Quaderns de filosofia i ciència, 41, 2011, pp. 99-114

LA FORMA DE LOS ENTES MATEMÁTICOS EN *THE PRINCIPLES OF MATHEMATICS* DE BERTRAND RUSSELL

Francisco Saurí
Universitat de València

Abstract: The critic against subject-predicate propositions is a Russell's feature. See for example *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz.* However, in *The Principles of Mathematics* Russell goes back to the subject-predicate form but in the context of his contribuition to the development of Modern Logic and his philosophy of mathematics.

Keywords: Russell, mathematics, proposition, subject-predicate.

En el §3 de *The Principles of Mathematics,*[1] Russell afirma que las matemáticas es un conjunto de proposiciones con ciertas características. Se trata de una afirmación radical que Russell señala que va a justificar mostrando, a lo largo de *The Principles,* que todo lo que se ha llamado «matemáticas» hasta ese momento, cae dentro de esa definición (§2).

Russell contempla las matemáticas como un sistema axiomático (§9): hay unas proposiciones indemostrables, que denomina premisas, de las que se deducirían el resto de proposiciones matemáticas. Dichas proposiciones contendrían constantes lógicas y variables (§9, cf. §1; se considera que la variable es la noción más difícil y se le dedica una pequeña introducción en los §§6-8). La lógica que Russell está suponiendo es, como muestra el capítulo II, la lógica de Peano (véase también §4). En última instancia, Russell considera (§10) que matemática y lógica estudian partes de un mismo todo: la lógica es el conjunto de las proposiciones indemostrables de las matemáticas y otras proposiciones, todas ellas formadas por constantes lógicas; una vez dado ese aparato lógico las proposiciones matemáticas se deducen de él (*ibid.*). Las constantes lógicas son resolubles en términos de indefinibles que, pese a serlo lógico-matemáticamente, son susceptibles de estudio filosófico (§§1-2). Estamos ante la tesis logicista de Russell.

De este modo, una vez dado el aparato lógico, el de Peano, filosóficamente queda el análisis de esas constantes lógicas (§9) o nociones lógicas (§3) en las que se resuelve una proposición matemática ¿Qué es una proposición matemática? (§3). Una proposición no es algo mental, Russell rechaza el idealismo y el empirismo (§3). Dentro de ese rechazo se incluye la intuición *a priori* del espacio y el tiempo de carácter kantiano (§§4 y 5) que permitían explicar inferencias que la lógica formal anterior no permitía.[2] Russell, en este momento, ve en la lógica de Peano el instrumento que permite descartar cualquier intromisión no formal en los razonamientos matemáticos.

---

[1] B. RUSSELL, *The Principles of Mathematics,* London, Allen and Unwin, 1903. Véase también el §1. En adelante, *The Principles.*

[2] El punto de vista inicial de Russell fue el kantiano a este respecto. Sobre el kantismo de Russell véase SAURÍ, F. «Trascendentalismo kantiano en el Russell decimonónico.» *XI Congrés Valencià de Filosofia.* València: Societat de Filosofia del País Valencià, 1996, pp. 49-60.

La alternativa de Russell, como ya he dicho, es una versión del logicismo en el que los entes matemáticos son un tipo especial de proposiciones. Por tanto, si el campo de las matemáticas ha sido definido como un conjunto de proposiciones, cómo sea una proposición, será la respuesta a la pregunta sobre la forma de los entes que estudia la matemática.

El hilo conductor de la presentación de la respuesta de Russell en *The Principles* será, en buena medida, mostrar cómo las proposiciones matemáticas (y, cabe inferir, en general toda proposición) son analizadas según la forma tradicional sujeto-predicado pero con una interpretación original que intenta asumir las novedades que se fraguaban en la lógica formal. Se trata de un aspecto que no suele ser destacado y que sin embargo supone un vuelco en la evolución del pensamiento de Rusell.

En efecto, si se hace caso de la propia autoconcepción de Russell, *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* es el inicio de un nuevo estilo de pensamiento que rompía con la filosofía anterior. Uno de los rasgos destacables de la nueva filosofía es el rechazo de la forma sujeto-predicado de la proposición que tiene su contraparte ontológica en una nueva concepción relacional de la proposición, la cual tiene su origen en Moore. Sin embargo, en *The Principles* Russell vuelve a esa visión tradicional de la forma en medio de una ontología dubitativa.[3]

En el presente trabajo, comenzaremos, en la sección 1, por descomponer en diversas tesis la concepción de Russell de la forma de la proposición en *The Principles.* En la sección 2 veremos que la proposición matemática tiene la estructura sujeto-predicado. A continuación, en la sección 3, veremos como la noción de denotación sirve para dar cuenta del sujeto de la proposición matemática. Finalmente, la sección 4 nos aclarará que la función proposicional constituye el predicado de la proposición matemática y se completará así el cuadro de la forma de las verdades formales: la forma de los entes matemáticos.

1. Las tesis de Russell en *The Principles* sobre la proposición

Al presentar la definición russelliana de las proposiciones matemáticas más arriba, sólo nos hemos referido a una de las características de las proposiciones matemáticas: son constituidas por constantes lógicas. No es ésta una característica específica de la proposición matemática, pues, como hemos visto, es común a la proposición lógica según la tesis logicista de Russell; la otra característica, esta sí peculiar de las proposiciones matemáticas, es que afirman implicaciones formales (§10, cf. §§1 y 5).[4]

Russell sostiene que una implicación formal tiene la forma «'F(*x, y, z,…*) implica F(*x, y, z,…*), cualquiera que sean los valores de *x, y, z, …* '; donde F(*x, y, z,…*) y F(*x, y, z,…*), para todo conjunto de valores de *x, y, z,…*, son proposiciones»[5] (§6). Ya he señalado que, como muestra el capítulo II de *The Principles,* la lógica en la que Russell está tomando pie es la lógica de Peano: lo que Russell llama implicación formal es una expresión formal peaniana.[6] Es desde esa lógica desde la que va a ser analizada la proposición matemática para que rinda los indefinibles que se van a analizar filosóficamente.

[3] SAURÍ, F., «La ontología de la proposición en el Russell de *The Principles of Mathematics* y los artículos sobre Meinong».. *Quaderns de Filosofia i Ciència,* 35 (2005), pp. 45-64.

[4] Aunque, como vamos a ver, esa peculiaridad termina desapareciendo precisamente en la línea de la tesis logicista: una implicación formal se resuelve en una proposición formada por una función proposicional y otros elementos característicos de naturaleza lógica.

[5] Para evitar malas interpretaciones, conviene precisar que las proposiciones a las que se refiere Russell son las que resultan de sustituir las variables por constantes en las funciones proposicionales.

[6] Véase F. RODRÍGUEZ CONSUEGRA, *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell: Origins and Development,* Berlin, Birkhäuser, 1991. Cap. 3. sección 1.

