

TESIS DOCTORAL

Métodos multiescala y
aplicaciones:

Esquemas de subdivisión

María Santágueda Villanueva

Directora: Rosa Donat Beneito

Universitat de València
Valencia, 2015.

TÉCNICAS MULTIESCALA Y APLICACIONES: ESQUEMAS DE SUBDIVISIÓN

Memoria presentada por María Santágueda Villanueva,
Licenciada en Ciencias Matemáticas; realizada en el
Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat de
València bajo la Dirección de Rosa Donat Beneito, Profesora del
mencionado Departamento, con el objetivo de aspirar al Grado de
Doctor en Matemáticas.

Valencia, 20 de febrero de 2015

Rosa Donat Beneito
Directora de la Memoria

María Santágueda Villanueva
Aspirante al Grado de Doctor

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento a Rosa Donat y a Paco Aràndiga, sin su direcci3n, su apoyo constante y su ayuda no hubiese podido conseguir llegar al final del largo camino que ha representado este trabajo de investigaci3n.

Tambi3n quiero expresar mi profundo agradecimiento a mis compa1eros de doctorado, a todos los miembros del departamento de Matemática Aplicada de la Universitat de València y a mis compa1eros del departamento de Educaci3n de la Universitat Jaume I por el animo recibido a lo largo de todos estos años.

A Mart3n y Guillermo porque me ayudáis a encontrarme mejor todos los días. Y como no, a mis padres y a mi abuela porque sin su esfuerzo no lo hubiera conseguido.

Valencia, 2015

María

Índice general

Introducción	IX
1. Esquemas de subdivisión	1
1.1. Introducción	1
1.2. Esquemas de Subdivisión Interpoladores	5
1.2.1. Subdivisión por Interpolación de Lagrange	6
1.2.2. Esquemas ENO-WENO	14
1.2.3. Esquemas PPH y Power _p	19
1.3. Convergencia y Estabilidad	22
1.3.1. El caso lineal	22
1.3.2. El caso no lineal	26
1.3.3. Esquemas Diferencia	28
1.3.4. Orden de aproximación	34
2. Subdivisión de clase Σ_k	37
2.1. Introducción	37
2.2. El Gradiente Generalizado	38
2.2.1. Partición por sectores en \mathbb{R}^m	38
2.2.2. Funciones de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$	42
2.2.3. Composición con aplicaciones lineales	55
2.3. Subdivisión de clase C_{pw}^1	64
2.4. Subdivisión de clase Σ_k	69
3. Esquemas Power-p	73
3.1. El Gradiente Generalizado $DH_p(x, y)$	76
3.2. Propiedades de los esquemas S_{H_p}	84

3.3. Experimentos Numéricos	93
3.3.1. Orden de aproximación	93
3.4. Calculo numérico de la Estabilidad	98
4. El esquema Pchip	109
4.1. Interpolación de Hermite	110
4.2. Preservación de la monotonía frente a la exactitud . .	112
4.3. Esquema Pchip	115
4.3.1. Propiedades	116
4.4. Experimentos numéricos	131
4.4.1. Orden de aproximación	132
4.4.2. Carácter No-Oscilatorio	136
4.5. Cálculo numérico de los Jacobianos Generalizados . .	140
5. Esquemas no-oscilatorios de 6-puntos	145
5.1. La media Weighted-Power _p	149
5.2. El esquema $S_{3,W(p,q)}$	153
5.2.1. Propiedades del esquema $S_{3,W(p,q)}$	154
5.3. Experimentos Numéricos	162
5.3.1. Orden de aproximación	162
5.3.2. Carácter No-Oscilatorio	166
6. Esquemas WH de 4 puntos	177
6.1. Propiedades de los esquemas WH de 4 puntos	178
6.1.1. Gradientes Generalizados	182
6.2. Experimentos Numéricos	202
6.2.1. Orden de aproximación	202
7. Conclusiones y perspectivas	207
A. Algunos resultados de Análisis y de Álgebra Lineal	209
A.1. Introducción	209
A.2. Funciones suaves	210
A.3. Funciones Lipschitz	213
A.4. Normas matriciales subordinadas	216
A.5. La matriz pseudo-inversa	217

Introducción

Los esquemas de subdivisión se basan en un proceso de refinamiento recursivo de un conjunto de datos iniciales. Dado un conjunto de datos iniciales, los nuevos datos se generan siguiendo un conjunto de reglas establecidas, produciendo un conjunto más denso de puntos. El estudio de la conservación de algunas propiedades específicas que se presentan en el conjunto de datos iniciales es crucial para algunas aplicaciones, por ejemplo las propiedades de convergencia y suavidad son necesarias para que el esquema de subdivisión se pueda utilizar para la compresión o reconstrucción de imágenes, el diseño de curvas y superficies, aproximación de funciones arbitrarias, etc.

Algunos esquemas de subdivisión clásicos, independiente de los datos, pueden ser descritos como operadores lineales entre espacios de sucesiones acotadas. Existe una gran bibliografía del estudio de la convergencia de esquemas de subdivisión lineales (ver por ejemplo [16, 23] y las referencias que se encuentran en estos artículos). Los esquemas de subdivisión lineales presentan un problema, reconstruyen las 'discontinuidades' de datos discretos creando falsas oscilaciones. Esta deficiencia motiva la búsqueda de esquemas no lineales con propiedades específicas.

Durante los últimos años, se han propuesto varios esquemas no lineales, ver por ejemplo [2], para intentar eliminar las oscilaciones tipo Gibb que ocurren cerca de las discontinuidades cuando se utilizan técnicas lineales para refinar datos discretos. El esquema PPH propuesto en [2] utiliza una media no lineal que aproxima al mayor orden de la media lineal en las regiones monótonas y suaves mientras que se mantiene cerca del mínimo de la media de

dos valores cuando la región no es suave y monótona. Esta propiedad es crucial para eliminar el fenómeno Gibbs que producen los esquemas de subdivisión lineales alrededor de las discontinuidades. Los esquemas PPH utilizan una media no lineal que forma parte de la familia de medias Power_p , definidas en [38], que sirven para definir los esquemas de subdivisión Power_p , [2, 19].

Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo es intentar extender las ideas subyacentes a los esquemas Power_p para construir esquemas no oscilatorios y no lineales, relacionados con el esquema de Lagrange centrado de 6-puntos. Para ello, utilizaremos la media ponderada $\text{WH}_{p,a,b}$ [11] que es una generalización de la media armónica Power_p .

En [11] se llevó a cabo el estudio de la convergencia y la estabilidad de los esquemas $\text{WH}_{p,a,b}$ (una generalización de los esquemas Power_p) comprobando las hipótesis de los teoremas presentados en [19]. Se puso de manifiesto la conveniencia de contar con técnicas avanzadas que permitiesen llevar a cabo el estudio de la convergencia y la estabilidad de esquemas basados en funciones Lipschitz y suaves por sectores.

Siguiendo el marco teórico propuesto por Oswald y Harizanov [29, 30], en este trabajo presentamos unos teoremas que sirven para analizar las propiedades de convergencia y estabilidad de esquemas basados en funciones Lipschitz y suaves por sectores, ya que resulta particularmente adecuado para analizar los esquemas de subdivisión objeto de esta memoria, por lo que daremos una descripción detallada de los elementos esenciales de esta teoría. A diferencia de la exposición en [29, 30], no se pretende abordar el caso más general posible. El énfasis está puesto en la claridad y completitud de la exposición.

En esta memoria analizaremos los esquemas Pchip, que se construyen utilizando de un polinomio interpolador de tercer grado que preserva la monotonía de los datos. Este polinomio se utiliza también en la función PCHIP de Matlab [6], y esto justifica el nombre del esquema. Veremos que, al igual que los esquemas Power_p , este esquema pueden ser escrito como una perturbación no lineal de un esquema de subdivisión simple. Además presentaremos un esquema de subdivisión no lineal de 6 puntos convergente y que tiene orden de aproximación igual a seis para ciertas funciones.

Esquema de la Tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente forma:

Capítulo 1: Introducimos los esquemas de subdivisión binarios y definimos sus propiedades elementales. Realizamos un breve resumen de los esquemas de interpolación de Lagrange, los esquemas ENO-WENO y Power_p . Resumimos los resultados generales de convergencia, estabilidad y orden de aproximación que hay en la literatura para esquemas de subdivisión lineales y no lineales que se pueden escribir como una perturbación de un esquema lineal convergente.

Capítulo 2: Siguiendo el marco teórico propuesto por Oswald y Harizanov en [29, 30] proponemos un procedimiento que sistematiza el estudio de la convergencia y la estabilidad para esquemas no lineales que se pueden escribir como perturbación de un esquema lineal. El estudio de la estabilidad, que proponemos, es fácilmente programable en Matlab.

Capítulo 3: Aquí simplemente aplicamos los métodos propuestos en los capítulos anterior para el estudio de los esquemas Power_p , presentamos unos ejemplos numéricos que confirman nuestros resultados teóricos.

Capítulo 4: Describimos y analizamos el esquema de subdivisión Pchip, igual que en el capítulo anterior presentaremos diversos ejemplos numéricos que confirman nuestros resultados teóricos.

Capítulo 5: Presentamos la media ponderada $\text{WH}_{p,a,b}$ que es una generalización de la media Power_p y un esquema no lineal a partir del esquema lineal de Lagrange de 6 puntos utilizando las ideas subyacentes a los esquemas Power_p para su construcción. Igual que en los capítulos anteriores estudiamos su convergencia y orden de aproximación, aunque no hemos conseguido probar la estabilidad con las herramientas que tenemos, presentamos unos ejemplos numéricos que hacen pensar que el esquema es estable.

Capítulo 6: Por último, presentamos una generalización de los esquemas Power_p resultado de utilizar la media ponderada $\text{WH}_{p,a,b}$ en vez de la media Power_p en estos esquemas. Después de un intenso estudio, hemos podido mejorar el resultado de estabilidad presentado en [11]. Por tanto, hacemos un breve resumen de estos esquemas.

1

Esquemas de subdivisión

1.1

Introducción

La subdivisión recursiva es una herramienta que se utiliza a menudo en diseño geométrico asistido por ordenador (o CAD, por las siglas en inglés de *Computer Aided Design*) para la generación de curvas y superficies. Como ejemplo de la utilidad de este tipo de procesos podemos considerar el problema de la codificación de un objeto tridimensional a partir de un escáner inicial. El resultado suele ser un conjunto de datos (medidas) asociados a ciertos puntos situados en la superficie del objeto. En general, y por razones técnicas, se obtienen datos sobre un número bastante reducido

de puntos, por lo que este conjunto inicial suele ser demasiado pobre para su utilización práctica, por ejemplo para una correcta visualización de la superficie. Los esquemas de subdivisión permiten generar, de manera recursiva, conjuntos de datos con mayor resolución que permiten adecuarse a los objetivos buscados. La amplia variedad de aplicaciones, así como la necesidad de mejorar el comportamiento y la eficiencia de algunos esquemas de subdivisión clásicos, ha propiciado un alto nivel de actividad investigadora alrededor de esta temática.

Un esquema de subdivisión es un proceso recursivo mediante el cual se generan nuevos puntos, junto con datos asociados a los mismos, a partir de los disponibles en el nivel de resolución considerado. El proceso de refinamiento por subdivisión está naturalmente relacionado con una familia de mallas anidadas X^j , $j \geq 0$, que especifican el *nivel de resolución* de los datos discretos generados en cada aplicación del proceso iterativo. Los datos iniciales, o *puntos de control* f^0 , constituyen una sucesión asociada a la malla inicial, X^0 , y se asume que los puntos de control forman una sucesión acotada, es decir $f^0 \in l_\infty(X^0)$. En este contexto, un esquema de subdivisión no es más que una aplicación (posiblemente dependiente del nivel de resolución) entre espacios de sucesiones acotadas.

La construcción de esquemas de subdivisión para datos en varias dimensiones, o **multivariantes**, se hace a menudo utilizando técnicas de producto tensorial, y es por esto que el estudio de esquemas de subdivisión en una dimensión es particularmente relevante. En esta memoria, consideraremos fundamentalmente el caso **univariante** y **regular** en el que los datos generados están asociados a mallas de puntos igualmente espaciados en una dimensión, topológicamente equivalentes a \mathbb{Z} . Consideraremos, en particular, **esquemas binarios** en los cuales se dobla el número de datos discretos disponibles en cada nivel de refinamiento. En este caso, se puede considerar, sin pérdida de generalidad, $X^0 = \mathbb{Z}$ y $X^j = 2^{-j}\mathbb{Z}$ para $j \geq 1$.

Las cuestiones fundamentales asociadas a la utilización de un esquema de subdivisión están relacionadas con la existencia de funciones hacia las cuales convergen los datos que se obtienen de las aplicaciones sucesivas del esquema, las propiedades de regu-

laridad de estas funciones y la estabilidad del proceso de subdivisión con respecto a perturbaciones en los datos. La notación que seguiremos en este capítulo es estandar y se corresponde con la utilizada en referencias clásicas en esta temática [16, 23].

Si $f^0 = \{f_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ representa el conjunto inicial de *puntos de control*, correspondientes al nivel de resolución inicial, denotamos por $S^j f^0$ o f^j al conjunto de puntos que se genera al aplicar j veces el esquema de subdivisión a f^0 .

Definición 1.1. Convergencia. *Un esquema de subdivisión es uniformemente convergente si para todo conjunto de datos iniciales, $f^0 \in l_\infty(\mathbb{Z})$, existe una función continua $f = S^\infty f^0 \in C(\mathbb{R})$, tal que*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|S^j f^0 - f(2^{-j} \cdot)\|_\infty = 0.$$

Definición 1.2. Regularidad *Un esquema de subdivisión S es $C^{\alpha-}$ convergente si $S^\infty f^0 \in C^{\alpha-}$, para todo $f^0 \in l_\infty(\mathbb{Z})$.*

Recordamos (ver por ejemplo [19]) que el espacio $C^{\alpha-}$, $0 < \alpha \leq 1$ se define como el espacio de funciones continuas y acotadas para las que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha_1}, \quad \forall \alpha_1 < \alpha.$$

Si $\alpha > 1$, $\alpha = p + r > 0$ con $p \in \mathbb{N}$ y $0 < r < 1$,

$$C^{\alpha-} = \{f : f^{(p)} \in C^{r-}\},$$

donde $f^{(p)}$ indica la derivada de orden p .

Definición 1.3. Estabilidad (Lipschitz). *Un esquema de subdivisión es estable si para cualquier par de datos iniciales $f, \tilde{f} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|S^j \tilde{f} - S^j f\|_\infty \leq C\|\tilde{f} - f\|_\infty \quad \forall j \geq 1.$$

Como veremos más adelante, el análisis de estas propiedades está a menudo relacionado con la capacidad del esquema para reproducir funciones polinómicas. En adelante nos referiremos al espacio de polinomios de grado menor o igual a k como Π_k .

Definición 1.4. Reproducción de polinomios. *Un esquema de subdivisión S reproduce polinomios de grado k de manera exacta si $\forall P \in \Pi_k$ se cumple la siguiente condición:*
si $f_n = P(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces $(Sf)_n = P(2^{-1}n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Esta condición se puede escribir como

$$\forall P(x) \in \Pi_k, \text{ si } f = P|_{\mathbb{Z}} \rightarrow Sf = P|_{2^{-1}\mathbb{Z}}. \quad (1.1)$$

Los esquemas estudiados en esta memoria son **estacionarios** y **uniformes**, es decir, las reglas que definen el proceso de subdivisión no dependen del nivel de refinamiento o la posición espacial asociada a los datos.

En esta memoria estudiaremos esquemas de subdivisión binarios. En la subdivisión binaria de una malla $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se generan nuevos puntos de acuerdo con las reglas

$$x_{2n}^1 = x_n, \quad x_{2n+1}^1 = x_{n+1/2} = (x_n + x_{n+1})/2, \quad (1.2)$$

Los esquemas de subdivisión lineales uniformes y estacionarios se definen habitualmente en términos de su *máscara* $\{a_k\}$. Un esquema de subdivisión binario, lineal, uniforme y estacionario es de la forma

$$(f^{j+1})_n = (Sf^j)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-2m} f_m^j, \quad (1.3)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} (Sf^j)_{2n} &= \sum_m a_{2n-2m} f_m^j = \sum_m a_{2(n-m)} f_m^j = \sum_k a_{2k} f_{n-k}^j, \\ (Sf^j)_{2n+1} &= \sum_m a_{2n+1-2m} f_m^j = \sum_m a_{1+2(n-m)} f_m^j = \sum_k a_{2k+1} f_{n-k}^j. \end{aligned}$$

El esquema es **local** si $a_k = 0$ para $k > n_2$ y $k < n_1$.

El estudio de la convergencia de un esquema lineal, uniforme y estacionario, y su relación con el orden de aproximación del esquema y la reproducción de polinomios, es un problema ampliamente estudiado en la literatura (ver, por ejemplo [20, 16, 23, 24, 36]). Sin embargo, es bien conocido que el diseño de esquemas *de alto orden*, es decir, que sean capaces de reproducir fielmente funciones suaves, y que a la vez preserven la monotonía, y/o, la convexidad en los datos es un problema complejo. Esto ha propiciado que se haya dedicado bastante esfuerzo al diseño y al análisis de esquemas de subdivisión en los cuales las reglas del proceso de subdivisión no son lineales.

En general, un esquema de subdivisión estacionario, local y binario está definido por dos funciones, $\psi_q : \mathbb{R}^{2L+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $q = 0, 1$, de manera que

$$(f^{j+1})_{2n+q} = (Sf^j)_{2n+q} = \psi_q(f_{n-L}^j, \dots, f_{n+L}^j), \quad q = 0, 1, \quad (1.4)$$

donde L especifica el número máximo de puntos involucrados en las funciones (reglas locales) ψ_1 y ψ_2 , que definen el esquema. Si ψ_q no son funciones lineales de sus argumentos, el esquema es no lineal. Las técnicas utilizadas para estudiar las propiedades de convergencia y regularidad de los esquemas de subdivisión lineales y no lineales pueden ser muy diferentes. En particular, la **estabilidad** del esquema es una propiedad que está directamente relacionada con la convergencia del esquema en el caso lineal, pero no así en el caso no lineal.

En esta memoria se consideran fundamentalmente esquemas de subdivisión no lineales de tipo interpolador.

1.2

Esquemas de Subdivisión Interpoladores

En muchas aplicaciones se requiere que el conjunto de puntos de control se mantenga fijo en cada paso del proceso recursivo. Los esquemas de subdivisión que satisfacen esta propiedad se denominan **interpoladores**. En términos de las funciones ψ_q , $q = 0, 1$

que definen un esquema uniforme, estacionario, local y binario, esta propiedad se obtiene si

$$\psi_0(f_{n-L}, \dots, f_{n+L}) = f_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

es decir, el esquema está completamente determinado cuando se especifica la función ψ_1 ,

$$(Sf)_{2n+1} = \psi_1(f_{n-L}, \dots, f_{n+L}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En particular, la forma general de un esquema binario interpolador, lineal, uniforme y estacionario es como sigue

$$(Sf)_{2n} = f_n, \tag{1.5}$$

$$(Sf)_{2n+1} = \sum_k a_{2k+1} f_{n-k}, \tag{1.6}$$

es decir, la máscara del esquema debe satisfacer $a_{2k} = \delta_{0,k}$.

A continuación describiremos una clase de esquemas de subdivisión lineales cuyo diseño está intrínsecamente relacionado con la interpolación polinómica de Lagrange.

1.2.1

Subdivisión por Interpolación de Lagrange

El esquema de subdivisión interpolador más sencillo es el esquema de dos puntos

$$\begin{aligned} (Sf)_{2n} &= f_n, \\ (Sf)_{2n+1} &= \frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}f_{n+1}. \end{aligned}$$

Este esquema es el resultado del proceso de subdivisión recursiva asociado al siguiente procedimiento: Para cada $n \in \mathbb{Z}$, se construye la recta $r_n(x)$ que une los puntos (x_n, f_n) y (x_{n+1}, f_{n+1}) , donde x_n, x_{n+1} son puntos de la malla X que especifica el nivel de resolución de los datos $f = \{f_n\}$. Los datos asociados a los puntos $x_{2n}^1 = x_n$,

$x_{2n+1}^1 = x_{n+1/2} = (x_n + x_{n+1})/2$, generados en la subdivisión binaria de la malla se definen como

$$(Sf)_{2n} = r_n(x_{2n}^1) = r_n(x_n) = f_n,$$

$$(Sf)_{2n+1} = r_n(x_{2n}^1) = r_n\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}f_{n+1}.$$

El caracter interpolador del esquema de subdivisión está garantizado por el hecho de utilizar un polinomio interpolador, $r_n(x)$, junto con el proceso de refinamiento binario. Así, S queda completamente especificado por la función $\psi_1(f_n, f_{n+1}) = r_n(x_{n+1/2})$.

Es bien conocido que este proceso de subdivisión recursiva aplicado a una secuencia inicial $f^0 \in l_\infty(\mathbb{Z})$ genera, en el límite, una función lineal a trozos que interpola a los puntos de control iniciales, es decir $S^\infty f \in C^{1-}$, $\forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$. En general, las funciones límite que genera este esquema son continuas, pero no diferenciables, y este aspecto representa una limitación severa para la aplicación práctica del esquema.

Es evidente que esta estrategia se puede utilizar con otros polinomios interpoladores, y que la elección del polinomio interpolador determina las reglas del proceso de subdivisión. La utilización de polinomios interpoladores de Lagrange da lugar a los llamados **esquemas interpoladores de Lagrange**.

La formulación general dada por Harten [5, 31] para los esquemas de subdivisión interpoladores derivados de la interpolación de Lagrange resulta particularmente apropiada para nuestros propósitos en esta memoria, por tanto utilizaremos la notación de [31] (ver también [19, 5]) para describir estos esquemas de subdivisión.

Sea $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una malla de puntos igualmente espaciados, $x_{n+1} - x_n = h \forall n$, correspondiente al nivel de resolución elegido, y $f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es el conjunto de datos asociados a los puntos de X . En cada intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ consideramos el polinomio de Lagrange que interpola a f en los nodos $\mathcal{S}_{l,r} = \{x_{n+j}, j = -l + 1, \dots, r\}$. Si denotamos a este polinomio $q_n(x; f, \mathcal{S}_{l,r})$, el esquema de subdivisión $S_{l,r}$ se define como

$$(S_{l,r}f)_{2n} := q_n(x_n; f, \mathcal{S}_{l,r}) = f_n,$$

$$(S_{l,r}f)_{2n+1} := q_n\left(x_{n+\frac{1}{2}}; f, \mathcal{S}_{l,r}\right).$$

Dado que $x_n, x_{n+1} \in \mathcal{S}_{l,r}$, es evidente que el caracter interpolador del esquema está asegurado.

Notar que $q_n(x; f, \mathcal{S}_{1,1}) = r_n(x)$, la recta que interpola los datos f_n, f_{n+1} en los nodos x_n, x_{n+1} . En la Figura 1.1 se muestran algunos ejemplos ilustrativos.

Por su diseño, y dado que $q_n(x; f, \mathcal{S}_{l,r}) \in \Pi_{l+r-1}$ es evidente que los esquemas $\mathcal{S}_{l,r}$ reproducen de manera exacta polinomios de grado $r+l-1$ y tienen orden de aproximación, después de una iteración, igual a $r+l$.

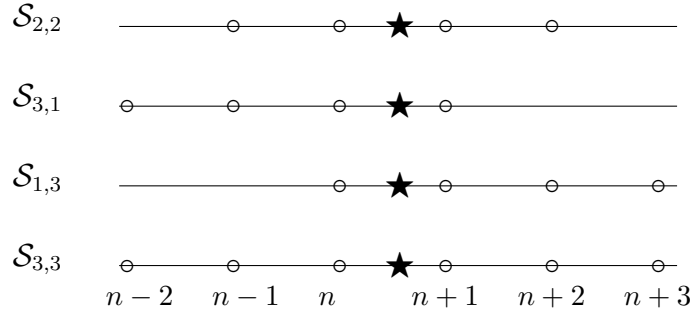


Figura 1.1: El símbolo ★ representa el punto a evaluar, $x_{n+\frac{1}{2}}$. Los símbolos ○ marcan los puntos x_{n+j} del stencil $\mathcal{S}_{l,r}$.

La máscara del esquema $\mathcal{S}_{l,r}$ se puede calcular fácilmente escribiendo el polinomio q_n en la base de Lagrange correspondiente al stencil de interpolación $\mathcal{S}_{l,r}$. Como $x_j = jh, j \in \mathbb{Z}$, es fácil comprobar que

$$q_n(x; f, \mathcal{S}_{l,r}) = \sum_{k=-l+1}^r f_{n+k} L_k^{(l,r)} \left(\frac{x - x_n}{h} \right),$$

siendo $\{L_k^{(l,r)}(y)\}_{k=-l+1}^r$, la base de Lagrange correspondiente al stencil de enteros $\mathcal{S}_{l,r}^0 = \{-l+1, \dots, r\}$, i.e.

$$L_k^{(l,r)}(y) = \prod_{m=-l+1, k \neq m}^r \frac{y - m}{k - m},$$

Así

$$(\mathcal{S}_{l,r} f)_{2n+1} = q_n \left(x_{n+\frac{1}{2}}; f, \mathcal{S}_{l,r} \right) = \sum_{k=-l+1}^r L_k^{(l,r)} \left(\frac{1}{2} \right) f_{n+k},$$

es decir, $a_{-2k+1} = L_k^{(l,r)}\left(\frac{1}{2}\right)$, $k = -l + 1, \dots, r$. En las Tablas 1.1 y 1.2 presentamos los valores asociados a los índices impares de la máscara de algunos esquemas de Lagrange que utilizaremos más adelante.

$S_{2,1}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	0	0
$S_{1,2}$	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0
$S_{2,2}$	0	$-\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0
	$n - 2$	$n - 1$	n	$n + 1$	$n + 2$	$n + 3$

Tabla 1.1: Máscaras asociadas a esquemas $S_{l,r}$ de 3 y 4 puntos.

$S_{2,3}$	0	$-\frac{5}{128}$	$\frac{60}{128}$	$\frac{90}{128}$	$-\frac{20}{128}$	$\frac{3}{128}$
$S_{3,2}$	$\frac{3}{128}$	$-\frac{20}{128}$	$\frac{90}{128}$	$\frac{60}{128}$	$-\frac{5}{128}$	0
$S_{3,3}$	$\frac{3}{256}$	$-\frac{25}{256}$	$\frac{150}{256}$	$\frac{150}{256}$	$-\frac{25}{256}$	$\frac{3}{256}$
	$n - 2$	$n - 1$	n	$n + 1$	$n + 2$	$n + 3$

Tabla 1.2: Máscaras asociadas a esquemas $S_{l,r}$ de 5 y 6 puntos.

La construcción de estos esquemas y sus máscaras asociadas se puede hacer también de manera recursiva, como se especifica en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. Para $l, r \geq 1$ los esquemas de Lagrange satisfacen

$$S_{l,r} = \frac{r - \frac{1}{2}}{l + r - 1} S_{l,r-1} + \frac{l - \frac{1}{2}}{l + r - 1} S_{l-1,r}. \quad (1.7)$$

Demostración

La prueba se sigue directamente del algoritmo de Neville para la construcción recursiva de polinomios interpoladores [15]. En efecto, puesto que podemos escribir

$$q_n(x; f, \mathcal{S}_{l,r}) = \frac{(x - x_{n+r})q_n(x; f, \mathcal{S}_{l,r-1}) - (x - x_{n-l+1})q_n(x; f, \mathcal{S}_{l-1,r})}{x_{n-l+1} - x_{n+r}},$$

y para $x = x_{n+1/2}$ se tiene

$$\frac{x_{n+1/2} - x_{n+r}}{x_{n-l+1} - x_{n+r}} = \frac{r - 1/2}{l + r + 1}, \quad \frac{x_{n+1/2} - x_{n-l-1}}{x_{n-l+1} - x_{n+r}} = -\frac{l - 1/2}{l + r - 1},$$

la relación (1.7) para índices impares se sigue directamente de las dos igualdades anteriores. Para índices pares se deduce de la propiedad de interpolación de los esquemas y del hecho de que la suma de los coeficientes de la combinación lineal en (1.7) es 1. ■

Para $l = r$, se recuperan los esquemas interpolatorios de Deslauries y Dubuc (DD en adelante), desarrollados en [20]. Estos esquemas de subdivisión han sido ampliamente estudiados en la literatura. En [20] se prueba que $S_{2,2}f \in C^{2-}$ y $S_{3,3}f \in C^{2,83-}$, y es un hecho conocido que la regularidad de las funciones límite obtenidas en el proceso de subdivisión aumenta conforme aumenta el número de puntos del stencil [21]. En [19] se estudian las propiedades de convergencia y regularidad de los esquemas interpolatorios de Lagrange no-centrados.

Una de las limitaciones fundamentales de los esquemas de subdivisión de Lagrange esta relacionada con el comportamiento oscilatorio de la interpolación de Lagrange cuando se aplica a datos que no se corresponden con funciones suaves, en particular a datos que provienen de la discretización de una función discontinua,

o que presentan perfiles con grandes variaciones. En la Figura 1.2 se muestra la discretización de una función discontinua sobre mallas de 9 (izquierda) y 17 puntos (derecha), el resultado de aplicar una vez el esquema de subdivisión $S_{1,2}$, y la función límite asociada al proceso recursivo. En la Figura 1.3 se muestra el comportamiento del esquema $S_{2,2}$. Se observa claramente un comportamiento oscilatorio similar al *fenómeno de Gibbs*, que afecta a varios intervalos alrededor de la malla inicial, y es común a todos los esquemas $S_{l,r}$ con $\max\{l, r\} > 1$.

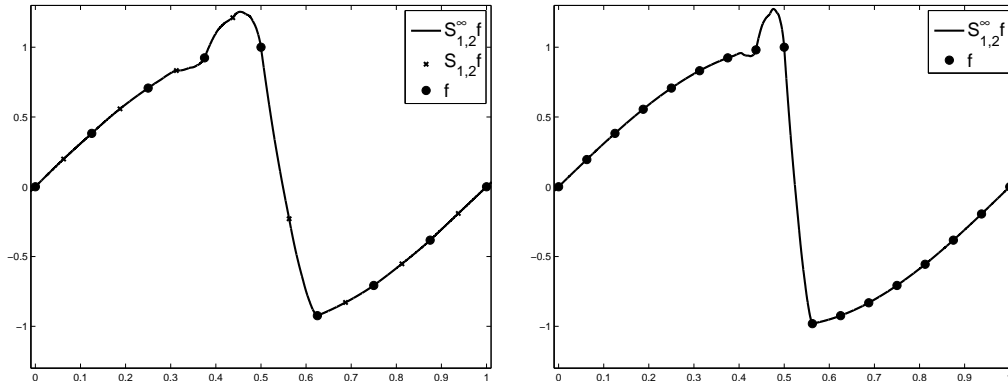


Figura 1.2: Funciones límite sobre datos discontinuos para $S_{1,2}$.

Veremos a continuación que este comportamiento oscilatorio es consecuencia de que la interpolación polinómica utiliza stencils que *cruzan* una discontinuidad. Para ello, consideremos primeramente el esquema $S_{1,2}$. La forma de Newton del polinomio interpolador permite escribir

$$q_n(x, f, \mathcal{S}_{1,2}) = q_n(x, f, \mathcal{S}_{1,1}) + f[x_n, x_{n+1}, x_{n+2}](x - x_n)(x - x_{n+1})$$

donde la notación $f[x_n, x_{n+1}, x_{n+2}]$ se corresponde con la notación habitual para las diferencias divididas de un conjunto de datos sobre una malla uniforme [15, 8]. Al evaluar en $x_{n+\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$(S_{1,2}f)_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{8}\nabla^2 f_n, \quad (1.8)$$

donde $\nabla^2 f_j := f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Así, si f es una función suave

en $[x_n, x_{n+2}]$, $\nabla^2 f_n = \mathcal{O}(h^2)$ y (1.8) implica que

$$(S_{1,2}f)_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} + \mathcal{O}(h^2). \quad (1.9)$$

Notemos que si $f_i = f(x_i) \forall i \in \mathbb{Z}$, con f una función suave en $[x_n, x_{n+2}]$, la fórmula del error de interpolación permite afirmar que

$$(S_{1,1}f)_{2n+1} = f(x_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^2), \quad (S_{1,2}f)_{2n+1} = f(x_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^3).$$

Así, en regiones de suavidad, la aplicación del esquema $S_{1,2}$ supone añadir una perturbación de orden $\mathcal{O}(h^2)$ al esquema $S_{1,1}$. El término añadido, $-\nabla^2 f_n/8$, consigue que $(S_{1,2}f)_{2n+1} = f(x_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^3)$.

Supongamos, por el contrario, que $f(x)$ presenta una discontinuidad aislada en un punto $\theta \in [x_{n+1}, x_{n+2}]$. En este caso

$$\nabla^2 f_n = \mathcal{O}([f]), \quad (1.10)$$

donde $[f] = f^+(\theta) - f^-(\theta)$ denota el salto de la función en la discontinuidad. Así, (1.8) implica que

$$(S_{1,2}f)_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} + \mathcal{O}(1). \quad (1.11)$$

Dado que f tiene una discontinuidad en $[x_{n+1}, x_{n+2}]$, la fórmula del error de interpolación implica que $(S_{1,2}f)_{2n+1} = f(x_{n+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(1)$, sin embargo, como la función f es suave en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$, $(S_{1,1}f)_{2n+1} = f(x_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^2)$. La adición del término $-\nabla^2 f_n/8$ a $S_{1,1}$ produce, en este caso, una perturbación de orden $\mathcal{O}(1)$ del valor correspondiente al esquema $S_{1,1}$, de manera que se pierde completamente el orden de aproximación del esquema en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$, donde la función es suave. El valor obtenido (ver Figura 1.2) da lugar a un comportamiento oscilatorio en la función límite que afecta a los dos intervalos que preceden al que contiene la discontinuidad en la malla original.

De manera análoga, se observa que el esquema $S_{2,1}$ satisface

$$(S_{2,1}f)_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{8}\nabla^2 f_{n-1},$$

y por tanto obtendremos un comportamiento oscilatorio completamente análogo en los dos intervalos de la malla original inmediatamente posteriores al que contiene la discontinuidad. La gráfica

obtenida es similar a la mostrada en la Figura 1.2, con el comportamiento oscilatorio al lado derecho de la discontinuidad.

El Teorema 1.1, permite escribir

$$S_{22} = \frac{1}{2}S_{21} + \frac{1}{2}S_{12}, \quad (1.12)$$

de manera que ya en la primera aplicación de $S_{2,2}$, los esquemas $S_{1,2}$ y $S_{2,1}$ introducen perturbaciones de orden $\mathcal{O}([f])$ en los intervalos anterior y posterior a la discontinuidad. Estas oscilaciones son el germen del comportamiento oscilatorio observado en la función límite de la Figura 1.3.

En la Figura 1.4 se muestran los datos sobre una malla inicial de 17 puntos y las funciones límites correspondientes a los esquemas $S_{2,3}$ y $S_{3,3}$, que confirman el comportamiento oscilatorio 'a la Gibbs' del proceso de refinamiento por subdivisión en presencia de datos 'discontinuos'. En todos los intervalos para los cuales el proceso de interpolación utiliza un stencil que 'cruza' la discontinuidad, la aplicación del esquema introduce una perturbación de amplitud $\mathcal{O}(\infty)$. Estas perturbaciones conducen a la pérdida de exactitud de la reconstrucción en ciertos intervalos adyacentes y producen oscilaciones en la función límite del proceso recursivo. El número de intervalos afectados por el comportamiento oscilatorio depende del stencil que determina el esquema.

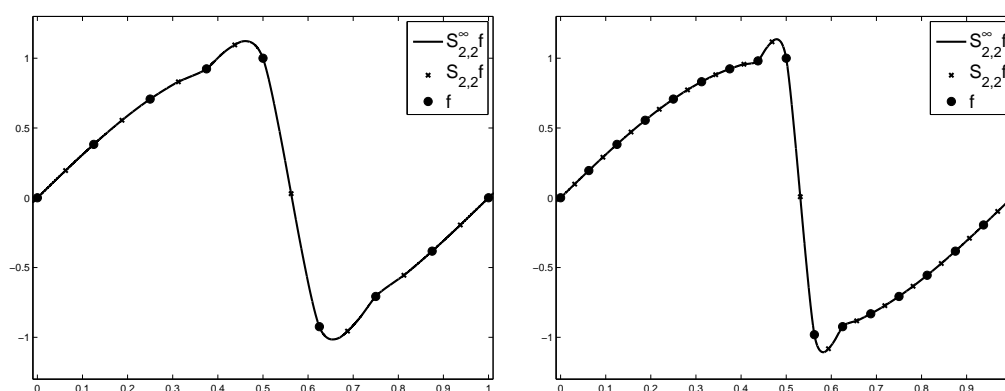


Figura 1.3: Funciones límite sobre datos discontinuos para $S_{2,2}$.

