28 resume los errores de relación encontrados en el contexto Diagcalidad.

Enunciado: Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado fue que 95 piezas fueron correctas, 77 fueron calificadas como correctas por el dispositivo y que 4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

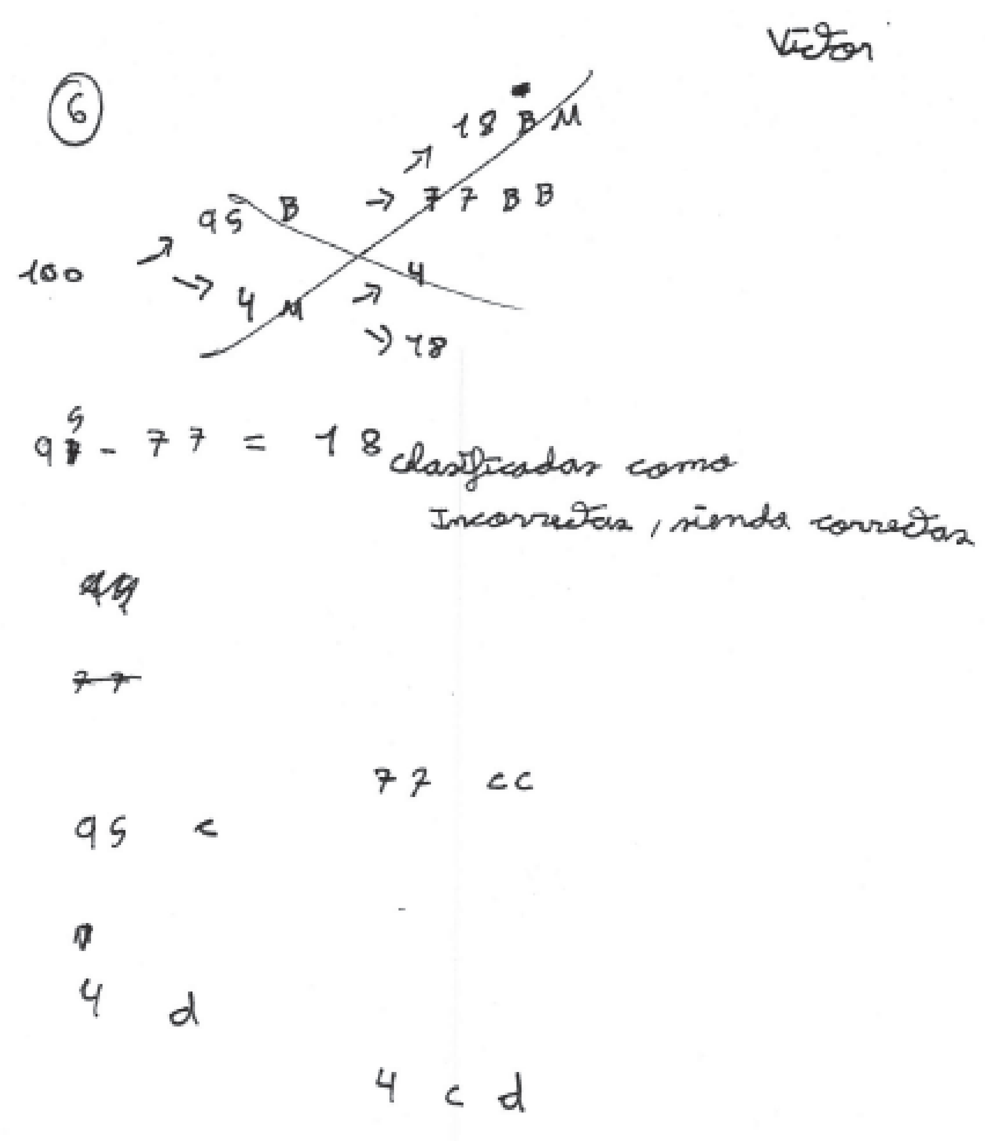


Figura 5.93. Resolución del Problema 18a en el Pre-test(F) realizada por el estudiante V.

Resolución	Relación	Descripción
AyM_P18a_F	$n(B) + n(\overline{B}) = c.a_1$	"calificadas de defectuosas" + "calificadas de correctas" = $c.a_1$ (¿total piezas analizadas?)
AyM_P18a_F	$N - c.a_1 = c.a_2$	N – $c.a_1$(¿total piezas analizadas?) = "piezas por analizar"
AyM_P18a_F	$n(A) - n(B) = c.a_3$	"correctas" – "calificadas de correctas" = c.a. no descrita
AyM_P18a_F	$c.a_2 + c.a_3 = n(\overline{A} \cap B)$	"piezas por analizar" + (diferencia entre las piezas correctas y las calificadas de correctas) = "piezas defectuosas calificadas de correctas"
AyM_P18a_F	$n(\overline{A} \cap B) + n(B) = n(B)$	"piezas defectuosas calificadas de correctas" + "piezas calificadas de correctas" = "piezas calificadas de correctas"
C_P18a_F	$N - c.a_1 = c.a_2$	N – "muestra de piezas que han sido calificadas por el dispositivo" = "piezas restantes que no sé si pertenecen al grupo de correctas o incorrectas"
H_P18a_%	$100 - n(A) - n(\overline{A}) = c.a$	(Relación no ternaria) 100 – "correctas" – "defectuosas" = c.a.
L_P18a_%	$c.a - 100 = P(A \mid B) \cdot 100$	c.a. – 100 = "correctas entre las calificadas de correctas"
V_P18a_F	$n(A) - n(B) = n(A \cap \overline{B})$	"correctas" – "calificadas de correctas" = "correctas calificadas de incorrectas"

Tabla 5.28. Errores de relación identificados en los pre-test en el uso de relaciones aditivas en el contexto Diagcalidad.

5.3.4.2.2 – Errores en el uso de la regla de tres para el cálculo del porcentaje que se da como resultado.

Puesto que en los problemas de los pre-test se pregunta por un porcentaje, los estudiantes que llegan a dar un resultado responden con un porcentaje. La interpretación que le atribuimos al estudiante del porcentaje que da como resultado unas veces se corresponde con la condicional por la que se pregunta y otras, no. Lo que es invariable en todas las resoluciones de los pre-test es que, cuando existe un cálculo específico para la obtención de dicho porcentaje, éste se hace mediante una regla de tres. Veremos a continuación qué tipo de errores de relación se han cometido en el planteamiento y resolución de la regla de tres, distinguiendo entre el caso en que el resultado sea la condicional por la que se pregunta y el caso en que sea una cantidad distinta, según nuestra interpretación particular de cómo interpreta el estudiante la cantidad con la que responde a la pregunta del problema. La diferencia entre ambos casos radica en que en el primero, suponemos que el estudiante tiene intención de calcular la condicional por la que se pregunta y podemos considerar lo que hace como una forma concreta de actuar para la obtención de esta cantidad. En el segundo caso, no podemos hablar de errores en el cálculo de la condicional, puesto que la intención que le atribuimos al estudiante al realizar estos cálculos no es la de obtener dicha condicional, sino otra cantidad, la cantidad con la que responde a la pregunta del problema.

En cuanto a la representación en el grafo de este tipo de error de relación nos hemos ceñido a lo descrito en el apartado 4.9.3.1.1. (p. 156), que recordamos a continuación. Cuando el resolutor obtiene una condicional de manera correcta, aunque sea mediante el uso de la regla de tres, asociamos a la operación la arista multiplicativa del grafo teórico correspondiente a la relación ternaria multiplicativa correspondiente. Pero en el caso de que el resolutor cometa errores en el planteamiento de una regla de tres y no sea posible asignarle una relación multiplicativa de las contenidas en el grafo teórico, usaremos para la representación de la misma el método usado en Cerdán (2008), que consiste en reducir las relaciones de proporcionalidad directa a dos relaciones ternarias, poniendo en juego la constante de proporcionalidad. Así, la relación de proporcionalidad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ se representa como se muestra en la Figura 5.94.

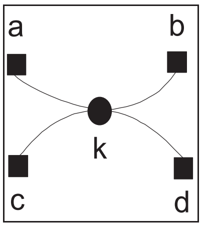


Figura 5.94.

Donde se distinguen dos relaciones ternarias multiplicativas:

$$a = b \cdot k$$

$$c = d \cdot k$$

5.3.4.2.2.1 – Errores de relación en el cálculo de la condicional por la que se pregunta.

Como se acaba de señalar, son los errores que se han observado en aquellas resoluciones en las que consideramos que la interpretación que hace el estudiante de la cantidad que da como resultado es la de la condicional por la que se pregunta, atendiendo bien a la construcción, bien a la descripción o bien a ambas.

Supongamos que los datos del problema están formulados en frecuencias absolutas (y si están en porcentajes, se traducen a frecuencias) y que la pregunta del problema es un porcentaje con el que se mide la probabilidad condicional $P(A|B)$, donde A y B son dos sucesos genéricos. Llamando x al tanto por cien buscado, la regla de tres que nos proporciona dicho porcentaje es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} n(B) & \text{———} & 100 \\ n(AB) & \text{———} & x \end{array}$$

También serían válidas todas aquellas que resultaran de modificar la disposición de los números, siempre y cuando dieran lugar a las mismas proporciones que la anterior. Y una de esas posibles proporciones que se pueden formar a partir de la regla de tres es:

$$\frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{x}{100}$$

La proporción anterior implica la reducción del espacio muestral por la restricción al suceso B, ya que n(B) actúa como total: n(AB) se compara con n(B), como x se compara con 100, que sobre 100, representa el total.

Finalmente, basta despejar x, para obtener el tanto por cien por el que se pregunta:

$$x = \frac{n(AB)}{n(B)} \cdot 100$$

Lo descrito sería el modelo de competencia para el cálculo de la condicional mediante regla de tres. Los errores observados, que pasamos a describir, se derivan de la pertinencia de las cantidades que intervienen en la regla de tres, el formato de expresión de los números y el orden en que se disponen los números. Veamos los errores que se cometen en relación a cada uno de estos tres factores.

<u>Las cantidades que intervienen no están expresadas en la misma escala.</u>

La marginal y la intersección que intervienen en la regla de tres no están expresadas en la misma escala. O sea, la tercera componente de las cantidades, que hace referencia al formato de datos, es distinta en ambas: en una el número representa una frecuencia absoluta y en la otra, un porcentaje sobre el total de la muestra.

Este error se ha observado únicamente en la resolución del Problema 1 del Pre-test(F) llevada a cabo por las estudiantes A y M.

El enunciado del problema es como sigue:

La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Si denotamos por A al suceso "ser chica" y por B al suceso "llevar gafas", en términos de probabilidades, la pregunta del problema es P(A|B).

La regla de tres que escriben las estudiantes en la pizarra para el cálculo del resultado es la que se muestra en la Figura 5.95.

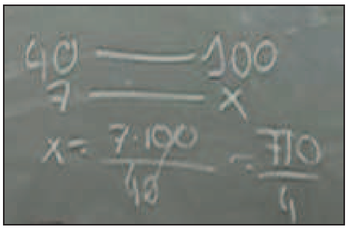


Figura 5.95.

Y la respuesta completa a la pregunta del problema se muestra en la Figura 5.96.

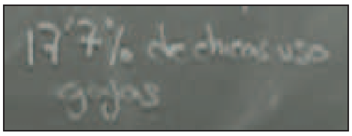


Figura 5.96.

El número 40 es la componente numérica de la marginal B, expresada en tanto por cien respecto del total de la muestra:

$$40 = \frac{n(B)}{N} \cdot 100$$

El número 7 es la componente numérica de la intersección $A \cap B$, expresada como frecuencia absoluta.

La incógnita x es la componente numérica de la condicional buscada: A|B.

Así, una de las proporciones posibles que se podrían escribir a partir de la regla de tres anterior (la que hemos representado en el grafo de la resolución) es:

$$\frac{\frac{n(B)}{N} \cdot 100}{n(A \cap B)} = \frac{100}{x}$$

Y la relación errónea que finalmente se usa para el cálculo de la x podría expresarse como:

$$x = \frac{n(A \cap B) \cdot 100}{\frac{n(B)}{N} \cdot 100} = \frac{N \cdot n(A \cap B)}{n(B)}$$

Así pues, el error se debe a que el número correspondiente al suceso condicionante (la marginal) expresa un tanto por cien con respecto al tamaño de la muestra, N, mientras que el número correspondiente al suceso condicionado (la intersección) expresa una frecuencia absoluta. Consideramos que este error está relacionado con dificultades para relacionar cantidades expresadas en formatos distintos (frecuencias vs porcentajes) y con dificultades en el uso de la regla de tres.

La disposición de los datos no conduce a proporciones correctas

En el planteamiento de la regla de tres, las cantidades se disponen de tal manera que las proporciones que se obtienen no son correctas.

Gráficamente, la estructura de una regla de tres en la que consideramos que existe un error en la disposición de las cantidades es como sigue (con cualquiera de las variaciones posibles en la disposición de los datos, siempre y cuando den lugar a las mismas proporciones):

$$\begin{array}{ccc} 100 & \text{———} & \text{cantidad 1} \\ \text{cantidad 2} & \text{———} & x \end{array}$$

En ella, cantidad 1 y cantidad 2 son las marginales y/o intersecciones que intervienen en la regla de tres, que en las resoluciones de los estudiantes unas veces son las pertinentes y otras, no.

Una de las proporciones posibles que se forma a partir de esta regla de tres es como sigue:

$$\frac{100}{cantidad\,2}=\frac{cantidad\,1}{x}$$

Observamos que la x y el número 100 se encuentran, ambos, en las posiciones extremas. Es posible hacer variaciones en la disposición de los datos que no alteren las relaciones entre cantidades, en las que la x y el 100 ocuparían ambas la posición de los medios. Pero, en ningún caso, resultaría posible formar una razón con la x y el 100. Como consecuencia, siempre se obtiene la cantidad buscada (x) como producto, y no como cociente, de la cantidad 1 y la cantidad 2:

$$x=\frac{cantidad\,1\cdot cantidad\,2}{100}$$

A modo de ejemplo, mostraremos la ocurrencia de este error en la resolución del Problema 1 del Pre-test(%), realizada por la estudiante T.

El enunciado del problema es como sigue:

La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Si denotamos por A al suceso “ser chica” y por B al suceso “llevar gafas”, en términos de probabilidades, la pregunta del problema es P(A|B).

La regla de tres que plantea la estudiante (Figura 5.97) tiene la estructura que se acaba de describir:

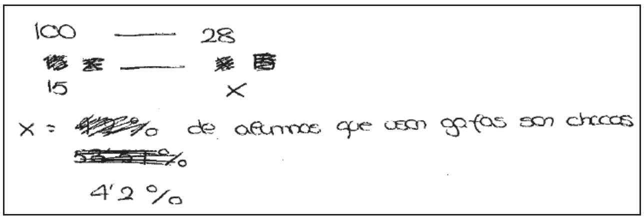


Figura 5.97.

El número 28 es la componente numérica de la marginal B, expresada en tanto por cien respecto del total de la muestra y haremos referencia a ella mediante la notación %(B):

$$28 = \frac{n(B)}{N} \cdot 100 = \%(\mathrm{B})$$

El número 15 es la componente numérica de la intersección $A \cap B$, expresada en tanto por cien respecto del total de la muestra, que es desconocido y denotamos por N:

$$15 = \frac{n(A \cap B)}{N} \cdot 100 = \%(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

Y la incógnita x es la componente numérica de la condicional buscada: A|B.

Así, una de las proporciones posibles que se podrían escribir a partir de la regla de tres anterior (la que hemos representado en el grafo de la resolución) es:

$$\frac{100}{\%(A \cap B)} = \frac{\%(B)}{x}$$

De donde:

$$x = \frac{\%(B) \cdot \%(A \cap B)}{100} = \frac{\frac{n(B)}{N} \cdot 100 \cdot \frac{n(A \cap B)}{N} \cdot 100}{100} = P(B) \cdot P(A \cap B) \cdot 100$$

La definición de probabilidad condicional que subyace bajo esta relación, en términos de probabilidades es la siguiente:

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) \cdot P(B)$$

Así pues, tanto la marginal como la condicional que intervienen son las pertinentes pero no están dispuestas de manera correcta en la regla de tres, lo que conduce a un error de relación en el cálculo de la condicional. No obstante, no tenemos evidencia suficiente sobre qué es lo que provoca el error: podría tratarse de un error conceptual o bien deberse a dificultades en el manejo de la regla de tres.

Alguna de las cantidades que intervienen no es pertinente.

El objetivo de la regla de tres es el cálculo de un porcentaje que, en términos de probabilidades, se usaría para asignar a una probabilidad condicional en una situación de incertidumbre, pongamos P($A \mid B$) donde A y B son dos sucesos genéricos. Por tanto, dos de los términos de esta regla de tres han de ser, necesariamente, la marginal y la intersección directamente relacionadas con dicha condicional, P(B) y P($A \cap B$), respectivamente.

Decimos que las cantidades que intervienen en la regla de tres no son pertinentes cuando bien la marginal, bien la intersección o ambas son reemplazadas por otras cantidades. Veamos, a modo de ejemplo, el error cometido por la estudiante L. en la resolución del Problema 18a en el Pre-test(%). El enunciado del problema es como sigue:

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El 95% de las piezas eran correctas, el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo y el 4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

Si denotamos por A al suceso "ser una pieza correcta" y por B al suceso "ser una pieza calificada de correcta", en términos de probabilidades, la pregunta del problema es P(A|B) y la regla de tres que plantea la estudiante aparece en la Figura 5.98.

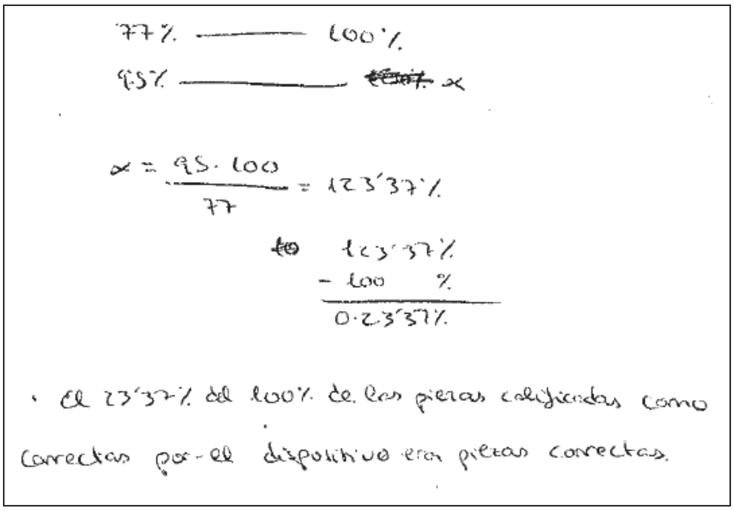


Figura 5.98.

El número 77% es la componente x de la marginal correspondiente al suceso condicionante, B, expresada en tanto por cien respecto del total de la muestra, que es desconocido y denotamos por N:

$$77 = \frac{n(B)}{N} \cdot 100 = \%(B)$$

El número 95% es la componente numérica de la marginal correspondiente al suceso condicionado, A, que no está directamente relacionada con la condicional buscada y que, por tanto, no es la cantidad pertinente. Ocupa el lugar de la intersección correspondiente al suceso $A \cap B$. El formato de expresión es también el de porcentaje respecto del total de la muestra:

$$95 = \frac{n(A \cap B)}{N} \cdot 100 = \%(A \cap B)$$

La incógnita x es la componente numérica de la condicional buscada: P(A|B).

Así, una de las proporciones posibles que se podrían escribir a partir de la regla de tres anterior (la que hemos representado en el grafo de la resolución) es:

$$\frac{\%(B)}{\%(A)} = \frac{100}{x}$$

Y la relación errónea que finalmente se usa para el cálculo de la x podría expresarse como:

$$x = \frac{\%(A)}{\%(B)} \cdot 100$$

La definición de probabilidad condicional que subyace, en términos de probabilidades es la siguiente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Es decir, la estudiante calcula la condicional como un cociente entre marginales.

En total, se han observado los siguientes errores relacionados con la no pertinencia de las cantidades usadas:

- Caso 1: Usar la marginal que representa el suceso condicionado en lugar de la intersección directamente relacionada con la condicional. De esta manera, la condicional se halla a partir de dos marginales.
- Caso 2: Usar una intersección diferente de aquella que está directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.

- Caso 3: Usar la marginal correspondiente al suceso condicionado en lugar de la marginal correspondiente al suceso condicionante. Es decir, usar la marginal directamente relacionada con la condicional transpuesta.
- Caso 4: Usar la marginal que representa al suceso condicionado como si se tratara del suceso condicionante. Usar la marginal del suceso condicionante en lugar de la intersección directamente relacionada con la condicional.
- Caso 5: Usar una intersección diferente de aquella que está directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta. Usar en lugar de la marginal del suceso condicionante, su complementaria.

Por otra parte, los casos de error descritos a veces se presentan de manera aislada y otras veces combinados. Veamos un ejemplo en el que se combinan los errores descritos como casos 2 y 3.

Se trata de la resolución del Problema 2a del Pre-test(%), realizada por la estudiante M.

El enunciado del problema es como sigue:

Un centro escolar esta formado por chicos y chicas. Hay un 28% de estudiantes que usan gafas, un 15% de chicas que las usan y un 37% de chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Si denotamos por A al suceso “ser chica” y por B al suceso “llevar gafas”, en términos de probabilidades, la pregunta del problema es P(B| $\overline{A}$).

La regla de tres que plantea la estudiante se muestra en al Figura 5.99.

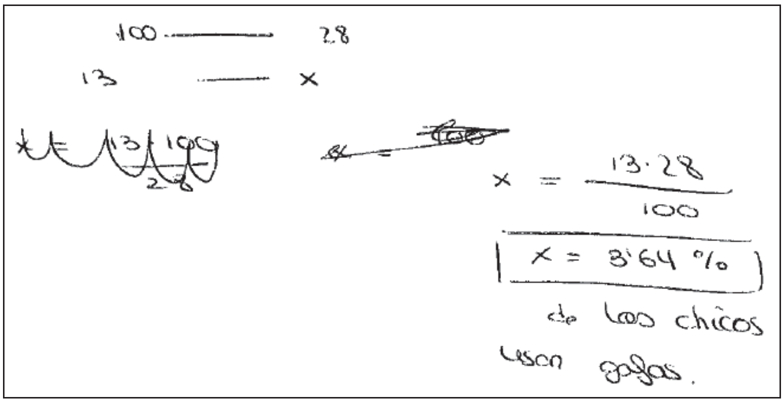


Figura 5.99.

En primer lugar, se observa que tiene la estructura errónea anteriormente descrita, luego contiene un error de colocación de las cantidades (caso 2)

Veamos qué ocurre en relación a las cantidades que intervienen.

El número 28 es la componente x de la marginal B, expresada en tanto por cien respecto del total de la muestra, que es desconocido y denotamos por N:

$$28 = \frac{n(B)}{N} \cdot 100 = \%(B)$$

Esta marginal no es la que está directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta, puesto que B es el suceso condicionado y no el condicionante. Por tanto, es una cantidad no pertinente (caso 3).

El número 13 es la componente x de la intersección $\overline{A} \cap B$, que sí es pertinente, ya que es la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta. Viene expresada también en forma de tanto por cien respecto del total de la muestra:

$$13 = \frac{n(\overline{A} \cap B)}{N} \cdot 100 = \%(\overline{A} \cap B)$$

A pesar de que una de las cantidades no es pertinente, consideramos que la intención de la estudiante al plantear la regla de tres sí era la de hallar la condicional por la que se pregunta, ya que es así como describe el resultado.

Una de las proporciones posibles que se podrían escribir a partir de la regla de tres planteada por la estudiante (la que hemos representado en el grafo de la resolución) es:

$$\frac{100}{\%(A \cap \overline{B})} = \frac{\%(B)}{x}$$

Que es incorrecta y conduce al cálculo del tanto por cien, x, como:

$$x = \frac{\%(B) \cdot \%(\overline{A} \cap B)}{100} = \frac{\frac{n(B)}{N} \cdot 100 \cdot \frac{n(\overline{A} \cap B)}{N} \cdot 100}{100} = P(B) \cdot P(\overline{A} \cap B) \cdot 100$$

En términos de probabilidades:

$$P(B \mid \overline{A}) = P(B) \cdot P(\overline{A} \cap B)$$

Y considerando los sucesos genéricos A y B, la definición de probabilidad condicional que subyace es:

$$P(A \mid B) = P(A) \cdot P(A \cap B)$$

Es decir, la probabilidad condicional como producto (y no como cociente) de la probabilidad del suceso condicionado (en lugar de la probabilidad del suceso condicionante) y de la probabilidad de la intersección.

En términos de probabilidades, y considerando los sucesos genéricos A y B, las diferentes relaciones erróneas que han aparecido para el cálculo de la condicional son las que aparecen en la Tabla 5.29.

Resolución	Mezcla formatos	Orden de colocación	Cantidades no pertinentes					Construcción de la condicional
			Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	
AyM_P1_F	x							$P(A\mid B)=\dfrac{N\cdot P(A\cap B)}{100\cdot P(B)}$
T_P1_%		x						$P(A\mid B)=P(A\cap B)\cdot P(B)$
T_P10x2_%		x						
L_P18a_%			x					$P(A\mid B)=\dfrac{P(A)}{P(B)}$
L_P17_%				x				$P(A\mid B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}$
M_P2a_%		x			x			$P(A\mid B)=P(A\cap B)\cdot P(A)$
T_P9_%		x	x					$P(A\mid B)=P(A)\cdot P(B)$
T_P18_F						x		$P(A\mid B)=\dfrac{P(B)}{P(A)}$
C_P18_%								
AyM_P17_F(3)							x	$P(A\mid B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}$

Tabla 5.29. Errores de relación identificados en los pre-test en el uso de la regla de tres para el cálculo de la condicional por la que se pregunta.

5.3.4.2.2.2 – Errores de relación en el cálculo del porcentaje que se da como resultado cuando éste no se trata de la condicional por la que se pregunta.

En este apartado trataremos de los errores que se han observado en el cálculo de la cantidad que se da como resultado, cuando consideramos que el estudiante no interpreta dicha cantidad como la condicional por la que se pregunta (comete un error de tipo E5: dar como resultado un número distinto de la condicional por la que se pregunta). En la mayoría de las resoluciones se obtiene un porcentaje que, atendiendo a su construcción, no tiene sentido en el contexto del problema, aunque el resolutor sí le atribuye un sentido.

Según las cantidades que intervienen en la regla de tres, hemos observado los siguientes casos:

- Caso 1: Se usa la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta y otra intersección.

- Caso 2: Se usa la marginal correspondiente al suceso condicionante y la marginal correspondiente al suceso condicionado.
- Caso 3: Se usa la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta y una intersección que no es la que está directamente relacionada con la condicional.
- Caso 4: Se usan dos marginales, ninguna de ellas relacionada con la condicional por la que se pregunta.
- Caso 5: Se usan dos números que han sido ambos asignados a la misma cantidad (doble asignación): una marginal no directamente relacionada con la condicional.
- Caso 6: Se usan la marginal y la intersección directamente relacionadas con la condicional transpuesta.

Por otra parte, en la mayoría de las resoluciones la regla de tres presenta la estructura errónea descrita anteriormente (p. 299).

Señalamos también que en una de las resoluciones (la del Problema 2a del Pre-test(F) realizada por T.), la estudiante plantea una regla de tres en la que no hay ningún término al que se le haga corresponder el 100%, es decir, en la que no aparece el número 100. Como consecuencia, no se produce una restricción del espacio muestral y lo que se obtiene es un porcentaje sobre el total de la muestra y no sobre el total que resulta de la restricción al suceso condicionante.

En la Tabla 5.30, que mostramos más adelante, señalamos todas las resoluciones en las que se ha observado un error de relación en el cálculo del porcentaje que se da como resultado, así como el tipo y caso de error que se comete. También indicamos el sentido que el resolutor da al porcentaje que calcula (la "x" de la regla de tres) y la relación falsa entre cantidades que se establece en dicha regla de tres.

Por último, debemos señalar que no están incluidos en la tabla dos casos observados en la resolución filmada del Problema 17 realizada por las estudiantes A. y M. El motivo es que las estudiantes plantean dos reglas de tres que luego borran, de manera que no afectan al resto del proceso de resolución. En ambos casos, el error que cometen es el de usar una cantidad no pertinente en lugar de la intersección correcta: en el primer caso se trata de otra intersección y en el segundo, de una cantidad arbitraria. Poco podemos decir sobre cómo interpretan las cantidades que se obtienen de estas reglas de tres, ya que la primera ni siquiera es hallada y el valor de la segunda no viene descrito.

Creemos necesario recordar que siempre que hablamos de cantidades, lo hacemos asumiendo la interpretación de las mismas que le hemos atribuido al estudiante. Por lo que cuando decimos que en la regla de tres interviene, por ejemplo, la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta nos referimos, en realidad, a la terna (x, n, f) que, según nuestra lectura de la resolución, el estudiante "asigna" a dicha marginal. En la mayoría de los casos, cuando el estudiante llega al cálculo del porcentaje con el que responde, ya ha cometido otros errores que "se arrastran" hasta el final y por tanto, suele haber errores en las componentes de las cantidades que usa en la regla de tres. Esto se aprecia claramente en el grafo de la resolución.

Por último, indicar que un resumen de todos los errores de cantidad y de relación observados en los pre-test puede consultarse en el Anexo 25 (p. 645).

5.4 – SOBRE LAS RESOLUCIONES DE LOS ESTUDIANTES EN EL POST-TEST.

A la hora de analizar las resoluciones del post-test, no hemos usado el grafo para representar la actuación de los estudiantes, como en el caso de las resoluciones de los pre-test. Esto se debe a que en la mayoría de los casos, los estudiantes hacen uso de la tabla no sólo para organizar la información del enunciado, sino también para calcular cantidades intermedias. Invariablemente, los estudiantes completan las tablas, es decir, hallan las cuatro intersecciones y las cuatro marginales del problema siguiendo las reglas de cálculo de la tabla pero sin hacer explícitas las relaciones entre cantidades usadas. Al disponer únicamente de registros escritos de las resoluciones, ante una tabla completa que no viene acompañada de cálculos explícitos de las cantidades que contiene, no siempre es posible observar qué relaciones se han activado exactamente, ni mucho menos el orden en que se ha hecho, lo cual sería necesario para construir el grafo de la resolución. Por otra parte, como se verá, existe una gran uniformidad en los procesos de resolución, hasta el punto de que la lectura que se hace de una única resolución con éxito se repite en la mayor parte de las resoluciones restantes y, por tanto, puede ser adoptada como modelo de la forma general de proceder de los estudiantes en el post-test.

Pero antes de proceder a la descripción de las estrategias de resolución y los errores encontrados en las resoluciones del post-test, debemos hacer algunas aclaraciones de tipo metodológico.

Como ya señalamos anteriormente, los enunciados que se proponen a los estudiantes en el post-test tienen tantas preguntas como opciones de pregunta posibles según la estructura de datos (nivel, categoría y caso) de la parte informativa del enunciado (véase apdo. 4.4.3, p. 100). Así todos los enunciados constan de dos preguntas, salvo el correspondiente al Problema 2a que sólo presenta una. Cada una de las preguntas que se formulan da origen a un problema distinto. Esto quiere decir que, técnicamente, un enunciado con dos apartados contiene dos problemas distintos, los cuales comparten la parte informativa (las tres cantidades conocidas son las mismas para ambos) y difieren en la cantidad desconocida por la que se pregunta.

Resolución	Error de colocación	Cantidades que intervienen						Interpretación de la cantidad que se da como resultado Relación falsa
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	
M_P1_%	x	x						La descripción del resultado ("son chicas, las que usan gafas") es tan ambigua que no es posible atribuirle significado. $x = \frac{\%(A \cap \overline{B}) \cdot \%(A \cap B)}{100}$
T_P2a_F			x					$x = \%(\overline{A} \cap B)$ $\%(\overline{A} \cap B) = \frac{\%(B) \cdot n(\overline{A})}{n(B)}$ No hay restricción del espacio muestral.
M_P9_%	x			x				$x = \%(A \cap \overline{B})$ $\%(A \cap \overline{B}) = \frac{\%(A) \cdot \%(\overline{A} \cap \overline{B})}{100}$
M_P10x2_%	x				x			x = %(A) $\%(A) = \frac{\%(A) \cdot \%(B)}{100}$
C_P17_%						x		$x = \%(\overline{A} \cap B)$ En la regla de tres interviene dos veces la marginal "tuberculosas".
M_P18a_%	x						x	x = %(A) $\%(A) = \frac{\%(A) \cdot \%(A \cap B)}{100}$
T_P18a_%	x						x	x = %(B|A) (condicional transpuesta) $\%(B \mid A) = \frac{\%(A) \cdot \%(A \cap B)}{100}$

Tabla 5.30. Errores de relación en los pre-test en el uso de la regla de tres para el cálculo de la cantidad que se da como resultado, cuando ésta es distinta de la condicional por la que se pregunta.

Sin embargo, a la hora de estudiar resoluciones con éxito y errores en las resoluciones de los problemas del post-test, nos tomaremos la licencia de considerar cada enunciado como un mismo problema con dos apartados. Los motivos son la necesidad de agilizar el discurso y el hecho de que en las resoluciones de los estudiantes las fases correspondientes a la organización de la información y el cálculo de cantidades intermedias se realizan una única vez y sirven tanto para la resolución del apartado a) como para la resolución del apartado b).

Debemos recordar también que en cada problema una de las preguntas de cada enunciado se corresponderá con la que presenta ese mismo enunciado en los pre-test. Concretamente, las preguntas que coinciden con las de los dos primeros cuestionarios son la del apartado a) de los Problemas 2a (con pregunta única), 9 y 17 y la del apartado b) de los Problemas 1, 10 y 18a, lo cual tuvimos presente también en los apartados 5.1.2 (p. 192), 5.1.3 (p. 195) y 5.2 (p. 206) a la hora de establecer comparaciones entre lo observado en los pre-test y el post-test.

5.4.1 – Estrategia de resolución con éxito.

Recordemos que por estrategia de resolución con éxito entendemos aquella en la que el resolutor consigue dar como resultado un número (probabilidad) correcto, de manera justificada. Por este motivo, hemos incluido en el conjunto de resoluciones con éxito aquellas en las que, siendo el resultado numérico correcto, se han cometido errores en la descripción de dicha cantidad. No se han observado otro tipo de errores en las resoluciones consideradas como resoluciones con éxito.

Recordemos que durante la enseñanza se entrenó a los estudiantes en la resolución de los problemas con la tabla de contingencia y recorriendo todas las fases de la resolución de problemas de N_0. Las resoluciones escritas con éxito del post-test reflejan esta forma de resolver los problemas y todas presentan una estructura común, compuesta de cuatro partes: descripción de sucesos básicos, tabla de contingencia completa, uso de una relación multiplicativa para la obtención de la condicional buscada y respuesta completa a la pregunta del problema, en lenguaje verbal. Sólo en escasas ocasiones (que señalaremos más adelante) las resoluciones plasmadas en el papel presentan una estructura distinta.

Para ilustrar lo expuesto, tomaremos como ejemplo la resolución del Problema 18a realizada por la estudiante T., que se muestra en la Figura 5.100.

Enunciado: Un dispositivo comprueba si una pieza recién fabricada es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se comprueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. La probabilidad de que una pieza sea correcta es de 0,95 y la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza como correcta es de 0,77. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa y el dispositivo la califique como defectuosa es de 0,04.

a) Las piezas que son correctas, ¿qué probabilidad tienen de ser calificadas como correctas por el dispositivo?

b) Las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué probabilidad tienen de ser correctas?

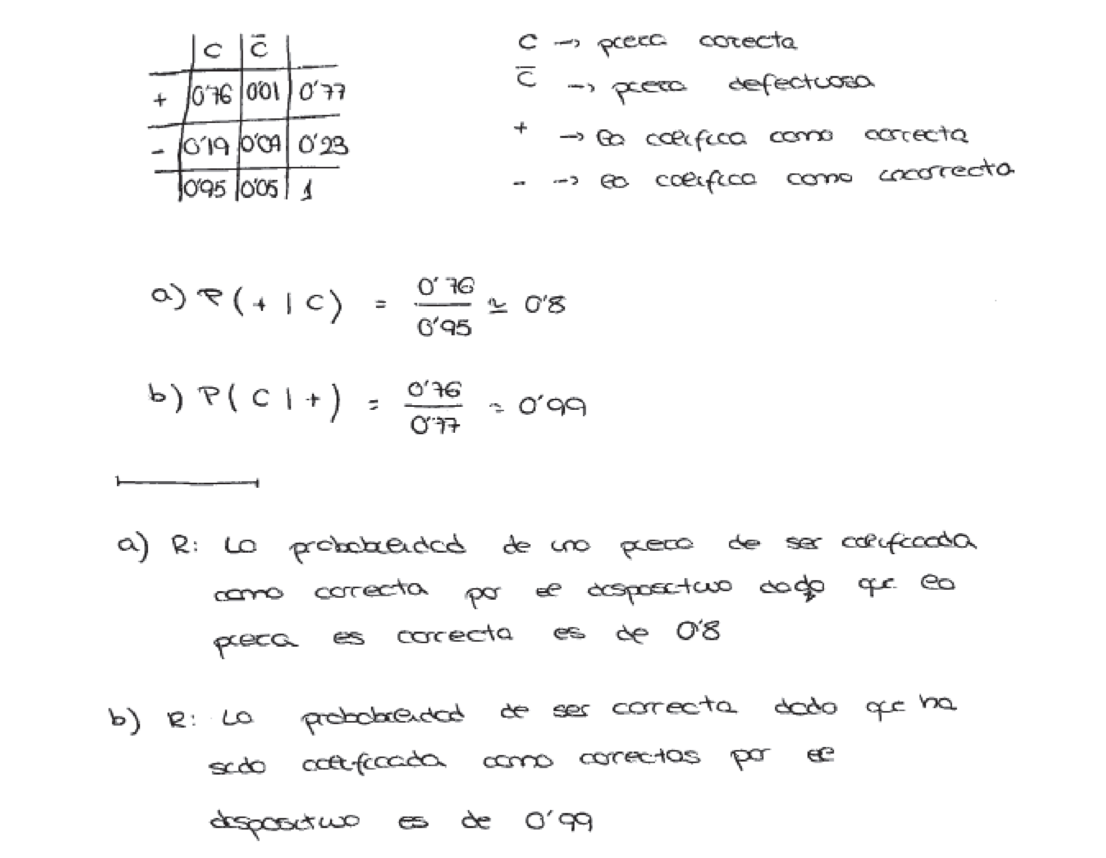


Figura 5.100. Resolución del Problema 18a del Test(P) realizada por la estudiante T.

Los pasos de que constan todas las resoluciones con éxito observadas en el post-test y, en particular, la resolución del ejemplo son los siguientes:

Identificación de sucesos básicos.

Se nombran con letras mayúsculas los dos sucesos básicos que intervienen en el problema y sus complementarios. De las treinta y nueve resoluciones con éxito, sólo en una, la del Problema 1 por la estudiante T., no aparece este paso.

En el ejemplo, T. define los sucesos “ser una pieza correcta”, “ser una pieza calificada de correcta” y sus complementarios como sigue (Figura 5.101):

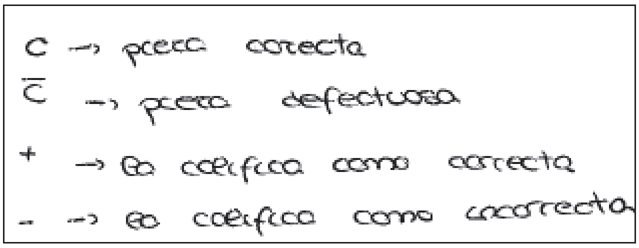
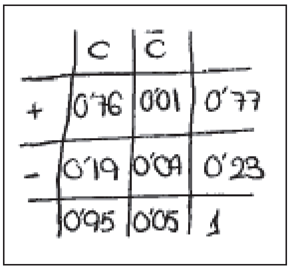


Figura 5.101.

<u>Construcción de una tabla de contingencia completa.</u>

Se construye una tabla de contingencia en la que se sitúan las cantidades conocidas, dadas en el enunciado y las cantidades intermedias calculadas (las cuatro marginales y las cuatro intersecciones). En ningún caso, los cálculos de las cantidades intermedias se hacen explícitos.

En la resolución que tomamos como ejemplo se construye la tabla de contingencia de la Figura 5.102.



	C	C̄	
+	0'76	0'01	0'77
-	0'19	0'04	0'23
	0'95	0'05	1

Figura 5.102.

<u>Uso de una relación multiplicativa para la obtención de la condicional por la que se pregunta.</u>

Se seleccionan en la tabla la marginal y la intersección directamente relacionadas con la condicional por la que se pregunta. A continuación, se usa la relación multiplicativa por la que se obtiene la condicional a partir de dichas cantidades, es decir, la que responde a la fórmula:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Es el único cálculo explícito de la resolución. Para referirse a la probabilidad condicionada, se usa en todos los casos la notación matemática propia de la Teoría de Probabilidades, es decir, la notación P(A|B).

En el ejemplo que hemos considerado, este paso se corresponde con el siguiente cálculo (Figura 5.103):

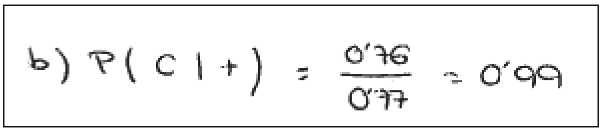


Figura 5.103.

Respuesta completa a la pregunta del problema, en lenguaje verbal.

Para responder a la pregunta del problema, se describe la probabilidad condicional obtenida en lenguaje verbal. Las únicas resoluciones con éxito en las que se omite este paso son las del Problema 1 realizadas por los estudiantes L. y H.

En el ejemplo, T. escribe como respuesta a la pregunta del problema lo siguiente (Figura 5.104):

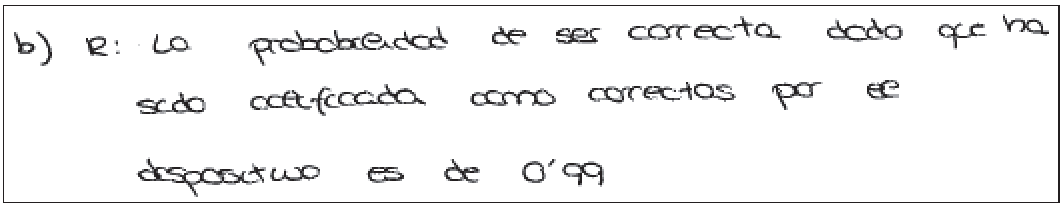


Figura 5.104.

5.4.2 – Errores. Identificación y clasificación.

Algunos de los errores observados en el post-test ya habían sido identificados en los pre-test y se encuentran entre los descritos en el apartado 5.3 (p. 211). Para referirnos a ellos, usaremos la misma nomenclatura utilizada en dicho apartado.

Por otra parte, en el post-test han aparecido nuevos errores, que hemos codificado en coherencia con los ya identificados en el pre-test. La mayoría de éstos están relacionados con la nueva forma de proceder de los estudiantes en la resolución de los problemas; otros, son simples variantes de los observados en el pre-test.

En el Anexo 27 (p. 661) mostramos el catálogo de errores completo, con especificación de los errores observados únicamente en los pre-test, los observados únicamente en el post-test y los observados en ambas pruebas.

En cuanto a la manera en que organizaremos la descripción de los errores del post-test, es diferente a la manera en que lo hemos hecho para los pre-test, debido a las particularidades de los resultados obtenidos. La mayor parte de las resoluciones son resoluciones con éxito y en ellas hemos observado únicamente errores de descripción, que cometen tres de los nueve estudiantes que participaron en la prueba (C., R. y L.). En cuanto a las resoluciones sin éxito, corresponden también a sólo tres estudiantes (L., H. y M.) cada uno de los cuales tiene una manera particular de actuar y comete determinados errores de manera recurrente. En consecuencia, hemos considerado conveniente tratar por separado los errores de descripción observados en las resoluciones con éxito (apdo 5.4.2.1) y el resto de errores, concentrados en las nueve resoluciones sin éxito (apdo 5.4.2.2).

5.4.2.1 – Errores observados en las resoluciones con éxito.

Todos los errores incluidos en este apartado son errores de descripción del número que se da como resultado, bien en la descripción con notación matemática, bien en la descripción verbal. Veamos uno a uno todos los errores cometidos.

Errores en la descripción verbal de la condicional por la que se pregunta

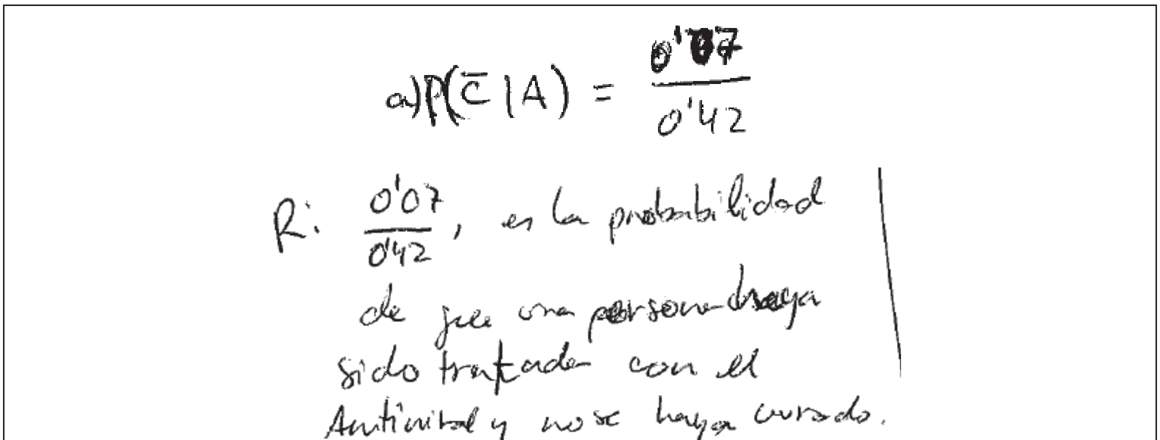
Caso C_P17_P

El error que comete la estudiante C. en el Problema 17 puede considerarse fruto de un despiste. En lugar de "entre las personas que no padecen SIDA, hay …" escribe "entre las personas que padecen SIDA, hay…" para describir la condicional por la que se pregunta ("*Las personas que no padecen SIDA, ¿qué probabilidad tienen de dar positivo en el test?*"). Es decir, describe la condicional preguntada como si se tratara de otra condicional (error E4.9). Consideramos que se debe a un descuido porque el número es correcto y está bien construido y la notación matemática usada para la condicional es correcta también.

Casos R_P9_P, R_P18a_P y R_P10_P

El error cometido por el estudiante R. en las resoluciones de los problemas P9, P18a y P10, tanto en el apartado a) como en el apartado b) de cada uno de ellos, es el de describir la condicional por la que se pregunta (que halla correctamente y describe matemáticamente también de manera correcta) como si se tratara de la intersección directamente relacionada con ella (error E4.1.1).

En la Figura 5.105 mostramos, a modo de ejemplo, la respuesta del estudiante al apartado a) del Problema 9.


a) $P(\bar{C}|A) = \frac{0'07}{0'42}$

R: $\frac{0'07}{0'42}$, es la probabilidad de que una persona haya sido tratada con el Antiviral y no se haya curado.

Figura 5.105.

Se observa que describe la condicional “probabilidad de no curarse, entre las personas tratadas con el antiviral” como “probabilidad de que una persona haya sido tratada con el antiviral y no se haya curado”, es decir, como si se tratara de una intersección.

<u>Errores en la descripción matemática de la condicional por la que se pregunta</u>

Caso L_P17_P

La estudiante L. en el Problema 17, halla correctamente la condicional por la que se pregunta y la describe verbalmente de manera correcta. Sin embargo, la notación matemática que utiliza se corresponde con la forma simplificada para la intersección directamente relacionada con dicha condicional, “no padecer SIDA y dar positivo en el test” (error E4.1.2), como se puede observar en la Figura 5.106

$$a)\ P(\bar{S}+) = \cancel{0'23}\ \frac{0'13}{0'43} = 0'3023 \simeq 0'30.$$

R: 0'3 es la probabilidada de que las personas que no padezcan SIDA les da positivo el test.

Figura 5.106.

Resumiendo, los errores observados en estas resoluciones son errores de descripción, en su mayoría relacionados con la constante confusión entre condicional e intersección. Como se producen únicamente a nivel de expresión y en relación a la última cantidad calculada, estos errores no son muy influyentes en el proceso de resolución y no impiden que la resolución pueda ser declarada como resolución con éxito.

5.4.2.2 – Errores observados en las resoluciones sin éxito.

Como ya hemos señalado, los errores observados en las nueve resoluciones sin éxito del post-test son, en general, errores idiosincrásicos, es decir, característicos de cada uno de los tres resolutores que las han llevado a cabo (L., M. y H.). Por ello, describiremos los errores observados agrupados por resolutor y, en segundo lugar, por problema, cuando proceda.

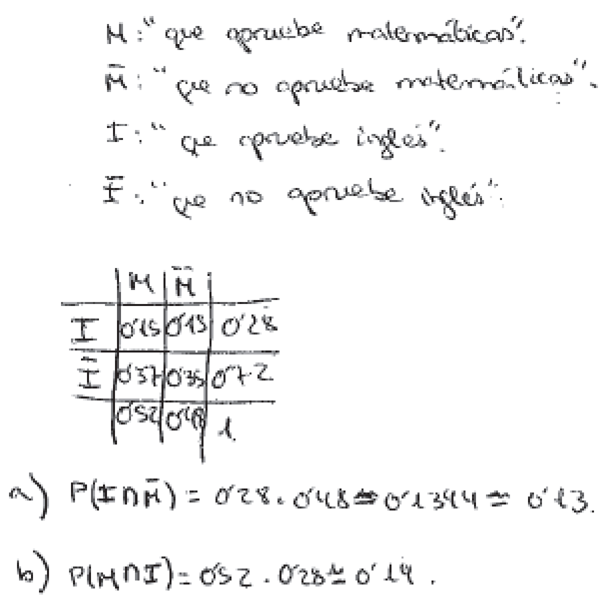
5.4.2.2.1 – El caso de L.

Problema 1

Enunciado: Las matemáticas y el inglés se encuentran entre las asignaturas más difíciles de aprobar en la secundaria. En un instituto la probabilidad de que un estudiante apruebe a la vez matemáticas e inglés es de 0,15; la probabilidad de que apruebe matemáticas y no apruebe inglés es de 0,37 y la probabilidad de que no apruebe ninguna de las dos es 0,35.

a) Los estudiantes que no han aprobado matemáticas, ¿qué probabilidad tienen de aprobar inglés?

b) Los estudiantes que han aprobado inglés, ¿qué probabilidad tienen de aprobar matemáticas?



M: "que apruebe matemáticas".

$\bar{M}$: "que no apruebe matemáticas".

I: "que apruebe inglés".

$\bar{I}$: "que no apruebe inglés".

	M	$\bar{M}$	
I	0'15	0'13	0'28
$\bar{I}$	0'37	0'35	0'72
	0'52	0'48	1

a) $P(I \cap \bar{M}) = 0'28 \cdot 0'48 \simeq 0'1344 \simeq 0'13.$

b) $P(M \cap I) = 0'52 \cdot 0'28 \simeq 0'14$.

Figura 5.107. Resolución del Problema 1 del Test(P) realizada por la estudiante L.

En la Figura 5.107, vemos que la estudiante identifica los cuatro sucesos básicos y construye una tabla de contingencia completa, en la que las probabilidades de las tres intersecciones conocidas, dadas en el enunciado, ocupan el lugar que les corresponde. También son correctas el resto de probabilidades calculadas, excepto una: la probabilidad escrita en el lugar correspondiente a la cuarta intersección “aprobar inglés y no aprobar matemáticas”. Existen diferentes rutas que permiten el cálculo de dicha intersección a partir de los datos conocidos en la tabla (de hecho, en el apdo 5.3.3.1, p. 228, vimos varias estrategias de resolución aparecidas en los pre-test, en las que dicha intersección se obtenía de diferentes modos). Puesto que las relaciones usadas para completar la tabla no se han hecho explícitas en la resolución, nos es imposible saber si el error cometido se debe a un simple error de cálculo o a un error de relación entre las cantidades de la tabla. Por este motivo, hemos incluido este error en una nueva categoría: E8. Error en la construcción de la tabla.

Siguiendo con la resolución, se observa que obtiene la probabilidad con la que responde a la pregunta del apartado *a)* como producto de las probabilidades del suceso condicionado (0,28) y el suceso condicionante (0,48), que toma de la tabla de contingencia. Si asumiéramos que interpreta dicha probabilidad como una condicional, la definición subyacente de la misma sería la siguiente:

$$P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sin embargo, el número obtenido no aparece descrito verbalmente y en cambio, sí aparece descrito en notación matemática. Puesto que esta notación se corresponde con la probabilidad de la intersección, nos inclinamos por considerar que está cometiendo el error de responder a la pregunta del problema con la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta (E5.1). En ese caso, estaría cometiendo también un error de relación (E6.3), que consistiría en el uso de la siguiente relación falsa entre cantidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Por tanto, se están asociando a un mismo suceso ("aprobar inglés y no aprobar matemáticas") dos números diferentes: 0,15 en la tabla y 0,13 como resultado del cálculo anterior. Es decir, dos cantidades difieren en la componente numérica pero sus respectivas componentes verbales son equivalentes, lo cual hemos catalogado como error de tipo E3.

Exactamente lo mismo ocurre con la respuesta que da a la pregunta b) del problema. La estudiante describe matemáticamente la probabilidad como la intersección "aprobar matemáticas e inglés", que es la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta ("los estudiantes que han aprobado inglés, qué probabilidad tienen de aprobar matemáticas"). Además, obtiene dicha probabilidad como producto de las marginales "probabilidad de aprobar matemáticas" y "probabilidad de aprobar inglés".

Como no hay descripción verbal del resultado y la construcción responde a una relación falsa entre cantidades, tanto si la cantidad es interpretada como una intersección como si lo es como condicional, decidimos catalogar los errores cometidos como E5.1 (responde con la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta), E6.3 (usa una relación falsa entre cantidades) y E3, ya que la cantidad con la que responde, que describe como una intersección, ya se encontraba en la tabla.

Problema 2

En la resolución del Problema 2, la estudiante L. comete diversos errores. Observemos la resolución completa para un análisis detallado de los mismos:

Enunciado: La probabilidad de que un estudiante use gafas es de 0,28. La probabilidad de que un estudiante sea chica y use gafas es de 0,15 y de que sea chica y no las use de 0,37. Los estudiantes que son chicos, ¿qué probabilidad tienen de usar gafas?

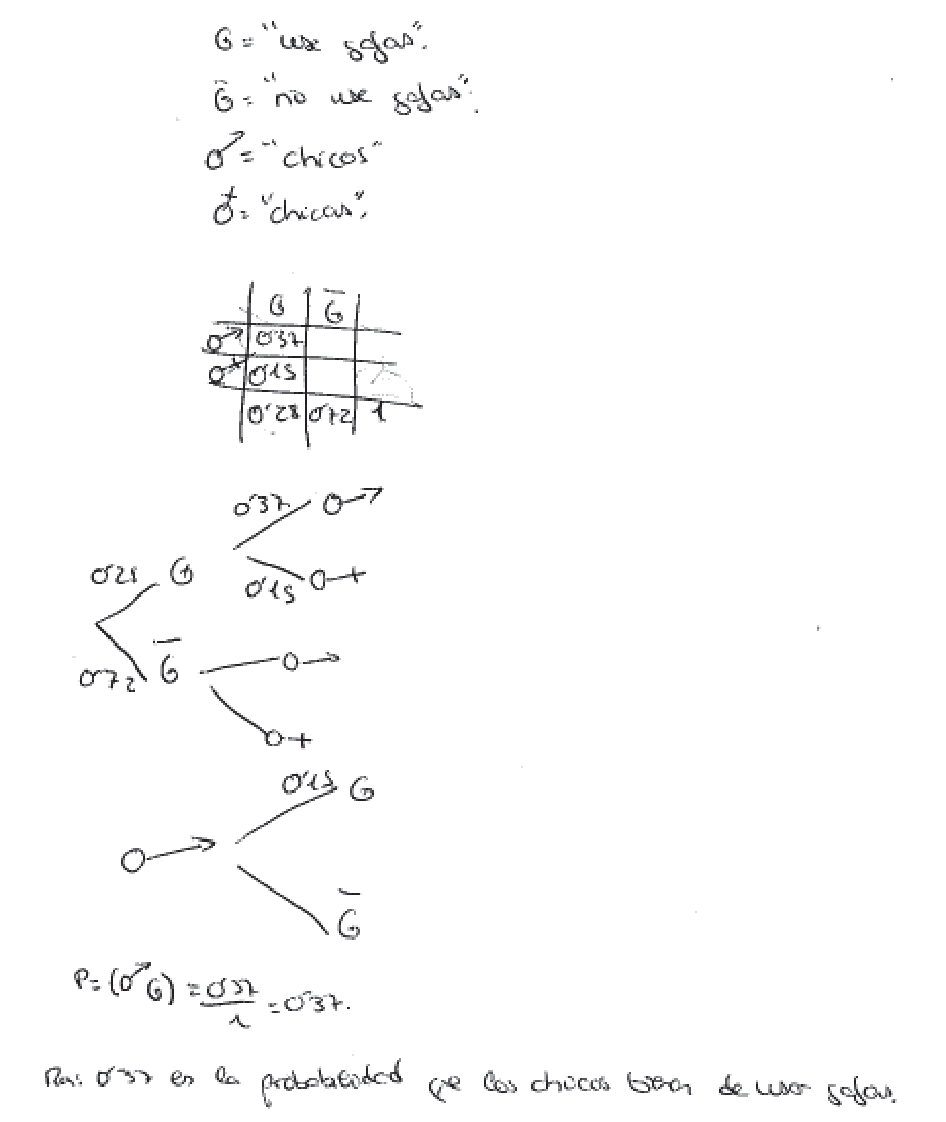


Figura 5.108. Resolución del Problema 2 del Test(P) realizada por la estudiante L.

La resolución (Figura 5.108) se caracteriza por el uso de dos herramientas diferentes (la tabla de contingencia y el diagrama en árbol) para organizar la información del enunciado y calcular algunas cantidades intermedias.

El primer error que comete la estudiante se observa en la tabla, ya que sitúa la probabilidad de la intersección "chica sin gafas" (0,37) en el lugar correspondiente a "chico con gafas". Consideramos que se trata de un error de interpretación en la lectura del enunciado y, por tanto, un error de tipo E1.3. El resto de cantidades conocidas, dadas en el enunciado, las sitúa correctamente. También halla una cantidad intermedia (la probabilidad de no llevar gafas) a partir de su complementaria (la probabilidad de llevar gafas).

A continuación, construye dos diagramas en árbol, el segundo de ellos incompleto. En el primero, comete el error de situar la probabilidad de la intersección "chica sin gafas" (0,37) en el lugar correspondiente a la probabilidad condicional de "ser chico, entre los que llevan gafas" y la probabilidad de "ser chica con gafas" (0,15) en el lugar correspondiente a la probabilidad condicional "ser chica, entre los que llevan gafas". Es decir, cada una de las intersecciones situadas en la tabla, es situada en el árbol en el lugar correspondiente a una de las condicionales directamente relacionadas con ella. Por tanto, se comete el error de asignar el mismo número a dos cantidades diferentes: una condicional y la intersección directamente relacionada con ella (error E2.3). Concluimos, pues, que para la construcción del árbol no relee el enunciado del problema sino que recurre a la información contenida en la tabla. Por otra parte, o bien desconoce la estructura del árbol[35] (en relación al lugar que ocupan las condicionales), o bien confunde (identifica) intersecciones con condicionales.

En el segundo árbol comete, además, el error de situar la probabilidad de "ser chica con gafas" (0'15) también en el lugar correspondiente a la probabilidad condicional de "usar gafas, entre los chicos". Como consecuencia, a lo largo de la resolución, el número 0,15 (probabilidad de "ser chica con gafas") es la componente numérica de tres cantidades diferentes: la intersección "chico con gafas", la condicional "ser chica, entre los que llevan gafas" y la condicional "llevar gafas, entre los chicos". Por tanto, en relación al número 0,15 está cometiendo un error de doble asignación que ya no podemos calificar como error de tipo E2.3, sino que se enmarcaría en una modalidad que no había sido observada en los pre-test: dos condicionales y una intersección comparten componente numérica por error (error E2.4).

Finalmente, responde con la probabilidad de la intersección "chico con gafas" (error E5.1), cuya descripción matemática se corresponde con la notación simplificada para la intersección. Sin embargo, la descripción verbal que hace a continuación, se corresponde con la condicional por la que se pregunta. Por tanto, consideramos que comete también un error de expresión, de tipo E4.7.

Problema 9

En la resolución del Problema 9, la estudiante L. construye una tabla completa de manera correcta. Sin embargo, comete varios errores a la hora de obtener las probabilidades con las que responde a las preguntas del problema. Veámoslo con detalle, a partir de la resolución escrita que se muestra en la Figura 5.109.

---

[35] A pesar de que se ha introducido dicha herramienta durante la enseñanza para resolver problemas de probabilidad diferentes de los PTPC de nivel N_0.

Enunciado: Un grupo de personas sufre de la conocida gripe porcina. Unas han sido tratadas con el antiviral Tamiflú y otras no. La probabilidad de que una persona se trate con el antiviral y se cure de la gripe es de 0,35 y la probabilidad de que una persona no se trate con el antiviral y no se cure es de 0,40. Además, la probabilidad que tiene una persona de este grupo de curarse la gripe es de 0,53.

Las personas tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de no curarse?

Las personas no tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de curarse?

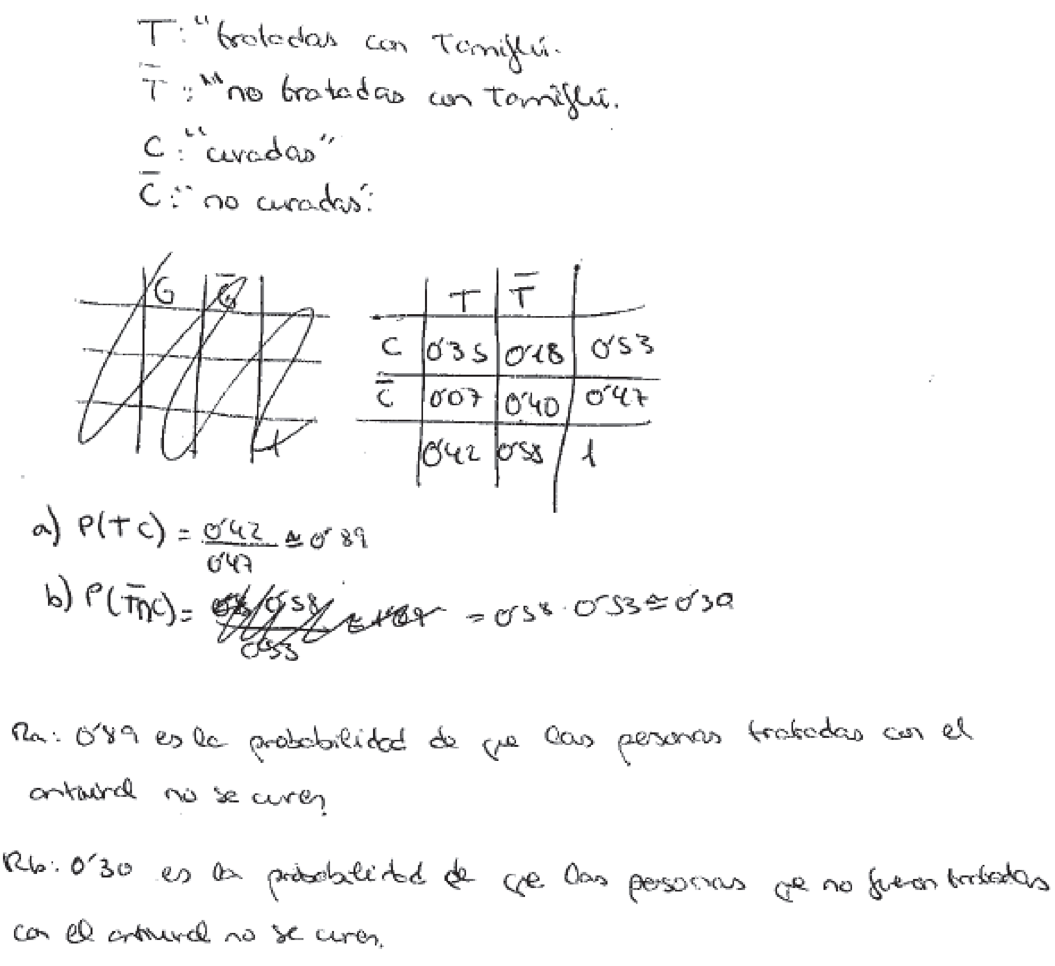


Figura 5.109. Resolución del Problema 9 del Test(P) realizada por la estudiante L.

En primer lugar, existe una discordancia entre las descripciones matemáticas de las probabilidades que da como resultado y sus descripciones verbales. Las primeras corresponden a intersecciones, mientras que las segundas describen condicionales. En el apartado b) la intersección que expresa con notación matemática es la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta. Sin embargo, en el apartado a) la intersección expresada matemáticamente no es la que está directamente relacionada con la condicional con la que se pregunta, ya que se trata de la intersección "tratadas y curadas", en lugar de la intersección "tratadas y no curadas". Probablemente esto se deba a un despiste, puesto que en ningún momento hace uso de la probabilidad de ser tratada y ser curada en el cálculo del resultado.

Por otra parte, si atendemos al cálculo de las probabilidades, observamos que también actúa de manera diferente en el apartado a) que en el apartado b). En el apartado a) obtiene la probabilidad como cociente entre las marginales ("probabilidad de ser tratada" / "probabilidad de no curarse"). En cambio, en el apartado b), obtiene la probabilidad como producto de las marginales "probabilidad de no tratarse" y "probabilidad de curarse".

En cuanto a las descripciones verbales del resultado, en el apartado a) ésta se corresponde con la condicional por la que se pregunta, pero no así en el apartado b), donde describe el resultado como *"probabilidad de que las personas que no fueron tratadas con el antiviral* <u>*no*</u> *se curen"* en lugar de *probabilidad de que las personas que no fueron tratadas con el antiviral se curen*. Sin embargo, esto también podría deberse a un despiste, ya que en el cálculo hace uso de la probabilidad marginal de que se curen y no de la probabilidad marginal de que no se curen.

Así pues, asumiendo que interpreta las cantidades que da como resultado como las condicionales que describe verbalmente (por el principio de presunción de competencia), estaría cometiendo los siguientes errores de relación:

a) $P(A|B) = P(B) / P(A)$

b) $P(A|B) = P(A) \cdot P(B)$

Bajo esta interpretación, llegamos a la conclusión de que comete dos errores de descripción de tipo E4.1.2 en la descripción matemática de las cantidades (describe las condicionales como si se tratara de intersecciones), un error de tipo E4.9 en la descripción verbal del resultado del apartado b) y dos errores de relación de tipo E6.3.

<u>**Problema 10**</u>

En el Problema 10 se reproduce casi en su totalidad (excepto el error de tipo E.9) lo comentado para el Problema 9: las descripciones matemáticas se corresponden con las intersecciones directamente relacionadas con las condicionales preguntadas; las descripciones verbales sí hacen referencia a estas condicionales; y, finalmente, el resultado del apartado a) se obtiene como producto de las marginales involucradas y el resultado del apartado b) como cociente de la marginal correspondiente al suceso condicionante y la marginal correspondiente al suceso condicionado. Por tanto, se cometen de nuevo dos errores de tipo E4.1.2 y dos errores de tipo E6.3, siendo las dos relaciones falsas usadas las mismas que en el caso del Problema 9.

<u>**Problema 17**</u>

En la resolución de este problema, construye una tabla de contingencia completa y correcta.

Consideramos que ha resuelto con éxito el apartado a), ya que halla de manera correcta la probabilidad preguntada y la describe verbalmente también de manera correcta. Sin embargo, la descripción matemática que hace de la probabilidad se corresponde con una intersección, como ya se ha señalado en el apdo 5.4.2.1 (p. 309), en el que se describían los errores cometidos en las resoluciones con éxito.

En el apartado b), en cambio, actúa como en el apartado del problema a) del Problema 9 o el apartado b) del Problema 10. Es decir, describe matemáticamente la probabilidad calculada como la probabilidad de la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta (E4.1.2), obtiene el número que da como resultado como cociente de la marginal correspondiente al suceso condicionante y la marginal correspondiente al suceso condicionado (E6.3) y finalmente, describe el resultado como si se tratara de la condicional por la que se pregunta, motivo por el cual consideramos que hace esa interpretación de la cantidad.

Problema 18

De nuevo, construye una tabla de contingencia completa y correcta. Después comete algunos de los errores descritos anteriormente.

Concretamente, en el apartado a) actúa exactamente como en el apartado b) del Problema 9 y el apartado a) del Problema 10. En el apartado b) actúa como en el apartado a) del Problema 9, el apartado b) del Problema 10 y el apartado b) del Problema 17. Por tanto, en ambos apartados comete errores del tipo E4.1.2 y E6.3.

Para acabar con el caso de la estudiante L., resaltaremos algunos rasgos relevantes de su actuación.

En primer lugar, la notación matemática que usa para describir la probabilidad que da como resultado expresa, de manera reincidente, la probabilidad de una intersección. Además, alterna dos tipos de notación: $P(AB)$ y $P(A \cap B)$. Ambas son comúnmente aceptadas como equivalentes; sin embargo, la relación que la estudiante usa para el cálculo de la probabilidad cuando emplea un tipo de notación o el otro no es la misma. En efecto, la expresión $P(AB)$ viene casi siempre acompañada del cociente de marginales:

$P(AB) = P(B) / P(A)$

Es lo que observamos en los apartados P17 b), P9 a), P18 b) y P10 b).

La única excepción, entre las resoluciones sin éxito de L., la encontramos en el Problema 2a, donde la expresión usada se podría formalizar como:

$P(AB) = P(AB)/1$.

En cambio, la expresión $P(A \cap B)$ viene siempre acompañada de un producto de probabilidades:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Es lo que observamos en los apartados P1 a), P1 b), P9 b), P18 a) y P10 a).

Ahora bien, las descripciones verbales que hace de las cantidades obtenidas de una y otra manera siempre expresan la probabilidad condicional por la que se pregunta.

Esto nos lleva a concluir que para la estudiante P(AB) y $P(A \cap B)$ no son notaciones con el mismo significado y que en la descripción verbal del resultado tiene más en cuenta la forma en qué está redactada la pregunta del problema que la cantidad calculada que da como resultado.

5.4.2.2.2 – El caso de M.

Salvo unas pocas excepciones que señalaremos, las resoluciones del post-test realizadas por la estudiante M. presentan una estrategia de resolución común y, al proceder de esta manera, la estudiante comete reiteradamente errores de varias tipologías.

Para describir la forma de actuar de la estudiante, tomaremos como ejemplo la resolución del Problema 17, que se muestra en la Figura 5.110.

Observamos cómo la estudiante identifica los sucesos básicos involucrados en el problema y los describe en forma de lista. A continuación, construye una tabla de contingencia correcta y completa. Finalmente, procede al cálculo de las cantidades que da como resultado a las dos preguntas del enunciado. En estos cálculos y en las respuestas que redacta, es donde observamos errores, que pasamos a detallar.

Tanto en el apartado a) como en el apartado b), describe matemáticamente la cantidad calculada como la condicional transpuesta de aquella por la que se pregunta, mientras que la descripción verbal de dicha cantidad se corresponde con una intersección (la misma intersección para ambos apartados). Así, en el apartado a) se pregunta por la *probabilidad de dar positivo en el test, si no se padece SIDA*, pero la estudiante describe matemáticamente la cantidad calculada como *probabilidad de no padecer SIDA, si el test ha resultado positivo*, y verbalmente la describe como *"personas que padecen SIDA y da positivo al test"*. En el apartado b) se pregunta por la *probabilidad de padecer SIDA, si el test da un resultado positivo*, pero la estudiante describe matemáticamente la cantidad calculada como *probabilidad de dar positivo en el test, si se padece la enfermedad* y verbalmente la describe como *"personas que dan positivo en el test y padecen SIDA"*, descripción equivalente a la que se da en el apartado a).

El cálculo de estas probabilidades, además, obedece a una relación falsa entre cantidades.

En el apartado a) :

P(no padecer SIDA | el test ha dado positivo) = P(no padecer SIDA) / P(no padecer SIDA y dar positivo en el test)

Enunciado: Una población con un alto riesgo de padecer SIDA se somete a un test para averiguar si la padecen o no. El test da positivo o negativo en cualquier caso. La probabilidad de que una persona de esta población de riesgo padezca SIDA es de 0,57 y la probabilidad de que dé positivo en el test es de 0,47. Se sabe, además, que hay una probabilidad de 0,23 de que una persona padezca de SIDA y el test le dé negativo.

a) Las personas que no padecen SIDA, ¿qué probabilidad tienen de dar positivo en el test?

b) Las personas que dan positivo en el test, ¿qué probabilidad tienen de padecer SIDA?

P = padecen SIDA
$\bar{P}$ = no padecen SIDA
$+$ = test da positivo
$-$ = test da negativo

	P	$\bar{P}$	
+	0'34	0'13	0'47
−	0'23	0'3	0'53
	0'57	0'43	1

a) $P(\bar{P}|+) = \frac{0'43}{0'13} = 3,31\%$ personas que padecen SIDA y da positivo el test.

b) $P(+|P) = \frac{0'47}{0'34} = 1,38\%$ personas que da positivo en el test y padecen SIDA

Figura 5.110. Resolución del Problema 17 del Test(P) realizada por la estudiante M.

En el apartado b) :

P(dar positivo en el test | se padece SIDA) = P(dar positivo en el test) / P(padecer SIDA y dar positivo en el test)

O en términos de los sucesos genéricos A y B:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(A \cap B)}$$

También observamos que el formato de datos del resultado no es correcto, ya que el resultado numérico viene acompañado por el símbolo de porcentaje, cuando es simplemente un cociente entre probabilidades expresadas como números decimales entre 0 y 1 y, por tanto, no representa un tanto por cien. El error podría deberse al hecho de que los números que se obtienen de las relaciones falsas que aplica son números mayores que la unidad y, por tanto, no pueden ser medidas de probabilidad propiamente dichas, lo que podría inducir a la estudiante a pensar que se trata de porcentajes.

Por tanto, en cada apartado nos encontramos con un número que no tiene más significado en el contexto del problema que el de su propia construcción pero que es descrito en dos ocasiones, atribuyéndole cada una de estas descripciones un significado diferente. Dado que no nos es posible resolver la discordancia, trataremos el resultado como una cantidad arbitraria que procede de un error de relación y en las tablas del Anexo 25 (p. 645), sólo se reflejará el error de relación (E6.3), aunque es evidente que la estudiante también tiene dificultades en la descripción matemática y verbal de las cantidades.

Esta forma de proceder, con todos estos errores, incluido el uso incorrecto del signo “%”, se repite en todos los apartados de todos los enunciados de la prueba, salvo en los dos apartados del Problema 1 y el apartado b) del Problema 9, que compartiendo gran parte de lo descrito anteriormente, presentan algunas diferencias. Veamos en qué consisten estas diferencias.

Comencemos por el apartado b) del Problema 9, en el que se pregunta por la *probabilidad que tiene una persona de curarse si se ha tratado con el antiviral*. La estudiante, de nuevo, describe matemáticamente la cantidad con la que responde como la probabilidad de la condicional transpuesta y verbalmente como la probabilidad de la intersección, pero la relación que usa para calcularla es diferente a la descrita anteriormente:

P(no haber sido tratada | se ha curado) = P(no haber sido tratada) / P(no haberse curado)

Que en términos de los sucesos genéricos A y B sería como sigue:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(\overline{B})}$$

En cuanto a la resolución del Problema 1, presenta más diferencias con lo anterior, por lo que mostraremos la resolución al completo (Figura 5.111).

En primer lugar, la estudiante identifica y describe en forma de lista los sucesos básicos que intervienen en el problema, al igual que en el resto de resoluciones. Sin embargo, junto a esta lista escribe otra formada por las cantidades conocidas del enunciado con indicación tanto del suceso como de su probabilidad, cosa que no observamos en ninguna otra resolución de la estudiante en el post-test.

Enunciado: Las matemáticas y el inglés se encuentran entre las asignaturas más difíciles de aprobar en la secundaria. En un instituto la probabilidad de que un estudiante apruebe a la vez matemáticas e inglés es de 0,15; la probabilidad de que apruebe matemáticas y no apruebe inglés es de 0,37 y la probabilidad de que no apruebe ninguna de las dos es 0,35.

a) Los estudiantes que no han aprobado matemáticas, ¿qué probabilidad tienen de aprobar inglés?"

b) Los estudiantes que han aprobado inglés, ¿qué probabilidad tienen de aprobar matemáticas?

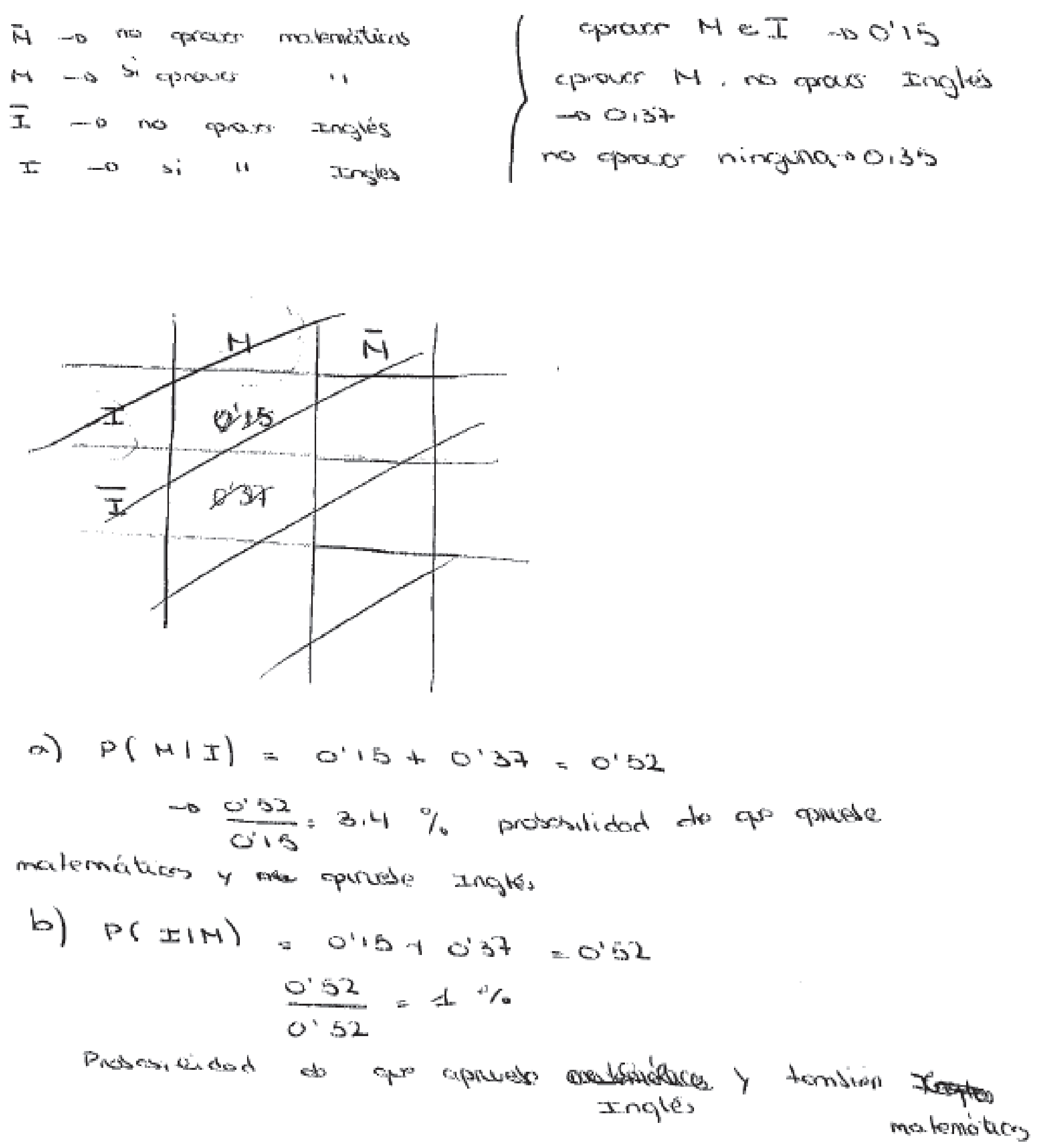


Figura 5.111. Resolución del Problema 1 del Test(P) realizada por la estudiante M.

En relación al apartado a), la descripción matemática de la primera cantidad calculada que halla no se corresponde con la condicional por la que se pregunta, la *probabilidad de aprobar inglés, si no se ha aprobado matemáticas*, ni con su condicional transpuesta, la *probabilidad de no aprobar matemáticas, si se ha aprobado inglés*, sino con otra condicional: la *probabilidad de aprobar matemáticas, si se ha aprobado inglés*.

Para su cálculo, usa una relación falsa entre cantidades, que puede describirse como:

P(aprobar matemáticas | se ha aprobado inglés) = P(aprobar matemáticas e inglés) + P(aprobar matemáticas y no aprobar inglés)

O en términos de los sucesos genéricos A y B:

$P(A|B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

A continuación, realiza otro cálculo en el que interviene esta cantidad calculada y cuyo resultado, que describe como la intersección *probabilidad de que apruebe matemáticas y apruebe inglés*, es el que ofrece como respuesta a la pregunta del problema. El cálculo de este número también obedece a una relación falsa entre cantidades:

P(aprobar matemáticas | ha aprobado inglés) / P(aprobar matemáticas e inglés) = P(aprobar matemáticas e inglés)

O en términos de los sucesos genéricos A y B:

$$\frac{P(A \mid B)}{P(A \cap B)} = P(A \cap B)$$

Además, observamos el mismo error descrito anteriormente en relación al formato de datos del resultado: éste viene acompañado por el símbolo de porcentaje, cuando es simplemente un cociente entre probabilidades expresadas como números decimales entre 0 y 1.

De todo lo descrito anteriormente, se desprende que comete los siguientes errores:

- Usar dos relaciones falsas entre cantidades: E6.1 y E6.3
- Responder a la pregunta del problema con la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta (puesto que, careciendo de descripción matemática, atendemos a la descripción verbal para interpretar el sentido que le da la estudiante): E5.1.

En cuanto al apartado b), actúa de manera similar. En este caso sí describe matemáticamente la primera cantidad calculada como la condicional transpuesta *probabilidad de aprobar inglés entre los que han aprobado matemáticas* respecto de la pregunta del problema *probabilidad de aprobar matemáticas entre los que han aprobado inglés*. La operación que realiza para su cálculo es la siguiente:

P(aprobar inglés | se ha aprobado matemáticas) = P(aprobar matemáticas e inglés) + P(aprobar matemáticas y no aprobar inglés)

O en términos de los sucesos genéricos A y B:

$P(A|B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

A continuación, obtiene el número que da como resultado, dividiendo la cantidad obtenida de la operación anterior por sí misma.

De nuevo, expresa el resultado en un formato de datos equivocado (como si el resultado se tratara de un porcentaje) y lo describe como la intersección “probabilidad de que apruebe inglés y también matemáticas”. La relación falsa entre cantidades que se establece, en términos de los sucesos A y B, es la siguiente:

$$\frac{P(A \mid B)}{P(A \mid B)} = P(A \cap B)$$

Así, en el apartado b) también comete dos errores de relación (E6.3) y el error de responder a la pregunta del problema con la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta (E5.1)

Debemos aclarar que, ante las discordancias entre componentes de las cantidades calculadas en la resolución del Problema 1 no hemos catalogado los errores como errores de expresión, ya que según el método para la lectura de las resoluciones expuesto en el apdo 4.9.3.1.1 (p. 156), al resultado de una operación entre cantidades que se relacionan de manera incorrecta, si viene descrito, se le atribuirá el significado que exprese su descripción. Como en este caso las descripciones matemáticas corresponden a cantidades intermedias y las dos cantidades que se dan como resultado aparecen descritas sólo verbalmente, optamos por considerar que la estudiante las interpreta según esta descripción verbal, es decir, como intersecciones, aunque estas cantidades por sí mismas carecen de otro significado que el que les otorga la propia construcción.

En conclusión, en la resolución de los problemas del post-test la estudiante M. muestra dificultades para interpretar y describir la probabilidad por la que se pregunta, tanto matemáticamente como verbalmente. Además, no aplica relaciones correctas entre probabilidades. Y finalmente, tiene dificultades también a la hora de expresar la medida que da como resultado con el formato de datos adecuado.

5.4.2.2.3 – El caso de H.

El estudiante H. comete errores en las resoluciones de los problemas P1, P2a y P9. Algunos de los errores que comete aparecen en más de una ocasión, pero a diferencia de lo que ocurría con M. no son una norma en su actuación a lo largo de todo el cuestionario.

Veamos los errores cometidos por H. en cada problema.

Problema 1

Enunciado: Las matemáticas y el inglés se encuentran entre las asignaturas más difíciles de aprobar en la secundaria. En un instituto la probabilidad de que un estudiante apruebe a la vez matemáticas e inglés es de 0,15; la probabilidad de que apruebe matemáticas y no apruebe inglés es de 0,37 y la probabilidad de que no apruebe ninguna de las dos es 0,35.

a) Los estudiantes que no han aprobado matemáticas, ¿qué probabilidad tienen de aprobar inglés?

b) Los estudiantes que han aprobado inglés, ¿qué probabilidad tienen de aprobar matemáticas?

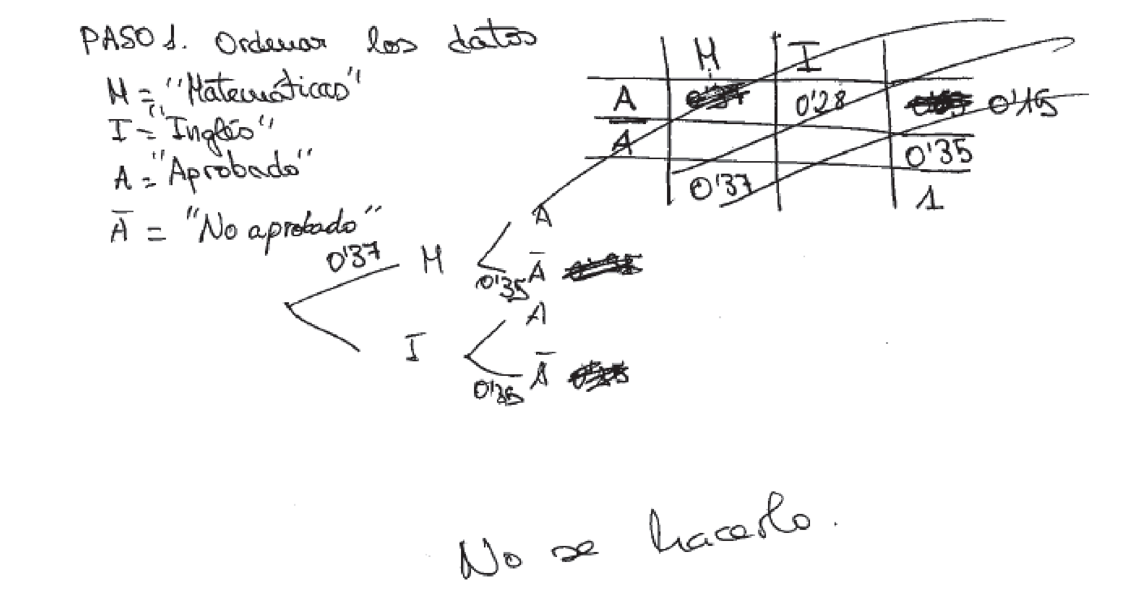


Figura 5.112. Resolución del Problema 1 del Test(P) realizada por el estudiante H.

En la Figura 5.112 vemos que el estudiante no identifica correctamente los sucesos básicos que intervienen en el problema. Por ejemplo, el estudiante asigna a la letra M. el significado de "Matemáticas", lo cual por sí mismo no expresa un suceso. Lo mismo ocurre con la letra I., que el estudiante identifica con "Inglés". Las letras A y $\overline{A}$ representan "Aprobado" y "No aprobado" respectivamente, sin especificación de la materia que se aprueba o no se aprueba. Esta definición incompleta y ambigua de los sucesos básicos hace que el estudiante cometa errores en la construcción de la tabla (que abandona y tacha) y también del diagrama en árbol. Finalmente, estas herramientas no le son útiles para resolver el problema y abandona la resolución.

Puesto que la tabla aparece tachada, nos centraremos en el árbol, cuya estructura no es correcta debido a la distribución de sucesos que presenta (error de tipo E7.1). En efecto, al final de las dos ramas con que se inicia el análisis de posibilidades aparecen las letras M e I para las que, como sucesos, no queda claro su significado y, aún siendo sucesos, necesariamente tendrían que cumplir la condición de ser sucesos complementarios, lo cual no es verificable. Como consecuencia, el resto de "sucesos" representados en el árbol carecen también de sentido y las probabilidades conocidas, dadas en el enunciado, no tienen cabida en el árbol. Sin embargo, el estudiante sitúa la *probabilidad de aprobar matemáticas y no aprobar inglés* sobre la rama que conduce a M, como si se tratara de P(M), es decir, sitúa una intersección donde debería situarse una marginal (error de tipo E7.2) y la *probabilidad de no aprobar ninguna de las dos* sobre dos ramas distintas del árbol: la que parte de M y llega a $\overline{A}$ y la que parte de I y llega a $\overline{A}$ o sea, los lugares que corresponden a $P(\overline{A} \mid M)$ y $P(\overline{A} \mid I)$, respectivamente, lo cual hemos catalogado como error de tipo E7.3 (situar una intersección en el lugar de una condicional). Esto supone, además, un error de doble asignación (E2.5).

Problema 9

Enunciado: Un grupo de personas sufre de la conocida gripe porcina. Unas han sido tratadas con el antiviral Tamiflú y otras no. La probabilidad de que una persona se trate con el antiviral y se cure de la gripe es de 0,35 y la probabilidad de que una persona no se trate con el antiviral y no se cure es de 0,40. Además, la probabilidad que tiene una persona de este grupo de curarse la gripe es de 0,53.

a) Las personas tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de no curarse?

b) Las personas no tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de curarse?

T = "Tomar tamiflú"
$\overline{T}$ = "No " " "
~~P = "Padecer"~~
~~$\overline{P}$ = "Curarse"~~

	~~P~~	~~$\overline{P}$~~	
~~T~~	~~0'40~~	~~0'35~~	~~0'35~~
~~$\overline{T}$~~	~~0'85~~	~~0'40~~	~~0'65~~
		~~0'53~~	~~1~~

Curarse = C
No curarse = $\overline{C}$

	C	$\overline{C}$	
T	0'35	0'07	0'42
$\overline{T}$	0'18	0'40	0'58
	0'53	0'47	1

a) $P(\overline{C}/T) = \dfrac{0'07}{0'47} = 0'14$

b) $P(C/\overline{T}) = \dfrac{0'18}{0'53} = 0'33$

R: La probabilidad de no curarse habiendose tratado con Tamiflú es de 0'14 (o 14%) y de curarse sin haberse tratado de 0'33 (o 33%).

Figura 5.113. Resolución del Problema 9 del Test(P) realizada por el estudiante H.

En la Figura 5.113 vemos cómo el estudiante describe correctamente los sucesos básicos involucrados en el problema y construye una tabla de contingencia completa y correcta. Los errores se observan en el cálculo de la condicional preguntada. Las descripciones, tanto matemática como verbal, son correctas en ambos apartados, pero no la relación entre cantidades usada. Tanto en el apartado a) como en el apartado b), la condicional se obtiene como cociente de la intersección correcta y la marginal correspondiente al suceso condicionado, en lugar de la marginal correspondiente al suceso condicionante. En términos de los sucesos genéricos A y B, la relación falsa entre cantidades que el estudiante usa para el cálculo de la condicional es:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

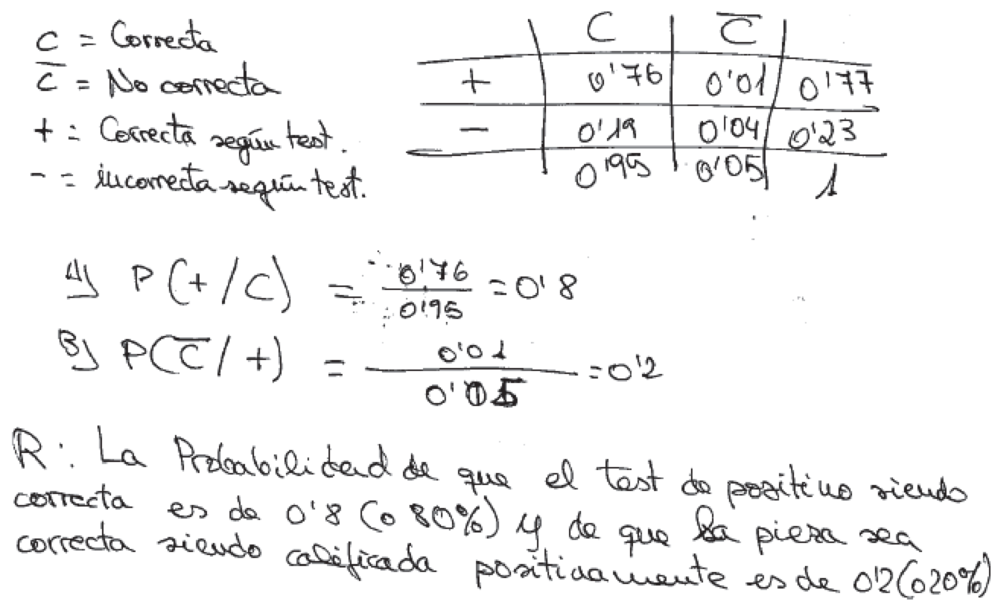
Por tanto, el estudiante comete dos errores de tipo E6.3.

Problema 18

Enunciado: Un dispositivo comprueba si una pieza recién fabricada es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se comprueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. La probabilidad de que una pieza sea correcta es de 0,95 y la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza como correcta es de 0,77. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa y el dispositivo la califique como defectuosa es de 0,04.

a) Las piezas que son correctas, ¿qué probabilidad tienen de ser calificadas como correctas por el dispositivo?

b) Las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué probabilidad tienen de ser correctas?



C = Correcta
$\overline{C}$ = No correcta
+ : Correcta según test.
− = incorrecta según test.

	C	$\overline{C}$	
+	0'76	0'01	0'77
−	0'19	0'04	0'23
	0'95	0'05	1

a) $P(+/C) = \frac{0'76}{0'95} = 0'8$

b) $P(\overline{C}/+) = \frac{0'01}{0'05} = 0'2$

R: La Probabilidad de que el test de positivo siendo correcta es de 0'8 (o 80%) y de que la pieza sea correcta siendo calificada positivamente es de 0'2 (o 20%)

Figura 5.114. Resolución del Problema 18 del Test(P) realizada por el estudiante H.

De nuevo, el estudiante describe correctamente los sucesos básicos involucrados en el problema y construye una tabla de frecuencias correcta y completa, como puede observarse en la Figura 5.114. Los errores aparecen en el cálculo de las condicionales.

El estudiante resuelve correctamente el apartado a)

En el apartado b) comete otros errores, además de un error de relación. En primer lugar, la descripción matemática de la condicional que halla no se corresponde con la probabilidad preguntada, *probabilidad de que una pieza sea correcta si el dispositivo la ha calificado de correcta* sino con la condicional *probabilidad de que la pieza no sea correcta si el dispositivo la ha calificado de correcta*. Con su notación, escribe $P(\overline{C} \mid +)$ en lugar de la probabilidad preguntada, que es $P(C \mid +)$. Además, el cálculo atiende a la relación:

$$P(\overline{C} \mid +) = \frac{P(\overline{C} \cap +)}{P(\overline{C})}$$

A continuación, describe el resultado como si se tratara de la condicional por la que se pregunta: "La probabilidad de que […] la pieza sea correcta siendo calificada positivamente es de 0,2 (ó 20%)". No obstante, consideramos que la interpretación que hace de la cantidad que da como resultado es la que corresponde a su descripción matemática. En primer lugar porque, por construcción, no se trata de la condicional preguntada. Y en segundo lugar, porque admitiendo que interpreta la cantidad tal y como la describe matemáticamente, el cálculo es coherente con la manera errónea de hallar la condicional observada en el Problema 9. Así pues, el hecho de describir el resultado como la condicional por la que se pregunta puede deberse, como ya se ha comentado en alguna ocasión, al hecho de que a la hora de redactar la respuesta, el estudiante se basa en la forma en que está redactada la pregunta del problema.

Concluimos, por tanto, que en este apartado del problema comete un error de tipo **E5.7** (responde con una condicional distinta de aquella por la que se pregunta), un error de tipo **E6.3** (usa una relación falsa entre cantidades para calcularla) y por último, un error de tipo **E4.9** (describe la condicional que da como resultado como si se tratara de otra condicional, la condicional por la que en realidad se pregunta y que no es la calculada).

En el Anexo 26 (p. 655) puede consultarse un resumen de todos los errores, tanto de cantidad como de relación, que han sido observados en las resoluciones del post-test.

6. Análisis de los resultados y conclusiones.

6.1 – SOBRE LOS PROBLEMAS DE NIVEL N_0.

6.1.1 – Sobre la estructura matemática de los problemas de nivel N_0.

En esta tesis nos hemos centrado en el estudio de un tipo particular de problemas, los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0, que aparecen con frecuencia en los libros de texto escolares. Lo que caracteriza a este tipo de problemas es su estructura matemática, es decir, la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades asociada al problema, que queda delimitada por la definición de problema ternario de probabilidad condicional dada por Cerdán y Huerta (2007) y por la clasificación de estos problemas en niveles realizada por Lonjedo (2007), que pueden consultarse en las pp. 55 y 57, respectivamente. Dentro de la familia de problemas de nivel N_0, definidos como aquellos problemas ternarios que no presentan ninguna probabilidad condicional como dato conocido, Lonjedo (2007) identifica tres subfamilias, determinadas por la "categoría", es decir, por el número de probabilidades marginales dadas en el enunciado. Como primer objetivo de esta tesis, nos propusimos considerar esta familia de problemas y sus tres subfamilias para profundizar en el estudio de su estructura matemática con la intención de determinar casos de problema dentro de cada subfamilia. Para ello nos apoyamos en el "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional" (Cerdán y Huerta, 2007) que nos permitió realizar lecturas analíticas de los problemas, o sea, lecturas de los problemas en términos de cantidades y relaciones entre cantidades. Fruto de este estudio teórico, obtuvimos siete casos básicos para la parte informativa del enunciado (uno de ellos indeterminado) y una o varias opciones de pregunta para cada caso básico no indeterminado. La combinación de cada caso básico con cada una de las opciones de pregunta posibles para dicho caso básico proporcionó un total de once problemas básicos de nivel N_0 no indeterminados, cuya descripción puede encontrarse en la Tabla 5.9 (p. 192).

Consideramos que esta clasificación de los problemas de nivel N_0 puede resultar útil tanto para la investigación como para la docencia. En el ámbito de la investigación, este resultado hace posible considerar la estructura matemática de los problemas como variable independiente en los estudios de carácter experimental, como se ha hecho en este trabajo y también en otras investigaciones (Carles y otros, 2009; Arnau, 2012; Amorós, 2012). Esto ha permitido, entre otras cosas, estudiar la influencia de esta variable en las dificultades de los problemas. Por otra parte, la clasificación de los problemas que aquí mostramos puede servir de guía para organizar su enseñanza. Compartimos con English (2005) la idea de que los estudiantes deberían ser capaces de identificar las propiedades estructurales de una situación problemática, es decir, las que vienen determinadas por cómo se relacionan unas con otras las cantidades del problema, pues como señala este autor, eso facilita la transferencia de conocimiento entre problemas estructuralmente isomorfos, aunque estén enunciados en contextos diferentes. Por tanto, si aspiramos a formar estudiantes competentes en la resolución de problemas de nivel N_0, debemos dar a los estudiantes la oportunidad de enfrentarse a problemas de esta familia que tengan estructuras matemáticas variadas. De los resultados del estudio teórico realizado en esta tesis se deduce que toda propuesta de problemas para la enseñanza puede contener hasta once problemas de nivel N_0 estructuralmente distintos, quedando en manos del profesor o profesora la decisión de cuántas y cuáles de estas estructuras usará en la formulación de los problemas que planteará a sus estudiantes.

6.1.2 – Dificultades de los problemas. Influencia de las variables de la tarea en las dificultades.

El estudio de la estructura matemática de los problemas se ha realizado en el escenario I, es decir, tomando en consideración únicamente a los problemas. Sin embargo, también es posible hablar de algunas características de los problemas a través de las resoluciones de los estudiantes, es decir, en el escenario II. Por ejemplo, las dificultades de los problemas, tal y como han sido definidas en esta tesis, son variables cuyos valores dependen de la actuación de los estudiantes; ahora bien, para una muestra grande de resoluciones, como la que se usó en Carles y otros (2009), estos valores pueden considerarse representativos de las dificultades de los problemas de N_0 en general y, por tanto, como una característica más de los mismos. En dicho estudio se tomaron en consideración 990 resoluciones de problemas de nivel N_0, realizadas por estudiantes de 4º curso de secundaria que no habían recibido enseñanza previa en probabilidad condicional, y se observó que el valor de las dificultades no era el mismo para todos los problemas de la investigación, sino que estaba influenciado por la estructura matemática de los problemas y el contexto en el que se formulaban los enunciados[36].

[36] Por un lado, se halló influencia de la estructura de datos en la dificultad apreciada del problema (DAP), que nos informa de hasta qué punto los estudiantes abordan el problema, y en la dificultad del problema (DP), que es la dificultad para llegar a dar una respuesta a la pregunta del problema. Concretamente, se hallaron valores más altos para estas dificultades conforme se aumentaba el número de marginales conocidas (y disminuía el de intersecciones), es decir, conforme aumentaba la categoría del problema. En cuanto al contexto, éste se mostró un factor influyente en la dificultad de la solución del problema (DSP). Así, el contexto que hemos denominado Estsocial presentaba menor dificultad

En la investigación que ahora nos ocupa el reducido tamaño de la muestra de estudiantes con el que trabajamos no permitía una réplica de la investigación a la que acabamos de referirnos y, de hecho, no se encontraba entre nuestros objetivos ofrecer resultados generalizables sobre los valores de las dificultades de los problemas ni sobre las influencias del contexto y la estructura de datos en las mismas. Sin embargo, nuestra muestra de resoluciones también tiene asociados unos valores para las variables que miden las dificultades de los problemas, que pueden consultarse en el Anexo 11 (p. 465) y que hemos mostrado gráficamente y en relación a las variables de la tarea en el apdo. 5.1.3.1 (p. 195). Estos valores nos permiten extraer algunas conclusiones, aunque éstas tengan un marcado carácter local.

Lo primero que se observa es que, para los tres cuestionarios, las dificultades que alcanzan valores más elevados son la dificultad de la solución del problema (DSP) y la dificultad de describir correctamente el número que se da como resultado (DDRESC). El resto de dificultades (dificultad apreciada del problema, dificultad de dar respuesta a la pregunta del problema, etc.) toman valores sensiblemente más bajos (véase Figura 5.2, p. 196). Hay que tener en cuenta que los estudiantes participantes en la investigación pertenecían a un grupo que cursaba la opción B de Matemáticas, su rendimiento académico era bueno en general y mostraron un gran interés a la hora de realizar los cuestionarios. De hecho, abordaron la resolución de todos o casi todos los problemas de las pruebas, llegando a dar una respuesta en la mayoría de los casos. Esto explicaría los bajos valores obtenidos para algunas dificultades.

Por otra parte, no hay diferencias importantes entre los valores de las dificultades del primer cuestionario, el Pre-test(F), en el que los datos numéricos conocidos venían expresados en frecuencias absolutas, y el segundo cuestionario, el Pre-test(%), en el que los datos venían expresados en forma de porcentajes. En realidad, excepto para la dificultad de la solución del problema (DSP) y la dificultad de la descripción del resultado (DDRES), se obtienen valores de las dificultades ligeramente más bajos en el segundo cuestionario que en el primero. Esto iría en contra de lo esperado, si se tiene en cuenta que las frecuencias absolutas son consideradas por algunos autores (Gigerenzer y Hoffrage, 1995; Cosmides y Tooby, 1996; Lonjedo, 2007) como facilitadoras del proceso de resolución de los problemas frente a otros formatos de datos, entre los que se encuentran los porcentajes. Sin embargo, se dan dos circunstancias que podrían aclarar estos resultados. En primer lugar, cuando se administró el cuestionario de los problemas con los datos expresados en porcentajes, los estudiantes ya se habían enfrentado, meses antes, al primer cuestionario, con los datos expresados en frecuencias absolutas, lo que pudo haberles proporcionado cierto "aprendizaje" de cara a la realización del siguiente

para su solución que los otros dos contextos considerados en dicha investigación, el Estsalud y el Diagsalud. Entre estos dos últimos, el Estsalud resultaba más influyente.

cuestionario. Por otra parte, los problemas de nivel N_0 se caracterizan por el hecho de que todas las cantidades conocidas son marginales y/o intersecciones, para las que el conjunto total de referencia (el que representa al 100% de la muestra) es el mismo. Por este motivo, cuando los datos vienen expresados en forma de porcentajes los estudiantes operan con ellos como si se tratara de frecuencias absolutas, es decir, hacen una traducción implícita a frecuencias, que consiste en considerar los tantos por cien como frecuencias absolutas en una muestra de tamaño 100.

Si comparamos ahora los valores de las dificultades correspondientes a los dos pre-test con los que se obtienen en el post-test (véase Figura 5.3, p. 197), observamos que estos últimos son considerablemente más bajos. Evidentemente, la enseñanza recibida por los estudiantes explica en gran medida esta disminución en los valores. Pero las diferencias no se limitan a los valores absolutos de las dificultades, sino que se extienden también a la influencia que las variables de la tarea ejercen sobre ellas. Así, con carácter previo a la enseñanza (en los pre-test), la estructura de datos y el contexto en el que se formulan los problemas son influyentes en las dificultades de los problemas (véanse Figura 5.5, p. 198, Figura 5.6, p. 199, Figura 5.9, p. 201 y Figura 5.10, p. 201), mientras que estas influencias desaparecen o se suavizan en el post-test, es decir, tras la enseñanza (véanse Figura 5.7, p. 199 y Figura 5.11, p. 202). Si nos fijamos en la dificultad de la solución del problema (DSP), que es la que alcanza valores más altos y es la más representativa del éxito en la resolución de los problemas, vemos que en los pre-test obtiene sus valores más elevados para los contextos que hemos denominado Diagcalidad y Estsalud, y sus valores más bajos para el contexto Estsocial. En cuanto a la influencia de la estructura de datos en dicha dificultad, en los pre-test se observa un aumento de su valor conforme aumenta el número de marginales conocidas en el enunciado del problema (y por tanto, disminuye el de intersecciones). Esto último es un signo de que, en el proceso de resolución de los problemas de los pre-test, a los estudiantes les resulta más fácil obtener las marginales a partir de las intersecciones que obtener las intersecciones a partir de las marginales. En el post-test, en cambio, no observamos influencias de las variables de la tarea ni en la dificultad de la solución del problema ni en el resto de dificultades.

