GEOMETRÍA ESTEREOMÉTRICA,

Ó COLECCION

de Polígonos y Poliedros

de carton,

para facilitar el estudio de la Geometría.

Acompañada de algunas nociones de esta ciencia para conocer dichos cuerpos y determinar sus superficies y volúmenes.

CÁDIZ.

IMPRENTA, LIBRERÍA Y LITOGRAFÍA DE LA REVISTA MÉDICA,
á cargo de D. Juan B. de Gaona,
plaza de la Constitucion, número 11.
1851.

GEOMETRÍA ESTEREOMÉTRICA

Ó COLECCION

DE POLÍGONOS Y POLIEDROS EN CARTON,

PARA FACILITAR

EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA:

ACOMPAÑADA DE ALGUNAS NOCIONES DE ESTA CIENCIA PARA CONOCER DICHOS CUERPOS Y DETERMINAR SUS SUPERFICIES Y VOLÚMENES.

CÁDIZ.

IMPRENTA, LIBRERÍA Y LITOGRAFÍA DE LA REVISTA MÉDICA,
Á CARGO DE D. JUAN B. DE GAONA,
plaza de la Constitucion, número 11.
1851.

NOCIONES DE GEOMETRÍA.

Se llama Geometría la ciencia de la estension.

En geometría se consideran tres dimensiones, que son: *longitud, latitud* y *profundidad, altura* ó *grueso*; llamando *longitud* al largo, *latitud* al ancho, y *altura* al grueso de una figura.

Se llama *cuerpo* todo lo que ocupa un lugar en el espacio, constando de estas tres dimensiones; su límite, esto es, lo que le separa del espacio que lo rodea se llama *superficie*. La *superficie* no tiene sino dos dimensiones: que son *longitud* y *latitud*. Los límites de estas superficies se llaman *líneas*; la *línea* se concibe que no tiene sino *longitud*. En fin, los estremos de las líneas se llaman *puntos*, los cuales se consideran sin ninguna dimension.

La *línea recta*, es la menor distancia entre dos puntos. La *línea quebrada*, la que está compuesta de líneas rectas. La *línea curva*, la que no es ni recta ni quebrada. Y la *línea mista*, la formada por la recta y la curva.

El *plano*, es una superficie sobre la cual se halla situada toda entera la recta que une dos puntos cualesquiera de esta superficie.

Cuando dos rectas se cortan, el espacio indefinido que resulta entre ellas, se llama *ángulo*; y el punto comun ó de *interseccion, vértice*. Cuando una recta cae sobre otra, sin inclinarse mas á un lado que á otro, se dice que las dos rectas son *perpendiculares*; y el ángulo que forman se llama *recto*; cuando un ángulo es mayor que un recto se llama *obtuso*; y cuando es menor *agudo*.

Dos rectas que, situadas en un mismo plano, no pueden encontrase por mucho que se las suponga prolongadas, se dice que son *paralelas*.

Las partes de líneas paralelas interceptadas por otras dos paralelas, son iguales.

FIGURAS PLANAS.

Triángulos.—Definiciones.

Llámase *triángulo* la figura cerrada por tres líneas. Se dividen segun los lados en *equiláteros, isósceles* y *escalenos*; y segun los ángulos en *rectángulos, acutángulos* y *obtusángulos*.

En un triángulo se llama *base*, el lado sobre que se supone descansar; y *altura* la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo opuesto á la base ó á su prolongacion.

A la estension comprendida entre las lineas que terminan una figura, se le da el nombre de *área ó superficie*.

La superficie de los triángulos se halla multiplicando la altura por la mitad de la base.

1. *Triángulo equilátero.*

Este triángulo tiene sus lados y sus ángulos iguales.

2. *Triángulo rectángulo.*

Este triángulo tiene un ángulo recto *a*; el lado *cb*, opuesto á este ángulo, se llama *hipotenusa*; y los otros dos *catetos*.

3. *Triángulo isósceles.*

El triángulo *isósceles* tiene dos lados y dos ángulos iguales.

Este triángulo además es *acutángulo*, por que tiene sus tres ángulos agudos.

4. *Triángulo escaleno.*

Se llama *escaleno* al triángulo que tiene sus tres lados desiguales.

Además, es obtusángulo por tener un ángulo, *a*, obtuso.

5. *Del círculo.*

Se llama *círculo* á la figura terminada por una curva que goza de la propiedad de que todos sus puntos se hallan á igual distancia de otro interior, que se llama *centro*.

La curva que limita el círculo, se llama *circunferencia*.

Una recta *oc* que parte del centro *o* y se termina en la circunferencia, se llama *radio*; un *diámetro* es una recta *ab*, que pasando por el centro, tiene sus estremos en la circunferencia; una parte *cde* de la circunferencia es un *arco*; la recta *ce*, que une las estremidades de este arco, se llama *cuerda*.

Una recta que no tiene sino un punto comun con la circunferencia, es una *tangente* al círculo.

Se entiende por *secante* una recta que atraviesa la circunferencia.

El área de un círculo es igual al producto de la mitad del radio por la circunferencia.

5. *Sector y segmento.*

La porcion de círculo *ocde*, comprendida entre dos radios *oe* y *oc* y el arco *cde*, se llama *sector*.

Su superficie es igual á la mitad del producto de su arco *cde* por el radio *oc*.

La parte de círculo comprendida entre un arco *cde* y su cuerda *ce*, se llama *segmento*.

Su superficie es igual á la del sector *ocde*, formado sobre el mismo arco, menos la del triángulo *oce*.

POLÍGONOS.

Se llama *polígono* una figura terminada por rectas. Los polígonos se dividen, segun el número de sus lados, en *cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octágonos, eneágonos, decágonos, dodecágonos* etc.

Al contorno de un polígono se le da el nombre de *perímetro*.

Se llama *diagonal* á una recta que atraviesa el polígono de uno á otro ángulo.

Cuando todos sus lados y sus ángulos son iguales, se dice que el polígono es *regular*.

CUADRILÁTEROS.

Se llama así al polígono formado por cuatro lados. Se dividen en unos que son *paralelógramos*, y en otros que no lo son, siendo estos el *trapecio* y el *trapezóide*.

Los *paralelógramos* se llaman así por tener sus lados opuestos paralelos, y se dividen en *cuadrado, rectángulo, rombo* y *rombóide*; á este lo considerarémos primero por derivarse de él todos los demás.

En los paralelógramos se considera por *base* uno cualquiera de sus lados, siendo la *altura* la perpendicular, tirada sobre aquel lado, desde su opuesto.

Una diagonal divide á un paralelógramo, en dos triángulos iguales.

La superficie de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.

6. Rombóide.

Se llama *rombóide* al paralelógramo que no tiene ningun ángulo recto.

7. Rombo.

Cuando todos los lados de un rombóide son iguales, la figura toma el nombre de *rombo*.

8. Rectángulo.

Cuando el rombóide llega á tener sus ángulos rectos, toma el nombre de *rectángulo*.

9. Cuadrado.

Un rectángulo que tiene todos sus lados iguales, se llama *cuadrado*.

El cuadrado es, pues, un polígono regular.

En el rectángulo y en el cuadrado, la altura es uno de los lados contiguos al que se supone ser la base.

En el rombo y en el cuadrado las diagonales se cortan perpendicularmente.

10. Trapecio.

Se llama así al cuadrilátero que tiene dos lados paralelos llamados *bases*; estos dos lados son desiguales.

La altura de un trapecio es la perpendicular tirada entre sus bases.

Una diagonal divide á un trapecio en dos triángulos desiguales.

La superficie de un trapecio es igual al producto de la semisuma de sus lados paralelos por la altura.

11. Trapezóide.

Se llama así al cuadrilátero que no tiene ninguno de sus lados paralelos.

Para hallar su superficie se necesita tirar una diagonal *bc* que descompondrá la figura en dos triángulos desiguales *abc* y *bcd*; determinando las superficies de estos triángulos, por medio de la regla dada, la suma de ellas será la superficie del trapezóide.

POLÍGONOS REGULARES.

Polígono regular es, como ya se ha dicho, el que tiene todos sus lados y ángulos iguales.

Un polígono está *inscrito* en el círculo cuando todos sus lados son cuerdas de este círculo.

Si sus lados fuesen todos tangentes al círculo, el polígono estaría *circunscrito*.

El radio del círculo *inscrito* se llama *apotema*, llamándose de aquel modo el círculo á que se ha circunscrito un polígono.

Todos los polígonos regulares pueden inscribirse y circunscribirse al círculo.

El área de un polígono regular es igual á su perímetro, multiplicado por la mitad de la apotema.

12. Pentágono regular.

Se llama así al polígono regular formado por cinco lados.

13. Hexágono regular.

Hexágono regular es el que tiene seis lados iguales.

14. Heptágono regular.

Se llama *heptágono regular* la figura formada por siete lados iguales, siéndolo tambien sus ángulos.

Así se siguen denominando *octágono, eneágono, decágono, dodecágono*, etc. regulares, á los polígonos regulares de ocho, nueve, diez, doce etc. lados, que representan las figuras núms. 15, 16, 17 y 18.

POLIEDROS.

Preliminares.

Se llama *poliedro* una figura terminada por planos, ó caras planas.

Entre los poliedros se distinguen, á causa del número de sus caras, el *tetraedro*, el *pentaedro*, el *hexaedro*, el *heptaedro*, el *octaedro*, el *dodecaedro*, el *icosaedro*, etc.

Se llaman *aristas* y *vértices* de un poliedro, los lados y vértices de sus caras.

Una *diagonal* es una recta que une dos vértices no situados en la misma cara.

Se llama *ángulo sólido ó poliedro* al espacio angular comprendido entre varios planos, y entre los que se distinguen el *ángulo diedro*, formado por dos planos, el *triedro* formado por tres, etc.

Se llama *volúmen* el espacio contenido por la superficie de un poliedro ú ocupado por este cuerpo.

Poliedros regulares son los que están formados de caras regulares, iguales entre sí, formando ángulos poliedros iguales.

Rapigado

PIRÁMIDES.

Un poliedro cuya forma es tal, que todas las aristas, que parten de los vértices de un polígono, se cortan en un punto cualquiera del espacio, es una *pirámide*.

Así, se llama *pirámide* un poliedro cuya base es un polígono cualquiera y cuyas caras laterales, son triángulos, que elevándose sobre los lados de este polígono, se reunen formando un ángulo poliedro que es el *vértice* de la pirámide.

La *altura* de una pirámide es la perpendicular tirada del vértice á la base ó á su prolongacion.

Una pirámide es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc. segun el número de lados que tiene su base.

A las pirámides triangulares se les da tambien el nombre de *tetraedros*.

La pirámide se llama *regular* cuando tiene por base un polígono regular, siendo el centro de esta el pié de la altura; esta última condicion basta para que la pirámide sea *recta*.

La perpendicular tirada del vértice á uno de los lados de la base de una pirámide regular, se llama *apotema*, que es la que mide las alturas de los triángulos que forman la superficie lateral.

Dos pirámides de igual base y altura, son equivalentes en volúmen.

La superficie de toda pirámide es igual al área de su base mas las de las caras laterales.

El volúmen es igual á la tercera parte del producto del área de su base por su altura.

1. *Tetraedro regular*.

Se llama así á esta pirámide por estar formada por cuatro caras; siendo todas ellas triángulos equiláteros iguales.

2. *Tetraedro irregular ó pirámide triangular recta*.

Este tetraedro no es regular por no tener iguales sus caras.
Se llama *pirámide triangular* por ser la base un triángulo.

3. *Tetraedro irregular*.

Este poliedro proviene de un ángulo triedro separado del poliedro n.° 41.

La cara *rgo* es igual á una de las caras *abc* del poliedro n.° 41; si esta cara se coloca sobre cada una de las del tetraedro regular n.° 1, se compondrá el *cubo* n.° 37.

4. *Tetraedro irregular recto.*

La cara A de este tetraedro es igual á cada una de las del *octaedro regular* n.° 38.

5. *Tetraedro, construido sobre una de las caras del icosaedro n.° 40.*

La cara *abc* es regular é igual á una de las del *icosaedro regular* número 40.

6. *Pirámide cuadrangular recta.*

Se llama *cuadrangular* esta pirámide por tener por base un cuadrilátero.

7. *Pentaedro piramidal recto.*

Se llama *pentaedro* el poliedro formado por cinco caras; es lo mismo que una pirámide cuadrangular.
Este poliedro está construido sobre una de las caras del *cubo* n.° 37, siendo su altura igual á la mitad de una de las aristas de dicho poliedro.
Su volúmen, además de lo que se ha dicho, es igual á la sesta parte del *cubo*, n.° 37.

8. *Hexaedro irregular piramidal recto*

Este poliedro se llama *hexaedro* por estar compuesto de seis caras; es tambien una *pirámide pentagonal,* llamándose así á la que tiene por base un pentágono.
Este sólido proviene de la parte cortada del poliedro n.° 18.
La base pentagonal regular de esta pirámide, es igual á la base superior A de la *pirámide* truncada n.° 18.

9. *Pirámide pentagonal recta.*

Esta pirámide es regular por serlo su base y ser recta.

10. *Hexaedro irregular, piramidal, recto.*

Este poliedro está construido sobre una de las caras del *dodecaedro regular* n.° 39.
El volúmen de esta pirámide es tambien igual á la doceava parte de dicho dodecaedro.

PIRÁMIDES OBLÍCUAS.

11. *Tetraedro irregular ó pirámide triangular oblícua.*

Una pirámide es oblícua cuando la perpendicular bajada desde su vértice no pasa por el centro de la base.
Como la base B de este poliedro es igual á la base A del tetraedro

n.° 2, y que ambos tienen iguales alturas, estos dos poliedros son equivalentes.

12. Pentaedro piramidal oblicuo, de base regular.

Esta pirámide cuadrangular es oblicua por la misma razon que la anterior.
La base A es un cuadrado.

13. Pentaedro piramidal oblicuo.

Esta pirámide cuadrangular proviene de la parte cortada al poliedro n.° 17.
La base B es igual á la cara A de dicho poliedro.

14. Pentaedro piramidal oblicuo.

Esta pirámide cuadrangular oblicua, proviene de la parte cortada al poliedro n.° 30.

15. Pirámide pentagonal oblicua.

Véanse los números 11 y 12.

PIRÁMIDES TRUNCADAS.

DEFINICIONES.

Se llama *pirámide truncada ó tronco de pirámide*, aquella á que se ha cortado la parte superior por un plano paralelo ú oblicuo respecto á la base.
Cuando el plano secante es paralelo á la base, la parte separada forma una pirámide semejante á la total.
La superficie de un tronco de pirámide es igual á la suma de las áreas de todas sus caras.
En cuanto al volúmen para obtenerlo en general, es menester determinar el de la pirámide entera y el de la parte cortada; la diferencia será el volúmen de la pirámide truncada.

16. Pirámide triangular truncada.

Esta pirámide triangular está truncada por un plano paralelo á la base.
Cuando el plano secante es paralelo á la base, el volúmen del tronco puede hallarse multiplicando la semisuma de las áreas de sus bases paralelas por la altura.

17. Hexaedro irregular ó pirámide cuadrangular recta, truncada oblicuamente

En este poliedro hay que seguir la regla general para hallar su volúmen, puesto que el plano secante es oblicuo respecto de la base.

La cara A es igual á la base B del Poliedro número 13.
Si dicha base B se coloca sobre la cara A, resultará una pirámide cuadrangular recta.

18. Heptaedro piramidal recto, truncado, de base regular.

Esta pirámide pentagonal está truncada por un plano paralelo á la base.
La cara A es semejante á la base B.
Los lados de una pirámide recta truncada paralelamente á la base, son trapecios iguales entre sí.

PRISMAS.

DEFINICIONES.

Se llama *prisma* un poliedro formado por dos caras ó bases iguales y paralelas, y por caras laterales que son paralelógramos.
Un prisma es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun los lados que tiene su base.
Un prisma es *recto* cuando las aristas de las caras laterales son perpendiculares á los planos de las bases.
Un prisma recto es regular cuando lo son sus bases.
La altura de un prisma es la perpendicular tirada entre sus bases paralelas.
La superficie de los prismas es igual al producto del perímetro de una de sus bases por la altura, mas el área de las dos bases paralelas.
El volúmen es igual al producto del área de una de sus bases por la altura.

19. Prisma triangular recto.

Este prisma es *triangular* por ser sus bases dos triángulos; como estos son equiláteros el prisma es regular.
Un prisma triangular regular está compuesto de tres rectángulos iguales y de dos triángulos equiláteros iguales entre sí.

20. Prisma pentagonal recto.

Un prisma es *pentagonal* cuando sus bases son pentágonos.
Cuando un prisma es recto su altura es igual á una de sus aristas laterales.

21. Prisma triangular oblícuo.

Un prisma es oblícuo cuando las aristas de sus caras laterales no son perpendiculares á los planos de las bases.

PARALELEPÍPEDOS.

Cuando un prisma es cuadrangular, esto es, que tiene por bases dos paralelógramos, el cuerpo toma el nombre de *paralelepípedo*.
Si las bases son rectangulares se llama *paralelepípedo—rectángulo*.
La superficie y volúmen de los paralelepípedos se halla del mismo modo que en los prismas.

22. *Prisma cuadrangular recto.*

Este poliedro es un paralelepípedo-rectángulo, porque sus bases son dos cuadrados.

23. *Hexaedro prismático, irregular recto ó paralelepípedo-rectángulo recto.*

Este paralelepípedo es rectángulo por ser sus bases A y B rectangulares.
Es recto porque la arista CD es perpendicular á sus bases.

24. *Hexaedro irregular ó paralelepípedo recto.*

Las bases A y B de este paralelepípedo son rombos; las caras laterales *abcd*, *cdef*, etc., son todas iguales.
Es recto porque las aristas *ab*, *cd*, etc., son perpendiculares á los planos de las bases.

25. *Paralelepípedo oblícuo.*

Un paralelepípedo es oblícuo cuando sus aristas laterales no son perpendiculares á los planos de sus bases.
Todas las caras de este paralelepípedo son rombóides, escepto sus bases A y B que son rectángulos.

26. *Hexaedro irregular ó paralelepípedo oblícuo.*

Este poliedro es oblícuo porque la perpendicular tirada de la base superior A sobre la inferior B, es menor que una de las aristas laterales *ab* del paralelepípedo.
Este poliedro es equivalente al n.° 24 por tener igual base y altura.

PRISMAS Y PARALELEPÍPEDOS TRUNCADOS.

Los *prismas truncados* son aquellos que se cortan por un plano cualquiera.
La superficie de un prisma ó paralelepípedo truncado es igual al área de todas sus caras.
El volúmen es igual al producto del área de su base por la tercera parte de la suma de las aristas laterales suponiendo que el prisma sea recto.
Si el plano secante fuese paralelo á las bases, resultarian dos prismas que no diferirian del primero sino por sus alturas, pues todos tendrian iguales bases y serian rectos ú oblícuos segun lo fuese el primero.

27 y 28. *Paralelepípedos truncados.*

Los planos secantes de estos paralelepípedos no son paralelos á las bases, y llegan en cada uno de ellos hasta una de sus bases, dejando convertidas las caras laterales de ambos en dos trapecios y dos triángulos.

29. *Prisma cuadrangular truncado.*

El plano secante de este poliedro no llega hasta la base, por lo que las caras laterales resultan todas trapecios.

30. *Pentaedro prismático recto, truncado, de base regular.*

La base A de este poliedro es un triángulo equilátero; por tanto, el cuerpo es un prisma triangular regular.
Su volúmen, como se ha dicho, es igual al producto del área de su base A por la tercera parte de la suma de las tres aristas *ab*, *cd* y *ef*.

31. *Heptaedro prismático truncado de base regular.*

Los dos poliedros números 31 y 32 son equivalentes en superficie y volúmen.
Haciendo coincidir las caras que provienen de la seccion hecha por el plano oblícuo, se formará un prisma, el cual tendrá por bases las A y B de los dos poliedros.
La cara *abcde* es la seccion hecha por el plano secante.

32. *Hexaedro irregular ó prisma truncado.*

Este poliedro proviene de un prisma pentagonal truncado oblícuamente.
Haciendo coincidir la cara que proviene de la seccion hecha por el plano oblícuo con la cara *abcde* del poliedro número 31, se formará el prisma pentagonal de que procede.

DE OTROS VARIOS POLIEDROS.

33. *Romboedro.*

Este es un paralelepípedo que se llama asi porque sus caras son rombos iguales.
Además se le llama *romboedro agudo*, porque los tres ángulos planos iguales que se reunen en un mismo vértice son agudos.
Su superficie y volúmen se halla como si fuera otro cualquier paralelepípedo.

34. *Decaedro piramidal recto, ó pirámides pentagonales regulares con base comun y de diferentes alturas.*

Este poliedro se llama *decaedro* por constar de diez caras; está formado por dos pirámides pentagonales regulares, que teniendo iguales bases y diferentes alturas se han unido por aquellas.
Las líneas IB y OR son las apotemas.
La superficie de este poliedro es igual al semi-producto del perímetro *abcdef* de una de las dos pirámides, por la suma de las dos apotemas del poliedro.
El volúmen es igual á la tercera parte del producto de la superficie pentagonal, de la que *ab* es un lado, por la altura perpendicular de las dos pirámides.

35. *Pirámides pentagonales con base comun.*

Este poliedro está compuesto de dos pirámides pentagonales regulares iguales entre sí.

Su superficie y volúmen se hallan como se ha dicho en el decaedro irregular número 34.

36. *Octaedro irregular.*

El *octaedro irregular* está compuesto de dos pirámides cuadrangulares regulares é iguales, unidas por sus bases.

Su superficie es igual al producto del perímetro de la base de una de las pirámides que le componen por la suma de las dos apotemas.

Su volúmen se halla como el del decaedro número 34.

DE LOS CUERPOS REDONDOS.

Los *cuerpos redondos* son aquellos que se producen por la revolucion de una figura plana al rededor de uno de sus lados que toma el nombre de *eje*.

CONO RECTO.

El *cono recto* se enjendra por un triángulo rectángulo que gira al rededor de uno de sus catetos; el otro cateto produce un círculo que es la base del cono.

Su superficie es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su lado; y el volúmen es igual al producto del área de su base por la tercera parte de su altura.

CILINDRO.

El *cilindro* se enjendra haciendo girar un rectángulo sobre uno de sus lados; los lados contiguos al eje producen dos círculos que son las bases del cilindro. Su altura es el mismo *eje*.

Su superficie es igual al producto de la circunferencia de una de sus bases por la altura.

El volúmen es igual al producto del área de una de sus bases por su altura.

ESFERA.

La *esfera* es una superficie convexa cuyos puntos distan igualmente de otro llamado *centro*.

Se enjendra por la revolucion de un semi-círculo al rededor de su diámetro.

La semi-circunferencia enjendra la superficie esférica.

El *centro* de la esfera es el mismo que el de la circunferencia porque está enjendrada.

Radio es la recta que partiendo del centro se termina en la superficie.

Se dice que un plano es tangente á la esfera cuando la toca en un solo punto de su superficie.

La superficie de una esfera es igual al producto de su diámetro por su circunferencia.

El volúmen es igual al producto de su área por la tercera parte de su radio.

POLIEDROS REGULARES.

Se ha dicho que *poliedro regular* es el que está compuesto de caras regulares iguales entre sí.

Cinco únicamente son los poliedros regulares que existen, y se llaman tetraedro (del cual se ha hablado núm. 1.°) *hexaedro ó cubo, octaedro, dodecaedro* é *icosaedro.*

La esfera puede inscribirse ó circunscribirse á los poliedros regulares; cuando las caras de estos son tangentes á la esfera, el poliedro está *circunscrito;* está *inscrito* cuando todos sus vértices se hallan en contacto con la esfera.

37. *Hexaedro regular ó cubo.*

El *cubo* está formado por seis cuadrados iguales entre sí; este cuerpo es un caso particular del romboedro.

La superficie del cubo es igual al producto del área de una de sus caras A, por seis, número de caras del poliedro.

El volúmen es igual á una de sus aristas *ab* elevada á la tercera potencia.

38. *Octaedro regular.*

El *octaedro regular* está formado por ocho triángulos equiláteros iguales.

Su superficie es igual al área de una de sus caras *abc* multiplicada por ocho, número de caras de que consta.

Su volúmen es igual al producto del cuadrado de una de sus aristas *ab*, por la tercera parte de la altura de dos ángulos poliedros opuestos.

39. *Dodecaedro regular.*

El *dodecaedro regular* está formado por doce pentágonos regulares iguales.

La superficie *abcdef* es igual á la mitad del producto del perímetro *abcdef* por la apotema *oe.*

La superficie del dodecaedro regular es igual al producto del área de una de sus caras *abcdef* por doce, número de caras del poliedro.

El volúmen es igual al producto de su superficie por la tercera parte del radio de la esfera inscrita á este poliedro.

40. *Icosaedro regular.*

El *icosaedro regular* está formado por veinte triángulos equiláteros iguales entre sí.

La superficie del icosaedro es igual al producto del área de una de sus caras *abc*, por veinte, número de caras de que se compone.

El volúmen es igual al producto de su área por la tercera parte del radio de la esfera inscrita á este poliedro.

POLIEDROS REGULARES TRUNCADOS.

41. *Octaedro irregular.*

Se llama *octaedro* al cuerpo formado por ocho caras.

Este poliedro proviene del cubo número 37, en el cual se han cortado dos ángulos sólidos opuestos por dos planos que pasan por las diagonales de las caras de estos ángulos sólidos.

Todos los ángulos sólidos de este poliedro son tetraedros iguales entre sí.

Colocando la cara *rgo* del poliedro núm. 3 sobre cada cara *abc* se formará el cubo número 37, que ha servido para construir este poliedro irregular.

42. *Octaedro regular truncado.*

Este poliedro proviene del octaedro regular número 38, en el cual se han cortado dos ángulos tetraedros opuestos, por planos tirados á iguales distancias de sus vértices, perpendicularmente á la diagonal que une estos dos vértices.

Su superficie es igual al area de todas sus caras.

Su volúmen es igual al cuadrado de una de las aristas del poliedro regular, mas la superficie de uno de los lados ó bases que provienen del truncamiento, multiplicada esta suma por la altura del poliedro truncado.

43. *Tetraedro regular truncado.*

Este poliedro es un tetraedro regular, cuyos cuatro ángulos poliedros se han cortado por planos paralelos á las caras opuestas á estos ángulos. Todas las aristas son iguales.

Su desarrollo ofrece cuatro hexágonos regulares y cuatro triángulos equiláteros iguales.

Determinando una de las aristas de este tetraedro se podrán obtener la superficie y volúmen del poliedro truncado.

44. *Hexaedro regular truncado oblicuamente.*

Este poliedro es un cubo, truncado por un plano que pasa por las diagonales de las caras del ángulo triedro cortado.

Valuando la superficie y volúmen de la pirámide separada del cubo, sera fácil determinar la superficie y volúmen del poliedro truncado.

45. *Hexaedro regular truncado oblicuamente.*

Este poliedro proviene de un cubo, el cual se ha truncado por dos planos que pasan por las diagonales de las caras de dos ángulos poliedros opuestos.

Su superficie es igual al área de todas sus caras y para hallar el volúmen es menester, determinando la altura de los tetraedros separados del poliedro regular por los planos secantes, hallar el volúmen de estos tetraedros y restándolo del volúmen del poliedro entero se tendrá el del cuerpo de que se trata.

46. *Hexaedro regular truncado.*

Este poliedro proviene de un cubo cuyos ángulos triedros se han cortado de tal suerte que todas las partes separadas sean pirámides iguales entre sí.

La superficie es igual al área de todas sus caras.

Para hallar el volúmen es necesario determinar la altura de una de las pirámides que provienen de las secciones hechas. Hallado el volúmen de una de estas pirámides y multiplicado por ocho, número de secciones, si este producto se resta del volúmen del cubo entero se tendrá el del poliedro propuesto.

47. *Hexaedro ú octaedro regulares truncados.*

Este poliedro proviene de un hexaedro ó de un octaedro regulares truncados.

Para deducirlo del cubo se tomará en este la mitad de cada una de sus aristas y por estas mitades se cortarán todos sus ocho ángulos triedros. Entonces se tiene un poliedro, compuesto de seis cuadrados y de ocho caras triangulares, que provienen del truncamiento, el cual es el mismo de que se trata.

Si se le quiere obtener por el octaedro, en este poliedro regular se tomarán igualmente las mitades de todas sus aristas, por cuyas mitades se cortarán los seis ángulos tetraedros de dicho poliedro; resultará uno semejante al anterior, pues estará compuesto de ocho triángulos equiláteros y de seis cuadrados que provienen de las seis secciones hechas.

Su superficie es igual al área de uno de los cuadrados que le componen, multiplicada por seis, mas la de uno de los triángules multiplicada por ocho.

Para hallar el volúmen lo mas sencillo, es dividir el cuerpo en pirámides que tengan respectivamente por bases las caras del poliedro. Tirando una recta por los centros de cada dos caras iguales y opuestas, todas estas rectas vendrán á concurrir en un mismo punto, mitad de cada una de ellas y centro del poliedro, donde igualmente concurrirán los vértices de todas las pirámides que componen el sólido. La distancia del centro del poliedro á cada una de las caras es la altura de cada una de las pirámides; asi se tiene que el volúmen de este poliedro es igual á seis veces una de las pirámides cuadrangulares, mas ocho veces una de las triangulares.

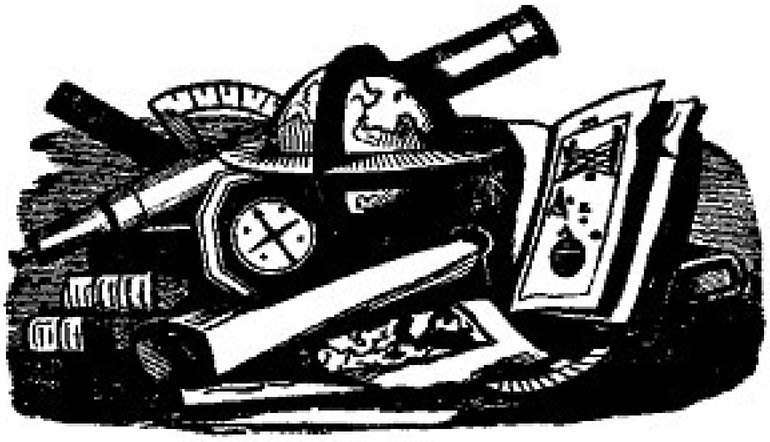
48. *Octaedro regular truncado.*

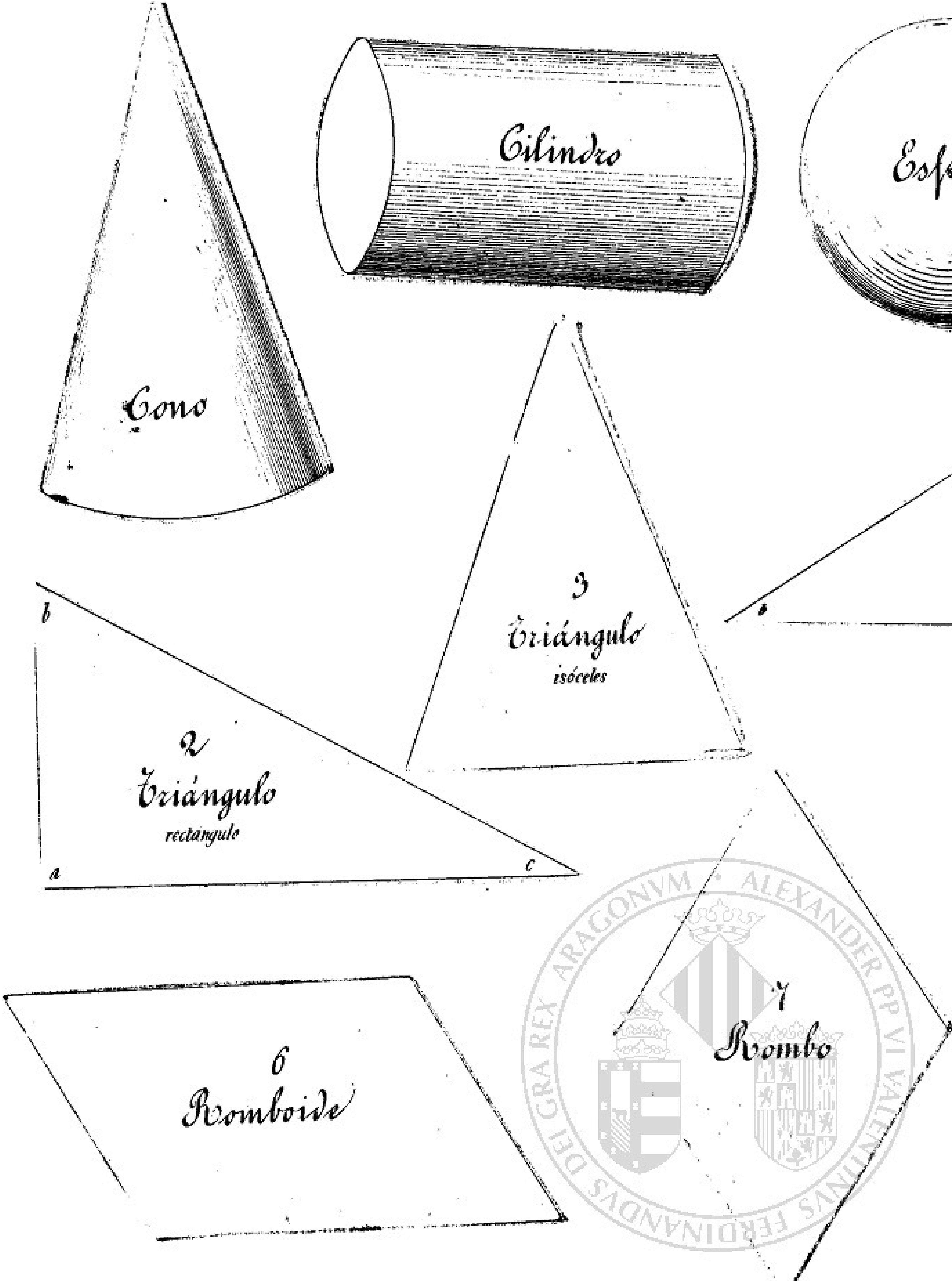
Este poliedro proviene del octaedro regular número 38, cuyos ángulos poliedros se han cortado por planos á iguales distancias de sus vértices, teniendo todos una misma inclinacion; es decir que todas las partes cortadas sean pirámides cuadrangulares regulares, iguales entre sí.