El objetivo de Russell a lo largo de toda la primera parte de *The Principles* (capítulos del III al VIII) es demostrar que la implicación formal no es una noción lógica fundamental, sino que se resuelve en otras nociones lógicas. Las proposiciones matemáticas son proposiciones lógicas si y sólo si las implicaciones formales son proposiciones que se resuelven en las nociones o constantes lógicas fundamentales. Demostrar eso es una parte de la tesis logicista y, para ello, mientras que en el cálculo del capítulo II la implicación formal es un indefinible, Russell va a tratarla luego como algo analizable lógicamente, reducible a otras nociones lógicas (§17), para luego analizar filosóficamente sus componentes. Russell ve en las implicaciones formales la forma de las proposiciones matemáticas y va a mostrar que esa forma se resuelve en nociones lógicas: la función proposicional, la variable y los cuantificadores,[7] de cuyo análisis filosófico también se va a ocupar.

En el capítulo III se pueden rastrear las tesis en que Russell resuelve su pretensión de que las implicaciones formales son analizables en nociones lógicas. Primera tesis (§40): lo expresado por «todos los hombres son mortales», «cada hombre es mortal» y «cualquier hombre es mortal», es equivalente (lógicamente, no en significado —ver §89) a las implicaciones formales; los anteriores ejemplos serían equivalentes a lo expresado por «*x* es un hombre implica *x* es mortal».[8] Segunda tesis (§40): tanto las implicaciones formales como lo expresado por los otros enunciados («todos los hombres son mortales», etc.) no son equivalentes a proposiciones (que Russell denomina intensionales) que establecen relaciones entre conceptos, por ejemplo, *hombre* y *mortal;* como veremos, eso se traduce en que las implicaciones formales poseen un sujeto, algo sobre lo cual es la implicación formal. Tercera tesis (§42): en una implicación formal una sola función proposicional se afirma como verdadera para todos los valores de sus variables; mediante ella decimos algo del sujeto (la función proposicional es así lo que tradicionalmente se ha denominado predicado). Cuarta tesis (§§40 y 41): una implicación formal es una proposición. Quinta tesis (§41): las implicaciones formales de la lógica y la matemática son proposiciones verdaderas.[9]

En el mismo capítulo III, Russell da, en algunos casos, los primeros elementos de juicio sobre las tesis que va a mantener. Así la quinta tesis está implícita en el §41, pero ya había aparecido explícitamente en el §7 de la Introducción. En el §41, Russell sostiene que la variable x tiene como campo de variación todos los términos, que la variable se refiere a toda entidad que ha sido, es y será de cualquier tipo que sea, siempre que la implicación formal sea verdadera.[10] Pero Russell ya había declarado en el §7 que toda implicación formal que pertenezca al conjunto de las proposiciones matemáticas es verdadera: la implicación es verdadera para cualquier valor de las variables.

Una alternativa a esto, que Russell va a rechazar, es que lo expresado por «*x* es un hombre implica *x* es mortal» se afirmase sólo de los términos que fuesen hombres. El campo de variación de la variable sería el conjunto de aquellas entidades que son hombres y no caballos, me-

---

[7] Entenderemos por cuantificadores las entidades, sean cuales sean, indicadas (en el sentido técnico de Russell, véase sección 2) por las palabras siguientes: «todos», «cualquier», «cada» y «algún», que forman parte del conjunto al que Russell denomina «palabras denotantes».

[8] Russell añade «para todos los valores de x» en la primera cita de este ejemplo. Pero no lo vuelve a hacer. El contexto indica que «x es hombre implica x es mortal, para todos los valores de x» equivale a «x es hombre implica x es mortal», por lo menos para este capítulo. Precisamente una de las cosas que Russell va a intentar hacer es dar el significado de los «cuantificadores» (ver nota anterior) y sus conexiones lógicas.

[9] Véase N. GRIFFIN, «Russell on the Nature of Logic», *Synthese* 45 (1980), 117-188 (especialmente p. 125) para una interpretación similar sobre esta posición de Russell.

[10] Esto puede plantear qué es primero: o la implicación formal (o mejor, la función proposicional correspondiente) verdadera o la variable. Pero para Russell la función proposicional y la variable no se pueden separar. Véase §85.

sas o cualesquiera otras entidades no humanas. Pero esta posición, según Russell, haría que el antecedente de la implicación formal estableciese el significado del símbolo *x*. Tendríamos entonces que el antecedente diría: «*x*» significa «cualquier hombre». Y el consecuente: «*x* es mortal». El resultado sería que lo que se afirma mediante «*x* es un hombre implica *x* es mortal» se puede afirmar igualmente mediante «cualquier hombre es mortal». Si la proposición expresada por esta proposición pudiese analizarse sin reintroducir la implicación formal y la variable, lo cual Russell mantiene que no es posible, habría que inclinarse por esta alternativa (lo cual va contra la primera tesis). Russell no se entretiene en rechazar esto último (aunque sí lo hará en el capítulo V dedicado a la denotación) y sólo aduce, por ahora (§41), que no hay ninguna justificación a la restricción de la variable para que lo expresado por «*x* es hombre implica *x* es mortal» realmente sea una proposición. Esto nos conduciría a la cuarta tesis.

Respecto a la tercera tesis, Russell señala (§42) que la función proposicional ha de ser única porque la variable es única. La *x* de «*x* es un hombre implica *x* es mortal» es la misma en «*x* es un hombre» y en «*x* es mortal», lo cual quiere decir que siempre que *x* se sustituya por un valor habrá de ser el mismo valor en el antecedente y el consecuente de la implicación formal. Queda por desentrañar, dice Russell entonces, qué es lo que permite que Sócrates varíe en «Sócrates es hombre implica Sócrates es mortal» para obtener la implicación formal expresada por «*x* es un hombre implica *x* es mortal», y opina que debe ser alguna relación más estrecha que la de implicación. Necesitamos alguna conexión lógica que permita deducir «*x* es un hombre implica *x* es mortal» de «Sócrates es hombre implica Sócrates es mortal».

Russell descarta (§42, *vid.* §40) que sea la inclusión entre las clases de los hombres y los mortales,[11] y también descarta la noción de afirmación, si bien de una manera que no parece encajar bien en la primera parte de *The Principles.*

Respecto a esto último, Russell inicia el análisis de la implicación formal (§44) diciendo que los cuatro capítulos siguientes, necesarios para analizar los constituyentes de la proposición, justificarán determinado análisis de la implicación formal. El análisis en cuestión es la distinción entre sujeto y afirmación. Pero el resultado de dichos capítulos será, no la justificación de esa distinción, sino precisamente su rechazo.