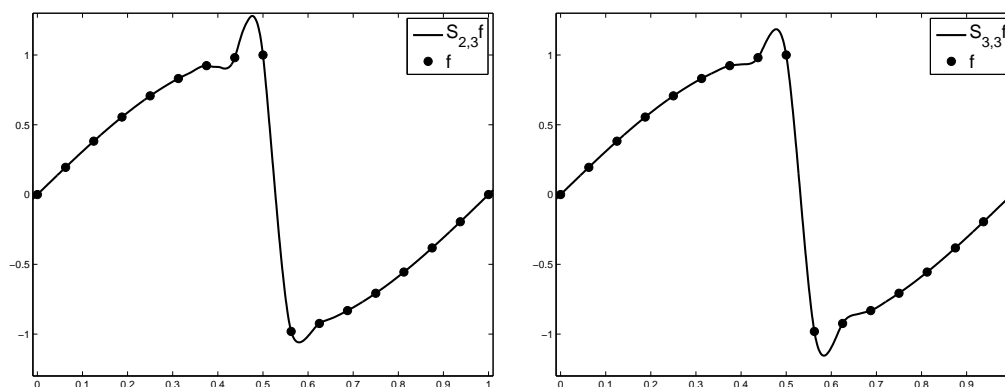


Figura 1.4: Funciones límite sobre datos discontinuos. $S_{2,3}$, $S_{3,3}$

La aparición de oscilaciones espúreas y la pérdida de las propiedades de aproximación alrededor de fuertes gradientes en los datos son algunas de las razones que han impulsado el desarrollo de métodos no lineales, cuyo objetivo es eliminar, o paliar, este tipo de comportamiento. En la siguiente sección describimos los métodos de tipo ENO (Essentially Non-Oscillatory [32]).

1.2.2

Esquemas ENO-WENO

Las técnicas de interpolación **Esencialmente No Oscilatorias** (ENO) fueron introducidas por S.R. Chakravarthy, B. Engquist, A. Harten y S. Osher [32] en el contexto de la solución numérica de ecuaciones hiperbólicas. El rasgo esencial de este tipo de interpolación reside en el proceso de selección del stencil utilizado para construir el polinomio de Lagrange correspondiente a cada intervalo de la malla subyacente. Éste tiene como objetivo evitar que el stencil utilizado para construir el polinomio interpolador contenga una singularidad en los datos.

Los esquemas de subdivisión interpolatorios ENO [31, 8] se definen siguiendo el mismo diseño descrito en la sección anterior, es

decir

$$\begin{aligned} (S^{\text{ENO}} f)_{2n} &= q_n(x_n; f, \mathcal{S}_n^{\text{ENO},r}) = f_n, \\ (S^{\text{ENO}} f)_{2n+1} &= q_n(x_{n+1/2}; f, \mathcal{S}_n^{\text{ENO},r}), \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde $q_n(x; f, \mathcal{S}_n^{\text{ENO},r})$ es el polinomio interpolador asociado al stencil $\mathcal{S}_n^{\text{ENO},r} = \{x_{s_n}, x_{s_n+1}, \dots, x_{s_n+r}\}$, que viene determinado por el proceso de selección. El carácter interpolatorio se asegura si los puntos $x_n, x_{n+1} \in \mathcal{S}_n^{\text{ENO},r}, \forall n$. Así, $\mathcal{S}_n^{\text{ENO},r}$ es uno de r posibles candidatos de la Figura 1.5. Existen varios algoritmos para la elección del stencil, pero todos implican un proceso de decisión no lineal basado en la comparación de las diferencias divididas de los datos (ver [8] y las referencias que se encuentran en este artículo para varios mecanismos de selección del stencil ENO).

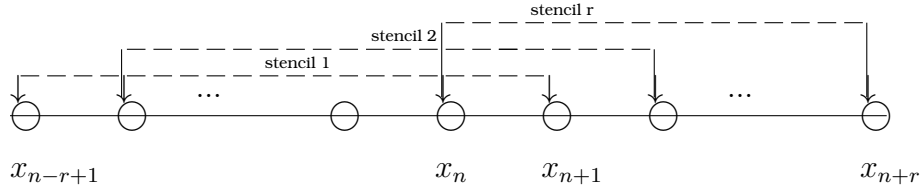


Figura 1.5: Posibles stencils candidatos a $\mathcal{S}_n^{\text{ENO},r}$.

El proceso de selección de stencil permite interpretar (1.13) como un proceso de selección de esquema lineal, entre la familia de esquemas lineales (de orden $r + 1$) $S_{r-k+1,k}, k = 1, \dots, r$. Así, el esquema $S_{\text{ENO},2}$ basado en 4 puntos ($r = 2$) se puede escribir como (ver figura 1.6)

$$(S_{\text{ENO},2} f)_{2n+1} = \begin{cases} (S_{2,1} f)_{2n+1}, & \text{si } \mathcal{S}_n^{\text{ENO},2} = \{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}, \\ (S_{1,2} f)_{2n+1}, & \text{si } \mathcal{S}_n^{\text{ENO},2} = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}. \end{cases}$$

Para $r = 3$, el proceso de selección utiliza $2r = 6$ puntos, y tres posibles stencils para la construcción del polinomio interpolador:

$$(S_{\text{ENO},3} f)_{2n+1} = \begin{cases} (S_{3,1} f)_{2n+1}, & \text{si } \mathcal{S}_n^{\text{ENO},3} = \{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}, \\ (S_{2,2} f)_{2n+1}, & \text{si } \mathcal{S}_n^{\text{ENO},3} = \{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}, \\ (S_{1,3} f)_{2n+1}, & \text{si } \mathcal{S}_n^{\text{ENO},3} = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}\}. \end{cases}$$

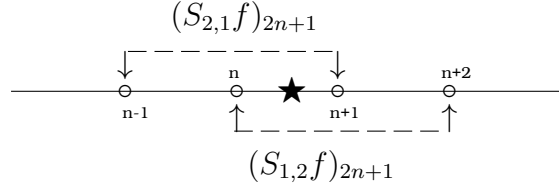


Figura 1.6: El símbolo ★ representa $x_{m+\frac{1}{2}}$.

Supongamos que los datos $f_i = f(x_i)$, $i \in \mathbb{Z}$ donde $f(x)$ es una función suave, excepto en un punto $\theta \in [x_m, x_{m+1}]$ donde presenta una singularidad (por ejemplo una discontinuidad), y supongamos que $r = 2$. El proceso de selección ENO produce stencils de interpolación que evitan *cruzar* la discontinuidad, siempre que esto sea posible, es decir

$$\mathcal{S}_{m+1}^{\text{ENO},2} = \{x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}\} \quad \mathcal{S}_{m-1}^{\text{ENO},2} = \{x_{m-2}, x_{m-1}, x_m\}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} (S_{\text{ENO},2}f)_{2m+3} &= (S_{1,2}f)_{2m+3} = f(x_{m+3/2}) + \mathcal{O}(h^3), \\ (S_{\text{ENO},2}f)_{2m-1} &= (S_{2,1}f)_{2m-1} = f(x_{m+1/2}) + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

con lo que se mantiene la exactitud en los intervalos adyacentes al que contiene la discontinuidad. Puesto que el esquema $S_{\text{ENO},2}$ utiliza polinomios de segundo grado, el orden de aproximación (después de una iteración) es $\mathcal{O}(h^3)$, siempre que el stencil que utiliza el polinomio interpolador esté completamente contenido en una región donde la función es suave.

De manera análoga se observa que el orden de aproximación después de una iteración del esquema $S_{\text{ENO},r}$ en regiones de suavidad es $\mathcal{O}(h^{r+1})$, puesto que siempre se utilizan polinomios de grado r . La región donde la aproximación obtenida después del proceso de interpolación pierde exactitud en $S_{\text{ENO},r}$ queda reducida al intervalo que contiene la singularidad. En la Figura 1.7 observamos que las funciones límites sobre datos discontinuos obtenidas con los esquemas $S_{\text{ENO},2}$ y $S_{\text{ENO},3}$ no presentan las oscilaciones de tipo Gibbs observadas en las Figuras 1.3-(b) y 1.4-(b).

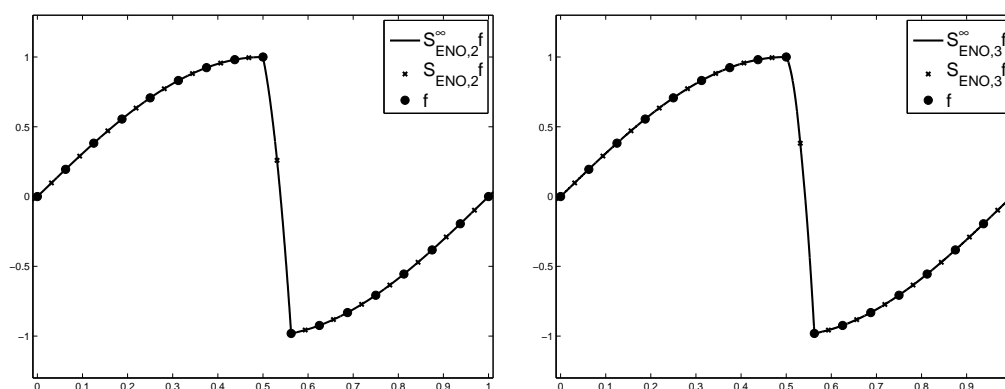


Figura 1.7: Funciones límite sobre datos discontinuos. $S_{\text{ENO},2}$, $S_{\text{ENO},3}$

Los esquemas $S_{\text{ENO},r}$ son esquemas que dependen de los datos a los cuales se aplican, y por tanto son esquemas no lineales. Una vez elegido el parámetro r , la aplicación del esquema para cada índice $2n + 1$ se realiza en dos pasos.

- En primer lugar se determina el stencil de interpolación, de acuerdo con el mecanismo de selección.
- El stencil elegido determina el esquema lineal concreto, basado en $r + 1$ puntos que se utiliza para calcular el valor correspondiente al índice $2n + 1$.

Es importante remarcar que la no linealidad de estos esquemas reside exclusivamente en el proceso de selección que lleva a la elección de un determinado esquema lineal, de entre un conjunto de esquemas admisibles, todos ellos del mismo orden de aproximación.

Cabe observar que $S_{\text{ENO},r}$ es un esquema de $2r$ puntos al igual que el esquema $S_{r,r}$ cuyo orden de aproximación es $\mathcal{O}(h^{2r})$. El siguiente resultado establece la relación entre $S_{r,r}$, y los esquemas $S_{r,1}$, $S_{r-1,2}$, \dots , $S_{1,r}$, asociados a los stencils $1, \dots, r$ de la Figura 1.5.

Teorema 1.2. ([12]-Proposición 6.1)

$$S_{r,r}f = \sum_{k=1}^r c_k S_{r-k+1,k}f \quad c_k = \frac{1}{2^{r-1}} \binom{2r}{2k-1} \quad (1.14)$$

Los coeficientes c_k satisfacen $c_k > 0$, $\sum_{k=1}^l c_k = 1$.

La técnica de interpolación WENO (**Weighted ENO**), desarrollada inicialmente en [37, 35], persigue incrementar la exactitud de la interpolación ENO en regiones suaves, manteniendo el carácter no-oscilatorio del polinomio interpolador. Para ello, se considera una combinación convexa de los r polinomios interpoladores que corresponden a los r posibles stencils de $r + 1$ puntos de la Figura 1.5. Para maximizar el orden de exactitud, la interpolación WENO sustituye los pesos en (1.14), óptimos en términos de exactitud, por unos pesos que dependen de los datos de manera no lineal y cuyo diseño responde a dos objetivos fundamentales: mantener el orden de aproximación $2r$ en regiones suaves y emular la interpolación ENO, es decir aquellos polinomios cuyo stencil cruza una singularidad en los datos deberían tener muy poca influencia en la combinación lineal, por lo que sus pesos asociados deberían ser muy pequeños.

Para un mismo conjunto de $2r$ puntos, la interpolación WENO proporciona una reconstrucción interpolatoria de la función con orden de exactitud $2r + 1$ en regiones suaves, evitando oscilaciones de manera similar a la interpolación ENO.

Los esquemas interpolatorios ENO-WENO se han estudiado en [8, 9, 17]. La estructura de los operadores de subdivisión ENO y WENO es similar. En ambos casos se trata de una combinación convexa de esquemas de orden r . Sin embargo, en el caso de la interpolación ENO los coeficientes son 1 o 0, y esta dicotomía hace que la interpolación ENO sea muy sensible al efecto de pequeñas perturbaciones en los datos, que pueden conducir a stencils completamente diferentes, y por tanto a cambios bruscos en el esquema de subdivisión que se aplica a una zona determinada. Por el contrario la elección de los pesos en la interpolación WENO [7, 37] permite amortiguar el efecto que tienen pequeñas perturbaciones

en los datos; los pesos propuestos en [37, 35] proporcionan transiciones 'suaves' entre stencils. En [17], se prueba que si se utiliza la interpolación WENO de 4 puntos el esquema resultante $\mathcal{S}_{\text{WENO},2}$ es estable, mientras que no es posible establecer un resultado similar para el esquema $\mathcal{S}_{\text{ENO},2}$.

A. Cohen, N. Dyn y B. Matei denominan a este tipo de esquemas **quasi-lineales** [17]. La función ψ_1 en (1.4) que caracteriza a un esquema quasi-lineal interpolador puede escribirse como

$$\psi_1(f_{n-r}, \dots, f_{n+r}) = \sum_k a_{2k+1}(f_{n-r}, \dots, f_{n+r}) f_{n-k}.$$

Como hemos visto anteriormente, el caracter no lineal del esquema está relacionado con la elección, o construcción, de determinados coeficientes dependientes de los datos en cada nivel de resolución.

Existen otras familias de esquemas no lineales con propiedades no-oscilatorias similares, pero que no se pueden escribir de este modo, puesto que la dependencia de los datos se produce directamente a través de funciones no lineales.

1.2.3

Esquemas PPH y Power_p

El esquema PPH se introduce en [2] como una versión *esencialmente no oscilatoria* del esquema centrado de 4 puntos $\mathcal{S}_{2,2}$. Aunque la descripción original en [2] se plantea como una modificación no lineal del polinomio interpolador asociado a un stencil centrado de 4 puntos, es más sencillo entender su funcionamiento, y en particular su caracter no oscilatorio, a partir del Teorema 1.1, que permite reescribir $\mathcal{S}_{2,2}$ como combinación lineal de los esquemas de 3 puntos $\mathcal{S}_{2,1}$ y $\mathcal{S}_{1,2}$ como sigue,

$$\mathcal{S}_{2,2} = \frac{1}{2}\mathcal{S}_{2,1} + \frac{1}{2}\mathcal{S}_{1,2}.$$

Recordando que

$$(\mathcal{S}_{2,1}f)_{2n+1} = (\mathcal{S}_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{8}\nabla^2 f_{n-1}, \quad (\mathcal{S}_{1,2}f)_{2n+1} = (\mathcal{S}_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{8}\nabla^2 f_n,$$

tenemos

$$(S_{2,2}f)_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{8} \text{mean}(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n), \quad (1.15)$$

con $\text{mean}(x, y) = (x + y)/2$. Tal y como hemos visto en la sección 1.2.1, las oscilaciones que aparecen al aplicar el esquema $S_{2,2}$ sobre datos extraídos de funciones discontinuas son consecuencia de que $\text{mean}(\mathcal{O}(h^2), \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(1)$. Supongamos que $f_i = f(x_i)$ con f una función que presenta una discontinuidad aislada en un punto $\theta \in [x_m, x_{m+1}]$, para la cual

$$\nabla^2 f_{m-1} = \mathcal{O}(1) = \nabla^2 f_m \quad \nabla^2 f_l = \mathcal{O}(h^2), \quad l \neq m-1, m.$$

Entonces

$$(S_{2,2}f)_{2m-1} = (S_{1,1}f)_{2m-1} - \frac{1}{8} \text{mean}(\nabla^2 f_{m-2}, \nabla^2 f_{m-1}) = (S_{1,1}f)_{2m-1} + \mathcal{O}(1)$$

$$(S_{2,2}f)_{2m+3} = (S_{1,1}f)_{2m+3} - \frac{1}{8} \text{mean}(\nabla^2 f_m, \nabla^2 f_{m+1}) = (S_{1,1}f)_{2m+3} + \mathcal{O}(1)$$

Así, el orden de exactitud (después de una iteración) se pierde completamente en los intervalos $[x_{m-2}, x_{m-1}]$ y $[x_{m+1}, x_{m+2}]$, a pesar de la suavidad de la función en estos intervalos. Las perturbaciones de orden $\mathcal{O}(1)$ ocasionadas por la interpolación polinómica son el origen de las oscilaciones observadas también en los intervalos $[x_{m-3}, x_{m-2}]$ y $[x_{m+2}, x_{m+3}]$, que aparecen en sucesivas aplicaciones del esquema.

En el esquema PPH se substituye la media aritmética por la media armónica

$$\text{PPH}(x, y) = \text{sgn}(x, y) \frac{2|x||y|}{|x| + |y|}, \quad (1.16)$$

donde $\text{sgn}(x, y) := (\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y))/2$. Así,

$$(S_{\text{PPH}}f)_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{8} \text{PPH}(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n). \quad (1.17)$$

La clave del comportamiento no-oscilatorio del esquema S_{PPH} reside en la siguiente propiedad de la media armónica (ver e.g. [19]),

$$|\text{PPH}(x, y)| \leq 2 \min\{|x|, |y|\}, \quad (1.18)$$

la cual implica que $\text{PPH}(\mathcal{O}(h^2), \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(h^2)$. Por tanto, en las condiciones descritas anteriormente, el esquema PPH satisface

$$(S_{\text{PPH}}f)_{2m-1} = (S_{1,1}f)_{2m-1} + \mathcal{O}(h^2) \quad (S_{\text{PPH}}f)_{2m+3} = (S_{1,1}f)_{2m+3} + \mathcal{O}(h^2).$$

Dado que la función es suave en $[x_{m-1}, x_m]$, $[x_{m+1}, x_{m+2}]$,

$$(S_{1,1}f)_{2m-1} = f\left(x_{m-\frac{1}{2}}\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$(S_{1,1}f)_{2m+3} = f\left(x_{m+1+\frac{1}{2}}\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

de manera que el orden de exactitud en los intervalos adyacentes a la discontinuidad disminuye, pero no se pierde completamente como sucede en el caso del esquema $S_{2,2}$.

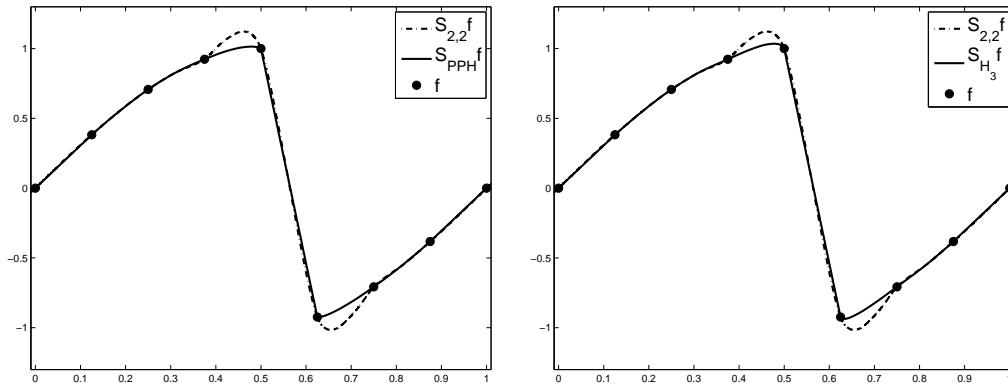


Figura 1.8: Funciones límite sobre datos discontinuos. $S_{2,2}$, S_{PPH} y S_{H_3} .

La media armónica (1.16) forma parte de la familia de medias Power_p , definidas en [38] del siguiente modo

$$H_p(x, y) = \text{sgn}(x, y) \left| \frac{x+y}{2} \right| \left(1 - \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^p \right). \quad (1.19)$$

Estas funciones satisfacen una propiedad análoga a (1.18), y se introdujeron originalmente en [38] para la solución numérica de ecuaciones hiperbólicas, al igual que las reconstrucciones ENO y WENO. Es fácil ver que $\text{PPH}(x, y) = H_2(x, y)$. Para $p = 1$ se tiene

$$H_1(x, y) = \text{sgn}(x, y) \min\{|x|, |y|\} =: \text{minmod}(x, y).$$

La utilización de la media H_p en lugar de la media aritmética en (1.15) da lugar a los esquemas Power_p , S_{H_p} , que se pueden considerar, por tanto, versiones no lineales del esquema centrado de 4 puntos. Se definen como

$$\begin{cases} (S_{H_p}f)_{2n} = f_n, \\ (S_{H_p}f)_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{8}H_p(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.20)$$

El estudio de estos esquemas utiliza de manera intensiva las propiedades algebraicas de las medias H_p (ver Capítulo 3).

1.3

Convergencia y Estabilidad

Como se ha mencionado en la introducción, la primera de las cuestiones fundamentales en un proceso de subdivisión recursiva es la de la convergencia del proceso. Las técnicas que se utilizan para analizar la convergencia de un esquema de subdivisión lineal no pueden, en general, aplicarse al caso no lineal, que requiere herramientas específicas.

La estabilidad del proceso recursivo es consecuencia directa de la convergencia del esquema de subdivisión en el caso lineal, pero no así en el caso no lineal, que requiere también herramientas específicas.

En esta sección revisaremos algunos resultados de interés para el desarrollo de esta memoria, relacionados con estas cuestiones.

1.3.1

El caso lineal

Es bien conocida la relación entre la convergencia de un esquema interpolatorio lineal, la reproducción exacta de polinomios, y la existencia de ciertos esquemas *derivados* (ver e.g. [23]). A continuación haremos un breve resumen de los resultados más relevantes, con respecto al contenido de esta memoria (las pruebas se pueden encontrar en [23, 19]).

Si S es un esquema lineal convergente de la forma (1.3), entonces los coeficientes de la máscara del esquema necesariamente satisfacen

$$\sum_n a_{2n} = 1 \quad \sum_n a_{2n+1} = 1. \quad (1.21)$$

Esta condición es equivalente a

$$S\alpha\mathbb{1} = \alpha\mathbb{1}, \quad (1.22)$$

donde $\mathbb{1}$ es la sucesión $\mathbb{1}_n = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$, es decir, el esquema S reproduce constantes. A su vez, esta propiedad implica la existencia de un esquema de subdivisión asociado, llamado *esquema diferencia*, que denotaremos como $S^{[1]}$ y que satisface

$$\nabla S f = S^{[1]} \nabla f. \quad (1.23)$$

El comportamiento del *esquema diferencia* $S^{[1]}$ determina la convergencia de S en (1.3), como se especifica en la siguiente proposición (extraída del Teorema 3.2 en [23]).

Proposición 1.1. *Sea S un esquema de subdivisión de la forma (1.3) que reproduce constantes. Entonces S es convergente si y solo si el esquema diferencia $S^{[1]}$ satisface la siguiente condición*

$$\exists L \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}, L > 0, 0 < \mu < 1 : \|(S^{[1]})^L f\|_\infty \leq \mu \|f\|_\infty, \forall f \in l_\infty(\mathbb{Z}).$$

Además, se tiene el siguiente resultado sobre la regularidad de la función límite.

Proposición 1.2. *([23]-Corolario 3.3) Sea S un esquema de subdivisión convergente y $L > 0$ y $0 < \mu < 1$ como en la proposición 1.1. Entonces $\forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$ y $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tal que $|x - y| < 1$, $\exists C > 0$:*

$$|S^\infty f(x) - S^\infty f(y)| \leq C|x - y|^\nu,$$

donde $\nu = -\log_2(\mu)/L$.

El siguiente resultado muestra que, en el caso lineal, la regularidad de las funciones límite está directamente relacionada con la capacidad del esquema para reproducir polinomios de manera exacta.

Proposición 1.3. ([23]-Teorema 5.1) Sea S un esquema de subdivisión lineal e interpolatorio tal que $S^\infty f \in \mathcal{C}^k, \forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$. Entonces para cualquier polinomio $P(x) \in \Pi_k$ se cumple

$$SP|_{\mathbb{Z}} = P|_{2^{-1}\mathbb{Z}}.$$

Es bien conocido que si S es un esquema de subdivisión lineal que reproduce polinomios de grado k , entonces existen los *esquemas diferencia* $S^{[1]}, \dots, S^{[k+1]}$ que satisfacen

$$\nabla^l S = S^{[l]} \nabla^l, \quad l = 1, \dots, k \quad (1.24)$$

El estudio de la convergencia y regularidad de las funciones límite en el caso lineal se suele llevar a cabo a partir del análisis de los *esquemas derivados* [23]. Si $d^l f^j := 2^{lj} \nabla^l f^j$ representa la l -ésima diferencia dividida de los datos en el nivel de resolución asociado a f^j , el esquema derivado $S^{(l)} = 2^l S^{[l]}$ satisface

$$d^l f^{j+1} = S^{(l)}(d^l f^j), \quad \forall j.$$

Enunciamos a continuación los resultados que relacionan la convergencia de un esquema de subdivisión interpolador lineal, y la regularidad de las funciones límite obtenidas, con la reproducción polinómica y la existencia y propiedades de los esquemas derivados.

Teorema 1.3. ([23]-Teoremas 5.2 y 5.3) Sea S un esquema de subdivisión lineal e interpolatorio que reproduce de manera exacta Π_k . Entonces para cada l , $1 \leq l \leq k + 1$, existe un esquema de subdivisión $S^{(l)}$ que satisface

$$d^l f^{j+1} = S^{(l)} d^l f^j, \quad \forall j \geq 1.$$

Además, las tres condiciones siguientes son equivalentes:

1. S converge uniformemente a funciones límite de clase C^k .
2. $S^{(l)}$ converge uniformemente a funciones límite de clase C^{k-l} .
3. $\frac{1}{2} S^{(k+1)}$ converge uniformemente a cero $\forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$.

En el caso lineal, la construcción y el estudio de los esquemas derivados se lleva a cabo mediante una adecuada factorización del símbolo del esquema [16, 23],

$$\theta(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j z^j,$$

de manera que no es posible extender estas técnicas al análisis de esquemas no lineales como los esquemas ENO, WENO o Power_p descritos anteriormente.

La estabilidad de un esquema de subdivisión lineal es una consecuencia directa de la convergencia. Es fácil ver que $\|S^j\|_\infty \leq C$, $\forall j \geq 1$ (ver [23]). Así, si S es un esquema lineal convergente, entonces $\forall f, g \in l_\infty(\mathbb{Z})$ y $j \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$

$$\|S^j f - S^j g\|_\infty = \|S^j(f - g)\|_\infty \leq C \|f - g\|_\infty.$$

Sin embargo, la estabilidad del esquema de subdivisión no lineal no se puede deducir de su convergencia. A continuación revisamos algunos resultados sobre la convergencia y estabilidad de la clase de esquemas de subdivisión no lineales que pueden escribirse como una perturbación de un esquema lineal convergente.

1.3.2

El caso no lineal

Los esquemas PPH y Power_p en [2, 3, 19] pueden escribirse como una perturbación no lineal de un esquema lineal convergente, es decir responden al siguiente formato general: $\forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$,

$$(S_{\mathcal{N}}f) = (S_{\mathcal{L}}f) + \mathcal{F}(\delta f), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.25)$$

donde $\mathcal{F} : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ puede ser no lineal, $\delta : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ es un operador lineal y continuo y $S_{\mathcal{L}}$ es un esquema lineal, convergente. En efecto, para los esquemas S_{H_p} (1.20) se cumple que $\delta = \nabla^2$, $S = S_{1,1}$, y

$$\mathcal{F} : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}) \quad \begin{cases} (\mathcal{F}(f))_{2n} = 0 \\ (\mathcal{F}(f))_{2n+1} = -\frac{1}{8}H_p(f_n, f_{n+1}) \end{cases}, \quad (1.26)$$

El siguiente teorema establece ciertas condiciones que aseguran la convergencia de un esquema de subdivisión de la forma (1.25) (la prueba se puede encontrar en [19], Teorema II.1).

Teorema 1.4. ([19]-Teoremas II.1 y II.2) *Sea $S_{\mathcal{N}}$ un esquema de subdivisión que puede expresarse en la forma (1.25), con $S_{\mathcal{L}}$ un esquema lineal convergente. Si \mathcal{F} y δ satisfacen $\forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$*

$$\exists M > 0 : \quad \|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq M\|f\|_\infty, \quad (1.27)$$

$$\exists L > 0, 0 < \mu < 1 : \quad \|\delta S_{\mathcal{N}}^L(f)\|_\infty \leq \mu\|\delta f\|_\infty, \quad (1.28)$$

entonces $S_{\mathcal{N}}$ es uniformemente convergente. Además, si $S_{\mathcal{L}}$ es $C^{\alpha-}$ convergente, entonces $S_{\mathcal{N}}$ es $C^{\beta-}$ convergente con $\beta = \min\{-\frac{\log_2(\mu)}{L}, \alpha\}$.

La convergencia de los esquemas Power_p se prueba de manera sistemática en [2, 3, 19] comprobando las hipótesis del Teorema 1.4. Para estos esquemas $\delta = \nabla^2$ y (1.28) se puede escribir como

$$\|\nabla^2 S_{\mathcal{N}}^L f\|_\infty \leq \mu\|\nabla^2 f\|_\infty, \quad (1.29)$$

de manera que las pruebas en [1, 3, 19] se basan en la acotación directa de las segundas diferencias de S^2 para los esquemas estudiados.

Con respecto a la estabilidad, el siguiente teorema establece ciertas condiciones bajo las cuales se puede deducir la estabilidad de una esquema de la forma (1.25) (la prueba se puede encontrar en [19], Teorema II.4).

Teorema 1.5. ([19]-Teorema II.4) *Sea $S_{\mathcal{N}}$ un esquema de subdivisión que reproduce constantes y que puede ser escrito de la forma (1.25), con $S_{\mathcal{L}}$ un esquema de subdivisión lineal convergente. Si F y δ satisfacen $\forall f, g, d_1, d_2 \in l_{\infty}(\mathbb{Z})$,*

$$\exists M > 0 : \quad \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(g)\|_{\infty} \leq M\|f - g\|_{\infty}, \quad (1.30)$$

$$\exists L > 0, 0 < \mu < 1 : \quad \|\delta(S_{\mathcal{N}}^L(f) - S_{\mathcal{N}}^L(g))\|_{\infty} \leq \mu\|\delta(f - g)\|_{\infty}, \quad (1.31)$$

entonces el esquema de subdivisión $S_{\mathcal{N}}$ es estable.

Notar que para $\delta = \nabla^2$, $S_{\mathcal{N}} = S_{H_p}$ (1.31) toma la forma

$$\|\nabla^2(S_{H_p}^L(f) - S_{H_p}^L(g))\|_{\infty} \leq \mu\|\nabla^2(f - g)\|_{\infty}. \quad (1.32)$$

De nuevo, este teorema se utiliza en [1, 3, 19] de manera sistemática para comprobar la estabilidad del esquema PPH y estudiar el caso de los esquemas Power_p mediante la acotación directa de $\|\nabla^2(S_{H_p}^2(f) - S_{H_p}^2(g))\|_{\infty}$.

Por otra parte, las relaciones (1.29) y (1.32) permiten intuir la conveniencia de utilizar los esquemas diferencia $S^{[2]}$ en las pruebas de convergencia y estabilidad de los esquemas Power_p . Es conocido, [30, 41], que la reproducción de polinomios no garantiza la existencia de esquemas diferencia en el caso no lineal. Sin embargo, es sencillo calcular el esquema $S_{H_p}^{[2]}$, que satisface $\nabla^2 S_{H_p} = S_{H_p}^{[2]} \nabla^2$ (ver [30] y capítulo 3).

En el caso no lineal, la existencia de los esquemas diferencia $S^{[1]}, \dots, S^{[k]}$ se puede deducir de la propiedad *k-off-set invariant* [30]. En la siguiente sección revisamos el concepto de subdivisión *k-off-set invariant* en [30] y demostramos la existencia de esquemas

derivados a partir de esta propiedad. La existencia de estos esquemas permitirá simplificar los enunciados de los Teoremas 1.4 y 1.5.

1.3.3

Esquemas Diferencia

En el caso no lineal la reproducción exacta de constantes no es suficiente para garantizar la existencia del esquema diferencia $S^{[1]}$. En [41, 30], se prueba que el concepto de subdivisión *off-set invariant* permite definir $S^{[1]}$, independientemente de la linealidad del esquema.

Definición 1.5. Subdivisión off-set invariant (OSI). Un esquema de subdivisión S es **OSI** si

$$S(f + \alpha \mathbb{1}) = Sf + \alpha \mathbb{1}, \quad \forall f \in l_\infty(\mathbb{Z}), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Es evidente que un esquema de subdivisión OSI, reproduce constantes, pero el recíproco no es cierto. Por completitud, incluimos a continuación la prueba del siguiente resultado (para esquemas r -arios, ver [30], Lema 2.1).

Lema 1.1. Sea S un esquema de subdivisión binario OSI, entonces existe un único esquema de subdivisión binario, $S^{[1]}$, tal que

$$\nabla \circ S = S^{[1]} \circ \nabla.$$

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ fijo, podemos escribir $\forall l \in \mathbb{Z}$

$$f_{n+l} = f_n + w_{n+l}, \quad w_{n+l} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{l-1} (\nabla f)_{n+m}, & l > 0 \\ 0, & l = 0 \\ -\sum_{m=l}^{-1} (\nabla f)_{n+m}, & l < 0. \end{cases}$$

Puesto que $f = f_n \mathbb{1} + w$ y S es OSI, tenemos que

$$Sf = S(f_n \mathbb{1} + w) = f_n \mathbb{1} + Sw,$$

por tanto $\nabla Sf = \nabla Sw$ y

$$\begin{aligned} (\nabla Sf)_{2n} &= (Sw)_{2n+1} - (Sw)_{2n} \\ &= \psi_1(w_{n-L}, \dots, w_{n+L}) - \psi_0(w_{n-L}, \dots, w_{n+L}) \\ &= \psi_0^{[1]}((\nabla f)_{n-L}, \dots, (\nabla f)_{n+L-1}). \end{aligned}$$

Notar que solamente intervienen en la fórmula los valores w_{n+m} con $-L \leq m \leq L$ que, a su vez, se pueden reescribir en función de ∇f_{n+m} , para $-L \leq m \leq L-1$.

De manera análoga

$$\begin{aligned} (\nabla Sf)_{2n+1} &= (Sw)_{2n+2} - (Sw)_{2n+1} \\ &= \psi_0(w_{n+1-L}, \dots, w_{n+1+L}) - \psi_1(w_{n-L}, \dots, w_{n+L}) \\ &:= \psi_1^{[1]}((\nabla f)_{n-L}, \dots, (\nabla f)_{n+L}). \end{aligned}$$

En este caso las componentes de w involucradas son $w_{n-L}, \dots, w_{n+L+1}$, que se pueden escribir en función de ∇f_{n+m} con $-L \leq m \leq L$.

Por tanto, definiendo

$$\begin{aligned} (S^{[1]}g)_{2n} &:= \psi_0^{[1]}(g_{n-L}, \dots, g_{n+L}) \\ (S^{[1]}g)_{2n+1} &:= \psi_1^{[1]}(g_{n-L}, \dots, g_{n+L}) \end{aligned}$$

se verifica que

$$\nabla \circ S = S^{[1]} \circ \nabla.$$

La aplicación $\nabla : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ es sobreyectiva, y este hecho permite probar la unicidad del esquema $S^{[1]}$. En efecto, supongamos que existen dos aplicaciones $\psi^{[1]} = (\psi_0^{[1]}, \psi_1^{[1]})$ y $\varphi^{[1]} = (\varphi_0^{[1]}, \varphi_1^{[1]})$ tales que $\forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$

$$\psi_k^{[1]}(\nabla f_{n-L}, \dots, \nabla f_{n+L}) = (\nabla Sf)_{2n+k} = \varphi_k^{[1]}(\nabla f_{n-L}, \dots, \nabla f_{n+L}), \quad k = 0, 1.$$

Dado $g \in l_\infty(\mathbb{Z})$, sea $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$ tal que $\nabla f = g$. Entonces

$$\begin{aligned} \psi_k^{[1]}(g_{n-L}, \dots, g_{n+L}) &= \psi_k^{[1]}(\nabla f_{n-L}, \dots, \nabla f_{n+L}) = \varphi_k^{[1]}(\nabla f_{n-L}, \dots, \nabla f_{n+L}) \\ &= \varphi_k^{[1]}(g_{n-L}, \dots, g_{n+L}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por tanto $\psi_k^{[1]} = \varphi_k^{[1]}$, $k = 0, 1$. ■

La demostración del Lema anterior indica que la longitud del esquema $S^{[1]}$ es menor o igual que la de S . Además, se observa que las funciones que definen $S^{[1]}$ son combinaciones lineales de las funciones que definen S .