Su desarrollo ofrece como se ve, ocho hexágonos regulares é iguales que son los lados del poliedro regular y seis cuadrados que son las bases de las pirámides cortadas al poliedro por los planos secantes.

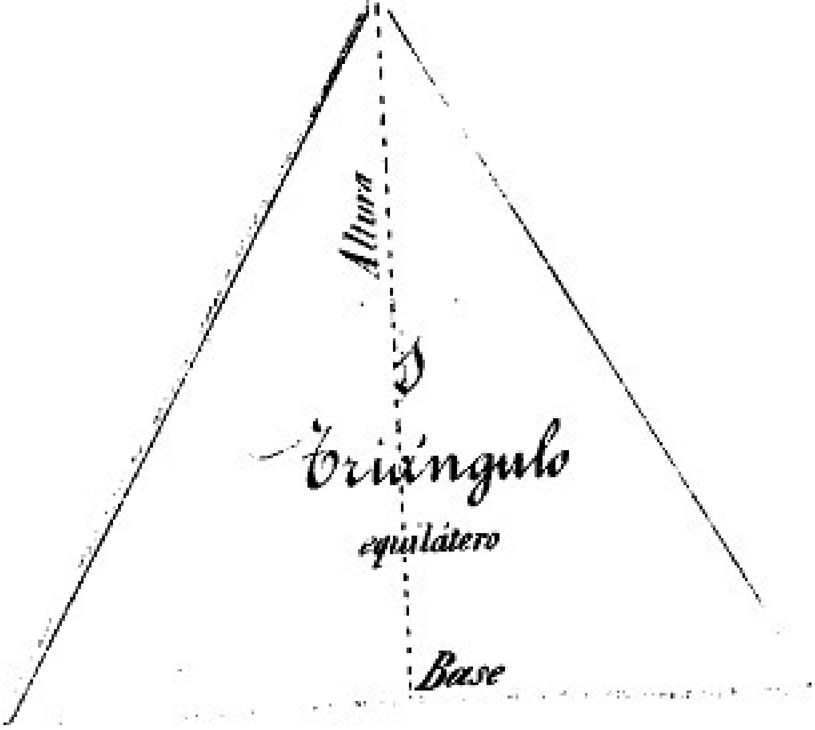
La superficie es igual al área de todas sus caras.

Para hallar el volúmen se necesita determinar: 1.° la altura de una de las pirámides cortadas; 2.° por medio de ellas el volúmen de una de las citadas pirámides; y si este volúmen se multiplica por seis, número de las secciones hechas sobre el poliedro regular, y que el producto se reste del volúmen del poliedro entero número 38 se obtendrá el volúmen buscado.

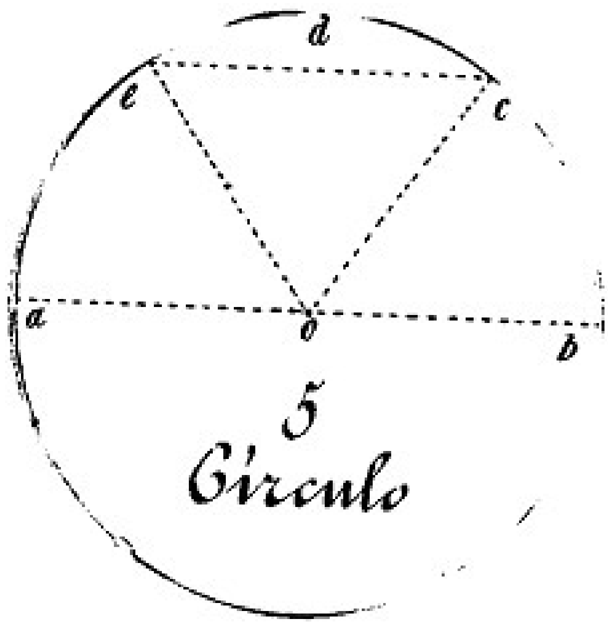



Cilindro
Esf
Cono
3
Triángulo
isóceles
b
2
Triángulo
rectángulo
a
c
7
Rombo
6
Romboide