Los parágrafos involucrados en este tema son del 42 al 45 y el 81 y 82; los primeros en el capítulo III y los segundos en el VII. En medio sólo hay una breve referencia en los §§46 y 48 del capítulo IV. Su lugar y los titubeos de Russell, que comienza diciendo que es el análisis adecuado para luego rechazarlo, pueden llevar a calificar estas discusiones como «extrañas». Una posible explicación es que sean una especie de crítica a Frege. Pero cabe dudarlo dado el apéndice en *The Principles* referido a él. Creo que hay que insistir en el (los) lugar(es) que ocupa la discusión sobre la afirmación en *The Principles* y que no parecen tener nada que ver con una polémica con las tesis de Frege. Como ha señalado Rodríguez Consuegra respecto a «On Denoting», Russell tenía la mala costumbre de producir sus escritos filosóficos recortando y pegando desde sus manuscritos sin proporcionar el adecuado contexto. La «afirmación» russelliana tiene un significado ontológico, que también se puede ver en *The Principles*[12] que es el de expresar la relación entre la función proposicional y el sujeto o sujetos de la proposición. Esta concepción procede de la época de su *Leibniz* y fue luego descartada. En *The Principles,* Russell estaba a medio camino del desarrollo de su pensamiento o introdujo materiales de sus manuscritos no lo suficientemente elaborados como para expresar su cambio de posición.

De todos modos, conviene repasar esta tesis descartada porque su rechazo anticipa los extremos en los que se debe mover la tesis correcta. Veamos pues, en qué consiste la distinción

[11] Esta es la interpretación de Peano, según Russell.

[12] Véase SAURÍ, F. (2005): «La ontología de la proposición en el Russell de *The Principles of Mathematics* y los artículos sobre Meinong». *Quaderns de Filosofia i Ciència,* 35, pp. 45-64.

entre sujeto y afirmación y cómo Russell la introduce y rechaza. En el §43 introduce el análisis de una proposición en sujeto y afirmación. Descalifica la división entre sujeto y predicado en las proposiciones por no dar cuenta del verbo. Si tenemos la proposición «Sócrates es un hombre», *Sócrates* es el sujeto y *hombre* el predicado; es sería el verbo, al que se atiende a veces, según Russell, bajo el nombre de cópula, lo cual, de nuevo según Russell, es lamentable, porque el verbo es más importante de lo que usualmente se cree.[13] Propone entonces dividir la proposición en *Sócrates,* el sujeto, y *es un hombre,* la afirmación. Como lo expresa en el §46 (Capítulo IV), en toda proposición hay algo afirmado (la afirmación) y algo de lo cual se hace la afirmación (que Russell denomina el término, o sujeto, de la proposición). Según el §48 (en el capítulo IV), lo único que tienen en común las afirmaciones es el hecho de poseer una relación.[14] Como Russell ha advertido en el §42, abandona la cuestión en el §44 (excepto la breve referencia en los §§46 y 48) para retomarla en el §81.

En dicho §81, ya en el capítulo VII, Russell señala que, en las proposiciones del tipo expresado por «Sócrates es un hombre», el análisis en sujeto y afirmación es plenamente legítimo. Podemos separar el sujeto, «Sócrates», y lo que se afirma de él, la afirmación, «es un hombre» o, como Russell lo expresa, «*x* es un hombre».

El punto decisivo (§82) es si las implicaciones formales están correctamente analizadas al interpretarlas como la relación entre dos afirmaciones (la del antecedente y la del consecuente) sobre el mismo sujeto o sujetos como había establecido en el §44. En dicho §44, Russell señalaba que las implicaciones formales pueden interpretarse en términos de sujeto y afirmación, de dos maneras. La que va a rechazar inmediatamente en el §44 es aquella que analiza la anterior proposición en «Sócrates» y una afirmación sobre él. Dicha proposición tiene una relación, la de implicación que relaciona dos términos «Sócrates es un hombre» y «Sócrates es un mortal», y cuando una proposición relacional se analiza en sujeto y afirmación, el sujeto debe ser uno de los términos de los que se afirma la relación. Es, pues, evidente (supuesta la irreductibilidad de las proposiciones relacionales), que hay que rechazar esa alternativa y asumir la interpretación que analiza la proposición objeto de análisis en una relación de dos afirmaciones sobre el mismo sujeto (o sujetos).

En el §82, Russell retoma la objeción, que ya había anticipado en el §44, a esta última alternativa y cuyo análisis había pospuesto. El problema, según Russell, es que en el método de génesis de una implicación formal, mediante el análisis en sujeto y afirmación, se obtiene «… es un hombre implica… es un mortal.» Para obtener otra vez una proposición hay que garantizar que el mismo término será sustituido en los lugares indicados por los puntos suspensivos. Da igual qué término sea, pero ha de ser el mismo en ambos sitios. Esto está garantizado por la repetición de la *x,* la variable, que en una función proposicional aparecería en lugar de los puntos suspensivos; pero no está garantizado en el anterior análisis en sujeto y afirmación.

En todos los casos parece que Russell está utilizando «afirmación»[15] como correspondiente a predicación: decir algo (el predicado, en términos tradicionales) de algo (el sujeto); la distinción entre sujeto y afirmación parece idéntica a la distinción entre sujeto y predicado de

---

[13] Véase lo que sigue.

[14] Russell dice «un verbo», pero en el capítulo IV establece que la entidad indicada (en el sentido técnico de Russell; ver sección 2) por un verbo es una relación. No olvidemos que Russell siempre está hablando en términos ontológicos y no meramente lingüísticos.

[15] Russell utiliza sistemáticamente el verbo *to assert* (aisladamente *to affirm*) y el sustantivo correspondiente (*assertion*) —traducidos respectivamente por «afirmar» y «afirmación»— repetidas veces y en variados contextos aparte del establecimiento de tesis propias. Por ejemplo, se afirman implicaciones (§§5, 6, 13, 14) e implicaciones formales (§§10, 13, 77, 106), la verdad o falsedad (§§16, 89), las proposiciones (§38), eventos (§62), la identidad (§§64, 77), la función proposicional (§93).

la lógica tradicional. Cambiar la palabra «predicado» por «afirmación» hubiera sido útil, si de lo que se trataba era de apartarse de la doctrina de que toda proposición era reducible ontológicamente a una proposición sustancia-atributo, cosa que Russell rechazaba desde 1899. Russell podría haber hecho equivaler la afirmación a las funciones proposicionales, que se afirman de los valores de sus variables (§93), a falta del desarrollo de: primero, la noción de variable (recuérdese lo dicho respecto a la expresión con puntos suspensivos); y segundo, para el caso de las proposiciones relacionales, el carácter orientado de la función proposicional (para permitir expresar el sentido de la relación). Pero Russell insiste en que la afirmación siempre lo es de un solo sujeto (§§44 y 48); lo cual utiliza como otra razón en su contra: al analizar una proposición relacional en sujeto y afirmación es imposible conservar el sentido de la relación (§82), y que, dado lo dicho, viene a querer decir que una proposición relacional no es reducible a una proposición sujeto-predicado. Con ello convierte en inútil la afirmación como puente entre los predicados de la lógica tradicional y las funciones proposicionales.

En el §82, segunda mitad del primer párrafo, Russell pretende que va a dar otra razón contra el análisis en sujeto y afirmación pero, de hecho, no es así. En realidad, como veremos en la sección 4, lo que Russell demuestra en realidad en este pasaje es que la implicación formal sólo está constituida por una función proposicional y no por varias.

Por tanto, aunque Russell sostenía al final del §45 que debía analizar los constituyentes de la proposición para justificar la tesis de que una implicación formal es una relación entre dos afirmaciones, la noción de afirmación es descartada y la presencia de esta discusión consigo mismo por parte de Russell, tendría su origen en problemas de composición del texto como ya se ha señalado antes.

