TEORÍAS SUELTAS

DE

ARITMÉTICA, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

REDACTADAS

CON ARREGLO Á LOS PROGRAMAS DE ADMISION

EN LAS ACADEMIAS ESPECIALES

POR DON JOAQUIN GERMAN Y MORENO

Oficial que ha sido del cuerpo de Artillería.

ÁLGEBRA—FACTORELAS

MADRID
IMPRENTA DE AURELIO J. ALARIA
Estrella, 13, bajo
1879

TEORÍAS SUELTAS

DE

ARITMÉTICA, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

REDACTADAS

CON ARREGLO Á LOS PROGRAMAS DE ADMISION

EN LAS ACADEMIAS ESPECIALES

POR DON JOAQUIN GERMAN Y MORENO

Oficial que ha sido del cuerpo de Artillería.

ÁLGEBRA—FACTORELAS

MADRID
IMPRENTA DE AURELIO J. ALARIA
Estrella, 13, bajo
187[illegible]

ADVERTENCIA

Tiempo hace que, terminado este trabajo, hubiéramos podido publicarlo; pero la circunstancia de no exigirse esta teoría, á pesar de su importancia, en ninguno de los programas de admision á las carreras especiales, nos hizo dudar de la oportunidad de su publicacion. Hoy que ya forma parte del programa de ingreso en alguna de las carreras facultativas del Estado, nos apresuramos á dar la publicidad que merece una teoría tan importante, tan sencilla y, sin embargo, tan poco generalizado su estudio en nuestro país.

FACULTADES Y FACTORELAS

IDEAS GENERALES

1.—Cuando á la variable independiente de una funcion se la dan valores sucesivos que se diferencian en una cantidad constante ó variable, $\pm k$, el producto de un número cualquiera de los que resultan para dicha funcion recibe el nombre de *facultad*.

Supongamos que á la variable de la funcion $f(x)$ se la dan los valores sucesivos

$$x, \; x\pm k, \; x\pm 2k, \; x\pm 3k, \; x\pm 4k \ldots\ldots \; x\pm(n-1)k$$

el producto de los m factores

$$(1) \qquad f(x) \,.\, f(x\pm k) \,.\, f(x\pm 2k) \,.\, f(x\pm 3k) \ldots\ldots f\big(x\pm (n-1)\,k\big)$$

es una facultad del grado m.

Si el anterior producto convenimos en representarlo abreviadamente bajo la forma simbólica $f\,\big\{x \mid \pm k\big\}^m$, podremos establecer en virtud de este convenio la ecuacion

$$(a) \qquad f\,\big\{x \mid \pm k\big\}^m = f(x) \,.\, f(x\pm k) \,.\, f(x\pm 2k) \ldots\ldots f\big(x\pm (n-1)\,k\big)$$

y sustituir en lo sucesivo la forma abreviada del primer miembro, en lugar del valor desarrollado en el segundo.

En dicha expresion abreviada, la funcion $f(x)$ se llama *base*, $\pm k$ *incremento* y m exponente de la facultad que se lee *funcion de* x *incremento* $\pm k$ *elevada á* m.

Si se nos diera la funcion x^2-3x+1 como base de una facultad de incremento $+1$ y de exponente 3 tendriamos con arreglo á la fórmula (a)

$$\left\{(x^2 \mid 1)-3(x \mid 1)+1\right\}^3=\left(x^2-3x+1\right)\cdot\left((x+1)^2-3(x+1)+1\right)\cdot$$

$$\left((x+2)^2-3(x+2)+1\right)=x^6-3x^5-2x^4+9x^3-2x^2-3x+1$$

Si cn lugar de atribuir, como en el caso anterior, el incremento á la variable, lo atribuimos á dicha funcion, tendremos el producto de los factores

$$f(x).\left\{f(x)\pm k\right\}\cdot\left\{f(x)\pm 2k\right\}\ldots\ldots\left\{f(x)\pm(n-1)k\right\}(2)$$

Funcion esencialmente distinta de la (1), que se denomina *Factorela* y se representa simbólicamente bajo la forma $\left\{f(x) \mid \pm k\right\}^m$

Conviene fijarse bien en la diversa ley de generacion que preside á las funciones (1) y (2) para no confundirlas, ni pretender deducir en general la (2) de la (1), lo que solo puede conseguirse en casos muy particulares.

La funcion (1) necesita para su desenvolvimiento una base, funcion de una ó más variables. La funcion (2) se desenvuelve siempre, sea cualquiera la naturaleza de la base, ya sea esta una funcion $f(x)$, ya una cantidad variable x, ya una cantidad constante a que es el caso de aplicacion más general.

Desenvolviendo el ejemplo anterior con arreglo á la ley establecida en (2) será

$$\left\{(x^2-3x+1) \mid +1\right\}^3=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2-3x+3\right)$$

$$=x^6-9x^5+33x^4-63x^3+65x^2-33x+6$$

De las consideraciones anteriores se deducen las definiciones siguientes:

Facultad es el producto de un número cualquiera de los valores consecutivos que resultan para una funcion, cuando á su variable independiente se le dan incrementos sucesivos constantes ó variables.

Factorela es el producto de un número cualquiera de términos consecutivos de una progresion por diferencia, cuyo primer término puede ser una funcion cualquiera, una cantidad variable ó una cantidad constante, pero cuya razon es constante.

La notacion que adoptamos nos parece la más conveniente, pues carece de los inconvenientes de la notacion de Wronski $f(x)^{m \mid \pm k}$ en la cual no se expresa cuándo el incremento debe atribuirse á la variable para generar una facultad, ó cuándo á la funcion total para generar una factorela.

La notacion de Wandermonde tampoco nos parece propia, pues una factorela $(a, r)^{m}$ se confundirá siempre con la potencia de una cantidad decimal; así es que si $a=2$ $r=5$ $m=4$; $(2{,}5)^4$ no sabemos si representa la factorela $2.(2+5)(2+10)(2+15)$ ó la potencia $2{,}5\times 2{,}5\times 2{,}5\times 2{,}5$.

Dejando para más adelante el ocuparnos de las facultades, tomaremos ahora en consideracion por su mayor sencillez las

FACTORELAS

2.—Segun hemos indicado ya, la expresion general de una factorela queda establecida en la ecuacion

$$(\overline{c})\quad \{f(x) \mid \pm k\}^{m}=f(x).\left(f(x)\pm k\right)\cdot\left(f(x)\pm 2k\right)\ldots\ldots\left(f(x)\pm(m-1)k\right)$$

Si la funcion $f(x)$ se reduce á una sola cantidad variable x será

$$(b)\qquad \{x \mid \pm k\}^{m}=x.(x\pm k)\cdot(x\pm 2k)\ldots\ldots(x\pm(m-1)k)$$

y, por último, si $f(x)=a$ cantidad constante, tendremos

$$(c)\qquad \{a \mid \pm k\}^{m}=a(a\pm k)\cdot(a\pm 2k)\ldots\ldots(a\pm(m-1)k).$$

Si la base $f(x)=x^3-2x-5$; $m=4$: $k=-2$ tendremos

$$(\overline{b})\quad \{(x^3-2x-5) \mid -2\}^{4}=(x^3-2x-5)\cdot(x^3-2x-7)\cdot(x^3-2x-9)\cdot$$

$$(x^3-2x-11)=x^{12}-8x^{10}-32x^9+24x^8+192x^7+307x^6-384x^5-1480x^4$$

$$-1632x^3+1496x^2+3811x+3465$$

que con $x=0$ se convierta en

$$\{-5 \mid -2\}^{4}=(-5)\cdot(-7)\cdot(-9)\cdot(-11)=3465$$

con $x=1$ $\{-6 \mid -2\}^{4}=(-6)\cdot(-8)\cdot(-10)\cdot(-12)=5760$

y así sucesivamente

$$(1)\qquad \{x \mid 1\}^{3}=x(x+1)(x+2)=x^3+3x^2+2x$$

si fuera $x=a=2$. $m=3$. $k=1$

(2) $$\left\{2 \mid 1\right\}^3=2(2+1)(2+2)=24.$$

Las potencias, pues, son funciones que se derivan de las factorelas, haciendo en ellas el incremento $\pm h=0$.

3.—Invirtiendo el órden de factores en el desarrollo (*c*) su valor nó se altera, y tomando por base el factor $\left\{a\pm(m-1)\,k\right\}$, que resultará el primero, dicha factorela quedará expresada tambien en

$$\left\{a\pm(m-1)\,k \mid \mp k\right\}^m=\left\{a\pm(m-1)\,k\right\}\cdot\left\{a\pm(m-2)\,k\right\}\ldots\ldots\left\{a\pm k\right\}.a$$

siendo los segundos miembros iguales, los primeros lo serán tambien, luego

(d) $$\left\{a \mid \pm k\right\}^m=\left\{a\pm(m-1)\,k \mid \mp k\right\}^m$$

El desarrollo de la fórmula (*c*) vemos que se verifica bajo las mismas condiciones, sea cualquiera el signo del incremento, con tal que el exponente sea positivo. Veamos cuando dicho exponente se halle dotado de signo negativo cuál será el desarrollo de la factorela.

Para ello deduciremos la fórmula fundamental de la teoría de las factorelas, que se obtiene de la manera siguiente:

Sea la factorela $\left\{a \mid \pm k\right\}^h$ en la que suponemos el exponente $h=m+n$, y tendremos

(1) $$\left\{a \mid \pm k\right\}^{m+n}=a.\left\{a\pm k\right\}\cdot\left\{a\pm 2k\right\}\cdots\cdots\left\{a\pm(m-1)\,k\right\}\times\left\{a\pm mk\right\}\cdot$$

$$\left\{a\pm(m+1)\right\}\cdots\cdots\left\{a\pm(m+n-1)k\right\}=\left\{a \mid \pm k\right\}^m\times\left\{a\pm mK \mid \pm k\right\}^n$$

cuyo último valor se obtiene dando la forma de factorela á los *m* primeros factores y á los *n* restantes, separados de los primeros con el signo $\times$ que colocamos para distinguir los dos grupos de factores que nos conviene representar en forma abreviada.

Por el mismo desenvolvimiento anterior obtendriamos

(2) $$\left\{a \mid \pm k\right\}^{n+m}=\left\{a \mid \pm k\right\}^n\times\left\{a\pm nk \mid \pm k\right\}^m$$

y siendo iguales los primeros miembros de (1) y (2), lo serán los segundos, y por consiguiente

(e) $$\left\{a \mid \pm k\right\}^{m+n}=\left\{a \mid \pm k\right\}^m\times\left\{a\pm mk \mid \pm k\right\}^n=\left\{a \mid \pm k\right\}^n\times$$

$$\left\{a\pm nk \mid \pm k\right\}^m$$

Si en $\{a \mid \pm k\}^{h}$ hacemos $h=m-n$, tendremos tambien $m=h+n$; y si desenvolvemos por la fórmula anterior (e) la factorela $\{a \mid \pm k\}^{m}=\{a \mid \pm k\}^{h+n}=\{a \mid \pm k\}^{h}\times\{a\pm hk \mid \pm k\}^{n}$ y despejamos las factorelas propuestas, resultará, despues de poner por h y $h+n$ sus valores respectivos,

$$(f) \qquad \{a \mid \pm k\}^{m-n}=\frac{\{a \mid \pm k\}^{m}}{\{a\pm(m-n)k \mid \pm k\}^{n}}$$

Las fórmulas (e) y (f) se consideran como fundamentales en la teoría de las factorelas.

Si en (f) hacemos $m=n$, resultará

$$(3) \qquad \{a \mid \pm k\}^{0}=\frac{\{a \mid \pm k\}^{m}}{\{a \mid \pm k\}^{m}}=1$$

donde vemos que la factorela de exponente cero, tiene el mismo valor que la potencia de igual exponente.

Haciendo $n=o$ en (e) y (f), ambas se reducen á la identidad $\{a \mid \pm k\}^{m}=\{a \mid \pm k\}^{m}$ como debia suceder.

Si en la fórmula (f) hacemos $m=o$, obtendremos la

$$(g) \quad \{a \mid \pm k\}^{-n}=\frac{1}{\{a\mp nk \mid \pm k\}^{n}}=\frac{1}{(a\mp nk)(a\mp(n-1)k)\ldots\ldots(a\mp k)}$$

Descomponiendo el denominador de la fórmula (g) segun la expresion de la fórmula (d), tendremos

$$\{a\mp nk \mid \pm k\}^{n}=\{a\mp nk\pm(n-1)k \mid \mp k\}^{n}=\{a\mp k \mid \mp k\}^{n}$$

que sustituido en (g), dará

$$(h) \qquad \{a \mid \pm k\}^{-n}=\frac{1}{\{a\mp k \mid \mp k\}^{n}}$$

expresion idéntica á la que hubiéramos obtenido, invirtiendo el órden de los factores en el denominador del segundo valor consignado en la fórmula (g), poniéndolo despues bajo forma de factorela.

De las fórmulas (h) y (g) se deducen

$$(h')\qquad \{a \mid \pm k\}^{-n} \times \{a \mp k \mid \mp k\}^{n} = 1$$

$$(g')\qquad \{a \mid \pm k\}^{-n} \times \{a \mp nk \mid \pm k\}^{n} = 1$$

é identificando la (g') con el segundo miembro de la (e) y determinando su correspondiente primer miembro con arreglo á dicha fórmula, será

$$(g'')\qquad \{a \mid \pm k\}^{-n} \times \{a \mp nk \mid \pm k\}^{n} = \{a \mid \pm k\}^{-n+n}$$
$$= \{a \mid \pm k\}^{n-n} = \{a \mid \pm k\}^{n} \times \{a \pm nk \mid \pm k\}^{-n} = 1$$

De la igualdad última, se deduce

$$(j)\qquad \{a \mid \pm k\}^{n} = \frac{1}{\{a \pm nk \mid \pm k\}^{-n}}$$

que es la misma expresion que hubiéramos obtenido directamente de la (g) cambiando n en $-n$: luego dicha trasformacion es lícita en la (g); y como la (h) es idéntica á la (g) y sólo varía la forma del denominador en el segundo miembro, se deduce que tambien en la (h) podemos cambiar n en $-n$ y deducir la fórmula

$$(i)\qquad \{a \mid \pm k\}^{n} = \frac{1}{\{a \mp k \mid \mp k\}^{-n}}$$

Las fórmulas (g), (h), (i), (j), sirven para trasformar las factorelas de exponente negativo en otras de exponente positivo, y recíprocamente.

4.—Todas las fórmulas anteriores se deducen de la fundamental (e); vamos á demostrar que dicha fórmula comprende tambien el caso en que m y n tienen signo negativo.

