

Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students

Carlos B. Gómez-Ferragud, Joan J. Solaz-Portolés, and Vicente Sanjosé
Universitat de València

Abstract

We conducted an empirical study to analyse the association between students' perception of surface and structural analogies among problems, and their algebraic success. Algebraic success was measured by the equations selected to solve each problem. Different surface and structural relationships between one source problem and four target problems were considered. We also considered high (daily life) and low (scientific) familiarity contexts for the problems. Similarities and differences between the source and each target problem were explicitly asked to students. Results showed a significant correlation between detecting the correct structural relation between these problems and selecting the correct equations to solve the target ones. Low familiarity (science) problems obtained lower success independently of other factors. Usual teaching procedures, based on isomorphism, could increase the probability that students consider isomorphism the only possible relationship between problems.

Keywords: Problem-solving, analogies, surface and structure, familiarity, transfer.

Resumen

Se desarrolla un estudio empírico con estudiantes de Secundaria para analizar la asociación entre detectar las analogías superficiales y estructurales entre problemas, y el éxito algebraico medido a través de las ecuaciones seleccionadas para resolverlos. Se consideraron distintas relaciones superficiales y estructurales entre un problema fuente y cuatro problemas diana. Se consideraron problemas con temáticas de alta (vida diaria) o baja familiaridad (ciencia). Se pidió a los estudiantes comparar el problema fuente con cada problema diana para establecer las similitudes y diferencias entre ellos. Los resultados mostraron una correlación significativa entre detectar correctamente la relación estructural entre problemas y elegir las ecuaciones correctas para resolverlos. El éxito fue menor en los problemas de baja familiaridad (ciencias) independientemente de otros factores. La enseñanza habitual basada en la isomorfía podría incrementar la probabilidad de que los estudiantes considerasen este tipo de relación como la única posible entre problemas.

Palabras clave: Resolución de problemas, analogías, superficie y estructura, familiaridad, transferencia.

Correspondence: Joan Josep Solaz-Portolés, Departament Didàctica de les Ciències Experimentals i Socials, Universitat de València, Av Tarongers 4, 46022-Valencia. E-mail: joan.solaz@uv.es

Introduction

Problem solving is a classical learning task in learning science and mathematics (Polya, 1957). In science and mathematical education many problems are verbal (or word) problems, i.e., problems with statements describing a certain world situation.

Comprehension and resolution are the two phases in classical problem-solving theory (Newell & Simon, 1972). In psychological terms comprehending a word problem means constructing mental representations at different levels of elaboration of the situation described in the statement, usually a short text. Several mental representations have been proposed (Kintsch, 1998; Kintsch & van Dijk, 1978): Surface (word level); Textbase (semantic level); Situation Model (SM, referential level) and Problem Model (PM, abstract level). The Situation Model and the Problem Model involve the subject's previous knowledge, but both differ in their constituents. SM is made from concrete, usual world objects and events, and also world rules, whereas PM is made from abstract entities as relations among quantities, functions, concepts, laws, principles, etc. (Kintsch & Greeno, 1985; Nathan, Kintsch, & Young, 1992).

This paper focuses in the comprehension phase of mathematics and science problem solving. We are interested in the way some problem variables can facilitate or

impede Secondary students' construction of SM and PM and so, to increase or decrease their success in the solving phase. We will study problems involving two linear equations. These problems are usual in Secondary subject-matters of mathematics, physics and chemistry.

We will refer to *algebraic translation* as the process building PM from SM in problems of algebraic nature (Puig, 1998; Sanjosé, Solaz-Portolés, & Valenzuela, 2009). It is supposed that lower levels of representation are necessary steps to reach the higher ones (Vidal-Abarca & Sanjosé, 1998). Thus, building an appropriate and rich SM would be necessary to construct a suitable and useful PM to solve a problem.

Our first wide research question is: In problem-solving, could difficulties building SM cause special difficulties building PM?

As SM is built linking the semantic content of the text to the subject's previous knowledge (via inferences), having poor previous knowledge would cause a poorer mental SM too. Thus, considering problematic situations in non-familiar contexts for solvers could create difficulties to build the SM. This is a relevant research question in science education because teachers usually expect that learning problem-solving procedures in math classes will lead to students' success in science problem-solving. Verbal problems in mathematics usually refer daily life contexts

whereas science problems usually do not. If the more or less familiarity with the context of the problems affects problem-solving success, some instructional procedures should be reviewed.

Although conceptual learning, problem-solving and experimental work in the laboratory should be integrated in a coherent instruction (Gil et al., 1999) these aspects are usually dealt with separately in many classrooms. In a typical problem-solving instruction, teachers solve a set of example problems involving basic principles, laws or theorems. Later they propose analogous problems to be solved by students. Thus, most of these *target* problems can be solved by analogical transfer (Bassok & Holyoak, 1989; Bernardo, 2001; Gick & Holyoak, 1983; Hammer, Elby, Scherr, & Redish, 2005; Holyoak, 1984; Mestre, 2003; Reed, Dempster, & Ettinger, 1985).

Transfer demands the construction of an analogy between the known situation and the new situation (Gentner, 1983). The analogy between different problems is constructed identifying and mapping the same features in the compared problems. Features can refer to characteristics of the concrete and real-world objects and facts, or to abstract entities as *problem space*, equations, scientific laws, etc. Thus, being able to establish suitable analogies between problems facilitates transfer and so, increases the academic problem solving success.

Surface and Structure have been defined as essential components in word problems (Holyoak, 1984). Surface describes the problematic situation in the real-world context and refers to the concrete objects and facts in non-abstract terms. In Secondary School a significant group of academic word problems are of algebraic nature. Structure in an algebraic problem is determined basically by “how the quantities are related to each other rather by what the quantities are” (Novick, 1988, p. 511). In the algebraic problems considered here the equations summarize the relations among the quantities.

Therefore, from a theoretical perspective the relationship between two problems can be characterized in terms of their surface and structural similarity (Holyoak & Koh, 1987). Reed (1987) labelled the relation between problems according to their surface or/and structural similarity, as shown in Chart 1.

Chart 1

Surface and Structural Relationships between Problems

	Surface: Same	Surface: Different
Structure: Same	Equivalent	Isomorphic
Structure: Different	Similar	Related

Equivalent problems are related according to Gentner’s definition of *literal similarity* (1983, p 159): in the set of interconnected propo-

sitions representing the semantic content of each problem statement, a very large number of predicates of one problem (the Source from here onwards) can be mapped to the other one (the Target problem) including both, object-attributes and relational predicates.

Isomorphic problems have the same Structure but they have different Surfaces so objects and events mentioned in their statements are different. These problems cannot be related by means of *literal similarity* but by means of a Gentner's *analogy*: "... the comparison in which relational predicates, but few or no object attributes, can be mapped from base to target" (Gentner, 1983, p.159). Mapping the objects in one Source problem to the objects in an Isomorphic problem, all relational predicates in the Source are also valid in the Isomorphic (see Appendix, Tables 4 and 5). When this *full analogy* has been constructed, solvers could reach the PM representation for a target problem without doing the algebraic translation explicitly, by simply mapping concepts from the Source to the Isomorphic at Surface (or SM representation) level. This can be seen in the Appendix (Diagram 1).

Similar problems have exactly the same objects and attributes but their Structures are different so they have different relational predicates. Therefore, literal similarity is only apparent in this case. Opposite to the Isomorphic relationship, solvers cannot reach the PM in the target

problem by simply mapping concepts from one Source to one Similar problem. Solvers have to read the statements and notice the differences. Then, they have to explicitly translate the different relational predicates from the natural language to algebra and thus, from the SM to the PM. This relationship can be conceptualized as a *far analogy* in Gentner's terms.

Related problems do not share Surfaces or Structures. Literal similarity is not apparent in this case and constructing an analogy could require building a more general PM representation (a PM representation) able to include both related problems as particular issues. In Gentner's theory this corresponds to an 'abstraction': "a comparison in which the base domain is an abstract relational structure" (Gentner, op.cit., p.159). In an abstract structure the object nodes are not ontological concrete objects but abstract entities, and "predicates from the abstract base domain are mapped into the target domain; there are no non-mapped predicates" (Gentner, op.cit., p.160).

The problems used in this study can be related by means of a common abstract schema. This schema is, in essence, a set of algebraic expressions corresponding to two linear equations with a unique solution, i.e. two intersecting straight lines:

$$\text{Eq}_1: y_1 = y_{10} + r_1 x \quad \text{Eq}_2: y_2 = y_{20} + r_2 x$$

where y_{10} and y_{20} are the corresponding y-intercepts and r_1 and r_2

are the slopes, i.e. the ratios of increasing or decreasing of y_1 and y_2 . When r_1 and r_2 are both positive, $r_1 < r_2$ and $y_{10} > y_{20}$, the schema corresponds to the *Catching up* structure. When r_1 is positive, r_2 is negative, and $y_{10} < y_{20}$ the schema corresponds to the *Meeting* structure. The names of both structures are taken from the usual problems in kinematics: one vehicle catching up another moving along the same way, or two vehicles moving in opposite direction and meeting each other.

Our second wide research question is: To what extent surface and structural similarities or differences between source and target problems

can facilitate or obstruct Secondary students' construction of analogies and so, the construction of the PM representation?

From Gentner's theory of analogy construction (opus cit.), we expected that subjects detecting relational similarities and differences at the Situation Model level will improve their performance at the Problem Model level, i.e. at algebraic level.

There are some interesting pedagogical proposals on problem-solving based on constructivist principles (Gil & Martínez-Torregrosa, 1983). However, many Secondary teachers and texts follow instructional sequences similar to the next one:

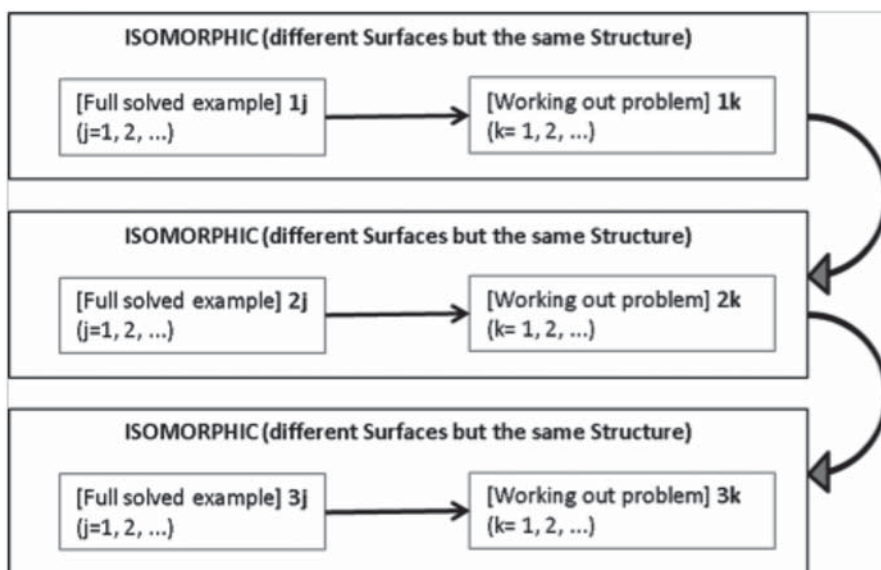


Figure 1. Usual teaching procedure in mathematics and science problem solving.

Therefore, the isomorphic relationship between problems is heightened over other relationships. Less time is devoted to compare different structures to help students to build more general algebraic schemas.

Our last research question is: How effective is the instructional sequence based on isomorphs making students aware of analogies and differences between algebraic verbal problems?

Goals and hypotheses

Goal 1: In order to give answer to our first general research question in this study, the possible effects on the algebraic problem solving success coming from more or less familiarity with the problems' context were analysed. As we were interested only in the comprehension phase and not in the solving phase of problem-solving by transfer, 'algebraic success' refers here to: a) detecting the correct structural similarities of differences between problems; b) recognizing what are the correct equations to solve the problem. Thus, our hypothesis could be formulated as follows:

— H1: A low Familiarity with the situations implied in the statements will cause lower success in problem-solving than a high Familiarity.

Goal 2: According to the second research question, we aimed at analysing the level of algebraic suc-

cess in verbal problems having specific surface and structural relations to one given example. We aimed to replicate a previous result (Gómez, Solaz-Portolés, & Sanjosé, 2012): surface similarities seemed to hide structural differences between problems to Secondary students. Perceptible features of real-world objects and facts are easier to detect than abstract features. Surface entities are more efficient in activating base examples from memory than abstract entities in transfer activities (Reeves & Weisberg, 1994). Nevertheless, transfer in science and mathematics problem solving entails the identification of structural features; recognizing Isomorphic problems and differentiating them from Similar problems is important for transfer success because it involves filtering out irrelevant and specific details in particular situations (Forbus, Gentner, & Law, 1995; Hummel & Holyoak, 1997). Our second hypothesis is:

— H2: Surface similarities between problems could hide structural differences to Secondary students.

— We also studied the benefits from being explicitly aware of the structural similarities or differences between problems on the success in selecting the correct equations. Specifically, we were interested on how surface features can obstruct this structural relationship. For that reason, we

focused on Isomorphic and Similar problems.

- H3: Establishing correct analogies between target problems and the examples (or Source problems) will improve success in algebraic problem solving.

Goal 3: According to the third research question the effect due to the usual instruction was also investigated. We compared students who received a recent instruction to others who received instruction long time ago in some tasks: a) the success selecting the correct equations, and b) the detection of between-problems similarities or differences. We had no clear predictions, but some effect from the instructional use of isomorphic problems with little use of generalization processes could appear.

Method

Sample

One hundred and ninety-four male and female Secondary students, (15-16 years old) participated in this experiment. They belonged to eight intact groups from three different Secondary Schools of middle sociocultural level. One hundred and seven students had been recently instructed in algebraic verbal problem solving and belonged to two academic levels in compulsory Secondary Education: 9th grade (53 students) and 10th grade (54 stu-

dents). They constituted the Recently Instructed group. Solving algebraic verbal problems is a subject matter included in the 9th-grade curriculum, as an application of knowledge about solving linear equations. Later, in the 10th grade, this topic is re-studied and more verbal problems are solved. The instructional procedure is based on solving and explaining some examples on the blackboard and then proposing isomorphic working out problems to the students.

The remaining eighty-seven 10th-grade students studied algebraic verbal problem solving a year ago. By the time of this experiment, this subject matter had not been dealt with yet. This was the Not-recently Instructed group.

One hundred and one participants were assigned to the high Familiarity condition, and the remaining 93 to the low Familiarity condition.

This sample was selected because of its accessibility so there was not sampling procedure. However, these students did not present any especial distinguishing feature.

Materials

We elaborated two different booklets, one per Familiarity condition, to group the instructions, one problem fully solved and explained considered as the reference (the Source from here onwards), and four target problems: one Equivalent, one Isomorphic, one Simi-

lar and one Related to the Source, according to Chart 1. Target problems were defined introducing the minimum possible changes with respect to the Source problem. Thus, the Similar target problem and the Source problem differed in just one but very important relational predicate having just the opposite meaning (see Appendix). In that way, we wanted to make clearer the expected experimental effects.

In the high Familiarity condition, the surfaces of the problems included daily life situations and objects. In the low Familiarity condition, the five surfaces of the problems implied science phenomena which had not been studied by the participants yet. We selected two different Surfaces in each Familiarity condition:

High Familiarity: Filling/ Emptying swimming pools and Increasing/ Decreasing the credit balance in saving accounts.

Low Familiarity: Increase/ Decrease of gas pressure by Heating/ Cooling the gas and Increase/ Decrease of the length of metal bars by Heating/ Cooling them.

We also considered just two algebraic Structures corresponding to two crossing straight lines: the Caching up and the Meeting structures defined above. These structures were the same in both Familiarity conditions. The Source problems (one per Familiarity condition) had the same structure in both Familiarity conditions (Caching up).

In the Equivalent target problem the Surface was not exactly the same as the one of the Source in both Familiarity levels (filling swimming pools/ increasing gas pressure in tanks by heat transferring), but it was very similar (filling milk tanks/ increasing gas pressure in balloons by heat transferring). Otherwise, the Source and the Equivalent would be the same problem.

In each booklet the materials were presented in the following order: instructions, Source, Equivalent and, next, the other three target problems in a counterbalanced order.

The problems in both Familiarity conditions are included in the Appendix.