Con lo dicho, estamos libres para centrarnos en el objetivo de este trabajo. Russell intenta demostrar las cinco tesis que ya hemos distinguido y que servirán para demostrar que las implicaciones formales, esto es, las proposiciones matemáticas, son proposiciones analizables tan sólo en términos lógicos. Recordémoslas: Primera, «todos los tales son cuales», «cada tal es cual» y «cualquier tal es cual» es equivalente a lo expresado por «x es tal implica x es cual». Segunda, las proposiciones matemáticas no expresan relaciones entre conceptos; en ellas hay un sujeto (o sujetos, en el caso de las proposiciones relacionales, como veremos) del que se dice algo. Tercera, en una implicación formal, una sola función proposicional es verdadera para todos los valores de sus variables o, dicho de otra manera, se afirma o dice una función proposicional de un sujeto (o sujetos). Cuarta, la implicación formal es una proposición (consecuencia de la segunda y la tercera tesis según cierta concepción de proposición que veremos en la sección siguiente). Quinta, las implicaciones formales de las matemáticas son proposiciones siempre verdaderas: verdades formales.

2. ¿Qué es una proposición en *The Principles*?

En la enumeración de lo que he llamado las cinco tesis del capítulo III, he utilizado la definición del §13 para hablar de proposición: una proposición es lo que puede ser verdadero o falso. Existe otra definición que Russell da en el capítulo II dedicado a la lógica simbólica (de Peano): una proposición es lo que se implica a sí mismo (§16). Pero para establecer el carácter de proposición de las implicaciones formales, Russell va a analizar los constituyentes de una proposición (capítulo IV) para luego comprobar que éstos se encuentran en las implicaciones formales (y, también, que entre esos constituyentes no se encuentra la verdad —§1). La tesis central de Russell en su doctrina de la proposición elaborada a partir del capítulo IV es la que he denominado tercera tesis: toda proposición está formada por al menos dos términos (§47), uno en función de sujeto y otro en función de predicado (en el sentido de decir algo del sujeto o sujetos y que, consiguientemente, puede ser, dicho en términos actuales, predicado monádico o poliádico-relacional). De todo ello nos ocupamos ahora.

En el §46 del capítulo IV, Russell anuncia su propósito de hacer gramática filosófica como punto de partida útil a la hora de establecer diferencias filosóficas. En dicho parágrafo, a Russell le parece relevante destacar tres partes de la oración: sustantivos, adjetivos y verbos. Russell considera adjetivo a todo lo que pueda serlo por la sustitución de los sufijos adecuados. Así considera adjetivo a «humano» y «humanidad», aunque, gramaticalmente, el primero sí es un adjetivo, pero el segundo es un sustantivo. De este modo, los adjetivos son las partes de la oración que utilizamos para referirnos a las propiedades, mientras los sustantivos son las partes de la oración que utilizamos para referirnos a aquello que tiene propiedades. Pero Russell rechaza la distinción entre sustantivo y adjetivo, porque un concepto puede ser sustantivo o adjetivo según el caso: yo puedo decir que *Sócrates es humano* y también que *La humanidad es perversa.* Lo que le interesa a Russell es la diferencia entre nombres propios y nombres comunes, o mejor, precisa él, las entidades correspondientes a las palabras, no las palabras mismas. Correlativamente, lo que le interesan no son las oraciones, sino lo que éstas expresan: las proposiciones. Russell, pues, busca los constituyentes de la proposición. Falta, en lo dicho, el verbo, que, como veremos, indica una relación.

En el siguiente parágrafo, el 47, Russell se ocupa precisamente de dichas entidades, a las que denomina términos. Un término es todo lo que puede ser objeto de pensamiento, puede ocurrir en una proposición verdadera o falsa o puede ser contado como uno. Unidad, individuo y entidad son sus sinónimos: un término es uno y *es* en algún sentido. Según Russell, posee las cualidades atribuidas a las sustancias: es un sujeto lógico; es inmutable e indestructible; tiene identidad numérica consigo mismo y diversidad numérica respecto a los demás términos: la identidad y diversidad numéricas son la fuente de la unidad y pluralidad. A partir de lo que dice en los §§46-48 (y el 58, para las frases denotantes) podemos elaborar un esquema sobre los tipos de términos que Russell distingue y su correspondencia con las palabras.[16]

Russell distingue los siguientes tipos de palabras: nombres propios, verbos, adjetivos y nombres comunes, y, finalmente, palabras denotantes. La unión de palabras denotantes con adjetivos y nombres comunes da lugar a frases denotativas. Por su parte, Russell distingue en los términos entre cosas y conceptos. Entre estos últimos se encuentran las relaciones, predicados, conceptos denotantes y, finalmente, los cuantificadores y el descriptor definido. La relación entre palabras y términos es denominada por Russell indicación.

Los nombres propios indican cosas (particulares), «Juan», por ejemplo, nombra a mi vecino. Los adjetivos y nombres comunes indican predicados, como por ejemplo, *humanidad* o *verde.* Los verbos indican relaciones; así «leer» indica la relación entre el lector y lo leído. Cuando Russell se refiere a palabras las pone entre comillas, mientras que el término correspondiente lo pone en cursiva (aunque normalmente sólo en el caso de los conceptos). Los enunciados también van entre comillas, pero Russell, para referirse a la relación entre el enunciado (lingüístico) y la proposición (el término nombrado por el enunciado) habla de expresar y no de indicar.[17] En ambos casos se va de las palabras a los términos: las enunciados están formadas por palabras y las proposiciones por términos, nunca por palabras (§51).

[16] El esquema deja de lado un detalle de la ontología. En su manuscrito *An Analysis of Mathematical Reasonament* de 1898 (ahora en N. GRIFFIN (ed.) *The Collected Papers of Bertrand Russell,* vol. 2, London, Hyman & Unwin, 1990, ítem 18), Russell distinguía entre aquellos predicados que pueden ser particularizados (los atributos) y los que no (la humanidad, la coseidad). Posteriormente, en sus artículos sobre Meinong («Meinong's Theory of Complexes and Assumptions» —ahora en A. ARQUHAR (ed.), *The Collected Papers of Bertrand Russell,* vol. 4, London, Routledge, 1994, ítem 17, pp. 431 y ss.), Russell hace una distinción parecida para las relaciones (entre relaciones particularizadas y universales), por lo que cabe suponer que la complejidad de *An Analysis* debe permanecer aquí.