Para demostrarlo directamente, sea $m+n=p$, y por consiguiente

$$\{a \mid \pm k\}^{-(m+n)} = \{a \mid \pm k\}^{-p}$$

pero por la fórmula (g)

$$\{a \mid \pm k\}^{-p} = \frac{1}{\{a \mp pk \mid \pm k\}^{p}}$$

en la que restableciendo por p su valor $m+n$, vendrá

$$(1)\qquad \{a \mid \pm k\}^{-(m+n)} = \frac{1}{\{a \mp (m+n)k \mid \pm k\}^{m+n}}$$

Trasformando el denominador de la expresion anterior, con arreglo á la fórmula (*e*) tendremos

$$(2)\qquad \{a \mid \pm k\}^{-(m+n)} = \frac{1}{\{a \mp (m+n)k \mid \pm k\}^{m} \times \{a \mp nk \mid \pm k\}^{n}}$$

$$= \frac{1}{\{a \mp (m+n)k \mid \pm k\}^{m}} \times \frac{1}{\{a \mp nk \mid \pm k\}^{n}}$$

Trasformando los dos últimos factores fraccionarios con arreglo á la fórmula (*g*) tendremos

$$(3)\qquad \{a \mid \pm k\}^{-(m+n)} = \{a \mp nk \mid \pm k\}^{-m} \times \{a \mid \pm k\}^{-n}$$

que es la misma expresion que nos hubiera resultado cambiando los signos de *m* y *n* en la fórmula (*e*).

Por el mismo procedimiento anterior hallaríamos tambien

$$\{a \mid \pm k\}^{-(n+m)} = \{a \mp mk \mid \pm k\}^{-n} \times \{a \mid \pm k\}^{-m}$$

Por consiguiente

$$(K)\qquad \{a \mid \pm k\}^{-(m+n)} = \{a \mp nk \mid \pm k\}^{-m} \times (a \mid \pm k\}^{-n}$$

$$= \{a \mp mk \mid \pm k\}^{-n} \times \{a \mid \pm k\}^{-m}$$

que es la misma fórmula (*e*) cambiando los signos de *m* y *n*.

5.—Desarrollando las factorelas segun la definicion de ellas, ó valiéndonos de las fórmulas que anteceden, obtendriamos los resultados numéricos siguientes:

1.° $\{2 \mid 1\}^{3} = 24;$

2.° $\{2 \mid 1\}^{5} = \{2 \mid 1\}^{3+2} = \{2 \mid 1\}^{3} . \{2+3 \times 1 \mid 1\}^{2} = 24 \times 30;$

Por la fórmula (e).

3.° $\{2 \mid -1\}^{3} = 0;$

4.° $\{3 \mid 1\}^{-2} = \dfrac{1}{\{3-2 \mid 1\}^{2}} = \dfrac{1}{\{3-1 \mid -1\}^{2}} = \dfrac{1}{2}$

Segun las fórmulas (g) y (h).

5.° $\{3 \mid -1\}^{-2} = \dfrac{1}{\{3+1 \mid 1\}^{2}} = \dfrac{1}{\{3+-2\times-1 \mid -1\}^{2}} = \dfrac{1}{20}$ Por las fórmulas (h) y (g).

6.° $$\{3 \mid 1\}^{2} = 12;$$

7.° $$\{3 \mid -1\}^{2} = 6$$

8.° $\{5 \mid +4\}^{-2} = \dfrac{1}{\{5+4\times-2 \mid 4\}^{2}} = \dfrac{1}{\{5-4 \mid -4\}^{2}} = \dfrac{1}{-3}$

9.° $\{5 \mid -4\}^{-2} = \dfrac{1}{\{5+-4\times-2 \mid -4\}^{2}} = \dfrac{1}{\{5+4 \mid 4\}^{2}} = \dfrac{1}{117}$

10.° $\{-5 \mid -4\}^{-2} = \dfrac{1}{\{-5+-4\times-2 \mid -4\}^{2}} = \dfrac{1}{\{-5+4 \mid 4\}^{2}} = \dfrac{1}{-3}$

11.° $\{12 \mid 4\}^{-5} = \dfrac{1}{\{12+4\times-5 \mid 4\}^{5}} = \dfrac{1}{\{12-4 \mid -4\}^{5}} = \dfrac{1}{0} = \infty$

Fórmulas (g) y (h).

El caso 3.° de los ejemplos anteriores, nos hace observar que siempre que la base sea un múltiplo del incremento y dividida por él sea menor que el exponente, la factorela es nula.

Efectivamente sea

$$\{ak \mid -k\}^{m} = ak(ak-k)(ak-2k)\ldots\ldots(ak-(m-)1k)$$

$$= k^{m}[a(a-1)(a-2)\ldots\ldots\{a-(m-1)\}] = k^{m}\{a \mid -1\}^{m}$$

Expresion que nos dice que siendo $m>a$ necesariamente uno de los factores del producto anterior será cero, y por consiguiente dicho producto lo será tambien.

Pero no es sólo cero la factorela en el caso en que el incremento es negativo, sino que lo será tambien aunque sea positivo el incremento siendo la base un múltiplo de éste y negativa.

Luego una factorela es cero cuando su base es un múltiplo del incremento y tienen signo contrario, con tal que $m>a$ y la forma general de estas factorelas es

(L) $$\{\pm ak \mid \mp k\}^{m} = 0$$

Tambien se verifican las igualdades siguientes:

$$(L_1) \qquad \{\pm ak \mid \pm k\}^m = k^m \{\pm a \mid \pm 1\}^m;$$

$$(L_2) \qquad \{\pm a \mid \pm ak\}^m = \pm a \{\pm 1 \mid \pm k\}^m$$

El cociente $\dfrac{\{a \mid k\}^m}{\{a \mid k\}^n}$ dependerá de la relacion entre los valores de m y n, así cuando $m > n$ tal que $m = n + h$ será

$$(1) \qquad \frac{\{a \mid \pm k\}^m}{\{a \mid \pm k\}^n} = \frac{\{a \mid \pm k\}^{n+h}}{\{a \mid \pm k\}^n}$$

y por la fórmula $(e) = \dfrac{\{a \mid \pm k\}^n . \{a \pm nk \mid \pm k\}^h}{\{a \mid \pm k\}^n} = \{a + nk \mid \pm k\}^h$

$$= \{a \pm nk \mid \pm k\}^{m-n}$$

Cuando $m < n$ tal como $m + h = n$, tendremos

$$(2) \quad \frac{\{a \mid \pm k\}^m}{\{a \mid \pm k\}^{m+h}} = \frac{\{a \mid \pm k\}^m}{\{a \mid \pm k\}^m . \{a \pm mk \mid \pm k\}^h} = \frac{1}{\{a \pm mk \mid \pm k\}^{n-m}}$$

$=$fórmula(j) $\{a \mid \pm k\}^{-h}$

Si en las expresiones anterires (1) y (2) suponemos $h = 0$, quedará la relacion

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

que nos hace ver, como ya digimos anteriormente, que las potencias son un caso particular de las factorelas en que el incremento es cero.

Pero la propiedad más notable de las factorelas y que pone más de relieve su semejanza con las potencias, es el teorema que vamos á demostrar, conocido bajo la denominacion de *Binomio de las factorelas*, que tiene respecto de éstas, la misma significacion que el binomio de Newton, respecto de las potencias.

6.—Teorema.—*El desarrollo de la factorela de base binomia*

$$\{a+b \mid k\}^{m}$$

se efectúa por factorelas decrecentes del primer término y crecentes del segundo, siendo los coeficientes los del desarrollo de la potencia, ó lo que es igual

(1)

$$\{a+b|k\}^{m}=\{a|k\}^{m}+m\{a|k\}^{m-1}\{b|k\}^{1}+\frac{m(m-1)}{2}\cdot\{a|k\}^{m-2}\{b|k\}^{2}$$

$$+\ldots\ldots\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(n-1))}{1.2.3\ldots\ldots n}\cdot\{a \mid k\}^{m-n}\{b \mid k\}^{n}$$

$$\ldots\ldots=\{a \mid k\}^{m}+\frac{\{m \mid -1\}^{1}}{\{1 \mid 1\}^{1}}\{a \mid k\}^{m-1}\{b \mid k\}^{1}$$

$$+\frac{\{m \mid -1\}^{2}}{\{1 \mid 1\}^{2}}\cdot\{a \mid k\}^{m-2}\{b \mid k\}^{2}\ldots\ldots\frac{\{m \mid -1\}^{n}}{\{1 \mid 1\}^{n}}\{a|k\}^{m-n}\{b|k\}^{n}$$

$$+\ldots\ldots\{b \mid k\}^{m}$$

Cuyo desarrollo se expresa de un modo más general y sencillo en el segundo miembro de la igualdad

$$\text{(m)}\qquad \{a+b \mid k\}^{m}=\sum_{n=0}^{n=m}\frac{\{m \mid -1\}^{n}}{\{1 \mid 1\}^{n}}\cdot\{a \mid k\}^{m-n}\{b \mid k\}^{n}$$

En una palabra; el desarrollo de la factorela de un binomio, es el mismo que el de la potencia, sustituyendo las potencias de los dos términos, por sus respectivas factorelas.

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\{a+b\mid k\}^{1}=\{a\mid k\}^{1}+\{b\mid k\}^{1}\\
&\{a+b\mid k\}^{2}=(a+b)\,(a+b+k)=a(a+k)+ab+ba+b(b+k)=\\
&\qquad\qquad \{a\mid k\}^{2}+2\{a\mid k\}^{1}\cdot\{b\mid k\}^{1}+\{b\mid k\}^{2}\\
&\{a+b\mid k\}^{3}=\{a+b\mid k\}^{2+1}=\{a+b\mid k\}^{2}\cdot\{a+b+2k\mid k\}^{1}=\\
&[\{a|k\}^{2}+2\{a\mid k\}^{1}.\{b\mid k\}^{1}+\{b\mid k\}^{1}+\{b\mid k\}^{2}]\times[a+b+2k]=\\
&\left.\begin{aligned}&=\{a\mid k\}^{2}(a+2k)+2\{a\mid k\}^{1}\cdot\{b\mid k\}^{1}\cdot(a+k)+\{b\mid k\}^{2}\cdot a\\
&+\{a|k\}^{2}.\{b|k\}^{1}+2\{a|k\}^{1}.\{b\mid k\}^{1}.(b+k)+\{b\mid k\}^{2}.(b+2k)\end{aligned}\right\}=\\
&=\{a\mid k\}^{3}+3\{a\mid k\}^{2}\{b\mid k\}^{1}+3\{a\mid k\}^{1}\cdot\{b\mid k\}^{2}+\{b\mid k\}^{3}
\end{aligned}\right.$$

En los tres casos anteriores se verifica la ley enunciada, para demostrar su generalidad; bastará provar que si la ley es cierta para el desembolvimiento de la factorela de grado m, lo será tambien para las de grado $m+1$; para ello observaremos que por la definicion de factorelas ó por la fórmula *(e)* haciendo $n=1$ se verifica la igualdad

$$\{a+b\mid k\}^{m+1}=\{a+b\mid k\}^{m}\cdot\{a+b+mk\}\ \ldots\ldots (4)$$

el factor $\qquad a+b+mk=\big(a+(m-n)k\big)+\big(b+nk\big)\ \ldots\ldots (5)$

igualdad siempre cierta sea cualquiera el valor que demos á n, sustituyendo en el segundo miembro de la (4) el de la (5) será

$$\{a+b\mid k\}^{m+1}=\{a+b\mid k\}^{m}\,\big\{\big(a+(m-n)k\big)+(b+nk)\big\}$$

Sustituyendo en la espresion anterior por el primer factor del segundo miembro el de la igualdad (m) tendremos

$$\{a+b|k\}^{m+1}=\sum_{n=0}^{n=m}\frac{\{m|-1\}^{n}}{\{1|1\}^{n}}\cdot\{a|k\}^{m-n}\cdot\{b|k\}^{n}\big\{\big(a+(m-n)k\big)+(b+nk)\big\}$$

$$=\sum_{n=0}^{n=m}\frac{\{m|-1\}^{n}}{\{1\mid 1\}^{n}}\Big\{\{a|k\}^{m-n}\cdot\{b|k\}^{n}\big(a+(m-n)k\big)+\{a|k\}^{m-n}\cdot\{b|k\}^{n}(b+nk)\Big\}$$

Pero sabemos que

$$\{a\,|\,k\}^{m-n}(a+(m-n)k)=\{a|k\}^{m+1-n} \text{ y } \{b|k\}^{n}(b+nk)=\{b|k\}^{n+1}$$

Luego

$$\{a+b|k\}^{m+1}=\sum_{n=0}^{n=m}\frac{\{m|1\}^n}{\{1|1\}^n}\left\{\{a|k\}^{m+1-n}\{b|k\}^n+\{a|k\}^{m-n}\{b|k\}^{n+1}\right\} \quad (6)$$

Dando en el segundo miembro de esta igualdad *a n* todos los valores sucesivos desde $n=o$ hasta $n=m$, sumando los coeficientes de los términos semejantes, y recordando que

$$\frac{\{m|-1\}^n}{\{1\,|\,1\}^n}+\frac{\{m|-1\}^{n+1}}{\{1\,|\,1\}^{n+1}}=\frac{\{m|-1\}^n}{\{1\,|\,1\}^n}+\frac{\{m-|1\}^n(m-n)}{\{1\,|\,1\}^n(n+1)}=$$

$$\frac{\{m|-1\}^n(n+1)+\{m|-1\}^n(m-n)}{\{1\,|\,1\}^{n+1}}=\frac{\{m|-1\}^n\{m+1\}}{\{1\,|\,1\}^{n+1}}=\frac{\{m+1|-1\}^{n+1}}{\{1\,|\,1\}^{n+1}} \quad (7)$$

se obtendrá el desenvolvimiento

$$\{a+b\,|\,k\}^{m+1}=\{a\,|\,k\}^{m+1}+\frac{m+1}{1}\{a\,|\,k\}^{m}\{b\,|\,k\}^{1}+$$

$$\frac{(m+1)m}{1\,.\,2}\{a\,|\,k\}^{m-1}\{b\,|\,k\}^{2}+\dots\dots$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)\dots((m+1-(n-1))}{1\,.\,2\,.\,3\dots\dots\dots\dots(n+1)}\{a\,|\,k\}^{m+1-n}\{b\,|\,k\}^{n}+\dots\dots$$

$$\{b\,|\,k\}^{m+1}. \quad (8)$$

ó lo que es igual

$$(m') \qquad \{a+b\,|\,k\}^{m+1}=\sum_{n=0}^{n=m+1}\frac{\{m+1\,|-1\}^n}{\{1\,|\,1\}^n}\{a\,|\,k\}^{m+1-n}\{b\,|\,k\}^{n}$$

Luego si el desenvolvimiento para la factorela de grado (m) sigue la ley indicada, esta ley se verificará tambien para la factorela de grado m+1.