Students had to be able to understand the Source problems to be aware of the structural analogies or differences when dealing with each target problem. This was a pre-requisite in the experiment. Thus, we prepared a basic test of five items consisting in linear equations to be solved (without verbal statements). We assigned score 1/0 to each item when its answer was correct or not. All participants obtained three or more points.

Experimental design

This study was divided in two phases. In the first one, the quantitative phase, the experimental design was factorial $2 \times 2 \times (2 \times 2)$ with two between-subjects factors, Instructional delay (recently in-

structed/ not-recently instructed students) and Familiarity (low/ high); and also two within-subjects factors, the problems' Surface (same/ different from the Source problem) and Structure (same/ different from the Source problem). The academic level (9th/10th grades) did not produce any significant effect so we collapsed both academic levels in the study.

In the second phase we interviewed a subgroup of participants in order to obtain some extra information about their mental processes while dealing with the tasks. Students' performance and reasoning was analysed and classified in provisional categories to be contrasted in further, more accurate qualitative study.

Variables and measurements

In each target problem we proposed students two different tasks:

- a) To explicitly relate the present target problem to the Source problem using surface and structural factors. We offered students several possible relationships between these two problems and students had to select the most relevant in their opinion. The 6 different options were: (a/b) *same/ different objects or events*, (c/d) *same/ different quantities*, (e/f) *same/ different relations among quantities*. Options (e/f) were expected when appropriate structural comparisons

were made. We assigned score 1/0 when students established the correct/wrong relationship between problems at structural level. In addition, we took into account the different answers to study their frequency and their association to the equations selected.

- b) To select the correct equations to solve the present problem. We offered three options but only one was correct (see Appendix).

Students had to choose the preferred option. In the Similar and Related problems one option offered the same equations solving the Source problem. These equations were not the correct ones to solve these target problems. Selecting them could mean a copy-and-paste strategy from the Source to the Target problems so doing the so-called Negative Transfer (Novick, 1988). We assigned 1/0 points when the equations selected were the correct ones/wrong to solve each target problem.

In each experimental condition we defined the following variables:

1. The number of students who were/were not aware of the structural similarity /difference between the 'source' and the target problems.

In some analyses we defined the variable *Number of Correct Structural Comparisons* accounting for the amount of correct structural Target-Source comparisons. This variable

ranged from 0 to 4 as there were only 4 target problems.

In other analyses we specifically focused on interferences detecting structural similarities or differences caused by surface features. In the Isomorphic, surface differences would make some students believe that both structures would be also different. In the Similar, the surface similarity would make some students believe that both structures would also be the same. In both problems, the proportion of students committing these errors was computed.

2. The number of selected equations which were/were not the correct ones to solve each target problem.

In some analyses we defined the variable *Number of Correct Equations* accounting for the total amount of target problems in which the correct equations were selected. This variable also ranged from 0 to 4.

Finally, we accounted for specific errors committed choosing the equations in the Isomorphic and the Similar. When students chose different equations for the Isomorphic than for the Source, they erroneously thought that a different surface would imply a different structure too. In the Similar problem we focused on *negative transfer*, i.e. when surface similarity made students believe that there would also be structural similarity.

Procedure

Data was collected in two sessions. The first one took about 55 min. This session did not include problem-solving instruction or teaching students in any solving methodology. One of the researchers conducted the session. He was not the teacher of any of the groups of participants. In this first session students completed the algebra pre-requisites test (15 min). Next, the booklets were handed out to the students in a counterbalanced manner, so about one half corresponded to the low Familiarity and the other half to the high Familiarity condition. The researcher read the instructions aloud together with students and solved their doubts (10 min). Next, he suggested participants to study the Source and explained the solving procedure to them (10 min). The Equivalent (same surface and same structure as the Source) served as an example for practice. The researcher helped the students in the proposed tasks but he did not solve them (5 min). Finally, the remaining three target problems were dealt with by students alone, without being helped by the researcher (15 min). Students consulted the Source at their own pace.

As a consequence of the answers given to the two tasks in the booklets, we returned to the educational centres and interviewed a subgroup of ten students who had previously provided intriguing or in-

teresting answers. We did not interview all the students in the sample providing incoherent or intriguing answers but those volunteers available at that moment. This interview was conducted in a semi-structured format with the aim of clarifying students' thoughts and reasoning. Interviews took about 10 min per student. First, the researcher gave the corresponding booklet back to each student and then he asked him/her to re-think his/her answers. Second, the researcher asked the student to justify his/her answers, paying attention to the understanding of the tasks demand. Third, the interviewer asked the student to explicitly relate the two tasks (1) establishing the relationship between the Source and the target, (2) Selecting the correct equations to solve the target) with the help of the Source solving explanation (provided in the booklet). In case students did not understand and the incoherent answers remained, he would explain the correct solution to the student step by step. He would stop the explanation when the student understood and expressed it explicitly. After assuring the student's full understanding, the interview finished.

Protocols were independently analysed by two researchers and the occasional discrepancies were resolved by discussion.

Statistical analyses

We contrasted our hypotheses using statistical tests. Our quantita-

tive variables were not of interval nature or were not normally distributed according to the Kolmogórov-Smirnov test. Therefore, we used non-parametric test to contrast our hypotheses. In particular we used the Mann-Whitney U -statistics for independent groups and the Wilcoxon Z -statistics for paired groups. Finally, for correlations we used the Spearman's rho (ρ).

Results

Structural similarities and differences detected by students

We analysed the extent to which participants correctly declared the similarity or the difference between each target problem structure and the Source problem structure. We studied the variable *Number of correct structural comparisons* (values 0, 1, 2, 3, 4). Familiarity had a significant main effect. In the low Familiarity condition students found more difficulties to detect the correct structural relationship between the target and the source problems than in the high Familiarity condition ($M_{LF} = 1.56$; $M_{HF} = 2.30$; Mann-Whitney $U = 2852.0$; $p < .001$). The Instructional-Delay had a non-significant effect ($p > .1$).

Familiarity and instructional effects on the equations

Table 1 shows the proportion of correct equations in each of the tar-

Table 1

Proportion of Correct Equations Chosen in each Target Problem in both Familiarity Conditions

	Equivalent	Similar	Isomorphic	Related
Familiarity Low	.81	.58	.72	.70
Familiarity High	.88	.73	.86	.77
Total	.85	.66	.79	.74

Table 2

Proportion of Correct Equations Chosen in each Target Problem in the Instructional-Delay Conditions

	Equivalent	Similar	Isomorphic	Related
Recently instructed	.83	.59	.84	.76
Not recently instructed	.86	.72	.74	.71

get problems in both Familiarity conditions. Table 2 shows the same proportions for the recently or not recently instructed students.

All the target problems in the low Familiarity condition obtained significantly lower proportions of success than the corresponding problems in the high Familiarity condition (see Table 1). Non-parametric Mann-Whitney test showed that this main effect was significant ($U = 3631.0$; $p = .004$). We did not find any interaction of this factor with other factors ($p > .1$).

The Instructional Delay factor did not produce a significant main effect ($p > .1$).

When we considered the variable *Number of correct equations* selected in the four target problems (values 0, 1, 2, 3, 4), the Familiar-

ity produced again significant differences ($U = 3657.5$; $p = .005$). Instructional-Delay had non-significant effects as before ($p > .8$).

Effects from surface and structural similarities on the equations

Non-parametric Wilcoxon paired test showed a significant main effect from the Structure factor ($Z = -4.019$; $p < .001$): the Similar and Related problems, with different structure than the Source, obtained a significant lower success ($M_{ds} = .70$) than the Equivalent and the Isomorphic, with the same structure as the Source ($M_{ss} = .82$).

The Surface factor did not produce a significant main effect ($p > .1$).

Interestingly enough, the proportion of correct equations in the Similar was lower than the one in the Related (see Table 1) but the proportion in the Equivalent was higher than the one in the Isomorphic. Wilcoxon paired test showed

a significant Surface X Structure interaction effect: the Equivalent-Similar differences were significantly higher than the Isomorphic-Related differences ($M_{ES} = .19$; $M_{IR} = .06$; $Z = -2.382$; $p = .017$). Figure 2 shows this interaction effect.

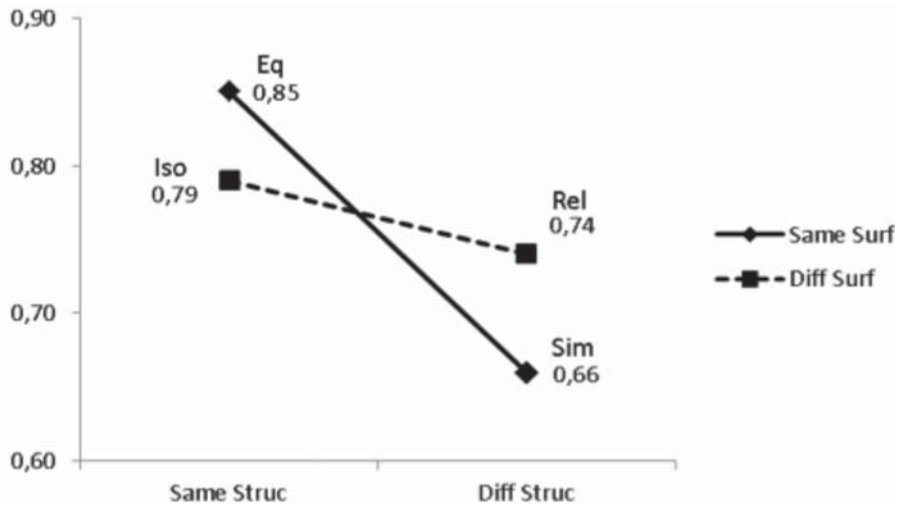


Figure 2. Proportion of correct equations to solve the target problems. A Surface X Structure interaction effect is shown.

Relationship between structural comparisons and correct equations

There was an association between detecting the correct structural relations and choosing the correct equations in the target problems. The variable *Number of correct structural comparisons* had a significant correlation with the variable *Number of correct equations* (Spearman's $\rho = .490$; $p < .001$).

However, a significant amount of participants who did not detect the correct structural association between problems were also able to choose the correct equations for the target problems. A percentage of 66% of the participants established a wrong structural relation with the Source problem for two of more target problems. The remaining 34% declared a correct structural relation for three target problems (13%) or for four target problems (21%).

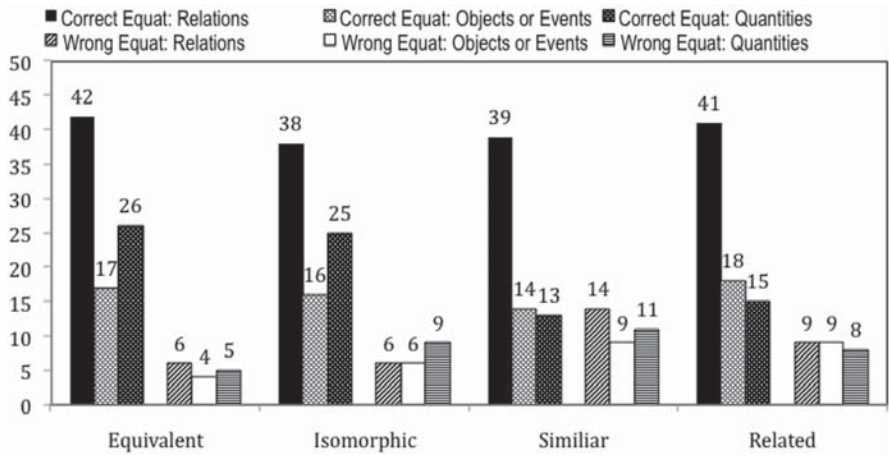


Figure 3. Percentage of participants perceiving Target-Source analogies or differences and choosing the correct/ wrong equations.

We studied the association between the perceived Target-Source relationship and the correctness of the equations chosen. Figure 3 shows this association in each target problem.

In order to deeply study the students' thoughts we conducted semi-structured interviews with a subgroup of ten students in the low Familiarity condition. We focused on the Isomorphic and the Similar target problems as a first approach. From the analysis of students' protocols we provisionally defined three main categories: a) the SM representation and the PM

representation are disassociated; the relationship between problems is established from surface features (6 out of 10 cases); b) the algebraic translation process is not understood: the relationship between problems is established from surface features and the students tend to do *negative transfer* (2 out of 10 cases); c) Lack or attention of effort: the student is aware of his/her inconsistencies or wrong answers and correct them in the interview (2 out of 10 cases). Record 1 shows excerpts from interviews corresponding to categories (a) and (b).

Chart 2

Classification of Students' Behaviour in the Interviews

Cases and information segments from the interviews

(a) *Case 4: This student constructed the analogy between the Source and the target problems based on the type of magnitude present (i.e. pressure or length). She chose the options "both problems have to be solved using different equations because they both have different quantities" and "both problems have to be solved using different equations because they both have different relations among quantities" when she compared the Similar to the Source problem in task 1. However, she chose the correct equations in both the Isomorphic and the Similar target problems.*

I: Good morning! (...). Could you please re-think these tasks?

S: (*Re-reading the Isomorphic and comparing it to the Source*) Both problems have different quantities and also different relations among quantities.

I: Do you think so? Ok. You think the relations among quantities in both problems are different. Hence, why did you select the same equations to solve both problems (*Source and Isomorphic*)?

S: Because they are the logical equations.

I: I see... Concerning the quantities themselves, do you still think they are different in both problems?

S: Yes, they have different quantities because here (*referring to the target*) there is micra but here (*referring to the Source*) there is milibar.

(b) *Case 7: This student selected the same equations for the Source, the Isomorphic and the Similar problems (negative transfer). However, she chose the option "both problems have to be solved using different equations because they both have different relations among quantities" in task 1.*

I: Good afternoon! (...). Please, consider this target problem (*the Isomorphic target problem*). What do you think about this option in task 1: "both problems have to be solved using the same equations because both have the same relations among quantities"?

S: I don't agree. The relations among quantities are not the same (*in the Source and the Isomorphic target problems*). Quantities in one problem are micras but in the other problem quantities are milibars.

I: Ok. Now please compare the statements of these two problems (*the Source and the Similar*). Do you find any differences between them?

S: (*She reads both statements*). I do not notice any difference.

I: Please, re-read them again slowly.

S: (*After reading again*) Oh yes! In one problem (*the Similar*) pressure is decreasing in one of the tanks but in the other problem (*the Source*) pressure is increasing in the two tanks.

I: Then, what does it mean? Are there any consequences for the equations?

S: I don't know.

(The student does not change the wrong equations in the Similar target problem)

Note: "S" stands for "Student" and "I" stands for "Interviewer".

Surface interferences in the detection of structural similarities

We focused our attention on particular errors committed in two of the target problems: the Isomorphic (different surface implying different equations compared to the Source) and the Similar (negative transfer).

We analysed the number of specific errors in these two target problems (Isomorphic and Similar) considering the Familiarity (low/ high) and the Instructional-Delay (recently instructed/ not-recently instructed) as the independent factors.

There was a main effect of Familiarity. In the low Familiarity condition students committed a significant higher number of the

considered errors than in the high Familiarity condition ($M_{IF} = .31$; $M_{hF} = .15$; $U = 3562.5$; $p = .001$).

We found a Target X Instructional Delay interaction effect. In the Isomorphic, the recently instructed students committed fewer errors than the not-recently instructed students, whereas in the Similar the recently instructed students committed more errors than the not-recently instructed students. Mann-Whitney test indicated that these differences were significant ($U = 3604.5$; $p = .001$). Figure 4 depicts this interaction effect.