Esfera

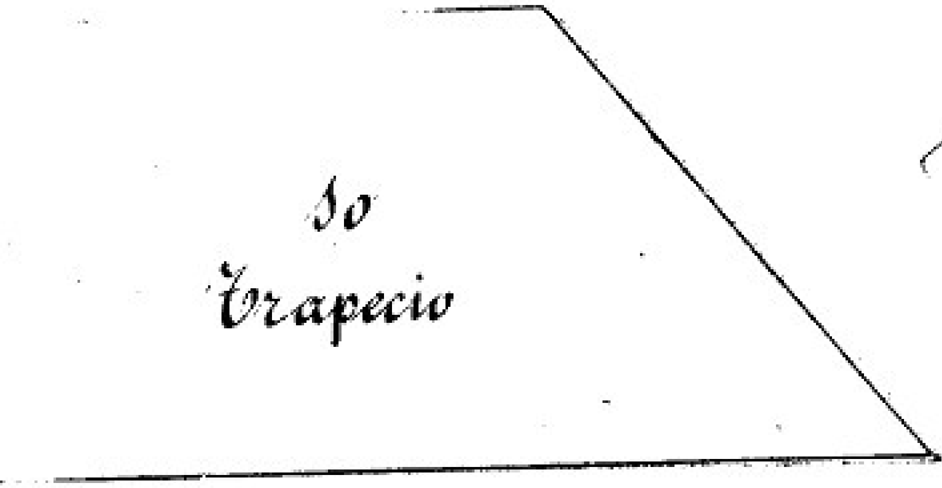

Altura
3
Triángulo
equilátero
Base

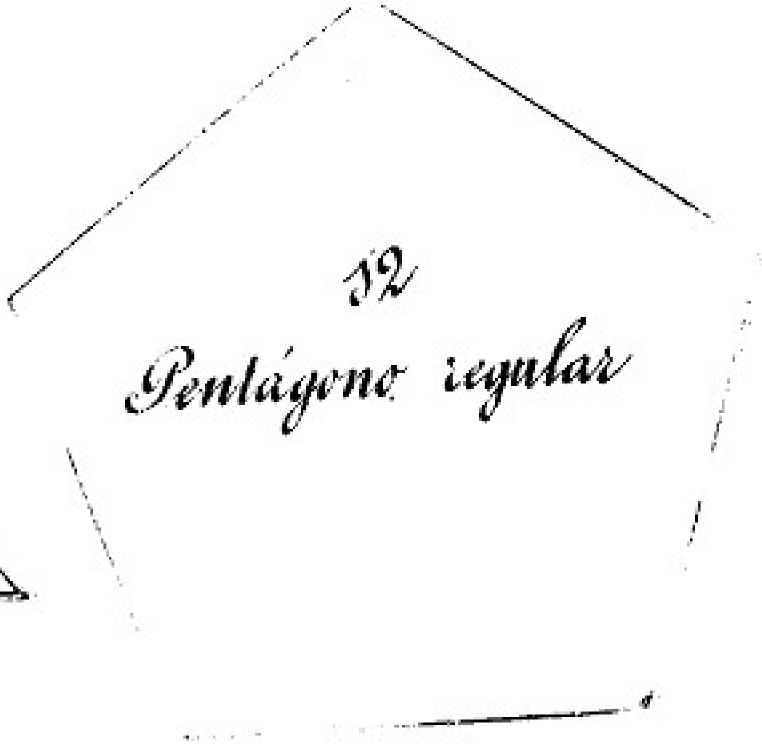

a
4
Triángulo
escaleno
c

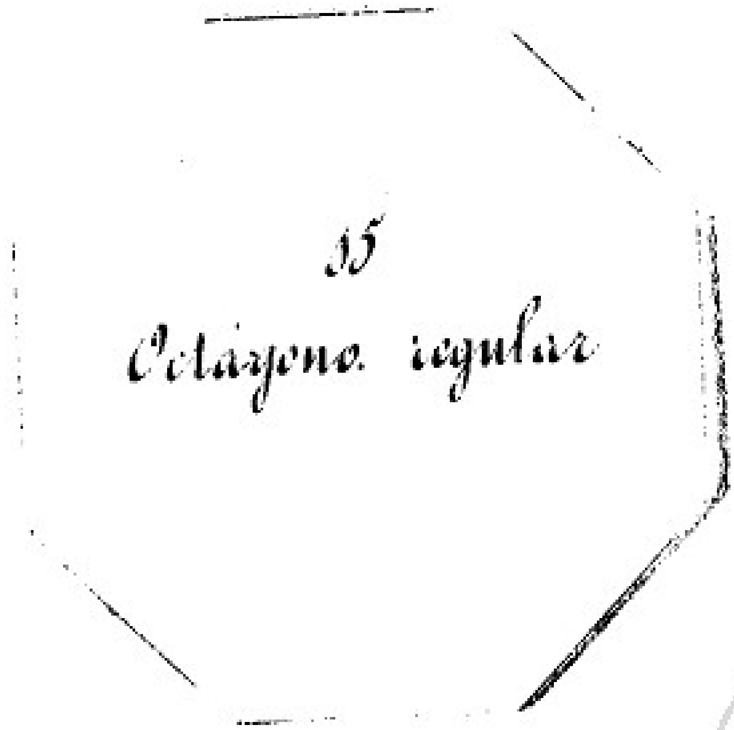

d
e
c
a
o
b
5
Círculo


8
Rectángulo

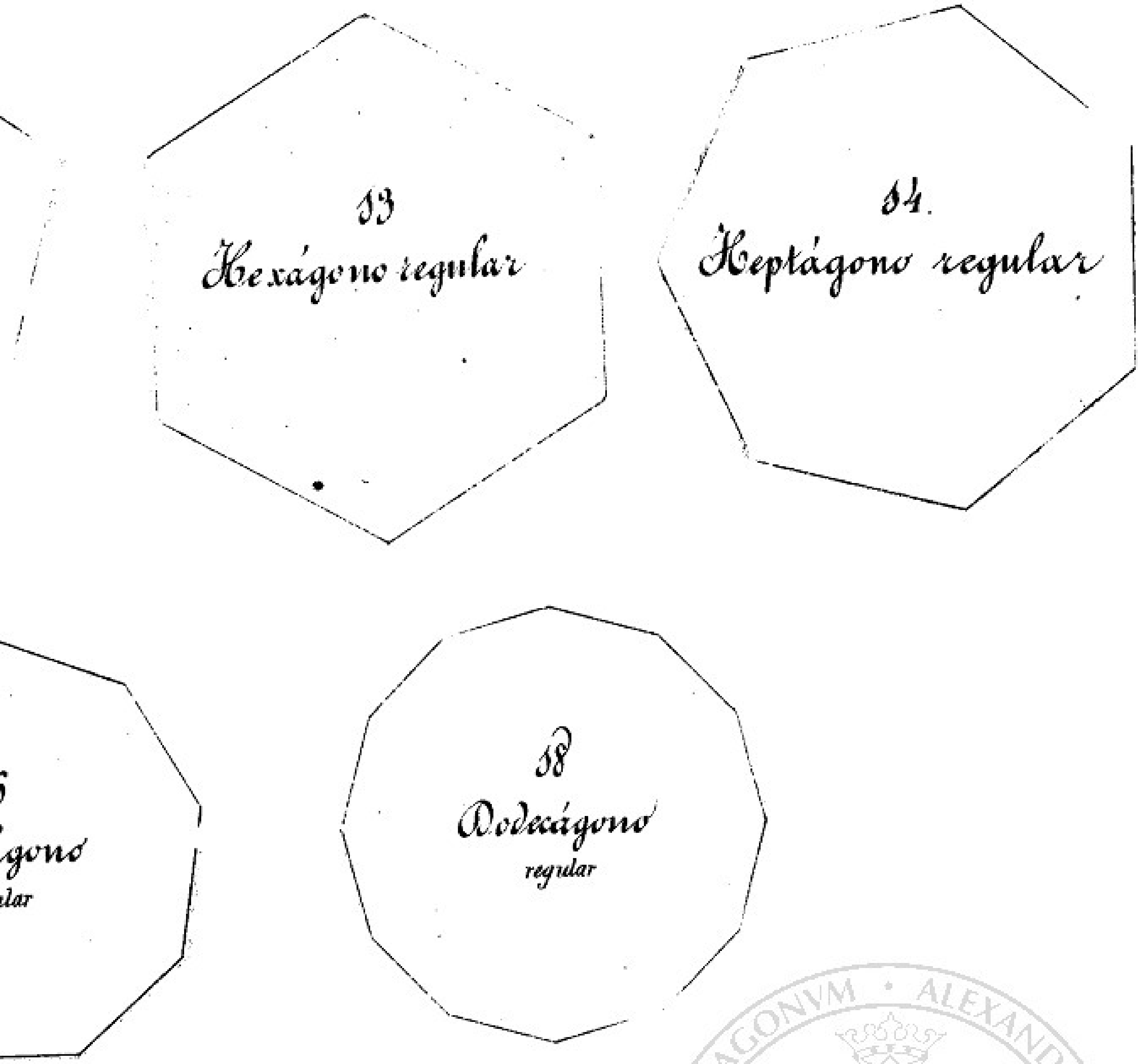

9
Cuadrado

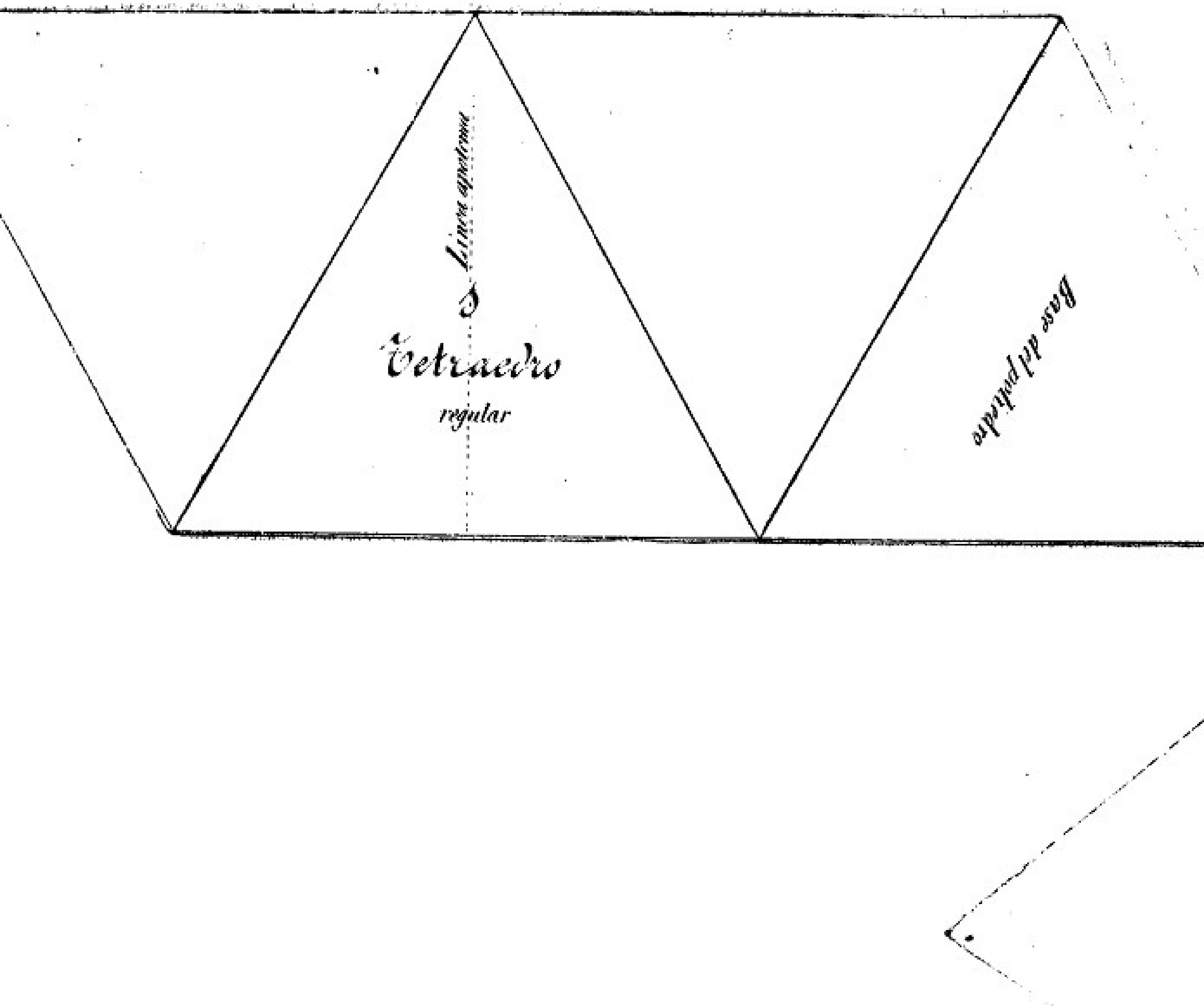

50
Trapecio

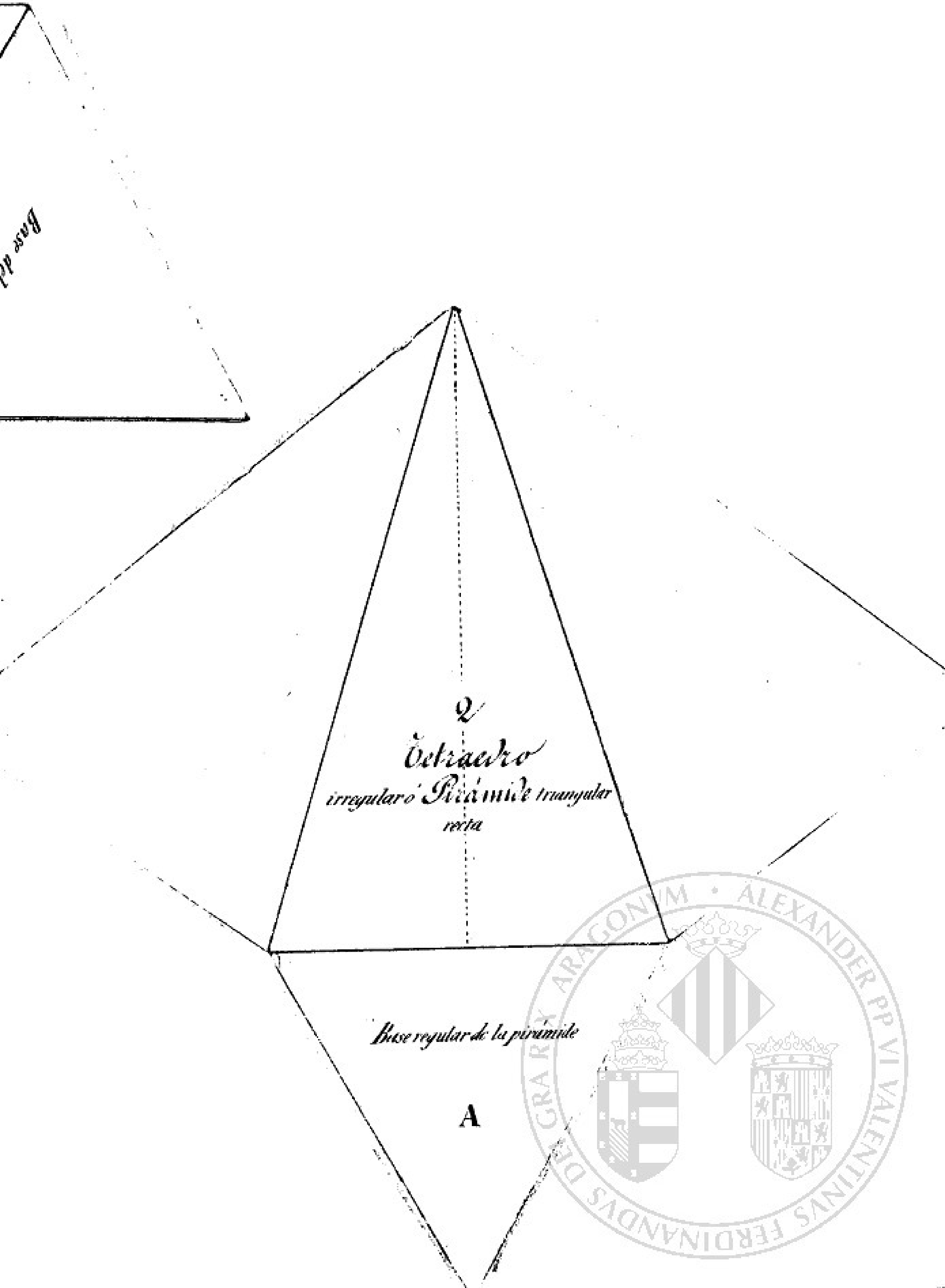

52
Pentágono regular

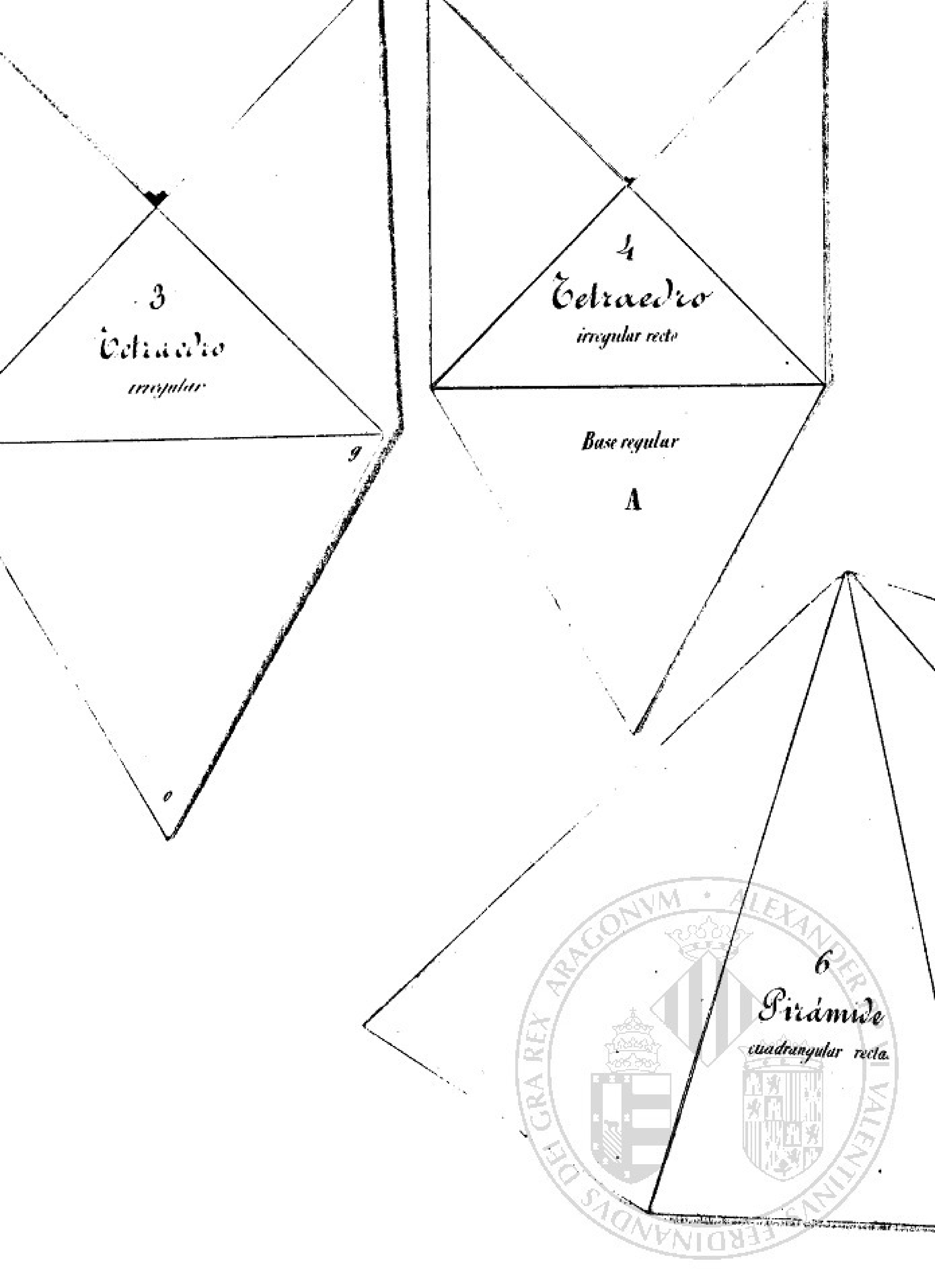

55
Octágono regular

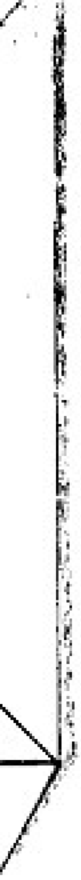

56
Eneágono
regular

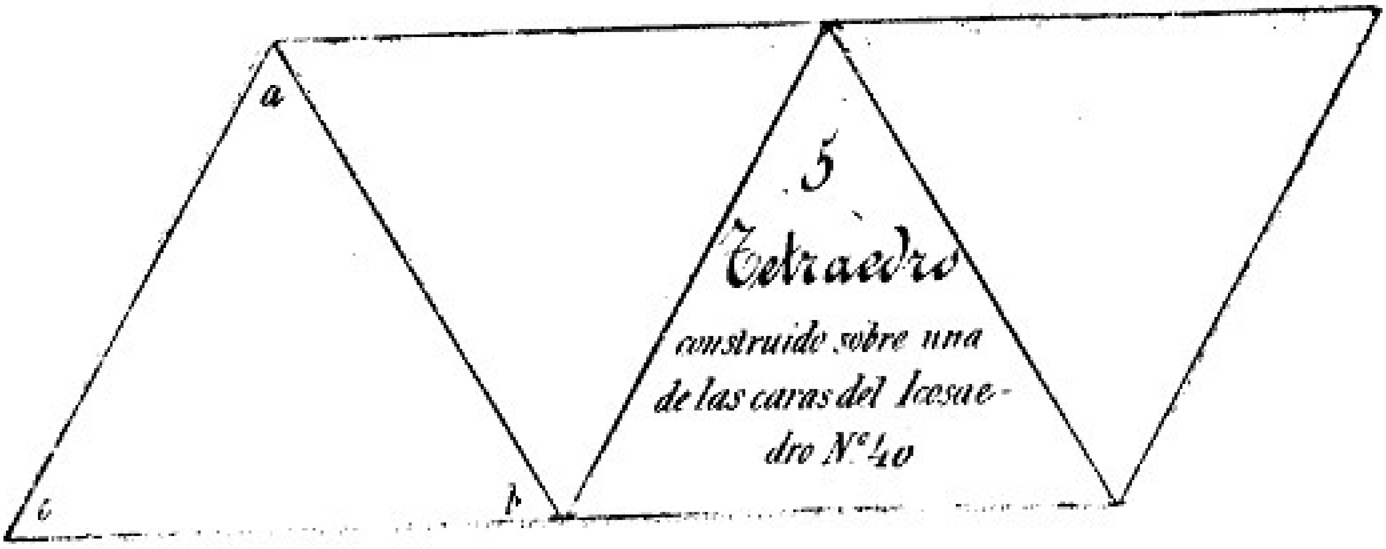

13
Hexágono regular
14.
Heptágono regular
18
Dodecágono
regular

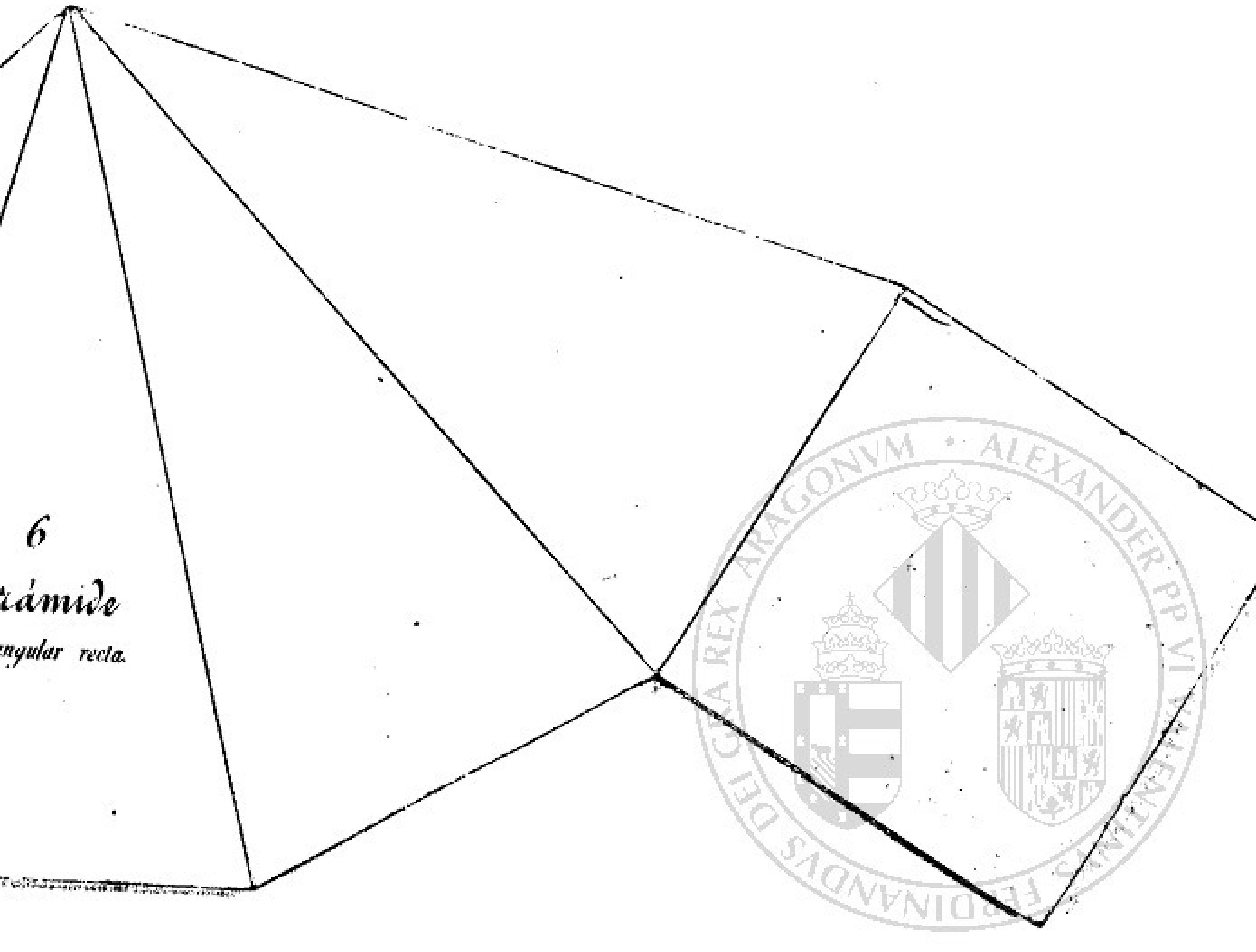

Linea apotema
S
Tetraedro
regular
Base del poliedro

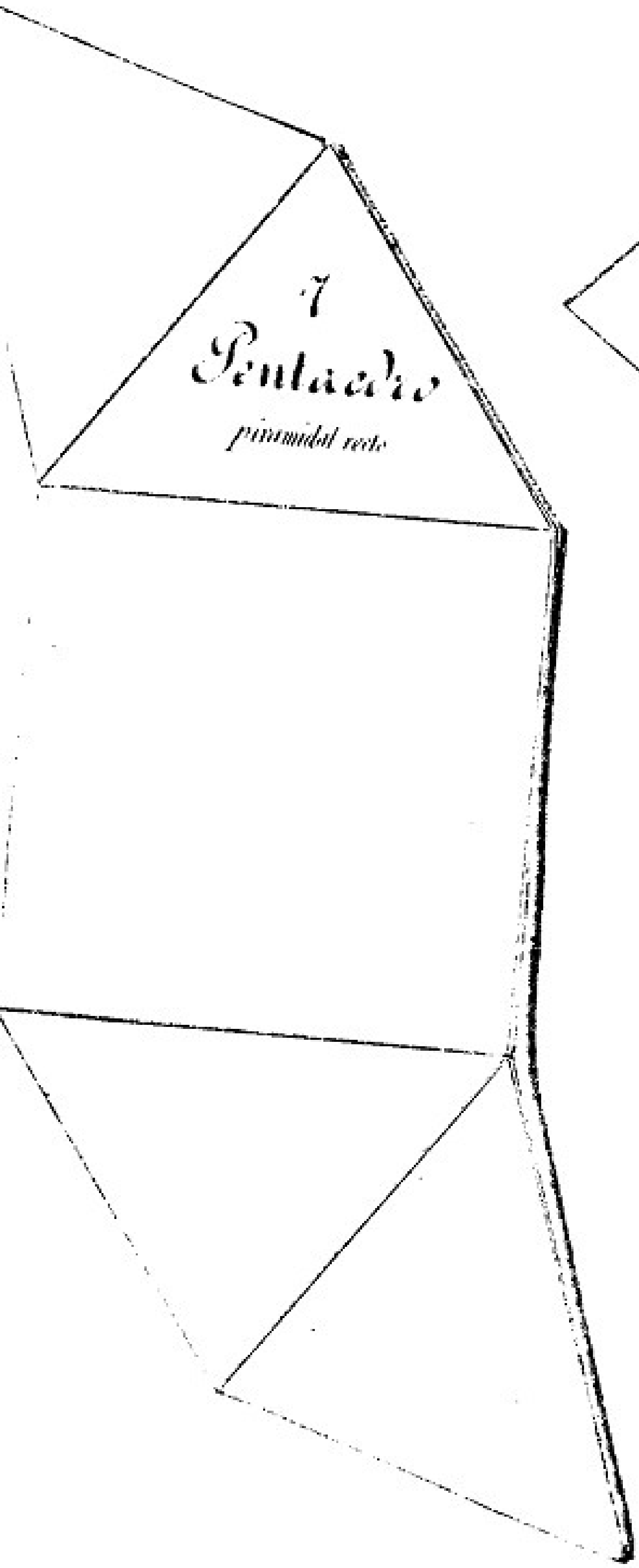

Q
Tetraedro
irregular ó Pirámide triangular
recta
Base regular de la pirámide
A

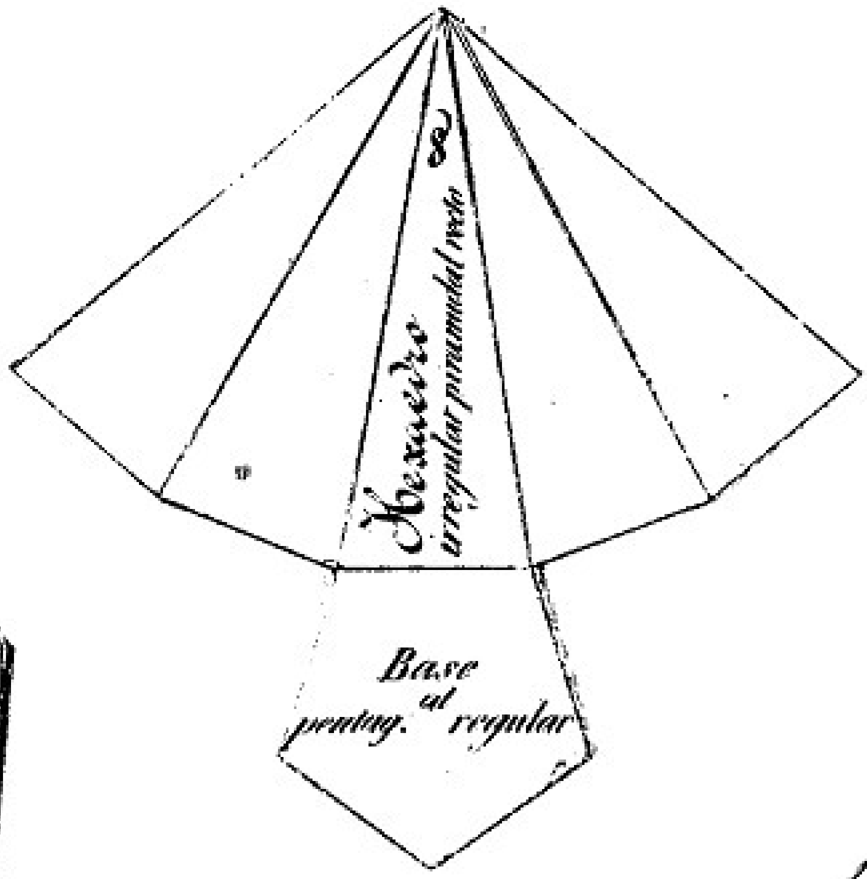

3
Tetraedro
irregular
9
o
4
Tetraedro
irregular recto
Base regular
A
6
Pirámide
cuadrangular recta.

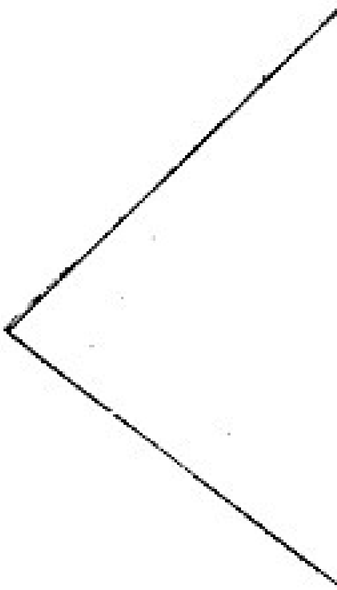


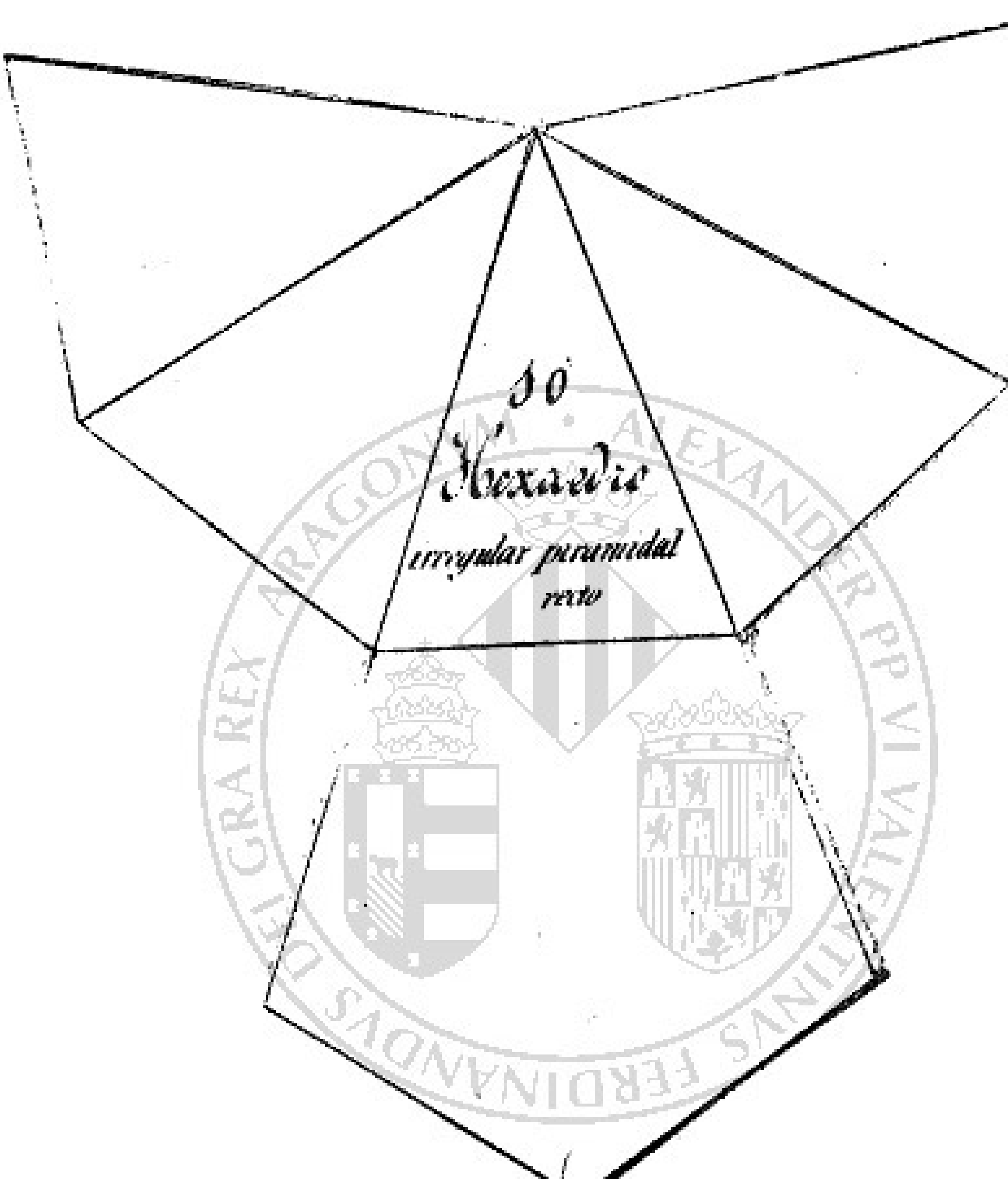

a
5
Tetraedro
construido sobre una
de las caras del Icosae-
dro Nº 40

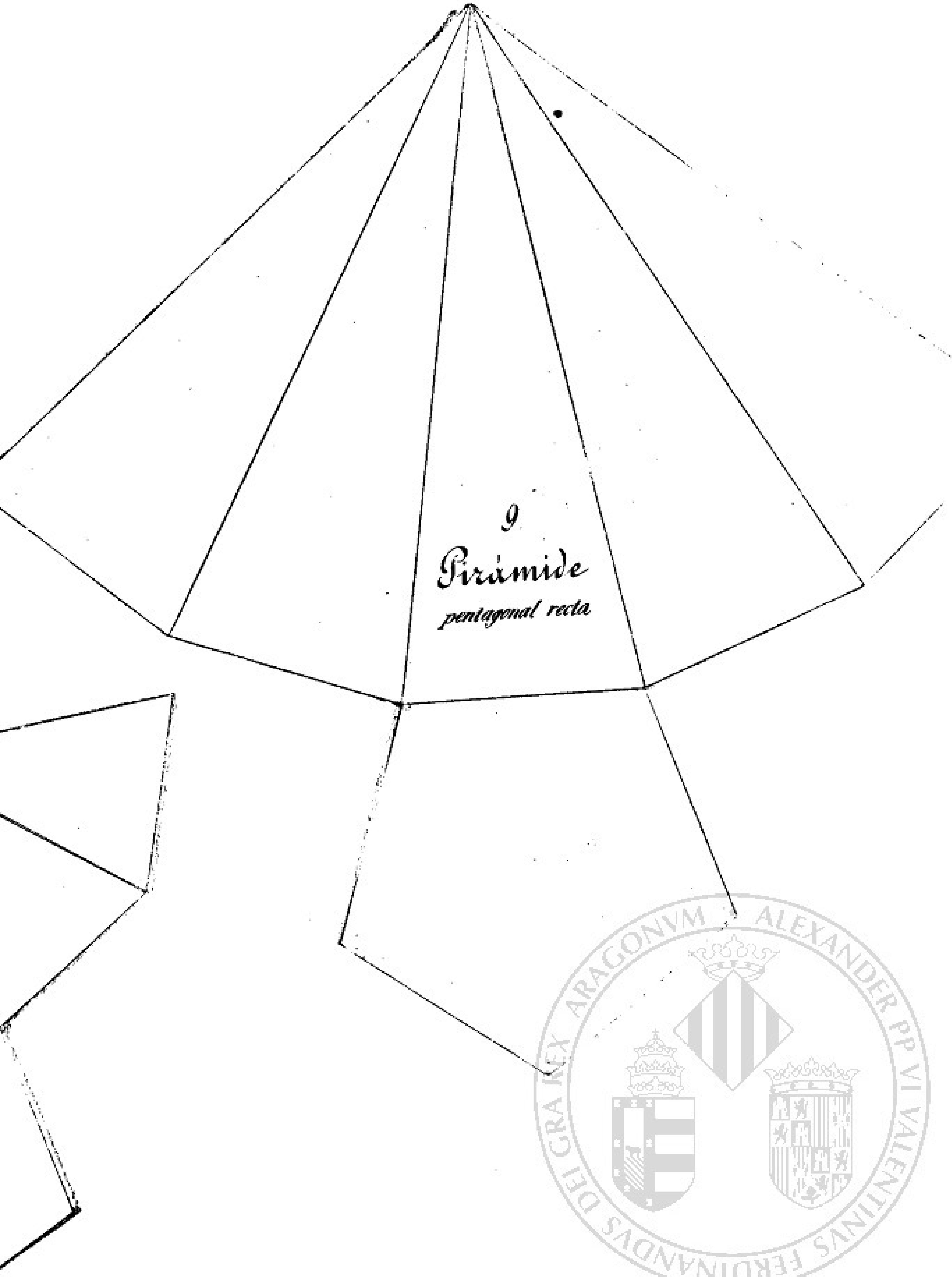

6
rámide
ngular recta.