[17] Pero obsérvese que la proposición es considerada como un término, lo cual, como se puede comprobar en los artículos sobre Meinong, genera el problema de nombrar una proposición. Véase SAURÍ,

Mención aparte merece la denotación, de la que se ocupa por extenso en el capítulo V y que es una relación entre términos, nunca entre palabras y términos, aunque Russell alguna vez cometa el desliz de utilizar la palabra «denotar» contradiciendo su propio uso técnico. Esto es especialmente relevante en la expresión «frases denotantes» y «palabras denotantes». Una frase como conjunto de palabras nunca puede denotar, si hacemos caso al sentido técnico de denotación que Russell utiliza; igual ocurre con las palabras. Así pues, la indicación y la expresión son relaciones entre el lenguaje y las entidades a las que éste se refiere, mientras la detonación, lo es entre términos: los conceptos denotantes y cualquier término. Sin embargo, una frase denotante es, para Russell, aquella frase con la que indicamos un concepto denotante. Igualmente una palabra denotante es aquella palabra que indica uno de los siguientes conceptos: *todos, cualquier, cada, algún, un* y *el.* Denominaré a los primeros «cuantificadores» y al último «descriptor» por obvios motivos.

Según Russell, del mismo modo que los enunciados están formados por palabras, las proposiciones están formadas por unos constituyentes y todo constituyente de una proposición puede ser contado como uno y ninguna proposición puede tener menos de dos constituyentes (§47). Así pues, toda proposición contiene, al menos, dos términos. Las proposiciones están formadas por términos.

Russell denomina «términos de una proposición» a los términos, uno o varios (la precisión es de Russell —§48), que pueden ser tomados como sujetos de la proposición, esto es, aquello de lo que dice o afirma algo la proposición. («Sócrates» en «Sócrates es humano»; «A» y «B» en «A es diferente de B»). Los términos de una proposición tienen la característica de que pueden ser reemplazados por otro término sin que la proposición deje de serlo (otra cosa es que pueda ser falsa: «Platón es humano», «Fido es humano», «el círculo es humano»). El resto, en una proposición sujeto-predicado, son el verbo y el predicado.[18] Los predicados son los conceptos que ocurren en una proposición que sólo tiene un término de la proposición (o sujeto). Al ser reemplazados por otras entidades podemos no tener una proposición. Por su parte, las cosas sólo pueden ser términos (sujetos) de una proposición pero un predicado puede ser, además de predicado, sujeto («la humanidad pertenece a Sócrates») (§48). Por tanto, por lo menos en una proposición sujeto-predicado, hay siempre dos términos, pero con funciones distintas: un término en función de sujeto (en función de «término de la proposición») y otro en función de predicado.

Conviene no confundir la función de predicado en la proposición con el tipo de términos que Russell ha distinguido y denomina predicados, aunque, en efecto, están íntimamente relacionados. El tipo de término denominado predicado puede estar tanto en función de sujeto de la proposición, como en función de predicado de la proposición. Sin embargo, lo que Russell denomina cosas sólo puede estar en función de sujeto de la proposición, nunca en función de predicado de la proposición.

Por otra parte, conviene tener siempre presente el carácter primario de ser sujeto para todos los términos: todo término tiene una entidad calcada de las cosas, son sustancias, y el que los términos que Russell llama predicados (en general todos los conceptos) sirvan para decir algo de otros términos es secundario para su entidad. A este respecto, Russell se refiere a una relación, otro tipo de concepto (recordemos: junto con los predicados, conceptos denotantes y los cuantificadores y el descriptor definido), como relación en sí misma, cuando está en función de sujeto, y relación relacionante, cuando actúa de concepto, cuando efectivamente relaciona varios términos.

F. (2005): «La ontología de la proposición en el Russell de *The Principles of Mathematics* y los artículos sobre Meinong». *Quaderns de Filosofia i Ciència,* 35, pp. 45-64.

[18] Y aquí abandona la distinción sujeto y afirmación con la que, sin embargo, había comenzado la discusión en el §48. Véase la sección anterior.

Así pues, en una proposición se dice algo (un predicado) de un sujeto o sujetos (el término o términos de la proposición). Cuando digo «Sócrates es hombre» digo algo, «es hombre», de algo que llamo «Sócrates». Es más, como veremos en la sección siguiente, esto ocurre incluso en las proposiciones relacionales: en ellas se dice o afirma la relación de los términos relacionados que son, aquí, los términos o sujetos de la proposición.

Resumiendo, siguiendo a Dau,[19] la opción de Russell a la hora de dar cuenta de la estructura lógica de la proposición se puede explicar en los siguientes términos. Consideremos las proposiciones expresadas por «Frege es astuto» y «Cualquier lógico es astuto». Podemos sostener, como es ahora normal, que ambas tienen formas lógicas distintas. Pero también, y ésa es la opción de Russell, podemos hacer caso a nuestras intuiciones gramaticales (explícita alternativa elegida por Russell en el §46) y continuar sosteniendo que ambas son proposiciones sujeto-predicado.

Pero, si el objetivo de Russell es dar cuenta de las implicaciones formales como proposiciones, debe responder a dos preguntas: 1) ¿qué es el sujeto (el término de la proposición) en las proposiciones matemáticas en las que no hay nombres propios que indiquen claramente cuál es el término de la proposición (como también ocurre en el segundo ejemplo del párrafo anterior)? 2) Y ¿qué es el predicado, sobre todo si tenemos en cuenta el carácter irreductible de las proposiciones relacionales? Veámoslo.

3. Denotación y sujeto de la proposición matemática

La respuesta a lo primero, vamos a verlo, es la noción de denotación, como la respuesta a lo segundo, que veremos en la sección 4, es la función proposicional. Así pues, la demostración de la cuarta tesis (que las implicaciones formales son proposiciones), exige, en primer lugar, la demostración de la segunda: proporcionar un sujeto a las implicaciones formales para que sean proposiciones. O también se puede expresar de otra manera. Recordemos que en la introducción de este artículo hemos señalado las deficiencias que Russell encontraba en la lógica formal anterior a Peano: un razonamiento matemático exige una lógica que permita instanciar existencialmente; eso es lo que remedaba la síntesis a priori kantiana y que la lógica de Peano ha hecho inútil.[20] Así pues, la matemática exige trabajar con individuos, con términos de proposiciones (sujetos), en otras palabras: generalizar a partir de ellos e instanciarlos existencialmente y, por tanto, las proposiciones matemáticas deben poseer términos de la proposición en el mismo sentido que lo que nombramos por «Sócrates» lo es en la proposición «Sócrates es hombre». Las proposiciones matemáticas no pueden ser mera síntesis de conceptos (segunda tesis).

Y eso precisamente es lo que trata en el §40 y proponer lo contrario es el error del que acusa a F. H. Bradley en el §87: las proposiciones matemáticas, las implicaciones formales, no son proposiciones intensionales (tesis segunda). Como dice Russell en el § 56, en la proposición expresada por «cualquier número finito es par o impar», no es el concepto indicado por «cualquier número finito» lo que es par o impar, sino cada número concreto. En efecto, en el §58 (tercero del capítulo V dedicado a la denotación), Russell acusa a los lógicos de

[19] P. DAU «Russell's Firt Theory of Denoting and Quantification», *Notre Dame Journal of Formal Logic* 27 (1986), 133-166. Véase las pp. 139-140.