In the Similar, not detecting/detecting the structural differences with the Source was significantly associated to doing/ not

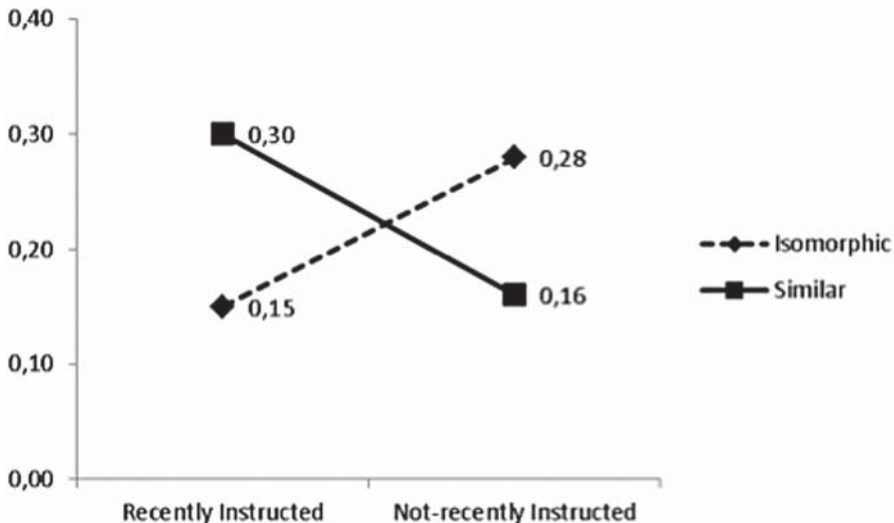


Figure 4. Proportion of errors due to surface interferences in structural analogies between the Source problem and the Isomorphic and Similar target problems. A significant Target X Instruction interaction effect is shown. Familiarity conditions have been collapsed.

doing *negative transfer* ($X^2(df = 1; N = 150) = 17.128; p < .001$). Only 4.5 per cent of the participants who correctly detected the structural differences made negative transfer. In the Isomorphic, there was also a significant association between correctly detecting the structural similarity and not choosing a wrong equation ($X^2(df = 1; N = 157) = 7.171; p = .007$). Only 10.1 per cent of students who correctly detected the structural similarity chose wrong equations in this problem.

Discussion

Goal 1 and hypothesis 1

Familiarity with the context of the problems had the expected effects: when the events and objects were not familiar to the students, they had more difficulties to detect the structural analogies/ differences between the problems. Not only is the similarity between the solved and the proposed problems important, but also the context in which the problematic situation is placed. This effect can be explained using the psychological reading comprehension model by Kintsch and colleagues (op. cit.). A problem statement is a short text and many inferences are needed to build the Situation Model. This representation is previous to the abstract Problem Model representation, which includes the algebraic structure. The

less the solver's experience with certain objects, attributes and events in the ordinary world, the poorer their knowledge about these objects and events. Therefore, the corresponding Situation Model representation will be poorly constructed and this will affect the Problem Model representation diminishing problem-solving success.

Hypothesis H1 received support from our data.

Goal 2 and hypotheses 2 and 3

The number of correct equations chosen by students to solve the target problems was an indicator of students' algebraic success. In our sample the global percentage of wrong equations was moderate (about 24%). Thus, most students differentiated surface from structural similarities properly. However, there were interesting differences among problems. The percentage of participants choosing incorrect equations in the Isomorphic problem was low, about 21%, but the percentage of students choosing incorrect equations in the 'Similar' problem was higher, about 34%.

Once mapping concepts has been done, the correct Problem Model for the Isomorphic is achieved even without doing the algebraic translation process (see Appendix). Thus, many students could succeed in choosing the equations in the Isomorphic without deep understanding of the algebraic translation process. This situation cannot

happen in the Similar or the Related problems. Mapping concepts from the Source problem is not enough to achieve the appropriate PM in these problems due to the semantic differences with the Source. Therefore, students would obtain less success in the Similar and the Related. This is the significant effect from the Structure factor we found in our data.

However, the Similar obtained lower proportions of students' success in the equation than the Related, although the latter had not only different structure but also different surface than the Source. This is not a trivial result and is in line with Novick's (1988) findings about novices' behaviour solving verbal problems. In a previous study the same non-trivial effect was obtained (Gómez et al., 2012) but it was significant only for the high Familiarity problems. In the present experiment with a greater statistical power, the effect is replicated and it also appears in the low Familiarity condition. It seems that surface similarities can hide structural differences as Reeves and Weisberg (1994) pointed out from psychological grounds. Their claim becomes a reality in algebraic verbal problem-solving by analogy.

Therefore, Hypothesis H2 received support.

More than 65% of the participants failed to establish the correct structural relationship between two or more target problems, i.e. failed to construct the corresponding analogies. Substantial percent-

ages of students mentioned surface features to relate problems. Thus, it was not easy for them to correctly detect structural analogies or differences. In our sample, 31% of the participants detected the correct structural relation and also chose the correct equations for most target problems, no matter their surface and structural relation with the Source problem. These students seemed to be able to abstract and use an algebraic general schema, perhaps recovered from their long term memory or constructed along the experiment by target comparison (Kurtz & Loewenstein, 2007). The detection of structural similarity between problems consulting a solved example (task 1) seemed to help students to identify important features for choosing the correct equations (task 2) is a similar way helping students to better identify the goal improved success in question answering (Llorens & Cerdán, 2012) consulting a text. The number of target problems in which a correct structural comparison to the Source problem was made correlated with the number of correct equations chosen, as expected. Both the number of correct structural comparisons and the number of correct equations chosen were affected by the Familiarity with the problem contexts. If we take into account the three variables together a logical picture appears: the Familiarity seems to affect the number of correct structural comparisons between each target problem and the source

problem, and in turn, the number of correct structural comparisons seems to affect the number of correct equations selected by participants for each target problem.

Therefore, Structure comparison was a good predictor of equation success in our experiment, but not the other way round, i.e. structure comparison was an almost sufficient condition but not a necessary condition for equation success. Building a Gentner's analogy between problems seemed not to be essential for many students to recognize the correct equations. Hence, our hypothesis H3 received only partial support.

There was a particular subgroup of students with a low level of correct detection of structural similarities or differences (0-2 correct structural detections) but with a high level in the selection of correct equations (3-4 correct equations). In our sample, 37% of the participants showed this behaviour. As we offered 3 options for the equations, 1/3 of the success is possible at random. Taking this possibility into account, there could even be 25 per cent of the participants in the aforementioned situation. Thus, some successful students differentiated the correct equations from the wrong options without paying attention to structural relations.

Additional data from the interviews also suggested the disassociation between problem analogies at Situation Model mental representation and the Problem Model (algebraic)

mental representation in some students. These students seemed to solve new problems by algebraic translation and not by analogical transfer. Hence, students which were able to select the correct equations without making correct structural analogy activated and correctly used a suitable algebraic schema without building explicit analogies with previous solved problems.

Goal 3

We had no clear expectations about the instructional effects, beyond the trivial ones (the more instruction received the better the learning results). Interestingly, the recently instructed students tended to erroneously transfer the algebraic structure from the Source problem to other non-isomorphic problems more than the not-recently instructed students; on the contrary, the not-recently instructed students tended to erroneously avoid transferring the algebraic structure from the 'source' problem to the isomorphic problem more than the recently instructed students. Taking into account the usual teaching procedure (working out isomorphic examples), it is not a surprising result. The not-recently instructed students found more surface difficulties and were less able to construct structural analogies between isomorphic problems or between non-isomorphic problems. After the instruction, students seemed to become overconfident believing that every proposed

problem would be isomorphic to the problem the teacher had solved first (negative transfer). The recent instruction seemed to provoke some kind of *Priming* effect so students tended to see every proposed problem as an isomorph of the previous solved example.

Limitations of this study and open problems

This study has some limitations. First, we focused on a specific type of problems: those containing just two linear equations. Although this kind of problems is very frequent in several science subjects, there are other interesting problems. Second, in order to simplify our study and to be as close as possible to the classroom practices, we chose well-defined problems instead of ‘open’ or ‘ill-structured’ problems. ‘Ill-structured’ problems could produce a greater variability in students’ strategies, so generating richer data about students’ reasoning in problem-solving, in particular about transfer. Third, students’ reasoning will be analysed in a deeper detail in a future study, considering the four target problems and the two Familiarity conditions. More students have to be interviewed and the provisional categories defined here have to be reconsidered.

Educational consequences

Therefore, taking into account these limits and being cautious due

to the lack of external validity, some educational consequences could be derived from the results.

1. First, the instruction based on analogical transfer in problem solving, i.e. solving examples and then proposing working out problems which are isomorphic with the previously solved examples, gives good results and most students learn properly. However, the usual instruction based on solving isomorphic problems could let students to an overuse of negative transfer. Problems having different structures should also be compared in the classroom to foster the abstraction of problem schemata.
2. Students could find difficulties to be aware of structural differences when problems share surface features because surface features are first perceived. Teachers should not suppose that students are able to filter out irrelevant surface details and focus on relevant algebraic information. Constructing analogies between problems is an important solving strategy that can be taught in the classroom. Analogies and differences teachers easily perceive between problems could not be evident for students (Oliva, 2004). In fact, the solving strategies teachers declare to teach and those strategies students perceive are being taught to them, could not match (Caño, Román, & Foces, 2000).

It seems interesting to focus on explicit structural comparisons because this strategy helps generalization processes. Having abstract and general problem schemata at hand is the best way to avoid surface interferences, when there are surface differences but structural analogies as well as when there are surface similarity but structural differences. Vertical transfer should also be taught (Rebello, Cui, Bennet, Zollman, & Ozimek, 2007) in the classroom. Instructional procedures based on the algebraic translation (Puig, 1998; Sanjosé et al., 2009) have proven to be useful for that educational goal.

3. Teachers should not identify correct problem solving with having an algebraic schema in mind. Some novice students learn to solve algebraic problems without being aware of structural analogies or differences among them. These students seem to

base their performance on the use of particular cases, making the changes they need to adapt the case to the present example.

4. When students work on unfamiliar contexts, such as it is the case of most Science subject matters, detecting structural analogies or differences becomes more difficult. Perhaps the unfamiliar contexts would decrease students' motivation to the task (Fernández, Anaya, & Suárez, 2012), so decreasing their attention and success. Perhaps the abstract mental representation is obstructed by a poor concrete mental representation built from the problem statement. Thus, even when the surface and structural relationship among problems is preserved, changing the context could diminish students' understanding. Instructional sequences from familiar contexts to less familiar ones seem to be recommendable.

References

- Bassok, M., & Holyoak, K. J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, *15*, 153-166. doi: 10.1037//0278-7393.15.1.153
- Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *21*(2), 137-150. doi:10.1080//01443410124314
- Caño del, M., Román, J., & Foces, J. (2000). Estrategias de aprendizaje de las matemáticas: enseñanza explícita vs. enseñanza implícita y estilos de solución de problemas. *Revista de Psicodidáctica*, *5*, 47-58.

- Fernández, A. P., Anaya, D., & Suárez, J. M. (2012). Motivation features and motivational self-regulatory strategies in middle-school students. *Revista de Psicodidáctica*, 17(1), 95-111.
- Forbus, K. D., Gentner, D., & Law, K. (1995). MAC/FAC: A model of similarity-based retrieval. *Cognitive Science*, 19, 141-205. doi: 10.1016/0364-0213(95)90016-0
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170. doi: 10.1016/S0364-0213(83)80009-3
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38. doi: 10.1016/0010-0285(83)90002-6
- Gil, D., & Martínez-Torregrosa, J. (1983). A model for problem-solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4), 447-455.
- Gil, D., Furió, C., Valdés, P., Salinas, J., Martínez-Torregrosa, J., Guisasaola, J., González, E., Dumas-Carré, A., Goffard, M., & Pessoa, A. M. (1999). ¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio?. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(2), 311-320.
- Gómez, C., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2012). Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad: primeros resultados. *Enseñanza de las Ciencias*. Aceptado para su publicación.
- Hammer, D., Elby, A., Scherr, R., & Redish, E. (2005). Resources, framing and transfer. In J. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 89-119). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Holyoak, K. J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 2) (pp. 199-230). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Holyoak, K. J., & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, 15(4), 332-340. doi: 10.3758/BF3197035
- Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review*, 104, 427-466. doi: 10.1037//0033.295X.104.3.427
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Kintsch, W., & Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129. doi: 10.1037//0033-295X.92.1.109
- Kintsch, W., & van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394. doi: 10.1037//0033-295X.85.5.363
- Kurtz, K. J., & Loewenstein, J. (2007). Converging on a new role of analogy in problem solving and retrieval: when two problems are better than one. *Memory & Cognition*, 35(2), 334-341. doi: 10.3758/BF03193454
- Llorens, A. C., & Cerdán, R. (2012). Assessing the Comprehension of Questions in Task-Oriented Reading. *Revista de Psicodidáctica*, 17(2) (preprint). Retrieved May 14th, 2012 from: <http://www.ehu.es/ojs/>

- index.php/psicodidactica/article/view/4496/5808
- Mestre, J. (2003). Transfer of learning. Issues and research agenda. (National Science Foundation Report #NSF03-212). Retrieved Mars 5th, 2012 from: <http://www.nsf.gov/pubs/2003/nsf03212/nsf03212.pdf>
- Nathan, M., Kintsch, W., & Young, E. 1992. A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. *Cognition and Instruction*, 9(4), 329-389. doi: 10.1207/s1532690xci0904_2
- Newell, A., & Simon, H.A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520. doi: 10.1037//0278-7393.14.3.510
- Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3(3), Artículo 7. Retrieved July 1, 2007, Disponible online en: www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen3/Numero3/ART7_VOL3_N3.pdf.
- Polya, M. (1957). *How to solve it*. (2nd Ed.). New York: Doubleday.
- Puig, L. (1998). Poner un problema en ecuaciones. Consultado el 2 de abril de 2008 en: <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>.
- Rebello, N. S., Cui, L., Bennet, A. G., Zollman, D. A., & Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. In D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems* (pp. 223-246). Hillsdale, N. J.: Lawrence Earlbaum.
- Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 124-139. doi: 10.1037//0278-7393.13.1.124
- Reed, S. K., Dempster, A., & Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 11, 106-125. doi: 10.1037//0278-7393.11.1.106
- Reeves, L. M., & Weisberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, 115, 381-400. doi: 10.1037//0033-2909.115.3.381
- Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J. J., & Valenzuela, T. (2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de "traducción algebraica". *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 169-184.
- Vidal-Abarca, E., & Sanjosé, V. (1998). Levels of comprehension of scientific prose: the role of text variables. *Learning and Instruction*, 8(3), 215-233. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00020-0

Carlos Gómez Ferragud is graduated in Environmental Sciences and has obtained a Master in Science Education at the University of València (Spain). He is developing his doctoral dissertation on problem-solving in science and mathematics.

Joan Josep Solaz-Portolés is PhD in Chemistry by the University of Valencia (Spain). He is a Secondary Teacher and also Assistant Professor in the Experimental and Social Sciences Education department at this University. His research work focuses on problem-solving and also on reading comprehension of science texts. He has published many academic papers on these topics.

Vicente Sanjosé López is PhD in Physics by the University of Valencia (Spain). He is a Associate Professor in the Experimental and Social Sciences Education department at this University. He develops his research activity on the psychological basis of Didactics. He has published academic papers on reading comprehension of science information, comprehension monitoring and problem-solving in science and mathematics.

Received date: 09-05-2012

Review date: 28-05-2012

Accepted date: 24-07-2012

Appendix

Source/Similar Problem (Low Familiarity condition):

Consider two identical tanks A and B to store gas. These tanks are connected to identical thermal devices to transfer heat or to extract heat from the gas they store. Initially, the internal pressure of gas in tank A is 2000 milibar higher than the pressure of gas in tank B. Then, both thermal devices are switched on at the same time and heat is transferred to A and to B. Pressure in A **increases/decreases** at a ratio of 20 milibar/kcalorie, and pressure in B increases at a ratio of 30 milibar/kcalorie. How much heat does it have to be transferred to A and also to B until their internal pressures are the same? (*One milibar is a pressure unit*)

Source/Similar Problem (High Familiarity condition):

Consider two identical swimming pools A and B. Initially, swimming pool A contains 2000 l of water more than swimming pool B. Then, water starts to enter in both swimming pools at the same time. The quantity of water in A **increases/decreases** at a ratio of 20 l/min, and the quantity of water in B increases at a ratio of 30 l/min. How long will it take until there is the same quantity of water in both swimming pools?

We offered students the following options:

- | | |
|--|--|
| <p>(a) $y_1 = y_{20} + 2000 - 20 x$
 $y_2 = y_{20} + 30 x$</p> | <p>(c) $y_1 = y_{10} + 20 x$
 $y_2 = y_{10} + 2000 + 30 x$</p> |
| <p>(b) $y_1 = y_{20} + 2000 + 20 x$
 $y_2 = y_{20} + 30 x$</p> | |

Note: Option (b) is the correct one for the Source, the Equivalent and the Isomorphic problems. Option (a) is the correct one for the Similar and the Related problems. Option (c) was wrong in any target problem.