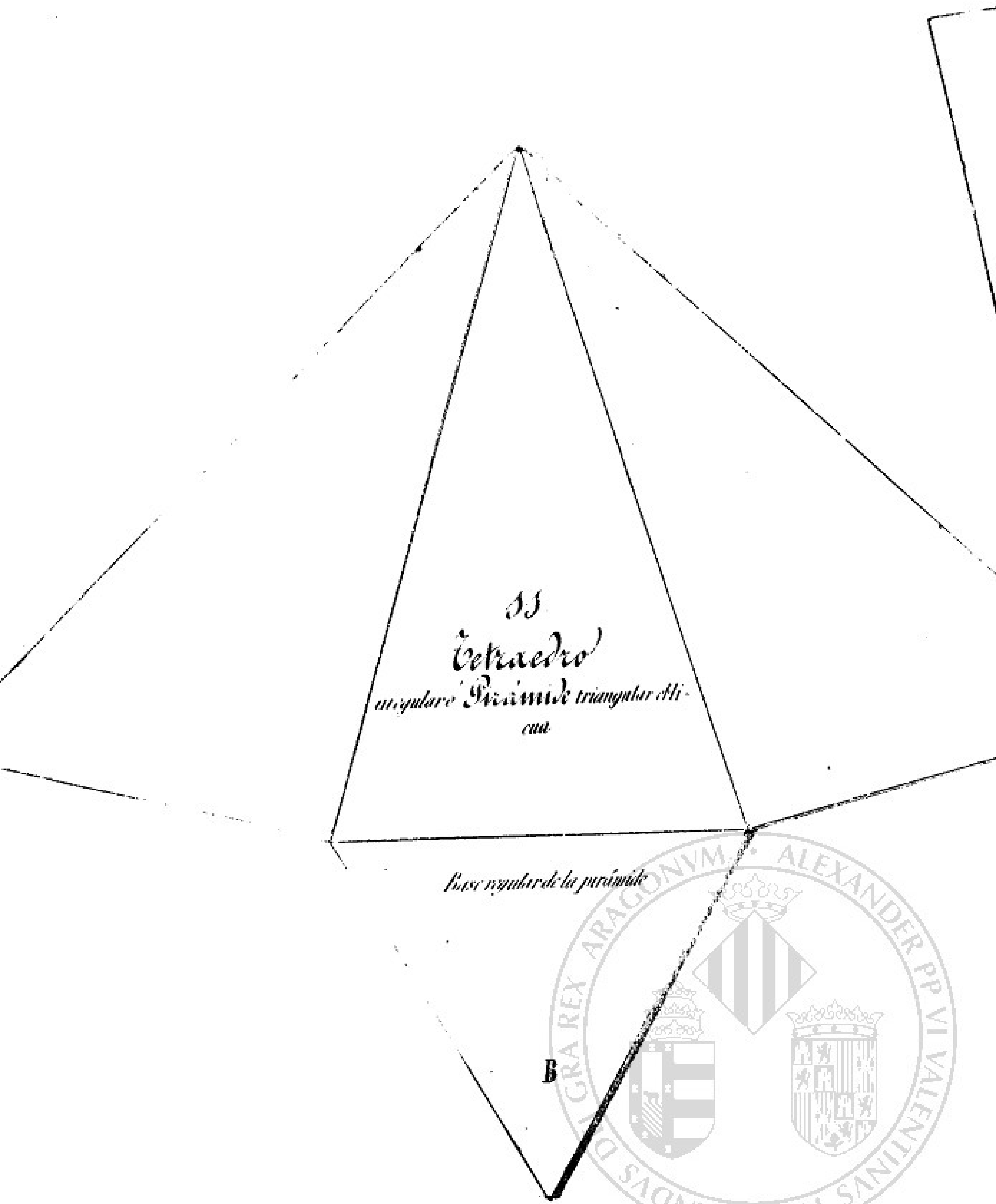

7
Pentaedro
piramidal recto

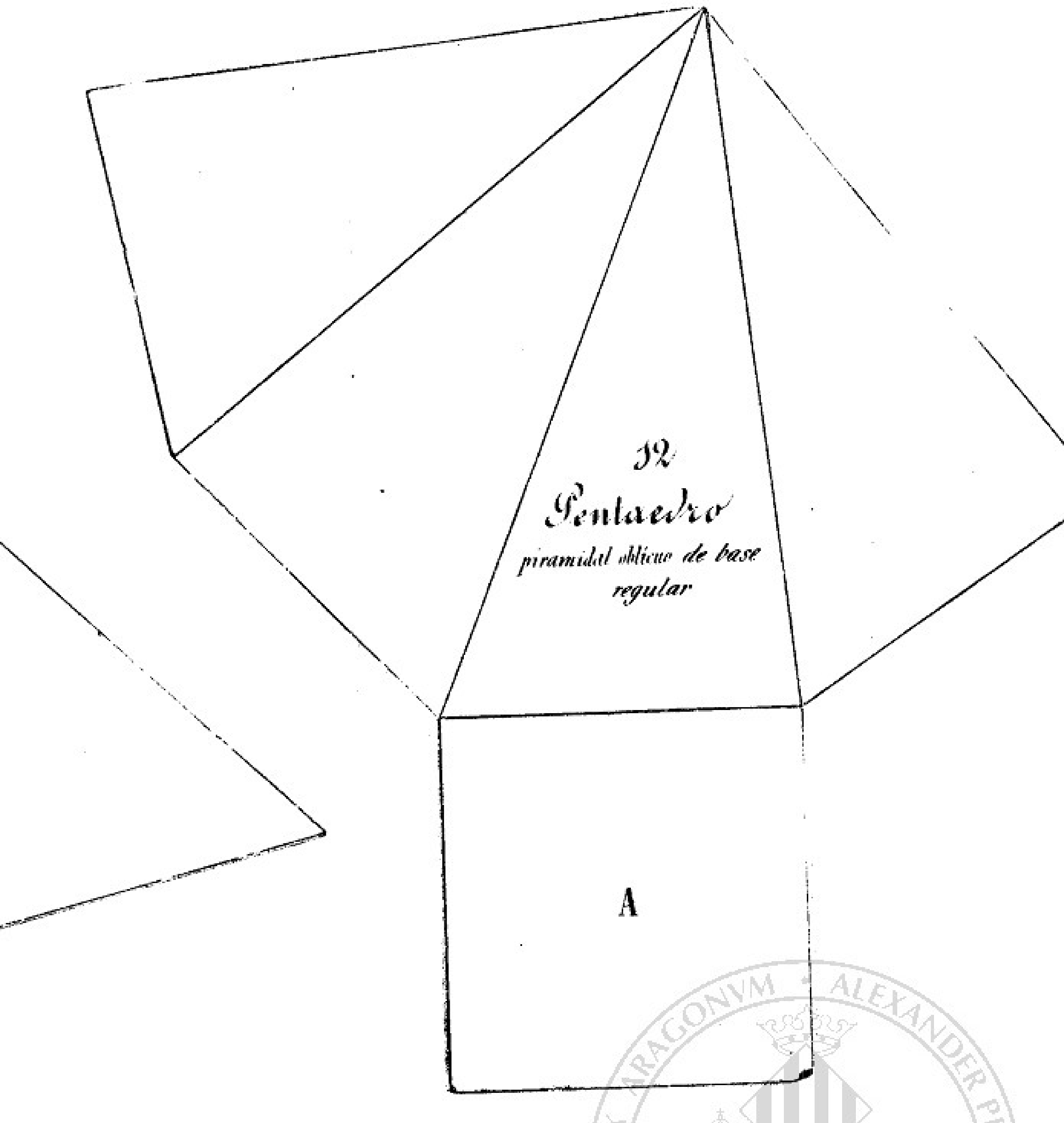

8
Hexaedro
irregular piramidal recto
Base
pentag. al regular

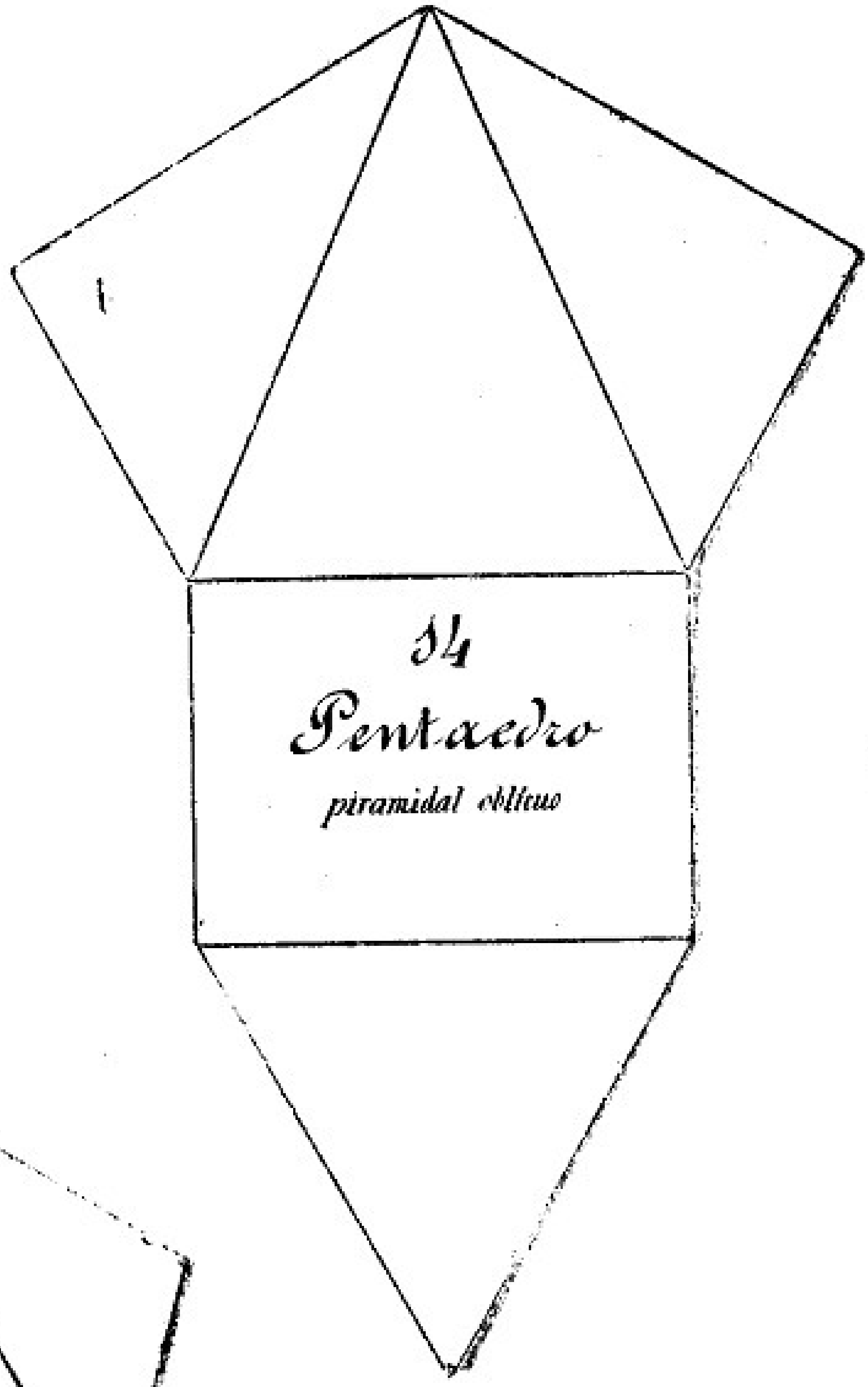


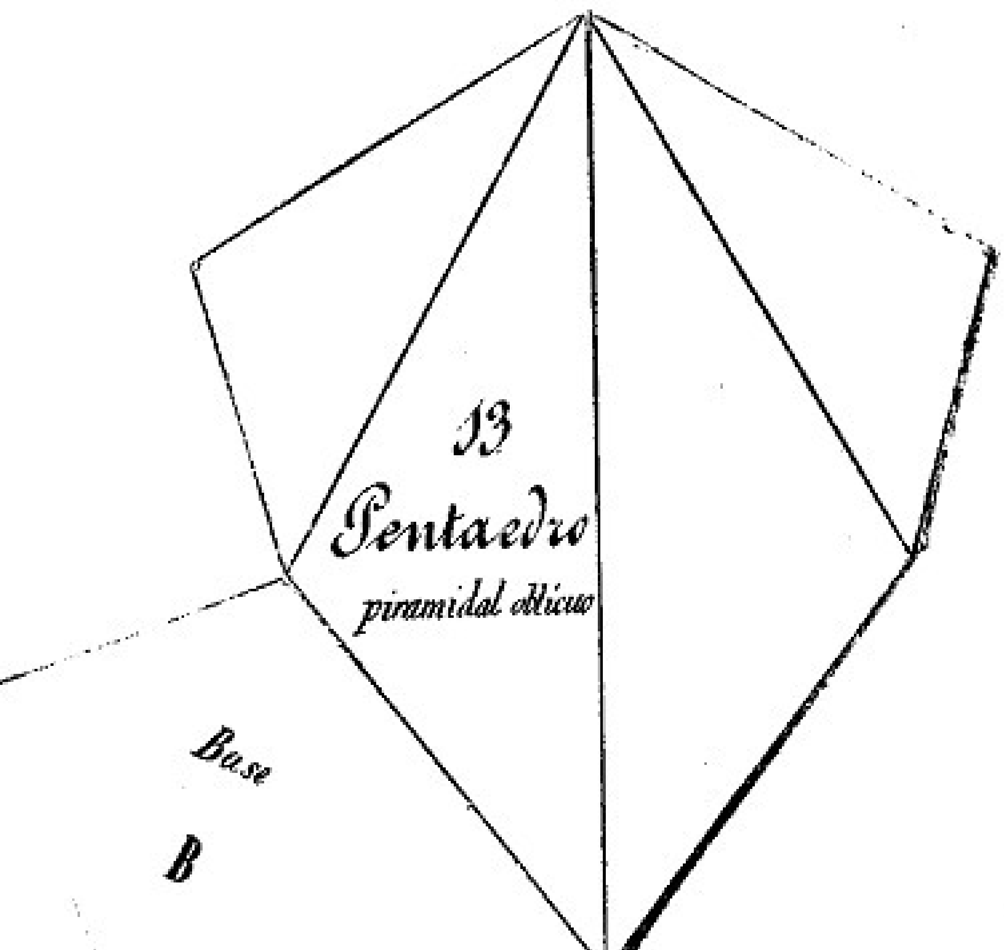

10
Hexaedro
irregular piramidal
recto

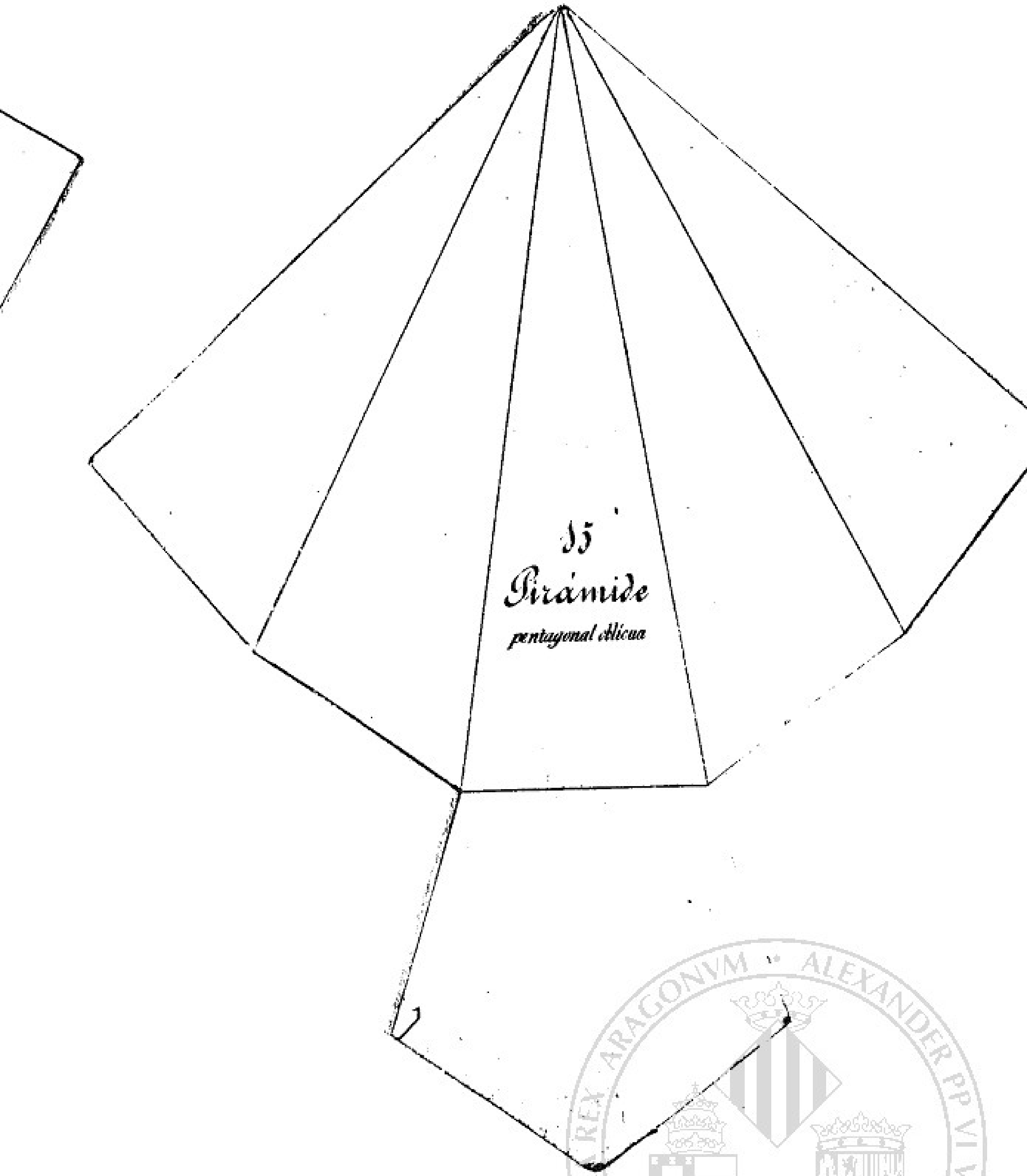

9
Pirámide
pentagonal recta

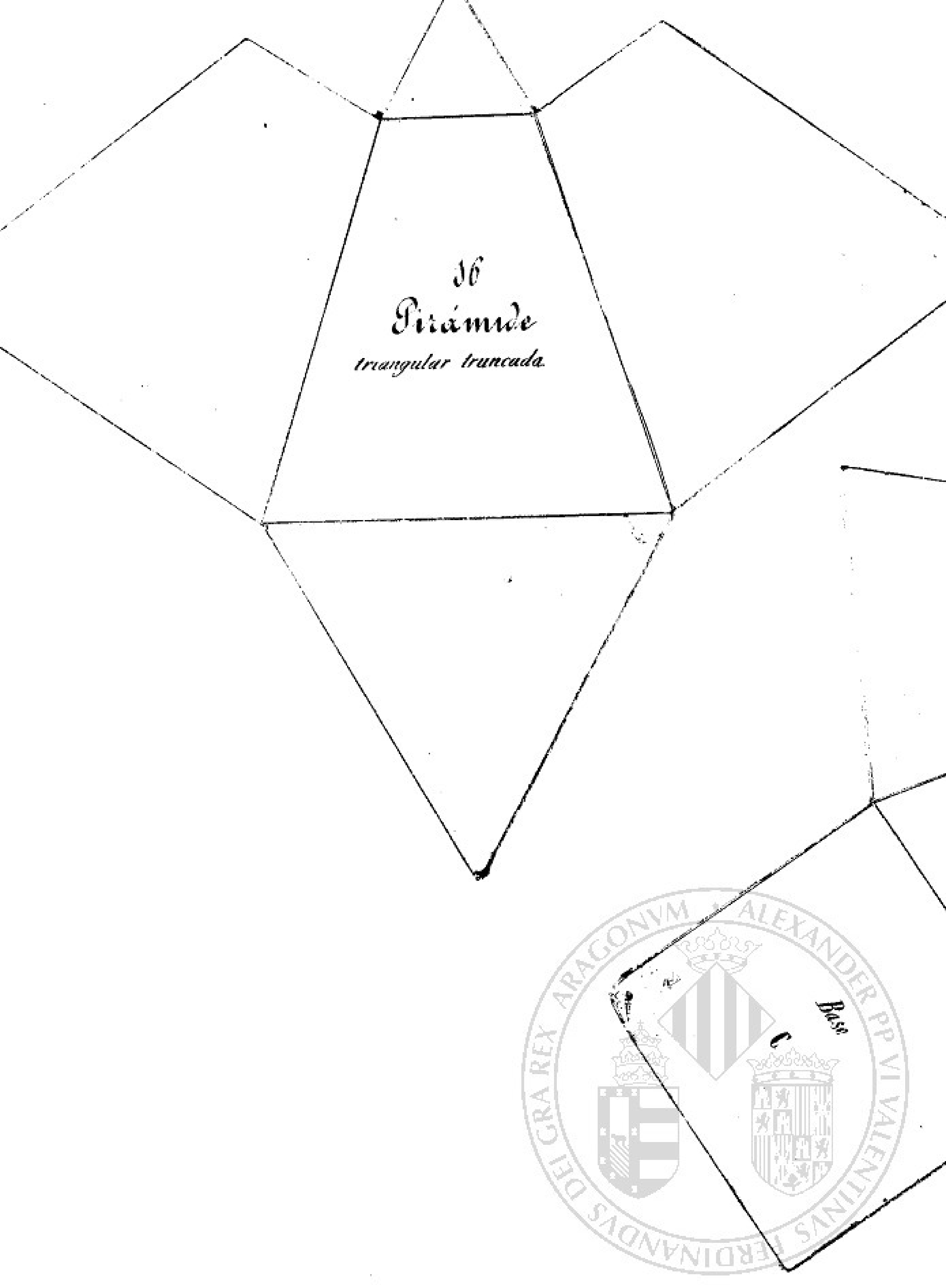

33
Tetraedro
regular ó Pirámide triangular obli-
cua
Base regular de la pirámide
B

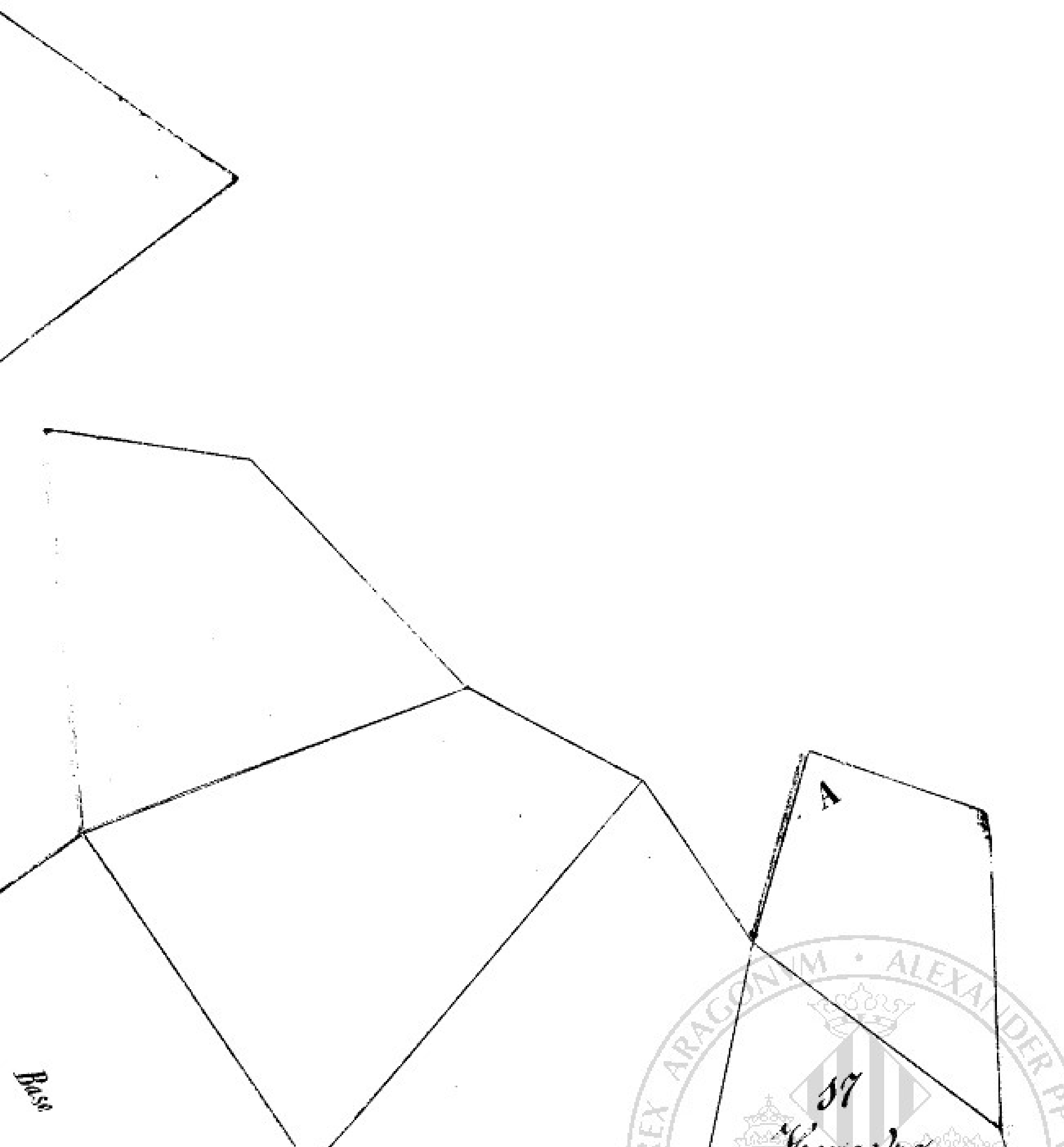

12
Pentaedro
piramidal oblicuo de base
regular
A

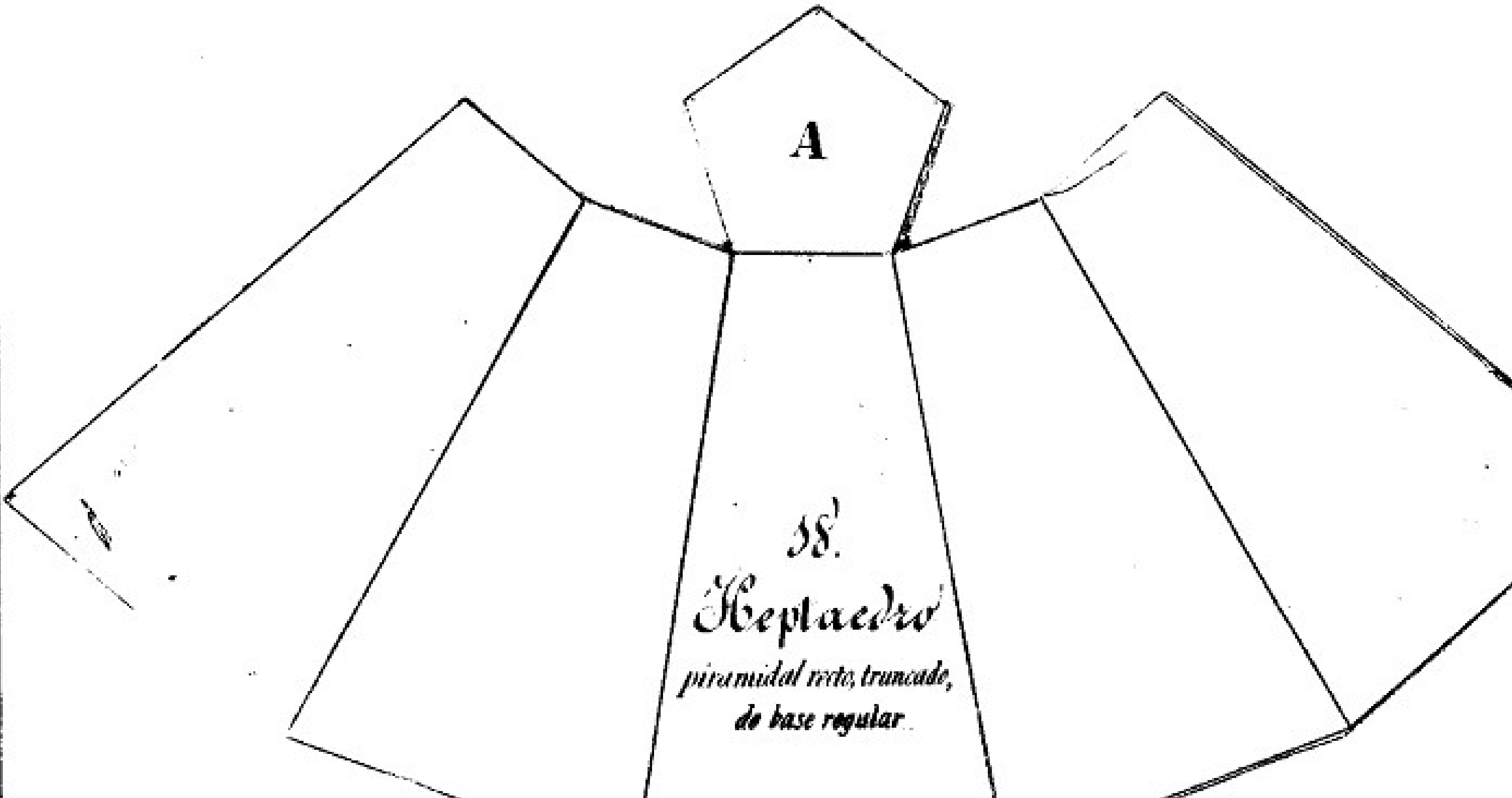

1
14
Pentaedro
piramidal oblicuo

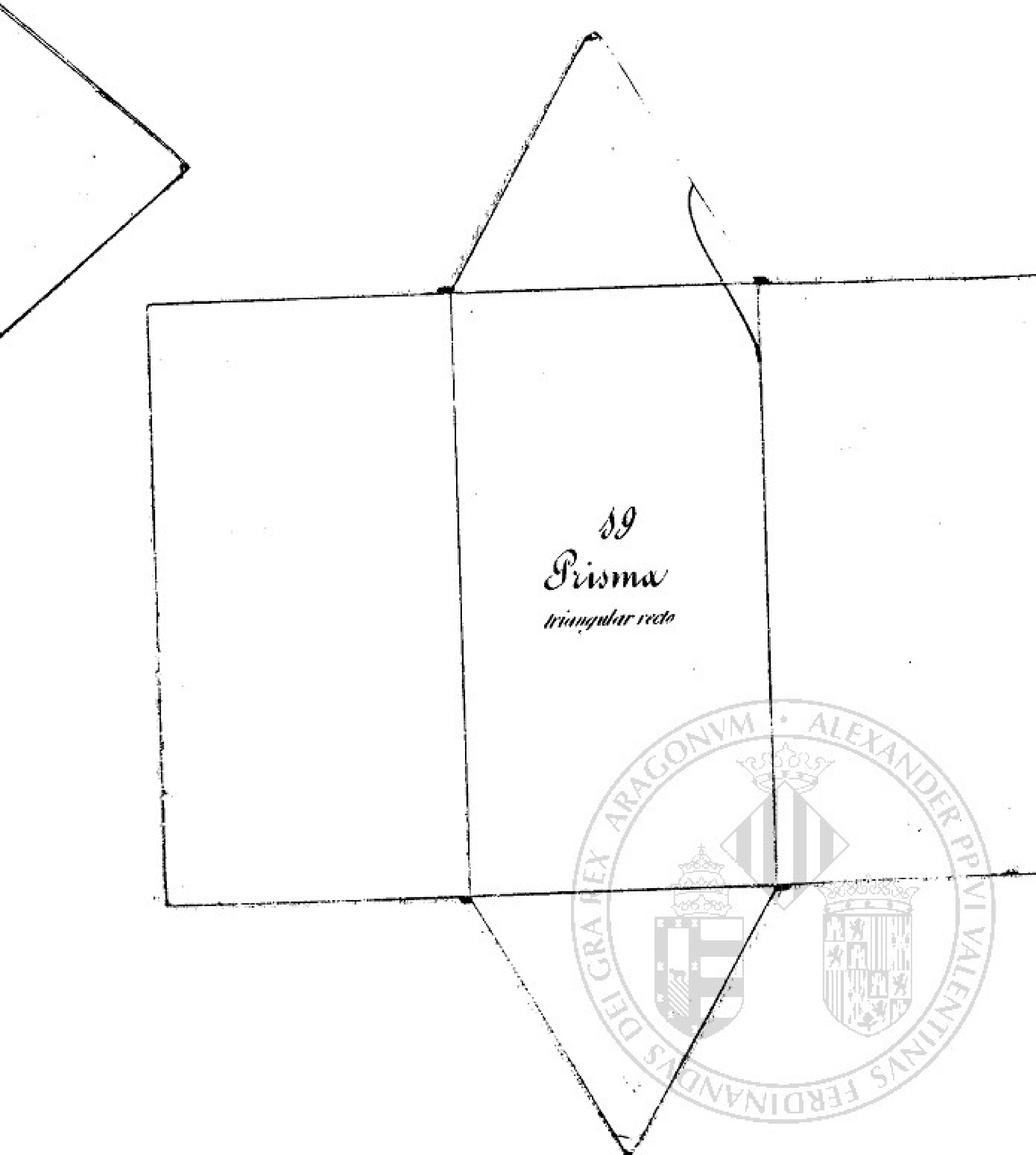

13
Pentaedro
piramidal oblicuo
Base
B

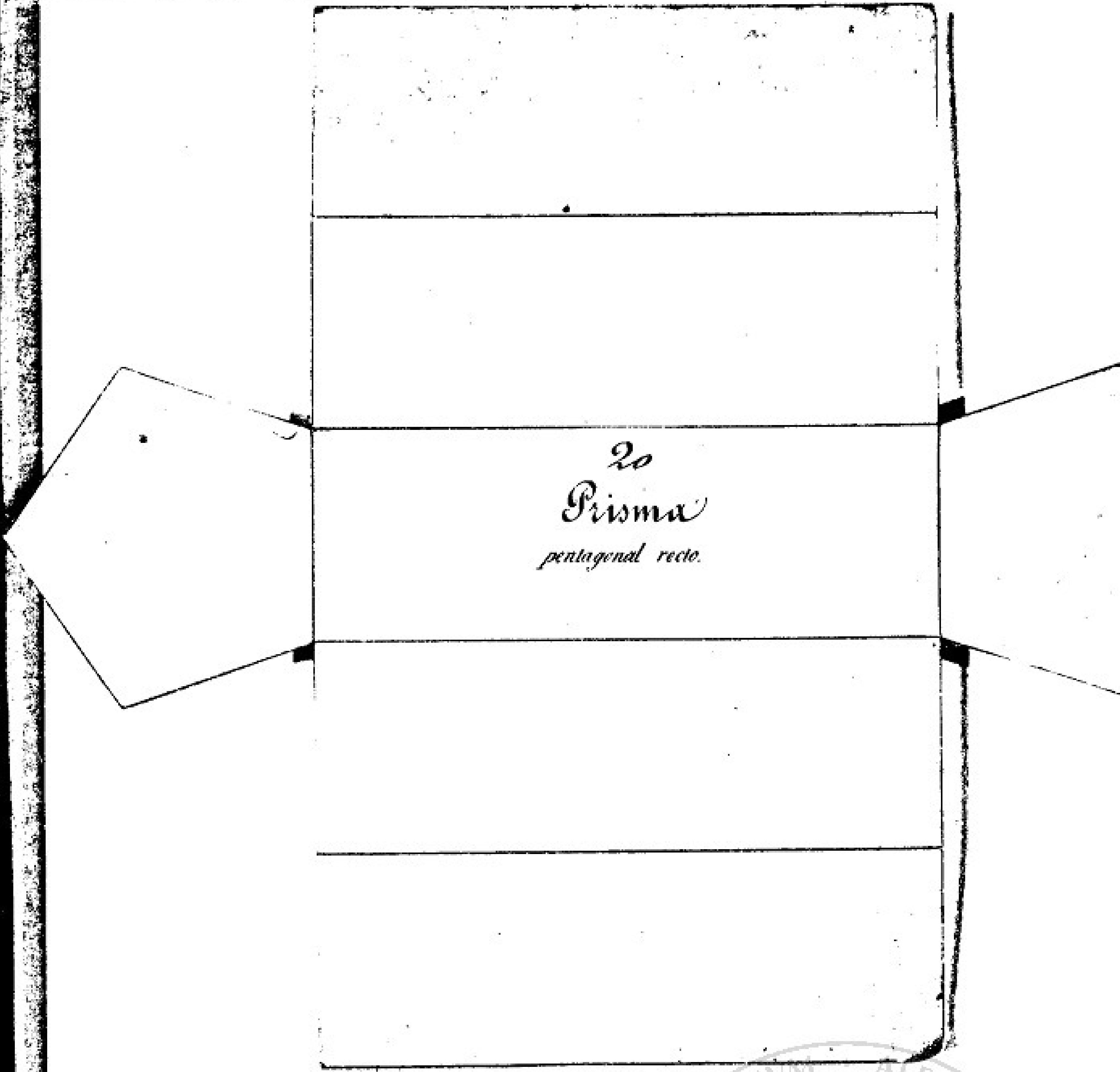

35
Pirámide
pentagonal oblicua

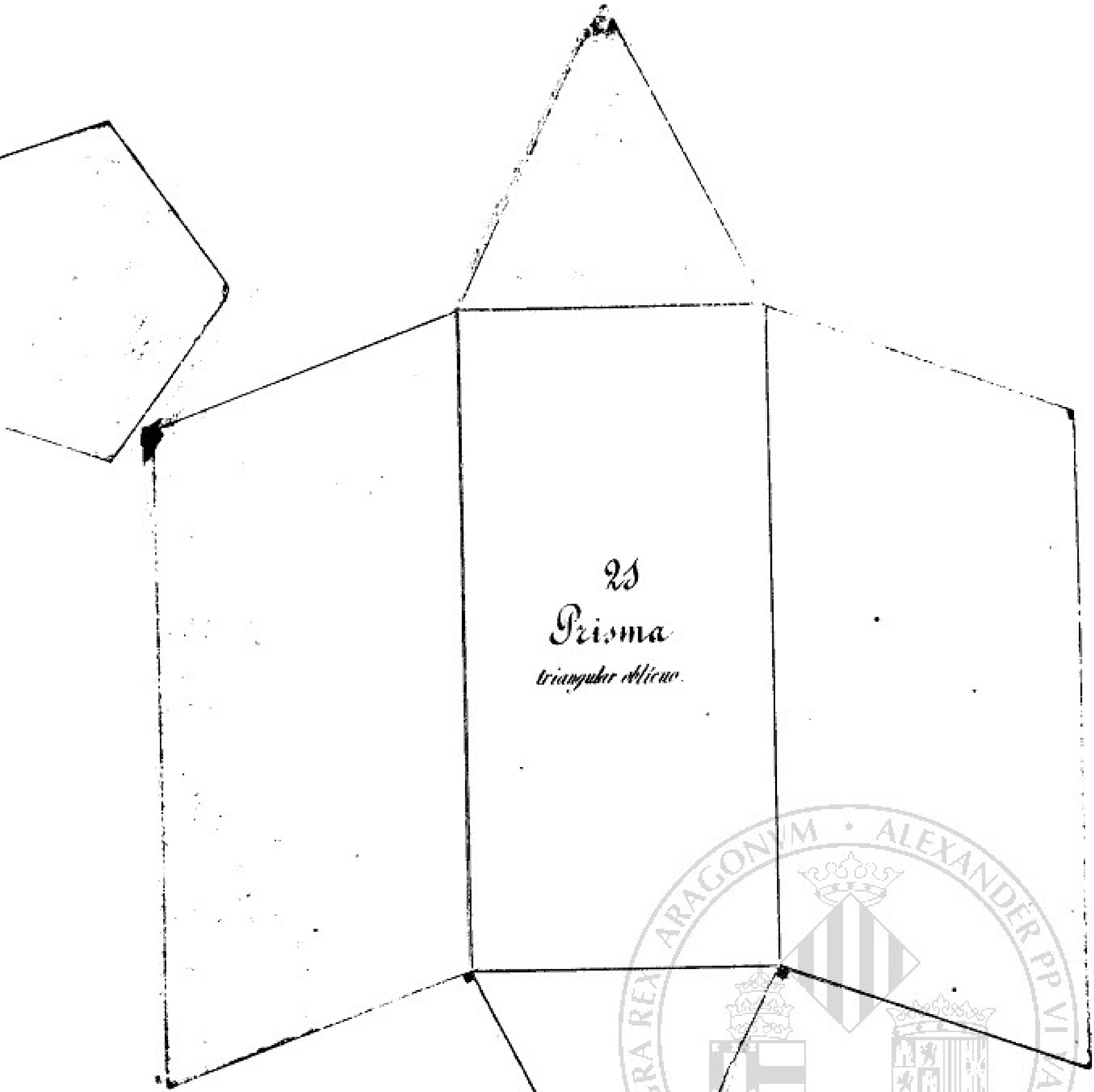

16
Pirámide
triangular truncada