Pero hemos visto en las ecuaciones (3) que esta ley se verifica para las factorelas de primero, segundo y tercer grado; luego se verificará para la de cuarto, y verificándose para la de cuarto grado, se verificará para la de quinto, y así sucesivamente. Luego la ley es general.

Como se vé, la fórmula (m') es la misma fórmula (m) sustituyendo en ésta $m+1$ en lugar de m.

7.—Las fórmulas establecidas anteriormente tienen por objeto dar á conocer las diferentes formas y valores que pueden afectar las factorelas y las trasformaciones de que son susceptibles, cuando el exponente es entero. Pero como más adelante hemos de tomar en consideracion el caso en que dicho exponente sea fraccionario, nos conviene desarrollar la factorela $\{a \mid k\}^m$ en série funcion del incremento, pues en ella los coeficientes serán funcion del exponente.

Desarrollando la factorela $\{a \mid k\}^m$ y efectuando el producto de sus factores binomios resultará:

$$\{a \mid k\}^m = a\{a+k\}\cdot\{a+2k\}\dots\{a+(m-1)k\} = a^m + \left.\begin{array}{r}1\\2\\ \vdots\\ m-1\end{array}\right| a^{m-1}k +$$

$$\left.\begin{array}{r}1.2+1.3+1.4\dots+1(m-1)\\ +2.3+2.4\dots+2(m-1)\\ 3.4\dots+3(m-1)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\\ (m-2)\,(m-1)\end{array}\right| a^{m-2}k^2 + \left.\begin{array}{r}1.2.3+1.2.4+\dots1.2(m-1)\\ 2.3.4\dots2.3(m-1)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\\ (m-3)\,(m-2)\,(m-1)\end{array}\right| a^{m-3}k^3 +$$

$$+\dots+1.2.3\dots(m-1)ak^{m-1} = a^m + S_1a^{m-1}k + S_2a^{m-2}k^2 + S_3a^{m-3}k_3$$

$$+\dots S_{m-1}ak^{m-1}$$

y sacando el factor a^m será

$$\{a \mid k\}^m = a^m\left\{1 + S_1\frac{k}{a} + S_2\frac{k^2}{a^2} + S_3\frac{k^3}{a^3} + \dots S_{m-1}\frac{k^{m-1}}{a^{m-1}}\dots\right\}\dots(n)$$

En cuya expresion la suma de los $m-1$ números naturales se representa por S_1 y por $S_2\ S_3\dots S_{m-1}$ sus combinaciones de dos en dos, de tres en tres, etc., de cuyos coeficientes nos interesa determinar el valor general, pues siendo funciones del exponente, sea cualquiera la naturaleza de éste, bastará introducir su valor en el de $S_1\ S_2\dots$para obtener el desarrollo de la factorela.

Veamos cómo determinar la forma y el valor de dichos coeficientes.

Haciendo $n=1$ en la fórmula (e) resultará:

$$(1) \qquad \{a \mid k\}^{m+1} = \{a \mid k\}^{m}(a+mk) = a\{a+k \mid k\}^{m}$$

Sustituyendo en la expresion anterior por $\{a \mid k\}^m$ su valor deducido de la fórmula (n), y efectuando el producto por $a+mk$, tendremos:

$$(2) \quad \{a|k\}^{m+1} = a^{m+1} + S_1 a^m k + S_2 a^{m-1} k^2 + \dots S_{n+1} a^{m-n} k^{n+1} \dots S_{m-1} a^2 k^{m-1}$$

$$+ m a^m k + m S_1 a^{m-1} k^2 + \dots m S_n a^{m-n} k^{n+1} + \dots m S_{m-2} a^2 k^{m-1} + m S_{m-1} a k^m$$

Si en la fórmula (n) hacemos $a=a+k$ y multiplicamos ambos miembros por a resultará

$$(3) \quad a\{a+k \mid k\}^m = a(a+k)^m + S_1.a.k.(a+k)^{m-1} + S_2.a.k^2(a+k)^{m-2} \dots \dots S_{m-1}\, a k^{m-1}(a+k)$$

cuyos términos desenvueltos por la fórmula del binomio, y sumados ordenadamente, darán

$$(4) \quad a\{a+k|k\}^m = a^{m+1} + \left.\begin{array}{r} m \\ S_1 \end{array}\right| a^m.k + \left.\begin{array}{r} \frac{m(m-1)}{2} \\ (m-1).S_1 \\ S_2 \end{array}\right| a^{m-1}.k^2 + \left.\begin{array}{r} \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4} \\ \frac{m(m-4)}{2.3} S_1 \\ (m-2).S_2 \\ S_3 \end{array}\right| a^{m-2} k^3$$

$$+ \left.\begin{array}{r} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} \\ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}.S_1 \\ \frac{(m-2)(m-3)}{2}.S_2 \\ (m-3).S_3 \\ S_4 \end{array}\right| a^{m-3} k_4 + \dots\dots$$

Pero segun la igualdad

$$(1) \qquad \{a \mid k\}^{m+1} = a\{a+k \mid k\}^m,$$

luego los desarrollos de estos valores expresados en los segundos miembros de las igualdades (2) y (4) serán tambien iguales, é iguales por consiguiente los coeficientes de las potencias del mismo grado. Luego

$$m+S_1=m+S_1$$

$$m.S_1+S_2=\frac{m(m-1)}{2}+(m-1).S_1+S_2$$

$$m.S_2+S_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\,3}+\frac{(m-1)(m-2).}{2}S_1+(m-2).S_2+S_3$$

$$mS_3+S_4=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3.\,3.\,4}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3).}{2.\,3}S_1+\frac{(m-2)(m-3).}{2}S_2$$
$$+(m-3)S_3+S_4$$

....

....

La primera de estas igualdades es una identidad, y no puede por consiguiente deducirse de ella valor alguno, pero desde la segunda en adelante se deducen los siguientes:

$$S_1=\frac{m(m-1)}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\,3}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}S_1\right) \qquad (O)$$

$$S_3=\frac{1}{3}\left(\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\,3.\,4}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3).}{2.\,3}S_1+\frac{(m-2)(m-3).}{2}S_2\right)$$

$$S_4=\frac{1}{4}\left(\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.\,3.\,4.\,5}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4).}{2.\,3.\,4}S_1\right.$$
$$\left.+\frac{(m-2)(m=3)(m-4).}{2.\,3.}S_2+\frac{(m-3)(m-4)}{2}S_3+S_4\right)$$

....

....

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.\,2.\,3\ldots n+1}+\frac{(m-1)\ldots(m-n).}{1.\,2\ldots n}S_1+\frac{(m-2)\ldots(m-n)}{1.\,2\ldots n-1}S_2\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots+\frac{(m-n+1)(m-n).}{1.\,2}S_{n-1}\right)$$

Dando á m valores sucesivos y sustituyendo unos en otros, obtendremos los siguientes:

Valores de m

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
1									
2	1								
3	3	2							
4	6	11	6						
5	10	35	50	24					
6	15	85	225	274	120				
7	21	175	735	1624	1764	720			
8	28	322	1960	6769	13132	13068	5040		
9	36	546	4536	22449	67284	118124	109584	40320	
10	45	870	9450	62273	723680	723680	1172700	986256	362880

(O′)

Como aplicacion de las fórmulas y valores que acabamos de obtener; sean

$$\{a \mid k\}^3 = a^3 + S_1 a^2 k + S_2 a k^2$$

segun la fórmula (n); sustituyendo por S_1 y S_2 sus valores, que hallaremos en el cuadro anterior (O′) para el caso de $m=3$, será

$$\{a \mid k\}^3 = a^3 + 3a^2k + 2ak^2$$

y si hacemos

$$a=9;\ k=2 \ \{9 \mid 2\}^3 = 9^3 + 3.9^2.2 + 2.9.2^2 = 1287.$$

la factorela $\{a \mid k\}^7 = a^7 + S_1.a^6.k + S_2a^5.k^2 + S_3.a^4.k^3 + S_4.a^3.k^4 + S_5.a^2.k^5 + S_6a.k^6 = a^7 + 21a^6k + 175a^5k^2 + 735a^4k^3 + 1624a^3k^4 + 1764a^2k^5 + 720ak^6$. con $a=2$ y $k=1$ tendriamos $\{2 \mid 1\}^7 = 40320$. En el caso de $a=1$, $k=1$, la factorela se reduce á la suma de los coeficientes más la unidad, así pues

$$\{1 \mid 1\}^7 = 1 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 5040.$$

8.—Determinado ya el desarrollo de la factorela $\{a \mid k\}^m$ y el valor de sus coeficientes en funcion del exponente m, vamos á probar que dicho desarrollo conserva la misma forma en el caso de m negativo; ó lo que es igual, que el valor de la factorela de exponente negativo se obtiene cambiando m en $-m$ en la fórmula (n).

Para ello la fórmula (4) nos dá

$$\{a \mid k\}^{-m} = \frac{1}{\{a-k \mid -k\}^{m}} = \frac{1}{(a-k)\,(a-2k)\ldots\ldots(a-mk)} \quad (1)$$

Si efectuamos el producto indicado en el denominador, veremos que el primer término del cociente es a^{-m} y que en todos los demás disminuyen sucesivamente los exponentes de a y aumentan los de k. Para obtener el cociente seria necesario determinar los coeficientes, que resultarian tambien efectuando la division indicada; pero será más sencilla su determinacion si, suponiéndolos indeterminados, empleamos el procedimiento siguiente: sea

$$\{a \mid k\}^{-m} = a^{-m} + Aa^{-m-1}k + Ba^{-m-2}k^{2} + Ca^{-m-3}k^{3} \ldots\ldots \quad (2)$$

Si en la fórmula (e) hacemos $m=-m$ y $n=1$, resultará

$$(3) \qquad \{a \mid k\}^{-m+1} = \{a \mid k\}^{-m}(a-mk) = a\{a+k \mid k\}^{-m}$$

Multiplicando ambos miembros de la (2) por $a-mk$, tendremos

$$(4)\ \{a|k\}^{-m}(a-mk) = (a-mk)\{a^{-m} + Aa^{-m-1}k + Ba^{-m-2}k^{2} + Ca^{-m-3}k^{3} + \ldots\}$$

Multiplicando tambien la ecuacion (2) por a despues de hacer en ambos miembros $a=a+k$, será

$$(5) \qquad a\{a+k \mid k\}^{-m} = a\{(a+k)^{-m}A(a+k)^{-m-1}k + B(a+k)^{-m-2}k^{2}$$
$$+ C(a+k)^{-m-3}k^{3} + \ldots\ldots\}$$

Los dos primeros miembros de las (4) y (5) son iguales segun la (3), luego los segundos miembros tambien serán iguales, luego

$$(6) \qquad (a+mk)\,(a^{-m} + Aka^{-m-1} + Bk^{2}a^{-m-2} + Ck^{3}a^{-m-3} + \ldots\ldots)$$

$$= a\{(a+k)^{-m} + Ak(a+k)^{-m-1} + Bk^{2}(a+k)^{-m-2} + Ck^{3}(a+k)^{-m-3} + \ldots\ldots\}$$

Efectuando los productos indicados, desarrollando las potencias de los binomios del segundo miembro, é igualando los coeficientes de las potencias del mismo grado, resultarán las igualdades siguientes.

$$A-m=A-m$$

$$B-Am=\frac{m(m+1)}{2}-A(m+1)+B$$

$$C-Bm=A\frac{(m+1)(m+2)}{2}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}-B(m+2)+C$$

$$D-Cm=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3.4}-A\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3}+$$

$$B\frac{(m+2)(m+3)}{2}-C(m+3)+D$$

La primera es una identidad, la segunda igualdad nos dá el valor de A, la tercera el de B y así sucesivamente. Estos valores son los mismos que resultarán de las ecuaciones *(O)*, cambiando en ellas m en $-m$.

El desenvolvimiento, pues, de la factorela $\{a \mid k\}^m$ expresado en la série (n), es aplicable al caso en que m es positivo ó negativo. Pero debemos hacer observar, que si bien en el caso de m positivo, la fórmula (n) determina exactamente el valor de la factorela, en el caso de m negativo y entero, el segundo miembro es una série indefinida qne puede ser ó no convergente, y que no precisa bien el valor de la factorela; en este caso, la fórmula (h) determina con precision y exactitud este valor. Efectivamente; sea $a=9$ $m=-3$ $k=2$ y si aplicamos la série (n) calculando antes los coeficientes, será:

$$\{9 \mid 2\}^{-3}=\frac{1}{729}+\frac{12}{6561}+\frac{100}{59019}+\ldots$$

mientras que, aplicando la fórmula (h), será

$$\{9 \mid 2\}^{-3}=\frac{1}{\{9-2 \mid -2\}^{3}}=\frac{1}{\{7 \mid -2\}^{3}}=\frac{1}{105}$$

Cuando el exponente es fraccionario, ya sea positivo ó negativo, la fórmula (n) es la que únicamente puede darnos el valor aproximado de la factorela.

Sea $m=\frac{1}{10}$ y tendremos

$$\{a|k\}^{\frac{1}{10}}=a^{\frac{1}{10}}\left\{1-\frac{9}{200}\cdot\frac{k}{a}-\frac{133}{40000}\cdot\frac{k^2}{a^2}+\frac{21000000}{58957}\cdot\frac{k^3}{a^3}\cdots\cdots\right\}$$

Série que será tanto más convergente cuanto mayor sea la diferencia $a-k$.

Determinamos los valores de S_1 S_2... sustituyendo en las fórmulas (O) el valor $m=\frac{1}{10}$

Si fuera $m=\frac{1}{2}$; $\{a|k\}^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{k}{a}+\frac{1}{128}\cdot\frac{k^2}{a^2}+\frac{5}{1024}\cdot\frac{k^3}{a^3}\cdot\cdots\cdots\right\}$

Comparando esta série con la anterior, vemos comprobado lo que puede deducirse de la forma del segundo miembro de la (n), y es que con valores iguales de a y de k, la série es tanto más convergente, cuanto menor es el valor fraccionario del exponente m.

10.—La série del segundo miembro de la (n) cuando m es fraccionario, puede trasformarse en otra más convergente. Efectivamente, por la fórmula (e)

$$\{a|k\}^m \cdot \{a+mk|k\}^n=\{a|k\}^n \cdot \{a+nk|k\}^m$$

de donde $\{a|k\}^m=\frac{\{a|k\}^n}{\{a+mk|k\}^n}\cdot\{a+nk|k\}^m$

desenvolviendo por la fórmula (n) el segundo factor del segundo miembro, será:

$$\{a|k\}^m=\frac{\{a|k\}^n \cdot \{a+nk\}^m}{\{a+mk|k\}^n}\left\{1+S_1\frac{k}{a+nk}+S_2\frac{k^2}{(a+nk)^2}+\cdots\right\} \quad (9.)$$

Série que podemos hacer tan convergente como queramos, mediante el valor de la indeterminada n.