[20] Sobre este extremo véase HINTIKKA, J. (1967): «Kant on the Mathematical Method». *The Monist,* vol. 51, pp. 352- 375. Ahora en POSY, C. J. (ed.) (1992): *Kant's Philosophy of Mathematics. Moderns Essays.* Dordrecht: Kluwer Academia Publishers. HINTIKKA, J. (1973): *Lógica, juegos del lenguaje e información.* Madrid: Tecnos, 1976 (Traducción de *Logic, Language-Games and Information.* Oxford University Press, 1973). Y FRIEDMAN, M. (1992): *Kant and the Exact Sciences.* Harvard University Press.

haberse ocupado de la combinación de conceptos para obtener conceptos complejos y no de la combinación de términos para obtener términos complejos. Para Russell, la lógica se ha limitado al estudio de la combinación, por ejemplo, de los conceptos *animalidad* y *racionalidad* para dar lugar al concepto de *persona,* pero no, por ejemplo, de las reuniones de términos como puede ser la clase o los cuantificadores. Y dichas reuniones de términos son importantes porque de ellas depende la naturaleza de los números y la variable. Así, las matemáticas necesitan dar cuenta formal de razonamientos que involucran, no sólo conceptos, sino uno o varios de los individuos que caen bajo uno o varios conceptos. Con ello estamos ante la situación que hace necesario el sentido técnico de «denotación» en Russell:

> Un concepto *denota* cuando, si ocurre en una proposición, la proposición no es *sobre* el concepto, sino sobre un término conectado en cierta manera peculiar con el concepto (§56).

Dicho de otra manera, lo que ha confundido a los lógicos es que muchos enunciados inducen a pensar que el sujeto de la proposición, aquello sobre lo que es la proposición, aquello de lo cual se dice algo en la proposición, es un concepto, pero en realidad no es el concepto sino el término o términos denotados por dicho concepto.

El caso más claro de lo que está intentando introducir Russell con la noción de denotación está en el concepto correspondiente a lo que luego se llamó descripción definida, que es uno de los seis tipos de conceptos denotantes que distingue (*todos, cualquier, cada, algún, un, el*):

> Es debido a esta noción —la descripción definida— que las matemáticas pueden dar definiciones de términos que no son conceptos.

Y continúa más adelante:

> Es una paradoja curiosa, que confunde a la mente simbólica, que las definiciones, teóricamente, no son sino afirmaciones de abreviaturas simbólicas, irrelevantes al razonamiento e insertadas sólo por conveniencia práctica, mientras que, en el desarrollo de una materia, siempre requieren mucha reflexión y a veces encarnan alguno de los más grandes logros del análisis. Este hecho parece que es explicado por la teoría de la denotación. Podemos atender a un objeto sin conocer ningún concepto del que dicho objeto sea *la* instancia; y el descubrimiento de dicho concepto no es una mera mejora en la notación. La razón por la que éste parece ser el caso es que, tan pronto como se encuentra la definición, se convierte en completamente innecesario para el razonamiento recordar el objeto real definido, ya que sólo los conceptos son relevantes en nuestras deducciones (§63).

Russell, pues, se enfrenta, con la denotación, al problema de cómo referirse a cosas mediante conceptos. Dicho de otro modo, en lo que Russell está insistiendo es que, en matemáticas, necesitamos referirnos a individuos de manera distinta a nombrándolos, de manera distinta a indicarlos mediante palabras. El §64 es a este respecto de una claridad meridiana. En las afirmaciones de identidad, como por ejemplo «Eduardo VII es el rey», el sujeto es el término que indicamos por el nombre «Eduardo VII»; y en el predicado lo que hay es un concepto («el —presente— rey —de Gran Bretaña en la época de Russell—») que denota el término en cuestión y que lo sustituye. En la frase «El presente Papa es el último superviviente de su generación», Russell señala que el término ni siquiera se menciona, está meramente denotado: el término de la proposición (el sujeto, aquél del que algo se dice, aquél sobre el que es la proposición) no es ninguno de los dos conceptos, sino el término que cada uno de los conceptos denota.

Lo que Russell hace, pues, es buscar todos esos casos en los que el aparente sujeto es un concepto y proporcionar los términos que son denotados por el concepto. Y así también, tenemos que en matemáticas no sólo hemos de referirnos a un término concreto de manera distinta a nombrarlo (como mediante el descriptor definido), también nos referimos a varios términos: la clase.

Russell distingue entre agregados (clases como uno) y colecciones (clases como muchos). La diferencia entre estas dos formas de entender las clases está en que, mientras que el agregado puede ser sujeto lógico, la colección no lo puede ser. Si bien todo agregado es una colección, no todas las colecciones forman agregados, debido a que las primeras pueden no tener un predicado definitorio debido a la paradoja de Russell (la clase como uno puede ser un término de sí misma entendida como clase como muchos, mientras que un todo complejo no puede ser nunca un constituyente de sí mismo; por ejemplo: «las clases son una entre las clases», que es el equivalente extensional de «la clase es un concepto-clase»). Las colecciones se obtienen por enumeración de los términos (§70).

Veamos las colecciones o clases como muchos (punto de vista lógico de la extensión) y el tipo de concepto que las denota (punto de vista lógico de la intensión). En el §67, para Russell *hombre* es un concepto-clase (a efectos prácticos, equivalente al predicado *humano* —§79), que no denota en solitario, mientras sí que denotan *hombres* y *todos los hombres* (cuyas expresiones son sinónimas y por lo tanto el concepto es el mismo) y que Russell denomina el concepto de la clase (§§67 y 70); lo denotado es, en este caso, lo que denomina «clase de todos los hombres». En términos de funciones proposicionales (que en Russell, lo veremos, será sinónimo de los términos llamados conceptos), el concepto-clase es *x tal que Fx*[21] y el concepto de una clase *(todos) los x tales que Fx*[22] que denota la clase (como muchos; una colección) de todos los x para los que Fx es verdadera (§§84, 93).

«Todos» es una palabra que indica un tipo de entidad (que hemos convenido en llamar «cuantificador») que hace que el concepto al que acompaña denote lo que Russell denomina una conjunción numérica: una combinación de términos tomados colectivamente (§§59-61). Dicho de otro modo, la cuantificación por *todos* de la función proposicional Fx denota una combinación de términos tomados colectivamente: eso es una clase («clase como muchos», una colección).

Tal colección se puede formar extensionalmente reuniendo los términos mediante *y:* A y B y C y… etc. Pero Russell rechaza que «y» forme parte del concepto de colección. En primer lugar, porque la clase unitaria es una clase y no lo necesita; en segundo lugar, porque entonces y sería una relación y consiguientemente el resultado sería, no una clase, sino una proposición (§71). Tenemos pues, dos tipos de términos complejos, de términos formados por otros términos: la clase y las proposiciones.

Pero con ello Russell no ha completado el inventario de las entidades matemáticamente relevantes en la denotación: falta la variable. La variable verdadera, la que ocurre en las implicaciones formales, es denotada por el concepto *cualquier término* (§§86, 88 y 93). En el §93 Russell precisa que *cualquier término* «no denota, propiamente hablando, una reunión de términos, sino que denota un término, sólo que no un término particular definido» (cf. §§59-61).