Base
C

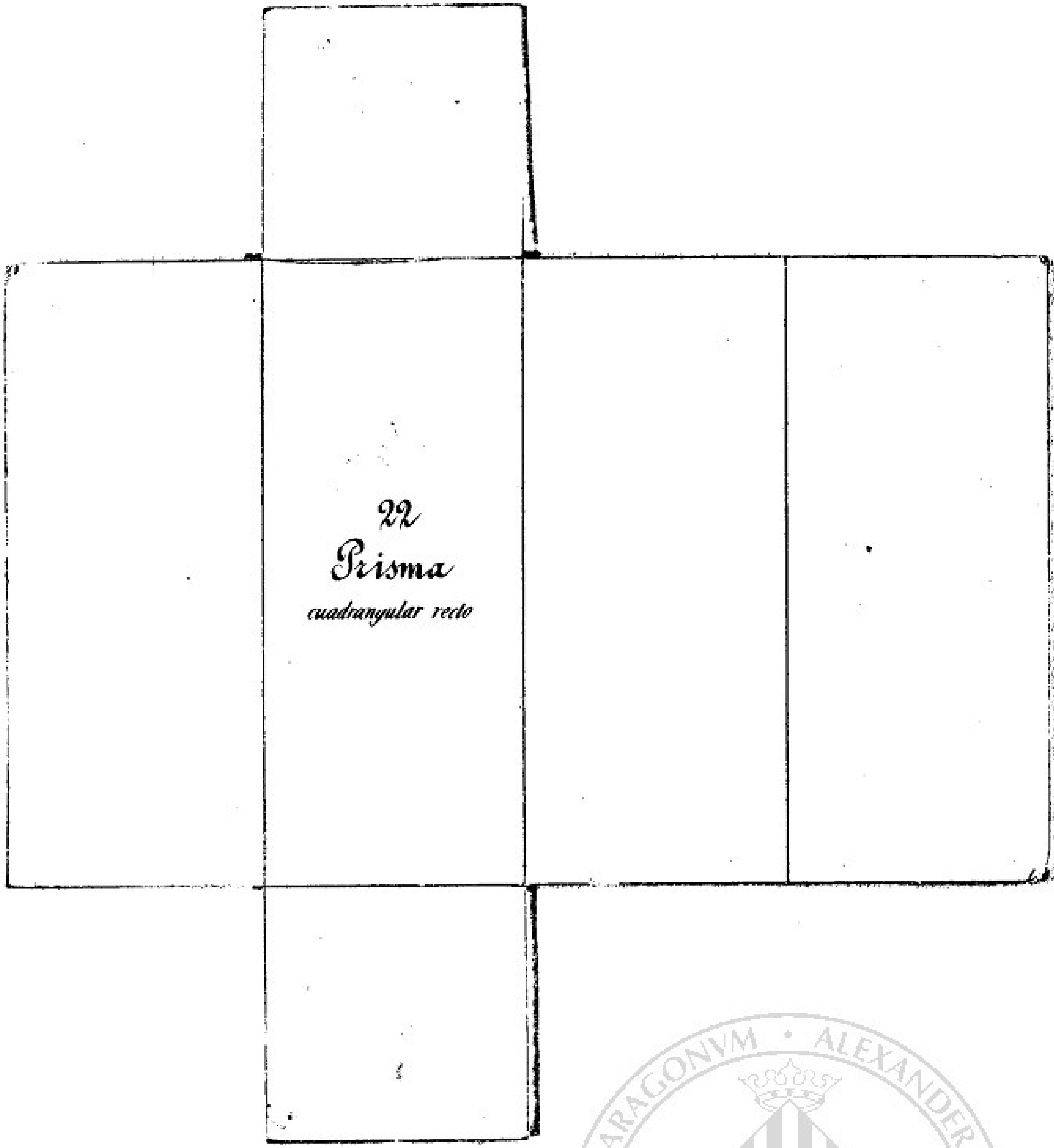

A
Base
57
Hexaedro
irregular ó Pirámide cuadrangular recta truncada oblicuamente

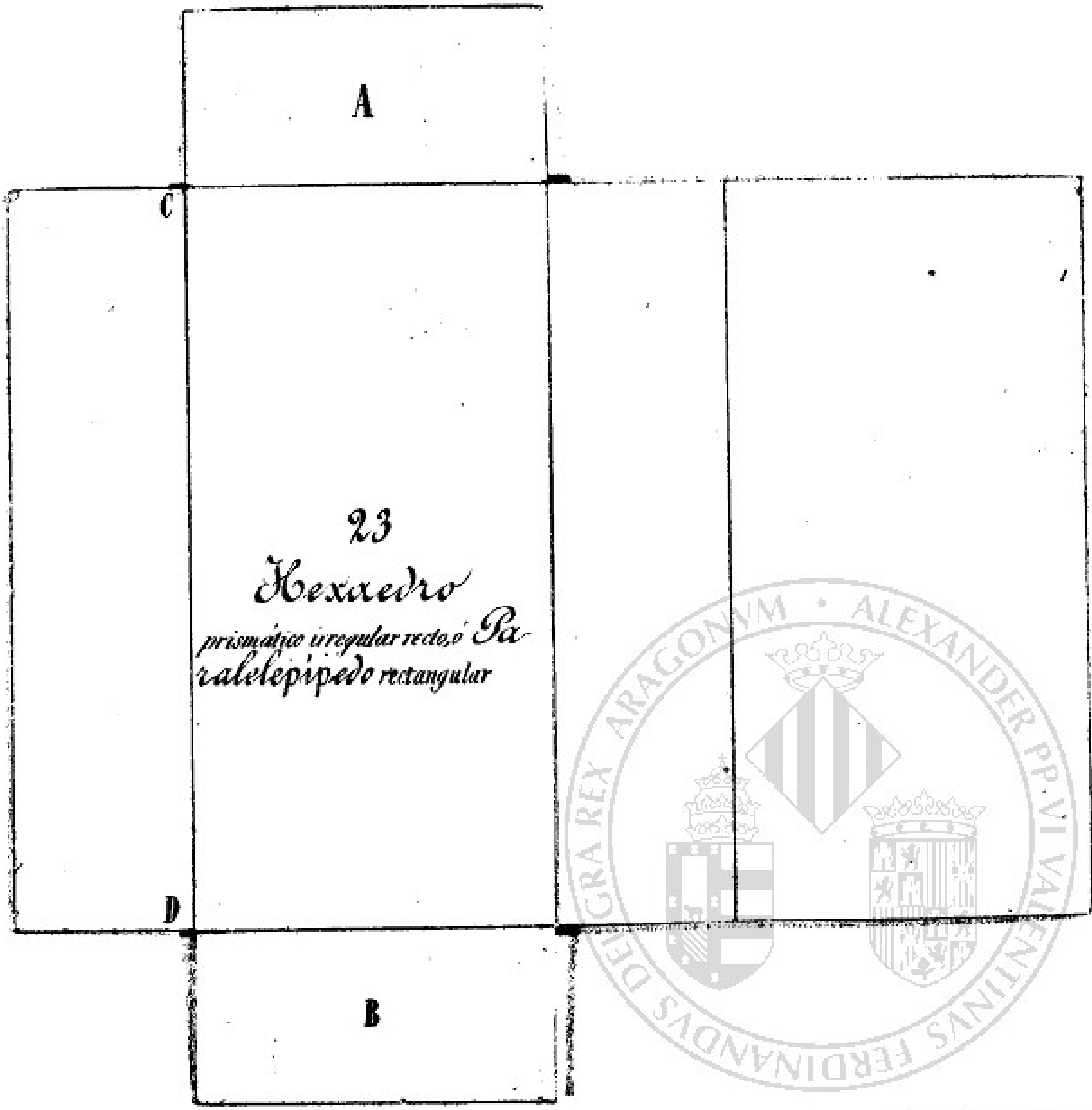

A
58.
Heptaedro
piramidal recto, truncado,
de base regular.
B

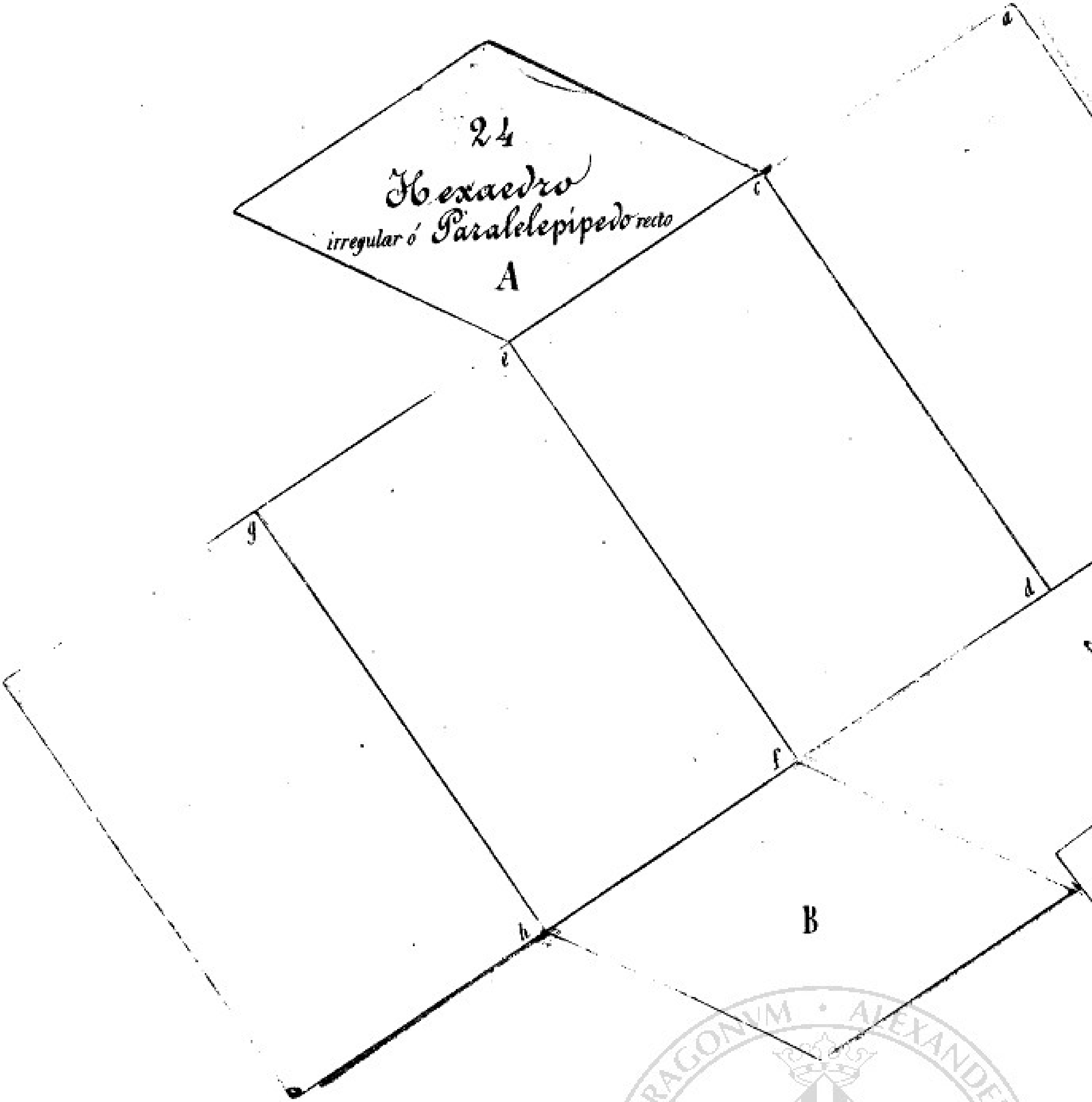

89
Prisma
triangular recto

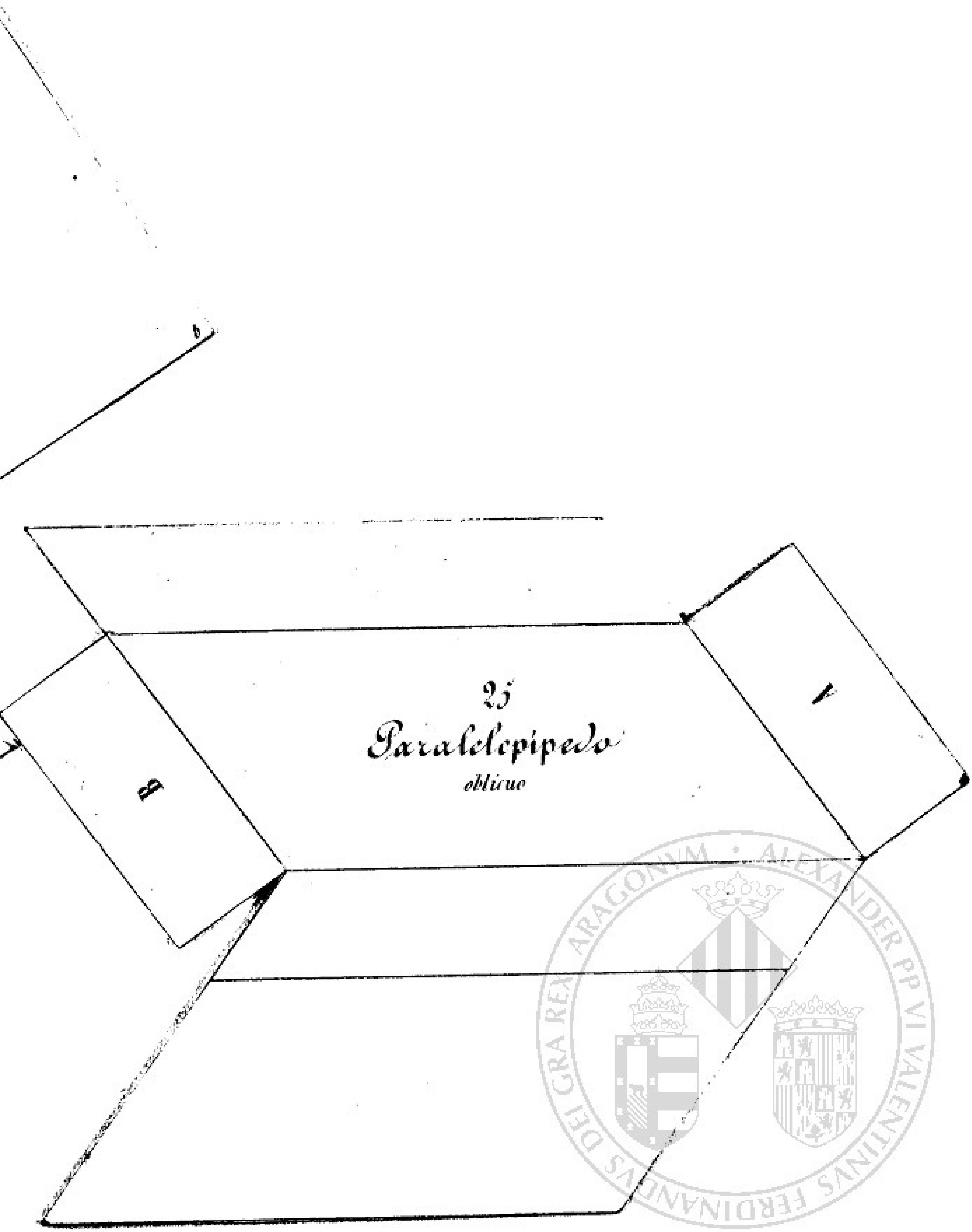

20
Prisma
pentagonal recto.

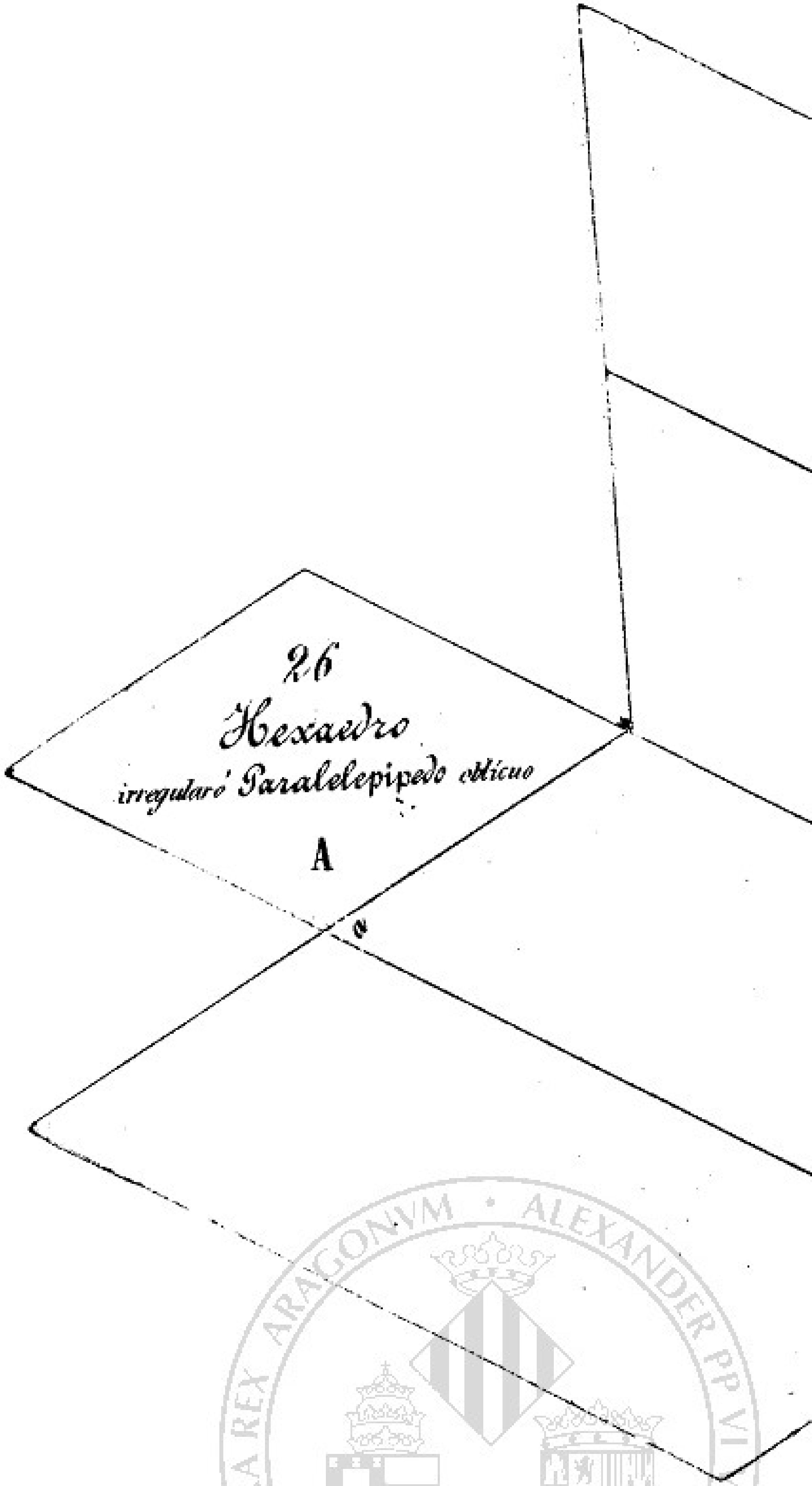

25
Prisma
triangular oblicuo.

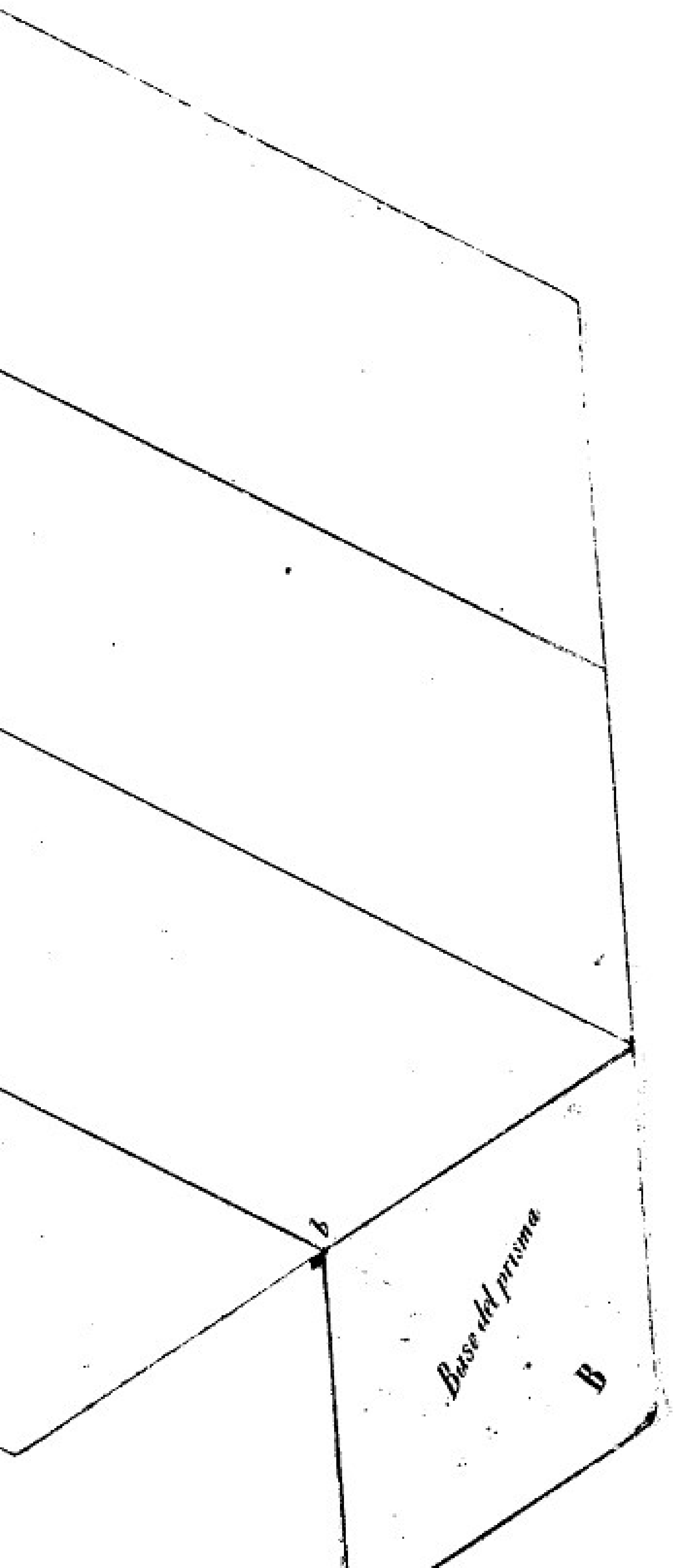

22
Prisma
cuadrangular recto

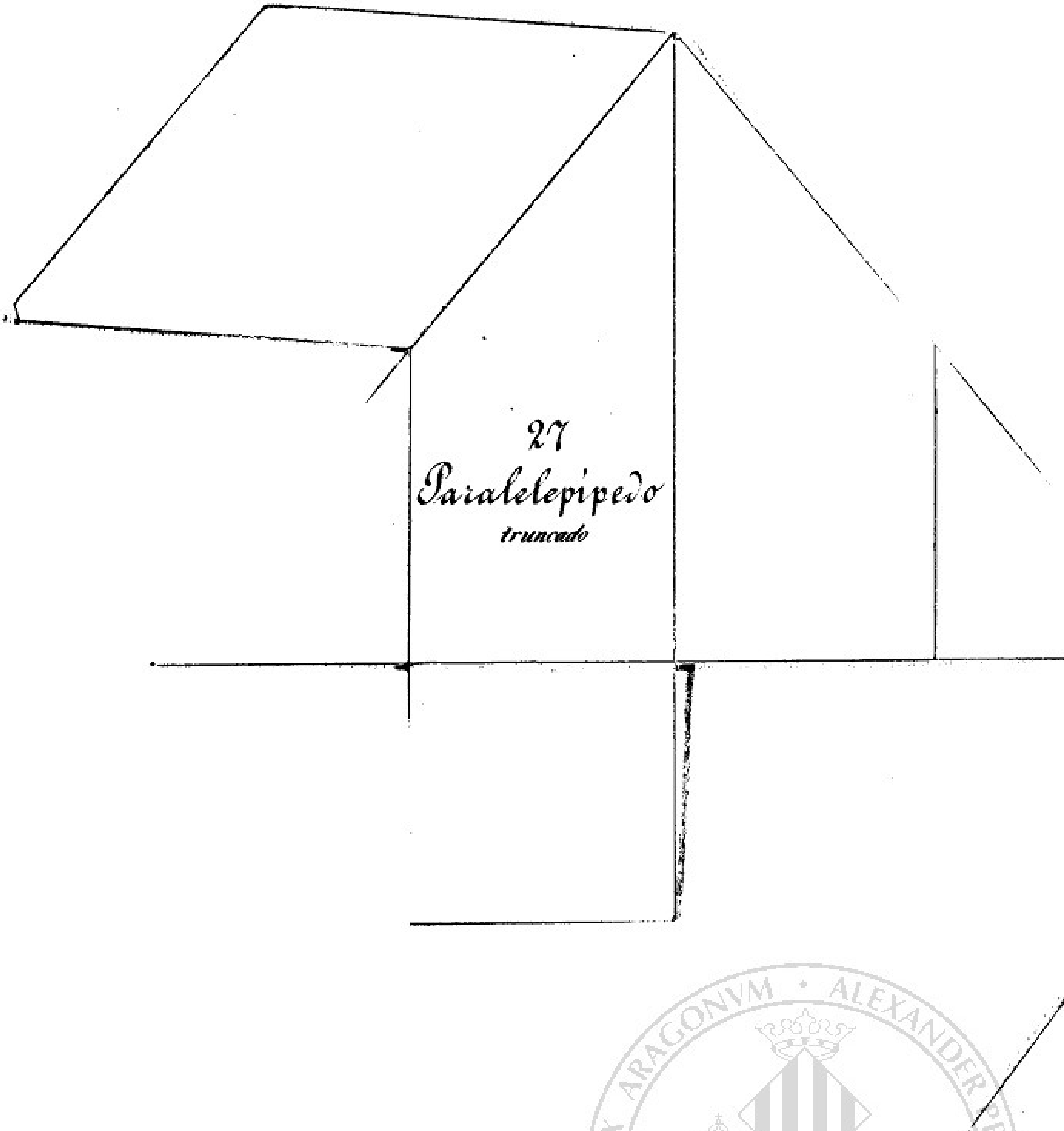

A
C
D
B
23
Hexaedro
prismático irregular recto, ó Paralelepipedo rectangular

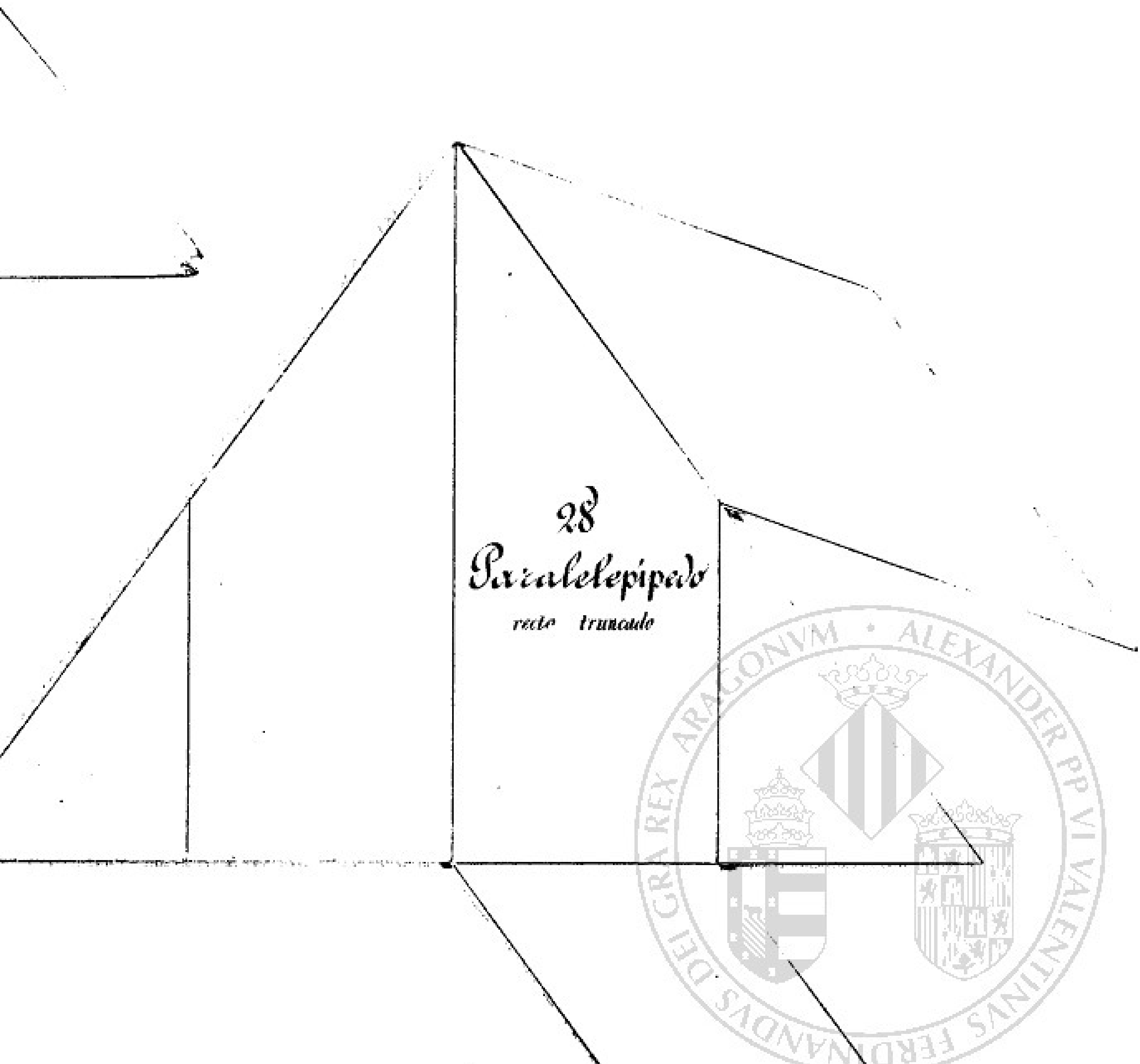

24
Hexaedro
irregular ó Paralelepipedo recto
A
a
c
e
g
d
f
h
B

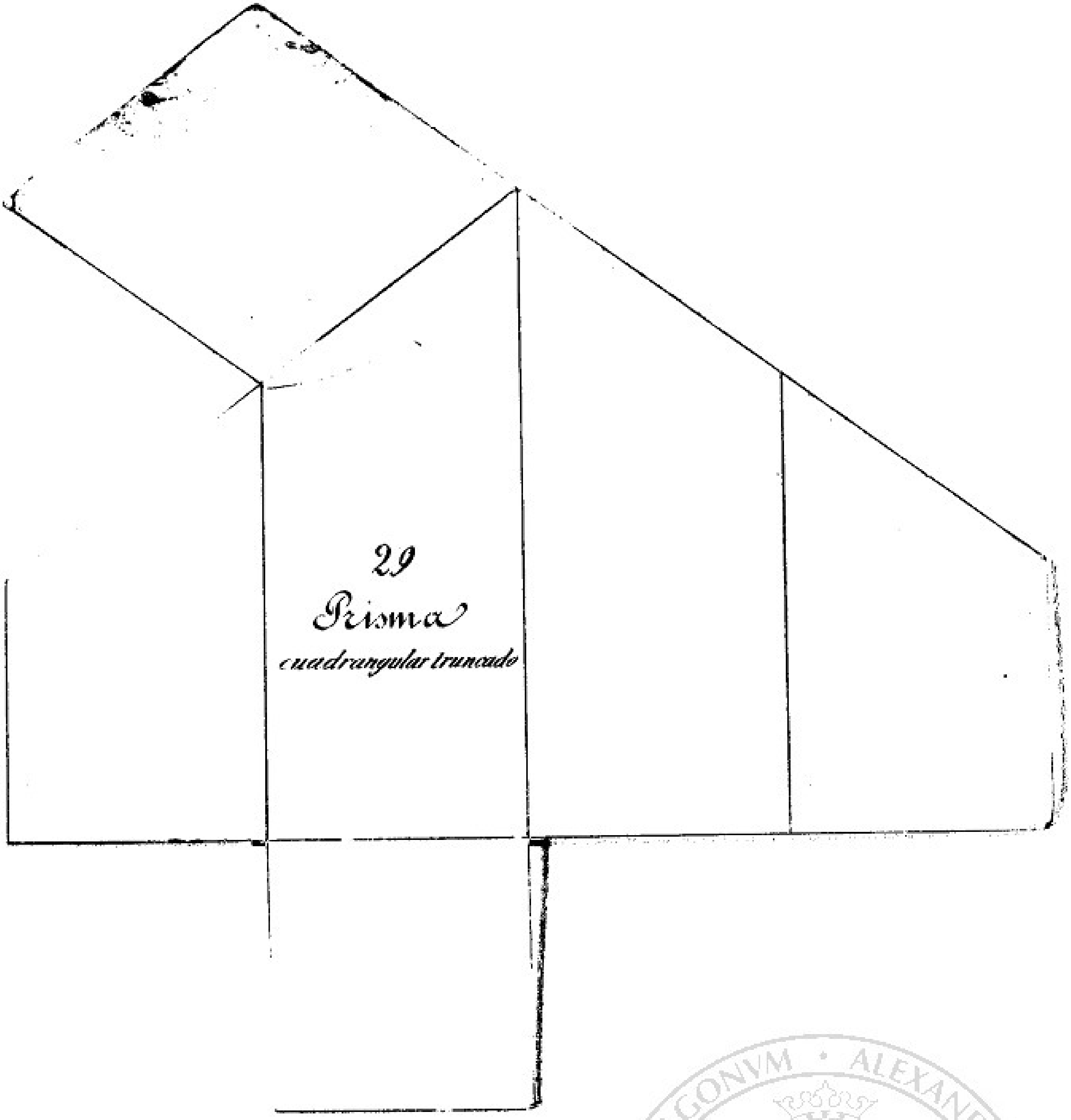

25
Paralelepipedo
oblicuo
B
A

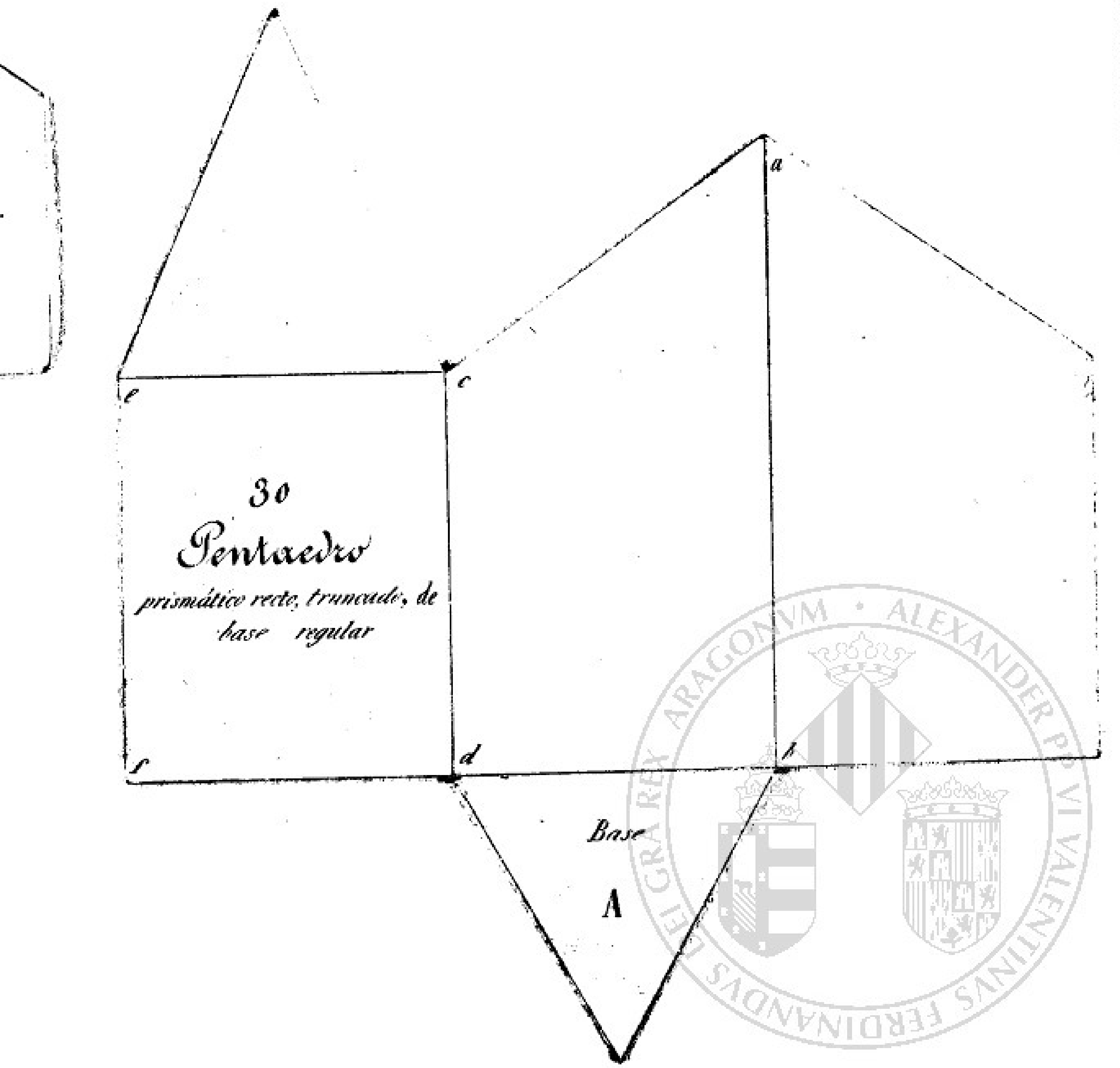

26
Hexaedro