Si en las dos aplicaciones del párrafo anterior suponemos $a=1$ $k=1$, y las desarrollamos por la fórmula (9.), será:

$$\{1|1\}^{\frac{1}{10}} = \frac{\{1|1\}^{n}\cdot\{1+n\}^{\frac{1}{10}}}{\{1+\frac{1}{10}|1\}^{n}}\Big\{1-\frac{9}{200}\cdot\frac{1}{1+n}-\frac{133}{40000}\cdot\frac{1}{(1+n)^{2}}$$

$$+\frac{58957}{24000000}\cdot\frac{k^{3}}{a^{3}}+\frac{1}{(1+n)^{3}}+\ldots\Big\} \quad (1)$$

$$\{1|1\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\{1|1\}^{n}\cdot\{1+n\}^{\frac{1}{2}}}{\{1+\frac{1}{2}|1\}^{n}}\Big\{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+n}+\frac{1}{128}\cdot\frac{1}{(1+n)^{2}}$$

$$+\frac{5}{1024}\cdot\frac{1}{(1+n)^{3}}+\ldots\Big\} \quad (2)$$

Para determinar el valor de n, procuraremos, siempre que sea posible, darle un valor entero tal, que haga entero tambien el factor $(a+nk)^m$ *en las factorelas* (1) y (2); bastará hacer $(1+n)^{\frac{1}{10}}=2$ $=3=4\ldots.$ en la primera, y $(1+n)^{\frac{1}{2}}=2=3=4=\ldots.$ en la segunda, segun el mayor ó menor grado de convergencia que se quiera dar á la serie, y si hacemos $(1+n)^{\frac{1}{10}}=3$; $n=3^{10}-1=59048$; tambien haciendo $(1+n)^{\frac{1}{2}}=3$, será $n=8$; valores que sustituidos en las (1) y (2), nos darian el valor numérico aproximado de sus respectivas factorelas.

11.—Cuando k sea negativo y m fraccionario, el factor $(a+nk)^m$ en el segundo miembro de la fórmula (q), será imaginario, si se verifica que $a<nk$, y $m=\frac{1}{2.h.}$ en que el denominador del valor fraccionario de m es un número par.

Tambien en el caso de a negativo será imaginario dicho factor, si k es negativo ó si el valor absoluto de $a>nk$, aun cuando sea K positivo, contando siempre con la condicion de $m=\frac{1}{2.h.}$

Cuando el carácter imaginario del factor $(a+nk)^m$ proviene de ser k negativo, se puede hacer desaparecer dicho carácter con solo dar á n un valor negativo.

La forma que en este caso tomará la (q) será, haciendo $k=-k$ y $n=-n$

$$\{a \mid -k\}^m = \frac{\{a \mid -k\}^{-n}(a+nk)^m}{\{a-mk \mid -k\}^{-n}} \left\{1 + S_1 \frac{-k}{a+nk} + S_2 \frac{k^2}{(a+nk)^2} + S_3 \frac{-k^3}{(a+nk)^3} \ldots + S_p \frac{(-k)^p}{(a+nk)^p} \ldots\ldots \right\}$$

Pero segun la fórmula (h)

$$\{a \mid -k\}^{-n} = \frac{1}{\{a+k \mid k\}^n} \text{ y } \{a-mk \mid -k\}^{-n} = \frac{1}{\{a-(m-1)k \mid k\}^n}$$

cuyos valores sustituidos en la fórmula anterior darán:

$$\{a \mid -k\}^m = \frac{\{a-(m-1)k \mid k\}^n (a+nk)^m}{\{a+k \mid k\}^n} \left\{1 - S_1 \frac{k}{a+nk} + S_2 \frac{k^2}{(a+nk)^2} - S_3 \frac{k^3}{(a+nk)^3} \ldots\ldots \right\} \ldots (r)$$

En cuya fórmula sólo debemos sustituir el valor absoluto de n y k por haberse tomado ya en consideracion el signo negativo de ambos valores.

Sean las dos factorelas $\{1 \mid -1\}^{\frac{1}{10}}$ y $\{1 \mid -1\}^{\frac{1}{2}}$ y sustituyendo en la fórmula (r) tendremos:

$$\{1 \mid -1\}^{\frac{1}{10}} = \frac{\{1-(\frac{1}{10}-1) \mid 1\}^n (1+n)^{\frac{1}{10}}}{\{2 \mid 1\}^n} \left\{1 - \frac{9}{200} \cdot \frac{1}{1+n} + \frac{133}{40000} \cdot \frac{1}{(1+n)^2} - \frac{58957}{24000000} \cdot \frac{1}{(1+n)^3} \ldots\ldots \right\}$$

$$\{1\,|\,-1\}^{\frac{1}{2}}=\frac{\{1-(\frac{1}{2}-1)\,|\,1\}^{n}\,(1+n)^{\frac{1}{2}}}{\{2\,|\,1\}^{n}}\left\{1-\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+n}+\frac{1}{128}\,\frac{1}{(1+n)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{5}{1024}\cdot\frac{1}{(1+n)^3}+\ldots\ldots\right\}$$

Determinemos n y hagamos $(1+n)^{\frac{1}{10}}=2$ de donde $n=2^{10}-1=1023$. para la primera, y $(1+n)^{\frac{1}{2}}=3:n=8$. para la segunda, y sustituyendo, será

$$(1)\ldots\ldots\{1\,|\,-1\}^{\frac{1}{10}}=\frac{\{\frac{19}{10}\,|\,1\}^{1023}\,(1024)^{\frac{1}{10}}}{\{2\,|\,1\}^{1023}}\left\{1-\frac{9}{200\times1024}\right.$$

$$\left.+\frac{133}{40000\times(1024)^2}-\frac{58957}{24.10^6.(1024)^3}+\ldots\ldots\right\}$$

$$(2)\ldots\{1\,|\,-1\}^{\frac{1}{2}}=\frac{\{\frac{3}{2}\,|\,1\}^{8}.3}{\{2\,|\,1\}^{8}}\left\{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{128.81}-\frac{5}{1024.729}\ldots\ldots\right\}$$

En cuyas expresiones basta ejecutar las operaciones indicadas para obtener los valores aproximados de las factorelas.

12.—Cuando el carácter imaginario del factor $(a+nk)^m$, en la fórmula (q), no proviene de ser k negativo, sino de ser negativa la base de la factorela; entonces deberemos aplicar la misma fórmula (q), si el incremento es positivo, ó la fórmula (r) si es negativo.

Cambiando en dichas fórmulas a en $-a$, tendremos

$$(S)\quad\{-a\,|\,k\}^{m}=\frac{\{-a\,|\,k\}^{n}(nk-a)^{m}}{\{mk-a\,|\,k\}^{n}}\left\{1+S_1\frac{k}{nk-a}+S_2\frac{k^2}{(nk-a)^2}\right.$$

$$\left.+S_3\frac{k^3}{(nk-a)^3}+\ldots\ldots\right\}$$

$$(t)\ \{-a|-k\}^{m} = \frac{\{k-a-nk\,|\,k\}^{n} \cdot (nk-a)^{m}}{\{k-a\,|\,k\}^{n}}\Big\{1-S_1\frac{k}{nk-a}+S_2\frac{k^2}{(nk-a)^2}$$

$$-S_3\frac{k^3}{(nk-a)^3}+\ldots\ldots\Big\}$$

Hagamos algunas aplicaciones de estas dos últimas fórmulas. Sea

$$\{-1|1\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\{-1|1\}^{n} \cdot (n-1)^{\frac{1}{2}}}{\{\frac{1}{2}-1\,|\,1\}^{n}}\left(1-\frac{1}{8}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{128}\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{5}{1024}\cdot\frac{1}{(n-1)^3}+\ldots\right)\ (1)$$

$$\{-1\,|\,1\}^{\frac{1}{10}} = \frac{\{-1\,|\,1\}^{n} \cdot (n-1)^{\frac{1}{10}}}{\{\frac{1}{10}-1\,|\,1\}^{n}}\left(1-\frac{9}{200}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{133}{40000}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{58957}{24000000}\cdot\frac{1}{(n-1)^3}+\ldots\ldots\right)\ (2)$$

Para determinar el valor de n y que este sea entero, lo debe ser necesariamente la expresion $(n-1)^{\frac{1}{2}}$ en la (1), ó $(n-1)^{\frac{1}{10}}$ en la (2) y en general, el factor $(a+nk)^{m}$ pues si $(a+nk)^{m}=\frac{p}{q}$ con mayor razon seria n fraccionario; hagamos, pues, en la (1) $(n-1)^{\frac{1}{2}}=1$, y será $n=2$; con cuyo valor de n y en virtud de la fórmula (l) parr. (5), será $\{-1\,|\,1\}^{2}=0$. y por consiguiente $\{-1\,|\,1\}^{\frac{1}{2}}=0$. y lo mismo la $\{-1\,|\,-1\}^{\frac{1}{10}}=0$.

Si hicieramos $(n-1)^{\frac{1}{2}}>1$., con mayor razon serian cero las factorelas indicadas, por ser siempre cero el factor $\{-1\,|\,1\}^{n}$; solo con $\{n-1\}^{\frac{1}{2}}=0$. de donde $n=1$, ya no seria cero el factor indicado, pero entonces lo seria el $(n-1)^{\frac{1}{2}}$ ó $(n-1)^{\frac{1}{10}}$. Luego las dos factorelas anteriores son nulas.

Se concibe perfectamente, que dependiendo las fórmulas (s) y (t), de factorelas que en numerador y denominador, pueden reducirse á cero.

Los valores de dichas fórmulas podrán ser $0, \frac{0}{0}$, ó ∞, cuando los valores numéricos, en los casos particulares, satisfagan en el numerador, en el denominador, ó en ambos términos, las condiciones establecidas en el párrafo (5) al deducir la fórmula (l).

Sea la factorela $\{-1|2\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\{-1|2\}^{n}(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{\{1-1|2\}^{n}}\left\{1-S_1\frac{1}{n-1}\dots\right\} = \infty$ (3)

porque el denominador es cero sea cualquiera el valor de n.

Sea la $\{-3|1\}^{\frac{1}{2}} \frac{\{-3|1\}^{n}(n-3)^{\frac{1}{2}}}{\{1-3|1\}^{n}}\left(1-S_1\frac{1}{n-1}+\dots\dots\right) = \frac{0}{0}$ (4)

Pues si $(n-3)^{\frac{1}{2}}=0.$, $n=3$ y el denominador es cero, y como también lo es un factor del numerador, $(n-3)^{\frac{1}{2}}$, resulta que, para este caso, la factorela es $\frac{0}{0}$; si $(n-3)^{\frac{1}{2}}=$ 1. 2. 3... se reduce á cero la factorela del numerador $\{-3|1\}^{n}$ y con mayor razon la del denominador; luego en todos los valores de n correspondientes á $(n-3)^{\frac{1}{2}}=$entero, es $\frac{0}{0}$ el valor de la factorela.

Si diéramos á n valores enteros, menores que el $n=3$ obtenido por la condicion $(n-3)^{\frac{1}{2}}=0$ y tales como $n=2$, $n=1$, $n=0$, resultaria la factorela imaginaria ó infinita.

Sea la factorela

$$\{-3|7\}^{\frac{4}{5}} = \frac{\{-3|7\}^{n}(7n-3)^{\frac{4}{5}}}{\{\frac{4}{5}.7-3|7\}^{n}}\left(1+S_1.\frac{7}{7n-1}+S_2.\frac{7^2}{(7n-1)^2}\dots\dots\right)$$

Para determinar n y que su valor sea entero, á la vez que el factor $(7n-3)^{\frac{4}{5}}$; es necesario dar á n un valor tal, que haga á la base $7n-3$ igual á la quinta potencia de un número entero y por consiguiente debemos resolver la indeterminada $7n-3=x^5$. de donde $n=\frac{x^5+3}{7}$, que con $x=2$ dá $n=5$, y sustituyendo, será $(7n-3)^{\frac{4}{5}}=16$, y por consiguiente

$$\left\{-3\,|\,7\right\}^{\frac{4}{5}}=\frac{\left\{-3\,|\,7\right\}^{5}16}{\left\{\frac{13}{5}\,|\,7\right\}^{5}}\left(1+S_1\frac{7}{4}+S_2\frac{7^2}{4^2}\ldots\ldots\right)\ (5)$$

Si fuera

$$\left\{-3|7\right\}^{\frac{4}{7}}=\frac{\left\{-3|7\right\}\left\{^{n}\left\{7n-3\right\}^{\frac{4}{7}}\right.}{\left\{\frac{4}{7}.7-3\,|\,7\right\}^{n}}\left(1+S_1.\frac{7}{n-1}+S_2\frac{7^2}{(n-1)^2}+\ldots\ldots\right)\ (6)$$

$$7n-3=x^7;n=\frac{x^7+3}{7}\text{ que con } x=4 \text{ dá } n=2741.$$

El factor de la série, en el segundo miembro de la (5), será

$$\frac{-3.4.11.18.25.2^4.5^5}{13.48.84.118.183}$$

Para las aplicaciones de la fórmula (1), sean las mismas factorelas de los casos anteriores, suponiendo negativo el incremento, y tendremos

$$\left\{-1|-1\right\}^{\frac{1}{2}}=\infty\ (7);\left\{-1|-1\right\}^{\frac{1}{10}}=\infty\ (8);\left\{-1|-2\right\}^{\frac{1}{2}}=0\ (9);$$

$$\left\{-3|-1\right\}^{\frac{1}{2}}=\infty\ (10);\left\{-3|7\right\}^{\frac{4}{5}}=\frac{\left\{-31|7\right\}^{5}.16}{\left\{4|7\right\}^{5}}\left(1+S_1\frac{7}{7n-1}+\ldots\right)(11)\ldots\&.$$

13. En las aplicaciones anteriores hemos desarrollado varias factorelas de base fraccionaria, empleando para ello el procedimiento indicado por la definicion general. Pero podemos obtener

una fórmula muy sencilla, para trasformarlas en otra de base entera. Sea

$$\left\{\frac{a}{b}|k\right\}^m=\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}+k\right)\left(\frac{a}{b}+2k\right)\dots\left(\frac{a}{b}+(n-1)k\right)=\frac{a(a+bk)(a+2bk)\dots\{a+bk(n-1)\}}{b^m}$$

$$\text{ó}\quad (z)\quad \left\{\frac{a}{b}\mid k\right\}^m=\frac{\{a\mid bk\}^m}{b^m}$$

Si una factorela se multiplica por la potencia de un número cuyo exponente sea igual al de la factorela, podremos establecer la igualdad

$$(x)\qquad h^m\{a\mid k\}^m=\{ah\mid hk\}^m$$

La fórmula anterior, si hacemos en ella $h=\frac{1}{a}$ y despejamos $\{a\mid k\}^m$, dará

$$(z')\qquad \{a\mid k\}^m=a^m.\ \left\{1\mid\frac{k}{a}\right\}^m.$$

Expresion que sólo será imaginaria en el caso de ser a negativo y m fraccionario de la forma $\frac{1}{2h.}$

14.—Si en la igualdad.

$$(1)\qquad \{c\mid k\}^m=c\,(c+k)\,(c+2k)\dots\dots\{c+(m-1)\,k\}$$

que es fundamental, segun la definicion de factorela, hacemos $c=a.b.d.$ resultará

$$(x')\qquad \{a.b.d\mid k\}^m=abd\{abd+k\}\{abd+2k\}\dots\dots\{abd+m-1)\,k\}$$

que es la expresion de una factorela, cuya base es el producto de varios factores.