In each Familiarity condition, the Equivalent (the Isomorphic) problem can be related to the Source problem by simply mapping the concepts, as indicated in Chart 3. Thus, all the relational predicates in the Source are also valid in the Equivalent (the Isomorphic). Of course, the Related can also be associated to the Similar by mapping concepts in the same way shown in Chart 3.

Chart 3

Relationship between the Source problem and the Equivalent or the Isomorphic target problems according to Gentner's theory. Concepts in the low Familiarity condition (Scientific context) have been highlighted

Target problem	Mapping from Source to Target problem	Gentner's comparison
Equivalent	Gas → Gas Tank _{1,2} → Balloon _{1,2} Water → Milk Swimming pool _{1,2} → Tank _{1,2}	Literal Similarity → same Surface and same Structure
Isomorphic	Gas → Metal bars Pressure → Length Milibar → Micra Water → Money Swimming pool _{1,2} → Saving account _{1,2} Volume → Balance Litre → Euro Minute → Week	Full Analogy → different Surface but same Structure

Chart 4

Propositions representing the semantic content in the Situation Model for the Source problem (S) in the Low Familiarity condition

Source problem	Concepts in the Isomorphic and Related problems	Source problem (cont.)	Propositions different in the Similar/ Related problems
C1S: Heat	C1Iso: Heat	P6S-a: LABEL(P5S-a, x, y ₁)	
C2S-a: Gas-Tank-1	C2Iso: Metal Bar-1	P6S-b: LABEL(P5S-b, x, y ₂)	
C2S-b: Gas-Tank-2	C3Iso: Metal Bar-2	P7S: TIME(initial)	
C3S: Pressure	C3Iso: Length	P8S: VALUE(x, IN(P7S), 0)	
C4S: milibar/Kcalorie	C4Iso: micra/Kcalorie	P9S-a: LABEL(P5S-a, x = 0, y ₁₀)	
P1S-a: TRANSFER(device, heat)		P9S-b: LABEL(P5S-b, x = 0, y ₂₀)	
P1S-b: EXTRACT(device, heat)		P10S: EQUAL-TO(y ₁₀ , y ₂₀ + 2000)	
P2S: OR(P1S-a, P1S-b)		P11S-a: INCREASE(y₁)	P11Sim-a: DECREASE(y₁)
P3S-a: TRANSFER-TO(heat, C2S-a)		P11S-b: INCREASE(y ₂)	
P3S-b: TRANSFER-TO(heat, C2S-b)		P12S-a: RATIO(P11S-a, 20 milibar/Kcalorie)	
INF1S: EQUAL-TO(P3S-a, P3S-b)		P12S-b: RATIO(P11S-b, 30 milibar/Kcalorie)	
P4S-a: LABEL(P3S-a, x)		P13S: EQUAL-TO(y ₁ , y ₂)	
P4S-b: LABEL(P3S-b, x)		P14S: VALUE(x, x _p)	
P5S-a: IN(C2S-a, pressure)		P15S: CAUSE(x _p , P13S)	
P5S-b: IN(C2S-b, pressure)		P16S: DETERMINE(x _p)	
INF2S: DEPEND-ON(pressure, x)			

Note: Concepts (C) which are different in Isomorphic (Iso) and the Related problems, and also the relational predicate (P11-a) which is different in the Similar (Sim) and Related problems, have been highlighted. INF stands for inference.

The Similar and the Related problems include semantic differences with respect to the Source problem. These differences imply differences in the Situation Model and then also differences in the Problem Model. Chart 4 shows most of the propositions representing the semantic content in the Source statement, and the differences with target problems.

In order to build the Problem Model representation from the Situation Model, an algebraic translation process has to be implemented. This process produces the semantic content in the Problem Model representation from the semantic content in the Situation Model representation. Clear differences between the Source and the Similar/ Related problems are obtained at this PM level from differences at the SM level. Chart 5 shows the main propositions in the PM for the Source and the Similar problems. Inferential processes have been represented by arrows.

Chart 5

*Source and Similar/Related problems in the high Familiarity condition:
Propositions representing the semantic content in the Problem Model after algebraic translation from the Situation Model. Not all the possible propositions have been included. INF stands for inference*

Source Problem	Similar/ Related Problem
P11S-a & P12S-a →	P11Sim-a & P12S-a →
INF3S-a: VALUE(INCREASE(y_1), x , $20x$)	INF3Sim-a: VALUE(DECREASE(y_1), x , $20x$)
P6S-a & INF3S-a →	P6S-a & INF3Sim-a →
INF4S-a: EQUAL-TO(y_1 , $y_{10} + 20x$)	INF4Sim-a: EQUAL-TO(y_1 , $y_{10} - 20x$)
P10S & INF4S-a →	P10S & INF4Sim-a →
INF5S: EQUAL-TO(y_1 , $y_{20} + 2000 + 20x$)	INF5Sim: EQUAL-TO(y_1 , $y_{20} + 2000 - 20x$)
P11S-b & P12S-b →	
INF3S-b: VALUE(INCREASE(y_2), x , $30x$)	
P6S-b & INF3S-b →	
INF4S-b: EQUAL-TO(y_2 , $y_{20} + 30x$)	
P13S & P15S & INF5S & INF4S-b →	P13Sim & P15Sim & INF5Sim & INF4Sim-b →
INF6S: EQUAL-TO($y_{20} + 2000 + 20x_p$, $y_{20} + 30x_p$)	INF6Sim: EQUAL-TO($y_{20} + 2000 - 20x_p$, $y_{20} + 30x_p$)
INF7S: P16S & INF6S → PERFORM($x_p = 2000/(30-20)$)	INF7Sim: P16Sim & Inf6Sim → PERFORM($x_p = 2000/(30+20)$)

Diagram 1 summarizes the comparison of the Source, the Isomorphic and the Similar problems at different levels of mental representation (the cases of the Equivalent and the Related target problems can be easily inferred).

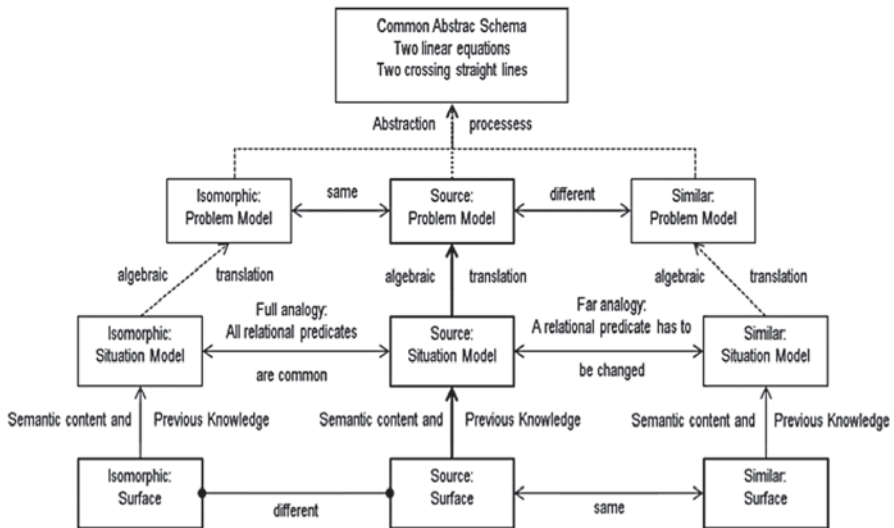


Diagram 1. Relationship between the Source problem and the Isomorphic or the Similar problems at Surface, Situation Model, Problem Model and Abstract Schema levels. Dark lines show the explicit information given to the students.

Construcción de analogías y éxito en la resolución de problemas de matemáticas y ciencias: un estudio con alumnado de Secundaria

Carlos B. Gómez-Ferragud, Joan J. Solaz-Portolés, y Vicente Sanjosé
Universitat de València

Resumen

Se desarrolla un estudio empírico con estudiantes de Secundaria para analizar la asociación entre detectar las analogías superficiales y estructurales entre problemas, y el éxito algebraico medido a través de las ecuaciones seleccionadas para resolverlos. Se consideraron distintas relaciones superficiales y estructurales entre un problema fuente y cuatro problemas diana. Se consideraron problemas con temáticas de alta (vida diaria) o baja familiaridad (ciencia). Se pidió a los estudiantes comparar el problema fuente con cada problema diana para establecer las similitudes y diferencias entre ellos. Los resultados mostraron una correlación significativa entre detectar correctamente la relación estructural entre problemas y elegir las ecuaciones correctas para resolverlos. El éxito fue menor en los problemas de baja familiaridad (ciencias) independientemente de otros factores. La enseñanza habitual basada en la isomorfía podría incrementar la probabilidad de que los estudiantes considerasen este tipo de relación como la única posible entre problemas.

Palabras clave: Resolución de problemas, analogías, superficie y estructura, familiaridad, transferencia.

Abstract

We conducted an empirical study to analyse the association between students' perception of surface and structural analogies among problems, and their algebraic success. Algebraic success was measured by the equations selected to solve each problem. Different surface and structural relationships between one *source* problem and four *target* problems were considered. We also considered high (daily life) and low (scientific) familiarity contexts for the problems. Similarities and differences between the source and each target problem were explicitly asked to students. Results showed a significant correlation between detecting the correct structural relation between these problems and selecting the correct equations to solve the target ones. Low familiarity (science) problems obtained lower success independently of other factors. Usual teaching procedures, based on isomorphism, could increase the probability that students consider isomorphism the only possible relationship between problems.

Keywords: Problem-solving, analogies, surface and structure, familiarity, transfer.

Correspondencia: Joan Josep Solaz-Portolés, Departament Didàctica de les Ciències Experimentals i Socials, Universitat de València, Av Tarongers 4, 46022-Valencia. E-mail: joan.solaz@uv.es

Introducción

La resolución de problemas es una tarea clásica en el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas (Polya, 1957). En la enseñanza de las ciencias y las matemáticas la mayoría de los problemas que se plantean o se utilizan en el aula tienen un enunciado en el que se describe una situación del mundo físico.

Según la teoría clásica de resolución de problemas pueden distinguirse dos fases en el proceso: comprensión del problema y resolución propiamente dicha (Newell y Simon, 1972). En términos psicológicos, comprender un problema significa construir representaciones mentales en distintos niveles de elaboración de la situación descrita en el enunciado, que suele ser un texto corto. La comprensión de un texto implica construir distintas representaciones mentales (Kintsch, 1998; Kintsch y van Dijk, 1978): Superficial (para el nivel de palabras); Base de Texto (para el nivel semántico); Modelo de la Situación (MS, para el nivel referencial) y Modelo del Problema (MP, para el nivel abstracto). Tanto el MS como el MP involucran el conocimiento previo del sujeto, pero difieren en sus elementos constituyentes. El MS se elabora a partir de eventos y objetos concretos del mundo real, así como de las reglas que lo rigen. El MP se construye con entidades abstractas, cantidades, funciones, conceptos, leyes, etc. y sus relaciones (Kintsch

y Greeno, 1985; Nathan, Kintsch, y Young, 1992).

Este trabajo se centra en la fase de comprensión durante la resolución de problemas de ciencias y de matemáticas. Estamos interesados en el modo en que las variables del problema pueden facilitar o dificultar la elaboración del MS y MP en estudiantes de Secundaria y, por tanto, pueden incrementar o reducir el éxito en la fase de resolución. Analizaremos problemas en los que aparecen implicadas dos ecuaciones lineales. Estos problemas son usuales en las asignaturas de Matemáticas y Física y Química de la Educación Secundaria.

Nos referiremos a la traducción algebraica como el proceso de elaboración de un modelo de problema a partir de un modelo de la situación, en problemas de naturaleza algebraica (Puig, 1998; Sanjosé, Solaz-Portolés, y Valenzuela, 2009). Los niveles más bajos de representación mental parecen ser pasos necesarios para alcanzar los niveles más altos (Vidal-Abarca y Sanjosé, 1998). En consecuencia, construir un MS rico y apropiado resulta necesario para elaborar un MP útil y disponible que permita resolver el problema.

Entonces, nuestra primera pregunta de investigación planteada es: ¿cómo afectan las dificultades en construir el MS a la elaboración del MP?

Dado que el MS se construye conectando el conocimiento previo del sujeto con el contenido del pro-

blema, es de esperar que disponer de poco conocimiento previo sobre la situación descrita en el enunciado suponga la elaboración de un MS pobre. Por ello, las situaciones problemáticas en contextos no familiares para los resolutores, podrían comportar dificultades para la elaboración del MS. Esto representa un problema de investigación relevante en enseñanza de las ciencias, puesto que los profesores normalmente esperan que los procedimientos de resolución de problemas aprendidos en las clases de matemáticas se puedan aplicar con éxito en la resolución de problemas de ciencias. Los enunciados de los problemas en la asignatura de matemáticas suelen estar referidos a contextos de la vida diaria, pero los problemas de ciencias usualmente no. Si la mayor o menor familiaridad del resolutor con el contexto del problema afectase al éxito en su resolución, debería revisarse aquel presupuesto instruccional.

A pesar de que el aprendizaje de conceptos, la resolución de problemas y los trabajos prácticos deberían estar integrados en una metodología instruccional coherente (Gil et al., 1999), lo bien cierto es que suelen abordarse separadamente en las aulas. Un tratamiento instruccional típico bastante común es que los profesores resuelvan un conjunto de problemas basados en algún principio, ley o teorema y, a continuación, propongan problemas análogos para que los estudiantes intenten resolverlos. Esto es, muchos de los

problemas diana que se proponen pueden resolverse mediante transferencia analógica (Bassok y Holyoak, 1989; Bernardo, 2001; Gick y Holyoak, 1983; Hammer, Elby, Scherr, y Redish, 2005; Holyoak, 1984; Mestre, 2003; Reed, Dempster, y Etinger, 1985).

El proceso de resolución de problemas por transferencia demanda la construcción de una analogía entre una situación conocida y una situación nueva (Gentner, 1983). La analogía entre problemas diferentes se construye mediante de identificación y la construcción de relaciones inyectivas (mapping) entre diferentes elementos característicos de los problemas. Los elementos pueden referirse tanto a objetos y hechos concretos del mundo real, como a entidades abstractas como espacio del problema, ecuaciones, leyes científicas, etc. Si se establecen analogías entre problemas, se facilita el proceso de transferencia y, con ello, se debe incrementar el éxito en la resolución de problemas académicos.

Se han descrito dos componentes básicos para los problemas con enunciado: la Superficie y la Estructura (Holyoak, 1984). La Superficie describe la situación problemática en un contexto del mundo real y se refiere a objetos y hechos concretos en términos no abstractos. En la Educación Secundaria un grupo importante de problemas académicos tienen naturaleza algebraica. La Estructura de un problema algebraico está determinada básicamente por

«cómo se relacionan las cantidades unas con otras más que por cuáles son esas cantidades» (Novick, 1988, p. 511). En los problemas de carácter algebraico que vamos a considerar en este estudio las ecuaciones resumen las relaciones entre cantidades.

Así pues, desde el punto de vista teórico la relación entre dos problemas puede caracterizarse en términos similitud superficial y/o estructural (Holyoak y Koh, 1987). Por su parte, Reed (1987), como puede en el Cuadro 1, identifica cuatro tipos de relación entre problemas de acuerdo con su similitud superficial y/o estructural.

Cuadro 1

Relaciones Superficiales y Estructurales entre Problemas

	Superficie: Igual	Superficie: Diferente
Estructure: Igual	Equivalente	Isomorfo
Estructure: Diferente	Similar	Relacionado

Los problemas Equivalentes están relacionados según la definición de *similitud literal* de Gentner (1983, p. 159): en el conjunto de proposiciones interconectadas que representan el contenido semántico de los enunciados de los problemas, un gran número de predicados de un problema (al que llamaremos fuente a partir de ahora) pueden ser relacionados uno a uno con los de otro (que llamaremos diana en adelante),

incluyéndose tanto los referidos a los atributos de objetos como los predicados relacionales.