irregular ó Paralelepipedo oblicuo
A
a


b
Base del prisma
B

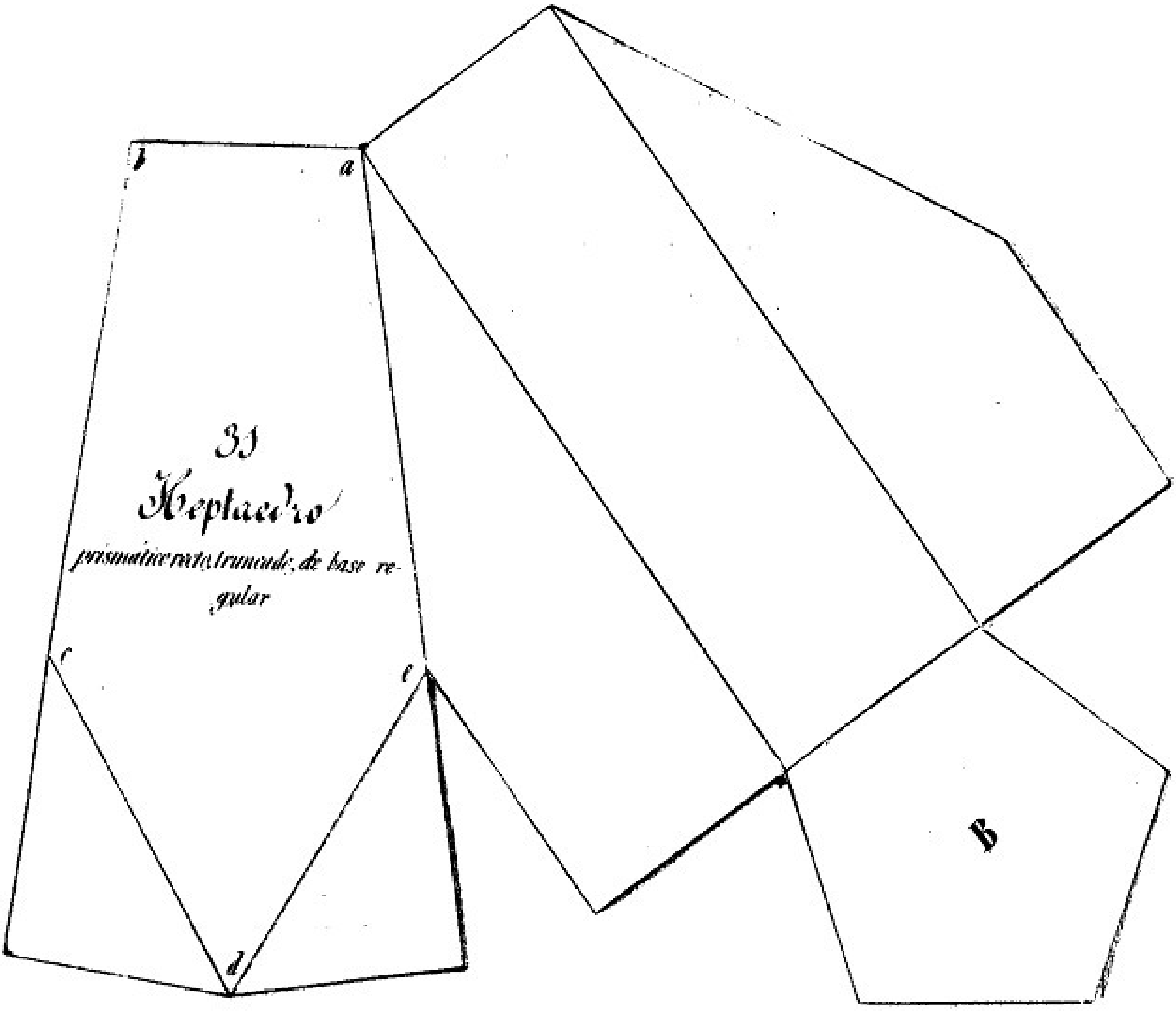

27
Paralelepipedo
truncado


28
Paralelepipedo
recto truncado

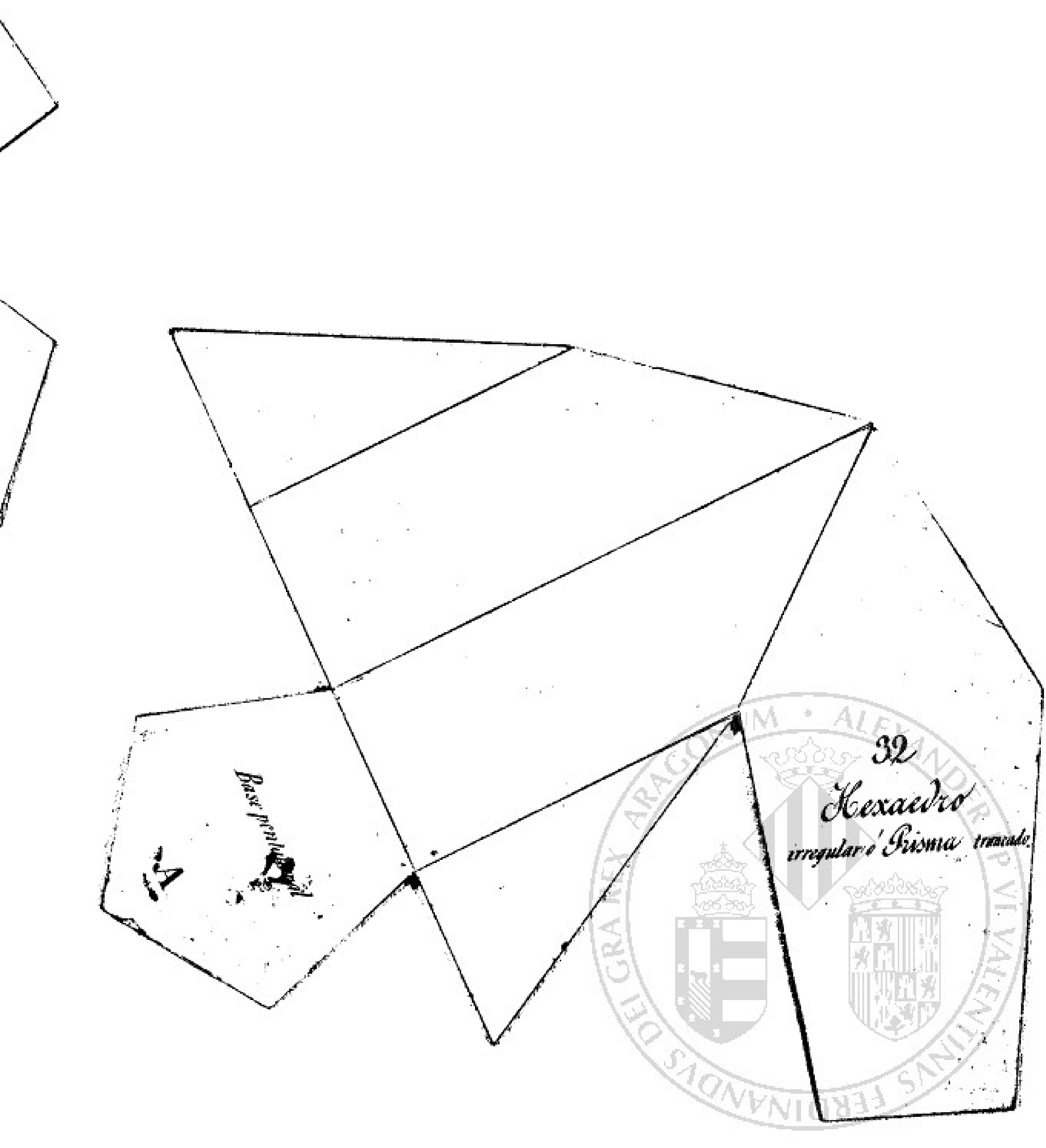

29
Prisma
cuadrangular truncado

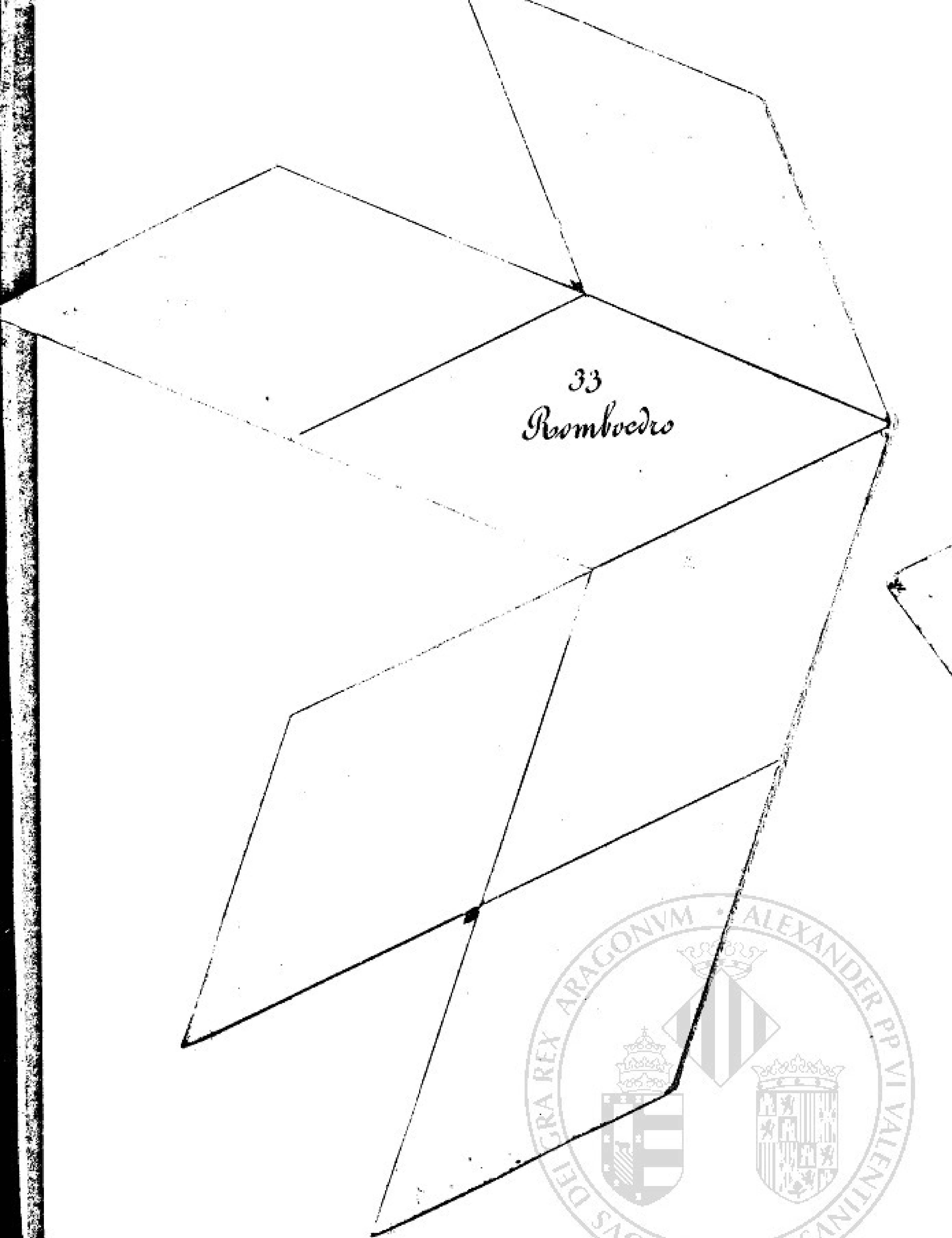


a
e
c
30
Pentaedro
prismático recto, truncado, de
base regular
f
d
b
Base
A

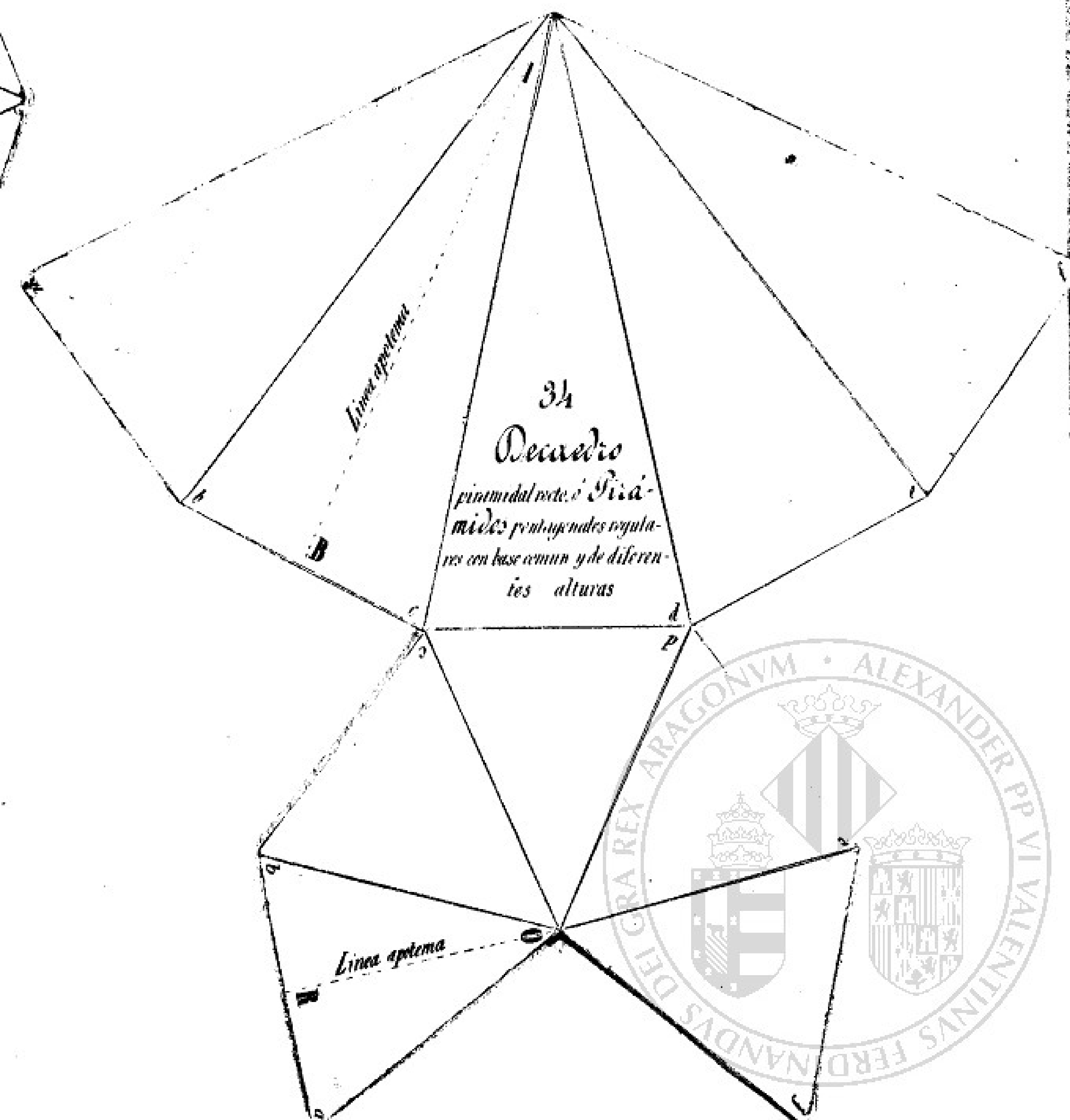


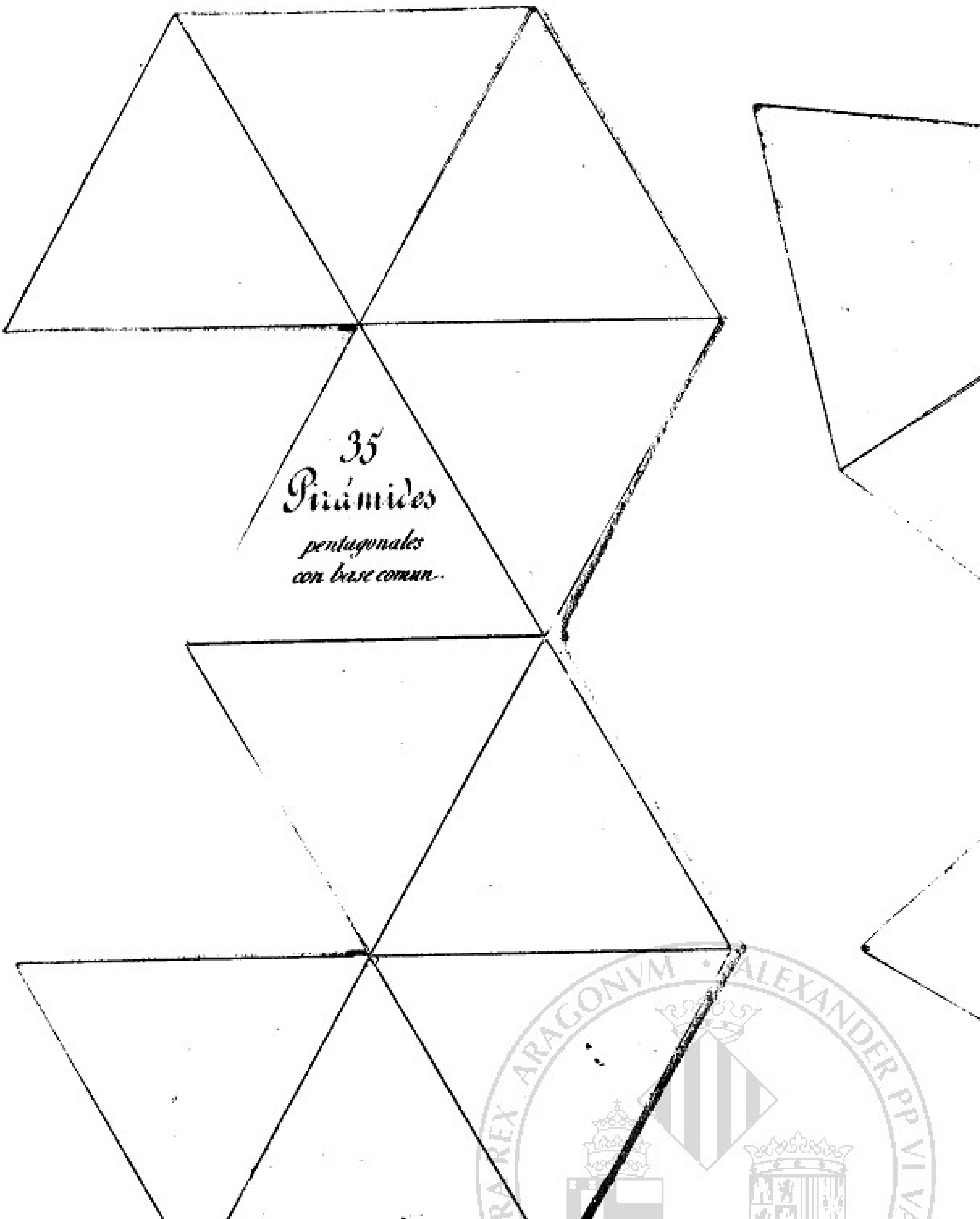
b
a
31
Heptaedro
prismático recto truncado de base regular
c
e
d
B

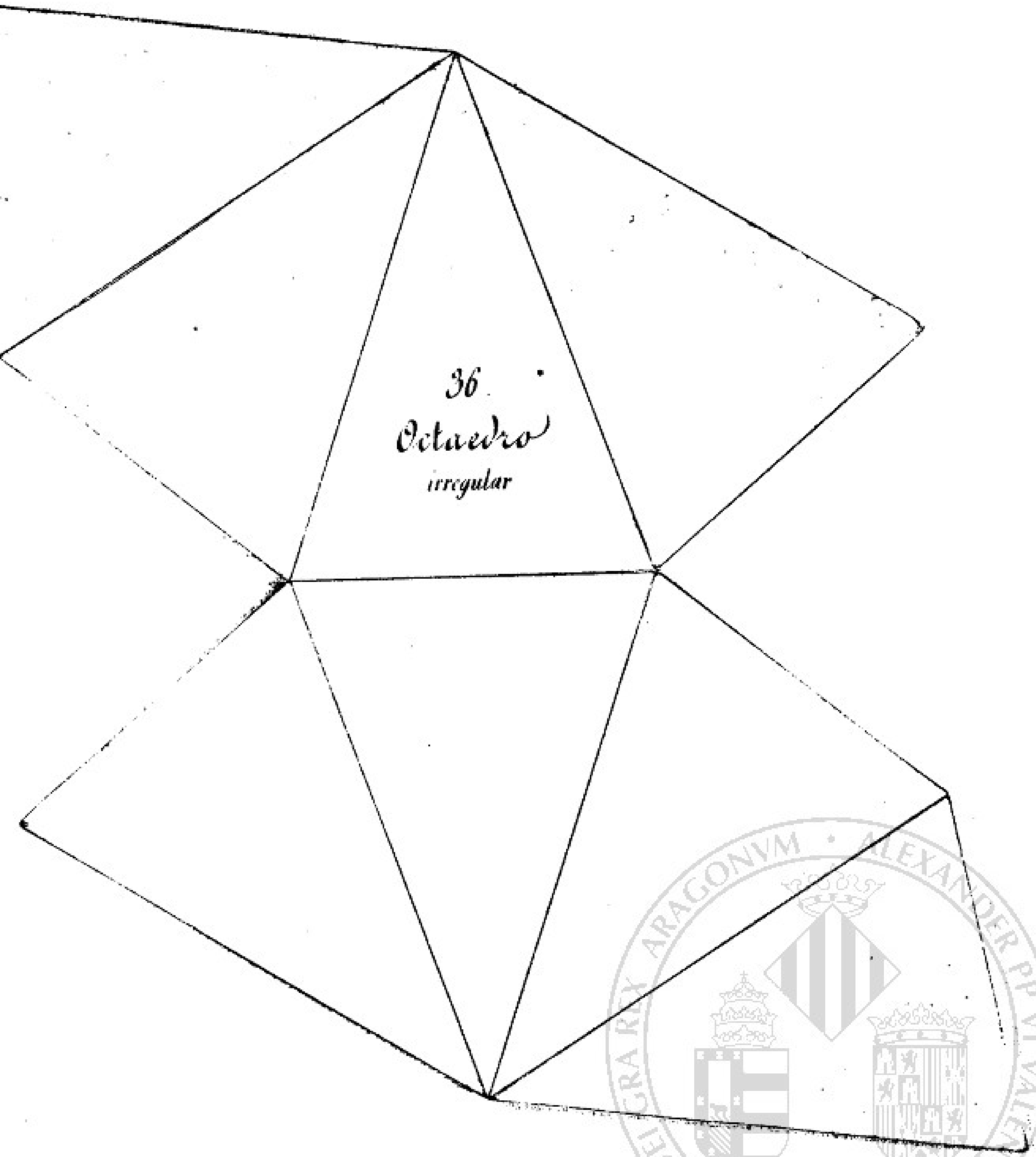

32
Hexaedro
irregular ó Prisma truncado.
Base principal
M

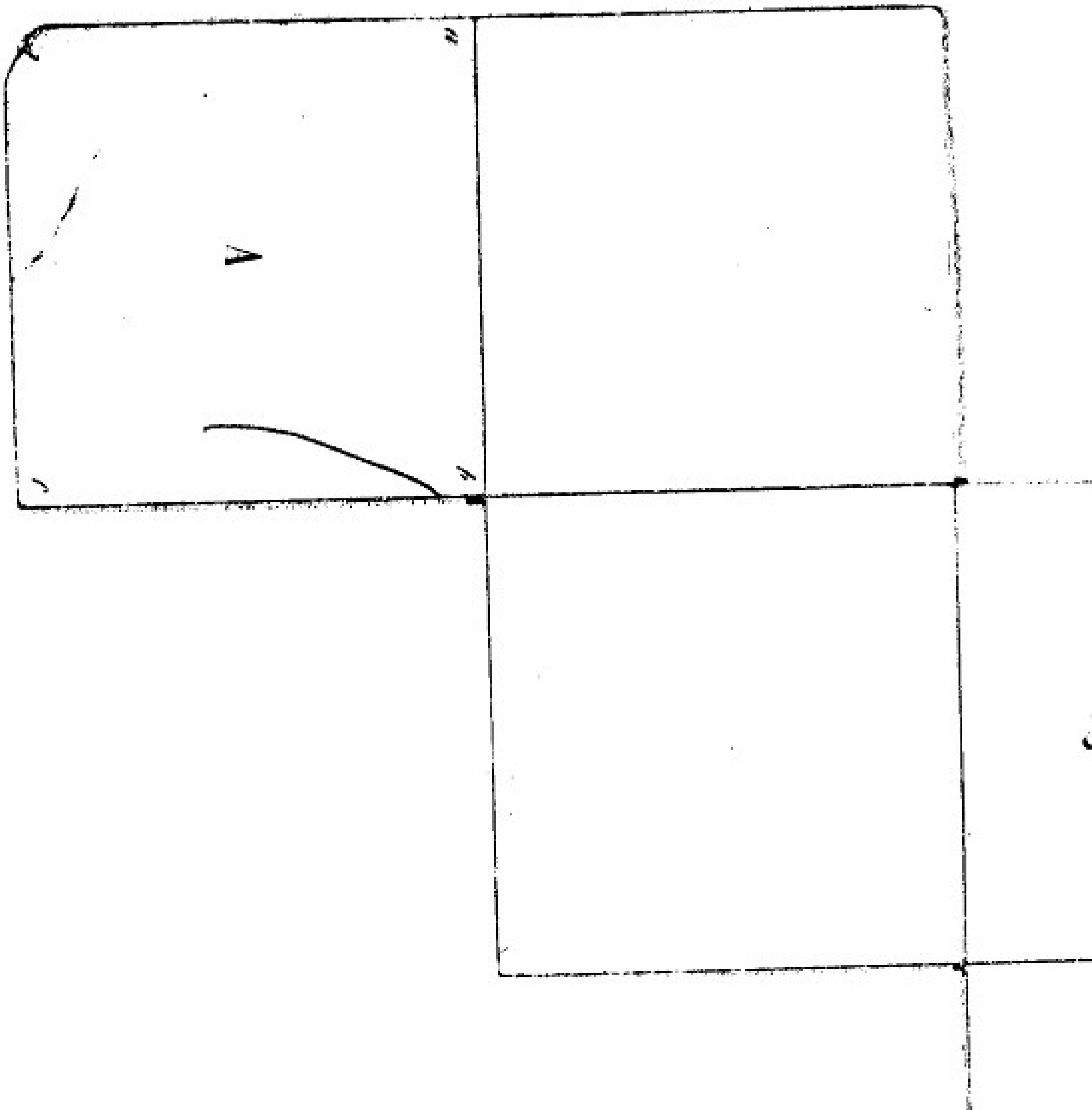


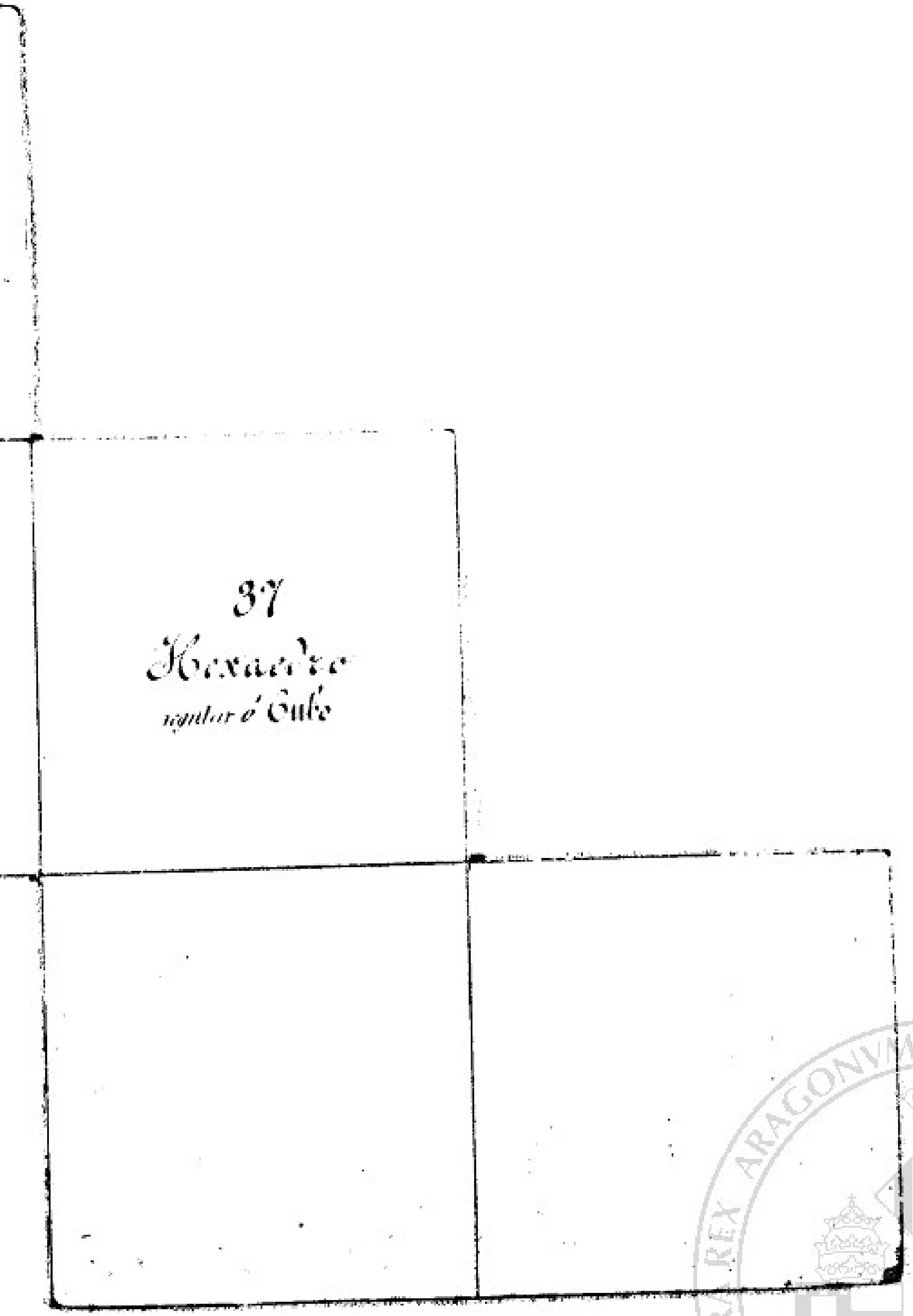
33
Romboedro

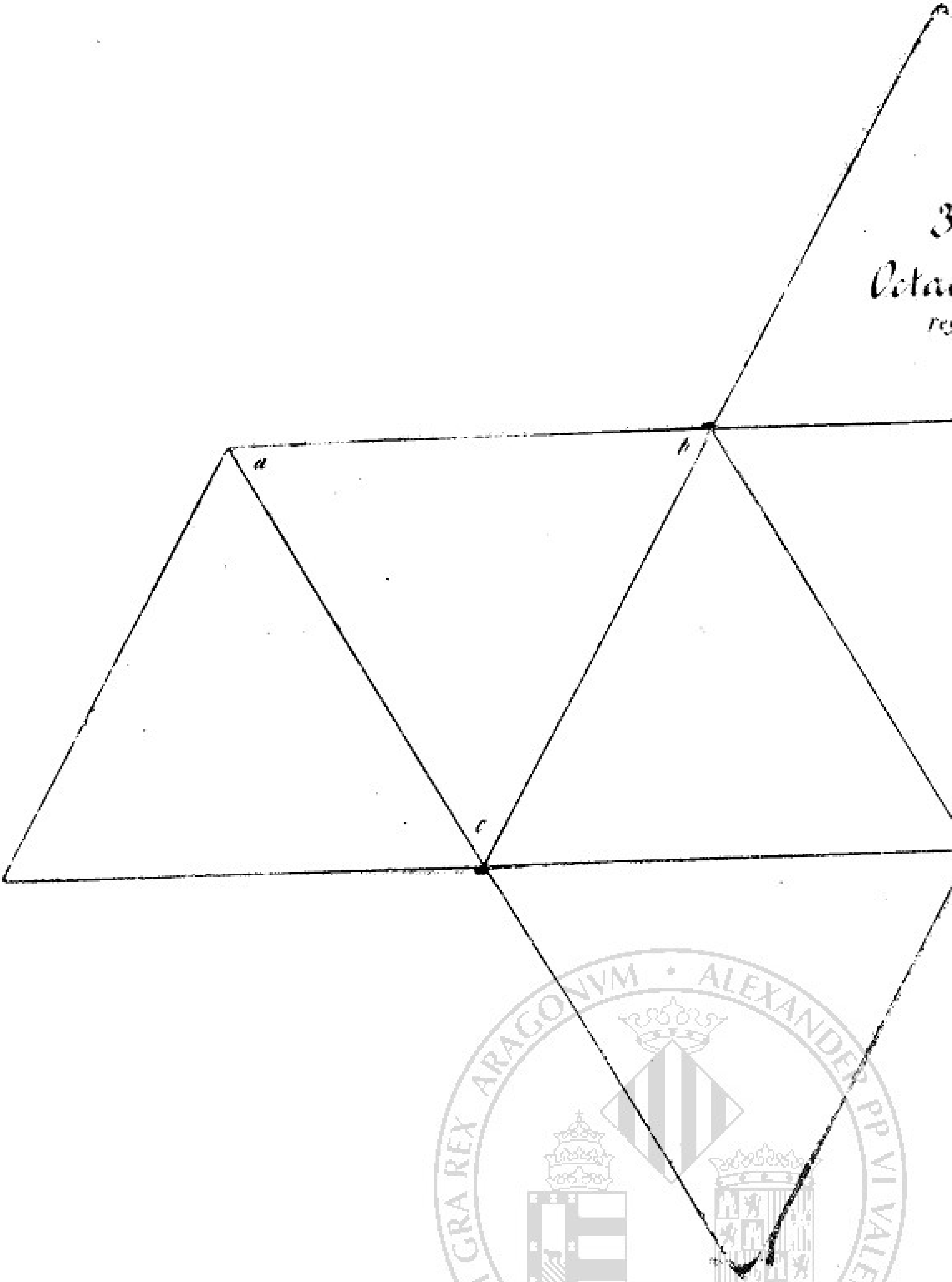

34
Decaedro
piramidal recto ó Pirá-
mides pentagonales regula-
res con base comun y de diferen-
tes alturas
Linea apotema
Linea apotema