El producto de las tres ecuaciones siguientes

$$(2)\qquad \{a\mid k\}^m=a\{a+k\}\{a+2k\}\dots\dots\{a+(m-1)\,k\}$$

$$(3)\qquad \{b\mid k\}^m=b\{b+k\}\{b+2k\}\dots\dots\{b+(m-1)\,k\}$$

$$(4)\qquad \{d\mid k\}^m=d\{d+k\}\{d+2k\}\dots\dots\{d+(m-1)\,k\}$$

será

$$(5)\quad \{a\mid k\}^m.\ \{b\mid k\}^m.\ \{d\mid k\}^m=a.b.d.\,(a+k)\,(b+k)\,(d+k)\dots\dots$$
$$\{a+(m-1)\,k\}.\{b+(m-1)\,k\}.\{d+(m-1)\,k\}$$

Comparando los segundos miembros de las ecuaciones (5) y (x') se verá que sea cualquiera el valor que se atribuya al incremento k al exponente m y á los factores a, b, d, se verifican siempre las inecuaciones siguientes:

$$(a+k)\ (b+k)\ (d+k) > abd+k$$
$$(a+2k)\ (b+2k)\ (d+2k) > abd+2k$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Luego el segundo miembro de la ecuacion (5), mayor que el de la ecuacion (x'); luego se verificará necesariamente la inecuacion

(x'') $\{a \mid k\}^m \cdot \{b \mid k\}^m \cdot \{d \mid k\}^m > \{abd \mid k\}^m$ que nos dice que:

La factorela cuya base es el producto de varios factores, es menor que el producto de las factorelas formadas con cada uno de los que forman dicha base.

Luego la factorela de un producto, no es igual al producto de las factorelas. Insistimos sobre esta cuestion, porque como veremos enseguida el error de suponer cierta la igualdad

$$\{a \mid k\}^m \cdot \{b \mid k\}^m \cdot \{d \mid k\}^m = \{abd \mid k\}^m$$

han conducido al absurdo siguiente:

$$\{a \mid k\}^{mn} = \left\{\{a \mid mk\}^n \mid k\right\}^m = \left\{\{a \mid k\}^m \mid mk\right\}^n.$$

No sucede así con las *facultades*, en las cuales, como veremos despues, se verifica que la facultad de una base compuesta del producto de varias funciones, es igual al producto de las facultades que tienen por base cada una de dichas funciones, los exponentes é incrementos siendo iguales.

El cociente de dos factorelas se deduce de la fórmula (e) en la que haciendo $m+n=h$ resultarán para el cociente de dos factorelas de la misma base é igual incremento las siguientes fórmulas:

$$\frac{\{a \mid \pm k\}^m}{\{a \mid \pm k\}^m} = 1 \ldots\ldots (e_1); \quad \frac{\{a \mid \pm k\}^h}{\{a \mid \pm k\}^n} = \{a \pm nk \mid \pm k\}^{h-n} \ldots\ldots (e_2);$$

$$\frac{\{a \mid \pm k\}^h}{\{a \pm nk \mid \pm k\}^{h-n}} = \{a \mid \pm k\}^n \ldots (e_3); \quad \frac{\{a \mid \pm k\}^n}{\{a \mid \pm k\}^h} = \frac{1}{\{a \pm nk \mid \pm k\}^{h-n}} \ldots\ldots (e_4).$$

Las potencias y raíces de las factorelas se obtienen multiplicando las potencias y raíces de sus factores.

El logaritmo de una factorela es:

$$(Z'')\quad \text{Log.}\ \{a\mid \pm k\}^{m} = \text{Log.}\ a + \text{Log.}\ (a \pm k) + \ldots \text{Log.}\ (a \pm (m-1)\ k)$$

$$\text{La factorela}\ \{a\mid k\}^{mn} = a(a+k) \ldots\ldots\ldots\ldots (a+(m-1)\ k).$$
$$\times (a+mk)\ (a+(m+1)\ k) \ldots (a+(2m-1)\ k).\quad (6)$$
$$\times (a+2mk)\ (a+(2m+1)\ k) \ldots (a+(3m-1)\ k).$$

....

$$\times \{a+m(n-1)\ k\}\ \{a+(m(n-1)+1)\ k\} \ldots\ldots \{a+(m(n-1)+m-1)\ k\}$$

Adoptando la notacion por factorelas en cada una de las líneas horizontales resultará

$$\{a|k\}^{mn} = \{a|k\}^{m} \cdot \{a+mk|k\}^{m} \cdot \{a+2mk|k\}^{m} \ldots\ldots \{a+m(n-1)k|k\}^{m}\quad (7)$$

Adoptando la misma notacion en cada una de las columnas verticales tendremos tambien

$$\{a|k\}^{mn} = \{a|mk\}^{n} \cdot \{a+k|mk\}^{n} \cdot \{a+2k|mk\}^{n} \ldots\ldots \{a+(m-1)k|mk\}^{n}\quad (8)$$

de cuyas dos igualdades resulta.

$$(z')\quad \{a|k\}^{mn} = \{a|k\}^{m} \cdot \{a+mk|k\}^{m} \ldots\ldots \{a+m(n-1)k|k\}^{m}$$
$$= \{a|mk\}^{n} \cdot \{a+k|mk\}^{n} \ldots\ldots \{a+(m-1)k|mk\}^{n}$$

No siendo la factorela de un producto igual al producto de las factorelas, no podemos expresar los desenvolvimientos de la fórmula anterior bajo la forma

$\{\{a|mk\}^{n}|k\}^{m} \ldots$ (9) el primero, ni $\{\{a|k\}^{m}|mk\}^{n} \ldots$ (10) el segundo, por consiguiente ninguna de estas expresiones puede ser igual á la $\{a\mid k\}^{mn}$. Véase la nota (*A*) al fin de este cuaderno.

15.—Terminaremos la teoría de las factorelas, resolviendo un problema de sumo interés é inverso del que se resuelve por la fórmula (n). Dicha fórmula tiene por objeto, dados los elementos que constituyen una factorela, desarrollarla y determinar su valor numérico; de modo que si representamos este por H tendremos $\{a \mid k\}^m = H$ (1).

Pues por medio de la ecuacion (1) podemos determinar uno de los elementos que constituyen dicha factorela, dados los otros dos y el valor numérico de ella.

Cuando el elemento desconocido es la base, su determinacion constituye un problema, que es respecto á las factorelas lo que la extraccion de raíces respecto de las potencias, y se denomina *extraccion de bases de las factorelas*, que indicaremos con el mismo signo radical, estableciendo la siguiente identidad:

$$\sqrt[m \mid k]{\{a \mid k\}^m} = a. \tag{2}$$

en el índice del radical consignamos tambien el incremento, pues si sólo constara el índice m, se confundiria la indicacion con la extraccion de raíces.

De la identidad anterior se deduce, que si en la igualdad (1) extraemos las bases de ambos miembros, se tendrá:

$$\sqrt[m \mid k]{H} = a \tag{3}$$

cuya ecuacion indica el problema que tratamos de resolver.

Sea, pues, H el valor numérico de una factorela de exponente m é incremento k conocidos, y cuya base x queremos determinar. Segun la fórmula (n) tendremos

$$H = \{x \mid k\}^m = x^m + S_1 k x^{m-1} + S_2 k^2 x^{m-2} + \cdots\cdots$$

en cuya ecuacion son conocidos por las fórmulas (o), los coeficientes S_1 S_2. . . . ., puesto que es conocido m; tambien son conocidos H y K; luego resolviendo la ecuacion numérica del grado m, cifrada en la anterior, determinaremos los m valores que pueden servir de base á las factorelas que, con el exponente m y el incremento k, tienen el mismo valor H.

Propongámonos determinar la base de una factorela de valor $H=10$, siendo $m=2$ y $K=3$; y llamando x á la base, tendremos $\{x \mid 3\}^2=x^2+S_1.3x=10$: $S_1=1$ luego $x^2+3x-10=0$ de donde $x=2$; $x=-5$ por consiguiente

$$\{2 \mid 3\}^2=\{-5 \mid 3\}^2=10$$

Sea $H=-3$; $m=3$; $k=-2$; $\{x \mid -2\}^3=x^3+S_1\times-2.x^2+S_2.4.x=-3$

$$S_1=3;\ S_2=2$$

la ecuacion por consiguiente será $x^3-6x^2+8x=-3$, cuyas raíces son

$$x=3;\ x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2.}$$

Por consiguiente satisfacen las condiciones del problema las tres raíces anteriores, que determinan las tres factorelas iguales:

$$\{3 \mid -2\}^3=\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\Big| -2\right\}^3=\left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2}\Big| -2\right\}^3=-3$$

cuyo resultado podemos comprobar desenvolviendo dichas factorelas y determinando su valor numérico.

Cuando el signo del exponente que se nos dá conocido es negativo, ya no podemos hacer uso de la fórmula (n), pues en este caso es indefinido el número de términos del desenvolvimiento de la factorela; pero por medio de la fórmula (4) obtendremos la base con la misma sencillez que en el caso anterior.

Supongamos que se quiere determinar la base de una factorela cuyo valor es $H=5.$; $k=3$, $m=-2.$ y tendremos en virtud de la fórmula (h);

$$\{x \mid 3\}^{-2}=\frac{1}{\{x-3 \mid -3\}^2}=5 \text{ ó } \frac{1}{(x-3)\,(x-6)}=\frac{1}{x^2-9x+18}=5.$$

$$5x^2-45x+89=0.;\ x=\frac{45\pm\sqrt{245}}{10}=\frac{45\pm7\sqrt{5}}{10},$$

Si queremos comprobar este resultado tendremos:

$$\left\{\frac{45+7\sqrt{5}}{10} \mid 3\right\}^{-2}=\frac{1}{\left\{\frac{45+7\sqrt{5}}{10}-3 \mid -3\right\}^{2}}$$

segun la fórmula (h); de modo que desenvolviendo la segunda expresion será:

$$\frac{1}{\left\{\frac{45+7\sqrt{5}}{10}-3 \mid -3\right\}^{2}}=\frac{1}{\frac{15+7\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{7\sqrt{5}-15}{10}}=5.$$

que es efectivamente el valor de la factorela dada. El mismo resultado obtendriamos con el otro valor de x.

Podemos, pues, establecer la igualdad.

$$\left\{\frac{45+7\sqrt{5}}{10} \mid 3\right\}^{-2}=\left\{\frac{45-7\sqrt{5}}{10} \mid 3\right\}^{-2}=5$$

Si fuera $H=\frac{1}{45}$; $m=-3$; $k=-4$ tendriamos: (fórmula h)

$$\{x \mid -4\}^{-3}=\frac{1}{\{x+4 \mid 4\}^{3}}=\frac{1}{x^3+24x^2+176x+384}=\frac{1}{45}$$

de donde $x^3+24x^2+176x+339=0$. que tiene las raices siguientes:

$$x=-3;\ x=\frac{21\pm\sqrt{-11}}{2},$$

por consiguiente iguales las tres factorelas siguientes:

$$\{-3 \mid -4\}^{-3}=\left\{\frac{21+\sqrt{-11}}{2} \mid -4\right\}^{-3}=\left\{\frac{21-\sqrt{-11}}{2} \mid -4\right\}^{-3}=\frac{1}{45}$$

Cuya igualdad de valores se puede comprobar como en los casos anteriores.

Cuando el incremento es desconocido, el mismo procedimiento empleado en el caso anterior nos determina su valor. Sea $H=10$, $a=-5$ y $m=2$ y desenvolviendo, por la fórmula (n), la factorela $\}-5 \mid x\{^{2}$; resultará

$$(-5)^2+S_1.-5.x=10 \text{ ó } 25-5x=10;\ x=3$$

Sea $H=10$; $a=-5$; $m=3$; $\}-5 \mid x\{^{3}=10$. y desarrollando el primer miembro por la fórmula (n), será $10^2x-75x+135=o$, puesto que $S_1=3$; $S_2=2$.

Las dos raíces de la ecuacion son, pues, $x=3$ y $x=\frac{9}{2}$; por consiguiente

$$\}-5 \mid 3\{^{3}=\}-5 \mid \frac{9}{2}\{^{3}=10.$$

Si tuviéramos $a=3$, $m=4$, $H=9$; $\}3 \mid x\{^{4}=9$; resultaria la ecuacion $2x^3+11x^2+18x+8=o$, cuyas tres raíces son

$$x=-3;\ x=\frac{-7\pm\sqrt{17}}{4}$$

y por consiguiente, iguales las factorelas que resultan con los tres valores de x.

Cuando el exponente es negativo, no desarrollamos por la fórmula (n), sino que tambien empleamos la fórmula (h), como la empleamos para determinar la base.

Sea $H=\frac{1}{8}$; $m=-3$; $a=5$. y tendremos

$$\}5 \mid x\{^{-3}=\frac{1}{\}5-x \mid -x\{^{3}}=\frac{1}{8.};\ \text{de donde } \}5-x \mid -x\{^{3}=8.$$

$$6x^3-55x^2+150x-117=0$$

de donde $x=3$; $x=\frac{37\pm\sqrt{433}}{12}$, que satisfacen la cuestion.

Si quisiéramos determinar el exponente, tendriamos que valernos de un método puramente práctico, fundado en la naturaleza de las factorelas.

Sea $\{a \mid k\}^x = H$; y es evidente que para ser cierta esta igualdad habrá de ser H igual á un número exacto de factores, de la forma $a\,(a+h)\,(a+2h)\ldots\ldots$

Luego si dividimos H por a, el cociente por $a+h$, y así sucesivamente y llegamos á un cociente exacto igual á la unidad; el número de divisiones que se hayan podido efectuar determina el valor de x.