De manera análoga, la existencia de esquemas diferencia de orden superior a 1 está relacionada con la siguiente generalización de la propiedad OSI [30].

Definición 1.6. Subdivisión k -OSI. *Un esquema de subdivisión binario S se dice **k -off-set invariant** si para cada polinomio $P(x)$ de grado m , $0 \leq m < k$ existe un polinomio $Q(x)$ de grado $< m$ tal que*

$$(S(f + P|_{\mathbb{Z}}))_n = (Sf)_n + P(n/2) + Q(n/2), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in l_{\infty}(\mathbb{Z}).$$

Notar que la definición anterior implica que si S es k -OSI, entonces es m -OSI para $1 \leq m < k$. Además, para esquemas lineales es evidente que la Definición 1.6 es equivalente a la reproducción exacta de polinomios en Π_{k-1} . Sin embargo ambos conceptos no son equivalentes, tal y como se observa en [25, 30]. Por ejemplo, los esquemas WENO de orden $2r + 1$ utilizan combinaciones lineales convexas de polinomios de grado r y por tanto reproducen polinomios de grado menor o igual a r de manera exacta. Por otro lado, aunque son esquemas OSI (debido a que los coeficientes de la combinación convexa dependen de ∇f) no son k -OSI para $k > 1$, puesto que los coeficientes de la combinación convexa no pueden escribirse en función de ∇^k para $k > 1$.

La definición de subdivisión k -OSI representa una generalización del concepto de reproducción polinómica que permite garantizar la existencia de los esquemas diferencia $S^{[1]}, \dots, S^{[k]}$, independientemente de la linealidad del esquema. En la siguiente proposición se demuestra la existencia del esquema diferencia $S^{[2]}$ a partir de la Definición 1.6 para $k = 2$. La demostración de este caso ilustra el proceso de inducción que permite demostrar el caso general.

Lema 1.2. *Sea S un esquema de subdivisión binario y 2-OSI. Entonces el esquema $S^{[1]}$ satisface*

$$S^{[1]}(w + \alpha \mathbb{1}) = S^{[1]}w + \frac{\alpha}{2} \mathbb{1} \quad \forall w \in l_\infty(\mathbb{Z}). \quad (1.33)$$

Además existe un único esquema de subdivisión binario $S^{[2]}$, de longitud igual o menor que la de S , que satisface

$$\nabla^2 \circ S = S^{[2]} \circ \nabla^2. \quad (1.34)$$

Demostración

Dado que S es OSI, existe el esquema binario $S^{[1]}$, de longitud menor o igual a la de S , que satisface $\nabla \circ S = S^{[1]} \circ \nabla$. Veamos que $\forall f \in l_\infty(\mathbb{Z}), \alpha \in \mathbb{R}$

$$S^{[1]}(f + \alpha \mathbb{1}) = S^{[1]}f + \frac{\alpha}{2} \mathbb{1}.$$

Puesto que $\nabla : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ es sobreyectiva, dados $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, existen $g, v \in l_\infty(\mathbb{Z})$ tal que $\nabla g = f$ y $\nabla v = \alpha \mathbb{1}$. Además, existe un (único) polinomio $P(x)$ de grado 1 tal que $P(n) = v_n$ ¹. De la Definición 1.6, deducimos

$$S^{[1]}(f + \alpha \mathbb{1}) = S^{[1]}(\nabla(g + P|_{\mathbb{Z}})) = \nabla S(g + P|_{\mathbb{Z}}) = \nabla(Sg + P|_{2^{-1}\mathbb{Z}}).$$

Como $P(x) \in \Pi_1$,

$$(\nabla P|_{2^{-1}\mathbb{Z}})_{2n} = P(n + 1/2) - P(n) = \frac{v_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{\alpha}{2},$$

$$(\nabla P|_{2^{-1}\mathbb{Z}})_{2n+1} = P(n + 1) - P(n + 1/2) = v_{n+1} - \frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

tenemos

$$S^{[1]}(f + \alpha \mathbb{1}) = S^{[1]}\nabla g + \frac{\alpha}{2} \mathbb{1} = S^{[1]}f + \frac{\alpha}{2} \mathbb{1}. \quad (1.35)$$

Esta propiedad, junto con el hecho de que $S^{[1]}$ es un esquema binario del mismo tipo (amplitud) que S , permite definir, de manera única, un esquema binario, $S^{[2]}$, que satisface (1.34). En efecto, supongamos que $\forall w \in l_\infty(\mathbb{Z})$

$$(S^{[1]}f)_{2n+k} = \psi_k^{[1]}(f_{n-L}, \dots, f_{n+L}).$$

¹ $P(x) = v_0 + \alpha x$

Dado que $S^{[1]}\nabla = \nabla S$, procedemos como en el Lema 1.1: Dada $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$ y $n \in \mathbb{Z}$, fijo, podemos escribir $\forall l \in \mathbb{Z}$

$$\nabla f_{n+l} = \nabla f_n + w_{n+l}, \quad w_{n+l} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{l-1} (\nabla^2 f)_{n+m}, & l > 0 \\ 0, & l = 0 \\ -\sum_{m=l}^{-1} (\nabla^2 f)_{n+m}, & l < 0. \end{cases}$$

por tanto (1.35) permite escribir

$$S^{[1]}\nabla f = S^{[1]}(\nabla f_n \mathbb{1} + w) = \frac{\nabla f_n}{2} \mathbb{1} + S^{[1]}w,$$

de manera que

$$\nabla^2 S f = \nabla \nabla S f = \nabla S^{[1]}\nabla f = \nabla S^{[1]}w.$$

Así,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 S f)_{2n} &= (S^{[1]}w)_{2n+1} - (S^{[1]}w)_{2n} \\ &= \psi_1^{[1]}(w_{n-L}, \dots, w_{n+L}) - \psi_0^{[1]}(w_{n-L}, \dots, w_{n+L}), \\ &=: \psi^{[2]}(\nabla^2 f_{n-L}, \dots, \nabla^2 f_{n+L-1}), \\ (\nabla^2 S f)_{2n+1} &= (S^{[1]}w)_{2n+2} - (S^{[1]}w)_{2n+1} \\ &= \psi_0^{[1]}(w_{n+1-L}, \dots, w_{n+1+L}) - \psi_1^{[1]}(w_{n-L}, \dots, w_{n+L}) \\ &=: \psi^{[2]}(\nabla^2 f_{n+1-L}, \dots, \nabla^2 f_{n+L}), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que los valores w_{n-L}, \dots, w_{n+L} se pueden escribir en función de $(\nabla^2 f)_{n-L}, \dots, (\nabla^2 f)_{n+L-1}$, y $w_{n-L}, \dots, w_{n+1-L}$ en función de $\nabla^2 f_{n-L}, \dots, \nabla^2 f_{n+L}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Por tanto

$$\begin{aligned} (Sg)_{2n} &=: \psi^{[2]}(g_{n-L}, \dots, g_{n+L-1}), \\ (Sg)_{2n+1} &=: \psi^{[2]}(g_{n+1-L}, \dots, g_{n+L}). \end{aligned}$$

La unicidad se demuestra con los mismos argumentos que en el Lema 1.1. ■

La existencia de los esquemas *diferencia* para el caso no lineal permite reformular el enunciado del Teorema 1.4 para esquemas k -OSI de la forma (1.25), cuando $\delta = \nabla^k$.

Teorema 1.6. *Sea $S_{\mathcal{N}}$ un esquema de subdivisión k -OSI de la forma (1.25), con $S_{\mathcal{L}}$ un esquema de subdivisión lineal convergente y $\delta = \nabla^k$. Supongamos que existen parámetros $M > 0$, $L > 0$, $0 < \mu < 1$ tales que $\forall f \in l_{\infty}(\mathbb{Z})$*

$$\|F(f)\|_{\infty} \leq M\|f\|_{\infty}, \quad (1.36)$$

$$\|(S_{\mathcal{N}}^{[k]})^L f\|_{\infty} \leq \mu\|f\|_{\infty}, \quad (1.37)$$

entonces el esquema de subdivisión $S_{\mathcal{N}}$, es uniformemente convergente. Además, si $S_{\mathcal{L}}$ es $C^{\alpha-}$ convergente, entonces $S_{\mathcal{N}}$ es $C^{\beta-}$ convergente con $\beta = \min\{-\frac{\log_2(\mu)}{L}, \alpha\}$.

El teorema de estabilidad 1.5 puede reformularse de manera análoga,

Teorema 1.7. *Sea $S_{\mathcal{N}}$ un esquema de subdivisión k -OSI de la forma (1.25), con $S_{\mathcal{L}}$ un esquema de subdivisión lineal convergente y $\delta = \nabla^2$. Supongamos que existen parámetros $M > 0$, $L > 0$, $0 < \mu < 1$ tales que $\forall f, g \in l_{\infty}(\mathbb{Z})$*

$$\|F(f) - F(g)\|_{\infty} \leq M\|f - g\|_{\infty} \quad (1.38)$$

$$\|(S_{\mathcal{N}}^{[k]})^L(f) - (S_{\mathcal{N}}^{[k]})^L(g)\|_{\infty} \leq \mu\|f - g\|_{\infty}, \quad (1.39)$$

Entonces el esquema de subdivisión $S_{\mathcal{N}}$ es estable.

En este contexto, la estabilidad del esquema depende de la contractividad de una cierta potencia del esquema $S^{[k]}$. En [30, 29], Oswald y Harizanov proponen un marco teórico que permite estudiar las propiedades de contractividad de las potencias de un esquema de subdivisión definido mediante funciones *diferenciables a trozos*, con ciertas propiedades adicionales que permiten extender algunos Teoremas del Valor Medio y la regla de la cadena para funciones suaves.

La teoría desarrollada en [30] para esquemas de subdivisión definidos mediante funciones *suaves por sectores* incluye la definición del *Jacobiano Generalizado* del esquema, que permite un

análisis sistemático (aunque no necesariamente sencillo) de las propiedades de contractividad de las potencias del esquema de subdivisión. En el caso de los esquemas Power_p , veremos que la utilización de esta técnica sistematiza y simplifica las pruebas de estabilidad que se presentan en [3, 19].

En el siguiente capítulo describimos con detalle la definición de la clase de funciones *suaves por sectores*, junto con aquellas propiedades que resultan de utilidad en el análisis de la convergencia y la estabilidad de los esquemas de subdivisión no lineales que utilizan estas funciones en su definición.

Para finalizar este capítulo, estableceremos algunos resultados que hacen referencia a la capacidad de un esquema de subdivisión para recuperar de manera aproximada funciones suaves a partir de sus valores en una malla inicial, normalmente con poca resolución.

1.3.4

Orden de aproximación

Enunciamos a continuación algunas definiciones relevantes que se refieren a la capacidad del esquema para reproducir aproximadamente funciones suaves.

Definición 1.7. Orden de aproximación de S . Se dice que un esquema de subdivisión, S , tiene orden de aproximación $r > 0$ después de una iteración si para cualquier función $g \in C^r(\mathbb{R})$ existen $h_g > 0$ y $C_g > 0$ tal que :

si $f = g(h \cdot)$, entonces $\|Sf - g(2^{-1}h \cdot)\|_\infty \leq C_g h^r$, $0 < h \leq h_g$,

Definición 1.8. Orden de aproximación de S^∞ . Dado un esquema de subdivisión convergente, S , decimos que tiene orden de aproximación $r > 0$ si para cualquier función $g \in C^r(\mathbb{R})$ existen $h_g > 0$ y $C_g > 0$ tal que :

$$\text{si } f = g(h \cdot), \quad \text{entonces } \|S^\infty f - g\|_\infty \leq C_g h^r, \quad \forall h, 0 < h \leq h_g,$$

Los siguientes resultados, relacionados el orden de aproximación de un esquema de subdivisión, son válidos para esquemas lineales y no lineales. Las pruebas se pueden encontrar en [36] y [19].

Proposición 1.4. [[36]-Teorema 2.4.10.] Sea S un esquema estable que tiene orden de aproximación igual a q después de una iteración. Entonces S^∞ tiene orden de aproximación igual a q .

Proposición 1.5. [[36]-Teorema 2.4.9.] Un esquema de subdivisión estable que reproduce Π_{q-1} ($q \geq 1$), tiene orden de aproximación igual a q .

2

Subdivisión de clase Σ_k

2.1

Introducción

Oswald y Harizanov [29, 30] utilizan un marco teórico que facilita el estudio de las propiedades de convergencia y estabilidad de los esquemas de subdivisión asociados a los esquemas Power_p. Este marco teórico resulta particularmente adecuado para analizar los esquemas de subdivisión objeto de esta memoria, por lo que daremos a continuación una descripción detallada de los elementos esenciales de esta teoría.

En esta sección se establecen con precisión las definiciones y se prueban los resultados que cubren todas las situaciones que se estudiarán a lo largo de esta memoria. A diferencia de la exposición en [29, 30], no se pretende abordar el caso más general posible. El

énfasis en esta sección está puesto en la claridad y completitud de la exposición.

2.2

El Gradiente Generalizado

La contractividad de una función diferenciable $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ se puede estudiar a partir de las acotaciones de su gradiente $\nabla\psi$. Ciertas funciones diferenciables a trozos admiten un *Gradiente Generalizado* que permite realizar un estudio similar. En [30] se denomina a esta clase de funciones $C_{pw}^1(\mathbb{R}^m)$, notación que mantendremos en esta memoria. En esta sección desarrollamos aquellos elementos de la teoría de las funciones de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^m)$ que son necesarios para su aplicación a los esquemas de subdivisión considerados en esta memoria.

A lo largo de todo el capítulo asumiremos que $\psi(0) = 0$, puesto que todos los casos de interés en las aplicaciones satisfacen esta igualdad.

2.2.1

Particion por sectores en \mathbb{R}^m

Todo hiperplano, \mathcal{H} , en \mathbb{R}^m separa el espacio \mathbb{R}^m en dos *semi-espacios* cerrados, \mathcal{H}^+ y \mathcal{H}^- [40]. Si $0 \in \mathcal{H}$, entonces \mathcal{H} es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^m de dimensión $m - 1$, por tanto $\exists w_{\mathcal{H}} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mathcal{H} = \langle w_{\mathcal{H}} \rangle^\perp := \{y \in \mathbb{R}^m : y^T w_{\mathcal{H}} = 0, \}$. La función (lineal)

$$g_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad g_{\mathcal{H}}(x) = x^T \cdot w_{\mathcal{H}} \quad (2.1)$$

identifica los semi-espacios \mathcal{H}^\pm , puesto que se puede asociar

$$g_{\mathcal{H}}(x) \geq 0 \leftrightarrow x \in \mathcal{H}^+, \quad g_{\mathcal{H}}(x) \leq 0 \leftrightarrow x \in \mathcal{H}^-, \quad g_{\mathcal{H}}(x) = 0 \leftrightarrow x \in \mathcal{H}.$$

Definición 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ el conjunto formado por la intersección de $k \geq 1$ semi-espacios, asociados a k hiperplanos distintos que pasan por el origen de coordenadas. Diremos que Ω es un **sector** en \mathbb{R}^m si su interior topológico en \mathbb{R}^m es no vacío

Utilizaremos en adelante $\overset{\circ}{\Omega}$ para designar el interior topológico de Ω en \mathbb{R}^m , es decir

$$\overset{\circ}{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^m : \exists \delta > 0 \text{ con } B(x, \delta) \subset \Omega\} \quad (2.2)$$

donde $B(x, \delta) := \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - x\|_2 \leq \delta\}$.

Dado que los semiespacios \mathcal{H}^\pm asociados a un hiperplano \mathcal{H} son conjuntos convexos y cerrados, se sigue de la Definición 2.1 que los sectores son conjuntos convexos y cerrados con interior no vacío.

Definición 2.2. Partición por Sectores de \mathbb{R}^m Diremos que $\mathcal{P} = \{\Omega_i\}_{i=1}^N$ es una partición por sectores de \mathbb{R}^m si cada Ω_i es un sector en \mathbb{R}^m , y se cumple

1. $\cup_{i=1}^N \Omega_i = \mathbb{R}^m$
2. Si $i \neq j$, $(\Omega_i \cap \Omega_j)^\circ = \emptyset$

Consideraremos únicamente particiones por sectores asociadas a un número finito de hiperplanos $0 \in \mathcal{H}_i, i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$, que definen, y separan, los distintos sectores de la partición. Si Ω es el sector formado por la intersección de semi-espacios asociados a los hiperplanos $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_k$, el signo de las k funciones $g_{\mathcal{H}_i}(y)$, $1 \leq i \leq k$ caracteriza a los puntos de $\overset{\circ}{\Omega}$, mientras que en los puntos de la frontera del sector, $\partial\Omega$, $g_{\mathcal{H}_i}(y) = 0$ para algún $1 \leq i \leq k$. Es decir, cualquier punto contenido en la frontera de un sector ha de estar incluido en al menos uno de los hiperplanos que definen la partición.

La Figura 2.1 muestra dos particiones por sectores de \mathbb{R}^2 , asociadas a las medias H_p para $p > 1$ (izquierda) y $p = 1$ (derecha). En

la figura de la izquierda, los ejes coordenados definen los dos hiperplanos de separación. En la figura de la derecha, la recta $x = y$ define el tercer hiperplano de separación \mathcal{H}_3 .

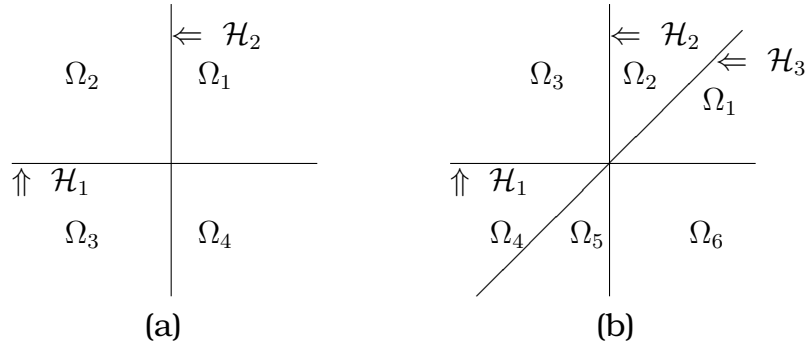


Figura 2.1: Ejemplos de Particiones por Sectores en \mathbb{R}^2 .

Las funciones objeto de esta memoria son funciones *suaves por sectores*.

Definición 2.3. Se dice que $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es **suave por sectores** si $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ y existe una partición por sectores, $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$, tal que para cada i , $1 \leq i \leq N$, $\psi_i := \psi|_{\Omega_i} \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{\Omega}_i)$

Es evidente que la suma de funciones suaves por sectores es también una función suave por sectores, ya que la inclusión de un hiperplano de separación en un sector en el que una función es diferenciable no cambia las propiedades de 'suavidad por sectores' de la función. La clase de funciones $C_{pw}^1(\mathbb{R}^m)$ está formada por funciones suaves por sectores, que pueden no ser diferenciables en los puntos que pertenecen a la frontera de los sectores, para los cuales se requiere solamente que existan ciertas derivadas direccionales.

Notemos primeramente que si $\mathcal{H} = \langle w_{\mathcal{H}} \rangle^T$ es un hiperplano en \mathbb{R}^m y $\{w_i\}_{i=1}^{m-1}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} , la matriz $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ definida por columnas como

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = [w_1, \dots, w_{m-1}], \quad \mathcal{A}_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.3)$$

define un difeomorfismo,

$$\forall z = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}, \quad \mathcal{A}_{\mathcal{H}}z = \sum_{i=1}^{m-1} z_i w_i \in \mathcal{H}. \quad (2.4)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad (\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T x)_i = w_i^T x, \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad (2.5)$$

dado que se cumple

1. $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \mathcal{I}_{m-1}$, la matriz identidad en \mathcal{R}^{m-1} .
2. $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T x = x \iff x \in \mathcal{H}$.

Utilizando la notación anterior, es fácil relacionar la existencia de derivadas direccionales de $\psi|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ con la diferenciabilidad de la función

$$\psi^{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi^{\mathcal{H}}(z) := \psi(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}z), \quad z \in \mathbb{R}^{m-1} \quad (2.6)$$

con $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ en (2.3). Observemos que $\forall d \in \mathcal{H}$,

$$d = \mathcal{A}_{\mathcal{H}} \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d \rightarrow \psi(d) = \psi(\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d) = \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d),$$

Si $d \in \mathcal{H}$ y $0 \neq w \in \mathcal{H}$, $d + tw \in \mathcal{H}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, y se sigue de (2.6) que

$$\begin{aligned} \frac{\psi(d + tw) - \psi(d)}{t} &= \frac{\psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T(d + tw)) - \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d)}{t} \\ &= \frac{\psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d + t \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T w) - \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d)}{t}. \end{aligned}$$

Dado que $w = \mathcal{A}_{\mathcal{H}} \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T w$, se sigue que si $0 \neq w$, entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T w \neq 0$. Por tanto, de la definición de derivada direccional deducimos que existe $D_w \psi(d)$ si y solo si existe $= D_{\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T w} \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d)$. Si la función $\psi^{\mathcal{H}}$ es diferenciable en $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d$ se tiene

$$D_w \psi(d) = D_{\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T w} \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d) = \nabla \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T d) \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T w. \quad (2.7)$$

2.2.2

Funciones de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$

Definición 2.4. Se dice que $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, suave por sectores, es de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ si para cada hiperplano de separación de su partición asociada, \mathcal{H} , la función $\psi^{\mathcal{H}}$, definida en (2.6), es de clase $C^1(\mathbb{R} - \{0\})$.

La clase de funciones $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ está formada por funciones continuas, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, para las cuales existe una partición por sectores asociada de manera que la función es continuamente diferenciable en el interior de cada sector mientras que en los hiperplanos de separación se cumple que para cada $0 \neq x$, la función ψ admite derivadas direccionales en las direcciones del hiperplano (recta en \mathbb{R}^2), pero posiblemente no en la dirección normal a este. El origen de coordenadas se considera un punto singular, en el que la función podría no admitir ninguna derivada direccional.

Para esta clase de funciones se puede definir una aplicación

$$D\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que juega un papel similar al gradiente $\nabla\psi$ en funciones suaves, en el sentido de que la aplicación lineal asociada recupera todas las derivadas direccionales que tienen sentido. En efecto, si definimos

$$D\psi(0) := 0$$

$$x \neq 0, \quad D\psi(x) := \begin{cases} \nabla\psi(x) & \text{si } x \in \overset{\circ}{\Omega}_i \\ \nabla\psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T x) \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T & \text{si } x \in \partial\Omega_i \subset \mathcal{H}, \end{cases} \quad (2.8)$$

se cumple que $\forall x \neq 0$,

1. si $x \in \overset{\circ}{\Omega}_i$, $D\psi(x) = \nabla\psi_i(x)$, por tanto

$$D\psi(x)(v) = \nabla\psi_i(x)v = D_v\psi(x), \quad \forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^m. \quad (2.9)$$

2. si $x \in \partial\Omega_i \subset \mathcal{H}$, $D\psi(x) = \nabla\psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}^T d) \mathcal{A}^T w$. Por (2.7)

$$D\psi(x)(w) = D_w\psi(x), \quad \forall 0 \neq w \in \mathcal{H} \quad (2.10)$$

Las medias Power_p y Power_p ponderadas, objeto de esta memoria, son funciones de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ que satisfacen, además, la siguiente *propiedad de compatibilidad* sobre los hiperplanos (rectas) de separación que definen su partición asociada.

Definición 2.5. Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave por sectores y \mathcal{P} su partición por sectores asociada. Se dice que ψ satisface la **Propiedad de Compatibilidad (PC)** sobre \mathcal{P} si se verifica que

1. existe $\lim_{\substack{d \leftarrow p \in \overset{\circ}{\Omega}_k}} \nabla \psi_k(p)$, $\forall 0 \neq d \in \partial \Omega_k$, Ω_k sector de \mathcal{P}
2. si $0 \neq d \in \partial \Omega_k \subset \mathcal{H}$, hiperplano de separación de \mathcal{P} ,

$$\left(\lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\Omega}_k \\ p \rightarrow d}} \nabla \psi_i(p) \right) \cdot w = D_w \psi(d), \quad \forall 0 \neq w \in \mathcal{H}$$

Si $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave por sectores que verifica la PC (Def. 2.5), se puede definir también una aplicación

$$\widehat{D}\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

con propiedades similares a (2.8). Este resultado se establece en el siguiente lema, cuya prueba es inmediata.

Lema 2.1. Sea ψ una función suave por sectores que satisface la PC 2.5 sobre $\mathcal{P} = \{\Omega_i\}$, su partición por sectores asociada. Entonces la aplicación $\widehat{D}\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como

$$\widehat{D}\psi(0) := 0$$

$$0 \neq x \quad \widehat{D}\psi(x) := \begin{cases} \nabla \psi(x) & \text{si } x \in \overset{\circ}{\Omega}_i \\ \lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\Omega}_i \\ p \rightarrow x}} \nabla \psi(p) & \text{si } x \in \partial \Omega_i, \end{cases} \quad (2.11)$$

satisface (2.9),(2.10).

Notamos que si $0 \neq x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \subset \mathcal{H}$ con $i \neq j$, y

$$\lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\Omega}_i \\ p \rightarrow \hat{x}}} \nabla\psi_i(p) \neq \lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\Omega}_j \\ p \rightarrow \hat{x}}} \nabla\psi_j(p),$$

se puede definir $\widehat{D}\psi(x)$ en (2.11) de dos maneras diferentes. Sin embargo, la propiedad de compatibilidad (Def. 2.5) asegura que en ambos casos se sigue cumpliendo que $\forall w \in \mathcal{H}$

$$\left(\lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\Omega}_i \\ p \rightarrow \hat{x}}} \nabla\psi_i(p) \right) \cdot w = \left(\lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\Omega}_j \\ p \rightarrow \hat{x}}} \nabla\psi_j(p) \right) \cdot w = D_w\psi(x),$$

de manera que las aplicaciones lineales definidas mediante cualquiera de las expresiones del vector $\widehat{D}\psi(d)$ satisfacen

$$\widehat{D}\psi(d)w = D_w\psi(d), \quad \forall w \in \mathcal{H}.$$

Las observaciones anteriores justifican la siguiente definición.

Definición 2.6. Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave por sectores y $\mathcal{P} = \{\Omega_i\}$ una partición asociada. Diremos que la aplicación $D\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una **derivada admisible (o gradiente generalizado)** de ψ relativa a \mathcal{P} si $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

1. Si $x \in \overset{\circ}{\Omega}_i$, $D\psi(x)v = D_v\psi(x)$, $\forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^m$.
2. Si $x \in \partial\Omega_i \subset \mathcal{H}$, $D\psi(x)w = D_w\psi(x)$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{H}$

Al igual que sucede con la aplicación lineal asociada al gradiente en funciones suaves, la Definición 2.6 implica que la aplicación lineal asociada al vector $D\psi(x) \in \mathbb{R}^2$

$$D\psi(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad D\psi(x)(v) := D\psi(x)v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

recupera ciertas derivadas direccionales de la función ψ . En el interior de los sectores, donde la función es continuamente diferenciable, la derivada admisible recupera todas las derivadas direccionales, mientras que en los puntos situados en la frontera de los

sectores, y por tanto en las rectas que definen los hiperplanos de separación de la partición, la aplicación lineal asociada a una derivada admisible recupera las derivadas en la dirección de la recta que define el hiperplano de separación, pero no necesariamente en la dirección ortogonal a ella.

Notamos además, que las diferentes propuestas para el gradiente generalizado de una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ difieren únicamente para valores $0 \neq x \in \mathcal{H}$, con \mathcal{H} un hiperplano de separación en la partición asociada ψ . En concreto, la actuación de $D\psi(x)$ sobre los vectores $v \in \mathcal{H}^\perp = \langle w_{\mathcal{H}} \rangle$ puede ser diferente en las diferentes propuestas consideradas. En cualquier caso, si la función es de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$, se cumple la siguiente generalización del Teorema del Valor Medio Clásico A.1

Lema 2.2. *Sea ψ una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{P} = \{\Omega_i\}$ una partición por sectores asociada y $D\psi$ una derivada generalizada de ψ relativa a \mathcal{P} . Dados $x \neq y \in \mathbb{R}^m$, si*

1. $x, y \in \overset{\circ}{\Omega}_i$, ó

2. $x, y \in \partial\Omega_i$ y $\Gamma := \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\} \subset \partial\Omega_i - \{0\}$,

entonces $\exists \hat{t} \in (0, 1)$ tal que

$$\psi(x) - \psi(y) = D\psi(\xi)(x - y), \quad \xi = \hat{t}x + (1 - \hat{t})y$$

Demostración

Dados $x \neq y \in \mathbb{R}^2$, definimos $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := tx + (1-t)y = y + t(x - y),$$

de manera que $\gamma(0) = y$, $\gamma(1) = x$, $\gamma'(t) = x - y$, $\forall t$.

Consideramos la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = \psi(\gamma(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Supongamos que $x, y \in \overset{\circ}{\Omega}_i$ (notar que Ω_i es convexo y por tanto $\Gamma = \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\} \subset \overset{\circ}{\Omega}_i$). Puesto que $\psi \in C^1(\overset{\circ}{\Omega}_i)$, la regla de

la cadena implica que $g \in C^1((0, 1))$ y

$$g'(t) = \nabla \psi_i(\gamma(t))(x - y), \quad \forall t \in (0, 1).$$

Utilizando el TVM clásico A.1, $\exists \hat{t} \in (0, 1)$ tal que

$$\psi(x) - \psi(y) = g(1) - g(0) = g'(\hat{t}) = \nabla \psi_i(\gamma(\hat{t}))(x - y).$$

Definiendo $\xi := \gamma(\hat{t}) = y + \hat{t}(x - y)$ tenemos

$$\psi(x) - \psi(y) = \nabla \psi_i(\xi)(x - y) = D_{x-y} \psi(\xi) = D\psi(\xi)(x - y)$$

lo cual prueba el teorema en este caso.

Supongamos ahora $x, y \in \partial\Omega_i \subset \mathcal{H}$. En este caso $\gamma(t) \in \mathcal{H} \forall t \in \mathbb{R}$ y

$$g(t) = \psi(\gamma(t)) = \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(t)).$$

Si, además, $\Gamma \subset \Omega_i - \{0\}$, entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(t) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$ y existe $\mathcal{V} \subset \mathbb{R} - \{0\}$, abierto, tal que $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(t) \in \mathcal{V}, \forall t \in [0, 1]$. De nuevo, dado que $\psi^{\mathcal{H}} \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$, la regla de la cadena permite deducir que $g \in C^1((0, 1))$ y

$$g'(t) = \nabla \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(t)) \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T(x - y), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Por tanto, utilizando de nuevo el TVM clásico $\exists \hat{t} \in (0, 1)$, tal que

$$\psi(x) - \psi(y) = \nabla \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(\hat{t})) \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T(x - y)$$

Definiendo $\xi := \gamma(\hat{t})$, tenemos

$$\psi(x) - \psi(y) = \nabla \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T(\xi)) \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T(x - y) = D_{x-y} \psi(\xi) = D\psi(\xi)(x - y)$$

en virtud de (2.7), dado que $0 \neq x - y \in \mathcal{H}$. ■

Como hemos observado anteriormente, si $\psi \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$, podemos definir un gradiente generalizado a partir de los gradientes de la función en los sectores de la partición (es decir, sin necesidad de utilizar las funciones $\psi^{\mathcal{H}}$ correspondientes a los hiperplanos de separación de la partición por sectores asociada a ψ) que también verificará el Lema 2.2. Veremos a continuación que si, además, estos gradientes están uniformemente acotados, las aplicaciones lineales asociadas están también uniformemente acotadas.

En adelante supondremos siempre que $D\psi(0) = 0$, para cualquier gradiente generalizado de $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, suave por sectores.

Lema 2.3. Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave por sectores que satisface la PC (Def. 2.5) sobre su partición por sectores asociada, \mathcal{P} . Supongamos que $\exists C > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \overset{\circ}{\Omega}} \|\nabla \psi_i(x)\|_1 = C \quad \forall \Omega \in \mathcal{P}, \quad (2.13)$$

entonces $\forall x \in \mathbb{R}^m$ el vector $\widehat{D}\psi(x) \in \mathbb{R}^m$ en (2.11) satisface

$$\|\widehat{D}\psi(x)\|_1 \leq C. \quad (2.14)$$

Demostración

Como $\widehat{D}\psi(0) = 0$, supondremos que $0 \neq x \in \mathbb{R}^m$. Si $x \in \overset{\circ}{\Omega}_i$, $\widehat{D}\psi(x) = \nabla \psi_i(x)$, por tanto, $\|\widehat{D}\psi(x)\|_1 = \|\nabla \psi_i(x)\|_1 \leq C$. Por otra parte, si $x \in \partial \Omega_i$ y $\widehat{D}\psi(x) = \lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\Omega}_i \\ p \rightarrow x}} \nabla \psi_i(p)$, entonces

$$\|\widehat{D}\psi(x)\|_1 = \left\| \lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\Omega}_i \\ p \rightarrow x}} \nabla \psi_i(p) \right\|_1 = \lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\Omega}_i \\ p \rightarrow x}} \|\nabla \psi_i(p)\|_1 \leq C.$$

■

Corolario 2.1. Si ψ satisface las hipótesis del Lema 2.3, la aplicación lineal $\widehat{D}\psi(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ asociada a la derivada admisible (2.11) satisface

$$\|\widehat{D}\psi(x)\|_\infty \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \quad (2.15)$$

Demostración

Puesto que $\forall v \in \mathbb{R}^m$,

$$|D\psi(x)(v)| = |D\psi(x)v| \leq \|D\psi(x)\|_1 \|v\|_\infty,$$

tenemos

$$\|D\psi(x)\|_\infty = \max_{\|v\|_\infty=1} |D\psi(x)v| \leq \|D\psi(x)\|_1 \leq C.$$

Como indica este resultado, las funciones de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ que satisfacen la PC (Def. 2.5) y (2.13) siempre admiten un *Gradiente Generalizado* de manera que la aplicación lineal asociada $\forall x \in \mathbb{R}^n$ está uniformemente acotada (por la cota (uniforme) de los gradientes de la función en el interior de los sectores). En consecuencia para estas funciones, todas las derivadas direccionales 'con sentido' tienen también una cota común.

Corolario 2.2. *Sea ψ como en el Lema 2.3, entonces*

1. $\forall x \in \overset{\circ}{\Omega}_i \quad |D_v \psi(x)| \leq C \|v\|_\infty \quad \forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^m$
2. $\forall x \in \partial\Omega_i \subset \mathcal{H} \quad |D_v \psi(x)| \leq C \|v\|_\infty \quad \forall 0 \neq v \in \mathcal{H},$

Demostración

La derivada admisible definida en (2.11) satisface

1. si $x \in \overset{\circ}{\Omega}_i$, entonces $\forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^m \quad D_v \psi(x) = \widehat{D} \psi(x) v$
2. si $x \in \partial\Omega_i \subset \mathcal{H}$ y $0 \neq v \in \mathcal{H}$, $D_v \psi(x) = \widehat{D} \psi(x) v$,

por tanto las acotaciones se deducen directamente del corolario anterior.

Como veremos a continuación, estos resultados permiten probar de manera directa que toda función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ que satisface la PC (Def. 2.5) y cuyas derivadas están acotadas en el interior de los sectores de la partición es Lipschitz.

Teorema 2.1. *Si $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las hipótesis del Lema 2.3, entonces $\exists C > 0$ tal que*

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq C \|x - y\|_\infty, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

Demostración

Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, definimos la recta

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := tx + (1-t)y = y + t(x-y),$$

para la cual

$$\gamma(0) = y, \quad \gamma(1) = x, \quad \gamma'(t) = x - y, \quad \forall t.$$

La recta $\gamma(t)$ define un subespacio de dimensión 1 en \mathbb{R}^2 , por tanto, si \mathcal{H} es un hiperplano de separación en la partición por sectores asociada a ψ (es decir, una recta que pasa por el origen de coordenadas), o bien $\gamma(t) \subset \mathcal{H}$ o bien existe un único punto de corte, o bien no hay puntos de corte (la recta $\gamma(t)$ es *paralela* al hiperplano).