Los problemas isomorfos son aquellos que tienen la misma Estructura pero diferentes Superficies, esto es, los objetos y/o los eventos mencionados en el enunciado del problema son diferentes. Estos problemas no pueden relacionarse mediante la *similitud literal* sino mediante una *analogía* según Gentner: «...la comparación en la cual los predicados relacionales del problema diana, pero pocos o ninguno de los atributos de objetos, pueden ser relacionados uno a uno con los del problema Fuente» (Gentner, 1983, p. 159). Cuando se establecen correspondencias entre los objetos en un problema fuente y un problema diana Isomorfo, todos los predicados relacionales en el fuente son también válidos en el Isomorfo (véanse los Cuadros 3 y 4 del Apéndice). Cuando esta *analogía completa* ha sido construida, podemos afirmar que los estudiantes que resuelven el problema podrían alcanzar un MP para el problema diana sin tener que realizar explícitamente la *traducción algebraica*, simplemente estableciendo las oportunas correspondencias entre conceptos desde el problema fuente hacia el Isomorfo en el nivel del MS. Podemos ver todos estos razonamientos en el Diagrama 1 del Apéndice.

Los problemas similares tienen los mismos eventos, objetos y atributos pero sus Estructuras son diferentes, es decir, estos problemas

tienen predicados relacionales diferentes. En consecuencia, la *similitud literal* es solamente aparente en este caso. Dada la diferencia estructural entre problemas, los estudiantes no pueden elaborar un MP del problema diana por simple correspondencia entre el problema diana y el fuente. En primer lugar, los estudiantes tienen que leer el enunciado y darse cuenta de las diferencias, a continuación deben *traducir* los diferentes predicados relacionales del lenguaje natural al lenguaje del álgebra, esto es, llegar desde el MS hasta el MP. Usando términos de Gentner, a esta relación se le podría denominar *analogía lejana*.

Finalmente, los problemas Relacionados no comparten ni la Estructura ni la Superficie. La *similitud literal* no es en este caso aparente, y una analogía requeriría la construcción de un MP más general que pudiera incluir ambos problemas relacionados como otros casos particulares. En la teoría de Gentner esto precisamente corresponde a una *abstracción*: «una comparación en la cual la base o dominio es una estructura relacional abstracta» (Gentner, 1983, p. 159). En una estructura abstracta los nudos del objeto no son objetos de naturaleza ontológica concreta, sino entidades abstractas, y «los predicados en el dominio abstracto de base tienen correspondencia en el dominio diana; es decir, no hay predicados en el dominio base que no tengan su imagen correspondiente en el problema diana» (Gentner, 1983, p. 160).

Los problemas utilizados en este trabajo se pueden relacionar mediante un esquema abstracto común. Este esquema es, fundamentalmente, un conjunto de expresiones algebraicas que pueden definirse como dos ecuaciones algebraicas lineales con una solución única, esto es, se representan geoméricamente por dos líneas rectas que se cortan:

$$\text{Ecuación}_1: y_1 = y_{10} + r_1 x$$

$$\text{Ecuación}_2: y_2 = y_{20} + r_2 x$$

donde y_{10} e y_{20} son los puntos de corte con el eje de ordenadas (ordenadas en el origen) y r_1 y r_2 son las pendientes de las rectas (o proporciones de crecimiento o decrecimiento de la variable dependiente). Cuando las pendientes son positivas y de diferente valor, y las ordenadas en el origen también son diferentes, la Estructura resultante será denominada *Alcanzar*. Si las pendientes de las rectas tienen signo y valor diferentes, y sus ordenadas en el origen son también distintas, la Estructura resultante será denominada *Encontrar*. Los nombre de ambas estructuras se han tomado de la cinemática: un vehículo que alcanza a otro moviéndose por la misma carretera (la primera), y dos vehículos que se mueven en sentido opuesto en la misma carretera y acaban encontrándose (la segunda).

Nuestra segunda pregunta de investigación es: ¿En qué medida las diferencias o similitudes superficiales y estructurales entre los problemas fuente y diana pueden facilitar u obstaculizar la elaboración de

analogías en los estudiantes de Secundaria y, por tanto la elaboración de un MP adecuado?

Tomando como referencia la teoría de construcción de analogías de Gentner (1983), esperamos que los sujetos que detecten similitudes y diferencias relacionales en el MS mejoren su desempeño en el MP, es decir, en el nivel algebraico.

Existen algunas propuestas pedagógicas interesantes en la resolución de problemas basadas en principios constructivistas (Gil y Martínez-Torregrosa, 1983). Pero, la realidad de nuestras aulas nos dice que los profesores de Secundaria y los libros de texto siguen secuencias instruccionales parecidas a la siguiente:

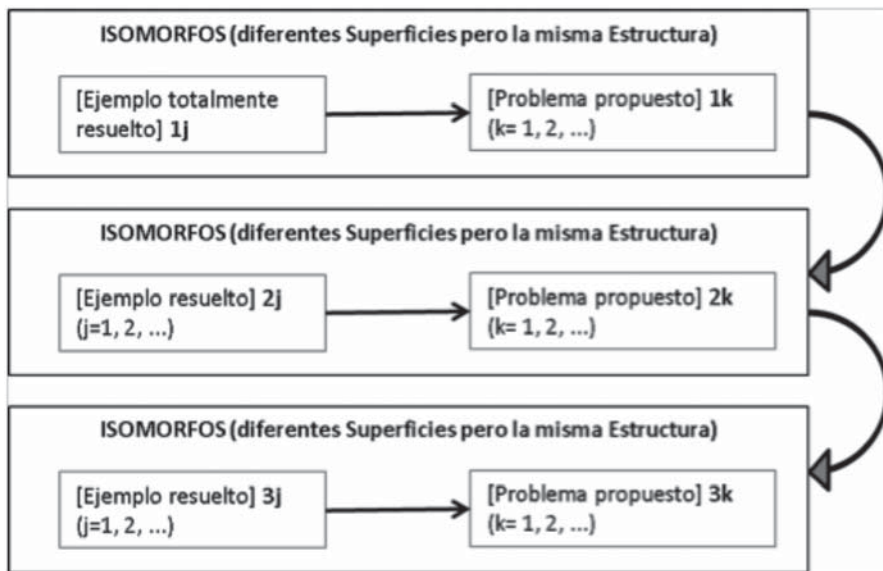


Figura 1. Procedimiento de enseñanza habitual en la resolución de problemas de matemáticas y de ciencias.

Parece, pues, que se tiende a sobreponderar las relaciones de carácter isomórfico entre problemas. Además, se dedica menos tiempo a comparar estructuras diferentes que permitan a los estudiantes generar esquemas algebraicos más generales.

Nuestra última pregunta de investigación es: ¿Qué efectividad tiene una secuencia instruccional basada en problemas isomorfos a la hora de hacer conscientes a los estudiantes de las analogías y diferencias entre problemas algebraicos con enunciado?

Objetivos e hipótesis

Objetivo 1: Para obtener una respuesta a nuestra primera pregunta de investigación, se analizaron los posibles efectos de la mayor o menor familiaridad del contexto sobre el éxito en la resolución de problemas algebraicos. Dado que estamos interesados particularmente en la fase de comprensión y no en la fase de resolución del problema, cuando aludimos a éxito en la resolución de problema por transferencia, nos estaremos refiriendo a: a) la detección correcta de similitudes y/o diferencias estructurales entre problemas; y b) el reconocimiento de cuáles son las ecuaciones correctas para resolver el problema. Con ello nuestra hipótesis puede ser formulada del siguiente modo:

- Hipótesis H1: Una baja familiaridad de las situaciones implicadas en el enunciado del problema conducirá a un menor éxito en la resolución del problema que en el caso de alta familiaridad.

Objetivo 2: Atendiendo a la segunda pregunta de investigación, intentamos analizar el grado de éxito en resolución de problemas algebraicos considerando sus relaciones superficiales y estructurales específicas con un problema ejemplo, totalmente resuelto, que se proporciona a los estudiantes como base o Fuente. Nuestra intención fue replicar un estudio anterior (Gómez, Solaz-Portolés, y Sanjosé, 2012) en el que las similitudes superficiales

parecieron enmascarar las diferencias estructurales entre problemas a los estudiantes de Secundaria. Esto resulta lógico, ya que las características perceptibles de los objetos y hechos del mundo real son más fáciles de detectar que las características abstractas. Además, en las actividades de transferencia las entidades superficiales son más eficientes que las entidades abstractas para activar ejemplos fuente archivados en la memoria a largo plazo (Reeves y Weisberg, 1994). Sin embargo, el éxito en la transferencia en problemas de ciencias y matemáticas supone identificar las características estructurales de los problemas. Ser capaces de reconocer cuándo dos problemas son isomorfos y diferenciarlos bien de la situación con problemas similares es muy importante para una adecuada transferencia, porque comporta dejar de lado detalles irrelevantes (superficiales) en una situación particular (Forbus, Gentner, y Law, 1995; Hummel y Holyoak, 1997). Nuestra segunda hipótesis es:

- H2: Las similitudes superficiales entre problemas similares podrían enmascarar sus diferencias estructurales a los estudiantes de Secundaria.

También estudiamos los posibles beneficios de ser consciente de las similitudes o diferencias estructurales entre problemas a la hora de seleccionar las ecuaciones correctas para resolverlos. Concretamente, quisimos ave-

riguar cómo las características superficiales pueden dificultar la detección de una relación estructural determinada entre problemas. Para ello, consideramos únicamente los problemas isomorfos y los similares.

- H3: Establecer las analogías correctas entre los problemas diana y los problemas fuente mejorará el éxito en la resolución de problemas algebraicos.

Objetivo 3: A tenor de lo expuesto en nuestra tercera pregunta de investigación, estudiamos el efecto que genera la instrucción habitual en nuestras aulas. Comparamos estudiantes de reciente instrucción con otros estudiantes que ya la habían recibido hacía tiempo en algunas tareas: a) selección de ecuaciones correctas para resolver problemas; b) detección de similitudes o diferencias entre problemas. Ciertamente no teníamos predicciones claras al respecto, pero podría aparecer algún efecto colateral del extenso uso de problemas isomorfos con poca utilización de procesos de generalización.

Metodología

Muestra

Participaron en nuestra investigación 194 estudiantes de ambos sexos (de edades comprendidas entre los 15 y los 16 años) en dos niveles académicos: 3.º de ESO o

9.º grado (53 estudiantes) y 4.º de ESO o 10.º grado (54 estudiantes). Pertenecían a 8 grupos íntegros de tres centros de Educación Secundaria de nivel sociocultural medio. De ellos, 107 habían recibido instrucción recientemente sobre resolución de problemas algebraicos. Éstos últimos constituyeron el grupo denominado *instruidos recientemente*. La resolución de problemas algebraicos es un contenido incluido en el currículum de 3.º de ESO, donde aparece como una aplicación de la resolución de ecuaciones lineales. Posteriormente, en 4.º de ESO, esta cuestión se vuelve a tratar y se resuelven más problemas. Como ya hemos indicado, la metodología de enseñanza se suele basar en la resolución y explicación por el profesor de varios ejemplos de problemas en la pizarra y, a continuación, se propone a los estudiantes que resuelvan problemas isomorfos.

Los restantes 87 estudiantes de 4.º de ESO todavía no habían resuelto problemas algebraicos en el momento de participar en este experimento (sí lo habían hecho en el curso anterior). A este grupo lo denominamos *instruidos no recientemente*.

Del total de estudiantes participantes, 101 fueron asignados a la condición de alta familiaridad, el resto (93 estudiantes) a la de baja familiaridad.

La selección de la muestra no respondió a otro criterio más que el de accesibilidad, esto es, no se empleó procedimiento alguno de mues-

treo. Con todo, se ha de señalar que los estudiantes no presentaban ninguna característica especial que los distinguiera.

Materiales

Elaboramos dos cuadernillos diferentes, uno por cada condición de familiaridad, que incluyeron las instrucciones, un problema ejemplo completamente resuelto y explicado (el problema que llamamos fuente), y cuatro problemas diana: uno equivalente, uno isomorfo, uno similar y uno Relacionado con el fuente, de acuerdo con el Cuadro 1. Los problemas diana fueron redactados procurando introducir el mínimo número de cambios posibles con respecto al problema fuente. Los problemas similar y fuente difirieron en un solo predicado relacional importante, que tiene justo el significado opuesto en ambos problemas (ver Apéndice). De este modo, pretendimos hacer más evidentes los efectos experimentales esperados.

En la condición de alta familiaridad, las superficies de los problemas incluyeron situaciones y objetos de la vida diaria. Sin embargo, en la condición de baja familiaridad, las cinco superficies de los problemas implicaron fenómenos científicos que no habían sido estudiados todavía por los sujetos participantes. Seleccionamos dos superficies diferentes para cada condición de familiaridad:

Alta familiaridad: Llenado/Vaciado de piscinas e Incremento/Dis-

minución del saldo en cuentas de ahorro.

Baja familiaridad: Aumento/Disminución de la presión de un gas por Calentamiento/Enfriamiento del mismo y Crecimiento/Decrecimiento de la longitud de una barra metálica por Calentamiento/Enfriamiento de la misma.

Las dos Estructuras algebraicas consideradas corresponden a la intersección de dos líneas rectas: son las Estructuras Alcanzar y Encontrar que se han definido anteriormente. Estas Estructuras fueron las mismas en ambas condiciones de Familiaridad. Los problemas Fuente (uno por cada condición de Familiaridad) tuvieron la misma Estructura en las dos condiciones de Familiaridad (Alcanzar).

En el problema diana equivalente, la superficie no fue exactamente la misma que la del problema fuente en ambos niveles de familiaridad (llenado de piscinas o aumento de la presión en tanques de gas por transferencia de calor), sino una muy parecida (llenado de tanques de leche/aumento de la presión en globos por transferencia de calor). De otra manera, el fuente y el equivalente serían el mismo problema.

En cada cuadernillo, la presentación de los materiales siguió el siguiente orden: instrucciones, problema fuente, problema equivalente y, a continuación los otros tres problemas diana en un orden contrabalanceado.

Todos los problemas para las dos condiciones de familiaridad se recogen en el Apéndice.

Como requisito, los estudiantes debían comprender la resolución de los problemas Fuente para poder ser conscientes de las analogías o diferencias estructurales de los problemas diana planteados. Por ello, preparamos un test básico de cinco ítems consistente en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (sin enunciado). Asignamos una puntuación 0/1 a cada ítem en función si la respuesta era incorrecta o correcta respectivamente. Todos los participantes alcanzaron una puntuación de 3 puntos o más.

Diseño experimental

Nuestro estudio se dividió en dos fases. En la primera fase, cuantitativa, el diseño fue factorial 2×2 (2×2) con dos variables entre-sujetos, Tiempo transcurrido desde la Instrucción (Recientemente Instruidos/Instruidos No Recientemente) y Familiaridad (baja/alta); y dos variables intra-sujetos, la Superficie de los problemas (igual al problema Fuente/diferente al problema Fuente) y la Estructura de los problemas (igual/diferente al problema Fuente). Como quiera que el nivel académico (3.º ESO/4.º ESO) no produjo efecto significativo alguno, no se consideró en lo que sigue.

En la segunda fase, entrevistamos a un subgrupo de participantes al objeto de obtener información adicional acerca de los procesos mentales que llevaban a cabo durante el desarrollo de las tareas propuestas. Los modos de ejecución de

tareas así como los razonamientos realizados se analizaron y clasificaron en categorías provisionales para ser evaluados en un estudio cualitativo ulterior.

Variables y medidas

Para cada problema diana propusimos a los estudiantes dos tareas diferentes:

- a) Relacionar explícitamente el problema diana con el fuente mediante el uso de factores estructurales. Se ofrecieron varias relaciones posibles entre ambos problemas y los estudiantes tenían que seleccionar cuál, en su opinión, era la más destacada. Las 6 opciones para escoger eran: (a/b) *mismos/diferentes objetos o eventos*; (c/d) *mismas/diferentes cantidades*; y (e/f) *mismas/diferentes relaciones entre cantidades*. Justamente en las opciones (e/f) era donde se esperaba que hicieran las comparaciones estructurales apropiadas. Se puntuaron como 1/0 las correctas/incorrectas relaciones seleccionadas entre problemas al nivel estructural. Además, se tuvieron en consideración las restantes respuestas para estudiar su frecuencia y su asociación con las ecuaciones escogidas.
- b) Elegir las ecuaciones correctas para resolver el problema presentado. Se ofrecieron tres opciones, de las cuales solamente

una era la correcta (ver Apéndice).