Por otra parte, los resultados acerca de la influencia de las variables de la tarea en las dificultades de los problemas del Pre-test(F), con los datos en frecuencias absolutas[37], son coherentes con los obtenidos en Carles y otros (2009), como mostramos en el estudio comparativo del apdo. 5.1.3.2 (p. 202) y especialmente en la Figura 5.12 (p. 203) y la Figura 5.13 (p. 204). Debemos señalar, no obstante, que aparte del número de resoluciones implicadas, hay una diferencia importante en el diseño de ambas investigaciones, que podría estar afectando a los resultados sobre las dificultades de los

[37] La comparación se establece únicamente para los problemas del Pre-test(F) porque todos los problemas usados en Carles y otros (2009) estaban formulados en frecuencias absolutas.

problemas. En la investigación más amplia se usaron seis cuestionarios diferentes, cada uno de los cuales contenía tres y tres problemas estructuralmente isomorfos a pares pero formulados en contextos diferentes, de manera que la influencia de la estructura matemática y el contexto en las dificultades era fácilmente observable. En esta tesis, en cambio, se usa un único tipo de cuestionario en el que no hay problemas estructuralmente isomorfos formulados en contextos diferentes. De hecho, el Problema 1 concentra los valores para las variables estructura de datos y contexto que, según se ha comprobado en el marco de la investigación más amplia, producen valores más bajos en las dificultades: es un problema de categoría C_0 formulado en el contexto Estsocial. Al mismo tiempo, los problemas 17 y 18a reúnen los valores para las variables de la tarea para los que se obtienen valores más altos en las dificultades: son problemas de categoría C_2 formulados en la situación Test de Diagnóstico. Esta circunstancia sin duda estaría acentuando las diferencias en los valores obtenidos para las variables dependientes que se dan entre los diferentes problemas del cuestionario.

En conclusión, hemos visto cómo la enseñanza impartida consigue reducir los valores de todas las variables que hemos definido para la medida de las dificultades de los problemas y que, además, neutraliza la influencia de la estructura de datos y el contexto en los valores de estas dificultades. Por otra parte, vemos que los valores de las dificultades obtenidos en esta tesis para los problemas formulados en frecuencias absolutas se comportan de manera similar a los observados en la investigación más amplia llevada a cabo en 2009 (sobre todo en lo que respecta a la influencia de la estructura de datos y el contexto), aunque hay que tener en cuenta que los resultados de una y otra investigación no son completamente comparables debido a los aspectos metodológicos que las diferencian.

6.2 – SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE NIVEL N_0 POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES ANTES Y DESPUÉS DE LA ENSEÑANZA.

En este apartado analizaremos los resultados que responden a los objetivos segundo y tercero de la investigación, es decir, al estudio cualitativo de la actuación de los estudiantes ante problemas de nivel N_0, antes y después de la enseñanza. Concretamente, hemos prestado atención a los siguientes aspectos de las resoluciones: los medios de organización de la información del enunciado, el uso de recursos como la tabla de contingencia y el diagrama en árbol para la resolución de los problemas, las estrategias de resolución con éxito en términos de cantidades y relaciones entre cantidades y los errores cometidos por los estudiantes.

Tanto en las resoluciones de los pre-test como en las del post-test, cuando el estudiante llega a dar una resultado, es posible identificar cuatro fases en el proceso de resolución:

I) Lectura del enunciado y organización de la información contenida en él.

II) Cálculo de cantidades intermedias.

III) Cálculo de la cantidad que se da como resultado.

IV) Respuesta a la pregunta del problema.

Sin embargo, encontramos diferencias en la forma en que se llevan a cabo estas acciones en los dos primeros cuestionarios, los pre-test, respecto a cómo se llevan a cabo en el post-test, después de la enseñanza. Las primera diferencia la observamos en la fase I de la resolución y, concretamente, en la forma en que los estudiantes organizan la información del enunciado, que pasamos a analizar.

6.2.1 – Sobre los medios de organización de la información.

La mayoría de los estudiantes usa algún tipo de organización de la información en todos o casi todos los problemas de la investigación (sólo la estudiante T. en el primer cuestionario no organiza los datos del enunciado en ninguno de los problemas). Como acabamos de señalar, hay una gran diferencia entre los medios usados en los pre-test y los usados en el post-test. Antes de la enseñanza, los estudiantes organizan los datos a través de listas o árboles, pero ninguno usa tablas. Así, encontramos listas completas, que incluyen todos los datos conocidos en el enunciado y también la pregunta del problema, listas incompletas por no contener la pregunta del problema o alguno de los datos conocidos y listas ampliadas en las que no sólo aparece información contenida en el enunciado sino otras cantidades calculadas directamente a partir de la lectura del problema. En cuanto a los árboles observados en los pre-test, al ser representaciones generadas espontáneamente por los estudiantes, no suelen responder a las formas canónicas de los diagramas en árbol que se enseñan en las unidades de Probabilidad. Una característica común a todos ellos es que se trata de árboles de frecuencias, es decir, no contienen probabilidades sino que representan particiones del espacio muestral y las correspondientes distribuciones de frecuencias naturales. Encontramos algunos de estructuras muy sencillas, formados únicamente por las cantidades mencionadas en el enunciado, y otros árboles más complejos, que se aproximan a las formas canónicas de los diagramas en árbol y son usados no sólo para representar la información del enunciado sino también para la obtención de nuevas cantidades y, por tanto, para la resolución del problema. Los más elaborados son los árboles que construyen los estudiantes T. y V. en el Pre-test(%) que pueden considerarse como árboles ampliados, al contener no sólo la partición del espacio muestral en dos marginales complementarias, de las que salen las cuatro intersecciones posibles, sino también una o las dos marginales restantes (véanse la Figura 5.35, p. 224 y la Figura 5.37, p. 225). Todas estas representaciones observadas en los pre-test han sido realizadas por los estudiantes haciendo uso de sus propios recursos, es decir, de manera "espontánea" y no inducida por la profesora-investigadora. No obstante, es muy probable que los estudiantes hubieran tenido contacto con representaciones similares en la resolución de otro tipo de problemas de matemáticas o en otras áreas del curriculum.

En el post-test, en cambio, todos los estudiantes, excepto la estudiante M., construyen una tabla de contingencia en todos los problemas de la prueba, no sólo para organizar la información del enunciado sino también para la obtención de cantidades intermedias. La estudiante M. lo hace en cinco de los seis problemas y en el problema restante usa una lista (la única lista que se observa en las resoluciones del post-test). En cuanto al diagrama en árbol, aparece únicamente en dos resoluciones (la del Problema 2a por la estudiante L. y la del Problema 1 por el estudiante H.) y en ellas los estudiantes construyen también una tabla de contingencia. Hay que señalar que aunque durante la enseñanza se había hecho especial hincapié en el uso de la tabla para la resolución de los problemas de nivel N_0, los estudiantes no recibieron indicación alguna que les obligara a usarla en el post-test. Además, habían sido instruidos también en el uso del diagrama en árbol (de probabilidades y de frecuencias) para la resolución de otros tipos de problemas de probabilidad. Por tanto, podemos decir que los estudiantes hacen uso de la tabla para la resolución de los problemas del post-test por elección propia, aunque su preferencia por esta herramienta está claramente influenciada por la enseñanza recibida.

6.2.2 – Sobre las estrategias de resolución con éxito.

Hemos encontrado resoluciones con éxito en los tres cuestionarios de la investigación, tanto antes como después de la enseñanza. De hecho, en los dos primeros cuestionarios todos los problemas, excepto el Problema 18a, fueron resueltos con éxito por algún estudiante. Esto no resulta tan sorprendente si tenemos en cuenta que en los pre-test los datos conocidos estaban formulados en frecuencias absolutas o porcentajes, y la pregunta del problema, en todos los casos, era un porcentaje, por lo que los problemas podían verse como problemas de porcentajes. No obstante y como era esperable, el porcentaje de éxito en el post-test, que ronda el 70% (38 resoluciones con éxito sobre un total de 54) fue bastante más alto que en los pre-test, donde se sitúa en el 30 % (31 resoluciones con éxito sobre un total de 102).

En este apartado analizaremos y compararemos las estrategias que usan los estudiantes en las resoluciones con éxito de los pre-test y del post-test, entendidas como el conjunto de cantidades intermedias obtenidas y las relaciones entre cantidades usadas para llegar desde las cantidades conocidas hasta la pregunta del problema. Nos centraremos pues en las fases II y III de los procesos de resolución con éxito.

<u>Fase II: Cálculo de cantidades intermedias.</u>

En primer lugar, hemos observado que las estrategias de resolución en los pre-test dependen del problema, especialmente de su estructura matemática, pues es la que determina qué cantidades intermedias y qué relaciones entre cantidades son necesarias para obtener la condicional por la que se pregunta a partir de los datos del enunciado. Hay problemas (los problemas P1 y P2a) para los que hemos encontrado varias estrategias de resolución con éxito, mientras que en otros problemas (problemas P9, P10x2 y P17) todos los estudiantes que los resuelven con éxito usan la misma estrategia de resolución. Por otra parte, hay resoluciones en las que se obtienen únicamente las cantidades intermedias que son estrictamente necesarias para la obtención del resultado (dando lugar a un grafo de la resolución que calificamos de *grafo mínimo*), mientras que otras resoluciones contienen cantidades intermedias y relaciones entre cantidades superfluas, en el sentido de que no son imprescindibles para resolver el problema. De hecho, encontramos resoluciones de este último tipo en todos los problemas (veáse tabla del Anexo 24, p. 637, donde se ha señalado con la expresión "c.s." las resoluciones que contienen cantidades superfluas). Esto indica que los estudiantes no siempre hacen análisis[38] antes de comenzar con el cálculo de cantidades intermedias, sino que parecen actuar de la siguiente manera: en los primeros pasos operan buscando relaciones entre los datos de que disponen que les permitan llegar a nuevas cantidades, sin realmente plantearse si son o no necesarias; luego, llega un punto en la resolución en que empiezan a tener en cuenta la pregunta del problema a la hora de seleccionar las cantidades intermedias que van a calcular, es decir, existe un momento a partir del cual hacen análisis sobre la cantidad desconocida. Eso explicaría que los grafos de muchas resoluciones con éxito de los pre-test contengan una o varias aristas superfluas, pero que todas las resoluciones queden muy lejos de la destrucción completa del grafo, que es lo que sucedería, en el peor de los casos, si se resolviera el problema sin hacer análisis en ningún momento. En este último caso, es decir, en el caso de no hacer análisis, el resolutor o bien se "tropezaría" con la cantidad preguntada o bien la habría de buscar entre las cantidades conocidas disponibles.

En las resoluciones del post-test, por el contrario, la estrategia depende menos del problema, al estar basada la resolución en el uso de la tabla de contingencia. De hecho, todas las resoluciones con éxito del post-test presentan una misma estructura, que fue descrita en el apdo. 5.4.1 (p. 309) y que consta de cuatro partes: 1) Identificación de los sucesos básicos. 2) Construcción de una tabla de contingencia completa. 3) Uso de una relación multiplicativa para la obtención de la condicional por la que se pregunta y 4) Respuesta completa a la pregunta del problema. Así pues, en el post-test, al construir y completar la tabla de contingencia, los estudiantes obtienen todas las marginales y todas las intersecciones involucradas en el problema, sean necesarias o no para la resolución del problema, cosa que no ocurre en los pre-test. Por tanto, es evidente que en el post-test los estudiantes no hacen análisis para la obtención de cantidades intermedias:

[38] Con el término "análisis" nos referimos a la primera parte de la regla del análisis-síntesis para la resolución de problemas.

completan la tabla en todos los casos y únicamente tienen en cuenta la pregunta del problema en el último cálculo, para el que han de seleccionar en la tabla la marginal y la intersección pertinentes. La preferencia de los estudiantes por completar la tabla en lugar de hacer análisis para obtener únicamente las cantidades estrictamente necesarias ya se observa durante el proceso de enseñanza (véase apdo. 4.8.3, p. 137). Como allí señalábamos, tenemos dos hipótesis sobre los motivos por los que sucede esto: la primera, es que completar la tabla podría resultar más sencillo para los estudiantes que hacer análisis y la segunda, que el hecho de obtener todas las marginales e intersecciones posibles proporcionaría al resolutor una sensación de control sobre la resolución del problema.

Por otra parte, aunque durante la enseñanza se introdujo el uso de la tabla haciendo hincapié en las relaciones que fundamentan sus reglas de cálculo internas, el proceso de completar la tabla acaba automatizándose, de manera que los estudiantes, una vez adquieren experiencia en su uso, no reparan en las relaciones que están aplicando al completarla. Esta es otra diferencia importante que observamos entre la forma en que los estudiantes resuelven los problemas en los pre-test y la forma en que lo hacen en el post-test. Así, pensamos que en los pre-test los estudiantes son más conscientes de las relaciones que se dan entre los datos conocidos dados en el enunciado y de las relaciones que usan para la obtención de nuevas cantidades, mientras que en el post-test el proceso de obtención de cantidades intermedias se algoritmiza, pudiendo ser llevado a cabo sin reparar en el sentido de las operaciones.

Fase III: Obtención de la cantidad que se da como resultado.

La fase III, la que corresponde a la obtención de la condicional por la que se pregunta, también se lleva a cabo de manera diferente en el post-test que en los pre-test.

En los problemas de los dos primeros cuestionarios, la pregunta del problema está formulada en forma de porcentaje, es decir, se trata de un "porcentaje condicional". Este número, en sí mismo, podría considerarse una medida de probabilidad condicional, pero en los pre-test, el término probabilidad no se menciona en ningún momento, ya que los estudiantes no han sido instruidos todavía en probabilidad. Por este motivo, abordan el problema como si se tratara de un problema de porcentajes y, siempre que hay un cálculo específico para la obtención del resultado, éste se realiza mediante una regla de tres[39] del tipo "$n(B)$ es a $n(A \cap B)$ como 100 es a x", siendo x el tanto por cien que

[39] Esta uniformidad en el procedimiento de cálculo podría deberse, en gran parte, a la enseñanza previa recibida en materia de proporcionalidad y porcentajes, pues se daba la circunstancia de que, excepto el estudiante R., todos los estudiantes habían cursado juntos los tres primeros cursos de la ESO.

representa la condicional %(A|B) por la que se pregunta[40]. Así pues, con este cálculo, el resolutor pone en relación la marginal y la intersección asociadas a la condicional preguntada, al tiempo que restringe el espacio muestral (el 100%) al conjunto de referencia del suceso condicionante.

En el post-test, tras la enseñanza, tanto los datos conocidos como la pregunta del problema están formulados en términos de probabilidades y para la obtención de la condicional pedida los estudiantes usan una relación multiplicativa entre probabilidades. Como hemos comentado, en todas las resoluciones con éxito de este cuestionario los estudiantes construyen y completan una tabla de contingencia, lo que pone a su disposición todas las marginales y todas las intersecciones posibles. Finalmente, para calcular la condicional, seleccionan en la tabla la marginal y la intersección pertinentes y aplican la relación multiplicativa:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Es decir, asignan un valor a la probabilidad condicional usando la definición matemática de la probabilidad condicional.

En conclusión, las estrategias de resolución con éxito son más variadas en los pre-test que en el post-test, ya que en este último todas las resoluciones con éxito de todos los problemas siguen la misma estrategia, mientras que en los pre-test no sólo encontramos estrategias diferentes para cada problema sino, también, problemas para los que se han usado hasta tres estrategias de resolución diferentes.

Por otra parte, el uso de la tabla de contingencia modifica el proceso de resolución en casi todas sus fases, desde la forma en que se organiza la información del enunciado hasta el cálculo final del resultado, pasando por la obtención de cantidades intermedias. Usar la tabla de contingencia supone una traducción del problema original (formulado verbalmente) a un problema situado en un contexto matemático (formulado en el lenguaje de la tabla). Una vez realizada con éxito esta traducción (en la que un resolutor no competente en el uso de la tabla encontraría las primeras dificultades), la resolución del problema es puramente algorítmica, aunque luego es necesario hacer la traducción en sentido inverso (del lenguaje matemático al lenguaje verbal) para responder adecuadamente a la pregunta del problema. A juzgar por los resultados del post-test en comparación con los de los pre-test, parece evidente que la tabla de contingencia es una herramienta que contribuye al éxito en la resolución de los problemas de nivel N_0; pero como ante cualquier modelo matemático, cabe plantearse hasta qué punto resta comprensión de lo que se hace y del por qué se hace, como consecuencia de la

[40] Retomamos aquí la notación n(A) para representar el cardinal del conjunto de referencia del suceso A y %(A|B) para representar el porcentaje de individuos que verifican el suceso A, entre los que verifican el suceso B.

algoritmización del proceso de resolución. Esto nos lleva a sugerir que durante la enseñanza, la resolución de los problemas de nivel N_0 no se lleve a cabo única y exclusivamente con la tabla, sino que, antes de la introducción de este recurso, se exploren tantas estrategias de resolución diferentes como sea posible, con el objetivo de conseguir un mayor grado de comprensión del proceso por parte de los estudiantes.

6.2.3 – Sobre los errores cometidos por los estudiantes.

6.2.3.1 – Errores y fases en la resolución de problemas de nivel N_0. Tipos de error.

Hemos observado que los estudiantes cometen errores en cada una de las fases o etapas del proceso de resolución. Podría decirse que cada fase ofrece sus dificultades al estudiante y la mayoría de los errores observados, tanto en los pre-test como en el post-test, guardan relación con las acciones correspondientes a la fase en la que aparecen.

Por otra parte, hemos distinguido entre errores de cantidad y errores de relación. Los primeros se cometen en torno a una determinada cantidad y afectan a una o más de sus componentes (numérica, verbal y de formato). Los errores de relación, por el contrario, involucran a varias cantidades y se cometen al relacionar estas cantidades de manera incorrecta. Mientras los errores de cantidad aparecen en todas las fases del proceso de resolución, los errores de relación son propios de las que hemos denominado fases II y III, es decir, las correspondientes a los cálculos.

En la fase I, la de organización de la información, el error más frecuente en las resoluciones de los estudiantes ha sido el de interpretar de manera equivocada alguna de las cantidades conocidas, dadas en el enunciado, siendo las intersecciones más susceptibles de interpretación errónea que las marginales.

Todas las marginales interpretadas de manera incorrecta lo han sido como si se tratara de intersecciones (intersecciones directamente relacionadas con dichas marginales). Así, por ejemplo, en la resolución H_P2a_F vemos como el estudiante interpreta la expresión "282 estudiantes que usan gafas" como "chicos con gafas", atribuyéndole género masculino a la palabra neutra "estudiantes". En el resto de casos en los que una marginal ha sido interpretada como una intersección, apreciamos influencia del contexto y concretamente, del razonamiento causal en relación a los sucesos básicos, del que trataremos en el apartado siguiente. Por ejemplo, en L_P10x2_F, la información "100 se han tratado con el antibiótico" ha sido interpretada como "100 han sido tratadas y curadas", tras lo cual parece estar la idea equivocada de que todas las personas tratadas se curan.

En cuanto a las intersecciones interpretadas de manera incorrecta, lo han sido como si tratara de otras intersecciones, de marginales o de condicionales. En los casos de intersecciones interpretadas como otras intersecciones percibimos simplemente una falta de atención por parte del estudiante en la lectura del enunciado, como en AyM_P17_F(1), donde las estudiantes interpretan la información "a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo" como "siete personas no tuberculosas con test negativo". En cambio, cuando una intersección ha sido interpretada como una marginal notamos de nuevo la influencia del contexto. Por ejemplo, en C_P18a_F, la estudiante interpreta la cantidad "4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas" como "4 piezas defectuosas", ignorando que son piezas calificadas de defectuosas, quizás por considerar redundante esta información, desde el punto de vista (equivocado) de que todas las piezas defectuosas son calificadas de defectuosas. También hay intersecciones que han sido interpretadas como condicionales, como en L_P9_%, donde la intersección "un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado" se interpreta como "el 35% de las personas tratadas con antibiótico, se ha curado". En este error apreciamos un fenómeno ya descrito por Lonjedo (2007) en el estudio de los problemas de nivel N_1: la confusión ente intersecciones y condicionales directamente relacionadas, del que hablaremos más adelante.

Si nos centramos ahora en la fase II del proceso de resolución, encontramos tanto errores de cantidad como errores de relación. Un error de cantidad que hemos observado en repetidas ocasiones es el de asignar un mismo número a dos sucesos diferentes, lo que significa que dos cantidades comparten erróneamente su componente numérica. Las dificultades asociadas al contexto parecen ser, otra vez, la motivación principal de estos errores. Por ejemplo, en C_P17_% el valor 47%, que en el enunciado aparece asociado a la marginal "hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo", es asignado tanto a dicha marginal como a la intersección "tuberculosas positivas", pues la estudiante parece interpretar que las personas con test positivo necesariamente son tuberculosas. El error inverso, es decir, describir dos números distintos de la misma manera o mediante descripciones que tienen asociado el mismo referente, aparece sólo de manera anecdótica (en AyM_P17_F(6) y en L_P1_P).

Pero los errores más comunes en esta fase son, sin duda, los errores de relación. Puesto que en los problemas de nivel N_0 el cálculo de cantidades intermedias precisa sólo de relaciones aditivas, los errores observados tienen que ver con relaciones de este tipo que involucran a marginales e intersecciones. Además, estos errores también suelen estar relacionados con el contexto en que se formula el enunciado, no apareciendo ninguno en el contexto Estsocial, que es el que presenta los valores más bajos para las dificultades en general, y con bastante frecuencia en el resto de contextos. Un ejemplo lo encontramos en AyM_P18a_F, donde las estudiantes suman "el número de piezas calificadas de correctas" con "el número de piezas defectuosas calificadas de correctas" y creen obtener "el número total de piezas calificadas de correctas", como si en el primer conjunto de piezas calificadas de correctas faltaran por incluir las piezas defectuosas calificadas de correctas.

Por otra parte, en el post-test se usa ampliamente la tabla de contingencia y en un par de resoluciones (L_P6_P y H_P1_P) también el diagrama en árbol, tanto para organizar la información del enunciado como para obtener cantidades intermedias. Como consecuencia, en esta fase del proceso de resolución, surgen errores relacionados con el uso de estas herramientas, como el de hacer una partición errónea del espacio muestral a través del diagrama en árbol (véase el caso de H. en el Problema 1, p. 328) o situar erróneamente cantidades (o alguna de sus componentes) tanto en árboles como en tablas (véase el caso de L. en el Problema 1, p. 315).

En la fase III, los errores tienen que ver con la acción específica que define esta fase: el cálculo final (si se produce) mediante el que se obtiene la cantidad que se da como resultado. En los pre-test, este cálculo se ha llevado a cabo siempre a través de una regla de tres y los errores que se observan en su realización unas veces son de tipo conceptual y otros de tipo procedimental, estando estos últimos relacionados con dificultades en el manejo de la regla de tres. Por error de tipo conceptual nos referimos al que consiste en no usar en la regla de tres las cantidades pertinentes (la marginal y la intersección directamente relacionadas con la condicional por la que se pregunta) sino otras cantidades. En cuanto a los errores procedimentales o de uso de la regla de tres, se trata de errores en la disposición de las cantidades, de manera que las proporciones que se obtienen no son correctas. En el post-test este cálculo final no se lleva a cabo mediante regla de tres, sino mediante una relación ternaria (multiplicativa o aditiva). Sin embargo, los errores consisten también en el uso de cantidades no pertinentes, en operar las cantidades de manera incorrecta o en una combinación de ambas. En algunos casos, hemos considerado que esta cantidad final es interpretada por el estudiante como la condicional por la que se pregunta, con lo que su forma de proceder delataría una baja compresión del concepto de probabilidad condicional. En otros casos, consideramos que la cantidad que el estudiante obtiene del cálculo final y da como resultado, no es interpretada como la condicional por la que se pregunta, lo cual denota dificultades también en la interpretación de la pregunta del problema. Teniendo en cuenta todo esto, la casuística en cuanto a relaciones erróneas observadas que involucran a la cantidad que se da como resultado es muy amplia y con pocos casos repetidos, por lo que remitimos al lector a los anexos 25 (p. 645) y 26 (p. 655), donde se describen todos los errores de este tipo observados en los tres cuestionarios.

Finalmente, en la Fase IV, que consiste en dar una respuesta completa a la pregunta del problema, encontramos el error de responder con una cantidad distinta de aquella por la que se pregunta. En esta categoría de error, el caso que se da con más frecuencia y en resoluciones de todos los problemas, es el de responder con la intersección directamente relacionada con la condicional preguntada, lo que pone de manifiesto, una vez más, la dificultad para diferenciar entre cantidades que se refieren a intersecciones y cantidades que se refieren a condicionales. Aunque con menor frecuencia, también hemos encontrado resoluciones en las que se da como resultado la condicional transpuesta a aquella por la que se pregunta, la marginal directamente relacionada con la condicional preguntada o con su transpuesta, una cantidad sin sentido en el contexto del problema o incluso el valor 100%, es decir la probabilidad del suceso seguro[41].

Por último, hay un error que se ha observado en todas las fases del proceso de resolución y que consiste en una discordancia entre la componente numérica y la verbal de alguna cantidad, como consecuencia de un error de expresión lingüística y no de interpretación. En otras palabras, se trata del error consistente en describir una cantidad (verbalmente o en notación matemática) de manera diferente a como se interpreta. Hemos observado este error a la hora de describir cantidades calculadas, la cantidad que se da como resultado e incluso las cantidades conocidas, dadas en el enunciado. Si atendemos al tipo de cantidad (marginal, intersección o condicional) observamos también una gran variedad de casos, siendo los más frecuentes los de intersecciones descritas como marginales o como condicionales y los de condicionales descritas como marginales o como intersecciones (véanse anexos 25 y 26). Cuando una intersección o una condicional son descritas como marginales, se intuye en la mayoría de los casos que el resolutor lo hace como una forma de abreviar la descripción, dando por entendido el suceso que se omite (en una intersección, cualquiera de los dos que intervienen en la intersección; y en una condicional, bien el suceso condicionado o bien el condicionante). Es lo que ocurre, por ejemplo, en C_P1_% en relación a la cantidad "un 37% de chicas que no las usan", que la estudiante describe con la expresión "que no usan gafas", por haber hecho referencia justo antes a la cantidad "15% de chicas que usan gafas" (véase apdo. 5.3.4.1.4, p. 268). Sin embargo, cuando una intersección es descrita como una condicional o una condicional es descrita como una intersección, lo que tenemos son muestras de la ya referida confusión entre intersección y condicional, que trataremos más detalladamente en el apartado 6.2.3.3 (p. 354).

Las Tablas 6.1, 6.2 y 6.3 resumen la relación entre los tipos de error identificados y las fases en la resolución de los problemas de nivel N_0.

[41] Este último caso fue observado en la resolución B_P18a_% y la cantidad 100% respondía a la pregunta "Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?"

ERRORES DE CANTIDAD	
Tipo de error	**Fase del proceso de resolución**
E1: Errores de interpretación de las cantidades conocidas dadas en el enunciado.	Fase I - Organización de la información
E2: Uso de un mismo número para dos sucesos distintos, es decir, dos cantidades coinciden erróneamente en la componente numérica.	Fase I – Fase II - Organización de la información - Obtención de cantidades intermedias
E3: Uso de dos números diferentes para un mismo suceso, es decir, dos cantidades difieren en la componente numérica pero sus respectivas descripciones son equivalentes.	Fase I - Fase II - Organización de la información - Obtención de cantidades intermedias
E4: Discordancia entre las componentes numérica y verbal de una cantidad, por error de expresión.	Fase I - Fase II - Fase III - Fase IV - Organización de la información - Obtención de cantidades intermedias - Obtención de la cantidad que se da como resultado. - Respuesta a la pregunta del problema
E5: Dar como resultado una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta.	Fase IV - Respuesta a la pregunta del problema
E9: Error relacionado con el formato de datos.	Fase III - Obtención de la cantidad que se da como resultado

Tabla 6.1. Errores de cantidad y fases en la resolución de un problema de N_0.

ERRORES DE RELACIÓN	
Tipo de error	**Fase del proceso de resolución**
E6.1: Error de relación en el uso de relaciones ternarias aditivas.	Fase II - Obtención de cantidades intermedias
E6.2: Error en el uso de la regla de tres para el cálculo del porcentaje que se da como resultado.	Fase III - Obtención del número que se da como resultado.
E6.3: Cálculo del número que se da como resultado por otro procedimiento distinto a la regla de tres.	

Tabla 6.2. Errores de relación y fases en la resolución de un problema de N_0.

<table>
<tr><th colspan="2">ERRORES EN EL USO DE HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS</th></tr>
<tr><th>Tipo de error</th><th>Fase del proceso de resolución</th></tr>
<tr><td>E7: Error en el uso del diagrama en árbol.</td><td rowspan="2">Fase I y Fase II
- Organización de la información
- Obtención de cantidades intermedias</td></tr>
<tr><td>E8: Error en el uso de la tabla de contingencia.</td></tr>
</table>

Tabla 6.3. Errores en el uso de herramientas heurísticas y fases en la resolución de un problema de N_0.

6.2.3.2 –Errores ligados al contexto.

El estudio realizado por Carles y otros (2009) ponía de relieve que el contexto era influyente en el valor de las dificultades de los problemas de nivel N_0, cuando éstos se proponían a estudiantes de secundaria sin enseñanza previa en probabilidad; pero quedaba por estudiar de qué forma esta variable de la tarea influía en la actuación de los estudiantes, es decir, qué efectos concretos producía. En esta tesis hemos hecho un estudio cualitativo y exhaustivo de las resoluciones de los estudiantes, lo cual nos ha permitido abordar dicha cuestión, observando numerosos errores derivados de la dificultad de interpretar correctamente los fenómenos asociados a determinados contextos en los que es posible formular los problemas. Debemos aclarar, no obstante, que estos errores han aparecido únicamente con carácter previo a la enseñanza y no en todos los contextos usados en la investigación. Así, los hemos encontrado en las resoluciones de los problemas de los pre-test formulados en los contextos que hemos denominado Estadístico Salud (Estsalud), Diagnóstico en Salud (Diagsalud) y Diagnóstico en Calidad (Diagcalidad), mientras que en las resoluciones de los problemas formulados en el contexto Estadístico Social (Estsocial) no hemos encontrado ningún error atribuible a dificultades relacionadas con esta variable de la tarea. Recordemos que la principal diferencia entre el contexto Estsocial y el contexto Estsalud era el hecho de que los sucesos básicos involucrados en el Estsalud ("tratarse con el antibiótico" y "curarse de la infección") sugieren la existencia de una relación causal entre ellos (tratarse con el antibiótico puede verse como la causa de curarse de la infección), cosa que no ocurre en el contexto Estsocial, donde los sucesos básicos son "ser chico" y "usar gafas" y entre ellos no existe relación causal. En cuanto a la situación Test de Diagnóstico, las dificultades que ofrece, sea cual sea el contexto en el que se sitúe el enunciado (el de la salud o el del control de calidad), se derivan de creencias erróneas en los estudiantes acerca de la infalibilidad del test. Así, la formulación de los problemas en los contextos Estsalud, Diagsalud y Diagcalidad, favorece la aparición de determinados errores, que analizaremos a continuación; en cambio, el hecho de formular los problemas en el contexto Estsocial no parece influir en la actuación de los estudiantes o, en todo caso, el efecto es positivo, dados los bajos valores para las dificultades que presentan los problemas formulados en este contexto (tanto en esta investigación como en Carles y otros, 2009) y el escaso número de errores que aparecen en ellos.

6.2.3.2.1 – Errores ligados al contexto Estsalud.

En el marco teórico (apdo 3.3.2, p. 48) ya señalamos que el contexto que hemos denominado Estsalud puede tomarse por lo que Henry (2005) define como una situación causalista, es decir, una situación en la que es esperable, a priori, la existencia de una relación causa-efecto entre los sucesos implicados, que en este caso son "tratarse con el antibiótico" y "curarse de la infección". Concretamente, hemos observado cómo, antes de la enseñanza (en los pre-test) los estudiantes presentan razonamientos totalmente deterministas respecto a estos sucesos, que pueden resumirse en:

[1] Toda persona tratada con el antibiótico se cura de la infección o, equivalentemente, si una persona no se ha curado de la infección, esto significa que no ha sido tratada con el antibiótico.

[2] Una persona no tratada con el antibiótico no puede curarse o, equivalentemente, si una persona se ha curado, entonces necesariamente ha sido tratada con el antibiótico.

Una prueba evidente de que algunos estudiantes razonan de esta manera, la encontramos en la resolución filmada del Problema 9 del Pre-test(F), llevada a cabo por las estudiantes A. y M. donde encontramos la siguiente afirmación (ítem {46}) en relación a la información *"Se han curado un total de 64 personas",* dada en el enunciado del problema:

> *{46} A.: Si se curan (risa) a ver, si se curan es porque las han tratado. Milagros, no.*

Es decir, la estudiante A. muestra el razonamiento descrito en [2].

Existen numerosas investigaciones acerca de los sesgos asociados a la causalidad en la evaluación de probabilidades condicionales (Falk, 1986, 1991; Pollatsek y otros, 1987; Batanero, Contreras y Díaz, 2012). Estas investigaciones suelen observar el efecto de los sesgos de razonamiento en las respuestas de los estudiantes a preguntas sobre probabilidad condicional. Sin embargo, el foco de interés de nuestro trabajo está puesto en la resolución de problemas, por lo que al estudiar los efectos del razonamiento causal en la actuación de nuestros estudiantes, nosotros hemos prestado atención a las distintas fases del proceso de resolución de los problemas y no sólo a la respuesta proporcionada por el resolutor, encontrando diferentes tipos de error que se derivan de este tipo de razonamiento. Por ejemplo, una consecuencia directa de esta forma de razonar es el hecho de que algunos resolutores identifiquen como "imposibles" algunos sucesos involucrados en el problema. Por ejemplo, un resolutor que razone como en [1], no contemplará la posibilidad de que una persona tratada con el antibiótico no se cure y por tanto, la probabilidad de la intersección "tratados y no curados" será cero para él. En el caso de que razone como en [2], considerará imposible el suceso "no tratados y curados". Y si el estudiante razonara como en [1] y como en [2] simultáneamente, las únicas intersecciones posibles para él serían "tratados y curados" y "no tratados y no curados". Esto conduce, principalmente, a errores de interpretación de las cantidades conocidas dadas en el enunciado (como en el ejemplo anterior), y a errores que consisten en atribuir el mismo conjunto de referencia a dos sucesos distintos, cuyas descripciones son percibidas por el resolutor como equivalentes. Así, un resolutor que razone como en [1] entenderá lo mismo por "tratados y curados" que por "tratados" y lo mismo por "no tratados y no curados" que por "no curados"; de igual manera, un resolutor que razone como en [2] entenderá lo mismo por "tratados y curados" que por "curados" y lo mismo por "no tratados y no curados " que por "no tratados". Una muestra de ello la encontramos en la resolución del Problema 9 realizada por la estudiante B. en el Pre-test(F), donde la estudiante asigna el número 48 (dado en el enunciado como número de personas que no se han tratado con el antibiótico y no se han curado) tanto al suceso "no tratados y no curados" como al suceso "no tratados". Es decir, comete el error de cantidad que hemos tipificado como E2 y que consiste en asociar un mismo número a dos sucesos diferentes.

Sin embargo, de los errores que vienen motivados por esta forma de razonar en el contexto Estsalud, los más abundantes son los errores de relación en el cálculo de cantidades intermedias (véase Tabla 5.26 , p. 286). Es lo que observamos, por ejemplo, en la resolución del Problema 9 realizada por el estudiante R. en el Pre-test(F), donde aparece una operación que, a juzgar por las descripciones que el estudiante hace de los números, consiste en obtener el número de personas tratadas y no curadas restando el número de personas curadas del número de personas tratadas, es decir:

n(tratadas) - n(curadas) = n(tratadas y no curadas)

Una posible explicación de esta forma de actuar es que el estudiante considere que todas las personas curadas han sido tratadas, es decir, que el estudiante estuviera razonando como en [2] y que, por tanto, identificara el número de personas curadas con el número de personas tratadas y curadas. Nótese que si sustituimos el suceso "curadas" por el suceso "tratadas y curadas" en la operación anterior, quedaría la relación correcta entre cantidades:

n(tratadas) - n(tratadas y curadas) = n(tratadas y no curadas)

6.2.3.2.2 – Errores ligados a la situación Test de Diagnóstico en los contextos de la salud y del control de calidad.

En la situación Test de Diagnóstico, los errores ligados al contexto se producen porque el resolutor subestima o no contempla en absoluto la posibilidad de que el test falle y arroje un diagnóstico equivocado (los falsos positivos o falsos negativos). Al igual que en el contexto Estsalud, esto conduce a razonamientos erróneos de tipo determinista:

[1] En el contexto Diagsalud: Todas las personas tuberculosas dan positivo para la enfermedad cuando se les administra el test o, equivalentemente, un resultado negativo en el test garantiza al cien por cien que la persona no padece de tuberculosis.

En el contexto Diagcalidad: Una pieza correcta siempre es calificada de correcta por el dispositivo o, equivalentemente, si una pieza es calificada de defectuosa es seguro que se trata de una pieza defectuosa.

[2] En el contexto Diagsalud: Todas las personas que no padecen tuberculosis dan negativo cuando se les administra el test o, equivalentemente, un resultado positivo en el test garantiza al cien por cien que la persona padece de tuberculosis.

En el contexto Diagcalidad: Una pieza defectuosa siempre es calificada de defectuosa por el dispositivo o, equivalentemente, si una pieza es calificada de correcta por el dispositivo, es seguro que se trata de una pieza correcta.

De nuevo, la prueba de que algunos estudiantes razonan de este modo la encontramos en una de las resoluciones filmadas: la del Problema 18a del Pre-test(F), realizada por las estudiantes A. y M. En los ítems {45}, {46} y {47}, que mostramos a continuación, vemos cómo la estudiante A. considera infalible el test en la detección de piezas correctas:

> *{45} A.: (Mirando el enunciado) Entre, entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, que eran setenta y siete (A. señala el dato en la pizarra) ¿qué porcentaje eran piezas correctas? ¡Todas!*
>
> *(Silencio. Miran la pizarra)*
>
> *{46} M.: Todas las que calificaron correctas.*
>
> *{47} A.: Claro.*

Por tanto, la estudiante está razonando como en [2].

Este mismo razonamiento lo encontramos, de nuevo, en la resolución del mismo problema en el Pre-test(%), realizada por la estudiante B. En ella, la estudiante responde a la pregunta del problema ("Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?") como se muestra en la Figura 6.1. Es decir, la estudiante considera que todas las piezas calificadas de correctas son correctas o lo que es lo mismo, que el test no ha arrojado ningún falso positivo. El hecho de que el porcentaje de piezas correctas (95%) sea mayor que el de piezas calificadas de correctas (77%) parece contribuir al error, pues reafirma a la estudiante en su idea de que el conjunto de piezas calificadas de correctas está contenido en el conjunto de piezas correctas.

Del porcentaje de correctas clasificadas por el dispositivo, el 100% son correctas, ya que si en realidad son 95% corectas y el solo recoge el 77% son todas.

Figura 6.1.

Este tipo de razonamientos desemboca también en errores de interpretación de las cantidades conocidas dadas en el enunciado. Especialmente llamativo es el caso de la intersección *"4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas"*, que aparece en el Problema 18a del Pre-test(F) y su análoga en el Pre-test(%), *"4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas"*. Hasta en ocho resoluciones diferentes es interpretada de manera incorrecta: algunos estudiantes la interpretan como la marginal "piezas defectuosas", otros como la marginal "piezas calificadas de defectuosas" y otros hacen una doble asignación del número 4 (error de tipo E2), asociándolo tanto a la marginal "piezas defectuosas" como a la marginal "piezas calificadas de defectuosas". Esto muestra que para algunos resolutores, la expresión "4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó de defectuosas" resulta redundante, pues asumen que todas las piezas calificadas de defectuosas son defectuosas (razonan como en [1]) y/o que todas las piezas defectuosas son calificadas de defectuosas (razonan como en [2]).

Otro error de interpretación que evidencia claramente las dificultades ligadas al contexto, lo encontramos en la resolución filmada del Problema 17 del Pre-test(F) realizada por las estudiantes A. y M.. En ella, las estudiantes llegan a considerar una cantidad que no se encuentra en la estructura de cantidades del problema y que incorporan a la resolución para dar sentido a un suceso que entra en contradicción con sus concepciones erróneas acerca de la infalibilidad del test. Concretamente, las estudiantes interpretan la intersección "a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo", dada en el enunciado, como la cantidad "siete personas que eran tuberculosas y ya no lo son", lo cual queda recogido en los ítems {191} al {207} de la transcripción escrita:

{191} M.: Espérate. Siete personas que eran tuberculosas.

(M. y A. miran ambas el enunciado)

{192} M.: Que eran tuberculosas, aunque el test haya dicho que es negativo.

{193} A.: Esto quiere decir que se han curado ¿no?

{194} M.: Claro.

{195} A.: Siete personas…

{196} M.: Sí…

{197} A.: … eran tuberculosas y el test les resultó negativo.

{198} M.: …que eran…

{199} A.: Claro, tía. Eso quiere decir que ya no son tuberculosas. (Pausa) ¡No fastidies!

{200} M.: A lo mejor es que…

{201} A.: Es que si es eran, es pasado.

{202} M.: Vale.

{203} A.: Eran tuberculosas

{204} M.: Y les dio negativo. Eso quiere decir que siete personas …

{205} A.: Siete personas (A escribe "7")

{206} M.: … no son tuberculosas. Lo eran pero ya no son.

{207} A.: Lo eran pero ya no.

(A. escribe junto al 7, "lo eran pero ya no")

La descripción dada en el enunciado para la cantidad pone de manifiesto de manera muy explícita que se han obtenido siete falsos negativos, es decir, que el test ha arrojado un diagnóstico equivocado para siete personas que eran tuberculosas. Sin embargo, la idea de que el dispositivo es infalible está tan arraigada en el pensamiento de las estudiantes, que buscan una explicación diferente para el hecho de que existan personas tuberculosas con test negativo. Así, consideran que estas siete personas han dado negativo en el test porque "ya se han curado" y no porque el dispositivo haya fallado. Como consecuencia, cometen un error de interpretación de una de las cantidades dadas en el enunciado y, además, incorporan a la resolución una cantidad que no tiene cabida en la estructura de cantidades del problema: las personas tuberculosas que ya no lo son.

Por último, otros errores ligados al contexto que hemos encontrado en las resoluciones de los problemas formulados en la situación Test de Diagnóstico son, como en el caso del contexto Estsalud, los errores de relación. A continuación, mostramos dos ejemplos de relaciones erróneas que delatan los razonamientos equivocados [1] y [2]:

En V_P18a_F , el estudiante asume que todas las piezas calificadas de correctas son correctas:

n(piezas correctas) - n(número de piezas calificadas de correctas) = n(piezas calificadas de incorrectas)

En B_P17_F, la estudiante asume que todas las personas con resultado positivo en el test son tuberculosas:

n(positivas) + n(tuberculosas negativas) = n(tuberculosas)

En conclusión, los estudiantes muestran concepciones equivocadas acerca de los fenómenos asociados a los contextos Estsalud, Diagsalud y Diagcalidad, que les conducen a errores de diferentes tipos en diferentes fases del proceso de resolución, entre los que destacan los errores de interpretación de las cantidades dadas en el enunciado y los errores de relación. Un dato a tener en cuenta es que sólo encontramos errores ligados al contexto en las resoluciones de los dos primeros cuestionarios, es decir, antes de la enseñanza. Sobre los factores que han favorecido la superación de estos errores por parte de los estudiantes hablaremos más adelante, en el apartado 2.3.4 (p. 356).

6.2.3.3 – La confusión entre condicional e intersección.

Lonjedo (2007) señala que la confusión entre condicional e intersección es uno de los errores que los estudiantes cometen con mayor frecuencia en la resolución de problemas de nivel N_1 (problemas ternarios de probabilidad condicional que presentan una única condicional entre los datos conocidos). Concretamente, Lonjedo observa que un gran número de estudiantes interpreta como una intersección el dato condicional y/o la pregunta del problema (cuando ésta se trata de una probabilidad condicional). Como señalan Pollatsek y otros (1987), la forma como se redactan los enunciados de los problemas verbales podría ser una de las causas de la confusión entre los diferentes tipos de probabilidades (condicionales, conjuntas y marginales). Lonjedo se hace eco de esta observación y estudia las diferentes estructuras gramaticales que podrían favorecer la correcta interpretación de los datos condicionales, siendo una de ellas la que usamos en la redacción de las preguntas de los problemas de esta tesis: "Entre los que..., ¿que probabilidad/porcentaje ....?". Nuestro objetivo era minimizar las dificultades de interpretación por parte de los estudiantes, pero a pesar de las precauciones, no hemos dejado de observar toda una serie de errores que tienen como base la confusión entre la intersección y la condicional. Éstos son de diferentes tipos y se dan en diferentes fases del proceso de resolución. Así, hemos encontrado errores de interpretación de las cantidades conocidas[42], errores de doble asignación (asignar un mismo número a dos sucesos distintos), dar una cantidad equivocada como resultado y errores de descripción

[42] Recordemos que cuando hablamos de errores de interpretación en esta tesis, nos referimos a errores en la interpretación de los datos conocidos y no de la pregunta del problema. Respecto a esta última, preferimos hablar del error de responder a la pregunta con una cantidad distinta de la condicional pedida, tanto si se debe a un error de interpretación de la pregunta o a otra causa.

de cantidades, todos ellos relacionados con la dificultad para distinguir entre los dos tipos de cantidad (condicional e intersección[43]).

En los problemas de nivel N_0, los datos conocidos del enunciado son marginales e intersecciones por lo que no puede darse el caso de interpretar una condicional conocida como si se tratara de una intersección. Sin embargo, sí hemos observado el error inverso, es decir el de interpretar una intersección como si se tratara de una condicional. Por ejemplo, en el Problema 2a del Pre-test(%) la estudiante A. interpreta la intersección "un 15% de chicas usan gafas" como si se tratara de la condicional "un 15% de los que usan gafas son chicas". Debemos señalar que sólo hemos observado este error en dos resoluciones y los datos de los problemas venían expresados en forma de porcentajes. En estos casos el resolutor no toma como conjunto de referencia del porcentaje todo el espacio muestral sino el espacio muestral restringido por uno de los dos sucesos asociados a la intersección, convirtiendo la intersección en una condicional.

Otro error similar es el de la doble asignación. Lo encontramos, por ejemplo, en la resolución del Problema 17 del Pre-test(%) llevada a cabo por la estudiante A., que asigna el mismo número tanto a la intersección "porcentaje de personas tuberculosas con test negativo" como a la condicional "porcentaje de personas con test negativo, entre las tuberculosas"; o en la resolución del Problema 2a del Test(P) realizada por la estudiante L., que asigna el mismo número a la intersección "probabilidad de ser un chico con gafas" y a la condicional "probabilidad de ser chico, entre los que usan gafas". Este tipo de errores pone de manifiesto que la confusión entre intersección y condicional no sólo provoca el error de interpretar una como si se tratara de la otra, sino que hay casos en los que los estudiantes ni siquiera hacen distinción entre ambas, es decir, no las perciben como dos cantidades diferentes. Esto viene a confirmar la idea de Pollatsek y otros (1987) de que algunos estudiantes tienen en mente un concepto que podría considerarse una amalgama de ambos tipos de probabilidad: *"One might speculate that instead of separate, differentiated concepts of joint and conditional probability, some subjects may have available a concept that is some amalgam of the two."* (Pollatsek y otros, 1987, p. 269)

Otro error muy común (lo hemos observado en quince resoluciones de los pre-test y dos del post-test) es el de responder a la pregunta del problema con la intersección directamente relacionada con la condicional preguntada (o una cantidad que es interpretada como tal por el estudiante[44]), lo cual es síntoma de la dificultad que entraña

[43] En coherencia con lo señalado en apdo. 3.5.1 (p. 59) nos permitimos aquí hablar de condicionales e intersecciones como tipos de cantidad, englobando bajo el nombre "condicional" o "intersección" tanto la componente numérica de la cantidad, como su descripción y el formato en que se expresa el número.

[44] Hay que tener en cuenta que cuando el resolutor llega al último paso del proceso de resolución, el de dar una respuesta a la pregunta del problema, ha podido cometer diferentes errores que, encadenados, hacen que la cantidad con la que responde pueda tener una o más componentes erróneas, sea cual sea

la correcta interpretación del dato condicional, tal y como señala Lonjedo (2007). Sin embargo, donde hemos observado con mayor frecuencia la confusión entre intersección y condicional es a la hora de describir las cantidades. El error más abundante con diferencia es el de describir una condicional como si se tratara de una intersección, es decir, el de describir una cantidad que consideramos que el estudiante interpreta como una condicional (generalmente por la forma en que la obtiene) con una expresión que hace referencia a la intersección directamente relacionada con ella. Este error es el responsable de los elevados valores de la dificultad de la descripción correcta del resultado (DDRESC) en los dos primeros cuestionarios. Por ejemplo, en la resolución del Problema 17 del Pre-test(%) llevada a cabo por el estudiante V., vemos cómo el estudiante obtiene de manera correcta la condicional preguntada ("Entre las personas que no eran tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les dio positivo?") y, sin embargo, ésta es descrita como si se tratara de una intersección, como se observa en la Figura 6.2:

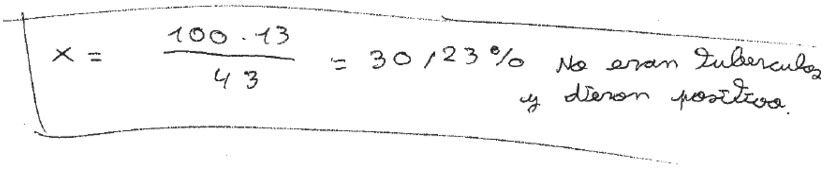


Figura 6.2.

Finalmente, hemos encontrado también el error de describir una intersección como si se tratara de una condicional, aunque lo hemos observado en sólo dos ocasiones. Una de ellas es la resolución la del Problema 9 del Pre-test(F) realizada por la estudiante L., donde la estudiante halla de manera correcta la intersección directamente relacionada con la condicional preguntada y da esta cantidad como resultado, aunque la describe como si se tratara de la condicional pedida. Estos errores de expresión son una muestra más de que algunos estudiantes parecen no ser conscientes de que la probabilidad de la intersección y la probabilidad condicional son dos conceptos diferentes.

6.2.3.4 – Análisis comparativo de los errores que se cometen en el post-test respecto de los que se cometen en los pre-test.

En la Tabla 6.4 mostramos un resumen de los tipos de errores observados antes y después de la enseñanza.

la interpretación que el estudiante haga de ella. Así cuando decimos que el estudiante responde a la pregunta con la intersección directamente relacionada con la condicional preguntada no significa necesariamente que haya obtenido esa intersección de manera correcta y la dé como resultado; lo que significa es, simplemente, que consideramos que el estudiante interpreta la cantidad que da como resultado como la intersección directamente relacionada con la condicional preguntada.

Errores que aparecen únicamente en los pre-test	Errores que aparecen tanto en los pre-test como en el post-test	Errores que aparecen únicamente en el post-test
E1.1: Interpreta una marginal como si fuera una intersección. **E1.2**: Interpreta una intersección como si fuera una condicional. **E1.4**: Interpreta una intersección como si fuera una marginal. **E1.5**: Interpreta una intersección como si fuera otra cantidad, que no tiene sentido en el contexto del problema. **E2.1:** Marginal e intersección directamente relacionadas comparten componente numérica. **E2.2:** Dos marginales comparten descripción. **E4.2:** Marginal descrita como otra marginal. **E4.3**: Intersección descrita como marginal. **E4.4:** Condicional descrita como condicional transpuesta. **E4.5:** Intersección descrita como otra intersección. **E4.6**: Condicional descrita como la marginal que representa el suceso condicionado. **E4.8**: Condicional descrita como la marginal que representa el suceso condicionante. **E5.2:** Da como resultado la condicional transpuesta. **E5.3:** Da como resultado la marginal correspondiente al suceso condicionante, es decir, la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta. **E5.4:** Da como resultado una cantidad sin otro sentido en el contexto del problema que el de su propia construcción. **E5.5:** Da como resultado la marginal correspondiente al suceso condicionante, es decir, la marginal directamente relacionada con la condicional transpuesta. **E5.6:** Da como resultado 100%. **E6.2:** Error en el uso de la regla de tres para el cálculo del porcentaje que se da como resultado.	**E1.3**: Interpreta una intersección como si fuera otra intersección. **E2.3**: Condicional e intersección directamente relacionada comparten componente numérica. **E3:** Uso de dos números diferentes para un mismo suceso, es decir, dos cantidades difieren en la componente numérica pero sus respectivas componentes verbales son equivalentes. **E4.1**: Condicional descrita como intersección. **E4.7**: Intersección descrita como condicional directamente relacionada. **E5.1:** Da como resultado la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta. **E6.1:** Error de relación en el uso de relaciones ternarias aditivas.	**E2.4:** Dos condicionales y una intersección directamente relacionada con una de dichas condicionales comparten componente x por error. **E2.5:** Dos condicionales comparten componente x por error. **E4.9:** Condicional descrita como otra condicional distinta de la condicional transpuesta. **E5.7**: Da como resultado una condicional que no es ni aquella por la que se pregunta ni su transpuesta. **E6.3:** Error de relación en el cálculo del resultado por medio de una relación ternaria multiplicativa. **E7:** Error en el uso del diagrama en árbol. E8: Error en la construcción de la tabla. **E9:** Utiliza el símbolo de porcentaje junto a un número que no representa un porcentaje.

Tabla 6.4.

El número global de errores que cometen los estudiantes se reduce considerablemente en el post-test respecto de los pre-test, lo cual se refleja también en el descenso que experimentan los valores para las dificultades de los problemas. Pero lo que diferencia los errores que se cometen antes y después de la enseñanza no sólo es la cantidad, sino también el tipo, siendo mucho más variados los que aparecen en los dos primeros cuestionarios. Así, algunos tipos de error que aparecen en los pre-test ya no aparecen en el post-test, por lo que podríamos decir que se corrigen gracias a la enseñanza impartida. Otros, sin embargo, aparecen tanto en los pre-test como en el post-test, es decir, se mantienen a pesar de la enseñanza. Y finalmente, hay errores que se observan exclusivamente en el post-test y guardan relación con la nueva forma en que los estudiantes resuelven los problemas (uso de la tabla de contingencia, uso de relaciones multiplicativas para el cálculo de la condicional, etc.).

Muchos de los errores que han sido observados tanto en los pre-test como en el post-test, tras la enseñanza aparecen sólo de manera anecdótica, como los errores de interpretación de las cantidades conocidas del enunciado, los de doble asignación de una probabilidad o un suceso (E2 y E3) y los errores en el uso de relaciones aditivas. La disminución en el post-test de este tipo de errores se produce incluso en los contextos que ofrecían más dificultades a los estudiantes (Estsalud, Diagsalud y Diagcalidad). De hecho, la actuación de los estudiantes deja de ser sensible al contexto, no habiéndose encontrado en el post-test errores ligados a dicha variable de la tarea. Esto se explica, en parte, por la instrucción recibida, ya que en el momento de realizar el post-test los estudiantes ya se han enfrentado a problemas formulados en los cuatro contextos usados en la investigación y los fenómenos asociados a estos contextos han sido ampliamente explorados durante las sesiones de enseñanza. Sin embargo, consideramos que el potencial de la tabla para actuar como modelo también juega un papel muy importante en la superación de las dificultades de los estudiantes y la consiguiente reducción de los errores que cometen. En el apdo. 4.8.2 (p. 127) hicimos referencia a los dos usos de los modelos que identifica Freudenthal (1975)[45]: el modelo como post-imagen de una situación problemática y el modelo como pre-imagen de dicha situación problemática. Esto quiere decir que la tabla les sirve de guía en el proceso de lectura y comprensión del enunciado, ya que les predispone a la búsqueda en él de dos sucesos básicos y sus complementarios para situarlos en las celdas de los márgenes. Las cuatro intersecciones posibles surgen entonces de manera automática, pues son las cantidades que se sitúan en las celdas centrales de la tabla y esto minimiza el riesgo de que el resolutor no las contemple todas, como ocurría en los pre-test cuando las concepciones erróneas de los estudiantes les impedían tomar en consideración intersecciones como "personas tratadas y no curadas" o "personas tuberculosas con un resultado negativo en el test". De esta manera, el uso de la tabla contribuye a la disminución de los errores de interpretación de las cantidades del enunciado, los errores de doble asignación de números o sucesos y los errores de descripción de marginales e intersecciones (éstas últimas quedan descritas por su posición en la tabla de contingencia). Por último, las reglas de cálculo internas de la tabla de contingencia determinan la forma en que han de operarse las cantidades contenidas en ella (marginales e intersecciones). Esto consigue eliminar los errores en el uso de relaciones aditivas para el cálculo de cantidades intermedias, que aparecían de manera frecuente en los pre-test y que, en la mayoría de los casos, venían ligados al contexto.

Pero a pesar de la mejoría obtenida en la actuación de los estudiantes tras la enseñanza, también hemos identificado en el post-test errores que no aparecían en los

[45] Citado en Van den Heuvel-Panhuizen (2003)

dos primeros cuestionarios. Algunos errores de este tipo consisten en nuevas modalidades de errores ya observados en los pre-test (errores de interpretación, errores de doble asignación, errores de descripción y errores de relación), la mayoría de los cuales se dan de manera anecdótica. Otros errores, de presencia también testimonial, tienen que ver con el uso de la tabla de contingencia y del diagrama en árbol y con el formato de datos en que se expresa el resultado. De los errores que sólo se observan en el post-test, el más abundante es el error de relación en el cálculo de la probabilidad condicional mediante una relación multiplicativa (error E6.3). Los errores en el cálculo de la condicional son frecuentes también en los pre-test, pero allí el cálculo de esta cantidad final se hace siempre mediante regla de tres y los errores cometidos por los estudiantes al aplicar este procedimiento han sido recogidos en otra categoría de error (error E6.2). Por otra parte, los errores en las relaciones multiplicativas para el cálculo de la condicional en el post-test se concentran en las resoluciones de tres estudiantes (los estudiantes L., H. y M.) que no logran la competencia en la resolución de problemas de nivel N_0. En la Figura 5.15 (p. 208) podemos comprobar que la estudiante L. sólo consigue resolver con éxito uno de los seis problemas (frente a los 3 problemas que consigue resolver en los pre-test), el estudiante H., dos (en los pre-test no resolvió ninguno con éxito) y la estudiante M., ninguno (frente a dos que consiguió resolver con éxito en los pre-test). Generalmente, en el post-test estos tres estudiantes construyen tablas de contingencia correctas y completas para todos los problemas de la prueba. Sin embargo, a la hora de calcular la condicional preguntada o bien no seleccionan en la tabla las cantidades adecuadas o bien no las operan de forma correcta, dando lugar a una amplia casuística de relaciones multiplicativas incorrectas (véase Anexo 26, p. 655) que demuestra su bajo grado de comprensión del concepto de probabilidad condicional.

Estos resultados están en consonancia con las dificultades que Díaz y De la Fuente (2005) observan en estudiantes universitarios cuando se les proponen problemas de probabilidad cuyos enunciados están formulados con ayuda de una tabla de contingencia y la función del resolutor se limita a obtener las probabilidades pedidas a partir de los datos de dicha tabla.

6.3 – CONCLUSIONES FINALES SOBRE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN.

En esta tesis hemos abordado el estudio de los problemas de nivel N_0 en los tres escenarios posibles descritos por Puig (1996) para la investigación en resolución de problemas. Así, hemos comenzado considerando los problemas de manera aislada para después poner en escena a los estudiantes resolviendo estos problemas y finalmente, a la profesora. Esto nos ha permitido dar respuesta a los tres objetivos de investigación que nos habíamos marcado: el estudio de la estructura matemática de los problemas, el análisis cualitativo de la actuación de estudiantes de secundaria ante problemas de N_0 y la experimentación de una unidad de enseñanza encaminada a mejor la competencia de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas.

El estudio teórico de los problemas ternarios según su estructura de datos, nos ha llevado a la identificación de once problemas básicos de nivel N_0, resultado que tiene aplicaciones tanto en la investigación como en la docencia: el investigador interesado en el estudio de los problemas de nivel N_0 puede servirse de esta clasificación para introducir la estructura matemática de los problemas como variable independiente en sus estudios; y el docente puede encontrar en ella una guía para organizar la enseñanza de estos problemas, teniendo en cuenta esta característica de los mismos.

Ya en el escenario II, pero con el objetivo de hablar también sobre los problemas, hemos prestado atención a las dificultades de los mismos, entendidas como variables cuyos valores se obtienen a partir de lo observado en las resoluciones de los estudiantes. Debido al reducido tamaño de la muestra de estudiantes usada en esta tesis, los resultados obtenidos para las dificultades tienen un marcado carácter local que, no obstante, nos han permitido extraer algunas conclusiones. Por ejemplo, hemos podido observar cómo antes de la enseñanza las dificultades de los problemas se ven influenciadas por la estructura de datos y el contexto en que se formulan los problemas, en consonancia con los resultados obtenidos por Carles y otros (2009) y cómo, después de la enseñanza, estas influencias desaparecen, al mismo tiempo que disminuyen los valores de las dificultades.

Sin embargo, el foco de atención de este trabajo lo hemos puesto en el análisis cualitativo de las resoluciones de los estudiantes, antes y después de la enseñanza. Este análisis se ha hecho mediante la observación, principalmente, de tres aspectos de las resoluciones: las estrategias de resolución con éxito, en términos de cantidades y relaciones entre cantidades usadas para llegar desde los datos conocidos hasta la pregunta del problema, el uso de sistemas de representación (listas, diagramas en árbol y tablas de contingencia) y los errores cometidos por los estudiantes. La primera conclusión que extraemos de este análisis es que la forma en que los estudiantes resuelven los problemas antes y después de la enseñanza es muy diferente.

Los problemas de los cuestionarios que se administraron antes de la enseñanza estaban formulados en términos de frecuencias absolutas y porcentajes y, puesto que los estudiantes no habían sido instruidos todavía en probabilidad, fueron abordados por los mismos como problemas de porcentajes. La actuación de los estudiantes ante estos problemas se caracteriza por el uso de listas y esquemas en forma de árbol como medios para organizar la información del enunciado, la obtención de cantidades intermedias mediante relaciones aditivas entre las cantidades conocidas y el cálculo del porcentaje por el que se pregunta mediante el procedimiento de regla de tres. Los errores que cometen los resolutores están relacionados con las diferentes fases del proceso de resolución: 1) "Lectura y organización de la información del enunciado"; 2) "Obtención de cantidades intermedias"; 3) "Obtención de la condicional pedida" y 4) "Respuesta completa a la pregunta del problema". Por otra parte, hemos clasificado los errores en *errores de cantidad*, que tienen que ver con errores en las componentes numérica, verbal o de formato de una determinada cantidad, y *errores de relación*, que tienen que ver con la forma en que el resolutor relaciona y opera las cantidades conocidas para la obtención de nuevas cantidades. Los errores de cantidad más frecuentes son los errores en la interpretación de las cantidades conocidas, dadas en el enunciado; los errores en la descripción de las cantidades y el responder a la pregunta del problema con una cantidad distinta de la pedida. Algunos de estos errores guardan relación con la confusión por parte de los estudiantes entre la condicional y la intersección directamente relacionada con ella. En cuanto a los errores de relación se observan tanto en el cálculo de cantidades intermedias como en el cálculo del resultado. También es destacable el hecho de que muchos de los errores observados en las resoluciones de los problemas formulados en los contextos Estsalud, Diagsalud y Diagcalidad, estén motivados por razonamientos erróneos ligados al contexto. Así, en el contexto Estsalud, algunos estudiantes tienden a considerar que entre los sucesos básicos "tratarse con el antibiótico" y "curarse de la infección" hay una relación de causa-efecto de tipo determinista, es decir, creen que si una persona se trata con el antibiótico, necesariamente se cura y/o que si una persona no se trata con el antibiótico es imposible que se cure. En la situación Test de Diagnóstico, los razonamientos erróneos observados tienen que ver con la confianza absoluta en los diagnósticos del test, es decir, con la idea equivocada de que el test es infalible. Estas creencias erróneas hacen que los estudiantes no identifiquen correctamente la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades asociada al problema, lo que conduce a errores de interpretación de los datos del enunciado y a errores de relación en la obtención de cantidades intermedias, principalmente.

Sin embargo, la aplicación de nuestra propuesta de enseñanza, basada en los principios de la Educación Matemática Realista y caracterizada por la exploración de los contextos, la introducción de la tabla de contingencia como herramienta heurística y el énfasis en recorrer todas y cada una de las fases identificadas en el proceso de resolución, modifica el comportamiento de los estudiantes ante problemas de nivel N_0. Lo primero que llama la atención en el post-test es la gran uniformidad que existe en la estructura de las resoluciones escritas de los estudiantes, en las que es posible distinguir cuatro partes claramente diferenciadas: la enumeración de los dos sucesos básicos y sus complementarios, una tabla de contingencia completa, el cálculo de la condicional preguntada y la respuesta, en lenguaje verbal, a la pregunta del problema. Así, tras la enseñanza, los estudiantes usan la tabla de contingencia tanto para organizar la información del enunciado como para el cálculo de nuevas cantidades, obteniendo todas las marginales e intersecciones posibles. El uso de la tabla supone una traducción del problema original (formulado verbalmente) a un problema situado en un contexto matemático (formulado en lenguaje matemático). Una vez realizada con éxito esta traducción, la resolución del problema es puramente algorítmica. No obstante, para el cálculo de la condicional es necesario seleccionar las cantidades apropiadas en la tabla y aplicar la relación multiplicativa correspondiente. Finalmente, debe hacerse la traducción en sentido inverso (del lenguaje matemático al lenguaje verbal) para responder adecuadamente a la pregunta del problema. El éxito obtenido por los estudiantes en la resolución de los problemas del post-test es elevado (se sitúa en torno al 70%), el número de errores que se cometen se reduce considerablemente y desaparecen los errores ligados al contexto. Atribuimos este descenso en el número de errores y la superación de las influencias del contexto a dos factores: la exploración de los fenómenos asociados a los contextos durante la enseñanza y el potencial de la tabla para actuar como modelo (de tipo pre-imagen) para la resolución de los problemas. Sin embargo, existe una gran polarización en los resultados: seis de los nueve estudiantes consiguen resolver con éxito todos los problemas de la prueba, mientras que ninguno de los otros tres consigue resolver con éxito más de dos problemas. Lo que impide a estos tres estudiantes llegar al resultado correcto es, en la mayoría de los casos, la realización de un cálculo erróneo para la obtención de la condicional preguntada, bien porque no se han seleccionado en la tabla las cantidades adecuadas o bien porque se relacionan de manera incorrecta. Esto nos advierte de que la enseñanza recibida no ha sido eficaz para lograr la comprensión del concepto de probabilidad condicional por parte de estos estudiantes y que, por tanto, es un aspecto a mejorar en el modelo de enseñanza propuesto.

6.4 – IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA.

Las implicaciones para la enseñanza que se desprenden del análisis de los resultados de este estudio pueden resumirse en cuatro puntos:

1) Consideramos imprescindible tener en cuenta las variables de la tarea estructura de datos, contexto y formato de datos para la formulación de los problemas de toda propuesta de enseñanza que incluya problemas de nivel N_0. En primer lugar, porque son factores que se han revelado influyentes sobre el desempeño de los estudiantes y es necesario tenerlos en cuenta para una correcta gradación del nivel de dificultad y del nivel de abstracción de los problemas que se proponen en el aula. Y en segundo lugar, porque pueden ser usados como elementos didácticos. Así, formular problemas en diferentes situaciones y contextos y con diferentes formatos para la información numérica del enunciado, permite mostrar la riqueza de usos e interpretaciones posibles del concepto de probabilidad y, en particular, de probabilidad condicional. Concretamente, proponemos:
   - Que se planteen problemas variados en cuanto a su estructura matemática, comenzando con problemas en los que las tres cantidades conocidas dadas en el enunciado son intersecciones (problemas de categoría C_0) y

aumentando progresivamente el número de marginales que se dan como datos conocidos (problemas de categorías C_1 y C_2).

- Que se formulen problemas en situaciones y contextos variados (entre ellos, la situación test de diagnóstico y las situaciones estadísticas, tanto en contextos causalistas como no causalistas) y se dedique tiempo durante las clases a explorar lo fenómenos involucrados en los mismos para tratar de vencer las creencias erróneas que los estudiantes puedan tener como consecuencia de sus conocimientos previos y experiencias personales en relación a dichas situaciones y contextos.
- Que se comience resolviendo problemas con los datos formulados en frecuencias naturales, después en porcentajes y finalmente, en forma de probabilidades expresadas como números decimales comprendidos entre cero y uno. Tal y como recomienda Lonjedo (2007), incluso sería conveniente incluir en las unidades de enseñanza de "Proporcionalidad y Porcentajes" algunos problemas como los formulados en los dos primeros cuestionarios de esta tesis, es decir, problemas en los que no se menciona a la probabilidad ni en la parte informativa del enunciado ni en la pregunta del problema, pero que pueden verse como precursores de los problemas de probabilidad que posteriormente se introducirán en la unidad correspondiente.

2) Sugerimos incluir el uso de la tabla de contingencia no sólo como herramienta heurística eficaz para la resolución de los problemas de nivel N_0, sino también como modelo para la matematización horizontal y vertical de los problemas, tal y como la describe Van den Heuvel-Panhuizen (2010). Debemos ser conscientes, no obstante, de que el uso de la tabla supone una modelización del proceso de resolución que conduce a la algoritmización del mismo. Por ese motivo, para lograr que los estudiantes adquieran un nivel aceptable de comprensión del proceso consideramos que el docente no debería caer en la tentación de introducir la herramienta demasiado pronto, a modo de "receta" para la resolución de los problemas. Por el contrario, consideramos conveniente que los estudiantes se enfrenten primero a los problemas con sus propios recursos y que la introducción de la tabla se haga enfatizando el sentido de su estructura y de sus reglas de cálculo. También hay que tener en cuenta que su uso competente requiere asimismo de una instrucción sistemática, tal y como señalan Dupuis y Rousset-Bert (1996), pues, como hemos podido comprobar, los estudiantes no la generan espontáneamente y una vez la conocen, tampoco son capaces de generalizar su uso de manera inmediata.

3) Consideramos que durante la enseñanza es importante incidir en la forma de obtener las probabilidades condicionales a partir de una tabla de contingencia

completa, pues este último paso de la fase de cálculos se ha revelado difícil para algunos estudiantes. Así, pensamos que se debe hacer hincapié en la distinción entre suceso condicionado y suceso condicionante, en la identificación en la tabla de la probabilidad de la intersección y la probabilidad marginal directamente relacionadas con la condicional buscada y en la forma en que éstas han de operarse para la obtención de la condicional.

4) Por último, creemos necesario prestar especial atención a la frecuente confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta, confrontando a los estudiantes con ambos tipos de probabilidad simultáneamente para pedirles que verbalicen las diferencias que encuentran entre ellas (diferencias de significado, de cálculo, de descripción, etc.).

6.5 – LIMITACIONES DEL ESTUDIO E IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN.

Con este trabajo esperamos haber aportado un poco de luz sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas de probabilidad condicional, al tiempo que somos conscientes del largo camino que queda por recorrer.

Una limitación importante de esta investigación es el hecho de restringirnos (por motivos de tiempo y espacio) al estudio de una única familia de problemas, la de problemas de nivel N_0. Por tanto, a la vez que se hace necesario profundizar en el estudio de esta familia, quedan por explorar otras familias de problemas de probabilidad condicional, como los problemas ternarios de niveles superiores (N_1, N_2 y N_3).

Otro aspecto que supone una limitación del estudio es el reducido tamaño de la muestra de estudiantes. Ya hemos comentado anteriormente que trabajamos con un grupo de tan sólo nueve estudiantes, que cursaban la Opción B de Matemáticas de 4º de la ESO con vistas a continuar sus estudios en un Bachillerato. Hay que añadir que, en general, estaban obteniendo buenos resultados académicos tanto en la asignatura de Matemáticas como en el resto de asignaturas. Este perfil de los estudiantes explica que participaran en la investigación mostrando gran interés, esfuerzo y voluntad de colaborar. Por otra parte, pensamos que el hecho de que la enseñanza se desarrollara en un grupo tan reducido favoreció el aprendizaje de los estudiantes porque resultó sencillo conseguir un buen ambiente de trabajo en las clases, sin conductas disruptivas. Además, en un grupo numeroso de alumnos, las oportunidades de intervenir en clase y el tiempo de atención individualizada por parte de la profesora suelen verse limitados, cosa que no ocurrió en este grupo. Muy al contrario, todos los estudiantes preguntaban sus dudas, se expresaban y debatían con gran espontaneidad. Por tanto, consideramos que tanto las particularidades de la muestra de estudiantes como las condiciones en las que se desarrolló la enseñanza han contribuido positivamente no sólo en el éxito obtenido por la mayor parte de los estudiantes en la resolución de los problemas del post-test, sino también, en la consecución de los objetivos de esta tesis. Pero al mismo tiempo, esto impide que los resultados puedan ser generalizables. Cabe preguntarse, pues, qué hubiera pasado si la misma propuesta de enseñanza hubiera sido implementada en un grupo de características diferentes, como por ejemplo, un grupo numeroso de estudiantes de la Opción A de Matemáticas de 4º de la ESO, lo cual pretendemos abordar en próximas investigaciones. De esta manera, podremos comprobar, por ejemplo, si los comportamientos (errores, estrategias, etc.) que aquí resultan anecdóticos lo siguen siendo en muestras más grandes de estudiantes, si surgen estrategias de resolución y tipos de errores no contemplados en este trabajo o si el modelo de enseñanza propuesto resulta igual de efectivo.

Por otro lado, aunque la mayoría de los estudiantes de la muestra (seis de nueve) consiguen resolver con éxito todos los problemas del post-test, hay tres estudiantes (L., H. y M.) con un rendimiento muy bajo en esta prueba. El número de problemas que estos tres estudiantes consiguen resolver con éxito en los pre-test es también muy bajo pero llama la atención que sólo el estudiante H. consigue mejorar su resultado en el post-test. De hecho, el número de problemas que las estudiantes L. y M. consiguen resolver con éxito en el post-test es menor que en los pre-test (véase Figura 5.15, p. 208). Esto hace que nos planteemos qué hubiera ocurrido si en el post-test hubiéramos incluido también problemas con los datos formulados en frecuencias absolutas o porcentajes. La propuesta de enseñanza sí contenía problemas de nivel N_0 de este tipo, los cuales se resolvieron en los estadios iniciales del proceso, como precursores de los problemas formulados exclusivamente en términos de probabilidades. Sin embargo, en el post-test nos centramos en evaluar si los estudiantes habían alcanzado la competencia en estos últimos, sin prestar atención a los primeros. Por tanto, el post-test, tal y como fue diseñado, sólo nos ha permitido confirmar que los estudiantes H., L. y M. no alcanzaron la competencia en la resolución de problemas de nivel N_0 formulados en términos de probabilidades, pero no nos ha permitido observar si, al menos, consiguieron mejorar su competencia en la resolución de problemas de N_0 con los datos formulados en forma de frecuencias absolutas o porcentajes. También hubiera sido interesante observar si, tras la enseñanza, hay diferencias en la manera de abordar y resolver los problemas según el formato de datos con el que se formula el enunciado. Como consecuencia, en futuras investigaciones consideramos conveniente incluir problemas formulados en formatos de datos variados tanto en la colección de problemas para la enseñanza como en el post-test, aunque esto implique aumentar la extensión de este cuestionario o se tenga que recurrir a la realización de más de una prueba.

Parta terminar, con esta tesis esperamos no sólo haber aportado conocimiento acerca de la resolución de problemas de probabilidad condicional por parte de estudiantes de secundaria, con sus correspondientes implicaciones para la enseñanza, sino también haber contribuido a conformar un marco teórico y metodológico para el estudio de la resolución de los problemas ternarios de probabilidad condicional, cuya construcción se inició con los trabajos previos de Lonjedo (2007), Carles (2007), Carles y otros (2007) y Huerta (2009), se amplía en este trabajo, del que presentamos avances en Edo y Huerta (2010) y Edo y otros (2011), y continúa en evolución, perfeccionándose en otros trabajos posteriores (Amorós, 2012; Arnau, 2012). Uno de los elementos clave de este marco teórico y metodológico es el "Grafo del Mundo de los Problemas Ternarios de Probabilidad Condicional" (GPPC), diseñado por Cerdán y Huerta (2007), al que dedicamos el último apartado de esta memoria, con el objetivo de incidir en el potencial metodológico que posee esta herramienta para la investigación de la resolución de problemas ternarios de probabilidad condicional.

6.6 – SOBRE EL USO DE LOS GRAFOS COMO HERRAMIENTA METODOLÓGICA.

Como ya hemos señalado en anteriores ocasiones, en esta tesis esta herramienta nos ha resultado de gran utilidad no sólo para el estudio teórico de los problemas, sino también para el análisis de las producciones de los estudiantes. Su principal ventaja radica en que permite realizar lecturas analíticas (lecturas en términos de cantidades y relaciones entre cantidades) de los enunciados de los problemas y de los procesos de resolución. A nivel teórico, esto nos ha permitido explorar a fondo la estructura matemática de los problemas, al margen del contexto en el que están formulados y del formato de expresión de los datos, para determinar casos de problema dentro de la familia de nivel N_0. Pero lo novedoso en nuestra investigación es el uso que hemos hecho del GPPC en la parte experimental de la misma. La traducción de las resoluciones de los estudiantes al lenguaje del grafo permite expresar, de manera sintética y en un formato unificado, las características más relevantes de la actuación de los resolutores: el camino seguido, las cantidades intermedias obtenidas (no sólo en su dimensión numérica, sino también en cuanto a la descripción de sucesos se refiere), competencias mostradas y errores cometidos. De esta manera, una vez realizada la traducción, el investigador puede estudiar y analizar estos aspectos, prescindiendo de las resoluciones escritas o filmadas de los estudiantes y trabajando directamente sobre los grafos asociados a las mismas. Esto le reporta las ventajas propias de las representaciones de tipo gráfico: claridad, sencillez y, sobre todo, uniformidad en la manera de representar la información, lo que facilita la comparación entre resoluciones (bien de varios problemas por un mismo resolutor, bien de un mismo problema por varios resolutores). Así, de un solo golpe de vista es posible saber si dos o más estudiantes usan la misma estrategia de resolución en determinado problema, en cuántas resoluciones de un mismo estudiante se ha producido un determinado tipo de error, etc.

Hay que tener en cuenta, no obstante, que el GPPC, tal y como lo mostramos en la Figura 3.1 (p. 63) es un grafo suficiente pero no necesario para la resolución de los problemas. Esto quiere decir que aunque todos los problemas usados en esta investigación pueden resolverse usando únicamente las cantidades y las relaciones entre cantidades que aparecen en dicho grafo (el grafo es *suficiente*), también es posible resolverlos recurriendo a otro tipo de cantidades y de relaciones entre cantidades, como se observa en algunas resoluciones de los estudiantes (el grafo no es *necesario*). Por ejemplo, algunos estudiantes consideran las uniones de sucesos y sus medidas asociadas (véase por ejemplo, la resolución del Problema 1 del Pre-test(%) realizada por la estudiante T.). También es relativamente frecuente encontrar en las resoluciones escritas relaciones no ternarias, que involucran a cuatro o más cantidades. Cuando estas cantidades y relaciones entre cantidades son correctas, pueden ser fácilmente incorporadas al grafo básico, conectándolas con las que ya forman parte de él. De esta manera se obtienen variantes del grafo, entre los que se encuentra, por ejemplo, el grafo que se muestra en el Anexo 28 (p. 665), que ha sido diseñado por Arnau (2012) y que contiene las uniones, dos a dos, de sucesos básicos. Por tanto, la lectura analítica de cualquier resolución con éxito podrá ser representada sin problema sobre el GPPC, aunque éste deba ser ampliado en algunas ocasiones.

La construcción de los grafos de las resoluciones sin éxito resulta más compleja, porque la lectura de una resolución sin éxito es siempre más compleja que la lectura de una resolución con éxito y porque en una resolución sin éxito lo que hace el estudiante se aleja necesariamente de lo representado en la estructura básica del GPPC, que representa el modelo de competencia, es decir, la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades que maneja el "resolutor ideal"; pero al mismo tiempo, el hecho de que sobre el GPPC también sea posible representar la lectura analítica de las resoluciones sin éxito es lo que hace de él una herramienta tan útil para el investigador. En el apdo. 4.9.3.1.1 (p. 156) expusimos el método seguido para la construcción de los grafos de la resolución, contemplando la manera de representar todos y cada uno de los tipos de error observados en las resoluciones de los estudiantes de esta investigación. Así, todas las resoluciones de los pre-test[46], tanto las resoluciones con éxito como las resoluciones sin éxito, tienen un grafo de la resolución asociado. Esto ha sido posible porque en esta investigación no hemos encontrado ninguna resolución tan alejada del modelo teórico de competencia representado en el GPPC como para considerarla "no apta" para su traducción al lenguaje del grafo. Sin embargo, sí hemos encontrado algún caso de resolución escrita en el que la interpretación o lectura de la actuación del estudiante ha resultado complicada, lo cual ha dificultado a su vez la construcción del grafo de la resolución asociado. Una de estas resoluciones es la del Problema 17 del Pre-test(F) realizada por la estudiante L., que mostramos a continuación a modo de ejemplo.

[46] No usamos el grafo para el análisis de las resoluciones del post-test porque, como ya explicamos en el apdo. 4.9.3.2 (p. 186), la secuencia de relaciones entre cantidades usada por los estudiantes para la obtención de cantidades intermedias queda oculta por la presencia, en las resoluciones escritas, de una tabla de contingencia completa, sin cálculos explícitos. Otro motivo para no usarlo en el análisis de las resoluciones de este último cuestionario es la gran uniformidad en las estrategias de resolución, fácilmente comparables sin necesidad de los grafos.

Enunciado: Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿qué porcentaje el test da positivo?

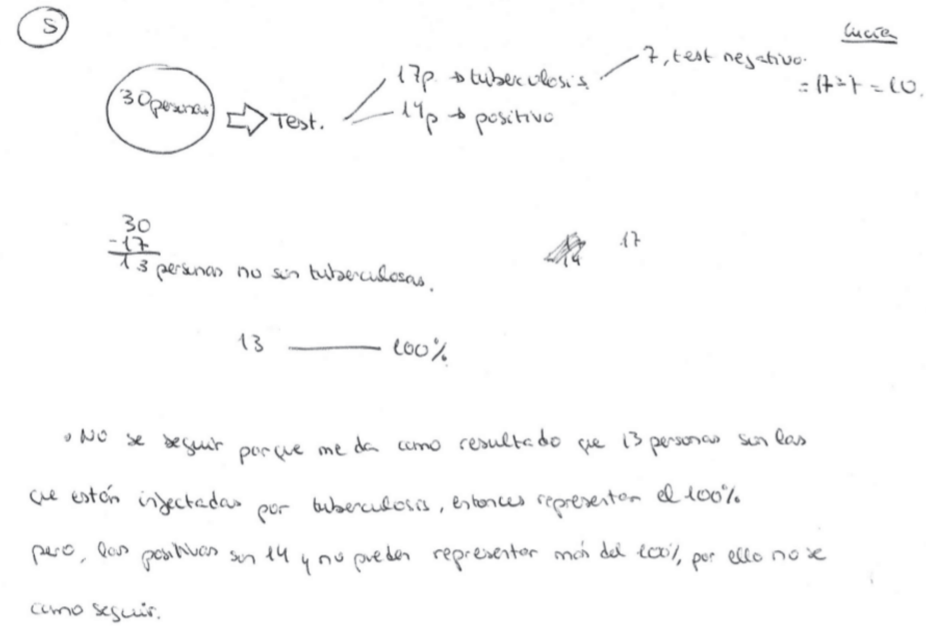


Figura 6.3.

En el proceso de lectura y traducción al grafo de esta resolución escrita, nos surgió la duda sobre a qué cantidad asocia la estudiante la información "había 14 personas a las que el test les resultó positivo". Optamos por considerar que hace una interpretación correcta de la misma, como la marginal "personas con test positivo" porque así es como describe la cantidad en el árbol mediante el que organiza la información y por el principio de presunción de competencia. Sin embargo, su explicación del porqué abandona la resolución nos genera ciertas dudas sobre dicha interpretación. La estudiante asegura que el número de personas con resultado positivo (14) no puede superar al total de personas tuberculosas ("no pueden representar más del 100%"), lo que nos indica que la estudiante podría estar viendo en el dato 14 no una marginal sino una intersección: "14 personas dieron positivo y eran tuberculosas". Lo más probable, sin embargo, es que la estudiante no vea en la cantidad ni la marginal ni la intersección anteriores. Es decir, pensamos que no ve la cantidad como una marginal en el sentido de "total de personas con resultado positivo en el test, entre las que padecen tuberculosis y las que no la padecen", ya que en su estructura de cantidades y relaciones entre cantidades parece no contemplar la intersección "no padecer tuberculosis y dar positivo en el test". Y pensamos que tampoco ve la cantidad como la intersección "personas tuberculosas con test positivo, que junto a las personas tuberculosas con test negativo hacen el total de personas tuberculosas", pues en ese caso, la expresión "14 p $\rightarrow$ positivo" en el árbol debería partir de la expresión "17 p $\rightarrow$ tuberculosis", como lo hace la expresión "7, test negativo" que representa a la intersección "personas tuberculosas con test negativo". En definitiva, la estudiante presenta creencias erróneas ligadas al contexto, tal y como describimos en el apdo. 6.2.3.2.2 (p. 350) , y esto hace que la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades que maneja no coincida exactamente con la representada en el GPPC. Esto nos genera dificultades a la hora de asociar un vértice del grafo a cada una de las cantidades que aparecen en la resolución, porque el sentido con el que pensamos que las interpreta la resolutora no se corresponde completamente con el de ninguna de las cantidades representadas en el grafo. Así, el grafo de la resolución construido es el que resulta de proceder según el método diseñado para la construcción de los grafos de las resoluciones, aún siendo conscientes de que quizás, no represente fielmente la forma en que razona la estudiante, forma de razonar sobre la que, por otra parte, no tenemos más información que la inferida a partir de la resolución escrita.

Así pues, la representación de la lectura analítica de las resoluciones de los estudiantes mediante grafos es una estrategia metodológica que puede reportar muchas ventajas. Sin embargo, para que sea posible construir el grafo asociado a una resolución, sobre la base del GPPC, ésta debe cumplir al menos dos condiciones: que en ella se distingan claramente las relaciones entre cantidades usadas por el resolutor y que la actuación del mismo no se aleje demasiado del modelo de competencia representado en el GPPC, es decir, que la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades que maneje el resolutor tenga suficientes puntos de encuentro con la estructura de cantidades y relaciones entre cantidades representada en el GPPC. Lo que debe entenderse por "suficientes" dependerá del nivel de exigencia que imponga el investigador, de manera que la construcción del grafo de la resolución le resulte útil.

Capítulo 7. Referencias bibliográficas.

Amorós, R. (2012). *Un ejemplo de análisis de datos mediante la inferencia bayesiana en resolución de problemas de probabilidad condicionada*. Memoria de investigación. Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Arnau, J. (2012). *Un estudio exploratorio de la resolución de problemas de probabilidad condicional centrado en la fase de cálculo*. Memoria de investigación. Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Ávila, R. (2001). *Hacia una apropiación operatoria de la estocástica: El caso de la probabilidad condicional*. Tesis de maestría. CINVESTAV, IPN. Departamento de Matemática Educativa. México, D. F.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8(3),* pp. 247-263. México.

Batanero, C., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 12(2).*

Batanero, C., y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability. Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics, 3(1),* pp. 3-13.

Batanero, C., Godino, J. D., y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. *Proceedings of First ICMI African Regional Conference.* Johannesburg: ICMI.

Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training Teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12(1).*

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning*, pp. 15-37. USA: Springer.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., y Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in Secondary School pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32(2)*, pp. 181-199.

Batanero, C., y Sánchez, E. (2005). What is the Nature of High School Student's Conceptions and Misconceptions about Probability?. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 241-266). New York: Springer.

Biehler, R. (1991). Computers in Probability Education. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 169-211). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

B.O.E. (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 5. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didáctica de la Matemática, 2,* pp. 5-27.

Borovcnik, M., y Bentz, H. J. (1991). Empirical Research in Understanding Probability. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 73-105). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Borovcnik, M., y Kapadia, R. (2009). Research and Developments in Probability Education. *International Electronic Journal of Mathematics. Education 4(3)*, pp. 111-130.

Borovcnik, M., y Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239-287). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Burgess, T. A. (2001). Assessing the statistics knowledge of pre-service teachers. In J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Eds.), *Numeracy and Beyond. Proceedings of the 24th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia - Sydney* (pp. 114-121). Sydney: MERGA.

Burgess, T. A. (2002). Investigating the 'data sense' of preservice teachers. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* CD ROM. Cape town: International Association for Statistical Education.

Carles, M. (2007). *Estudio preliminar de los problemas de probabilidad condicional en contexto. El caso del test de diagnóstico*. Documento interno, no publicado, presentado como memoria de tercer ciclo. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València.

Carles, M., Cerdán, F., Huerta, M. P., Lonjedo, M. A., y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y del contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 173-185). Santander: SEIEM.

Carles, M., y Huerta, M. P. (2007). Conditional probability problems and contexts. The diagnostic test context. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 5* (pp. 702-710).

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Cerdán, F., y Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática, 19(1),* pp. 27-62.

Cobb, G. W. (1993). Reconsidering Statistics Education: A National Science Foundation Conference. *Journal of Statistics Education, 1(1).* Recuperado de http://www.amstat.org/publications/jse/v1n1/cobb.html

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., y Arteaga, P. (2013). Evaluación de la falacia del eje temporal en futuros profesores de educación secundaria. *Acta Scientiae 14(3)*, pp. 346-362.

Contreras, J. M., Estrada, A., Díaz, C., y Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 271-280). Lleida: SEIEM

Corter, J. E., y Zahner, D. C. (2007). Use of external visual representation in probability problem solving. *Statistics Education Research Journal, 6(1)*, pp. 22-50.

Cosmides, L. y Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition 58*, pp. 1-73.

Crupi, V., Fitelson, B., y Tentori, K. (2008). Probability, confirmation, and the conjunction fallacy. *Thinking & Reasoning*, *14*, pp. 182–199.

Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma, 48*, pp. 45-50.

Díaz, C., y Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4(3),* pp. 21-52.

Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C., y Roa, R. (2012). Assessing prospective secondary school teachers' biases in conditional probability reasoning. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26(44),* pp. 1207-1226.

Díaz, C., y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, *59,* pp. 245-260.

Díaz, C., y de la Fuente, I. (2007a). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática, 18(2),* pp. 75-94.

Díaz, C., y de la Fuente, I. (2007b). Assessing psychology students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2(2),* pp. 128-148.

D.O.C.V (2007). Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana [2007/9717]. Diario Oficial de la Comunidad Valenciana, núm. 5.562. Valencia: Conselleria de Educación.

Doob, J. (1994). The Development of Rigor in Mathematical Probability (1900-1950). In J. P. Pier (Ed.), *Development of Mathematics (1900-1950) (*pp. 157-170). Basel: Bikhäuser.

Dupuis, C., y Rousset-Bert, S. (1996). Arbres et tableaux de probabilité: analyse en termes de registres de representation. *Repères – IREM*, *22*, pp. 51-72.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Edo, P. (2010). *Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0. Análisis de su estructura de datos y estudio exploratorio de su resolución, por estudiantes de 4º de Educación Secundaria Obligatoria*. Memoria de investigación. Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Edo, P., y Huerta, M. P. (2010). Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0. En María del Mar Moreno y Nuria Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM. XIV Simposio de la SEIEM (*pp. 215-232). Lleida: SEIEM.

Edo, P., Huerta, M. P., y Cerdán, F. (2011). Análisis de las resoluciones de problemas de probabilidad condicional mediante grafos. Un ejemplo. En Margarita Marín, Gabriel Fernández, Lorenzo J. Blanco & Mercedes Paralea (Eds.) *Investigación en*

Educación Matemática XV (pp. 337-350). Ciudad Real: Universidad de Castilla-La Mancha.

Engel, A. (1975). *L'enseignement des probabilités et de la statistique, vol. 1.* París: CEDIC.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the Development of Children's Combinatorial Reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 121-141). New York: Springer.

Estrada, A., y Díaz, C. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *44*, pp. 48 – 57.

Evans J. St. B. T., Handley, S. J., Perham, N., Over, D. E., y Thompson, V. A. (2000). Frequency versus probability formats in statistical word problems. *Cognition 77(3)*, pp. 197-213.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292–297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Falk, R. (1991). Inference under uncertainty via conditional probabilities. *Studies in mathematics education, 7,* pp. 175-184.

Fiedler, K. (1988). The dependence of the conjunction fallacy on subtle linguistic factors. *Psychological Research, 50,* pp. 123-129.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Fischbein, E., Nello, M. S., y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children in adolescence. *Educational Studies in Mathematics, 22,* pp. 523-549.

Freudenthal, H. (1968). 'Why to teach mathematics so as to be useful?', *Educational Studies in Mathematics*, *1*, pp. 3–8.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas, en matemáticas. *Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de la Sonora, 17-18*, pp. 51-59.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review, 70(1),* pp. 1-25.

Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from framework of adult competencies and mathematics curricula. ICME-12. Recuperado de http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/2088.pdf

Garfield, J., y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19(1)*, pp. 44-63.

Gigerenzer, G. (1991). How to make cognitive illusions disappear: Beyond 'heuristics and biases'. In Storche, W. & Hewstone, M. (Eds.) *European review of social psychology, 2* (pp. 83–115). Chichester, England: Wiley.

Gigerenzer, G. (1996). On narrow norms and vague heuristics: a replay to Kahneman and Tversky. *Psychological Review, 103*, pp. 592-596.

Gigerenzer, G., y Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, *102*, 684-704.

Girotto, V., y Gonzalez, M. (2001). Solving probabilistic and statistical problems: a matter of information structure and question form. *Cognition 78*, pp. 247-276.

Girotto, V., y Gonzalez, M. (2002). Chances and frequencies in probabilistic reasoning: rejoinder to Hoffrage, Gigerenzer, Krauss, and Martignon. *Cognition 84*, pp. 353-359.

Godino, J., Batanero, C., y Roa, R. (2001). Training Teachers To Teach Probability. IASE Satellite Conference on Statistical Literacy. Seul. Electrónico.

Gravemeijer, K., y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39,* pp. 111-129.

Henry, M. (2005). Modélisation on probabilités conditionnelles. En M. Henry (Coor.) *Autour de la modélisation en probabilities*. Comission inter-IREM: Presses universitaires de Franche-Comté.

Hertwing, R., y Gigerenzer, G. (1999). The Conjunction Fallacy Revisited: How Inteligent Inferences Look Like Reasoning Errors. *Journal of Behavioral Decision Making, 12,* pp. 275-305.

Hoffrage, U., y Gigerenzer, G. (1998). Using natural frequencies to improve diagnostic inferences. *Academic Medicine*, *73*, pp. 538-540.

Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S., y Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not. *Cognition 84*, pp. 343-352.

Hoffrage, U., Kurzenhäuser, S., y Gigerenzer, G. (2005). Understanding the results of medical tests: Why the representation of statistical information matters. In R. Bibace, J. D. Laird, K. L. Noller, & J. Valsiner (Eds.), *Science and medicine in dialogue: Thinking through particulars and universals* (pp. 83- 98). Westport, CT: Praeger.

Huerta, M. P. (2003). Curs de doctorat en Didàctica de la Probabilitat. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València (documento interno, inédito).

Huerta, M. P. (2009). On conditional probability problem solving research - Structures and context. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4(3),* pp. 163-194.

Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives* (pp. 613-639). Dordrecht: Springer.

Huerta, M. P., y Lonjedo, M. A. (2003a). Los problemas de probabilidad condicional en la Enseñanza Secundaria. En *Encuentros Educativos. XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (XI JAEM).* Tenerife: Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias.

Huerta, M. P., y Lonjedo, M. A. (2003b). La resolución de problemas de probabilidad condicional. Comunicación presentada en el grupo de Investigación PNA. *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada: SEIEM.

Huerta, M. P., y Lonjedo, M. A. (2006). The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence on the problem solving behaviour. In M. Bosch (Ed.), *European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 4* (p. 353-364).

Huerta, M. P., y Lonjedo, M. A. (2007). The same problem in three presentation formats: Different percentages of success and thinking processes. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 5* (pp. 732-741)

Instituto de Evaluación (2007). *PISA 2006. Informe español.* Madrid: Ministerio de Educación.

Instituto de Evaluación (2008). *PISA 2003. Matemáticas. Informe español.* Madrid: Ministerio de Educación.

Instituto de Evaluación (2010). *PISA 2009. Informe español.* Madrid: Ministerio de Educación.

Jones, G. A., Langrall, C. W., y Money, E. S. (2007). Research in Probability (Responding to Classroom Realities). In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on mathematic teaching and learning* (pp. 909-955). Information Age Publishing.

Jones, G. A. y Thornton, C. (2005). An Overview of Research into the Teaching and Learning of Probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 65-92). New York: Springer.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. In L. L. Hatfield (Eds.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop (pp.* 7-20). Columbus, OH: ERIC.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, *6*, pp. 59-98.

Krämer, W. y Gigerenzer, G. (2005). How to confuse with statistics or: The use and misuse of conditional probabilities. *Statistical Science*, *20*, pp. 223-230.

Kulm, G. (1979). The classification of problem research variables. In G. Goldin & C. E. McClintock (Eds.) *Task Variales in Mathematical Problem Solving* (pp. 1-22). ERIC.

Kvatinsky, T., y Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding of probability. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* CD ROM. Cape Town: International Association for Statistical Education.

Langrall, C. W., y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of Elementary School Students' Probabilistic Thinking. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 95-119). New York: Springer.

Llácer, E. (2010). *Matemáticas 3º ESO. Binario 3*. Editorial Teide.

Lonjedo, M. A. (2007). Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución. Tesis Doctoral. Universitat de València.

Lonjedo, M. A, y Huerta, M. P. (2007). Análisis del comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas isomorfos de probabilidad condicional. En Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 273-282). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: SEIEM.

Lonjedo, M. A., Huerta, M. P., y Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Relime*, *15(3),* pp. 319-338.

Martínez, M., Da Valle, N., Zolkower, B., Bressan, A. (2002). La relevancia de los contextos en la Resolución de Problemas de Matemáticas: una experiencia para docentes y sus capacitadores. *Revista Paradigma, XXIII*, pp. 59-94.

Moliner, M. (2006). *Diccionario de uso del español* (2ª ed.). Madrid: Gredos.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.

Neace, W. P., Michaud, S., Bolling, L., Deer, K., y Zecevic, L. (2008). Frequency formats, probability formats, or problem structure? A test of the nested-sets hypothesis in an extensional reasoning task. *Judgment and Decision Making, 3(2),* pp. 140-152.

Ojeda, A. M. (1996). Contextos, representaciones y la idea de probabilidad condicional. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemáticas educativas* (pp. 291-310). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Parzysz, B. (1990). Un outil sous-estimé: l'arbre probabiliste. *APMEP, 69(372)*, pp. 47-54.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for education of primary teachers. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* CD ROM. Cape Town: International Association for Statistical Education.

Pluvinage, F. (2005). Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa, 8(1)*, pp. 91-99. México.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, USA: Princeton University Press.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., Hardiman, P., y Cobb, G. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes, 40(2),* p. 255-269.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability?. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 171-189). New York: Springer.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE.

Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Lengua Española* (22º ed.). Madrid: Espasa Calpe.

Real Academia Española (2013). *Diccionario de la lengua española*. Recuperado de http://www.rae.es/recursos/diccionarios/drae

Rossman, A. J., y Short, H. (1995). Conditional Probability and Education Reform: Are They Compatible?. *Journal of Statistics Education 3(2)*.

Sáenz, C. (1998). Teaching Probability for Conceptual Change. *Educational Studies in Mathematics, 35(3),* pp. 233-254.

Sánchez, E. (2002). Teachers' beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* CD ROM. Cape Town: International Association for Statistical Education.

Scholz, R. W. (1991). Psychological Research in Probabilistic Understanding. In Kapadia, R. & Borovcnik, M. (Eds.), *Chance encounters: probability in education*, pp. 213-253. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sedlmeier (2002). Improving statistical reasoning by using the right representation format. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 6)* on CD-ROM. The Hague: International Statistical Institute.

Sedlmeier, P., y Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of Experimental Psychology: General*, *130*, pp. 380-400.

Serrano, L., Batanero, C., y Ortiz, J. J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. *Suma*, 22, pp. 43-49.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

Sides, A., Osherson, D., Bonini, N., y Viale, R. (2002). On the reality of the conjunction fallacy. *Memory & Cognition*, *30*, pp. 191-198.

Steinbring, H. (1984). Mathematical Concepts in Didactical Situations as Complex Systems: The Case of Probability. In H. Steiner & N. Balacheff (Eds.), *Theory of mathematics education (TME: ICME 5): Occasional paper 54* (pp. 56-88). Bielefeld, Germany: IDM.

Steinbring, H. (1991). The Theoretical Nature of Probability in the Classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 135-167). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stohl, H. (2005). Probability in Teacher Education and Development. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 345-366). New York: Springer.

Tentori, K., Bonini, N., y Osherson, D. (2004). The conjunction fallacy: A misunderstanding about conjunction? *Cognitive Science*, *28*, pp. 467-477.

Tomlinson S., y Quinn, R. (1997). Understanding Conditional Probability. *Teaching Statistics, 19(1),* pp. 2-7.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, *185*, pp. 1124 - 1131.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgement. *Psychological Review, 90,* pp. 293-315.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2010). Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp. 1-25). Fremantle: MERGA.

Villegas, J. L., y Castro, E. (2003). Pensamiento en voz alta en resolución de problemas. En E. Castro (Coord.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada: SEIEM.

Villegas, J. L., Castro, E., y Gutiérrez, J. (2009). Representations in problem solving: a case study with optimization problems. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology. No 17, vol. 7(1)*, pp. 279-308.

Vizmanos, J. R., Alcaide, F., Serrano, E., Moreno, M., y Hernández, J. (2012). *Pitágoras Matemáticas. Proyecto conecta 2.0*. Grupo Editorial SM.

Wiest, L. (2002). Aspect of word-problem context that influence children's problem-solving performance. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *24(2),* pp. 38-52.

Yáñez, G., (2001). El álgebra, las tablas y los árboles en problemas de probabilidad condicional. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, vol. 1 (pp. 355-371). Granada: Universidad de Granada.

Zhu, L., y Gigerenzer, G. (2006). Children can solve Bayesian problems: the role of representation in mental computation. *Cognition 98*, pp. 287-308.

ANEXO 1. La lista de problemas de N_0.

NOTAS:

- Los problemas se designan de la siguiente manera:

Problema X. (Nivel N_0-Categoría-Tipo 1, caso)

- Los problemas que se distinguen por la letra "a" son estructuralmente isomorfos a los correspondientes sin la letra. Así, el Problema 6 es isomorfo al Problema 6a; el Problema 18 es isomorfo al Problema 18a. La diferencia entre ellos es el contexto en el que están formulados, aunque se refieran a la misma situación. En consecuencia, pueden cambiar los números y las expresiones que se refieren a los sucesos.

Problema 1. (N_0-0-1)

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas.

a) Entre los chicos de la clase, ¿qué porcentaje usa gafas?

b) Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 2 (N_0-1-1, 2)

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Hay 12 estudiantes que usan gafas, 7 chicas que las usan y 10 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 3 (N_0-1-1, 3)

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Hay 12 estudiantes que usan gafas, 7 chicas que las usan y 8 chicos que no las usan.

a) Entre las chicas, ¿qué porcentaje no usa gafas?

b) Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 4 (N_0-2-1, 1)

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes hay 17 chicas y 12 estudiantes que usan gafas. Además, 7 de las chicas usan gafas.

a) Entre los chicos, ¿qué porcentaje lleva gafas?

b) Entre los estudiantes que no usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 5 (N_0-2-1, 2)

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes hay 17 chicas y 12 estudiantes que usan gafas. Además, 10 de las chicas no usan gafas.

a) Entre los chicos, ¿qué porcentaje lleva gafas?

b) Entre los estudiantes que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 6 (N_0-1-1, 3)

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes hay 17 chicas y 12 estudiantes que usan gafas. Además, 8 de los chicos no usan gafas.

a) Entre las chicas, ¿qué porcentaje lleva gafas?

b) Entre los estudiantes que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 7 (N_0-0-1)

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. De ellas, 42 han sido tratadas con un antibiótico y se han curado y 8 han sido tratadas con el antibiótico y no se han curado. Por otra parte, 48 enfermos no han sido tratados y no se han curado.

a) Entre los que no han sido tratados con el antibiótico, ¿qué porcentaje se ha curado?

b) Entre los que se han curado, ¿qué porcentaje ha sido tratado con el antibiótico?

Problema 8 (N_0-1-1, 2)

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. De ellas, 64 se han curado, 42 personas han sido tratadas con un antibiótico y se han curado y 8 han sido tratadas con el antibiótico y no se han curado. Entre los que no han sido tratados con el antibiótico, ¿qué porcentaje se ha curado?

Problema 9 (N_0-1-1, 3)

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 64 personas, 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado.

a) Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

b) En las personas que no se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje se ha curado?

Problema 10 (N_0-2-1, 1)

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 60 personas, 50 se han tratado con el antibiótico y 42 se han tratado con el antibiótico y se han curado.

a) Entre las personas que no se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje se han curado?

b) Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

Problema 11 (N_0-2-1, 2)

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 64 personas, 50 se han tratado con el antibiótico y 10 se ha tratado con el antibiótico y no se han curado.

a) Entre las personas que no se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje se han curado?

b) Entre las personas que se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

Problema 12 (N_0-2-1, 3)

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 64 personas y 50 se han tratado con el antibiótico. 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado.

a) Entre las personas que se han curado, ¿qué porcentaje ha sido tratado con el antibiótico?

b) Entre las personas que han sido tratadas con el antibiótico, ¿qué porcentaje se han curado?

Problema 13 (N_0-0-1)

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo para la enfermedad tanto si se padece la enfermedad como si no. Los resultados muestran que hay 10 personas con tuberculosis y a las que el test les ha dado positivo, 7 personas con tuberculosis y a las que el test les ha dado negativo y 9 personas sin tuberculosis y a las que el test le ha dado negativo.

a) Entre las personas que no son tuberculosas, ¿en qué porcentaje de los casos el test dio positivo?

b) Entre aquellos a los que el test dio positivo, ¿qué porcentaje son tuberculosos?

Problema 14 (N_0-1-1, 2)

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo para la enfermedad tanto si se padece la enfermedad como si no. Los resultados muestran que hay un total de 14 positivos en el test, 10 personas que son tuberculosas y el test les ha dado positivo y 7 personas que son tuberculosas y a las que el test les ha dado negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿qué porcentaje de resultados positivos ha dado el test?

Problema 15 (N_0-1-1, 3)

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo para la enfermedad tanto si se padece la enfermedad como si no. Los resultados muestran que hay un total de 14 positivos en el test, 10 personas que son tuberculosas y el test les ha dado positivo y 9 personas que no son tuberculosas y a las que el test les ha dado negativo.

a) Entre las personas que son tuberculosas, ¿qué porcentaje de resultados negativos ha dado el test?

b) Entre las personas que no son tuberculosas, ¿qué porcentaje de resultados positivos ha dado el test?