Sea $a=3.\ k=1\ \ H=2520.$ y $\{3 \mid 1\}^x = 2520 = 3\,(3+1)\ldots\ldots = 3.4.5.\ldots\ldots$

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 3 \\ 840 & 4 \\ 210 & 5 \\ 42 & 6 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Luego $2520 = 3.4.5.4.7. = \{3 \mid 1\}^4$; luego $x=4$

Si tuvieramos $(3 \mid 2)^{-x} = \dfrac{1}{105.}$: trasformando la factorela, en otra de exponente positivo, seria

$$\{3|2\}^{-x} = \frac{1}{\{3-2|-2\}^x} = \frac{1}{105}$$ de donde, $\{3-2|-2\}^x = 105. = 1.-1.-3.\ldots$

$$\begin{array}{r|l} 105 & 1 \\ 105 & -1 \\ -105 & -3 \\ 35 & -5 \\ -7 & -7 \\ 1 & \end{array}$$

Luego $105 = 1.-1.-3.-5.-7 = \{3-2 \mid -2\}^5$; luego $x=5$

luego $\{3 \mid 2\}^{-5} = \dfrac{1}{105.}$

Cuando por el procedimiento anterior no obtenemos un valor entero para el exponente, determinaremos el valor de este por medio de la fórmula (n).

Sea $$\left\{13 \mid 2\right\}^x=17=13^x\left\{1+S_1\frac{2}{13}+S_2\left(\frac{2}{13}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

de donde $$13^x=\frac{17}{1+S_1\frac{2}{13}+S_2.\left(\frac{2}{13}\right)^2+\ldots\ldots}$$

Llamemos N al valor numérico del denominador, que podemos obtener determinando $S_1\ S_2 \ldots\ldots$; y tomando los logaritmos y despejando x será $x=\frac{\text{Log } 17-\text{Log N}}{\text{Log. } 13.}$

Expresion que nos dará el valor aproximado de x.

Las factorelas se prestan á un gran número de trasformaciones que pueden determinarse en cada caso particular, mediante las fórmulas ya establecidas, y su notacion facilita de una manera notable la representacion de algunas funciones; así tenemos

$$(a+b)^m=\sum_{n=o}^{n=m}\frac{\left\{m \mid -1\right\}^n}{\left\{1 \mid 1\right\}^n}a^{m-n}b^n \text{ y tambien } (a+b+c+\ldots k)^m$$

$$=\sum\frac{\left\{1 \mid 1\right\}^m}{\left\{1 \mid 1\right\}^\alpha \left\{1 \mid 1\right\}^\beta \left\{1 \mid 1\right\}^\gamma \ldots \left\{1 \mid 1\right\}^\lambda}a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots k^\lambda$$

FACULTADES

16. Las facultades toman diversas denominaciones segun la naturaleza del exponente y el incremento. Cuando estas son cantidades constantes, la facultad se llama *Algoritmica* ó *Numérica*, y cuando dichos elementos son funciones de una variable, entonces se llama *Exponencial*. Tal sucede á la

(1) $$F\left\{x \mid \varphi(x)\right\}^{f(x)}$$

Si la funcion que constituye la base es algebráica, la facultad será algebráica, y trascendente si lo es la base.

Las facultades numéricas ó algorítmicas, que son las de que vamos á ocuparnos con toda la brevedad posible, ya hemos dicho (párrafo 1.°) que se expresan en

(2) $$F(x|k)^{m}=F(x).\ F(x+k).\ F(x+2k)\ldots\ldots F\big(x+(m-1)k\big)$$

y si tomamos por base el último factor, es evidente que tendremos tambien

(3) $$F\big(x+(m-1)k|-k\big)^{m}= F\big(x+(m-1)k\big).\ F\big(x+(m-2)k\big).$$
$$F\big(x+(m-3)k\big)\ldots\ldots F(x+k).\ F(x$$

Los segundos miembros son iguales, luego los primeros lo serán, y por consiguiente

(d′) $$F(x|k)^{m}= F\big(x+(m-1)k\,|-k\big)^{m}.$$

Si el exponente de la facultad fuese $m=n+h$ tendriamos

(4) $$F(x|k)^{m}=F(x|k)^{n+h}=F(x).\ F(x+k)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots F\big(x+(n-1)\,k\big)\times$$
$$\times F(x+nk).\ F\big(x+(n+1)\,k\big)\ldots F\big(x+(n+h-1)\,k\big)$$

y adoptando la notacion por facultades en cada una de las dos líneas de factores del segundo miembro, resultará

(5) $$F(x|k)^{n+h}=F(x-k)^{n}\cdot F(x+nk|k)^{h}$$

Puesto que $F(x|k)^{m+h}=F(x|k)^{h+n}$; y dicho segundo miembro, por la fórmula anterior se descompone en (b) $F(x|n)^{h+n}=F(x|k)^{h}\cdot F(x+hk|k)^{n}$ resultará

(e′) $$F(x|k)^{h+n}=F(x|k)^{n}\cdot F(x+nk|k)^{h}=F(x|k)^{h}\cdot F(x+hk|k)^{n}$$

Despejando en la (5) el primer factor del segundo miembro resultará

(7) $$F(x|k)^{n}=\frac{F(x|k)^{n+h}}{F(x+nk|k)^{h}}$$ que por ser $m=n+h$ y por consiguiente $n=m-h$.

resultará, sustituyendo en la fórmula anterior,

$$(f') \qquad F(x \mid k)^{m-h} = \frac{F(x \mid k)^m}{F\big(x+(m-h)k \mid k\big)^h}$$

y si en la ecuacion anterior hacemos $m=h$, resultará

$$(8) \qquad F(x \mid k)^{\circ} = \frac{F(x \mid k)^m}{F(x \mid k)^m} = 1$$

Lo que nos dice que en las facultades como en las factorelas y en las potencias, el exponente cero reduce su valor á la unidad.

Haciendo $m=o$ en la ecuacion (f') resultará

$$(g') \qquad F(x \mid k)^{-h} = \frac{1}{F(x-hk \mid k)^h}$$

17. La facultad, cuya base es el producto de dos funciones de la misma variable, se desarrolla con la mayor sencillez, como se ve en la ecuacion siguiente:

$$(1) \qquad \big\{ f(x \mid k) \,.\, f'(x \mid k) \big\}^m = f(x) \,.\, f'(x) \,.\, f(x+k) \,.\, f'(x+k) \ldots\ldots$$

$$f\big(x+(m-1)k\big)^m \,.\, f'\big(x+(m-1)k\big) = f(x) \,.\, f(x+k) \ldots\ldots$$

$$f\big(x+(m-1)k\big) \,.\, f'(x) \,.\, f'(x+k) \ldots\ldots f'\big(x+(m-1)k\big) = f(x \mid k)^m \,.\, f'(x \mid k)^m.$$

Luego

$$(\overline{x''}) \qquad \big\{ f(x \mid k) \,.\, f'(x \mid k) \big\}^m = f(x \mid k)^m \,.\, f'(x \mid k)^m$$

Si fuera mayor el número de funciones que componen la base de la facultad, haciendo la misma descomposicion demostraríamos la misma propiedad que demuestra la $(\overline{x''})$ para la base de dos funciones; por consiguiente, podemos establecer la siguiente importantísima propiedad de las facultades.

La facultad, cuya base la componen el producto de un número cualquiera de funciones, es igual al producto de las facultades que tienen por base cada una de dichas funciones, siendo el incremento y el exponente iguales á los de la facultad dada.

O de un modo más breve

La facultad de un producto es igual al producto de las facultades.

Propiedad exclusivamente peculiar de las facultadés y que no se verifica para las factorelas, como ya hemos demostrado en el párrafo (14) inecuacion (X''), y que expresaremos en general por medio de la ecuacion

$$(\overline{x'''})\ \left\{f_1(x \mid k).f_2(x \mid k).f_3(x \mid k)\ldots f_n(x \mid k)\right\}^m = f_1(x \mid k)^m\, f_2(x \mid k)^m \ldots f_n(x \mid k)^m$$

18. La facultad $f\,(x \mid k)^{mn}$ puede desenvolverse de la manera siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} f\,(x \mid k)^{mn} = f\,(x).f(x+k)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f\big(x+(m-1)k\big) \\ \qquad f\,(x+mk).f\big(x+(m+1)k\big)\ldots\ f\big(x+(2m-1)k\big) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad f\,\big(x+mk(n-1)\big).f\big(x+mk(n-1)+k\big)\ldots f\big(x+mk(n-1)+(m-1)k\big) \end{array}\right\} (1)$$

Dando la notacion de facultad á cada una de las líneas horizontales del desarrollo anterior, será

$$f\,(x \mid k)^{mn} = f\,(x \mid k)^m\ f(x+mk \mid k)^m\ \ldots\ldots\ f\big(x+m(n-1)k \mid k\big)^m \ldots\ldots \qquad (2)$$

Pero la facultad de un producto es igual al producto de las facultades de sus factores; luego por la fórmula $(\overline{x'''})$ del párrafo anterior.

$$f\,(x \mid k)^{mn} = \left\{f\,(x \mid k).f\,(x+mk \mid k)\ldots\ldots\ f\big(x+m(n-1)k \mid k\big)\right\}^m \qquad (3)$$

Las bases de las facultades incluidas entre corchetes en el segundo miembro, constituyen el desarrollo de la facultad $f\,(x \mid mk)^n$

Luego dicho segundo miembro (ecuacion 3), representa el desenvolvimiento de la facultad, de una facultad; la primera de incremento mk y exponente n, y la segunda de incremento k y exponente m; por consiguiente podemos tambien expresar el segundo miembro de la (3) bajo la forma

$$f(x \mid k)^{mn} = \left\{f(x \mid k).f(x+mk \mid k)\ldots f\big(x+m(n-1)k \mid k\big)\right\}^m = f\left\{\left\{x \mid mk\right\}^n \mid k\right\}^m \ (v)$$

Si en el segundo miembro de la (1) damos la notacion de facultad á los productos que resultan en cada columna, tendremos

$$f(x \mid k)^{mn} = \{ f(x \mid mk)^n . f(x+k \mid mk)^n \ldots\ldots f\big(x+(m-1)k \mid mk\big)^n$$

$$= \{ f(x \mid mk) . f(x+k \mid mk) \ldots\ldots f\big(x+(m-1)k \mid mk\big) \}^n \qquad (4)$$

El producto comprendido entre corchetes en el último valor, es el de las bases de varias facultades.

Dichas bases son $f(x)\ f(x+k)\ f(x+2k) \ldots\ldots f\big(x+(m-1)k\big)$ luego su producto constituye tambien la facultad $f(x \mid k)^m$: por consiguiente la igualdad (4) puede escribirse bajo la forma

$$f(x|k)^{mn} = \{ f(x|mk) . f(x+k|mk) \ldots f\big(x+(m-1)k|mk\big) \}^n = f\{x|k\}^m|mk\}^n \quad (v')$$

De las (v) y (v') se deduce

$$f(x \mid k)^{mn} = f\{x \mid mk\}^n|k\}^m = f\}x \mid k\}^m|mk\}^n \qquad (A)$$

Para justificar las ecuaciones (v) y (v'), generalizarlas y desenvolverlas, bastarán las consideraciones siguientes. Sea la facultad

$$f(x \mid k)^m = f(x) . f(x+k) . f(x+2k) \ldots\ldots f\big(x+(m-1)k\big) \qquad (5)$$

Si determinamos la facultad de exponente n é incremento h de cada una de las funciones que constituyen el segundo miembro, el producto de dichas facultades será igual á la facultad del producto, segun la proposicion del párrafo anterior, cifrada en la ecuacion $(\overline{x'''})$. Pero como el producto de los factores del segundo miembro de la (5), lo representa el primero, habremos de tomar la facultad de grado n é incremento h del primer miembro para representar el producto de las facultades del segundo. Luego

$$f\ \{(x|k)^m|h\}^n = f(x|h)^n.\ f(x+k|h)^n.\ f(x+2k|h)^n \cdots f\big(x+(m-1)k|h\big)^n \quad (6)$$

Si todavía quisiéramos que cada una de las facultades del segundo miembro, fueran á su vez bases de otras facultades de incremento p y exponente q, el producto de dichas facultades, se expresaria, por la facultad de incremento p y exponente q del primer miembro de la (6), que es la que representa el producto de las facultades que deben servir de base á las que nuevamente se quieren generar; por consiguiente seria

$$f\left\{\left(x \mid k\right\}^{m} \mid h\right\}^{n} \mid p\}^{q} = f\left\{\left(x \mid h\right\}^{n} \mid p\}^{q}\right\} . f\left\{\left(x+k \mid h\right\}^{n} \mid p\}^{q}\right\} \ldots\ldots$$

$$f\left\{\left(x+(m-1)k \mid h\right\}^{n} \mid p\}^{q}\right\} \ldots\ldots \quad (7)$$

y así sucesivamente.

Para desenvolver una expresion de la forma $f\}x \mid k\}^{m} \mid h\}^{n} \mid p\}^{q}\}$

Se desenvuelve primero la facultad de $f(x)$ con el primer incremento y exponente k y m, en seguida cada factor del segundo miembro se toma por base de una nueva facultad, de incremento h y exponente n, y su producto representa ya la expresion $f\}x \mid k\}^{m} \mid h\}^{n}$; si cada una de las facultades del desenvolvimiento de esta expresion, las tomamos á su vez por bases de una nueva facultad, de incremento p y expodente q, el producto de las facultades así formadas, será el desarrollo de la expresion propuesta.

Por medio de la (e') podemos deducir tambien las (2) y (4) que nos han conducido directamente á la fórmula (A).

Si en $f(x \mid k)^{m+h} = f(x \mid k)^{m} . f(x+mk \mid k)^{h}$, hacemos $h=p+q$, será

$$f(x \mid k)^{m+p+q} = f(x \mid k)^{m} . f(x+mk \mid k)^{p+q};$$

desarrollando el segundo factor por la misma fórmula (e'), será

$$f(x+mk \mid k)^{p+q} = f(x+mk \mid k)^{p} . f\left(x+(m+p)k \mid k\right)^{q}; \text{ haciendo } q=r+t.$$

$$f\left(x+(m+p)k \mid k\right)^{r+t} = f\}x+(m+p)k \mid k\}^{r} . f\}x+(m+p+r)k \mid k\}^{t}$$

y así sucesivamente.

Sustituyendo unas en otras las ecuaciones anteriores, tendremos

$$f(x \mid k)^{m+p+r+t+\ldots\ldots} = f(x \mid k)^{m} . f\}x+mk \mid k\}^{p} . f\}x+(m+p)k \mid k\}^{r} .$$

$$f\}x+(m+p+r)k \mid k\}^{t} + \ldots\ldots$$

haciendo $m=p=r=t=\ldots\ldots$, y suponiendo n el número de términos será

$$f(x|k)^{mn}=f(x|k)^{m}.\ f\{x+mk\,|\,k\}^{m}.\ f\{x+2mk\,|\,k\}^{m}\ldots$$

$$f\{x+m(n-1)k|k\}^{m}.$$

que es la misma ecuacion (2) de que se deduce la fórmula (A); del mismo modo se deducirá la (4).