Los estudiantes debían escoger la opción preferida. En el caso de los problemas Similar y Relacionado una de las opciones presentadas contenía las mismas ecuaciones con las que se había resuelto el problema Fuente. Naturalmente, éstas no eran las ecuaciones correctas para solucionar estos problemas diana. Marcar estas ecuaciones como correctas podía significar la utilización de una estrategia de copiar-y-pegar del problema fuente para el problema diana, que se denomina *Transferencia Negativa* (Novick, 1988). Se asignaron 1/0 puntos cuando las ecuaciones eran correctas/incorrectas para resolver cada problema diana.

En cada condición experimental definimos las siguientes variables:

1. El número de estudiantes que fueron/no fueron capaces de encontrar la similitud/diferencia superficial y estructural entre el problema fuente y los problemas diana.

En algunos análisis introducimos la variable *Número de Comparaciones Estructurales Correctas* que da cuenta de las comparaciones estructurales correctas diana-fuente realizadas. Esta variable puede tomar los valores comprendidos entre 0 y 4, ya que fueron 4 los problemas diana planteados.

En cambio, en otros análisis focalizamos nuestra atención en la

detección de similitudes o diferencias estructurales provocadas por características superficiales. En el caso del problema diana Isomorfo, las diferencias superficiales con el Fuente podrían hacer creer que las estructuras de ambos problemas son diferentes. En el caso del problema diana Similar, la similitud superficial con el Fuente podría inducir a pensar a los estudiantes que las estructuras son las mismas. Por eso, computamos la proporción de estudiantes que cometió estos errores.

2. El número de ecuaciones seleccionadas que eran/no eran correctas para resolver cada problema diana.

En ciertos análisis hemos definido la variable *Número de ecuaciones correctas* para recoger la cantidad total de ecuaciones correctas escogidas en los problemas diana. Los valores que puede tomar esta variable van del 0 al 4.

Finalmente, computamos los errores específicos en la elección de ecuaciones de los problemas Isomorfo y Similar. Cuando los estudiantes escogen diferentes ecuaciones para el Isomorfo que las empleadas en el problema Fuente, es porque probablemente pensaron que una superficie diferente comportaría una estructura diferente. En el problema Similar nos centramos en la *transferencia negativa*, a saber, casos de estudiantes que creerían que la similitud superficial

comporta también idénticas ecuaciones para resolver ambos problemas.

Procedimiento

Los datos fueron recogidos en dos sesiones. La primera sesión ocupó 55 minutos. Esta sesión no incluyó instrucción en resolución de problemas ni tampoco enseñanza en ninguna metodología específica de resolución. La sesión fue dirigida por uno de los investigadores. Este investigador no fue el profesor de ninguno de los grupos de participantes. En esta primera sesión los estudiantes realizaron una prueba de conocimiento previo (15 min). A continuación, se repartieron los cuadernillos de problemas, contrabalanceados, entre los estudiantes. De esta forma, cerca de la mitad de los estudiantes respondieron en la condición de baja Familiaridad y la otra mitad en la condición alta Familiaridad. El investigador leyó las instrucciones en voz alta junto con los estudiantes y solucionó sus dudas (10 min). Después, sugirió a los participantes que estudiaran el problema fuente y les explicó el procedimiento de resolución paso a paso (10 min). El problema Equivalente (misma superficie y misma estructura que el Fuente) sirvió de práctica en las tareas propuestas: el investigador ayudó a los estudiantes a comprender y abordar las tareas en este problema, pero en ningún momento las resolvió (5 min). Finalmente, los tres problemas diana

restantes fueron resueltos por los estudiantes sin ninguna ayuda del investigador (15 min). Los estudiantes pudieron consultar el problema Fuente, totalmente resuelto, a su criterio durante la prueba.

Algunas respuestas interesantes e intrigantes de estudiantes motivaron la planificación de entrevistas a un subgrupo de los participantes. Estas entrevistas se realizaron en formato semiestructurado, y su finalidad fue clarificar y profundizar en el pensamiento y el razonamiento de los estudiantes. Las entrevistas tuvieron una duración aproximada de 10 minutos por estudiante. En primer lugar, el investigador devolvió el cuadernillo correspondiente a cada sujeto y a continuación pidió que re-pensaran sus respuestas a las tareas. En segundo lugar, el investigador solicitó a los estudiantes que justificaran estas respuestas, poniendo mucha atención a la comprensión del estudiante sobre la demanda de la tarea. Por último, el entrevistador instó a los estudiantes que relacionaran las dos tareas: 1) Establecer la relación entre el problema fuente y el problema diana, y 2) Seleccionar las ecuaciones correctas para solucionar el problema diana con ayuda del problema Fuente. En los casos en los que los estudiantes no entendieron la tarea y/o continuaron proporcionar respuestas incoherentes, el investigador explicó paso a paso el razonamiento hasta llegar a la solución correcta. Se detuvo la explicación cuando el estudiante entendió y

así lo expresó explícitamente. Después de asegurarse que el estudiante había comprendido perfectamente las tareas, finalizó la entrevista.

Los protocolos fueron analizados independientemente por dos investigadores y las discrepancias ocasionales se resolvieron mediante discusión.

Análisis estadísticos

Para contrastar nuestras hipótesis utilizamos pruebas estadísticas. Las variables cuantitativas consideradas no mostraron naturaleza de intervalo ni de razón, o no se distribuyeron normalmente según el test de Kolmogórov-Smirnov. Por tanto, utilizamos pruebas no-paramétricas. Para los contrastes de grupos independientes usamos el test U de Mann-Whitney, y para los contrastes de grupos relacionados el test Z de Wilcoxon. Finalmente, las correlaciones fueron calculadas usando el coeficiente rho (ρ) de Spearman.

Resultados

Similitudes y diferencias estructurales detectadas por los estudiantes

Analizamos la medida en que los participantes detectaron correctamente la similitud o diferencia entre la estructura de los problemas diana y la del problema fuente. Estudiamos la variable *Número de comparaciones estructurales correctas*

(valores 0, 1, 2, 3, 4). La familiaridad tuvo un efecto principal significativo. En la condición de baja Familiaridad los estudiantes encontraron más dificultades para detectar la relación estructural correcta entre el fuente y los problemas diana que en la condición de alta Familiaridad, con un efecto moderado ($M_{bF} = 1.56$; $M_{aF} = 2.30$; Mann-Whitney $U = 2852.0$; $p < .001$). El intervalo de tiempo transcurrido desde la instrucción tuvo un efecto poco significativo ($p > .1$).

Efectos de la familiaridad y el tiempo transcurrido desde la instrucción, en la selección de ecuaciones

La Tabla 1 muestra la proporción de ecuaciones correctas en cada uno de los problemas diana en ambas condiciones de Familiaridad. La Tabla 2 muestra la proporción de ecuaciones correctas en función de haber recibido o no, instrucción reciente.

Todos los problemas diana producen proporciones de éxito significativamente menores en la condición de baja Familiaridad que los problemas correspondientes en la condición de alta Familiaridad (véase la Tabla 1). La prueba no paramétrica de Mann-Whitney demostró que este efecto principal fue significativo ($U = 3631.0$; $p = .004$). No encontramos ninguna interacción de este factor con otros factores ($p > .1$).

El factor Tiempo transcurrido Desde la Instrucción no produjo un efecto significativo ($p > .1$).

Tabla 1

Proporción de Ecuaciones Correctas Escogidas en cada Problema Diana, en ambas Condiciones de Familiaridad

	Equivalente	Similar	Isomorfo	Relacionado
Baja Familiaridad	.81	.58	.72	.70
Alta Familiaridad	.88	.73	.86	.77
Total	.85	.66	.79	.74

Tabla 2

Proporción de Ecuaciones Correctas en cada Problema Diana en Función del Tiempo Transcurrido desde la Instrucción

	Equivalente	Similar	Isomorfo	Relacionado
Instrucción reciente	.83	.59	.84	.76
Instrucción no reciente	.86	.72	.74	.71

Cuando consideramos la variable *Numero de ecuaciones correctas* seleccionadas en los cuatro problemas (los valores 0, 1, 2, 3, 4), la Familiaridad produjo de nuevo diferencias significativas ($U = 3657.5$; $p = .005$). El tiempo transcurrido desde la instrucción produjo efectos no significativos ($p > .8$).

Efectos de la superficie y las similitudes estructurales en las ecuaciones

El test de Wilcoxon mostró un efecto significativo del factor de Estructura ($Z = -4.019$; $p < .001$): Los problemas Similar y Relacionado, con estructura distinta al problema Fuente, producen un nivel

de éxito significativamente inferior ($M_{dE} = .70$) que el Equivalente y el Isomorfo, con la misma estructura que el problema Fuente ($M_{mE} = .82$).

El factor Superficie no produjo ningún efecto significativo ($p > .1$). Resulta interesante comentar que la proporción de ecuaciones correctas en el problema Similar fue inferior a la del problema Relacionado (véase la Tabla 1), pero la proporción de ecuaciones correctas en el problema Equivalente fue más alta que la del problema Isomorfo. La prueba de grupos emparejados de Wilcoxon mostró un efecto significativo de interacción Estructura X Superficie: Las diferencias entre los problemas Similar y Equivalente fueron significativamente superiores a las di-

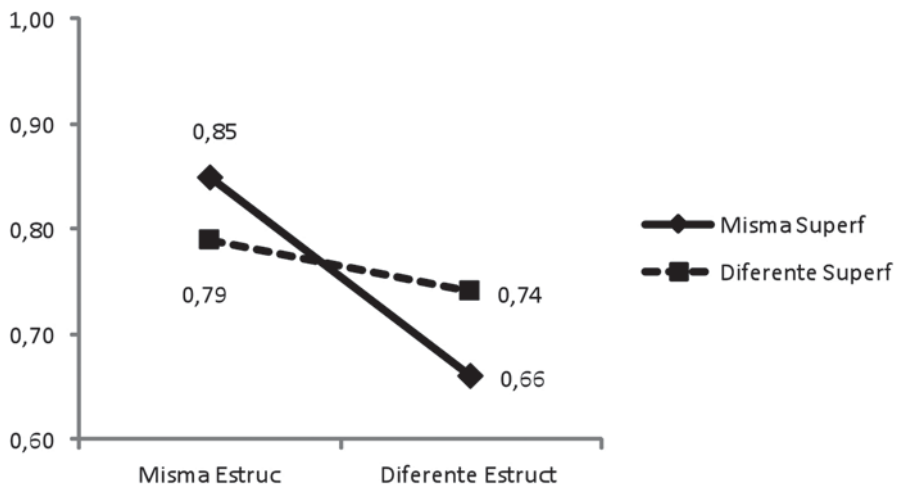


Figura 2. Proporción de ecuaciones correctas en la resolución de problemas diana. Efecto de interacción Estructura X Superficie.

ferencias entre los problemas Iso-morfo y Relacionado ($M_{S-E} = .19$; $M_{R-I} = .06$; $Z = -2.382$; $p = .017$).

La Figura 2 muestra este efecto de interacción.

Relación entre las comparaciones estructurales y la elección de ecuaciones correctas

Apareció una asociación entre detectar las relaciones estructurales correctamente y escoger las ecuaciones correctas en los problemas diana. La variable *Número de comparaciones estructurales correctas* tuvo una correlación significativa con la variable *Número de ecuaciones correctas* (Spearman's $\rho = .490$; $p < .001$).

Sin embargo, hubo un porcentaje significativo de participantes que no detectaron la relación estructural correcta entre los problemas fue capaz de escoger las ecuaciones correctas para los problemas diana. El 66% de los participantes estableció una relación estructural incorrecta con el problema Fuente para dos o más problemas diana. El 34% restante estableció una relación estructural correcta para tres problemas diana (13%) o para cuatro problemas diana (21%).

Estudiamos la asociación entre la relación percibida fuente-diana y la exactitud de las ecuaciones escogidas. La Figura 3 muestra esta relación en cada uno de los problemas diana.

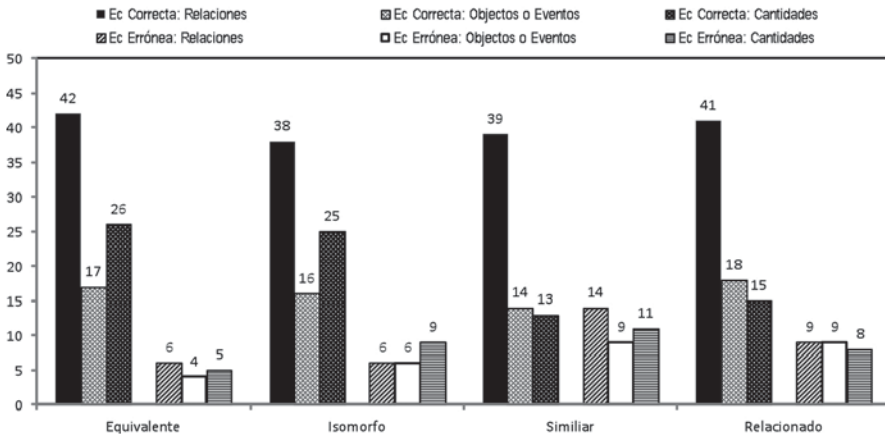


Figura 3. Porcentaje de participantes que percibieron distintas relaciones entre los problemas fuente y diana (en función de los objetos, las cantidades o las estructuras) y seleccionaron las ecuaciones correctas o erróneas para los problemas diana.

Para analizar en profundidad el razonamiento de los estudiantes se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas a un subgrupo de sujetos en la condición de baja Familiaridad. Nos centramos en los problemas isomorfos y similares para una primera aproximación. A partir del análisis de las entrevistas definimos provisionalmente tres categorías de estudiantes: a) Disocian el MS y el MP; las relaciones entre problemas se establecen a partir de las características superficiales (6 de 10 casos); b) falta de comprensión en la traducción algebraica: la relación entre problemas se establece a partir de las características superficiales y los estudiantes realizan transfer negativo (2 de 10 casos); c) Falta de atención y cansancio: el estudiante admite que sus respuestas incohe-

rentes son debidas a una falta de atención y se auto-corrige durante la entrevista (2 de 10 casos). El Cuadro 2 muestra algunos segmentos de información obtenidos en las entrevistas correspondientes a las categorías (a) y (b).

Interferencias superficiales en la detección de similitudes estructurales

Focalizamos nuestra atención en los errores específicos cometidos por los estudiantes en dos de los problemas diana: El Isomorfo, donde el error analizado consiste en que Superficie diferente implique ecuaciones diferentes, en comparación con el problema Fuente, y el Similar, donde se analizó el error de transferencia negativa.

Cuadro 2

Clasificación de las Respuestas Proporcionadas por los Estudiantes en las Entrevistas

Casos y segmentos de información seleccionados a partir de las entrevistas

(a) *Caso 4: Este estudiante construyó la analogía entre el problema Fuente y los problemas del diana a partir del tipo de magnitud presente (presión o volumen). Por tanto, escogió las opciones «ambos problemas se resuelven con ecuaciones distintas porque ambos tienen diferentes cantidades» y «ambos problemas se resuelven con ecuaciones distintas porque ambos tienen diferentes las relaciones entre cantidades». Sin embargo, escogió las ecuaciones correctas en los problemas Isomorfo y Similar.*

I: ¡Buenos días! (...)

E: *(Vuelve a leer el problema Isomorfo y lo compara con el Fuente)* Los dos problemas tienen cantidades diferentes y también son diferentes las relaciones entre cantidades.

I: Eso cree usted? ¿Piensa que las relaciones entre cantidades en ambos problemas son diferentes? Entonces, ¿por qué selecciona las mismas ecuaciones en ambos problemas?

S: Porque es son las ecuaciones lógicas.

I: Ya veo ... ¿y aun así, sigue pensando que las cantidades son diferentes en ambos problemas?

E: Sí, tienen cantidades diferentes porque aquí (refiriéndose al diana) pone micras mientras que aquí (refiriéndose al fuente), hay milibares.

(b) *Caso 7: Este estudiante seleccionó las mismas ecuaciones del Fuente en los problemas Isomorfo y Similar (transfer negativo). Sin embargo, escogió la opción «ambos problemas tiene relaciones diferentes entre cantidades» cuando comparó cada diana con el problema Fuente para responder a la tarea 1.*

I: ¡Buenas tardes! (...). Por favor, ¿puede repasar las cantidades en el primer problema (*Isomorfo*) y el problema Fuente?