Problema 16 (N_0-2-1, 1)

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo para la enfermedad tanto si se padece la enfermedad como si no. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que hay 14 personas a las que el test les ha dado positivo. Además, hay 7 personas que son tuberculosas y el test les ha dado negativo.

a) Entre las personas que no son tuberculosas, ¿qué porcentaje el test da positivo?

b) Entre las personas a quienes el test dio negativo, ¿qué porcentaje son tuberculosos?

Problema 17 (N_0-2-1, 2)

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo para la enfermedad tanto si se padece la enfermedad como si no. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que hay un total de 14 personas a las que el test les ha dado positivo. Además, hay 7 personas que son tuberculosas y el test les ha dado negativo.

a) Entre las personas que no son tuberculosas, ¿qué porcentaje el test da positivo?

b) Entre las personas a quienes el test dio positivo, ¿qué porcentaje son tuberculosos?

Problema 18 (N_0-2-1, 3)

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo para la enfermedad tanto si se padece la enfermedad como si no. Hay un total de 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que hay en total 14 personas a las que el test les ha dado positivo. Además, hay 9 personas que no son tuberculosas y el test les ha dado negativo.

a) Entre las personas que son tuberculosas, ¿qué porcentaje el test da positivo?

b) Entre las personas a quienes el test dio positivo, ¿qué porcentaje son tuberculosos?

Problema 1a. (N_0-0-1)

Un centro escolar esta formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 147 chicas que usan gafas, 368 chicas que no las usan y 350 chicos que tampoco usan gafas.

a) Entre los chicos de la clase, ¿qué porcentaje usa gafas?

b) Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 2a (N_0-1-1, 2)

Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 3a (N_0-1-1, 3)

Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 350 chicos que no las usan.

a) Entre las chicas, ¿qué porcentaje no usa gafas?

b) Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?.

Problema 4a (N_0-2-1, 1)

Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Entre los estudiantes hay 515 chicas y 282 estudiantes que usan gafas. Además, 147 de las chicas usan gafas.

a) Entre los chicos, ¿qué porcentaje lleva gafas?

b) Entre los estudiantes que no usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 5a (N_0-2-1, 2)

Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Entre los estudiantes hay 515 chicas y 282 estudiantes que usan gafas. Además, 368 de las chicas no usan gafas.

a) Entre los chicos, ¿qué porcentaje lleva gafas?

b) Entre los estudiantes que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 6a (N_0-2-1, 3)

Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Entre los estudiantes hay 515 chicas y 282 estudiantes que usan gafas. Además, 350 de los chicos no usan gafas.

a) Entre las chicas, ¿qué porcentaje lleva gafas?

b) Entre los estudiantes que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 13a (N_0-0-1)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado es que 76 de las piezas son correctas y el dispositivo las califica como correctas, que 19 de las piezas son correctas pero el dispositivo las califica como defectuosas y que 4 de las piezas son defectuosas y el dispositivo las califica como defectuosas.

a) Entre las piezas defectuosas, ¿qué porcentaje de piezas califica el dispositivo como correctas?

b) Entre las piezas calificadas por el dispositivo como correctas, ¿qué porcentaje son correctas?

Problema 14a (N_0-1-1, 2)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado es que 76 de las piezas son correctas y el dispositivo las califica como correctas, que 19 de las piezas son correctas pero el dispositivo las califica como defectuosas y que un total de 77 piezas han sido calificadas como correctas. Entre las piezas defectuosas, ¿qué porcentaje ha sido calificado como piezas correctas por el dispositivo?

Problema 15a (N_0-1-1, 3)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado es que resultaron 77 piezas calificadas como defectuosas por el dispositivo, 76 piezas correctas y calificadas como correctas por el dispositivo y 5 piezas defectuosas y calificadas como defectuosas por el dispositivo.

a) Entre las piezas correctas, ¿qué porcentaje de piezas han sido calificadas como defectuosas por el dispositivo?

b) Entre las piezas defectuosas, ¿qué porcentaje de piezas han sido calificadas como correctas por el dispositivo?

Problema 16a (N_0-2-1, 1)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado es que resultaron 77 piezas calificadas como defectuosas por el dispositivo, 76 piezas correctas y calificadas como correctas por el dispositivo. El número total de piezas correctas fue de 95.

a) Entre las piezas defectuosas, ¿qué porcentaje de piezas han sido calificadas como correctas por el dispositivo?

b) Entre las piezas calificadas como defectuosas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

Problema 17a (N_0-2-1, 2)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado es que 77 piezas fueron calificadas como correctas por el dispositivo y 95 piezas en total resultaron correctas. Además, 19 piezas correctas fueron calificadas como defectuosas por el dispositivo.

a) Entre las piezas defectuosas, ¿qué porcentaje de piezas fueron calificadas como correctas por el dispositivo?

b) Entre las piezas que fueron calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje de piezas eran correctas?

Problema 18a (N_0-2-1, 3)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado fue que 95 piezas fueron correctas, 77 fueron calificadas como correctas por el dispositivo y que 4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas.

a) Entre las piezas correctas, ¿qué porcentaje fueron calificadas como correctas por el dispositivo?

b) Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

ANEXO 2. El Pre-test(F).

PPC DE NIVEL N_0

PRE-TEST

Cuestionario nº 7: P1, P2a, P9, P10x2, P17, P18a

NOMBRE (sin apellidos):

EDAD:

CURSO: 4º ESO (Matemáticas Opción B)

CENTRO: Sección de Educación Secundaria IES Alto Palancia, en Jérica-Viver

FECHA:

Instrucciones:

1. Este cuestionario está formado por 6 problemas de matemáticas. Lee con atención los enunciados y trata de resolverlos.

2. Resuelve cada problema en un folio diferente.

3. Razona cada paso de las resoluciones. Es decir, explica a cada paso por qué haces las cosas como las haces.

4. Realiza todas las operaciones en la hoja. No uses la calculadora.

5. No borres nada. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas con la resolución del problema.

6. Cuando en un problema no sepas continuar y quieras dejarlo, explica por qué lo dejas y pasa al siguiente problema.

7. Cuando termines de resolver los problemas, cierra el cuadernillo y espera a que sea recogido.

8. Dispones de 50 minutos para resolver todos los problemas.

Problema 1.

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 2 (2a)

Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 3 (9)

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. En total, se han curado 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

Problema 4 (10x2)

Una población de 240 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 120 personas, 100 se han tratado con el antibiótico y 84 se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

Problema 5 (17)

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les da positivo?

Problema 6 (18a)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado fue que 95 piezas fueron correctas, 77 fueron calificadas como correctas por el dispositivo y que 4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

ANEXO 3. El Pre-test(%).

PPC DE NIVEL N_0

PRE-TEST 2

Datos en forma de porcentajes

Cuestionario nº 7: P1, P2a, P9, P10x2, P17, P18a

NOMBRE (sin apellidos):

EDAD:

CURSO: 4º ESO (Matemáticas Opción B)

CENTRO: Sección de Educación Secundaria IES Alto Palancia, en Jérica-Viver

FECHA:

Instrucciones:

1. Este cuestionario está formado por 6 problemas de matemáticas. Lee con atención los enunciados y trata de resolverlos.

2. Resuelve cada problema en un folio diferente.

3. Razona cada paso de las resoluciones. Es decir, explica a cada paso por qué haces las cosas como las haces.

4. Realiza todas las operaciones en la hoja. No uses la calculadora.

5. No borres nada. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas con la resolución del problema.

6. Cuando en un problema no sepas continuar y quieras dejarlo, explica por qué lo dejas y pasa al siguiente problema.

7. Cuando termines de resolver los problemas, cierra el cuadernillo y espera a que sea recogido.

8. Dispones de 50 minutos para resolver todos los problemas.

Problema 1 (1)

La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 2 (9)

Un conjunto de personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado un 53% de dichas personas. Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

Problema 3 (17)

Una población con riesgo de padecer tuberculosis se somete a un test para averiguar si padecen tuberculosis o no. El test da positivo o negativo para la enfermedad en cualquier caso. Un 57% de las personas eran tuberculosas. Los resultados muestran que hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo. Además, los resultados mostraron que un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo. Entre las personas que no eran tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les dio positivo?

Problema 4 (2a)

Un centro escolar está formado por chicos y chicas. Hay un 28% de estudiantes que usan gafas, un 15% de chicas que las usan y un 37% de chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 5 (18a)

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El 95% de las piezas eran correctas, el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo y el 4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

Problema 6 (10)

Una población sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado el 53% de las personas, un 42% se han tratado con el antibiótico y un 35% se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

ANEXO 4. El Test(P).

PPC DE NIVEL N_0

TEST (P)

Cuestionario nº 7: P1, P17, P9, P18a, P10x2, P2a

NOMBRE (sin apellidos):

EDAD:

CURSO: 4º ESO (Matemáticas Opción B)

CENTRO: Sección de Educación Secundaria IES Alto Palancia, en Jérica-Viver

FECHA:

Instrucciones:

1. Este cuestionario está formado por 6 problemas de matemáticas. Lee con atención los enunciados y trata de resolverlos.

2. Resuelve cada problema en su hoja correspondiente.

3. Razona cada paso de las resoluciones. Es decir, explica a cada paso por qué haces las cosas como las haces.

4. Realiza todas las operaciones en la hoja.

5. No borres nada. Si algo consideras que está equivocado, simplemente lo tachas y continúas con la resolución del problema.

6. Cuando en un problema no sepas continuar y quieras dejarlo, explica por qué lo dejas y pasa al siguiente problema.

7. Cuando termines de resolver los problemas, cierra el cuadernillo y espera a que sea recogido.

8. Dispones del tiempo que se te indique para resolver todos los problemas.

Problema 1 (1)

Las matemáticas y el inglés se encuentran entre las asignaturas más difíciles de aprobar en la secundaria. En un instituto la probabilidad de que un estudiante apruebe a la vez matemáticas e inglés es de 0,15; la probabilidad de que apruebe matemáticas y no apruebe inglés es de 0,37 y la probabilidad de que no apruebe ninguna de las dos es 0,35.

a) Los estudiantes que no han aprobado matemáticas, ¿qué probabilidad tienen de aprobar inglés?
b) Los estudiantes que han aprobado inglés, ¿qué probabilidad tienen de aprobar matemáticas?

Problema 2 (17)

Una población con un alto riesgo de padecer SIDA se somete a un test para averiguar si la padecen o no. El test da positivo o negativo en cualquier caso. La probabilidad de que una persona de esta población de riesgo padezca SIDA es de 0,57 y la probabilidad de que dé positivo en el test es de 0,47. Se sabe, además, que hay una probabilidad de 0,23 de que una persona padezca de SIDA y el test le dé negativo.

a) Las personas que no padecen SIDA, ¿qué probabilidad tienen de dar positivo en el test?
b) Las personas que dan positivo en el test, ¿qué probabilidad tienen de padecer SIDA?

Problema 3 (9)

Un grupo de personas sufre de la conocida gripe porcina. Unas han sido tratadas con el antiviral Tamiflú y otras no. La probabilidad de que una persona se trate con el antiviral y se cure de la gripe es de 0,35 y la probabilidad de que una persona no se trate con el antiviral y no se cure es de 0,40. Además, la probabilidad que tiene una persona de este grupo de curarse la gripe es de 0,53.

a) Las personas tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de no curarse?
b) Las personas no tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de curarse?

Problema 4 (18a)

Un dispositivo comprueba si una pieza recién fabricada es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se comprueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. La probabilidad de que una pieza sea correcta es de 0,95 y la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza como correcta es de 0,77. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa y el dispositivo la califique como defectuosa es de 0,04.

a) Las piezas que son correctas, ¿qué probabilidad tienen de ser calificadas como correctas por el dispositivo?
b) Las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué probabilidad tienen de ser correctas?

Problema 5 (10)

Una población sufre una infección en la piel. Algunas personas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. La probabilidad de que una persona haya sido tratada con el antibiótico es de 0,42. La probabilidad que tiene una persona de curarse de esta infección es de 0,53. Se sabe también que la probabilidad de tratarse con el antibiótico y curarse de la infección es de 0,35.

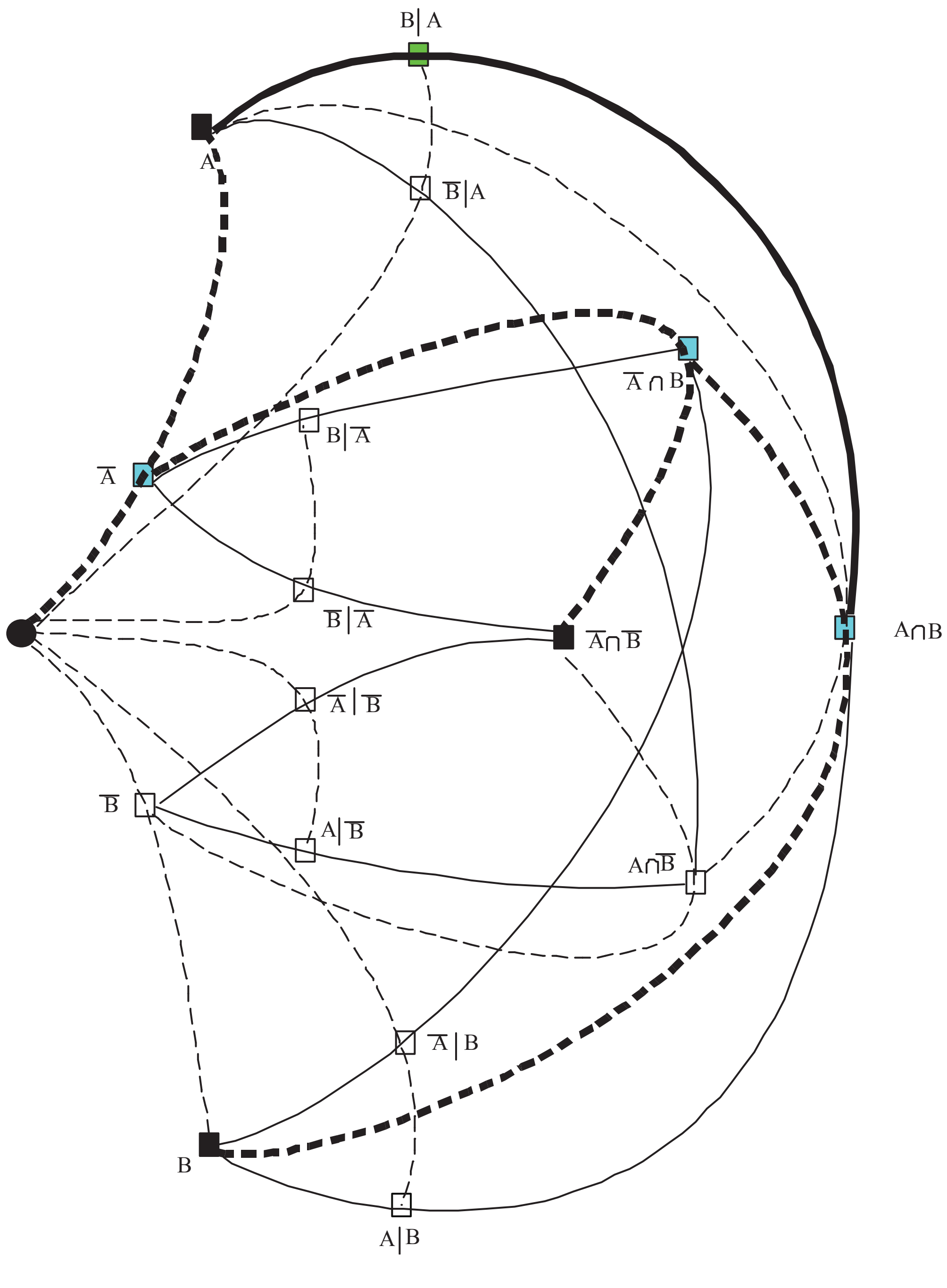
a) Las personas que no se han tratado con el antibiótico, ¿qué probabilidad tienen de curarse de la infección?
b) Las personas que no se han curado, ¿qué probabilidad tienen de no haber sido tratadas con el antibiótico?

Problema 6 (2a)

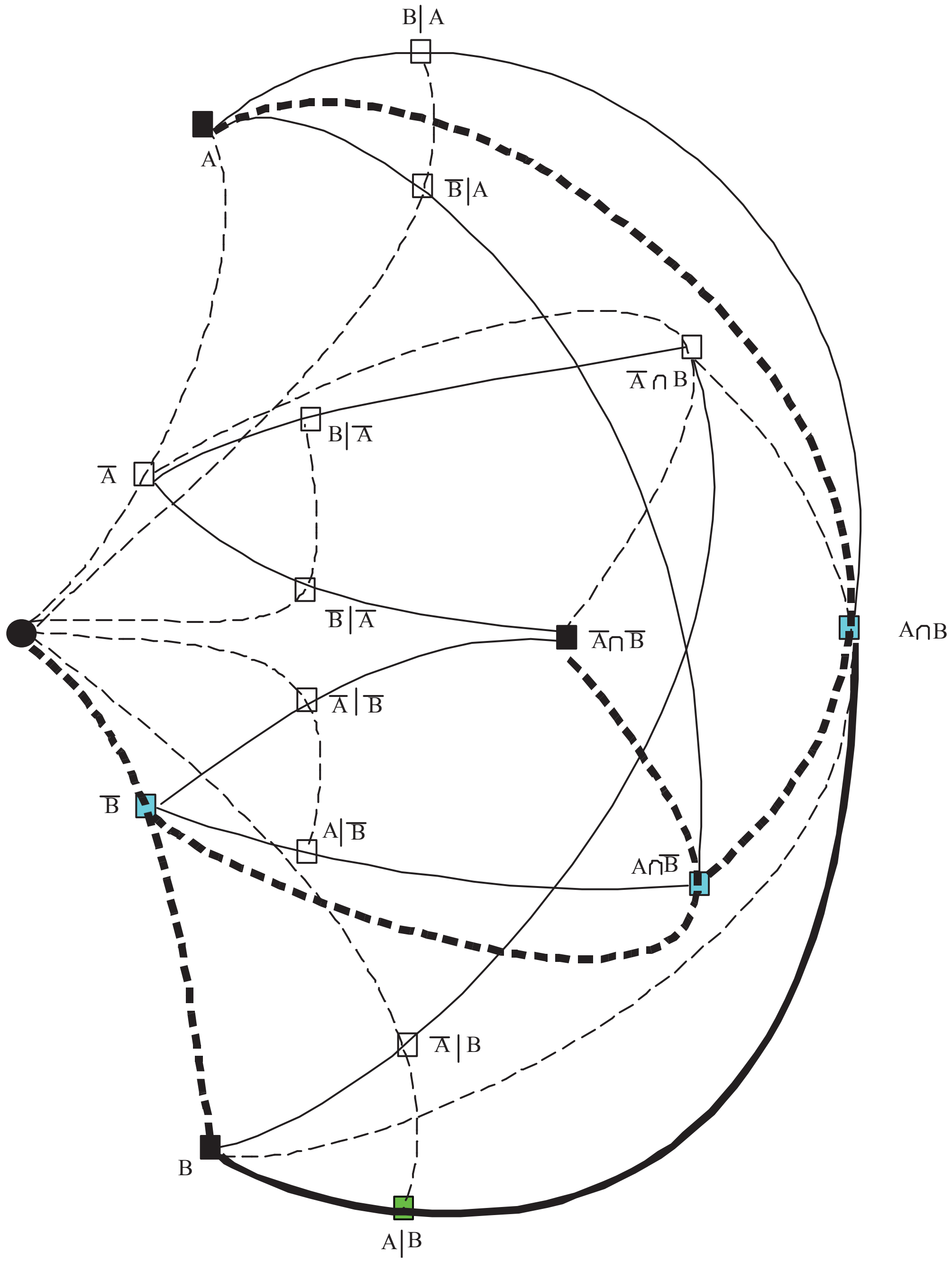
La probabilidad de que un estudiante use gafas es de 0,28. La probabilidad de que un estudiante sea chica y use gafas es de 0,15 y de que sea chica y no las use de 0,37. Los estudiantes que son chicos, ¿qué probabilidad tienen de usar gafas?

ANEXO 5. Grafos teóricos alternativos para el Problema 18a.

Apartado a)



Apartado b)


B|A
A
$\overline{B}$|A
$\overline{A}\cap B$
B|$\overline{A}$
$\overline{A}$
$\overline{B}$|$\overline{A}$
$\overline{A}\cap\overline{B}$
A∩B
$\overline{A}$|$\overline{B}$
$\overline{B}$
A|$\overline{B}$
A∩$\overline{B}$
$\overline{A}$|B
B
A|B

ANEXO 6. Contenidos de probabilidad en el currículo español.

Los contenidos de probabilidad marcados por el Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell (D.O.C.V., 2007; pág. 164-165) para la asignatura de Matemáticas de 4º de la ESO, Opción B son los siguientes:

- Experimentos aleatorios. Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Sucesos.
- Técnicas de recuento. Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Aplicación al cálculo de probabilidades.
- Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.
- Probabilidad condicionada.
- Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

Los criterios de evaluación que guardan relación con la probabilidad en el citado decreto (D.O.C.V., 2007, p. 165) son los siguientes:

15. Determinar e interpretar el espacio muestral y los sucesos asociados a un experimento aleatorio, simple o compuesto; utilizar la Ley de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias para calcular probabilidades simples o compuestas.
16. Aplicar los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.

ANEXO 7. Listado de problemas para la enseñanza.

PROBLEMAS DE PROBABILIDAD I

Problema 1

La clase de 4º de la ESO está formada por 19 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 4 chicas que usan gafas, 6 chicas que no las usan y 7 chicos que tampoco usan gafas.

a) ¿Qué porcentaje de los estudiantes son chicas con gafas?
b) ¿Qué porcentaje de los estudiantes son chicas sin gafas?
c) ¿Qué porcentaje de lo estudiantes son chicos sin gafas?
a) ¿Qué porcentaje de los estudiantes son chicos con gafas?
d) ¿Qué porcentaje de los estudiantes son chicas? ¿Qué porcentaje son chicos?
e) ¿Qué porcentaje de los estudiantes lleva gafas? ¿Qué porcentaje de los estudiantes no lleva?
b) Entre las chicas, ¿qué porcentaje no lleva gafas? ¿Qué porcentaje lleva gafas?
c) Entre los chicos, ¿qué porcentaje no lleva gafas? ¿Qué porcentaje lleva gafas?
d) Entre los que llevan gafas, ¿qué porcentaje son chicas? ¿Qué porcentaje son chicos?
e) Entre los que no llevan gafas, ¿que porcentaje son chicas? ¿Qué porcentaje son chicos?
f) ¿Qué porcentaje de los estudiantes son chicas o llevan gafas?
g) Llama un estudiante de 4º de la ESO a la puerta. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica sin gafas?

Problema 2

En una población de 1.252 habitantes, muchos de ellos se vieron afectados por una diarrea. Entonces, se descubrió que una fuente estaba contaminada. Se sabe que 914 personas no bebieron de la fuente, 903 no padecieron de diarrea y 315 personas bebieron de la fuente y padecieron de diarrea. Si seleccionamos al azar a un habitante de esta población:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que bebiera de la fuente?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que bebiese de la fuente y no padeciera de diarrea?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no padeciera de diarrea, si sabemos que no bebió de la fuente?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que no bebiera de la fuente, si sabemos que padeció de diarrea?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que padeciera de diarrea, si sabemos que bebió de la fuente?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que no padeciera de diarrea, si sabemos que bebió de la fuente?
g) ¿Cuál es la probabilidad de que bebiera de la fuente, si sabemos que no padeció de diarrea?
h) ¿Cuál es la probabilidad de que padeciera de diarrea y no bebiera de la fuente?

Problema 3

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 60 piezas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. Los resultados muestran que hay 6 piezas defectuosas, 5 piezas defectuosas que el test ha calificado de defectuosas y 52 piezas correctas que el test ha calificado de correctas. El dispositivo, ¿es fiable?

Problema 4

Apostamos 5 € a que sale una figura, al extraer una carta al azar de una baraja española.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ganemos la apuesta?
b) Una vez extraída la carta nos dicen que ha salido bastos. ¿Cuál es la probabilidad de que ganemos la apuesta? ¿Y si nos dicen que la numeración de la carta es mayor que cinco?
c) ¿Son independientes los sucesos "salir figura" y "salir bastos"?
d) ¿Son independientes los sucesos "salir figura" y "tener una numeración mayor que 5"?

Problema 5

Tenemos una urna con 4 bolas rojas y 6 bolas verdes. Vamos a analizar tres experimentos:

*Experimento 1***:** extracción con reemplazamiento. Extraemos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. A continuación sacamos otra bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola verde en la primera extracción?
b) Supongamos que hemos obtenido una bola verde en la primera extracción. ¿Cuál es la composición de la urna inmediatamente antes de realizar la segunda extracción? ¿Cuál es la probabilidad de obtener de nuevo una bola verde en la segunda extracción?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una bola verde?
d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola de cada color?

Experimento 2: extracción sin reemplazamiento. Extraemos una bola, y sin devolverla a la urna, extraemos otra.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola verde en la primera extracción?
b) Supongamos que hemos obtenido una bola verde en la primera extracción. ¿Cuál es la composición de la urna inmediatamente antes de realizar la segunda extracción? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola verde en la segunda extracción?
a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una bola verde?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola de cada color?

Experimento 3: extracción simultánea. Extraemos dos bolas simultáneamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una bola verde?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola de cada color?
c) A efectos de probabilidades, ¿difiere este sistema de extracción de los dos anteriores? ¿es equivalente a alguno de ellos?

PROBLEMAS DE PROBABILIDAD II

Problema 1

Una población de 40 personas se sometió a una prueba para averiguar si padecían la gripe porcina. Los resultados muestran que había 4 personas que padecían la gripe y el test les dio positivo, 2 personas que no padecían la gripe y el test les dio también positivo y 30 personas que no padecían la gripe y el test les dio negativo. Seleccionamos a una de estas personas al azar. Halla la probabilidad de que:

d) El test le diera positivo y no padeciera la gripe porcina.
e) Padeciera la gripe porcina.
f) El test le diera positivo, si sabemos que no padecía la gripe. (Índice de error: Coeficiente falso positivo)
g) El test le diera negativo, si sabemos que padecía la gripe. (Índice de error: Coeficiente falso negativo)
h) El test le diera positivo, si sabemos que padecía la gripe. (Índice de validez: Sensibilidad)
i) El test le diera negativo, si sabemos que no padecía la gripe. (Índice de validez: Especificidad)
j) No padeciera la gripe, si el test le dio positivo. (Error de diagnóstico: Falso positivo)
k) Padeciera la gripe, si el test le dio negativo. (Error de diagnóstico: Falso negativo)
l) Padeciera la gripe, si el test le dio positivo. (Valor predictivo del positivo)

m) No padeciera la gripe, si sabemos que el test le dio negativo. (Valor predictivo del negativo)

Problema 2

El año pasado, parte de los habitantes de una población se vacunó contra la gripe. Los resultados muestran que el 35% de las personas se vacunaron y no contrajeron la enfermedad, el 5% se vacunaron y contrajeron la enfermedad, y el 40 % no se vacunaron y contrajeron la enfermedad. Si seleccionamos al azar a una de estas personas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que contrajera la gripe, si sabemos que no se vacunó?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no contrajera la gripe, si sabemos que no se vacunó?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no se hubiera vacunado, si sabemos que no contrajo la gripe?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que se hubiera vacunado, si sabemos que no contrajo la gripe?

Problema 3

En un grupo de 4º de ESO el 60% son chicas y el 20% son chicos que no usan gafas. Usa gafas el 50% de los estudiantes. Seleccionamos un estudiante al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que use gafas, si sabemos que es chica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica, si sabemos que usa gafas?

c) ¿Son independientes los sucesos “ser chica” y “usar gafas”?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica o use gafas?

Problema 4

Lanzamos dos dados simultáneamente y sumamos los resultados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo?

Problema 5

En una clase con 9 chicos y 12 chicas, se eligen dos representantes al azar. Halla la probabilidad de que salgan dos chicos.

Problema 6

Lanzamos tres monedas trucadas, para las que la probabilidad de cara es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cruz?

PROBLEMAS DE PROBABILIDAD III

Problema 1

En una población, la probabilidad de ser fumador es de 0’3. La probabilidad de ser fumador y acabar padeciendo cáncer de pulmón es de 0’20 y la probabilidad de no ser fumador y no padecer nunca cáncer de pulmón es de 0,65.

a) ¿Cuál es la probabilidad de padecer cáncer de pulmón?

b) ¿Cuál es la probabilidad de padecer cáncer de pulmón, si se es fumador?

c) ¿Cuál es la probabilidad de haber sido fumador, si no se ha padecido cáncer de pulmón?

Problema 2

En una determinada población, la probabilidad de padecer cáncer de colon es de 0,05. Se dispone de una prueba diagnóstica que da positivo para la enfermedad con probabilidad 0,05. Además, se sabe que la probabilidad de padecer cáncer de colon y que el resultado de la prueba sea negativo es de 0,01.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un falso positivo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un falso negativo?

c) Halla el valor predictivo del positivo.

d) Halla el valor predictivo del negativo.

e) Halla la especificidad del test.

f) Halla la sensibilidad del test.

Problema 3

En una empresa, una décima parte de los empleados son mujeres con cargos directivos. Un quinto de la plantilla ocupa cargos directivos y dos quintos de los trabajadores son mujeres.

a) Seleccionamos al azar un hombre que trabaje en la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que ocupe un cargo directivo?

b) Seleccionamos al azar a un empleado entre los que no ocupan ningún cargo directivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

c) Seleccionamos un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ocupe un cargo directivo o sea una mujer?

d) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ocupar un cargo directivo”?

Problema 4

Una urna A contiene 12 bolas rojas y 8 negras. Una segunda urna B, contiene 7 bolas rojas y 3 negras. Se extrae una bola de la A al azar y se introduce en la urna B. A continuación, se extrae una bola de B. Halla la probabilidad de obtener una bola roja.

Problema 5

El 60 % de los mayores de 60 años de una población están jubilados y el 30% (de los mayores de 60 años) sigue conduciendo. El 55% de los mayores de 60 años no jubilados sigue conduciendo. Se elige al azar una persona de esa población que tenga más de 60 años.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no esté jubilada y no conduzca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté jubilada, si sabemos que no conduce?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que conduzca, si sabemos que está jubilada?

Problema 6

La probabilidad de que un cliente de un mercado compre un producto A es 0,6; de que compre un producto B es 0,5 y de que compre el producto A si ha comprado el B es 0,65.

a) Calcula la probabilidad de que un cliente compre sólo el producto A.

b) Calcula la probabilidad de que el cliente compre alguno de los dos productos.

c) ¿Son los sucesos “comprar A” y “comprar B” incompatibles? ¿Son independientes?

PROBLEMAS DE PROBABILIDAD IV

Problema 1

El 70% de las calculadoras que vende un comercio son de la marca A, y el resto, de la marca B. El 76% de las calculadoras de la marca A no son gráficas y el 45% de las de la marca B sí lo son. Seleccionamos una calculadora al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea gráfica y de la marca A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea gráfica?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca A, si sabemos que es gráfica?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca A, si sabemos que no es gráfica?

Problema 2

En una fábrica se producen 2000 bolígrafos en 2 horas. El 72% son de color azul. Una novena parte de los bolígrafos de color azul no pintan bien. Además, hay 18 bolígrafos que no son azules y pintan bien. Elegimos un bolígrafo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea azul, si sabemos que pinta bien?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea azul, si sabemos que no pinta bien?

Problema 3

Para hacer una prueba de televisión, se han presentado 20 chicos morenos y 12 rubios. De los morenos, 5 tienen los ojos azules, y de los rubios, 8. Si se hace la elección al azar, halla la probabilidad de que:

a) Sea moreno y tenga los ojos azules.
b) Sea moreno, si tiene los ojos azules.
c) Sea moreno o tenga los ojos azules.

Problema 4

Un abogado, antes de aceptar un caso, pide que todos sus posibles clientes sean examinados por la máquina de la verdad. Experiencias anteriores muestran que la probabilidad de que la máquina declare culpable al posible cliente es de 0,56. La probabilidad de que el posible cliente sea inocente es de 0,4 y la probabilidad de que el cliente sea inocente y la máquina lo declare culpable es de 0,01. Si un posible cliente solicita los servicios del abogado:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina lo declare culpable, si sabemos que efectivamente lo es?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea culpable, si la máquina lo declara inocente?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea inocente, si la máquina lo declara inocente?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina lo declare inocente, si sabemos que es culpable?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente sea culpable y la máquina lo declare inocente?

ANEXO 8. Sesión de clase nº 2.

Es la segunda sesión de las trece dedicadas a la probabilidad. Se graba desde el inicio de la clase, durante 14:44 minutos y a la clase asisten siete estudiantes: L., A., T., V., H., B. y C.. Para referirnos a la profesora usaremos la abreviatura P.

{1} P.: Bueno, venga; entonces, todos habéis intentado en casa el problema 2 ¿no?

{2} Estudiantes: Sí.

{3} P.: Vale, a ver, lo leemos; por ejemplo, C..

{4} C.: *(Lee)* En una población de mil doscientos cincuenta y dos habitantes, muchos de ellos se vieron afectados por una diarrea. Entonces, se descubrió que una fuente estaba contaminada. Se sabe que novecientas catorce personas no bebieron de la fuente, novecientas tres no padecieron de diarrea y trescientas quince personas bebieron de la fuente y padecieron de diarrea. Si seleccionamos al azar a un habitante de esta población…

{5} P.: Vale, y una serie de preguntas ¿no? Vale, lo primero de todo, ¿cómo habéis organizado la información? ¿Habéis organizado la información de alguna manera?

{6} C.: Yo, con la tabla que nos diste.

{7} P.: Habéis utilizado la tabla…

{8} Varios estudiantes en grupo: No, no.

{9} P.: Seguís sin utilizar la tabla…

{10} A.: Yo, es que con la tabla…

{11} L.: Es que yo, en esto, me aclaraba más con lo mío.

{12} P.: Te aclarabas más con lo tuyo… Y además, no has utilizado la tabla ¿por no saber cómo completarla o porque no la has creído útil?

{13} L.: Porque… porque es que no… no sabía cómo…

{14} T. *(interrumpiendo a L., que sigue hablando)*: Pero es que… una cosa… yo es que me hice el esquema para luego hacer la tabla, pero cuando hice el esquema me di cuenta que faltan personas.

{15} P.: Vale, hiciste el esquema y ¿probaste con la tabla?

{16} T.: No, porque como *(interrupción de H.)* me di cuenta de que faltaban personas, que no sabía dónde estaban esas personas, no hice la tabla…

{17} P.: No hiciste la tabla, vale. ¿A todo el mundo le han faltado personas? ¿O hay alguien que las ha encontrado todas?

{18} B.: Yo las tengo todas.

{19} P.: B., tú las tienes todas. Bueno, vamos a ver, tenemos una situación ¿no? A ver, en la que en una población, pues determinados habitantes se han visto afectados por una diarrea ¿no? Y paralelamente a esto se ha descubierto que una fuente está contaminada ¿vale? y luego nos dan ciertos datos ¿vale? comparando personas que han bebido de la fuente, personas que tienen diarrea o que no la tienen…¿vale? Mmm, a ver, ¿qué cosas pueden pasar? O sea, seleccionamos una persona al azar ¿y qué puede pasar? ¿cuáles son los sucesos implicados aquí?

{20} L.: Que tenga diarrea o que no tenga.

{21} C.: Y que haya bebido o que no.

{22} P.: Y que haya bebido o que no. Vale. Eso principalmente y, después, ¿pueden pasar otras cosas?

{23} B.: Que no haya bebido y la tenga. Y que haya bebido y no la tenga.

{24} P.: ¿Esas dos cosas, sólo?

{25} C.: A ver, se pueden combinar ¿sabes?

{26} A.: Que tenga la diarrea y no haya bebido…

{27} L.: Que haya…que haya bebido y que no la tenga, no.

{28} B.: Siiií…

{29} A.: Que la tenga y no haya bebido o que la tenga y haya bebido.

{30} P.: ¿Por qué no, L.? ¿Por qué, por qué si ha bebido, o sea, tú dices que si ha bebido…?

{31} L.: Porque si la fuente está contaminada, se tiene que, que contaminar…

{32} T.: Pero, a lo mejor, no le ha hecho reacción.

{33} P.: A lo mejor no le ha hecho reacción…A ver, esto nos lo van a decir los números ¿vale? Los números nos van a decir también qué posibilidades hay… ¿alguien ha utilizado la tabla?

(B. y C. levantan la mano)

{34} P.: ¿Dos personas sólo? O sea, que no os convencí mucho el otro día, con esto de la tabla…

{35} T.: No, pero sí que iba…

{36} P.: Pues parecíais muy entusiasmados…

{37} L.: El problema que hicimos contigo sí, pero yo aquí no sabía por dónde, cómo…

{38} P.: Vale, pues venga, a ver…vamos a ver cómo la podemos completar.

{39} P.: Hacemos algo así… ¿no?

(Dibujo la tabla vacía en la pizarra)

{40} B.: Sí.

{41} P.: Ya la tenemos, a ver ¿cómo la rellenamos…?

{42} B.: Pues…pones…haces los dibujitos…

{43} C.: Yo he puesto B fuente…

{44} B.: Diarrea y no diarrea…

{45} C.: Yo he puesto F y F negada.

{46} P.: Vale, F ¿qué será F?

{47} C. y otros : *(Murmullos)* Los que beben de la fuente…

{48} P.: F será… vamos a escribirlo así: F será el suceso "beber de la fuente" o "haber bebido de la fuente". *(Escribo en la pizarra, al lado de la tabla, F = "haber bebido de la fuente")*

{49} C.: Cuando hagamos tabla, ¿tenemos que, que poner eso, así?

{50} P.: Sí. Es importante definir los sucesos. Es importante saber a qué estamos llamando F, o a qué estamos llamando… otras cosas… para poder entender después lo que hacemos ¿vale? Y que otra persona, si lo lee, lo pueda entender también. Vale, F, haber bebido de la fuente, ¿qué más?

{51} B. y H., a la vez: F negada, no haber bebido.

{52} P.: El suceso contrario de F, que es "no haber bebido de la fuente". *(Escribo en la pizarra, al lado de la tabla,* $\overline{F}$ *= "no haber bebido de la fuente")*

{53} P.: Vale, ¿qué más?

{54} C.: Yo he puesto, + como que padeció diarrea y – que no.

{55} P.: A ver, ¿un signo +? *(escribo en la pizarra un signo +)* ¿así?

{56} C.: Sí.

{57} P.: Vale, a ver, + es "padecer diarrea"

(Escribo en la pizarra, + = "padecer diarrea")

{58} P.: ¿Todos habéis utilizado ese signo…, positivo?

{59} A. y B.: No

{60} P.: ¿Qué habéis utilizado?

{61} A.: Dibujo de la enfermedad.

{62} P.: ¿Dibujos? ¿Qué dibujos habéis hecho?

{63} B.: Unas cosas así *(mueve las manos)* y otras cosas así *(mueve las manos de la misma manera)* tachadas.

(Risas)

{64} A.: B. eso significa que …

(Risas)

{65} P.: ¿Eso para simbolizar diarrea?

(B. asiente. Más risas)

{66} P.: Bueno, no es que esté mal pero, en matemáticas, se utilizan habitualmente letras ¿vale?

{67} A.: ¿No es más fácil poner una D?

{68} P.: Vamos, vamos a hacer…

{69} L.: ¿Y si ponéis una E, de enfermedad?

{70} P.: ¿Una E de enfermedad…?

{71} B.: Una D mayúscula.

{72} P.: Una D mayúscula, de diarrea, ¿no sería más cómodo?

(Varios estudiantes hablan a la vez)

{73} P.: Vale, es que vamos a reservar, vamos a reservar el signo más para otro tipo de sucesos, en otro tipo de problemas. Entonces, es mejor utilizar una letra, que sea representativa del suceso; por ejemplo, la D. *(Cambio el signo + por una D en la pizarra)*

{74}P.: Vale, la D, "padecer diarrea". ¿Qué más?

{75} Varios estudiantes (entre ellos B. y C.): D negada.

{76} P.: El suceso contrario de D, que es…

{77} Varios estudiantes a la vez: No padecer.

{78} P.: No padecer diarrea.

(Escribo en la pizarra, $\overline{D}$ *= "no padecer diarrea")*

{79} C.: ¿No podrías haber cogido la gripe o un constipado?

{80} P.: Tendremos de todo: gripes, constipados, de todo. Tranquilos.

{81} B.: Sí, vamos a acabar de las enfermedades…

(Risas)

{82} P.: Vale, y ahora que ya tenemos estos… ¿queda algún suceso por escribir?

{83} Varios estudiantes: No

{84} P.: ¿No?

{85} B.: Los datos…

{86} P.: Los datos, vale. Pero… vamos a utilizar la tabla ¿vale? Os pido que utilicemos la tabla. Entonces, tendremos que situar todo esto en la tabla ¿cómo?

{87} B.: Yo he puesto arriba las fuentes.

{88} P.: Arriba las fu… las efes, ¿no? *(Sitúo F y* $\overline{F}$ *en la tabla)*

{89}C.: Yo también.

{90} P.: Bebe y no bebe ¿no?

{91} H.: ¿Y eso da igual? ¿O no?

{92} P.: ¿Qué quieres decir con que da igual?

{93} H.: Si ponemos las efes arriba o en el lateral.

{94} P.: Da igual. De todas formas os propongo que luego, una vez lo hayamos resuelto así, lo resolvamos de la otra manera ¿vale?

{95} B.: Da lo mismo.

{96} P.: Lo veremos. Mmm…¿Qué más?

{97} C.: Las dés.

(Siúo D y $\overline{D}$ *en la tabla)*

{98} P.: Las dés. De y no de. Vale, muy bien, y ahora tenemos que situar los datos ¿no? Los datos del problema. ¿Qué datos tenemos?

{99} C.: Que en total son mil doscientos cincuenta y dos…

{100} A.: Yo empezaría por…

{101} B. *(interrumpiendo a A. y hablando a la vez que ella)*: Que novecientas catorce personas…no bebieron.

{102} P.: A ver, novecientas catorce personas no bebieron de la fuente. ¿Dónde pongo yo ese dato?

{103} B.: En la columna última, en la tercera…

{104} A.: Sí, al final del todo.

{105} P.: En la columna…

{106} B. y V.: No, no, abajo… En la fila de abajo.

{107} P.: ¡Ah! En la última fila…

{108} B.: La tercera columna

{109} P.: ¿La tercera?

{110} V.: Sí.

{111} P.: Aquí es los que no bebieron de la fuente. ¿Cuántos?

{112} Varios: Novecientos catorce.

{113} P.: Novecientos catorce. Y los demás, ¿estáis de acuerdo? ¿todos?

(L. niega con la cabeza)

{114}P.: No, L., no. Vale.

{115} H.: ¿Cómo sabes por qué ponerlo ahí?

{116} P.: ¿Por qué ponerlo ahí? Vale. Te lo va a explicar, por ejemplo, B.. ¿Por qué ponerlo ahí?

{117} B.: Porque no has bebido de la fuente y como no es ni un da… no es…no te dicen ni que esos tengan diarrea ni que no, es el total. Con los que tienen y con los que no tienen diarrea, que no lo sabes, luego lo sacas.

{118} P.: ¿Os ha convencido?

{119} L.: No.

{120} A.: A mí sí.

{121} H.: Sí.

{122}P.: ¿Alguien lo puede explicar un poco mejor?

{123} T.: A ver, es el total de personas que no han bebido de la fuente, entonces se pone abajo porque la suma de los que han tenido diarrea y los que no han tenido diarrea, que se colocarán encima, ha de dar novecientos catorce.

(Unos segundos de silencio)

{124} P.: Bueno, lo que sí que se ve claramente es que el novecientos catorce está en la columna ¿vale? que encabeza ¿qué?

{125} C.: Los que no bebieron…

{126} P.: Vale…los que no han bebido de la fuente, ¿vale?

{127} P.: ¿Qué va en esta casilla? *(Señalo la casilla donde va el número de personas que no han bebido y tienen diarrea)*

{128} B.: Los que no han bebido y tienen diarrea.

{129} P.: ¿Y en esta? *(Señalo la casilla donde va el número de personas que no han bebido y no tienen diarrea)*

{130} B.: Los que no han bebido y no tienen diarrea.

{131} P.: Claro, y los que no han bebido y tienen diarrea y los que no han bebido y no la tienen suman el total de los que… no han bebido de la fuente. ¿Vale? Vale, pues venga, otro dato.

{132} T.: Novecientas tres no padecieron diarrea.

{133} P.: Novecientas tres no padecieron diarrea.

{134} T.: Los que no bebieron de la fuente…

{135} Varios: Nooo…

{136} L.: No, no, es que eso no te lo dicen, entonces lo tendrás que poner...

{137} B.: Lo pones encima de lo del…

(Hablan varios a la vez)

{138} P.: Este debate es interesante porque… parece que T. opina diferente a todos los demás.

{139} V.: Novecientos tres es los que no padecieron diarrea en total, bebieran o no bebieran de la fuente…

{140} B. *(a la vez que V.)*: De los que bebieron y los que no bebieron de la fuente.

{141} P.: A ver, esos novecientos tres ¿qué pasó con ellos?

{142} Varios: Que no tuvieron diarrea…

{143} P.: Que no tienen diarrea… ¿Algo más?

{144} Varios: Nooo…

{145} P.: No tenemos información acerca de si bebieron o no de la fuente ¿vale? ¿Por qué has pensado tú, T., que…que podría ser que…?

{146} T.: Porque hay una coma, y detrás te dice novecientas catorce personas no bebieron de la fuente, como decir, y de esas novecientas catorce, novecientas tres no padecieron diarrea.

{147} B.: Nooo.

{148} P.: Tú lo interpretas así ¿simplemente por el hecho de que hay una coma? ¿de que está en la misma oración?

{149} T.: No sé.

{150} P.: De que está en la misma frase.

{151} P.: Que está seguido.

{152}T.: No sé…

{153} P.: Bueno, tú lo has interpretado así ¿no?

{154} T.: Sí.

{155} P.: El hecho es que tú lo has interpretado así.

{156} P.: Bueno, en realidad, la intención no era esa, porque dice: “se sabe que novecientas catorce personas no bebieron de la fuente, novecientas tres no padecieron de diarrea…” Si significase lo que tú has interpretado, lo hubiera remarcado, hubiera dicho “de ellos, de los anteriores” ¿vale? “novecientas tres no padecieron diarrea”. La interpretación que se espera es la que han hecho los demás, ¿vale? Pero…, pero bueno, es interesante ver tu punto de vista. Tú has interpretado que novecientos tres eran de los que bebieron de la fuente.

{157} T.: No, de los que no…

{158} P.: Pero en este caso, no. En este caso…eh… ¡de los que no!, perdón. Eh… novecientos tres simplemente… De esos novecientos tres lo único que sabemos es que no padecieron de diarrea. Por tanto, ¿dónde los ponemos?

{159} L.: Al final de la… *(Escribo novecientos tres en el lugar correspondiente)*

{160} Varios: Ahí.

{161} P.: Vale, otro dato más.

{162} B.: trescientos quince bebieron de la fuente y padecieron diarrea.

{163} A.: Ese es fácil.

{164} P.: ¿Ese es más fácil que los otros? ¿Os parece más fácil?

{165} L.: Sí, porque te dice las dos cosas, si tiene o no diarrea y si bebe o no bebe.

{166} P.: Vale. (*Leo*) Bebieron de la fuente y padecieron diarrea… luego aquí me habéis dicho ¿verdad? *(Escribo el dato en su lugar correspondiente de la tabla)*

{167} P.: ¿Tenemos más datos?

{168} Varios: Sí, el total.

{169} P.: El total. ¿Dónde ponemos el total?

(Hablan varios a la vez)

{170} P.: Aquí, ¿verdad? *(Escribo el dato en su lugar correspondiente de la tabla)*

{171} P.: Muy bien. Y ahora simplemente se trata de completar la tabla.

[…] (Verifico que la cámara está grabando)

{172} P.: Bueno, vamos a ver, eh… ¿cómo, cómo completamos esto?

{173} B.: Puedes completar así, del total… O sea, tú restas mil doscientos cincuenta y dos menos novecientos tres y mil doscientos cincuenta y dos menos novecientos catorce.

{174} P.: Vale, y ¿con eso que obtienes? A ver, por partes, por partes…

{175} B.: Pues tienes, los que tienen diarrea y los que bebieron de la fuente.

{176} P.: Obtienes este dato de aquí ¿verdad? ¿vale? Y este dato de aquí. ¿Puedes producirle un sentido? Vamos a producirle un sentido a esa resta. Es, el total de la población …

{177} B.: … menos los que no tuvieron diarrea, para sacar los que tuvieron diarrea.

{178} P.: Los que tuvieron diarrea, muy bien, ese dato ¿lo tienes, ese…?

{179} B.: Trescientos cuarenta y nueve.

{180} P.: Trescientos…cua-ren-ta y nue-ve. *(Escribo el dato en el lugar correspondiente de la tabla)*

{181} P.: Vale, muy bien.

{182} B. Y ahora, aquél, trescientos treinta y ocho.

{183} P.: Trescientos treinta y ocho… *(Escribo el dato en el lugar correspondiente de la tabla)*

{184} B.: Y ahora ya puedo sacar los que… los que bebieron de la fuente y no tienen diarrea y los que tienen diarrea y no bebieron de la fuente.

{185} P.: O sea, éste y éste ¿no? *(Señalo las casillas donde van esos dos datos)*

{186} P.: Son los que podemos sacar, vale. ¿Este…?

{187} B.: Veintitrés.

{188} P.: Veintitrés. Vamos a producirle un sentido también, a la operación esta que hemos hecho. ¿Qué hemos hecho?

{189} B.: Restar los que bebieron de la fuente…, restarle los que tuvieron diarrea para sacar los que no la tuvieron…

{190} P.: Los que bebieron de la fuente y tuvieron diarrea ¿vale?

{191} B.: Claro, de los que bebieron de la fuente el que tuvo y el que no.

{192} P.: Muy bien, y con eso obtenemos…

{193} A.: Los que bebieron de la fuente y no tuvieron diarrea.

{194} P.: Y no tuvieron diarrea, luego… L., fíjate, los números nos dicen qué, que hay un grupo de personas que ¿qué les pasó?

{195} L.: Que… ¡Ah, claro! que, que no bebieron y tie…, no, bebieron y no tienen.

{196} P.: Que bebieron pero no tienen diarrea, los números nos lo dicen: hay veintitrés personas en esa situación. ¿Sí? ¿Lo veis o no?

{197} L.: Sí, sí.

{198} P.: ¿Vale? Son poquitas… si lo comparas con el total de la población. Vale, y nos quedan dos más, dos datos más, que podemos producir…

{199} L.: Los que no bebieron y tienen.

{200} P.: Los que no bebieron y tienen…

{201} B.: Treinta y cuatro.

{202} P.: Treinta y cuatro. *(Escribo el dato en el lugar correspondiente de la tabla)*

{203} P.: ¿Y eso cómo puede ser, que no bebieran y tengan diarrea?

(Hablamos todos a la vez. Risas)

{204} C.: A lo mejor la cogieron por otra cosa…

{205} P.: Es un síntoma común de otras enfermedades también, la diarrea ¿no? Luego, de la misma manera que hay personas que bebieron y no tienen diarrea ¿vale? habrá personas que no bebieron pero tengan diarrea, por otras razones ¿no? ¿Vale? Muy bien, ¿y qué nos queda?

{206} B.: Ochocientos ochenta.

{207} P.: Sí, y el ochocientos ochenta…

{208} B. y A.: Los que no bebieron de la fuente y no tienen diarrea

{209} P.: Los que ni bebieron de la fuente, ni tienen diarrea, ¿vale? ¿Os convence?

{210} L. y T.: Ahora sí.

{211} P.: ¿Ahora os salen todas las personas? Ahora, ya están todas ¿no?

{212} L.: Sí.

{213} P.: Muy bien, intentamos responder a las preguntas, ¿vale?

ANEXO 9. Sesión de clase nº 3.

Es la tercera sesión de las trece dedicadas a la probabilidad. Se graba desde el inicio de la clase, durante 46:29 minutos, pero la transcripción sólo se corresponde con los 35:02 minutos primeros, que son los correspondientes a la discusión del problema sobre el test de diagnóstico. A la clase asisten ocho estudiantes: L., A., T., V., H., M., B. y C.

{1} P.: Vale, grabando, estamos en antena.

(Hay un poco de barullo)

{2} P.: Vale, bueno, eh…habéis intentado todos el problema ¿no?

{3} Varios: Sí, sí.

{4} B.: Sí, pero yo es que hice dos cosas y cada una me salía una probabilidad.

{5} C.: Yo es que sólo hice si era fiable o no. ¿Sabes? Sólo hice eso y ya está.

{6} B.: Yo no sé dónde he metido la hojita.

{7} P.: Vale, vamos a repasar, sobre todo por M., que no estaba, el enunciado, vale, y me contáis qué habéis hecho.

{8} B.: He perdido la hoja…

{9} P.: Problema tres.

{10} B. *(a M.)*: Pero el uno lo hicimos aquí.

{11} M. *(a B.)*: Ya, ya.

{12} B. *(a M.):* Nos mandó el dos para ayer.

{13} C.: No, el tres.

{14} P.: El tres. *(A B.)* Venga, comparte la hoja con C..

{15} B. *(buscando la hoja)*: Pero que no puede estar muy lejos.

{16} P.: Vale, leemos el problema. Dice: *(leo)* "Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de sesenta piezas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. Los resultados muestran que hay seis piezas defectuosas, cinco piezas defectuosas que el test ha calificado de defectuosas y cincuenta y dos piezas correctas que el test ha calificado de correctas." Y la pregunta es si el dispositivo era fiable, si nos fiábamos de este dispositivo, y… os puse el ejemplo de pensar…que, que alguien os está intentando, vosotros sois empresarios, alguien os está intentando vender este dispositivo y para demostraros lo bien que funciona, pues se toma una muestra de sesenta piezas, algunas son correctas y otras defectuosas, se pasa el test ¿vale? y la información que tenéis es esa.

{17} T.: Pero es que… ¿para cuánto es para el empresario éste fiable?

{18} P.: Bueno, los empresarios sois vosotros, me lo tenéis que decir vosotros. Pero, pero claro… para decir si es fiable o no es fiable os tendréis que basar en algo ¿no? En algún…

{19} H.: Yo he hecho una tabla.

{20} B.: Una tabla.

{21} P.: Hacemos la tabla lo primero, para organizar los sucesos ¿no? las cosas que pueden pasar…

{22} H.: Pero es que no está claro…

{23} B.: Sí que está claro.

{24} H.: …el enunciado… Yo he leído sesenta piezas, y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. Los resultados muestran que hay seis piezas defectuosas, cinco piezas defectuosas que el test ha calificado de defectuosas. Esas cinco ¿son de las seis?

{25} B.: Sí.

{26} H.: ¿o son cinco que el test ha calificado como…?

{27} B. *(interrumpiendo a H)*: Yo las he contado como cinco de las seis.

{28} Varias: Yo también.

{29} B.: Que de seis defectuosas, cinco las ha contado como defectuosas.

{30} H.: Como había una coma, yo no sabía si eran seis y a parte, cinco o cinco de esas seis…

{31} A. *(al mismo tiempo que H)*: Pero eso… eso lo hicimos el otro día.

{32} P.: Seis…son seis piezas defectuosas, hay seis, defectuosas en total seis ¿vale? luego tenéis cinco piezas defectuosas, que el test ha calificado de defectuosas.

{33} L.: Yo las he sumado.

{34} P.: ¿Las habéis sumado?

{35} Varios (entre ellos B., H. y A.): Noo.

{36} B.: Yo he puesto…

{37} A. *(a la vez que B.)*: Noo, porque lo dijiste el otro día…

{38} P. *(a la vez que A.)*: Vamos a ver, ¿por qué no empezamos…

{39} B.: Con la tablita…

{40} P.: ¿Por qué no empezamos desde el principio? A ver, ¿qué sucesos, qué cosas pueden pasar?

{41} B.: Que sea correcta y el test la califique como correcta.

{42} P.: Seleccionamos una pieza ¿vale?, seleccionamos una pieza al azar y pueden pasar las siguientes cosas: que sea defectuosa o que no lo sea ¿no?. ¿Cómo le llamamos a eso?

{43} B.: D, le llamamos.

{44} H.: Probabilidad de que C…

{45} P.: No, de momento, estamos hablando de sucesos ¿vale? Vamos a ver qué información nos da el problema acerca de los sucesos, las cosas que pueden pasar. Luego veremos qué información numérica tenemos sobre esos sucesos ¿vale? A ver, sucesos, cogemos una pieza y puede ser…

{46} B.: C.

{47} P.: Puede ser C, que es correcta ¿vale?

{48} L.: O C negada.

{49} P.: O lo contrario de C, que sería…

{50} T.: Defectuosa.

{51}P.: Defectuosa. Puede ser correcta… *(Escribo en la pizarra C = "la pieza es correcta")* ¿vale? o …

{52} B.: La pieza no es correcta.

{53} P: La pieza es defectuosa ¿vale? *(Escribo en la pizarra "$\overline{C}$ = la pieza es defectuosa")* Vale, ¿qué más puede pasar?

{54} B.: Que el test…

{55} T. *(interrumpiendo a B.)*: Que la haya calificado bien…

{56} L.: Que el test haya resultado correcto o incorrecto…

{57} P.: Esa pieza es correcta o es defectuosa, ahora le pasamos el test, y el test puede calificarla como correcta o puede calificarla como…

{58} Varios: Incorrecta…

{59} P.: Defectuosa, ¿vale? Y…¿qué notación habéis utilizado?

{60} Varios *(entre ellos B. y C.)*: Más y menos…

{61} L.: Pues yo he utilizado…

{62} P.: Más, el test o el dispositivo, el dis-po-si-ti-vo… la califica… de correcta.

(Escribo en la pizarra + = "el dispositivo la califica de correcta")

{63} H.: Yo he puesto test y sin test.

{64} L.: Yo he puesto T y T negada…

{65} P.: Bueno, pues…, mmm…es otra… otra forma de negarlo, mientras seas coherente con cuál es la notación ¿vale?… Y… si ponemos aquí un positivo *(señalo el suceso denotado por +)* lo lógico es poner aquí un signo negativo ¿verdad?. Eso significa que el dispositivo la ha calificado de defectuosa *(Escribo " – = el dispositivo la ha calificado de defectuosa")* ¿Sí?

{66} P.: Vale, eso son los sucesos, las cosas básicas que pueden suceder. Ahora tenemos que organizar, vale, la información referente a números, vale, que se refieren a esos sucesos ¿no?. Vale, a ver cómo organizamos esos números.

{67} Varios: Con la tabla.

{68} P.: Con la tabla, ¿verdad? Con la tabla.

(Dibujo en la pizarra una tabla vacía)

{69} P.: Habéis hecho la tabla… ¿cómo la habéis… cómo lo habéis dispuesto?

{70} T.: Las C arriba…

{71} L.: Yo también.

{72} P.: Correcta y no correcta *(Escribo en el lugar correspondiente las letras C y $\overline{C}$)*

{73} Varios: Y positivo y negativo.

{74} P.: Positivo y negativo *(Escribo en el lugar correspondiente las letras + y -)*

{75} T.: Yo he puesto el total, ya.

{76} P.: Vale, el total son…

{77} T. y otros: Sesenta.

{78} P.: 60. El total siempre viene aquí. Sesenta. *(Escribo en el lugar correspondiente el total)*

{79} P.: Vale, y ahora tenemos que organizar esa información que aparece en el enunciado. Dice…

{80} B.: Seis son defectuosas.

{81} P.: Dice que seis son defectuosas.

{82} B.: En la columna de C con la barrita, abajo.

(Señalo el lugar correspondiente en la tabla)

{83} Varios: Ahí, sí.

{84} P.: Ahí, seis. Vale, muy bien.

{85} L.: ¡Ah! Y cinco…

{86} T.: Hay cinco defectuosas …

{87} B.: …que el test ha calificado de defectuosas. Arriba del…

{88} P.: A ver, a ver, a ver… no leáis tan rápido. Despacito.

{89} B.: *(Lee)* Cinco piezas defectuosas que el test ha calificado como de defectuosas.

{90} P.: Vale.

{91} T.: En C negada, positivo.

{92} B.: Negativo.

{93} P.: Lo contrario de C, negativo.

{94} T.: Nooo… No, porque las ha calificado bien. Son defectuosas y las ha calificado…

{95} B. *(interrumpe a T.)*: Pero las ha calificado…las ha calificado como defectuosas.

{96} A. *(interrumpe a B. y habla a la vez que ella)*: Pero… tú no te preguntas si se califican bien o mal, tú te preguntas de qué las ha calificado.

{97} L.: El test te las califica bien.

{98} T.: Pero, claro, eso es la C. Pero luego el test…

{99} A.: Nooo… El test dice que el dispositivo la ha calificado de defectuosa, negativo.

{100} B.: Está bien, porque las ha calificado bien pero…las ha calificado de negativas.

{101} A.: A ti no te importa…

{102} L.: Claro, porque el test sí que las va a calificar bien…

(Hablan todos a la vez)

{103} P.: A ver, ¿te han convencido, A., o no?

{104} A.: No, ¡si yo estaba convencida!

{105} P.: Ah, sí, eh… ¿A quién, a T.? A ver, T., ¿te han convencido?

{106} T.: Sí, sí…

{107} P.: ¿Sí? Luego…

{108} T.: Es que yo lo puse con diferentes letras, entonces por eso me lié.

{109} L.: Yo también.

{110} T.: Porque yo puse, o sea, el positivo, ha calificado bien y el negativo, ha calificado mal, no que el dispositivo las haya calificado en defectuosas.

{111} P.: ¡Ah, vale! Tú habías llamado de otra manera… Le habías dado otro significado al positivo y al negativo ¿no?

{112} T.: Claro.

{113} P.: Vale, bueno. Nosotros también vamos a ver después qué significa eso de que el test haya calificado bien o haya calificado mal ¿vale? Pero eso es una… eso va a ser algo compuesto de otros sucesos, no va a ser tan simple como un suceso en sí ¿vale?

{114}T.: Vale.

{115} P.: Eh… Seguimos. ¿Seguimos, entonces, o no?

{116} Varios: Sí, sí.

{117} P.: Vale, todos de acuerdo ya en lo que significa esto. Vale. Vale, pues más cosas.

{118} B.: Arriba del seis, el cinco.

{119} P.: Aquí, el cinco. Pues sí, porque habíamos quedado en que eran las piezas defectuosas, que el test había calificado de defectuosas.

{120} B.: Un cinco.

{121} P.: Vale.

{122} B.: Y ya puedes completar las de arriba… uno.

{123} L.: Y ahora…Pero también puedes poner el cincuenta y dos, porque pone: cincuenta y dos piezas correctas que el test ha calificado de correctas. Y yo las he puesto ya.

{124} A.: Sí.

{125} P.: Las cincuenta y dos piezas que son correctas y el test ha calificado de correctas. *(Escribo cincuenta y dos en la celda que le corresponde)*

{126} P.: Entonces, nos ha dado información, nos da información sobre una situación. Sobre la situación en la que el test ¿qué?

{127} C.: Está bien.

{128} P.: El test acierta ¿no? Vale, aquí… y aquí *(señalo los datos en la tabla)*. Vale, bueno, eso es lo que nos da el enunciado. Ahora tenemos que decidir si el test es fiable o no. ¿Cómo?

{129} C.: Pero primero completas.

{130} B.: Claro. Acaba. El uno y el siete…

{131} P.: Completamos la tabla, para tener todos los números ¿no?

{132} H.: Cinco más una, y abajo el seis.

{133} P.: Aquí tiene que venir una, ¿verdad?

{134} C.: Y ahí el cincuenta y tres…

{135} H.: Ahí el cincuenta y tres.

{136} C.: Un siete… El dos, a la izquierda.

{137} P.: Muy bien…

{138} C.: Y un cincuenta y cuatro.

(Voy escribiendo todos estos números en la tabla)

{139} P.: Y cuadra todo… cincuenta y cuatro y seis, sesenta. Vale, muy bien, ya tenemos los números referentes a todos los sucesos que se representan en la tabla ¿vale? ¿Ahora qué? Ahora tenemos ya que…

{140} T.: P.

{141} H.: Una cosa, ¿no sería…?

{142} P. *(a T.)*: P…vamos a llamar a la probabilidad ¿no?

{143} P. *(a H.)*: Dime.

{144} H. *(interrumpiendo)*: ¿No sería al revés? El test ha calificado cinco de defectuosas y una se le ha escapado…y eso va en el negativo.

{145} P.: Claro, esta una… ¿Qué pasa con esta pieza?

{146} B.: Que la ha clasificado positiva.

{147} P.: ¿Esta pieza como es?

(Hablan varios a la vez)

{148} P.: Es defectuosa y la ha calificado de positiva, ¿vale? ¿Sí o no? ¿Vale? ¿Lo entiendes, H., o no?

{149} H.: Vale.

{150} P.: ¿Qué es lo que no veías tú en esa pieza?

{151} H.: Que… el test la ha calificado como buena.

{152} P.: El test la ha calificado como buena y ella es…

{153} L.: Mala.

{154} H.: Defectuosa.

{155} P.: Vale, pero ya dijimos ayer que este test… ¿qué? ¿qué pasa con este test?

{156} L.: Que no es cien por cien fiable.

{157} P.: Que no es cien por cien fiable.

{158} C.: Yo cogí y miré la probabilidad de, entre las que ha calificado como buenas y son buenas, entre el total de buenas, ¿sabes lo que te digo? De todas las buenas que hay realmente, cuántas ha calificado de buenas, para saber…

{159} B.: Yo también. Yo hice las dos.

{160} P.: Muy bien… Tú has mirado sólo las que son buenas, y has dicho: de las que son buenas, …

{161} C.: ¿Cuántas ha calificado bien?

{162} P.: … ¿Cuántas ha calificado bien? Vale, muy bien.

{163} C.: Yo he hecho eso.

{164} P.: ¿Y cómo lo has hecho, a ver? Exactamente, ¿qué…

{165} C.: He hecho P…

{166} P.: Tú es como si seleccionaras una pieza al azar ¿vale? Seleccionamos una pieza al azar entre cuáles…

{167} C.: Entre las buenas.

{168} P.: Entre las buenas. Y tú te preguntas, ¿cuál es la probabilidad…

{169} C.: De que sea buena.

{170} P.: …de que el test te diga que es buena? Tú te sitúas en la situación en la que sabes las que son buenas y las que son malas ¿no? Tú te fijas sólo en las que son buenas, ¿no? Coges una entre las buenas ¿vale? Y te preguntas… A ver, el test ¿la calificará como buena o la calificará como mala? ¿Seguís todos a C.?

{171} Varios: Sí.

{172} P.: Vale, entonces tú vas a hallar la probabilidad de ¿qué? De que el test dé…

{173} C.: Eh… Bien.

{174} P.: Positivo, dado que…

{175} C.: Está bien.

{176} P.: Dado que la pieza es correcta. Es decir, tú vas a calcular la probabilidad de que acierte, en el caso de que la pieza sea correcta.

{177} C.: Sí.

{178} P.: ¿Lo ves? ¿Lo ves, T., como lo de acertar, fallar, vale, lo podemos expresar también en términos de estos sucesos? ¿Vale? Ella va a hallar la probabilidad de que el test diga que es buena, siendo que la pieza es buena, sabiendo que la pieza es buena. Vale. ¿Cuál es esa probabilidad?

{179} C.: Cincuenta y dos partido cincuenta y cuatro.

{180} P.: Cincuenta y dos partido cincuenta y cuatro.

{181} C.: Cero coma …

(Escribo en la pizarra "$P(+|C) =$" y a continuación, el número que C. me dicta)

{184} P.: Cero coma…

{185} C.: Nueve, seis…

{186} P.: Nueve seis…

{187} C.: Dos, nueve…

{188} P.: Dos, nueve…

{189} C.: Seis.

{190} P.: Vale, y vamos a redondear un poquito ¿no?

{191} C.: Cero coma noventa y seis, ¿no? ¿o qué?

{192} P.: Cero coma noventa y seis… *(Escribo, a continuación, "$\approx 0{,}96 = 96\%$")* Vale, cero coma noventa y seis. En el noventa y seis por cien de los casos, ¿no?, en el noventa y seis por cien de los casos una pieza que es buena ¿vale? es calificada como buena. ¿Vale?

{193} B.: Yo he hecho lo mismo pero con las que no son correctas…

{194} P.: Claro, porque estamos viendo eh… la probabilidad de que acierte, si es buena. Pero esa probabilidad, ¿será la misma, si la pieza es mala?

{195} B.: No, es otra.

{196} P.: No tiene por qué… A lo mejor el test funciona mejor para detectar piezas…

{197} H. *(interrumpiendo a la profesora):* Defectuosas que correctas…

{198} P.: Que para piezas correctas. O al revés. ¿Lo veis o no? ¿Vale? ¿Qué otra probabilidad…?

{199} H.: De que el test la coja como correc… como… incorrecta, siendo correcta.

{200} B.: Siendo incorrecta.

{201} P. *(a H.)*: Entonces, ¿entonces acierta el test?

{202} H. *(rectifica)*: Siendo defectuosa.

{203} P.: Vale, ahora vamos a mirar, vamos a coger una pieza de entre las defectuosas, una al azar, y vamos a ver cuál es la probabilidad de que el test…

{204} A.: La califique como defectuosa.

{205} P.: El test la califique como defectuosa, que es la probabilidad de que acierte, en ese caso ¿no?

{206} P. *(a B., que parece distraída):* B., ¿nos sigues o no?

{207} B.: Sí, sí.

{208} P.: ¿Sí? Vale.

(Escribo en la pizarra " $P(-\mid \overline{C}) =$ *")*

{209} P.: Vale. Y esa probabilidad, H., ... H.

{210} H.: Del uno partido seis…

{211} P.: Muy bien. Tú coges la pieza entre las piezas defectuosas que ¿cuántas hay…?

{212} H.: Seis.

{213} P.: Seis, vale, ¿cuántas… cuántas… cuántas ha calificado el test de defectuosas?

{214} H.: Cinco.

{215} P.: Cinco. Entonces, ahora… luego da cinco…

{216} H.: De seis.

{217} P.: Vale. ¿Y eso qué nos da?

{218} A.: Eh… cero coma ochenta y tres. El tres periodo.

{219} P.: Vale, y lo vamos a aproximar…

{220} A.: A cero coma ochenta y tres.

{221} P.: A cero coma ochenta y tres… Vale que es… el ochenta y tres por cien. *(Escribo, a continuación de lo anterior, "* $= 0'8\widehat{3} \approx$ *0'83=83%")* Luego funciona mejor… ¿para qué? ¿cuándo funciona mejor?

{222} A.: Para piezas… Para piezas correctas…

{223} P.: Luego, para piezas correctas funciona mejor que para piezas defectuosas… ¿verdad?

{224} T.: Pero… ¿sólo hay esas dos formas, de hacerlo?

{225} P.: ¿Cómo?

{226} T.: ¿Sólo hay esas dos formas, de hacerlo?

{227} P.: No. Esto…esto es una medida que nosotros vamos a utilizar para orientarnos ¿no? para, para… para ver lo que pasa, para… nosotros tenemos que medir de alguna manera nuestra confianza en el test ¿no? No podemos basar nuestra decisión sobre intuiciones. Tenemos que basarnos en, en datos ¿no? Y nosotros, lo que hemos averiguado, con esto, es la probabilidad de que acierte el test ¿vale?

(Hay un silencio)

{228} P.: ¿Son las únicas probabilidades que podemos calcular para ver si es bueno el test?

{229} Varios: No, no.

{230} P.: ¿Se os ocurre otra cosa?

{231} C.: Podemos calcular cuándo se equivoca.

{232} T.: Yo lo he puesto del total.

{233} C.: En vez de cuándo se…cuándo acierta, cuándo se equivoca.

{234} P.: También podemos calcular cuándo se equivoca…

{235} T.: Yo he puesto cincuenta y tres partido sesenta.

{236} P.: Vamos a hacer una cosa… Vamos a ir poniendo nombres a estas, a estas probabilidades. ¿Vale? Porque… estas probabilidades, en el, en el área del control de calidad tienen un nombre ¿vale? Realmente…mmm…son conceptos que se utilizan. A estos se les llama índices de validez. ¿Lo veis lógico, el nombre?

{237} Varios: Sí.

{238} P.: Índices de validez; cuándo es válido el test, ¿no? El índice nos indica, vale… vale, la validez del test ¿vale? *(escribo en la pizarra, junto a las probabilidades halladas, "índices de validez")* Índices…de…va-li-dez.

{239}P.: Y ahora C. proponía calcular las probabilidades de que se equivoque. Hemos calculado las probabilidades de que acierte, ahora calcularemos las probabilidades de que se equivoque.

(Silencio)

{240} P.: A ver, ¿cuál es la probabilidad de que se equivoque?

{241} Varios: Pues…

{242} P.: ¿Cuándo se equivoca?

{243} A.: Cuando te dice que es defectuosa, siendo correcta o cuando te dice que es correcta, siendo defectuosa.

{244} P.: Muy bien. Luego… ¿qué probabilidades calcularemos?

{245} A.: Pues…dos sobre cincuenta y… o sea “pe de” siendo…

{246} P.: Primero decidme…

{247} A.: Siendo… o sea, calificándola como defectuosa…

{248} P.: Probabilidad de que la califique de defectuosa cuando…

{249} B. y A.: cuando es correcta.

{250} P.: Cuando es correcta. Vale. Y es…

{251} A.: Cero coma cero, tres, siete, cero …

{252} P.: Sí, no, pero decidme…

{253} Varios: Dos partido cincuenta y cuatro

{254} P.: Vale. Es correcta y la califica… De entre las correctas, que son cincuenta y cuatro, ¿vale?, califica a dos de defectuosas. Dos partido cincuenta y cuatro.

(Escribo en la pizarra, P(-|C) = 2/54)

{255} C.: Cero coma cero treinta y siete…

{256} P.: Cero coma cero…

{257} C.: Cuatro.

(Escribo las cifras que me dictan)

{258} P.: …treinta y siete, ¿cuatro?

{259} B.: No, treinta y siete…

{260} C.: Y luego es cero treinta y siete periodo… ¿sabes? el cero treinta y siete es periodo.

{261} P.: ¿Sí? Cero coma cero treinta y siete… ¿El siete es periodo?

{262} C.: No, todo, todo… los tres decimales.

{263} P.: Ah, vale. Cero treinta y siete, cero treinta y siete… Muy bien. Lo redondeamos, si queréis…

{264} B.: Cero, cero, treinta…

{265} H.: Cero coma cero treinta y siete.

{266} P.: Cero coma cero treinta y siete ¿vale? Que es aproximadamente…

{267} H.: Tres coma siete por cien.

{268} P.: Es…Tres con siete por cien

{269}B.: Vale, pues yo he puesto cuatro por cien.

{270}P.: O el cuatro por cien, si lo redondeamos todavía más… ¿Veis alguna relación con…?

{271} C.: Sí, es lo que le queda al noventa y seis, más o menos…

{272} P.: Es lo que le queda al noventa y seis… ¿por qué…saldrá lo que le queda al noventa y seis?

{273} C.: Porque… tienes… el… de entre las correctas, las probabilidades de que lo haga bien y la que haga mal, entonces, si no lo hace bien, lo hace mal. Entonces, si sacas lo que lo hace bien, lo restas y te queda lo que lo hace mal.

{274} L.: Al cien por cien, le restas…

{275} C.: Claro.

{276} P.: Por ahí detrás… ¿estáis en lo que dice C.?

{277} Varios: Sí, sí.

{278} P.: Fijaros, en estos dos casos, tanto en éste como en éste *(señalo las probabilidades correspondientes en la pizarra)* estamos mirando entre las piezas correctas, ¿verdad?

{279} C.: Claro, le restas y da, da lo de arriba.

{280} P.: Y da lo de arriba, ¿verdad? O sea…eh… como miramos entre las piezas correctas, vale, las que no…las que el test no diga positivo, dirá…

{281} C.: Negativo.

{282} P.: Dirá negativo ¿no? Luego… estas probabilidades, estas probabilidades ¿cuánto suman estas probabilidades?

{283} B.: Cien.

{284} A.: Cien partido cien.

{285} P.: El cien por cien, si las expresamos en porcentajes…

{286} C.: Uno.

{287} P.: Y si las expresamos como número decimal, comprendido entre cero y uno, suman uno.

{288} C.: Entonces no hace falta, por ejemplo, los que… si tienes cuando el test es correcto no hace falta sacar cuando se equivoca, porque es restar y ya está. No hace falta hacer todo ese…

{289} P.: Muy bien, podemos restar. Claro, podemos restar. Entonces, eh… ¿cuál será la probabilidad de que el test diga que es correcta, siendo defectuosa? *(Escribo en la pizarra “$P(+|\overline{C})=$”)*

{290} C.: Cero coma uno, seis periodo…

{291} H.: Uno partido cinco…

{292} P.: ¿Uno partido entre cinco? No, uno partido seis, ¿verdad? Uno partido seis *(escribo en la pizarra "1/6", a continuación de* $P(+|\overline{C})=$*)* y… ¿qué decías, C.?

{293} C..: Cero coma uno, seis periodo…

{294} P.: Seis perio…Muy bien, vale, porque así tú lo que has hecho es restar… ¿verdad? De todas formas, esto lo podemos hacer también con la calculadora. Ha empezado de esta forma, cero coma uno, seis periodo…

{295} P: ¿Habéis entendido lo que dice C.? Ella le ha restado a uno, le ha restado cero coma ocho, tres periodo *(breve pausa)* porque son complementarias, se dice que son probabilidades complementarias… ¿sí? Muy bien, ¿cómo se le llamará a esto? Si estos son índices de validez *(señalo las probabilidades correspondientes en la pizarra)*, estos serán…

{296} Varios *(a coro)*: De invalidez.

{297} P.: Invalidez…

{298} C.: Es que suena…

{299} A.: ¿No validez, no válidos…?

{300} P.: Bueno…

{301} H.: ¡De fallo!

{302} P.: De fallo…Un sinónimo.

{303} A.: ¡De error!

{304} P.: De error.

{305} C.: Ah…

{306} P.: Índices de error. *(Escribo en la pizarra, junto a las probabilidades correspondientes, "Índices de error")*

{307} A.: Pues aún falla… ¿eh?

{308} P.: Aún falla, aún.

{309} C.: Sí… Ya es, ¿eh?

{310} P.: No es un test muy allá.

{311} L.: Yo no lo contrataría.

{312} P.: Tú no comprarías este test…

{313} C.: Es que, un dieciséis por cien, es ¿eh?

{314} P.: Sí, la verdad es que… falla mucho, o sea, hay muchas posibilidades… o sea, ¿qué, qué riesgo asumimos, sobre todo, con este test?

{315} C.: Vender piezas malas.

{316} A.: Que cuando, que cuando… está mirando piezas defectuosas, te las ponga como bien.

{317} C.: Claro.

{318} P.: Te las ponga como bien… o sea, vender piezas malas. En el otro caso, es más… es más fiable ¿no? O sea…

{319} C.: Sí.

{320} P: En el caso de correctas, o sea, no nos tirará muchas correctas a la basura. Eso también es un riesgo que el empresario tiene que mirar, porque si las correctas las va calificando de defectuosas, pues, vaya la gracia ¿no? Perdemos dinero, ahí, en cada pieza que tira.

{321} C.: Claro.

{322} P: Vale, eso lo tiene más o menos bien, pero…donde parece que falle es en el análisis de las defectuosas.

{323} C.: Es que venderías casi… ¿sabes?, venderías un montón de piezas malas. Porque… un dieciséis por cien es bastante.

{324} P.: ¿Venderíamos un dieciséis por cien de piezas malas?

{325} C.: No, del total, no.

{326} P.: Del total de piezas que vendemos, no. ¿Un dieciséis por cien de qué?

{327} C.: De todas las malas.

{328} P.: De todas las malas. Un dieciséis por cien, las venderíamos. ¿Vale? De las malas…

{329} H.: Del total sería…

{330}P.: …las otras las retiraría.

{331}H.: sobre sesenta… no sobre seis.

{332} P.: Claro, del total no. Porque… si fabricamos piezas, ¿será muy probable que tengamos piezas malas o poco probable?

{333} P.: Lo pensaremos después. Vamos a seguir con esto, vamos a seguir con esto. Porque… hemos calculado los índices de validez y los índices de error, ¿vale? Que es… nosotros miramos las buenas, a ver, a ver si acierta o se equivoca, ¿no?. Miramos las malas, a ver si acierta o se equivoca. Ahora imaginaros que cogemos una pieza al azar. No sabemos si es buena o mala ¿vale? Y la pasamos por el test y obtenemos un resultado. ¿Nos fiamos de ese resultado?

{334} Varios: Nooo…

{335} P.: Pero, vamos a verlo con números… ¿Nos fiamos de ese resultado? A ver, ¿esto lo habéis copiado todo? ¿Lo tenéis todos ya en la libreta? ¿M., tú también?

{336} M.: Sí.

{337} P.: ¿Nos sigues, M.? *(M. asiente)* ¿Sí? Vale. ¿Puedo borrar, entonces?

(Los estudiantes asienten y yo borro la pizarra)

{338} P.: Vale. Vamos a ver… Hasta ahora, las hemos clasificado en correctas e incorrectas y nosotros sabíamos de qué montón cogíamos, ¿vale? Ahora imaginaros que las tenemos todas mezcladas y no sabemos cuáles son correctas y cuáles son defectuosas. No tenemos manera de saberlo. Cogemos una, le pasamos el test, y da positivo. Da positivo significa que nos dice que está bien, ¿nos fiamos?

{339} A.: Sí, yo creo sí…

{340} C.: Pues miramos las posibilidades que tiene de estar bien y de estar mal y ya está ¿no?

{341} P.: Muy bien… las posibilidades que tiene de estar bien y de estar mal siendo que nosotros sabemos que el test ha dicho… que está bien ¿me seguís o no? ¿o os habéis perdido? ¿Entendéis lo que vamos a hacer ahora? ¿Veis la diferencia con lo de antes? No, ¿verdad, H?

{342} Varios: Sí. Sí.

{343} H.: Vale, sí.

{344} P.: No. Vale, sí, no. ¿Estás o no estás?

{345} H.: Sí, sí.

{346} P: Vale, antes nosotros cogíamos una correcta…

{347} H.: Sabiendo que era correcta…

{348} P.: Sabiendo que era correcta y decíamos, ¿cuál es la probabilidad de que el test me dé positivo o me dé negativo? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte? ¿Vale? Bien, ahora, no. Ahora no sabemos si es correcta o defectuosa la que cogemos, pero le pasamos el test y el test dice que es correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que haya acertado? ¿Nos fiamos? ¿Qué probabilidad es esa? La probabilidad ¿de qué?

{349} H.: De que la haya calificado como correcta, pe más, …

{350} P.: De que sea…

{351} H.: Correcta.

{352} P.: De que sea correcta, siendo que el test ha dicho…

{353} C.: Que es correcta.

{354} P.: …que es correcta. ¿Lo veis?

{355} C.: Sí.

{356} P.: ¿Vale? ¿Y esa probabilidad? Bueno, pensadla, pensadla.

{357} B.: ¿Cincuenta y dos de sesenta?

{358} A.: Cincuenta y dos de cincuenta y tres.

{359} P.: Cincuenta y dos de cincuenta y tres… Vale. Nosotros miramos las que, de entre las que han sido calificadas como positivas,

{360} C.: ¡Ah! Vale.

{361} P.: …como correctas, cuántas hay que realmente…

{362} C.: Vale.

{363} P.: … son correctas.

(Escribo en al pizarra "P(C|+) = 52/53")

{364} H.: Cero coma noventa y ocho.

{365} P.: ¿Da cero coma noventa y ocho? *(Escribo en la pizarra = 0'98 justo después de lo anterior)*

{366} B.: Sí, uno, uno.

{367} P.: Noventa y ocho, uno, uno. Lo aproximamos al noventa y ocho, ¿no?. Esto es el noventa y ocho por cien…

{368} H.: Aquí no tiene tanto error.

{369} P.: Claro, mirado así… mirado así, si, si el test nos dice que la pieza es correcta, nos podemos fiar bastante ¿no? ¿o qué? ¿o qué os parece el noventa y ocho por cien?

{370} H.: Fiable.

{371} L.: Hombre, yo ahí sí que me empezaría a fiar ya.

{372} P.: Sí, ¿no? Vale. ¿Cuál es la otra probabilidad?

{373} C.: De que sea incorrecta…

{374} A. *(a la vez que C.)*: O sea, de que sabiendo que la pieza es correcta…

{375} P.: Sabiendo que ¿qué? Nosotros no sabemos si es correcta o incorrecta ¿eh?

{376} C.: No, no. Que sea incorrecta…

{377} P.: Él dice negativo…

{378} C.: Y la C negada. Que sea incorrecta…

{379} P.: Que sea incorrecta, ¿vale? Estamos viendo la probabilidad de que acierte. De que haya…de que acierte, no, de que haya acertado, ¿no? Ya le hemos pasado el test.

{380} A.: Cinco de siete…

{381} C.: Sí.

{382} P.: Cinco…

{383} A.: Partido siete.

{384} P.: Cinco de siete. *(Escribo en la pizarra "$P(\overline{C} \mid -) = 5/7$")*

{385} A.: Que son…cero coma setecientos catorce…

{386} P.: Cero coma setecientos catorce *(escribo en la pizarra, a continuación de lo anterior, 0,714)* lo redondeamos… Bueno, esto puntos suspensivos ¿no? *(añado puntos suspensivos al número)* Detrás del cuatro, ¿qué hay?

{387} A.: Un tres.

{388} P.: ¿Un tres?

{389} L.: Un dos

{390} A.: Bueno un dos, que se…

{391} P.: ¿Un dos? Vale, pues entonces queda cero coma… Vale, lo redondeamos a dos cifras y ya está. Setenta y uno. Cero coma setenta y uno, que es el setenta y uno por cien.

{392} C.: Ahí, menos ya…¿eh?

{393} P.: Uy… si nos dice que está mal…

{394} A.: Yo, con un setenta y uno por cien no me fío.

{395} L.: Yo tampoco.

{396} P.: Ahí falla un poco el test, ¿no? Si nos dice que está mal, no nos fiamos… Si nos dice que está bien…bueno, pues sí, me lo creo que está bien.

{397} C.: Pues si dice que está mal, lo revisas tú manualmente…

{398} P.: Sí…exactamente. Si dice que está mal… mmm… puede ser que esté mal pero, ojo, que no…, no está muy fino el test ahí. Vale, esto se llama "éxitos producidos por el test" ¿vale? Estos son los éxitos producidos por el test. A ver dónde lo escribo… *(escribo en la pizarra, junto a las probabilidades correspondientes "éxitos producidos por el test")*

{399} L.: ¿Éxitos producidos…?

{400} P.: Éxito producido por el test. El test ha tenido éxito, ¿no? Estamos calculando la probabilidad de que tenga éxito, cuando ha dicho que la pieza es correcta y probabilidad de que tenga éxito cuando ha dicho que la pieza es incorrecta. ¿Lo veis o no? ¿Os parece lógico el nombre…?

{401} L.: Sí.

{402} A.: Sí.

{403} P.: …que se les da a estas probabilidades?

{404} P.: Pero aún podemos calcular… más, más datos. Más datos que nos den información sobre lo bueno o lo malo que es el test ¿no?

{405} C.: Fracasos.

{406} A.: Eso, fracasos.

{407} P.: Exacto. Los … errores de diagnóstico ¿no?. Se llama errores de diagnóstico. ¿Cuáles serían? ¿Qué probabilidades serían?

{408} C.: De que sea correcta… y la haya calificado como incorrecta.

{409} P.: Vale, de que sea, de que la haya calificado de incorrecta pero la pieza sea correcta. Que habiéndola calificado de incorrecta, la pieza sea correcta. Eso es un error de diagnóstico ¿no?

{410 } C.: Es… mmm… uno partido de cincuenta y tres, ¿puede ser?

{411} A.: Dos sobre siete.

{412} C.: Ah, sí, vale… que me he ido…

{413} P.: Vale, dos sobre siete.

(Escribo P(C|-) = 2/7)

{414} C.: …me he ido al otro.

{415} A.: Cero coma dos, ocho, cinco, siete…

{416} P.: Cero coma dos, ocho, cinco, siete…

(Escribo los decimales que me indican)

{417} A.: uno…

{418} P.: uno…

{419} A.: cuatro…

{420} P.: cuatro…

{421} A.: ¿Más? ¿Quieres más?

{422} P.: No… como no parabais… *(Risas)* Redondeamos ¿no?

{423} C.: ¿Cero coma veintinueve?

{424} P.: Cero coma veintinueve, que es…

{425} A.: Veintinueve por cien…

{426} P.: El veintinueve por cien.

{427} C.: Uuuuy…

{428} P.: Tampoco es una cosa muy…

{429} C.: Que es lo que le sobra a lo otro.

{430} L.: Yo no me fío de este test.

{431} P. (A C.): Claro, fijaros, estas dos *(señalo en la pizarra* $P(C|-)$ *y* $P(\overline{C}|-)$ *)* son complementarias…

{432} C.: Claro.

{433} P.: Porque estamos mirando todo el rato, entre las que el test califica de… defectuosas.

{434} C.: Aparte, cinco sépt… cinco séptimos más dos séptimos, siete séptimos.

{435} P.: Siete séptimos, uno, son complementarias ¿verdad?

{436} C.: Claro.

{437} P.: Vale, si antes funcionaba mal para… o sea, si entre las defectuosas, no nos convencía… a ver, entre las que calificaba como defectuosas no nos convencía las que realmente eran defectuosas. Entre las defectuosas, las que son correctas, tampoco va a ser un dato muy favorable al test… ¿no? Porque son complementarias. ¿Lo veis?

{438} C.: Sí.

{439} P.: ¿Y cuál es la otra que nos falta para terminar ya de evaluar el test?

{440} A.: Pues que… las haya calificado como correctas…

{441} P.: Las haya calificado como correctas… O sea, hallar la probabilidad de que, habiéndola calificado de correcta, sea… sea ¿cómo?

{442} H y A.: Incorrecta.

{443} P.: Incorrecta, vale. Porque esto son los errores… y… ¿qué tenemos?

{444} C.: Uno partido cincuenta y tres.

{445} P.: Uno partido cincuenta y tres. *(Escribo en la pizarra* $P(\overline{C}\,|+) = 1/53$*)*

{446} C.: Cero coma cero, dieciocho… ¡no! Cero coma cero, dieciocho…

{447} P.: Cero coma cero, dieciocho. *(Escribo, a continuación, 0,018)*

{448} C.: Ocho.

{449} P.: Ocho.

{450} C.: Seis, siete.

{451} P.: Seis, siete.

{452} C.: Cero coma cero diecinueve.

{453} P.: Cero coma cero diecinueve. Uno coma nueve por cien.

{454} C.: Va mejor cuando es…

{455} P.: Va mejor para las piezas… va mejor…

{456} A.: Para las piezas positivas. Para piezas correctas, vamos.

{457} P.: Sí, porque el positivo funciona mejor que el negativo ¿verdad?

{458} A.: Pero es que a lo mejor, es también porque hay más piezas que sean correctas que incorrectas

{459} P.: Aquí… entran en juego muchas cosas…

{460} C.: ¿Cómo se llamaba eso, P.?

{461} P.: Eh…Esto son errores de diagnóstico

(Escribo errores de diagnóstico junto a las probabilidades correspondientes)

{462} P.: A ver, A., ¿qué, qué habías dicho tú?

{463} A.: No, nada.

{464} P.: No, no, no, que es una reflexión que me parece muy interesante.

{465} A.: No, si es que está mal… Porque había dicho que es más probable que, que dijera que la pieza correcta estaba bien, porque había más piezas correctas, pero no tiene por qué.

{466} P.: Lo que, lo que sí que es verdad es que hay más piezas correctas que defectuosas, afortunadamente para el señor que fabrica estas piezas ¿no? Entonces digamos que el test ha sido probado más veces en el caso de piezas correctas que en el caso de piezas defectuosas, eso sí que es verdad.

{467} B.: Pues si tú las piezas defectuosas las vas pasando cuando tienes cincuenta y dos por el positivo, pues te dará piezas positivas. A ver, si te dice que de seis hay una…, hay una, una que la marca como bien, si tú agrupas muchas, llegará un momento en el que tendrás también buenas.

{468} L.: Claro.

{469} B.: Te las marcará como mal. No sé si me entiendes. A ver, el test, de seis malas, te dice que una está bien, si tú juntas muchas de esas unas que están bien y las vuelves a pasar por el test, te dirá que están mal y te saldrá ese dos.

{470} C.: Ah, vale, ya lo entiendo. Dice que las que califica mal, volver a pasarlas por el test.

{471} P.: ¡Ah! Entonces, claro…

{472} B.: Que serán… O sea, de las correctas, te saldrán que sean, que no son… que el test las marca como defectuosas porque están, son defectuosas.

{473} P.: Si las volvemos a pasar por el test, puede ser que se vuelva a equivocar o puede ser que acierte…

{474} C.: Claro.

{475} P.: …en ese caso ¿no?. Si nos da una de cada manera, ¿qué hacemos? O sea, si primero nos dice que es defectuosa y luego nos dice que está bien, ¿qué haríais?

{476} L.: No fiarte del test.

{477} P.: Yo le volvería a pasar el test, ¿no?.

{478} C.: Claro, y la que te salga más veces ¿no? Por ejemplo.

{479} P.: ¿Y si da lo mismo, en las dos?

{500} B.: Pues lo haces tres veces que como es…

{501} L.: Pues, pues, es que, es que es correcta porque tiene más posibilidades.

{502} P.: Bueno, vamos a dejar esa cuestión pendiente, que me parece interesantísima, ¿vale? Claro, vosotros habéis pensado: pues si se equivoca tanto, en vez de pasárselo sólo una vez, si lo paso varias veces a ver, ¿no?

{503} A.: Pero digo yo que si se lo pasas una vez y la da por mal ¿por qué la segunda vez también te la da por bien?

{504} B.: No, digo la que te dice que es positiva

{505} P.: A ver, si…como a veces se equivoca…

{506} A.: Ya, pero se equivocará por algo. No se equivocará porque se le va. A lo mejor no está muy claro si…

{507} P.: También es una buena reflexión, tú quieres decir que hay un motivo por el que se equivoque que persiste en la siguiente vez…

{508} A.: Claro. Por muchas veces que lo pases…

{509} P.: …que lo pases, pues esa pieza no la tiene calada él, por lo que sea. Bueno… son reflexiones. Vale. Bueno, la cuestión es que ahora podríamos decir si nos fíamos o no, pero ahora con números ¿verdad? Y con una opinión fundamentada, ¿no? Vosotros, leísteis el enunciado y dijisteis pues sí, o no, cada uno tiene una opinión ¿no? ¿Habéis mantenido esa opinión?

{510} Varios: No.

{511} P.: Primero os fiabais y ahora, no os fiáis mucho ¿verdad? Porque vemos que hay casos, ¿verdad?, en los que falla bastante.

{512} C.: Porque es que… a mí ese setenta y uno por cien se me ha quedado. Eso es muy poco.

{513} P.: Eso es muy poco, ¿verdad? Fijaros, esto también tiene una moraleja, no nos tenemos que fiar de las opiniones a simple vista. Está bien tener intuiciones, pero luego, tenemos que hacer nuestros cálculos para fundamentar nuestra respuesta, ¿vale?. Bueno, eh…, vamos a cambiar de contexto, radicalmente, y así… también vamos a hacer esto un poco más ameno. Ahora nos vamos a pasar a problemas sobre juegos de azar.

ANEXO 10. Valores de las variables dependientes en cada cuestionario, para cada problema y para cada estudiante.

Prestest(F)

Problema 1

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
R.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
L.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
T.	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
V.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
A.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
M.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1

Problema 2a

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
R.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
L.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
T.	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
V.	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
A.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0

Problema 9

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
B.	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
R.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
L.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
V.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
A.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
M.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1

Problema 10x2

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0
B.	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
R.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
L.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
T.	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
V.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
A.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
M.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1

Problema 17

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
R.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
L.	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
T.	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
V.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A.	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
M.	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0

Problema 18a

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
B.	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L.	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
V.	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
H.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A.	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
M.	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1

Prestest(%)

Problema 1

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
L.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
T.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
V.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
A.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1

Problema 2a

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
B.	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
L.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
T.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
A.	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
M.	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0

Problema 9

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
B.	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
L.	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
T.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
V.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
A.	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
M.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1

Problema 10x2

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
B.	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
L.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
V.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
A.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M.	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1

Problema 17

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
B.	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
L.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
V.	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
H.	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
A.	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
M.	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1

Problema 18a

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
B.	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
L.	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
V.	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
H.	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
A.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1

Test(P)

Problema 1

Apdo. a)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
L.	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1

Apdo. b)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
L.	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1

Problema 2a

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
L.	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

Problema 9

Apdo. a)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
L.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

Apdo. b)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
L.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

Problema 10x2

Apdo. a)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
L.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

Apdo. b)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
L.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

Problema 17

Apdo. a)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
L.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

Apdo. b)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
L.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

Problema 18a

Apdo. a)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
L.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

Apdo. b)

Estudiante	Abordado	Organización			Cálculos intermedios		Cálculo final		Resultado			
		L	A	T	S/N	E	S/N	E	S/N	Núm	DC	DI
C.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
B.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
R.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
L.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
T.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
V.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
H.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
A.	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
M.	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

ANEXO 11. Valores que toman las dificultades de los problemas.

Resultados de considerar las tres pruebas conjuntamente

Prueba	Resoluciones	Abordado	Resultado	Número	Descripción	Descripción correcta
Pre-test(F)	54	51	43	17	43	18
Pre-test(%)	48	46	44	14	43	20
Test(P) 1	54	54	52	38	50	40
TOTAL	156	151	139	69	136	78

Prueba	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
Pre-test(F)	5,56	20,37	15,69	66,67	0,00	58,14
Pre-test(%)	4,17	8,33	4,35	69,57	2,27	53,49
Test(P) [1]	0,00	3,70	3,70	29,63	3,85	20,00
CONJUNTO	3,21	10,90	7,95	54,30	2,16	42,65

Dificultades por categorías

Pre-test(F)

Categoría	Resoluciones	Abordado	Resultado	Número	Descripción	Descripción correcta
C_0	9	9	9	4	9	3
C_1	18	18	16	6	16	8
C_2	27	24	18	7	18	7

Categoría	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
C_0	0,00	0,00	0,00	55,56	0,00	66,67
C_1	0,00	11,11	11,11	66,67	0,00	50,00
C_2	11,11	33,33	25,00	70,83	0,00	61,11

Pre-test(%)

Categoría	Resoluciones	Abordado	Resultado	Número	Descripción	Descripción correcta
C_0	8	8	8	5	8	6
C_1	16	16	15	6	14	7
C_2	24	22	21	3	21	7

Categoría	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
C_0	0,00	0,00	0,00	37,50	0,00	25,00
C_1	0,00	6,25	6,25	62,50	6,67	50,00
C_2	8,33	12,50	4,55	86,36	0,00	66,67

Test(P)[1]

Categoría	Resoluciones	Abordado	Resultado	Número	Descripción	Descripción correcta
C_0	9	9	8	6	7	6
C_1	18	18	17	12	17	14
C_2	27	27	27	20	26	20

Categoría	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
C_0	0,00	11,11	11,11	33,33	12,50	14,29
C_1	0,00	5,56	5,56	33,33	0,00	17,65
C_2	0,00	0,00	0,00	25,93	3,70	23,08

Globalmente (considerando las resoluciones de las tres pruebas)

Categoría	Resoluciones	Abordado	Resultado	Número	Descripción	Descripción correcta
C_0	26	26	25	15	24	15
C_1	52	52	48	24	47	29
C_2	78	73	66	30	65	34

[1] Teniendo en cuenta únicamente la pregunta del enunciado que da lugar a un problema isomorfo al análogo en el pre-test.

Categoría	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
C_0	0,00	3,85	3,85	42,31	4,00	37,50
C_1	0,00	7,69	7,69	53,85	2,08	38,30
C_2	6,41	15,38	9,59	58,90	1,52	47,69

<u>Dificultades por contextos</u>

Pre-test(F)

Contexto	Resoluciones	Abordado	Resultado	Número	Descripción	Descripción correcta
Estsocial	18	18	18	9	18	8
Estsalud	18	18	16	5	16	7
Diagsalud	9	8	5	3	5	2
Diagcalidad	9	7	4	0	4	1

Contexto	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
Estsocial	0,00	0,00	0,00	50,00	0,00	55,56
Estsalud	0,00	11,11	11,11	72,22	0,00	56,25
Diagsalud	11,11	44,44	37,50	62,50	0,00	60,00
Diagcalidad	22,22	55,56	42,86	100,00	0,00	75,00

Pre-test(%)

Contexto	Resoluciones	Abordado	Resultado	Número	Descripción	Descripción correcta
Estsocial	16	16	16	9	16	10
Estsalud	16	15	14	3	13	6
Diagsalud	8	8	8	2	8	1
Diagcalidad	8	7	6	0	6	3

Contexto	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
Estsocial	0,00	0,00	0,00	43,75	0,00	37,50
Estsalud	6,25	12,50	6,67	80,00	7,14	53,85
Diagsalud	0,00	0,00	0,00	75,00	0,00	87,50
Diagcalidad	12,50	25,00	14,29	100,00	0,00	50,00

Test(P)[1]

Contexto	Resoluciones	Abordado	Resultado	Número	Descripción	Descripción correcta
Estsocial	18	18	16	12	15	13
Estsalud	18	18	18	12	18	14
Diagsalud	9	9	9	8	8	6
Diagcalidad	9	9	9	6	9	7

Contexto	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
Estsocial	0,00	11,11	11,11	33,33	6,25	13,33
Estsalud	0,00	0,00	0,00	33,33	0,00	22,22
Diagsalud	0,00	0,00	0,00	11,11	11,11	25,00
Diagcalidad	0,00	0,00	0,00	33,33	0,00	22,22

Globalmente (considerando las resoluciones de las tres pruebas)

Contexto	Resoluciones	Abordado	Resultado	Número	Descripción	Descripción correcta
Estsocial	52	52	50	30	49	31
Estsalud	52	51	48	20	47	27
Diagsalud	26	25	22	13	21	9
Diagcalidad	26	23	19	6	19	11

Contexto	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
Estsocial	0,00	3,85	3,85	42,31	2,00	36,73
Estsalud	1,92	7,69	5,88	60,78	2,08	42,55
Diagsalud	3,85	15,38	12,00	48,00	4,55	57,14
Diagcalidad	11,54	26,92	17,39	73,91	0,00	42,11

ANEXO 12. Resoluciones y grafos de las resoluciones del Problema 1 en los pre-test.

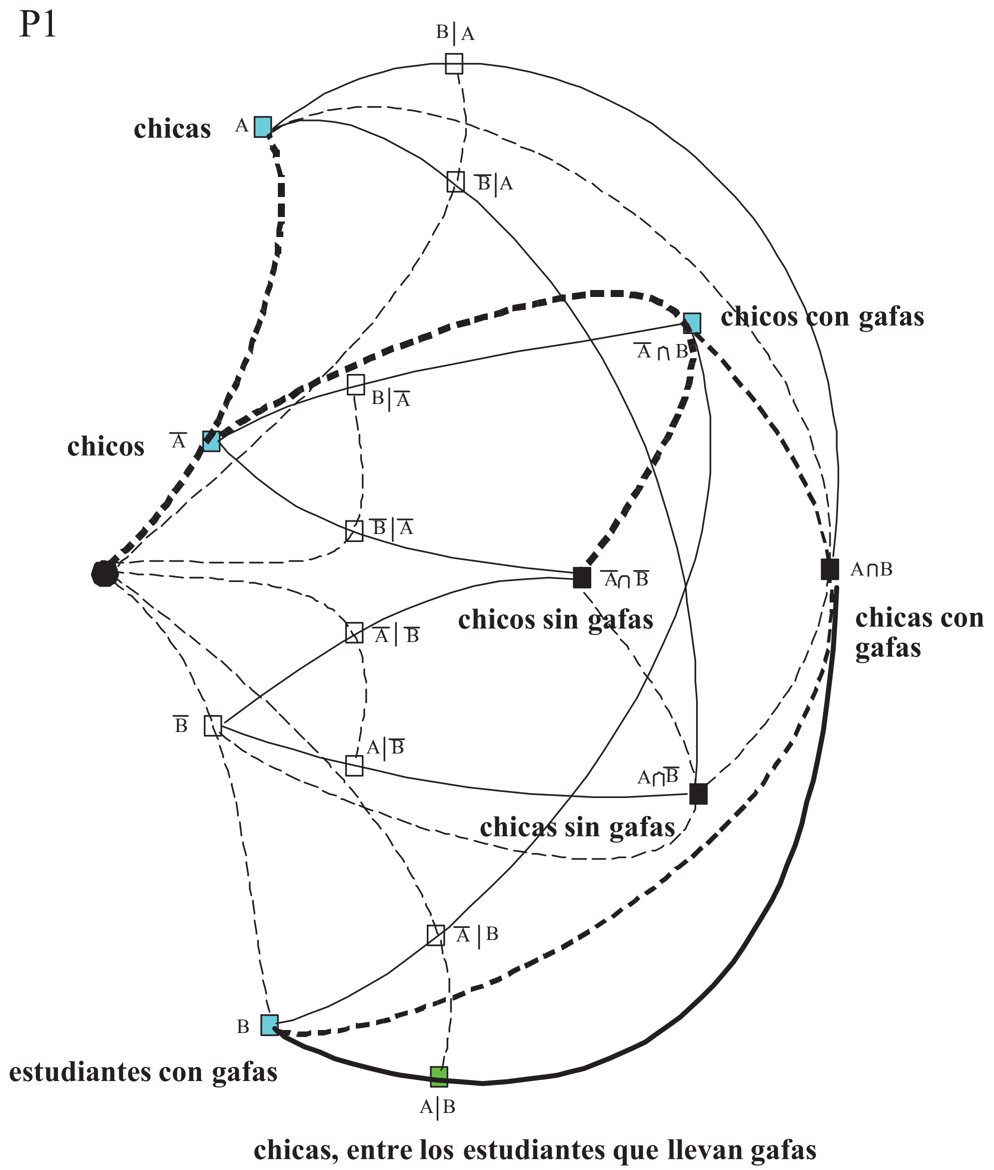
<u>Enunciado del problema en el Pre-test(F):</u>

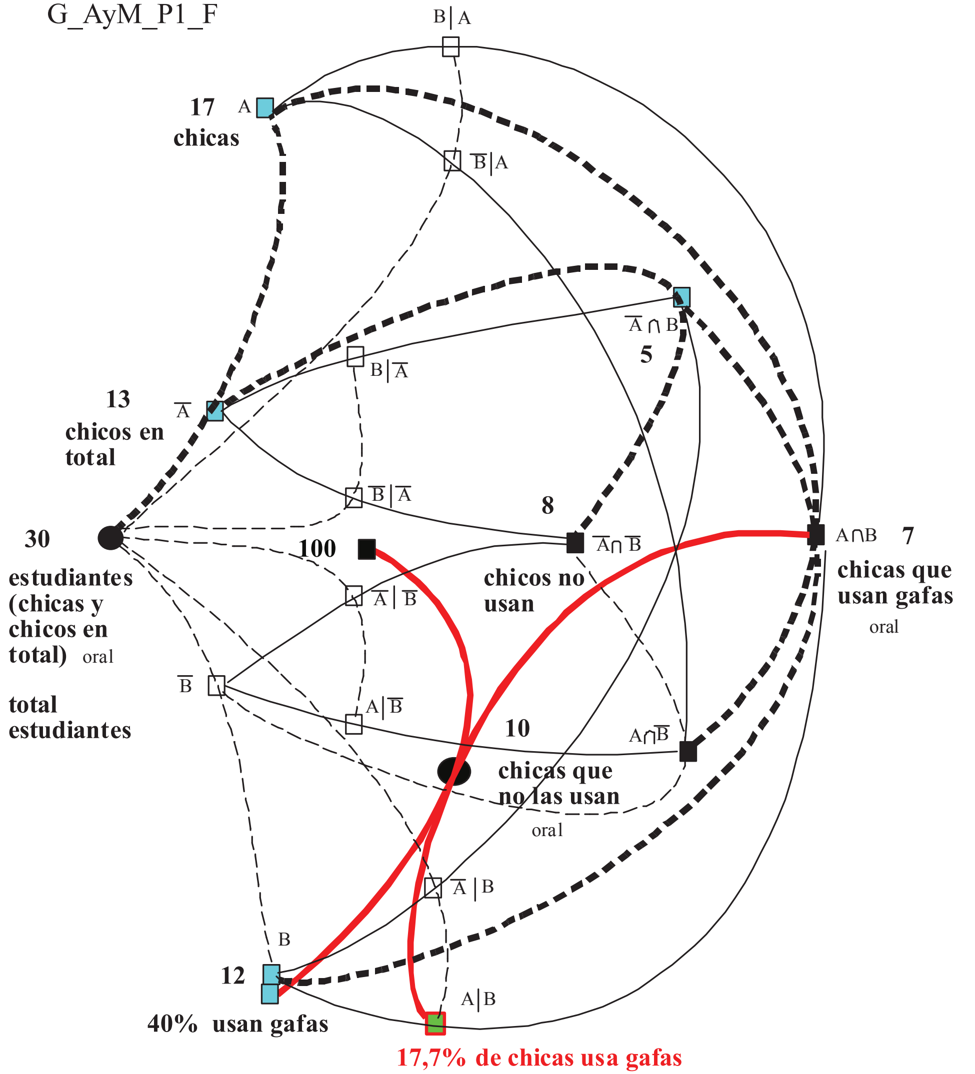
La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

<u>Enunciado del problema en el Pre-test(%):</u>

La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

<u>Modelo de competencia:</u>



AyM_P1_F	G_AyM_P1_F
Trascripción completa de la resolución filmada en el Anexo 18 (p. 587).	