Las acotaciones se obtienen teniendo en cuenta la situación del segmento que une x e y , $\Gamma = \{\gamma(t), t \in [0, 1]\}$, con respecto a los hiperplanos de separación en la partición, \mathcal{P} , asociada a ψ . Distinguiremos los siguientes casos, que cubren todas las posibles situaciones,

[Caso 1]: $x \in \overset{\circ}{\Omega}_i, y \in \overset{\circ}{\Omega}_i$ o $y = 0$ o $0 \neq y \in \partial\Omega_i$. Entonces $\gamma(t) \in \overset{\circ}{\Omega}_i, \forall t \in (0, 1)$, ver Figuras 2.2 (a)-(b). Por lo tanto, utilizando el Teorema A.2 y el Corolario 2.2 tenemos

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(y)| &= \left| \int_0^1 \nabla \psi_i(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| = \left| \int_0^1 D_{x-y} \psi(\gamma(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |D_{x-y} \psi(\gamma(t))| dt \leq C \|y - x\|_\infty. \end{aligned}$$

[Caso 2]: $x, y \in \partial\Omega_i \subset \mathcal{H}$. Notar que en este caso $\gamma(t) \in \mathcal{H}, \forall t$. Como $\gamma'(t) = x - y \in \mathcal{H}$ podemos escribir

$$\psi(x) - \psi(y) = \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T x) - \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T y).$$

Supongamos que $\gamma(t) \neq 0 \forall t \in (0, 1)$, ver Figura 2.2-(c). En ste caso $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(t) \neq 0, \forall t \in (0, 1)$ y podemos aplicar el Teorema A.2 a la curva $\gamma_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y la función $\psi^{\mathcal{H}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para escribir

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(y)| &= \left| \int_0^1 \nabla \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(t)) \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma'(t) dt \right| = \left| \int_0^1 D_{x-y} \psi(\gamma(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |D_{x-y} \psi(\gamma(t))| dt \leq C \|y - x\|_\infty. \end{aligned}$$

gracias al Corolario 2.2.

Por otra parte, si $x, y \in \partial\Omega_i$ y $0 = \gamma(\hat{t})$ con $\hat{t} \in (0, 1)$, utilizando el argumento anterior podemos escribir,

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(y)| &\leq |\psi(x) - \psi(\gamma(\hat{t}))| + |\psi(\gamma(\hat{t})) - \psi(y)| \\ &\leq \int_0^{\hat{t}} |D_{x-y}\psi(\gamma(t))| dt + \int_{\hat{t}}^1 |D_{x-y}\psi(\gamma(t))| dt \\ &\leq \int_0^{\hat{t}} C\|y - x\|_\infty + \int_{\hat{t}}^1 C\|y - x\|_\infty \leq C\|y - x\|_\infty. \end{aligned}$$

[Caso 3]: Si no se da ninguno de los casos anteriores, entonces $x \in \Omega_i$ e $y \in \Omega_j$ con $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, ver Figura 2.2-(d). Supongamos que los valores $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$ corresponden a los puntos de corte $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k)$ del segmento Γ con los hiperplanos de separación de \mathcal{P}^1 . Definiendo $t_0 = 0$ y $t_{k+1} = 1$, y teniendo en cuenta que para $l = 0, \dots, k$ $\gamma|_{(t_l, t_{l+1})}$ está contenido en el interior de alguno de los sectores de la partición, podemos utilizar de nuevo el argumento del Caso 1 y el Teorema A.2 en cada sector para escribir

$$\psi(x) - \psi(y) = \sum_{l=0}^k (\psi(\gamma(t_{l+1})) - \psi(\gamma(t_l))) = \sum_{l=0}^k \int_{t_l}^{t_{l+1}} D_{x-y}\psi(\gamma(t)) dt.$$

Razonando como en los casos anteriores, tenemos

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq C\|x - y\|_\infty \sum_{l=0}^k (t_{l+1} - t_l) = C\|x - y\|_\infty,$$

lo cual completa la demostración. ■

El siguiente resultado establece la extensión de la regla de la cadena para la composición $\psi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cuando $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continua y derivable casi por todas partes (c.p.p. en adelante).

¹hay un número finito de puntos de corte de la recta $\gamma(t)$ con los hiperplanos de separación de la partición por sectores asociada a ψ .

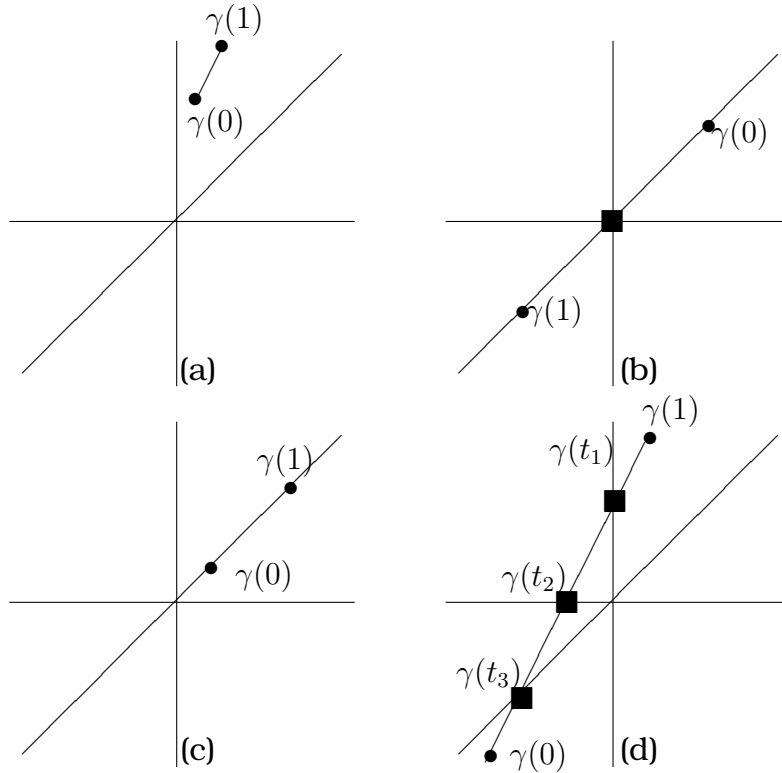


Figura 2.2: Diferentes posibilidades para las intersecciones de $\gamma(t)$ con los hiperplanos de separación en la partición por sectores asociada a $H_1(x, y)$.

Teorema 2.2. ([30]-Lema 2.7) Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ y $D\psi$ una derivada admisible de ψ relativa a \mathcal{P} , partición por sectores asociada a ψ . Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva continua en $[a, b]$ y derivable c.p.p. en (a, b) , entonces $\tilde{\gamma} := \psi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es también derivable c.p.p. en (a, b) , y

$$\tilde{\gamma}'(t) = D\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad (2.16)$$

Demostración

Si $\mathcal{P} = \{\Omega_i\}_{i=1}^N$ la partición por sectores asociada a ψ , definimos

$$E := \{t \in (a, b) : \exists \gamma'(t)\}$$

$$E_i := \{t \in (a, b) : \gamma(t) \in \overset{\circ}{\Omega}_i\} \cap E.$$

$$\widehat{E}_i := \{t \in (a, b) : 0 \neq \gamma(t) \in \partial\Omega_i\} \cap E.$$

$$E_0 := \{t \in (a, b) : \gamma(t) = 0\} \cap E.$$

Puesto que E es denso en $(0, 1)$, y \mathcal{P} es una partición por sectores,

$$E = (\cup_i E_i) \cup (\cup_i \widehat{E}_i) \cup E_0$$

Si F_i es el conjunto de puntos aislados en E_i , \widehat{F}_i el conjunto de puntos aislados en \widehat{E}_i , y F_0 el conjunto de puntos aislados en E_0 , definimos

$$F = (\cup_i F_i) \cup (\cup_i \widehat{F}_i) \cup F_0.$$

Notar que cada uno de estos conjuntos es numerable², por tanto el conjunto F es también numerable y, en consecuencia, $\widetilde{E} = E - F$ es denso en $[a, b]$. Veremos a continuación que $\forall t \in \widetilde{E}$ existe $\widetilde{\gamma}'(t)$ y

$$\widetilde{\gamma}'(t) = D\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

lo cual prueba el teorema.

En efecto, sea $t \in \widetilde{E}$, entonces se pueden dar los siguientes casos

1. $\exists i: \gamma(t) \in \overset{\circ}{\Omega}_i$
2. $\exists i: 0 \neq \gamma(t) \in \partial\Omega_i$
3. $\gamma(t) = 0$

Analicemos estos casos por separado.

[Caso 1] Supongamos que $t \in \widetilde{E}$ y $\gamma(t) \in \overset{\circ}{\Omega}_i$. Como $t \notin F_i$,

$$\exists h_t > 0 : \quad \forall s, |s - t| < h_t \quad \exists \gamma'(s) \quad \text{y} \quad \gamma(s) \in \overset{\circ}{\Omega}_i.$$

² \mathbb{R} verifica el segundo axioma de numerabilidad, es decir, existe una base numerable de abiertos.

Por tanto, para $h < h_t$ $\gamma(t+h)$, $\gamma(t) \in \overset{\circ}{\Omega}_i$ y el segmento que une ambos puntos también está contenido en $\overset{\circ}{\Omega}_i$ (por tratarse de un conjunto convexo). Así, el Lema 2.2 permite escribir

$$\psi(\gamma(t+h)) - \psi(\gamma(t)) = D\psi(\xi_h) \cdot (\gamma(t+h) - \gamma(t)),$$

donde $\xi_h \in \mathbb{R}^m$ es un punto del segmento que une $\gamma(t+h)$ y $\gamma(t)$. Notar que $\xi_h \rightarrow \gamma(t)$ cuando $h \rightarrow 0$. Puesto que

$$\frac{\tilde{\gamma}(t+h) - \tilde{\gamma}(t)}{h} = \frac{\psi(\gamma(t+h)) - \psi(\gamma(t))}{h} = D\psi(\xi_h) \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h},$$

solo necesitamos probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} D\psi(\xi_h) \cdot \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = D\psi(\gamma(t))\gamma'(t). \quad (2.17)$$

Como $\xi_h \in \overset{\circ}{\Omega}_i$, $D\psi(\xi_h) = \nabla\psi_i(\xi_h)$. Dado que $\psi_i \in C^1(\overset{\circ}{\Omega}_i)$, $\xi_h \rightarrow \gamma(t)$ y $t \in E$, el límite existe y se obtiene directamente (2.17).

[Caso 2] Supongamos que $t \in \tilde{E}$ y $0 \neq \gamma(t) \in \partial\Omega_i$. Como $t \notin \hat{F}_i$,

$$\exists h_t > 0 : \quad \forall s, |s-t| < h_t \quad \exists \gamma'(s) \quad \text{y} \quad 0 \neq \gamma(s) \in \partial\Omega_i$$

Como γ es continua y $\gamma(t) \neq 0$, si consideramos $\delta : 0 < \delta < \|\gamma(t)\|_2$ existe $h_\delta > 0$ tal que $\forall s : |s-t| < h_\delta$ se cumple que $\gamma(s) \in B(\gamma(t), \delta)$ (y por tanto $\gamma(s) \neq 0$).

Así, si tomamos $h < \min\{h_t, \delta\}$ y \mathcal{H} es un hiperplano de separación en \mathcal{P} tal que $\partial\Omega_i \subset \mathcal{H}$, se cumple que $\gamma(t+h) \in \partial\Omega_i \cap B(\gamma(t), \delta)$ y, por tanto, el segmento que une $\gamma(t+h)$ y $\gamma(t)$ está contenido en $\mathcal{H} \cap B(\gamma(t), \delta)$. Así, el Lema 2.2 permite escribir

$$\psi(\gamma(t+h)) - \psi(\gamma(t)) = D\psi(\xi_h) \cdot (\gamma(t+h) - \gamma(t)),$$

con $\xi_h \in \mathbb{R}^m$ un punto del segmento que une $\gamma(t+h)$ y $\gamma(t)$. Por tanto, razonando como en el caso anterior, es suficiente con probar que se satisface (2.17).

Dado que $\xi_h \in B(\gamma(t), \delta) \cap \mathcal{H}$, y $\gamma(t+h) - \gamma(t) \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$D\psi(\xi_h) \cdot (\gamma(t+h) - \gamma(t)) = \nabla\psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \xi_h) \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T (\gamma(t+h) - \gamma(t)).$$

Puesto que $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = \gamma(t)$ y $\psi^{\mathcal{H}} \in C^1(\mathbb{R}^{m-1} - \{0\})$ se cumple que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \nabla \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \xi_h) = \nabla \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(t)),$$

y por tanto, tomando límites y aplicando (2.10) tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} D\psi(\xi_h) \cdot \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \nabla \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \xi_h) \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \\ &= \nabla \psi^{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma(t)) \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^T \gamma'(t) \\ &= D\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t). \end{aligned}$$

[Caso 3] Supongamos que $\gamma(t) = 0$. Como $t \notin F_0$,

$$\exists h_t > 0 : \quad \gamma|_{[t-h, t+h]} \equiv 0, \quad \forall h \leq h_t,$$

de donde se deduce que $\gamma'(t) = 0$. De manera análoga, para h suficientemente pequeño,

$$\tilde{\gamma}|_{[t-h, t+h]} = \psi(\gamma|_{[t-h, t+h]}) \equiv \psi(0) = 0$$

de donde deducimos que $\tilde{\gamma}'(t) = 0 = D\psi(\gamma(t))\gamma'(t)$. ■

El siguiente corolario recoge los principales resultados que se utilizarán en el análisis de los esquemas de subdivisión objeto de esta memoria.

Corolario 2.3. *Sea ψ una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ y $D\psi$ un gradiente generalizado (relativo a la partición por sectores asociada a ψ). Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva Lipschitz, entonces*

$$(\psi \circ \gamma)'(t) = D\psi(\gamma(t))\gamma'(t), \quad \text{c.p.p en } (a, b) \quad (2.18)$$

Además, si ψ satisface la PC (Def. 2.5) y (2.13) sobre su partición asociada, $\exists C > 0$ tal que

$$|\psi \circ \gamma(b) - \psi \circ \gamma(a)| \leq C \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\infty} \quad (2.19)$$

Demostración

Puesto que una curva Lipschitz es continua y derivable c.p.p., (2.18) se deduce directamente del Teorema 2.2. Así,

$$\psi \circ \gamma(b) - \psi \circ \gamma(a) = \int_a^b (\psi \circ \gamma)'(t) dt = \int_a^b D\psi(\gamma(t))\gamma'(t) dt,$$

para cualquier derivada admisible $D\psi$. Si ψ satisface la PC (Def. 2.5) y (2.13) sobre su partición asociada, podemos utilizar la derivada admisible definida en (2.11) (a partir de los gradientes de la función en los sectores). Deducimos (2.19) del Corolario 2.1. ■

Nota 2.1. Notamos que la constante C de (2.13) satisface (2.19).

Las funciones que aparecen en los esquemas de subdivisión considerados en esta memoria son combinaciones lineales de funciones de la forma $\psi \circ M$ con $M \in \mathbb{R}^{2 \times p}$ una aplicación de rango máximo ($p \geq 2$) y $\psi \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$. Estudiaremos a continuación las propiedades de diferenciabilidad de esta clase de funciones

2.2.3**Composición con aplicaciones lineales**

Sea $M : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal con $\text{rank}(M) = 2 \leq p$, y $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$. Es fácil establecer un resultado análogo al Teorema 2.2 para $\tilde{\psi} = \psi \circ M : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$.

Corolario 2.4. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ una curva continua en $[a, b]$ y derivable c.p.p. en (a, b) , $M : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal con $\text{rank}(M) = 2 \leq p$, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ y $D\psi$ una derivada admisible relativa a \mathcal{P} , partición asociada a ψ . Si $\tilde{\gamma} = \psi \circ M \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\tilde{\gamma}'(t) = D\psi(M\gamma(t))M\gamma'(t) \quad \text{c.p.p. en } (a, b)$$

Demostración

Notar que $M \circ \gamma = \gamma_M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continua en $[a, b]$ y derivable c.p.p. en (a, b) , con $\gamma'_M(t) = M\gamma'(t)$ c.p.p. en (a, b) . Por tanto, aplicando el Teorema 2.2 a $\psi \circ \gamma_M$ obtenemos que $\tilde{\gamma} = \psi \circ M \circ \gamma$ es derivable c.p.p. en (a, b) , y satisface

$$\tilde{\gamma}'(t) = D\psi(\gamma_M(t))\gamma'_M(t) = D\psi(M(\gamma(t)))M\gamma'(t)$$

c.p.p. en (a, b) . ■

El resultado anterior induce a considerar la aplicación

$$D\tilde{\psi} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \quad D\tilde{\psi}(x) = D\psi(Mx)M \quad (2.20)$$

como un *Gradiente Generalizado* para la función $\tilde{\psi} = \psi \circ M$. En esta sección veremos que la aplicación lineal asociada a $D\tilde{\psi}(x)$ en (2.20) recupera ciertas derivadas direccionales de la función $\tilde{\psi}$ (aquellas que tienen sentido).

Derivadas direccionales

Empezamos observando que si $M : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal con $\text{rank}(M) = m \leq p$, y $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave por sectores, es posible estudiar de manera relativamente sencilla las propiedades de diferenciabilidad de la función

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\psi}(y) = \psi(My), \quad y \in \mathbb{R}^p.$$

Dado que

$$\tilde{\psi}(y + tv) - \tilde{\psi}(y) = \psi(My + tMv) - \psi(My), \quad \forall y, v \in \mathbb{R}^p$$

tenemos

$$\frac{\tilde{\psi}(y + tv) - \tilde{\psi}(y)}{t} = \frac{\psi(My + tMv) - \psi(My)}{t}. \quad (2.21)$$

Así, si $v \neq 0$, podemos deducir

1. si $v \in \ker M$, existe $D_v\tilde{\psi}(y) \forall y \in \mathbb{R}^p$ y $D_v\tilde{\psi}(y) = 0$.

2. si $v \notin \ker M$, entonces $\exists D_v \tilde{\psi}(y)$ si y solo si $\exists D_{Mv} \psi(My)$ y

$$\begin{aligned} D_v \tilde{\psi}(y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\psi}(y + tv) - \tilde{\psi}(y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(My + tMv) - \psi(My)}{t} = D_{Mv} \psi(My). \end{aligned} \quad (2.22)$$

La existencia de derivadas direccionales de la función $\tilde{\psi} = \psi \circ M$ en $y \in \ker M$ no está garantizada si ψ es suave por sectores. Notar que si $\psi(0) = 0$, entonces $\tilde{\psi}(0) = M\psi(0) = 0$ y que (2.21) permite afirmar que si $y \in \ker M$ y $Mv \neq 0$, entonces $\exists D_v \tilde{\psi}(y)$ si y solo si $\exists D_{Mv} \psi(0)$.

Como veremos a continuación, el subespacio $\ker M \subset \mathbb{R}^p$ juega un papel similar para la función $\tilde{\psi}$ al del origen de coordenadas para la función ψ .

La partición M-asociada

Supongamos que $M : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal con $\text{rank}(M) = m \leq p$. Veamos que M establece una correspondencia natural entre hiperplanos de \mathbb{R}^m e hiperplanos de \mathbb{R}^p que contienen a $\ker M$. De manera análoga, un sector en \mathbb{R}^m se asocia de manera natural a un sector en \mathbb{R}^p a través de M . En consecuencia, probaremos que toda partición por sectores de \mathbb{R}^m , $\mathcal{P} = \{\Omega_i\}_i$, tiene una partición por sectores M -asociada en \mathbb{R}^p .

Lema 2.4. Sea $M \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\text{rango}(M) = m \leq p$, y $\mathcal{H} = \langle w_{\mathcal{H}} \rangle^{\perp}$ un hiperplano en \mathbb{R}^m , entonces

$$\tilde{\mathcal{H}} := \langle M^T w_{\mathcal{H}} \rangle^{\perp} = \{y \in \mathbb{R}^p : My \in \mathcal{H}\} \quad (2.23)$$

es un hiperplano en \mathbb{R}^p (M -asociado a \mathcal{H}) y $\ker M \subset \tilde{\mathcal{H}}$.

Demostración

Notar que $\tilde{\mathcal{H}} := \langle M^T w_{\mathcal{H}} \rangle^\perp$ es un hiperplano si y solo si $M^T w_{\mathcal{H}} \neq 0$. Como $\text{rank}(M) = m$, las m filas de M forman un conjunto linealmente independiente de vectores en \mathbb{R}^p . Por tanto

$$M^T w_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^m (w_{\mathcal{H}})_i M[i, :] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_{\mathcal{H}} = 0.$$

Para comprobar que $\tilde{\mathcal{H}} = \{y \in \mathbb{R}^p : My \in \mathcal{H}\}$ basta observar que dado $y \in \mathbb{R}^m$,

$$My \in \mathcal{H} \Leftrightarrow 0 = (My)^T w_{\mathcal{H}} = y^T M^T w_{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow y \in \tilde{\mathcal{H}}$$

■

Proposición 2.1. Si $\mathcal{P} = \{\Omega_i\}_{i=1}^N$ es una partición por sectores de \mathbb{R}^m , entonces $\mathcal{P}_M = \{\tilde{\Omega}_i\}_{i=1}^N$, con

$$\tilde{\Omega}_i := \{y \in \mathbb{R}^p : My \in \Omega_i\}, \quad (2.24)$$

es una partición por sectores de \mathbb{R}^p . Además,

$$\overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i = \{y \in \mathbb{R}^p : My \in \overset{\circ}{\Omega}_i\} \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.25)$$

Demostración

Comenzamos observando que si $\mathcal{H} = \langle w_{\mathcal{H}} \rangle^\perp$ y $\tilde{\mathcal{H}}$ es el hiperplano M -asociado, entonces $\forall y \in \mathbb{R}^p$

$$g_{\tilde{\mathcal{H}}}(y) = (M^T w_{\mathcal{H}})y = g_{\mathcal{H}}(My)$$

por tanto, si Ω es la intersección de k semiespacios, asociados a $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_k$, entonces el conjunto $\tilde{\Omega}$ en (2.24) coincide con la intersección de los correspondientes semiespacios asociados a los hiperplanos $\tilde{\mathcal{H}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{H}}_k$.

Observamos además que si Ω es un sector en \mathbb{R}^m y $z \in \overset{\circ}{\Omega}$, entonces $M^+z \in \{y \in \mathbb{R}^p : My \in \overset{\circ}{\Omega}\}$, con M^+ la matriz pseudoinversa de M^3 , ya que $MM^+z = z$ (ver sección A.5).

³Si M tiene rango máximo, $M^+ = M^T(MM^T)^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$

Realizamos la prueba de (2.25) por doble inclusión. En adelante $\|\cdot\|$ designa la norma-2 y $\tilde{\Omega}$ el sector en \mathbb{R}^p M -asociado a $\Omega \in \mathbb{R}^m$

• $\tilde{\tilde{\Omega}} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^p, : My \in \overset{\circ}{\Omega}\}$: Sea $y \in \tilde{\tilde{\Omega}} \in \mathbb{R}^p$, y $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subset \tilde{\tilde{\Omega}}$. Veamos que

$$B(My, \delta') \subset \Omega \quad \text{si } \delta' \leq \delta / \|M^+\| > 0,$$

Sea $x \in B(My, \delta')$. Si $z := y + M^+(x - My) \in \mathbb{R}^p$, entonces

1. $z \in B(y, \delta) \subset \tilde{\tilde{\Omega}}$ ya que de la definición de z se deduce

$$\|y - z\| = \|M^+(My - x)\| \leq \|M^+\| \|My - x\| < \|M^+\| \delta' \leq \delta.$$

2. $Mz = My + MM^+(x - My) = My + x - My = x$. Por tanto $x \in \Omega$.

• $\tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}} \supseteq \{y \in \mathbb{R}^p, : My \in \overset{\circ}{\Omega}\}$: Sea $y \in \mathbb{R}^p : My \in \overset{\circ}{\Omega}$, y $\delta' > 0$ tal que $B(My, \delta') \subset \Omega$. Veamos que

$$B(y, \delta) \subset \tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}} \quad \text{con } \delta \leq \frac{\delta'}{\|M\|} > 0.$$

En efecto, notemos que $\forall z \in B(y, \delta)$

$$\|Mz - My\| \leq \|M\| \|y - z\| < \|M\| \delta \leq \delta'$$

es decir, $Mz \in B(My, \delta') \subset \Omega$, por tanto $z \in \tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}}$.

Veamos ahora que

$$\cup_{i=1}^N \Omega_i = \mathbb{R}^m \quad \Rightarrow \quad \cup_{i=1}^N \tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}}_i = \mathbb{R}^p.$$

En efecto, si $x \in \mathbb{R}^p$ entonces $Mx \in \mathbb{R}^m$, por tanto $\exists i: Mx \in \Omega_i$, es decir $x \in \tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}}_i$.

Veamos por último que $(\tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}}_i \cap \tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}}_j)^\circ = \emptyset$ i $i \neq j$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $x \in (\tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}}_i \cap \tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}}_j)^\circ$, entonces $\exists \delta > 0$: $B(x, \delta) \subset \tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}}_i \cap \tilde{\tilde{\tilde{\Omega}}}_j$ y por tanto $MB(x, \delta) \subset \Omega_i \cap \Omega_j$. Como M es continua,

$$\exists \mu > 0 \quad : \quad B(Mx, \mu) \subset MB(x, \delta) \subset \Omega_i \cap \Omega_j,$$

con lo que se obtendría que $Mx \in (\Omega_i \cap \Omega_j)^\circ = \emptyset$. ■

Como veremos a continuación, las propiedades de diferenciabilidad de $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ en los sectores de \mathcal{P} se mantienen para $\tilde{\psi} = \psi \circ M$ en los correspondientes sectores M -asociados, y también las propiedades de acotación de las derivadas.

Proposición 2.2. Sea ψ una función suave por sectores y \mathcal{P} su partición asociada. Si $M \in \mathbb{R}^{m \times p}$ con rango $m \leq p$, y $\tilde{\psi} = \psi \circ M$, entonces $\forall \tilde{\Omega}_i \in \mathcal{P}_M$

$$\tilde{\psi}_i := \tilde{\psi}|_{\tilde{\Omega}_i} \in C^1(\overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i); \quad \nabla \tilde{\psi}_i = \nabla \psi(My)M \quad \forall y \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i, \quad (2.26)$$

$$\sup_{y \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i} \|\nabla \tilde{\psi}_i(y)\|_1 \leq \|M\|_\infty \sup_{x \in \overset{\circ}{\Omega}_i} \|\nabla \psi_i(x)\|_1. \quad (2.27)$$

Demostración

Dado que $y \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i \leftrightarrow My \in \overset{\circ}{\Omega}_i$, que $\psi \in C^1(\overset{\circ}{\Omega}_i)$, y que M es una aplicación lineal, las reglas de diferenciación habituales (regla de la cadena) permiten escribir

$$\nabla \tilde{\psi}(y) = \nabla(\psi M)(y) = \nabla \psi(My)M, \quad \forall y \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i$$

lo cual implica que $\tilde{\psi} \in C^1(\overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i)$. Además, $\forall y \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i$

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{\psi}(y)\|_1 &= \|\nabla \psi(My)M\|_1 \leq \|M^T\|_1 \|\nabla \psi(My)\|_1 \\ &\leq \|M\|_\infty \sup_{x \in \overset{\circ}{\Omega}_i} \|\nabla \psi_i(x)\|_1 \end{aligned}$$

de donde se deduce (2.27). ■

Funciones de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^m)$, $m > 2$

Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ y \mathcal{P} su partición asociada. Si $M \in \mathbb{R}^{m \times p}$ de rango máximo ($m \leq p$), es evidente que $\tilde{\psi} = \psi \circ M : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \in C(\mathbb{R}^p)$. Además, los resultados de la sección anterior permiten afirmar que $\tilde{\psi}$ es continuamente diferenciable en el interior de cada sector de \mathcal{P}_M , la partición M -asociada a \mathcal{P} .

Veremos en esta sección que si $D\psi$ es un gradiente generalizado para ψ , entonces para cada $y \in \mathbb{R}^p$, la aplicación (2.20) define un

vector $D\tilde{\psi}(y) := D\psi(My)M$ que recupera ciertas derivadas direccionales (aquellas que tienen sentido). En efecto, si $y \in \mathbb{R}^p$, como \mathcal{P}_M es una partición de \mathbb{R}^p , $\exists i : y \in \tilde{\Omega}_i$. Por tanto, se ha de cumplir uno de los dos supuestos siguientes

1. $y \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i \equiv My \in \overset{\circ}{\Omega}_i$ y por tanto $\exists D_{Mv}\psi(My) = D_v\tilde{\psi}(y)$ siempre que $Mv \neq 0$. Así, $\forall v \notin \ker M$,

$$D_v\tilde{\psi}(y) = D_{Mv}\psi(My) = D\psi(My)Mv = D\tilde{\psi}(y)v$$

por ser $D\psi$ una derivada admisible de ψ . Además, $\forall v \in \ker M$ se cumple $D_v\tilde{\psi}(y) = 0 = D\psi(My)Mv$, y podemos afirmar que

$$y \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i \Rightarrow \exists D_v\tilde{\psi}(y) = D\tilde{\psi}(y)v \quad \forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^p$$

2. $y \in \partial\tilde{\Omega}_i \subset \tilde{\mathcal{H}} \equiv My \in \partial\Omega_i \subset \mathcal{H}$. En este caso, consideramos las dos opciones siguientes:
 - $y \notin \ker M$, entonces $\exists D_{Mv}\psi(My)$ siempre que $0 \neq Mv \in \mathcal{H}$ y

$$D_v\tilde{\psi}(y) = D_{Mv}\psi(My) = D\psi(My)Mv = D\tilde{\psi}(y)v.$$

De nuevo, si $v \in \ker M$ $D_v\tilde{\psi}(y) = 0 = D\psi(My)Mv$. Por tanto, podemos afirmar que

$$y \in \partial\tilde{\Omega}_i \subset \tilde{\mathcal{H}}, y \notin \ker M \Rightarrow \exists D_v\tilde{\psi}(y) = D\tilde{\psi}(y)v \quad \forall 0 \neq v \in \tilde{\mathcal{H}}$$

- $y \in \ker M$, notamos que $D\tilde{\psi}(y) = D\psi(My)M = 0$. Así, $\ker M \subset \mathbb{R}^p$ está M -asociado a $x = 0 \in \mathbb{R}^2$, y juega un papel similar al del origen de coordenadas para la función ψ .

Sumarizando, $D\tilde{\psi}(\cdot) = D\psi(M\cdot)M$ satisface

1. $\forall y \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i, D\tilde{\psi}(y)v = D_v\tilde{\psi}(y), \forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^p$
2. $\forall y \in \partial\tilde{\Omega}_i \subset \tilde{\mathcal{H}}, y \notin \ker M, D\tilde{\psi}(y)v = D_v\tilde{\psi}(y), \forall 0 \neq v \in \tilde{\mathcal{H}}$
3. $\forall y \in \ker M, D\tilde{\psi}(y) = 0$.

Si ψ es una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ que cumple la PC (Def. 2.5), entonces esta propiedad de compatibilidad se cumple también en los puntos de los hiperplanos M -asociados a los hiperplanos de separación de \mathcal{P} , excepto quizá en los puntos de $\ker M$.

Proposición 2.3. *Sea ψ una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ que satisfice la PC (Def. 2.5), $M \in \mathbb{R}^{2 \times p}$, $\text{rank}(M) = 2 \leq p$ y $\tilde{\psi} = \psi \circ M$. Entonces, $\forall d \in \partial\tilde{\Omega}_i \subset \tilde{\mathcal{H}}$, con $Md \neq 0$*

1. existe $\lim_{d \leftarrow p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i} \nabla \tilde{\psi}(p)$,
2. $\forall v \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\left(\lim_{d \leftarrow p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i} \nabla \tilde{\psi}(p) \right) v = D_v \tilde{\psi}(d)$.

Demostración

Si $p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_i$, por (2.26), $\nabla \tilde{\psi}(p) = \nabla \psi(Mp)M$. Como M es continua, $p \rightarrow d \Rightarrow Mp \rightarrow Md \neq 0$, por tanto existe $\lim_{d \leftarrow p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_k} \nabla \psi(Mp)$, y en consecuencia se verifica el apartado 1, ya que

$$\lim_{d \leftarrow p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_k} \nabla \tilde{\psi}(p) = \lim_{d \leftarrow p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_k} \nabla \psi(Mp)M. \quad (2.28)$$

Supongamos ahora que $v \in \tilde{\mathcal{H}} (\equiv Mv \in \mathcal{H})$. Si $Mv \neq 0$, como $0 \neq Md \in \partial\Omega_i$,

$$D_v \tilde{\psi}(d) = D_{Mv} \psi(Md).$$

Teniendo en cuenta (2.28) y la PC (Def. 2.5) para ψ , tenemos que

$$D_v \tilde{\psi}(d) = D_{Mv} \psi(Md) = \left(\lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_k \\ p \rightarrow d}} \nabla \psi_k(Mp) \right) Mv = \left(\lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_k \\ p \rightarrow d}} \nabla \tilde{\psi}_k(p) \right) v$$

Si $Mv = 0$ entonces $D_v \tilde{\psi}(d) = 0$, y

$$\left(\lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_k \\ p \rightarrow d}} \nabla \tilde{\psi}_k(p) \right) v = \left(\lim_{\substack{p \in \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}_k \\ p \rightarrow d}} \nabla \psi_k(Mp) \right) Mv = 0$$

por lo que el apartado 2 se cumple $\forall v \in \tilde{\mathcal{H}}$. ■

La proposición anterior permite definir $D\tilde{\psi}(\cdot) := \hat{D}\psi(M\cdot)M$, siendo $\hat{D}\psi$ el Gradiente Generalizado definido en (2.1). Este gradiente generalizado utiliza únicamente los gradientes de la función en el interior de los sectores de \mathcal{P} . Además, si ψ satisface (2.13), entonces (2.27) permite afirmar que existe una cota común a las aplicaciones lineales asociadas a $D\tilde{\psi}(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^p$. En la siguiente proposición sumamos los resultados más relevantes.

Proposición 2.4. *Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ que satisface la PC 2.5 y (2.13). Si $M \in \mathbb{R}^{2 \times p}$, $\text{rank}(M) = 2 \leq p$, entonces la función $\tilde{\psi} := \psi \circ M$ admite un gradiente generalizado $D\tilde{\psi} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ que satisface las siguientes propiedades*

1. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una curva Lipschitz, entonces

$$(\tilde{\psi} \circ \gamma)'(t) = D\tilde{\psi}(\gamma(t))\gamma'(t) \quad \text{c.p.p. en } (a, b) \quad (2.29)$$

2. $\exists C > 0$ tal que

$$|\tilde{\psi}(\gamma(b)) - \tilde{\psi}(\gamma(a))| \leq C \int_a^b \|\gamma'(t)\|_\infty dt \quad (2.30)$$

Demostración

Si $D\tilde{\psi}(y) := \hat{D}\psi(My)M$, con $\hat{D}\psi$ el gradiente generalizado definido en el Lema 2.1, el Corolario 2.4 proporciona (2.29), y por tanto

$$\tilde{\psi}(\gamma(b)) - \tilde{\psi}(\gamma(a)) = \int_a^b (\tilde{\psi} \circ \gamma)'(t) dt = \int_a^b D\tilde{\psi}(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Para obtener (2.30) notamos que $\forall y \in \mathbb{R}^p$,

$$\|D\tilde{\psi}(y)\|_1 = \|\hat{D}\psi(My)M\|_1 = \|M^T \hat{D}\psi(My)^T\|_1 \leq \|M^T\|_1 \|\hat{D}\psi(My)\|_1.$$

Si ψ satisface (2.13), gracias al Lema 2.3 podemos escribir

$$\|D\tilde{\psi}(y)\|_1 \leq \|M\|_\infty C, \quad \forall y \in \mathbb{R}^p$$

con C la cota de los gradientes de ψ en los sectores de \mathcal{P} . Por tanto

$$|\tilde{\psi}(\gamma(b)) - \tilde{\psi}(\gamma(a))| \leq \int_a^b \|D\tilde{\psi}(\gamma(t))\|_1 \|\gamma(t)\|_\infty dt \leq \|M\|_\infty C \int_a^b \|\gamma'(t)\|_\infty dt$$

■

En esta sección hemos desarrollado de manera rigurosa la teoría que permite establecer la Proposición 2.4 para funciones $\tilde{\psi} = \psi \circ M$, obtenidas a partir de la composición de una función de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ y una aplicación lineal de rango máximo. Estos resultados son, evidentemente, también ciertos si consideramos combinaciones lineales de funciones de este tipo (que incluye a las funciones diferenciables en \mathbb{R}^p). En adelante, nos referiremos a esta clase de funciones como **funciones de clase** $C_{pw}^1(\mathbb{R}^p)$ con $p > 2$. Es importante mencionar que en [30], se define la clase de funciones $C_{pw}^1(\mathbb{R}^p)$ de manera más amplia, sin utilizar de manera explícita el caso $m = 2$, o la composición con aplicaciones lineales. Dado que los esquemas objeto de esta memoria se definen mediante funciones del tipo $\tilde{\psi} = \psi \circ M$, o combinaciones lineales de estas, hemos decidido desarrollar de manera rigurosa la teoría analítica subyacente y mantener la misma notación por simplicidad.