19. Si desarrollamos una facultad segun la definicion elemental de ellas, y en el desarrollo efectuamos los productos indicados y las reducciones posibles, el resultado será una funcion de la misma variable que la propuesta y de la misma naturaleza, aunque de grado distinto.

De modo que podemos establecer

$$f(x\,|\,k)^{m}=f(x).f(x+k).f(x+2k)\ldots f\big(x+(m-1)k\big)=\varphi\,(x) \qquad (1)$$

De la ecuacion (1) se origina una operacion recíproca de la anterior, que consiste en determinar la base $f\,(x)$, que con el incremento k y exponente m conocidos, produce la funcion dada $\varphi\,(x)$.

Indicando tambien esta operacion por medio del signo radical, cuyo índice contenga el exponente y el incremento, tendremos:

$$\sqrt[m\,|\,k]{f\{x|k\}^{m}}=\sqrt[m|k]{\varphi(x)}=f(x) \qquad (B)$$

En cuya ecuacion queda planteado el problema que nos proponemos resolver, que se denomina, *extraccion de bases de las facultades.*

Segun la fórmula (A)

$$f\{x\,|\,k\}^{mn}=f\{x\,|\,mk\{^{n}\,|\,k\}^{m}$$

Si de ambos miembros extraemos la base de la facultad de índice $m\,|\,k$, resultará segun la fórmula (B)

$$\sqrt[m\,|\,k]{f\{x\,|\,k\}^{mn}}=\sqrt[m\,|\,k]{f\{x\,|\,mk\}^{n}\,|\,k\}^{m}}=f\{x\,|\,mk\}^{n} \quad (C)$$

Haciendo $mn=1$, el primero y último valor de esta ecuacion dará la siguiente

$$\sqrt[m|k]{f(x)} = f\left\{x \mid mk\right\}^{\frac{1}{m}} \ldots\ldots (D)$$

cuya fórmula, aplicada á una funcion cualquiera $\varphi\,(x)$ daria

$$\sqrt[m|k]{\varphi(x)} = \varphi\left\{x \mid mk\right\}^{\frac{1}{m}} \qquad (D')$$

Tal es la fórmula dada por Wronski para la extraccion de bases de las facultades.

20. Para la mejor inteligencia de las facultades y factorelas, vamos á terminar haciendo algunas consideraciones relativas á la naturaleza de cada una de estas funciones, así como tambien respecto á la expresion más propia para representarlas.

Las dos expresiones $f\,(x)^{m|k}$ y $a^{m|k}$ por medio de las que se representaban las facultades y factorelas, han podido hacer creer que entre una y otra clase de funciones existian las dos relaciones siguientes:

1.ª Que las factorelas son un caso particular de las facultades, en que la funcion de la base se reduce á una cantidad a constante.

2.ª Que el carácter que esencialmente distingue una de otra clase de funciones, depende de la naturaleza de la base.

Pero estas dos propiedades no se verifican, como vamos á demostrar, y la representacion impropia de una facultad por la expresion $f\,(x)^{m|k}$, es la causa que hace incurrir á veces en el error de suponerlas ciertas.

Vamos, pues, á demostrar:

1.º Que cuando en una facultad se sustituye por la funcion de la base, un valor constante numérico ó algebráico cualquiera a, dicha facultad no se reduce á la factorela de base a.

2.º Que la expresion $f\,(x)^{m|k}$ no puede simbolizar el desarrollo de una facultad.

3.º Que no es la naturaleza de la base la que distingue ambas clases de funciones, sino la diversa manera de atribuir el incremento.

El desenvolvimiento $f\,(x).\ f\,(x+k)\ f\,(x+2k) \ldots f\big(x+(m-1)\,k\big)$ de una facultad, tiene $m-1$ factores en que la variable recibe los incrementos sucesivos $k, 2k. \ldots .(m-1)\,k$ y podemos por la série de Taylor desenvolver cada uno de dichos factores, en cuyo caso quedará

$$f(x)\left\{f(x)+kf'(x)+\frac{k^2}{2}f^2(x)+\ldots\right\}.\left\{f(x)+2kf'(x)+\frac{4k^2}{2}f^2(x)\ldots\right\}\ldots\ldots$$

$$\times\left\{f(x)+(m-1)kf'(x)+\frac{(m-1)^2k^2}{2}f^2(x)\ldots\ldots\right\} \quad (1)$$

Si hacemos $f(x)=a$ y suponemos que sea $x=b$ uno de los valores que satisfacen dicha ecuacion, ó lo que es igual $f(b)=a$, la (1) se reducirá á la

$$a\left\{a+kf'(b)+\frac{k^2}{2}f^2(b)+\ldots\ldots\right\}\left\{a+2kf'(b)+\frac{4k^2}{2}f^2(b)+\ldots\right\}\ldots\ldots$$

$$\left\{a+(m-1)kf'(b)+\frac{(m-1)^2k^2}{2}f^2(b)+\ldots\ldots\right\} \quad (2)$$

Producto que no puede en general reducirse á la forma de una factorela. Unicamente en el caso en que la base $f(x)=x+c$ sea funcion de primer grado sin coeficiente en la variable, podrá verificarse que al hacer $x+c=a$, en el desenvolvimiento de la facultad, se genera una factorela de base a é incremento k, igual al de la facultad, tal como la $a\,(a+k)\,(a+2k)\ldots(a+(m-1)\,k)$. Si la funcion de primer grado que constituye la base de la facultad fuera de la forma $f(x)=dx+c$, en que la variable tiene un coeficiente distinto de la unidad; tambien se deduce del desenvolvimiento de una facultad, el de una factorela, pero no de incremento k, igual al de la facultad, sino de incremento dk.

Esta circunstancia se verifica, porque en toda funcion de primer grado, ésta recibe el mismo incremento que su variable, si tiene por coeficiente la unidad, y un incremento constante $d.k$ si es d el coeficiente de dicha variable; por consiguiente, recibiendo la funcion el incremento constante k en el primer caso, y dk en el segundo, lo que se genera es una factorela.

Tomemos por base de la facultad una funcion de segundo grado $x^2-3x+7=f(x)$ y serán $f'(x)=2x-3$; $f^2(x)=2$. Sustituyendo en el desenvolvimiento (1) estos valores; si despues hacemos $k=2$, $m=4$ y $x=5$, con lo que serán $f(x)=17$; $f'(x)=7$; $f^2(x)=2$, tendremos para valor numérico de la facultad, el producto 17.35.61.95, bien distinto del de la factorela $17.(17+2).(17+4).(17+6)$, generada con el mismo valor numérico de la base de la funcion y con el mismo exponente é igual incremento.

Queda, pues, demostrada la primera negacion de las tres que constituyen el argumento esencial de este párrafo.

Pasemos á la segunda: si adoptamos la forma $f(x)^{m|k}$ para simbolizar una facultad, necesariamente dicho símbolo podrá sustituirse en lugar de su desenvolvimiento y recíprocamente, de modo que deberá verificarse siempre.

$$f(x)^{m|k}=f(x).f(x+k).f(x+2k).....f\big(x+(m-1)k\big) \quad (5)$$

La condicion esencial que el símbolo $f(x)^{m|k}$ debe satisfacer, es que sea cualquiéra la naturaleza de $f(x)$ y el valor de la variable x se verifique la igualdad (5).

Pero si damos á x un valor cualquiera $x=b$, que haga $f(b)=a$; el primer miembro de la (5) se convierte en la factorela $a^{m|k}$, mientras que el segundo toma un valor distinto, segun acabamos de demostrar para todas las funciones que no son de primer grado; luego la ecuacion (5) no resulta cierta, y por consiguiente, no es propio el símbolo $f(x)^{m|k}$, de su primer miembro, para representar el segundo.

Para demostrar que no es la naturaleza de la base, sino la manera de atribuir el incremento, la que distingue las facultades de las factorelas, sea $f(x)$ una funcion de un grado cualquiera, distinto del primero, y si en esta funcion damos el incremento k á su variable independiente, y suponemos m el número de factores,

$$(6) \qquad f(x).f(x+k).f(x+2k).....\big(f\,x+(m-1)k\big)$$

es la facultad que genera esta funcion, la cual hemos visto ya que no se trasforma en factorela, cuando por un valor particular de la variable se reduce $f(x)=a$.

Pero si en lugar de atribuir el incremento k á la variable, lo atribuimos á la misma funcion anterior, tendremos con el mismo exponente m el producto

$$f(x)\{f(x)+k\}\cdot\{f(x)+2k\}\ldots\ldots\{f(x)+(m-1)k\} \qquad (7)$$

que es una factorela y que con $f(x)=a$ se reduce á

$$a(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\{a+(m-1)k\}$$

lo que no sucedia en el caso anterior.

Luego si con una misma funcion podemos generar á la vez una facultad ó una factorela, segun la diversa manera de atribuir el incremento, es prueba de que no es la naturaleza de la base $f(x)$, la que determina la distinta generacion de los productos (6) y (7), sino que el incremento se atribuya á la variable, ó á la funcion.

Cuando la base es una cantidad constante a ó variable x, ó una funcion de primer grado, no pueden generarse con ellas más que factorelas; pero cuando la base es una funcion de un grado superior al primero, se genera una facultad ó una factorela, segun el incremento se atribuye á la variable ó á la funcion. Por esta razon hemos sustituido á la notacion $f(x)^{m|k}$, la adoptada por nosotros, que caracteriza desde luego la naturaleza de la funcion que se qniere generar, pues $F(x\,|\,k)$ no puede confundirse con $\{F(x)\,|\,k\}$ que es la notacion de la factorela.

La expresion $f(x)^{m|k}$, en realidad sólo podria servir para representar una factorela, y esta impropiedad de simbolizar una facultad con $f(x)^{m|k}$, es sin duda la que ha conducido al error, de suponer que las factorelas son un caso particular de las facultades y que se deducen las primeras de las segundas con solo hacer $f(x)=a$, siendo así que las facultades y factorelas, tienen un modo de generacion distinto y no se deducen las unas de las otras.

Si en $f(x)^{m|k}$ hacemos $f(x)=a$, cierto que entónces $f(x)^{m|k}=a^{m|k}$; pero es porque como ya hemos demostrado, el símbolo $f(x)^{m|k}$ no puede representar una facultad y sí una factorela.

A fin de hacer ver con más claridad cuanto acabamos de demostrar, tomaremos en consideracion algunos casos particulares.

Sean $f(x)=x^2-2x-3$, $m=3$, $k=1$, la base el exponente y el incremento de una facultad; si adoptamos para ella la notacion $f(x)^{m|k}$ será

$$\{x^2-2x-3\}^{3|1}=\{x^2-2x-3\}\,\{(x+1)^2-2(x+1)-3\}\,\{(x^2+2)^2-2(x+2)-3\}$$

hagamos la funcion $x^2-2x-3=5$ de donde $x=\left\{\begin{matrix}+4\\-2\end{matrix}\right.$ efectuando las operaciones indicadas en los factores del segundo miembro, la ecuacion anterior podrá ponerse bajo la forma;

$$\left\{x^2-3x-3\right\}^{3|1}=\left\{x^2-2x-3\right\}\cdot\left\{\begin{array}{r}x^2-2x-3\\+2x+1\\-2\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{r}x^2-2x-3\\4x+4\\-4\end{array}\right\};$$

sustituyendo por la funcion x^2-3x-3 su valor 5, será

$$5^{3|1}=5.\left\{5+2x-1\right\}\cdot\left\{5+4x\right\} \qquad (8)$$

igualdad que no es cierta, pues sustituyendo en el segundo miembro en lugar de x cualquiera de los dos valores que hacen $x^2-3x-3=5$, resultará dicho segundo miembro. $5\ .\ (5+7)\ .\ (5+16)$ con $x=4$ ó $5.12.21=1260$. El segundo valor de $x=-2$ anula la facultad, luego los dos valores del segundo miembro de la igualdad (8), son distintos del primero que es $5^{3|1}=5.6.7=210$.

Veamos si con la notacion adoptada por nosotros para simbolizar las facultades, se produce en las aplicaciones el absurdo que acabamos de observar en el caso anterior, $f\,(x\mid k)^m$ será en este caso

$$\left\{\left\{x\mid 1\right\}^2-2\left\{x\mid 1\right\}-3\right\}^3.$$

y el desarrollo de la facultad el mismo que el anterior, de modo que el segundo miembro de la facultad tiene el mismo valor numérico, y como el primero se reduce á

$\left\{(4|1)^2-2(4|1)-3\right\}^3$; con $x=4$ resultará $\left.\begin{array}{r}4^2-2.4-3\\(4+1)^2-2(4+1)-3\\(4+2)^2-2(4+2)-3\end{array}\right\}=5.12.21.$

que es el mismo valor del primer miembro.

Otras propiedades más notables de las facultades podriamos consignar aquí; pero nos hemos propuesto tratar solo aquellas que se fundan en los principios del álgebra elemental.

La teoría de las factorelas, así como la de las facultades, se prestan á un gran número de aplicaciones y tienen una importancia decisiva en algunas cuestiones del análisis algebráico. El carácter puramente elemental de estos apuntes, nos impide entrar en consideraciones más profundas acerca de la teoría de las facultades y prescindir por completo, de las conocidas bajo la denominacion de exponenciales.

FIN.

REFUTACION

DEL PARECER DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS,

ACERCA DEL DESARROLLO DE LA FACTORELA

$$\{a\times b\}^{m|k}.$$

Conservamos la notacion antigua $\{a\}^{m|k}$ en esta parte, porque es la que usábamos, y de ella se sirve el informe.

Este trabajo, unido á otro sobre Diferencias é Integrales finitas de las funciones, fué remitido á informe de la Academia y evacuado hace ya algun tiempo, aprobando la publicacion de ambos; pero á condicion de hacer en este una correccion con la que no estamos conformes, ni con las apreciaciones de la Academia sobre dicho punto.

La parte del informe en que se hacen dichas apreciaciones, y que nos proponemos refutar, dice á la letra lo siguiente:

«Una de las propiedades más notables de las *Facultades* y *Factorelas* es la expresada en la ecuacion siguiente, que se concreta »á estas últimas porque es de las que tratamos en este momento.

$$(A') \qquad a^{mn|k} = \{a^{n|mk}\}^{m|k}$$

»Esta fórmula es fundamental porque, en realidad, de ella es de »donde Wronski dedujo la que sirve para la extraccion de las ba»ses de las facultades, de la que se deducen notables é importantí»simas aplicaciones, como lo ha hecho ver en las diferentes obras »á que se aludió anteriormente. El autor, no obstante, la califica de »absurda y se empeña en demostrarlo diciendo que si insiste sobre »este particular, es porque á seguida se verá que se han establecido »algunos principios bajo el supuesto falso de ser cierta aquella »ecuacion.