B_P1_F

Problema 1

Belén

30 alumnos — 30-7-10-8 = 5 chicas

7 chicas — 10 chicas — 8 chicas

30 —— 100%
12 —— x

$x = \frac{12 \cdot 100}{30} = \frac{120}{3} = 40\%$

Hago una regla de tres que me diga cuanto % es el número de alumnos con gafas

12 —— 40%
7 —— x

$x = \frac{7 \cdot 40}{12} = \frac{280}{12} \approx 23'33\%$

Hago otra regla de tres para saber cuantas son chicas.

280 | 12
040 | 23
04

30 —— 100%
7 —— x

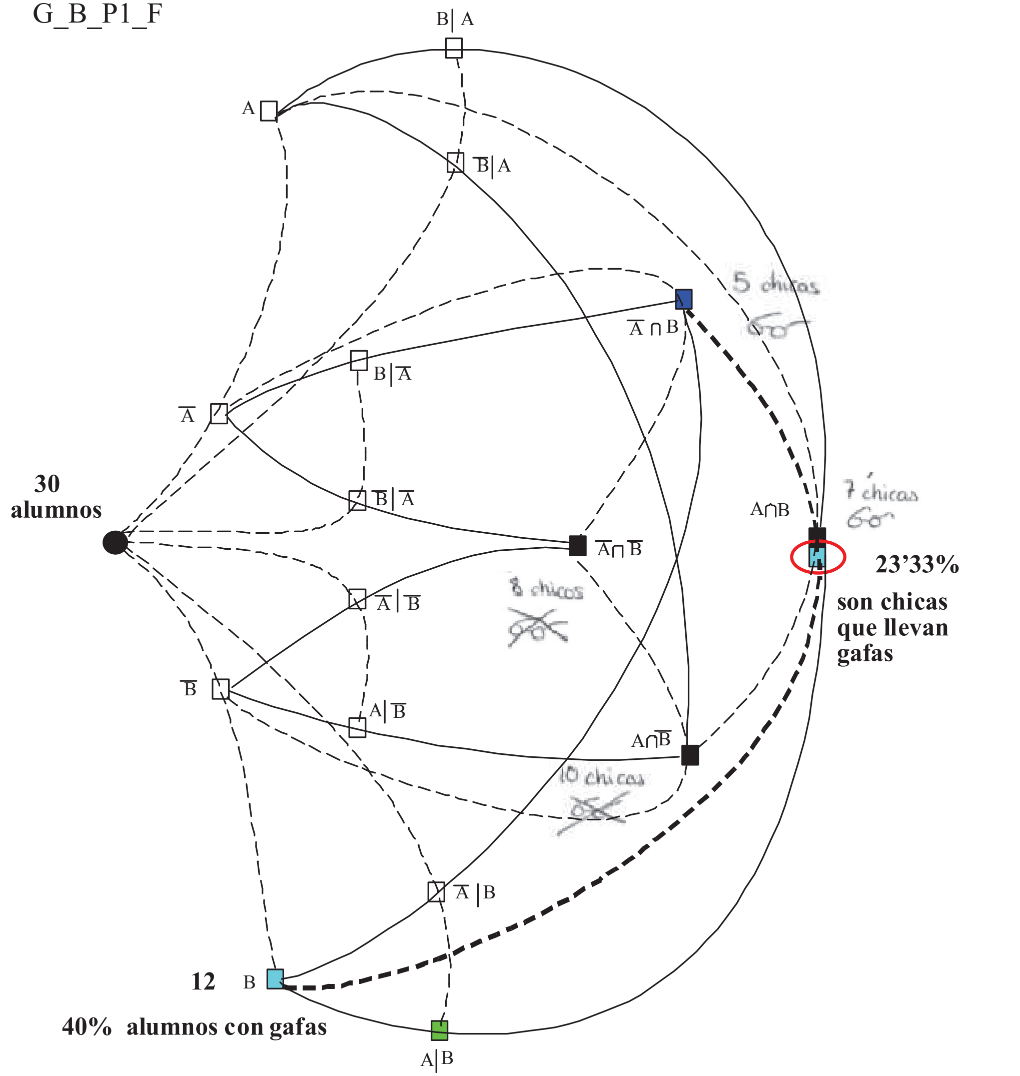
$x = \frac{7 \cdot 100}{30} = \frac{70}{3} \approx 23'33\%$

70 | 3
10 | 23...
1

→ Lo hago para comprobar la solución

La solución es 23'33% ~~de~~ de son chicas que llevan gafas

G_B_P1_F



C_P1_F

Clea

1) 30 alumnos → 100% de la clase

7 + 10 + 8 = 25

30 − 25 = 5 → nº de alumnos que llevan gafas

7 + 5 = 12 nº total de alumnos con gafas.

12 —— 100%

7 —— x

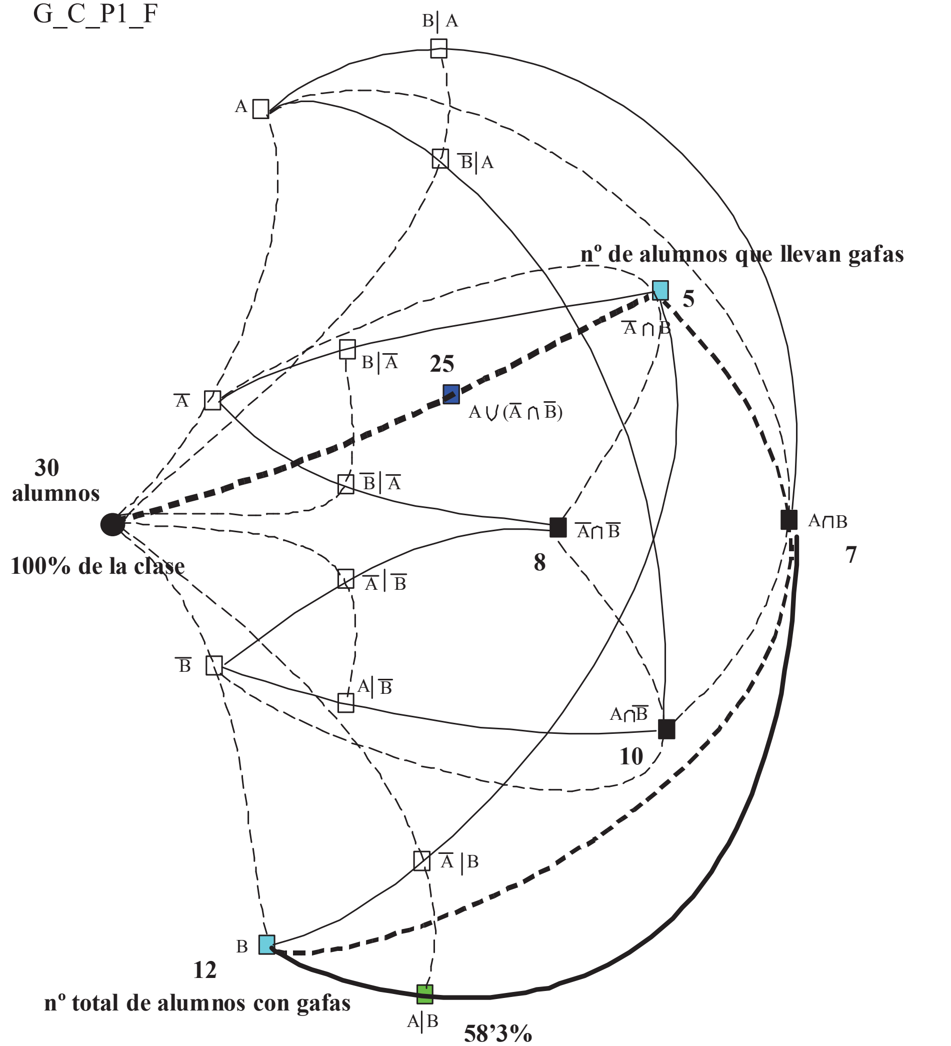
→ saco una regla de tres para averiguar el porcentaje de chicas con gafas, tomando el 100% como el nº total de alumnos con gafas.

$x = \frac{7 \cdot 100}{12} = \frac{700}{12} = 58'\hat{3}\,\%$

$$\begin{array}{l|l} 700 & 12 \\ \hline 100 & 58'3\ldots \\ 040 & \\ 04 & \end{array}$$

R: las chicas que llevan gafas son un $58'\hat{3}$ % del total de alumnos que las llevan.

G_C_P1_F



Las chicas que llevan gafas son un 58’3% del total de alumnos que las llevan.

H_P1_F

PROBLEMA 1

Total = 30 estudiantes chicos y chicas

7 = Chicas con gafas

10 = Chicas sin gafas

8 = Chicos sin gafas

El total de los que usan gafas; ¿Qué porcentaje son la chicas?

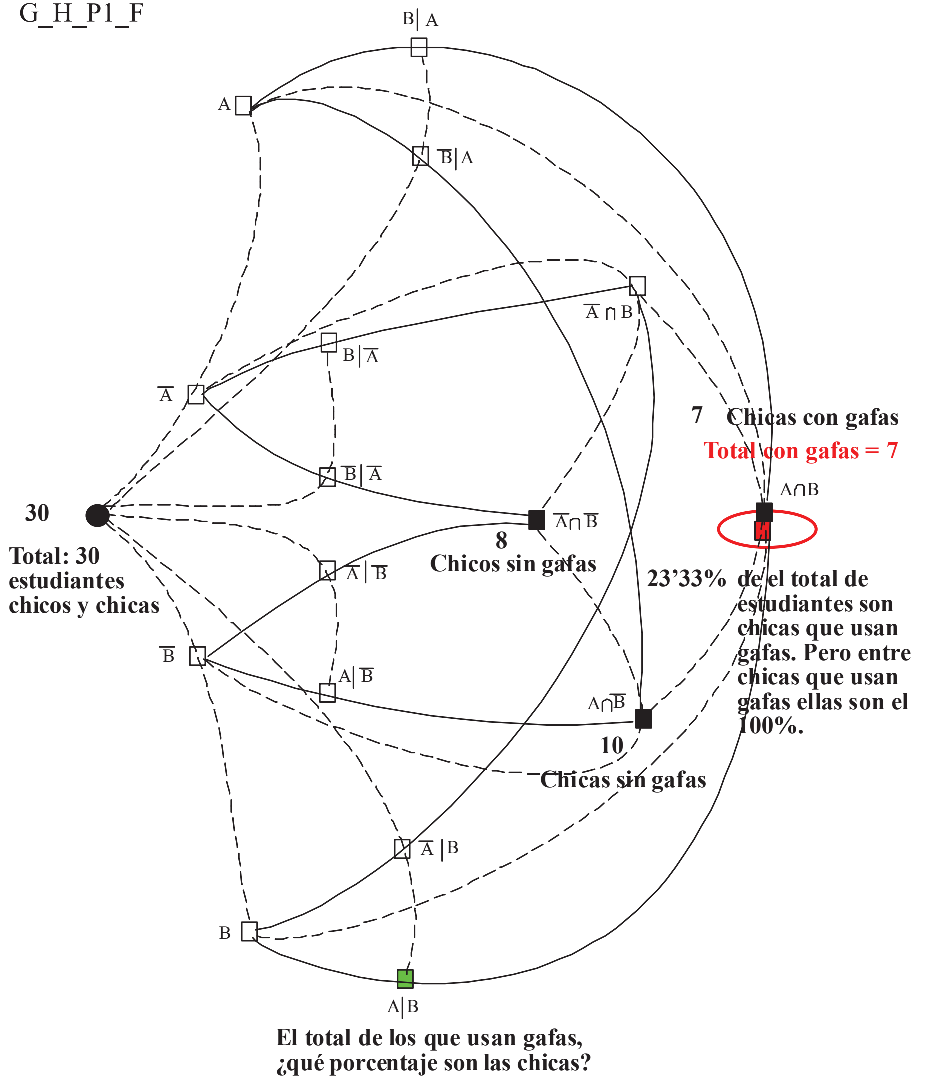
Total con gafas = 7

Alumnos		Porcentaje
30	—	100 %
7	—	x

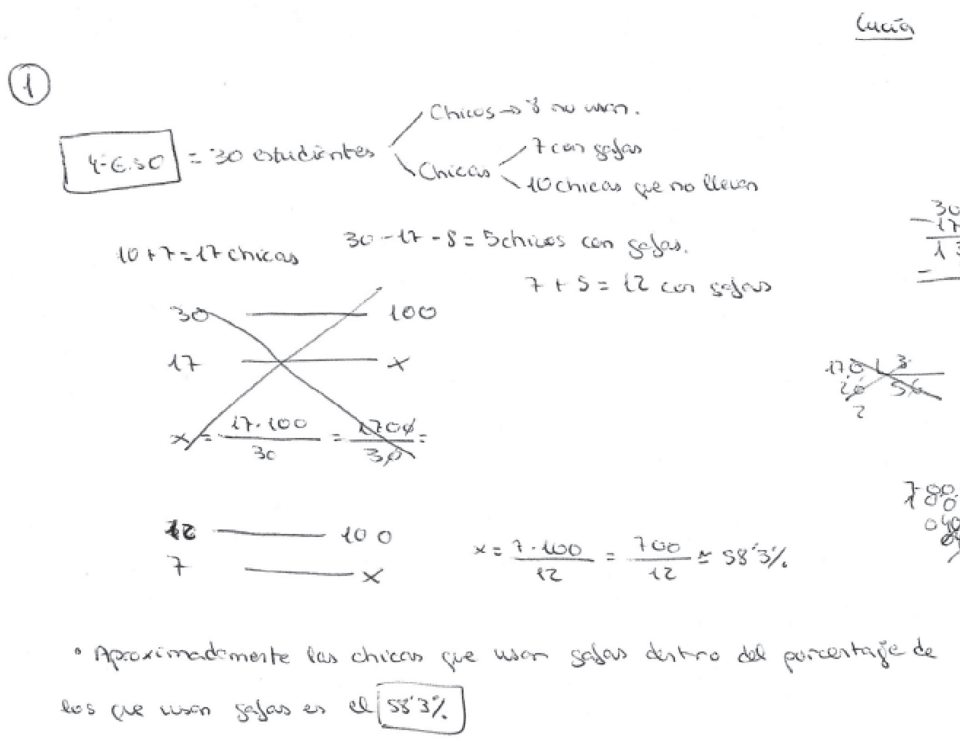
$$x = \frac{7 \cdot 100}{30} = \frac{70\cancel{0}}{3\cancel{0}} = \frac{70}{3} = 23'3\%$$

El 23'3% de el total de estudiantes son chicas que usan gafas. Pero entre chicas que usan gafas ellas son el 100%.

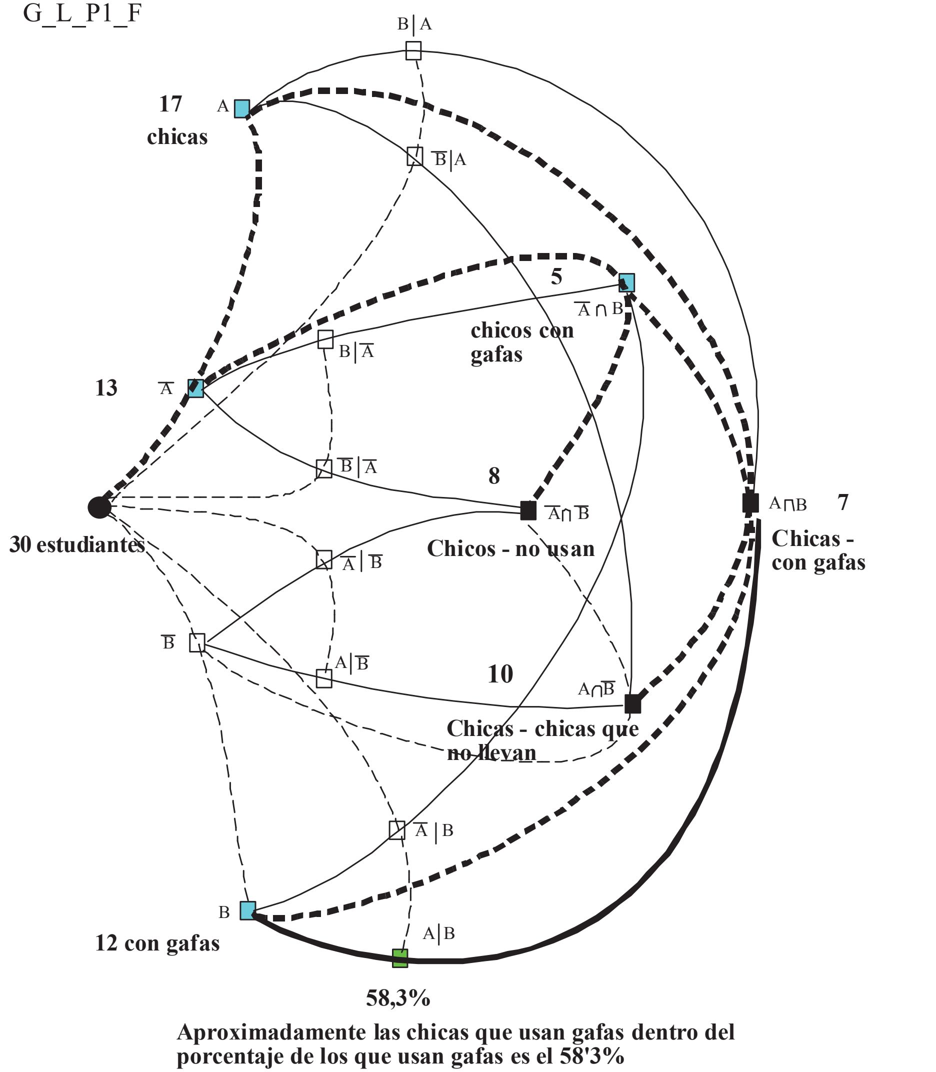
G_H_P1_F



L_P1_F


Lucía
1
4º E.S.O = 30 estudiantes
Chicos → 8 no usan.
Chicas
7 con gafas
10 chicas que no llevan
10 + 7 = 17 chicas
30 − 17 − 8 = 5 chicos con gafas.
7 + 5 = 12 con gafas
30 — 100
17 — x
x = 17 · 100 / 30 = 1700 / 30 =
12 — 100
7 — x
x = 7 · 100 / 12 = 700 / 12 ≃ 58'3%
• Aproximadamente las chicas que usan gafas dentro del porcentaje de los que usan gafas es el 58'3%

G_L_P1_F


B|A
17
chicas
A
B̄|A
5
Ā ∩ B
chicos con gafas
B|Ā
13
Ā
B̄|Ā
8
Ā∩B̄
30 estudiantes
Chicos - no usan
Ā|B̄
A∩B
7
Chicas - con gafas
B̄
A|B̄
10
A∩B̄
Chicas - chicas que no llevan
Ā|B
B
12 con gafas
A|B
58,3%
Aproximadamente las chicas que usan gafas dentro del porcentaje de los que usan gafas es el 58'3%

R_P1_F

Ramón

1. Total = 30 alumnos
chicas con gafas = 7
chicos con gafas = 30 − 7 − 10 − 8 = 5

Porcentaje

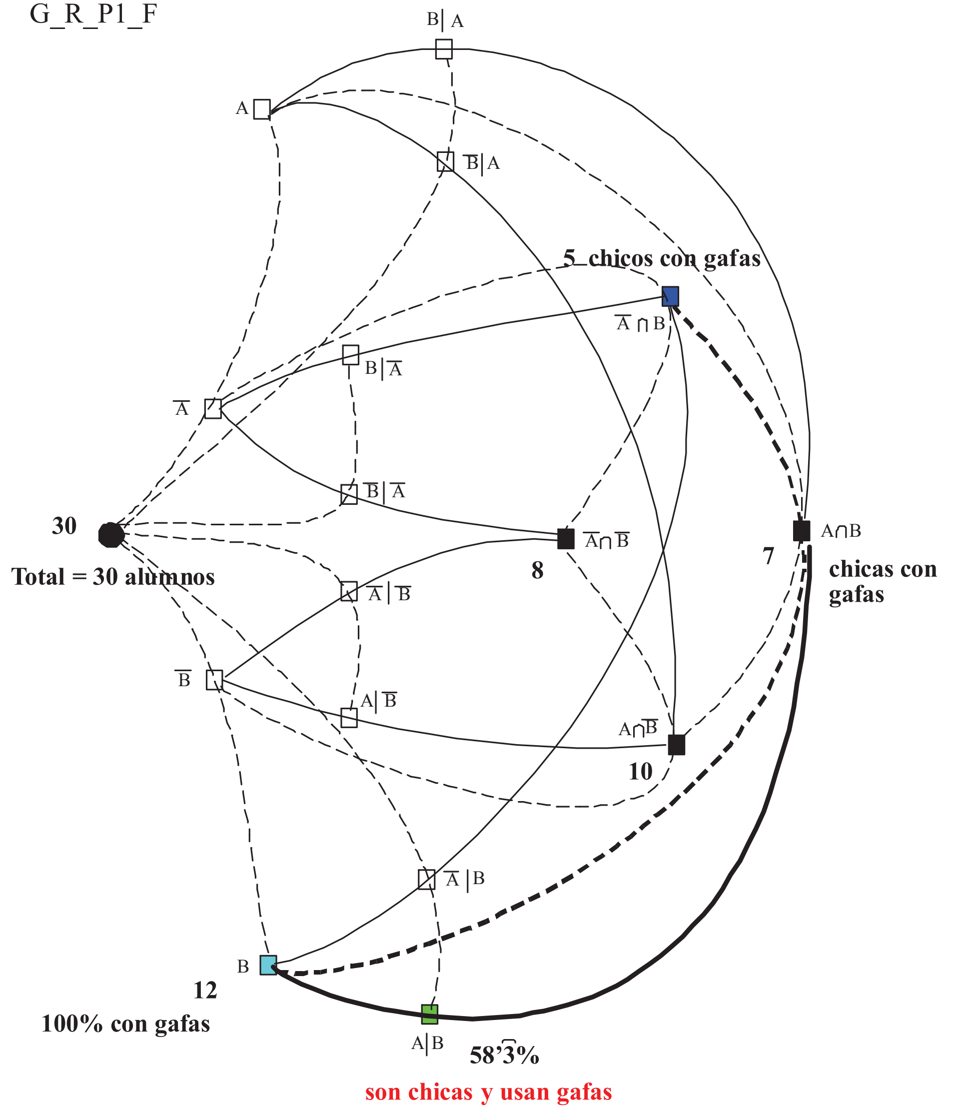
12 = 100% con gafas

$7 = X = \frac{7 \cdot 100}{12} = 700 \div 12 = 58{,}3\widehat{3}$

12	12	12	12
×3	×4	×5	×8
36	48	60	96

$\boxed{58'\widehat{3}\%}$ son chicas y usan gafas

G_R_P1_F



T_P1_F

(1)

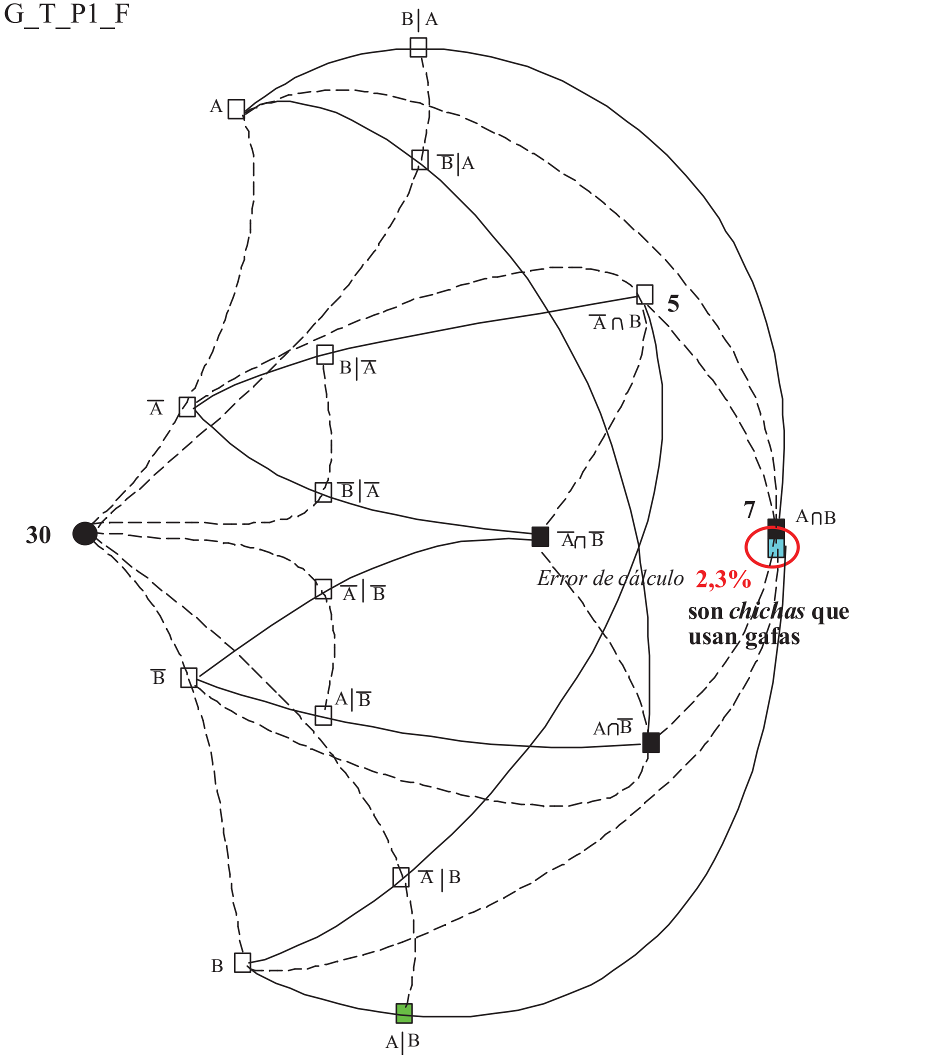
%		estudiantes
100	—	30
x	—	25

$x = \frac{2500}{30} = 8'3$ estudiantes usan gafas

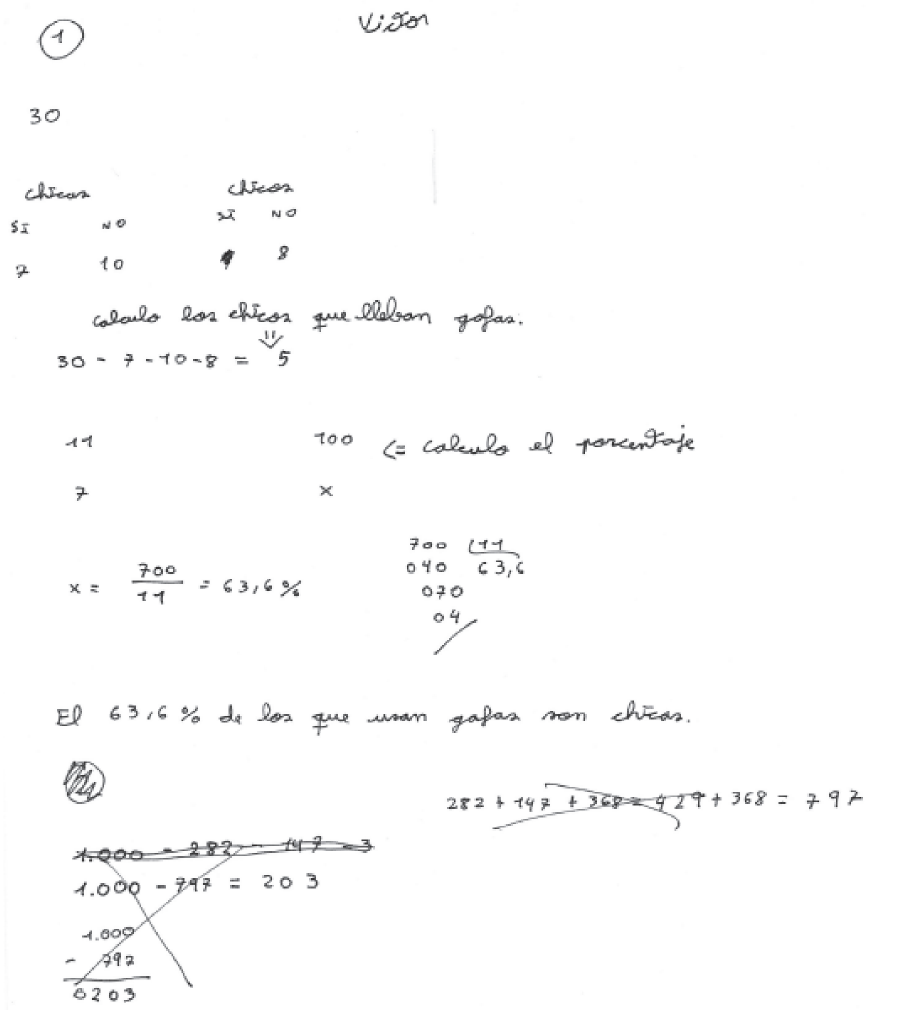
%		estudiantes
100	—	30
x	—	7

$x = \frac{700}{30} = 2'\hat{3}$ % son chichas que usan gafas

G_T_P1_F



V_P1_F



1 Víctor

30

chicas		chicos	
SI	NO	SI	NO
7	10	~~4~~	8

calculo los chicos que lleban gafas.

30 - 7 - 10 - 8 = 5

11 100 ⇐ calculo el porcentaje

7 x

$x = \frac{700}{11} = 63{,}6\%$

700 | 11
040 63,6
070
04

El 63,6 % de los que usan gafas son chicas.

2

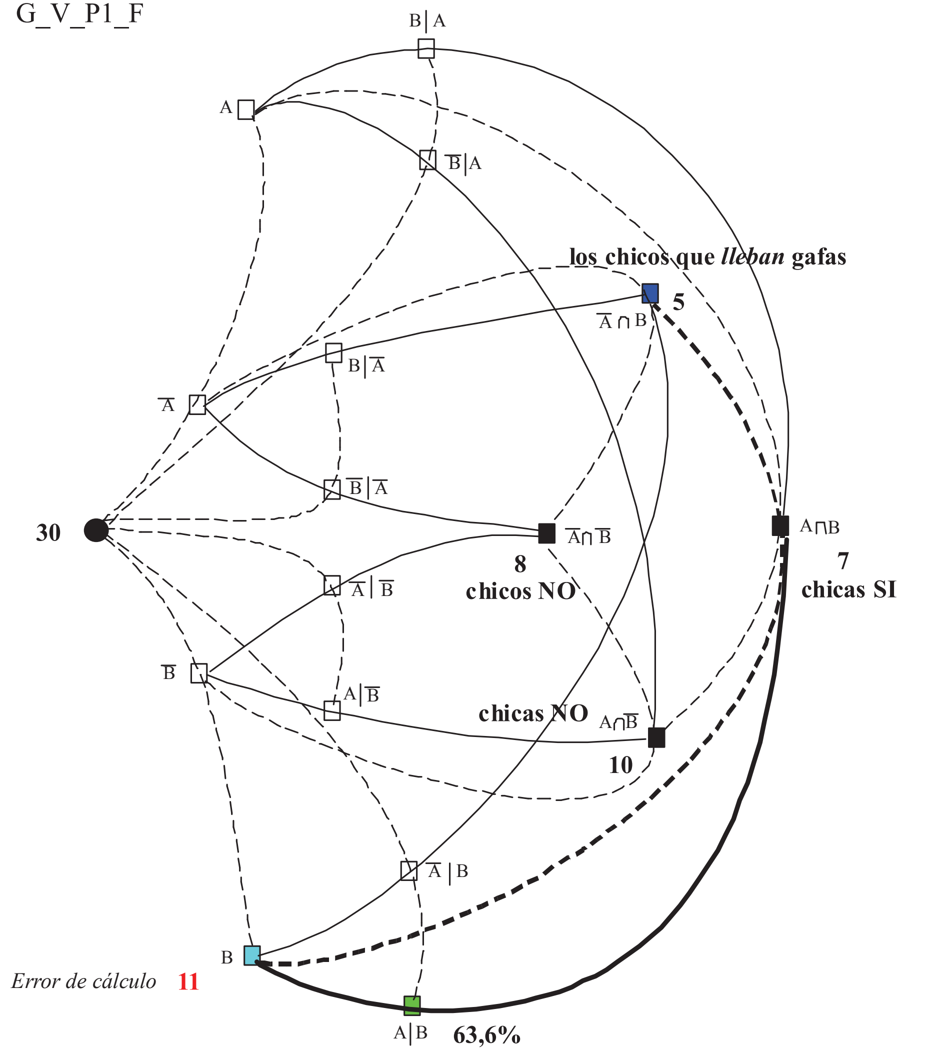
282 + 147 ~~+ 368 = 429~~ + 368 = 797

~~1.000 - 282 - 147 = 3~~

1.000 - 797 = 203

1.000
- 797
0203

G_V_P1_F



El 63,6% de los que usan gafas son chicas.

A_P1_%

chicas con gafas ¿porcentaje?

(1) 15% usan gafas chicas
37% no usan chicas
35% no usan chicos

35 + 37 + 15 = 87% → sacamos el total de datos que nos dan

100 − 87 = 13% → chicos que usan gafas

15% + 13% = 28% usan gafas

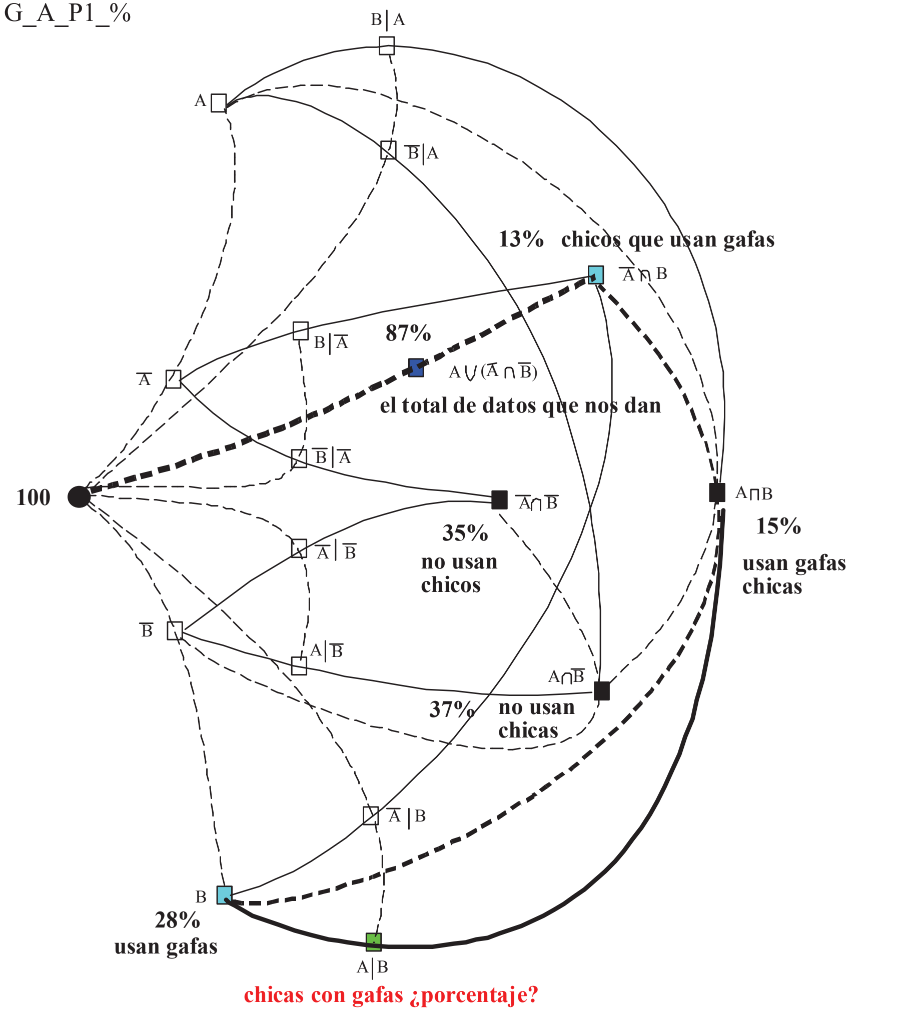
28 —— 100
15 —— x

$x = \frac{15 \cdot 100}{28} = 53'57\ \%$

x = 53'57% son chicas.

R: Entre los que usan gafas un 53'57% son chicas.

G_A_P1_%



53'57%

Entre las que usan gafas un 53'57% son chicas.

B_P1_%

Problema 1

15% → chicas

37% → chicas

35% → chicos

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\,37 \\ 35 \\ \hline 87 \end{array}$$ → los datos que me dan

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\,87 \\ \hline 13\% \end{array}$$ → nº de chicos que llevan gafas.

~~37% + 13~~

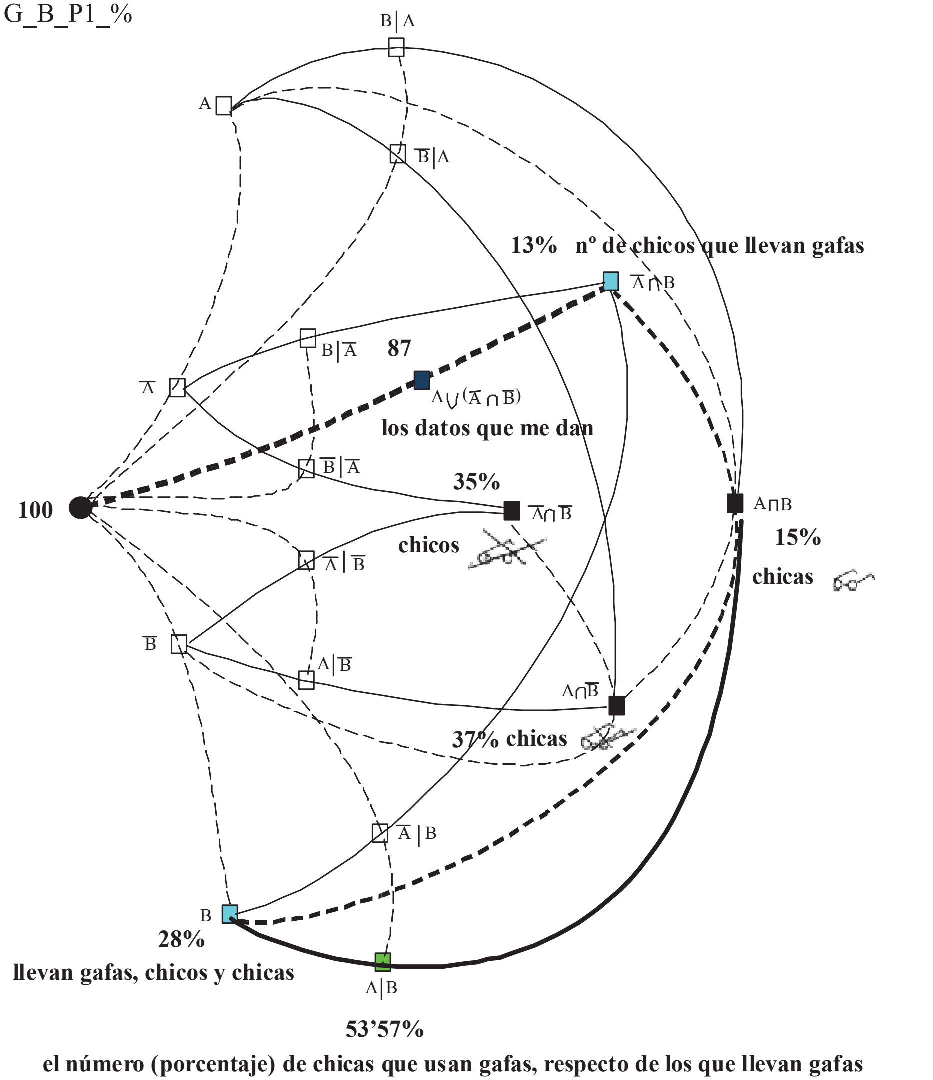
15% + 13% = 28% → llevan gafas, chicas y chicos.

100% —— 28%

x —— 15%

$x = \frac{100 \cdot 15}{28} = \frac{1500}{28} = 53'57\%$ → el número (porcentaje) de chicas que usan gafas, respecto de los que llevan gafas.

G_B_P1_%



C_P1_%

Problema 1

15% chicas con gafas
37% que no usan gafas
35% sin gafas.

¿% de chicas con gafas?

$15 + 37 + 35 = 87$

$100 - 87 = \boxed{13\%}$ → chicos con gafas

$15 + 13 = \boxed{28\%}$ → gente con gafas en clase

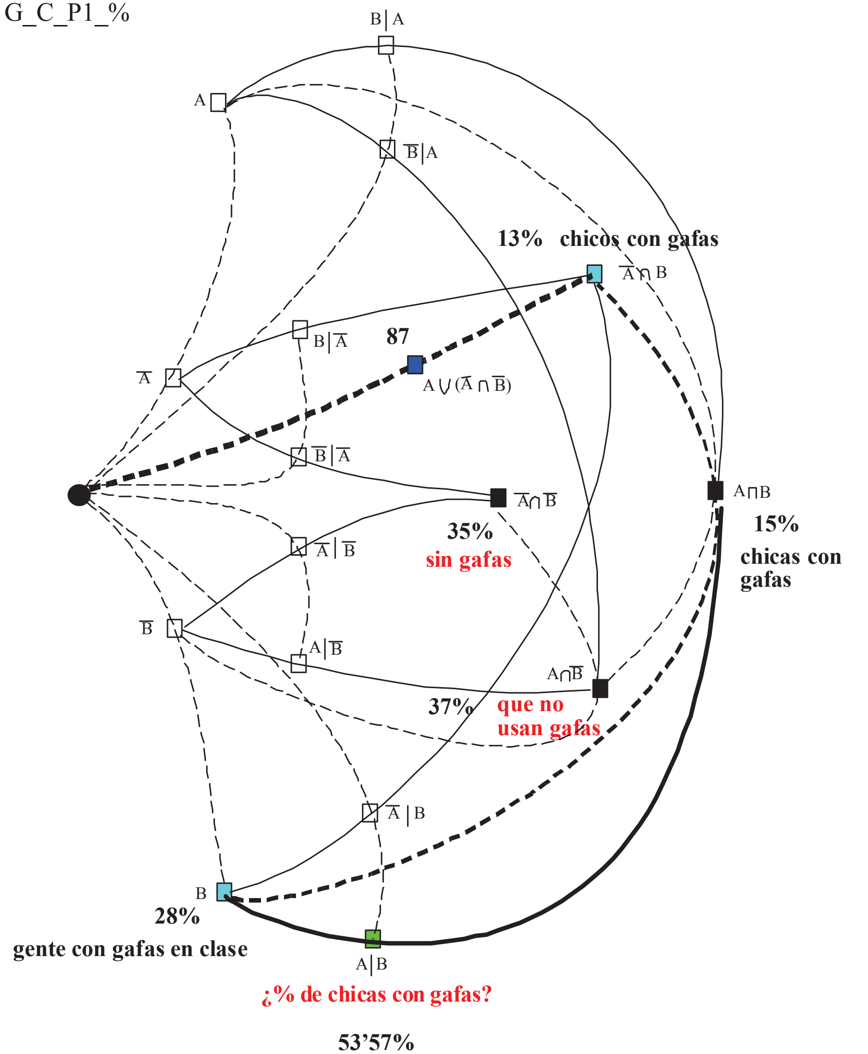
28 % gente con ~~la~~ gafas → 100%

15% de chicas con gafas → X

$$x = \frac{15\% \cdot 100\%}{28\%} = 53'57\%$$

R: Entre la gente con gafas, un 53'57 % son chicas.

G_C_P1_%



R: Entre la gente con gafas, un 53'57% son chicas.

H_P1_%

1.

15% = Chicas con gafas

37% = Chicas sin gafas

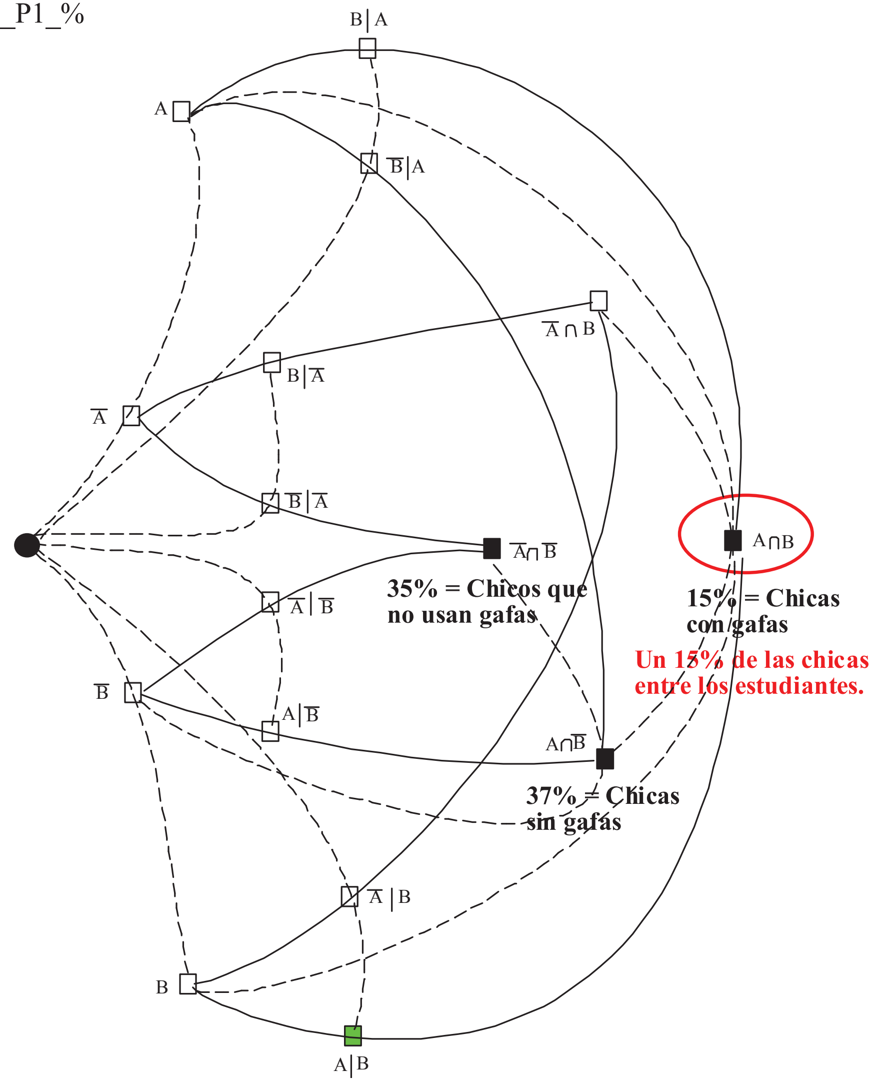
35% = Chicos que no usan gafas

~~Entre los estudiantes hay un 15% de chicas que usan gafas~~

$\cancel{15\% + 35\% = 50\%}$ ~~50% →~~

Un 15% de las chicas entre los estudiantes

G_H_P1_%



L_P1_%

Lucia 4ºA

Problema 1

4º ESO

Chicas
15% con gafas
37% no usan gafas

Chicos
35% no usan gafas
13% usan gafas

15%
+ 37%
35%
87%

100%
− 87%
01 3%

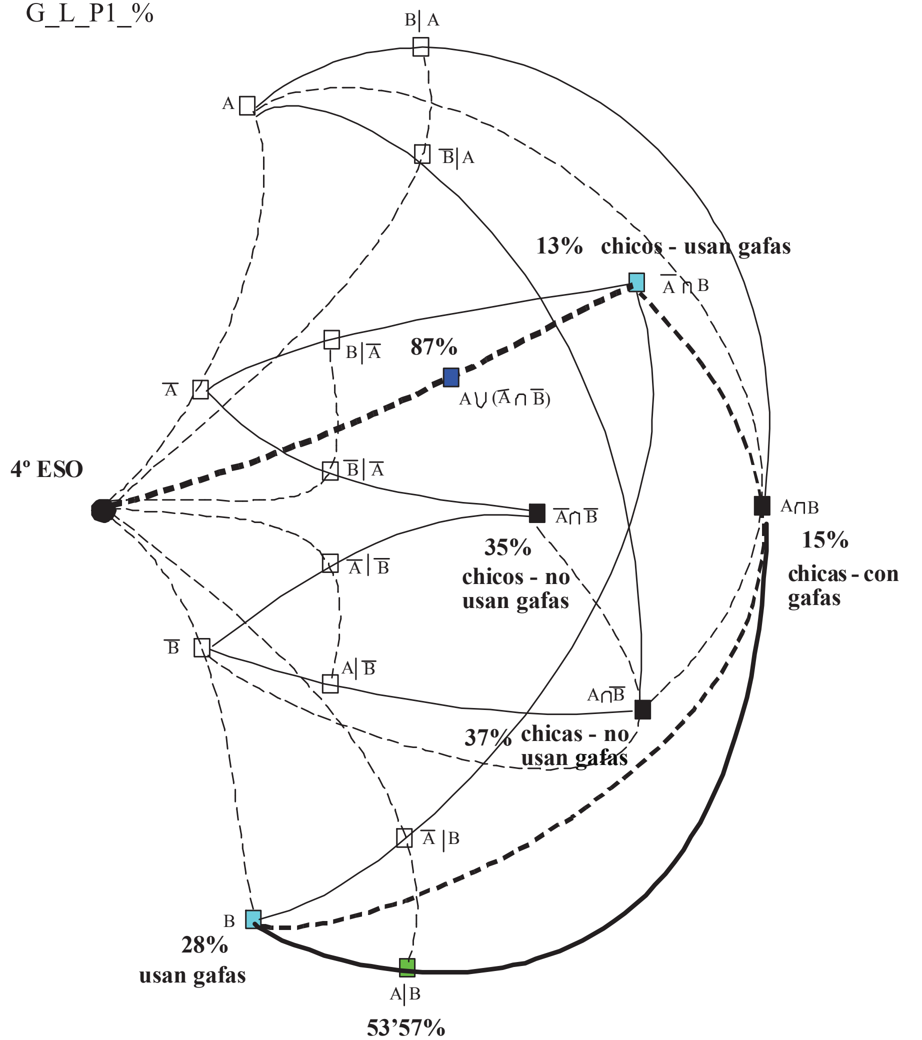
15%
+ 13%
28% usan gafas

28% ——— 100%
15% ——— x

$x = \frac{15 \cdot 100}{28} = 53'57\%$

• El 53'57% del 100% que llevan gafas son chicas.

G_L_P1_%



El 53'57% del 100% que llevan gafas son chicas.

M_P1_%

problema 1

15% chicas con gafas

37% no las usan (chicas)

35% chicos sin gafas

$\boxed{37 + 15 = 52\% \rightarrow \text{son chicas}}$

15% gafas (chicos)   35% → son chicos

Solo hay un 15% que usa gafas y son chicos

~~52%~~ ~~[illegible]~~

~~el 52% son chicas~~

~~problema~~ 2

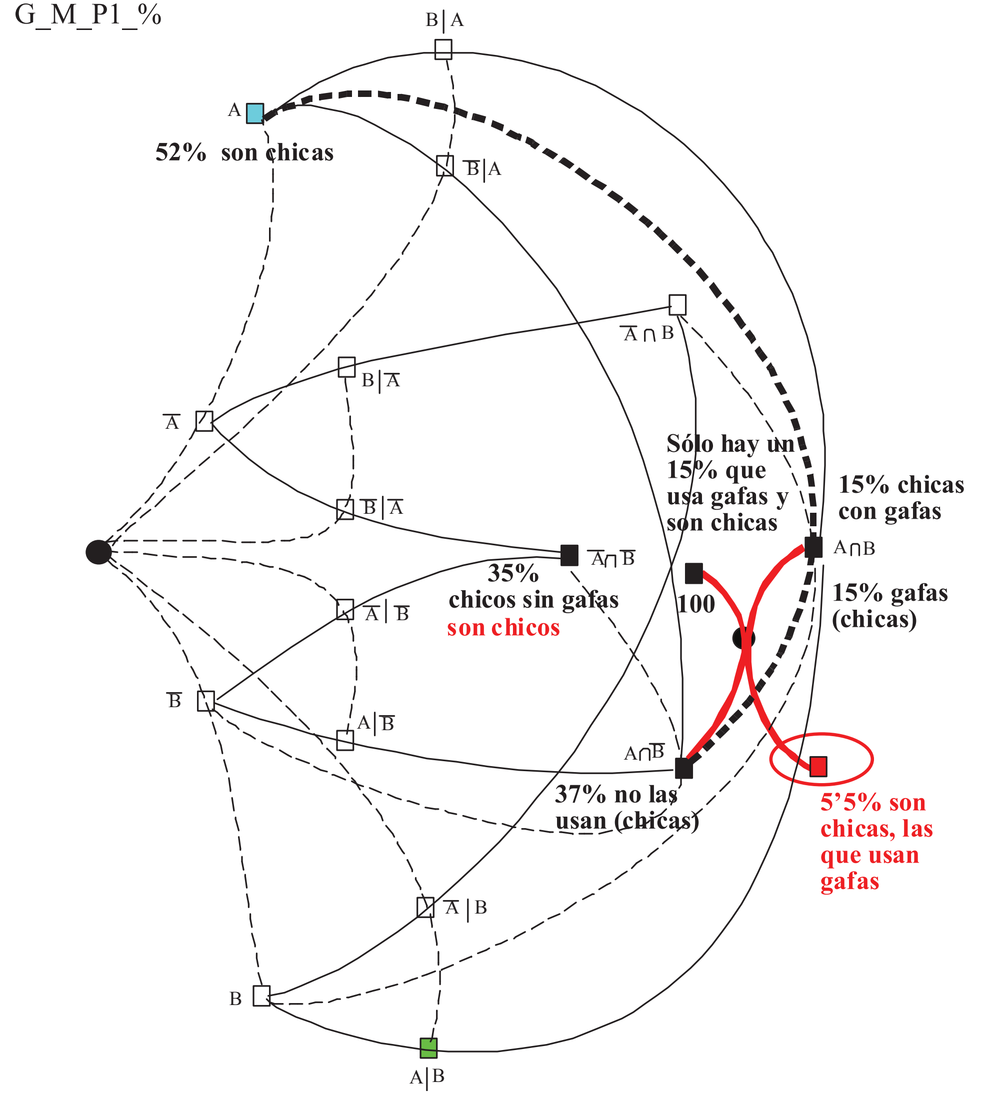
100 → 15

37 → x

$\frac{37 \cdot 15}{100} = 5'5\%$

son chicas, las que usan gafas

G_M_P1_%



T_P1_%

(A)

CHICAS | 15% usan gafas
| 37% NO usan gafas

⇒ Hay un 52% de chicas

CHICOS | 13% usan gafas
| 35% NO usan gafas

⇒ Hay un 48% de chicos

$52 + 35 = 87$

$100 - 87 = 13\%$ chicos usan gafas

Usan gafas en toda la clase un 28% de alumnos

100 —— 28

~~xx~~ —— ~~xx~~

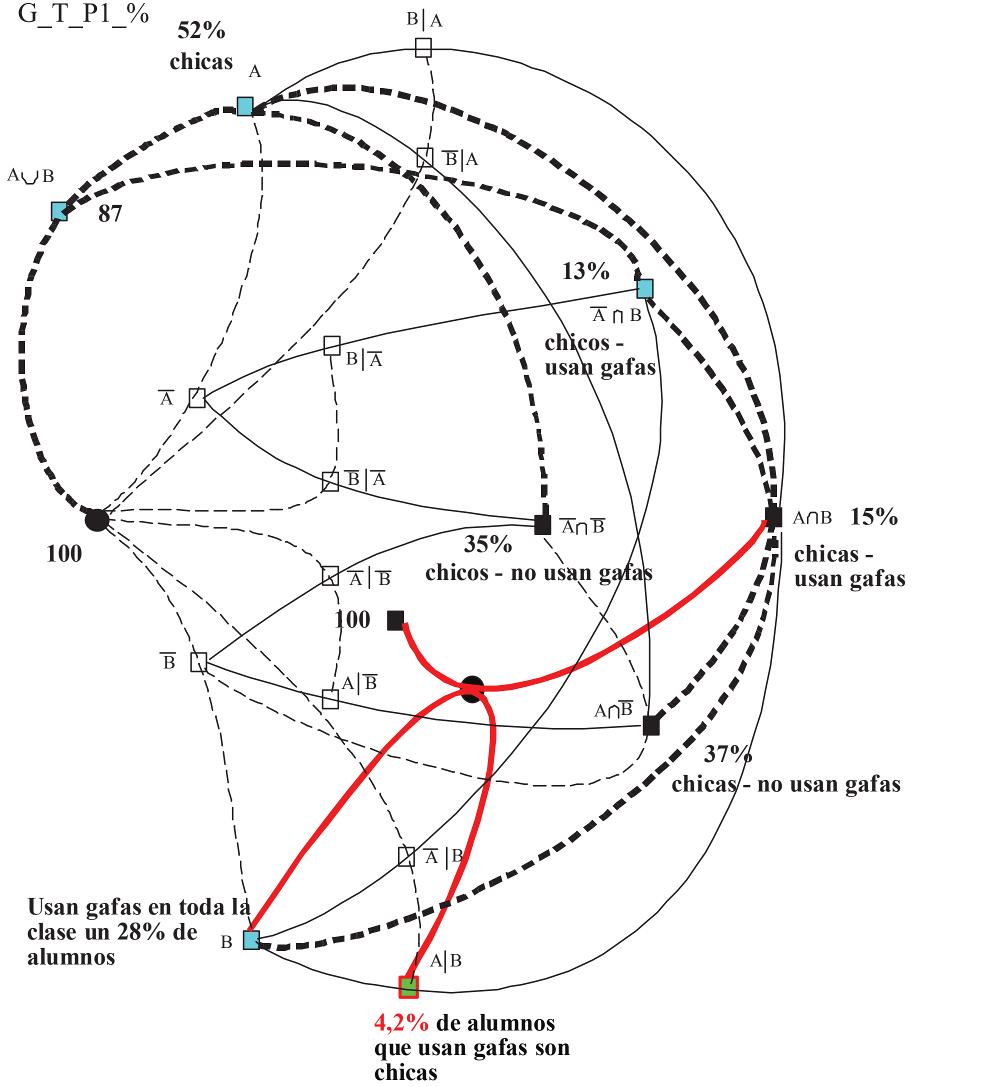
15   X

X = ~~xx%~~ de alumnos que usan gafas son chicas

~~53,57%~~

4'2 %

G_T_P1_%



V_P1_%

* ① Victor

Chicas → con gafas 15%
→ sinfgafas 37%

chicos → con 13 %
→ sin 35 %

$x + 15 + 37 + 35 = 100$

$x = 13$ % de los chicos tienen gafas.

$35+13 = 48$% son chicos.

$\boxed{100 - 48 = 52\% \text{ son chicas.}}$

~~He hecho muchos pasos de mas, ya que [illegible] y ya tenia el porcentaje de chicas.~~

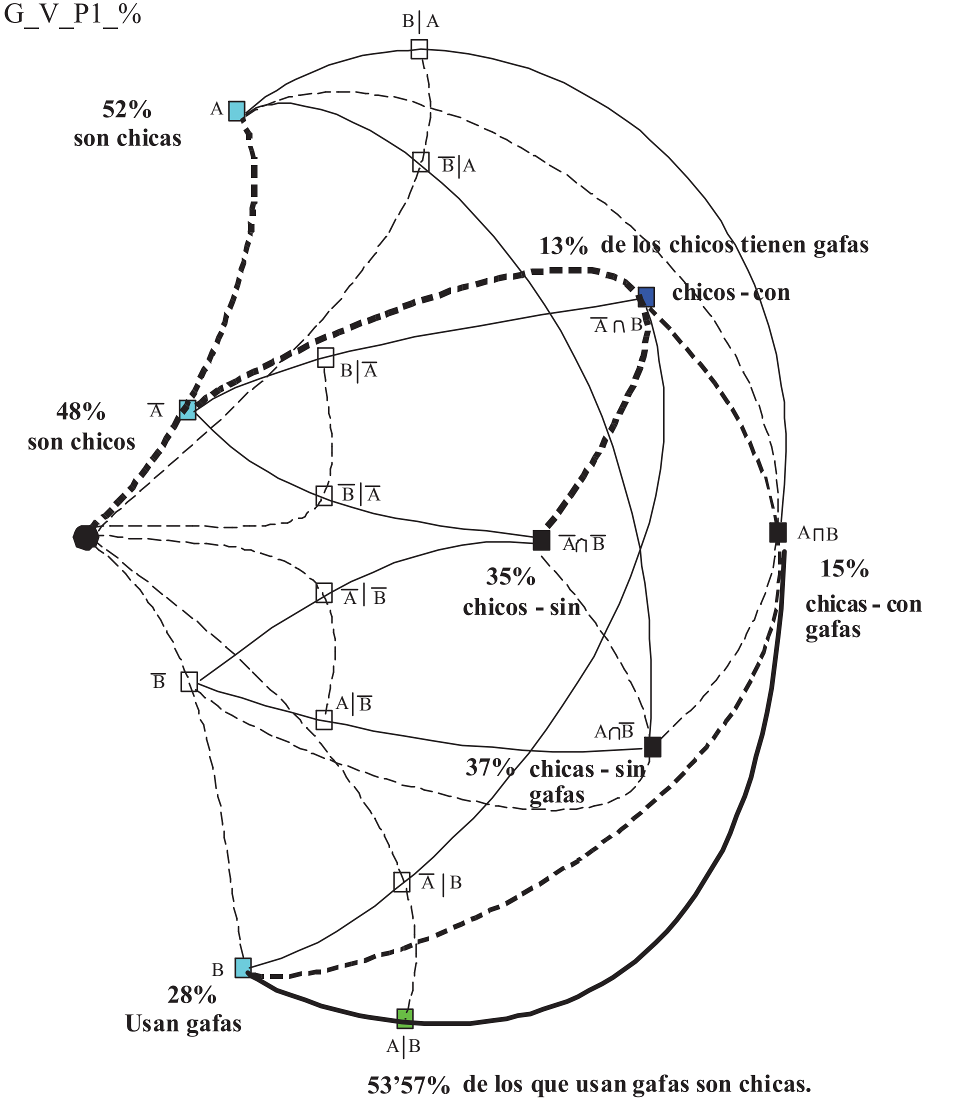
$15 + 13 = 28$% Usan gafas

28 100

15 x

$x = \frac{15 \cdot 100}{28} = 53,57$% de las que usan gafas son chicas.

G_V_P1_%



ANEXO 13. Resoluciones y grafos de las resoluciones del Problema 2a en los pre-test.

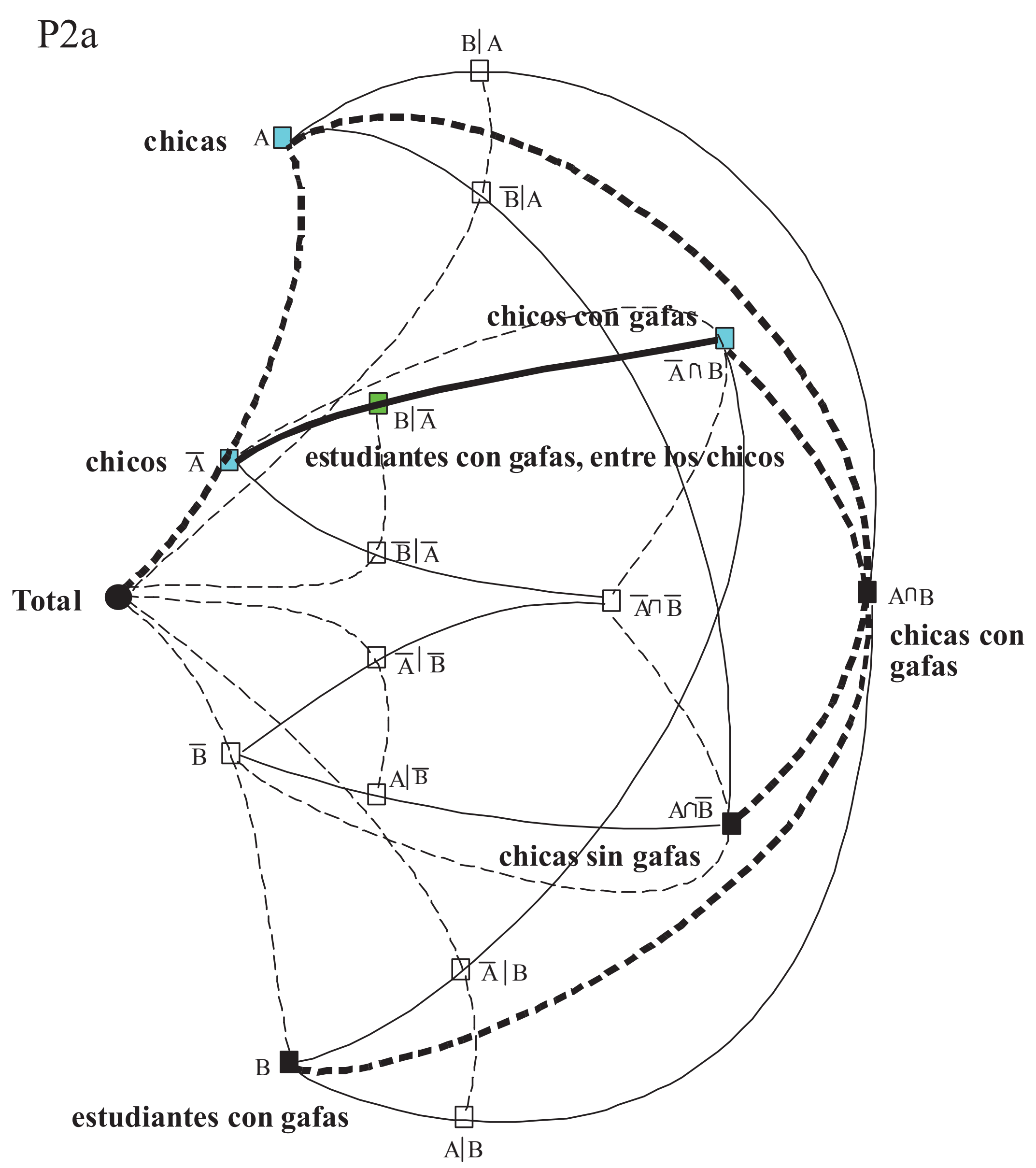
Enunciado del problema en el Pre-test(F):

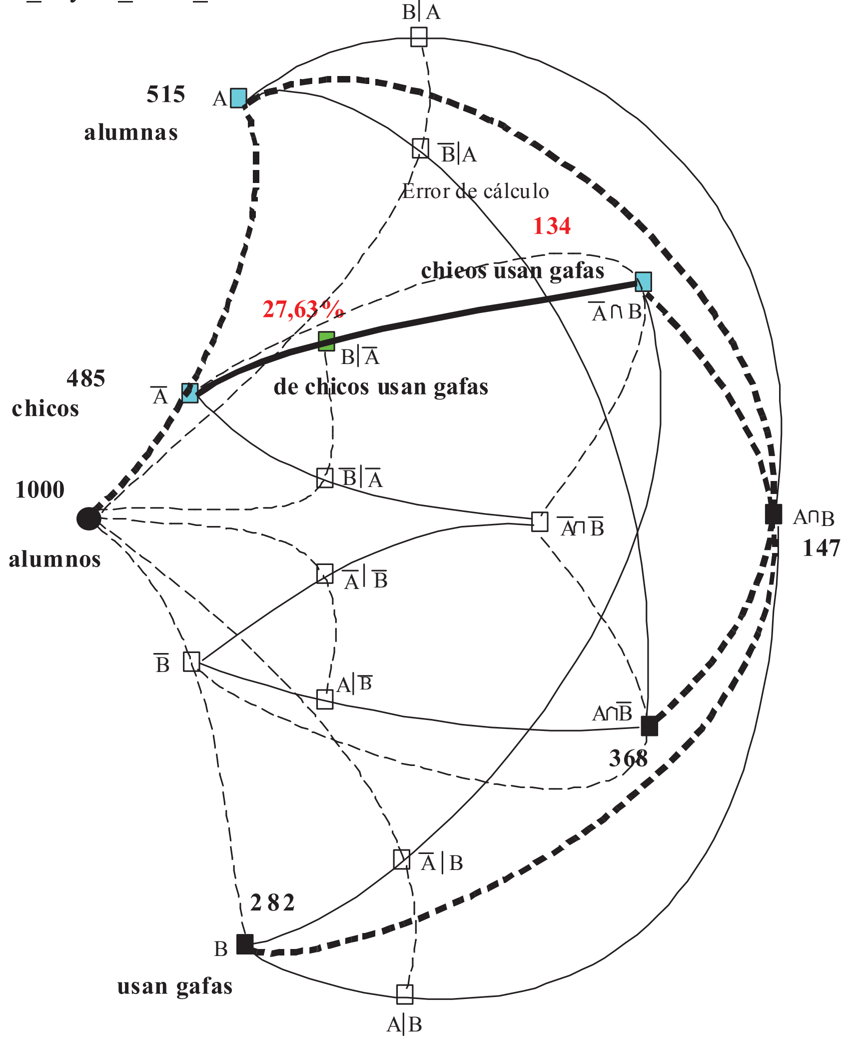
Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Enunciado del problema en el Pre-test(%):

Un centro escolar está formado por chicos y chicas. Hay un 28% de estudiantes que usan gafas, un 15% de chicas que las usan y un 37% de chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Modelo de competencia:



AyM_P2a_F	G_AyM_P2a_F
Trascripción completa de la resolución filmada en el Anexo 19 (p. 593).	

B_P2a_F

Problema 2

Belén

1000 alumnos

282 368

147 ¿%?

Hago como en el problema anterior, una regla de tres para saber que % llevan gafas, y de ese porcentaje quien son chicos, con otra regla de tres

1000 —— 100%

282 ——→ x

$282 - 147 = 135$

$$x = \frac{282 \cdot 100}{1000} = \frac{282}{10} = 28'2\,\%$$

$$\begin{array}{r} 282 \\ -\,147 \\ \hline 135 \end{array}$$

282 —— 28'2 %

135 —— x

$$x = \frac{135 \cdot 28'2}{282} = \frac{3.722'4}{282} = 13'2\,\%$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ \cdot\, 28'2 \\ \hline 270 \\ 1080 \\ 270 \\ \hline 3722{,}4 \end{array}$$

$37224 \,|\, 2820$

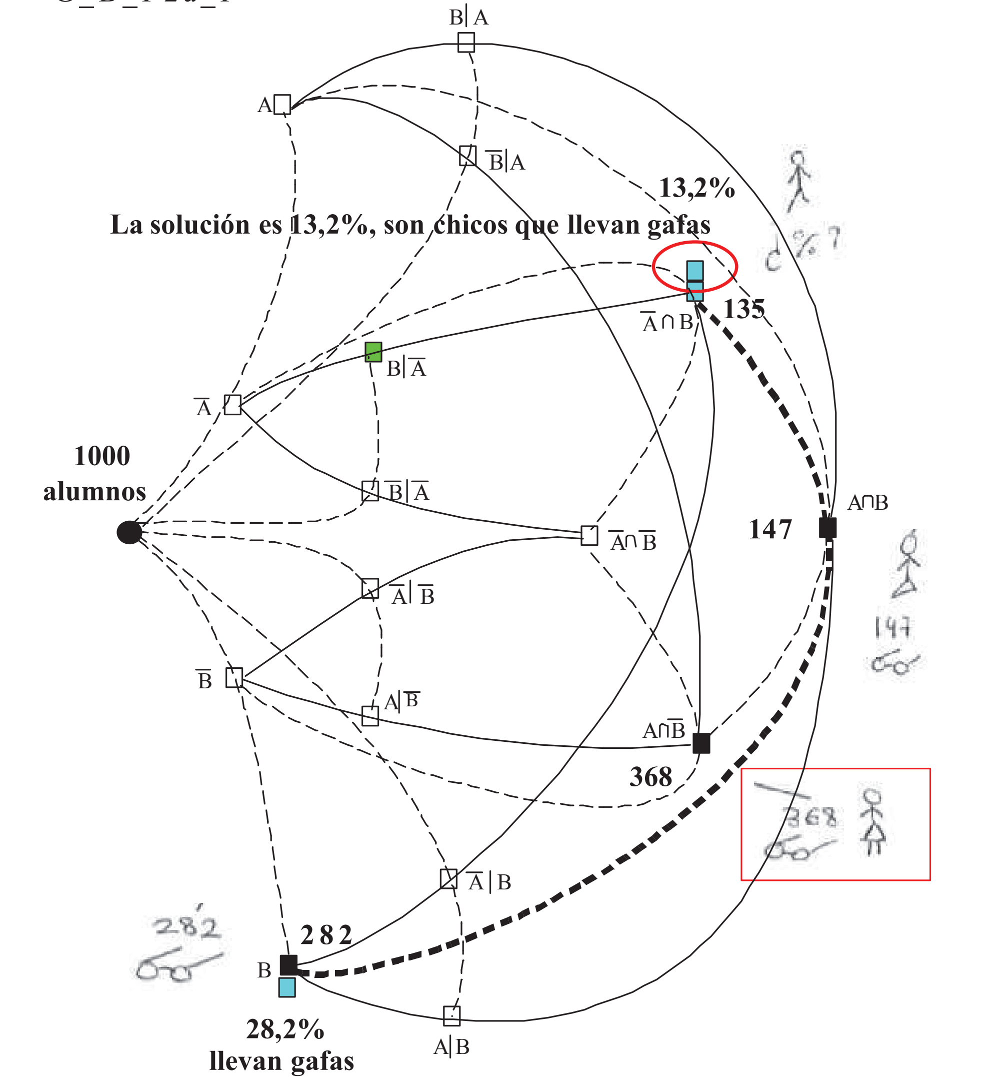
09024 — 13'2

05640

0000

La solución es 13'2%, son chicos que llevan gafas

G_B_P2a_F



C_P2a_F

(2) 1000 — 100% de alumnos

~~282 + 147~~

$$\begin{array}{r} 282 \\ +\,147 \\ \hline 368 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 282 \\ -\,147 \\ \hline 135 \end{array} \rightarrow \text{alumnos con gafas}$$

~~282 — 100% de alumnos con gafas~~
~~135 — x~~
~~x =~~

$$\begin{array}{r} 147 \\ +\,368 \\ \hline 515 \end{array} \rightarrow \text{nº de chicas} \qquad \begin{array}{r} 1000 \\ -\,515 \\ \hline 485 \end{array} \rightarrow \text{nº de chicos}$$

$$\begin{array}{r} 282 \\ -\,147 \\ \hline 135 \end{array} \rightarrow \text{alumnos con gafas}$$

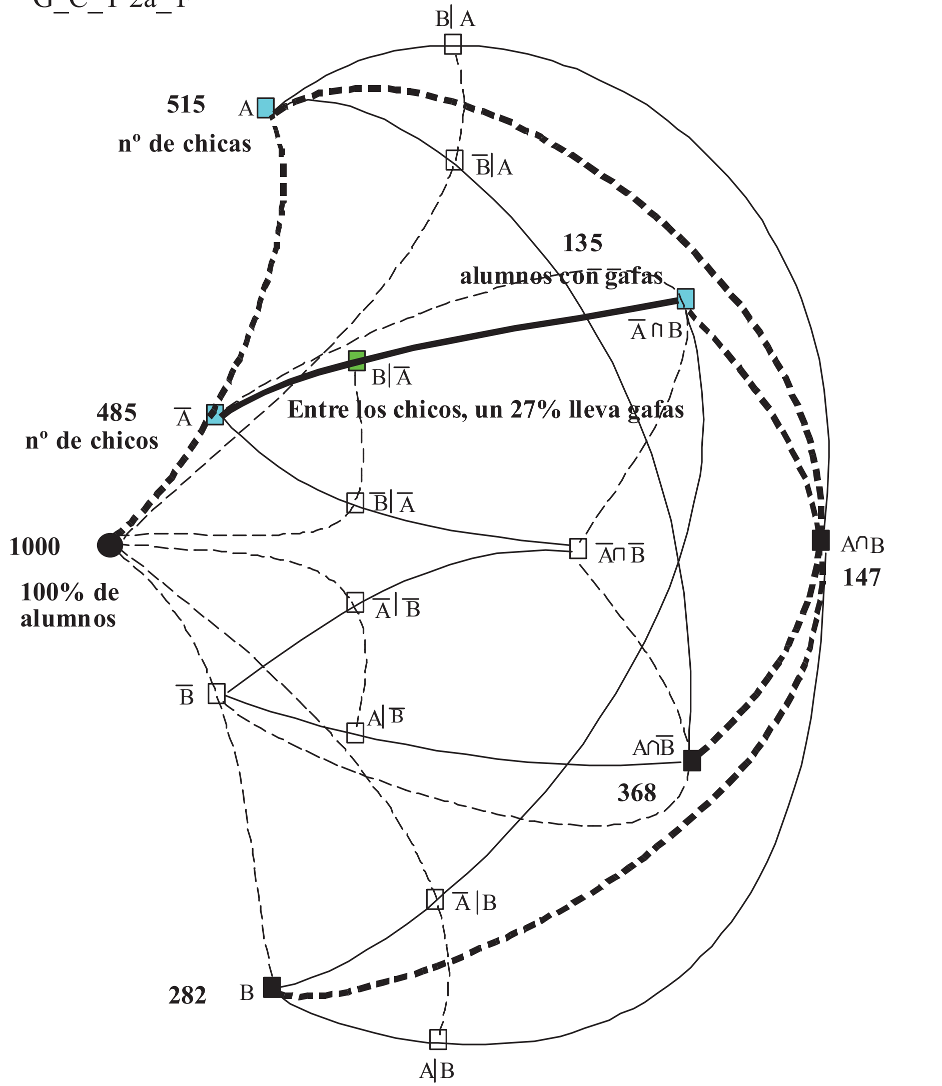
485 — 100% de chicos
135 — x

$$x = \frac{135 \cdot 100}{485} = \frac{13500}{485} \approx 27\%$$

$$\begin{array}{l|l} 13500 & 485 \\ \hline 3800 & 27 \\ 465 & \end{array}$$

R: Entre los chicos, un 27% lleva gafas

G_C_P2a_F



H_P2a_F

PROBLEMA 2

TOTAL = 1.000 alumnos

282 → Estudiantes que usan gafas {chicos}

147 → Chicas que usan gafas

368 → Chicas que no usan gafas

¿Que porcentaje entre los chicos, usa gafas?

	ALUMNAS CON GAFAS	147
+	ALUMNAS SIN GAFAS	368
	TOTAL DE ALUMNAS	515

	TOTAL DE ESTUDIANTES {Chicos y Chicas}	1.000
−	TOTAL DE ALUMNAS (Chicas)	515
	TOTAL DE ALUMNOS (Chicos)	= 485

TOTAL ESTUDIANTES Chicos = 485

ESTUDIANTES CON GAFAS = 282

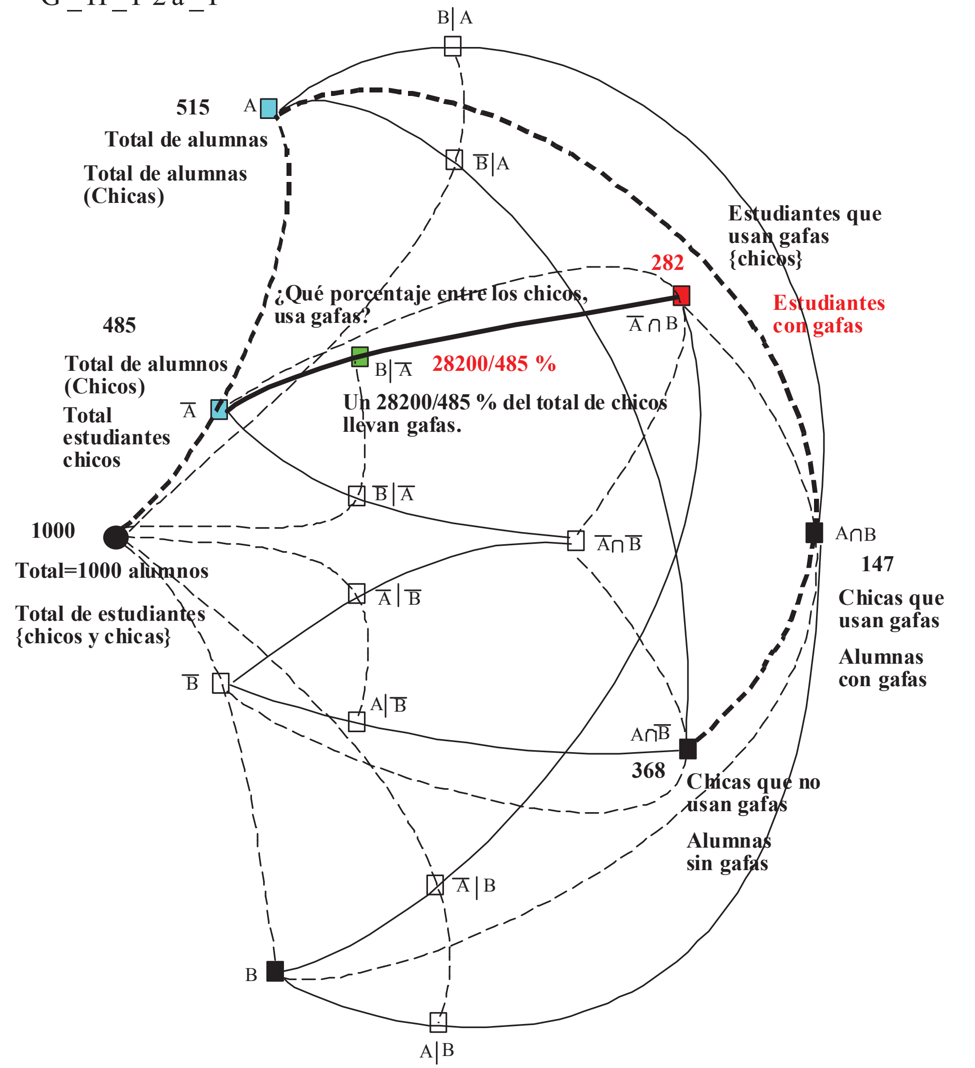
PORCENTAJE

ALUMNOS	PORCENTAJE
485	100
282	X

$$X = \frac{282 \cdot 100}{485} = \frac{28200}{485}$$

Un $\frac{28200}{485}$ % del total de chicos llevan gafas.

G_H_P2a_F



L_P2a_F

Lucia

(2)

1.000 alumnos ⇨ 282 usan gafas → Chicos ?
→ Chicas 147 usan gafas.
(368 no usan)

282
− 147
135 chicos que usan gafas

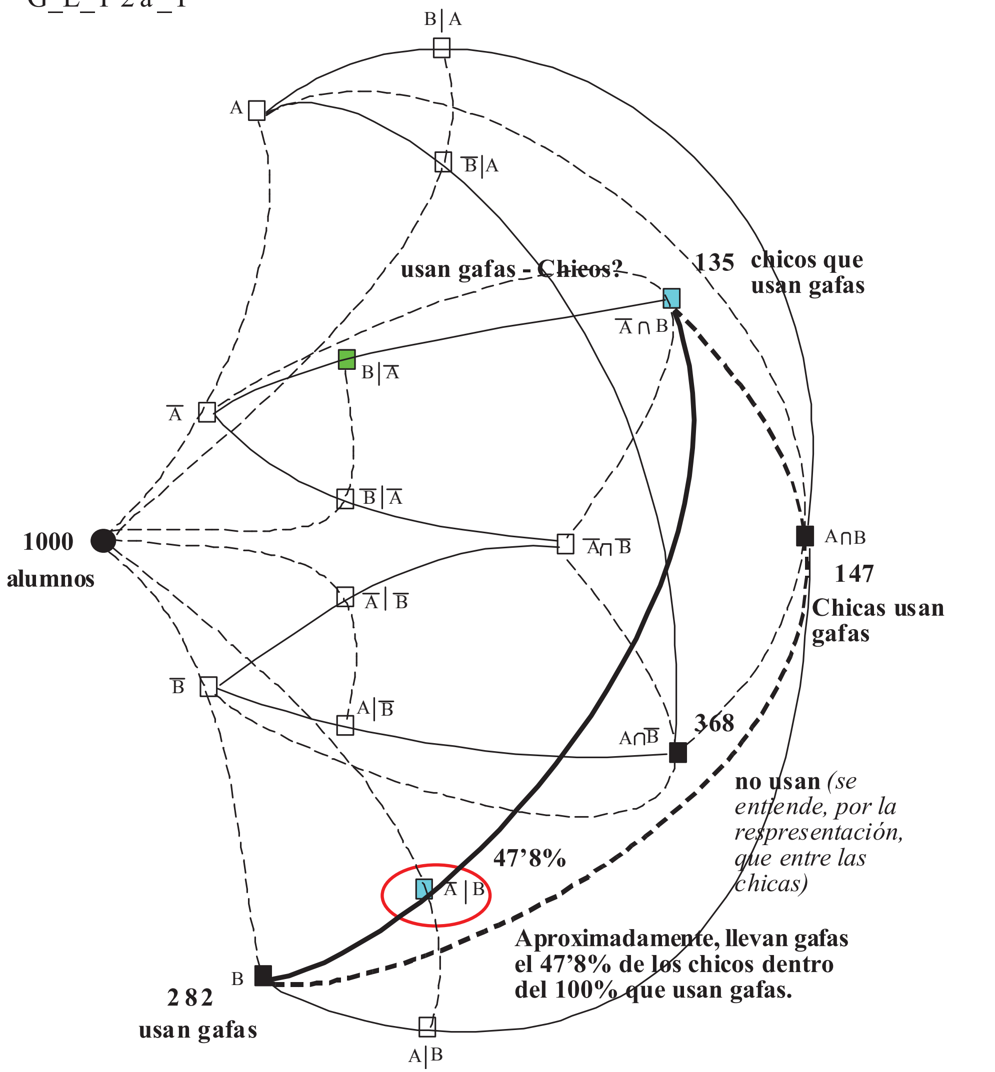
282 —— 100
135 —— x

$x = \frac{135 \cdot 100}{282} = \frac{13500}{282} \simeq 47'8\%$

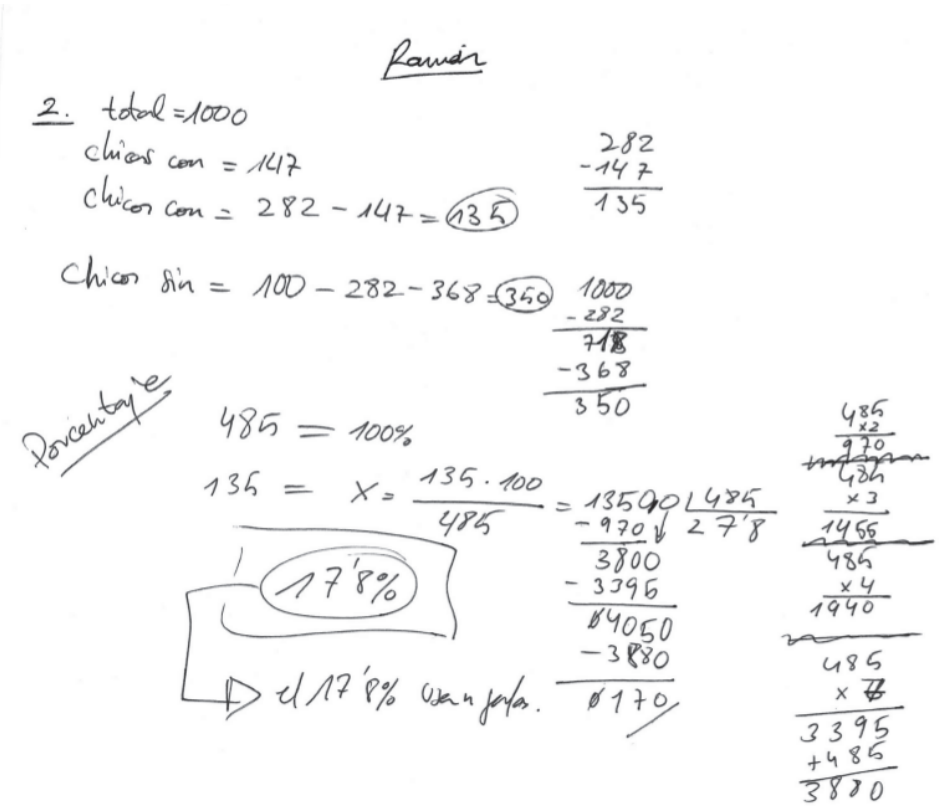
13500 | 282
2220 | 47'8
2460
214

· Aproximadamente llevan gafas el 47'8% de los chicos dentro del 100% que usan gafas.

G_L_P2a_F



R_P2a_F



Ramón

2. total = 1000
chicas con = 147
chicos con = 282 − 147 = 135
Chicos sin = 100 − 282 − 368 = 350

282
−147
135

1000
−282
718
−368
350

Porcentaje

485 = 100%
135 = x = 135 · 100 / 485 = 13500 | 485
−970 | 27'8
3800
−3395
04050
−3880
0170

17'8%

el 17'8% usan gafas.

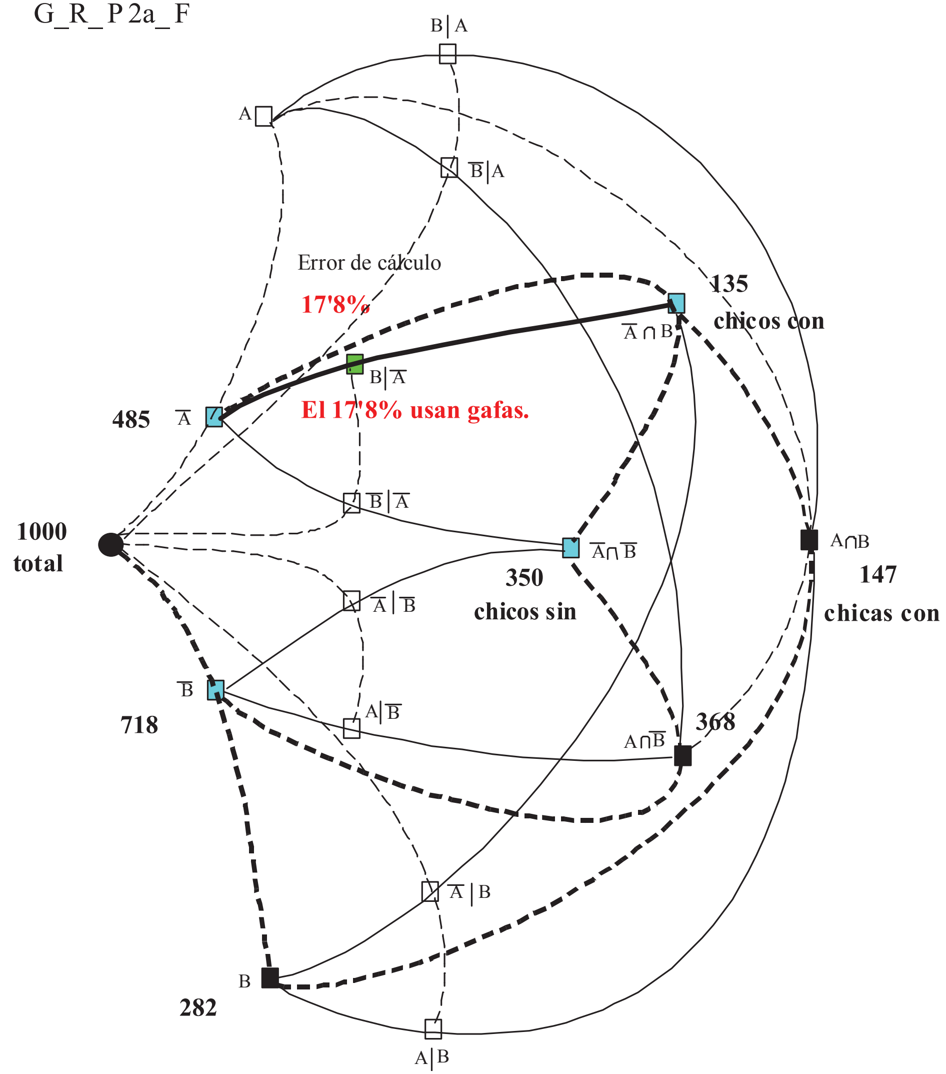
485
×2
970

485
×3
1455

485
×4
1940

485
×7
3395
+485
3880

G_R_ P2a_F



T_P2a_F

(2)

% alumnos

100 —— 1000

$$\begin{array}{r} 368 \\ +\ 147 \\ \hline 515 \end{array}$$

515 chicos hay en ese centro

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -\ 515 \\ \hline 0485 \end{array}$$

0485 chicos hay que usan y no usan gafas

%	alumnos
100 ——	1000
x ——	282

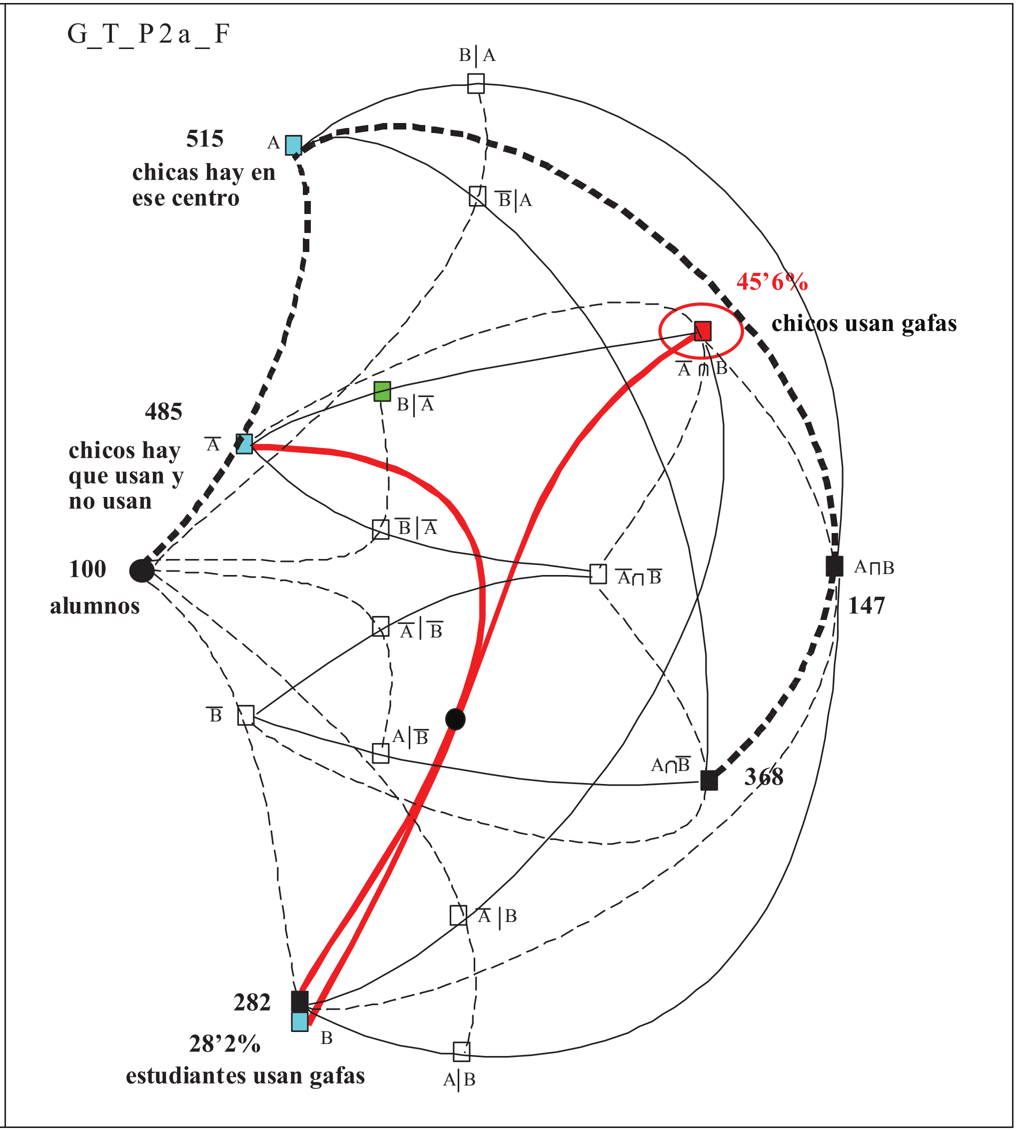
$x = \frac{282\cancel{00}}{1\cancel{000}} = 28'2\%$ estudiantes usan gafas

%	alumnos que usan gafas
28'2 ——	282
x ——	485

$x = \frac{28'2 \cdot 485}{282} = \frac{12877}{282} \approx 45'6\%$ chicos usan gafas

$$\begin{array}{r} 28'2 \\ 485 \\ \hline 1410 \\ 2256 \\ 1128 \\ \hline 12877'0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 12877 & 282 \\ \cline{2-2} 1597 & 45'6 \\ 1870 & \\ 178 & \end{array}$$



V_P2a_F

2

282 - 147 = 135 chicos con gafas.

~~1.000 - 147 - 135 - 368 = 205~~

282 + 368 = 650

1000 - 650 = 350 chicos sin gafas.

350 + 135 = 485 chicos.

485 100

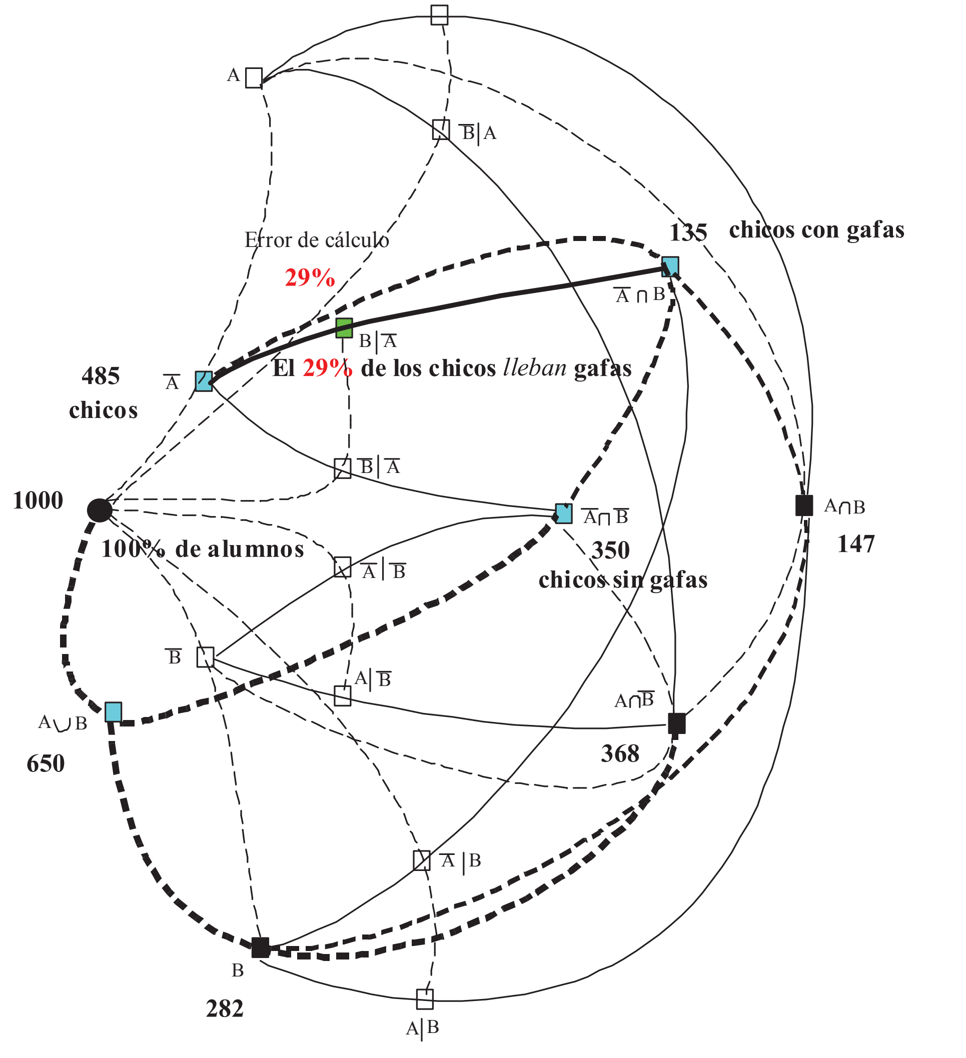
135 x

$x = \frac{135 \cdot 100}{485} = \frac{13500}{485} = 29\%$

13500 | 485
4800 2989
435

El 29% de los chicos lleban gafas.