Los resultados obtenidos en esta sección prueban de manera rigurosa que una función $\tilde{\psi}$ de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^p)$ admite un *Gradiente Generalizado* que se puede calcular aplicando las reglas usuales (regla de la cadena).

2.3

Subdivisión de clase C_{pw}^1

Recordamos que los esquema de subdivisión estudiados en esta memoria son estacionarios, locales y binarios, es decir

$$(Sf)_{2n+k} = \psi_k(f_{n-L}, \dots, f_{n+L}), \quad f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad k = 0, 1, \quad (2.31)$$

Definición 2.7. Se dice que S en (2.31) es de clase C_{pw}^1 , si las funciones que lo definen son de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^{2L+1})$.

Veremos en esta sección que para este tipo de esquemas se puede definir un *Jacobiano Generalizado* que resulta útil para estudiar las propiedades de contractividad del esquema.

La notación que utilizaremos en el desarrollo de esta sección se simplifica considerablemente si introducimos los *operadores restricción*

Definición 2.8. Para $n, p \in \mathbb{Z}$, $n \leq p$, definimos el operador restricción $\chi_{n,p} : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{p-n+1}$ como

$$\chi_{n,p}(f) := (f_n, \dots, f_p)^T, \quad \forall f \in l_\infty(\mathbb{Z}). \quad (2.32)$$

Así, para $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$, podemos escribir (2.31) como

$$(Sf)_{2n+k} = \psi_k(f_{n-L}, \dots, f_{n+L}) = (\psi_k \circ \chi_{n-L, n+L})f \quad k = 0, 1. \quad (2.33)$$

Evidentemente, los operadores restricción son lineales y satisfacen $\|\chi_{n,p}(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, es decir $\|\chi_{n,p}\|_\infty \leq 1$. Si identificamos $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$ con un vector columna con 'infinitas' filas, se puede asociar este operador lineal a la matriz con $p - n + 1$ filas e 'infinitas' columnas, definida por bloques como sigue

$$\chi_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & I_{p-n+1} & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_{p-n+1} es la matriz identidad de tamaño $p-n+1$, situada en el bloque de columnas con índices n, \dots, p . Con la notación matricial habitual podemos escribir $\chi_{n,p}(f) = \chi_{n,p}f = (f_n, \dots, f_p)^T \in \mathbb{R}^{p-n+1}$.

Definición 2.9. Sea S un esquema de subdivisión de clase C_{pw}^1 y $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$. El Jacobiano Generalizado de S en f , se define como el operador lineal, $DS(f) : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$, asociado a la matriz bi-infinita con filas

$$(DS(f))_{[2n+k, :]} = D\psi_k(\chi_{n-L, n+L}f)\chi_{n-L, n+L}$$

donde $D\psi_k$ es un gradiente generalizado de ψ_k , $k = 0, 1$

Esta definición permite establecer una extensión de los resultados establecidos en el Teorema 2.2 y el Corolario 2.3 para la composición de una curva Lipschitz con un esquema de clase C_{pw}^1 .

Teorema 2.3. *Sea S un esquema local, binario, de clase C_{pw}^1 y $DS(f)$ un Jacobiano generalizado de S . Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ una curva Lipschitz. Entonces se cumple que $\tilde{\gamma} := S \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ es también Lipschitz y*

$$\tilde{\gamma}'(t) = DS(\gamma(t))\gamma'(t) \quad \text{c.p.p. en } (0, 1) \quad (2.34)$$

$$\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = S \circ \gamma(1) - S \circ \gamma(0) = \int_0^1 DS(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \quad (2.35)$$

Demostración

Notar que para $k = 0, 1$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{2n+k}(t) &:= (S \circ \gamma)_{2n+k}(t) = \psi_k(\gamma_{n-L}(t), \dots, \gamma_{n+L}(t)) \\ &= \psi_k((\chi_{n-L, n+L} \circ \gamma)(t)) = (\psi_k \circ \gamma_{n,L})(t), \end{aligned}$$

con $\gamma_{n,L} := \chi_{n-L, n+L} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2L+1}$. Dado que γ es Lipschitz, se cumple que

$$\begin{aligned} \gamma'_{n,L}(t) &= \chi_{n-L, n+L}\gamma'(t) \quad \text{c.p.p. en } (0, 1) \\ \exists C > 0 : \|\gamma_{n,L}(s) - \gamma_{n,L}(t)\|_\infty &\leq C|s - t|, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como ψ_k es Lipschitz (con constante M_{ψ_k}), $k = 0, 1$,

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}_{2n+k}(s) - \tilde{\gamma}_{2n+k}(t)| &= |\psi_k(\gamma_{n,L}(s)) - \psi_k(\gamma_{n,L}(t))| \\ &\leq M_{\psi_k} \|\gamma_{n,L}(s) - \gamma_{n,L}(t)\|_\infty \leq M_{\psi_k} C |s - t|, \end{aligned}$$

es decir, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\tilde{\gamma}_{2n+k}$ es \tilde{C} -Lipschitz, con $\tilde{C} = \max_k \{M_{\psi_k}\}C$.

Por otra parte, si $D\psi_k$ denota una derivada admisible de ψ_k , $k = 0, 1$, la Proposición 2.4 permite afirmar que

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'_{2n+k}(t) &= D\psi_k(\gamma_{n,L}(t))\gamma'_{n,L}(t) = D\psi_k(\chi_{n-L, n+L}\gamma(t))\chi_{n-L, n+L}\gamma'(t) \\ &= (DS(\gamma(t))\gamma'(t))_{2n+k}, \quad \text{c.p.p. en } (0, 1), \end{aligned}$$

lo cual prueba (2.34). Además

$$\tilde{\gamma}_{2n+k}(1) - \tilde{\gamma}_{2n+k}(0) = \int_0^1 D\psi_k(\gamma_{n,L}(t))\gamma'_{n,L}(t)dt = \int_0^1 (DS(\gamma(t))\gamma'(t))_{2n+k}dt.$$

es decir

$$\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = \int_0^1 DS(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

■

El teorema anterior se cumple independientemente de la definición de derivada admisible elegida para las funciones ψ_k . Si S es un esquema de clase C_{pw}^1 , y las funciones ψ_k se definen a partir de funciones en $C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ que cumplen la PC (Def. 2.5) y tienen sus gradientes generalizados uniformemente acotados. Por tanto $DS(f)$ se puede definir a partir de las expresiones para los Gradientes Generalizados $D\psi_k$ que utilizan únicamente los gradientes de las funciones ψ_k en los sectores donde estas funciones son continuamente diferenciables y están uniformemente acotados. En este caso, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Sea S un esquema de subdivisión de clase C_{pw}^1 que admite un Jacobiano generalizado, $DS(f)$, definido a partir de expresiones para $D\psi_k$, $k = 0, 1$ tales que $\|D\psi_k(x)\|_1 \leq C$, $\forall x \in \mathbb{R}^{2L+1}$. Entonces*

$$\|DS(f)\|_\infty \leq C, \quad \forall f \in l_\infty(\mathbb{Z}). \quad (2.36)$$

Demostración

Notar que los elementos no nulos de las filas de $DS(f)$ son

$$DS(f)_{[2n+k, -L:L]} = D\psi_k(f_{n-L}, \dots, f_{n+L}), \quad (2.37)$$

Utilizando notación matricial, el operador lineal $DS(f)$ asociado a la matriz bi-infinita (2.37) se define como

$$\begin{aligned} DS(f) : l_\infty(\mathbb{Z}) &\rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}), \\ g &\rightarrow DS(f)g, \end{aligned}$$

con la convención habitual, es decir g es un vector columna con infinitas filas. Así,

$$(DS(f)g)_{2n} = D\psi_0(\chi_{n,L}f)\chi_{n,L}g, \quad (2.38)$$

$$(DS(f)g)_{2n+1} = D\psi_1(\chi_{n,L}f)\chi_{n,L}g, \quad (2.39)$$

por tanto

$$\begin{aligned} |(DS(f)g)_{2n}| &\leq \|D\psi_0(\chi_{n,L}f)\|_1 \|\chi_{n,L}g\|_\infty \leq \|D\psi_0(\chi_{n,L}f)\|_1 \|g\|_\infty, \\ |(DS(f)g)_{2n+1}| &\leq \|D\psi_1(\chi_{n,L}f)\|_1 \|\chi_{n,L}g\|_\infty \leq \|D\psi_1(\chi_{n,L}f)\|_1 \|g\|_\infty, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|DS(f)g\|_\infty &= \sup_n \{|(DS(f)g)_{2n}|, |(DS(f)g)_{2n+1}|\} \\ &\leq \sup_n \{\|D\psi_1(\chi_{n,L}f)\|_1, \|D\psi_0(\chi_{n,L}f)\|_1\} \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Como

$$\sup_n \{\|D\psi_0(\chi_{n,L}f)\|_1, \|D\psi_1(\chi_{n,L}f)\|_1\} \leq C$$

y la constante $C > 0$ no depende de n o de f , tenemos que

$$\|DS(f)\|_\infty = \sup_{g \neq 0} \frac{\|DS(f)g\|_\infty}{\|g\|_\infty} \leq C, \quad \forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$$

■

La utilidad de este resultado se hace evidente en la siguiente subsección.

Derivadas Generalizadas y Contractividad

En esta sección recordamos el procedimiento descrito en [30], que permite estudiar la posibilidad de establecer cotas del tipo

$$\|S^j f - S^j g\|_\infty \leq C_j \|f - g\|_\infty$$

cuando S es un operador de subdivisión clase C_{pw}^1 . El procedimiento es el siguiente:

Dados $f, g \in l_\infty(\mathbb{Z})$, se definen de manera recursiva las curvas $\gamma^j : [0, 1] \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$, $j \geq 0 : \forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\gamma^0(t) &= tf + (1-t)g, \\ \gamma^j(t) &= S \circ \gamma^{j-1}(t).\end{aligned}$$

Notar que $\gamma^0(1) = f$, $\gamma^0(0) = g$, $\gamma^j(1) = S^j f$, $\gamma^j(0) = S^j g$, $\forall j > 0$. Puesto que $\gamma^0(t)$ es Lipschitz, si S es de clase C_{pw}^1 y satisface las hipótesis de la Proposición 2.5. Aplicando el Teorema 2.3 (de manera recursiva) $\gamma^j(t)$ es Lipschitz $\forall j \geq 1$

$$\begin{aligned}(\gamma^0)'(t) &= f - g, \\ (\gamma^j)'(t) &= DS(\gamma^{j-1}(t))(\gamma^{j-1}(t))' = \dots \\ &= DS(\gamma^{j-1}(t))DS(\gamma^{j-2}(t)) \dots DS(\gamma^0(t))(\gamma^0)'(t). \\ S^j f - S^j g &= \int_0^1 DS(\gamma^{j-1}(t))DS(\gamma^{j-2}(t)) \dots DS(\gamma^0(t))(f - g)dt.\end{aligned}$$

Si S satisface las hipótesis de la Proposición 2.5,

$$\|S^j f - S^j g\|_\infty \leq \int_0^1 \|\Pi_{k=0}^{j-1} DS(\gamma^k(t))\|_\infty \|f - g\|_\infty dt.$$

Esta última relación permite estudiar la contractividad de las potencias de un esquema de clase C_{pw}^1 a través de las acotaciones de los productos de los operadores lineales asociados a la derivada generalizada de S .

2.4

Subdivision de clase Σ_k

Definición 2.10. Un esquema de subdivisión S es de clase Σ_k si es de k -OSI y admite un Jacobiano generalizado tal que $\|DS(f)\|_\infty \leq C, \forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$.

Observamos que si S es de clase Σ_k , entonces los esquemas derivados $S^{[1]}, \dots, S^{[k]}$ también son de clase C_{pw}^1 , puesto que las funciones que los definen son combinaciones lineales de funciones de clase C_{pw}^1 . Veremos más adelante que los esquemas Power_p , y también los esquemas Power_p ponderados, son de clase Σ_2 .

La estabilidad de $S \in \Sigma_k$ se puede estudiar analizando la contractividad de las potencias del operador $S^{[k]}$, en base al Teorema 1.7, que podemos reformular del siguiente modo:

Teorema 2.4. *Sea S_{NL} un esquema de subdivisión de clase Σ_k que puede escribirse en la forma (1.25), con S_L un esquema de subdivisión lineal convergente y $\delta = \nabla^k$. El esquema de subdivisión S_N es estable si se satisfacen las siguientes condiciones,*

$$\exists M > 0 : \quad \|F(f) - F(g)\|_\infty \leq M \|f - g\|_\infty, \quad (2.40)$$

$$\exists L > 0, 0 < \mu < 1 : \quad \|\Pi_{j=0}^{L-1} DS_N^{[k]}(f^j)\|_\infty \leq \mu \|f\|_\infty, \quad (2.41)$$

$$\forall f, f \in l_\infty(\mathbb{Z}), \mathbf{y} f^j = (S_N^{[k]})^j f,$$

Demostración

Dados $f, g \in l_\infty(\mathbb{Z})$, se definen de manera recursiva las curvas $\gamma^j : [0, 1] \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$, $j \geq 0 : \forall t \in [0, 1]$

$$\gamma^0(t) = tf + (1-t)g, \quad (2.42)$$

$$\gamma^j(t) = S_{NL}^{[k]} \circ \gamma^{j-1}(t). \quad (2.43)$$

Como $S_N^{[k]} \in C_{pw}^1$ podemos escribir

$$(S_N^{[k]})^L(f) - (S_N^{[k]})^L(g) = \int_0^1 \Pi_{j=0}^{L-1} DS_N^{[k]}(\gamma^j(t)) \gamma^0(t) dt$$

y, puesto que $(\gamma^0)'(t) = f - g$,

$$\begin{aligned} \|(S_N^{[k]})^L(f) - (S_N^{[k]})^L(g)\|_\infty &\leq \int_0^1 \|\Pi_{j=0}^{L-1} DS_N^{[k]}(\gamma^j(t))\|_\infty \|f - g\|_\infty dt \\ &\leq \int_0^1 \mu \|f - g\|_\infty dt = \mu \|f - g\|_\infty, \end{aligned}$$

es decir, se satisface (1.39), lo cual concluye la prueba. ■

Tal y como se observa en [29], la relación (2.41) conduce a la introducción del radio espectral asociado a un esquema k -OSI, S :

$$\rho(S, k) := \liminf_{j \rightarrow +\infty} \sup_{w \in l_\infty(\mathbb{Z})} \|DS_{(S^{[k]})^{j-1}w}^{[k]} DS_{(S^{[k]})^{j-2}w}^{[k]} \cdots DS_w^{[k]}\|^{1/j}. \quad (2.44)$$

Si S es un esquema de subdivisión de clase Σ_k , se prueba en ([29], Teorema 2.2.4 y Remark 2.2.5) que $\rho(S, k) < 1$ es condición necesaria y suficiente para asegurar la estabilidad de S . En la práctica esta condición es más difícil de comprobar que las condiciones suficientes establecidas en el Teorema 2.4, que utilizaremos en adelante de manera sistemática. Como veremos, en el caso de los esquemas H_p los resultados obtenidos al utilizar el Teorema 2.4 no están lejos de los obtenidos en [30], considerando el radio espectral (2.44).

3

Esquemas Power-p

El esquema PPH se introduce en [2] como una versión *esencialmente no oscilatoria* del esquema centrado de 4 puntos $S_{2,2}$. Como hemos visto en el Capítulo 1, el carácter no oscilatorio de este esquema se debe a las propiedades de la media armónica

$$H(x, y) = \operatorname{sgn}(x, y) \frac{2|x||y|}{|x| + |y|}, \text{ con } \operatorname{sgn}(x, y) := (\operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn}(y))/2 \quad (3.1)$$

que forma parte de la familia de medias Power_p [38], (sección ??)

$$H_p(x, y) = \operatorname{sgn}(x, y) \left| \frac{x + y}{2} \right| \left(1 - \left| \frac{x - y}{x + y} \right|^p \right) \quad (3.2)$$

(es fácil ver que $H(x, y) = H_2(x, y)$). Estas funciones se introdujeron originalmente en [38] en el contexto de la solución numérica de ecuaciones hiperbólicas.¹

¹ $H_1(x, y) = \operatorname{sgn}(x, y) \min\{|x|, |y|\} =: \operatorname{minmod}(x, y)$, una 'media' muy utilizada en el contexto de la solución numérica de ecuaciones hiperbólicas

Sumarizamos a continuación las propiedades de las funciones $H_p(x, y)$ en (3.2). Las pruebas de las dos proposiciones siguientes se pueden encontrar en [19].

Proposición 3.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que

- E1.** $H_p(x, x) = x$.
- E2.** $H_p(x, y) = 0$ si $xy \leq 0$.
- E3.** $H_p(x, y) = H_p(y, x)$.
- E4.** $H_p(-x, -y) = -H_p(x, y)$.

Proposición 3.2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

- C1.** $|H_p(x, y)| \leq \max\{|x|, |y|\}$.
- C2.** $|H_p(x, y)| \leq p \min\{|x|, |y|\}$.
- C3.** Si $xy > 0$ y $1 \leq p \leq q$

$$\min\{|x|, |y|\} \leq |H_p(x, y)| \leq |H_q(x, y)| \leq \frac{|x + y|}{2}.$$
- C4.** $H_p(x, y) = \operatorname{sgn}(x, y) \min\{|x|, |y|\} \left[1 + \sum_{k=1}^{p-1} \left| \frac{x - y}{x + y} \right|^k \right]$.

En el Capítulo 5 se define la media ponderada $WH_{p,a,b}(x, y)$, que satisface $WH_{p, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, y) = H_p(x, y)$, $\forall p \geq 1$ y por tanto se puede considerar como una generalización de la media $H_p(x, y)$, relacionada con la media aritmética ponderada

$$\operatorname{ave}_{a,b}(x, y) = ax + by, \quad a > 0, b > 0, \quad a + b = 1,$$

ya que la media aritmética corresponde al caso especial $a = b = 1/2$. Las Proposiciones 3.1 y 3.2 pueden también considerarse casos particulares de las propiedades generales de la media $WH_{p,a,b}(x, y)$, demostradas en el Capítulo 5.

Los esquemas Power_p , S_{H_p} fueron propuestos inicialmente en [19] como generalización del esquema PPH [2, 3] y por tanto pueden considerarse también versiones no lineales del esquema centrado de 4 puntos. Su forma general es la siguiente,

$$\begin{cases} (S_{H_p}f)_{2n} = f_n, \\ (S_{H_p}f)_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{8}H_p(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n), \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.3)$$

Como vimos en el Capítulo 1, la propiedad **C2** en la Proposición 3.2 es clave para explicar el comportamiento no-oscilatorio del esquema PPH. Como se observa en [19], los esquemas S_{H_p} son esquemas no-oscilatorios, dado que comparten también esta propiedad.

Es evidente que los esquemas S_{H_p} se pueden escribir en la forma general (1.25),

$$(S_{H_p}f) = (S_{1,1}f) + \mathcal{F}(\nabla^2 f), \quad \forall f \in l_\infty(\mathbb{Z}) \quad (3.4)$$

donde $\mathcal{F} : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$

$$\begin{cases} (\mathcal{F}(f))_{2n} = 0 \\ (\mathcal{F}(f))_{2n+1} = -\frac{1}{8}H_p(f_n, f_{n+1}), \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

En [19] se prueba la convergencia de los esquemas S_{H_p} , $\forall p \geq 1$, y la estabilidad para $p = 1$ y $p = 2$. Las pruebas de estos resultados se basan en la comprobación sistemática de las hipótesis de los Teoremas 1.4 y 1.5. Por otra parte, en [30], Oswald y Harizanov observan que los esquemas S_{H_p} son 2-OSI, y utilizan el esquema en diferencias $S_{H_p}^{[2]}$ para estudiar su estabilidad, a través del Jacobiano Generalizado $DS_{H_p}^{[2]}$. En [30] se consigue probar que los esquemas S_{H_p} son estables para $p \leq 8/3$, mientras que no es estable si $p \geq 4$. Para el caso $p = 3$ no hay resultados concluyentes en la literatura sobre la estabilidad del esquema.

El estudio que llevaremos a cabo en este capítulo esta basado en la aplicación del Teorema 1.6 para la convergencia y el Teorema 2.4 para la estabilidad. Como hemos visto en el Capítulo 1, estos teoremas son equivalentes a los Teoremas 1.4 y 1.5 cuando existe el esquema $S^{[k]}$. Como veremos a continuación, la utilización del esquema $S_{H_p}^{[2]}$ permite simplificar y sistematizar las pruebas relacionadas con la convergencia de los esquemas S_{H_p} , y muy

especialmente aquellas relacionadas con la estabilidad para $p = 1$ y $p = 2$ en [19]. Con respecto a los resultados obtenidos en [30], cabe destacar que nuestro planteamiento es ligeramente diferente al propuesto por Oswald y Harizanov, puesto que se basa en la reformulación del Teorema 1.5 para esquemas no lineales, k -OSI, que pueden formularse como una perturbación no lineal de un esquema lineal convergente.

El análisis de la estabilidad de los esquemas S_{H_p} realizado en este capítulo está basado en las acotaciones de las potencias de los Jacobianos Generalizados. En consecuencia, es formalmente sencillo construir un procedimiento numérico que permite, a priori, conocer qué potencias están acotadas. Utilizando diversos códigos, programados en Matlab, se pueden contrastar las acotaciones teóricas con las cotas obtenidas numéricamente para estimar en que casos las cotas teóricas son óptimas. Además, este procedimiento nos ha permitido obtener evidencia numérica de la estabilidad del esquema S_{H_3} .

El estudio que llevaremos a cabo se basa en el análisis de las propiedades de diferenciabilidad de las funciones $H_p(x, y)$. Veremos en primer lugar que $H_p(x, y) \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$, la clase de funciones diferenciables a trozos definidas en el Capítulo 2, y por tanto admiten un gradiente generalizado que se puede definir en función de los gradientes de estas funciones en las regiones de suavidad.

3.1

El Gradiente Generalizado $DH_p(x, y)$

En base a la definición (3.2) de las funciones $H_p(x, y)$, la partición por sectores 'natural' asociada a esta familia de funciones está definida por los hiperplanos de separación $\mathcal{H}_1 \equiv \{y = 0\}$, $\mathcal{H}_2 \equiv \{x = 0\}$, $\mathcal{H}_3 \equiv \{x = y\}$. Como veremos mas adelante, el hiperplano \mathcal{H}_3 se puede eliminar si $p \geq 2$, sin embargo realizaremos el estudio general, valido $\forall p \geq 1$, basado en la partición por sectores de la Figura 3.1.

El primer resultado es un lema auxiliar que se utilizará en las demostraciones de resultados posteriores.

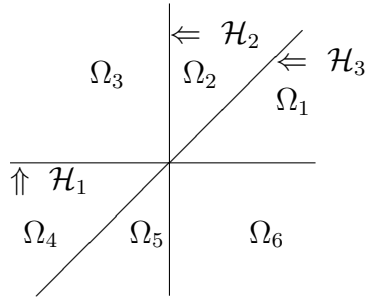


Figura 3.1: Partición por Sectores 'natural' para $H_p(x, y)$.

Lema 3.1. Si $p > 1$, las funciones

$$f_1(\tau) := \frac{1}{2}(1 - p\tau^{p-1} + (p-1)\tau^p), \quad f_2(\tau) := \frac{1}{2}(1 + p\tau^{p-1} + (p-1)\tau^p)$$

satisfacen $0 < f_1(\tau) < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < f_2(\tau) < p$, $\forall \tau \in (0, 1)$.

Demostración

Observamos que $f_1(0) = \frac{1}{2}$, $f_1(1) = 0$, y

$$f_1'(\tau) = \frac{p(p-1)\tau^{p-2}}{2}(-1 + \tau) < 0, \quad \tau \in (0, 1).$$

Así pues, $f_1(\tau)$ es decreciente en $(0, 1)$ y por tanto

$$0 = f_1(1) < f_1(\tau) < f_1(0) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau \in (0, 1).$$

Para $f_2(\tau)$ tenemos $f_2(0) = \frac{1}{2}$, $f_2(1) = p$,

$$f_2'(\tau) = \frac{p(p-1)\tau^{p-2}}{2}(1 + \tau) > 0, \quad \tau \in (0, 1),$$

de manera que $f_2(\tau)$ es creciente en $(0, 1)$ y

$$\frac{1}{2} = f_2(0) < f_2(\tau) < f_2(1) = p, \quad \forall \tau \in (0, 1).$$

■

Proposición 3.3. *La función $H_p(x, y) \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2) \forall p \geq 1$, y satisface la Propiedad de Compatibilidad (Def. 2.5) sobre la partición de la Figura 3.1. Además, en esta partición se verifica*

$$\sup_{(x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_i} \|\nabla H_p|_{\Omega_i}(x, y)\| = p. \quad \forall i \quad (3.6)$$

Demostración

Notamos que

$$H_p(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2} \left(1 - \left|\frac{x-y}{x+y}\right|^p\right), & xy > 0 \\ 0, & xy \leq 0, \end{cases}$$

es continua $\forall (x, y) \neq (0, 0)$. Además,

$$|H_p(x, y) - H_p(0, 0)| = |H_p(x, y)| \leq \left|\frac{x+y}{2}\right| \leq \frac{|x| + |y|}{2} \leq \|(x, y)\|_1, \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

por la Proposición 3.2- **C3**. Por tanto $H_p(x, y)$ es continua en el origen de coordenadas, es decir, $H_p(x, y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$.

Estudiamos a continuación las propiedades de diferenciabilidad de $H_p(x, y)$ en cada uno de los sectores de la partición de la Figura 3.1. Por simplicidad de notación definimos

$$\Omega_{ij} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j - \{0\}, \quad \text{cuando } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \{0\}$$

Dado que $H_p(-x, -y) = -H_p(x, y)$, es suficiente considerar el semiplano $y \geq 0$, representado en la Figura 3.2.

En esta figura, y en toda la descripción que daremos a continuación utilizamos la siguiente notación:

$$W_i(x, y) = H_p|_{\Omega_i}(x, y), \quad \tau(x, y) := \frac{x-y}{x+y}, \quad g(\tau) = 1 - \tau^p. \quad (3.7)$$

Notar que

$$(x+y)\partial_x\tau = 1 - \tau, \quad (x+y)\partial_y\tau = -(1 + \tau) \quad (3.8)$$

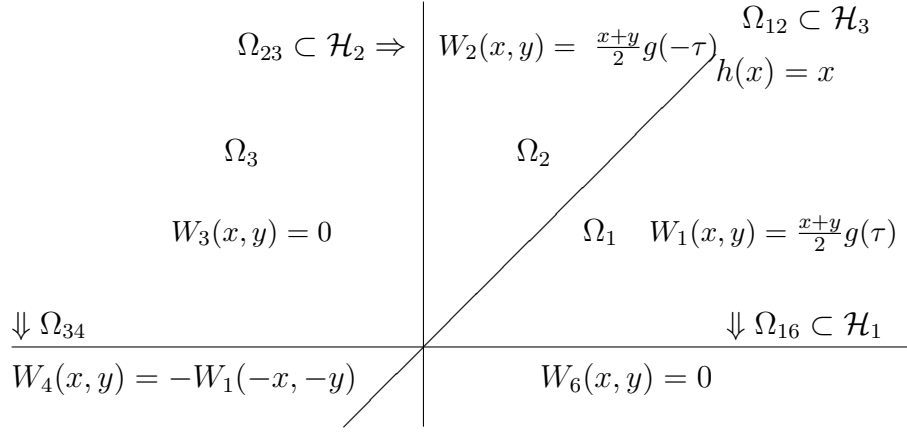


Figura 3.2: Semiplano $y \geq 0$: Detalles de las funciones $W_i = H_p|_{\Omega_i}$, en la partici3n por sectores 'natural' para $H_p(x, y)$. τ y $g(\tau)$ definidos en (3.7).

$$g'(\tau) = -p\tau^{p-1}, \quad \forall p \geq 1. \quad (3.9)$$

Sector Ω_1 : $(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1 \leftrightarrow 0 < \tau < 1$,

$$W_1(x, y) := \frac{x+y}{2} \left(1 - \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^p \right) = \frac{x+y}{2} g(\tau),$$

por tanto, $\forall p \geq 1$

$$\begin{aligned} \partial_x W_1(x, y) &= \frac{1}{2} (1 - p\tau^{p-1} + (p-1)\tau^p) =: f_1(\tau), \\ \partial_y W_1(x, y) &= \frac{1}{2} (1 + p\tau^{p-1} + (p-1)\tau^p) =: f_2(\tau). \end{aligned}$$

Puesto que $f_1(\tau), f_2(\tau) \in \mathcal{C}([0, 1])$, se tiene que $W_1 \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{\Omega}_1)$. Adem3s, dado que $\forall x > 0$

$$\lim_{\substack{0 < y < x \\ y \rightarrow x}} \tau(x, y) = 0, \quad \lim_{\substack{0 < y < x \\ y \rightarrow 0}} \tau(x, y) = 1,$$

existe $\lim_{(x,y) \rightarrow d} \nabla W_1(x, y)$ para cada $0 \neq d \in \mathcal{H}_k$, $k = 1, 3$, los hiperplanos que forman la frontera del sector Ω_1 , y

$$\lim_{\substack{0 < y < x \\ y \rightarrow x}} \nabla W_1(x, y) = \begin{cases} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), & p > 1 \\ (0, 1), & p = 1 \end{cases}, \quad \lim_{\substack{0 < y < x \\ y \rightarrow 0}} \nabla W_1(x, y) = (0, p). \quad (3.10)$$

Como $f_1(\tau) > 0$ y $f_2(\tau) > 0 \forall \tau \in [0, 1]$ (Lema 3.1), $\forall (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1$

$$\|\nabla W_1(x, y)\|_1 = f_1(\tau(x, y)) + f_2(\tau(x, y)) = 1 + (p-1)(\tau(x, y))^p.$$

Por tanto

$$\sup_{x \in \overset{\circ}{\Omega}_1} \|\nabla W_1(x, y)\| = \sup_{\tau \in [0, 1]} (1 + (p-1)\tau^p) = p. \quad (3.11)$$

Sector Ω_2 : $(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2 \leftrightarrow -1 < \tau < 0 \equiv 0 < -\tau < 1$,

$$W_2(x, y) = \frac{x+y}{2} \left(1 - \left(\frac{y-x}{x+y} \right)^p \right) = \frac{x+y}{2} g(-\tau).$$

Procediendo como en el caso anterior,

$$\begin{aligned} \partial_x W_2(x, y) &= \frac{1}{2} g(-\tau) - \frac{x+y}{2} g'(-\tau) \partial_x \tau = f_2(-\tau), \\ \partial_y W_2(x, y) &= \frac{1}{2} g(-\tau) - \frac{x+y}{2} g'(-\tau) \partial_y \tau = f_1(-\tau), \end{aligned}$$

Así, $W_2 \in C^1(\overset{\circ}{\Omega}_1)$. Teniendo en cuenta que

$$\lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow 0}} \tau(x, y) = -1, \quad \forall y > 0$$

en la frontera del sector Ω_2 tenemos que

$$\lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow y}} \nabla W_2(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), & p > 1 \\ (1, 0), & p = 1 \end{cases}, \quad \lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_2(x, y) = (p, 0), \quad (3.12)$$

y, $\forall (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2$

$$\|\nabla W_2(x, y)\|_1 = f_2(-\tau(x, y)) + f_1(-\tau(x, y)) = 1 + (p-1)(-\tau(x, y))^p.$$

Dado que $(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2 \equiv 0 < -\tau < 1$,

$$\sup_{x \in \overset{\circ}{\Omega}_2} \|\nabla W_2(x, y)\| = \sup_{\tau \in [0, 1]} (1 + (p-1)\tau^p) = p. \quad (3.13)$$

Puesto que $W_3(x, y) \equiv 0$, todas las restricciones de la media H_p a los sectores del semiplano $y \geq 0$ son funciones suaves por sectores

(Definición 2.3), satisfacen el primer apartado de la Propiedad de Compatibilidad (Definición 2.5) y verifican (3.6).

Las restricciones a los hiperplanos de separación de la partición 'natural' asociada a la función H_p ,

$$\psi^{\mathcal{H}_1} = \psi^{\mathcal{H}_2} = 0, \quad \psi^{\mathcal{H}_3}(x) = x = H_p(x, x).$$

son diferenciables, por tanto $H_p(x, y) \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$.

Comprobaremos ahora que la condición de compatibilidad, Definición 2.5- apartado 2, se verifica $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}$, para cada uno de los hiperplanos de separación de la partición de la Figura 3.1.

1. $\mathcal{H}_1 = \langle v \rangle$, con $v = (1, 0)^T$. $\forall x > 0$ ($W_6 \equiv 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{0 < y < x \\ y \rightarrow 0}} \nabla W_1(x, y) \cdot v &= (0, p) \cdot (1, 0) = 0 \\ \lim_{0 > y \rightarrow 0} \nabla W_6(x, y) \cdot v &= (0, 0) \cdot (1, 0) = 0, \end{aligned}$$

por tanto $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}_1$,

$$\lim_{d \leftarrow (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1} \nabla W_1 \cdot v = \lim_{d \leftarrow (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_6} \nabla W_6 \cdot v = 0 = D_v H_p(x, 0).$$

La compatibilidad sobre Ω_{34} se comprueba de manera similar.

2. $\mathcal{H}_2 = \langle w \rangle$, con $w = (0, 1)^T$. $\forall y > 0$ ($W_3 \equiv 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_2(x, y) \cdot w &= (p, 0) \cdot (0, 1) = 0, \\ \lim_{0 > x \rightarrow 0} \nabla W_3(x, y) \cdot w &= (0, 0) \cdot (0, 1) = 0, \end{aligned}$$

por tanto $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}_2$,

$$\lim_{d \leftarrow (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2} \nabla W_2 \cdot w = \lim_{d \leftarrow (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_3} \nabla W_3 \cdot w = 0 = D_w H_p(0, y).$$

La compatibilidad sobre Ω_{56} se comprueba de manera similar.

3. $\mathcal{H}_3 = \langle u \rangle$, con $u = (1, 1)^T$. $\forall x > 0$

$$\lim_{\substack{0 < y < x \\ y \rightarrow x}} \nabla W_1(x, y) \cdot u = \left\{ \begin{array}{ll} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) (1, 1) & (p > 1) \\ (1, 0) (1, 1) & (p = 1) \end{array} \right\} = 1,$$

$$\lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow y}} \nabla W_2 \cdot u = \left\{ \begin{array}{ll} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) (1, 1) = 1 = D_u H_p(x, x), & \text{si } p > 1, \\ (0, 1) (1, 1) = 1 = D_u H_p(x, x), & \text{si } p = 1. \end{array} \right.$$

Como $H_p(x, x) = x$, $\forall p \geq 1$, se tiene que $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}_3$,

$$\lim_{d \leftarrow (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1} \nabla W_1 \cdot u = \lim_{d \leftarrow (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2} \nabla W_2 \cdot u = 1 = D_u H_p(x, x).$$

Notar que para $p > 1$ la función $H_p(x, y)$ es continuamente diferenciable en el interior del primer cuadrante $\Omega_1 \cup \Omega_2$, y el hiperplano de separación \mathcal{H}_3 puede eliminarse de su partición 'natural' asociada. En este caso, como se observa en [28, 29, 30], es fácil comprobar que las derivadas parciales de $H_p(x, y)$, $p > 1$, en el primer y tercer cuadrante se pueden reescribir del siguiente modo:

$$\partial_x H_p|_{\Omega}(x, y) = \Phi(-\tau) = \frac{1}{2}(1 + (p-1)|\tau|^p - p\tau|\tau|^{p-2}), \quad (3.14)$$

$$\partial_y H_p|_{\Omega}(x, y) = \Phi(\tau) := \frac{1}{2}(1 + (p-1)|\tau|^p + p\tau|\tau|^{p-2}). \quad (3.15)$$

con $\tau = (x - y)/(x + y) \in [-1, 1]$. ■

Es evidente que el gradiente generalizado puede no estar unívocamente definido en los hiperplanos de separación. Notar que si $(0, y) \in \Omega_{23}$, podemos definir

$$DH_p(0, y) = \lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_2(x, y) = (p, 0)$$

o, alternativamente,

$$DH_p(0, y) = \lim_{\substack{y > 0, x < 0 \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_3(x, y) = (0, 0).$$

Aunque las dos alternativas conducen a diferentes definiciones puntuales para el gradiente generalizado sobre Ω_{23} , la Propiedad de Compatibilidad implica que, en cualquier caso la propiedad fundamental

$$DH_p(0, y) \cdot (0, 1) = D_{(0,1)}H_p(0, y) = 0$$

se sigue manteniendo, y con ella los teoremas que permiten aplicar la regla de la cadena para la composición con curvas suaves.