E: *(El alumno repasa sus respuestas en el cuadernillo)*

I: ¿Qué piensa usted sobre esta frase (*una opción en la tarea 1*): «¿Ambos problemas se resuelven usando las mismas ecuaciones porque ambos tienen las mismas relaciones entre cantidades»?

E: No. Las relaciones entre cantidades no son las mismas. Las cantidades en un problema son micras pero en el otro son milibares.

I: Está bien. Por favor repase el segundo problema (*problema Similar*). Compare las respuestas de los dos problemas diana y dígame si ve alguna diferencia entre ellos.

E: *(Lee los dos problemas diana)*. No aprecio ninguna diferencia.

I: Por favor, vuélvalos a leer despacio.

E: *(Después de una nueva lectura)* ¡Ah sí! En un problema (*Similar*), uno de los globos disminuye su volumen

I: ¿Y qué cree usted que quiere decir?

E: No lo sé.

(El estudiante no cambió sus ecuaciones equivocadas en el problema Similar)

Nota: «E»: Estudiante»; «I»: Investigador.

Analizamos el número de errores específicos en estos dos problemas diana (Isomorfo y Similar) considerando la Familiaridad (Alta/Baja) y el tiempo transcurrido desde la instrucción (instruidos recientemente / instruidos no recientemente) como factores independientes.

Hubo un efecto principal de la Familiaridad. En la condición de baja Familiaridad los estudiantes cometieron un número significativamente más elevado de errores que en la condición alta de Familiaridad ($M_{bF} = .31$; $M_{aF} = .15$; $U = 3562.5$; $p = .001$).

Encontramos un efecto de interacción Problema diana (similar/isomorfo) X Tiempo transcurrido desde la instrucción (instrucción reciente/no reciente). En el problema isomorfo, los estudiantes instruidos recientemente cometieron menos errores que los estudiantes no recientemente instruidos. En el problema Similar los estudiantes con instrucción reciente cometieron más errores que los instruidos no recientemente. La prueba de Mann-Whitney señaló que estas diferencias fueron significativas ($U = 3604.5$; $p = .001$). La Figura 4 muestra este efecto de interacción.

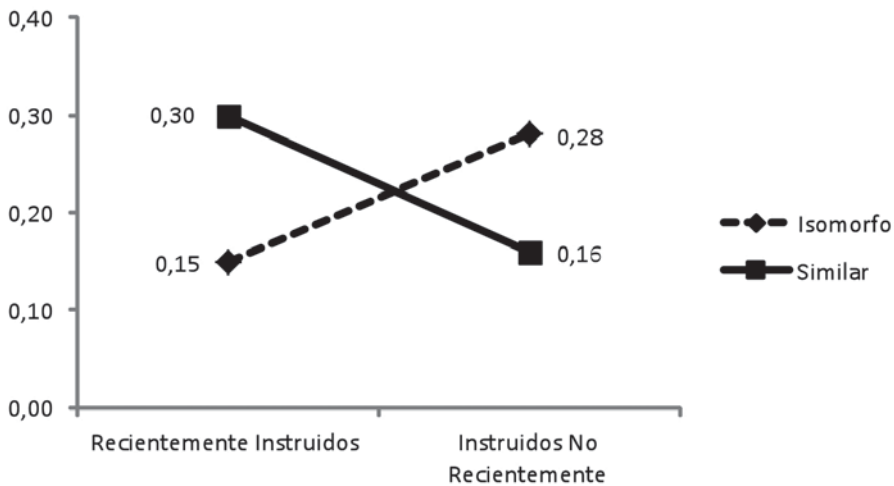


Figura 4. Proporción de errores específicos en las ecuaciones debidos a interferencias de la Superficie en las analogías Estructurales entre los problemas Fuente e Isomorfo, y Fuente y Similar. Se muestra un efecto significativo de interacción de los factores representados. Las dos condiciones de Familiaridad han sido colapsadas.

En el problema Similar, detectar o no detectar las diferencias estructurales con el problema Fuente se asoció significativamente con no realizar *Transferencia Negativa* ($X^2(gl = 1; N = 150) = 17.128; p < .001$). Sólo un 4.5% de los participantes que detectaron correctamente las diferencias estructurales cometieron *Transferencia Negativa*. En el problema Isomorfo, hubo también una asociación significativa entre detectar correctamente la similitud estructural y no cometer error en la elección de la ecuación ($X^2(gl = 1; N = 157) = 7.171; p = .007$). Sólo un 10.1% de los estudiantes que detectaron correctamente la similitud estructural escogieron ecuaciones equivocadas en este problema.

Discusión

Objetivo 1 e hipótesis 1

La Familiaridad con el contexto de los problemas tuvo los efectos esperados: Cuando los objetos y acontecimientos no fueron familiares para los estudiantes, estos tuvieron más dificultades para detectar las analogías /diferencias estructurales entre problemas. Al parecer, para resolver no sólo es importante la similitud entre problemas fuente y propuesto, sino también el contexto en el cual se enmarca la situación problemática. Este efecto se puede explicar a partir del modelo psicológico de comprensión de lectura

propuesto por Kintsch y colaboradores (opus cit.). El enunciado de un problema suele estar constituido por un texto breve a partir del cual el que se enfrenta a un problema ha de realizar inferencias para construir el Modelo de la Situación. Esta representación es anterior a la representación abstracta Modelo del Problema, que incluye la estructura algebraica. El escaso conocimiento del resolutor acerca de ciertos objetos, atributos y diversos acontecimientos del mundo real, empobrece la representación correspondiente al Modelo de la Situación y esto, a su vez, dificulta la representación Modelo del Problema disminuyendo el éxito en la resolución.

La hipótesis H1 fue apoyada por los datos experimentales.

Objetivo 2 e hipótesis 2 y 3

El número de ecuaciones correctas escogidas por los sujetos para resolver los problemas diana indica que poseen una buena formación en resolución algebraica (recuérdese que habían recibido instrucción al respecto, recientemente o no). En nuestra prueba, el porcentaje global de ecuaciones erróneas fue moderado (cerca del 24%). Así, la mayoría de estudiantes diferenciaron similitudes superficiales y estructurales adecuadamente. Sin embargo, hubo diferencias interesantes entre problemas. El porcentaje de participantes que escogió ecuaciones incorrectas en el problema Isomorfo fue bajo, cerca del 21%, en

cambio el porcentaje de estudiantes que escogió ecuaciones incorrectas en el problema Similar fue más alto, cerca del 34%.

En el problema Isomorfo, una vez establecidas las relaciones entre conceptos (analogía) se logra establecer un Modelo del Problema correcto sin tener que realizar traducción algebraica (véase Apéndice). Así, muchos estudiantes podrían tener éxito al escoger las ecuaciones en el problema Isomorfo sin una comprensión profunda del proceso de traducción algebraico. Esta situación no se da en los problemas Similar o Relacionado. En estos problemas, establecer las correspondencias entre conceptos a partir del problema Fuente no es suficiente para lograr un MP apropiado, y esto es debido a las diferencias semánticas con el Fuente. Por consiguiente, es lógico que los estudiantes obtuvieran menos éxito en los problemas Similar y Relacionado. En efecto, nuestros datos muestran que el efecto del factor Estructura fue significativo.

Sin embargo, el problema Similar obtuvo proporciones inferiores de éxito en la selección de la ecuación que el problema Relacionado, aunque este último no sólo tienen la estructura distinta al Fuente, sino que también tiene la Superficie diferente. Éste no es un resultado trivial y está en línea con las conclusiones de Novick (1988) acerca del comportamiento de estudiantes novatos en resolución problemas con enunciado. En un estudio previo

se obtuvo también el mismo efecto (Gómez, Solaz-Portolés, y Sanjosé, 2012) pero fue significativo sólo para los problemas de alta Familiaridad. En el experimento presente, con una mayor potencia estadística, se replica el efecto y aparece también en la condición de baja Familiaridad. Parece ser que las similitudes superficiales pueden enmascarar diferencias estructurales, tal y como señalaron Reeves y Weisberg (1994) desde fundamentos psicológicos. Sus ideas se confirman en el caso de la resolución de problemas algebraicos por analogía.

Por consiguiente, la Hipótesis H2 queda constatada.

Más del 65% de los participantes no estableció una relación estructural correcta entre dos o más problemas. Un porcentaje sustancial de estudiantes relacionó los problemas a partir de características superficiales. Por tanto, no fue sencillo para los estudiantes detectar las diferencias o analogías estructurales. El 31% de los participantes en el experimento detectó la relación estructural correcta y también escogió las ecuaciones correctas para la mayoría de problemas diana, sin influenciarles las relaciones estructurales y superficiales con el problema Fuente. Estos estudiantes parecen capaces de abstraer y utilizar un esquema algebraico general, quizá recuperado de su memoria a largo plazo o construido por comparación a lo largo del experimento (Kurtz y Loewenstein, 2007). La detección de similitudes

estructurales entre problemas consultando un ejemplo resuelto (tarea 1) pareció ayudar a los estudiantes a identificar las características importantes para escoger las ecuaciones correctas (tarea 2); de una forma similar ayudar a los estudiantes a identificar mejor la meta de una tarea, mejoró el éxito en la respuesta a preguntas consultando un texto (Llorens y Cerdán, 2012). El número de problemas diana para los que se dio una correcta relación estructural con el problema fuente correlacionó con el número de ecuaciones correctas escogidas. Tanto el número de comparaciones estructurales correctas como el número de ecuaciones correctas escogidas se vieron afectadas por la Familiaridad. Si tenemos en cuenta las tres variables en conjunto, aparece un marco lógico: La Familiaridad pareció afectar el número de comparaciones estructurales correctas entre cada problema diana y el problema fuente, y a su vez, el número de comparaciones estructurales correctas pareció afectar al número de ecuaciones correctas seleccionadas por los participantes en cada problema diana.

Por consiguiente, la comparación de Estructuras resultó ser un buen predictor del éxito en la selección de las ecuaciones, pero no al revés, o sea, la comparación de estructuras aparece como una condición casi suficiente pero no necesaria para el éxito en la selección de la ecuación. Construir la analogía, en términos de Gentner, entre pro-

blemas pareció no ser esencial para que algunos estudiantes reconocieran las ecuaciones correctas. Por lo tanto, nuestra hipótesis H3 se corroboró solo parcialmente.

Hubo un subgrupo particular de estudiantes con un nivel bajo de detección correcta de diferencias o similitudes estructurales (0-2 detecciones estructurales correctas) pero con un alto nivel en la selección de ecuaciones (3-4 ecuaciones correctas). En nuestro experimento, el 37% de los participantes mostró este comportamiento. Como les ofrecimos 3 opciones para las ecuaciones, 1/3 del éxito puede atribuirse al azar. Teniendo en cuenta esta posibilidad, podríamos encontrar un 25% de los participantes en aquella situación. Algunos estudiantes diferenciaron las ecuaciones correctas de las opciones erróneas sin prestar atención a las relaciones estructurales.

Los datos adicionales de las entrevistas confirmaron en algunos estudiantes la disociación entre las analogías construidas entre problemas en la fase Modelo de Situación y las analogías construidas en la fase Modelo de Problema (algebraico). Estos estudiantes parecen resolver los nuevos problemas más por un proceso directo de traducción algebraica que no por transferencia analógica. Por tanto, los estudiantes que seleccionaron las ecuaciones correctas sin construir una analogía estructural adecuada, activaron un esquema algebraico oportuno y lo utilizaron correctamente sin cons-

truir analogías explícitas con problemas resueltos previamente.

Objetivo 3

No tuvimos expectativas evidentes acerca de los efectos de la instrucción, más allá de los triviales (a mayor instrucción, mejores resultados educativos). Resultó de interés que los estudiantes con instrucción reciente tendieron erróneamente a transferir la estructura algebraica del problema Fuente a los problemas no isomorfos, más que los estudiantes no recientemente instruidos. Por el contrario, los estudiantes sin instrucción reciente tendieron a evitar transferir la estructura algebraica del problema Fuente al problema al problema Isomorfo, más que los recientemente instruidos. Teniendo en cuenta el procedimiento habitual de enseñanza (resolver ejemplos isomorfos sobre todo), no es un resultado sorprendente. Los estudiantes sin instrucción reciente encontraron más dificultades derivadas de la superficie de los problemas y obtuvieron un nivel de éxito menor en la construcción de analogías estructurales entre problemas isomorfos y no isomorfos. Después de la instrucción, los estudiantes parecieron demasiado confiados creyendo que cada problema propuesto sería isomorfo al problema fuente resuelto (Transferencia negativa). La instrucción reciente pareció inducir algún tipo de efecto *Priming* de modo los estudiantes tendieron a considerar cada problema propuesto como un isomorfo del ejemplo resuelto.

Limitaciones de este estudio y problemas abiertos

Este estudio tiene algunas limitaciones. En primer lugar, nos centramos en un tipo específico de problemas cuya estructura está basada en dos ecuaciones de primer grado. Aunque este tipo de problemas es muy frecuente en las aulas de ciencias, existen otros problemas interesantes para ser estudiados. En segundo lugar, para simplificar nuestro experimento y para aproximarnos en la medida de lo posible a las prácticas de aula, escogimos problemas bien definidos en lugar de problemas abiertos o desestructurados. Los problemas abiertos o desestructurados podrían producir una mayor variabilidad en las estrategias utilizadas por los estudiantes, generando así datos más ricos acerca del razonamiento en la resolución de problemas, en particular, en la resolución por transferencia. En tercer lugar, el razonamiento de los estudiantes será analizado con mayor profundidad en un estudio futuro, focalizando la atención en las dificultades detectadas en este experimento. Hemos de entrevistar a un volumen mayor de estudiantes y probablemente revisar las categorías provisionales definidas en este estudio.

Consecuencias educativas

Teniendo en cuenta los límites de nuestra investigación y con la cautela debida por la falta de vali-

dez externa, pueden derivarse algunas consecuencias educativas de nuestros resultados.

1. En primer lugar, la instrucción basada en la transferencia analógica en resolución de problemas, donde se proponen ejemplos resueltos y a continuación se pide a los estudiantes que resuelvan problemas isomorfos a los ejemplos previamente resueltos, da buenos resultados y la mayoría de los estudiantes aprende correctamente. Sin embargo, la instrucción usual basada en resolver problemas isomorfos podría dirigir a los estudiantes a un uso excesivo del isomorfismo y con ello a cometer *Transfer negativo*. Los problemas con estructuras diferentes también deberían de ser comparados en el aula para fomentar la abstracción de esquemas de problema más completos.
2. Los estudiantes pueden encontrar dificultades para percatarse de las diferencias estructurales cuando los problemas comparten características superficiales porque las características superficiales son las que primero se perciben. Los profesores no deberían suponer que los estudiantes pueden obviar los detalles irrelevantes de la superficie y enfocar la atención en la información algebraica subyacente. Construir analogías entre problemas es una de las estrategias más importantes y más uti-

lizadas en el aula para enseñar a resolver problemas. Las analogías y diferencias que los profesores perciben fácilmente entre los problemas pueden no ser tan evidentes para los estudiantes (Oliva, 2004). De hecho, las estrategias de resolución que los profesores declaran enseñar y las estrategias que los estudiantes dicen percibir no coinciden a menudo (Caño, Román, y Foces, 2000).

Resulta interesante enfocar la atención en las comparaciones estructurales explícitas porque esta estrategia ayuda en los procesos de generalización. Disponer de esquemas abstractos generales de problema ayuda a evitar interferencias superficiales cuando existen analogías estructurales y diferencias en la superficie de los problemas, y también cuándo hay similitud superficial pero existen diferencias estructurales. La transferencia vertical también debería trabajarse en el aula (Rebello et al., 2007). Los procedimientos instruccionales basados en la traducción algebraica (Puig, 1998; Sanjosé, Solaz-Portolés, y Valenzuela, 2009) han demostrado ser útiles para este objetivo educativo.

3. Los profesores no deberían identificar la resolución correcta de un problema con el hecho de poseer un esquema algebraico determinado en la mente. Algunos estudiantes con poca experien-

cia aprenden a resolver problemas algebraicos sin darse cuenta de las similitudes o diferencias estructurales entre ellos. Parece ser que estos estudiantes basan su actuación en el uso de casos particulares, haciendo los cambios necesarios para adaptar el caso particular conocido al problema presente.