G_V_P 2a_F



A_P2a_%

4

gafas → 28 %

15% usan chicas

85% chicos gafas

100 - 15 = 85

no gafas → 72 %

37% no usan

63% no usan

100-37= 63

100 - 28 = 72 no usan gafas del total

72 — 100
x — 63

x = 45'36 chicos no gafas total

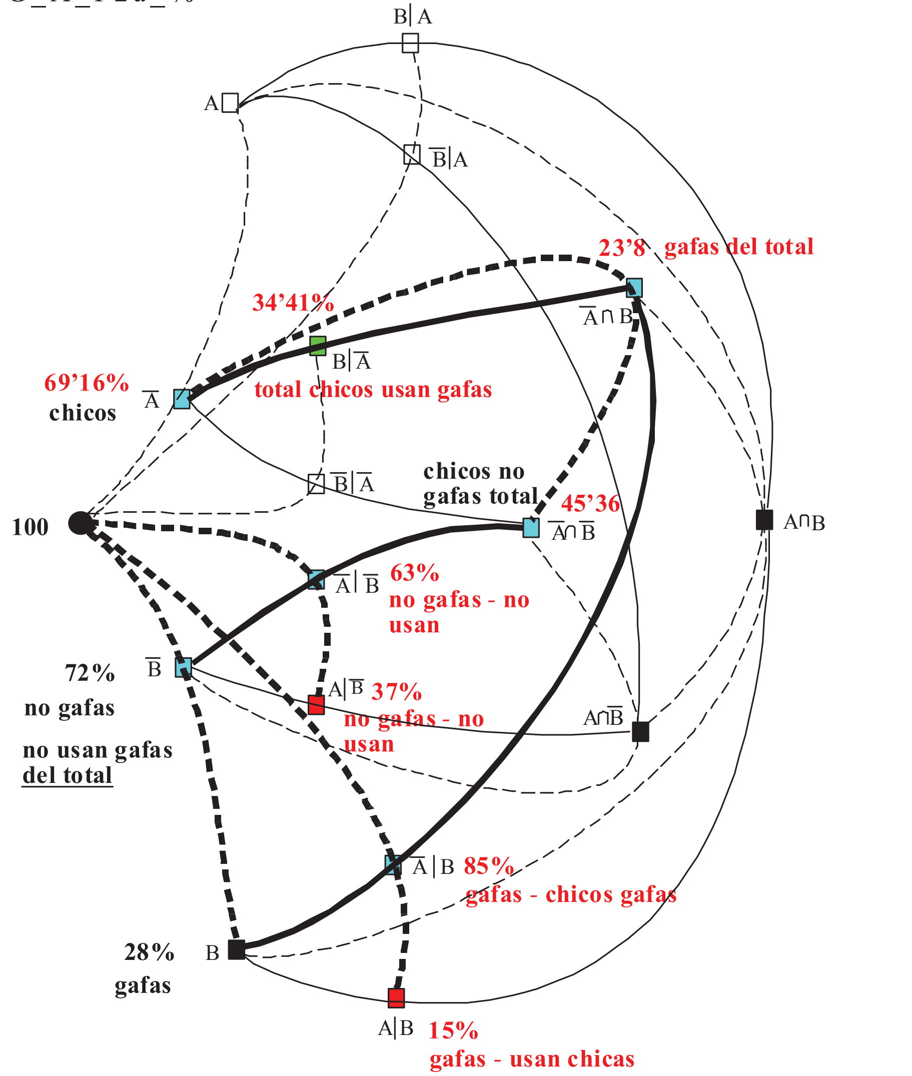
28 — 100
x — 85
x = 23'8 gafas del total

Porcentaje total chicos
23'8 + 45'36 = 69'16 % chicos

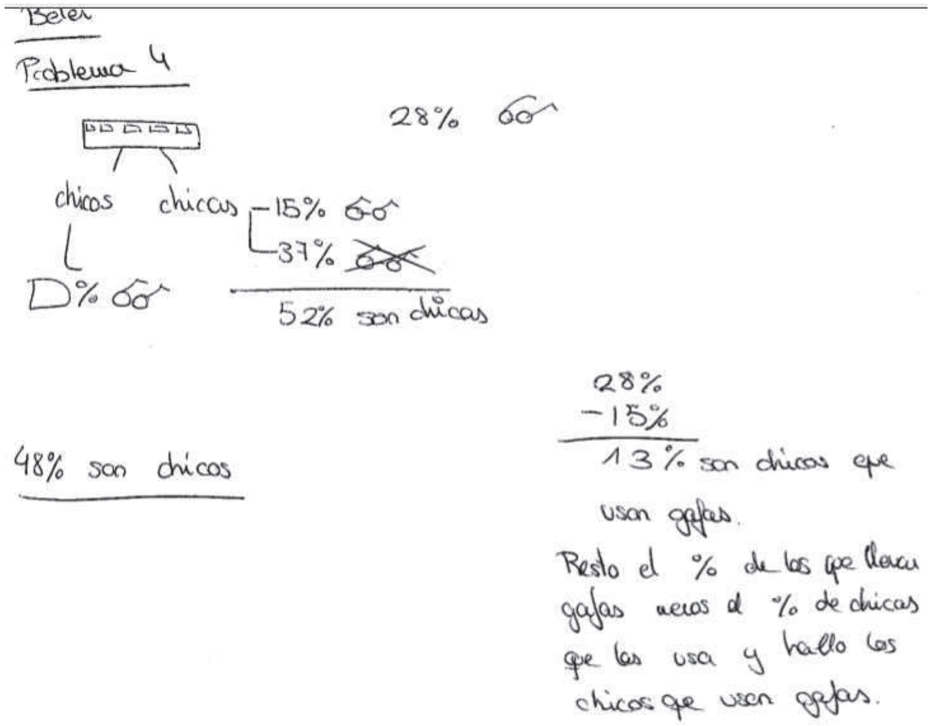
69'16 — 100
23'8 — x

R = x = 34'41 % total chicos usan gafas

G_A_P2a_%



B_P2a_%


Belen

Problema 4

28%

chicos chicas – 15%

37%

52% son chicas

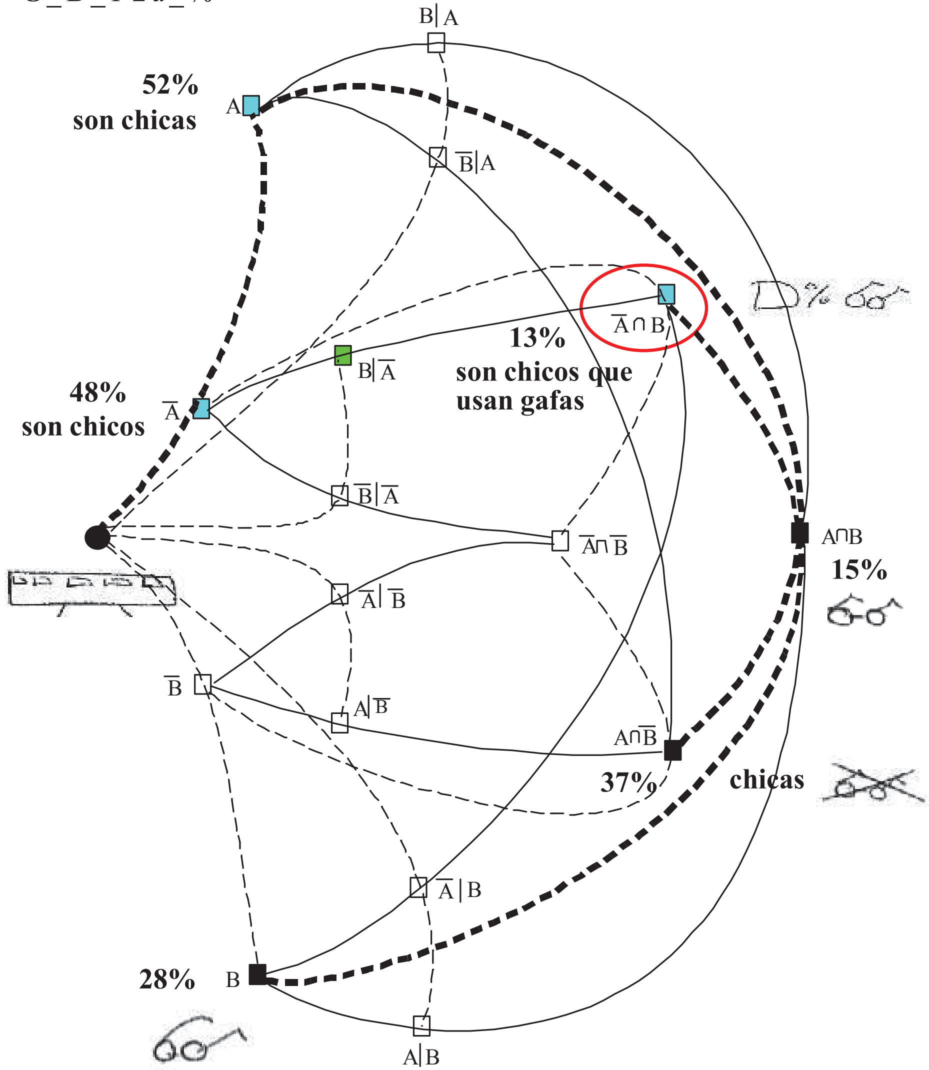
D%

48% son chicos

28%
−15%
13% son chicos que usan gafas.

Resto el % de los que llevan gafas menos el % de chicas que las usa y hallo los chicos que usan gafas.

G_B_P2a_%



C_P2a_%

Problema 4:

28% → gafas

15% → chicas ✓

37 % → chicas X

¿% chicos con gafas?

~~28~~ 28 − 15 = 13 % de chicos con gafas

15 + 37 = 52 % de chicas en total

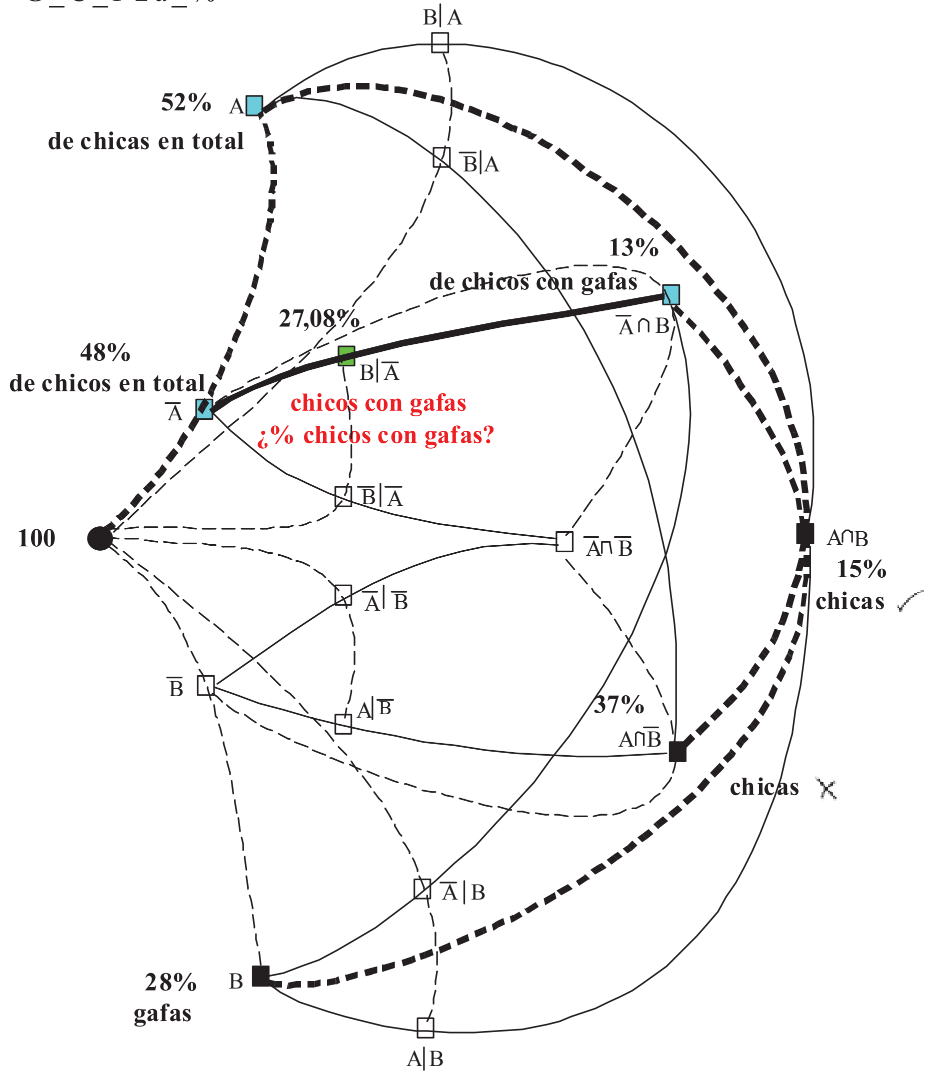
100 − 52 = 48 % de chicos en total

48 % chicos en total — 100 % chicos

13 % chicos con gafas — x

$x = \frac{1300}{48} = \boxed{27'08\ \% \text{ chicos con gafas}}$

G_C_P2a_%



H_P2a_%

4-

28% estudiantes con gafas.

15% Chicas que las usan.

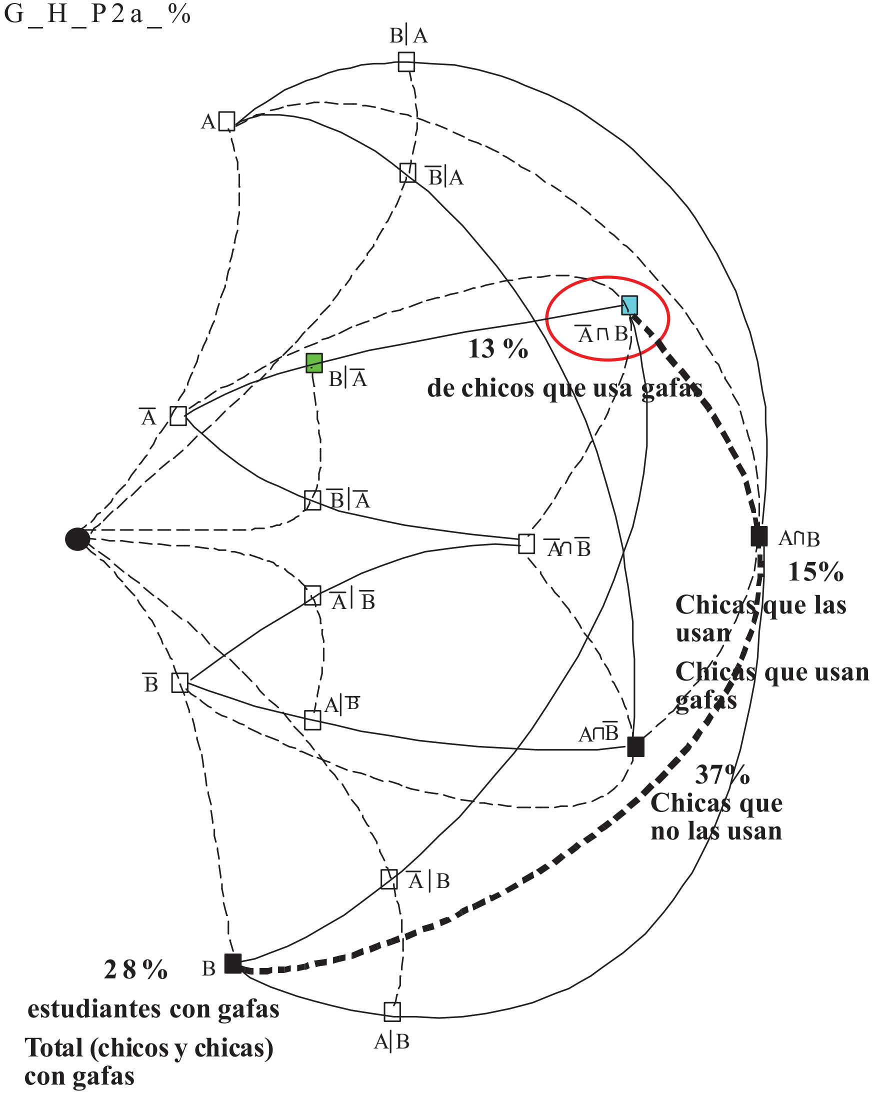
37% Chicas que no las usan.

28%= Total (Chicos y Chicas) con gafas.

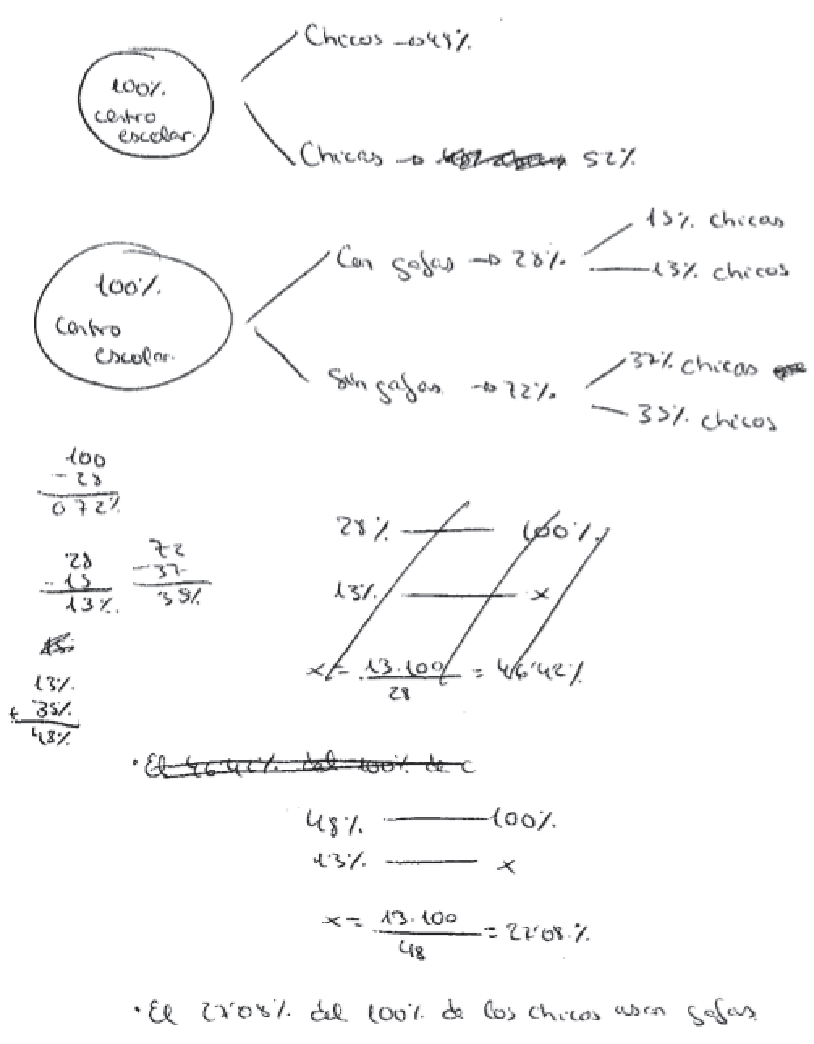
15% Chicas que usan gafas.

28-15 = 13% de Chicos que usa gafas.

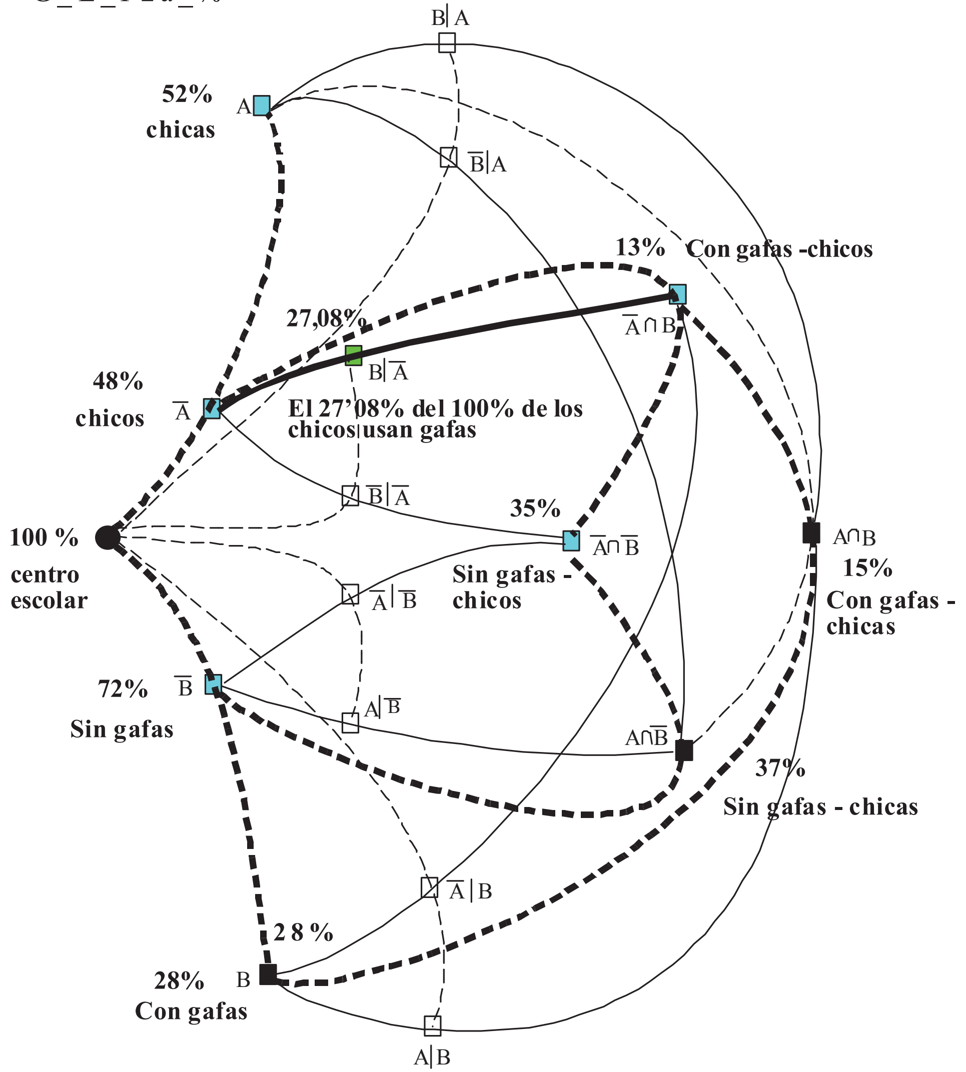
G_H_P2a_%



L_P2a_%


100%
centro
escolar
Chicos → 48%
Chicas → 52%
100%
Centro
escolar
Con gafas → 28%
13% chicas
15% chicos
Sin gafas → 72%
37% chicas
35% chicos
100
- 28
0 72%
28
- 15
13%
72
- 37
35%
13%
+ 35%
48%
28% —— 100%
13% —— x
x = 13·100 / 28 = 46'42%
48% —— 100%
13% —— x
x = 13·100 / 48 = 27'08%
• El 27'08% del 100% de los chicos usan gafas

G_L_P2a_%


B|A
52%
chicas
A
B̄|A
13% Con gafas -chicos
27,08%
Ā∩B
48%
chicos
Ā
B|Ā
El 27'08% del 100% de los chicos usan gafas
B̄|Ā
35%
100 %
centro
escolar
Ā∩B̄
Sin gafas - chicos
A∩B
15%
Con gafas - chicas
Ā|B̄
72%
Sin gafas
B̄
A|B̄
A∩B̄
37%
Sin gafas - chicas
Ā|B
28 %
28%
Con gafas
B
A|B

M_P2a_%

problema 4

28 % usa gafas → TOTAL

15 % chicos usan
37 % que no usa } chicas

28 − 15 = 13 → son chicos

100 —— 28

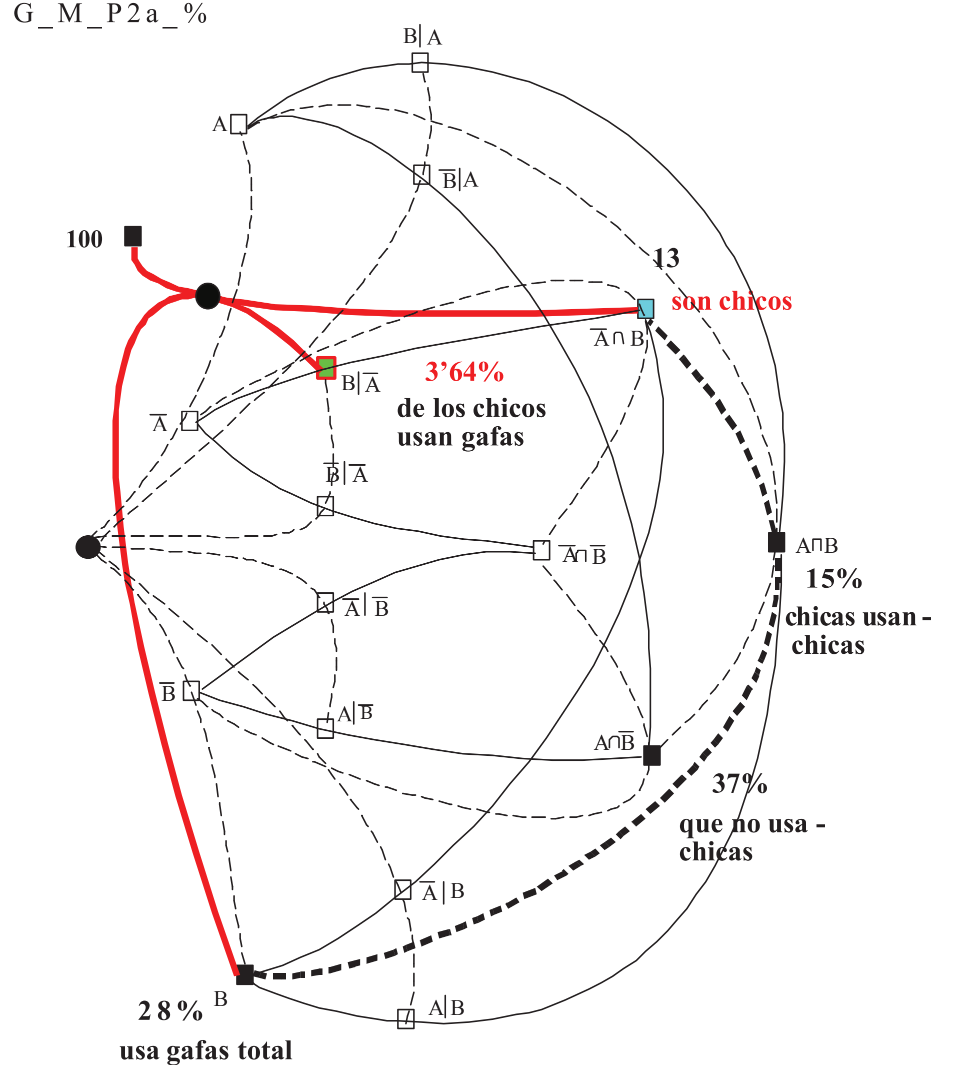
13 —— x

$$x = \frac{13 \cdot 28}{100}$$

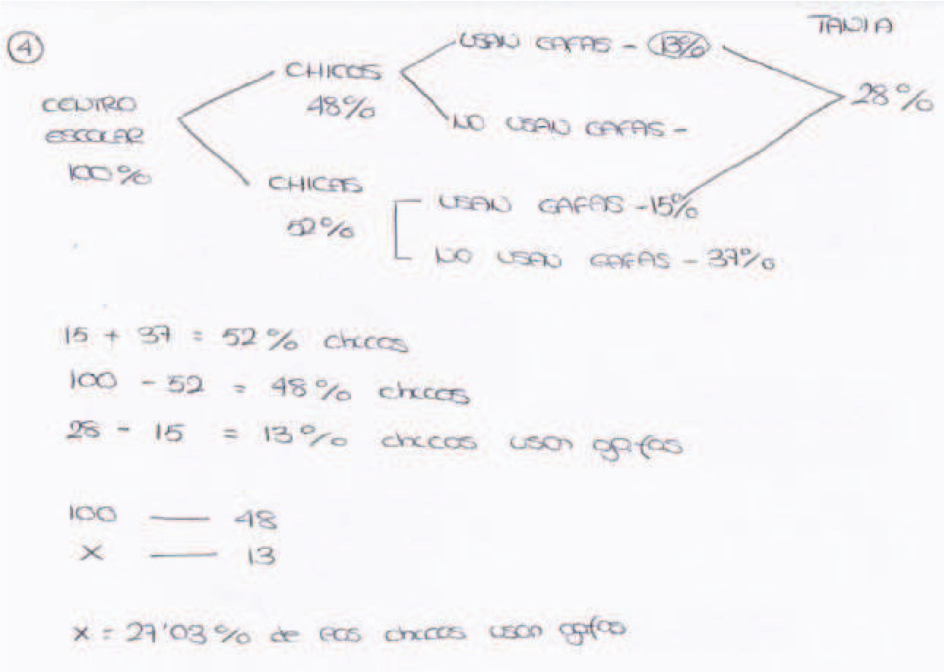
$$\boxed{x = 3'64\ \%}$$

de los chicos usan gafas.

G_M_P2a_%



T_P2a_%



4

TANIA

CENTRO ESCOLAR 100%

CHICOS 48%
- USAN GAFAS – 13%
- NO USAN GAFAS –

28%

CHICAS 52%
- USAN GAFAS – 15%
- NO USAN GAFAS – 37%

15 + 37 = 52 % chicas

100 – 52 = 48 % chicos

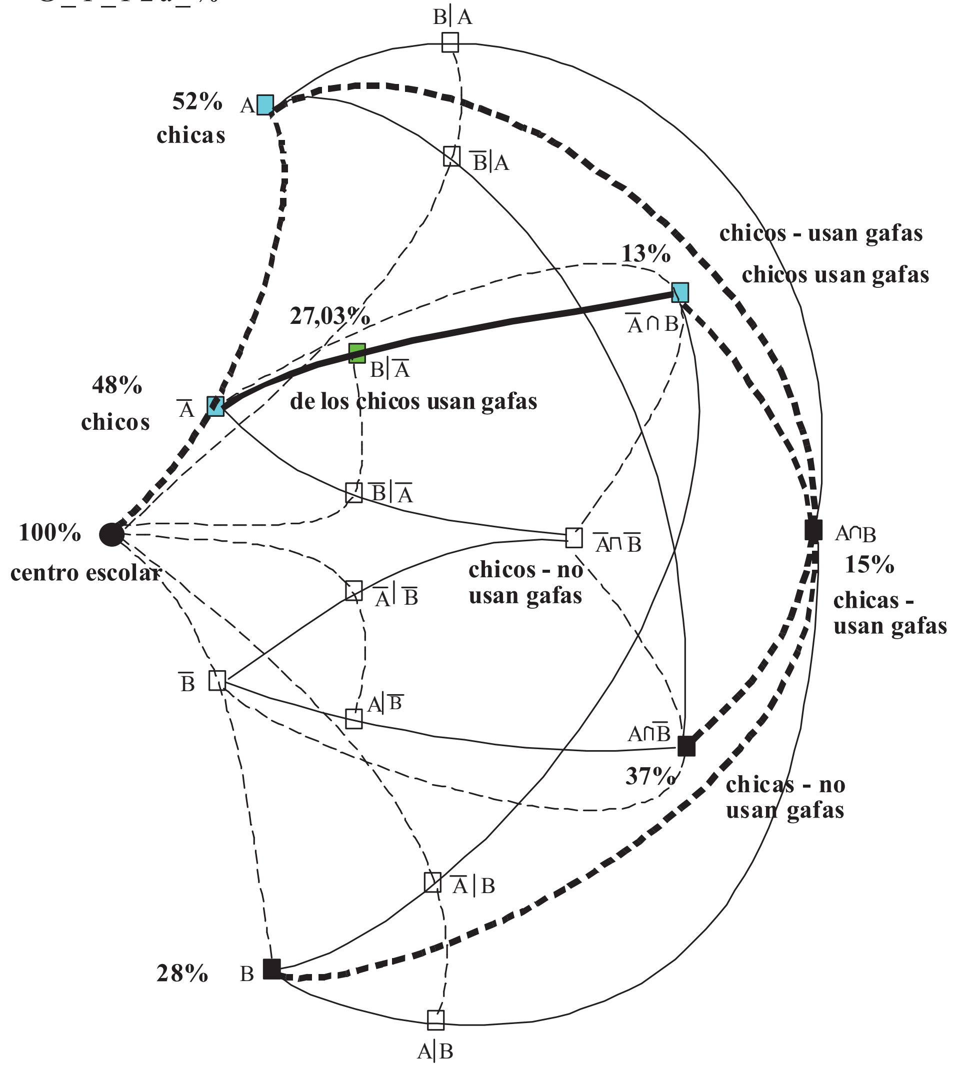
28 – 15 = 13 % chicos usan gafas

100 —— 48

x —— 13

x = 27'03 % de los chicos usan gafas

G_T_P2a_%



V_P2a_%

28%

13% usan

usan 15%

48% chicos

No 35%

chicas 52%

No 37%

72%

100 - 28 = 72 No usan gafas

72 - 37 = 35 chicas no usan gafas

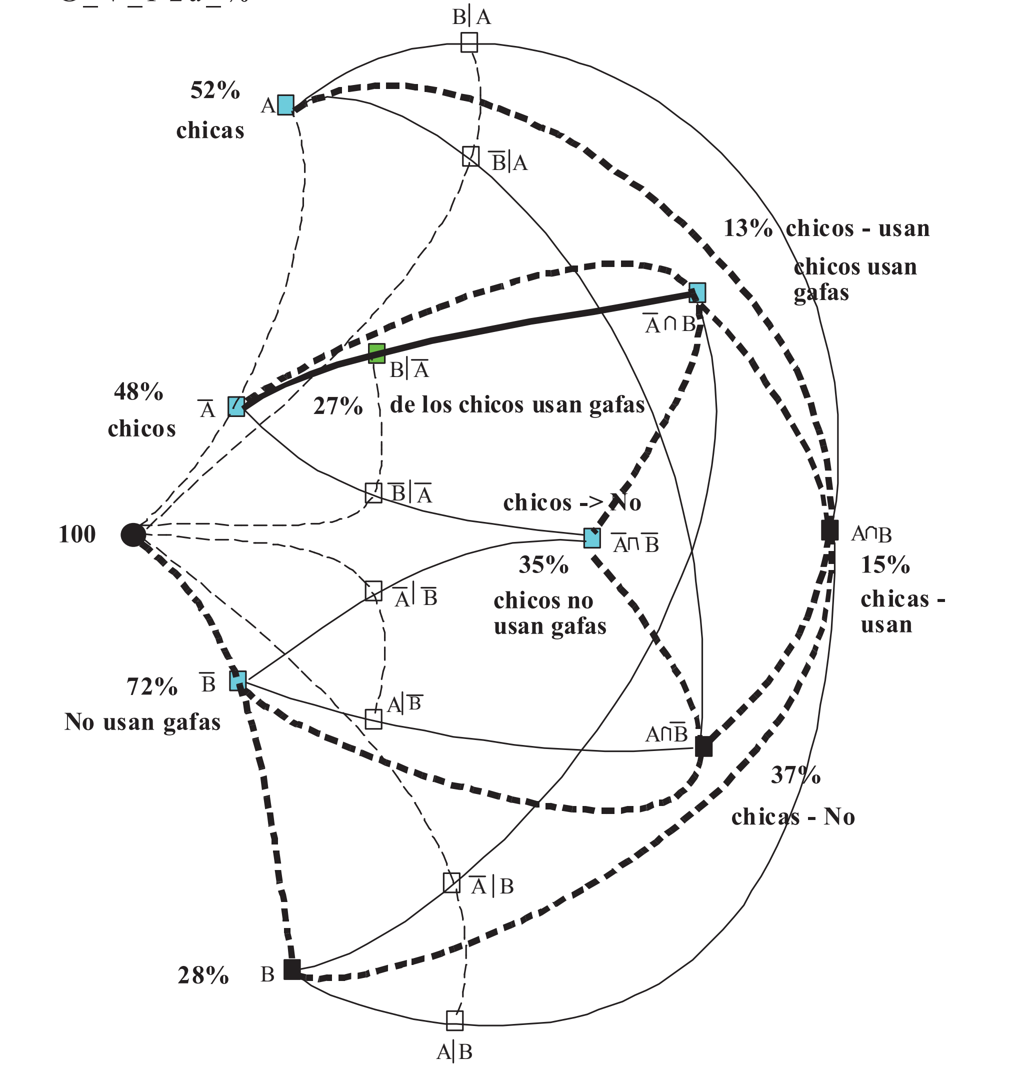
28 - 15 = 13 chicos usan gafas

48 —— 100

13 —— x

$$\boxed{x = \frac{13 \cdot 100}{48} = 27\%}$$ de los chicos usan gafas

G_V_P2a_%



ANEXO 14. Resoluciones y grafos de las resoluciones del Problema 9 en los pre-test.

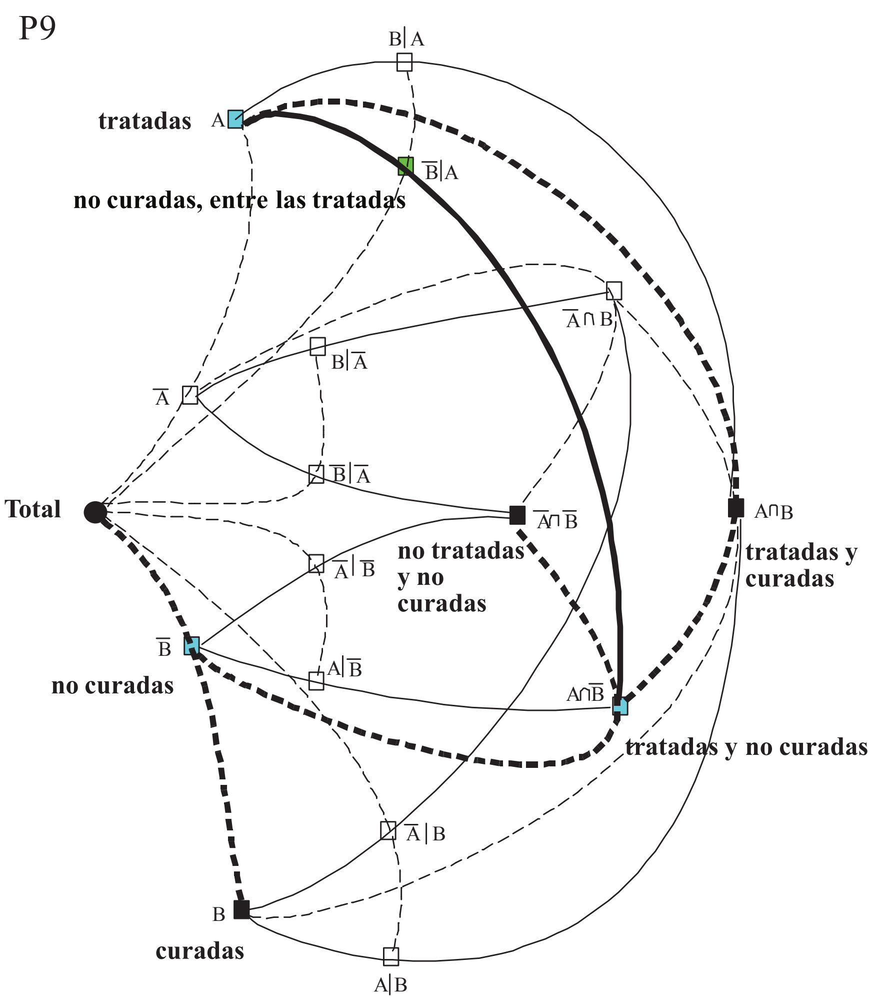
<u>Enunciado del problema en el Pre-test(F):</u>

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. En total, se han curado 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

<u>Enunciado del problema en el Pre-test(%):</u>

Un conjunto de personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado un 53% de dichas personas. Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

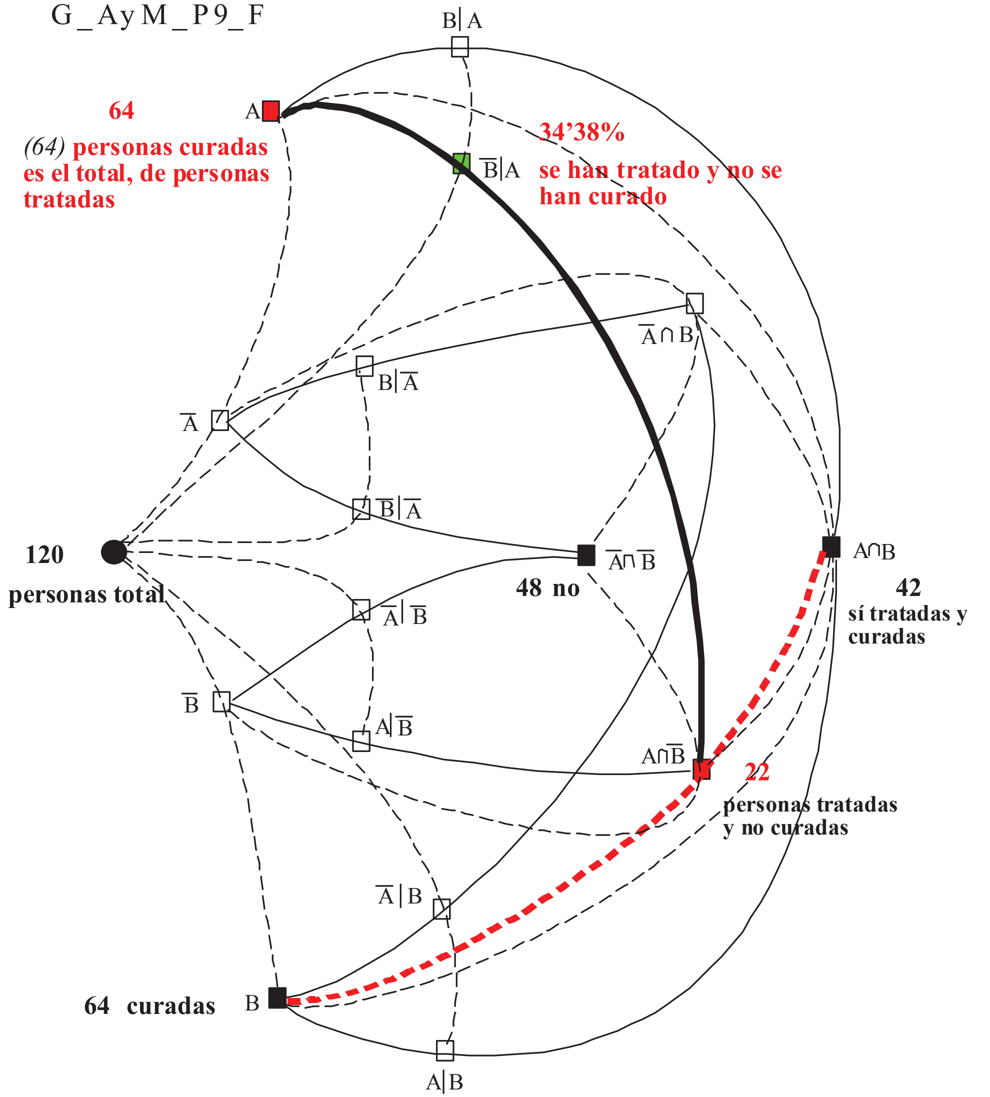
<u>Modelo de competencia:</u>



AyM_P9_F

Trascripción completa de la resolución filmada en el Anexo 20 (p. 597).

G_AyM_P9_F



B_P9_F

Problema 3

Belé

$\smile$ → 64 personas

120

42 48

$64 - 42 = 22$ personas se han curado por sí mismas

$120 - 48 = 72$ personas hay tomando antibiótico.

$$\begin{array}{r} 120 \\ -\ 48 \\ \hline 72 \end{array}$$

Resto ~~los~~ al total de la población el número de personas que no han tomado antibiótico

~~$72 - 64 = 8$ personas que no se han curado~~

~~$\begin{array}{r} 72 \\ -\ 64 \\ \hline 08 \end{array}$~~

~~Resto el número de personas que han tomado antibiótico al número de personas que están curadas, y me da el número de personas que no están curadas, pero si han tomado el antibiótico~~

~~120 —— 100~~

~~8 —— x~~

~~$x = \frac{8 \cdot 100}{120} = \frac{80}{12} =$~~

$80 \mid 12$

20 $\quad 6'6...$

080

42

$+\ 22$

48

112

$120 - 112 = 8$ personas no se han curado, aunque han tomado el medicamento

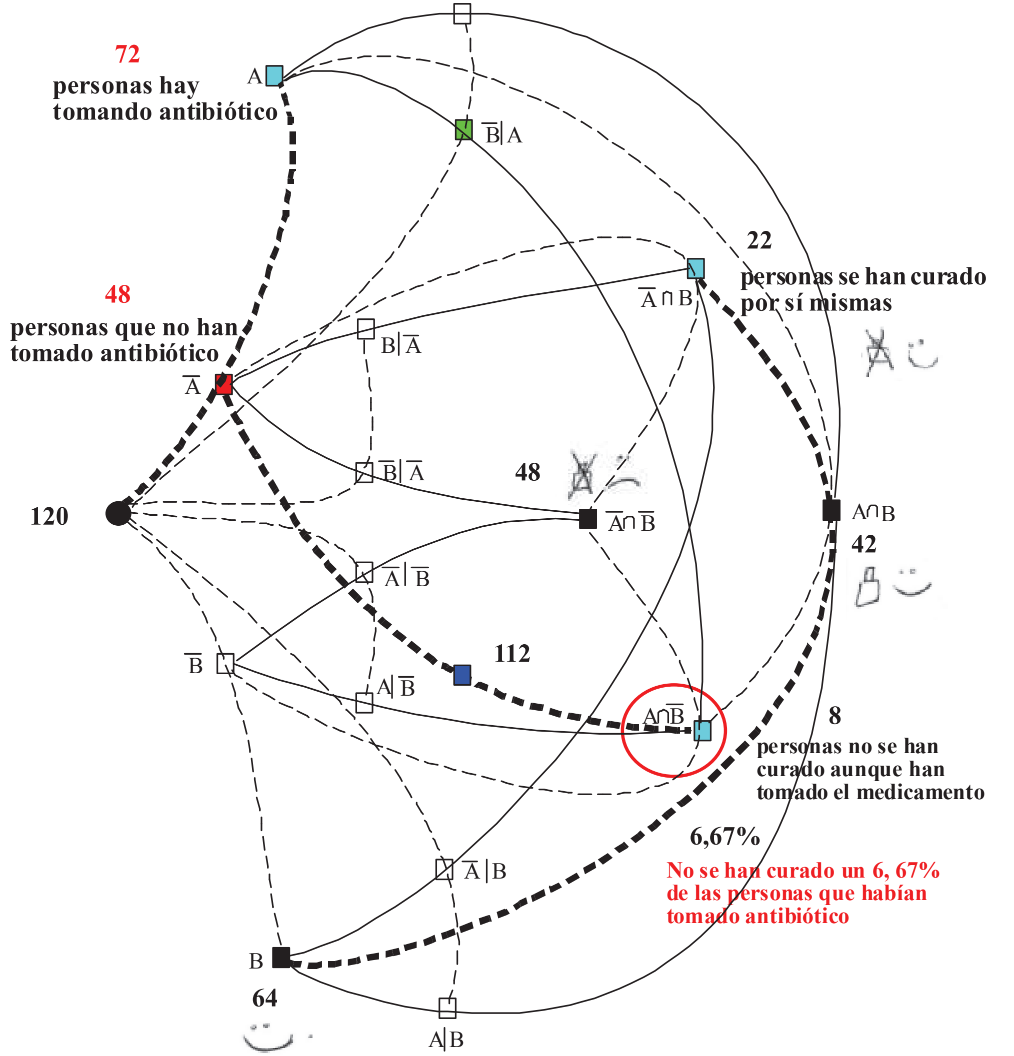
120 —— 100%

8 —— x

$x = \frac{8 \cdot 100}{120} = \frac{80}{12} \approx 6'67\%$

No se ha curado un $6'67\%$, de las personas que habían tomado ~~el~~ antibiótico.

G_B_P9_F



C_P9_F

Clea

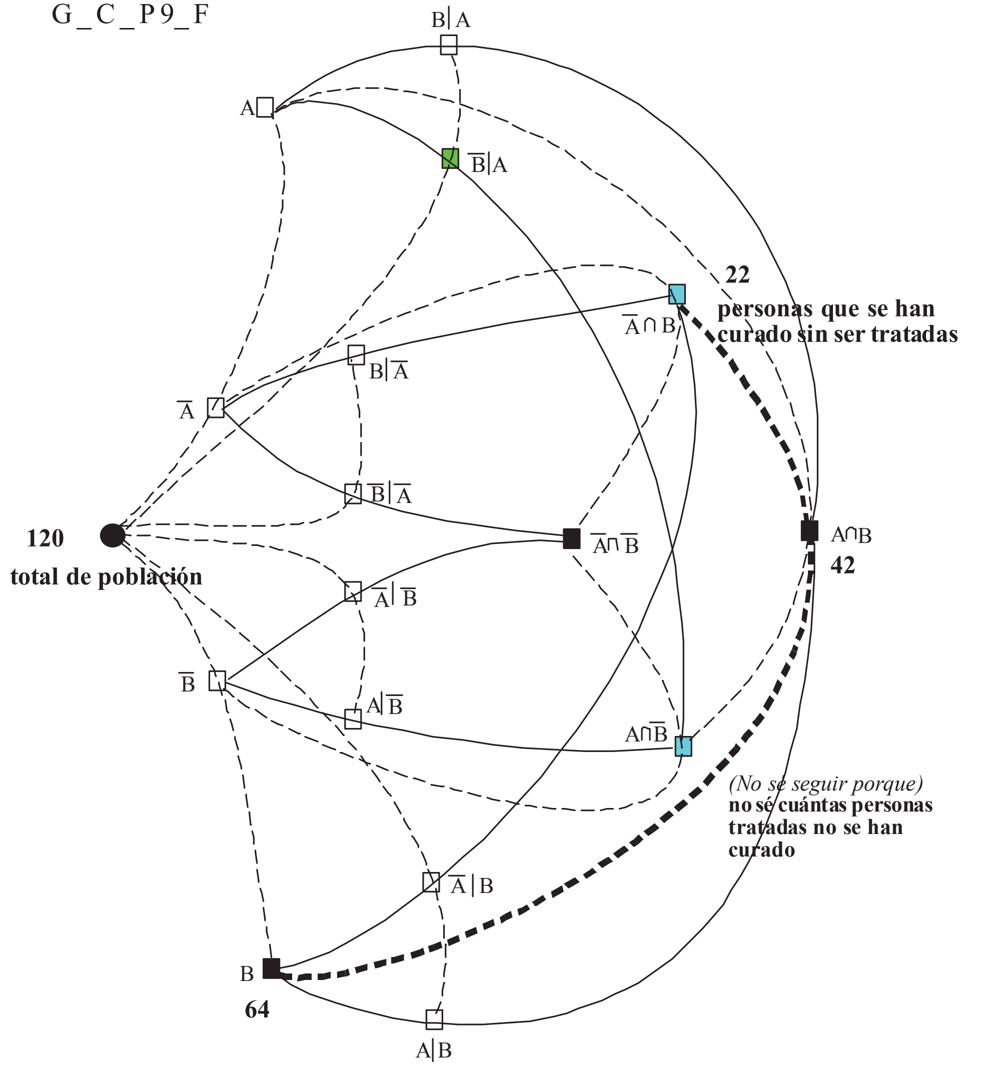
3 120 → total de población

$$\begin{array}{r} 64 \\ -\ 42 \\ \hline 22 \end{array}$$ → personas que se han curado sin ser tratadas

~~64 — 100% de~~

No sé seguir porque no sé cuántas personas tratadas no se han curado.

G_C_P9_F



H_P9_F

PROBLEMA 3

120 = TOTAL

42 = Personas tratadas y curadas.

48 = Personas no tratadas y no curadas.

64 = El total de persona curadas

TOTAL 120 TRATADA Y CURADAS 42 NO TRATADAS Y NO CURADAS 48

TOTAL CURADAS - 64

$$\begin{array}{rl} & \text{NO CURADAS} \quad 42 \\ + & \text{TOTAL CURADAS} \quad 64 \\ \hline & 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \text{TOTAL} \quad 120 \\ - & \text{CURADAS} \quad 64 \\ \hline & \text{NO CURADAS} \quad 56 \end{array}$$

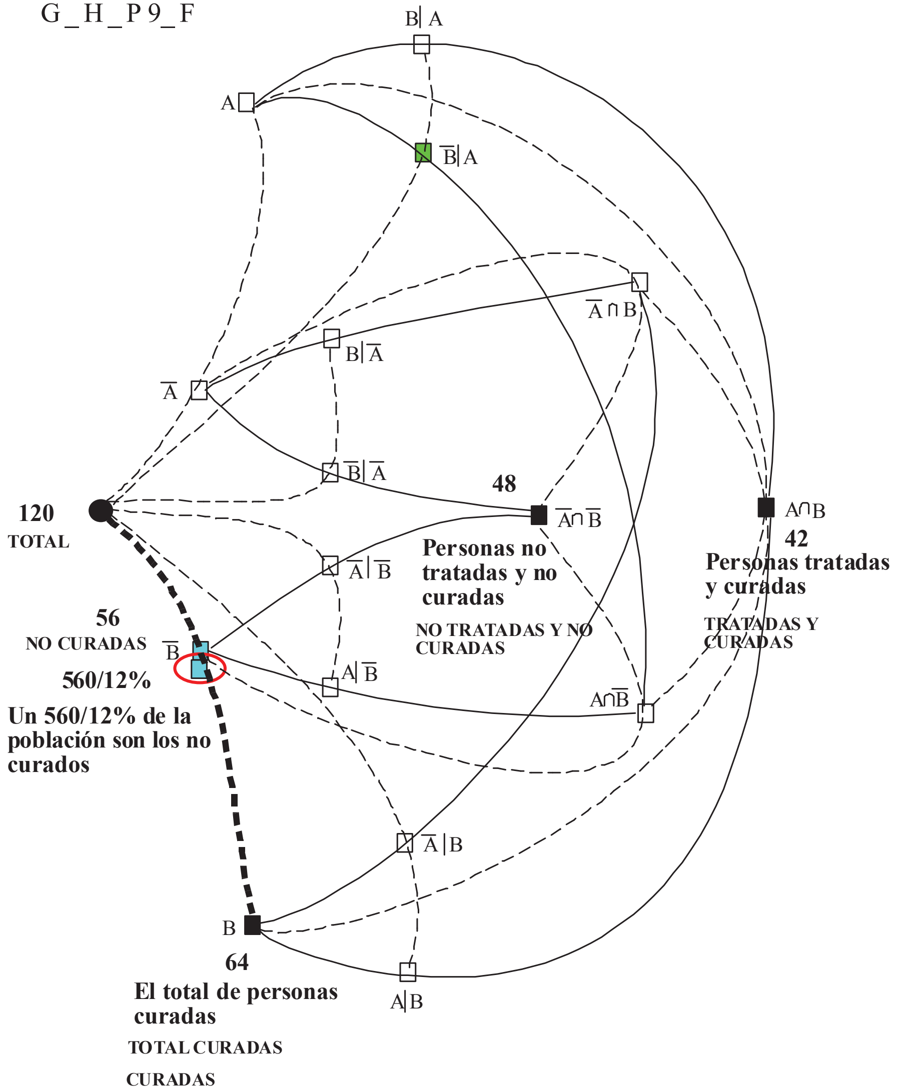
120 —— 100%

56 —— x

$x = \dfrac{56 \cdot 10\cancel{0}}{12\cancel{0}} = \dfrac{560}{12}$

Un $\dfrac{560}{12}$ % de la población son los no curados.

G_H_P9_F



L_P9_F

③

Lucía

120 personas → 42 personas (antibiótico) → curadas

48 personas (no antibiótico) → no curadas

⇩

64 p. se han curado

64 + 48 = 112

120 − 112 = 8 personas no se han curado

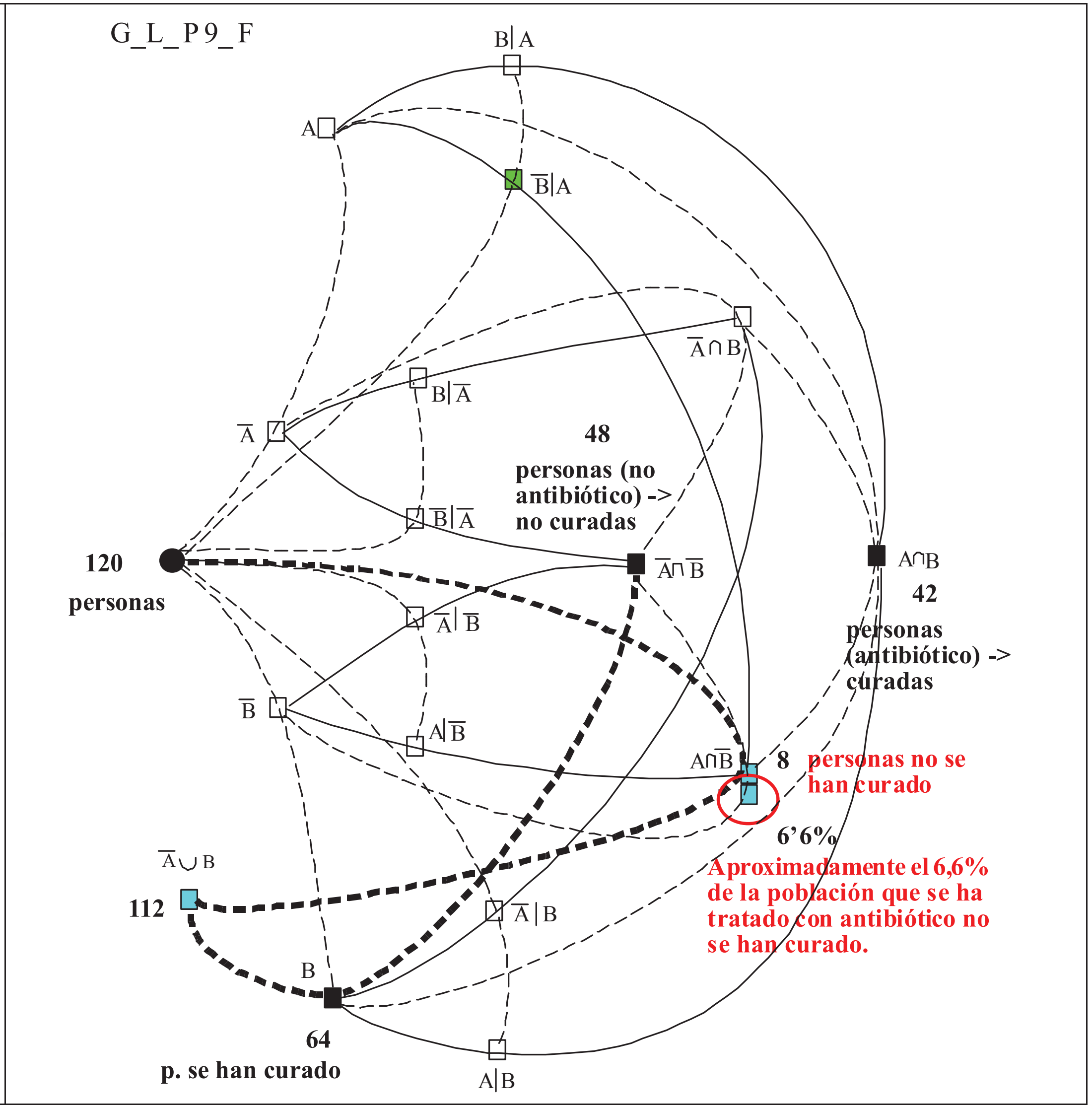
120 ——— 100%

8 ——— x

$x = \frac{8 \cdot 100}{120} = \frac{800}{120} \simeq 6'6\%$

800 | 120
080 | 6'6
080

·Aproximadamente el 6'6% de la población que se ha tratado con antibiótico no se han curado.



R_P9_F

Ramón

3.

total = 120

~~A120~~

~~%~~ Ant. ~~No~~ cura ~~sí~~ = ~~64~~ 42 = 22

42 si cura si ant.

48 ~~no~~ cura no ant.

~~420~~

Ant si = 120 - 48 = 72

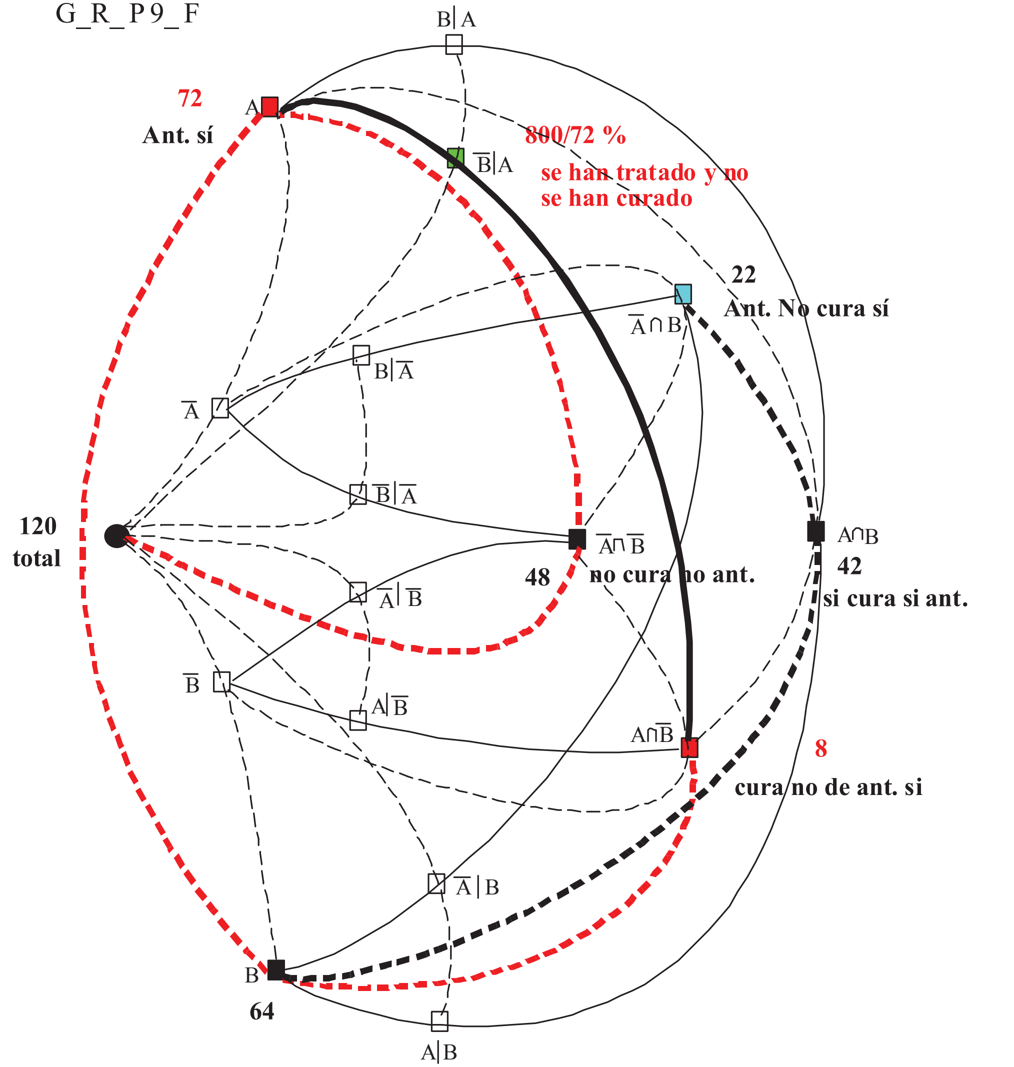
cura no de ant.si = 72 - 64 = 8

$$\begin{array}{r} 120 \\ -48 \\ \hline 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ -64 \\ \hline 08 \end{array}$$

72 = 100%

8 = x ⇒ $x = \frac{800}{72}$ % se han tratado y no se han curado.

G_R_P9_F



T_P9_F

(3)

~~$42 + 48 = 90$~~

~~$120 - 42 = 78$ personas~~

~~$64 - 42 = 22$ personas se han curado sin antibiótico~~

~~No sé resolverlo, porque no sé como averiguar el número de personas porcentaje que no se han curado~~

$120 - 64 = 56$ personas no se han curado

$56 - 42 = 14$ personas se han tratado con antibiótico pero no se han curado

~~% personas~~

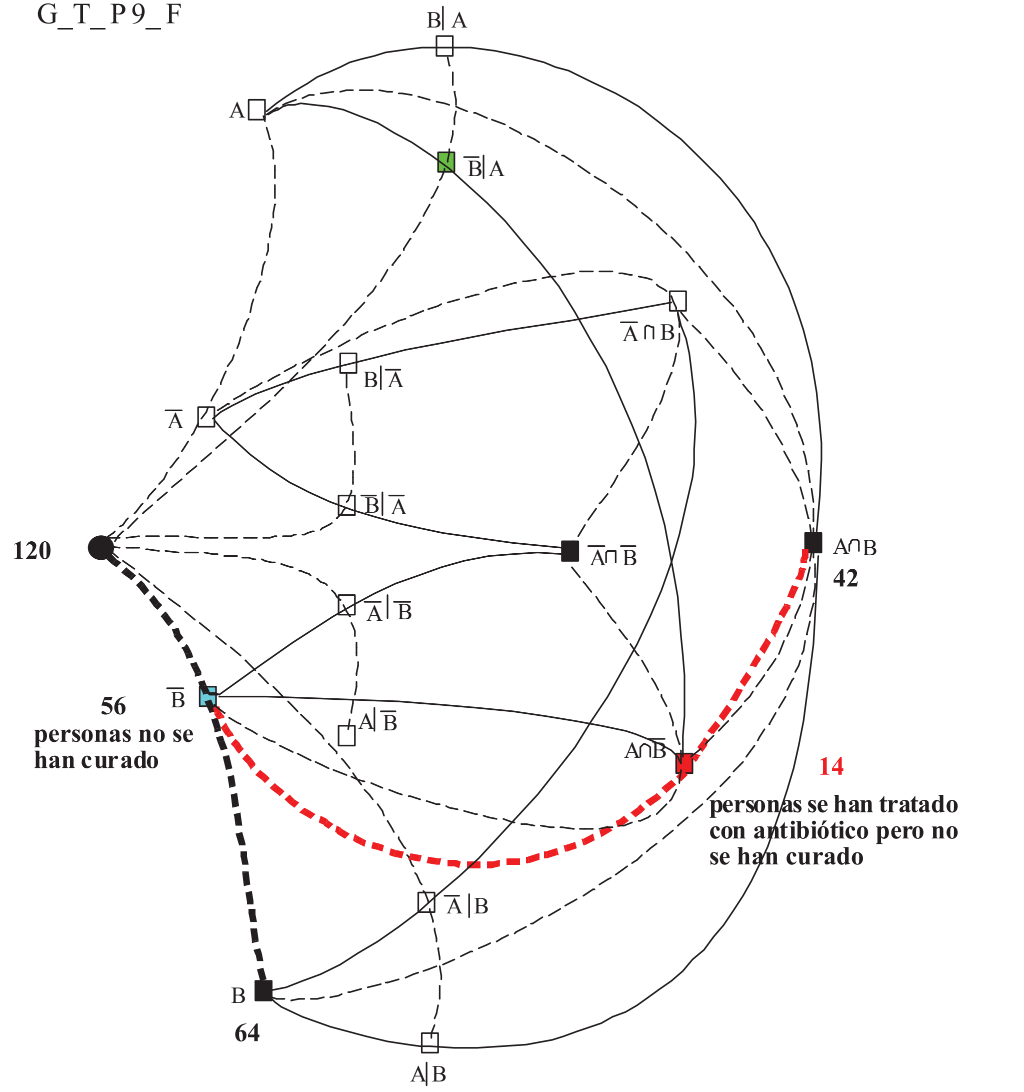
~~100 — 56~~

~~14 — x~~

~~$x = \frac{14 \cdot 56}{100} = 7'84$~~

~~$14 \times 56 = 84 + 70 = 784$~~

G_T_P9_F



V_P9_F

Versión

3

69 - 42 = 22 curadas sin Antibiótico

42 A. C.

48 N.C.

64 C

120 - 64 = 56 No curadas

42 + 18 = 60 Tratadas con Antibiótico

56 - 48 = 18 No curadas con antibiótico

~~120 — 100%~~

~~56 — x~~

~~5600 / 120~~

~~$x = \frac{100 \cdot 56}{120} = \frac{5600}{120}$~~

60 — 100 %

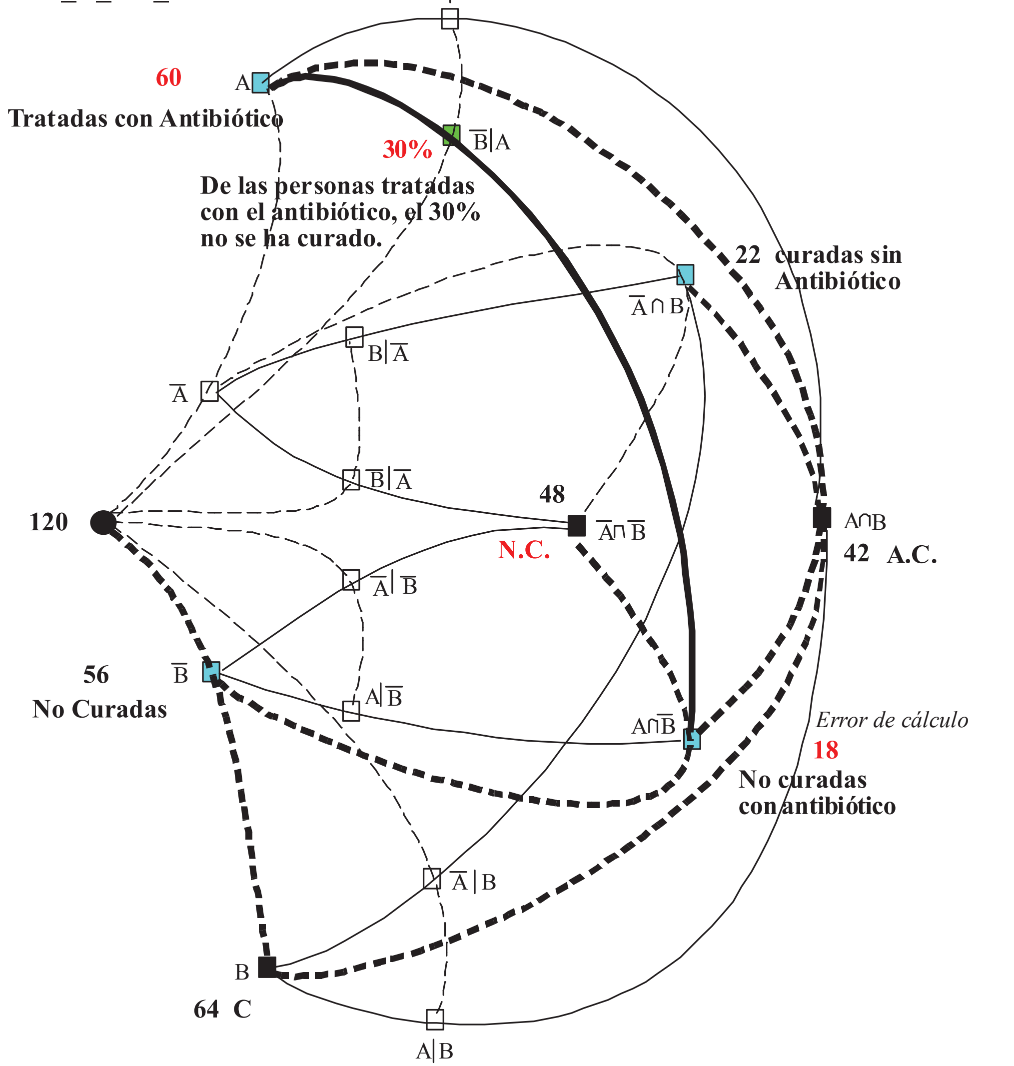
18 — x

$x = \frac{1800}{60} = 30\ \%$

180 | 60
00 | 30

De las personas tratadas con el antibiótico el 30 % No se ha curado.

G_V_P9_F



A_P9_%

(2) tratadas ~~35%~~ 60% 65% de este porcentaje curadas

no tratadas 40%

~~tratadas 60%~~

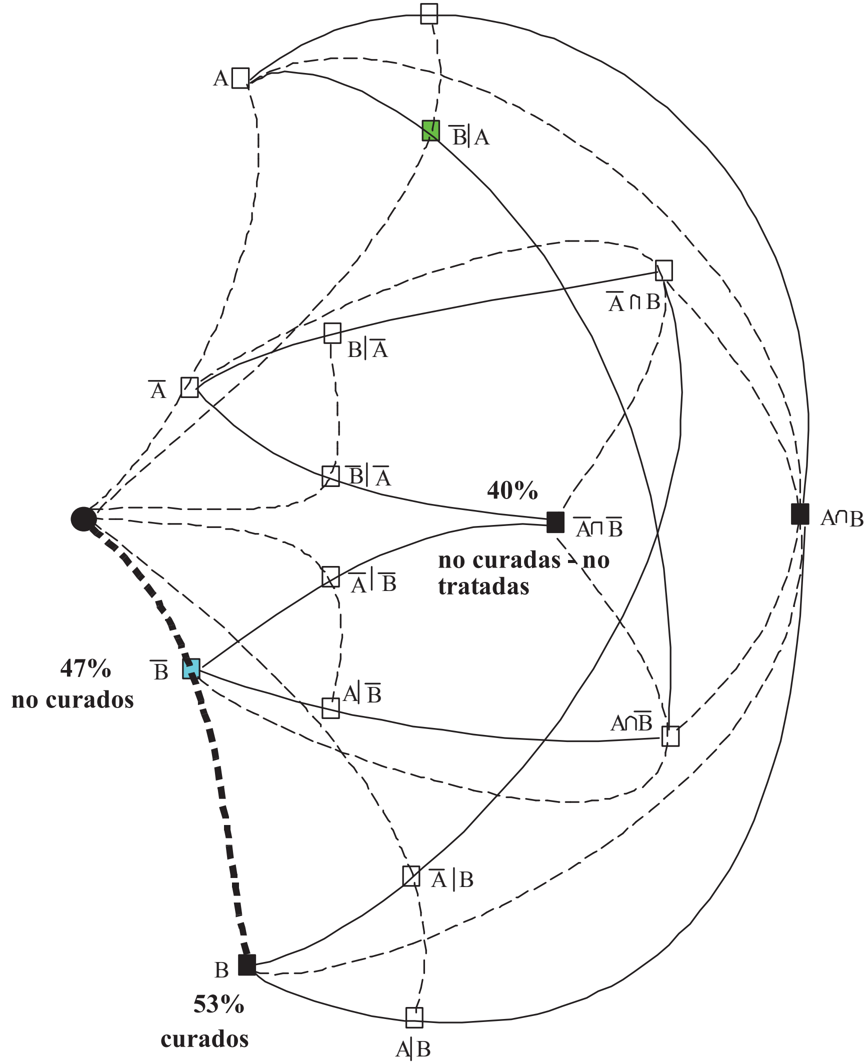
no ~~tratadas 40%~~

~~tratadas 60%~~ ~~de este 60%~~ ~~35% curadas~~

~~tratados~~ curados -53%

~~no tratados~~ no curados 47% 40% no tratados

G_A_P9_%



B_P9_%

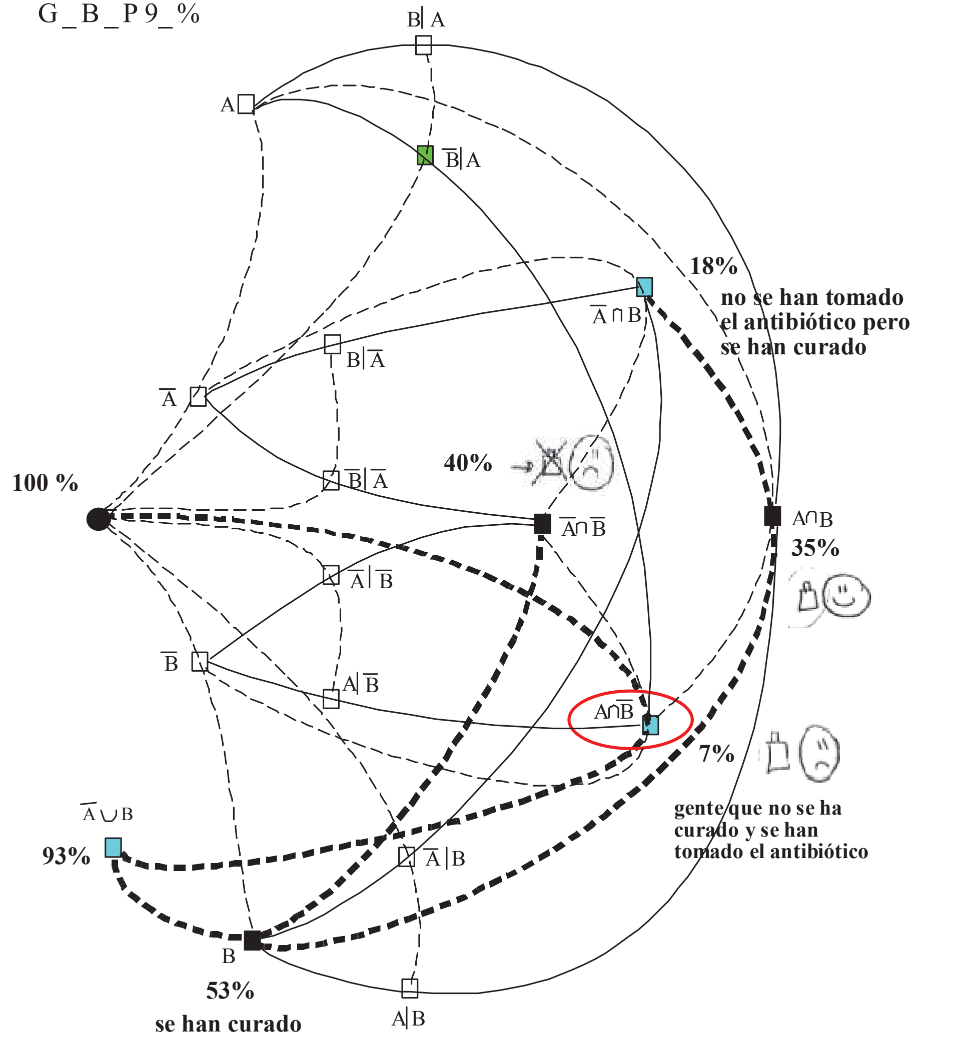
Problema 2

100% — 53% → se han curado
— 35% →
— 40% →
— $\boxed{7\%}$ →

$$\begin{array}{r} 53 \\ -\,35 \\ \hline 18\% \end{array}$$ → no se han tomado el antibiótico, pero se han curado.

$$\begin{array}{r} 53 \\ +\,40 \\ \hline 93\% \end{array}$$ → $$\begin{array}{r} 100\% \\ -\,93\% \\ \hline \boxed{7\%} \end{array}$$ → gente que no se ha curado y se han tomado el antibiótico

G_B_P9_%



C_P9_%

Problema 2:

Curado → 53%

Antibiótico → se ha curado el 35%

No antibiótico → no se han curado el 40%

¿% que no se ha curado con antibiótico?

~~53% → 100% de personas curadas~~

~~35% con antibiótico → x~~

~~$x = \frac{35 \cdot 100}{53} = 66\%$ personas con antibiótico curadas~~

~~53% → 100% de personas curadas~~

100 − 53 = 47% son personas no curadas.

~~47% → 100% de personas no curadas~~

Si de ese 47% de personas no curadas, el 40% no ha tomado antibiótico, el 7% restante sí lo ha tomado.

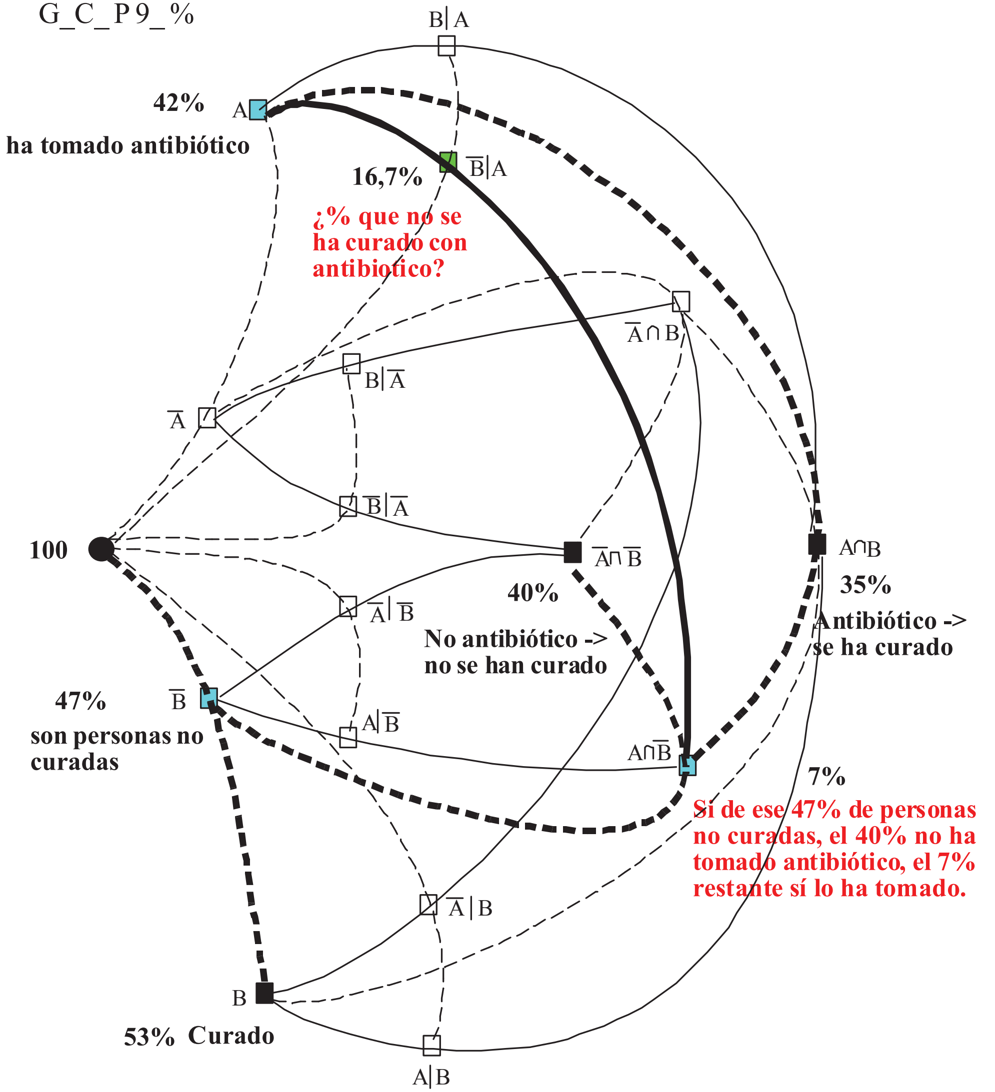
Si un 35% han tomado antibiótico y se han curado, y un 7% lo ha tomado, pero no se ha curado, un 42% ha tomado antibiótico.

42% → 100% de personas que han tomado antibiótico

7% → x

$x = \frac{7 \cdot 100}{42} = \boxed{16'7\%}$

G_C_P9_%



H_P9_%

2-

53% Curados

35% tratadas

40% No tratadas, no curadas.

¿% No curados?

53% del conjunto total.

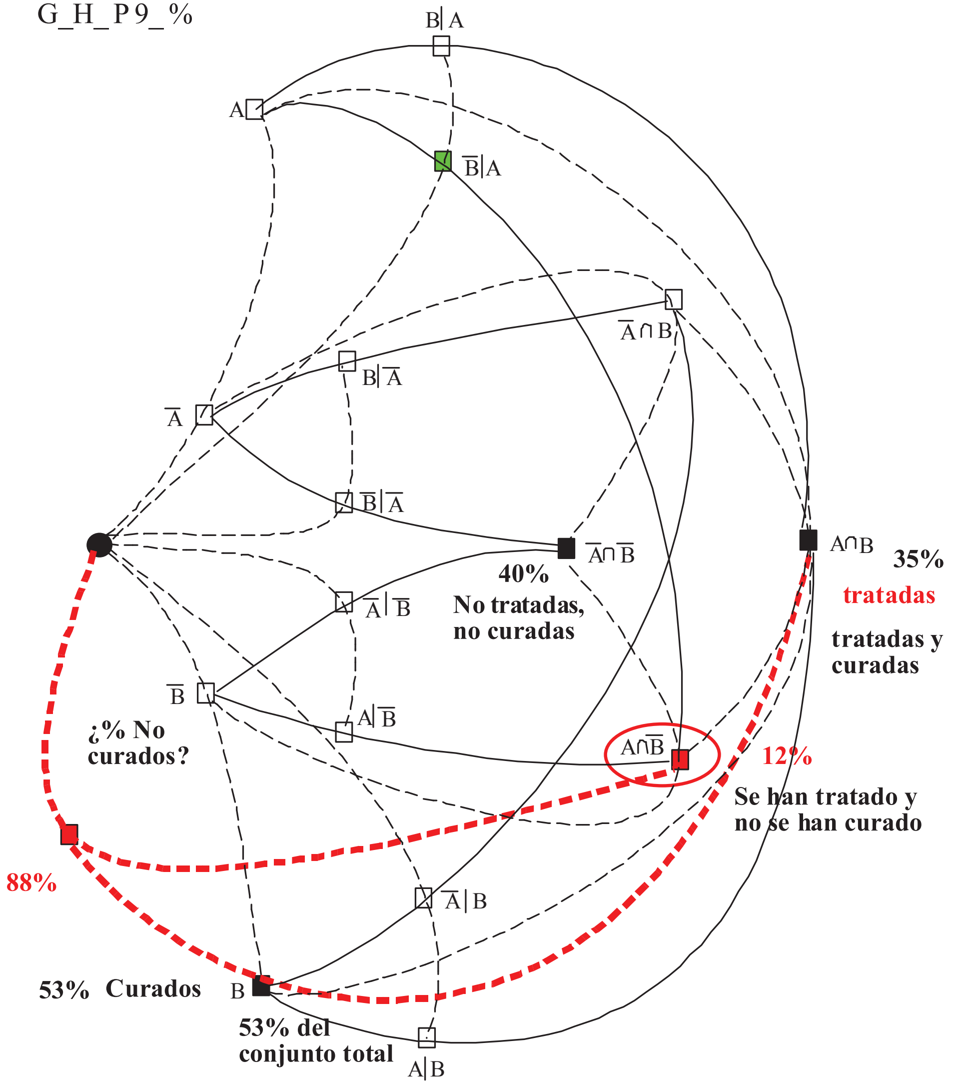
\+ 35% tratadas y curadas

88%

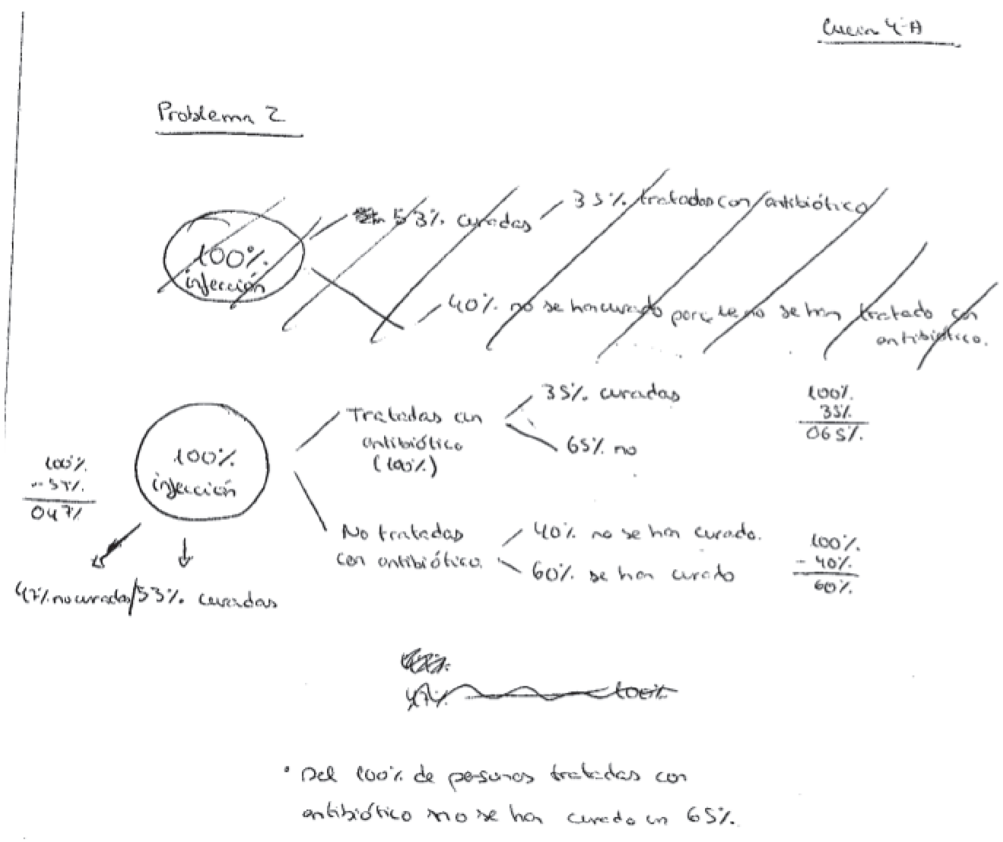
~~100%~~

Un 12% se han tratado y no se han curado. ?

G_H_P9_%



L_P9_%


Curso 4-A

Problema 2

~~100% infección — 53% curadas — 35% tratadas con antibiótico — 40% no se han curado porque no se han tratado con antibiótico.~~

100% infección

Tratadas con antibiótico (100%) — 35% curadas — 65% no

No tratadas con antibiótico — 40% no se han curado. — 60% se han curado

100% - 35% = 065%

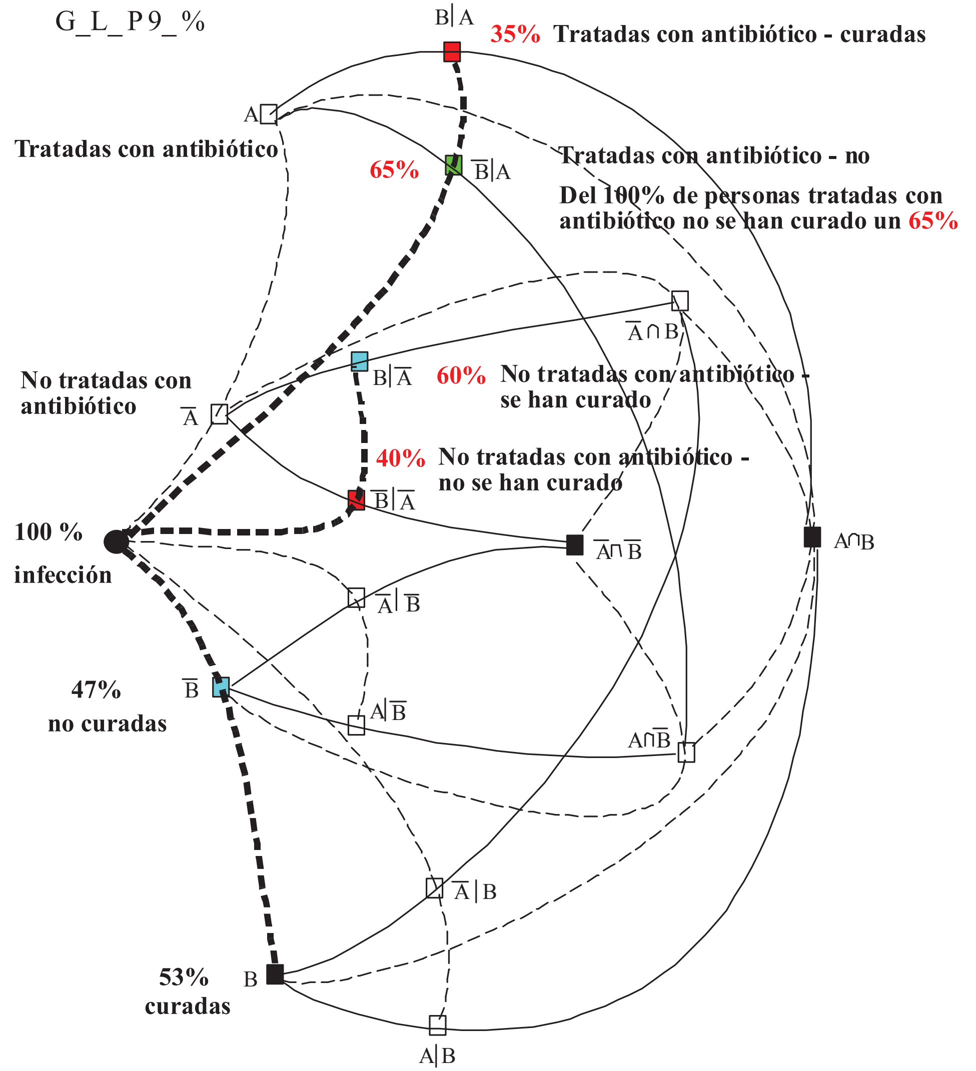
100% - 40% = 60%

100% - 53% = 047%

47% no curadas / 53% curadas

• Del 100% de personas tratadas con antibiótico no se han curado un 65%.

G_L_P9_%



M_P9_%

problema 2

53% curados

35% curadas y tratadas

40% no tratadas / no curados

53 + 35 = 88 personas tratadas.

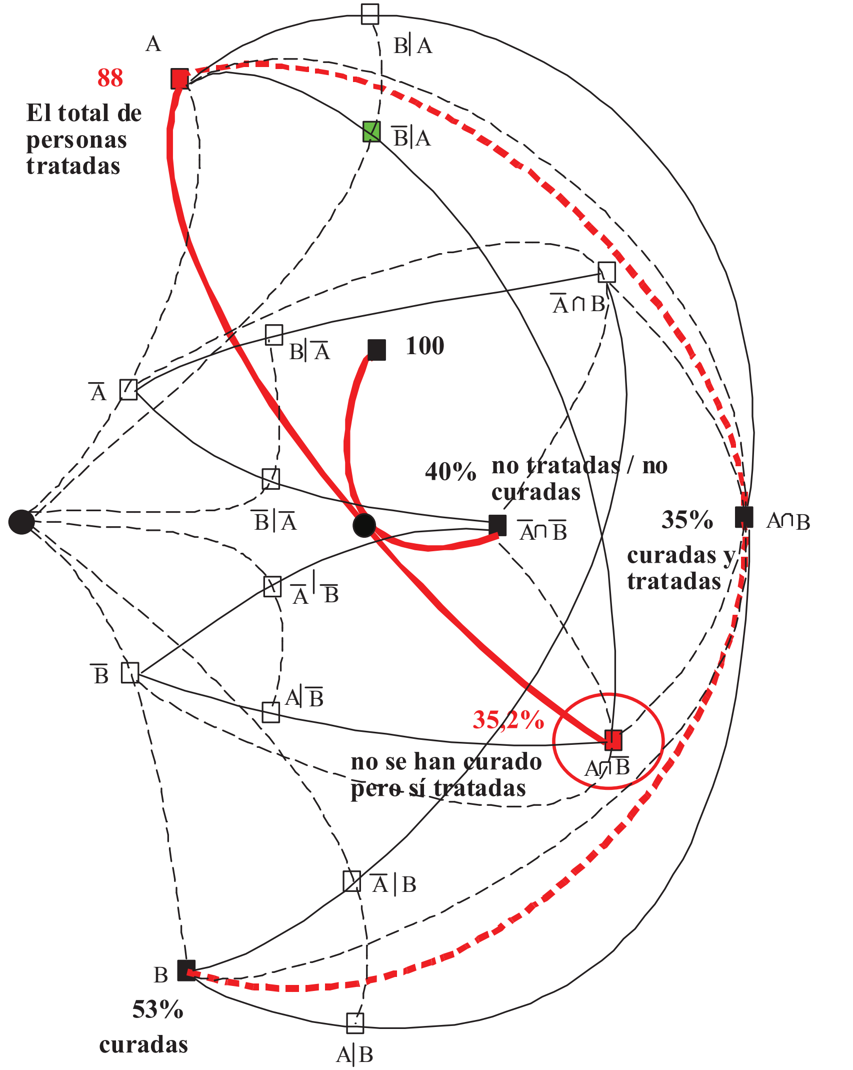
El total de ↗

100 ——▷ 88

40 ——▷ x

$$x = \frac{40 \times 88}{100} = 35'2\%$$ no se han curado. pero si tratadas.

G_M_P9_%



T_P9_%

②

PERSONAS 100%
- CURADO 53%
  - CON ANTIBIÓTICO 35%
  - SIN ANTIBIÓTICO - 18%
- NO CURADO 47%
  - CON ANTIBIÓTICO - 7%
  - SIN ANTIBIÓTICO 40%

100% - 53% = 47% personas no curados

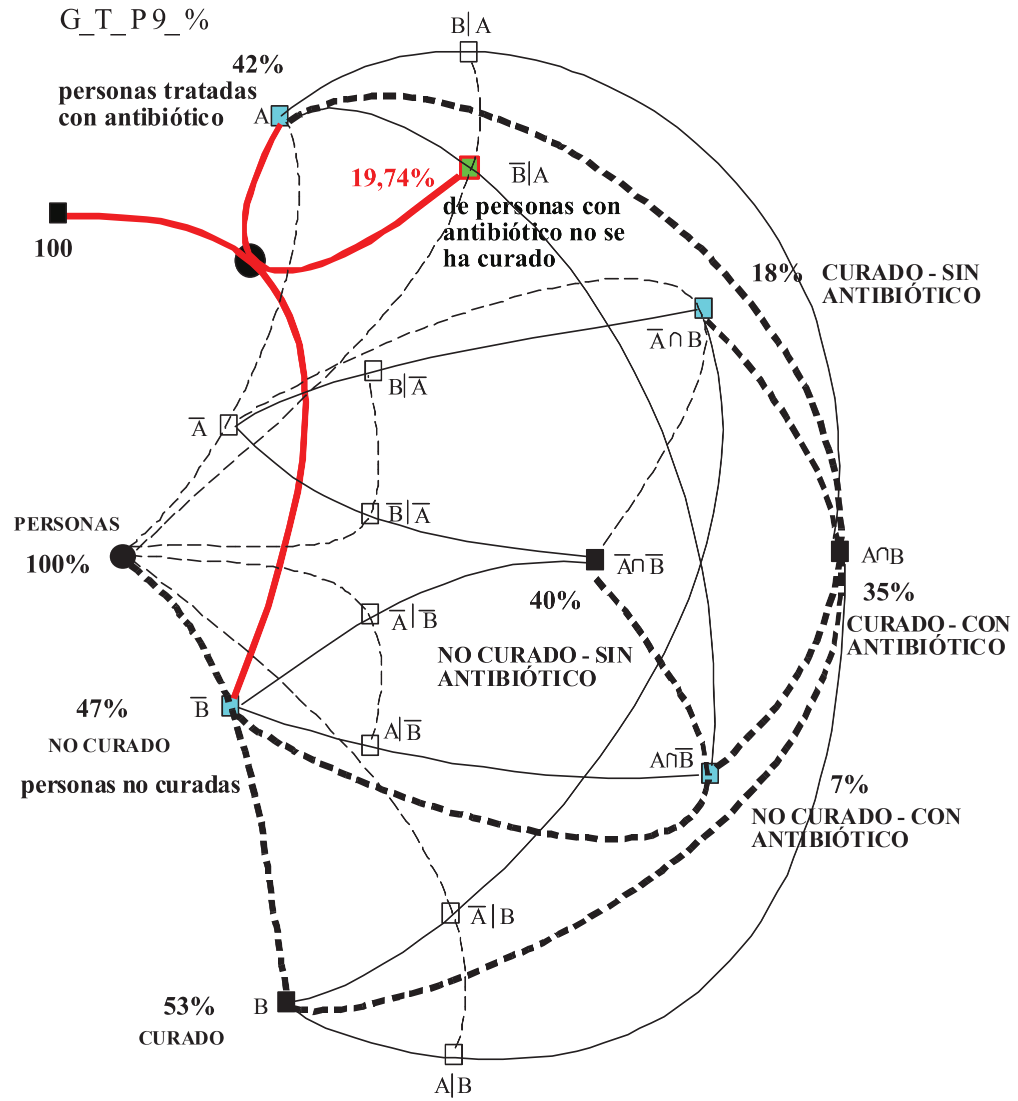
Personas tratados con antibiotico:

35 + 7 = 42%

100 —— 42

47 —— X

X = 19'74 % de personas con antibiotico no se ha curado



V_P9_%

(2)

curadas 53% → 35% Antibiótico ← Total 100%

47% enfermas → 40% No se han tratado

7% Se han tratado y no se han curado.

No se han curado

$100 - 35 - 40 = x$

$x = 25\%$ ~~se ha~~ → se ha tratado con ~~el~~ antibiótico y no se ha curado o no se ha tratado y sí que se ha curado.

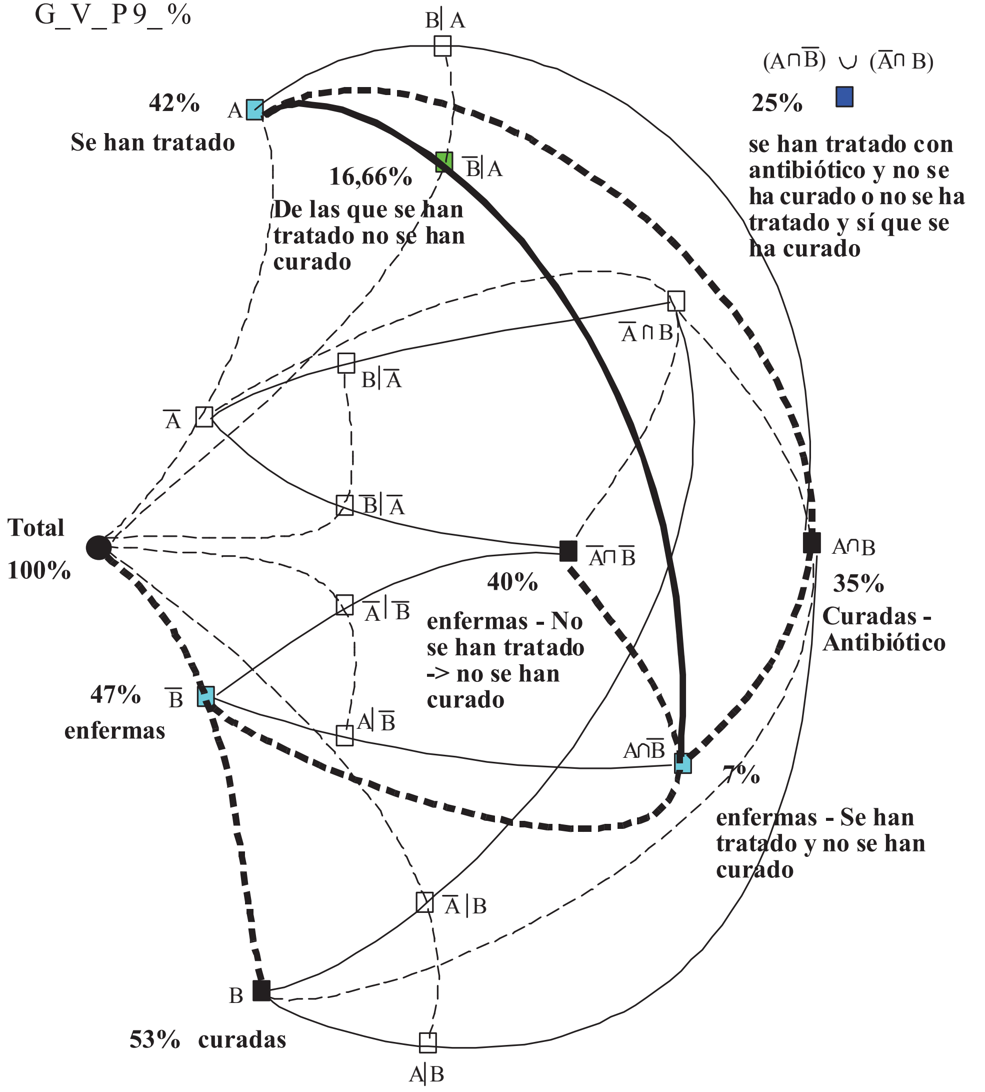
$35 + 7 = 42\%$ se han tratado

42 100

7 x

$x = \frac{7 \cdot 100}{42} = 16,66\%$ ~~se han tra~~ De las que se han tratado no se han curado.

G_V_P9_%



ANEXO 15. Resoluciones y grafos de las resoluciones del Problema 10 en los pre-test.

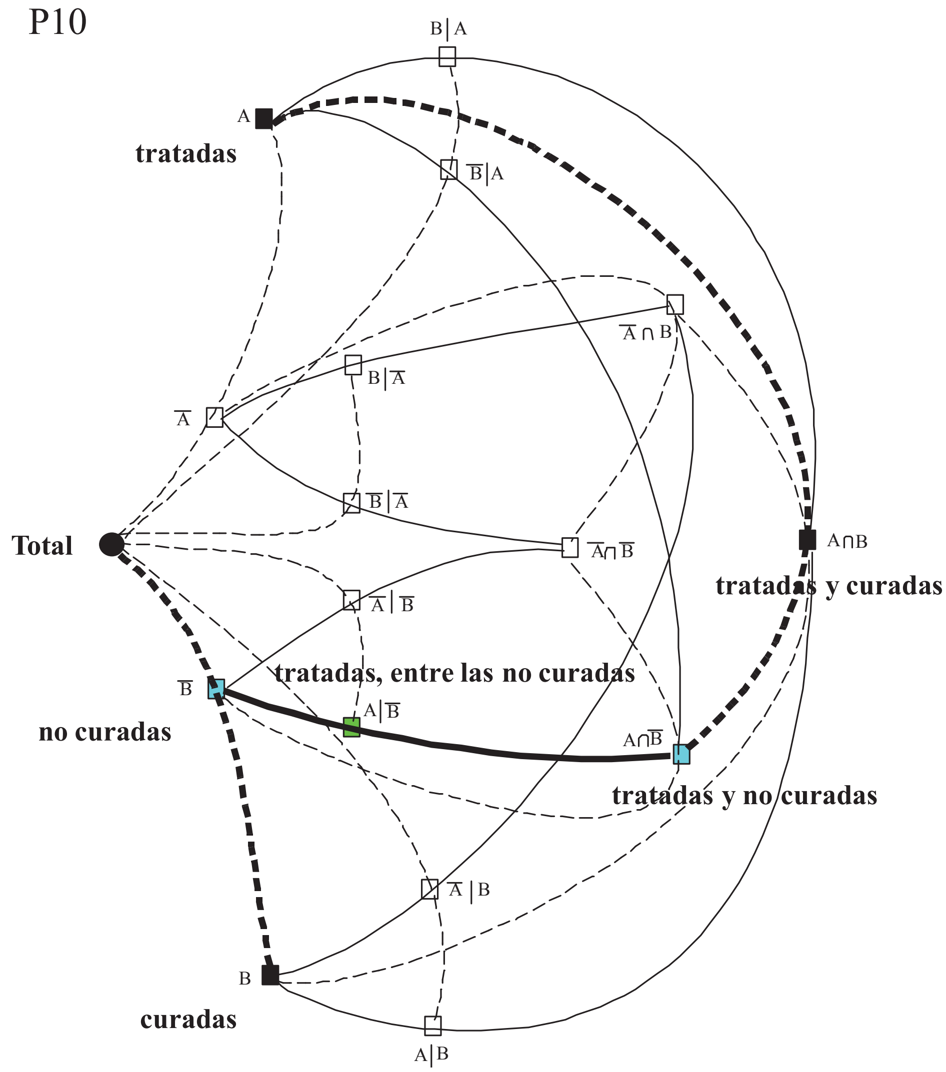
Enunciado del problema en el Pre-test(F):

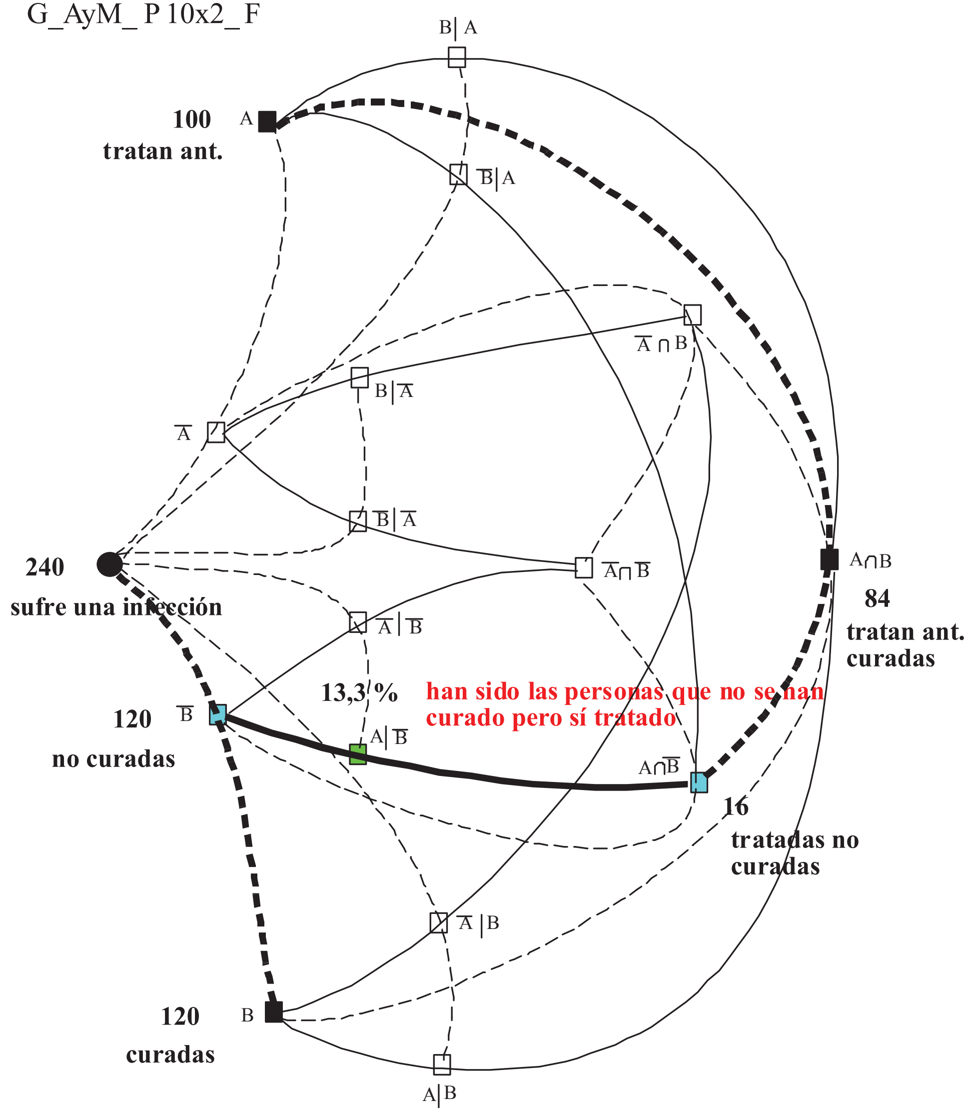
Una población de 240 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 120 personas, 100 se han tratado con el antibiótico y 84 se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

Enunciado del problema en el Pre-test(%):

Una población sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado el 53% de las personas, un 42% se han tratado con el antibiótico y un 35% se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

Modelo de competencia:



AyM_P10x2_F	G_AyM_ P 10x2_ F
Trascripción completa de la resolución filmada en el Anexo 21 (p. 603).	