La Proposición 3.3 establece que $H_p \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ y satisface la propiedad de compatibilidad sobre la partición de la Figura 3.1. Como los gradientes de la función $H_p(x, y)$ en los sectores de esta partición están uniformemente acotados, podemos definir su gradiente generalizado a partir de los gradientes de la función en los sectores donde es suave. Así, con la notación utilizada en este capítulo,

$$DH_1(x, y) = \begin{cases} (1, 0), & \forall (x, y) \in \{|x| < |y|, xy > 0\} \\ (0, 1), & \forall (x, y) \in \{|x| \geq |y|, xy > 0\} \\ (0, 0), & \forall (x, y) \in \{xy \leq 0\} \end{cases} \quad (3.16)$$

define un gradiente generalizado para $H_1(x, y)$, mientras que

$$DH_p(x, y) = \begin{cases} (\Phi(-\tau), \Phi(\tau)), & \forall (x, y) : xy > 0 \\ (0, 0), & \forall (x, y) : xy \leq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

con $\tau = \frac{x-y}{x+y}$ y $\Phi(\tau)$ en (3.14), es un gradiente generalizado para $H_p(x, y)$ con $p > 1$. Notar que $\forall p \geq 1$, el gradiente generalizado en las expresiones (3.16), (3.17) satisface

$$\|DH_p(x, y)\|_1 \leq f_1(|\tau(x, y)|) + f_2(|\tau(x, y)|) \leq p, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

con f_1, f_2 definidos en el Lema 3.1, y que la primera desigualdad es una igualdad si $x \cdot y > 0$.

El siguiente resultado se enuncia de manera separada para facilitar su referencia en el desarrollo posterior de esta memoria.

Corolario 3.1. *Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $DH_p(x, y)$ la derivada generalizada definida a partir de los gradientes en regiones de suavidad. Entonces $\forall p \geq 1$ se cumple*

$$0 \leq D_x H_p(x, y) \leq p, \quad 0 \leq D_y H_p(x, y) \leq p, \quad \|DH_p(x, y)\|_1 \leq p$$

A partir del Teorema 2.1 y del Corolario 3.1 se obtiene fácilmente que la función H_p es Lipschitz. Esta propiedad se prueba de manera directa en [19] (Propiedad II-2 apartado (ix)) .

Corolario 3.2. $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\forall p \geq 1$ que

$$\|H_p(x_1, y_1) - H_p(x_2, y_2)\|_\infty \leq p \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty. \quad (3.18)$$

3.2

Propiedades de los esquemas S_{H_p}

Los esquemas Power_p reproducen polinomios de grado menor o igual a 2, aunque es bien conocido (ver Capítulo 1) que para esquemas no lineales la reproducción de Π_2 no garantiza la existencia de los esquemas diferencia $S^{[k]}$, $k = 1, 2$. En [30] se observa que los esquemas S_{H_p} son 2-OSI, y ello implica la existencia de los esquemas diferencia $S_{H_p}^{[1]}$ y $S_{H_p}^{[2]}$. Incluimos a continuación las pruebas de estos resultados por completitud.

Proposición 3.4. *Los esquemas Power_p reproducen Π_2*

Demostración

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ y $p = P|_{\mathbb{Z}}$, entonces $(\nabla^2 p)_n = 2a \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} (S_{H_p} p)_{2n+1} &= (S_{1,1} p)_{2n+1} - \frac{1}{8} \mathbf{H}_p(2a, 2a) = (S_{1,1} p)_{2n+1} - \frac{1}{8} \text{mean}(2a, 2a) \\ &= (S_{2,2} p)_{2n+1} = P\left(n + \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

puesto que $S_{2,2}$ reproduce Π_3 . ■

Proposición 3.5. *Los esquemas Power_p son 2-OSI.*

Demostración

Si $P(x) \in \mathbb{P}_2$ y $p = P|_{\mathbb{Z}}$, entonces $\nabla^2 p = 0$. Así,

$$\begin{aligned} (S_{H_p}(f+p))_{2n+1} &= (S_{1,1}(f+p))_{2n+1} - \frac{1}{8}H_p(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n) \\ &= (S_{H_p}f)_{2n+1} + (S_{1,1}p|_{\mathbb{Z}})_{2n+1} = (S_{H_p}f)_{2n+1} + P(n+1/2), \end{aligned}$$

puesto que $S_{1,1}$ es lineal y reproduce polinomios de grado 1 de manera exacta. ■

Los esquemas diferencia

Notar que

$$\begin{aligned} (\nabla S_{H_p}f)_{2n} &:= (S_{H_p}f)_{2n+1} - (S_{H_p}f)_{2n} \\ &= \frac{\nabla f_n}{2} - \frac{1}{8}H_p(\nabla f_n - \nabla f_{n-1}, \nabla f_{n+1} - \nabla f_n), \\ (\nabla S_{H_p}f)_{2n+1} &:= (S_{H_p}f)_{2n+2} - (S_{H_p}f)_{2n+1} \\ &= \frac{\nabla f_n}{2} + \frac{1}{8}H_p(\nabla f_n - \nabla f_{n-1}, \nabla f_{n+1} - \nabla f_n), \end{aligned}$$

por tanto, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (S_{H_p}^{[1]}w)_{2n} = \frac{w_n}{2} - \frac{1}{8}H_p(w_n - w_{n-1}, w_{n+1} - w_n), \\ (S_{H_p}^{[1]}w)_{2n+1} = \frac{w_n}{2} + \frac{1}{8}H_p(w_n - w_{n-1}, w_{n+1} - w_n). \end{cases}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 S_{H_p}f)_{2n} &:= (S_{H_p}f)_{2n+2} - 2(S_{H_p}f)_{2n+1} + (S_{H_p}f)_{2n} \\ &= \frac{1}{4}H_p(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n), \\ (\nabla^2 S_{H_p}f)_{2n+1} &:= (S_{H_p}f)_{2n+3} - 2(S_{H_p}f)_{2n+2} + (S_{H_p}f)_{2n+1} \\ &= \frac{\nabla^2 f_n}{2} - \frac{1}{8}(H_p(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n) + H_p(\nabla^2 f_n, \nabla^2 f_{n+1})). \end{aligned}$$

Así, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (S_{H_p}^{[2]}w)_{2n} = \frac{1}{4}H_p(w_{n-1}, w_n), \\ (S_{H_p}^{[2]}w)_{2n+1} = \frac{w_n}{2} - \frac{1}{8}(H_p(w_{n-1}, w_n) + H_p(w_n, w_{n+1})). \end{cases} \quad (3.19)$$

Convergencia

La teoría presentada en el Capítulo 1 permite estudiar la convergencia de los esquemas S_{H_p} utilizando el Teorema 1.6 con $k = 2$.

Teorema 3.1. (*[19]-Teorema II.7*) Para todo $p \geq 1$, el esquema de subdivisión S_{H_p} es uniformemente convergente, y las funciones límite son de clase C^{1-} .

Demostración

$\forall d \in l_\infty(\mathbb{Z}) \forall n \in \mathbb{Z}$, la función \mathcal{F} en (3.5) se puede acotar utilizando la Proposición 3.2-C1,

$$|(\mathcal{F}(d))_{2n+1}| \leq \frac{1}{8} \max\{|d_{n-1}|, |d_n|\}, \quad \rightarrow \quad \|\mathcal{F}(d)\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|d\|_\infty,$$

por tanto se cumple (1.36) con $M = 1/8$.

Para comprobar (1.37), se considera separadamente los casos de índices pares e impares. De la Proposición 3.2-C1 se obtiene

$$|(S_{H_p}^{[2]} w)_{2n}| \leq \frac{1}{4} \|w\|_\infty. \quad (3.20)$$

Para acotar las componentes impares, observamos que

$$(S_{H_p}^{[2]} w)_{2n+1} = Z(w_{n-1}, w_n, w_{n+1}),$$

con

$$Z_p(x, y, z) = \frac{y}{2} - \frac{1}{8} (H_p(x, y) + H_p(y, z)).$$

Utilizando la Proposición 3.2-C1, es fácil ver que

$$|Z_p(x, y, z)| \leq \frac{1}{2} \|(x, y, z)\|_\infty, \quad (3.21)$$

lo cual implica que

$$|(S_{H_p}^{[2]} w)_{2n+1}| \leq \frac{1}{2} \|w\|_\infty,$$

y, por tanto

$$\|S_{H_p}^{[2]} w\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|w\|_\infty.$$

Esta estimación permite concluir, por el Teorema 1.6, que el esquema S_{H_p} es C^{1-} -convergente.

Dado que $Z_p(x, y, z) = -Z_p(-x, -y, -z)$, es suficiente probar (3.21) para $y > 0$ (en este caso, $H_p(x, y) \geq 0$, $H_p(y, z) \geq 0$). Teniendo en cuenta, además, la Proposición 3.2-C1) tenemos

$$-\frac{\|(x, y, z)\|_\infty}{4} \leq \frac{y}{2} - \frac{2}{8}\|(x, y, z)\|_\infty \leq Z_p(x, y, z) \leq \frac{y}{2} \leq \frac{\|(x, y, z)\|_\infty}{2}$$

lo cual prueba el resultado. ■

Estabilidad

Las funciones que definen del esquema $S_{H_p}^{[2]}$ (3.19) son combinaciones lineales de funciones diferenciables y/o funciones del tipo $H_p \circ M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una matriz de rango 2. Por tanto, los resultados del Capítulo 2 aseguran que podemos calcular el Jacobiano Generalizado del esquema $S_{H_p}^{[2]}$ utilizando las reglas de diferenciación habituales (regla de la cadena) sobre estas funciones. Así, las entradas no nulas del Jacobiano Generalizado, $DS_{H_p}^{[2]}w$, en las filas genéricas $[2n, :]$ y $[2n+1, :]$ se pueden calcular en función de los gradientes generalizados DH_p del siguiente modo:

$$\begin{aligned} (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n, n-1} &= \frac{1}{4}D_x H_p(w_{n-1}, w_n), \\ (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n, n} &= \frac{1}{4}D_y H_p(w_{n-1}, w_n), \\ (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n+1, n-1} &= -\frac{1}{8}D_x H_p(w_{n-1}, w_n), \\ (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n+1, n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}D_y H_p(w_{n-1}, w_n) - \frac{1}{8}D_x H_p(w_n, w_{n+1}), \\ (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n+1, n+1} &= -\frac{1}{8}D_y H_p(w_n, w_{n+1}). \end{aligned}$$

El resto de entradas de la matriz bi-infinita $DS_{H_p}^{[2]}(w)$ son cero.

Estudiaremos la estabilidad del esquema S_{H_p} utilizando el Teorema 2.4 con $k = 2$.

Proposición 3.6. S_{H_p} es estable si $p < 2(\sqrt{5} - 1)/2 = 2,4751$.

Demostración

Definimos $A := DS_{H_p}^{[2]}(w)$. A partir de las cotas obtenidas para DH_p en el Corolario 3.1 se puede deducir

$$\begin{aligned} 0 \leq A_{2n,n-1} &\leq \frac{p}{4}, & \Rightarrow & |A_{2n,n-1}| \leq \frac{p}{4}, \\ 0 \leq A_{2n,n} &\leq \frac{p}{4}, & \Rightarrow & |A_{2n,n}| \leq \frac{p}{4}, \\ \frac{-p}{8} \leq A_{2n+1,n-1} &\leq 0, & \Rightarrow & |A_{2n+1,n-1}| \leq \frac{p}{8}, \\ \frac{-p}{8} \leq A_{2n+1,n+1} &\leq 0, & \Rightarrow & |A_{2n+1,n+1}| \leq \frac{p}{8}, \end{aligned}$$

y, operando,

$$\frac{1}{2} - \frac{p}{4} \leq A_{2n+1,n} \leq \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad |A_{2n+1,n}| \leq \frac{1}{2},$$

Si $p \leq 4$, entonces $\frac{1}{2} - \frac{p}{4} \geq -1/2$, y por tanto $|A_{2n+1,n}| \leq \frac{1}{2}$.

En adelante supondremos $p \leq 4$. En este caso tenemos que las filas con índice impar satisfacen

$$\|A_{[2n+1, \cdot]}\|_1 = \sum_{j=n-1}^{n+1} |A_{2n+1,j}| \leq \frac{p}{8} + \frac{1}{2} + \frac{p}{8} = \frac{1}{2} + \frac{p}{4}. \quad (3.22)$$

Mientras que para las filas con índices pares,

$$\|A_{[2n, \cdot]}\|_1 = \sum_{k=n-1}^n |A_{2n,k}| = \frac{1}{4} \|DH_p(w_n, w_{n-1})\|_1 \leq \frac{p}{4}, \quad (3.23)$$

por el Corolario 3.1. Por tanto,

$$\sup_{w \in \ell_\infty(\mathbb{Z})} \|DS_{H_p}^{[2]}(w)\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \frac{p}{4}.$$

Puesto que $1/2 + p/4 < 1 \Leftrightarrow p < 2$, podemos asegurar que se satisface (2.41) para $p = 1$ cuando $L = 1$. En este caso

$$\sup_{w \in \ell_\infty(\mathbb{Z})} \|DS_{H_1}^{[2]}(w)\|_\infty \leq \frac{3}{4},$$

y, en consecuencia, el esquema S_{H_1} es estable.

Para $1 < p \leq 4$, necesitamos estudiar al menos el producto $DS_{H_p}^{[2]}w DS_{H_p}^{[2]}v$ con $v, w \in l_\infty(\mathbb{Z})$. Por simplicidad, definimos

$$A := DS_{H_p}^{[2]}w, \quad \tilde{A} := DS_{H_p}^{[2]}v, \quad B := DS_{H_p}^{[2]}w DS_{H_p}^{[2]}v = A\tilde{A}.$$

Nuestro interés se centra en calcular

$$\|B\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq 3} \|B_{[4n+i, :]}\|_1.$$

Para las filas con índice par, i.e. $4n + 2s = 2(2n + s)$, con $s = 0, 1$, las entradas distintas de cero son $A_{4n+2s, 2n+s-1}$ y $A_{4n+2s, 2n+s}$, por tanto

$$\begin{aligned} \|B_{[4n, :]}\|_1 &= \sum_k |B_{4n, k}| = \sum_k \left| \sum_j A_{4n, j} \tilde{A}_{j, k} \right| \\ &= \sum_k \left| A_{4n, 2n} \tilde{A}_{2n, k} + A_{4n, 2n-1} \tilde{A}_{2n-1, k} \right| \\ &\leq |A_{4n, 2n}| \sum_k \left| \tilde{A}_{2n, k} \right| + |A_{4n, 2n-1}| \sum_k |A_{2n-1, k}|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|B_{[4n+2, :]}\|_1 &= \sum_k |B_{4n+2, k}| = \sum_k \left| \sum_j A_{4n+2, j} \tilde{A}_{j, k} \right| \\ &= \sum_k \left| A_{4n+2, 2n+1} \tilde{A}_{2n+1, k} + A_{4n+2, 2n} \tilde{A}_{2n, k} \right| \\ &\leq |A_{4n+2, 2n+1}| \sum_k \left| \tilde{A}_{2n+1, k} \right| + |A_{4n+2, 2n}| \sum_k \left| \tilde{A}_{2n, k} \right|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|B_{[4n, :]}\|_1 \leq |A_{4n, 2n}| \|\tilde{A}_{[2n, :]}\|_1 + |A_{4n, 2n-1}| \|\tilde{A}_{[2n-1, :]}\|_1.$$

$$\|B_{[4n+2, :]}\|_1 \leq |A_{4n+2, 2n+1}| \|\tilde{A}_{[2n+1, :]}\|_1 + |A_{4n+2, 2n}| \|\tilde{A}_{[2n, :]}\|_1.$$

Utilizando las cotas obtenidas anteriormente obtenemos

$$\begin{aligned} \|B_{[4n, :]}\|_1 &\leq (|A_{4n, 2n}| + |A_{4n, 2n-1}|) \|\tilde{A}\|_\infty = \|A_{[4n, :]}\|_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{4} \right) \\ &\leq \frac{p}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{4} \right) = \frac{p^2 + 2p}{16}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

de manera análoga

$$\|B_{[4n+2, :]}\|_1 \leq \frac{p}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{4} \right) = \frac{p^2 + 2p}{16}. \quad (3.25)$$

Veamos ahora las acotaciones correspondientes a las filas impares.

$$\|B_{[4n+2s+1, :]}\|_1 = \sum_k |B_{4n+2s+1, k}| = \sum_k \left| \sum_j A_{4n+2s+1, j} \tilde{A}_{j, k} \right|.$$

Como $4n+2s+1 = 2 \cdot (2n+s) + 1$, teniendo en cuenta quienes son los elementos distintos de cero en la fila $2(2n+s) + 1$, $s = 0, 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_k \left| \sum_j A_{2(2n+s)+1, j} \tilde{A}_{j, k} \right| &= \sum_k \left| A_{2(2n+s)+1, (2n+s)-1} \tilde{A}_{(2n+s)-1, k} \right| \\ &\quad + \sum_k \left| A_{2(2n+s)+1, (2n+s)} \tilde{A}_{(2n+s), k} \right| \\ &\quad + \sum_k \left| A_{2(2n+s)+1, (2n+s)+1} \tilde{A}_{(2n+s)+1, k} \right|, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|B_{[4n+2s+1, :]}\|_1 &\leq |A_{2(2n+s)+1, (2n+s)-1}| \|\tilde{A}_{[(2n+s)-1, :]}\|_1 \\ &\quad + |A_{2(2n+s)+1, (2n+s)}| \|\tilde{A}_{[(2n+s), :]}\|_1 \\ &\quad + |A_{2(2n+s)+1, (2n+s)+1}| \|\tilde{A}_{[(2n+s)+1, :]}\|_1, \end{aligned} \quad (3.26)$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} \|B_{[4n+1, :]}\|_1 &\leq 2 \frac{p}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{4} \right) + \frac{1}{2} \frac{p}{4} = \frac{p^2 + 4p}{16}. \\ \|B_{[4n+3, :]}\|_1 &\leq 2 \frac{p}{8} \frac{p}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{4} \right) = \frac{p^2 + 2p + 4}{16}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|B\|_\infty = \|DS_{H_p}^{[2]} w DS_{H_p}^{[2]} v\|_\infty \leq \max \left\{ \frac{p^2 + 4p}{16}, \frac{p^2 + 2p + 4}{16} \right\}.$$

Es sencillo comprobar que

$$\frac{p^2 + 4p}{16} \geq \frac{p^2 + 2p + 4}{16} \quad \leftrightarrow \quad p \geq 2.$$

Así,

1. Si $1 < p < 2$, $\|B\|_\infty \leq (p^2 + 2p + 4)/16 < 12/16 < 1$
2. Si $2 \leq p \leq 4$, $\|B\|_\infty \leq (p^2 + 4p)/16$. En este caso $\|B\|_\infty < 1$ si y solo si $p < 2(\sqrt{5} - 1) = 2,4751$.

■

Cabe destacar que las cotas obtenidas en la demostración anterior para $p = 1$ coinciden con las cotas implícitamente citadas en [19], mientras que la cota obtenida para $p = 2$, $C_2 = 3/4$, coincide con la obtenida en [3] (por acotaciones directas, sin utilizar el Jacobiano Generalizado). Por otra parte, en [30] se prueba que el esquema S_{H_p} es estable para $1 \leq p < 8/3 = 2,6666\dots$, analizando el radio espectral del Jacobiano Generalizado, mientras que el resultado anterior obtiene la estabilidad para $p < 2(\sqrt{5} - 1) = 2,4751$. En [30] se prueba, además, que S_{H_p} no es estable si $p \geq 4$. Este caso no se contempla en el Teorema 3.6.

El estudio de la estabilidad para S_{H_3} utilizando la técnica propuesta en este capítulo requiere el estudio del producto de al menos tres Jacobianos Generalizados. El procedimiento teórico es el mismo, pero el proceso en este caso es demasiado largo y tedioso. Por otra parte, es sencillo implementar un procedimiento numérico para obtener las cotas correspondientes al producto de Jacobianos. Describiremos este proceso en la sección 3.4. Los resultados obtenidos mediante este procedimiento numérico indican que

$$\sup_{u,v,w \in l_\infty(\mathbb{Z})} \|DS_{H_3}^{[2]}u DS_{H_3}^{[2]}v DS_{H_3}^{[2]}w\|_\infty \geq 1$$

mientras que la evidencia numérica indica que el producto de cuatro Jacobianos Generalizados podría estar uniformemente acotado.

Orden de aproximación

En la siguiente proposición se resumen algunos resultados conocidos, relacionados con el orden de aproximación del esquema S_{H_p} . Incluimos las pruebas por completitud.

Proposición 3.7. *[[19]-Proposición II.6.] Si el esquema S_{H_p} es estable, entonces $S_{H_p}^\infty$ tiene orden de aproximación al menos 3. Además, si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y convexa, $f = \{g(nh)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ entonces*

$$\|S_{H_p}^\infty f - g\|_\infty = \mathcal{O}(h^{\min\{4, 2+p\}}).$$

Demostración

Como S_{H_p} reproduce polinomios de grado 2, la Proposición 1.5 implica que el orden de aproximación de $S_{H_p}^\infty$ es 3 si el esquema es estable.

Notamos que si g es una función suave se verifica $\nabla^2 f_n = \mathcal{O}(h^2)$, $\forall n$ (utilizando desarrollos de Taylor). Si g es convexa, entonces $\nabla^2 f_n \geq 0$ para h suficientemente pequeño.

Si denotamos $x := \nabla^2 f_n$, $y := \nabla^2 f_{n+1}$, utilizando desarrollos de Taylor se obtiene que $|y - x| = \mathcal{O}(h^3)$. Si $xy > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+y}{2} - H_p(x, y) \right| &= \frac{x+y}{2} \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^p = \frac{1}{2} \frac{|x-y|^p}{(x+y)^{p-1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\mathcal{O}(h^3))^p}{(\mathcal{O}(h^2))^{p-1}} = \mathcal{O}(h^{3p-2p+2}) = \mathcal{O}(h^{p+2}), \end{aligned}$$

por tanto

$$\|S_{H_p} f - S_{2,2} f\|_\infty \left| \frac{x+y}{2} - H_p(x, y) \right| = \mathcal{O}(h^{p+2}).$$

Dado que el orden de aproximación después de una iteración del esquema $S_{2,2}$ es igual a 4, obtenemos el resultado de la proposición utilizando la Proposición 1.4. ■

3.3

Experimentos Numéricos

En esta sección mostramos algunos experimentos que ilustran los resultados teóricos de este capítulo, así como las diferencias en el comportamiento de los esquemas S_{H_p} para distintos valores de p .

3.3.1

Orden de aproximación

La Proposición 3.7 establece el orden de aproximación de los esquemas S_{H_p} , dependiendo de la estabilidad del esquema y de la convexidad de la función considerada. En esta sección efectuaremos un estudio numérico del orden de aproximación que se obtiene al reconstruir funciones suaves mediante los esquemas S_{H_p} para distintos valores de p .

El contexto general es el siguiente: Suponemos que se conocen los valores puntuales de una función suave $g(x)$ en una malla de puntos igualmente espaciados $\{x_i\}$ con paso de malla uniforme, h . Dado un esquema de subdivisión S y un intervalo $[a, b] \subset [\min_i x_i, \max_i x_i]$, calculamos

$$E_S^{[a,b]}(h) = \|S^\infty f^0 - g\|_{L^\infty([a,b])} \approx \max\{|(S^7 f^0)_n - g(n2^{-7}h)|, n2^{-7}h \in [a, b]\} \quad (3.27)$$

donde $f^0 = \{g(x_i)\}$ son los datos iniciales del proceso de subdivisión. Tomamos como referencia 7 aplicaciones del proceso de subdivisión puesto que en todos los experimentos numéricos realizados en esta memoria no se aprecian diferencias significativas si se consideran más aplicaciones.

En los ejemplos numéricos considerados en esta sección se comparará el comportamiento de los esquemas $S_{2,2}$, y S_{H_p} para $p = 1, 2, 3, 4$. En todos los casos consideramos valores iniciales $f^0 = \{g(nh)\}_{n \in l_\infty(\mathbb{Z})}$ para distintos valores de h y tabulamos los errores $E_S^{[a,b]}(h)$ en (3.27) para los diferentes valores de h considerados.

Asumiendo que $\|S^\infty f^0 - g\|_{L^\infty([a,b])} = O(h^q)$, el orden de aproximación calcula realizando un ajuste (log-log) por mínimos cuadrados sobre los valores obtenidos en la tabulación.

Ejemplo 1: curva gaussiana

En este ejemplo consideramos $g(x)$ una función gaussiana de media $\mu = 0$ y $\sigma = 0,5$, es decir

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x^2},$$

y las regiones $[-1, -0,3]$ (Figura 3.3-izquierda) donde la función no es convexa, y $[-0,4, 0,4]$ (ver Figura 3.3-derecha) donde la función es convexa.

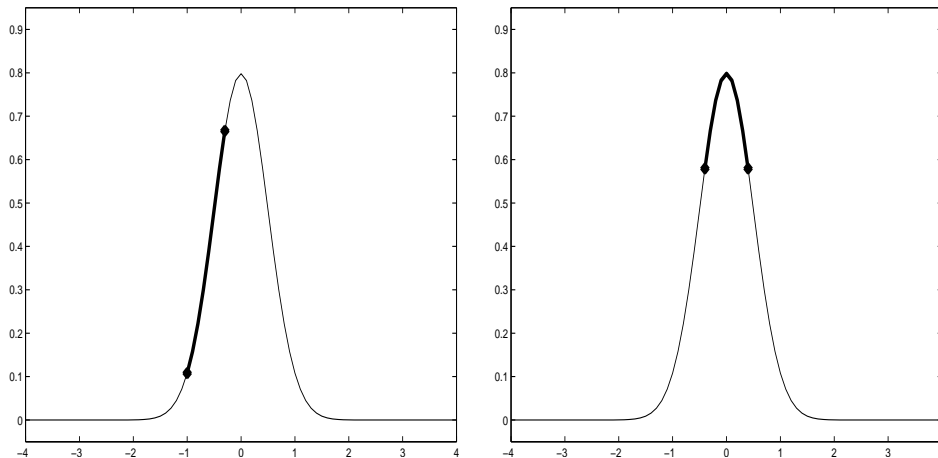


Figura 3.3: (x) Datos iniciales, más marcado la zona donde estudiamos el orden de aproximación, izquierda intervalo $[-1, -0,3]$ y derecha $[-0,4, 0,4]$.

En la Tabla 3.1 se muestran los resultados obtenidos para $S_{2,2}$ y S_{H_p} , $p = 1, 2, 3, 4$, en el intervalo $[-1, -0,3]$. La tabla muestra que el orden de aproximación de los esquemas no lineales es 3, en todos los casos, mientras que el orden de aproximación del esquema $S_{2,2}$ es 4. Recordamos que la Proposición 3.7 establece que el orden de aproximación de los esquemas S_{H_p} es al menos 3 si el esquema es

h	$E_{2,2}$	E_{H_1}	E_2	E_3	E_4
0,1	$5,4e-5$	$5,5e-4$	$4,8e-4$	$4,7e-4$	$4,6e-4$
0,05	$3,4e-6$	$7,0e-5$	$6,1e-5$	$6,0e-5$	$6,0e-5$
0,025	$2,1e-7$	$8,8e-6$	$7,7e-6$	$7,6e-6$	$7,6e-6$
0,0125	$1,3e-8$	$1,1e-6$	$9,6e-7$	$9,6e-7$	$9,6e-7$
q	4,0	2,99	2,97	2,97	2,97

Tabla 3.1: Datos Gausianos: Error respecto a h en $[-1, -0,3]$.

estable. Cabe destacar que el orden de aproximación del esquema S_{H_4} es también 3 a pesar de que el esquema no es estable.

En la Tabla 3.2 se muestran los resultados correspondientes al intervalo $[-0,4, 0,4]$, donde la función es convexa y por tanto $\nabla^2 f_n \nabla^2 f_{n+1} > 0, \forall n$ en esta región. La Tabla 3.2 confirma el resultado teórico de la Proposición 3.7: el orden de aproximación de $S_{H_p}^\infty$ es $\min\{4, 2+p\}$, en el caso en que el esquema es estable, puesto que se obtiene orden 3 para $p = 1$ y orden 4 para $p = 2$.

h	$E_{2,2}$	E_1	E_2	E_3	E_4
0,1	$3,5e-6$	$5,6e-4$	$1,9e-4$	$8,6e-5$	$4,5e-4$
0,05	$2,4e-7$	$7e-5$	$1,4e-5$	$5,6e-6$	$5,9e-5$
0,025	$1,6e-8$	$8,8e-6$	$9,8e-7$	$3,5e-7$	$7,6e-6$
0,0125	$1,0e-9$	$1,1e-6$	$6,4e-8$	$2,2e-8$	$9,6e-7$
q	3,9	2,9	3,8	3,9	2,9

Tabla 3.2: Datos Gausianos: Error respecto a h en $[-0,4, 0,4]$

Por otra parte, se observa que el orden de aproximación de S_{H_3} en esta zona es también 4, lo cual se puede considerar un indicador de la estabilidad del esquema S_{H_3} , mientras que la (conocida) falta de estabilidad del esquema S_{H_4} parece conducir a una pérdida de exactitud en la zona convexa, donde el orden de aproximación del esquema continúa siendo igual a 3.

Carácter No-Oscilatorio

En la sección anterior hemos visto que el orden de aproximación de los esquemas S_{H_p} es 3 (4 en regiones convexas si el esquema es estable), mientras que el orden de aproximación del esquema $S_{2,2}$ es 4. Esta pérdida de exactitud en regiones suaves es el precio a pagar por la ausencia de oscilaciones en regiones con fuertes gradientes.

En el Capítulo 1 hemos presentado algunos ejemplos que ilustran el carácter no-oscilatorio de los esquemas S_{H_p} en comparación con el comportamiento 'tipo-Gibbs' que se observa al aplicar el esquema $S_{2,2}$ sobre datos con fuertes gradientes. En esta sección presentaremos algunos ejemplos adicionales con el objetivo de ilustrar las diferencias entre los esquemas S_{H_p} en función del valor de p . Para ello consideramos, de nuevo, datos f^0 que corresponden a la discretización de una función discontinua, suave a trozos, sobre una malla de puntos igualmente espaciados,

$$f^0 = \{f(x_i)\}, \{x_i\} = 0 : \frac{1}{8} : 1, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \leq 0,5 \\ -\sin(\pi x), & x > 0,5 \end{cases} \quad (3.28)$$

En las Figuras 3.4 y 3.5 se muestran los resultados al aplicar diferentes esquemas de subdivisión S_{H_p} a estos datos. Los esquemas S_{H_p} eliminan el fenómeno de Gibbs en el entorno de la discontinuidad. En la Figura 3.5 se observa que p controla la *tensión* de la reconstrucción alrededor de las zonas con fuertes gradientes.

Reconstrucción de Datos Monótonos

En nuestro último ejemplo consideramos los siguientes datos, similares a los propuestos por Akima en [27] (ver Figura 3.6). Estos datos son de naturaleza similar a los que pueden aparecer como resultado de simulaciones numéricas para leyes de conservación hiperbólicas, alrededor de ondas de choque o en el comienzo de

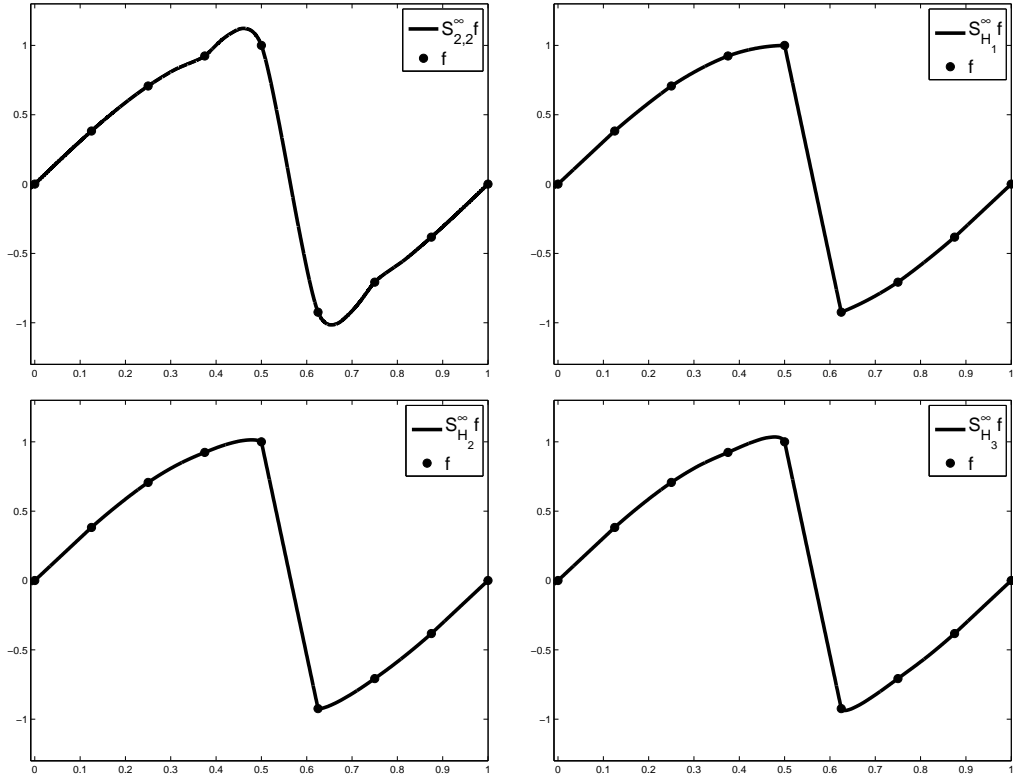


Figura 3.4: (•) Datos iniciales (3.28). Resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$, S_{H_p} para $p = 1, 2, 3$.

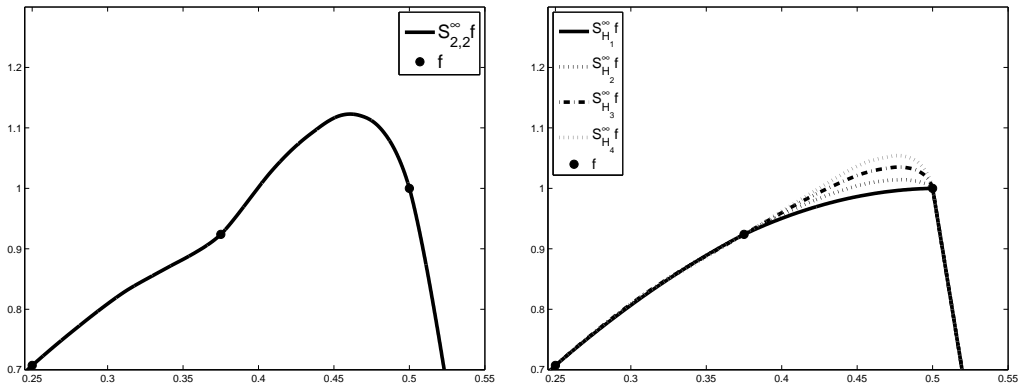


Figura 3.5: (•) Zoom a la izquierda de $x = 0,5$ en la figura 3.4.

ondas de rarefacción.

$$1 \leq x_i \leq 17 \quad f(x_i) = \begin{cases} 10, & 1 \leq x_i \leq 5 \\ 10, 5, & 6 \leq x_i \leq 9 \\ 15, & x_i = 10 \\ 50, & 11 \leq x_i \leq 14 \\ 60, & x_i = 15 \\ 85, & 16 \leq x_i \leq 17 \end{cases} \quad (3.29)$$

En la Figura 3.6 presentamos los resultados obtenidos al aplicar diversos esquemas S_{H_p} , junto con el resultado obtenido al aplicar el esquema $S_{2,2}$. Notamos que, en este caso, la función límite asociada a los esquemas S_{H_p} muestra una significativa falta de suavidad en las zonas que corresponden a fuertes gradientes.

3.4

Cálculo numérico de la Estabilidad

En esta sección mostramos un procedimiento numérico que permite estimar la bondad de las cotas de los Jacobianos Generalizados obtenidas en la Proposición 3.6, e investigar la estabilidad del esquema S_{H_3} .