»La Academia tendrá, por lo ménos, que insistir tambien para »hacer ver que no es acertada esa opinion, y se vé, por consi»guiente, obligada á entrar en algunos detalles, que procurará »abreviar todo lo posible.

»Para demostrar el absurdo que en su concepto envuelve la cita»da ecuacion, tóma el autor dos factorelas de bases *a* y *b* distintas, »pero de igual exponente *m* é igual incremento *x*, y dice que si »pudiera verificarse que

$$a^{m|k} \cdot b^{m|k} = (a.b)^{m|k} \ldots\ldots (1)$$

»su desarrollo seria el siguiente:

»Primer miembro:

$$a^{m|k} \cdot b^{m|k} = a(a+k)(a+2k)\ldots\ldots\big(a+(m-1)k\big)$$

$$\times b(b+k)(b+2k)\ldots\ldots\big(b+(m-1)k\big) = ab.(a+k)(b+k)(a+2k)(b+2k)\ldots$$

$$\ldots\big(a+(m-1)k\big)\big(b+(m-1)k\big)\ldots\ldots (2)$$

»Segundo miembro:

$$(ab)^{m|k} = ab(ab+k)(ab+2k)\ldots\ldots\big(ab+(m-1)k\big)\ldots\ldots (3)$$

»Pero dice, los segundos miembros de las ecuaciones (2) y (3) no »pueden ser iguales, cualquiera que sean los valores de *a*, *b* y *k* »porque siempre se verificará que $(a+k)(b+k) > ab+k$; $(a+2k)$ »$(b+2k) > ab+2k \ldots\ldots$ & luego es un absurdo suponer que se »verifica la ecuacion (1). Para confirmar ó hacer más palpable esta »deduccion pone algunos ejemplos numéricos como el siguiente: »Siendo las factorelas $3^{2|1}$ y $4^{2|1}$ se tendrá $3^{2|1} \times 4^{2|1} = 3(3+1).4(4+1)$ »$=3.4.4.5=240$ mientras que $\{3.4\}^{2|1} = 12^{2|1} = 12.13 = 156$ y así »otros varios.

»Pero el autor se olvida de una circunstancia esencial, que cam»bia por completo el aspecto de la cuestion. Esta circunstancia es »la que al hacer el desarrollo $\{ab\}^{m|k}$, el incremento afecta á cada »una de las bases *a* y *b*, de suerte que en vez de ser ese desarrollo

»$ab(ab+k)(ab+2k)\ldots\ldots\big(ab+(m-1)k\big)$ debe sér

»$(H)\ldots\ldots ab(a+k)(b+k)(a+2k)\ldots\ldots\big(a+(m-1)k\big)\big(b+(m-1)k\big)$

»Esto, que se deduce claramente de la índole especial de la teoría »de las factorelas, se verá con más claridad acudiendo á las facul- »tades, de que no es más que un caso particularísimo, el de las »factorelas de base constante. Sean las dos facultades cuyas bases »son dos funciones distintas de la variable x, pero con exponente »é incremento constantes é iguales,

$$\text{»(B)}\ldots\ldots f(x)^{m|k}\times f'(x)^{m|k}=\{f(x)\times f'(x)\}^{m|k}$$

»es evidente que debiendo aplicarse siempre á la variable el incre- »mento, todos los factores del desarrollo de ambos miembros serán »afectados por él, de la manera que corresponde á la esencia de las »facultades y que por consiguiente se tendrán

$$\text{»Desarrollo (C)}\begin{cases}\text{1.}^{\text{er}}\text{ miembro }\{f(x)f(x+k)f(x+2k)\ldots f(x+(m-1)k)\}\\ \qquad\qquad\times\{f'(x)f'(x+k)f'(x+2k)\ldots\ldots f'(x+(m-1)k)\}\\ \text{2.}^{\text{o}}\text{ miembro }\{f(x)f'(x)\}\ \{f(x+k)f'(x+k)\}\ \{f(x+2k)f'(x+2k)\}\\ \qquad\qquad\ldots\ldots\{f(x+(m-1)k).f'(x+(m-1)k\}\end{cases}$$

»Cuyos miembros son idénticos y hacen ver la equivocacion pade- »cida por el autor, puesto que si hacemos $f(x)=a$, $f'(x)=b$ se tendrá

$$\text{(D)}\begin{cases}\text{1.}^{\text{er}}\text{ miembro }\{a(a+k)(a+2k)\ldots\ldots(a+(m-1)k\}\\ \qquad\qquad\times\{b(b+k)(b+2k)\ldots\ldots(b+(m-1)k)\}\\ \text{2.}^{\text{o}}\text{ miembro }ab(a+k)(b+k)(a+2k)(b+2k)\ldots\\ \qquad\qquad\ldots\ldots(a+(m-1)k)(b+(m-1)k)\end{cases}$$

»y haciendo, como en el ejemplo numérico antes presentado, $a=3$, »$b=4$, $m=2$, $x=1$ se tendrá

»1.er miembro $3(3+1)\times4(4+1)=240$

»2.° miembro $3.4(3+1)(4+1)=240$.

»Sin necesidad de entrar en más largas consideraciones, parece »suficientemente demostrada la equivocacion padecida por el au- »tor del trabajo que se examina.»

Siguiendo nosotros el mismo órden que la parte del informe que dejamos copiada, y ocupándonos por consiguiente de la ecuacion (A'), diremos que volvemos á insistir en que dicha fórmula que la Academia llama fundamental, es inexacta, y Wronski no deduce de ella, como dice el informe, la que sirve para extraccion de bases de las facultades, sino que la deduce de la (A) (pár. 18) que demuestra directamente por el segundo procedimiento de los dos que damos allí á conocer, sin tener en cuenta para nada la ecuacion (A').

Concretando la cuestion, vemos que la ecuacion (A') será cierta si lo es la

$$(1)\quad a^{m|k}\, b^{m|k} = (ab)^{m|k}.$$

y si no es cierta esta, aquella tampoco lo será.

Queda, pues, simplificada y reducida la cuestion, á averiguar si es cierta la igualdad anterior (1).

Las consideraciones hechas en los párrafos (14) y (20), bastan por sí solas para demostrar que no es exacta la referida fórmula, ni por consiguiente la (A'). Así es que para refutar el parecer del informe, nos vemos obligados á reproducir la mayor parte de los argumentos empleados en los dos párrafos referidos.

Para demostrar la fórmula (1), establece la Academia la (B), con la que estamos conformes y la hemos demostrado en el párrafo (17), fórmula $\overline{(x'')}$

Desenvolviendo ambos miembros de la fórmula (B), deduce la (C), que es efectivamente cierta y estamos de acuerdo con el informe; pero con lo que no estamos de acuerdo, es con lo que el informe supone al decir, que haciendo en la (C) $f(x)=a$ y $f'(x)=b$ se deduce la (D).

Esto no solo no es exacto, sino que es elemental la nocion, de que si en cada una de las funciones $f(x+k), f(x+2k) \ldots f(x+(m-1)k)$ se dá á la variable un valor $x=h$ que haga $f(h)=a$, el que toman dichas funciones, se determina segun la série de Taylor por los desenvolvimientos

$$(p)\left\{\begin{array}{l} f(h+k)=a+kf'(h)+\dfrac{k^2}{2}f^2(h)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(h+2k)=a+2kf(h)+\dfrac{4k^2}{2}f^2(h)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f\big(h+(m-1)k\big)=a+(m-1)kf'(h)+\dfrac{(m-1)^2k^2}{2}f^2(h)\ldots\ldots \end{array}\right.$$

y no es $a+x$; $a+2x \ldots a+(m-1)x$, como supone la Academia.

Por consiguiente, la ecuacion (D) no se deduce de la (C), y como precisamente en esta trasformacion es en la que se funda el informe para demostrar la (1), resulta que dicha ecuacion no queda demostrada, ni por consiguiente la (A').

No es exacto tampoco que las factorelas son un caso particular de las facultades, cuando en estas se hace $f(x)=a, f'(x)=b$; pues si esto fuera cierto, no de la ecuacion (D) que establece el informe, sino de la que resultaria sustituyendo en (C), por cada uno de sus factores, los respectivos valores hallados en (P), se deducirian las factorelas $a^{m|k}$, $b^{m|k}$, y ya hemos demostrado en el párrafo (20) y omitimos repetirlo aquí, que esto no se verifica.

Efectivamente, las facultades se generan de una manera esencialmente distinta de las factorelas, y por consiguiente, ni las segundas pueden deducirse de las primeras, ni las propiedades de las unas pueden hacerse en general extensivas á las otras.

Pero la Academia en la ecuacion (D), dá los valores numéricos $a=3$; $b=4$; $m=2$; $k=1$ que la satisfacen, lo cual no prueba nada, toda vez que dicha igualdad es una identidad, sin otra diferencia entre el primero y segundo miembro, que el órden diverso de colocacion que tienen sus factores.

Aquí terminariamos nuestra refutacion, si nos limitáramos sólo á probar que la Academia no ha demostrado, como se proponia, las ecuaciones (A') y (1), pues considerando suficientes los razonamientos hechos en los párrafos (14) y (20) para demostrar que dichas ecuaciones no son exactas, nada tendriamos que añadir. Pero áun con el temor de ser difusos, acumulando razonamientos sobre un asunto á nuestro parecer ya demostrado, diremos todavía dos palabras más sobre la inexactitud de las ecuaciones (A') y (1).

Segun vimos en el párrafo (14), para que la igualdad (A') fuera cierta, debia necesariamente desenvolverse la factorela

$$(1) \quad \{a(a+mk)(a+2mk)\ldots\ldots\{a+(n-1)mk\}\}^{m|k}$$

bajo la forma

$$(2) \quad \{a(a+mk)(a+2mk)\ldots\ldots(a+(n-1)mk)\}$$

$$\times\{(a+k)(a+mk+k)(a+(2m+1)k)+\ldots\ldots(a+(n-1)mk+k)\}+\ldots\ldots$$

aplicando el incremento á cada factor, como supone la Academia que debe desenvolverse, y lo cual, supone cierto el principio de ser la factorela de un producto, igual al producto de las factorelas.

Nosotros vamos á demostrar que la (1) no se desenvuelve bajo la forma (2) sino bajo la forma

$$(3)\quad \{a(a+mk)\,(a+2mk)\ldots\ldots a+(n-1)mk\}\cdot$$
$$\{a(a+mk)\ldots\ldots(a+(n-1)mk)+k\}\times\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\{a(a+mk)\ldots\ldots(a+(n-1)mk)+(m-1)k\}$$
$$=a^{n|mk}\{a^{n|mk}+k\}\cdot\{a^{n|mk}+2k\}\ldots\ldots\{a^{n|mk}+(m-1)k\}$$

y por consiguiente, que no es la factorela de un producto igual al producto de las factorelas.

Para ello, tomemos en consideracion el segundo miembro de (A'), $\{a^{n|mk}\}^{m|k}$ y en dicha expresion se representa la factorela de exponente m é incremento x de una base, que es á su vez factorela de exponente n é incremento mk de la base a. Para desarrollar dicha factorela, podemos empezar desarrollando indistintamente la una primero que la otra, y por cualquiera de ellas que se empiece, serán iguales los desenvolvimientos; así tendremos,

$$(4)\ \{a^{n|mk}\}^{m|k}=a^{n|mk}\{a^{n|mk}+k\}\cdot\{a^{n|mk}+2k\}\ldots\{a^{n|mk}+(m-1)k\}$$

$$(5)\qquad \{a^{n|mk}\}^{m|k}=\{a(a+mk)\,(a+2mk)\ldots\ldots(a+(n-1)mk)\}^{m+k}.$$

Siendo idénticos los primeros miembros de estas ecuaciones, serán iguales los segundos. Pero el segundo miembro de la (5) es la factorela de un producto indicada en (1); el segundo miembro de la (4) es idéntico al (3), luego el desenvolvimiento de la (1) es el (3), y no el (2), luego la ecuacion (A') no es cierta.

Terminaremos con un razonamiento sencillísimo, hecho sobre un valor numérico, que demostrará con gran sencillez que la factorela de un producto es

$$\{a.b\}^{m|k}=ab\,(ab+k)\,(ab+2k)\ldots\ldots(ab+(m-1)k)$$

y no, como supone el informe de la Academia,

$$ab\,(a+k)\,(b+k)\,(a+2k)\,(b+2k)\ldots\ldots(a+(m-1)k)\,(b+(m-1)k).$$

Sea un número 30, base de una factorela de exponente m é incremento k y tendremos

(6) $$\left\{30\right\}^{m|k}=30\,(30+k)\,(30+2k)\ldots\ldots(30+(m-1)k)$$

si en ambos miembros sustituimos por 30 su igual 2.3.5., la igualdad anterior no se alterará y será por consiguiente

(7) $$\left\{2.3.5\right\}^{m|k}=2.3.5\,(2.3.5+k)\,(2.3.5+2k)\ldots\ldots(2.3.5+(m-1)k)$$

Pero el informe dice que esta igualdad no es cierta y que el desarrollo de su primer miembro se efectúa en

(8) $$\left\{2.3.5\right\}^{m|k}=2.3.5\,(2+k)\,(3+k)\,(5+k)\,(2+2k)\,(3+2k)\,(5+2k)\ldots\ldots$$

$$(2+(m-1)k)\,(3+(m-1)k)\,(5+(m-1)k)$$

Pues aceptando este desenvolvlmiento, como su segundo miembro no es igual al segundo de la (6), los primeros tampoco serán iguales, luego $\left\{30\right\}^{m|k}$ no será igual á $\left\{2.3.5\right\}^{m|k}$ luego

(9) $$\left\{30\right\}^{m|k} \gtrless \left\{2.3.5\right\}^{m|k}$$

Pero si con cantidades desiguales se hacen operaciones iguales, los resultados serán tambien desiguales; luego extrayendo la base de exponente m é incremento x en ambas factorelas de la (9), resultará el siguiente absurdo

$$30 \gtrless 2.3.5$$

á que nos conduce el desarrollo (8) de la factorela de un producto, hecho en la forma que pretende la Real Academia de Ciencias.

FÉ DE ERRATAS

Página.	Línea.	Dice	Debe decir
8	22	$\{a\pm(m-1)\}$	$\{a\pm(m-1)k\}$
16	4	$\dfrac{\{m+1\}^n}{\{1+1\}^n}$	$\dfrac{\{m+-1\}^n}{\{1+1\}^n}$
16	8	$\{m-+1\}^n$	$\{m+-1\}^n$
23	última	(9)	(q)
24	4	(9)	(q)
46	15	se genera	se genere
52	7	x	k
53	23	$x=1$	$k=1$
54	última	$a+x;\ a+2x\ldots\ a+(m-1)\,x,$	$a+k;\ a+2k\ldots a+(m-1)k$
56	13	x	k
57	17	x	k

Este cuaderno se vende en Madrid en las principales librerías, al precio de

2 pesetas.