Con ello la demostración de la segunda tesis ha sido completada: las implicaciones formales (de las que todavía hay que demostrar que son proposiciones) poseen sujeto, son acerca de algo (su o sus términos o sujetos). La denotación, tanto en lo que respecta a los cuantificadores, como en lo que respecta al descriptor definido, permite mostrar que proposi-

[21] Russell escribe «x tal que Fx», esto es, entre comillas y no en cursiva. Realizo el cambio en aras de la uniformidad.

[22] *Vid.* nota anterior. El caso es el mismo.

ciones aparentemente intensionales en ciertos casos, como las equivalentes a las implicaciones formales, no lo son. Pero al demostrar que las implicaciones formales poseen sujeto (en el sentido que Russell da a «término de una proposición»), también se ha dado el primer paso para demostrar la cuarta tesis: el carácter proposicional de las implicaciones formales, puesto que una proposición debe tener términos sobre los que es la proposición y ello acaba de ser demostrado para las implicaciones formales. Para el segundo paso hay que demostrar la tercera tesis: en la implicación formal una sola función proposicional es verdadera para todos los valores de sus variables; consiguientemente, la implicación formal será una proposición: en ella se dice algo (la función proposicional) de una cosa (el término —o términos— de la proposición o sujeto/s). Esto es lo que vamos a comprobar ahora.

4. Función proposicional y predicado de la proposición matemática

Russell se ocupa de la función proposicional en el capítulo VII. A lo largo de todos los capítulos anteriores, el tipo de proposición que ha servido como modelo de análisis es la proposición sujeto-predicado de la lógica tradicional, aunque siempre teniendo en mente que las proposiciones relacionales no son reducibles a ella. También a la hora de hablar de la función proposicional, Russell sigue la misma estrategia, para luego ampliar las tesis demostradas a las proposiciones relacionales.

Ello tiene como consecuencia que, aunque en el capítulo IV haya distinguido entre los conceptos a predicados y relaciones, sus argumentaciones hayan estado dedicadas principalmente a los predicados en el sentido tradicional, esto es, predicados monádicos.[23]

Las funciones proposicionales de una sola variable son los predicados tradicionales. Ya hemos visto que, en el §84, Russell afirma que el concepto-clase correspondiente al concepto de la clase *todos los x tales que Fx es x tal que Fx.* Con ellos Russell está traduciendo en términos de funciones proposicionales lo que en el §67 había establecido sin éstas: la distinción entre el concepto de la clase y el concepto-clase. Dada la equivalencia práctica entre concepto-clase y predicado, nada más fácil de justificar que la equivalencia entre funciones proposicionales (con un argumento) y predicados.

Sin embargo, aunque en todo momento Russell manifiesta la equivalencia, a efectos prácticos, entre predicado y concepto-clase, nunca los llega a identificar funcionalmente, lo cual es relevante. «Concepto-clase» y «predicado» designan un mismo tipo de término conceptual: aquél que ocurre en las proposiciones sujeto-predicado como su parte predicativa, como el término que dice algo del sujeto o término de la proposición. Pero debido a las entidades correspondientes a las palabras «todos», «cualquier», «el», etc., ese término adopta funciones diversas. Por ejemplo, el término conceptual indicado por «ser hombre» o «humanidad» puede ser sujeto, como en «la humanidad es un concepto que posee el rasgo de la mortalidad», y también predicado, como en «Sócrates es hombre». Igualmente, en «el hombre que llevaba la gabardina roja», el concepto indicado por «ser hombre» forma parte de la contraparte conceptual de lo que ahora denominamos una descripción definida y que denota un hombre concreto e individual, mientras que si digo «Cualquier hombre es mortal», el concepto indicado por «ser hombre» se utiliza para denotar una variable (en el sentido de Russell).

Evidentemente, Russell supone justificado que «ser hombre», la expresión «hombre es» cuando ocurre en un enunciado, «humanidad», etc. indican el mismo término conceptual. Cabría pensar que eso es lo que permite hablar de función proposicional: la identidad conceptual a través de las vicisitudes gramaticales y lógicas.

[23] O a las afirmaciones, ya hemos visto en la sección 1 su fracasado papel; pero como el análisis en sujeto y afirmación tiene un carácter único en las proposiciones sujeto predicado y ese análisis no añade nada nuevo a las distinciones habituales, la cuestión es aquí indiferente.

Obviamente, si sólo fuese esto cabría preguntarse para qué tantas alforjas para este viaje: introducir la nueva noción de función proposicional para garantizar la identidad conceptual a través de las vicisitudes gramaticales y lógicas no sería muy productivo. La variable sería, no obstante, una fuerte razón en favor de la función proposicional. Pero todavía hay un elemento más que la hace necesaria: el carácter «orientado» de lo que se dice de los términos de una proposición relacional.[24] En una relación no es lo mismo decir aRb que bRa: si yo soy hijo de mi padre, mi padre no es hijo mío. Los predicados de la lógica tradicional, que están por atributos, no pueden dar cuenta de esta situación porque, en una proposición sustancia-atributo, el predicado se dice siempre de un sólo sujeto; la función proposicional debe poder hacer converger la característica de los predicados de decir algo de un término, pero también de las relaciones: decir algo de varios términos manteniendo que lo que se dice establece un orden determinado en la relación de los términos de la proposición. La función proposicional está justificada en proposiciones sujeto-predicado tradicionales (§81), pero se hace imprescindible en cualquier proposición relacional.[25]

Esto último lo va a demostrar Russell en conexión con lo que le interesa sobre las implicaciones formales, recordemos la tercera tesis: en una implicación formal se afirma una sola función proposicional que se afirma verdadera de todos los valores de sus variables.

Russell, pues, ha de demostrar que en una implicación formal sólo hay una función proposicional que se dice del término o términos de la implicación formal y no dos funciones proposicionales relacionadas. En el §84, Russell ataca la división en sujeto y afirmación señalando que mediante el análisis en sujeto y afirmación, se obtiene «…es un hombre implica… es un mortal.» Para obtener otra vez una proposición hay que garantizar que el mismo término será sustituido en los lugares indicados por los puntos suspensivos. Da igual qué término sea, pero ha de ser el mismo en ambos sitios. Esto está garantizado, en una función proposicional, por la repetición de la *x* que aparecería en lugar de los puntos suspensivos. Pero no está garantizado en el anterior análisis en sujeto y afirmación. Que lo que Russell debería haber dicho es que una implicación formal no está formada por dos funciones proposicionales, lo muestra el §92:

> Pero debe asumirse, pienso yo, que una clase en extensión está definida por cualquier función proposicional y en particular que *todos* los términos forman una clase, ya que muchas funciones proposicionales (por ejemplo, todas las implicaciones formales) son verdaderas de *todos* los términos. Aquí, como con las implicaciones formales, es necesario que la función proposicional completa, cuya verdad define la clase, quedase intacta, y no, incluso donde esto sea posible para todo valor de *x,* dividida en funciones proposicionales separadas. Por ejemplo, si a y b son dos clases, definidas por F*x* y F*x,* respectivamente, su parte común está definida por el producto F*x.* F*x,* donde el producto tiene lugar para todo valor de x, y entonces x varía consiguientemente. Si esto no se hace, podemos no tener necesariamente la misma *x* en F*x* y F*x*.