Recordamos que las entradas no-nulas de la matriz bi-infinita $DS_{H_p}^{[2]}(w)$ en las filas genéricas $2n$ y $2n+1$ son

$$\begin{aligned} (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n,n-1} &= \frac{1}{4} D_x H_p(w_{n-1}, w_n), \\ (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n,n} &= \frac{1}{4} D_y H_p(w_{n-1}, w_n), \\ (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n+1,n-1} &= -\frac{1}{8} D_x H_p(w_{n-1}, w_n), \\ (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n+1,n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} D_y H_p(w_{n-1}, w_n) - \frac{1}{8} D_x H_p(w_n, w_{n+1}), \\ (DS_{H_p}^{[2]}(w))_{2n+1,n+1} &= -\frac{1}{8} D_y H_p(w_n, w_{n+1}), \end{aligned}$$

y que para $p > 1$, las derivadas parciales de $H_p(x, y)$ en el primer y

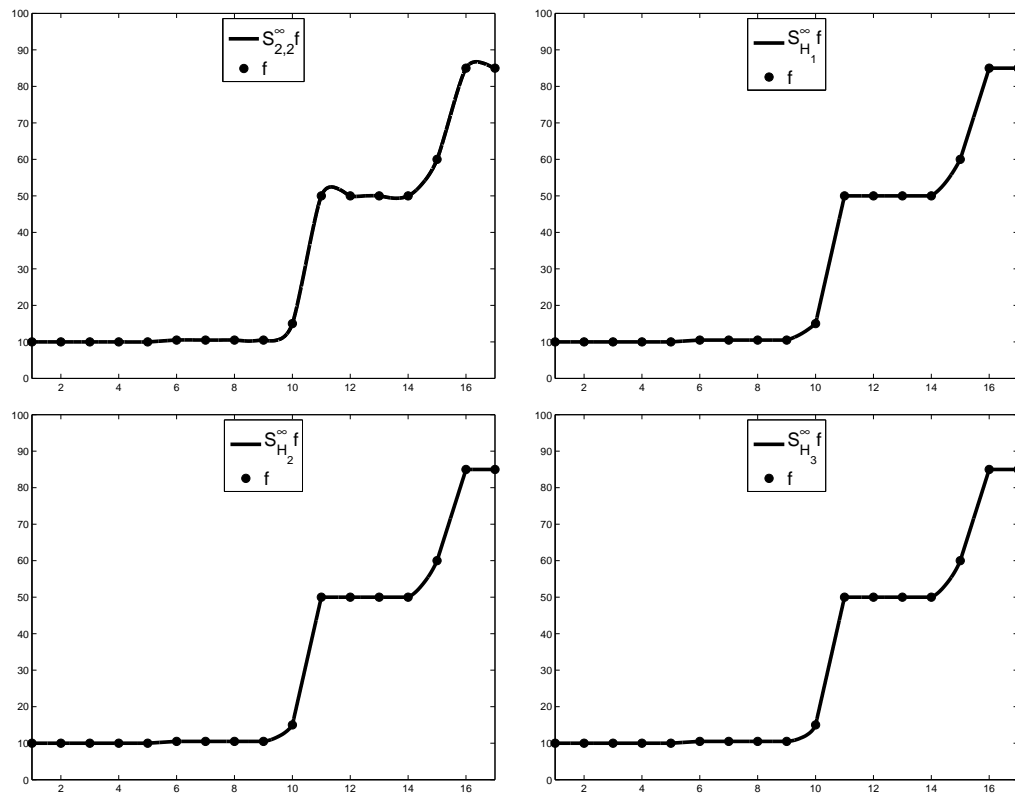


Figura 3.6: (●) Datos iniciales de Akima con escalera igualmente espaciados, resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}^{\infty}$, $S_{H_p}^{\infty}$ para $p = 1, 2, 3$.

tercer cuadrante se pueden reescribir del siguiente modo:

$$D_x H_p|_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2}(1 + (p-1)|\tau|^p - p\tau|\tau|^{p-1}) = \Phi(-\tau),$$

$$D_y H_p|_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2}(1 + (p-1)|\tau|^p + p\tau|\tau|^{p-1}) =: \Phi(\tau),$$

con $\tau = (x-y)/(x+y) \in [-1, 1]$, mientras que en el segundo y cuarto cuadrante, las componentes de DH_p son cero. El siguiente código en Matlab calcula $\Phi(t)$ para un valor concreto de la variable t ,

```
function [y ] = phifp(t,p) % p>1
    at=abs(t);
    y=1+(p-1)*at.^p+ p*t.*at^(p-2);
    y=.5*y;
end
```

Si denotamos $A(w) := DS_{H_p}^{[2]}(w)$, y

$$t = \frac{w_n - w_{n-1}}{w_n + w_{n-1}}, \quad \tilde{t} = \frac{w_{n+1} - w_n}{w_n + w_{n+1}},$$

en el caso en que $w_{n-1} \cdot w_n \geq 0$, $w_n \cdot w_{n+1} \geq 0 \equiv$, $t, \tilde{t} \in [-1, 1]$ tenemos

$$A_{[2n, n-1, n]} = \frac{1}{4}(\Phi(-t), \Phi(t))$$

$$A_{[2n+1, n-1, n+1]} = \frac{1}{8}(-\Phi(-t), 4 - \Phi(t) - \Phi(-\tilde{t}), -\Phi(\tilde{t}))$$

Estas expresiones, que representan el caso 'mas desfavorable' para las componentes no nulas de las filas genéricas de $DS_{H_p}^{[2]}(w)$, se implementan facilmente en Matlab

```
function [ Ae ] = Apar(t,p)
    Ae(1)=.25*phifp(-t,p);
    Ae(2)=.25*phifp(t,p);
end
```

```
function [ Ao ] = Aimpair(t,s,p)
    dxt=phifp(-t,p)/8;
    dyt=phifp(t,p)/8;
```



```

dxs=phifp(-s,p)/8;
dys=phifp(s,p)/8;

Ao(1)=-dxt;
Ao(2)=.5-dyt-dxs;
Ao(3)=-dys;
end

```

Notar que

$$\begin{aligned} \sup_{w \in l_\infty(\mathbb{Z})} \|DS_{H_p}^{[2]}(w)\|_\infty &= \sup_{w \in l_\infty(\mathbb{Z})} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \{ \text{máx}(\|A_{[2n,:]} \|_1, \|A_{[2n+1,:]} \|_1) \} \\ &= \sup_{t, \tilde{t} \in [-1,1]} \{ \text{máx}(A_{\text{par}}(t), A_{\text{impar}}(t, \tilde{t})) \}. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos 'calcular' cotas uniformes para $\|DS_{H_p}^{[2]}(w)\|_\infty$ utilizando diversas particiones del intervalo $[-1, 1]$ con paso de malla $h \rightarrow 0$. El siguiente código implementa esta idea:

```

function [ cpar, cimp ] = J1(h,p)
t=[-1:h:1];s=t; n=length(t);
cpar=0; cimp=0;

for i=1:n
    Ae=Apar(t(i),p);
    cpar=max(cpar,norm(Ae,1));
    for j=1:n
        Ao=Aimpar(t(i),s(j),p);
        cimp=max(cimp,norm(Ao,1));
    end
end
end

```

En la Tabla 3.3 presentamos las cotas obtenidas en Matlab para particiones con $h \leq 0,1$ (se observa que el mayor valor obtenido corresponde a valores de $t = \pm 1, \tilde{t} = \pm 1$) para $p = 2, 3$, junto con las cotas teóricas obtenidas en la Proposición 3.6,

$$\|A_{[2n+1,:]} \|_1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p, \quad \|A_{[2n,:]} \|_1 \leq \frac{1}{4}p.$$

Se observa en la tabla que las cotas obtenidas en Matlab coinciden con las cotas teóricas que son, por tanto, óptimas. De la tabla

p	$p = 2$	$p = 3$
$\ A_{[2n+1, \cdot]}\ _1$	1	1,25
$1/2 + p/4$	1	1,25
$\ A_{[2n, \cdot]}\ _1$	0,5	0,75
$p/4$	0,5	0,75

Tabla 3.3: Cotas numéricas para $h \leq 0,1$.

se deduce que para $p \geq 2$ el estudio de la estabilidad requiere, necesariamente, considerar el producto de al menos dos Jacobianos Generalizados. En este caso se ha de estimar

$$\|B\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq 3} \|B_{[4n+i, \cdot]}\|_1 \quad B := DS_{H_p}^{[2]} w D S_{H_p}^{[2]} v.$$

Como en el caso anterior, denotamos

$$A := DS_{H_p}^{[2]} w, \quad \tilde{A} := DS_{H_p}^{[2]} v, \quad B = A\tilde{A}.$$

Las entradas no nulas de las filas $B_{[4n+k, \cdot]}$, $k = 0, 1, 2, 3$ se obtienen al efectuar el producto de las matrices

$$C_{4n} := \begin{pmatrix} A_{4n, 2n-1} & A_{4n, 2n} & 0 & 0 \\ A_{4n+1, 2n-1} & A_{4n+1, 2n} & A_{4n+1, 2n+1} & 0 \\ 0 & A_{4n+2, 2n} & A_{4n+2, 2n+1} & 0 \\ 0 & A_{4n+3, 2n} & A_{4n+3, 2n+1} & A_{4n+3, 2n+2} \end{pmatrix},$$

$$D_{2n} := \begin{pmatrix} \tilde{A}_{2n-1, n-2} & \tilde{A}_{2n-1, n-1} & \tilde{A}_{2n-1, n} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{2n, n-1} & \tilde{A}_{2n, n} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{2n+1, n-1} & \tilde{A}_{2n+1, n} & \tilde{A}_{2n+1, n+1} \\ 0 & \tilde{A}_{2n+2, n} & \tilde{A}_{2n+2, n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que las filas de C_{4n} dependen únicamente de los valores

$$s := \frac{w_{2n} - w_{2n-1}}{w_{2n} + w_{2n-1}}, \quad \tilde{s} := \frac{w_{2n+1} - w_{2n}}{w_{2n+1} + w_{2n}}, \quad \bar{s} := \frac{w_{2n+2} - w_{2n+1}}{w_{2n+2} + w_{2n+1}},$$

mientras que las filas de D_{2n} lo hacen de

$$\hat{t} := \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{u_{n-1} + u_{n-2}}, \quad t := \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n + u_{n-1}}, \quad \tilde{t} := \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} + u_n}.$$

Los siguientes códigos calculan C_{4n} y D_{2n} en función de las variables definidas anteriormente.

```
function [ C ] = C4n( s1,s2,s3,p)
```

```
C=[Apar(s1,p),0,0;
  Aimpar(s1,s2,p),0;
  0, Apar(s2,p),0;
  0, Aimpar(s2,s3,p)];
```

```
end
```

```
function [ D ] = D2n(t1,t2,t3,p )
```

```
D=[Aimpar(t1,t2,p),0;
  0, Apar(t2,p),0;
  0, Aimpar(t2,t3,p);
  0,0,Apar(t3,p)];
```

```
end
```

Observamos que

$$\begin{aligned} \sup_{w,v \in l_\infty(\mathbb{Z})} \|DS_{H_p}^{[2]} w D S_{H_p}^{[2]} v\|_\infty &= \sup_{w,v \in l_\infty(\mathbb{Z})} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \{ \max_{0 \leq k \leq 3} \|B_{[4n+k,:]} \|_1 \} \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \max_{0 \leq k \leq 3} \{ \sup \{ \|B_{[4n+k,:]} \|_1, s, \tilde{s}, \bar{s}, \hat{t}, t, \tilde{t} \in [-1, 1] \} \} \end{aligned}$$

y utilizamos el siguiente código de Matlab para calcular

$$\max_{0 \leq k \leq 3} \{ \|B_{[4n+k,:]} \|_1, s, \tilde{s}, \bar{s}, \hat{t}, t, \tilde{t} \in [-1 : h : 1] \}$$

```
function [ cot ] = J2(h,p)
```

```
t=[-1:h:1];
n=length(t);
cot=[0,0,0,0];
```

```
for is1=1:n
```

```
  for is2=1:n
```

```
    for is3=1:n
```

```
      C=C4n(t(is1),t(is2),t(is3),p);
```

```
      for it1=1:n
```

```
        for it2=1:n
```

```
          for it3=1:n
```

```
            D=D2n(t(it1),t(it2),t(it3),p);
```

```

B=C*D;
cot (1)=max (cot (1), norm (B (1, :), 1));
cot (2)=max (cot (2), norm (B (2, :), 1));
cot (3)=max (cot (3), norm (B (3, :), 1));
cot (4)=max (cot (4), norm (B (4, :), 1));
end
end
end
end
end
end
end
end

```

Las cotas obtenidas en Matlab aparecen en la Tabla 3.3 (de nuevo, es suficiente considerar e.g. $h = 0,1$ porque los valores obtenidos corresponden a valores de las variables en los extremos del intervalo $[-1, 1]$), junto con las cotas teóricas, obtenidas en la Proposición 3.6

$\ B_{[4n,:]\ _1$	$\ B_{[4n+1,:]\ _1$	$\ B_{[4n+2,:]\ _1$	$\ B_{[4n+3,:]\ _1$
$(p^2 + 2p)/16$	$(p^2 + 4p)/16$	$(p^2 + 2p)/16$	$(p^2 + 2p + 4)/16$

p	$\ B_{[4n,:]\ _1$	$\ B_{[4n+1,:]\ _1$	$\ B_{[4n+2,:]\ _1$	$\ B_{[4n+3,:]\ _1$
$p = 2$ Matlab	0,5000	0,5000	0,5000	0,7500
$p = 2$ teórica	0,5000	0,7500	0,5000	0,7500
$p = 3$ Matlab	0,9375	0,9375	0,9375	1,1875
$p = 3$ teórica	0,9375	1,3125	0,9375	1,1875

Tabla 3.4: Con $h = 0,1$ y cualquier h más pequeño.

La Tabla 3.4 muestra que las cotas obtenidas en la Proposición 3.6 son óptimas, excepto para $\|B_{[4n+1,:]\|_1$, y que el producto de dos Jacobianos Generalizados no esta uniformemente acotado por una cota estrictamente menor que la unidad para el esquema S_{H_3} , por lo que el estudio de la estabilidad de este esquema requiere al menos considerar el producto $DS_{H_p}^{[2]} w D S_{H_p}^{[2]} v D S_{H_p}^{[2]} u$

Siguiendo el mismo tipo de razonamiento, consideramos

$$A := DS_{H_p}^{[2]} w, \quad \tilde{A} := DS_{H_p}^{[2]} v, \quad \hat{A} := DS_{H_p}^{[2]} u, \quad Q := A\tilde{A}\hat{A}.$$

$$\|Q\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \max_{0 \leq i \leq 7} \|Q_{[8n+i, :]}\|_1.$$

Las entradas no nulas de las filas $Q_{[8n+k, :]}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ se obtienen al efectuar el producto de las matrices M_{8n}, C_{4n}^B y D_{2n}^B

$$M_{8n} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{8n,4n-1} & \widehat{A}_{8n,4n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{A}_{8n+1,4n-1} & \widehat{A}_{8n+1,4n} & \widehat{A}_{8n+1,4n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{A}_{8n+2,4n} & \widehat{A}_{8n+2,4n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{A}_{8n+3,4n} & \widehat{A}_{8n+3,4n+1} & \widehat{A}_{8n+3,4n+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{A}_{8n+4,4n+1} & \widehat{A}_{8n,4n+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{A}_{8n+5,4n+1} & \widehat{A}_{8n+5,4n+2} & \widehat{A}_{8n+5,4n+3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{A}_{8n+6,4n+2} & \widehat{A}_{8n+6,4n+3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{A}_{8n+7,4n+2} & \widehat{A}_{8n+7,4n+3} & \widehat{A}_{8n+7,4n+4} \end{pmatrix}$$

$$C_{4n}^B = \begin{pmatrix} A_{4n-1,2n-2} & A_{4n,2n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{4n,2n-1} & A_{4n,2n} & 0 & 0 \\ 0 & A_{4n+1,2n-1} & A_{4n+1,2n} & A_{4n+1,2n+1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{4n+2,2n} & A_{4n+2,2n+1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{4n+3,2n} & A_{4n+3,2n+1} & A_{4n+3,2n+2} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4n+4,2n+1} & A_{4n+4,2n+2} \end{pmatrix}$$

$$D_{2n}^B = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{2n-2,n-2} & \widetilde{A}_{2n-2,n-1} & 0 & 0 \\ \widetilde{A}_{2n-1,n-2} & \widetilde{A}_{2n-1,n-1} & \widetilde{A}_{2n-1,n} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{2n,n-1} & \widetilde{A}_{2n,n} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_{2n+1,n-1} & \widetilde{A}_{2n+1,n} & \widetilde{A}_{2n+1,n+1} \\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{2n+2,n} & \widetilde{A}_{2n+2,n+1} \end{pmatrix}$$

Las filas de M_{8n} dependen únicamente de los valores

$$d_1 := \frac{w_{2n} - w_{2n-1}}{w_{2n} + w_{2n-1}}, \quad d_2 := \frac{w_{2n+1} - w_{2n}}{w_{2n+1} + w_{2n}}, \quad d_3 := \frac{w_{2n+2} - w_{2n+1}}{w_{2n+2} + w_{2n+1}},$$

$$d_4 := \frac{w_{2n+3} - w_{2n+2}}{w_{2n+3} + w_{2n+2}}, \quad d_5 := \frac{w_{2n+4} - w_{2n+3}}{w_{2n+4} + w_{2n+3}}, \quad d_6 := \frac{w_{2n+5} - w_{2n+4}}{w_{2n+5} + w_{2n+4}},$$

$$d_7 := \frac{w_{2n+6} - w_{2n+5}}{w_{2n+6} + w_{2n+5}}, \quad d_8 := \frac{w_{2n+7} - w_{2n+6}}{w_{2n+7} + w_{2n+6}}$$

mientras que las filas de C_{4n}^B dependen de los valores

$$s_1 := \frac{v_{2n} - v_{2n-1}}{v_{2n} + v_{2n-1}}, \quad s_2 := \frac{v_{2n+1} - v_{2n}}{v_{2n+1} + v_{2n}}, \quad s_3 := \frac{v_{2n+2} - v_{2n+1}}{v_{2n+2} + v_{2n+1}},$$

$$s_4 := \frac{v_{2n+3} - v_{2n+2}}{v_{2n+3} + v_{2n+2}}, \quad s_5 := \frac{v_{2n+4} - v_{2n+3}}{v_{2n+4} + v_{2n+3}}$$

y las filas de D_{2n} lo hacen de

$$t_1 := \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{u_{n-1} + u_{n-2}}, \quad t_2 := \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n + u_{n-1}}, \quad t_3 := \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} + u_n}, \quad t_4 := \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+2} + u_{n+1}},$$

por tanto

$$\sup_{u,w,v \in l_\infty(\mathbb{Z})} \|Q_{[8n+k;:]}\|_1 = \sup\{\|Q_{[8n+k;:]}\|_1, d_i, s_j, t : k \in [-1, 1] \ i = 1 : 8, j = 1 : 5, k = 1 : 4\}.$$

Los siguientes códigos calculan las matrices M_{8n} , C_{4n}^B y D_{2n}^B en función de las variables definidas anteriormente.

```
function [ M ] = M8n( s1, s2, s3, s4, s5, p)
```

```
M=[Apar(s1, s2, p), 0, 0, 0, 0;
    Aimpar(s1, s2, p), 0, 0, 0, 0;
    0, Apar(s2, s3, p), 0, 0, 0;
    0, Aimpar(s2, s3, p), 0, 0, 0;
    0, 0, Apar(s3, s4, p), 0, 0;
    0, 0, Aimpar(s3, s4, p), 0, 0;
    0, 0, 0, Apar(s4, s5, p), 0;
    0, 0, 0, Aimpar(s4, s5, p) ];
```

```
end
```

```
function [ C ] = C4nbis( s1, s2, s3, s4, s5, p)
```

```
C=[Aimpar(s1, s2, p), 0, 0;
    0, Apar(s2, s3, p), 0, 0;
    0, Aimpar(s2, s3, p), 0, 0;
    0, 0, Apar(s3, s4, p), 0;
    0, 0, Aimpar(s3, s4, p), 0;
    0, 0, 0, Apar(s4, s5, p) ];
```

```
end
```

```
function [ D ] = D2nbis(t1, t2, t3, t4, p)
```

```
D=[Apar(t1, t2, p), 0, 0, 0;
    Aimpar(t1, t2, p), 0, 0, 0;
    0, Apar(t2, t3, p), 0, 0;
```

```
0, Aimpar(t2,t3,p), 0;
0,0,Apar(t3, t4,p),0 ];
```

```
end
```

El siguiente código de Matlab calcula

$$\max_{0 \leq k \leq 7} \sup \{ \|Q_{[8n+k,:]} \|_1, d_i, s_j, t_k \in [-1, 1] \mid i = 1 : 8, j = 1 : 5, k = 1 : 4 \}$$

```
function [ cot ] = J3(h,p)
t=[-1:h:1];
n=length(t);
cot=[0,0,0,0,0,0,0,0];

for is1=1:n
    for is2=1:n
        for is3=1:n
            for is4=1:n
                for is5=1:n
                    C=C4nbis(t(is1),t(is2),t(is3),t(is4),t(is5),p);
                    for it1=1:n
                        for it2=1:n
                            for it3=1:n
                                for it4=1:n
                                    D=D2nbis(t(it1),t(it2),t(it3),t(it4),p);
                                    for im1=1:n
                                        for im2=1:n
                                            for im3=1:n
                                                for im4=1:n
                                                    for im5=1:n
                                                        M = M8n(t(im1),t(im2),t(im3),t(im4),t(im5),p);
                                                        B1=M*C*D;
                                                        cot(1)=max(cot(1),norm(B1(1,:),1));
                                                        cot(2)=max(cot(2),norm(B1(2,:),1));
                                                        cot(3)=max(cot(3),norm(B1(3,:),1));
                                                        cot(4)=max(cot(4),norm(B1(4,:),1));
                                                        cot(5)=max(cot(5),norm(B1(5,:),1));
                                                        cot(6)=max(cot(6),norm(B1(6,:),1));
                                                        cot(7)=max(cot(7),norm(B1(7,:),1));
                                                        cot(8)=max(cot(8),norm(B1(8,:),1));
                                                    end
                                                end
                                            end
                                        end
                                    end
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
```


4

El esquema Pchip

En este capítulo proponemos y analizamos un esquema de subdivisión basado en la utilización de un polinomio interpolador de tercer grado que preserva la monotonía de los datos. El polinomio interpolador que se utiliza en la construcción de este esquema se utiliza también en la función PCHIP de Matlab [6], y esto justifica el nombre del esquema.

Este capítulo se organiza de la siguiente forma, primero presentamos la interpolación de Hermite cúbica clásica, así como la interpolación 'tipo-Hermite', es decir, la construcción de polinomios interpoladores cúbicos con información *aproximada* sobre las derivadas de la función. Estudiaremos las condiciones bajo las cuales el polinomio construido preserva la monotonía de los datos y la exactitud de las reconstrucciones consideradas y en particular la reconstrucción que se utiliza en la función PCHIP de Matlab.

El esquema de subdivisión Pchip utiliza esta reconstrucción, que es monótona y de tercer orden, en su diseño básico. Veremos

que, al igual que los esquemas Power_p , este esquema pueden ser escrito como una perturbación no lineal de un esquema de subdivisión simple. Veremos que se trata de un esquema OSI y por tanto existe el esquema diferencia de orden uno. Este se utilizará para analizar la convergencia y la estabilidad del esquema propuesto, siguiendo la teoría propuesta en los Capítulos 1 y 2 de esta memoria.

4.1

Interpolación de Hermite

La interpolación de Hermite es un problema clásico cuya descripción se puede encontrar en múltiples referencias [18]. Describimos a continuación la interpolación de Hermite cúbica segmentaria, que se aplica cuando se dispone de una malla de puntos, que supondremos igualmente espaciados $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $x_{i+1} - x_i =: h$, y se conocen los valores de una función suave sobre estos puntos $f_i = f(x_i)$, y los valores de su derivada, $f'_i = f'(x_i)$.

Dado un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, existe un único polinomio cúbico $P_i^H(x)$ que satisface

$$\begin{aligned} P_i^H(x_i) &= f_i, & P_i^H(x_{i+1}) &= f_{i+1}, \\ (P_i^H)'(x_i) &= f'_i, & (P_i^H)'(x_{i+1}) &= f'_{i+1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Una expresión simple se obtiene, por ejemplo, usando la forma de Newton de $P_i^H(x)$,

$$P_i^H(x) = c_1^H + c_2^H(x - x_i) + c_3^H(x - x_i)^2 + c_4^H(x - x_i)^2(x - x_{i+1}), \quad (4.2)$$

de manera que las condiciones (4.1) conducen fácilmente a

$$\begin{aligned} c_1^H &:= f_i & c_2^H &:= f'_i \\ c_3^H &:= \frac{m_i - f'_i}{h} & c_4^H &:= \frac{f'_{i+1} + f'_i - 2m_i}{h^2}, \end{aligned}$$

$m_i = \nabla f_i/h$, $h = x_{i+1} - x_i$ y $\nabla f_i = f_{i+1} - f_i$.

El siguiente resultado clásico se puede encontrar en [18]

Teorema 4.1. Si $f(x) \in C^4([x_i, x_{i+1}])$ entonces

$$f(x) - P_i^H(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi_x) (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2 \quad \xi_x \in (x_i, x_{i+1}).$$

En ocasiones no se dispone de las derivadas $\{f'(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$, sino de aproximaciones a estos valores que denotaremos por $\{\dot{f}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Es fácil ver que

$$P_i(x) = c_1 + c_2(x - x_i) + c_3(x - x_i)^2 + c_4(x - x_i)^2(x - x_{i+1}). \quad (4.3)$$

con

$$c_1 := f_i \quad c_2 := \dot{f}_i \quad c_3 := \frac{m_i - \dot{f}_i}{h} \quad c_4 := \frac{\dot{f}_{i+1} + \dot{f}_i - 2m_i}{h^2}. \quad (4.4)$$

es el único polinomio cúbico que satisface

$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= f_i, & P_i(x_{i+1}) &= f_{i+1}, \\ P_i'(x_i) &= \dot{f}_i, & P_i'(x_{i+1}) &= \dot{f}_{i+1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La exactitud de la interpolación de Hermite clásica se deduce del Teorema 4.1. Así si $x_{i+1} - x_i = h$, $f(x) - P_i^H(x) = O(h^4)$, $\forall x \in (x_i, x_{i+1})$. La exactitud de $P_i(x)$ en (4.3)-(4.4) está directamente relacionada con el orden de aproximación de los valores \dot{f}_i con respecto a las derivadas $f'(x_i)$.

Lema 4.1. [13] Sea $f(x)$ una función suave. Si $\dot{f}_i = f'(x_i) + \mathcal{O}(h^{q_i})$ y $\dot{f}_{i+1} = f'(x_{i+1}) + \mathcal{O}(h^{q_{i+1}})$, entonces el polinomio interpolador cúbico de Hermite (4.2) satisface, $\forall x \in (x_i, x_{i+1})$,

$$P_i(x) = f(x) + \mathcal{O}(h^q), \quad q = \min\{4, q_i + 1, q_{i+1} + 1\}. \quad (4.6)$$

Demostración

Notar que

$$f(x) - P_i(x) = f(x) - P_i^H(x) + P_i^H(x) - P(x). \quad (4.7)$$

Como

$$P_i^H(x) - P_i(x) = c_1^H - c_1 + (c_2^H - c_2)(x - x_i) + (c_3^H - c_3)(x - x_i)^2 + (c_4^H - c_4)(x - x_i)^2(x - x_{i+1}).$$

y

$$\begin{aligned} c_1^H - c_1 &= f_i - f_i = 0 \\ c_2^H - c_2 &= f'_i - \dot{f}_i = \mathcal{O}(h^{q_i}) \\ c_3^H - c_3 &= \frac{m_i - f'_i}{h} - \frac{m_i - \dot{f}_i}{h} = \mathcal{O}(h^{q_i-1}) \\ c_4^H - c_4 &= \frac{f'_{i+1} + f'_i - 2m_i}{h^2} - \frac{\dot{f}_{i+1} + \dot{f}_i - 2m_i}{h^2} = \mathcal{O}(h^{\max\{q_i-2, q_{i+1}-2\}}), \end{aligned}$$

se cumple que,

$$P_i^H(x) - P_i(x) = \mathcal{O}(h^{\min\{q_i+1, q_{i+1}+1\}}),$$

Por otro lado, el Teorema 4.1 establece

$$f(x) - P_i^H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2 = \mathcal{O}(h^4), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

por lo que el resultado se deduce de las dos relaciones anteriores y (4.7). ■

Por tanto, podemos esperar un orden de exactitud igual a cuatro si al aproximar una función suficientemente suave utilizando polinomios cúbicos de Hermite, los valores derivados satisfacen $\dot{f}_i = f'(x_i) + \mathcal{O}(h^3) \forall i$.

4.2

Preservación de la monotonía frente a la exactitud

La obtención de interpoladores monótonos para datos monótonos es un requerimiento indispensable en muchas ocasiones. Este

es el caso cuando los datos se han generado a través de un experimento, físico o numérico, donde, a menudo, la necesidad de evitar comportamientos oscilatorios alrededor de zonas donde los datos presentan gradientes pronunciados es incluso más importante que la exactitud (asimptótica) del método.

Monotonía y orden de aproximación elevado son requisitos contrapuestos, como se observa en la literatura existente, ver por ejemplo [22, 27].

Es evidente que

$$\text{sign}(\dot{f}_i) = \text{sign}(\dot{f}_{i+1}) = \text{sign}(m_i). \quad (4.8)$$

es una condición necesaria, pero no suficiente, para que el polinomio cúbico de Hermite (4.2) sea monótono. Para asegurar la monotonía de $P_i(x)$ en (4.5) se deben imponer restricciones adicionales sobre los valores \dot{f}_i [14, 27, 33]. La condición más simple, y probablemente la más utilizada, es la condición siguiente, debida a de Boor y Swartz, [14],

Teorema 4.2. [33] *El polinomio interpolador cúbico de Hermite para los datos $\{(x_i, f_i, \dot{f}_i), (x_{i+1}, f_{i+1}, \dot{f}_{i+1})\}$ es monótono en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ si*

$$0 \leq \alpha_i, \beta_i \leq 3, \quad \text{con } \alpha_i = \frac{\dot{f}_i}{m_i}, \quad \beta_i = \frac{\dot{f}_{i+1}}{m_i} \quad (4.9)$$

Por lo tanto, la clave para la monotonía recae en una definición apropiada de los valores aproximados de las derivadas.

En [6] se pueden consultar muchas de las diferentes alternativas que se han propuesto en la literatura para la construcción de los valores \dot{f}_i . En esta memoria consideraremos la fórmula de Brodlie para nodos igualmente espaciados que es simplemente la media armónica H_2 , (3.1), de los valores m_{i-1}, m_i

$$\dot{f}_i^B = H_2(m_{i-1}, m_i) = \begin{cases} \frac{2m_i m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}}, & \text{si } m_i m_{i+1} > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.10)$$

114 4.2. Preservación de la monotonía frente a la exactitud

Dado que $H_2(x, y) \leq 2 \min\{|x|, |y|\}$, es evidente que

$$0 \leq \frac{\dot{f}_i}{m_i} \leq 2, \quad 0 \leq \frac{\dot{f}_{i+1}}{m_i} \leq 2,$$

por tanto el polinomio interpolador de Hermite construido con estos valores es monótono. Este polinomio interpolador está implementado en la función PCHIP de Matlab [39].

Tenemos además el siguiente resultado

Lema 4.2. Si f es suave y $m_{i-1}m_i > 0$,

$$H_2(m_{i-1}, m_i) = f'(x_i) + \mathcal{O}(h^2). \quad (4.11)$$

Demostración

Si f es suave entonces

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f'(x_i) + \frac{h}{2} f''(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \\ m_{i-1} &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h} = f'(x_i) - \frac{h}{2} f''(x_i) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Denotando por $\alpha = f'(x_i)$, $\beta = hf''(x_i)/2 = \mathcal{O}(h)$, para $m_i m_{i-1} > 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned} H_2(m_{i-1}, m_i) &= 2 \frac{(\alpha - \beta + \mathcal{O}(h^2))(\alpha + \beta + \mathcal{O}(h^2))}{\alpha - \beta + \mathcal{O}(h^2) + \alpha + \beta + \mathcal{O}(h^2)} \\ &= 2 \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \mathcal{O}(h^2)}{2\alpha + \mathcal{O}(h^2)} = \alpha + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

■

El Lema 4.1 asegura que si $f_i = f(x_i)$ con f suave y monótona, $P_i(x)$ en (4.3)-(4.4) con \dot{f}_i en (4.10) tiene orden de aproximación igual a 3 en todo el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

4.3

Esquema Pchip

Puesto que el polinomio interpolador de Hermite, (4.3), con $\{\dot{f}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ calculados con la fórmula de Brodlie, (4.10), preserva la monotonía de los datos, proponemos definir un esquema de subdivisión basado en esta interpolación, de manera análoga a la definición de los esquemas $S_{l,r}$ a partir de los polinomios interpoladores de Lagrange, descrita en el Capítulo 1. Es decir, si $\{f_n\}$ es una sucesión de valores asociados a una malla de puntos igualmente espaciados $\{x_n\}$, definimos el **esquema PCHIP** como

$$\begin{cases} (\mathbf{S}f)_{2n} &= P_n(x_n) = f_n \\ (\mathbf{S}f)_{2n+1} &= P_n(x_{n+1/2}) \end{cases} \quad (4.12)$$

con $P_n(x)$ en (4.3)-(4.4) y \dot{f}_n en (4.10). Como

$$P_n(x_{n+\frac{1}{2}}) = c_1 + c_2 \frac{h}{2} + c_3 \frac{h^2}{4} - c_4 \frac{h^3}{8},$$

sustituyendo los valores c_i en (4.4) y simplificando obtenemos

$$P_n(x_{n+\frac{1}{2}}) = f_n + \frac{1}{2} \dot{f}_n h + \frac{1}{4} (m_n - \dot{f}_n) h - \frac{1}{8} (\dot{f}_{n+1} + \dot{f}_n - 2m_n) h.$$

Como $m_n h = \nabla f_n$, tenemos que

$$\dot{f}_n = \mathbf{H}_2(m_{n-1}, m_n) = \frac{1}{h} \mathbf{H}_2(\nabla f_{n-1}, \nabla f_n).$$

Sustituyendo y simplificando obtenemos

$$P_n(x_{n+\frac{1}{2}}) = f_n + \frac{\nabla f_n}{2} + \frac{1}{8} (\mathbf{H}_2(\nabla f_{n-1}, \nabla f_n) - \mathbf{H}_2(\nabla f_n, \nabla f_{n+1})).$$

Así, es fácil ver que el esquema de subdivisión (4.12) es de la forma (1.25), puesto que se puede escribir como

$$\begin{cases} (\mathbf{S}f)_{2n} = f_n \\ (\mathbf{S}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + \mathcal{F}(\nabla f)_{2n+1}. \end{cases} \quad (4.13)$$

donde $\mathcal{F} : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$

$$\begin{cases} (\mathcal{F}(f))_{2n} = 0 \\ (\mathcal{F}(f))_{2n+1} = \frac{1}{8} \left(\mathbf{H}_2(\nabla f_{n-1}, \nabla f_n) - \mathbf{H}_2(\nabla f_n, \nabla f_{n+1}) \right). \end{cases} \quad (4.14)$$

lo cual permite utilizar los resultados de los Capítulos 1 y 2 para estudiar su convergencia y estabilidad.

4.3.1

Propiedades

Es muy sencillo ver que el esquema Pchip reproduce exactamente polinomios de grado menor o igual a 1, pero no es 2-OSI, puesto que si c es una constante arbitraria, $\mathbf{H}_2(x+c, y+c)$ no se puede escribir en función de $\mathbf{H}_2(x, y)$.