B_P10x2_F

Problema 4

Belén.

240

120

100

84

120 − 84 = 36 personas se han curado sin ~~pa~~ antibiótico.

$$\begin{array}{r} 120 \\ -\ 84 \\ \hline 36 \end{array}$$

~~Resta~~ Al nº de personas que están bien le resto las personas que ~~se~~ han tomado medicamento y están bien.

100 − 84 = 16 personas se han tomado el medicamento y no están bien.

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 84 \\ \hline 16 \end{array}$$

~~Resta~~ A las personas que se han tomado el medicamento les resto las personas que se lo han tomado y están bien.

240 —— 100%   Hago una regla de tres para calcular un %

16 —— x

$$\left[x = \frac{16 \cdot 10\cancel{0}}{24\cancel{0}} = \frac{160}{24} \approx 6'67\% \right]$$

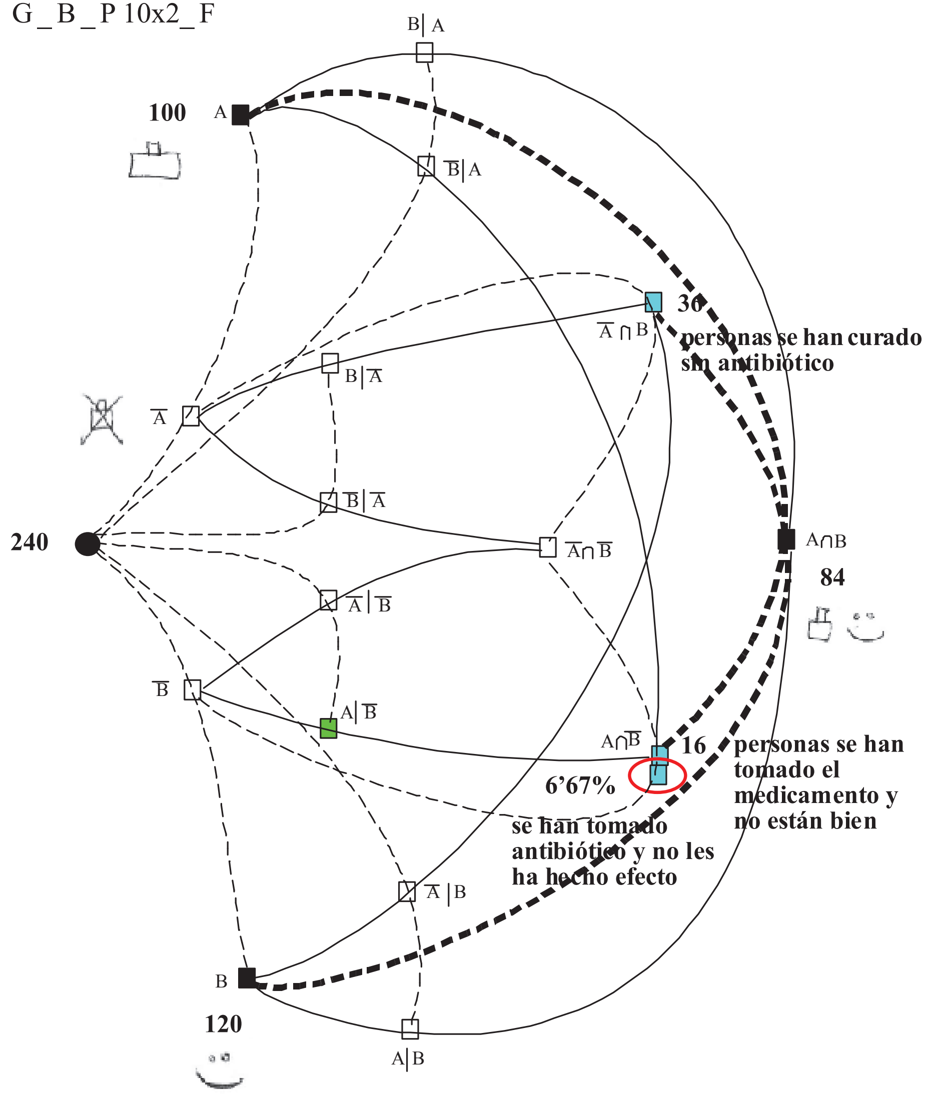
"El 6'67% se han tomado ~~medic~~ antibiótico y no les ha hecho efecto

160 | 24

4   76'6...

160

G_B_P 10x2_F



C_P10x2_F

Clea

(4) ~~200~~ 100 + 84 = 184 → nº de tratados con el antibiót.

$$\begin{array}{r} 240 \\ -\ 184 \\ \hline 056 \end{array}$$ → personas no tratadas

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 84 \\ \hline 016 \end{array}$$ → personas tratadas que no se han curado

56 + 16 = 72 → personas que no se han curado

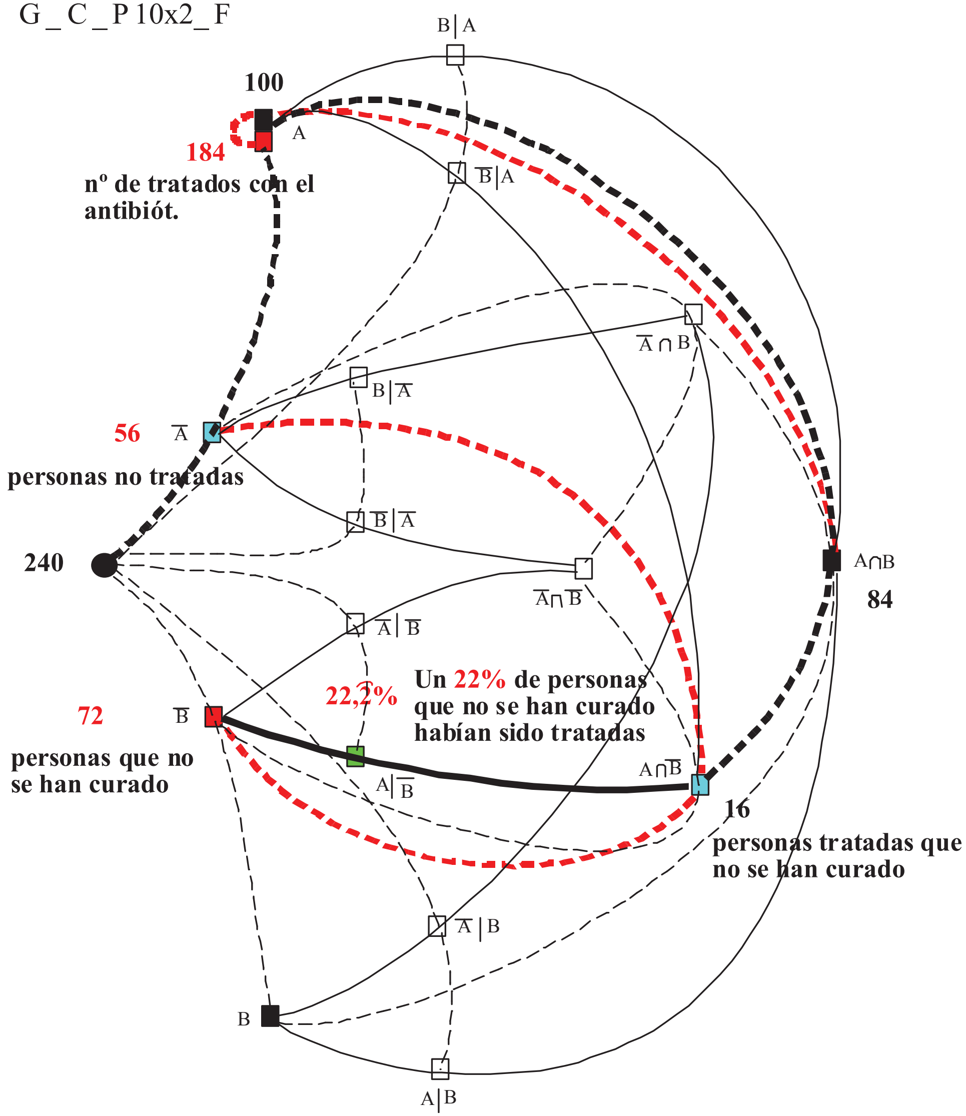
72 — 100% de pers. no curadas
16 — x

$x = \frac{16 \cdot 100}{72} = \frac{1600}{72} = 22'\hat{2}\%$

1600 | 72
160   22'2̂ %
16

R: Un ~~22~~ 22'2% de personas que no se han curado habían sido tratadas.

G_C_P10x2_F



H_P10x2_F

PROBLEMA 4

Total 240
120 Curadas en total
100 tratadas
84 tratadas y curadas
% de personas tratadas que no se han curado = ¿?

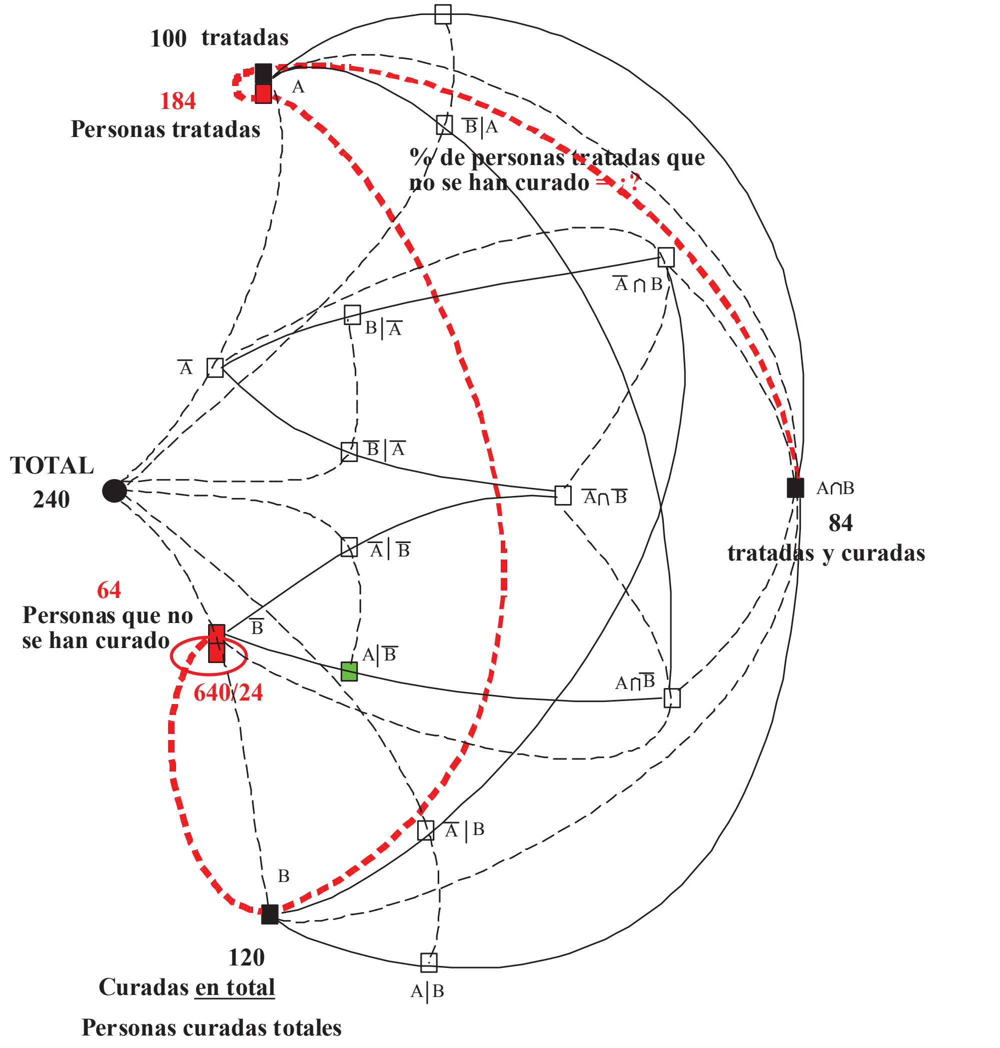
~~84 tratadas y curadas~~
~~120 Curadas en total~~
~~204~~

100 tratadas
+ 84 tratadas y curadas
184 Personas tratadas
− 120 Personas curadas totales
064 Personas que no se han curado

240 —— 100 %
64 —— x

$x = \frac{640\cancel{0}}{24\cancel{0}}$

G_H_P10x2_F



L_P10x2_F

Lucía

(4)

240 personas → 120 p. curadas → 100 (antibiótico) → no se han curado.

→ 84 (antibiótico) → curadas.

240 − 120 = 120 → no se han curado. De estas 120, 100 han sido tratadas con antibiótico.

120 ——— 100%

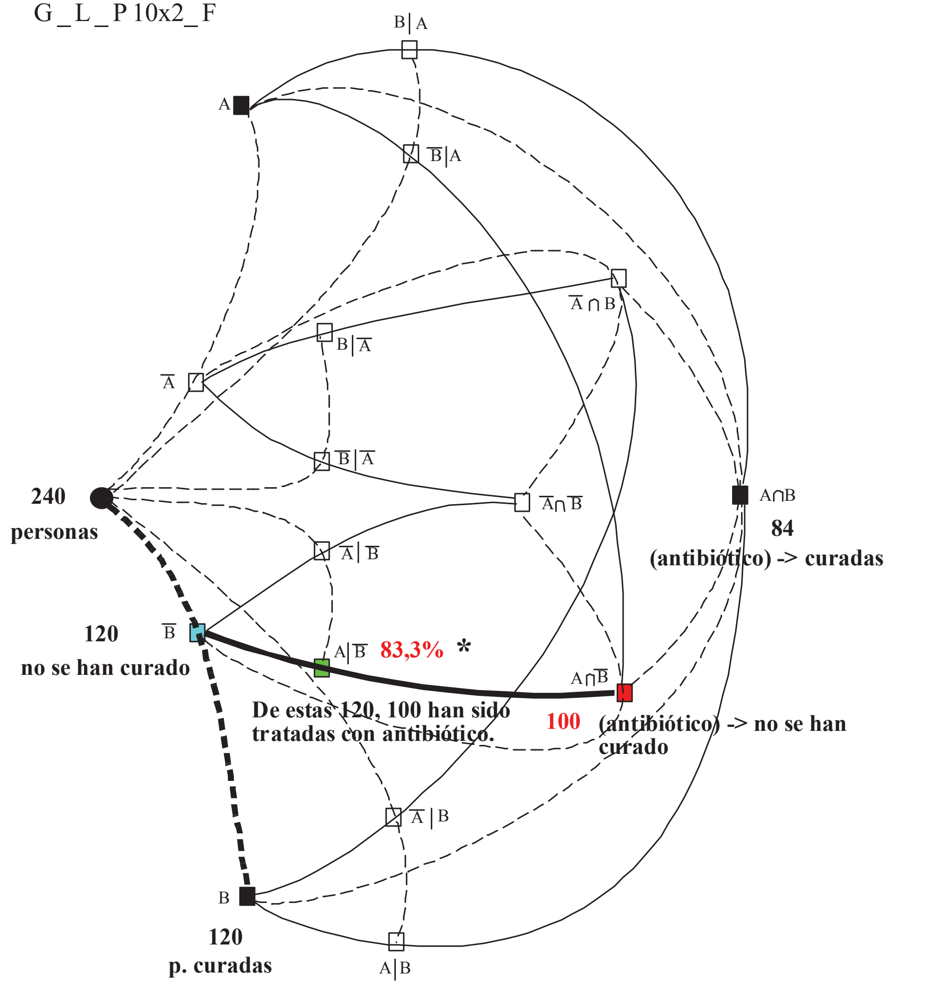
100 ——— x

$$x = \frac{100 \cdot 100}{120} = \frac{100\cancel{0}0}{12\cancel{0}} \simeq 83'3\%$$

1000 | 12
040 833
040
04

"Aproximadamente el 83'3% son las personas que no se han curado y han sido tratadas con el antibiótico dentro del 100% de las personas que no han sido curadas.

G_L_P 10x2_F



* Aproximadamente el 83'3% son las personas que no se han curado y han sido tratadas con el antibiótico dentro del 100% de las personas que no han sido curadas.

R_P10x2_F

Ramón

4. total=240

curados = 120

No curados = 120

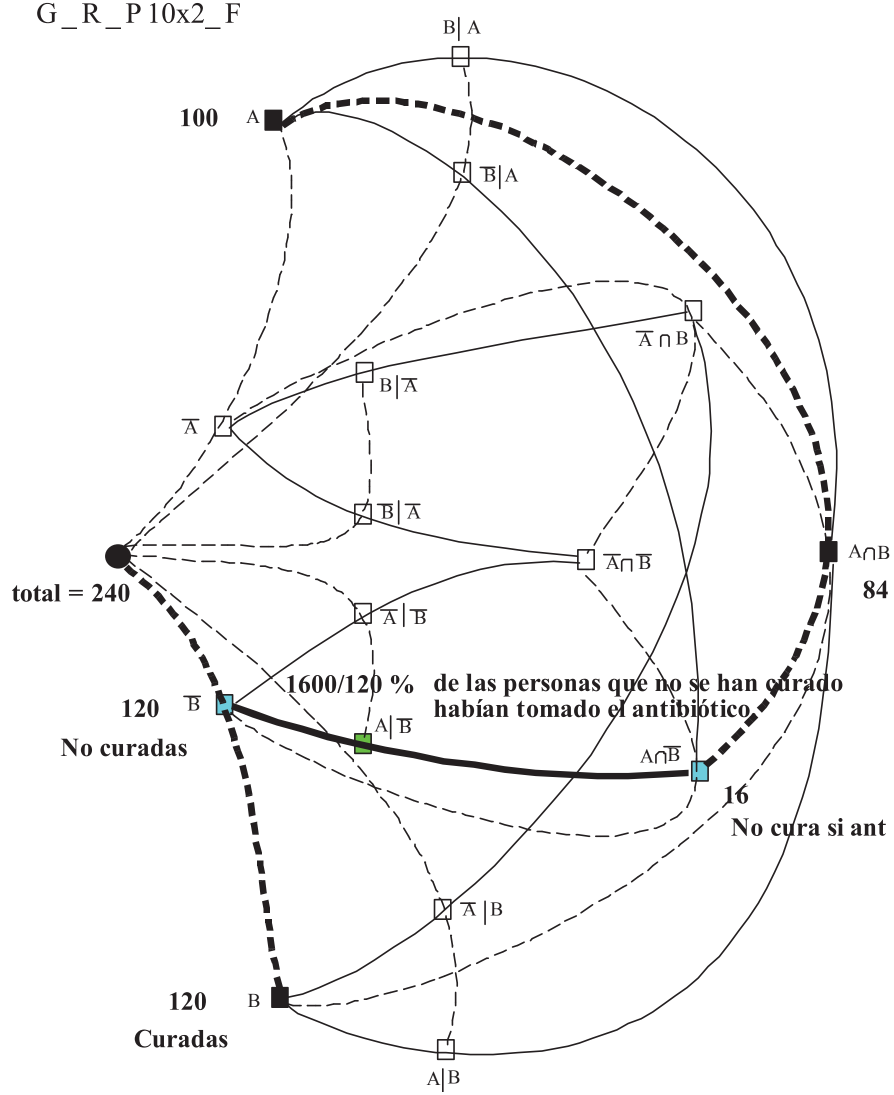
NoCura si ant = 100 − 84 = 16

Porcentaje

120 = 100%

16 = x ⟹ x = $\frac{1600}{120}$ % de las personas que no se han curado habían tomado el antibiótico.

G_R_P10x2_F



T_P10x2_F

④

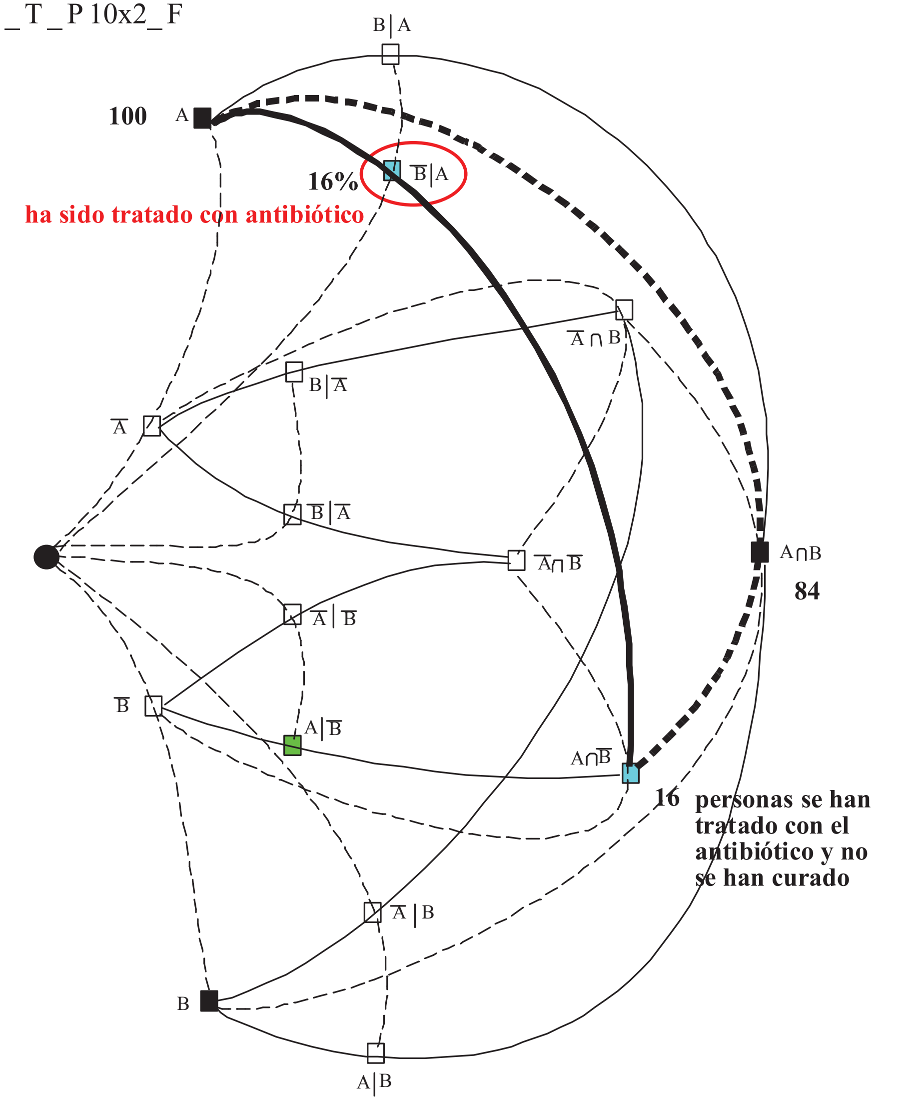
$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 84 \\ \hline 16 \end{array}$$

16 personas se han tratado con el antibiótico y no se han curado

personas		%
100	—	100
16	—	X

X = 16 % ha sido tratado con antibiótico

G_T_P10x2_F



V_P10x2_F

Víctor

4

100 Tratadas con antibiótico

84 curadas con anti.

$100 - 84 = 16$ No curadas con anti.

$120 - 84 = 36$ Curadas sin anti.

$240 - 120 = 120$ No curadas.

~~$120 - 16 = 84$ No curadas sin anti.~~

$120 - 16 = 104$ No curadas sin anti.

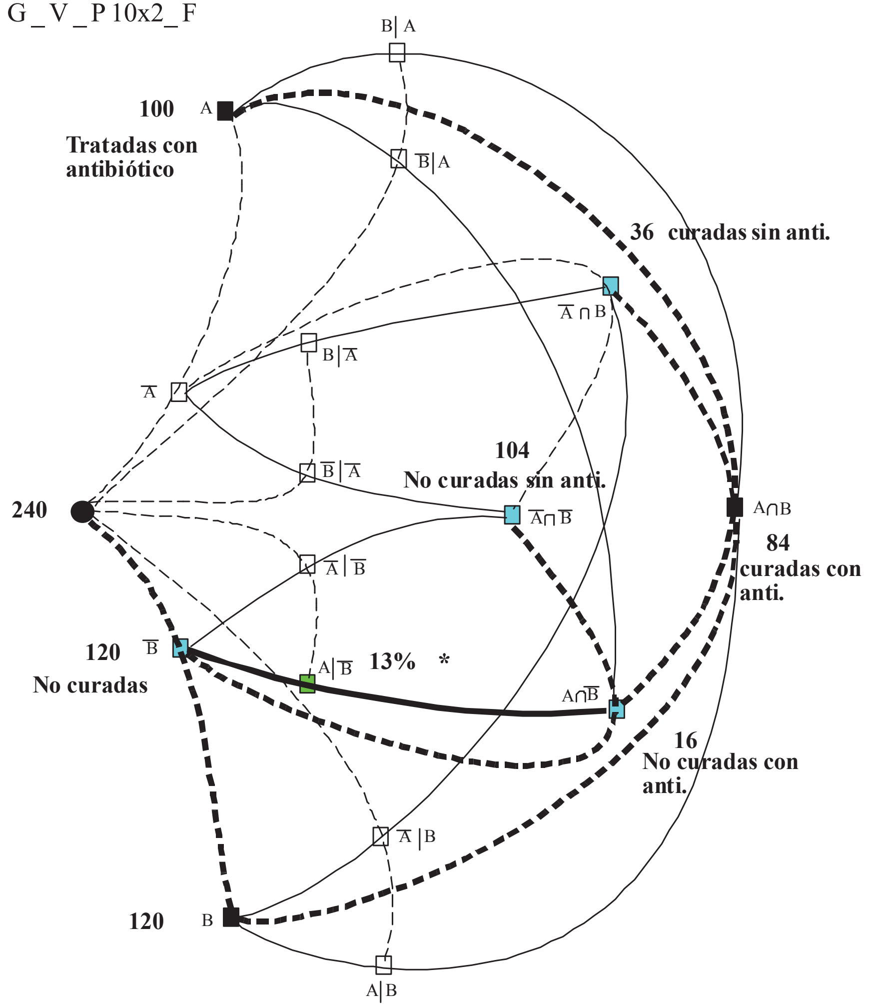
120	100 %
16	x

$x = \frac{1600}{120} = 13\ \%$

$$\begin{array}{r|l} 160 & 12 \\ \hline 040 & 13 \\ 04 & \end{array}$$

Entre las personas que no se han curado el 13 % había sido tratado con antibióticos.

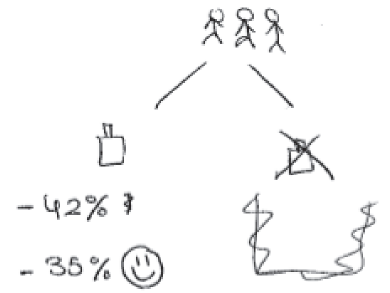
G_V_P 10x2_F



* Entre las personas que no se han curado el 13% había sido tratado con antibióticos.

B_P10_%

Problema 6

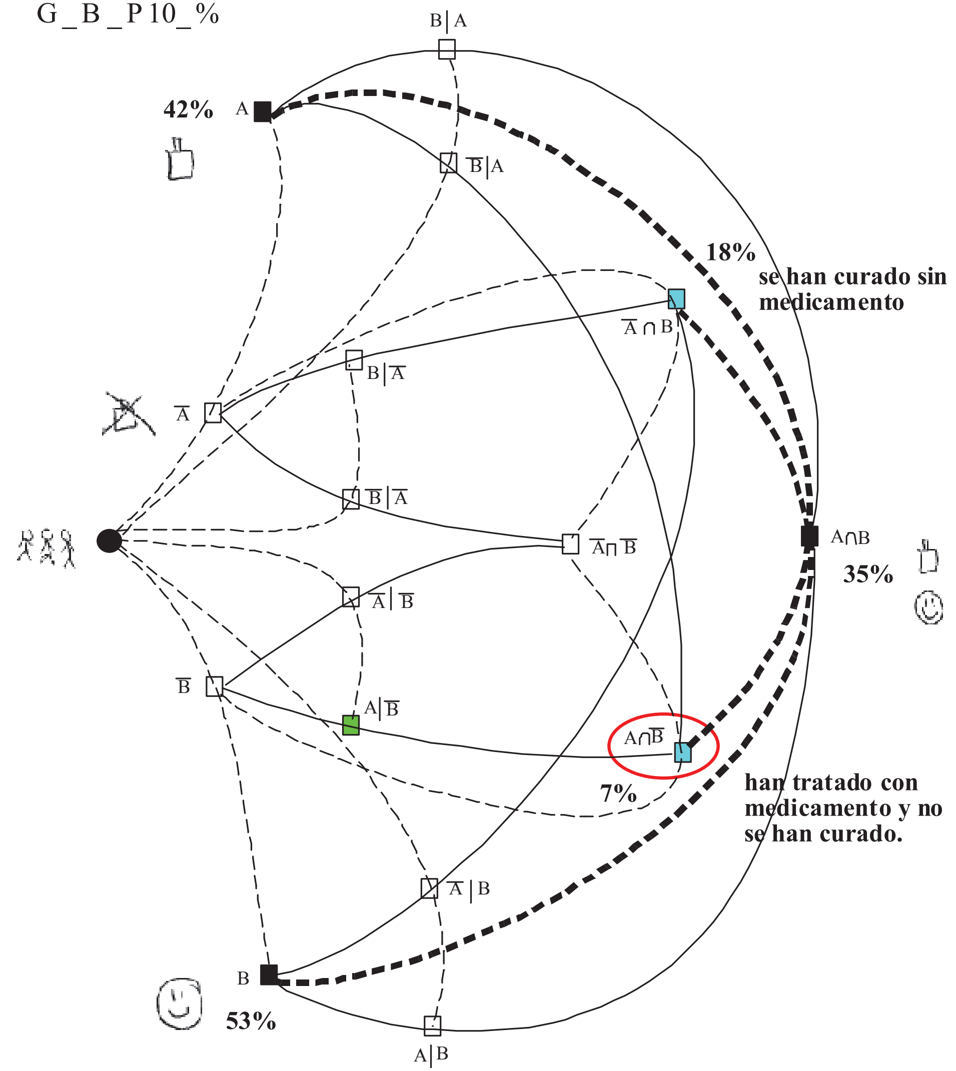


53%

53%
− 35%
18% se han curado sin medicamento

42%
35%
07% → han tratado con medicamento y no se han curado.

G_B_P10_%



C_P10_%

Problema 6:

53% → curadas
42% → antibiótico
35% → " " y curado

$100 - 53 = 47\%$ personas no curadas.

42% → 100% personas con antibiótico
35% → x

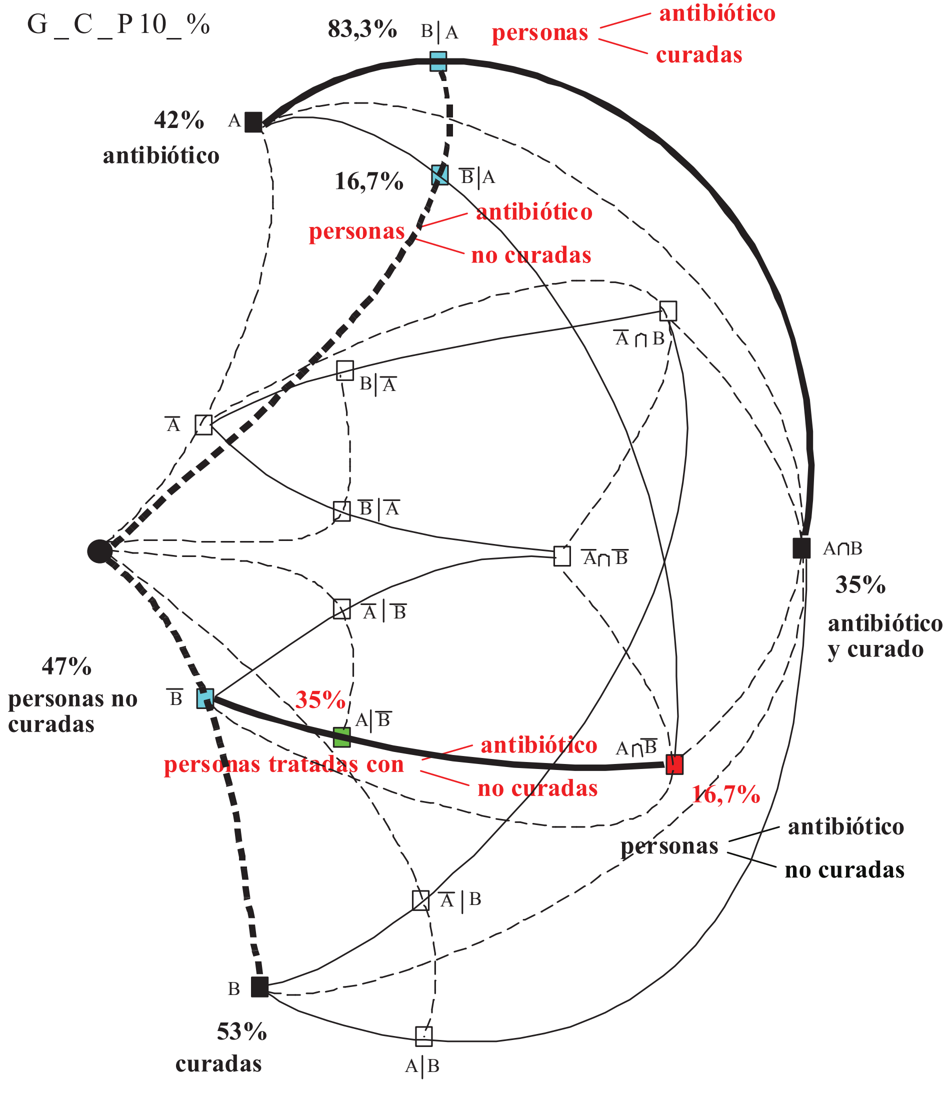
$x = \frac{3500}{42} = 83'3\%$ personas < antibiótico curadas

$100 - 83'3 = 16'7\%$ personas < antibiótico no curadas

47% → 100% personas no curadas
16'7% personas < antibiótico no curadas → x

$x = \frac{16'7 \cdot 100}{47} = 35\%$ personas tratadas con < antibiótico no curadas

G_C_P10_%



H_P10_%

6.

53% Curados

42% tratados

35% tratados y curados.

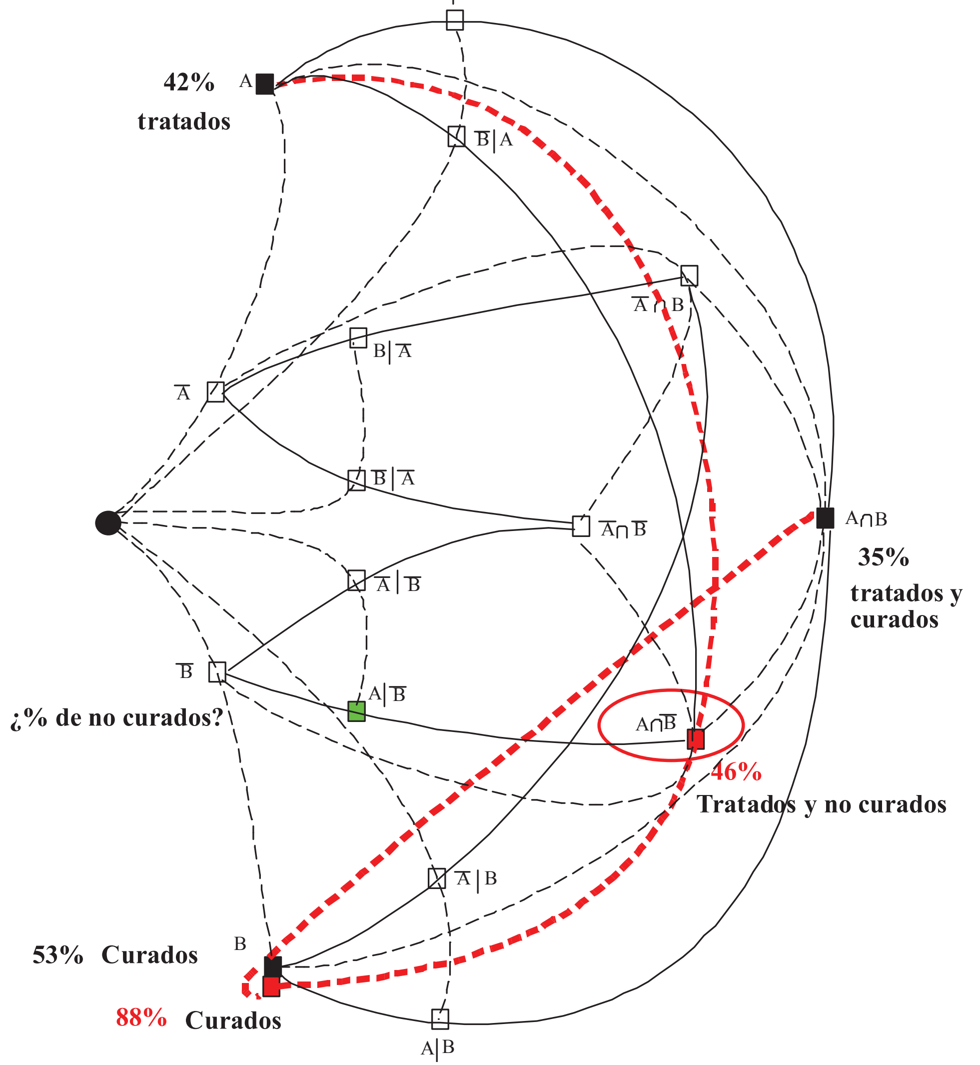
¿% de no curados?

35% de 42% → curadas

53+35 = 88% Curados

88 - 42 = 46% Tratados y no curados.

G_H_P10_%



L_P10_%

Lucia 4ºB

Problema 6

100% población infectada

Tratados con antibiótico → 42%

→ 35% curadas

7% no curadas

No tratados con ~~antibi~~ antibiótico.

100% población infectada

Curadas → 53%

No curadas → 47%

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 53 \\ \hline 047 \end{array}$$

42% ——— 100%

7% ——— x

$$x = \frac{7 \cdot 100}{42} = 16'67\%$$

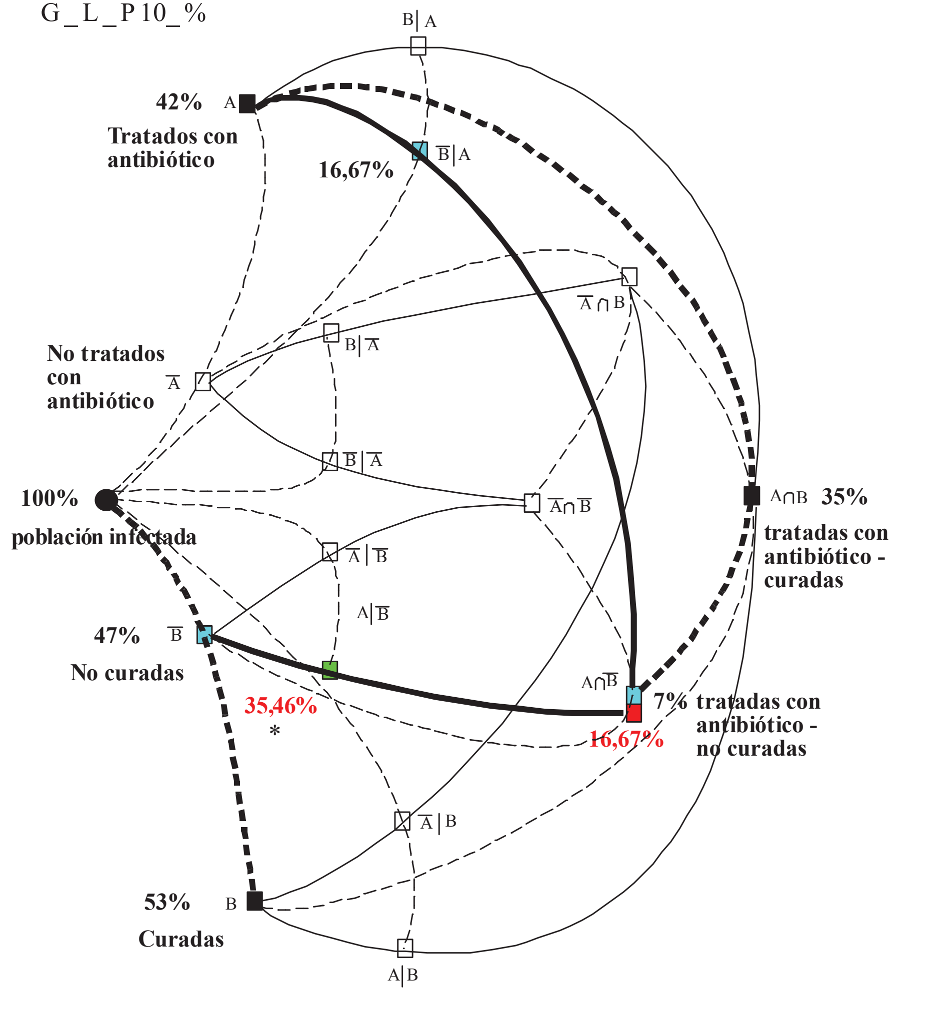
47% ——— 100%

16'67% ——— x

$$x = \frac{16'67 \cdot 100}{47} = 35'46\%$$

• El 35'46% del 100% de las personas que no se han curado fueron tratados con antibiótico

G_L_P10_%



* El 35'46% del 100% de las personas que no se han curado fueron tratados con antibiótico

M_P10_%

problema 6

53% personas curadas

42% tratadas

35% tratados y curados

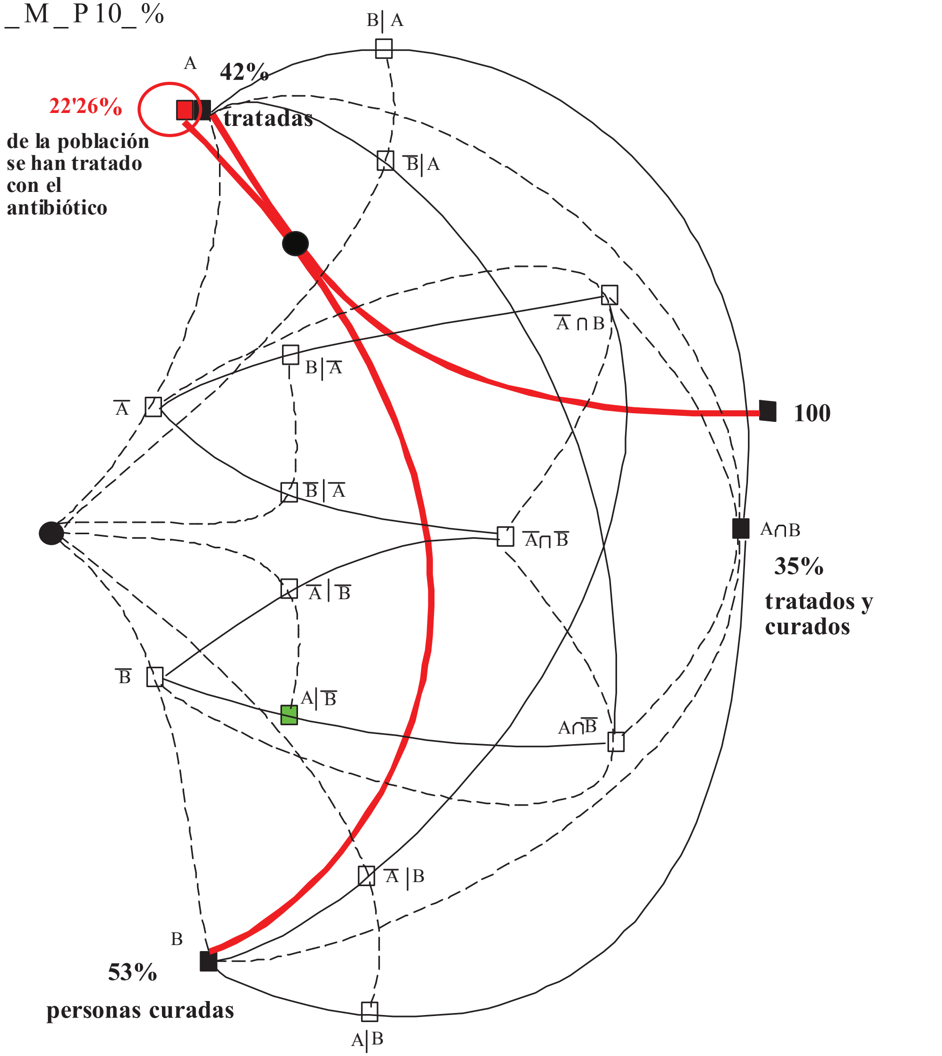
100 —— 53

42 —— x

$$x = \frac{42 \cdot 53}{100}$$

x = 22'26% de la población se han tratado con el antibiótico.

G_M_P10_%



T_P10_%

(6)

~~POBLACIÓN 100% — ANTIBIÓTICO — CURADO / NO CURADO — SIN ANTIBIÓTICO — CURADO / NO CURADO~~

POBLACIÓN 100%
- CURADO 53%
  - ANTIBIÓTICO - 35% ~~42%~~
  - SIN ANTIBIÓTICO - 18%
  - 42%
- NO CURADO 47%
  - ANTIBIÓTICO - 7%
  - SIN ANTIBIÓTICO - 40%

100 - 53 = 47% no curados

53 - 35 = 18% curados - sin antibióticos

42% - 35 = 7% no curados - antibiótico

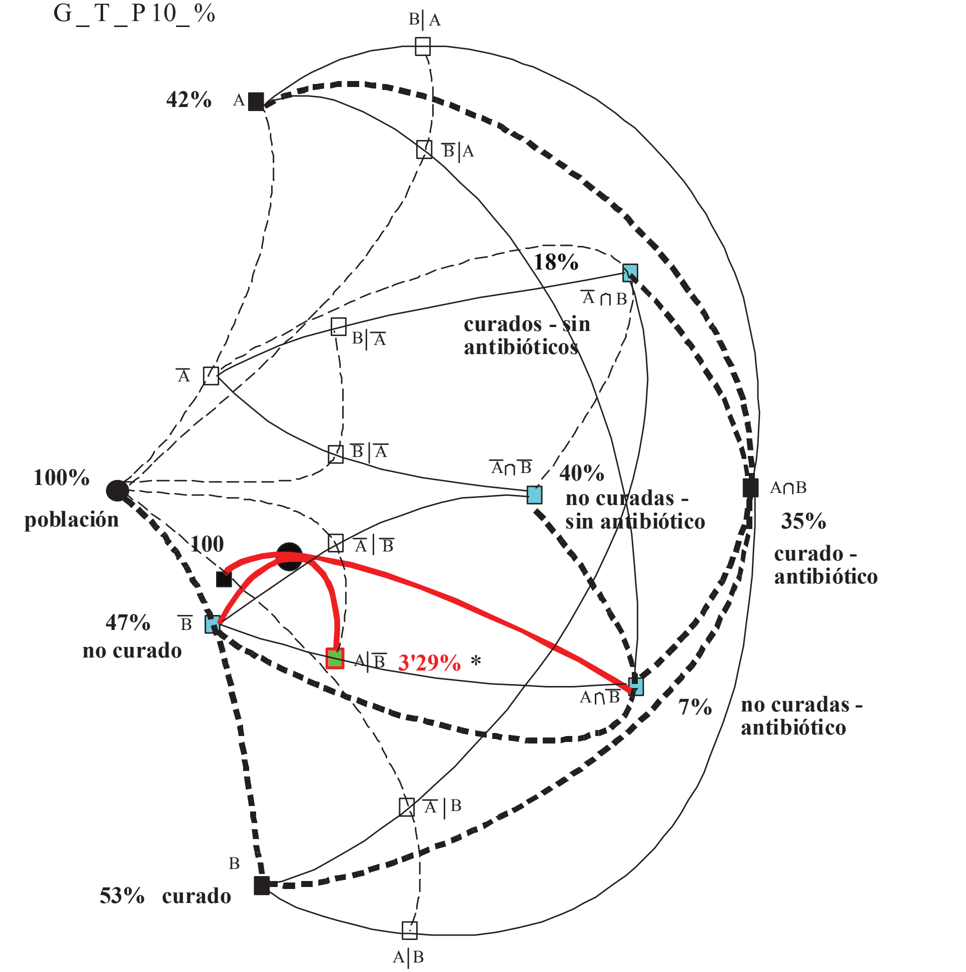
47 - 7 = 40% no curados - sin antibiótico

100 —— 47

7 —— x

x = 3'29 de las personas no curadas han sido tratadas con antibiótico

G_T_P10_%



* 3'29 de las personas no curadas han sido tratadas con antibiótico

V_P10_%

* (6)

~~Infectadas~~ ~~No infectadas~~

42 %
Tratadas

~~42%~~ 35% 7%
Tratadas Tratadas

53% curadas No curadas 47%

No Tratadas No Tratadas

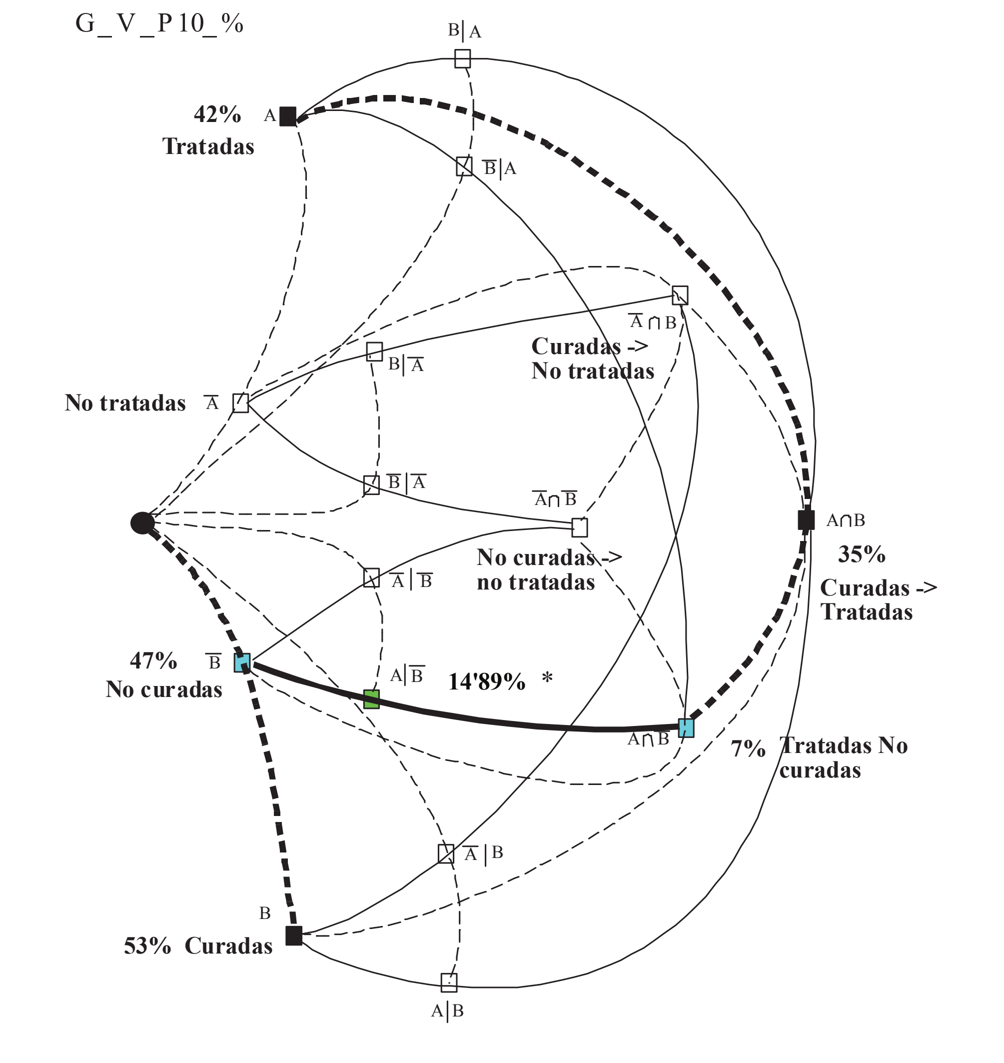
No tratadas

42 - 35 = 7 % Tratadas no curados

47 —— 100

7 —— x

$x = \frac{100 \cdot 7}{47} = 14{,}89\ \%$ de las personas que no se han curado han sido tratadas



* 14'89% de las personas que no se han curado han sido tratadas

ANEXO 16. Resoluciones y grafos de las resoluciones del Problema 17 en los pre-test.

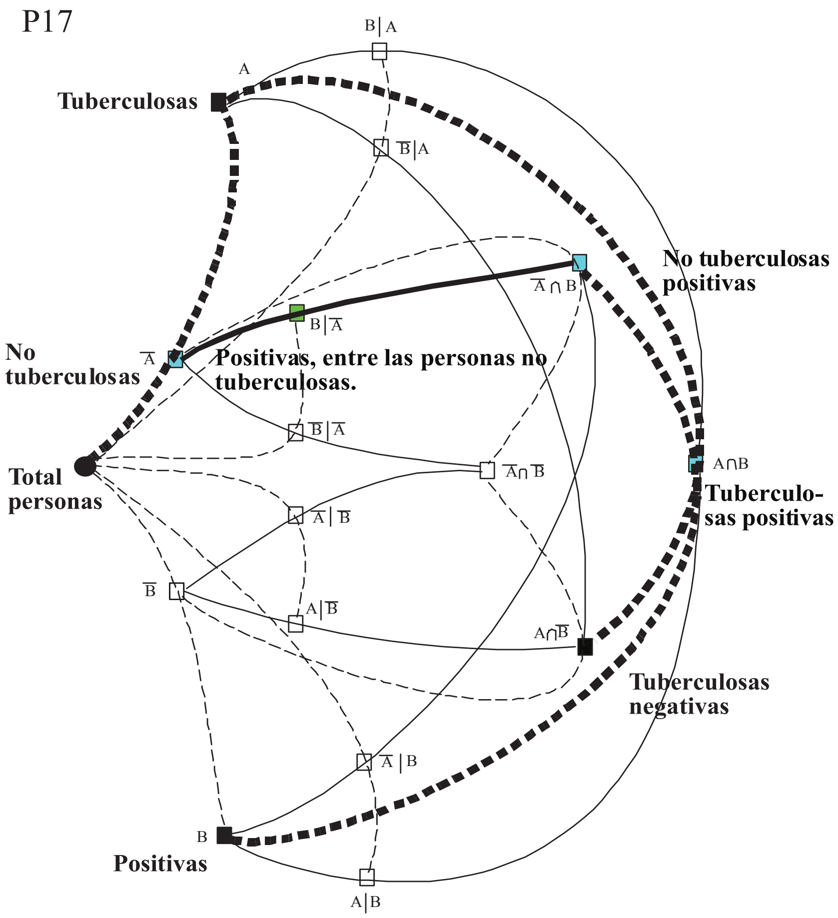
Enunciado del problema en el Pre-test(F):

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da positivo el test?

Enunciado del problema en el Pre-test(%):

Una población con riesgo de padecer tuberculosis se somete a un test para averiguar si padecen tuberculosis o no. El test da positivo o negativo para la enfermedad en cualquier caso. Un 57% de las personas eran tuberculosas. Los resultados muestran que hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo. Además, los resultados mostraron que un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo. Entre las personas que no eran tuberculosas, ¿a qué porcentaje les dio positivo el test?

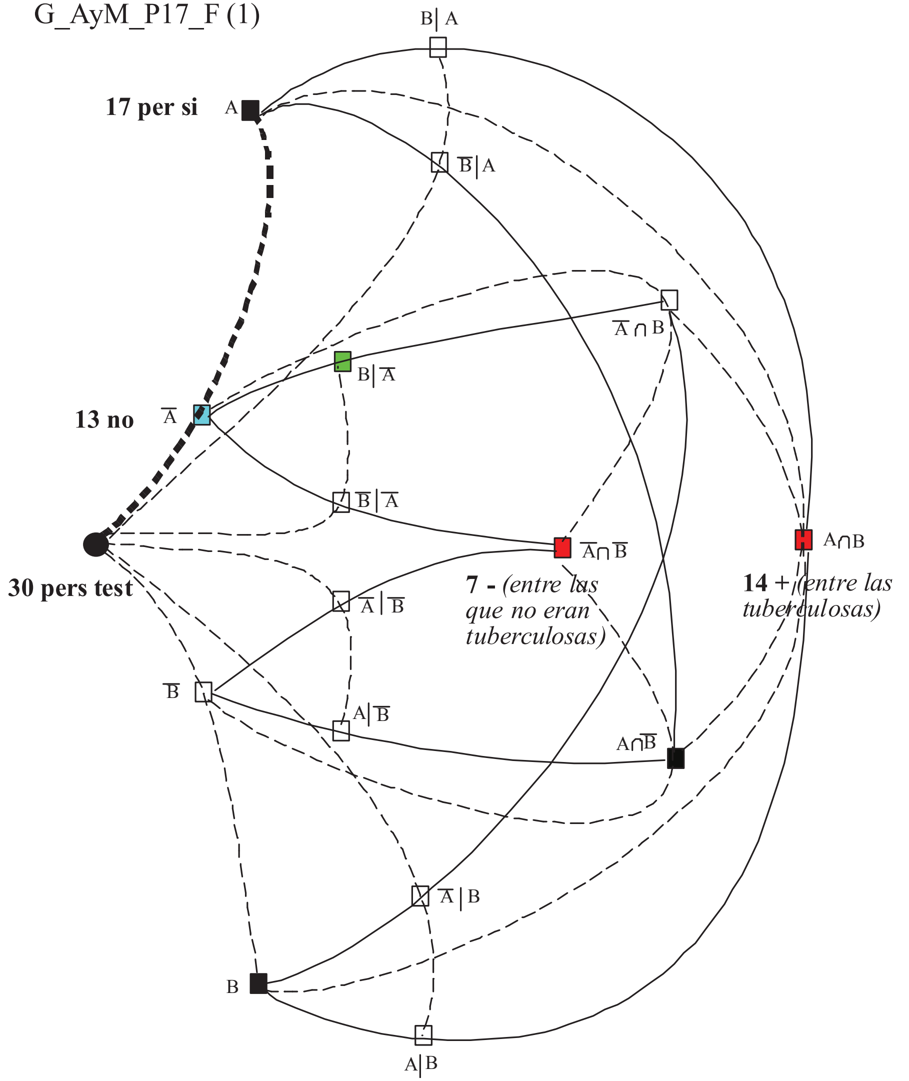
Modelo de competencia:

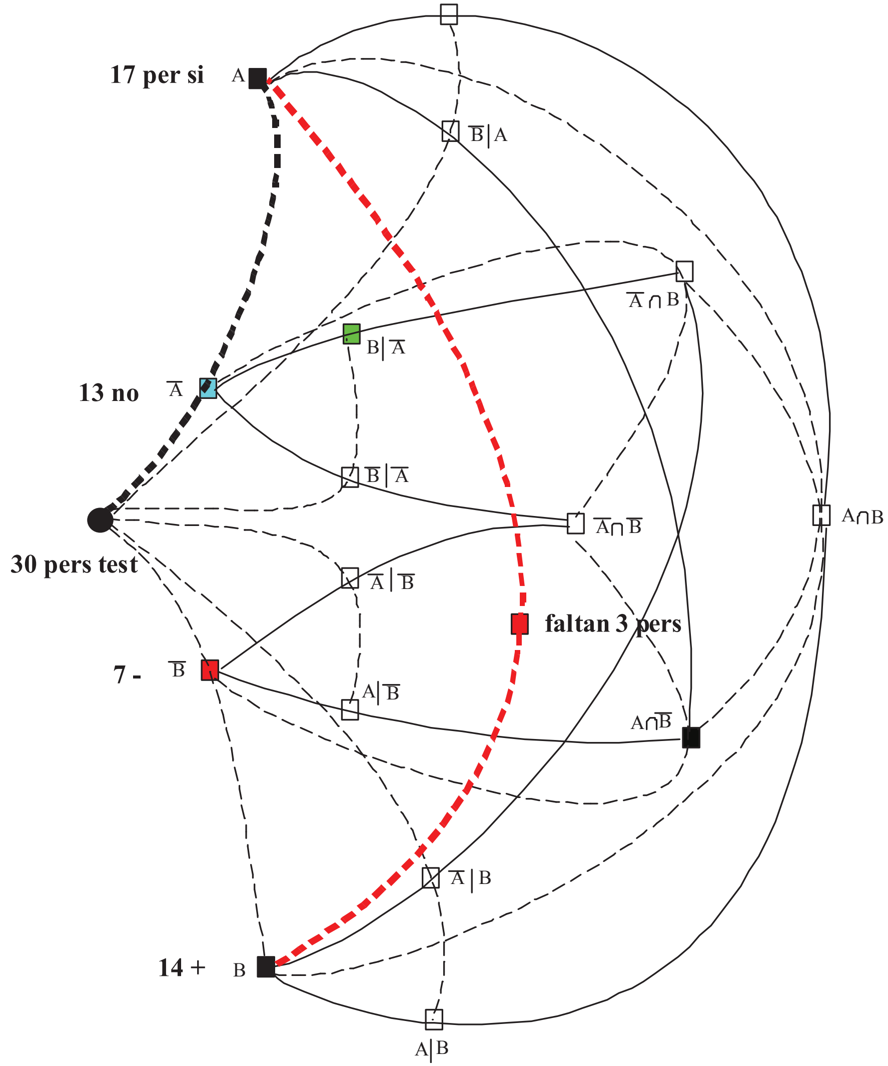


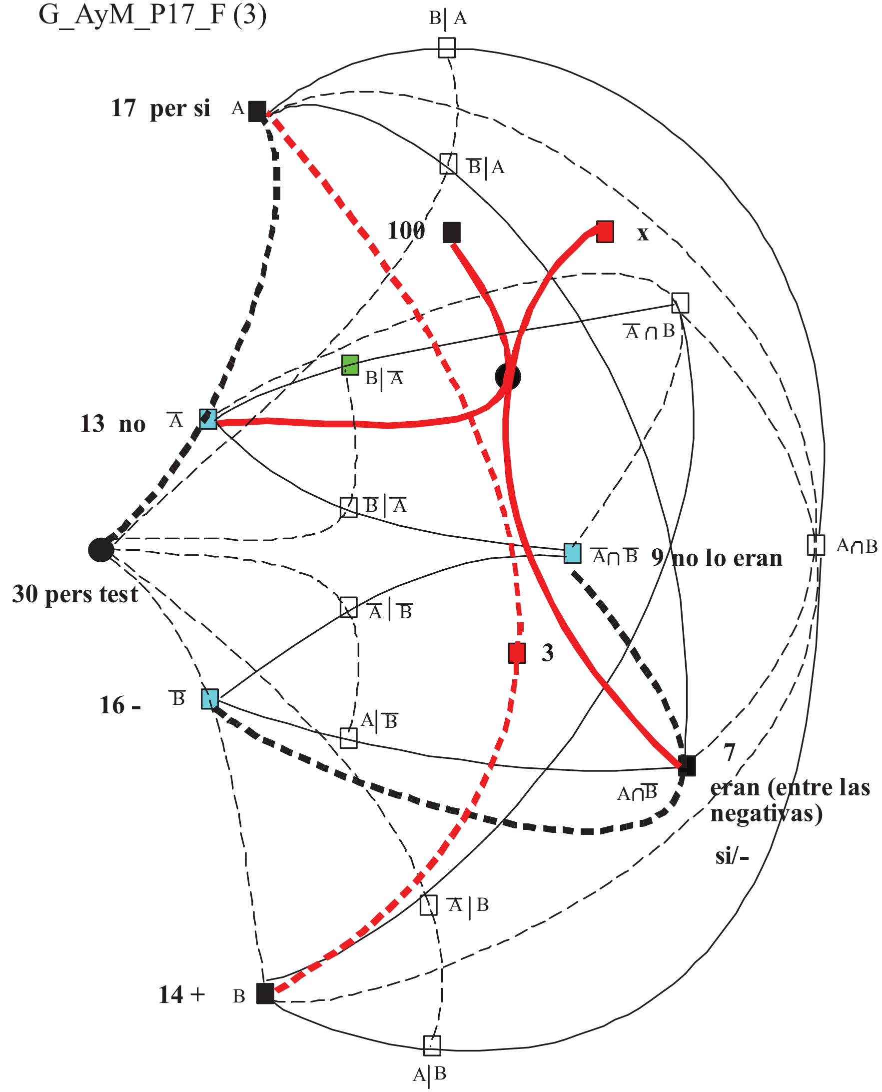
AyM_P17_F

Ítems {1} a {30} del protocolo escrito, Anexo 22 (p. 607).

G_AyM_P17_F (1)



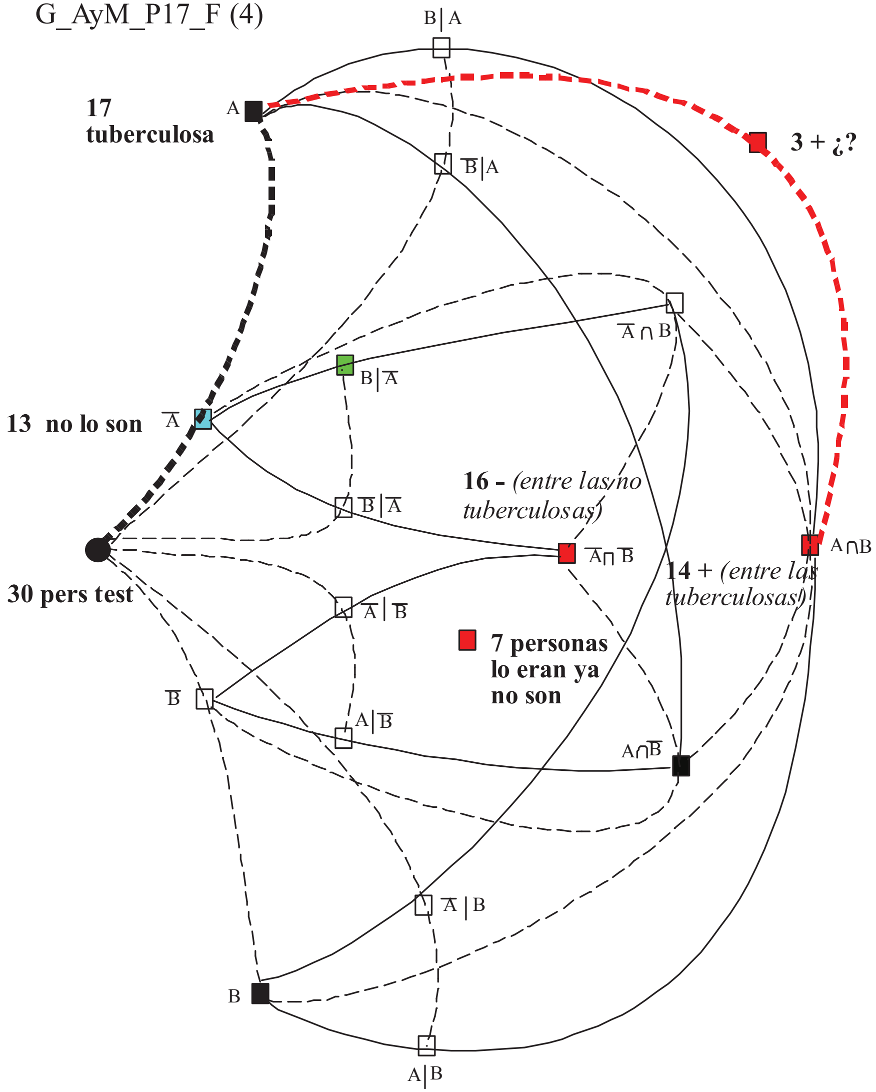
AyM_P17_F	G_AyM_P17_F (2)
Ítems {31} a {49} del protocolo escrito, Anexo 22.	

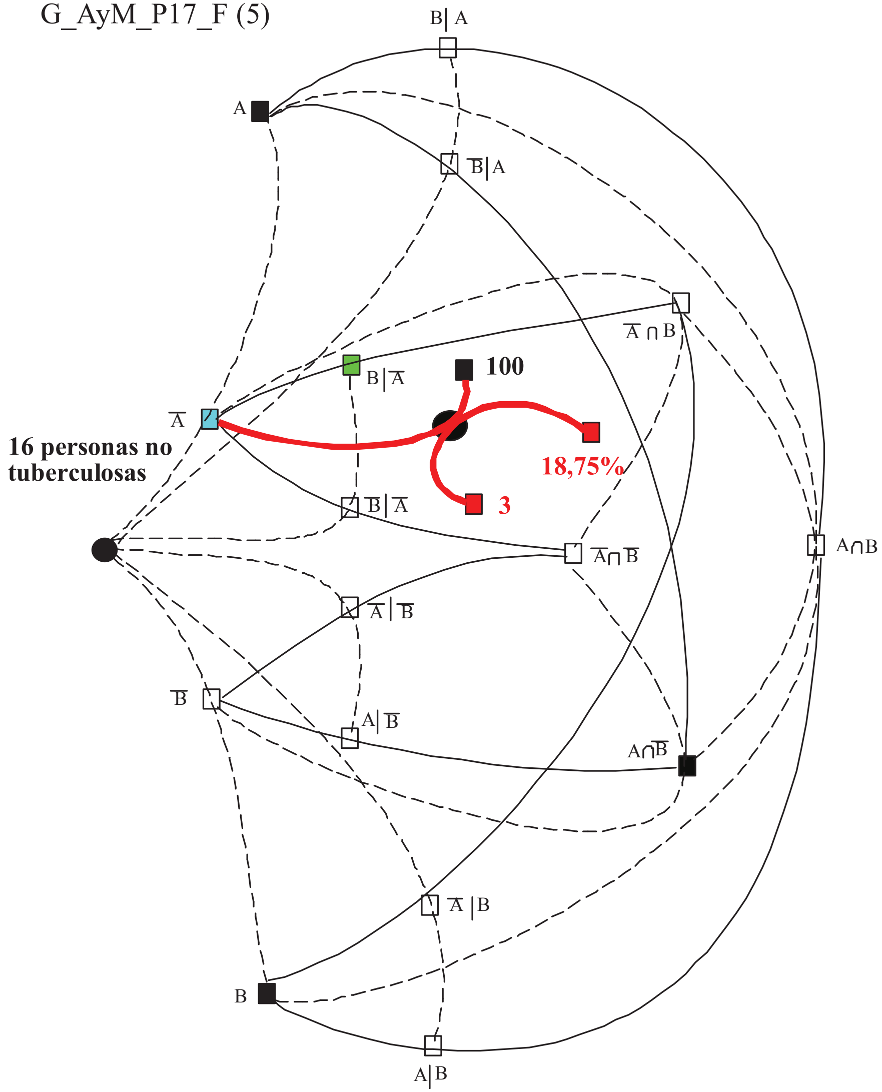
AyM_P17_F	G_AyM_P17_F (3)
Ítems {50} a {169} del protocolo escrito, Anexo 22.	

AyM_P17_F

Ítems {170} a {227} del protocolo escrito, Anexo 22.

G_AyM_P17_F (4)

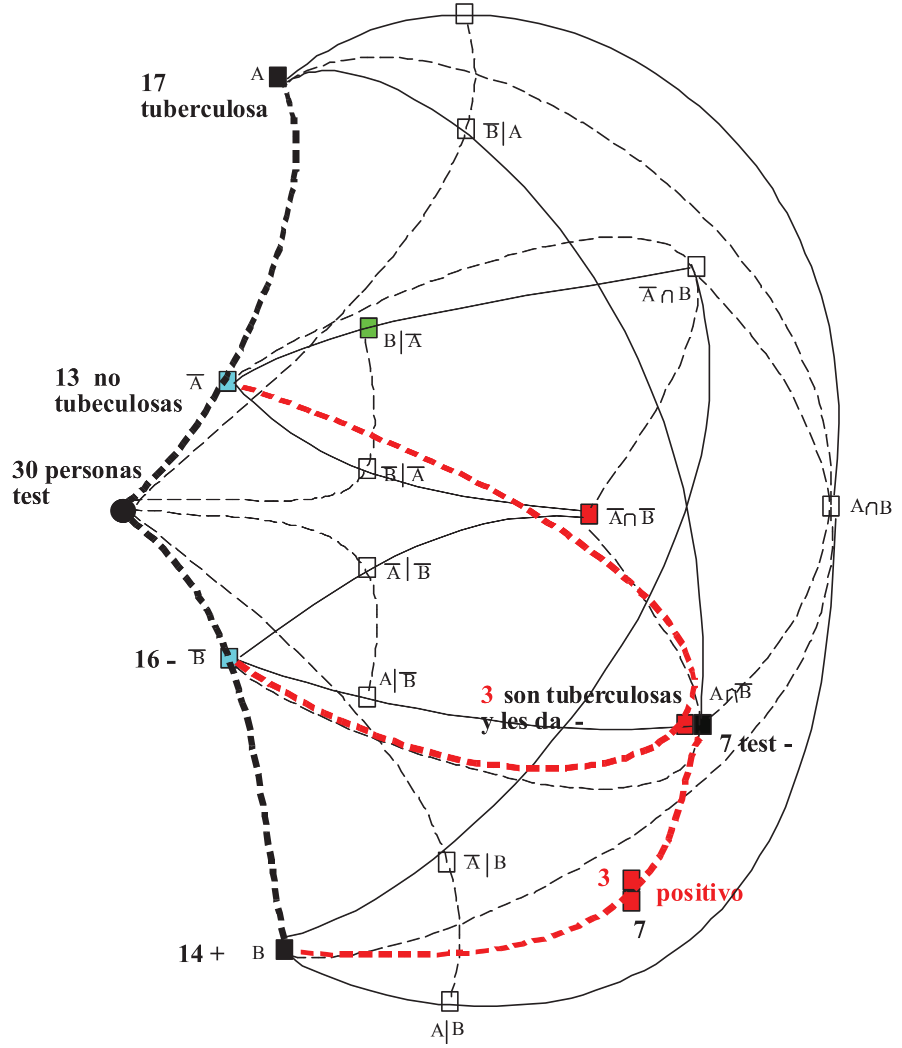


AyM_P17_F	G_AyM_P17_F (5)
Ítems {228} a {243} del protocolo escrito, Anexo 22.	

AyM_P17_F

Ítems {244} a {287} del protocolo escrito, Anexo 22.

G_AyM_P17_F (6)



B_P17_F

Problema 5

Belén

30

17

tub.

Test —— 14 +

7(+) → −

14+7= 21 + si son tuberculosas

30−17= 13 personas no son tuberculosas.

Resto a las personas infectadas al total de la población, porque el test puede estar mal.

30 —— 100%

13 —— x

Un 43'33% no son tuberculosas

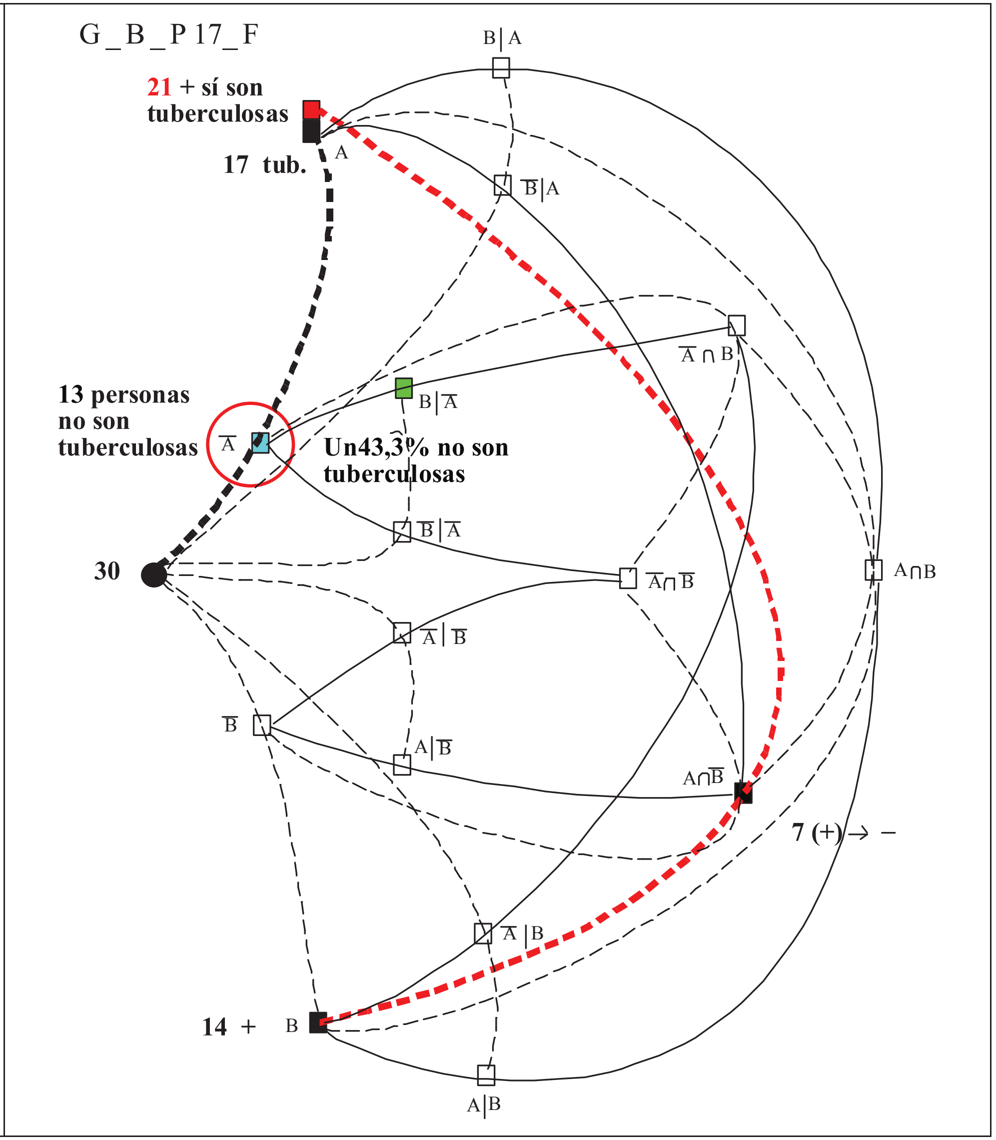
$x = \frac{13 \cdot 10\cancel{0}}{3\cancel{0}} = \frac{130}{3} \approx 43'33\%$

130, |3

10 43'3...

40

4



C_P17_F

Clea

5) 17 → tuberculosas
7 → test negativo → sólo a 10 les dio positivo
↳ 17 − 7 = 10

test positivo → 14

14 − 10 = 4 → personas q les dio positivo, y no padecen la enfermedad

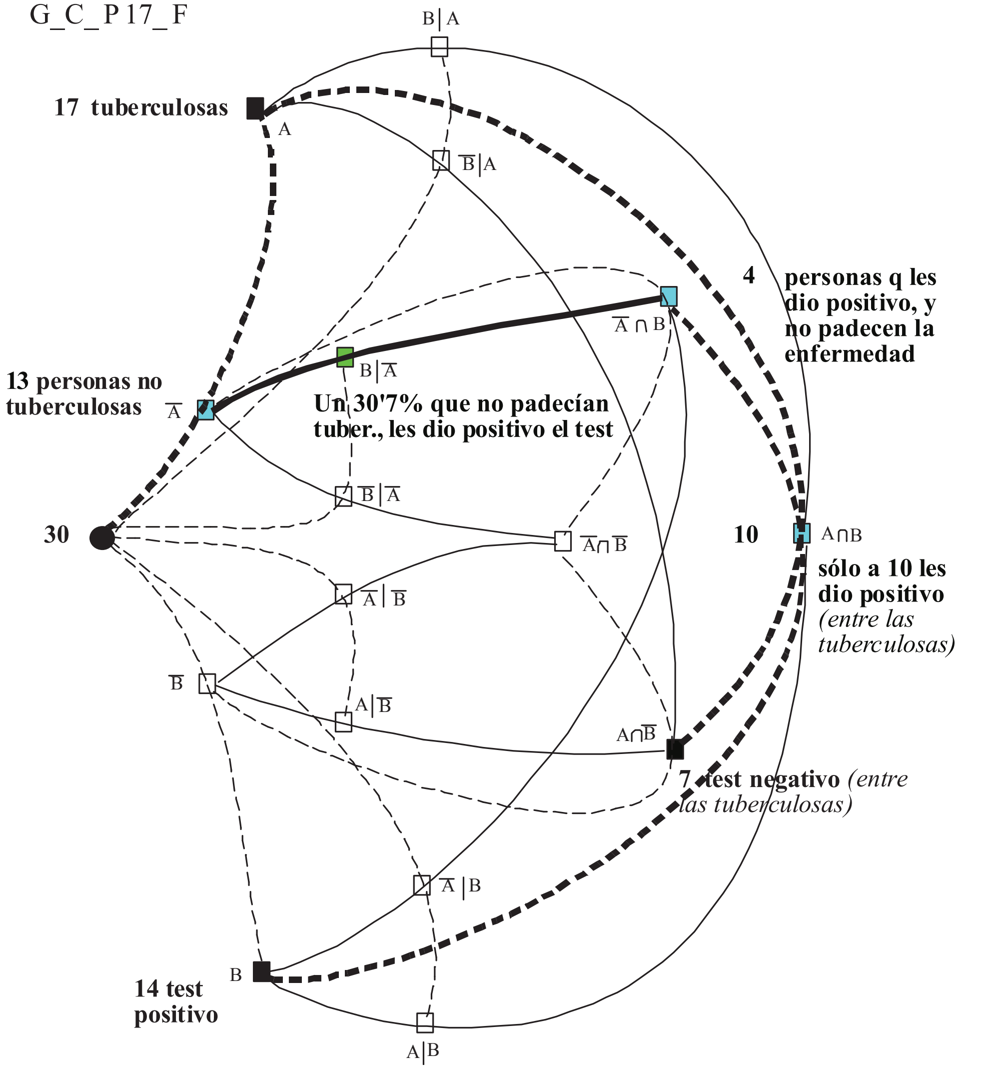
30 − 17 = 13 → personas no tuberculosas

13 — 100% pers. no tuberc.
4 — x

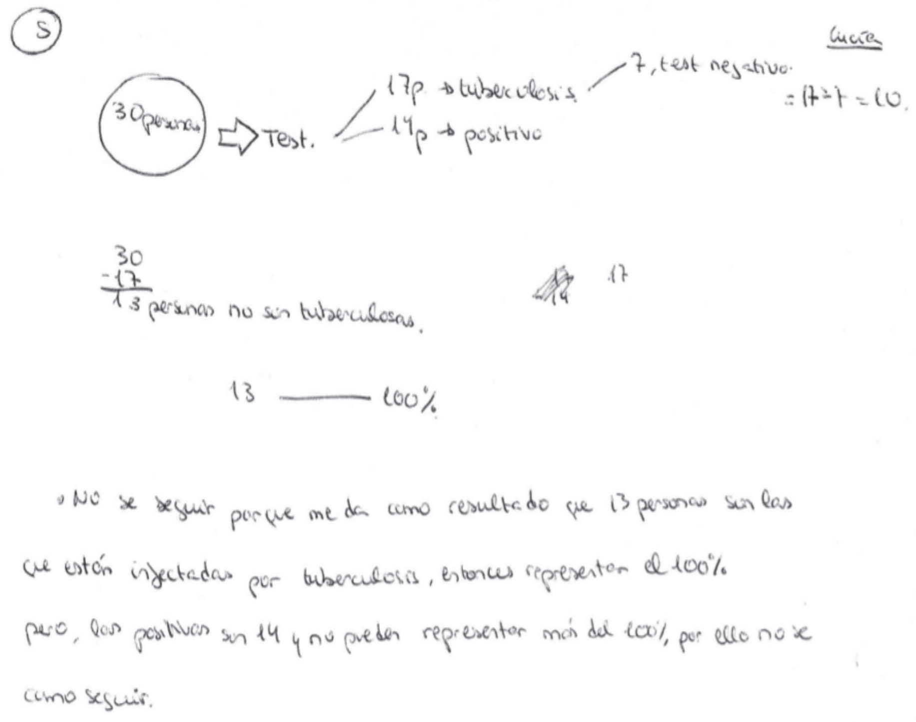
$x = \frac{4 \cdot 100}{13} = \frac{400}{13} = 30'7\ \%$

400 | 13
0100 30'7
09

R: Un 30'7 % que no padecían tuberc., les dio positivo el test



L_P17_F


S

Lucía

30 personas ⇨ Test. 17p → tuberculosis — 7, test negativo = 17-7 = 10.
14p → positivo

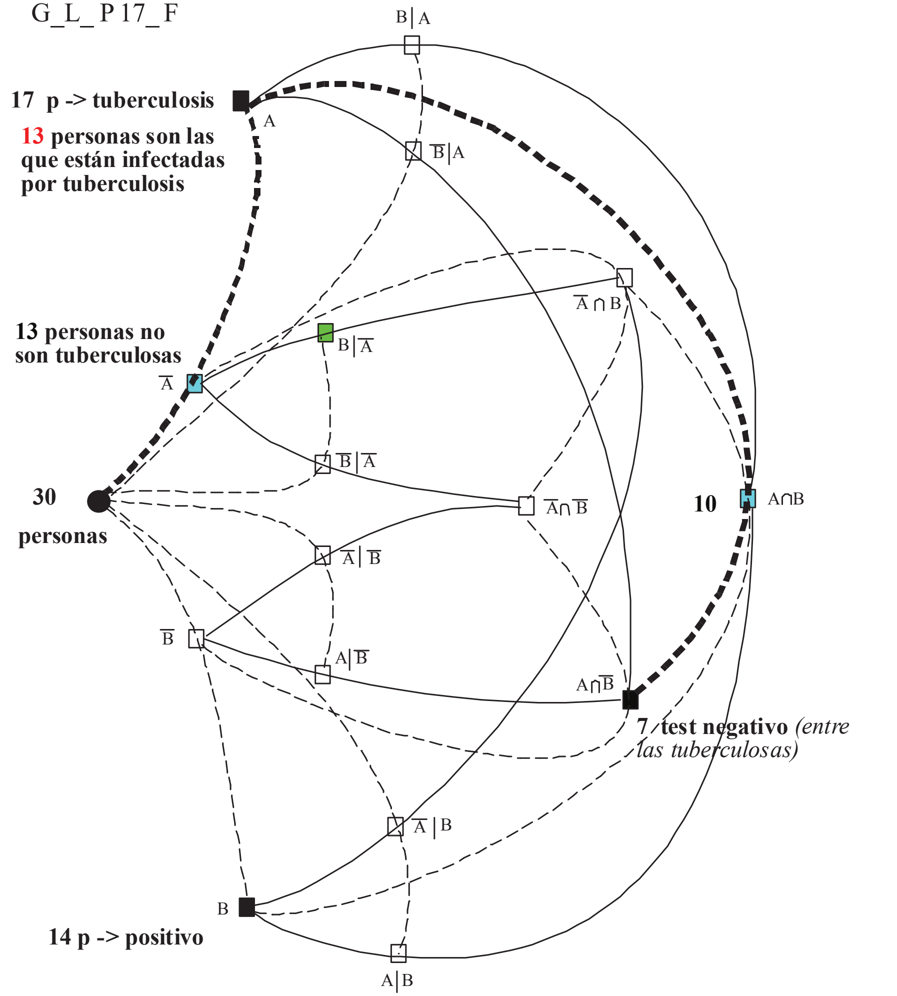
30
-17
13 personas no son tuberculosas.

17

13 ——— 100%

· No se seguir porque me da como resultado que 13 personas son las que están infectadas por tuberculosis, entonces representan el 100% pero, las positivas son 14 y no pueden representar más del 100%, por ello no se como seguir.

G_L_P17_F



"No sé seguir porque me da como resultado que 13 personas son las que están infectadas por tuberculosis, entonces representan el 100% pero las positivas son 14 y no pueden representar más del 100%, por ello no sé como seguir"

R_P17_F

Ramón

5.

total = 30

Si son = 17

no son = 13

test si = 14

test no = 16

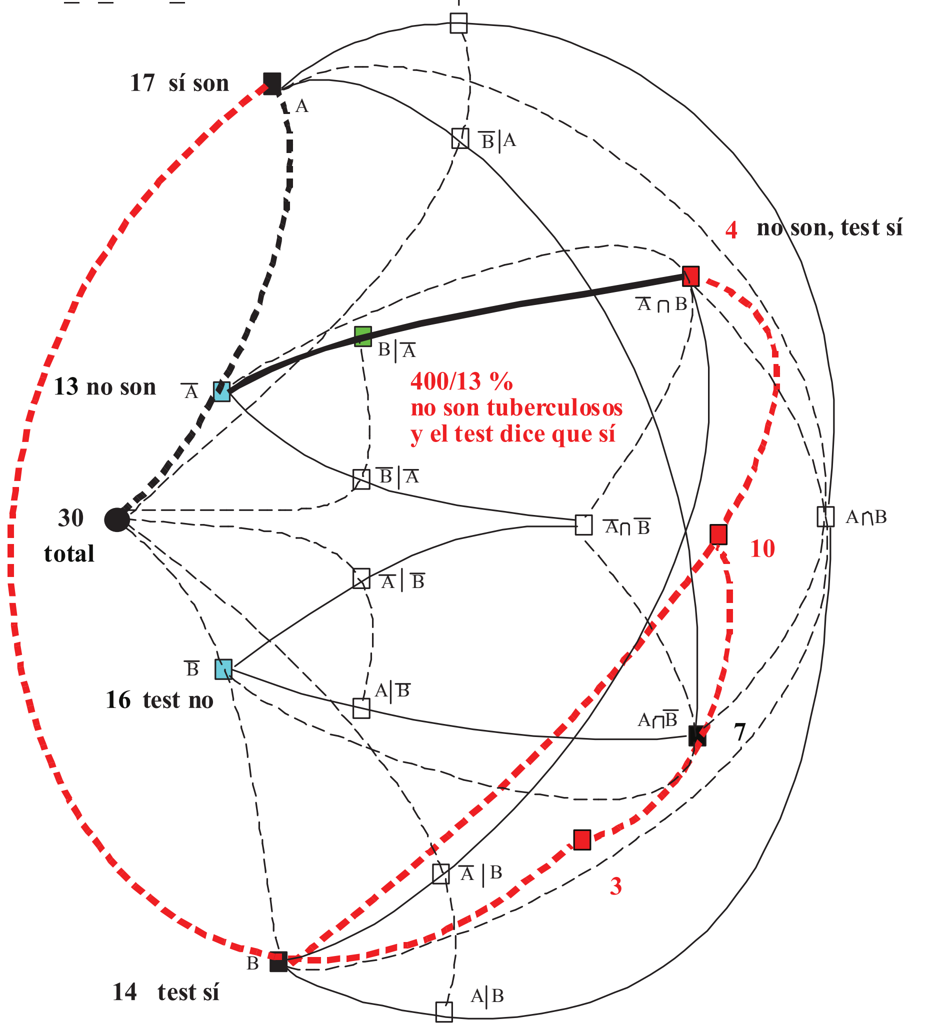
(~~no son, test si = 17 − 7 = 10 / 14 − 10 = 4~~)

no son, test si = (~~...~~) 17 − 14 = 3 + 7 = 10 / 14 − 10 = 4

13 = 100 %

4 = x ⇒ x = $\frac{400}{13}$ % no son tuberculosos y el test dice que sí.

G_R_P 17_F



T_P17_F

(5)

~~17~~
~~− 7~~
~~10 personas~~

30
− 17
13 personas que no son tuberculosas

%	personas
100 ——	30
x ——	17

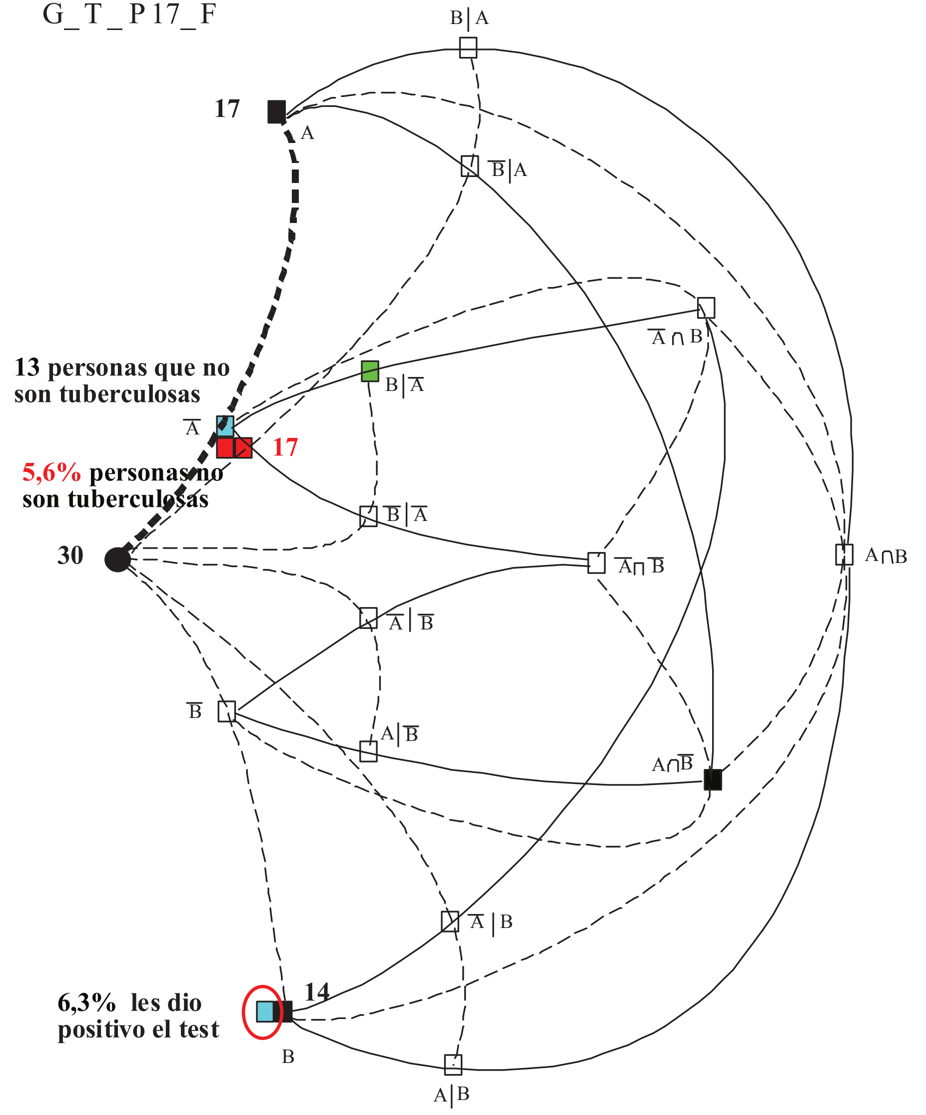
$x = \frac{170\cancel{0}}{3\cancel{0}} \simeq 5'6$ % personas no son tuberculosas

personas	%
17 ——	5'6
14 ——	x

$x = \frac{14 \cdot 5'6}{17} = \frac{108'4}{17} \simeq 6'3\%$ les dio positivo el test

5'6
1 4
22 4
56
10 8'4 | 17
6'3
064
13

G_T_P17_F



V_P17_F

Víctor

5

~~17~~ P 10

17 Tuberculosas

N 7

30 - 14 = 16 Personas Negatibo

14 Positibo

30 - 17 = 13 Personas No Tuberculosas

~~totales~~

~~17~~

14 - 10 = 4 Personas No Tuberculosas Positivo

13 100%

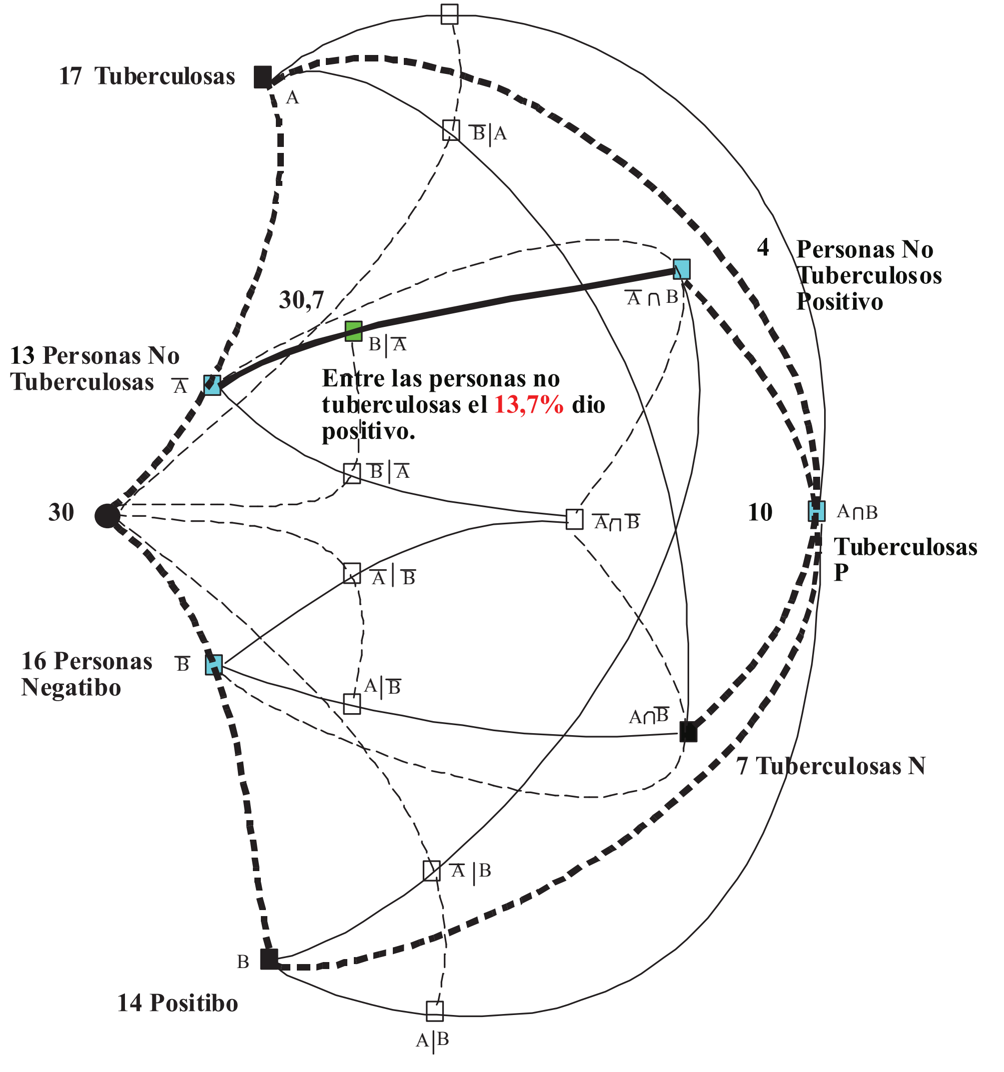
4 x

$x = \frac{400}{13} = 13,7\%$

400 | 13
040 | 3
400 | 13
010 | 3
400 | 13
0100 | 30,7
09

Entre las personas No Tuberculosas el 13,7% dio positivo.

G_V_P17_F



A_P17_%

3

57% tuberculosas — 23% NEGATIVO
57% tuberculosas — 77 POSITIVO

43% NO TUBERCULOSAS

47% POSITIVAS

53% NEG.

57 —— 100
23 —— X

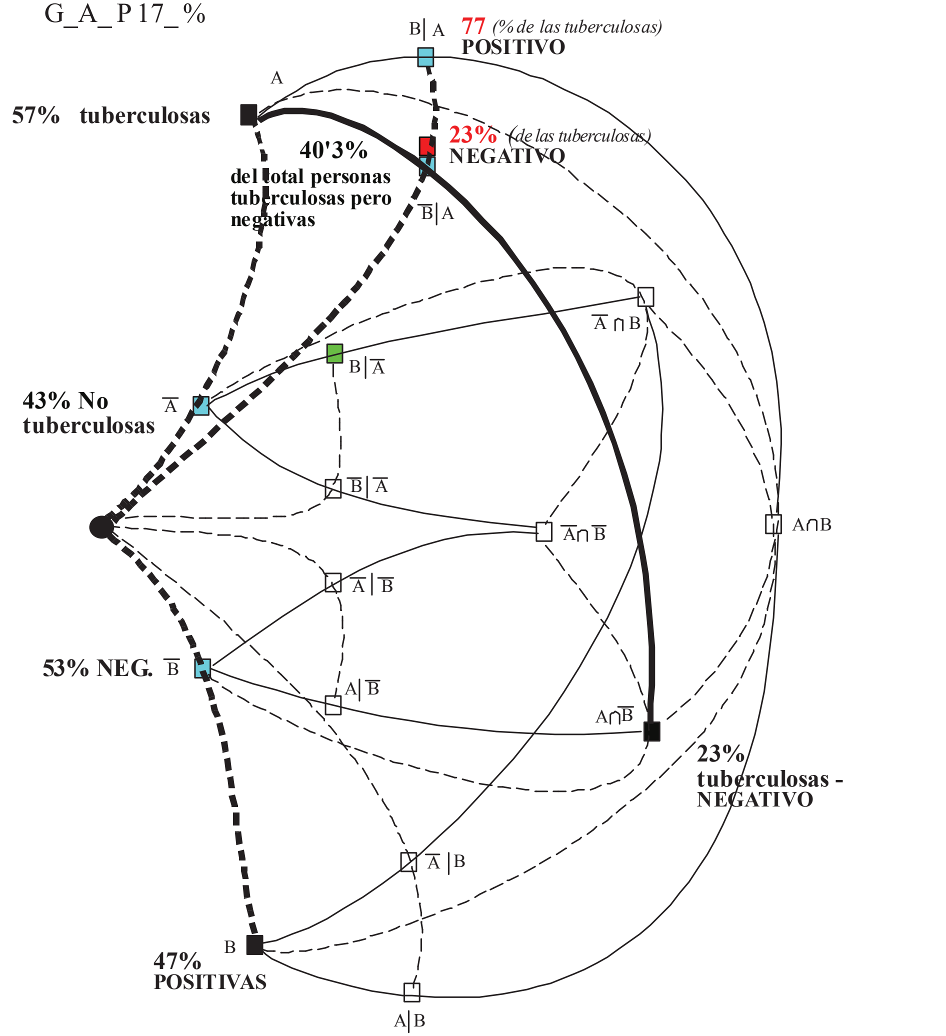
X = 40'3% del total personas tuberculosas pero $\boxed{\text{negativas}}$

~~47% - 40'3 = 6'6% POSITIVAS pero tuberculosas y positivas.~~

53% - 40'3% = 12'7% negativas pero tuberculosas

~~53%~~

G_A_P17_%



B_P17_%

Problema 3

Test

47% +

23% − (tuberculosas)

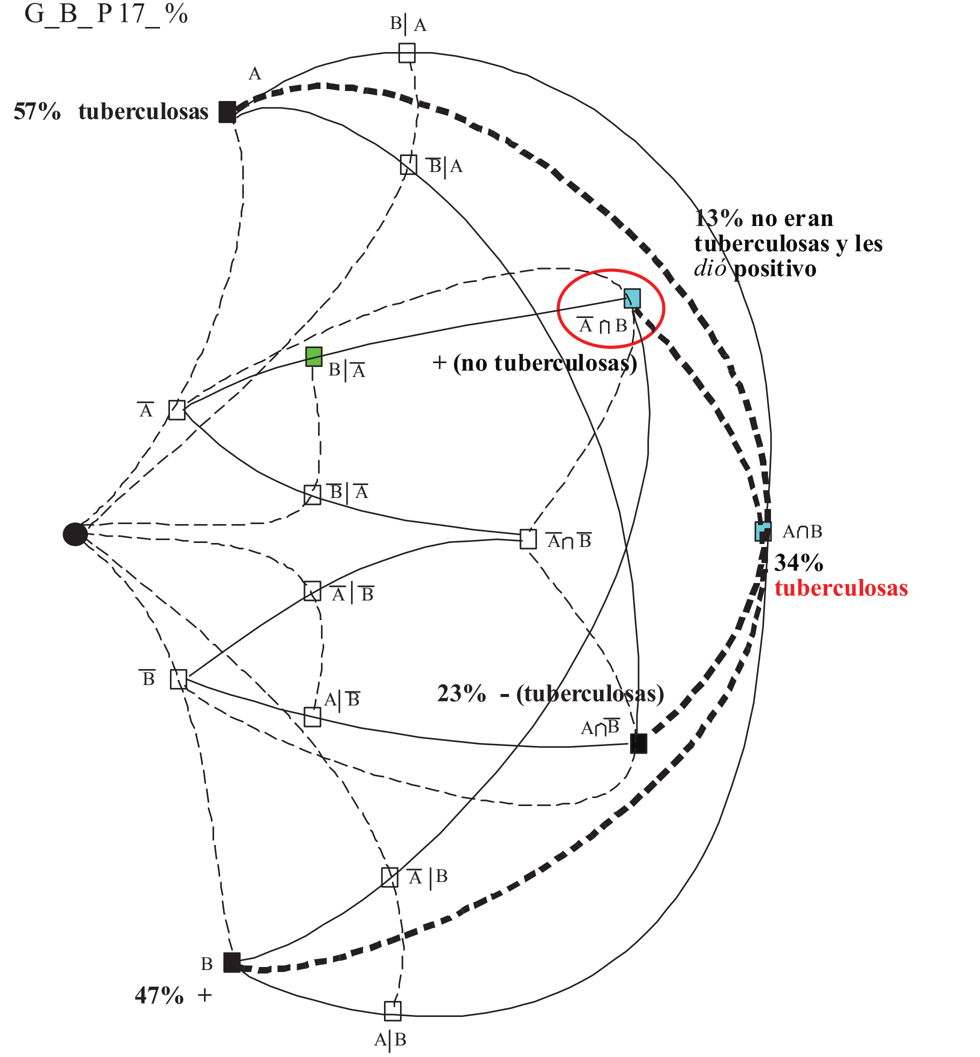
□% + (no tuberculosas)

57% tuberculosas

$$\begin{array}{r} 57\% \\ -\ 23\% \\ \hline 34\% \end{array} \rightarrow \text{tuberculosas.}$$

$$\begin{array}{r} 47\% \\ -\ 34\% \\ \hline 13\% \end{array} \rightarrow \text{~~xxx~~ no eran tuberculosas y les dió positivo.}$$

G_B_P17_%



C_P17_%

Problema 5: CLEA

57% → tuberculosas

47% → positivo

23 %. → negativo (tuberculosas)

100 − 57 = 43%. de no tuberculosas

Si a un ~~7~~ 47% eran tuberculosas y 23% también eran positivas.

Entonces, 47 + 23 = 70% de personas que eran tuberculosas, o bien por el test, o porque lo eran.