Russell está sosteniendo que la implicación formal está constituida por una sola función proposicional. Es más, en matemáticas, la implicación formal es siempre verdadera (recuér-

[24] Tampoco conviene olvidar el objetivo russelliano de matematizar la lógica y, a este respecto, la garantía de identidad es absolutamente necesaria.

[25] Russell habla reiteradamente de la verdad de una función proposicional de uno o varios términos: también una función proposicional con varias variables se afirma de sus términos y ello puede ser el caso de una proposición relacional (Fx, y, z puede ser el concepto de la proposición Rabc). En todos estos casos, Russell mantiene que la función proposicional se dice o afirma (§93) o es verdadera de los valores de su (o sus) variables (§92).

dese que ésta es la quinta tesis), ya que la función proposicional correspondiente es verdadera de todos los términos de su variable (que forman la extensión de la función proposicional). La pregunta es ahora qué es lo que hace suponer a Russell que una implicación formal tenga como uno de sus constituyentes una sola función proposicional y no varias. La respuesta, en el texto antes citado, intenta demostrar que la implicación formal habla de un conjunto definido de términos (la clase de los sujetos para los que es verdadera) se descomponga como se descomponga. La función proposicional puede ser compleja, como es el caso de la implicación formal, fruto de la combinación de otras funciones proposicionales y aparecer explícitamente esa composición. Para que, en efecto, se mantenga la unidad de la función proposicional en la diversidad combinatoria de su expresión a través de otras funciones proposicionales que la componen, hace falta que, en cada una de esas funciones proposicionales componentes, la variable sea la misma, o dicho de otro modo, el conjunto de los términos para los que es verdadera es el mismo en cada una de sus funciones proposicionales componentes; eso es lo que garantiza que varias funciones proposicionales puedan tomarse como una sola y eso es lo que dice Russell que ocurre en las implicaciones formales. Así pues, para él, cada implicación formal constituye una sola proposición, porque la variable del antecedente y la del consecuente es la misma.

Russell añade (§82) que sólo con la función proposicional es posible expresar proposiciones que contienen funciones cuyos valores son iguales a cierta función de sí mismas.[26]

Ahora, a Russell le queda que, todo lo que hemos visto que se justifica para funciones proposicionales de un solo argumento, también se justifica para funciones proposicionales con dos (o más) argumentos, esto es, para *toda* proposición en que intervengan relaciones (incluyendo el caso de que sea una implicación formal). Es «evidente», dice Russell literalmente, que todo aquello que se ha dicho para las funciones proposicionales de un argumento, también vale para las funciones proposicionales con dos argumentos; con la razón añadida de que sólo mediante la función proposicional es posible expresar la orientación de las relaciones (§82). Conviene reiterar algo que ya vimos en la sección 1: Russell argumenta en favor de sus posiciones para proposiciones sujeto-predicado, esto es, para proposiciones cuya función proposicional sólo tiene un argumento, y luego lo extiende al resto de funciones proposicionales sin apenas justificación. La razón de peso que aduce es que la función proposicional está diseñada para expresar relaciones antisimétricas: si digo «A es padre de B» no puede darse que «B sea padre de A», donde «x es padre de y» sería la función proposicional.

Con ello, Russell ha completado la demostración de su tercera tesis según la cual en una implicación formal se dice una sola función proposicional de los valores de las variables. Esto es, en una implicación formal, no sólo tenemos sujetos (primera tesis), sino también un predicado o relación (la función proposicional). Pero esto tiene una importante consecuencia, porque con ello Russell ha establecido como modelo de la proposición matemática la que tiene la estructura sujeto-predicado: en una proposición matemática se dice un predicado (la función proposicional) de uno o varios sujetos (los términos de la proposición). En consecuencia, se sigue la cuarta tesis:[27] las implicaciones formales son proposiciones. Obsérvese pues, que Russell ha formulado sus tesis sobre qué sea una proposición a la par que demostraba las tesis segunda y tercera partiendo del supuesto de que una proposición estaba formada por dos constituyentes. En una proposición matemática se realiza la predicación de un concepto (la función proposicional) del término o los términos (sujetos) de la proposición, y tanto dichos términos como la función proposicional son constituyentes de la proposición: la implicación formal es una proposición (cuarta tesis).

---

[26] Russell, ya lo hemos señalado, da otra razón en el mismo §82 que en realidad no es pertinente.

[27] Y, también, la tesis logicista. Véase el comienzo de este artículo.

El carácter proposicional de las implicaciones formales se ve confirmado indirectamente en la demostración de la primera tesis: la equivalencia entre la implicación formal y las proposiciones que se expresan de la forma «Todos los tal son cual» o «Cada tal es cual» o «Cualquier tal es cual». Se demuestra en los §§62, 73, 89 y 90. Russell habla de cuatro palabras denotantes, cuya indicación es lógicamente equivalente. *Todos* y *cada* (versión distributiva de *todos*), aunque tienen significados distintos, son lógicamente equivalentes: es posible expresarlos lógicamente mediante *cualquier,* al igual que *un* y *algún.* De este modo, las descripciones definidas debieron ser como una piedra en el zapato de un esquema que estaba surgiendo en la cabeza de Russell (§59, al principio).

Por otra parte, Russell concluye que las implicaciones formales que forman el conjunto de proposiciones matemáticas y lógicas son siempre verdaderas. Esto constituía la quinta tesis. En efecto, las proposiciones matemáticas tienen una sola función proposicional con variables auténticas, esto es, sus campos de variación son todos los términos. Sustituyendo una variable por un término cada vez, obtendremos un conjunto de proposiciones. En el caso de las proposiciones matemáticas, todas estas proposiciones resultantes son verdaderas: las implicaciones formales de la matemática y la lógica son lo que Russell llama verdades formales (§§92 y 93).

Resumiendo, Russell demuestra que las implicaciones formales, esto es, las proposiciones matemáticas, los entes matemáticos, son proposiciones analizables tan sólo en términos lógicos mediante cinco pasos. Primero, «todos los tales son cuales», «cada tal es cual» y «cualquier tal es cual» son equivalentes a lo expresado por «x es tal implica x es cual». Segundo, las proposiciones matemáticas no expresan relaciones entre conceptos; en ellas hay un sujeto del que se dice algo, el predicado. Tercero, en una implicación formal, una sola función proposicional es verdadera para todos los valores de sus variables o, dicho de otra manera, se afirma o dice una función proposicional (predicado) de un sujeto (o sujetos). Cuarto, la implicación formal es una proposición, consecuencia de los pasos segundo y tercero, según la concepción de la proposición en la que se dice algo (el predicado) de un sujeto (o sujetos, en el caso de que el predicado sea una relación). Quinto, las implicaciones formales de las matemáticas son proposiciones siempre verdaderas: verdades formales. Es el conjunto de las verdades formales el que constituye la matemática.