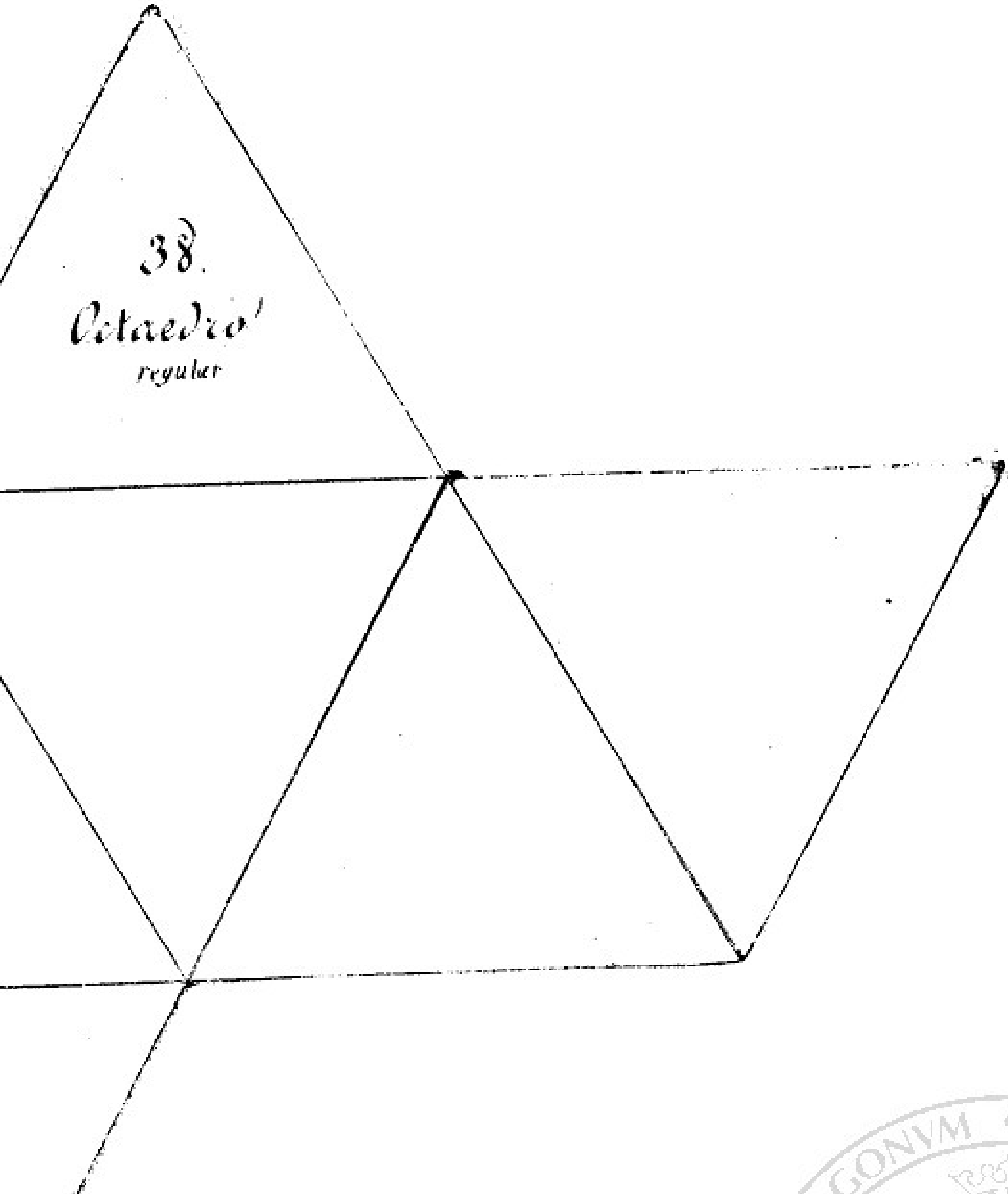

35
Pirámides
pentagonales
con base comun.

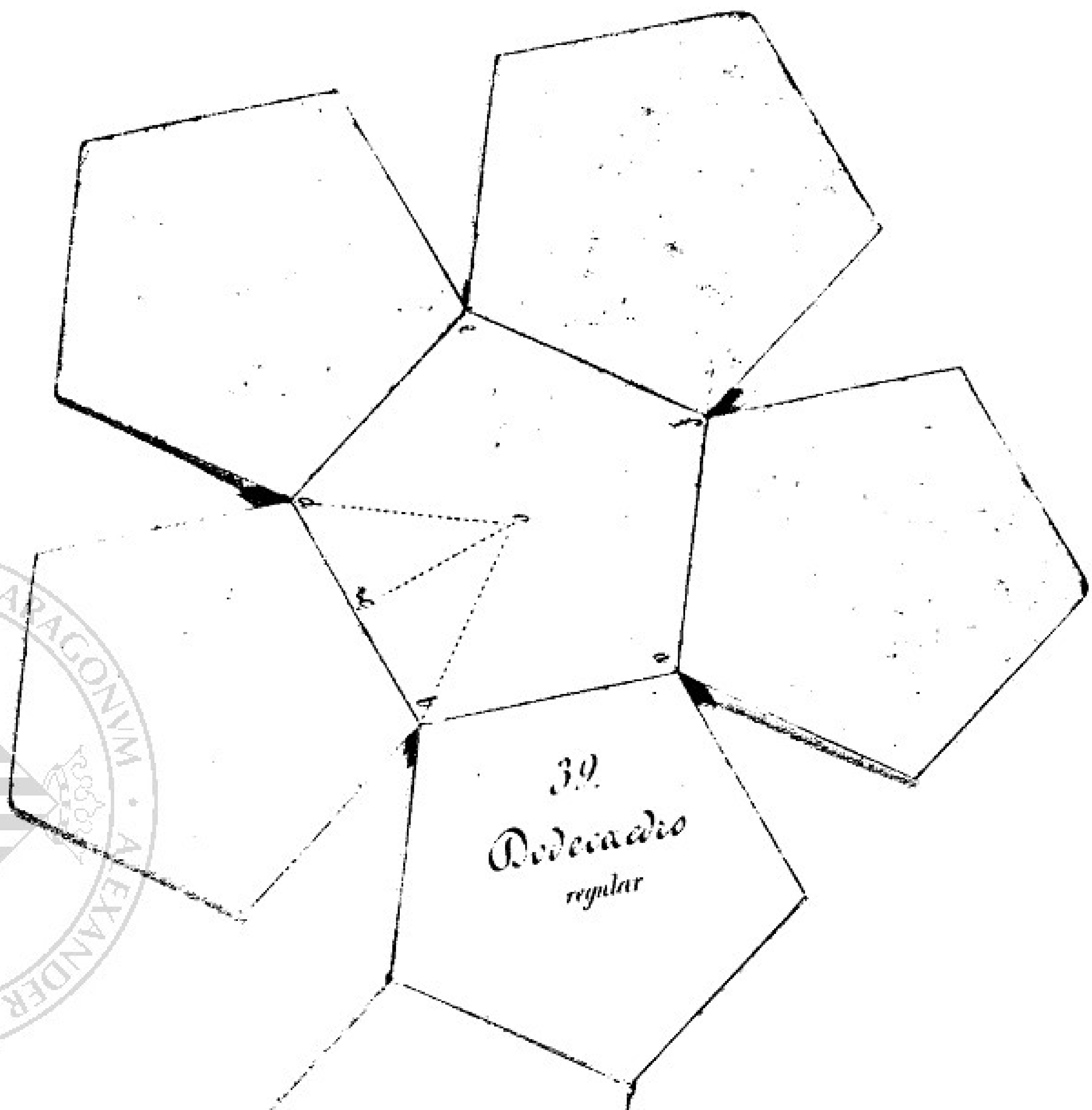

36
Octaedro
irregular

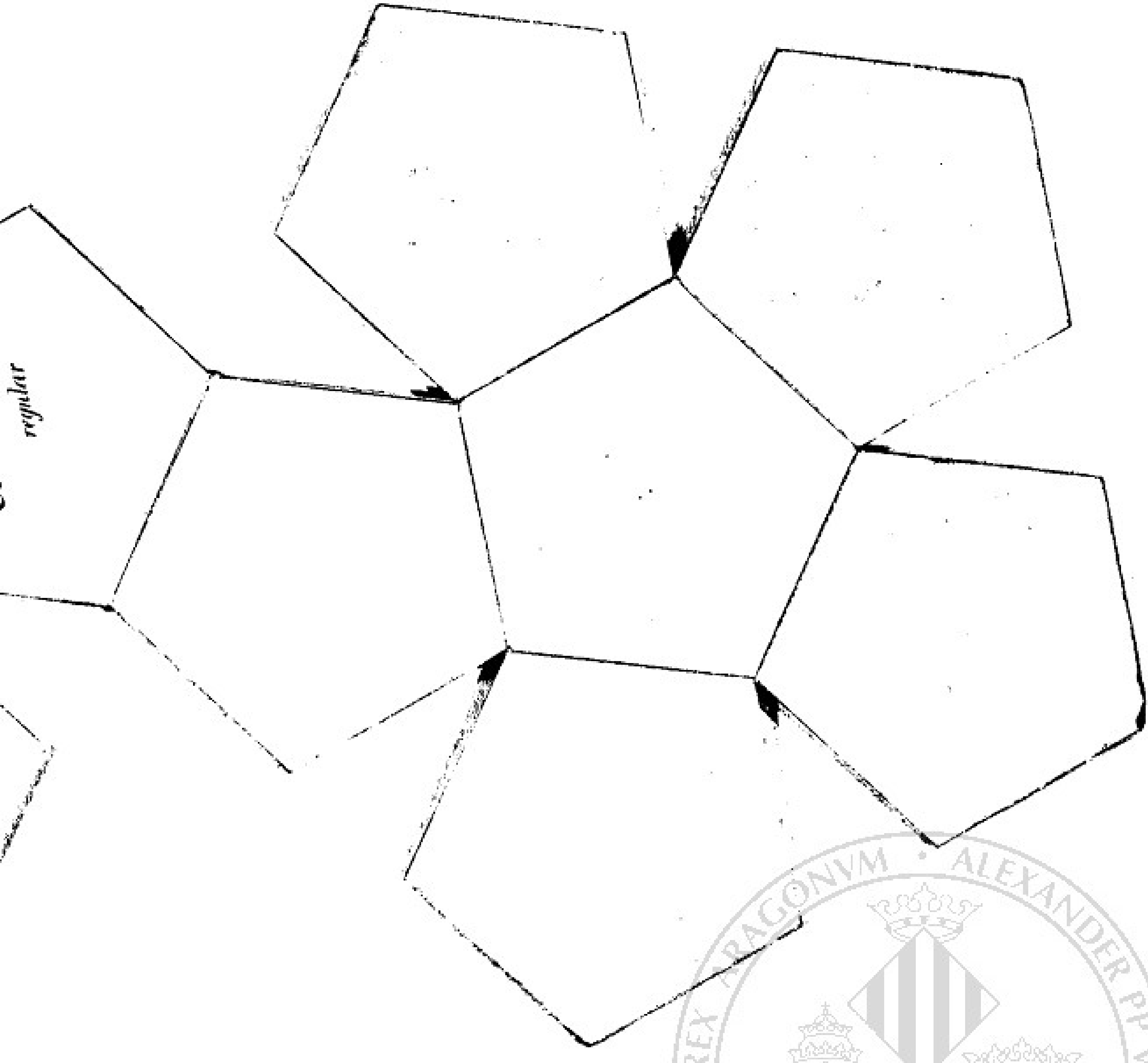


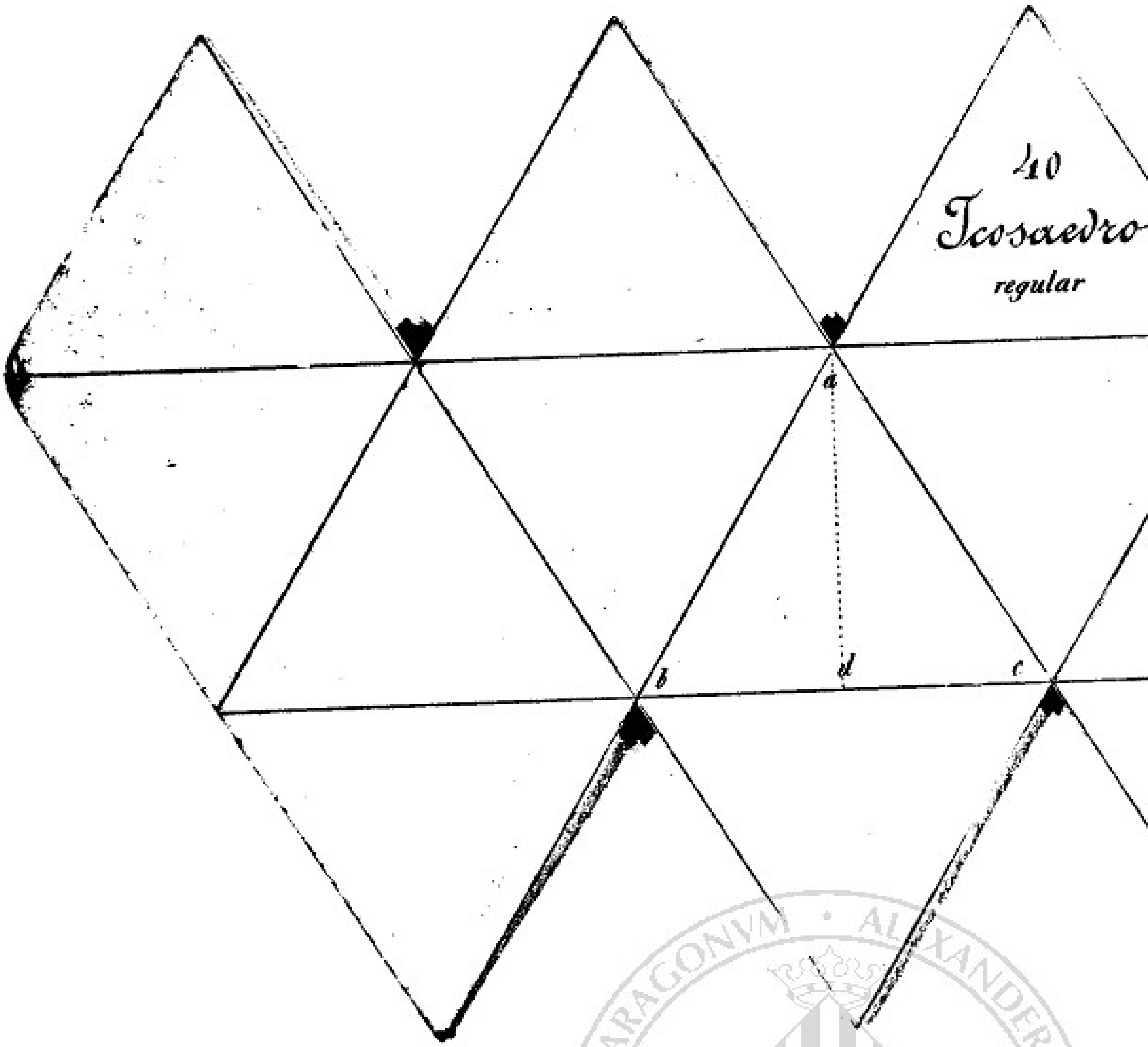

37
Hexaedro
regular ó Cubo


3
Octa
reg
a
b
c


38.
Octaedro
regular


39.
Dodecaedro
regular

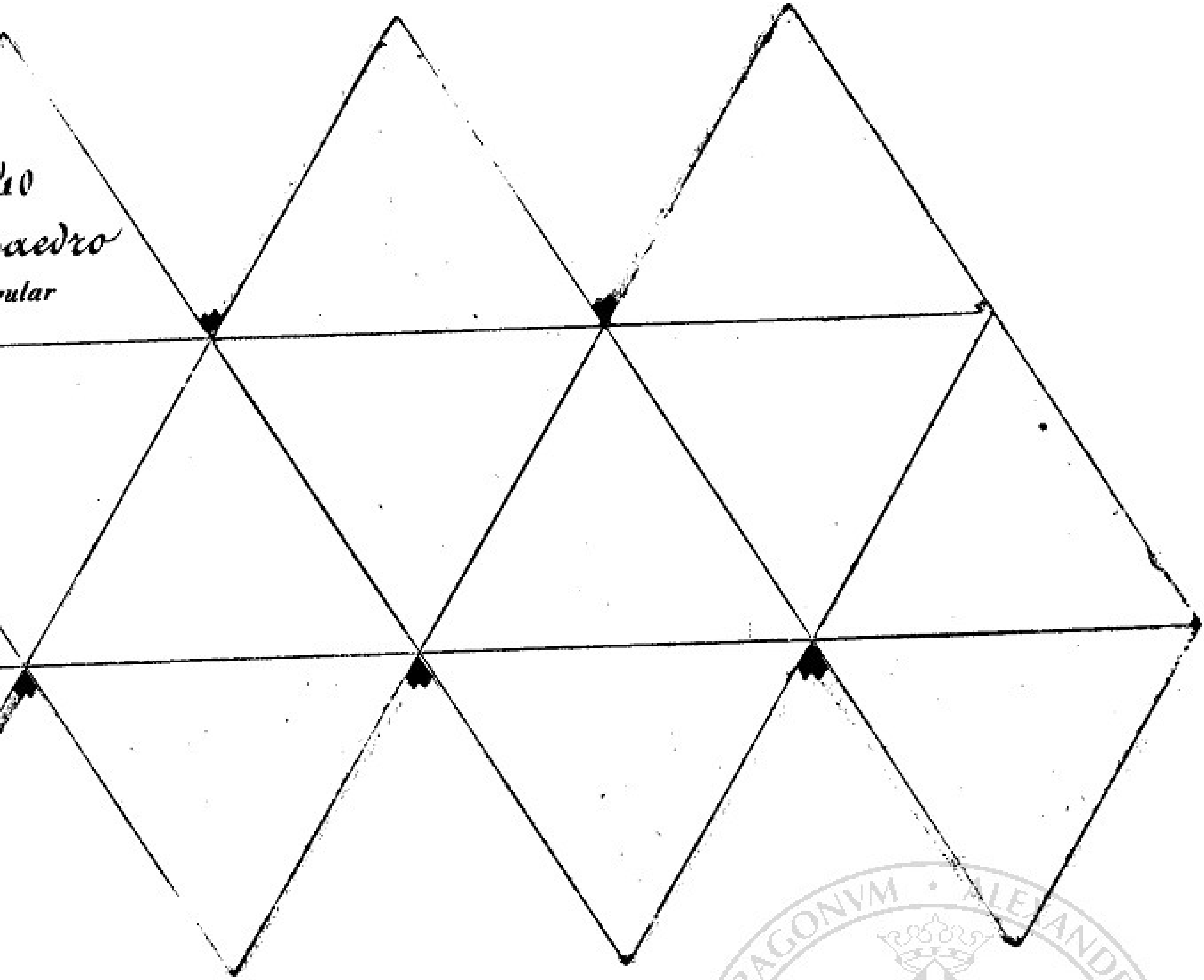

regular

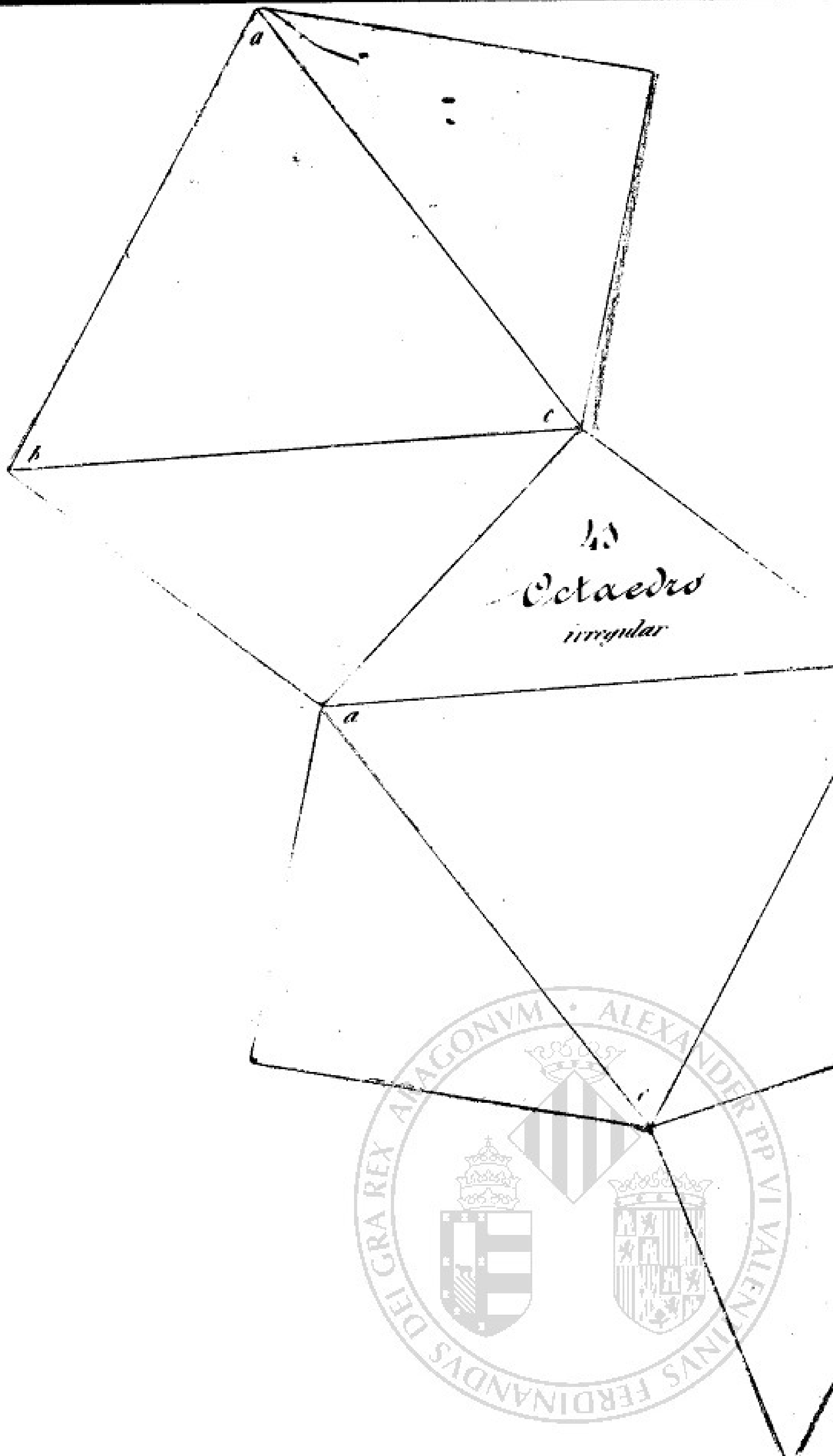

40
Icosaedro
regular
a
b
d
c

10

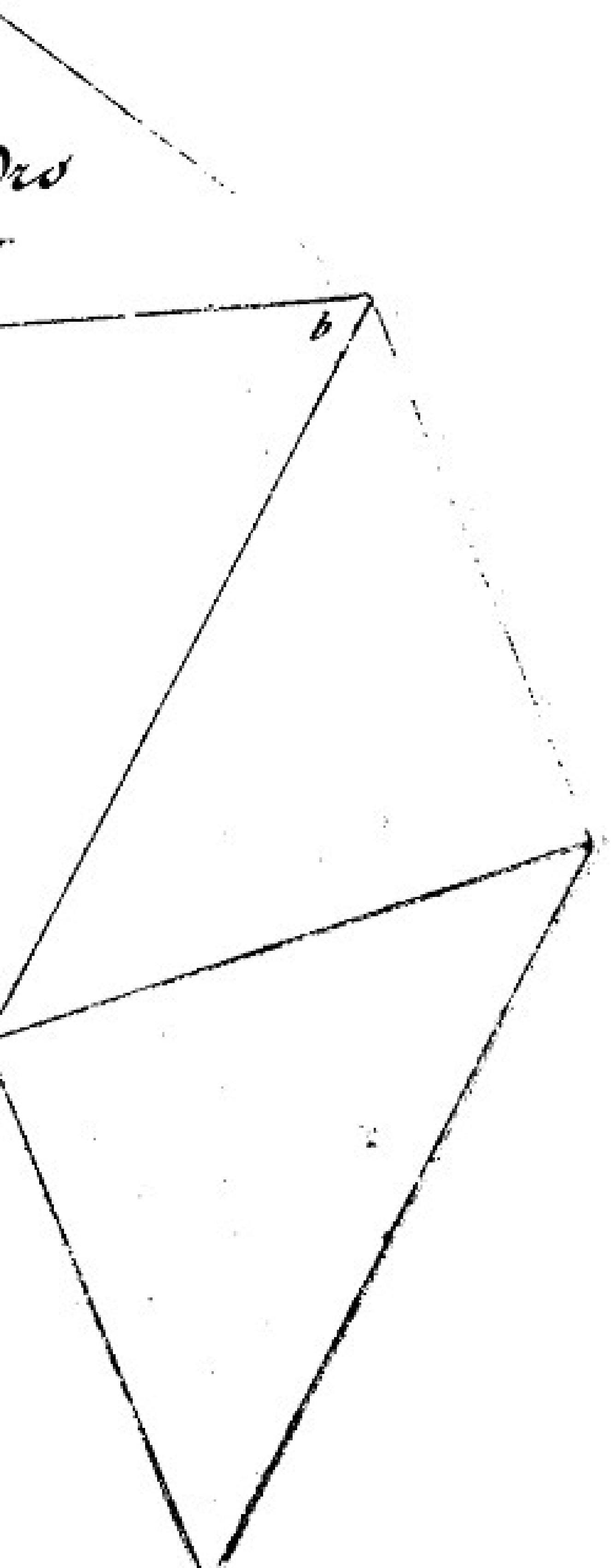
aedro

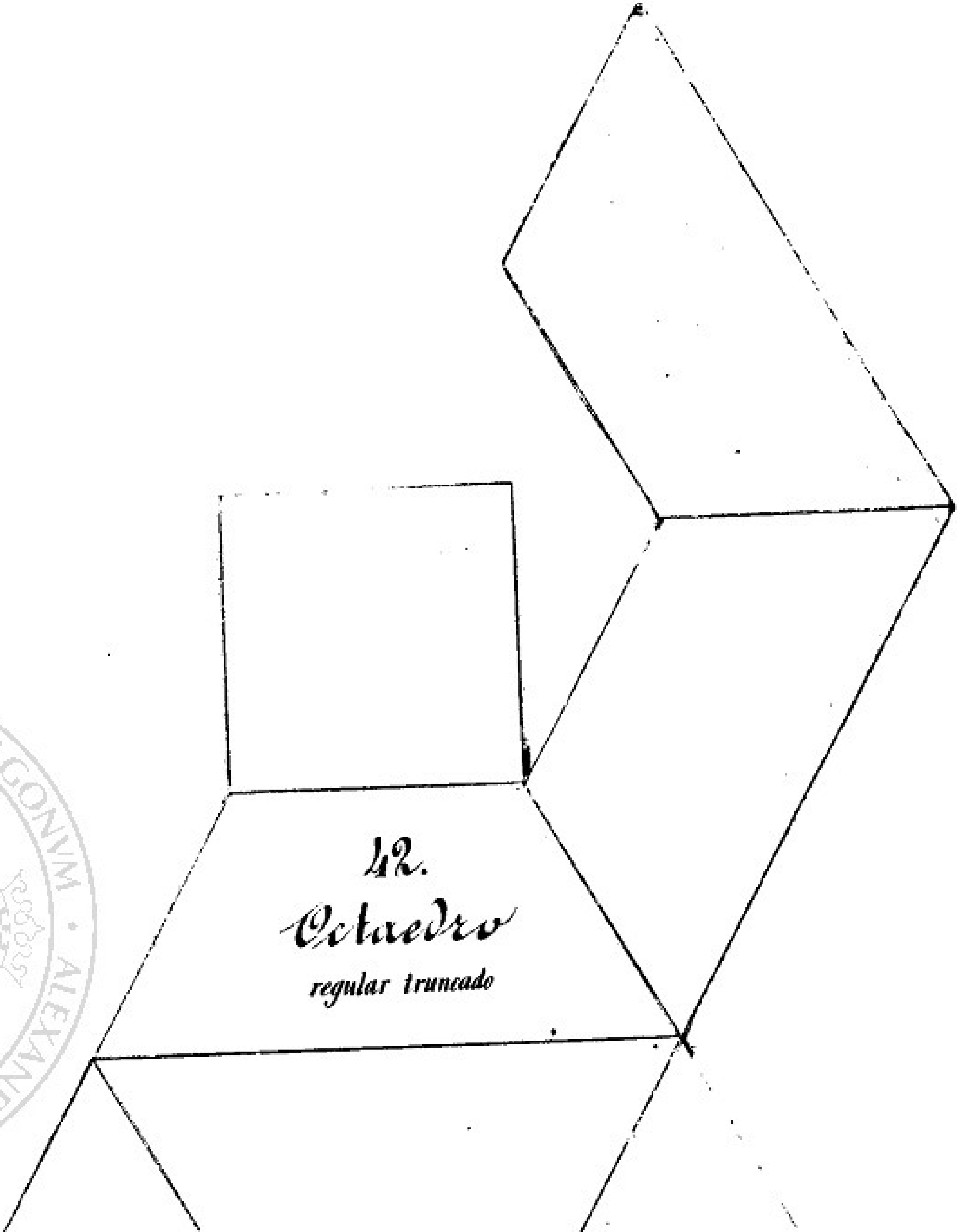
ular

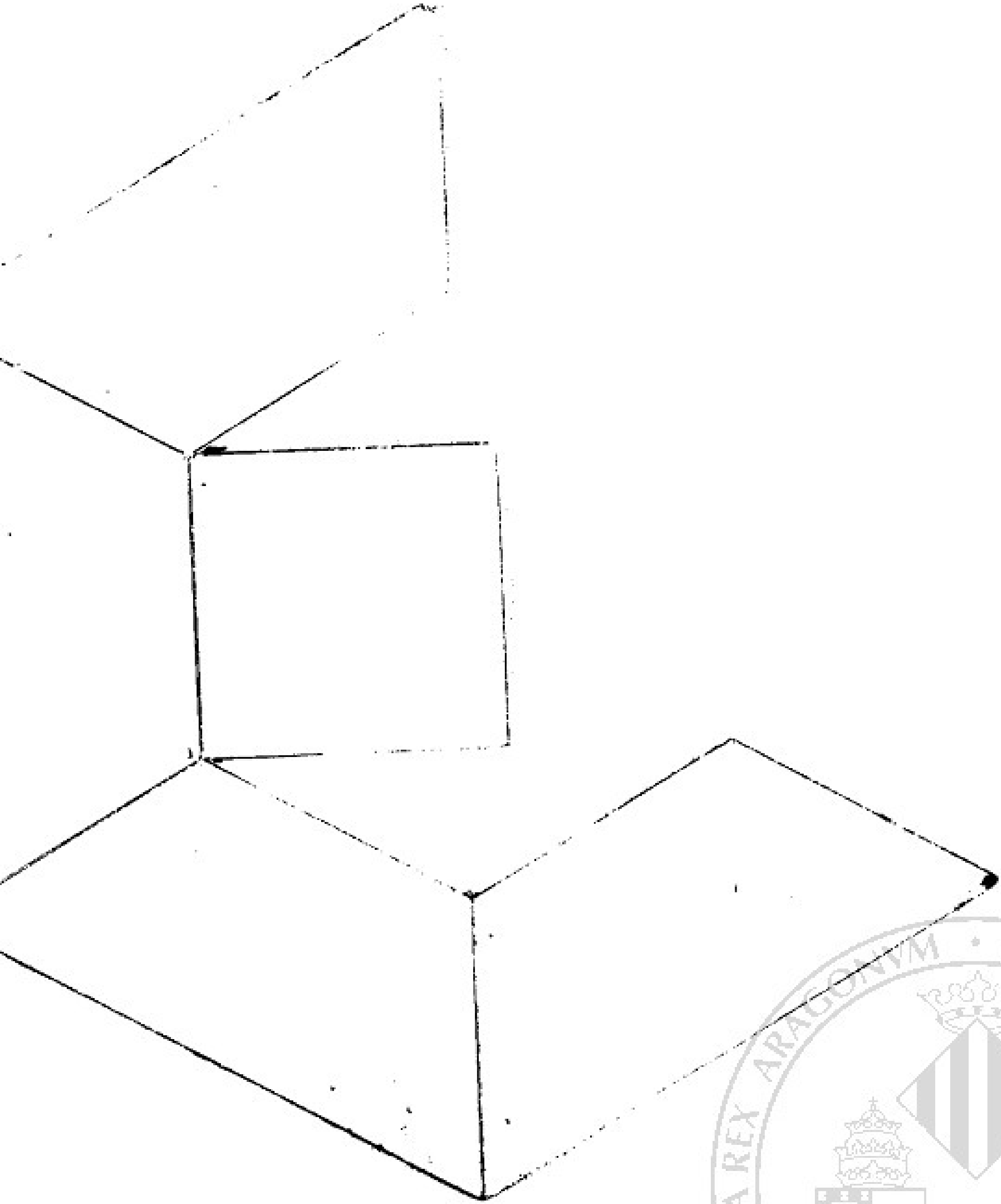


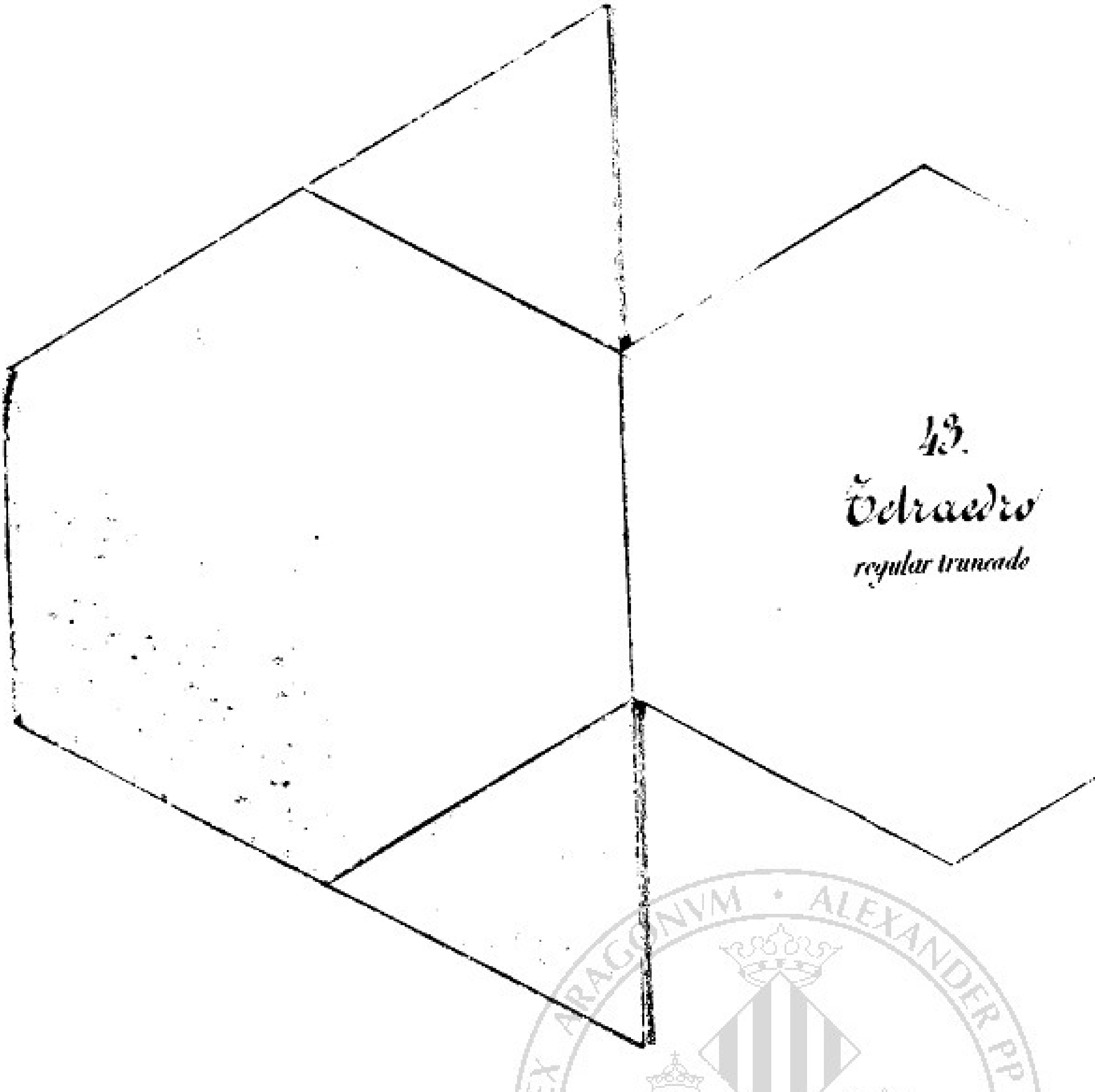

a
c
b
43
Octaedro
irregular
a
c

Dro




42.
Octaedro
regular truncado