Si un ~~70% → 100% tuber~~

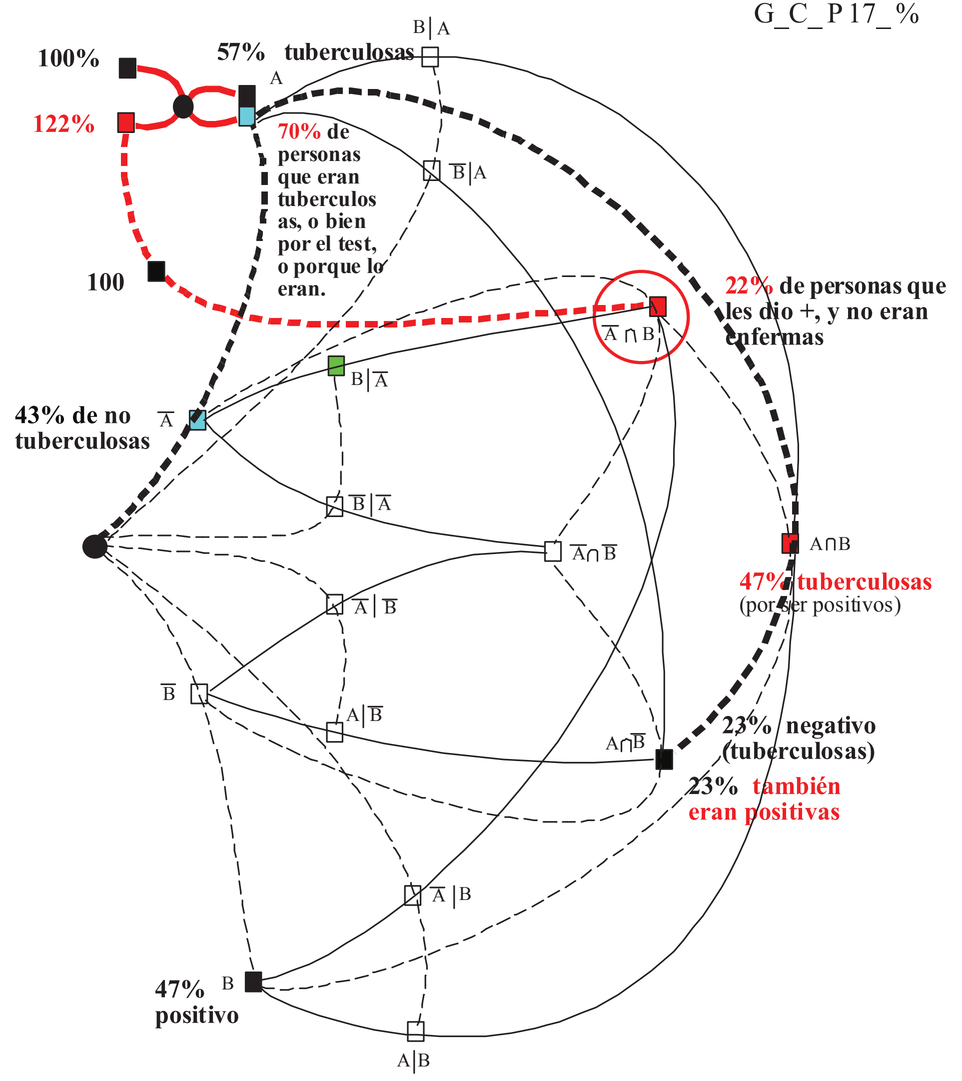
57% → 100% tuberculosas

70% → x

$x = \frac{7000}{57} = 122\%$

122 − 100 = 22% de personas que les dio +, y no eran enfermas

G_C_P17_%



H_P17_%

3.

57% Eran tuberculosas

47% Positivas

23% Tuberculas pero siendo negativas.

El test no es correcto.

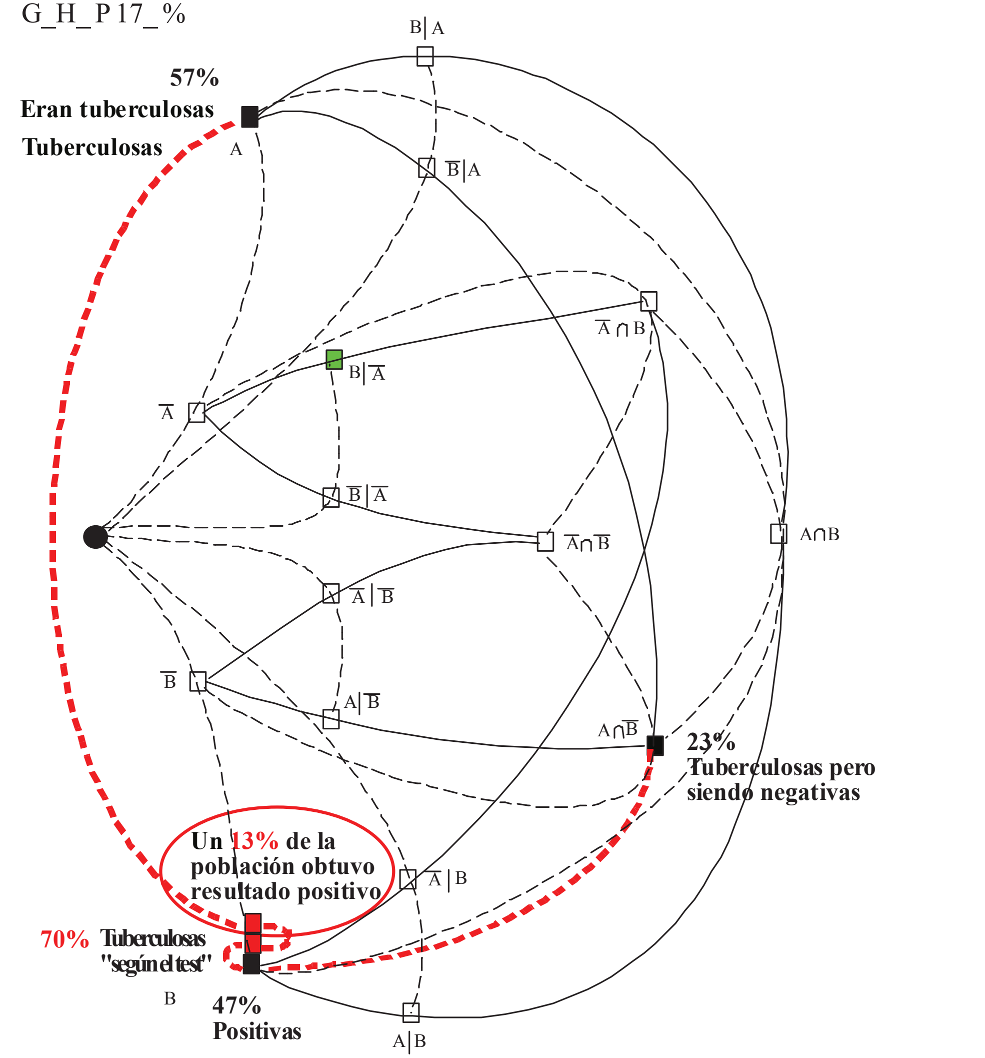
57 → Tuberculosas

47+23 = 70% Tuberculosas "según el test."

70% - 57% = 13%.

Un 13% de la población obtuvo resultado positivo.

G_H_P17_%



L_P17_%

Problema 3

$100\% - 57\% = 043\%$

100% población — 57% tuberculosas

100% población — 43% no son tuberculosas.

100% población — Positivo — 47%

100% población — Negativo — 23% → tuberculosas.

43% —— 100%

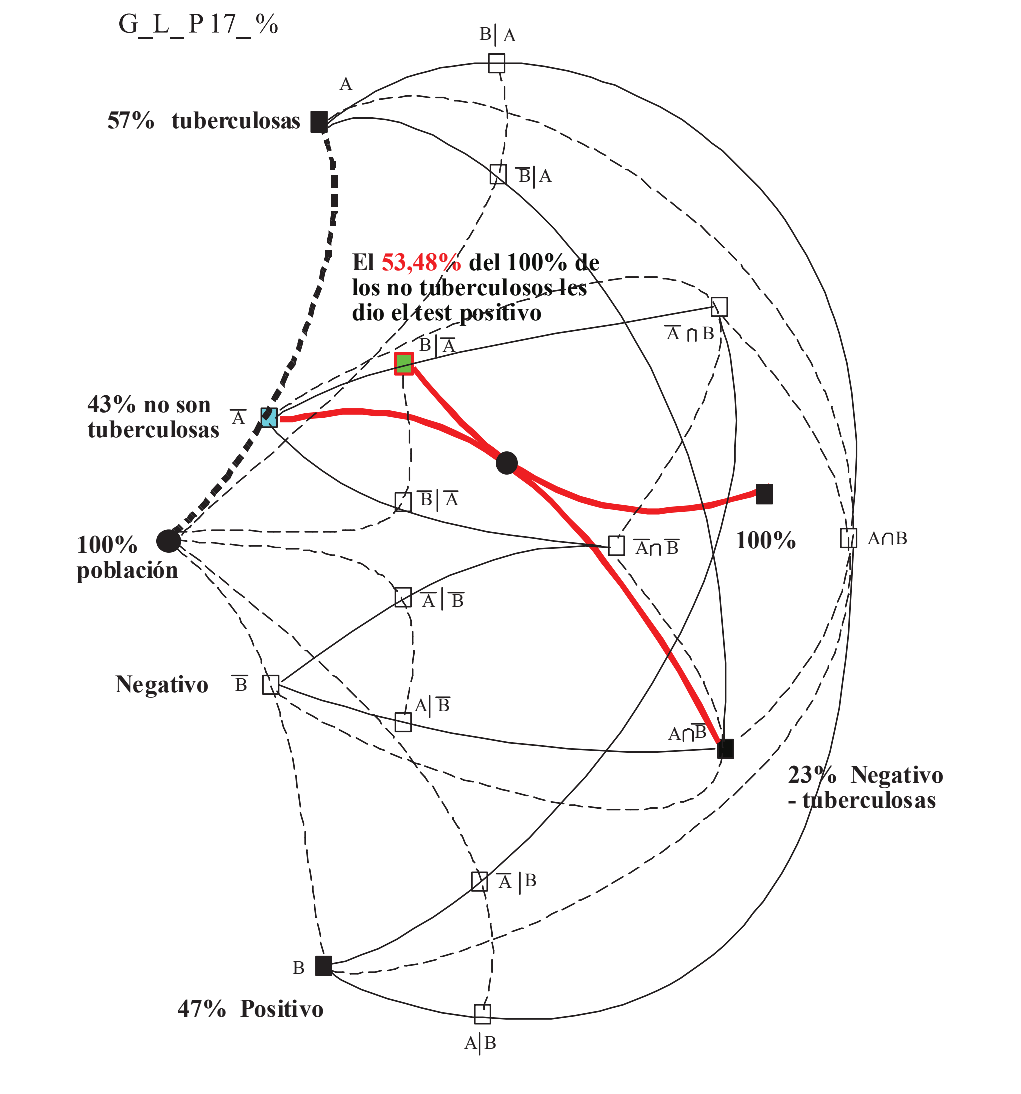
23% —— x

$x = \frac{23 \cdot 100}{43} = 53'48\%$

$\cancel{100\% - 53'48\% = 046'52\%}$

· ~~El 46'52% del 100% de no tuber~~

· El 53'48% del 100% de los no tuberculosos les dio el test positivo.



M_P17_%

problema 3

| 57 %. tuberculosas | → Si eran de verdad

según el test { 47 %. test positivo
23 %. eran / pero dió negativo

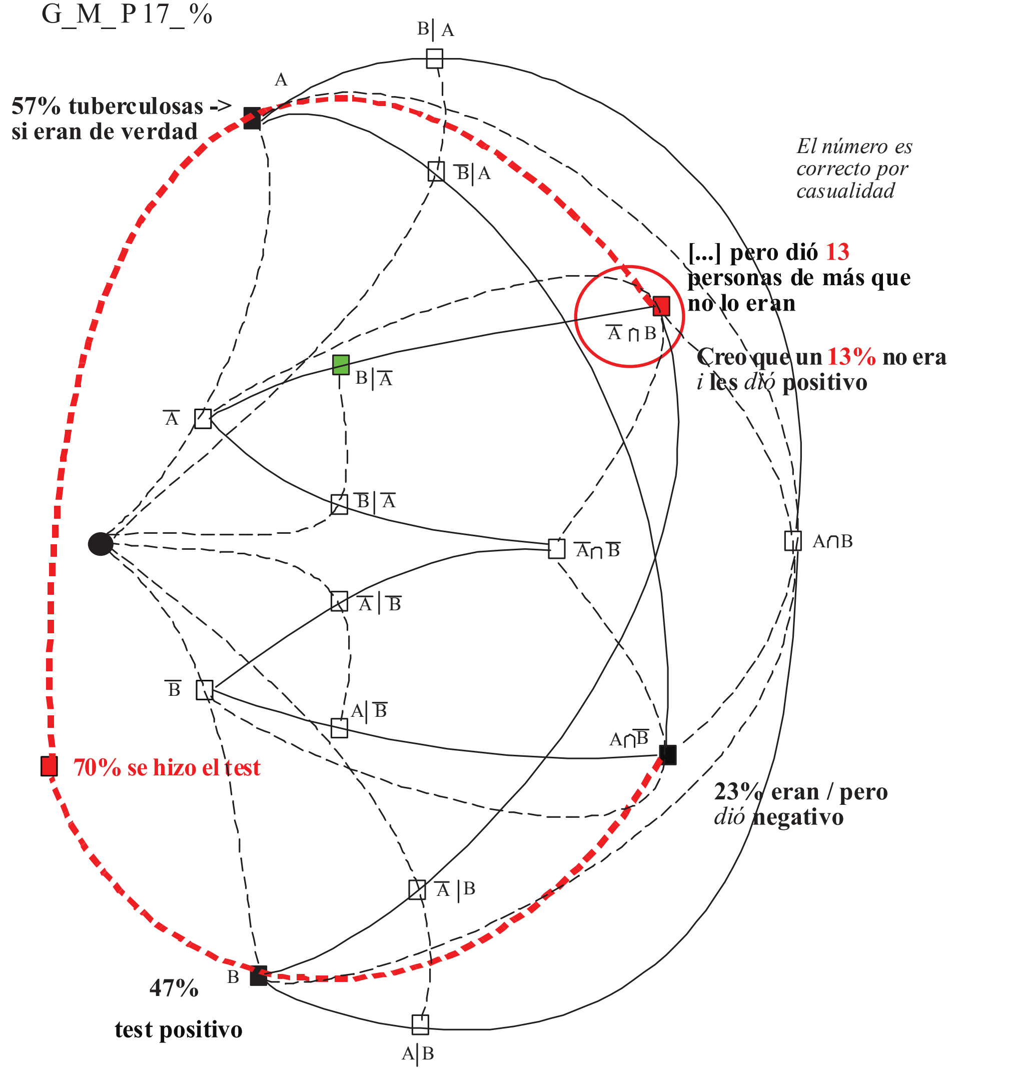
47 + 23 = 70 % se hizo el test

pero dió 13 personas de más que no lo eran.

$$\begin{array}{r} 70 \\ -57 \\ \hline 13 \end{array}$$

Creo que un 13 % no era i les dió positivo

G_M_P17_%



T_P17_%

3

TANIA

PERSONAS 100%
- TUBERCULOSAS 57%
  - POSITIVO - 34%
  - NEGATIVO - 23%
- NO TUBERCULOSAS 43%.
  - POSITIVO - 13%
  - NEGATIVO - 30%

47%

100 - 57 = 43% no tuberculosos

57 - 23 = 34 % tuberculosos - positivo

47 - 34 = 13% no tuberculosos - ~~negativo~~ positivo

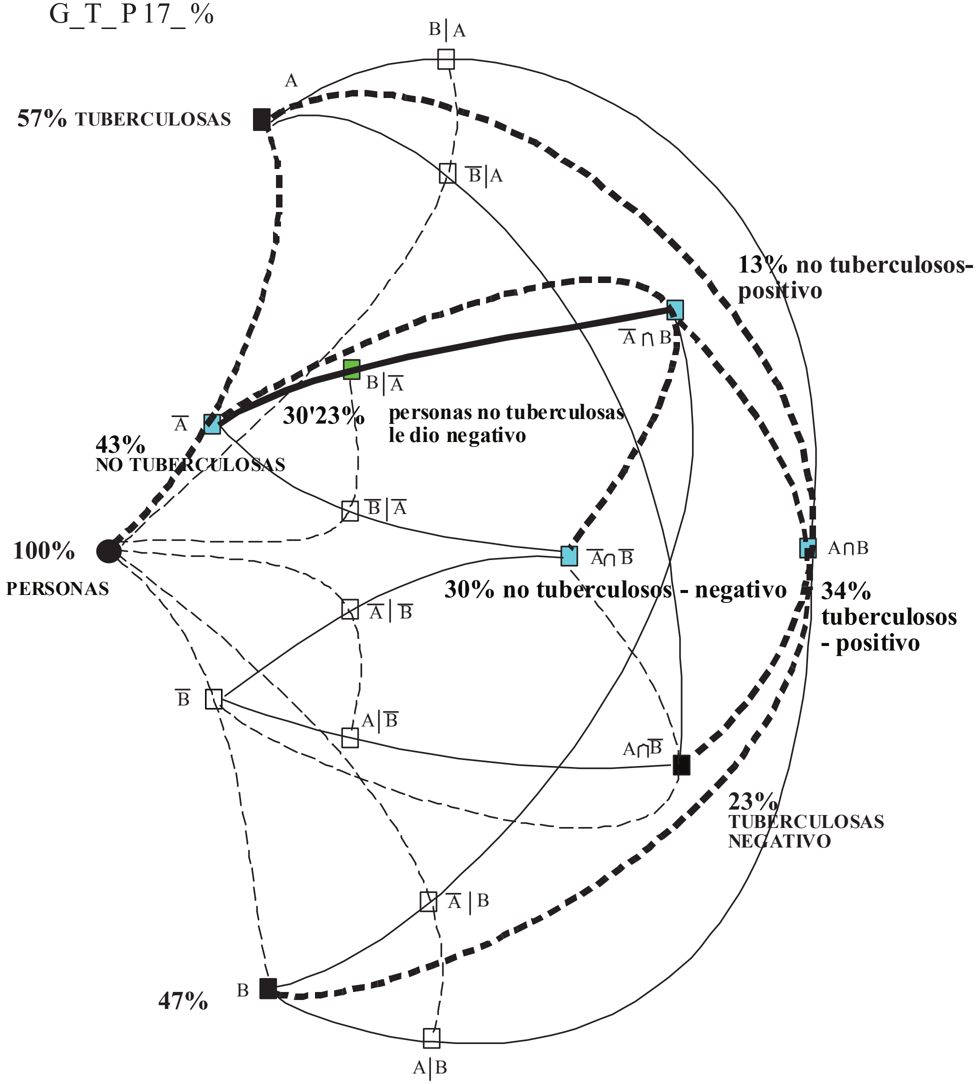
43 - 13 = ~~20~~ 30 % no tuberculosos - negativo

100 —— 43

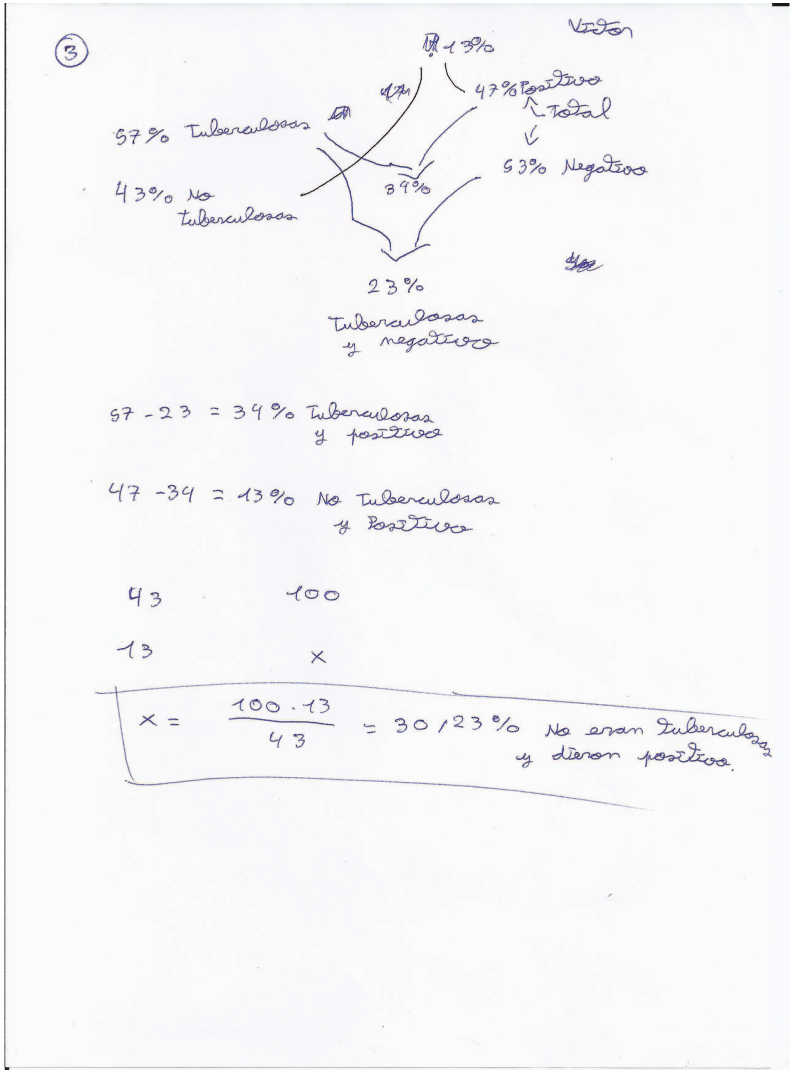
~~13~~ x —— ~~x~~ 13

x = 30'23 % personas no tuberculosas le dio negativo

G_T_P17_%



V_P17_%


3

Victor

13%

47% Positivo
Total

57% Tuberculosas

53% Negativos

43% No tuberculosas

34%

23%
Tuberculosas y negativo

57 - 23 = 34% Tuberculosas y positivo

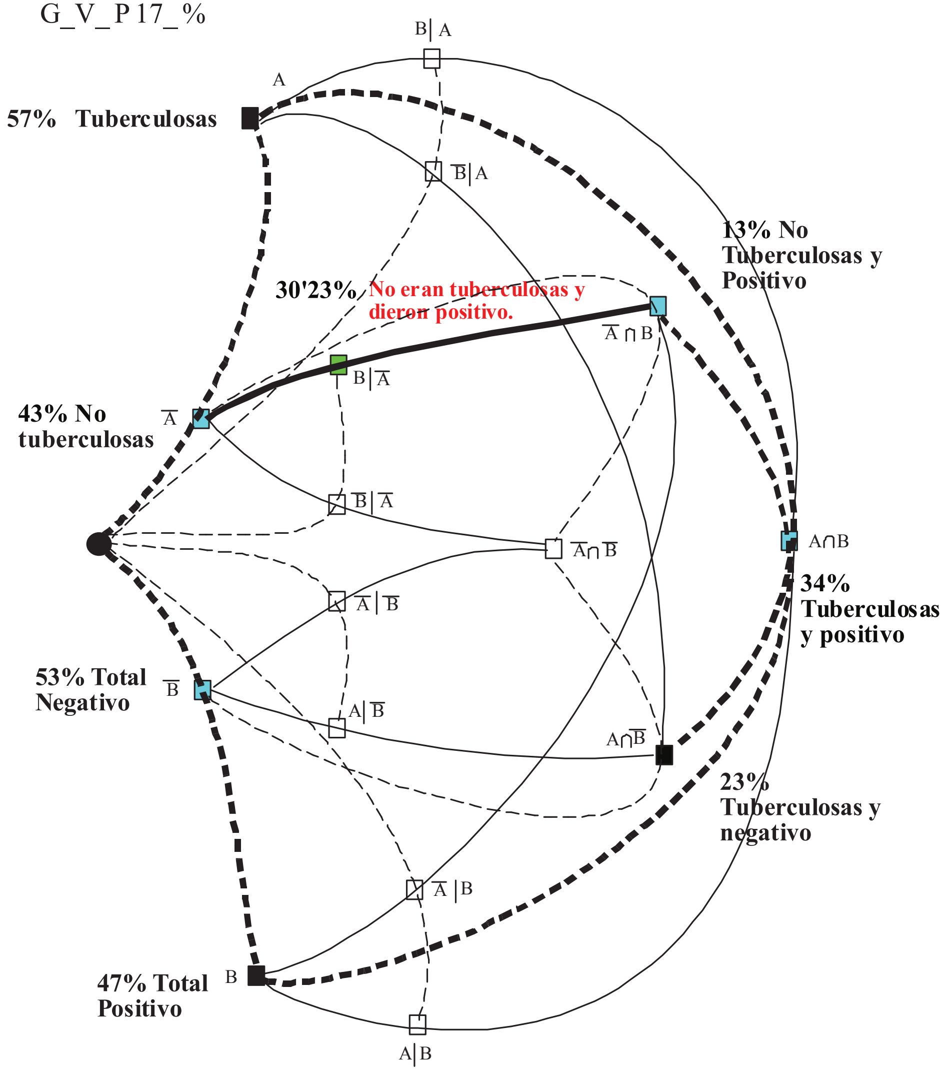
47 - 34 = 13% No Tuberculosas y Positivo

43 100

13 x

$x = \frac{100 \cdot 13}{43} = 30'23\%$ No eran tuberculosas y dieron positivo.

G_V_P17_%



ANEXO 17. Resoluciones y grafos de las resoluciones del Problema 18a en los pre-test.

<u>Enunciado del problema en el Pre-test(F):</u>

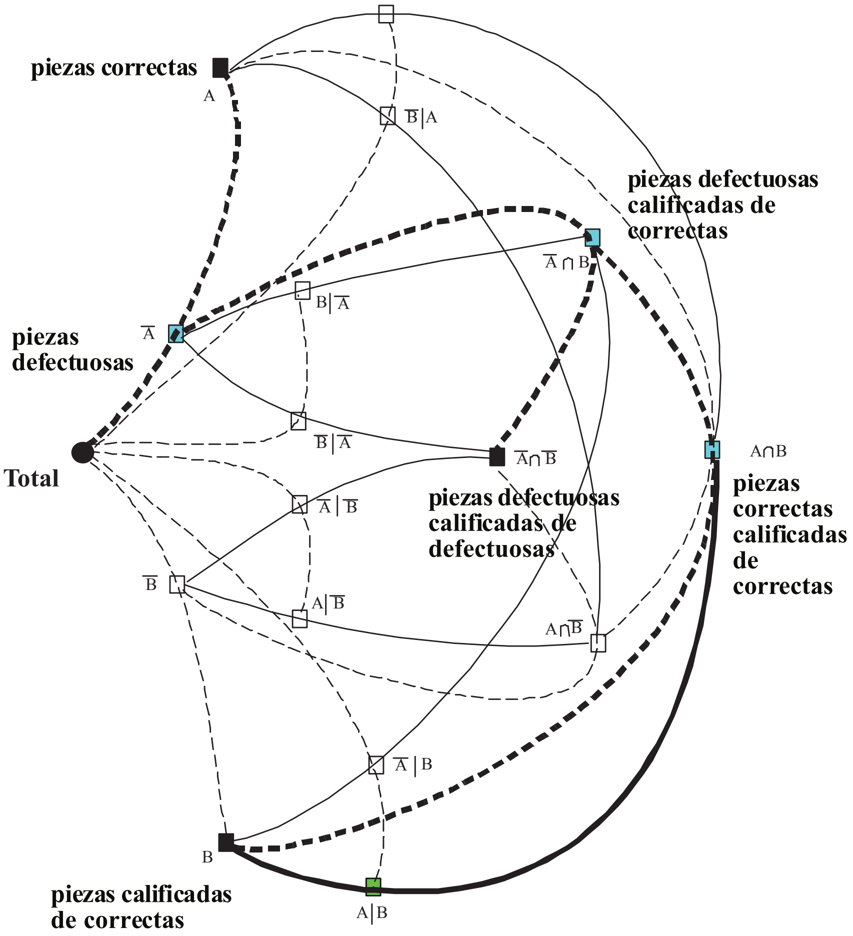
Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado fue que 95 piezas fueron correctas, 77 fueron calificadas como correctas por el dispositivo y que 4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

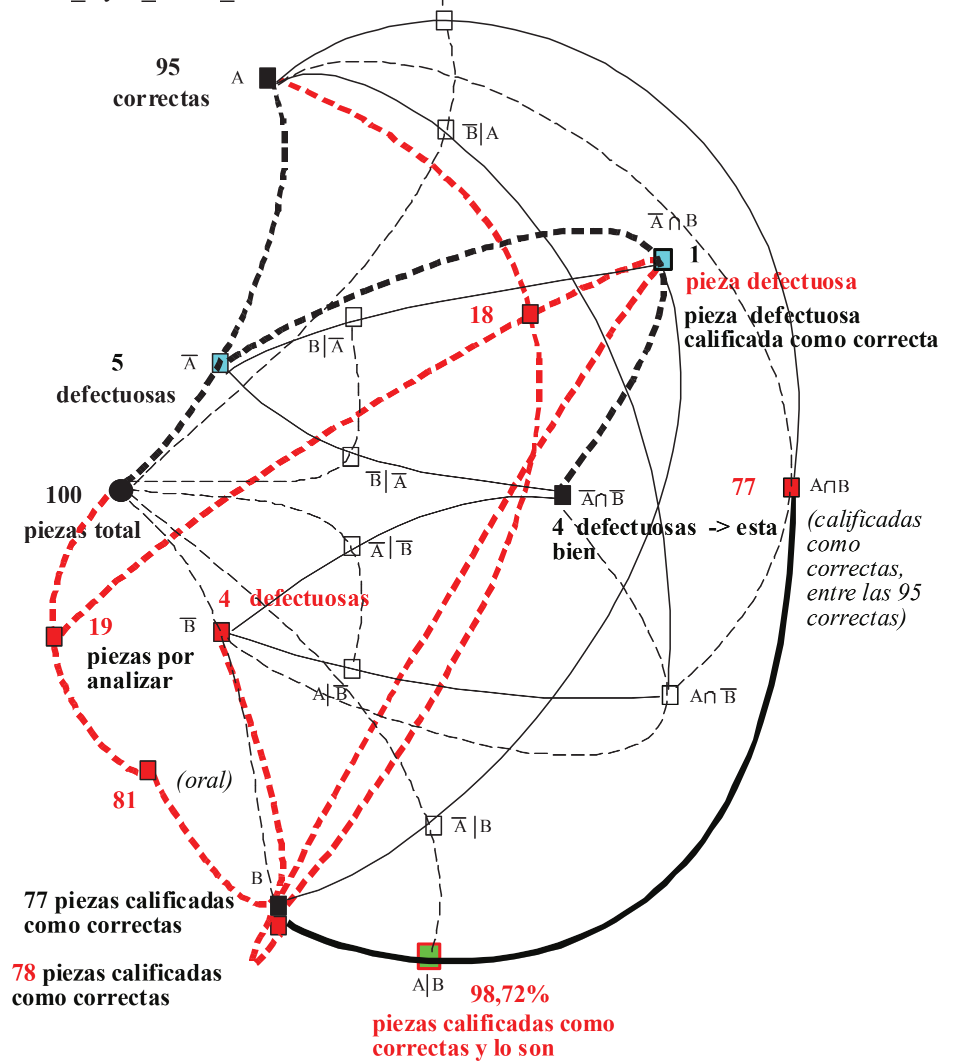
<u>Enunciado del problema en el Pre-test(%):</u>

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El 95% de las piezas eran correctas, el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo y el 4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

<u>Modelo de competencia:</u>

P 18a

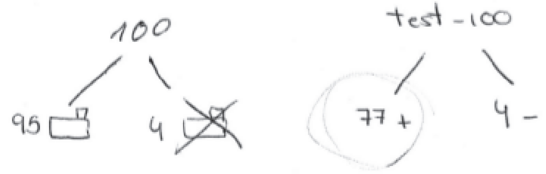


AyM_P18a_F	G_AyM_P18a_F
Trascripción completa de la resolución filmada en el Anexo 23 (p. 623).	

B_P18a_F

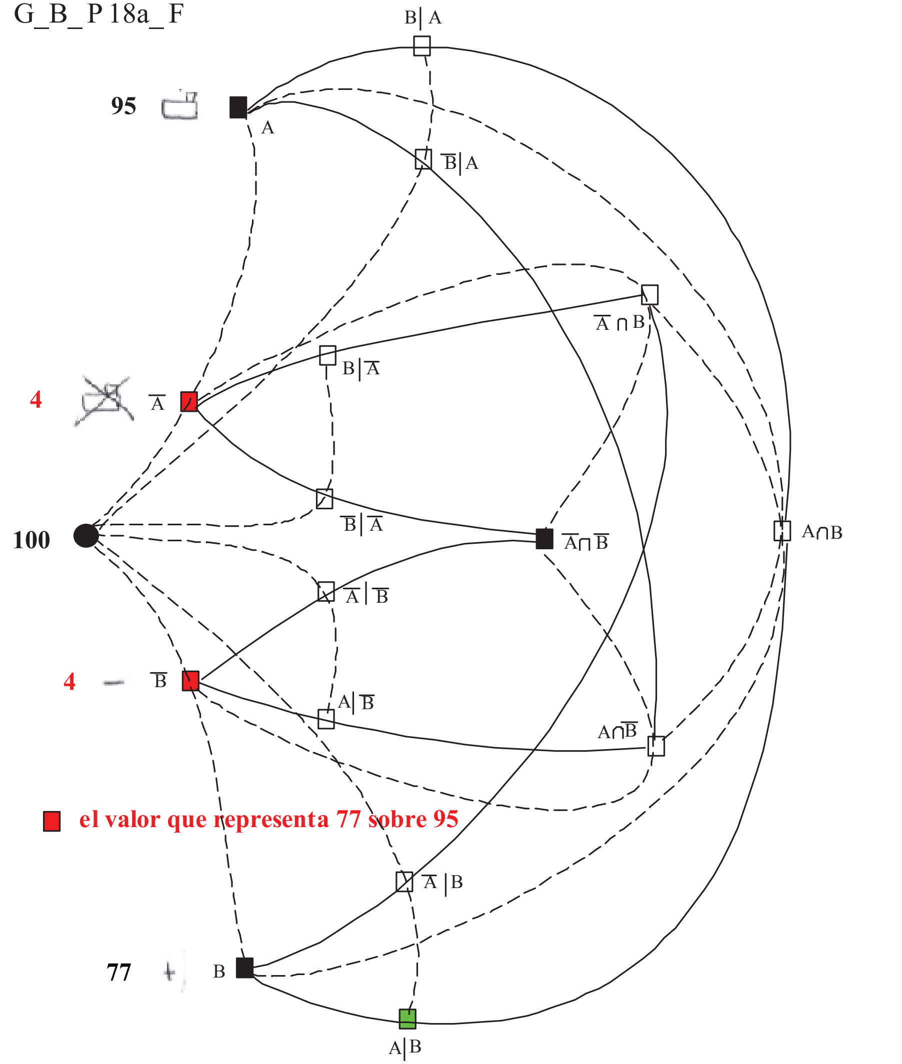
Problema 6

Belén.



No se seguir, porque no sé como calcular el valor que representa 77 sobre 95.

G_B_P18a_F



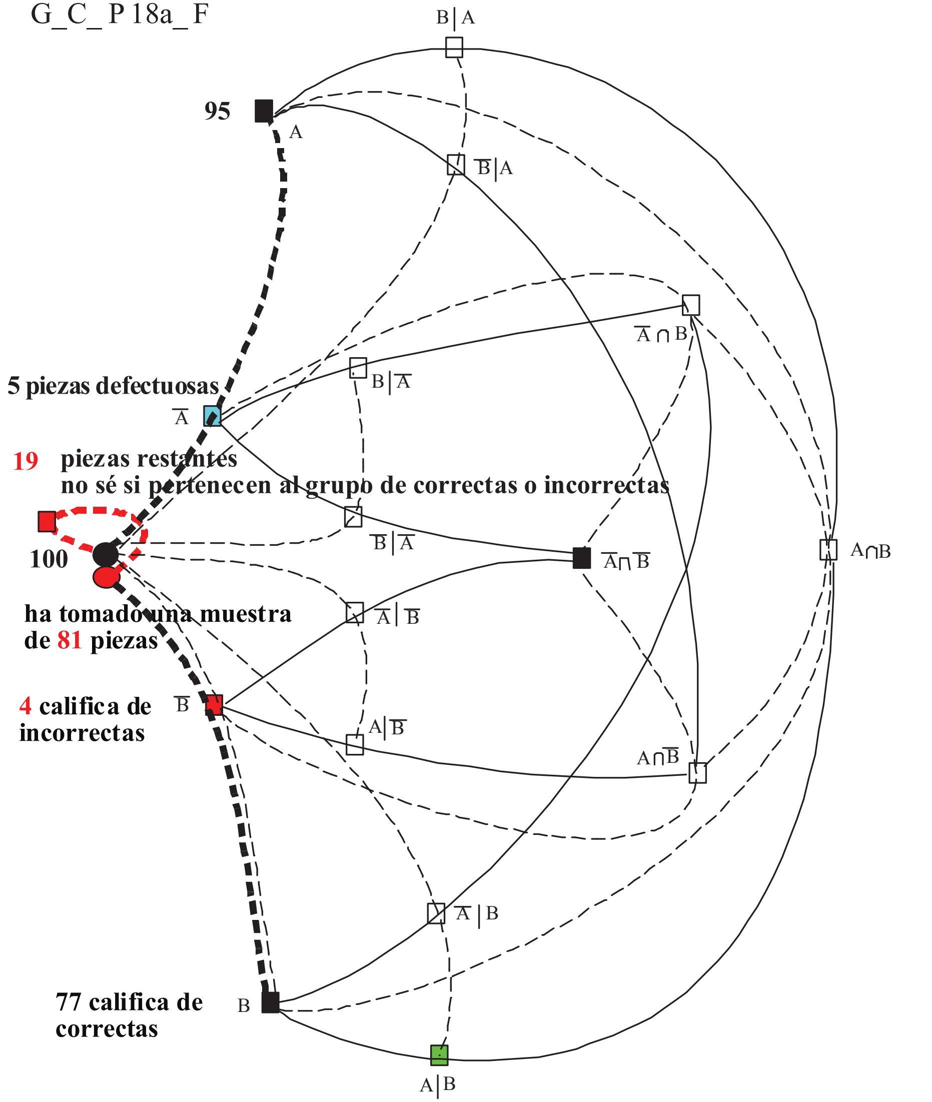
C_P18a_F

Clara

(6) 100 - 95 = 5 → piezas defectuosas

No sé hacerlo, porque si se toma una muestra de 100 piezas y el dispositivo califica de correctas a 77, y de incorrectas a 4, tan sólo ha tomado una muestra de 81 piezas. Por ello, no sé si las 19 piezas restantes pertenecen al grupo de correctas o incorrectas.

G_C_ P 18a_F



L_P18a_F

cuenta

6

100 piezas → 95 (correctas) → 77 (correctas por el dispositivo)

4 (defectuosas)

$$\begin{array}{r} 77 \\ -\ 4 \\ \hline 73 \end{array}$$

73 fueron correctas por el dispositivo restando las 4 que acabó reconociendo como defectuosas.

77

77 ——— 100%

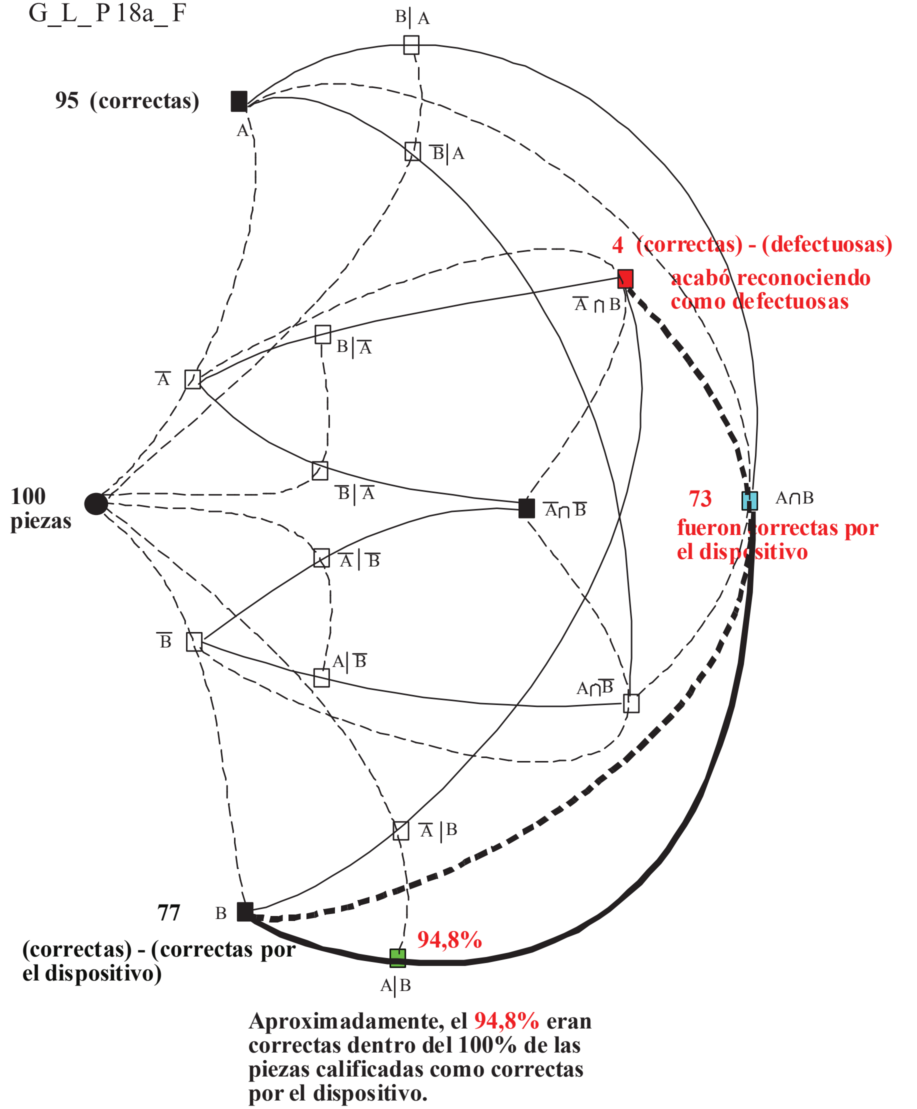
73 ——— x

$$x = \frac{73 \cdot 100}{77} = \frac{7300}{77} \simeq 94'8\%$$

$$\begin{array}{r|l} 7300 & 77 \\ \cline{2-2} 370 & 94'8 \\ 620 & \\ 04 & \end{array}$$

• Aproximadamente el 94'8% eran correctas dentro del 100% de las piezas calificadas como correctas por el dispositivo.

G_L_ P 18a_ F



T_P18a_F

⑥ piezas — %

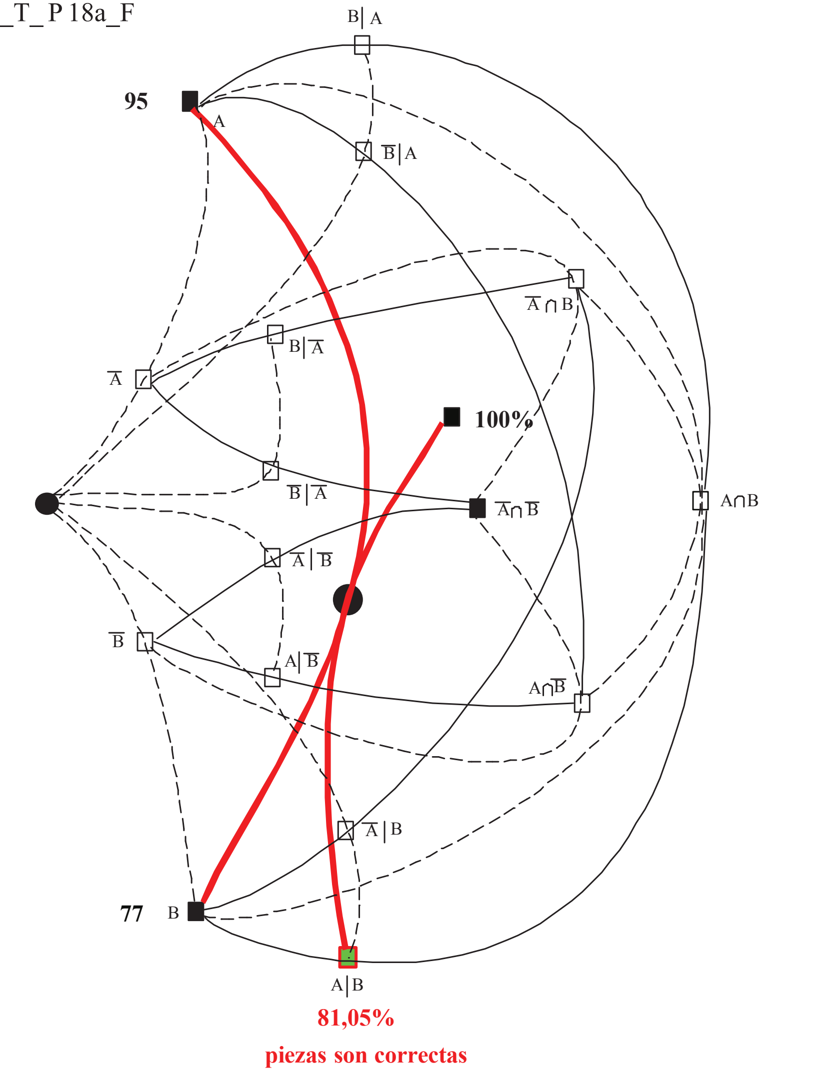
95 —— 100

77 —— x

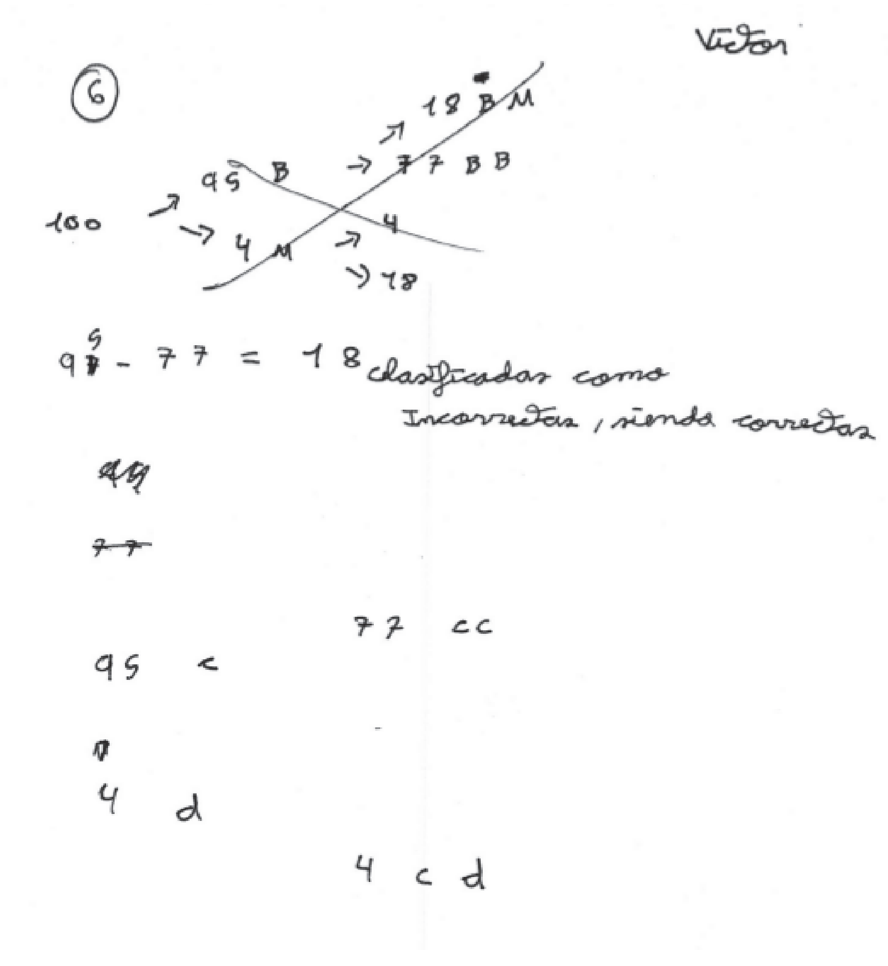
$x = \frac{7700}{95} \simeq 81\%$ piezas son correctas.

$$\begin{array}{l|l} 7700 & 95 \\ \hline 100 & 81 \\ 05 & \end{array}$$

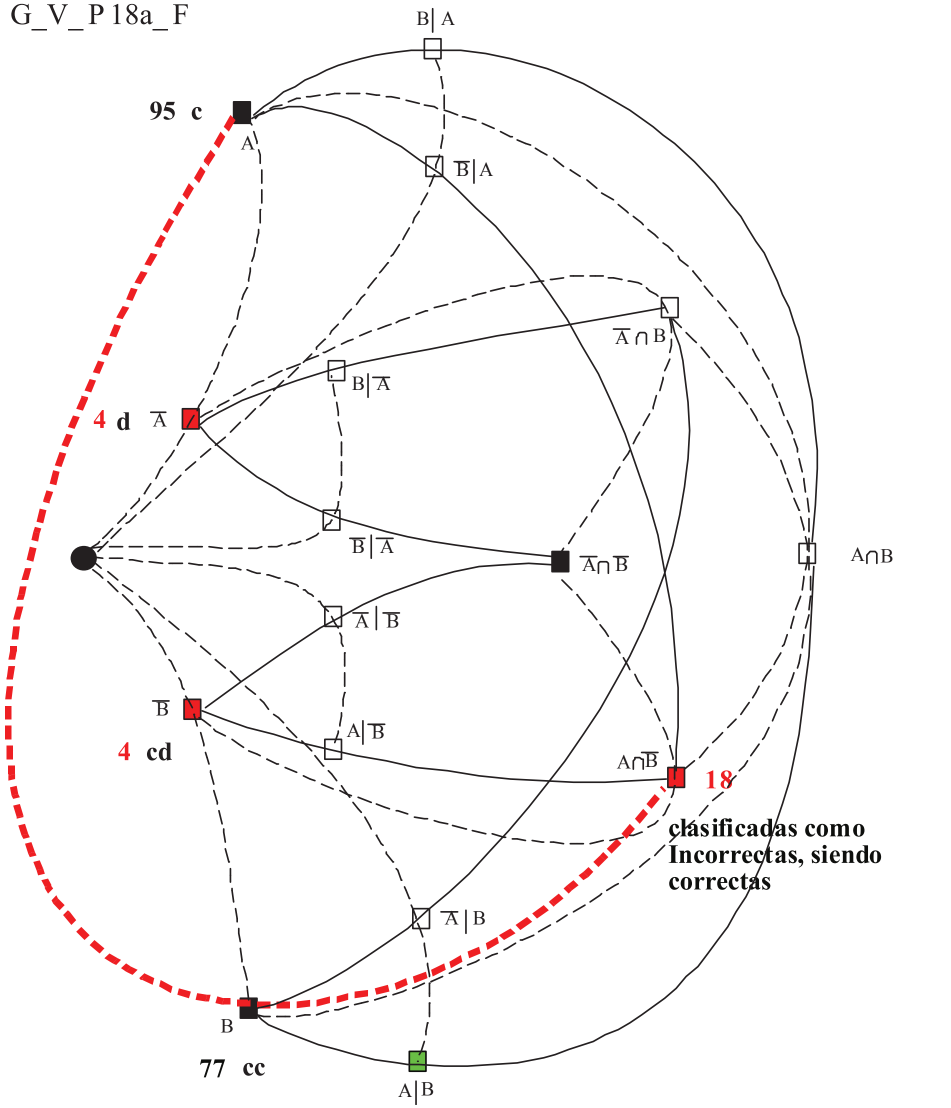
G_T_P18a_F



V_P18a_F



G_V_P18a_F



B_P18a_%

Problema 5

Realidad

95% → correctas

4% → defectuosas

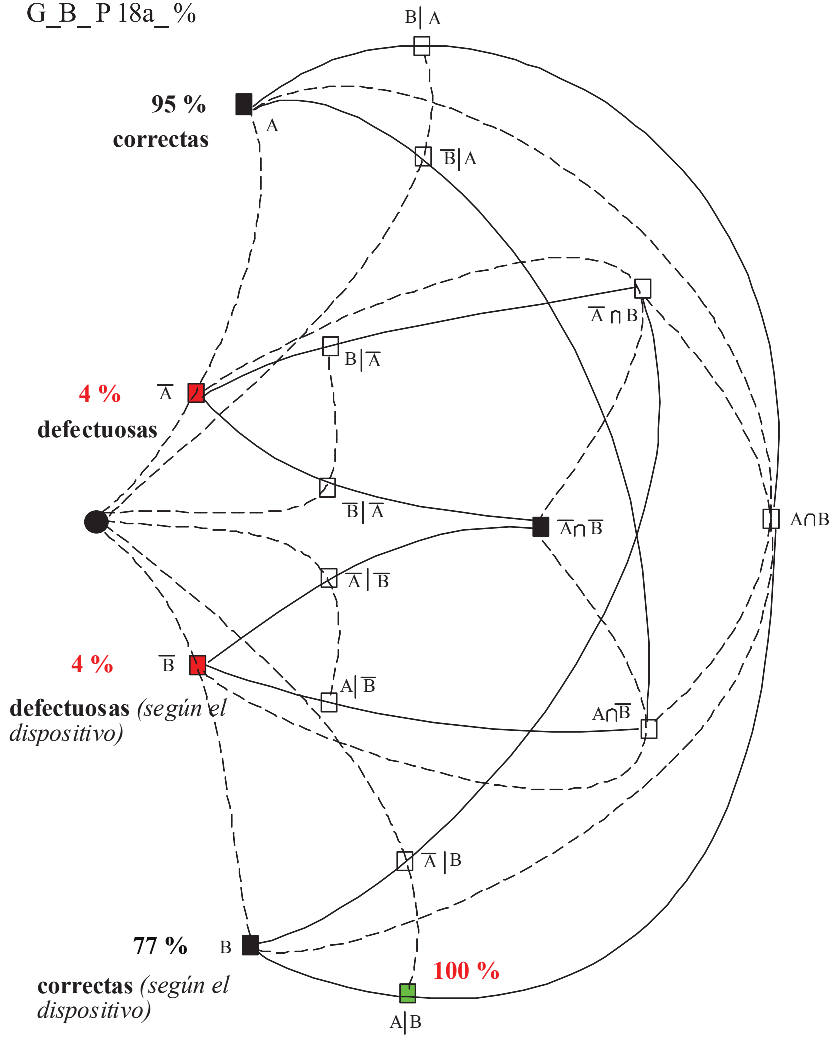
Dispositivo

77% correctas

4% defectuosas

Del porcentaje de correctas clasificadas por el dispositivo, el 100% son correctas, ya que si en realidad son 95% correctas y el sólo recoge el 77% son todas.

G_B_ P 18a_ %



Del porcentaje de correctas clasificadas por el dispositivo, el 100% son correctas.

C_P18a_%

Problema 5

CLEA

95% → ✓

77% → ✓ (dispositivo)

4% → X (dispositivo)

~~95 → piezas ✓~~

~~77 → piezas ✓ (por dispositivo)~~

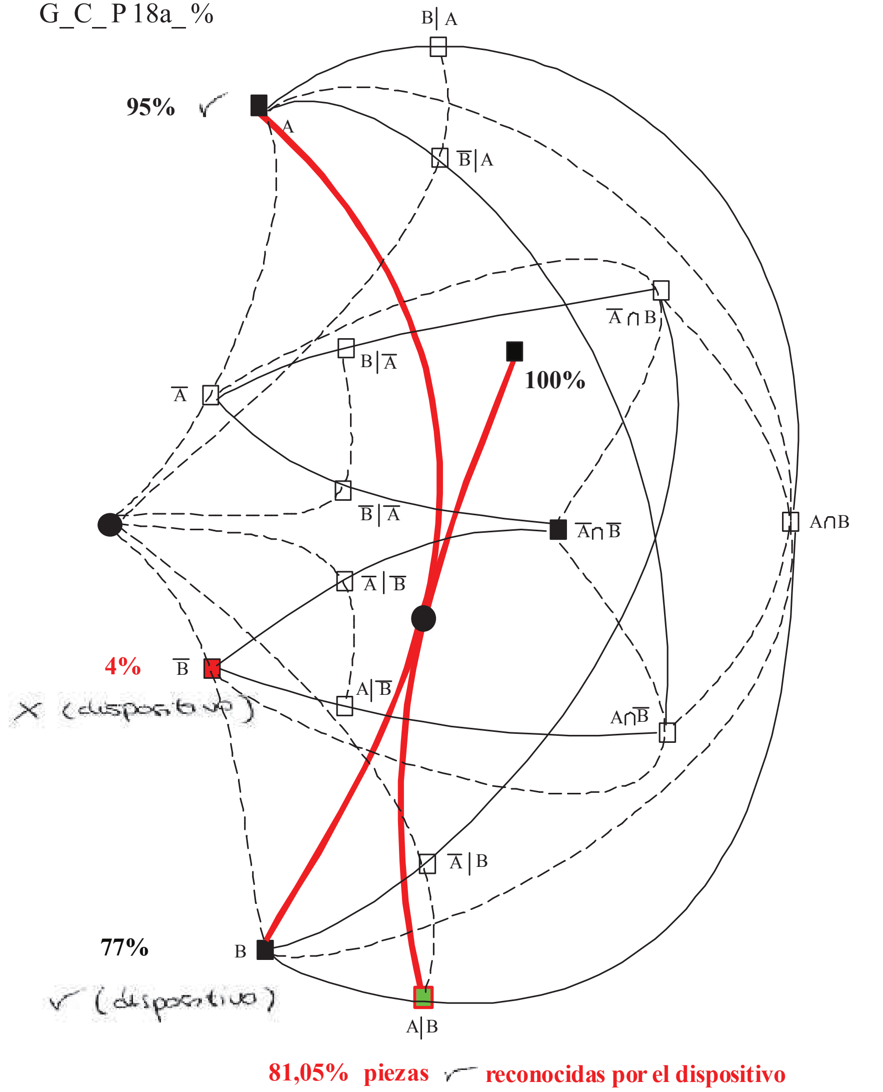
~~95 - 77 = 18% piezas ✓ (no por dispositivo)~~

95% ⟶ 100% piezas ✓

77% ⟶ x

$x = \frac{7700}{95} = 81'05\%$ piezas ✓ reconocidas por el dispositivo

G_C_P18a_%



H_P18a_%

5_

95% correctas

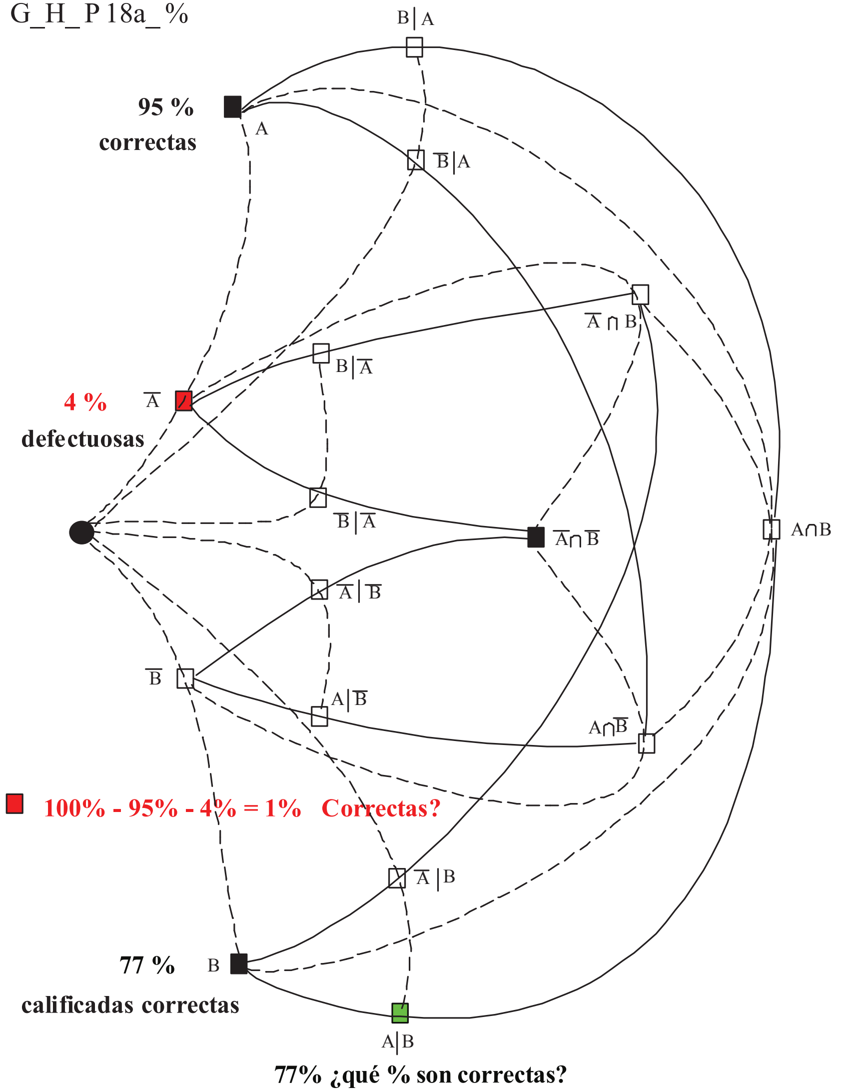
77% Calificadas correctas

4% defectuosas

77% ¿qué ~~P~~% son correctas?

100% - 95% - 4% = ~~1~~% Correctas?

G_H_P18a_%



L_P18a_%

Cuan 4ºA

Problema 5

100% de piezas → Correctas → 95%

100% de piezas → Defectuosas → 5%

100% de piezas calificadas por el dispositivo → 77% correctas

100% de piezas calificadas por el dispositivo → 4% defectuosas

77% —— 100%

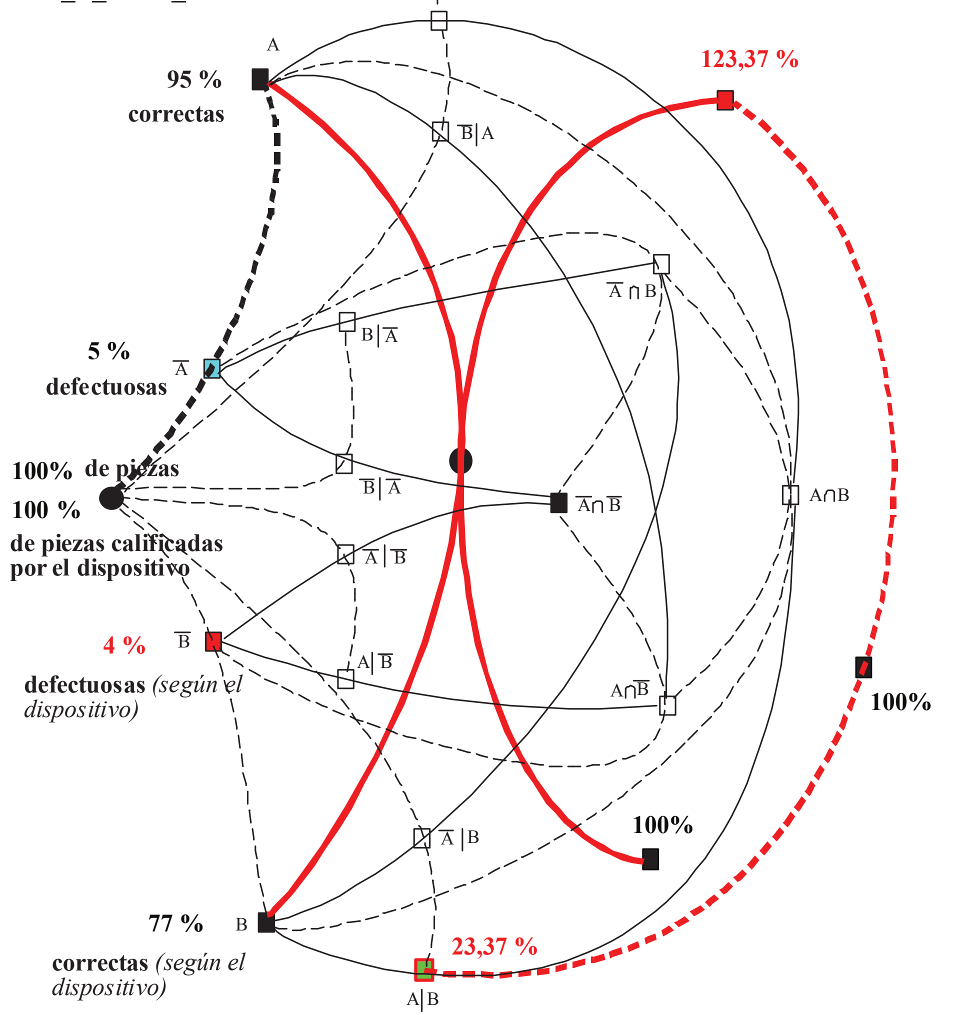
95% —— x

$$x = \frac{95 \cdot 100}{77} = 123'37\%$$

$$\begin{array}{r} 123'37\% \\ -\ 100\ \ \% \\ \hline 0{\cdot}23'37\% \end{array}$$

• El 23'37% del 100% de las piezas calificadas como correctas por el dispositivo eran piezas correctas.

G_L_P18a_%



El 23,37 % del 100% de las piezas calificadas como correctas por el dispositivo eran piezas correctas.

M_P18a_%

problema 5

95% correctas

77% → calificada como correcta

y 4% de ellos no lo eran

$77 - 4 = 73\%$

correctas

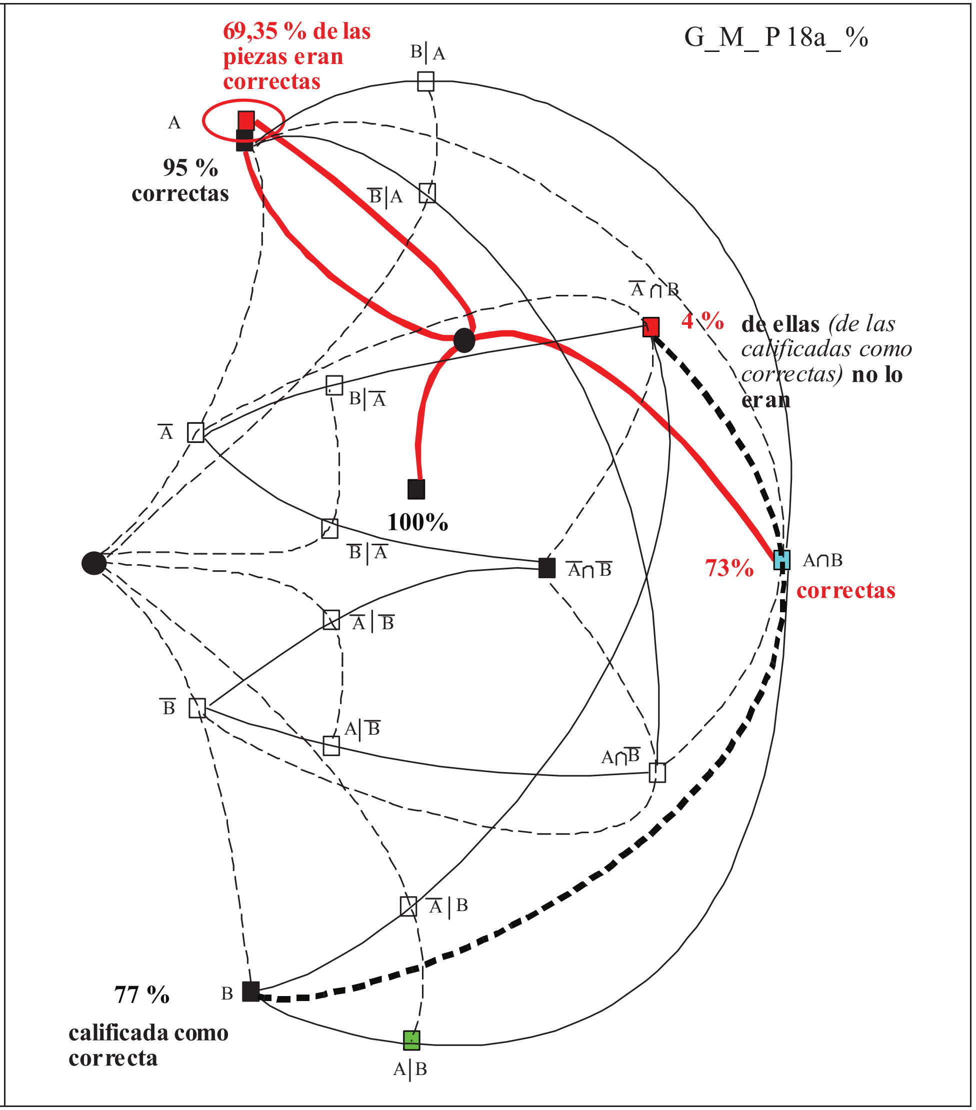
4 no lo eran

$x = \frac{4 \cdot 77}{100} = 3'08\%$

100 —— 95

73 —— x

$x = \frac{73 \cdot 95}{100}$ = 69'35% de las piezas eran correctas.



T_P18a_%

(5)

PIECAS 100%
- CORRECTAS 95%
  - CALIFICADAS BIEN – 77%
  - CALIFICADAS MAL – 18%
- DEFECTUOSAS 5%
  - CALIF. BIEN – 1%
  - CALIF. MAL – 4%

100 - 95 = 5% defectuosas

95 - 77 = 18 % correctos - calificados mal

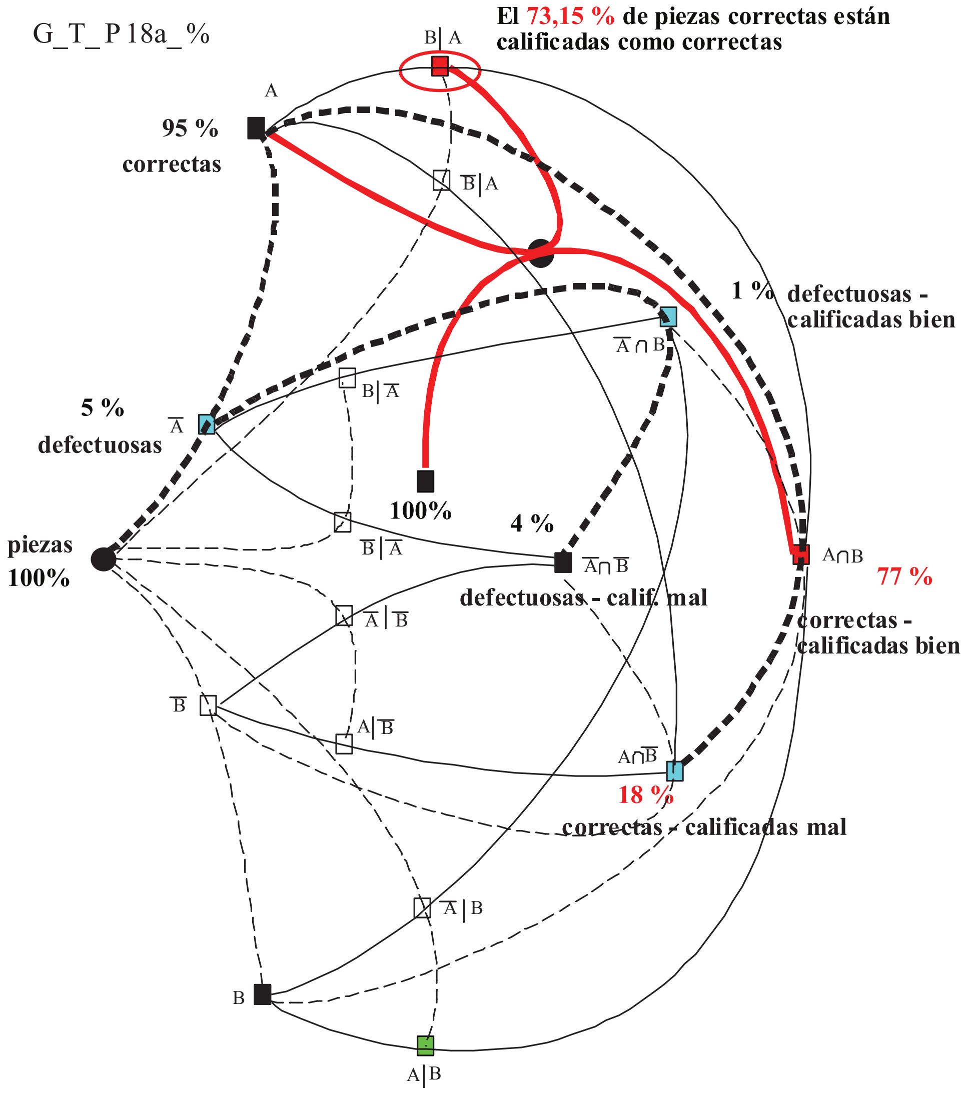
5 - 4 = 1 % defectuosas - calificadas bien

100 — 95

77 — x

x = 73'15 % de piezas correctos están calificadas como correctas

G_T_P18a_%



V_P18a_%

* (5) 77% calificadas correct — calificadas correct 1 % — Calificadas ~~corr~~ correct Total. 78 %

95% correcta

Defectuosa 4%

calificadas Incorrect 18%

calificadas Incorrect 4%

Victor

calificadas Incorrect total 22%

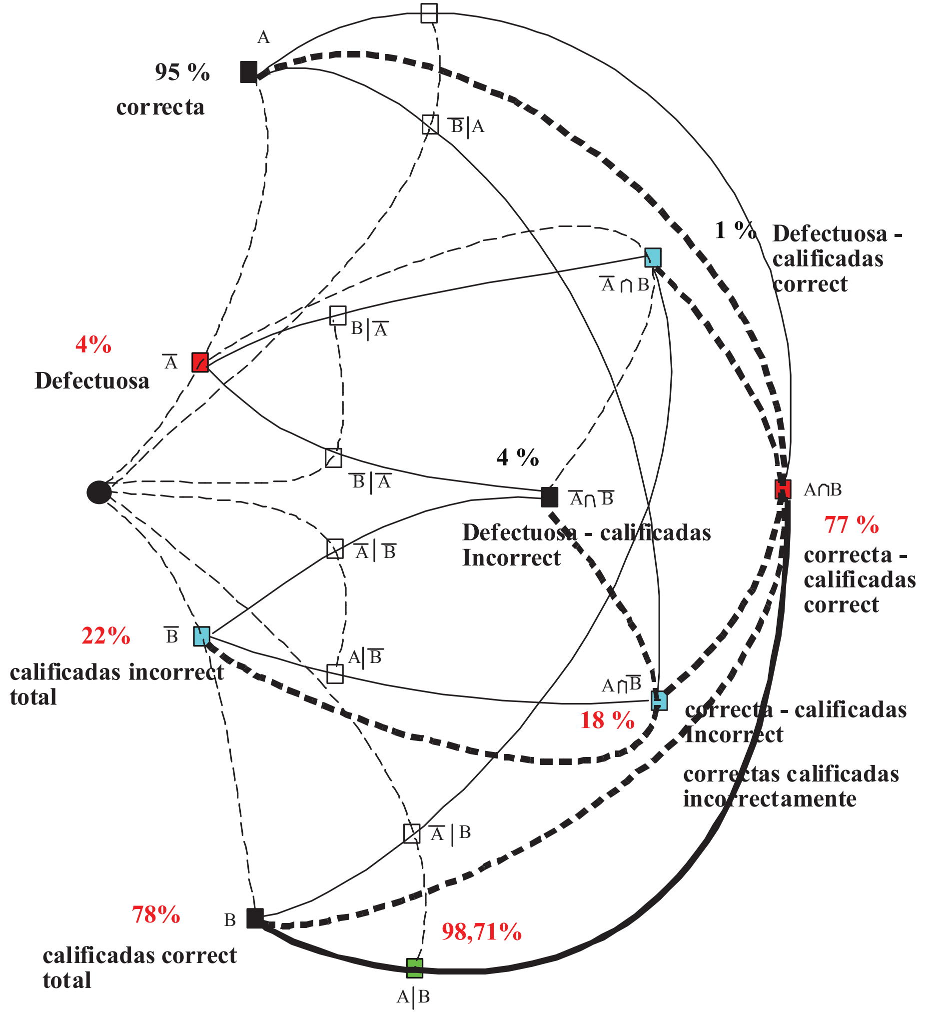
$99 - 77 = 18\%$ correctos calificados Incorrectamente

78   100

77   x

$$\boxed{x = \frac{77 \cdot 100}{78} = 98{,}71\%}$$ de las piezas clasificadas como correctas eran correctas

G_V_P 18a_%



ANEXO 18. Trascripción de la resolución filmada del Problema 1 del Pre-test(F).

{1} M.: (*Lee*) La clase de cuarto de ESO está formada por treinta estudiantes, entre chicos y chicas. Entre los estudiantes hay siete chicas que usan gafas, diez chicas que no las usan y ocho chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

{2} A.: Vale, eh… treinta estudiantes, chicos y chicas, en total.

(M. asiente. A escribe "30 ---- total estudiantes")

{3} A.: Vale.

{4} M.: Vale.

{5} A.: (*Mirando el enunciado*) Y luego siete que son…

{6} M.: Siete…

{7} A.: Siete chicas que usan gafas y diez chicas que no las usan, diecisiete chicas.

(M. asiente. A escribe debajo de lo anterior "17 ---- chicas")

{8} M.: Y pones que siete de ellas usan gafas.

{9} A.: Vale.

(A. escribe "7 usan gafas" a continuación de la expresión "17 ---- chicas", separadando ambas expresiones con una coma)

{10} A.: Entonces hay… trece chicos, en total ¿no?

(M. asiente)

{11} M.: Y ocho de ellos no usan.

(A escribe debajo de lo anterior, "13 – chicos total ---- 8 chicos no usan")

{12} A.: Vale… Entonces, el treinta es el cien por cien.

(M. asiente)

{13} A.: Y entonces así sacamos cuan… cuanto es el porcentaje total de chicas.

(M. asiente)

{14} A.: Treinta, cien por cien. (*A. escribe "300 ------ 100 %"*)

{15} A.: Diecisiete…

{16} M.: Diecisiete…

{17} A.: Equis.

{18} M.: Equis.

(A. escribe debajo de lo anterior "17 ------ x")

{19} A.: *(Hablando para sí mientras empieza a resolver la regla de tres en la pizarra)* Equis es igual a diecisiete por cien, partido trescien…

{20} M.: Trescientos.

{21} A.: ¿Qué trecientos? ¡Treinta! *(Borra el cero de las unidades en 300)*

{22} M.: ¡Ah!

(A. termina de escribir " $x = \dfrac{17 \cdot 10\emptyset}{3\emptyset}$ *")*

{23} A.: Vale, hazlo tú.

{24} A.: Tres, diecisiete, …

{25} M.: Ciento setenta…

{26} A.: Ciento setenta.

(A. escribe a continuación de lo anterior " $= \dfrac{170}{3}$ *". M. hace la división de 170 entre 3 en la pizarra)*

{27} M.: Cincuenta y tres.

{28} A.: Vale.

(A escribe a continuación de lo anterior el resultado: "= 53%")

{29} A.: Son chicas. *(Escribe a continuación de lo anterior "son chicas")*

{30} A.: Vale, lo hacemos aquí. *(Señala la parte superior derecha de la pizarra que está vacía)*

{31} A.: Entonces, si el cincuenta y tres por cien son chicas, es el total de chicas. Entonces cincuenta y tres es el total de chicas. (*Escribe "53 ----- 100%" en el lugar que acaba de señalar*)

{32} A.: Y si siete usan gafas… (*Señala la expresión "7 con gafas"*)

(Después, escribe "7 ----- x" debajo de "53 ----- 100%" y continua con "x =")

{33} M.: (*Después de mirar el enunciado de nuevo*) Qué porcentaje son chicas.

(A. deja de escribir, se acerca a M. y mira también el enunciado)

{34} A.: Osti…

{35} M.: Ya está.

{36} A.: No, ahora no está, porque está mal.

{37} M.: Claro.

{38} A.: Si te preguntan el porcentaje.

(A A. se le cae el borrador)

{39} M.: ¡Chica! *(Se agacha para recogerlo)*

{40} A.: No tenías que haber hecho esto (*señala el número 17 en la lista de datos*). Se tenía que haber hecho el total que llevan gafas…

{41} M.: Claro.

{42} A.: …que son… (*señala primero "7 usan gafas", luego "8 chicos no usan" y luego ambos alternativamente*)

{43} A.: Vale, borra.

{44} A.: Todo esto fuera. (*M. borra la primera regla de tres*)

{45} A.: Y esto también (*se ríe*).

(M. borra la otra regla de tres. Sólo conservan la lista con la información extraída del enunciado)

{46} P: No tengáis miedo de hablar alto. No…no… Habláis así como entre vosotras.

{47} A.: ¡Ah! Vale, vale, vale…

{48} M.: Vale, vale, vale…

{49} P: Hablar así como alto.

{50} M.: (*Dirigiéndose a A., en voz muy bajita*) Qué porcentaje son chicas…

{51} A.: Hay que hallar el porcentaje que usan gafas (*señala la expresión "7 usan gafas"*) Entonces, si son siete y ocho chicos no usan (*señala "8 chicos no usan"*). Trece menos ocho… son cinco. ¿Son cinco? Sí.

(M. asiente)

{52} A.: Entonces, siete y och… ¡oggh! Siete y cinco, doce.

(M. asiente)

{53} A.: Y ahora pongo, si treinta es el cien por cien (*A. escribe "30 ----- 100%*)

{54} A.: Ehh… (*señalando el número 8*) Jo! Cinco y siete (*señala el 7*), doce.

{55} M.: (*En un hilo de voz*) Son equis…

(A. termina de escribir “12 ----- x”)

{56} A.: Más… equis es igual a doce… cien… partido treinta (*mientras escribe “$x = \frac{12 \cdot 100}{30}$”*)

{57} A.: Ciento veinte entre tres que son cuarenta. Cuarenta por cien *(mientras escribe “$= \frac{120}{3} = 40\%$ usa gafas” a continuación de lo anterior)*

{58} A.: Y ahora, si cuarenta es el total. *(Escribe “40 ----- 100” en la parte superior derecha de la pizarra)*

{59} A.: Usan… siete chicas usan gafas. *(Escribe “7 -----E x” debajo de lo anterior)*

A. comienza a resolver la regla de tres en silencio:

$$x = \frac{7 \cdot 10\cancel{0}}{4\cancel{0}}$$

{60} A.: ¿Setecientos setenta partido cuatro? *(Escribe a continuación de lo anterior “$= \frac{770}{4}$” y empieza a hacer la división)*

(M. murmura alguna cosa)

{61} A.: ¿Cuánto?

(M. no responde y empieza a hacer la división de setenta y siete entre cuatro. A. le ayuda. Hablan bajito entre ellas mientras la resuelven)

{62} A.: Diecisiete con diez.

{63} M.: Diecisiete con siete.

{64} A.: ¿Diecisiete con siete?

(M. asiente)

{65} A.: Diecisiete con siete… *(Escribe 17’7 como resultado de la regla de tres)*

{66} A.: Diecisiete con siete por cien de chicas usa gafas *(pronuncia las palabras al tiempo que escribe esto mismo como respuesta a la pregunta del problema: “17’7% de chicas usa gafas”)*

(M. borra la división)

(M. mira la hoja donde se encuentra el enunciado del problema y señalando éste, le comenta algo en voz baja a A.)

{67} M.: … son chicas.

{68} A.: *(Señalando la resolución de la regla de tres y la expresión "17'7% de chicas usa gafas)* ¡Ostras! diecisiete por cien de las chicas usan gafas.

{69} M.: Mhm.

{70} A.: Ya está. (*Breve pausa*) Ya está.

{71} P: ¿Ya?

{72} A.: Sí.

(M. asiente)

ANEXO 19. Trascripción de la resolución filmada del Problema 2a del Pre-test(F).

{1} M.: (*Lee*) Un centro escolar está formado por 1.000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 262 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

{2} A.: Eh… *(murmura alguna cosa)*.

{3} M.: Mil alumnos…

{4} A.: Escríbelo tú.

(A. le pasa la tiza a M.)

{5} A.: Mil alumnos es el total.

(M. escribe "1000 alumnos")

{6} A.: Vale.

{7} M.: Vale.

(M. escribe "total" a continuación de lo anterior)

{8} A.: Doscientos ochenta y dos, gafas. En total.

(M. escribe debajo de lo anterior, "282 usan gafas")

{9} A.: Vale. Y entonces, ahora…

{10} M.: Ciento cuarenta y siete… *(está releyendo el enunciado del problema)*

{11} A.: Ciento cuarenta y siete que las usan y trescientos sesenta y ocho que no las usan. Resta doscientos ochenta y dos menos ciento cuarenta y siete, sacas el… total de chicos que usan gafas.

(M. escribe 147 debajo de 282 para restarlos)

{12} M.: Ciento cuarenta y siete menos…

{13} A.: Sí, lo estoy haciendo aquí.

{14} M.: Ah, vale, vale.

(M. hace la resta)

{15} A.: Vale, pones chicos que llevan gafas.

(M. escribe a continuación del resultado, 154, su descripción "chicos con gafas")

{16} A.: Vale, y entonces, sumamos ciento cuarenta y siete y trescientos sesenta y seis y nos da las chicas que hay.

{17} M.: Trescientos sesenta y ocho.

{18} A.: Eso. Vale, ciento cuarenta y siete…

(M. escribe 3 y lo borra)

{19} A.: ¿Qué más da? Ciento cuarenta y siete más trecientos…

(M. escribe "147 + 368 =". Después calculan la suma de cabeza comentando entre ellas en voz baja)

{20} A.: Quinientos quince.

{21} A.: Quinientos quince alum… eh…alumnas.

{22} M.: Iba a poner chicas…

{23} A.: Y ahora, a los mil, les restamos quinientos quince. Mil menos quinientos quince…

(M. escribe 1000 en el centro de la parte derecha de la pizarra)

(A. le murmura alguna cosa a M. y ésta borra el número 1000 que acaba de escribir)

{24} A.: Arriba es que aquí… Sí, ponlo ahí *(le señala el espacio que queda libre en la parte izquierda de la pizarra, debajo de todo lo anterior)*

(M. escribe "1000" en el lugar que le ha indicado su compañera)

{25} M.: Mil.

{26} A.: (*En voz muy baja*) Menos quinientos quince…

(M. escribe debajo el número "515" y bajo éste una línea horizontal. Empieza a resolver la operación, escribiendo un 5 en el lugar de las unidades y se para a pensar lo que ha de escribir en el lugar de las decenas)

{27} M.: Eh… no.

(M. escribe algo pero no resulta visible porque queda tras ella)

{28} A.: ¿Qué haces? ¿Qué haces?

{29} M.: Cinco a diez…

{30} A.: No, de dos a diez…

{31} M.: De dos a diez…

{32} A.: Ocho.

{33} M.: Eso.

{34} A.: De seis a diez, cuatro.

(M. completa el resultado de la suma, que todavía no es visible porque queda oculto tras ella)

{35} A.: Cuatrocientos ochenta y cinco chicos.

(Se hacen comentarios en voz baja)

{36} P.: Aparte de, de anotar… de…Parece que tú (*P. se dirige a M.*) estés haciendo el papel de anotar lo que te está dictando. Eh… se supone que tú estás anotando eso y que estás de acuerdo con lo que está haciendo.

(M. asiente con la cabeza)

{37} A.: ¿Estás de acuerdo?

{38} P.: Que estás segura que estás haciendo lo que corresponde hacer, ¿no?

{39} M.: Sí, sí.

{40} A.: Entonces, siii…ciento treinta y cuatro chicos usan gafas, cuatrocientos ochenta y cinco chicos hay en total. Entonces (*señalando la parte superior de la pizarra*) cuatrocientos ochenta y cinco que es el cien por cien.

{41} M.: Claro.

(M escribe "485 ----- 100")

{42} M.: Sí, sí.

{43} M.: Cien.

{44} A.: Cien por cien *(dibuja con el dedo el signo de porcentaje junto al 100 que acaba de escribir M.)*

(M. añade el signo de porcentaje al 100)

{45} M.: Eh…

{46} A.: Ciento treinta y cuatro…

{47} M.: Ciento treinta y cuatro equis.

(M. completa la regla de tres, escribiendo "134 ----- x" debajo de lo anterior. Después empieza a resolverla, escribiendo " $x = \frac{134 \cdot 100}{485}$ *". Al lado de lo anterior, A. escribe un signo igual y escribe otro signo igual de continuación en la línea siguiente. Seguidamente, A. empieza a hacer, a mano, la división de trece mil cuatrocientos entre cuatrocientos ochenta y cinco. M. escribe "* $\frac{13400}{485}$ *" a continuación de lo escrito para el cálculo del valor de la equis. Después, tratan de resolver la división entre las dos.)*

{48} P.: (*Ofreciéndoles una calculadora*) A ver, podéis usar calculadora, si queréis.

{49} A. y M.: Ah, vale.

(M. toma la calculadora. Hacen los cálculos en la calculadora)

{50} A.: Veintisiete coma seis…

(A. mira de nuevo el resultado en la calculadora)

{51} M.: El redondeo…

{52} A.: Veintisiete coma sesenta y tres.

{53} M.: Sí.

(A. escribe el resultado numérico: "27'63%")

{54} A.: De chicos usan gafas

(A. escribe junto al número su descripción: "de chicos usan gafas". Luego, subraya el número y deja la tiza en la repisa de la pizarra)

{55} A.: Ya está. ¿Otro?

{56} F.: Sí. Estupendo.

(Nota: F. y P. son dos de los investigadores presentes durante la filmación)

ANEXO 20. Trascripción de la resolución filmada del Problema 9 del Pre-test(F).

{1} M.: *(Lee)* Una población de ciento veinte personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Cuarenta y dos personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y cuarenta y ocho personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Se han curado un total, un total de sesenta y cuatro personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico ¿qué porcentaje no se ha curado?

{2} A.: Lo mismo, ¿no? El total son ciento veinte personas…

(M. escribe "120 personas total")

{3} M.: Y entonces pondremos… estas han sido tratadas… *(señala el enunciado en papel)* O sea, me refiero…

{4} A.: Vale, vale, sí, sí.

{5} M.: Vale, cuarenta y dos personas han sido tratadas…

(M. escribe "42 si")

{6} A.: Pero, se ha, esas se han curado ¿eh? Tratadas y curadas.

(M. escribe " tratadas y curadas" a continuación de lo anterior, quedando "42 si tratadas y curadas")

{7} A.: Y cuarenta y ocho, no. Pon, y cuarenta y ocho, no.

(M. escribe "48 no" debajo de lo anterior)

{8} M.: Vale. Se han curado un total de sesenta y cuatro personas.

{9} A.: ¿Pero cómo que se han curado…? (*Risas*)

{10} M.: Claro.

(M. escribe "64 curadas" debajo de lo anterior)

{11} A.: Pero es que estos son datos *(señala el 64 y el 120 en la pizarra)* que no te sirven para nada… lo de ciento veinte de personas tratadas, porque dice entre las personas que se han tratado con el antibiótico, que son cuarenta y ocho y cuarenta y dos *(señala el 48 y el 42 en la pizarra)*, qué porcentaje no se ha curado. Entonces te hace falta para el porcentaje estos dos *(señala el 48 y el 42 en la pizarra)*; estos no te sirven para nada *(señala el 120 y el 64 en la pizarra)*.

{12} M.: Mjm *(asiente)*

{13} A.: Cuarenta y dos y cuarenta y ocho son noven…ta

{14} M.: Sí.

{15} A.: Noventa son las personas tratadas.

(A. escribe "90 personas tratadas" debajo de lo anterior)

(Silencio. M. mira el enunciado)

{16} M.: Pero es que éstas no se han tratado. *(Señala el 48 en la pizarra)*

{17} A.: Hala… a ver, a ver.

(M. borra "90 personas tratadas". A. relee el enunciado en silencio.)

{18} A.: Entonces, vamos a ver.

{19} M.: Por eso te lo decía.

{20} A.: Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no.

{21} M.: Claro. Éstas *(señala el 42 en la pizarra)* han sido tratadas y curadas y éstas *(señala el 48 en la pizarra)* no han sido tratadas… y sesenta y cuatro han sido curadas *(señala el 64 en la pizarra)*.

{22} A.: ¿Y las otras?

{23} M.: *(Risa)* Y hay ciento veinte en total…

(Silencio)

{24} A.: Si se han curado un total de sesenta y cuatro personas, sesenta y cuatro menos cuarenta y dos, sesenta y cuatro, que son las personas que se han curado, menos cuarenta y dos y sacamos las personas que se han tratado con otra cosa, pero es que no te sirve tampoco para nada.

(Breve silencio)

{25} A.: No, sí que te sirve. ¡Claro! Si tú sacas sesenta y cuatro, que son las curadas (*señala el dato*), y le restas el cuarenta y dos (*señala el dato*) que son las que sí que están tratadas con antibiótico, te sale el porcentaje de personas tratadas con antibiótico pero que no se han curado. Entonces, ya está.

{26} M.: Vale.

{27} A.: ¿Lo entiendes?

(M. asiente)

{28} A.: O sea, si hay sesenta y cuatro…

{29} A.: Sesenta y cuatro menos cuarenta y dos igual a… veintidós…

(A. escribe " 64 – 42 = 22" y murmura alguna cosa)

{30} A.: Personas tratadas, personas tratadas con el antibiótico y no curadas.

(M. escribe a continuación del número 22 "personas tratadas y no curadas")

{31} A.: Espérate. Espérate que estemos seguras porque no… no lo veo yo claro.

(M. dice algo en voz baja mientras repasa el número 64)

{32} A.: A ver, *(lee)* una población de ciento veinte personas sufre una infección en la piel.

{33} A.: Unas han sido tratadas con un antibiótico…

{34} M.: Vale, éstas son las que están curadas *(señala el 42)* y éstas son las que no están tratadas *(señala el 48)* y se han curado éstas *(señala el 64)*

{35} A.: Éstas *(señala el 48)* te dan igual porque…

{36} M.: No, éstas no nos sirven…

(Hablan simultáneamente)

{37} A.: Entonces, estas sesenta y cuatro han sido curadas, en total.

{38} A.: Tampoco, no, es que no te sirve, tía.

{39} M.: Es que no nos sirve porque…si éstas *(señala el 64)* se han curado y éstas *(señala el 42)* han sido tratadas y curadas…

{40} A.: No se han tratado con el antibiótico…

{41} A.: *(Murmura alguna cosa acabando la frase así)* tiene algo que ver…

{42} M.: Sesenta y cuatro limpias, sesenta y cuatro que no están infectadas.

{43} A.: Si las curan, sabes, si se curan, si se curan será porque las han tratado.

(Breve silencio)

{44} A.: Si se curan *(risa)* a ver, si se curan es porque las han tratado. Milagros, no.

{45} A.: Entonces, ciento veinte menos sesenta y cuatro, que te da… seis con no sé qué, no, te da… treinta y seis, son personas que no han sido tratadas con el antibiótico. Pero, ¿qué más te da si a ti te están contando que no se han curado?

{46} M.: Escúchame un momento. Aquí hemos sacado las personas que están curadas, que no se han curado, entonces, éstas *(señala el 22)* se las sumamos a éstas *(señala el 48)* y se las restamos a éstas *(señala el 120)*.

{47} A.: Pero, ¿por qué?

{48} M.: Porque si éstas no están ni curadas ni tratadas *(señala el 48)* y aquí nos hemos sacado las tratadas y no curadas *(señala el 22)*, tenemos por tanto que no se han curado y aquí *(señala el 48)* que no se han tratado ni se han curado, entonces se lo restamos al total (*señala el 120*)

{49} A.: Entre las personas que no se han tratado con el antibiótico…

{50} M.: Vale, vale, vale…

{51} A.: Tienes que saber cuántas personas se han tratado con el antibiótico… que son veintidós y cuarenta y dos.

{52} M.: Pero, pero éstas *(señala el 42)* se han curado y éstas *(señala el 22)* no.

{53} A.: ¡Ostras! Si ya está.

(Hablan a la vez)

{54} A.: Sesenta y cuatro personas curadas es el total, de personas tratadas.

{55}A.: Claro.

{56} M.: Vale.

{57} A.: Total de personas tratadas *(Escribe "total personas trat." a continuación de "64 curadas")*

{58} A.: Vale, tratadas, ¿no?

{59} M.: Mjm… (Asiente con la cabeza)

{60} A.: Porque si no, no se curan, básicamente. Y entonces, si sesenta y cuatro es el cien por cien, el veintidós, equis.

{61} A.: Sesenta y cuatro, cien por cien; veintidós, equis.

Escribe la regla de tres en la pizarra y empieza a resolverla:

64 ------ 100%

22 ------ x

$$x = \frac{64 \cdot 100}{22}$$

{62} A.: Espérate que… (*murmullo*) porque si no…

(Observa cómo M. hace las operaciones en la calculadora)

{63} A.: Que no, sesenta y cuatro por cien entre… Ostras, pues si estoy haciendo yo mal la regla de tres.

{64} M.: Es veintidós por cien, entre sesenta y cuatro. Treinta y cuatro con… treinta y ocho… por cien.

(A. corrige en la pizarra y deja escrito: $x = \dfrac{22 \cdot 100}{64} = 34{,}38\%$*)*

{65} A.: A ver, se han tratado y no se han curado…

(Silencio mientras A. escribe debajo de lo anterior la respuesta "se han tratado y no se han curado un 34'38%")

(M. murmura alguna cosa)

{66} A.: Espera un momento. Vamos a mirarlo, otra vez. Cien personas es el total…

(M. murmura alguna cosa)

{67} A.: Hay sesenta y cuatro personas curadas (*señala el dato en la pizarra*), que se supone que si están curadas tienen que estar tratadas.

{68} M.: Claro. Y se las tenemos que restar…

{69} A.: Se las restas a las que están tratadas y ya sabes que hay veintidós personas… *(entre risas)* hazlo con calculadora que si no, me lío…

(M. hace operaciones en la calculadora)

{70} A.: *(Murmullos)* … que son personas tratadas y no curadas. Entonces, ya tienes sesenta y cuatro personas el cien por cien, veintidós, equis, equis es igual…

(Se miran y asienten con la cabeza)

{71} A.: Ya está.

{72} P.: ¿Ya está?

{73} A., M.: Sí.

{74} P.: Muy bien.

(Nota: P. es uno de los investigadores presentes durante la filmación)

ANEXO 21. Trascripción de la resolución filmada del Problema 10x2 del Pre-test(F).

{1} A.: (*Lee*) Una población de 240 personas sufren infección en la piel. Unas han sido tratadas con el antibiótico y otras, no. Se han curado un total de 120 personas, 100 se han tratado con el antibiótico y ochenta y cuatro se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje se ha tratado con antibiótico?

(Mientras A. lee el enunciado, M. comienza a escribir "240 sufre una infección")

{2} A.: Esto es fácil.

{3} M.: Vale.

{4} A.: (*Mirando el enunciado*) Doscientos cuarenta sufren una infección.

{5} M.: Vale.

{6} M.: (*Mirando el enunciado*) …con antibiótico. Unas han sido tratadas y otras, no. Se han curado…

{7} A.: Un total de cien.

{8} M.: Ciento veinte curadas.

{9} A.: Curadas.

(M. escribe "120 curadas")

{10} M.: Vale. Cien se han tratado con el antibiótico. Cien tratadas con antibiótico.

(M. escribe "100 c" y luego borra la "c")

{11} M.: Tratadas.

(M. añade "tratadas", quedando la expresión "100 tratadas ant")

{12} A.: Sí, pero de esas cien, ochenta y cuatro se han curado y las otras, no.

{13} M.: (*Suspirando*) Ochenta y cuatro…

(M. empieza a escribir, debajo de lo anterior, "84 curadas")

{14} A.: Tratadas y curadas. Tratadas y curadas.

{15} M.: O sea, esto va junto (dibuja una llave que encierra a las expresiones "100 tratadas ant" y "84 curadas")

{16} A.: Claro.

{17} M.: Vale.

{18} A.: Entonces, cien menos ochenta y cuatro (*señanlando cada dato en la pizarra según los nombra*) y te sale las personas tratadas con antibiótico que no se han curado.

(M. hace la resta de cien menos ochenta y cuatro en la pizarra)

{19} A.: Dieciséis. Sí, dieciséis.

{20} M.: Sí, sí, sí, sí.

{21} A.: Dieciséis.

{22} M.: Eh…

{23} A.: Dieciséis personas tratadas y no curadas.

(M. escribe "tratadas y no curadas" junto al número "16", que ha obtenido como resultado de la resta anterior)

{24} A.: Y ahora, doscientos cuarenta, que es el total de… que sufren la infección, doscientos cuarenta menos ciento veinte que son otros ciento veinte.

{25} M.: Y nos sale la parte que no.

{26} A.: Y nos sale el total de personas no curadas.

{27} M.: No curadas…

{28} A.: Vale, pues pon… no sé, una raya o algo.

(M. dibuja una llave que encierra, por la derecha, a las expresiones "240 sufre una infección" y "120 curadas")

{29} A.: Ciento veinte no curadas. Doscientos cuarenta menos… pon ciento veinte no curadas.

(M. escribe, a continuación de la llave que acaba de dibujar, la expresión "120 no curadas")

{30} A.: (*Poniendo la mano abierta sobre la expresión "120 no curadas"*) Ciento veinte es el total de personas curadas, de no curadas…

{31} M.: Y dieci… (señala el dato en la pizarra)

{32} A.: Y dieciséis (*también señala el dato en la pizarra*), las tratadas y no curadas. Entonces haces la regla de tres.

(M. escribe en la pizarra:

120 ----- 100

16 ----- x

$$x = \frac{16 \cdot 100}{120} =$$

A. hace cálculos en la calculadora. Se hacen comentarios en voz baja)

{33} A.: Trece coma treinta y tres.

(M. escribe el resultado, 13,33. A le borra el 3 de las unidades.)

{34} A.: El tres periodo.

(M. modifica el número anterior, dejándolo como "$13,\widehat{3}\%$*")*

{35} A.: Por cien.

(Siguiendo una indicación de A., M. empieza a escribir debajo de lo anterior la respuesta a la pregunta del problema: "13,3%")

{36} A.: Han sido…

(M. escribe a continuación "han sido las personas que no se…")

{37} A.: Han sido las personas que no se han… curado…

(M. escribe "curado")

{38} A.: Pero sí tratado.

(M. escribe a continuación "pero sí tratado", a la vez que A repite de nuevo estas palabras)

{39} A.: Vale. Doscientos cuarenta con infección (*señala el dato en la pizarra*), ciento veinte no se curan (*señala el dato en la pizarra*), ciento veinte es el total de personas no curadas. Si se tratan, cien menos ochenta y cuatro… sí, está bien. Ya está.

{40} F: Es estupendo. Pero, mirad qué pregunta el problema.

{41} A.: (*Leyendo*) Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje…?

{42} M.: ¡Ah! ¡Tratadas con el antibiótico!

(A. se vuelve hacia la pizarra y mira la resolución unos instantes)

{43} A.: Tío, está bien.

{44} A.: Tienes, 100 personas tratadas con antibiótico.

{45} M.: Tratadas con el antibiótico. Claro, pero es que hay más que se han tratado y se han curado. Habrá que sumarlas.

{46} A.: (*Mirando los datos de la pizarra*) Se han tratado con el antibiótico y se han curado, ochenta y cuatro…se han tratado con el antibiótico y se han curado.

{47} M.: Aunque no se hayan curado, hay que sumar las tratadas. Curado y no curado.

{48} A.: Para, para, no. Entre curadas, que no se han curado, que es un total de ciento veinte personas no curadas ¿qué porcentaje se han tratado con el antibiótico?

(M. murmura alguna cosa)

{49} A.: ¿Qué decías tú?

{50} M.: Nada, que yo iba a hacer todas, el total de… (*murmullos*)

{51} A.: *(Se vuelve hacia los investigadores)* ¡Está bien!

(Silencio. A. se ríe)

{52} F: Siguiente.

(A. mira a M. y se ríe)

{53} A.: (*Dirigiéndose a M.*) Yo creo que está bien. Porque si éste es el total…

{54} M.: Sí, sí.

{55} A.: …de no curadas (*señala la expresión "120 no curadas"*) la regla de tres esta (*la señala*) tiene que salir de aquí. Ciento veinte están curadas, que es el cien por cien (*señala esta parte de la regla de tres*) dieciséis que están tratadas pero no se han curado (*señala el número 16 en la regla de tres*), no han sido tratadas con antibiótico.

(A. y M. miran de nuevo el enunciado)

{56} A.: Que sí que está bien.

{57} F: A veces hay profesores incrédulos.

{58} A.: ¿Qué?

{59} F: Que a veces hay profesores incrédulos.

(Risas)

{60} M.: ¡Ah…!

(Nota: F. es uno de los investigadores presentes durante la filmación)

ANEXO 22. Trascripción de la resolución filmada del Problema 17 del Pre-test(F).

{1} A.: *(Lee)* Una población de riesgo para la tuberculosis de treinta personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. *(A. muestra signos de extrañeza)* Hay diecisiete personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había catorce personas a las que el test les resultó positivo. Además, a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da positivo el test? *(Risa)*

(M. escribe: "problema 5" "30 pers test". De esta última saca dos flechas hacia abajo; a la izquierda escribe "17 per sí")

{2} M.: Vale, sí. Y…

{3} A.: Vale, son diecisiete, trece, no. Diecisiete personas sí, trece no. (*Pausa*) Claro, treinta menos diecisiete…

{4} M.: Ah, bueno, vale, sí.

(M. escribe a la derecha "13 no")

{5} M.: Pero es que luego pone…

{6} A.: *(Lee deprisa)* Los resultados muestran que había catorce personas a las…

{7} M.: … catorce personas a las que el test les resultó positivo.

(A. y M. muestran expresiones de asombro)

{8} M.: Que no sé qué quiere decir eso … (*A. se ríe*)

{9} A.: A ver…, *(lee)* el test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad.

{10} M.: Ah, vale, pues trece, o sea, diecisiete que sí que la padecen y catorce que dio positivo el test; aunque no la tengan, dio positivo.

{11} A.: Vale.

(M. escribe "14 +" debajo de "17 per sí" y lo recuadra)

{12} A.: Catorce positivos. Vale, sí. Y entonces, por lógica…

{13} M.: *(Lee)* A siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo.

(Pausa. A. relee el enunciado)

{14} A.: Tiene un margen de error. Tiene que haber un margen de error, ¿sabes? Si diecisiete personas sí, les dio a catorce positivo…

{15} M.: De catorce que la tienen, sólo, o sea, de diecisiete que tienen, dio catorce y de trece que tienen…

{16} A.: Dio… ¿cuántas dio?

{17} M.: No, o sea, de … *(lee)* catorce personas…

{18} A.: De trece que les dio que no…

{19} M.: que no…siete personas les salió que… no, o sea… se equivocaron, vamos. Siete les salió negativo *(M. escribe "7 –" debajo de "13 no" y lo recuadra)*

{20} M.: De las trece que no lo padecen, siete negativo ¿me entiendes?

{21} A.: Sí. Entonces falta gente, por lógica. Pero para; para, para, para.

(A. lee el enunciado, murmurando)

{22} M.: Esto quiere decir que…

{23} M.: Tres aquí…

{24} A.: Había catorce personas a las que el test les resultó positivo.

{25} M.: Tres aquí dio negativo *(señala la zona donde está escrito "17 per si")* y…

{26} A.: Diecisiete personas tuberculosas. Entonces, de diecisiete… ¿qué te están pidiendo?

{27} M.: Seis aquí (*señalando "13 no"*) dio positivo, tres aquí (*señalando "17 per si"*) dio negativo ¿sabes lo que te digo?