4. Cuando los estudiantes trabajan en contextos poco familiares, como es el caso de la mayoría de problemas de ciencias, detectar diferencias o analogías estructurales presenta una dificultad añadida. Quizá los contextos poco familiares disminuyen la

motivación de los estudiantes para la tarea (Fernández, Anaya, y Suárez, 2012), disminuyendo a su vez la atención y el éxito final. Quizá la representación mental abstracta queda bloqueada por una escasa representación concreta construida a partir del enunciado del problema. Aun manteniendo las relaciones estructurales y superficiales entre los problemas, cambiar el contexto podría minimizar la comprensión de los estudiantes. Parece recomendable seguir secuencias instructivas desde contextos familiares a contextos menos familiares.

Referencias

- Bassok, M., y Holyoak, K. J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 15, 153-166. doi: 10.1037//0278-7393.15.1.153
- Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150. doi:10.1080//01443410124314
- Caño del, M., Román, J., y Foces, J. (2000). Estrategias de aprendizaje de las matemáticas: enseñanza explícita vs. enseñanza implícita y estilos de solución de problemas. *Revista de Psicodidáctica*, 5, 47-58.
- Fernández, A. P., Anaya, D., y Suárez, J. M. (2012). Motivation features and motivational self-regulatory strategies in middle-school students. *Revista de Psicodidáctica*, 17(1), 95-111.
- Forbus, K. D., Gentner, D., y Law, K. (1995). MAC/FAC: A model of similarity-based retrieval. *Cognitive Science*, 19, 141-205. doi: 10.1016/0364-0213(95)90016-0
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170. doi: 10.1016/S0364-0213(83)80009-3
- Gick, M. L., y Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 116-130.

- ogy, 15, 1-38. doi: 10.1016/0010-0285(83)90002-6
- Gil, D., y Martínez-Torregrosa, J. (1983). A model for problem-solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4), 447-455.
- Gil, D., Furió, C., Valdés, P., Salinas, J., Martínez-Torregrosa, J., Guisasaola, J., González, E., Dumas-Carré, A., Goffard, M., y Pessoa, A. M. (1999). ¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio?. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(2), 311-320.
- Gómez, C., Solaz-Portolés, J. J., y Sanjosé, V. (2012). Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad: primeros resultados. *Enseñanza de las Ciencias*. Aceptado para su publicación.
- Hammer, D., Elby, A., Scherr, R., y Redish, E. (2005). Resources, framing and transfer. In J. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 89-119). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Holyoak, K. J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence (Vol. 2)* (pp. 199-230). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Holyoak, K. J., y Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, 15(4), 332-340. doi: 10.3758/BF3197035
- Hummel, J. E., y Holyoak, K. J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review*, 104, 427-466. doi: 10.1037//0033.295X.104.3.427
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Kintsch, W., y Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129. doi: 10.1037//0033-295X.92.1.109
- Kintsch, W., y van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394. doi: 10.1037//0033-295X.85.5.363
- Kurtz, K. J., y Loewenstein, J. (2007). Converging on a new role of analogy in problem solving and retrieval: when two problems are better than one. *Memory & Cognition*, 35(2), 334-341. doi: 10.3758/BF03193454
- Llorens, A. C., y Cerdán, R. (2012). Assessing the Comprehension of Questions in Task-Oriented Reading. *Revista de Psicodidáctica*, 17(2) (preprint). Retrieved May 14th, 2012 from: <http://www.ehu.es/ojs/index.php/psicodidactica/article/view/4496/5808>
- Mestre, J. (2003). Transfer of learning. Issues and research agenda. (National Science Foundation Report #NSF03-212). Retrieved Mars 5th, 2012 from: <http://www.nsf.gov/pubs/2003/nsf03212/nsf03212.pdf>
- Nathan, M., Kintsch, W., y Young, E. 1992. A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. *Cognition and Instruction*, 9(4), 329-389. doi: 10.1207/s1532690xci0904_2
- Newell, A., y Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise.

- Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520. doi: 10.1037//0278-7393.14.3.510
- Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3(3), Artículo 7. Retrieved July 1, 2007, Disponible online en: www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen3/Numero3/ART7_VOL3_N3.pdf.
- Polya, M. (1957). *How to solve it*. (2nd Ed.). New York: Doubleday.
- Puig, L. (1998). Poner un problema en ecuaciones. Consultado el 2 de abril de 2008 en: <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>.
- Rebello, N. S., Cui, L., Bennet, A. G., Zollman, D. A., y Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. In D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems* (pp. 223-246). Hillsdale, N. J.: Lawrence Earlbaum.
- Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 124-139. doi: 10.1037//0278-7393.13.1.124
- Reed, S. K., Dempster, A., y Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 11, 106-125. doi: 10.1037//0278-7393.11.1.106
- Reeves, L. M., y Weisberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, 115, 381-400. doi: 10.1037//0033-2909.115.3.381
- Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J. J., y Valenzuela, T. (2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de «traducción algebraica». *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 169-184.
- Vidal-Abarca, E., y Sanjosé, V. (1998). Levels of comprehension of scientific prose: the role of text variables. *Learning and Instruction*, 8(3), 215-233. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00020-0

Carlos Gómez Ferragud es licenciado en Ciencias Ambientales y Master Universitario en Investigación en Didácticas Específicas por la Universitat de València. Actualmente desarrolla su tesis doctoral sobre resolución de problemas académicos en ciencias y matemáticas.

Joan Josep Solaz-Portolés es doctor en Química por la Universitat de València. Es profesor de Secundaria y profesor Asociado en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de esa misma universidad. Su investigación se centra en resolución de problemas de ciencias y matemáticas y también en comprensión de textos de ciencias.

Vicente Sanjosé López es doctor en Física y profesor titular de universidad en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universidad de Valencia. Es miembro del instituto universitario de investigación «Polibienestar». Sus líneas de investigación se desarrollan en torno a las bases psicológicas de la didáctica. En particular, ha publicado trabajos sobre comprensión de textos de ciencias, control de la comprensión y resolución de problemas de ciencias y matemáticas.

Fecha de recepción: 09-05-2012 Fecha de revisión: 28-05-2012 Fecha de aceptación: 24-07-2012

Apéndices

Problema Fuente / Similar (Condición Baja Familiaridad):

Dos depósitos de gas A y B están conectados a dispositivos térmicos iguales para calentar o enfriar su contenido. Inicialmente el depósito A está a una presión interior 2000 milibares mayor que el B. Entonces se conectan los dispositivos térmicos a la vez y comienza a pasar calor a A y también a B. El depósito A va **aumentado/disminuyendo** su presión interior a razón de 20 milibares/caloría y el depósito B va aumentando su presión interior a razón de 30 milibares/caloría. ¿Cuánto calor se habrá transferido a A y también a B cuando sus presiones interiores sean iguales? (*Nota: 1 milibar es una medida de presión*)

Problema Fuente / Similar (Condición Alta Familiaridad):

Dos piscinas A y B almacenan agua en dos chalets diferentes. Inicialmente la piscina A contiene 2000 l más que la B. Entonces comienzan a llenarse ambas piscinas, A y B al mismo tiempo. La cantidad de agua en A va **aumentando/disminuyendo** a razón de 20 l/min, y la cantidad de agua en B va aumentando a razón de 30 l/min. ¿Qué tiempo tendrá que pasar hasta que ambas piscinas tengan la misma cantidad de agua?

Les ofrecemos a los estudiantes las siguientes opciones:

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| (a) $y_1 = y_{20} + 2000 - 20x$ | (c) $y_1 = y_{10} + 20x$ |
| $y_2 = y_{20} + 30x$ | $y_2 = y_{10} + 2000 + 30x$ |
| (b) $y_1 = y_{20} + 2000 + 20x$ | |
| $y_2 = y_{20} + 30x$ | |

Nota: La opción (b) es la correcta para el problema Fuente, el Equivalente y el Isomorfo. La opción (a) es la correcta para el problema Similar y el problema Relacionado. La opción (c) es incorrecta para cualquier problema diana.

En cada condición de Familiaridad, se pueden establecer correspondencias entre conceptos entre el problema Equivalente (Isomorfo) y el Fuente, como se indica en el Cuadro 3. Así, todos los predicados relacionados en el problema Fuente son útiles para resolver el problema Equivalente (Isomorfo). Por supuesto, el problema Relacionado también se puede asociar al Similar mediante establecimiento de correspondencias entre conceptos, como muestra también el Cuadro 3.

Cuadro 3

Relación entre el problema Fuente y los problemas Equivalente e Isomorfo, de acuerdo con la teoría de Gentner. Los conceptos en la condición baja de Familiaridad (contexto Científico) han sido subrayados

Problema diana	Correspondencia de conceptos entre el problema fuente y el problema diana	Analogía de Gentner
Equivalente	Gas Gas Tanque _{1,2} Globo _{1,2} Agua Leche La piscina _{1,2} Deposito _{1,2}	Similitud Literal Misma Superficie y misma Estructura
Isomorfo	Gas Barras de Metal Presión Longitud Micras Milibares Agua Dinero Piscina _{1,2} Cuenta de ahorros _{1,2} Volumen Cantidad de dinero Litro Euros Minutos Semanas	Analogía completa Diferente superficie y misma estructura

Cuadro 4

Proposiciones que representa el contenido semántico del problema Fuente (S) en el Modelo de Situación para la condición de Baja Familiaridad

Problema Fuente	Conceptos en los problemas Isomorfo /Diferente	Problema Fuente (cont.)	Proposiciones distintas en los problemas Similar/Relacionado
C1S: Calor	C1Iso: Calor	P6S-a: ETIQUETA(P5S-a, x, y ₁)	
C2S-a: Gas-Deposito1	C2Iso: Barra de Metal-1	P6S-b: ETIQUETA(P5S-b, x, y ₂)	
C2S-b: Gas-Deposito2	C3Iso: Barra de Metal-2	P7S: TIEMPO(inicial)	
C3S: Presión	C3Iso: Longitud	P8S: VALOR(x, IN(P7S), 0)	
C4S: milibar/Kcaloria	C4Iso: micra/Kcaloria	P9S-a: ETIQUETA(P5S-a, x = 0, y ₁₀)	
P1S-a: TRANSFERIR(dispositivo, calor)		P9S-b: ETIQUETA(P5S-b, x = 0, y ₂₀)	
P1S-b: EXTRAER(dispositivo, calor)		P10S: IGUAL-A(y ₁₀ , y ₂₀ + 2000)	
P2S: O(P1S-a, P1S-b)		P11S-a: CRECE(y₁)	P11Sim-a: DECRECE(y₁)
P3S-a: TRANSFERIR-A(calor, C2S-a)		P11S-b: CRECE(y ₂)	
P3S-b: TRANSFERIR-A(calor, C2S-b)		P12S-a: A-RAZON-DE(P11S-a, 20 milibar/Kcaloria)	
INF1S: IGUAL-A(P3S-a, P3S-b)		P12S-b: A-RAZON-DE(P11S-b, 30 milibar/Kcaloria)	
P4S-a: ETIQUETA(P3S-a, x)		P13S: IGUAL-A(y ₁ , y ₂)	
P4S-b: ETIQUETA(P3S-b, x)		P14S: VALOR(x, x _p)	
P5S-a: EN(C2S-a, presión)		P15S: CAUSA(x _p , P13S)	
P5S-b: EN(C2S-b, presión)		P16S: DETERMINAR(x _p)	
INF2S: DEPENDE-DE(presión, x)			

Nota: Se han subrayado los conceptos (C) diferentes en los problemas Isomorfo (Iso) y Relacionado, y los predicados relacionales (P11-a) distintos en los problemas Similar (Sim) y Relacionado. INF significa «inferencia».

El problema Similar y el Relacionado incluyen diferencias semánticas con relación al problema Fuente. Estas diferencias implican diferencias en el Modelo de Situación y por lo tanto también en el Modelo de Problema. El Cuadro 4 muestra las proposiciones que representan el contenido semántico del enunciado del problema Fuente, y las diferencias con los problemas diana.

Para construir la representación Modelo de Problema desde el Modelo de Situación, es necesario implementar un proceso de traducción algebraica. Este proceso produce el contenido semántico del Modelo de Problema, desde el contenido semántico del Modelo de Situación. Las diferencias evidentes entre el problema Fuente y los problemas Similar / Relacionado se obtienen en este MP a partir de las diferencias en el nivel MS. El Cuadro 5 muestra las principales proposiciones del MP para el problema Fuente y el problema Similar. Los procesos deductivos se representan mediante flechas.

Cuadro 5

Problemas Fuente y Similar / Relacionado en la condición de alta Familiaridad. Proposiciones que representan el contenido semántico en el Modelo de Problema después del proceso de traducción algebraica desde el Modelo de Situación no se han incluido todas las proposiciones posibles. INF significa «inferencia»

Problema Fuente	Problemas Similar/Relacionado
P11S-a & P12S-a INF3S-a: VALOR(CRECE(y_1), x , $20x$) P6S-a & INF3S-a INF4S-a: IGUAL-A(y_1 , $y_{10} + 20x$) P10S & INF4S-a INF5S: IGUAL-A(y_1 , $y_{20} + 2000 + 20x$) P11S-b & P12S-b INF3S-b: VALOR(CRECE(y_2), x , $30x$) P6S-b & INF3S-b INF4S-b: IGUAL-A(y_2 , $y_{20} + 30x$) P13S & P15S & INF5S & INF4S-b INF6S: IGUAL-A($y_{20} + 2000 + 20x_p$, $y_{20} + 30x_p$) INF7S: P16S & INF6S CALCULAR($x_p = 2000/(30+20)$)	P11Sim-a & P12S-a INF3Sim-a: VALOR(DECRECE(y_1), x , $20x$) P6S-a & INF3Sim-a INF4Sim-a: IGUAL-A(y_1 , $y_{10} - 20x$) P10S & INF4Sim-a INF5Sim: IGUAL-A(y_1 , $y_{20} + 2000 - 20x$) P13Sim & P15Sim & INF5Sim & INF4Sim-b INF6Sim: IGUAL-A($y_{20} + 2000 - 20x_p$, $y_{20} + 30x_p$) INF7Sim: P16Sim & Inf6Sim CALCULAR($x_p = 2000/(30+20)$)

El Diagrama 1 resume la comparación del problema Fuente, el isomorfo y los problemas similares en diferentes niveles de representación mental (los casos del Equivalente y el Relacionado pueden ser inferidos fácilmente).

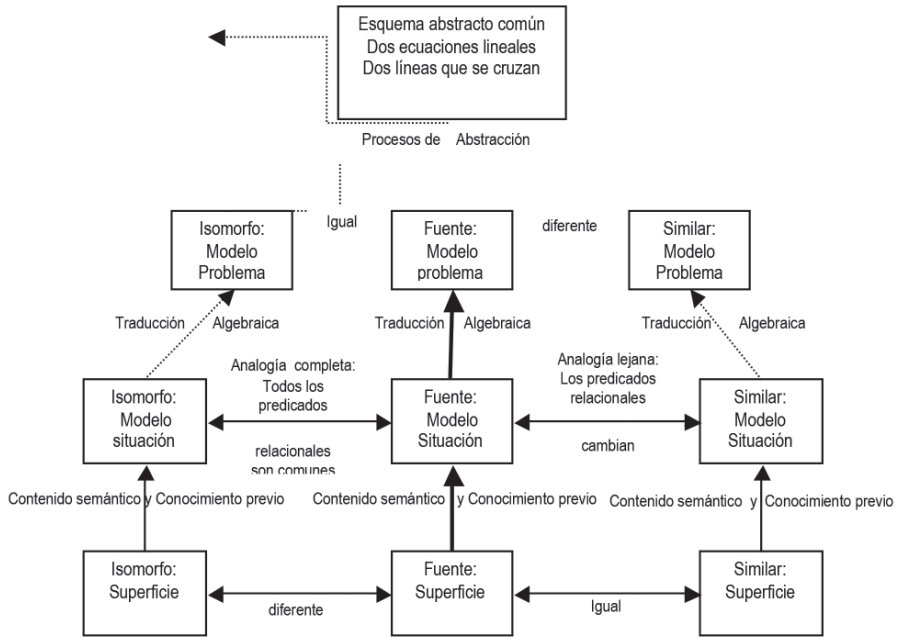


Diagrama 1. Relaciones entre el problema Fuente y el Isomorfo, es decir, los problemas con la misma superficie, Modelo de Situación, Modelo de Problema y los niveles de esquemas de problema abstractos. Las líneas oscuras muestran la información explícita dada a los estudiantes.