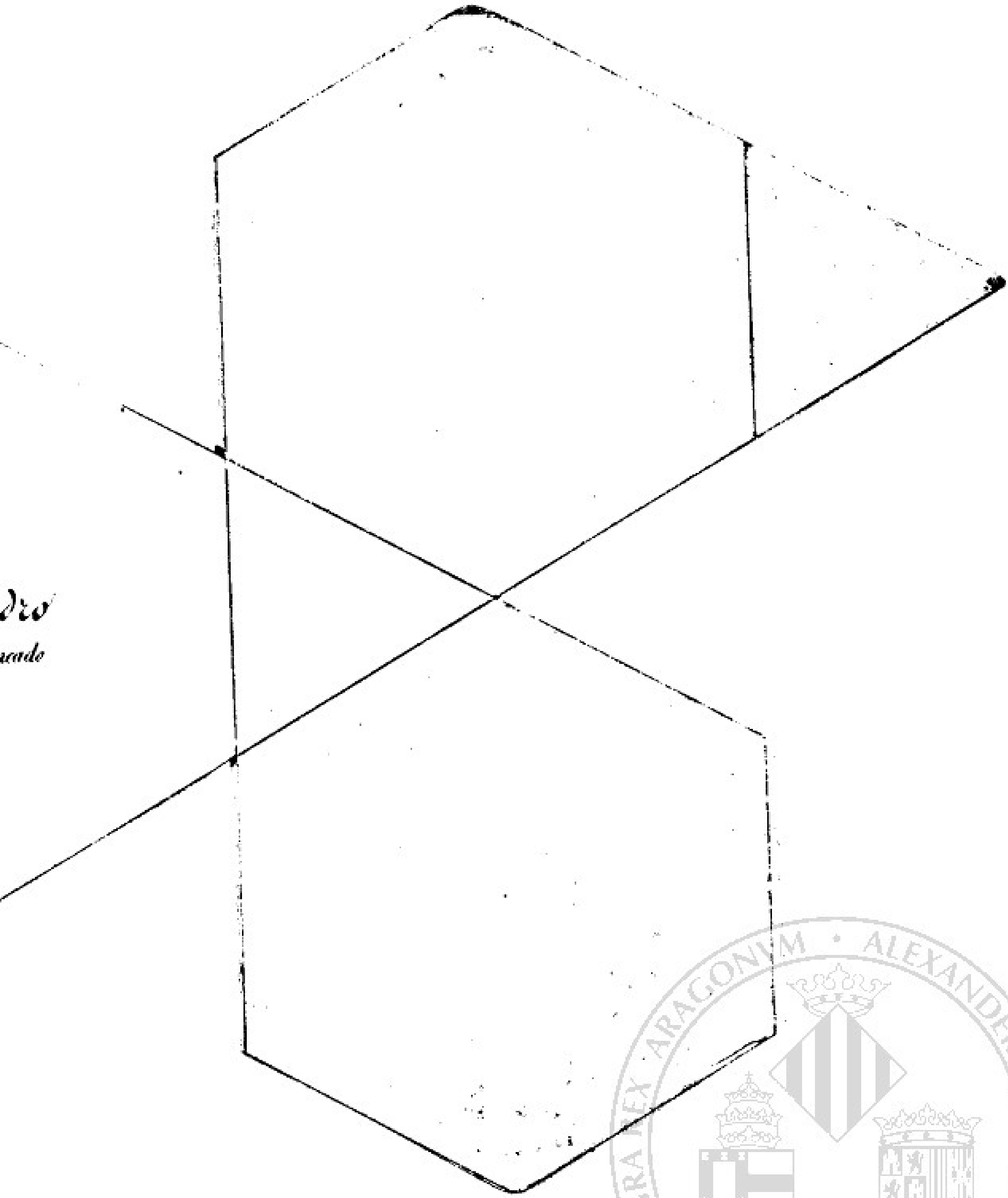


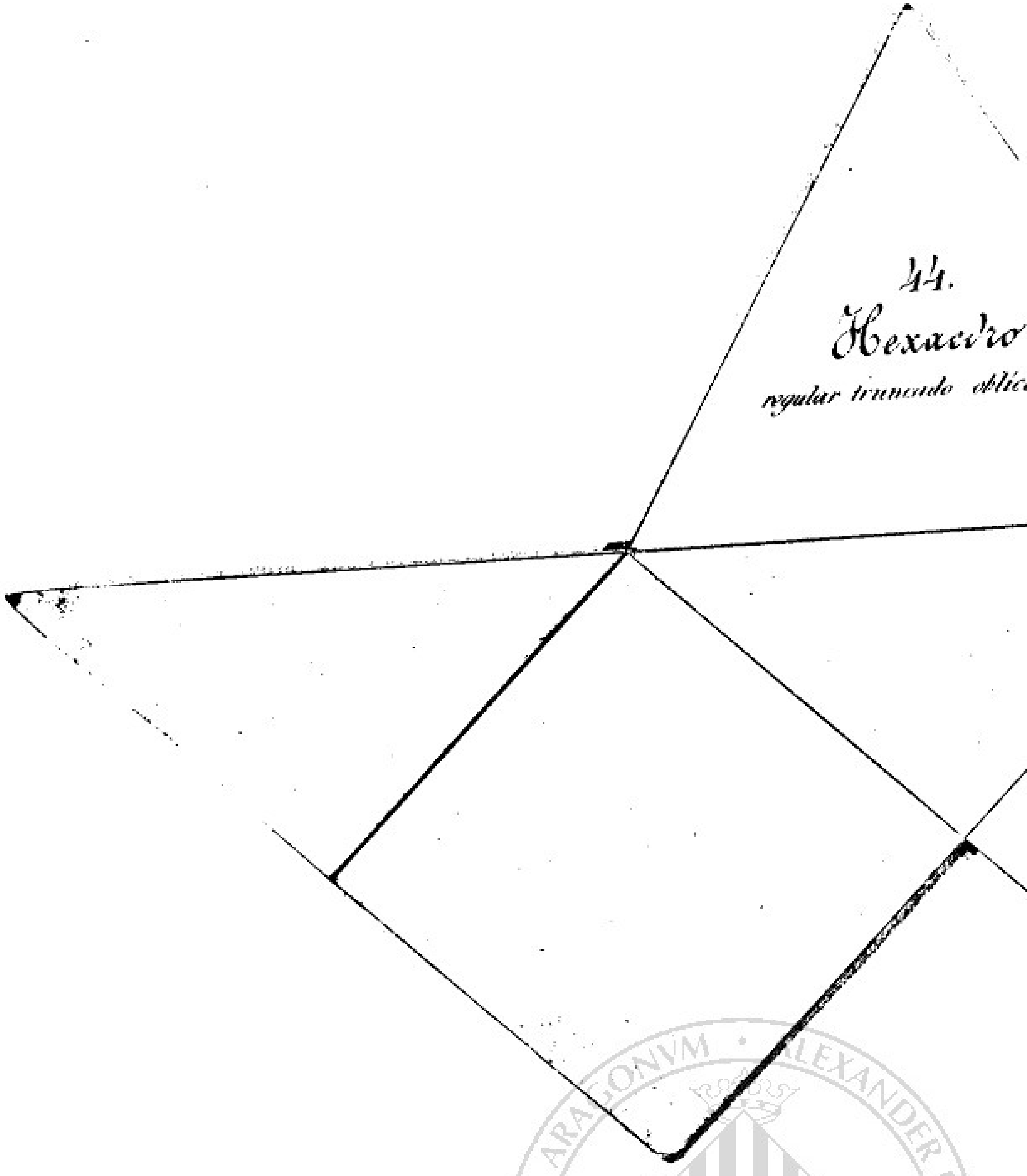
43.

Tetraedro

regular truncado

dro
ncado





44.

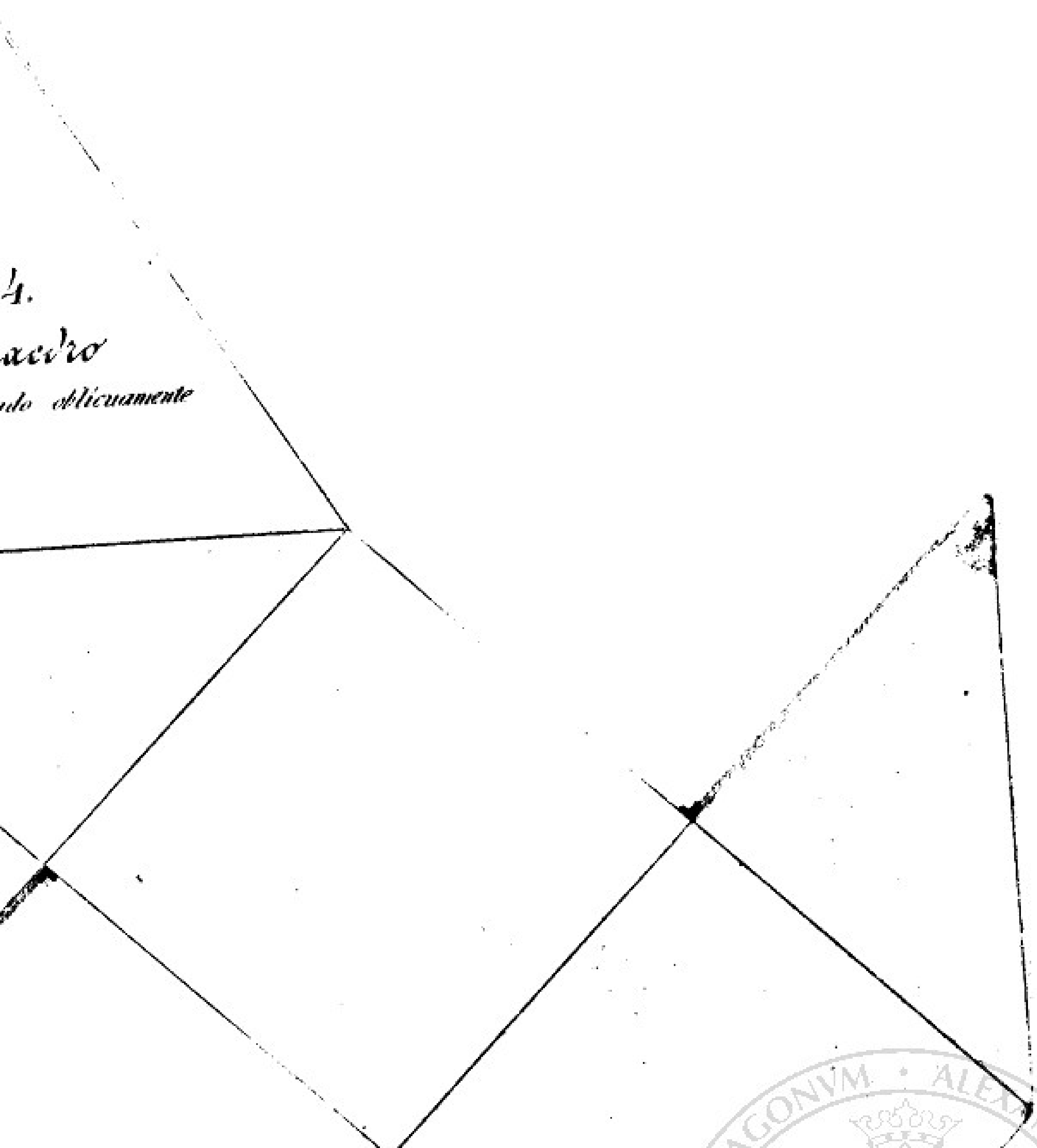
Hexaedro

regular truncado oblic

4.

aedro

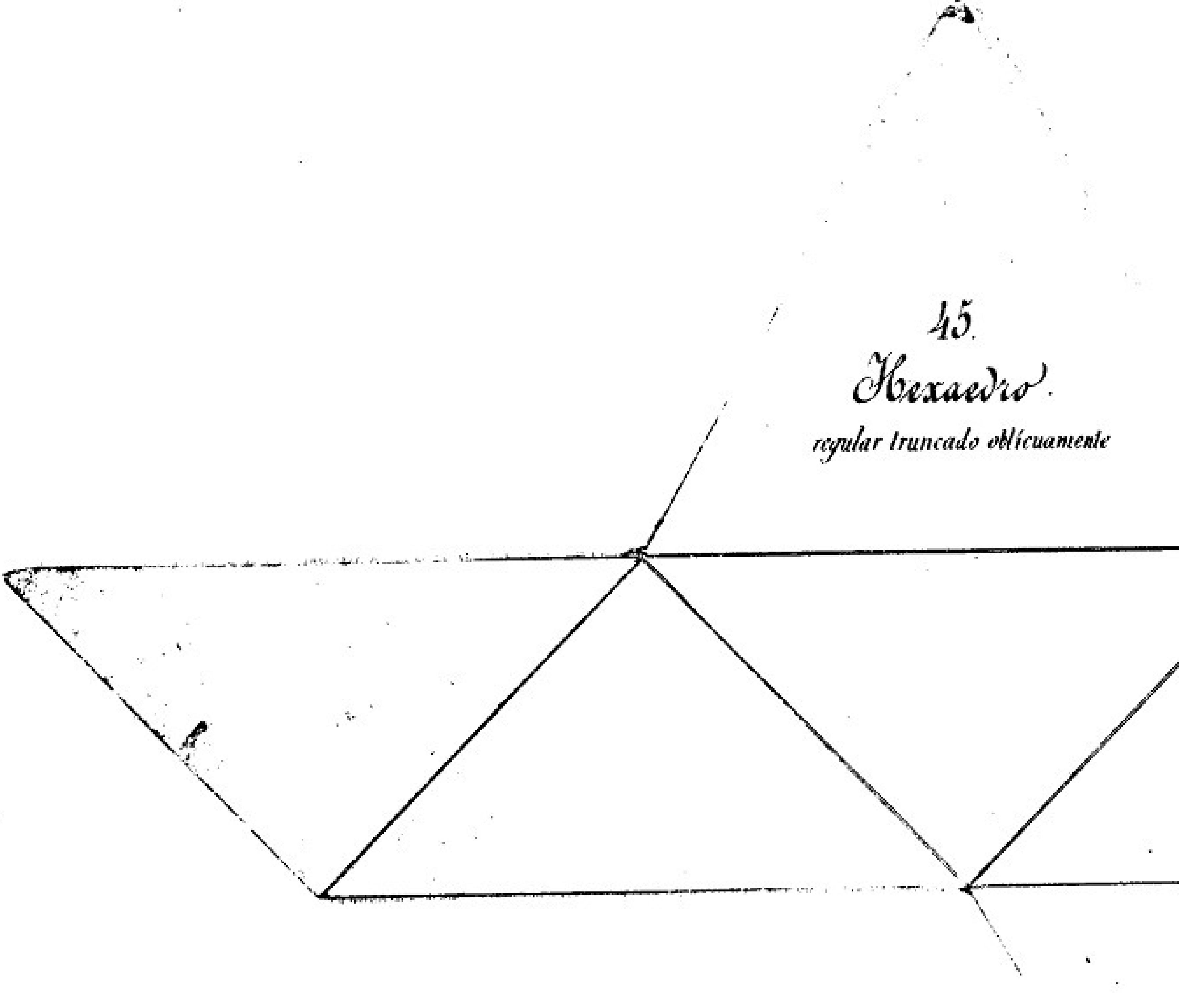
do oblicuamente



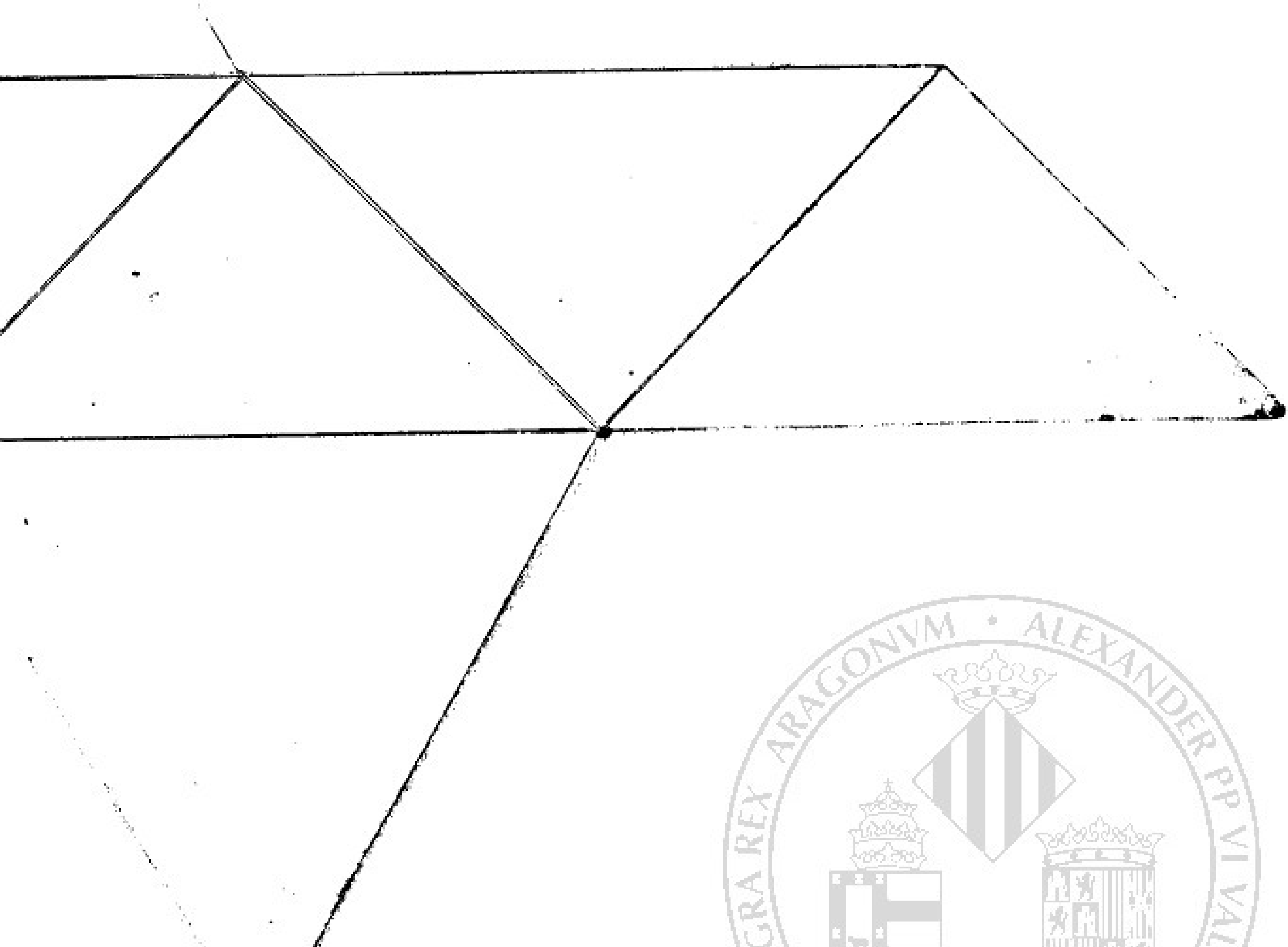
45.

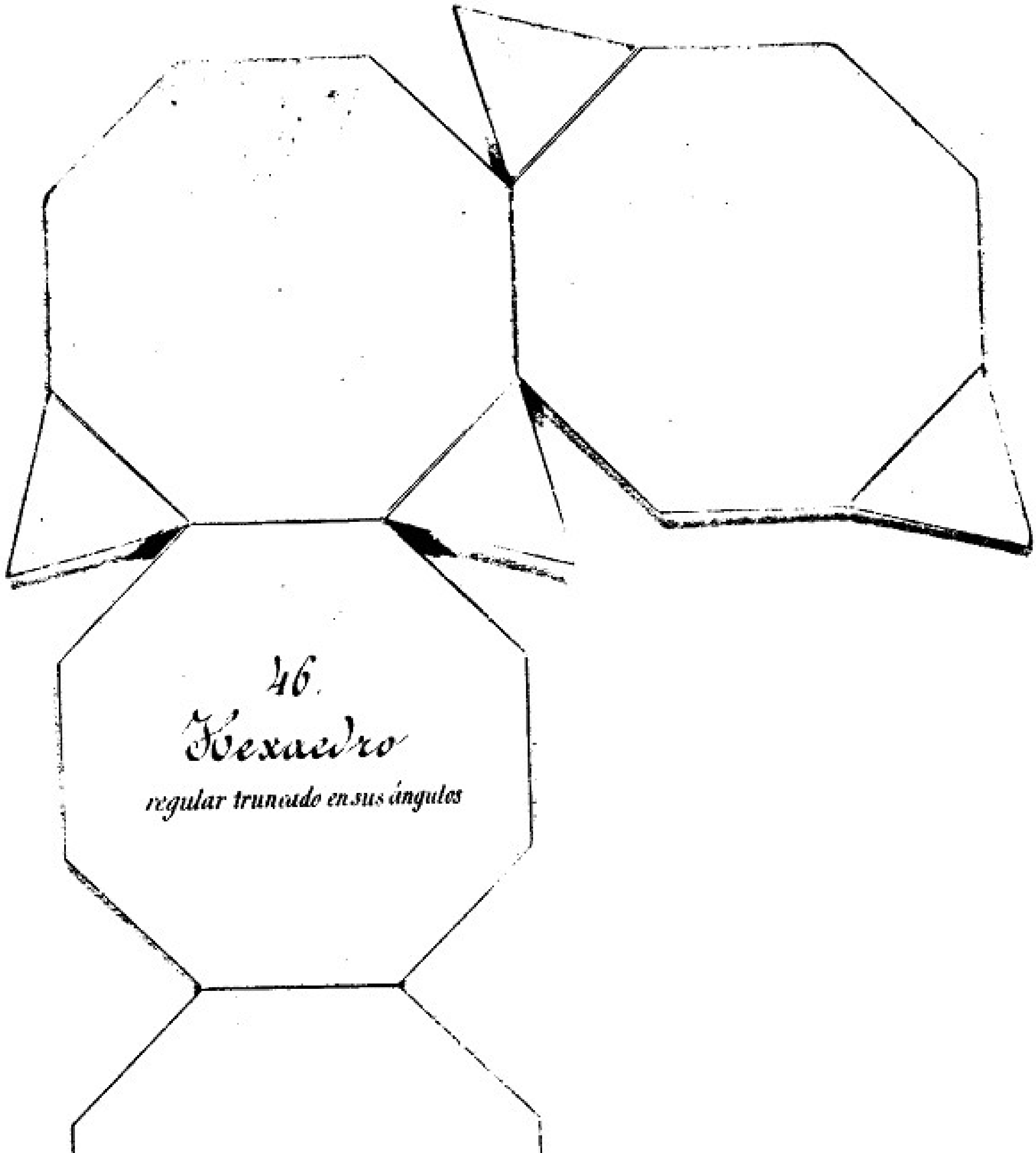
Hexaedro

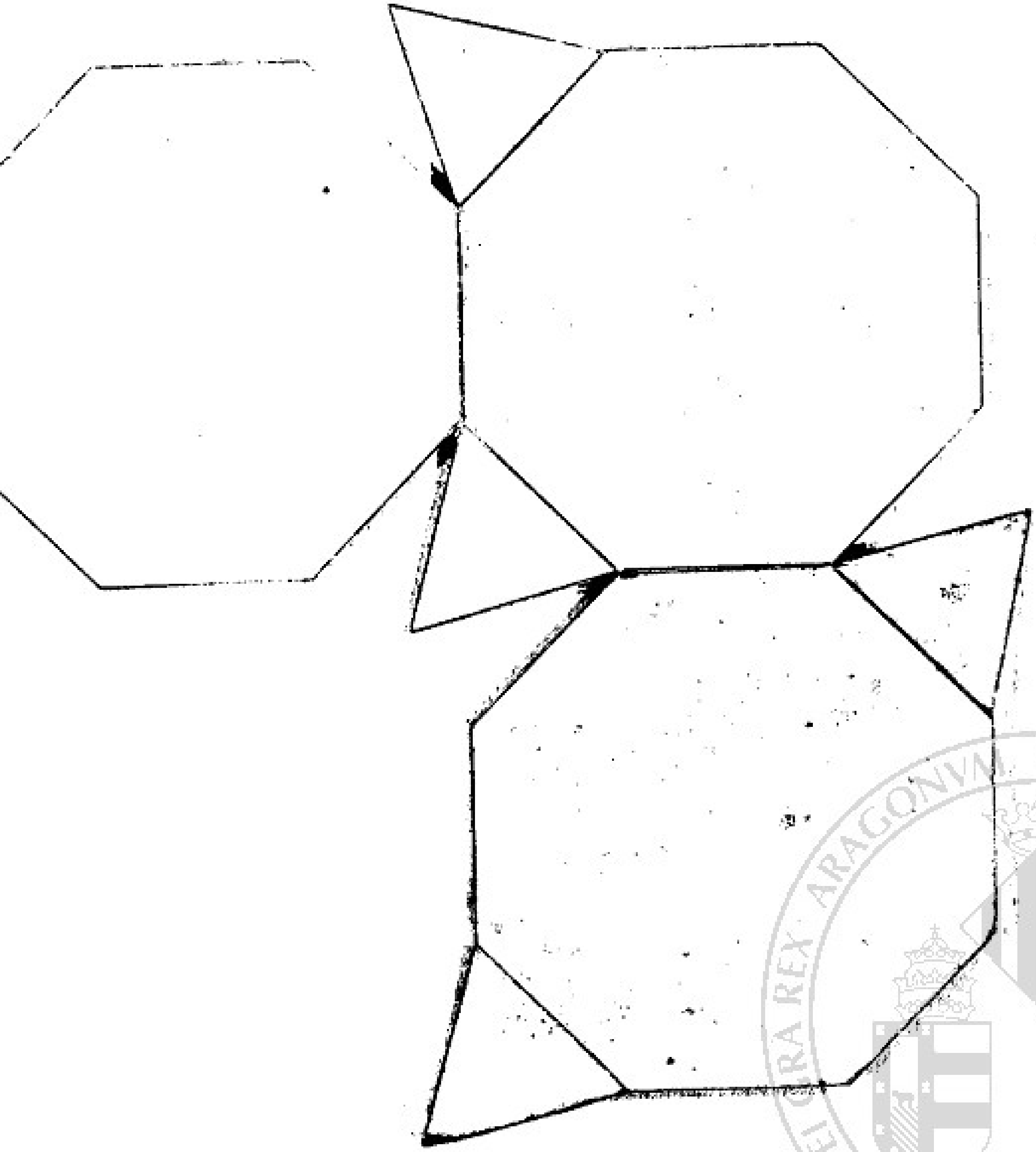
regular truncado oblicuamente

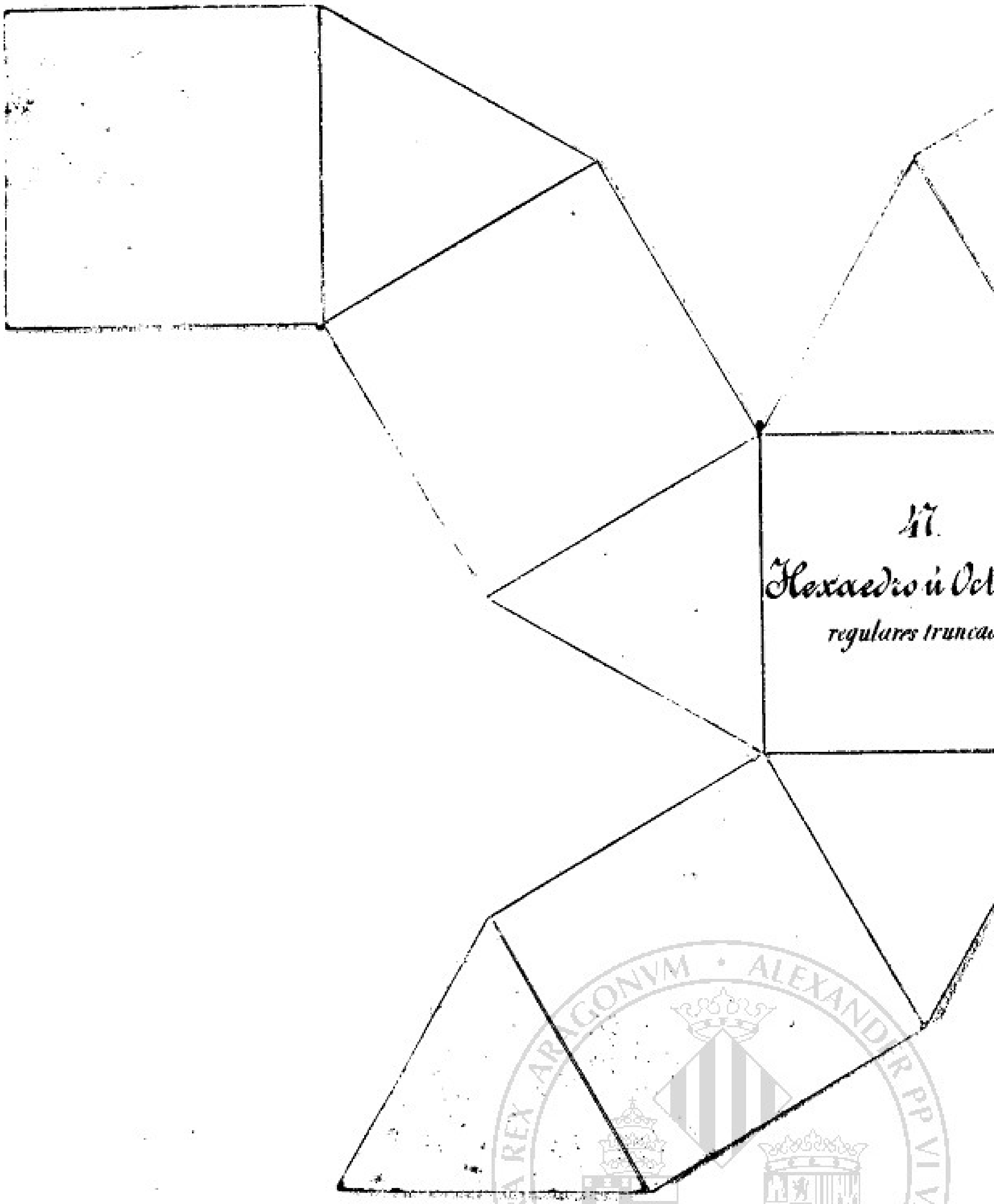


uente

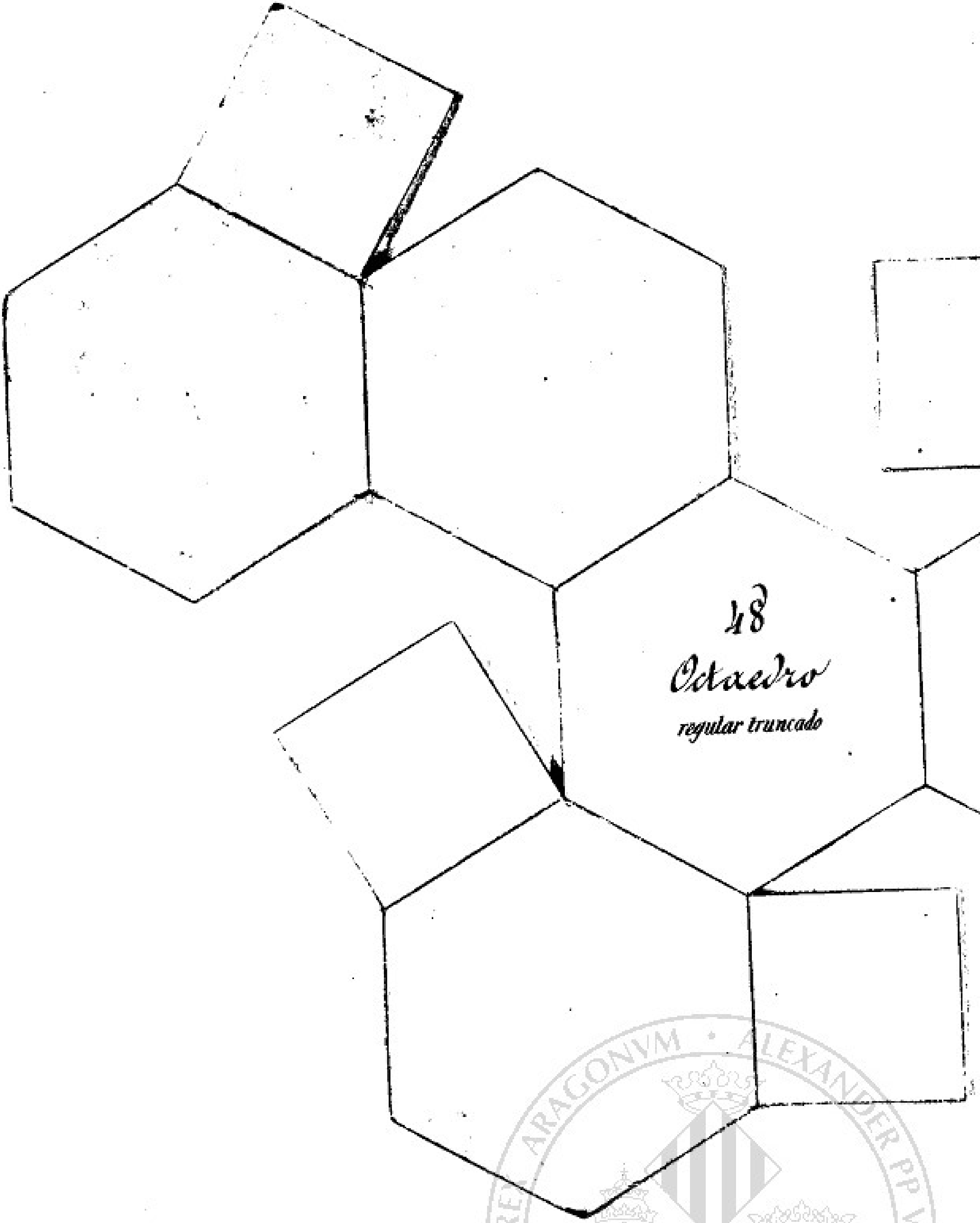



46.
Hexaedro
regular truncado en sus ángulos




47.
Hexaedro ú Oct
regulares truncad


47.
dro ú Octaedro
res truncados


48
Octaedro
regular truncado