{28} A.: (*Lee en voz baja*) Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da…? (*murmullos y un breve silencio*) Diecisiete personas no son tuberculosas, diecisiete. *(Breve pausa)* Diecisiete personas, son. Que sí.

{29} M.: *(leyendo)* que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da…?

{30} A.: Hay diecisiete personas que son tuberculosas. *(Ininteligible por tos de una de las personas presentes*) A ver, poco a poco.

(Borran parte de la pizarra: "14 +" y "7 –")

{31} A.: Y de esas diecisiete…

(Breve silencio)

{32} M.: Mira, de treinta, vale, diecisiete, o sea, mmm, sí que tienen y trece no la tienen.

{33} A.: El test…

(A. recuadra la palabra "test" que aparece junto a "30 pers")

{34} M.: Claro. (*Pausa*) Mira.

(A. saca dos ramas a partir de la palabra test)

{35} A.: Catorce te dice que dieron positivo.

(En una rama escribe "14 +")

{36} M.: Y siete dieron negativo.

{37} A.: Y siete dieron negativo.

(A. escribe en la otra rama "7-")

{38} M.: Lo cual quiere decir que aquí *(señala el lugar donde está escrito "14 +")* faltan tres personas que no…, no sabemos que pasó. Vale, que supuestamente…

{39} A.: Faltan tres personas… *(A. escribe "-> faltan 3 pers" junto a "14+")*

{40} M.: Claro. Supuestamente les daría negativo. Porque si no salen ahí…

{41} A.: Claro.

{42} M.: …les daría negativo. Y aquí seis personas que les saldría positivo porque no aparecen *(señala el lugar donde está escrito "13 no")*. ¿Entiendes?

{43} A.: No, no entiendo lo de las seis personas.

{44} M.: Pues si restas… (*señala "13 no" y "7 –"*)

{45} A.: Ya, tía, pero que… Vamos a ver, siete personas que les da negativo (*pone la mano sobre "7 –"*)

{46} A.: *(Leyendo, hasta el punto y seguido)* Siete personas que eran tuberculosas, el test les resultó negativo. Entonces, si les resultó negativo el test quiere decir que se supone que no son tuberculosas pero en realidad tiene que haber seis personas más que no son tuberculosas.

{47} M.: Claro, que no, no nos pone nada de esas seis personas que faltan para el grupo que no tiene.

{48} A.: Pero, vamos a ver, de siete que sí que eran tuberculosas, el test les sale positivo. No, no…

{49} M.: Les salía que…

{50} A.: Les salió negativo.

{51}A. y M.: … siete que sí que eran, les salió negativo.

{52}A.: …te están diciendo, no es que haya catorce. Salió catorce positivas y entonces dieciséis negativos, al final. *(A. borra "7-" y escribe "16-" en su lugar)*

{53} A.: Que esa es otra, que es muy diferente, sabes que haya catorce y siete, porque si no, los números no te cuadran, no son treinta personas. Entonces, si son catorce positivos *(señala "14 +")*, dieciséis son negativos.

{54} A.: Pero de estas dieciséis *(dibuja una rama que parte de "16-")* siete eran tuberculosas y les salió negativo, y sí que lo eran. *(A. escribe al final de esa rama "7 eran")* Y entonces te faltan cuatro personas, ¿de dónde las sacas? Porque son tres de aquí *(señala "faltan 3 pers")* y siete de aquí *(señala "7 eran")* son diez personas.

{55} M.: Faltan seis. Aquí faltan seis personas que… (*murmullos*)

{56} A.: A ver… (A. empieza a leer el enunciado otra vez en voz baja) catorce personas positivo. Eso bórralo (A. borra "faltan 3 pers").

{57} M.: Es que no nos sirve de nada…

{58} A.: *(Murmullos)* Catorce positivo. A siete personas que eran tuberculosas… Además, a siete personas que lo eran *(señala "17 per si")*, siete que te dice que sí que eran, salió negativo pero entonces aquí se te quedarían diez personas… No cuadra, tío. No cuadra. Bueno, de diecisiete que sí (*murmullos*) diecisiete, cien por cien, de 17 que sí, son catorce, que es x.

{59} M.: Y luego, con trece salen…

{60} A.: Dieciséis.

{61} M.: Salen siete.

{62} A.: (*Leyendo*) Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da positivo el test?

{63} M.: *(Interrumpiendo a A)* Salen diecisiete que dan negativo, pero que sí que tienen.

(A. intenta decir algo pero le interrumpe M.)

{64} M.: O sea, siete que diga.

{65} M.: A ver, dice, *(lee)* diecisiete son tuberculosas. Y siete que eran tuberculosas, el test da negativo.

(Silencio)

{66} A.: Espera un momento, es que tiene que haber algo que no…

{67} A.: Es que *(lee)* el test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad.

{68} M.: Entonces, ¿de qué te sirve?

{69} A.: Exacto, ¿de qué sirve?

(M. se encoge de hombros)

{70} A.: *(Lee)* Hay diecisiete personas que son tuberculosas…

{71} A.: Diecisiete que sí. Entonces hay trece que no. *(Lee)* a catorce personas el test les resulta positivo.

{72} M.: Vale. Catorce les resulta po… o sea,… Esto está mal *(casi inaudible)*.

{73} A.: No, tan mal no está *(risa)* catorce positivo.

{74} M.: Vale, catorce positivo y luego dice *(lee)* a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Si siete personas que resultó, eh, negativo de *(pausa)*.

{75} A.: Siete que da negativo pero que sí que lo eran. Entonces son diez personas *(señala justo debajo de "17 per si")*

{76} A.: Joder… *(suspira)*

(Miran la pizarra en silencio)

{77} A.: Espera un momento. Nueve personas, diecisiete menos seis son nueve personas que sí, que lo eran y les salió que era negativo. Es que nosotras decimos que no *(señala donde pone "13 no")*

{78} M.: Esto está mal *("borra la cifra 6 en 16 –")*

{79} A.: ¿Por qué está mal?

{80} M.: Porque A., … *(M. lee y señala algo sobre el papel, mientras murmura)*

{81} A.: ¿Qué palabras?

{82} M.: *(En voz muy baja)* Pues éstas. *(Silencio)* siete personas que eran tuberculosas. Siete per… siete personas que sí que eran…

{83} A.: Que, mira, *(interrupción de M.)* dieciséis eran *(vuelve a escribir la cifra 6 en "16 –" y borra la cantidad "7 eran" y la flecha que la unía a "16 –")*. Y entonces salen nueve que no eran. O sea, nueve que están bien.

(M. mira la pizarra y murmura y hace cálculos para sí moviendo los dedos sobre la pizarra.)

{84} A.: Pero, ¿qué dices, tío?. catorce positivas… Es que ¿sabes que pasa? Es que decimos que cuando diecisiete personas son negativas *(señala "17 per si")*, catorce *(señala "14 +")*, sabes, que cuando es que tienen tuberculosis sale positivo ¿y tú que sabes? ¿a ti te lo ha dicho? *(risas)*

{85} M.: Aquí sólo te dicen, diecisiete personas tuberculosas…

{86} A.: *(Entre risas)* ¿Y el test sabes si es positivo o no, Dios mío? Anda que… *(Lee)* El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay diecisiete personas que son tuberculosas.

(A M. se le cae la tiza y las dos miran hacia el suelo)

{87} A.: *(Lee)* a siete personas que eran tuberculosas el test les resulta negativo. *(Lee en voz muy baja y rápido)* Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da positivo el test?

{88} A.: Si trece no son *(A. rodea el número 13).* Ya está, tío. Trece no son. Éste es el total. El total que no son tuberculosas son trece. Trece, que es total. Trece no tienen. *(A. escribe a continuación de 13 no, un guión seguido de un 100, a modo de regla de tres)* Y entonces, ¿a qué porcentaje les da positivo el test? *(Silencio)* A nueve. Porque de dieciséis, siete están equivocadas, que te están diciendo que esas siete les dio… eran tuberculosas y les salió negativo. Que sí, que es trece. Cien, siete, equis. *(A. escribe debajo de 13, 7; a continuación un guión y una x, a modo de regla de tres)*

{89} M.: *(Interrumpiendo a A.)* Claro, son los nueve que faltan. Vale.

{90} A.: De dieciséis, nueve no lo eran (A. saca una rama a partir de “16 -“, al final de la cual escribe “9 no lo eran”)

{91} M.: Nueve no lo eran y siete sí. Sí que lo padecen, pero les da negativo. *(M. saca otra rama a partir de “16 –“, al final de la cual escribe “7 sí / -“)*

{92} A.: Sí. Claro, sí porque les da negativo. Entonces, *(hablan a la vez y no se entiende)*

{93} A.: *(Lee)* Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da positivo el test? Mierda. Vale, vámonos aquí *(señala en la pizarra “17 + per si”)* diecisiete personas, catorce positivas *(señala en la pizarra el lugar donde pone “14 +”)*, entre las que son tuberculosas, *(lee)* que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da positivo? *(borrador en mano, señala la expresión “14 +”, pegando dos golpecitos sobre la pizarra como para hacer hincapié en ese dato)* Vale, ya hemos hecho la regla de tres que no tocaba hacer. Diecisiete personas es el total, que es cien *(A. escribe, en pequeño, flojo e inclinado, un 100 junto a “17 per si”).* Entonces, si a catorce les da positivo. Joder…

{94} M.: De las que sí que lo tienen *(M. señala “17 per si”)*, catorce les da positivo. Vale, diecisiete menos catorce…

{95} A. y M. *(a la vez)*: tres.

{96} M.: Esas tres… les dio negativo.

{97} A.: No son tuberculosas y les da positivo.

{98} M.: Claro.

{99} A.: Ya está. Ya está.

{100} M.: A ver, mira.

{101} A.: Ah, que te pide porcentaje, te pide porcentaje. Vale.

{102} M.: Diecisiete, menos catorce *(M. escribe la resta 17-14 = 3)*

{103} A.: Tres.

{104} M.: Son tres.

{105} A.: Tres personas les da…

{106} M.: … les da negativo…

{107} A.: …les da positivo, pero no lo son. ¿No?

{108} M.: No. Les da negativo y lo son. Porque mira…

{109} A.: No, les da positivo y no lo son.

{110} M.: Pero esto es que sí que lo tienen *(señalando donde pone 17 per. si)* No que les da positivo, que sí que lo padecen.

{111} A.: Catorce personas *(señala donde pone 14 +)*

{112} M.: Que son tuberculosas. Estas de aquí son. (M. recuadra la expresión 17 per. si y escribe en la parte superior izquierda del recuadro, por fuera, la palabra "son")

{113} A.: *(Leyendo)* A ver, entre las personas que no son tuberculosas, *(señala describiendo círculos con el dedo donde pone "13 no")* ¿a qué porcentaje les da positivo el test?

(Silencio)

{114} M.: A estos les da positivo *(señala el 14 de la resta 17 – 14 = 3)* pero no son el total de diecisiete que lo padecen, y faltan tres, que no les da positivo, que les da el test negativo.

{115} A.: A ver. *(Mirando la zona de la pizarra donde tienen representados los resultados del test)* Siete sí, nueve no, catorce positivas, y de esas catorce …

(M. escribe 7+3)

{116} A.: ¿Qué estás haciendo?

(M. borra lo que acababa de escribir)

{117} A.: *(Insiste)* ¿Qué estás haciendo?

{118} M.: Pues si estas, estas lo padecen (*señala el número 3*) ¿vale? A ver, estas son las personas que lo padecen pero que no, que el test les da negativo (*recuadra el número 3*).

{119} A.: Hmmm (asiente).

{120} M.: ¿Vale? Entonces… Estas son las que no lo padecen *(señala en al pizarra el número 13)*

{121} A.: Y hacen, dan dieciséis que son negativas. Entonces sobran tres, tía.

{122} M.: Claro.

{123} A.: Si son dieciséis, de las tres son tres que son el margen, o sea, el error este que han tenido de que tres son, son pero no son. O sea, son positivas…

{124} M.: (*Murmullos)*

{125} A.: (*Leyendo*) ¿Qué porcentaje…? *(Murmullos)*

{126} A.: Claro. He aquí. Si dieciséis, que son las personas que no les ha salido, (*pausa*) que les ha salido negativo, que el total es cien, tres (*pausa*) les ha dado positivo el test *(en voz muy baja y con desgana)*

{127} F.: ¿Os puedo hacer una pequeña sugerencia?

{128} A y M.: Sí.

{129} F.: ¿Vosotras pensáis que a una persona que no sea tuberculosa, le puede salir el test positivo?

(A. emite una mezcla de suspiro y risa)

{130} F.: Que no sea tuberculosa, ¿el test le puede resultar positivo? Mirad lo que dice el enunciado del problema.

{131} M.: *(Lee en voz baja. Murmullos).*

{132} A.: ¡Riesgo!

{133} M.: Riesgo para la tuberculosis.

{134} F.: Continúa leyendo.

{135} M.: *(Lee)* … de treinta personas se somete a un test para averiguar si padecen la tuberculosis o no. El test puede ser positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad.

{136} A.: *(Con extrañeza)* ¿Como si se padece como si no se padece?

{137} M.: O sea, aunque tú no la padezcas ¿te puede dar positivo?

{138} F.: No lo sé. Léelo. Me parece.

{139} M.: Uy… *(continúa leyendo)* Hay diecisiete personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había catorce personas a las que el test les resultó positivo. Además, a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo.

{140} A.: Siete personas que sí que lo eran.

{141} M.: Hay diecisiete en el pueblo que son tuberculosas.

{142} A.: En el pueblo, en total, diecisiete tuberculosos.

{143} M.: De treinta, hay diecisiete. *(Silencio mientras lee el enunciado. Suspiro)* A catorce les dio que no.

{144} F.: A trece.

{145} M.: *(Leyendo)* Catorce personas…

{146} A.: Trece personas no son tuberculosas.

{147} M.: A trece, eso.

{148} A.: *(En voz baja, como hablando para ella)* ¿Qué porcentaje les da positivo el test?

{149} F.: ¿Cuántos positivos hay?

{150} A.: *(Volviéndose hacia F.)* Catorce.

{151} F.: Vuelvo a preguntar, ¿hay alguna persona no tuberculosa que le pueda dar el test positivo?

{152} A.: *(Entre risas)* Una persona no tuberculosa…

{153} M.: No. Porque es que si no es, no le debería de dar positivo.

{154} F.: ¿Cuántas personas no tuberculosas hay?

{155} A.: Trece.

{156} F.: ¿A cuántas personas les dio el test positivo?

{157} A.: Catorce.

{158} M.: A catorce.

{159} F.: ¿Hay alguna persona no tuberculosa que el test le pueda dar positivo?

(breve pausa)

{160} A.: Sí.

{161} M.: Pone que siete personas que eran y que les dio negativo.

{162} A.: (*Risas)* Es que nos ha preguntado la misma pregunta. ¡Para! Catorce personas, trece personas no tuberculosas.

{163} M.: Y diecisiete que sí.

{164} A.: Y diecisiete que sí. Catorce dan positivo. ¿Cómo va a dar catorce positivo si hay trece…?

{165} P.: Vamos a ver, yo creo… Tenéis muchos datos muy útiles. Pero… al lado de los datos anotad qué es el número que habéis calculado y usáis. ¿Qué dice?

{166} A.: Sí, María, vamos a empezar.

{167} M.: Vamos a empezar…

{168} A.: Vamos a empezar.

{169} M.: Que esto es un poco lío.

(Hablan entre ellas pero sólo se escuchan murmullos. A. borra la información sobre personas tuberculosas y no tuberculosas. Y vuelve a escribir 17 tuberculosas)

{170} A.: Diecisiete …

{171} M.: Que son.

{172} A.: … tuberculosas.

(A. escribe 17 tuberculosas)

{173} A.: De esas diecisiete, salen catorce positivas.

{174} M.: De aquí *(saca una flecha desde 17)*…

{175}A. y M. (*a la vez*): Catorce.

(M. escribe 14 +)

{176} A.: Te faltan tres positivas, porque…

{177} M.: Sí, sí, está claro.

{178} A.: Tres positivas *(ininteligible por coincidir con ruido de tiza)*.

(A. escribe 3 + ¿?)

{179} M.: Vale.

{180} A.: Y ahora… *(A. borra toda la información anterior sobre personas con resultado positivo y negativo)*

{181}M.: Y luego pone…

{182} A.: Diecisiete que no lo son

{183} A.: Ostras, trece.

{184} M.: Trece.

{185} A.: Trece que no lo son.

(A. escribe “13 no lo son”)

{186} M.: Y siete personas que les da negativo pero que sí que son.

{187} M.: O sea que sí que son.

{188} A.: Y salen…

{189} M.: Siete personas que…

{190} A.: Y salen dieciséis negativos *(A. saca una flecha de 13 y escribe 16 -)*

{191} M.: Espérate. Siete personas que eran tuberculosas.

(M. y A. miran ambas el enunciado)

{192} M.: Que eran tuberculosas, aunque el test haya dicho que es negativo.

{193} A.: Esto quiere decir que se han curado ¿no?

{194} M.: Claro.

{195} A.: Siete personas…

{196} M.: Si…

{197} A.: … eran tuberculosas y el test les resultó negativo.

{198} M.: …que eran…

{199} A.: Claro, tía. Eso quiere decir que ya no son tuberculosas. (*Pausa*) ¡No fastidies!

{200} M.: A lo mejor es que…

{201} A.: Es que si es eran, es pasado.

{202} M.: Vale.

{203} A.: Eran tuberculosas

{204} M.: Y les dio negativo. Eso quiere decir que siete personas …

{205} A.: Siete personas *(A. escribe “7”)*

{206} M.: … no son tuberculosas. Lo eran pero ya no son.

{207} A.: Lo eran pero ya no.

(A. escribe junto al 7, “lo eran pero ya no”)

{208} M.: Vale.

{209} A.: Entonces, tú le restas siete aquí (*señala 17 tuberculosas*) y se los pones aquí (*señala “13 no lo son”*) y aquí son veinte personas que no lo son. *(Con tono enfadado)* Pero entonces, ¿qué porcentaje les da negativo?

(A. deja la tiza en la repisa de la pizarra. Ambas observan atentamente la pizarra.)

(Pausa)

{210} A. y M.: *(Murmullos: comentan los datos que tienen sobre la pizarra)*

{211} F.: ¿Os parece que lo dejemos? ¿Eh?

{212} A. y M.: *(Risas)*

{213} F.: ¿Qué es lo que …? No os hemos dejado de preguntar qué es lo que os resulta curioso y nos lo habéis dicho pero no nos habéis dicho si hay personas que no son tuberculosas y el test les puede dar positivo.

{214} A.: Hay personas que son tuberculosas…

{215} M.: Y que el test les da negativo.

{216} F.: ¡Que no son!

{217} A.: No puede, no puede, a no ser que el test esté mal.

{218} F.: Pero el test, ¿está mal o no? Mira los datos. Dice que hay… ¿cuántas hay que no son?

{219} A.: Trece.

{220} F.: ¿Y cuántas da el test que no?

{221} A.: Dieciséis. ¡No es posible!

{222} F.: El test, el test, el test es un test. No es Dios.

{223} A.: Claro, tiene un margen de error.

{224} F.: Pues eso es.

{225} M.: Vale.

{226} F.: Vamos a ver, (*ininteligible por ruido de fondo*) Borrar todo y empezar de nuevo.

{227} A.: Sí, borra todo.

(M. borra la resolución de la pizarra)

{228} A.: (*Ininteligible*) si dieciséis salen negativos, hay tres personas que… ¡claro!

{229} M.: Tres personas…

{230} A.: Tres personas, entonces el porcentaje ya está. (*Escribiendo con el dedo sobre la pizarra*) Si dieciséis el total, y le restamos… ¡ya está!

(M. comienza a escribir una regla de tres: "16 ---- 100%")

{231} A.: Dieciséis es el total. El cien por cien. Tres personas…

(M. completa la regla de tres con "3 ---- x")

{232} M.: Tres personas son x.

{233} F.: Dieciséis, ¿qui… quiénes son?

{234} A.: Deiciséis personas son las personas que les daba...

{235} M.: El margen de error que les da, o sea que les daba positivo pero no eran.

(Hacen cálculos con la calculadora y comentan en voz baja. Después, M. escribe el resultado en la pizarra: "x = 3·100/16 = 18'75%")

{236} P: ¿Puedo pediros, por favor, que al lado del dieciséis anotéis ese número dieciséis a quién se refiere?

{237} A.: *(Dirigiéndose a M., que escribe en la pizarra)* Personas no tuberculosas. *(M. escribe "personas no tuberculosas", tras una flecha que parte del número 16)* Y el tres son las personas…

{238} M.: *(Murmullos)* El margen de error que había, entre las personas no tuberculosas y las que da el test que, que eran *(pausa)* ¡no!

{239} A.: No.

{240} M.: No.

{241} A.: No. Vuelvo a escribirlo todo, borra esto. *(A. borra de nuevo toda la resolución)*

{242} M.: Espérate.

{243} A.: No, bórralo y vuelvo a escribirlo todo que si no... hasta mañana estaremos aquí.

{244} A.: Treinta personas. *(Escribe en la pizarra "30 personas test")*

{245} M.: El siete salía de catorce menos, ehh, el tres salía de catorce menos siete. O sea, de las personas que el test le dio positivo, ¿sabes? menos las personas que les salió negativo.

{246} A.: *(Saca una flecha desde "30 personas test")* Treinta, diecisiete tuberculosas *(escribe "17 tuberculosas")*

{247} M.: Vale, luego pon, catorce resultó positivo.

{248} A.: Trece no tuberculosas (saca otra flecha de "30 personas test" y escribe "13 no tuberculosas").

{249} M.: No tuberculosas. Vale, catorce dio positivo (*M escribe "14 +"*) y siete personas que eran les resultó negativo.

{250} A.: Entonces, dieciséis son negativos.

{251} M.: *(Escribe la resta de 14 menos 7, con el resultado, 3)* Tres.

{252} A.: Dieciséis personas da negativo.

{253} M.: Claro, y ahora dieciséis…

{254} A.: ¡No!

{255} M.: Si dieciséis son cien, tres…

{256} A.: Para.

{257} M.: Son equis…

{258} A.: Que sí, claro, (*señalando el 16*) personas negativas. Y entonces hay tres personas, dieciséis menos trece, más dieciséis menos trece son tres personas…(*A. escribe la resta de 16 menos 13 igual a 3*) ¡M.!

{259} M.: Sí, sí, sí, te escucho.

{260} A.: Son tres personas que no, o sea, que son tuberculosas (*A. escribe" son tuberculosas" junto al tres)* y les da negativo. (*A. añade* "*y les da –*") Y les da negativo. Entonces, son tres personas que son tuberculosas y les da negativo, que es lo que te están pidiendo

{261} M.: Claro… (*hablan a la vez*)

{262} A.: … del porcentaje que no son tuberculosas, el porcentaje son trece. Si trece son cien (*A escribe "13 ---- 100"*) ¿a qué porcentaje les dio negativo? (*releyendo la pregunta del problema*) Entre las no tuberculosas, ¿a qué porcentaje les da positivo?

{263} M.: Tres. Tres son equis

{264} A.: ¿A qué porcentaje de las tuberculosas les da positivo?... ¡Joer! ¡Ya estamos otra vez en la misma!

{265} M.: A qué porcentaje les da positivo el test, les da, les da positivo el test.

{266} A.: No les da negativo, que es lo que teníamos.

{267} M.: Claro.

{268} A.: A las personas que son tuberculosas …

{269} M.: Claro, mira. *(M. señala el 3 en la pizarra)*

{270} A.: ¡Aquí hay personas que no cuadran!

{271} M.: Mira, si aquí me pone que a siete personas el test les resultó negativo si se las resto a las que me da (*M. señala el 14 en la pizarra*) que sí que, que el test les dio positivo me salen las otras tres que faltan que les dio positivo, o sea, será al contrario. Si tengo siete que me dio negativo pues las otras tres que faltan para llegar a catorce son las positivas. Entonces, …

{272} A.: Ponlo.

(M. escribe junto al número 3: "positivo")

{273} M.: Positivo pero que no lo tiene.

{274} A.: Positivo y no lo dice. Pon positiva y salió negativo.

{275} M.: Y sa… No es que salga negativo, es que no te lo dice. Ellos te dicen los que les da, los que la, los que tenían pero que da negativo el test, entonces faltarán tres que dio positivo pero no te lo nombran, entonces son positivas, ¿sabes lo que te digo?

(A. se queda mirando atentamente la operación)

{276} A.: Catorce menos siete no son tres.

(M. borra el 3)

{277} A.: Básicamente.

{278} M.: Es verdad, es verdad …

{279} A.: Serán diecisiete menos catorce. (*Risas*)

{280} M.: Nooo, catorce menos siete. Catorce personas que resultó positivo menos siete personas.

{281} A.: Que resultó negativo, ¿y qué haces?

(Miran atentamente el enunciado)

{282} M.: *(Murmullos)*

{283} A.: ¡Yo qué sé! Siete les da positivo. A ver (*leyendo del enunciado*) diecisiete personas son tuberculosas. Catorce personas les da positivo el test. Además, a siete personas que eran tuberculosas, (*hablando para sí misma*) además a siete personas tuberculosas, siete personas tuberculosas…

{284} M.: Estas (*señala el número 7 en la pizarra*). Les dio negativo, el test.

(M. dibuja una flecha que sale de 7 y escribe "-")

{285} A.: ¿Y por qué se las restas a positivas?

{286} F.: Vamos a hacer otro que es similar y luego, si queréis, volvemos a este.

{287} A. y M.: Vale.

ANEXO 23. Trascripción de la resolución filmada del Problema 18a del Pre-test(F).

{1} M.: *(Lee)* Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de diez pi…, de cien piezas de las cuales se sabe que noventa y cinco son correctas y se analiza la muestra con el dispositivo para ver la calificación que éste otorga a las piezas: correcta, defectuosa. Los resultados del análisis muestran que setenta y siete piezas fueron calificadas como correctas por el dispositivo y que, además, el dispositivo calificó como defectuosas cuatro piezas que eran defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

{2} A.: Pon, correctas ¿no?

{3} M.: Vale.

{4} A.: Correctas y defectuosas.

{5} M.: Cien piezas. Hay en total cien piezas.

(M. empieza a escribir: "100 piezas total")

{6} A.: Vale.

{7} A.: Cien piezas.

{8} M.: Vamos a empezar por los datos.

{9} A.: Y ahora, divídelo entre dos.

{10} M.: Vale…

{11} A.: Aquí…

{12} M.: Cien…

{13} A.: ¿Sabes?

(A. dibuja con el dedo una línea que parte de "100 piezas total" y va hacia arriba, pero M. la ignora)

{14} M.: Cien entre dos…

(M. saca una flecha de lo anterior y escribe la división de 100 entre 2)

{15} M.: …son cincuenta.

{16} A.: *(De manera simultánea a {15})* ¿Por qué?

{17} A.: ¿Por qué lo divides entre dos?

{18} M.: Vale… *(relee el enunciado)*

{19} A.: ¿Por qué lo divides entre dos?

{20} M.: Porque hay dos tipos.

(Hablan a la vez. M. borra la división)

{21} M.: Porque no te dice…

{22} A.: (*Lee*) Se toma una muestra de cien piezas de las cuales se sabe que noventa y cinco son correctas.

{23} A.: Noventa y cinco, correctas.

(A. saca una línea recta desde "100 piezas total" y escribe "95 correctas")

{24} M.: Vale.

{25} M.: Noventa y cinco piezas correctas.

{26} M.: Vale. (*Lee*) Y se analiza la muestra con el dispositivo para…

{27} A.: Y cinco, incorrectas, defectuosas.

(A. saca otra línea recta desde "100 piezas total" y escribe "5 defectuosas").

{28} M.: Muy bien, ¿por qué? Porque…

(M. escribe en el espacio que queda entre "95 correctas" y "5 defectuosas", la resta de 100 menos 95)

{29} M.: Cien menos noventa y cinco, cinco.

(A. le hace una observación a M. en voz baja)

{30} M.: Vale, da igual.

{31} A.: Cinco defectuosas.

{32} M.: Cinco defectuosas.

{33} M.: Y luego pone que setenta y siete piezas fueron calificadas como correctas. ¿Vale?

(M. escribe "77 piezas calificadas como correctas", leyendo cada palabra conforme las va escribiendo)

{34} M.: Setenta y siete…piezas…calificadas…

{35} A.: Como correctas…

{36} M.: …como…correctas…

{37} A.: Y cuatro…

{38} M.: Y cuatro como defectuosas.

{39} A.: Y, además el dispositivo calificó como 4 defectuosas.

(M. escribe "4 defectuosas" debajo de la expresión "77 piezas calificadas como correctas")

(A. murmura alguna cosa y se ríe)

{40} A.: Son ochenta y uno, te faltan… (*con cara de fastidio*) diecinueve piezas.

{41} A.: (*Leyendo*) Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje ¡agg!

{42} M.: O sea, hay noventa y cinco correctas y cinco defectuosas. Pero el…

{43} A.: Trasto.

{44} M.: … el trasto éste pone setenta y siete piezas correctas y cuatro defectuosas. Hay…

{45} A.: *(Mirando el enunciado)* Entre, entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, que eran setenta y siete (*A señala el dato en la pizarra*) ¿qué porcentaje eran piezas correctas? ¡Todas!

(Silencio. Miran la pizarra)

{46} M.: Todas las que calificaron correctas.

{47} A.: Claro.

{48} M.: Claro, mhm

{49} A.: Sí, sí, pero…

(Silencio: A. relee en el enunciado mientras M. observa la pizarra)

{50} M.: (*En voz baja*) Igual supondrán que faltan diecinueve piezas por analizar porque como no sabemos nada de ellas…

{51} A.: Pon "faltan diecinueve piezas por analizar".

(Silencio. M. escribe "Faltan 19 piezas por analizar")

{52} M.: (*En voz baja*) Vale, faltan diecinueve piezas por analizar. Entonces...

(Silencio)

{53} A.: (*Murmurando*) Setenta y siete, setenta y siete calificadas como correctas…

{54} P: ¿Por qué decís que faltan diecinueve piezas por analizar?

{55} A.: Porque cien, a ver, setenta y cuatro más cuatro, ochenta y una.

{56} M.: Menos cien.

{57} A.: Diecinueve. No sabemos en realidad lo que es…

{58} F.: Las cuatro defectuosas ¿es todo lo que dice el problema, de esas piezas?

(A. y M. miran el enunciado del problema en sus respectivas hojas)

{59} M.: (*Todavía mirando el enunciado*) Defectuosas…

{60} A.: Sí, de esas cuatro, ésas están bien. Eran cuatro piezas defectuosas que sí que lo eran.

{61} M.: Que sí que lo eran.

{62} A.: Está bien.

{63} M.: Falta…

(A. saca una flecha de "4 defectuosas" y escribe a continuación "esta bien")

{64} F.: ¿Dónde dice que lo eran?

{65} A.: (*Leyendo*) Y, además, el dispositivo calificó como defectuosas cuatro piezas que eran defectuosas.

{66} F.: Calificó de defectuosas cuatro piezas que eran defectuosas.

(A. señala "5 defectuosas" y murmura alguna cosa sobre las piezas defectuosas que faltan)

{67} A.: Setenta y siete piezas calificadas como correctas. Setenta y siete piezas calificadas como correctas. ¿Setenta y siete menos uno, setenta y seis? ¿O no?

(Breve silencio. M. observa la pizarra.)

{68} M.: Sí, sí, espera un momento. Espera un momento. (*Lee en silencio el enunciado*)

(A. relee el enunciado en silencio. M. toma la calculadora y hace cálculos en ella. Hablan entre ellas en voz baja. Sólo se escuchan murmullos.)

{69} A.: ¿Qué estás haciendo?

(Silencio)

{70} M.: No cuadra.

{71} M.: Setenta y siete menos una.

{72} A.: Es que yo, diría el setenta y siete por cien de las piezas, el setenta y siete es el cien por cien, que son las piezas que ha calificado éste como correctas.

{73} M.: Sí, sí.

(Breve pausa)

{74} M.: Es que nos falta una.

{75} A.: ¿Y las diecinueve?

{76} M.: Tenemos cuatro… nos falta una… de la suma de estos dos *(señala el "77" y el "4")* y la resta a cien *(dibuja una llave que reúne al "77" y al "4" y enlaza mediante una flecha esta llave con la información "Faltan 19 piezas por analizar")*.

{77} P: Y esa que os falta, ¿dónde está?

(Junto a la flecha escribe "-100")

{78} A.: Se supone…

{79} P: En la pizarra, en la pizarra lo tenéis, donde está.

{80} A.: ¿Aquí? *(A. señala la expresión "77 piezas calificadas como correctas")*

{81} P: Sí. En la pizarra está… esa que os falta de las defectuosas.

{82} A.: Nos falta una… Mira, pon cinco defectuosas (*A. escribe "5 defectuosas"*).

{83} A.: Menos cuatro *(A. escribe a continuación "- 4")*

{84} A.: Defectuosas calificadas *(continúa escribiendo "defectuosas calificadas")*

{85} A.: Una pieza defectuosa *(escribe a continuación "= 1 pieza defectuosa")*

{86} A.: Una pieza defectuosa.

{87} M.: Mira, tenemos noventa y cinco correctas ¿vale? (*M. señala el 95 en la resta de 100 menos 95*)

{88} A.: Sí.

(M. señala el 4)

{89} M.: Más cuatro defectuosas son noventa y nueve.

(Hablan pero sólo se oyen murmullos)

{90} A.: Pero es que esta una (*subraya "1 pieza"*) o está aquí (*subraya el 19*) o está aquí (*subraya el 7 de las unidades en el número "77"*) Es que no tiene…

(Silencio. M. mira atentamente la pizarra)

{91} A.: ¿Qué haces?

(Hablan entre ellas. Sólo se oyen murmullos)

{92} P: Y esa pieza defectuosa, ¿qué pasa con el dispositivo?

(A. y M. se miran)

{93} P: Esa que tienes ahí perdida.

{94} A.: ¿Ésta? *(A señala la expresión "1 pieza defectuosa")*

{95} M.: Hay 5 defectuosas y … (*P. la interrumpe*)

{96} P: Es una pieza defectuosa ¿y el dispositivo qué ha dicho de ella?

{97} A.: No ha dicho nada.

{98} M.: No ha dicho nada.

{99} F.: ¿Seguro?

{100} F.: Lee el enunciado.

(Ambas miran el enunciado)

{101} A.: ¡No!

{102} M.: (*Lee*) Los resultados del análisis muestran que setenta y siete piezas fueron calificadas como correctas por el dispositivo y que, además, el dispositivo calificó como defectuosas cuatro piezas que eran defectuosas.

{103} M.: Por lo tanto, a la que queda la calificó como…

{104} A.: ¿Cómo qué?

{105} M.: Como correcta…

{106} A.: ¿Por qué?

{107} M.: Porque si no la calificó como… como defectuosa, ¿dónde está?

{108} A.: Ah, vale. Vale.

{109} A.: Vale.

{110} A.: (*Subrayando la expresión "1 pieza defectuosa*") Una pieza defectuosa ¿qué pongo?

{111}M.: Que calificada como correcta.

{112} A.: Calificada como correcta.

(Silencio. A. escribe "calificada como correcta" a continuación de la "1 pieza defectuosa")

{113} A.: Sí, pero tío, ¿así qué consigues?

{114} A.: *(Señalando la expresión "77 piezas calificadas como correctas")* ¿Qué aquí te dan setenta y ocho piezas?

(Breve pausa)

{115} A.: ¿Y esas diecinueve piezas…? (*A. señala el número "19"*)

(Silencio. M. hace cálculos en la calculadora mientras A. mira atentamente el enunciado)

{116} A.: ¿Qué hacemos? ¿Y estas diecinueve piezas que quedan por analizar no serían correctas también? Por la misma lógica…

{117} M.: Pero es que faltan diecinueve por analizar. Estas no están analizadas.

{118} A.: Sí, ¿pero te lo dice, que faltan diecinueve por analizar?

{119} M.: No. Lo sabemos nosotras.

{120} M.: Son noventa y cinco correctas…

{121} P: Y aquellas noventa y cinco correctas, ¿qué ocurre con ellas?

{122} A.: Que setenta y siete las califica como que sí. Noventa y cinco menos…

{123} M.: De esas noventa y cinco.

{124} A.: Noventa y cinco menos…

{125} M.: De esas noventa y cinco, setenta y siete son calificadas.

{126} F.: ¿Y esas otras que hay ahí? ¿Y las que faltan ahí? Faltan un montón.

(M. suspira y toma la calculadora)

{127} F.: De esas, ¿qué dice el dispositivo?

(M. hace cálculos en la calculadora)

{128} A.: ¿Cuántas faltan?

(M. deja la calculadora en la repisa de la pizarra)

{129} M.: Dieciocho.

{130} F.: ¿Y de esas qué dice?

(A. pega un golpecito con el puño cerrado sobre la expresión "19 piezas")

{131} A.: (*Dirigiéndose a M.*) Diecinueve.

{132} M.: Ya está. Y una, diecinueve.

{133} A.: Claro, pero, ehh…

{134} M.: Pero, espérate.

{135} A.: Noventa y cinco…

{136} M.: Noventa y cinco menos setenta y siete, que son dieciocho (*escribiendo la resta en la pizarra*)

{137} M.: Y me pone…

{138} A.: Más una, que es calificada como correcta, defectuosa pero…

(M., en la pizarra, suma 1 a 18, obteniendo 19)

{139} A.: (*Mirando el resultado y con gestos de asombro*) Pero, ¿por qué? Pero, ¿por qué?

(Risas)

{140} A.: Salirte te sale, pero ¿por qué?

(Miran los datos de la pizarra en silencio. Hablan a la vez. Risas)

{141} M.: Tenemos cinco defectuosas *(señala la expresión “5 defectuosas”)* pero sólo saca cuatro *(señala la expresión “4 defectuosas calificadas”)*. Falta una *(señala el resultado de la resta “5 defectuosas – 4 defectuosas calificadas = 1 pieza defectuosa calificada como correcta”)*

{142} A.: Falta una.

{143} M.: Que la ha nombrado correcta y es defectuosa. ¿Sabes lo que te digo? Entonces, noventa y cinco son correctas (*señala la expresión “95 correctas” en la pizarra*), y de esas noventa y cinco, setenta y siete (*señala este número en la pizarra*) las califica, como correctas.

{144} A.: Sí.

{145} M.: Faltan dieciocho por… *(señala el resultado de la resta 95 – 77 = 18, realizada en la pizarra)*

{146} A.: Sí.

{147} M.: … por saber lo que pasa. Diecinueve… (*señala la expresión “Faltan 19 piezas por analizar”*), uy… Espérate.

{148} A.: (*Señalando en la pizarra cada uno de los números que nombra*) Faltan dieciocho. Diecinueve piezas son las que te faltan menos una que son dieciocho, que son las dieciocho piezas que son correctas que no ha analizado. Entonces, del porcentaje total (*deja de hablar un instante*) correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje de piezas son correctas? Pues, vamos a verlas… Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, que son setenta y siete (*señala este dato en la pizarra*)

{149} M.: Sí, a ver. Y… vale.

{150} A.: Cien. Setenta y siete son cien. A ver, vale… *(sin marcar apenas con la tiza, saca una línea desde el número 77 de la resta noventa y cinco menos setenta y siete y a continuación escribe 100, de manera que queda el inicio de una regla de tres: 77 ----- 100)*

(Breve silencio)

{151} M.: A., si son cien… (*señala la expresión “100 piezas total”*) cien en total, ¿vale?

(A. dice algo en voz baja)

{152} M.: Vale. Cien en total. Setenta y siete son analizadas.

(A. asiente)

{153} M.: Como correctas.

(M. murmura alguna cosa, toma la calculadora y comienza a hacer cálculos en ella. A. mira la pizarra)

{154} A.: Pero, veintitrés no. Te estás diciendo que son diecinueve y cuatro, diecinueve y cuatro ya te hacen las veintitrés.

(Hablan a la vez)

{155} A.: Es que está aquí, está aquí (*señala las operaciones: 95 -77 = 18 y 18 + 1 = 19 que han realizado verticalmente y encadenadas*). Cómo no lo sé, pero está aquí. Si setenta y siete son las piezas analizadas como correctas, son cien (*señala la expresión "77 ---- 100"*).

(Silencio. De nuevo, M. hace cálculos en la calculadora y A. mira la pizarra.)

(A. se acerca para ver lo que hace M. en la calculadora)

{156} M.: No.

{157} A.: No.

{158} M.: No. (M. dice que no con la cabeza)

{159} A.: A ver, analiza setenta y ocho (*señala el número 77*) y falta una (*señala el número 18, en la suma 18 + 1*)

{160} A.: Analiza setenta y ocho y falta una (*mientras señala primero el 77 y luego el 1*)

(A. habla rápido y sin vocalizar, señalando la pizarra cerca de la suma 18 +1, como si estuviera resolviendo una regla de tres, que no está escrita en la pizarra)

{161} A.: Siete como ocho por cien. Me sale siete como ocho por cien. Es que no… la verdad, es que no encuentro otra. Setenta y siete más una, que es la pieza defectuosa calificada como correcta *(señala en la pizarra el número 77 en la resta 95-77 y el número 1 en la suma que le sigue. Luego señala la descripción del número 1 "pieza defectuosa calificada como correcta" y subraya la palabra "calificada".)*

(Hablan a la vez)

{162} A.: Porque se ha calificado como correcta. Entonces se la tienes que sumar aquí (*señala la expresión "77 piezas calificadas como correctas" y subraya el 7 de las unidades*) que son setenta y ocho piezas, calificadas como correctas. Y se te quedan dieciocho piezas, que se supone que son correctas pero faltan por analizar. Entonces, son estas dieciocho de aquí (*dibuja con el dedo un círculo alrededor del número 18 en la resta 95 – 77 = 18*) Entonces en verdad hay setenta y ocho piezas calificadas como correctas.

{163} M.: Sí, el setenta y ocho por cien.

{164} A.: Es que éstas (*vuelve a la expresión "77 piezas calificadas como correctas"*) serían setenta y siete piezas calificadas como correctas (*con énfasis*) y lo son.

(M. empieza a escribir "lo son" a continuación de "77 piezas calificadas como correctas")

{165} A.: Para, para.

(M. borra lo que acaba de escribir)

{166} M.: Pero es que, a ver …

(Ambas miran a sus respectivos folios donde aparece el enunciado del problema)

{167} M.: Noventa y cinco son correctas. Por lo tanto, faltan cinco que no lo son.

{168} P: A ver, setenta y siete piezas son calificadas como correctas. Eso está muy bien, vuestro punto de partida para establecer la relación. Esto son todas las piezas correctas. ¿Por quién preguntan?

{169} A.: Por el total…

{170} M.: Por el porcentaje de piezas que eran correctas.

{171} A.: Pero calificadas por el dispositivo como sí.

{172} M.: Pero calificadas por…

{173} A.: Que en realidad sólo hay una.

{174} P: ¿Pieza correcta?

{175} M.: No.

{176} A.: Que, no, que era defectuosa pero estaba calificada como correcta.

{177} P: ¡Ah!

{178} A.: ¡Entonces ya está! Son setenta y ocho piezas calificadas en total que es el cien, por cien, y una, equis.

(A. mira a M. Ésta última asiente)

{179} A.: ¿Sí?

{180} M.: A ver. Sí, porque…

{181} A.: ¿Lo hago aquí? *(señala la parte superior derecha de la pizarra)*

{182} M.: Setenta y uno más una…

{183} A.: Pon…

{184} M.: No, setenta y siete más una son setenta y ocho *(termina de escribir 77 + 1 = 78)*

{185} M.: Piezas correctas (*escribe "piezas"*)

{186} A.: Piezas calificadas como correctas.

{187} M.: Calificadas… como correctas… *(añade "calificadas como correctas" y pronuncia cada palabra conforme las va escribiendo)*

{188} M.: Vale.

{189} A.: Y ahora, si setenta y ocho es el cien por cien (*escribe 78 ----- 100%*)

{190} M.: Setenta y ocho. Eso es lo que he dicho yo antes, pero no me cuadraba, tía.

{191} A.: Setenta y ocho es el cien por cien, una es equis (*completa la regla de tres con 1 ----- x*)

{192} A.: Equis es igual a cien partido setenta y ocho (*escribe esto que dice en la pizarra*)

{193} M.: Táchalo. Ah, no.

{194} A.: (*Mirando a M., que lleva la calculadora*) ¿Cien partido setenta y ocho?

(A. se acerca a M. para mirar la calculadora. M. hace cálculos en la calculadora, mientras A. observa)

{195} A.: Uno coma veintiocho.

{196} M.: Uno coma veintinueve.

(A. escribe el resutado en la pizarra)

{197} A.: Pero, para.

{198} M.: Porcentaje de piezas eran correctas.

{199} A.: Muy bien, luego…setenta y siete piezas calificadas como correctas; sumamos una pieza defectuosa calificada como correcta (*señala cada una de las palabras de la expresión "1 pieza defectuosa calificada como correcta" conforme las va pronunciando*)

{200} M.: Vale, y entonces esa (*señala el número 1*) se la sumamos al porcentaje de piezas correctas (señala la expresión "*77 piezas calificadas como correctas*")

{201} A.: Que son setenta y ocho (*A. rodea con el dedo el número 78*)

{202} M.: … y tenemos las correctas.

{203} A.: Que son setenta y ocho.

{204} M.: Calificadas como correctas.

{205} A.: Claro.

{206} M.: Vale.

(Hablan a la vez mientras terminan de repasar lo que han hecho)

{207} M.: … y la una, nos faltaba por analizar. (*Señala el número 1 en la suma de 18 +1*)

{208} A.: Vale.

{209} P.: Y ese porcentaje es el que corresponde ¿a?

{210} A.: A piezas…

{211} M.: A piezas correctas…

{212} A.: A piezas…

{213} M.: Que eran correctas…

{214} A.: Que eran correctas pero estaban… (*las dos se callan*)

{215} A.: ¡Porras! No, porque…

{216} M.: ¡Están calificadas como correctas!

{217} A.: (*Hablan a la vez*)… a las piezas que estaban calificadas como correctas pero no lo eran. Hay que sacar al revés. Que sería… sería restando. (*Borra el número 1 en la regla de tres y murmura algo para sí)*

{218} A.: Hay que borrarlo todo. *(Borra el cálculo de la x que sigue al planteamiento de la regla de tres)*

{219} A.: Setenta y siete, ¿sabes? setenta y siete *(escribe 77 en el lugar de la regla de tres que ocupaba el 1)*

{220} A.: Llevamos media hora, entonces ¿para que hemos sacado…? ¡Si ya lo teníamos!

{221} M.: Setenta y ocho… *(haciendo cálculos con la calculadora)*

(A. escribe "$x = \dfrac{77 \cdot 100}{78}$*" mientras M. hace cálculos en la calculadora)*

(M. le dice algo en voz baja. A. se acerca y mira la calculadora)

{222} A.: Sí, claro. (*A. murmura alguna cosa*).

{223} M.: Exacto, falta uno.

{224} A.: ¿Cuánto da?

{225} M.: Ay *(se da cuenta de que el resultado se ha borrado en la calculadora)*, noventa y ocho con… Espera un momento…

{226} A.: Con cuarenta y siete o algo ¿no?

(M. vuelve a hacer los cálculos en la calculadora)

{227} M.: Noventa y ocho con setenta y dos.

(A. escribe dicho número. M. lo recuadra. A. comienza a escribir la descripción: "pieza")

{228} A.: Por cien. Pon el por cien. Cien.

(A. escribe el signo de porcentaje)

{229} A.: Piezas calificadas

{230} M.: Correctas y son, y eran.

(A. murmura alguna cosa mientras termina de escribir la descripción del resultado: "piezas calificadas como correctas y lo son")

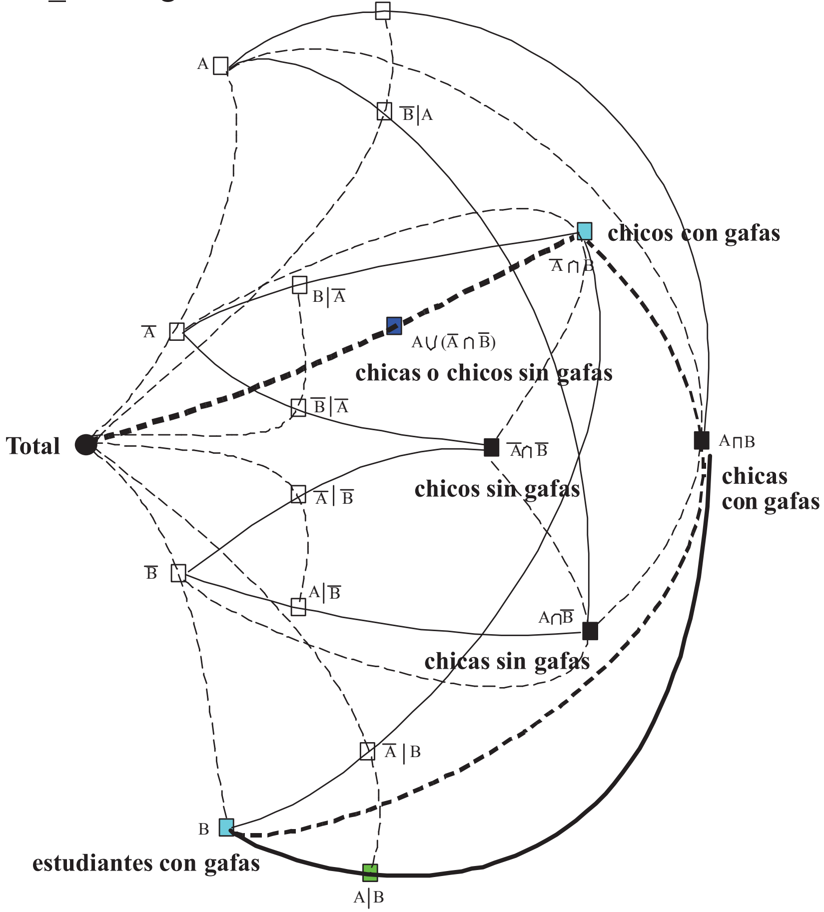
{231} P: Muy bien. Habéis trabajado duro, y serio.

{232} A.: Sí, serio (*con cierta ironía*).

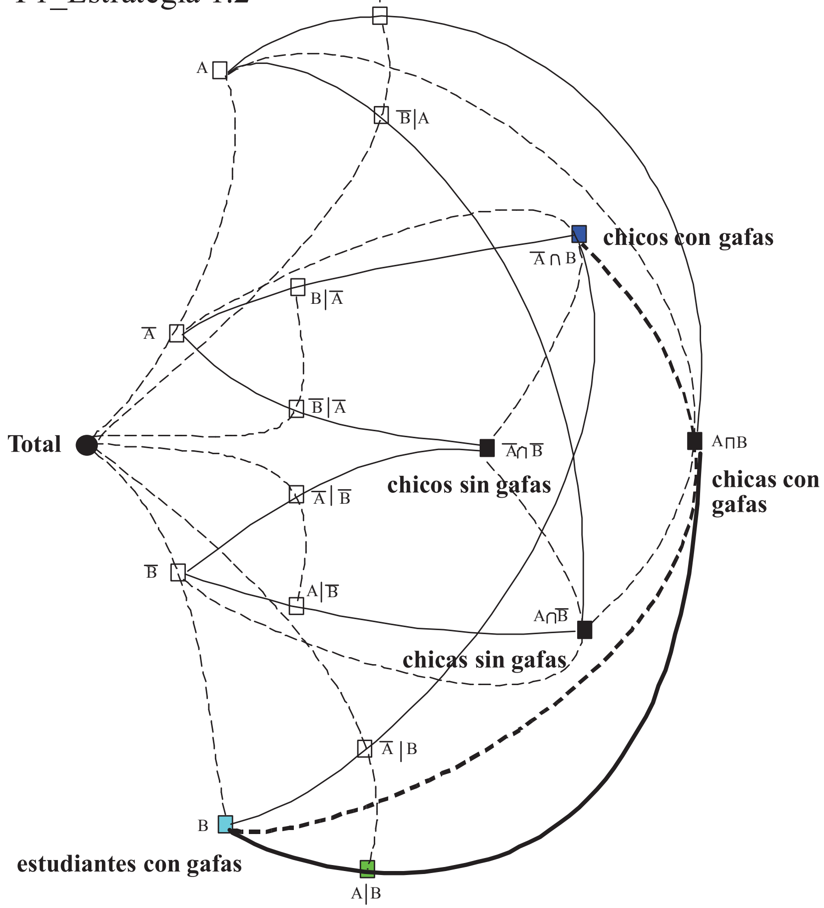
{233} P: Y os lo agradecemos.

ANEXO 24. Estrategias de resolución con éxito en los pre-test.

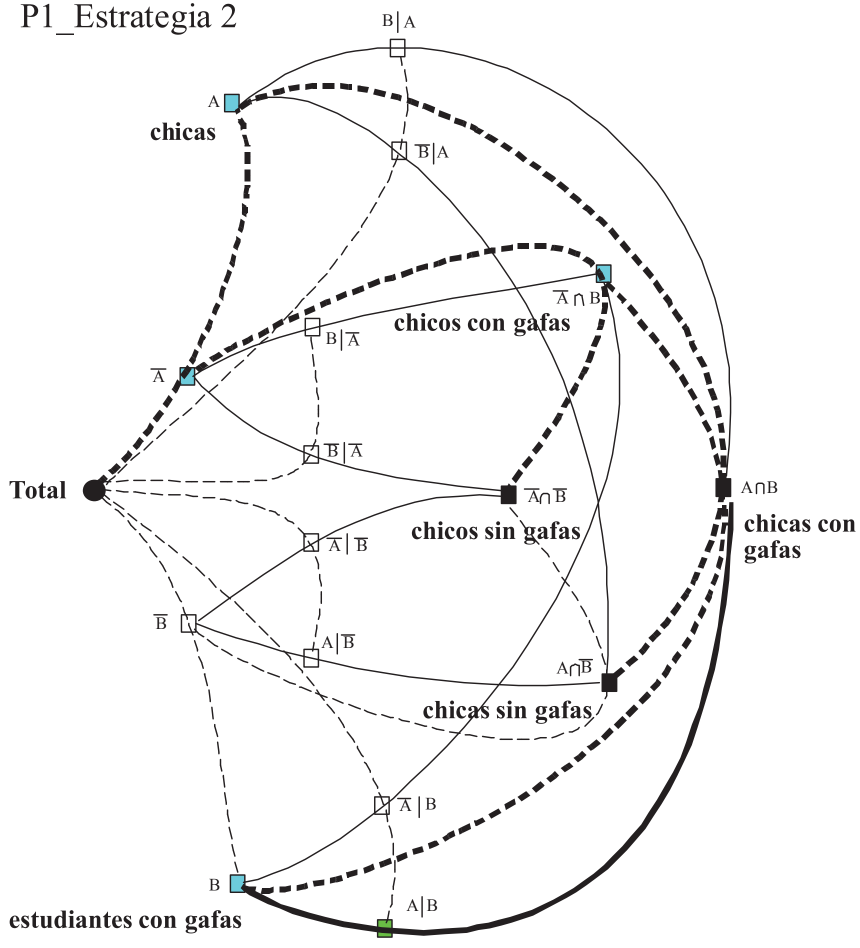
P1_Estrategia 1.1



P1_Estrategia 1.2

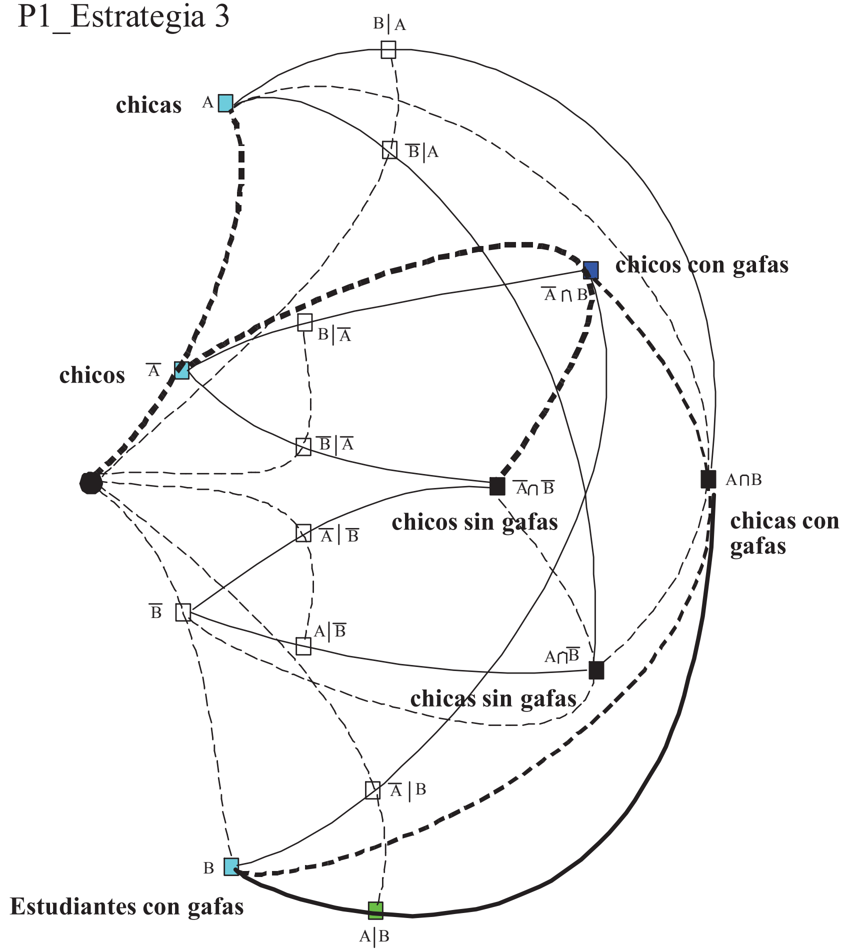


P1_Estrategia 2



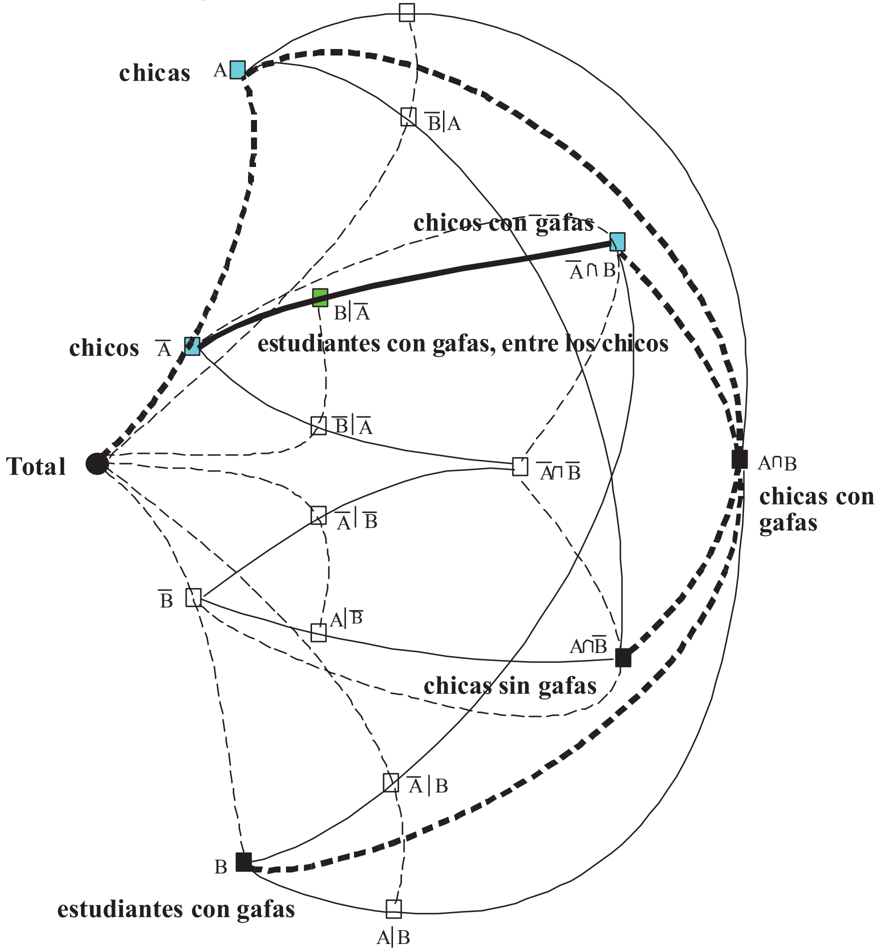
chicas, entre los estudiantes con gafas

P1_Estrategia 3

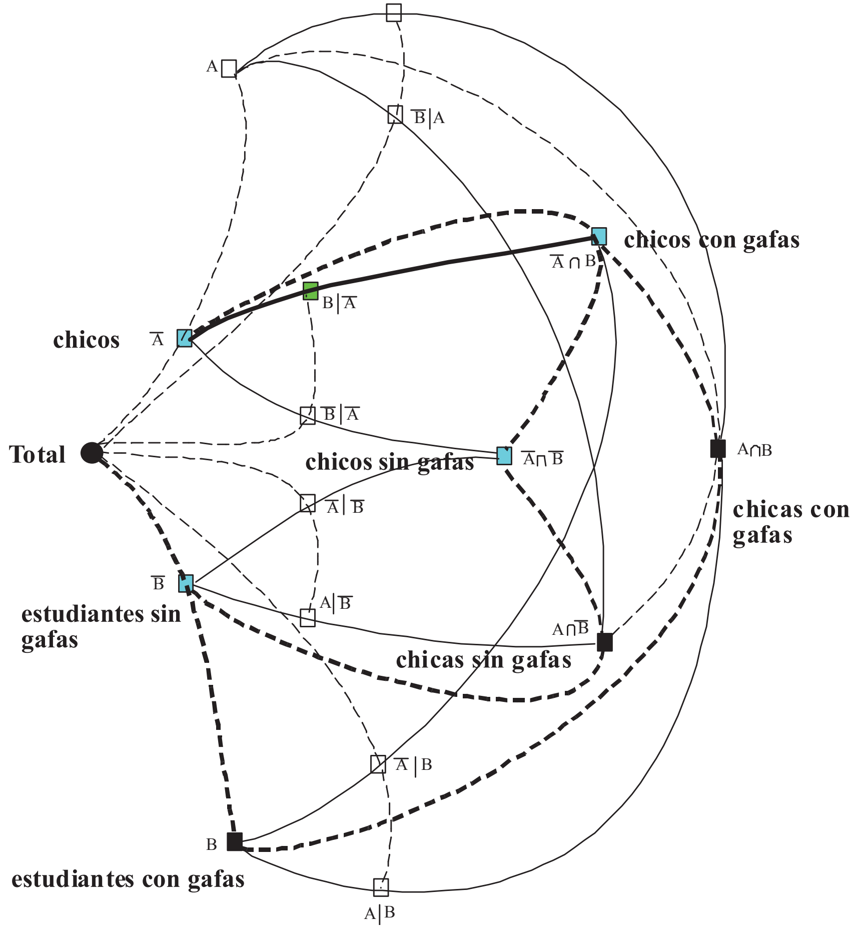


chicas, entre los estudiantes que llevan gafas

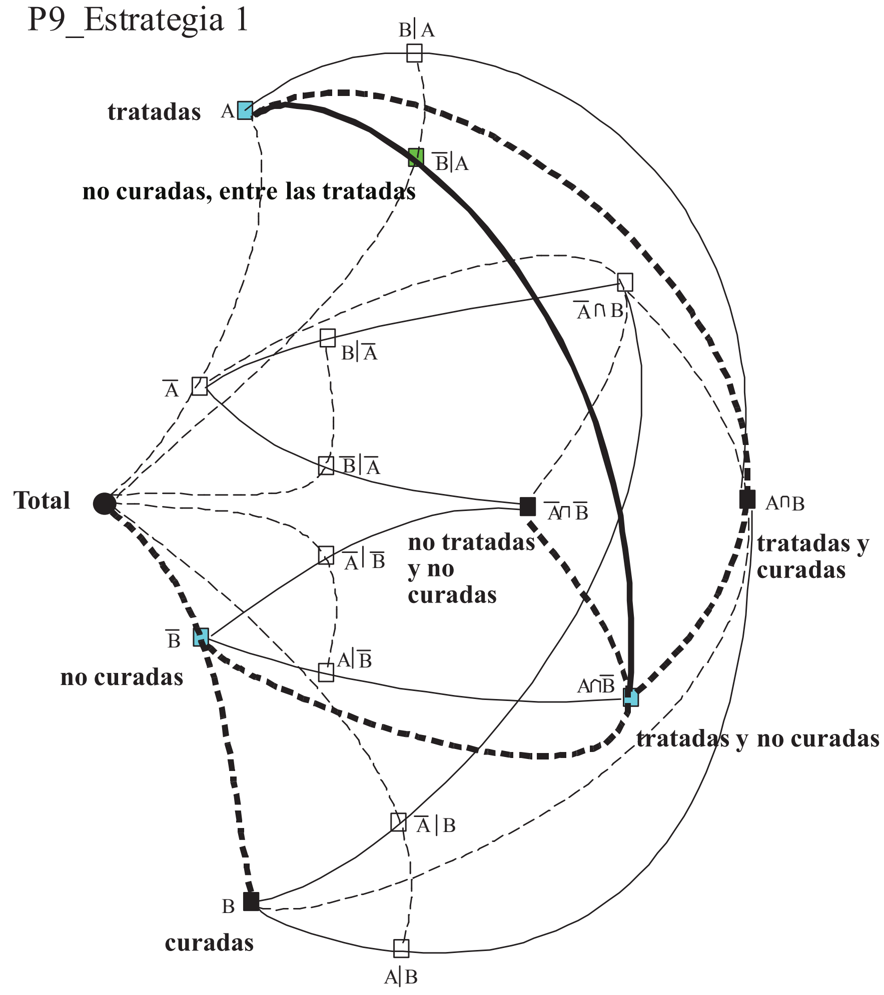
P2a_Estrategia 1



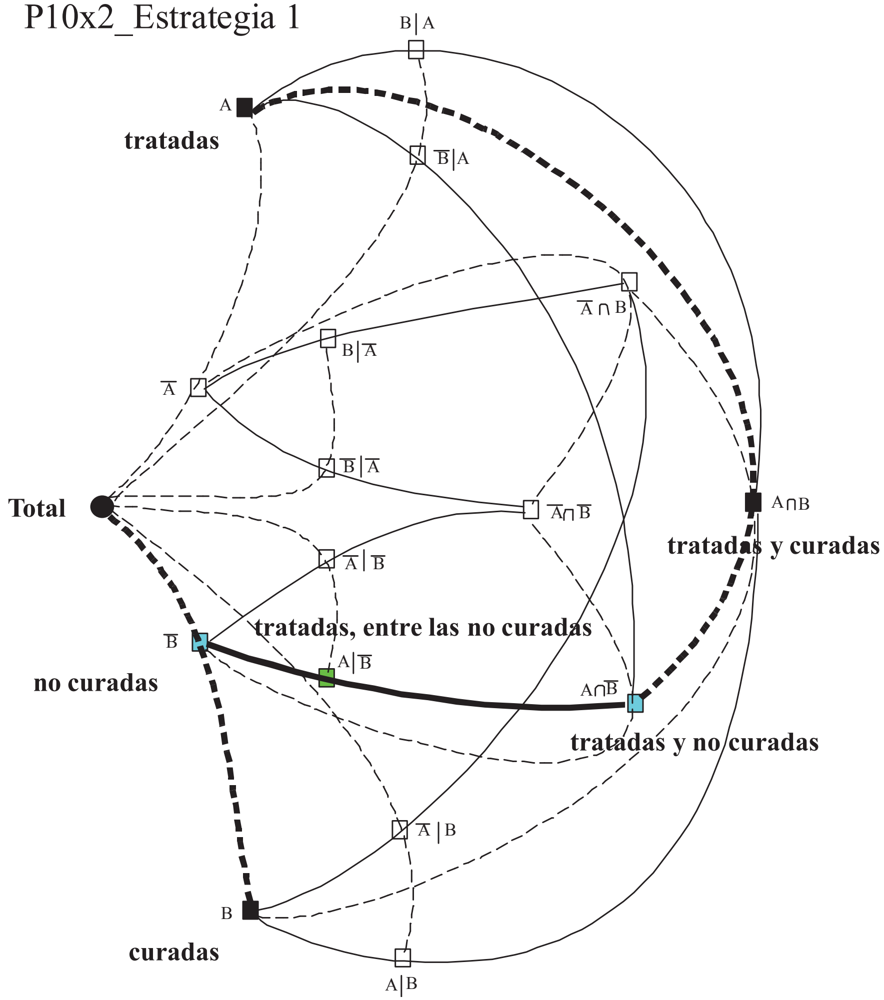
P2a_Estrategia 2



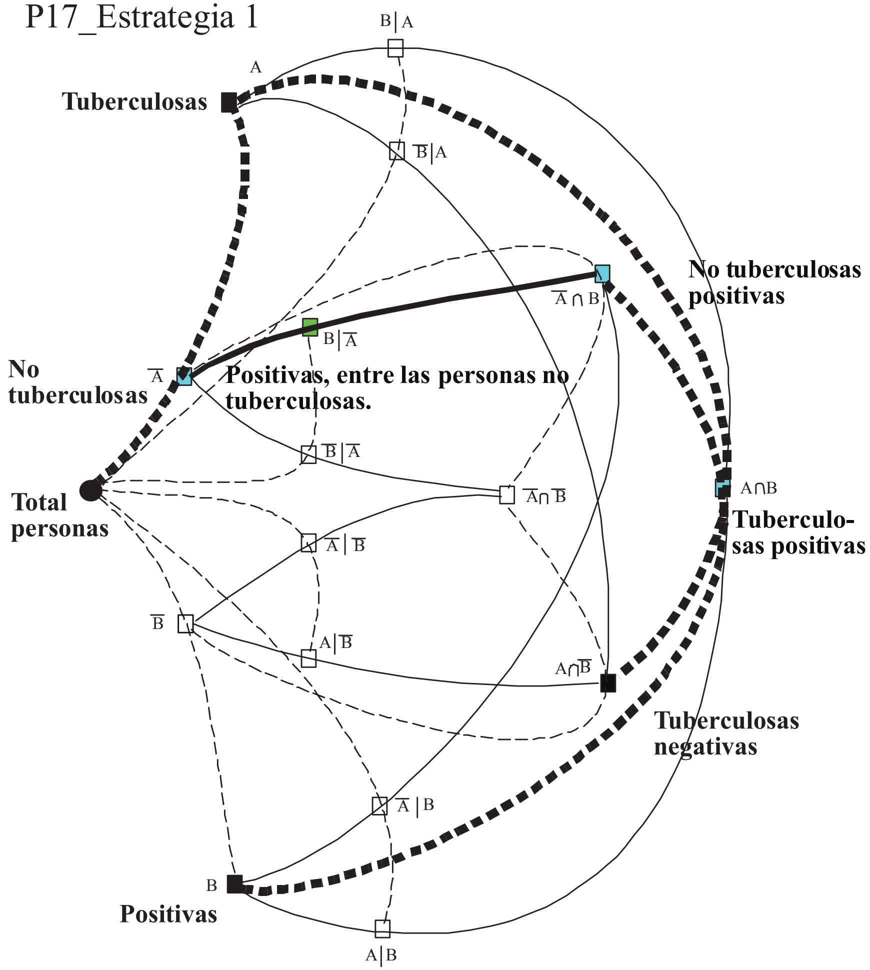

P2a_Estrategia 3
B|A
A
B̄|A
chicos con gafas
Ā ∩ B
B|Ā
chicos Ā
estudiantes con gafas, entre los chicos
B̄|Ā
Total
Ā∩B̄
A∩B
Ā|B̄
chicos sin gafas
chicas con gafas
B̄
A|B̄
A∩B̄
A∪B
chicas sin gafas
chicas o estudiantes con gafas
Ā|B
B
estudiantes con gafas
A|B


P9_Estrategia 1
B|A
tratadas A
B̄|A
no curadas, entre las tratadas
Ā ∩ B
B|Ā
Ā
B̄|Ā
Total
Ā∩B̄
A∩B
no tratadas y no curadas
tratadas y curadas
Ā|B̄
B̄
A|B̄
no curadas
A∩B̄
tratadas y no curadas
Ā|B
B
curadas
A|B

P10x2_Estrategia 1



P17_Estrategia 1



Problema	Estrategia de resolución	Resoluciones con éxito donde se observa
P1	Caso 1.1 (modo aditivo)	C_P1_F ; A_P1_% ; B_P1_% ; C_P1_% ; L_P1_%
	Caso 1.2 (modo sustractivo)	R_P1_F ; V_P1_F ; V_P1_% (c.s.[47])
	Caso 2	L_P1_F
P2	Caso 1	C_P2a_F ; MyA_P2a_F ; C_P2a_% ; T_P2a_% ; V_P2a_% (c. s. ; podría ser también estrategia 2)
	Caso 2	R_P2a_F ; L_P2a_% (c. s.)
	Caso 3	V_P2a_F
P9	Caso único	C_P9_% ; V_P9_F (c.s.) ; V_P9_% (c.s.)
P10x2	Caso único	R_P10x2_F ; V_P10x2_% (c.s.); V_P10x2_F (c.s.)
P17	Caso único	C_P17_F ; T_P17_F (c.s.) ; V_P17_F (c.s.); V_P17_% (c.s)
P18a	No se han observado	---

[47] Con cantidades intermedias superfluas.

ANEXO 25. Errores en los pre-test.

E1: Errores de interpretación

<table>
<tr><th>Error</th><th>Resolución</th><th>Interpreta la cantidad …</th><th>…como si se tratara de…</th></tr>
<tr><td rowspan="6">E1.1: Interpreta una marginal como si fuera una intersección.</td><td>H_P2a_F</td><td>“282 estudiantes que usan gafas”</td><td>chicos con gafas</td></tr>
<tr><td>L_P10x2_F</td><td>“100 se han tratado con el antibiótico”</td><td>tratados y no curados</td></tr>
<tr><td>AyM_P17_F(1)</td><td>“había 14 personas a las que el test les resultó positivo”</td><td>tuberculosas positivas</td></tr>
<tr><td>AyM_P18a_F</td><td rowspan="3">“77 piezas fueron calificadas como correctas por el dispositivo” / “el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo”</td><td rowspan="3">piezas correctas calificadas como correctas</td></tr>
<tr><td>T_P18a_%</td></tr>
<tr><td>V_P18a_%</td></tr>
<tr><td rowspan="5">E1.2: Interpreta una intersección como si fuera una condicional.</td><td rowspan="2">A_P2a_%</td><td>“un 15% de chicas que las usan”</td><td>un 15% de los que usan gafas, son chicas</td></tr>
<tr><td>“un 37% de chicas que no las usan”</td><td>un 37% de los que no usan gafas, son chicas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">L_P9_%</td><td>“Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado”</td><td>el 35% de las personas tratadas con antibiótico, se ha curado</td></tr>
<tr><td>“un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado”</td><td>el 40% de las personas que no se han tratado con el antibiótico, no se han curado</td></tr>
<tr><td>A_P17_%</td><td>"un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo"</td><td>"el 23% de las personas tuberculosas dieron negativo en el test"</td></tr>
<tr><td rowspan="3">E1.3: Interpreta una intersección como si fuera otra intersección.</td><td>AyM_P17_F(1)</td><td>“a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo”</td><td>no tuberculosos negativos</td></tr>
<tr><td>L_P18a_F</td><td rowspan="2">“ 4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas” / “4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó de defectuosas”</td><td rowspan="2">piezas defectuosas calificadas de correctas</td></tr>
<tr><td>M_P18a_%</td></tr>
</table>

E1.4: Interpreta una intersección como si fuera una marginal.	AyM_P17_F(2)	"a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo"	negativos
	C_P18a_F	"4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas" / "4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas"	piezas defectuosas
	C_P18a_%		
	AyM_P18a_F		piezas calificadas de defectuosas
	H_P18a_%		
	L_P18a_%		- piezas defectuosas - piezas calificadas defectuosas
	V_P18a_F		
	B_P18a_F		
	B_P18a_%		
E1.5: Interpreta una intersección como si fuera otra cantidad, que no tiene sentido en el contexto del problema.	AyM_P17_F(4)	"a siete personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo"	personas que eran tuberculosas y ya no lo son

E2: Uso de un mismo número para dos sucesos distintos

Error	**Resolución**	**Asigna la componente x (el número) de …**	**… a las cantidades…**
E2.1: Marginal e intersección directamente relacionadas comparten componente x.	B_P9_F	"48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado"	- personas no tratadas - personas no tratadas y no curadas
	C_P17_%	"hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo"	- positivas - tuberculosas positivas
	V_P18a_%	"4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas"	- piezas defectuosas - piezas defectuosas calificadas de defectuosas
E2.2: Dos marginales comparten componente x.	AyM_P9_F	"En total, se han curado 64 personas"	- curadas - tratadas
	L_P17_F	13 personas no tuberculosas	- personas no tuberculosas - personas tuberculosas
	B_P18a_F	"4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas"	- piezas defectuosas - piezas calificadas de defectuosas
	V_P18a_F		
	B_P18a_%	"4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas"	

E2.3: Condicional e intersección directamente relacionada comparten componente x.	C_P10x2_%	16,6% no curados, entre los tratados	- no curados, entre los tratados - tratados y no curados
	L_P10x2_%		
	A_P17_%	23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo	- tuberculosas y con test negativo - personas con test negativo, entre las tuberculosas

E3: Uso de dos números diferentes para un mismo suceso, es decir, dos cantidades difieren en la componente x pero sus respectivas componentes n son equivalentes.

Error	Resolución	Asigna los números …	Cuya descripción correcta es…	… a la cantidad…
E3	AyM_P17_F(6)	7	tuberculosas negativas	tuberculosas negativas
		3	cantidad arbitraria	

E4: Errores de descripción

Error	Resolución	Describe la cantidad …	…como si se tratara de…
E4.1 : Condicional descrita como intersección	A_P1_%	chicas, entre los estudiantes con gafas	chicas con gafas
	C_P1_%		
	R_P1_F		
	A_P2a_%		
	A_P2a_%	chicos, entre los estudiantes con gafas	chicos con gafas
	A_P2a_%	estudiantes con gafas, entre los chicos	
	C_P2a_%;		
	AyM_P9_F	no curadas, entre las tratadas	tratadas y no curadas
	R_P9_F		
	C_P10x2_%		
	C_P10x2_%	curadas, entre las tratadas	tratadas y curadas
	AyM_P10x2_%	tratadas, entre las no curadas	tratadas y no curadas
	C_P10x2_%		
	R_P17_F	positivos, entre los no tuberculosos	no tuberculosos y positivos
	V_P17_%		
	AyM_P18a_F	piezas correctas, entre las calificadas como correctas	piezas correctas calificadas de correctas
	C_P18a_%		

E4.2 : Marginal descrita como otra marginal	AyM_P18a_F	piezas calificadas como defectuosas	piezas defectuosas
E4.3: Intersección descrita como marginal	C_P1_%	chicas sin gafas	estudiantes sin gafas
	C_P1_%	chicos sin gafas	estudiantes sin gafas
	M_P1_%		chicos
	H_P1_F	chicas con gafas	estudiantes con gafas
	H_P1_%		chicas
	H_P2a_F	chicos con gafas	estudiantes con gafas
	H_P9_%	personas tratadas y curadas	personas tratadas
	L_P9_F	tratadas y no curadas	no curadas
	V_P9_F		
	B_P17_%	tuberculosas positivas	tuberculosas
	C_P17_%		
	C_P17_%	tuberculosas negativas	positivas
	L_P18a_F	piezas correctas calificadas de correctas	calificadas de correctas
	AyM_P18a_F	piezas defectuosas calificadas como correctas	piezas defectuosas
E4.4: Condicional descrita como condicional transpuesta	AyM_P1_F	chicas, entre los estudiantes que usan gafas	estudiantes que usan gafas, entre las chicas
E4.5 Intersección descrita como otra intersección	B_P2a_F	chicas que no las usan	chicas que las usan
E4.6 Condicional descrita como marginal suceso condicionado	R_P2a_F	estudiantes con gafas, entre los chicos	estudiantes con gafas
	T_P18a_F	piezas correctas, entre las calificadas de correctas	piezas correctas
E4.7 Intersección descrita como condicional	L_P9_F	tratadas y no curadas	no curadas, entre las tratadas
E4.8 Condicional descrita como marginal suceso condicionante	T_P10x2_F	no curadas, entre las tratadas	tratadas

E5: Dar como resultado una cantidad distinta de aquella por la que se pregunta

Error	Resolución	Responde con la cantidad …	…en lugar de la condicional…
E5.1: Da como resultado la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.	B_P1_F	chicas con gafas	chicas, entre los estudiantes que usan gafas
	H_P1_F		
	H_P1_%		
	T_P1_F		
	B_P2a_F	chicos con gafas	estudiantes con gafas, entre los chicos
	B_P2a_%		
	H_P2a_%		
	T_P2a_F		
	B_P9_F	tratadas y no curadas	no curadas, entre las tratadas
	B_P9_%		
	H_P9_%		
	L_P9_F		
	M_P9_%		
	B_P10x2_F		tratadas, entre las no curadas
	B_P10x2_%		
	H_P10x2_%		
	B_P17_%	personas no tuberculosas con test positivo	positivos, entre las personas no tuberculosas
	C_P17_%		
	M_P17_%		
E5.2: Da como resultado la condicional transpuesta.	L_P2a_F	chicos, entre los estudiantes con gafas	estudiantes con gafas, entre los chicos
	T_P10x2_F	personas no curadas, entre las tratadas	personas tratadas, entre las no curadas
	T_P18a_%	piezas calificadas como correctas, entre las correctas	piezas correctas, entre las calificadas de correctas
E5.3: Da como resultado la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.	H_P10x2_F	no curadas	tratadas, entre las no curadas
	B_P17_F	no tuberculosas	positivos, entre las personas no tuberculosas
E5.4: Da como resultado una cantidad sin otro sentido en el contexto del problema que el de su propia construcción.	M_P1_%	cantidad arbitraria	chicas, entre los estudiantes que usan gafas

<table>
<tr><td rowspan="4">E5.5: Da como resultado la marginal directamente relacionada con la condicional transpuesta.</td><td>H_P9_F</td><td>no curadas</td><td>no curadas, entre las tratadas</td></tr>
<tr><td>M_P10x2_%</td><td>personas tratadas</td><td>tratadas, entre las no curadas</td></tr>
<tr><td>H_P17_%</td><td>positivas</td><td>positivas, entre las tuberculosas</td></tr>
<tr><td>M_P18a_%</td><td>piezas correctas</td><td>piezas correctas, entre las calificadas de correctas</td></tr>
<tr><td>E5.6: Da como resultado 100%.</td><td>B_P18a_%</td><td>100 %</td><td>correctas, entre las calificadas como correctas</td></tr>
</table>

E6: Errores de relación

E6.1: Errores de relación en el uso de relaciones aditivas.

Contexto Estsalud

<table>
<tr><th>Resolución</th><th>Relación</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>AyM_P9_F</td><td>$n(B) - n(A \cap B) = n(A \cap \overline{B})$</td><td>“curadas” – “tratadas y curadas” = “tratadas y no curadas”</td></tr>
<tr><td>M_P9_%</td><td>$n(B) + n(A \cap B) = n(A)$</td><td>“curadas" + “tratadas y curadas” = “tratadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H_P9_%</td><td>$n(B) + n(A \cap B) = n(\text{c.a.})$</td><td>“curadas” + “tratadas y curadas” = cantidad arbitraria</td></tr>
<tr><td>$100 - n(\text{c.a.}) = n(A \cap B)$</td><td>100 – cantidad arbitraria = “tratadas y curadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_P9_F</td><td>$n(A) - n(B) = n(A \cap \overline{B})$</td><td>"tratadas" - "curadas" = “tratadas y no curadas”</td></tr>
<tr><td>$N - n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(A)$</td><td>N – “no tratadas y no curadas” = “tratadas”</td></tr>
<tr><td>T_P9_F</td><td>$n(\overline{B}) - n(A \cap \overline{B}) = n(A \cap B)$</td><td>“no curadas” – “tratadas y no curadas” = “tratadas y curadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C_P10x2_F</td><td>$n(\overline{A}) + n(A \cap \overline{B}) = n(\overline{B})$</td><td>“no tratadas” + “tratadas y no curadas” = “no curadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n(A \cap B) - n(A) = n(A)$</td><td rowspan="2">“tratadas y curadas” – “tratadas” = “tratadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H_P10x2_F</td></tr>
<tr><td>$n(A) - n(B) = n(\overline{B})$</td><td>“tratadas” – “curadas” = “no curadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">H_P10x2_%</td><td>$n(A \cap B) + n(B) = n(B)$</td><td>“tratadas y curadas” + “curadas” = “curadas”</td></tr>
<tr><td>$n(B) - n(A) = n(A \cap \overline{B})$</td><td>“curadas” – “tratadas” = “tratadas y no curadas”</td></tr>
</table>

Contexto Diagsalud

Resolución	Relación	Descripción (sólo en términos de sucesos)
AyM_P17_F(2,3)	n(A) – n(B) = c.a	"tuberculosas" – "positivas" = "personas que faltan"
AyM_P17_F(4)	n(A) – n($A \cap B$) = c.a.	"tuberculosas" – "tuberculosas positivas" = "+ ¿?"
AyM_P17_F(6)	n($\overline{B}$) – n($\overline{A}$) = n($A \cap \overline{B}$)	"negativas" – "no tuberculosas" = "tuberculosas negativas"
AyM_P17_F(6)	n(B) – n($A \cap \overline{B}$) = c.a.	"positivas" – "tuberculosas negativas" = c.a. (descrita como "positiva")
A_P17_%	100 – n($A \cap \overline{B}$) = n($A \cap B$)	100 – "tuberculosas negativas" = "tuberculosas positivas"
B_P17_F	n(B) + n($A \cap \overline{B}$) = n(A)	"positivas" + "tuberculosas negativas" = "tuberculosas"
C_P17_%	c.a. – 100 = n($\overline{A} \cap B$)	c.a. – 100 = "no tuberculosas positivas"
H_P17_%	n($A \cap \overline{B}$) + n(B) = n(B)	"tuberculosas negativas" + "positivas" = "positivas"
	n(B) – n(A) = n(B)	"positivas" – "tuberculosas" = "positivas"
M_P17_%	n($A \cap \overline{B}$) + n(B) = n(T)	"tuberculosas negativas" + "positivas" = "personas que se hicieron el test"
	n(T) – n(A) = n($\overline{A} \cap B$)	"personas que se hicieron el test" – "tuberculosas" = "no tuberculosas positivas"
R_P17_F	n(A) – n(B) = c.a.$_1$	"tuberculosas" – "positivas" = c. a.$_1$
	c.a.1 + n($A \cap \overline{B}$) = c.a.$_2$	c. a.$_1$ + "tuberculosas negativas" = c. a.$_2$
	n(B) – c.a.$_2$ = n($\overline{A} \cap B$)	"positivas" – c. a.$_2$ = "no tuberculosas positivas"

Contexto Diagcalidad

Resolución	Relación	Descripción
AyM_P18a_F	n(B) + n($\overline{B}$) = c.a$_1$	"calificadas de defectuosas" + "calificadas de correctas" = c.a$_1$ (¿total piezas analizadas?)
AyM_P18a_F	N – c.a$_1$ = c.a$_2$	N – c.a$_1$(¿total piezas analizadas?) = "piezas por analizar"
AyM_P18a_F	n(A) - n(B) = c.a$_3$	"correctas" – "calificadas de correctas" = c.a. no descrita
AyM_P18a_F	c.a$_2$ + c.a$_3$ = n($\overline{A} \cap B$)	"piezas por analizar" + (diferencia entre las piezas correctas y las calificadas de correctas) = "piezas defectuosas calificadas de correctas"
AyM_P18a_F	n($\overline{A} \cap B$) + n(B) = n(B)	"piezas defectuosas calificadas de correctas" + "piezas calificadas de correctas" = "piezas calificadas de correctas"

C_P18a_F	$N – c.a_1 = c.a_2$	N – “muestra de piezas que han sido calificadas por el dispositivo” = “piezas restantes que no sé si pertenecen al grupo de correctas o incorrectas”
H_P18a_%	100 - n(A) - n($\overline{A}$) = c.a	(Relación no ternaria) 100 – “correctas” – “defectuosas” = c.a.
L_P18a_%	c.a – 100 = P($A \mid B$) $\cdot 100$	c.a. – 100 = “correctas entre las calificadas de correctas”
V_P18a_F	n(A) - n(B) = n($A \cap \overline{B}$)	“correctas” – “calificadas de correctas” = “correctas calificadas de incorrectas”

E6.2: Errores en el uso de la regla de tres para el cálculo del porcentaje que se da como resultado.

El porcentaje es interpretado por el estudiante como la condicional por la que se pregunta.

Resolución	**Mezcla formatos**	**Orden de colocación**	**Cantidades no pertinentes**					**Construcción de la condicional**
			Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	
AyM_P1_F	x							$P(A \mid B) = \dfrac{N \cdot P(A \cap B)}{100 \cdot P(B)}$
T_P1_%		x						$P(A \mid B) = P(A \cap B) \cdot P(B)$
T_P10x2_%		x						
L_P18a_%			x					$P(A \mid B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$
L_P17_%				x				$P(A \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$
M_P2a_%		x			x			$P(A \mid B) = P(A \cap B) \cdot P(A)$
T_P9_%		x	x					$P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B)$
T_P18_F						x		$P(A \mid B) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$
C_P18_%								
AyM_P17_F(3)							x	$P(A \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$

El estudiante responde con una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta.

Resolución	**Error de colocación**	**Cantidades que intervienen**						**Interpretación de la cantidad que se da como resultado** **Relación falsa**
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	
M_P1_%	x	x						La descripción del resultado es tan ambigua que no es posible atribuirle significado. $x = \frac{\%(A \cap \overline{B}) \cdot \%(A \cap B)}{100}$
T_P2a_F			x					$x = \%(\overline{A} \cap B)$ $\%(\overline{A} \cap B) = \frac{\%(B) \cdot n(\overline{A})}{n(B)}$ No hay restricción del espacio muestral.
M_P9_%	x			x				$x = \%(A \cap \overline{B})$ $\%(A \cap \overline{B}) = \frac{\%(A) \cdot \%(\overline{A} \cap \overline{B})}{100}$
M_P10x2_%	x				x			x = %(A) $\%(A) = \frac{\%(A) \cdot \%(B)}{100}$
C_P17_%						x		$x = \%(\overline{A} \cap B)$ En la regla de tres interviene dos veces la marginal "tuberculosas"
M_P18a_%	x						x	x = %(A) $\%(A) = \frac{\%(A) \cdot \%(A \cap B)}{100}$
T_P18a_%	x						x	x = %(B|A) (condicional transpuesta) $\%(B \mid A) = \frac{\%(A) \cdot \%(A \cap B)}{100}$

ANEXO 26. Errores en el post-test.

Definición de sucesos:

Contexto ESTSOCIAL (problemas P1)

M = aprobar matemáticas

I = aprobar inglés

Contexto ESTSOCIAL (problemas P2a)

A = ser chica

G = llevar gafas

Contexto ESTSALUD (problemas P9 y P10)

T = tratarse con el antiviral

C = curarse

Contexto DIAGSALUD (problema P17)

S = padecer SIDA

+ = dar positivo en el test

– = dar negativo en el test

Contexto DIAGCALIDAD (problema P18)

D = ser una pieza defectuosa

+ = ser una pieza calificada de correcta (no defectuosa)

– = ser una pieza calificada de defectuosa

E1: Errores de interpretación.

Error	Resolución	Interpreta la cantidad …	…como si se tratara de…
E1.3: Interpreta una intersección como si fuera otra intersección.	L_P2_P	$P(A \cap \overline{G})$	$P(\overline{A} \cap G)$

E2: Uso de un mismo número para dos sucesos distintos.

Error	Resolución	Asigna la componente x (el número) de …	… a las cantidades…
E2.3: Condicional e intersección directamente relacionada comparten componente x.	L_P2_P	$P(A \cap \overline{G})$	$P(\overline{A} \cap G)$ $P(\overline{A} \mid G)$
E2.4: Dos condicionales y una intersección directamente relacionada con una de dichas condicionales comparten componente x por error.	L_P2_P	$P(A \cap G)$	$P(A \cap G)$ $P(A \mid G)$ $P(G \mid \overline{A})$
E2.5: Dos condicionales comparten componente x por error.	H_P1_P	$P(\bar{I} \cap \overline{M})$	que se representarían como $P(\overline{A} \mid M)$ $P(\overline{A} \mid I)$ si A, M e I fueran sucesos bien definidos.

E3: Uso de dos descripciones con el mismo referente para dos números distintos.

Error	Resolución	Asigna los números …	Cuya descripción correcta es…	… a la cantidad…
E3	L_P1_P a)	0,15	-	P($I \cap \overline{M}$)
		0,13	-	
	L_P1_P b)	0,15	P($I \cap M$)	P($I \cap M$)
		0,14	-	

E4: Errores de descripción.

Error	Resolución	Describe la cantidad …	…como si se tratara de…
E4.1.1 : Condicional descrita verbalmente como intersección	R_P9_P a)	$P(\overline{C} \mid T)$	$P(\overline{C} \cap T)$
	R_P9_P b)	$P(C \mid \overline{T})$	$P(C \cap \overline{T})$
	R_P10_P a)	$P(C \mid \overline{T})$	$P(C \cap \overline{T})$
	R_P10_P b)	$P(\overline{T} \mid \overline{C})$	$P(\overline{T} \cap \overline{C})$
	R_P18a_P a)	$P(+ \mid \overline{D})$	$P(+ \cap \overline{D})$
	R_P18a_P b)	$P(\overline{D} \mid +)$	$P(+ \cap \overline{D})$

E4.1.2 : Condicional descrita matemáticamente como intersección	L_P9_P a)	$P(\overline{C} \mid T)$	$P(C \cap T)$
	L_P9_P b)	$P(C \mid \overline{T})$	$P(C \cap \overline{T})$
	L_P10_P a)	$P(C \mid \overline{T})$	$P(C \cap \overline{T})$
	L_P10_P b)	$P(\overline{T} \mid \overline{C})$	$P(\overline{C} \cap \overline{T})$
	L_P17_P a)	$P(+ \mid \overline{S})$	$P(+ \cap \overline{S})$
	L_P17_P b)	$P(S \mid +)$	$P(S \cap +)$
	L_P18_P a)	$P(C \mid +)$	$P(C \cap +)$
	L_P18_P B)	$P(+ \mid C)$	$P(C \cap +)$
E4.7: Intersección descrita verbalmente como condicional	L_P2_P	$P(\overline{A} \cap G)$	$P(G \mid \overline{A})$
E4.9: Condicional descrita verbalmente como otra condicional.	C_P17_P	$P(+ \mid \overline{S})$	$P(+ \mid S)$
	L_P9_P b)	$P(C \mid \overline{T})$	$P(\overline{C} \mid \overline{T})$
	H_P18_P b)	$P(\overline{C} \mid +)$	$P(C \mid +)$

E5: Dar como resultado una cantidad distinta de aquella por la que se pregunta.

Error	Resolución	Responde con la cantidad …	…en lugar de la condicional…
E5.1: Da como resultado la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.	L_P1_P a)	$P(I \cap \overline{M})$	$P(I \mid \overline{M})$
	L_P1_P b)	$P(I \cap M)$	$P(M \mid I)$
	L_P2_P	$P(\overline{A} \cap G)$	$P(G \mid \overline{A})$
E5.7: Otros casos	H_P18_P b)	$P(\overline{C} \mid +)$	$P(C \mid +)$

E6: Error de relación.

Error	Resolución	Relación	En términos de A y B
E6.1 : Error de relación al aplicar una relación aditiva	M_P1_P a)	$P(M \mid I) = P(M \cap I) + P(M \cap \bar{I})$	$P(A \mid B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
	M_P1_P b)	$P(I \mid M) = P(I \cap M) + P(\bar{I} \cap M)$	$P(A \mid B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

E6.3: Cálculo del número que se da como resultado por otro procedimiento distinto a la regla de tres.	L_P1_P a)	$P(I\cap\overline{M})=P(I)\cdot P(\overline{M})$	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
	L_P1_P b)	$P(M\cap I)=P(M)\cdot P(I)$	
	L_P9_P a)	$P(\overline{C}\mid T)=\dfrac{P(T)}{P(\overline{C})}$	$P(A\mid B)=\dfrac{P(B)}{P(A)}$
	L_P10_P b)	$P(\overline{T}\mid\overline{C})=\dfrac{P(\overline{C})}{P(\overline{T})}$	
	L_P17_P b)	$P(S\mid +)=\dfrac{P(+)}{P(S)}$	
	L_P18_P b)	$P(C\mid +)=\dfrac{P(+)}{P(C)}$	
	L_P9_P b)	$P(\overline{C}\mid\overline{T})=P(\overline{T})\cdot P(C)$	$P(A\mid B)=P(A)\cdot P(B)$
	L_P10_P a)	$P(C\mid\overline{T})=P(C)\cdot P(\overline{T})$	
	L_P18_P a)	$P(+\mid C)=P(+)\cdot P(C)$	
	M_P2_P a)	c.a. = $\dfrac{P(\overline{A})}{P(\overline{A}\cap G)}$	c.a. = $\dfrac{P(A)}{P(A\cap B)}$ [1]
	M_P9_P a)	c.a. = $\dfrac{P(T)}{P(T\cap\overline{C})}$	
	M_P10_P a)	c.a. = $\dfrac{P(\overline{T})}{P(\overline{T}\cap C)}$	
	M_P10_P b)	c.a. = $\dfrac{P(\overline{C})}{P(\overline{C}\cap\overline{T})}$	
	M_P17_P a)	c.a. = $\dfrac{P(\overline{S})}{P(\overline{S}\cap +)}$	
	M_P17_P b)	c.a. = $\dfrac{P(+)}{P(+\cap S)}$	
	M_P18_F a)	c.a. = $\dfrac{P(C)}{P(C\cap +)}$	
	M_P18_P b)	c.a. = $\dfrac{P(+)}{P(C\cap +)}$	
	M_P9_P b)	c.a. = $\dfrac{P(\overline{T})}{P(\overline{C})}$	c.a. = $\dfrac{P(A)}{P(\overline{B})}$ [1]
	M_P1_P a)	$P(M\cap I)=\dfrac{P(M\mid I)}{P(M\cap I)}$	$P(A\cap B)=\dfrac{P(A\mid B)}{P(A\cap B)}$

[1] Siendo P(A|B) la pregunta del problema y siendo c.a. la cantidad arbitraria que se da como respuesta y que se describe matemáticamente como la condicional transpuesta y verbalmente como la intersección directamente relacionada con ambas condicionales.

	M_P1_P a)	$P(I\cap M)=\dfrac{P(I\mid M)}{P(I\mid M)}$	$P(A\cap B)=\dfrac{P(A\mid B)}{P(A\mid B)}$
	H_P9_P a)	$P(\overline{C}\mid T)=\dfrac{P(\overline{C}\cap T)}{P(\overline{C})}$	$P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$
	H_P9_P b)	$P(C\mid \overline{T})=\dfrac{P(C\cap \overline{T})}{P(C)}$	
	H_P18_P b)	$P(\overline{C}\mid +)=\dfrac{P(\overline{C}\cap +)}{P(\overline{C})}$	

E7: Error en el uso del diagrama en árbol.

Error	Resolución	
E7.1: Distribución de sucesos errónea.	H_P1_P	Las dos primeras ramas del árbol corresponden a las expresiones M (“Matemáticas”) e I (“Inglés”) que no son sucesos propiamente dichos.
E7.2: Coloca intersección en el lugar de una marginal.	H_P1_P	Sitúa $P(M\cap \bar{I})$ en el lugar donde se situaría $P(M)$ si M fuera un suceso bien definido.
E7.3: Coloca intersección en el lugar de una condicional.	H_P1_P	Sitúa $P(\bar{I}\cap \overline{M})$ en el lugar donde se situarían $P(\overline{A}\mid M)$ y $P(\overline{A}\mid I)$ si M, I y A fueron sucesos bien definidos.

E8: Error en la construcción de la tabla.

Error	Resolución	Cantidad en la que se aprecia el error
Error en la componente x de una intersección calculada.	L_P1_P	$P(I\cap \overline{M})$

E9: Error relacionado con el formato de datos.

Error	Resolución
Utiliza el símbolo de porcentaje junto al número que se da como resultado, que no representa un porcentaje.	M_P1_P a)
	M_P1_P b)
	M_P2_F a)
	M_P9_F a)
	M_P9_F b)
	M_P10_F a)
	M_P10_F b)
	M_P17_F a)
	M_P17_F b)
	M_P18_F a)
	M_P18_F b)

ANEXO 27. Catálogo de errores.

ERRORES DE CANTIDAD

- **E1: Errores de interpretación.**
    - **E1.1**: Interpreta una marginal como si fuera una intersección.[1]
    - **E1.2**: Interpreta una intersección como si fuera una condicional.[1]
    - **E1.3**: Interpreta una intersección como si fuera otra intersección.
    - **E1.4**: Interpreta una intersección como si fuera una marginal.[1]
    - **E1.5**: Interpreta una intersección como si fuera otra cantidad, que no tiene sentido en el contexto del problema.[1]

- **E2: Uso de un mismo número para dos sucesos distintos, es decir, dos cantidades coinciden erróneamente en la componente x.**
    - **E2.1:** Marginal e intersección directamente relacionadas comparten componente x.[1]
    - **E2.2**: Dos marginales comparten componente x.[1]
    - **E2.3**: Condicional e intersección directamente relacionada comparten componente x.
    - **E2.4:** Dos condicionales y una intersección directamente relacionada con una de dichas condicionales comparten componente x por error.[2]
    - **E2.5:** Dos condicionales comparten componente x por error.[2]

- **E3: Uso de dos números diferentes para un mismo suceso, es decir, dos cantidades difieren en la componente x pero sus respectivas componentes n son equivalentes.**

- **E4: Discordancia entre las componentes x y n de una cantidad, por error de expresión.**
    - **E4.1**: Condicional descrita como intersección.
        - E4.1.1: En lenguaje verbal.
        - E4.1.2: En lenguaje matemático.[2]
    - **E4.2**: Marginal descrita como otra marginal.[1]

---

[1] Aparece exclusivamente en el pre-test.
[2] Aparece exclusivamente en el post-test.

- E4.3: Intersección descrita como marginal.[1]
- E4.4: Condicional descrita como condicional transpuesta.[1]
- E4.5: Intersección descrita como otra intersección.[1]
- E4.6: Condicional descrita como la marginal que representa el suceso condicionado.[1]
- E4.7: Intersección descrita como condicional directamente relacionada.
- E4.8: Condicional descrita como la marginal que representa el suceso condicionante.[1]
- **E4.9:** Condicional descrita como otra condicional distinta de la condicional transpuesta.[2]

- **E5: Dar como resultado una cantidad distinta de la condicional por la que se pregunta.**
  - **E5.1:** Da como resultado la intersección directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.
  - **E5.2:** Da como resultado la condicional transpuesta.[1]
  - **E5.3:** Da como resultado la marginal correspondiente al suceso condicionante, es decir, la marginal directamente relacionada con la condicional por la que se pregunta.[1]
  - **E5.4**: Da como resultado una cantidad sin otro sentido en el contexto del problema que el de su propia construcción.[1]
  - **E5.5**: Da como resultado la marginal correspondiente al suceso condicionante, es decir, la marginal directamente relacionada con la condicional transpuesta.[1]
  - **E5.6**: Da como resultado 100%.[1]
  - **E5.7**: Da como resultado una condicional que no es ni aquella por la que se pregunta ni su transpuesta.[2]

ERRORES DE RELACIÓN

- **E6: Uso de una relación falsa entre cantidades, que da lugar a una cantidad con error.**
  - **E6.1:** Error de relación en el uso de relaciones ternarias aditivas.
  - **E6.2:** Error en el uso de la regla de tres para el cálculo del porcentaje que se da como resultado.[1]
  - **E6.3:** Error de relación en el cálculo del resultado por medio de una relación ternaria multiplicativa.[2]

ERRORES RELACIONADOS CON EL USO DEL DIAGRAMA EN ÁRBOL[2]

- **E7: Error en el uso del diagrama en árbol.**
  - **E7.1:** Distribución de sucesos errónea.

- **E7.2:** Coloca intersección en el lugar de una condicional.
- **E7.3:** Coloca intersección en el lugar de una marginal.

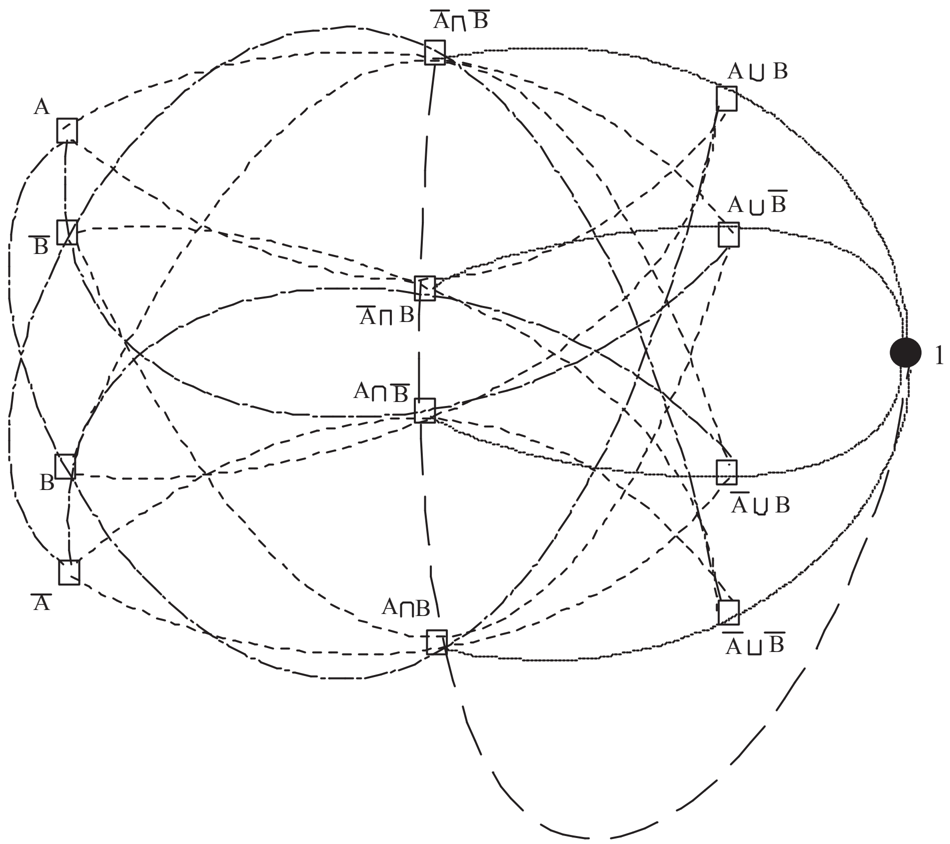
ERRORES RELACIONADOS CON EL USO DE LA TABLA[2]

- **E8: Error en la construcción de la tabla.**
  - **E8.1:** Error en la componente x de una intersección calculada.

ERRORES RELACIONADOS CON EL FORMATO DE DATOS[2]

- **E9: Utiliza el símbolo de porcentaje junto a un número que no representa un porcentaje.**

ANEXO 28. Grafo que incluye marginales, intersecciones y uniones de sucesos.



Grafo extraído de Arnau (2012)