Proposición 4.1. *El esquema Pchip es OSI y reproduce Π_1 de manera exacta.*

Demostración

Si $P(x) = bx + c$ y $p = P|_{\mathbb{Z}}$, entonces $(\nabla p)_n = b \forall n \in \mathbb{Z}$. Utilizando (4.13) tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}p)_{2n+1} &= (S_{1,1}p)_{2n+1} + \frac{1}{8} (\mathbf{H}_2(b, b) - \mathbf{H}_2(b, b)). \\ &= (S_{1,1}p)_{2n+1} = P(n + 1/2), \end{aligned}$$

puesto que $S_{1,1}$ reproduce polinomios de grado 1. De forma análoga, si $P(x) \in \mathbb{P}_1$ y $p = P|_{\mathbb{Z}}$, entonces $\nabla p = b$. Así,

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}(f+p))_{2n+1} &= (S_{1,1}(f+p))_{2n+1} \\ &\quad - \frac{1}{8} (\mathbf{H}_2(\nabla f_{n-1}, \nabla f_n) - \mathbf{H}_2(\nabla f_n, \nabla f_{n+1})) \\ &= (\mathbf{S}f)_{2n+1} + P(n + 1/2), \end{aligned}$$

puesto que $S_{1,1}$ es lineal y reproduce constantes de manera exacta. ■

El esquema $S^{[1]}$ se puede calcular fácilmente

$$\begin{aligned} (\nabla S f)_{2n} &:= (S f)_{2n+1} - (S f)_{2n} \\ &= \frac{\nabla f_n}{2} + \frac{1}{8}(\mathbf{H}_2(\nabla f_{n-1}, \nabla f_n) - \mathbf{H}_2(\nabla f_n, \nabla f_{n+1})) \\ (\nabla S f)_{2n+1} &:= (S f)_{2n+2} - (S f)_{2n+1} \\ &= \frac{\nabla f_n}{2} - \frac{1}{8}(\mathbf{H}_2(\nabla f_{n-1}, \nabla f_n) - \mathbf{H}_2(\nabla f_n, \nabla f_{n+1})), \end{aligned}$$

por tanto, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (S^{[1]}w)_{2n} &= \frac{w_n}{2} + \frac{1}{8}(\mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) - \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1})). \\ (S^{[1]}w)_{2n+1} &= \frac{w_n}{2} - \frac{1}{8}(\mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) - \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1})). \end{cases} \quad (4.15)$$

Es fácil ver que este esquema preserva la monotonía, utilizando el primer esquema en diferencias.

Proposición 4.2. *El esquema Pchip preserva la monotonía de los datos.*

Demostración

Dado que

$$\nabla S f = S^{[1]} \nabla f,$$

es evidente que S preserva la monotonía si y sólo si $S^{[1]}$ preserva la positividad de los datos (notar que $S^1(-w) = -S^{[1]}w$). Veamos que esto es así.

Sea $w \in l_\infty(\mathbb{Z})$ tal que $w_i > 0 \forall i$. Utilizando que $|\mathbf{H}_2(x, y)| \leq 2 \min\{|x|, |y|\}$ y $\mathbf{H}_2(x, y) \geq 0$ si, $x, y \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} (S^{[1]}w)_{2n} &= \frac{w_n}{2} + \frac{1}{8}(\mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) - \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1})) \\ &\geq \frac{w_n}{2} + 0 - \frac{w_n}{4} = \frac{1}{4}w_n \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S^{[1]}w)_{2n+1} &= \frac{w_n}{2} - \frac{1}{8}(\mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) - \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1})) \\ &\geq \frac{w_n}{2} - \frac{w_n}{4} + 0 = \frac{1}{4}w_n \geq 0. \end{aligned}$$

■

Convergencia

La teoría presentada en el Capítulo 1 permite estudiar la convergencia del esquema Pchip utilizando el Teorema 1.6 para $k = 1$.

Teorema 4.3. *El esquema de subdivisión Pchip es uniformemente convergente.*

Demostración Si $d \in l_\infty(\mathbb{Z})$, la función \mathcal{F} definida en (4.14) se puede acotar utilizando la Proposición 3.2-C1,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}(d))_{2n+1}| &\leq \frac{1}{8}(\max\{|d_{n-1}|, |d_n|\} + \max\{|d_n|, |d_{n+1}|\}), \quad \forall n \\ \rightarrow \|\mathcal{F}(d)\|_\infty &\leq \frac{1}{4}\|d\|_\infty, \end{aligned}$$

por tanto, se cumple (1.36).

Para comprobar (1.37), se considera separadamente los casos de índices pares e impares. Observamos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}^{[1]}w)_{2n} &= Z_+(w_{n-1}, w_n, w_{n+1}), \\ (\mathbf{S}^{[1]}w)_{2n+1} &= Z_-(w_{n-1}, w_n, w_{n+1}), \end{aligned}$$

con

$$Z_\pm(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{2} \pm \frac{1}{8}(\mathbf{H}_2(x_1, x_2) - \mathbf{H}_2(x_2, x_3)). \quad (4.16)$$

Utilizando el Lema 4.3 obtenemos

$$\|\mathbf{S}^{[1]}w\|_\infty \leq \frac{5}{8}\|w\|_\infty.$$

Esta estimación permite concluir, por el Teorema 1.6, que el esquema \mathbf{S} es convergente y las funciones límite obtenidas son al menos de clase C^{β^-} , con $\beta = \min\{-\log_2(5/8), 1\} = 0,678$. ■

Lema 4.3. Las funciones $Z_{\pm}(x)$ en (4.16) satisfacen

$$|Z_{\pm}(x)| \leq \frac{5}{8} \|x\|_{\infty}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad (4.17)$$

Demostración

Dado que $Z_{\pm}(x) = -Z_{\pm}(-x)$, es suficiente probar (4.17) para $x_2 > 0$. En este caso, $\mathbf{H}_2(x_1, x_2) \geq 0$, $\mathbf{H}_2(x_2, x_3) \geq 0$ y podemos escribir

$$-\frac{1}{8}\mathbf{H}_2(x_2, x_3) \leq Z_+(x_1, x_2, x_3) \leq \frac{x_2}{2} + \frac{1}{8}\mathbf{H}_2(x_1, x_2)$$

Utilizando la Proposición 3.2-C1,

$$-\frac{1}{8}\|x\|_{\infty} \leq -\frac{1}{8}\mathbf{H}_2(x_2, x_3) \leq Z_+(x_1, x_2, x_3) \leq \frac{x_2}{2} + \frac{1}{8}\mathbf{H}_2(x_1, x_2) \leq \frac{5}{8}\|x\|_{\infty}.$$

La prueba para Z_- es análoga. ■

Estabilidad

Al igual que en capítulo anterior, estudiaremos la estabilidad del esquema Pchip utilizando el Teorema 2.4 con $k = 1$. Por tanto, buscamos acotar el Jacobiano Generalizado $DS^{[1]}w$ (o productos de estos Jacobianos). Como las funciones que definen el esquema $\mathbf{S}^{[1]}$ son combinaciones de funciones diferenciables y funciones de clase $C_{pw}^1(\mathbb{R}^3)$, utilizaremos formalmente la regla de la cadena para calcular las entradas no nulas de $DS^{[1]}w$, en las filas genéricas $2n$ y $2n + 1$. Así, de (4.15) deducimos $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (DS^{[1]}(w))_{2n, n-1} &:= \frac{1}{8} D_x \mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) \\ (DS^{[1]}(w))_{2n, n} &:= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} (D_y \mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) - D_x \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1})) \\ (DS^{[1]}(w))_{2n, n+1} &:= -\frac{1}{8} D_y \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(DS^{[1]}(w))_{2n+1,n-1} &:= -\frac{1}{8}D_x H_2(w_{n-1}, w_n) \\
(DS^{[1]}(w))_{2n+1,n} &:= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(D_y H_2(w_{n-1}, w_n) - D_x H_2(w_n, w_{n+1})) \\
(DS^{[1]}(w))_{2n+1,n+1} &:= \frac{1}{8}D_y H_2(w_n, w_{n+1}).
\end{aligned}$$

El resto de entradas son cero. Recordamos que si $t := (y - x)/(y + x)$, entonces en el primer y tercer cuadrante de la partición por sectores asociada a $H_2(x, y)$, $t \in [-1, 1]$ y se cumple que

$$\begin{aligned}
D_x H_2(x, y) &= \frac{1}{2}(1 + t^2 + 2t) = \frac{1}{2}(1 + t)^2 := \phi(t), \\
D_y H_p(x, y) &= \frac{1}{2}(1 + t^2 - 2t) = \frac{1}{2}(1 - t)^2 = \phi(-t).
\end{aligned}$$

Teorema 4.4. *El Jacobiano Generalizado del primer esquema diferencia asociado al esquema Pchip satisface*

$$\|DS^{[1]}w\|_\infty \leq 1, \quad \forall w \in l_\infty(\mathbb{Z}) \quad (4.18)$$

y no existe $C: \|DS^{[1]}w\|_\infty \leq C < 1$.

Demostración

Por simplificar la notación, utilizamos $A := A(w) = DS^{[1]}(w)$. Si definimos

$$r := \frac{w_n - w_{n-1}}{w_n + w_{n-1}}, \quad \tilde{r} := \frac{w_{n+1} - w_n}{w_{n+1} + w_n},$$

y consideramos el peor de los casos posibles (todas las componentes no nulas son distintas de cero) podemos escribir las componentes no nulas de las filas $A_{[2n,:]}$ y $A_{[2n+1,:]}$ del siguiente modo

$$\begin{aligned}
(A_{2n,n-1} \quad A_{2n,n} \quad A_{2n,n+1}) &= \frac{1}{8} (\phi(r) \quad 4 + (\phi(-r) - \phi(\tilde{r})) \quad -\phi(-\tilde{r})) \\
(A_{2n+1,n-1} \quad A_{2n+1,n} \quad A_{2n+1,n+1}) &= \frac{1}{8} (-\phi(r) \quad 4 - (\phi(-r) - \phi(\tilde{r})) \quad \phi(-\tilde{r}))
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que (ver la Figura 4.1)

$$0 \leq \phi(\pm t) \leq 2, \quad 0 \leq 2 - \phi(\pm t) \leq 2, \quad \forall t \in [-1, 1], \quad (4.19)$$

podemos deducir que

$$1/4 \leq A_{2n,n} \leq 3/4, \quad 1/4 \leq A_{2n+1,n} \leq 3/4.$$

Por tanto, las componentes de $A_{[2n,:]}$, $A_{[2n+1,:]}$ no cambian de signo y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|A_{[2n,:]} \|_1 &= \frac{1}{8} (\phi(r) + 4 + (\phi(-r) - \phi(\tilde{r})) + \phi(-\tilde{r})), \\ \|A_{[2n+1,:]} \|_1 &= \frac{1}{8} \phi(r) + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} (\phi(-r) - \phi(\tilde{r})) + \frac{1}{8} \phi(-\tilde{r}). \end{aligned}$$

Si definimos

$$\psi(t) := \phi(t) + \phi(-t) = (1+t)^2/2, \quad \rho(t) := \phi(t) - \phi(-t) = 2t. \quad (4.20)$$

se cumple que $\psi(t) = \psi(-t)$, $\rho(t) = -\rho(-t)$ y (ver Figura 4.1)

$$1 \leq \psi(\pm t) \leq 2 \quad -2 \leq \rho(\pm t) \leq 2, \quad \forall t \in [-1, 1]. \quad (4.21)$$

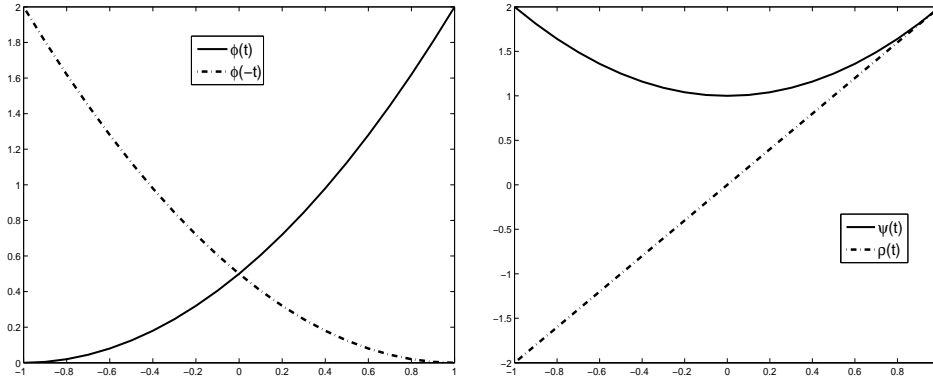


Figura 4.1: Izquierda: gráficas de $\phi(r)$ y $\phi(-r)$ en $[-1, 1]$. Derecha: gráficas de $\psi(r)$ y $\rho(r)$ en $[-1, 1]$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|A_{[2n,:]} \|_1 &= \frac{1}{8} (4 + \psi(r) + \rho(-\tilde{r})) \leq 1, \\ \|A_{[2n+1,:]} \|_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} (\rho(r) + \psi(-\tilde{r})) \leq 1, \end{aligned}$$

obsérvese que las cotas se alcanzan (si $r = 1, \tilde{r} = -1$). Por tanto,

$$\|DS^{[1]}(w)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \{\|A_{2n}\|_1, \|A_{2n+1}\|_1\} \leq 1,$$

lo que completa la demostración. ■

Puesto que no es posible acotar el Jacobiano Generalizado del primer esquema en diferencia, es necesario considerar las acotaciones del producto de dos Jacobianos Generalizados.

Teorema 4.5. *El Jacobiano Generalizado del primer esquema diferencia asociado al esquema Pchip satisface*

$$\|DS^{[1]}(w)DS^{[1]}(u)\|_\infty \leq C < 1, \quad \forall u, w \in l_\infty(\mathbb{Z})$$

Demostración

Como antes, simplificamos la notación con

$$A := DS^{[1]}(w), \quad \tilde{A} := DS^{[1]}(u), \quad B = A\tilde{A}, \quad (4.22)$$

así que podemos escribir

$$B_{4n+k,j} = \sum_{l=2n+k-1}^{2n+k+1} A_{4n+k,l} \tilde{A}_{l,j}.$$

Obsérvese que las entradas no ceros de las filas de $B_{[4n+k,:]}$, $k = 0, 1$, se pueden obtener del siguiente producto matricial

$$\begin{pmatrix} A_{4n,2n-1} & A_{4n,2n} & A_{4n,2n+1} \\ A_{4n+1,2n-1} & A_{4n+1,2n} & A_{4n+1,2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{2n-1,n-2} & \tilde{A}_{2n-1,n-1} & \tilde{A}_{2n-1,n} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{2n,n-1} & \tilde{A}_{2n,n} & \tilde{A}_{2n,n+1} \\ 0 & \tilde{A}_{2n+1,n-1} & \tilde{A}_{2n+1,n} & \tilde{A}_{2n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

mientras que las filas $B_{[4n+k,:]}$, $k = 2, 3$ son el resultado del producto

$$\begin{pmatrix} A_{4n+2,2n} & A_{4n+2,2n+1} & A_{4n+2,2n+2} \\ A_{4n+3,2n} & A_{4n+3,2n+1} & A_{4n+3,2n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{2n,n-1} & \tilde{A}_{2n,n} & \tilde{A}_{2n,n+1} & 0 \\ \tilde{A}_{2n+1,n-1} & \tilde{A}_{2n+1,n} & \tilde{A}_{2n+1,n+1} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{2n+2,n} & \tilde{A}_{2n+2,n+1} & \tilde{A}_{2n+2,n+2} \end{pmatrix}$$

Como en el teorema previo, usamos el hecho que la expresión de las diferentes filas de la matriz producto pueden expresarse en términos de las funciones elementales $\phi(t)$, $\psi(t)$, $\rho(t)$, representadas en la Figura 4.1.

Más concretamente, si definimos

$$s := \frac{w_{2n} - w_{2n-1}}{w_{2n} + w_{2n-1}} \quad \tilde{s} := \frac{w_{2n+1} - w_{2n}}{w_{2n+1} + w_{2n}} \quad \bar{s} := \frac{w_{2n+2} - w_{2n+1}}{w_{2n+2} + w_{2n+1}}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} A_{[4n, 2n-1:2n+1]} &= \frac{1}{8}(\phi(s), 4 + \phi(-s) - \phi(\tilde{s}), -\phi(-\tilde{s})) \\ A_{[4n+1, 2n-1:2n+1]} &= \frac{1}{8}(-\phi(s), 4 - \phi(-s) + \phi(\tilde{s}), \phi(-\tilde{s})) \\ A_{[4n+2, 2n:2n+2]} &= \frac{1}{8}(\phi(\tilde{s}), 4 + \phi(-\tilde{s}) - \phi(\bar{s}), -\phi(-\bar{s})) \\ A_{[4n+3, 2n:2n+2]} &= \frac{1}{8}(-\phi(\tilde{s}), 4 - \phi(-\tilde{s}) + \phi(\bar{s}), \phi(-\bar{s})). \end{aligned}$$

Se procede de la misma forma para \tilde{A} , para lo cual necesitamos definir

$$\hat{t} := \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{u_{n-1} + u_{n-2}} \quad t := \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n + u_{n-1}} \quad \tilde{t} := \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} + u_n} \quad \bar{t} := \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+2} + u_{n+1}}$$

Así,

$$\begin{pmatrix} B_{[4n, n-2:n+1]} \\ B_{[4n+1, n-2:n+1]} \end{pmatrix} = CD, \quad \begin{pmatrix} B_{[4n+2, n-1:n+2]} \\ B_{[4n+3, n-1:n+2]} \end{pmatrix} = \tilde{C}\tilde{D} \quad (4.23)$$

con

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \phi(s) & 4 + \phi(-s) - \phi(\tilde{s}) & -\phi(-\tilde{s}) \\ -\phi(s) & 4 - \phi(-s) + \phi(\tilde{s}) & \phi(-\tilde{s}) \end{pmatrix} \\ \tilde{C} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \phi(\tilde{s}) & 4 + \phi(-\tilde{s}) - \phi(\bar{s}) & -\phi(-\bar{s}) \\ -\phi(\tilde{s}) & 4 - \phi(-\tilde{s}) + \phi(\bar{s}) & \phi(-\bar{s}) \end{pmatrix} \\ D &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\phi(\hat{t}) & 4 - \phi(-\hat{t}) + \phi(t) & \phi(-t) & 0 \\ 0 & \phi(t) & 4 + \phi(-t) - \phi(\tilde{t}) & -\phi(-\tilde{t}) \\ 0 & -\phi(t) & 4 - \phi(-t) + \phi(\tilde{t}) & \phi(-\tilde{t}) \end{pmatrix} \\ \tilde{D} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \phi(t) & 4 + \phi(-t) - \phi(\tilde{t}) & -\phi(-\tilde{t}) & 0 \\ -\phi(t) & 4 - \phi(-t) + \phi(\tilde{t}) & \phi(-\tilde{t}) & 0 \\ 0 & \phi(\tilde{t}) & 4 + \phi(-\tilde{t}) - \phi(\bar{t}) & -\phi(-\bar{t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las acotaciones para $\|B_{[4n+k, \cdot]}\|_1$, $k = 0, 1, 2, 3$ se consiguen a través de un proceso sencillo pero laborioso.

Acotación de $\|B_{[4n, \cdot]}\|_1$: Considerando el producto CD en (4.23), observamos que

$$(B_{4n, n-2}, B_{4n, n-1}, B_{4n, n}, B_{4n, n+1}) = \frac{1}{64}(P_1, P_2, P_3, P_4)$$

con

$$P_1 = -\phi(s)\phi(\hat{t}) \leq 0$$

$$P_2 = \phi(t)(4 + \psi(s) - \rho(\tilde{s})) + \phi(s)(4 - \phi(-\hat{t})) \geq 0$$

$$P_3 = \phi(-t)(4 + \psi(s) - \rho(\tilde{s})) + 4(4 + \phi(-s) - \psi(\tilde{s})) - \phi(\tilde{t})(4 - \phi(-s) + \rho(\tilde{s}))$$

$$P_4 = -\phi(-\tilde{t})(4 - \phi(-s) + \rho(\tilde{s})) \leq 0.$$

Las cotas de estas entradas se obtienen directamente de las cotas establecidas para ϕ, ψ, ρ . Obsérvese que P_3 (y por tanto $B_{4n, n}$) no tiene signo definido. Entonces,

$$\|B_{[4n, \cdot]}\|_1 = \frac{1}{64} S_{4n}, \quad S_{4n} := (-P_1 + P_2 + |P_3| - P_4).$$

Calculamos S_{4n} considerando las dos posibilidades para $|P_3|$

Caso 1: $|P_3| = P_3$, $S_{4n} := -P_1 + P_2 + P_3 - P_4$. Notar que

$$-P_1 + P_2 = \phi(t)(4 + \psi(s) - \rho(\tilde{s})) + \phi(s)(4 + \rho(\hat{t}))$$

$$P_3 - P_4 = \phi(-t)(4 + \psi(s) - \rho(\tilde{s})) + 4(4 + \phi(-s) - \psi(-\tilde{s})) - \rho(\tilde{t})(4 + \phi(-s) - \psi(-T_s)).$$

Por tanto

$$S_{4n} = \psi(t)(4 + \psi(s) - \rho(\tilde{s})) + \phi(s)\rho(\hat{t}) + 4(4 + \psi(s) - \psi(\tilde{s})) - \rho(\tilde{t})(4 - \rho(s) - \rho(\tilde{s})).$$

Por las cotas obtenidas para ϕ, ψ, ρ , es fácil deducir

$$0 \leq 4 + \psi(s) - \rho(\tilde{s}) \leq 8, \quad 0 \leq 4 + \psi(s) - \phi(\tilde{s}) \leq 5, \quad 0 \leq 4 - \rho(s) - \rho(\tilde{s}) \leq 8$$

entonces

$$S_{4n} \leq 2 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 56 \quad \Rightarrow \quad \|B_{[4n, \cdot]}\|_1 = \frac{56}{64} < 1.$$

Caso 2: $|P_3| = -P_3$, $S_{4n} := P_1 + P_2 - P_3 + P_4$. En este caso,

$$\begin{aligned} -P_3 - P_4 &= -\phi(-t)(4 + \psi(s) - \rho(\tilde{s})) - 4(4 + \phi(-s) - \psi(-\tilde{s})) \\ &\quad + \psi(\tilde{t})(4 + \phi(-s) - \rho(\tilde{s})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{4n} &= \rho(t)(4 + \psi(s) - \rho(\tilde{s})) + \phi(s)\rho(\hat{t}) - 4(4 - \rho(s) - \psi(\tilde{s})) \\ &\quad + \psi(\tilde{t})(4 + \phi(-s) - \rho(\tilde{s})) \end{aligned}$$

de donde deducimos

$$S_{4n} \leq 2 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 0 + 2 \cdot 8 = 36 \quad \Rightarrow \quad \|B_{[4n, \cdot]}\|_1 \leq \frac{56}{64} \leq 1.$$

Acotación de $\|B_{[4n+1, \cdot]}\|_1$: Del producto CD obtenemos

$$(B_{4n+1, n-2}, B_{4n+1, n-1}, B_{4n+1, n}, B_{4n+1, n+1}) = \frac{1}{64} (P_1, P_2, P_3, P_4)$$

con

$$P_1 = \phi(s)\phi(\hat{t}) \geq 0$$

$$P_2 = \phi(\hat{t})(4 - \psi(s) + \rho(\tilde{s})) - \phi(s)(4 - \phi(-\hat{t}))$$

$$P_3 = \phi(-t)(4 - \psi(s) + \rho(\tilde{s})) + (4 - \phi(-s) + \phi(\tilde{s}))(4 - \phi(\tilde{t})) + \phi(-\tilde{s})(4 + \phi(\tilde{t})) \geq 0$$

$$P_4 = -\phi(-\tilde{t})(4 - \phi(-s) + \rho(\tilde{s})) \leq 0$$

Las cotas de estas entradas se obtienen directamente de las cotas establecidas para ϕ , ψ , ρ . Obsérvese que P_2 (y por tanto $B_{4n+1, n-1}$) no tiene signo definido. Entonces

$$\|B_{[4n+1, \cdot]}\|_1 = \frac{1}{64} S_{4n+1}, \quad S_{4n+1} := (P_1 + |P_2| + P_3 - P_4)$$

Calculamos S_{4n+1} en función del valor de $|P_2|$,

Caso 1: $|P_2| = P_2$, $S_{4n+1} := P_1 + P_2 + P_3 - P_4$. Notar que

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \phi(t)(4 - \psi(s) + \rho(\tilde{s})) - \phi(s)(4 - \psi(\hat{t})) \\ P_3 - P_4 &= \phi(-t)(4 - \psi(s) + \rho(\tilde{s})) + 4(4 - \phi(-s) + \psi(\tilde{s})) \\ &\quad - \rho(\tilde{t})(4 - \phi(-s) + \rho(\tilde{s})) \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} S_{4n+1} &= -\phi(s)(4 - \psi(\hat{t})) + \psi(t)(4 - \psi(s) + \rho(\tilde{s})) + 4(4 - \phi(-s) + \psi(\tilde{s})) \\ &\quad - \rho(\tilde{t})(4 - \phi(-s) + \rho(\tilde{s})). \end{aligned}$$

Es fácil deducir

$$\begin{aligned} 0 &\leq 4 - \psi(s) + \rho(\tilde{s}) \leq 5, \\ 3 &\leq 4 - \phi(-s) + \psi(\tilde{s}) \leq 6, \\ 0 &\leq 4 - \phi(-s) + \rho(\tilde{s}) \leq 6, \end{aligned}$$

de manera que

$$S_{4n+1} \leq 0 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 46 \quad \Rightarrow \quad \|B_{[4n+1, :]}\|_1 \leq \frac{46}{64} < 1.$$

Caso 2: $|P_2| = -P_2$, $S_{4n+1} := P_1 - P_2 + P_3 - P_4$. En este caso

$$P_1 - P_2 = \phi(s)(4 + \rho(\hat{t})) - \phi(t)(4 - \psi(s) + \rho(\tilde{s}))$$

por tanto

$$\begin{aligned} S_{4n+1} &= \phi(s)(4 + \rho(\hat{t})) - \rho(t)(4 - \psi(s) + \rho(\tilde{s})) + 4(4 - \phi(-s) + \psi(\tilde{s})) \\ &\quad - \rho(\tilde{t})(4 - \phi(-s) + \rho(\tilde{s})) \end{aligned}$$

y

$$S_{4n+1} \leq 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 58 \quad \Rightarrow \quad \|B_{[4n+1, :]}\|_1 \leq \frac{58}{64} < 1.$$

Acotación de $\|B_{[4n+2, :]}\|_1$: Considerando el producto $\tilde{C}\tilde{D}$ en (4.23), deducimos que

$$(B_{4n+2, n-1}, B_{4n+2, n}, B_{4n+2, n+1}, B_{4n+2, n+2}) = \frac{1}{64}(P_1, P_2, P_3, P_4)$$

con

$$P_1 = -\phi(t)(4 - \phi(\bar{s}) - \rho(\tilde{s}))$$

$$P_2 = \phi(\tilde{t})(4 - \psi(\bar{s}) - \rho(\tilde{s})) + (4 - \phi(\bar{s}) + \phi(-\tilde{s}))(4 - \phi(-t)) + \phi(\tilde{s})(4 + \phi(-t))$$

$$P_3 = \phi(-\tilde{t})(4 - \psi(\bar{s}) - \rho(\tilde{s})) - \phi(-\bar{s})(4 - \phi(\tilde{t}))$$

$$P_4 = \phi(-\bar{s})\phi(-\tilde{t}).$$

Las cotas de estas entradas se pueden obtener directamente de ϕ , ψ , ρ . Notar que P_3 (y la entrada $B_{4n+2,n+1}$) no tiene signo definido. Así,

$$\|B_{[4n+2,;]}\|_1 = \frac{1}{64} S_{4n+2}, \quad S_{4n+2} := (-P_1 + P_2 + |P_3| + P_4).$$

Por tanto, para acotar S_{4n+2} necesitamos considerar $|P_3|$:

Caso 1: $|P_3| = P_3$, $S_{4n+2} := -P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.

$$\begin{aligned} -P_1 + P_2 &= \rho(t)(4 - \rho(\tilde{s}) - \phi(\bar{s})) + 4(4 - \phi(\bar{s}) + \psi(\tilde{s})) \\ &\quad + \phi(\tilde{t})(4 - \rho(\tilde{s}) - \psi(\bar{s})) \end{aligned}$$

$$P_3 + P_4 = \phi(-\tilde{t})(4 - \rho(\tilde{s}) - \psi(\bar{s})) - 4\phi(-\bar{s}) + \phi(-\bar{s})\psi(\tilde{t}).$$

Así

$$\begin{aligned} S_{4n+2} &= \rho(t)(4 - \rho(\tilde{s}) - \phi(\bar{s})) + 4(4 + \psi(\tilde{s}) - \psi(\bar{s})) \\ &\quad + \psi(\tilde{t})(4 - \rho(\tilde{s}) - \psi(\bar{s})) + \phi(-\bar{s})\psi(\tilde{t}). \end{aligned}$$

Con las cotas de ϕ , ψ , ρ , es fácil deducir

$$0 \leq 4 - \rho(\tilde{s}) - \phi(\bar{s}) \leq 6 \quad 3 \leq 4 + \psi(\tilde{s}) - \psi(\bar{s}) \leq 5 \quad 0 \leq 4 - \rho(\tilde{s}) - \psi(\bar{s}) \leq 5$$

Por tanto,

$$S_{4n+2} \leq 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 46 \quad \Rightarrow \quad \|B_{[4n+2,;]}\|_1 = \frac{46}{64} < 1.$$

Caso 2: $|P_3| = -P_3$, $S_{4n+2} := -P_1 + P_2 - P_3 + P_4$. Ahora, podemos escribir

$$-P_3 + P_4 = -\phi(-\tilde{t})(4 - \rho(\tilde{s}) - \psi(\bar{s})) + 4\phi(-\bar{s}) - \phi(-\bar{s})\rho(\tilde{t}).$$

Por tanto

$$S_{4n+2} = \rho(t)(4 - \rho(\tilde{s}) - \phi(\bar{s})) + 4(4 + \psi(\tilde{s}) - \rho(\bar{s})) \\ + \rho(\tilde{t})(4 - \rho(\tilde{s}) - \psi(\bar{s})) - \phi(-\bar{s})\rho(\tilde{t}).$$

Utilizamos

$$0 \leq 4 - \rho(\tilde{s}) - \phi(\bar{s}) \leq 6 \quad 3 \leq 4 + \psi(\tilde{s}) - \rho(\bar{s}) \leq 8 \quad 0 \leq 4 - \rho(\tilde{s}) - \psi(\bar{s}) \leq 5$$

tenemos

$$S_{4n+2} \leq 2 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 58 \quad \Rightarrow \quad \|B_{[4n+2, :]}\|_1 \leq \frac{58}{64}.$$

Acotación de $\|B_{[4n+3, :]}\|_1$: Considerando el producto $\tilde{C}\tilde{D}$ en (4.23), deducimos que

$$(B_{4n+3, n-1}, B_{4n+3, n}, B_{4n+3, n+1}, B_{4n+3, n+2}) = \frac{1}{64}(P_1, P_2, P_3, P_4)$$

con

$$P_1 = -\phi(t)(4 + \rho(\tilde{s}) + \phi(\bar{s})) \\ P_2 = \phi(\tilde{t})(4 + \rho(\tilde{s}) + \psi(\bar{s})) + 4(4 - \psi(\tilde{s}) + \phi(\bar{s})) - \phi(-t)(4 + \rho(\tilde{s}) + \phi(\bar{s})) \\ P_3 = \phi(-\tilde{t})(4 + \rho(\tilde{s}) + \psi(\bar{s})) + \phi(-\bar{s})(4 - \phi(\tilde{t})) \\ P_4 = -\phi(-\bar{s})\phi(-\tilde{t}).$$

Utilizando las cotas establecidas para ϕ , ψ , ρ , se observa que P_2 ($B_{4n+3, n}$) es la única componente que no tiene signo definido. Así, podemos escribir

$$\|B_{[4n+3, :]}\|_1 = \frac{1}{64} S_{4n+3}, \quad S_{4n+3} := (-P_1 + |P_2| + P_3 - P_4).$$

Por tanto, para acotar S_{4n+3} necesitamos considerar dos casos:

Caso 1: $|P_2| = P_2$, $S_{4n+3} := -P_1 + P_2 + P_3 - P_4$.

$$-P_1 + P_2 = \rho(t)(4 + \rho(\tilde{s}) + \phi(\bar{s})) + \phi(\tilde{t})(4 + \rho(\tilde{s}) + \psi(\bar{s})) \\ + 4(4 - \psi(\tilde{s}) + \phi(\bar{s})). \\ P_3 - P_4 = \phi(-\tilde{t})(4 + \rho(\tilde{s}) + \psi(\bar{s})) + 4\phi(-\bar{s}) - \phi(-\bar{s})\rho(\tilde{t})$$

Entonces

$$S_{4n+3} = \rho(t)(4 + \rho(\tilde{s}) + \phi(\bar{s})) + \psi(\tilde{t})(4 + \rho(\tilde{s}) + \psi(\bar{s})) \\ + 4(4 - \psi(\tilde{s}) + \psi(\bar{s})) - \phi(-\bar{s})\rho(\tilde{t}).$$

Teniendo en cuenta las cotas ϕ , ψ , ρ , es fácil deducir

$$2 \leq 4 + \rho(\tilde{s}) + \phi(\bar{s}) \leq 8 \\ 3 \leq 4 + \rho(\tilde{s}) + \psi(\bar{s}) \leq 8 \\ 3 \leq 4 - \psi(\tilde{s}) + \psi(\bar{s}) \leq 5.$$

Entonces,

$$S_{4n+3} \leq 2 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 56. \quad \Rightarrow \quad \|B_{[4n+3, :]}\|_1 = \frac{56}{64} < 1.$$

Caso 2: $|P_2| = -P_2$, $S_{4n+3} := -P_1 - P_2 + P_3 - P_4$. Tenemos que

$$-P_1 - P_2 = \psi(t)(4 + \rho(\tilde{s}) + \phi(\bar{s})) - \phi(\tilde{t})(4 + \rho(\tilde{s}) + \psi(\bar{s})) \\ - 4(4 - \psi(\tilde{s}) + \phi(\bar{s})).$$

Por tanto,

$$S_{4n+3} \leq \psi(t)(4 + \rho(\tilde{s}) + \phi(\bar{s})) - \rho(\tilde{t})(4 + \rho(\tilde{s}) + \psi(\bar{s})) \\ - 4(4 - \psi(\tilde{s}) + \rho(\bar{s})) - \phi(-\bar{s})\rho(\tilde{t}).$$

Podemos deducir fácilmente que

$$2 \leq 4 + \rho(\tilde{s}) + \phi(\bar{s}) \leq 8 \\ 3 \leq 4 + \rho(\tilde{s}) + \psi(\bar{s}) \leq 8 \\ 0 \leq 4 - \psi(\tilde{s}) + \rho(\bar{s}) \leq 5.$$

De estas desigualdades obtenemos

$$S_{4n+3} \leq 2 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 0 + 2 \cdot 2 = 34 \quad \Rightarrow \quad \|B_{[4n+3, :]}\|_1 \leq \frac{34}{64} < 1. \quad \blacksquare$$

La estabilidad del esquema Pchip se deduce ahora fácilmente del teorema anterior y del Teorema 2.4.

Teorema 4.6. *El esquema de subdivisión Pchip es estable.*

Demostración

La condición (2.40) requiere probar que la función $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (4.14)

$$\mathcal{F}(x) = -\frac{1}{8} (\mathbf{H}_2(x_1, x_2) - \mathbf{H}_2(x_2, x_3)), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad (4.24)$$

es Lipschitz. Este hecho es consecuencia del hecho de que la media armónica es Lipschitz.

La condición (2.41) se deduce directamente del Teorema 4.5. ■

Orden de aproximación

Hemos observado en la sección 4.2 que los polinomios interpoladores $P_i(x)$ definidos en (4.3)-(4.4), con $\{\dot{f}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ calculados con la fórmula de Brodlie, (4.10) tienen orden de aproximación igual a tres en todo el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ cuando se utilizan para reconstruir una función monótona. La Proposición 1.4, asegura que si $f = \{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $f_i = f(x_i)$ con $f(x)$ suave y monótona y $x_{i+1} - x_i = h$, entonces $\|\mathbf{S}^\infty f - f\|_\infty = O(h^3)$, aunque se puede obtener un resultado un poco mejor.

Teorema 4.7. *Dado $f = \{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $f_i = f(x_i)$, $x_{i+1} - x_i = h$, f una función suave. Entonces*

1. $\|\mathbf{S}^\infty f - f\|_\infty = O(h^2)$.
2. si f es monótona, entonces $\|\mathbf{S}^\infty f - f\|_\infty = O(h^4)$.

Demostración

Punto 1 se deduce del Teorema 1.5 y del hecho de que el esquema Pchip reproduce polinomios de grado 1.

Punto 2. Notamos primeramente que si x, y, z tienen el mismo signo

$$H_2(x, y) - H_2(y, z) = 2 \left(\frac{xy}{x+y} - \frac{yz}{y+z} \right) = 2(x-z) \frac{y^2}{(x+y)(y+z)}.$$

Dado que

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}f)_{2n+1} - (S_{2,2}f)_{2n+1} &= \frac{1}{8} \frac{\nabla^2 f_{n-1} + \nabla^2 f_n}{2} \\ &\quad - \frac{1}{8} (H_2(\nabla f_{n-1}, \nabla f_n) - H_2(\nabla f_n, \nabla f_{n+1})) \end{aligned}$$

y $\nabla^2 f_{n-1} + \nabla^2 f_n = \nabla f_{n+1} - \nabla f_{n-1}$, si $f = \{g(nh)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, con g una función suave y monótona, podemos escribir

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}f)_{2n+1} - (S_{2,2}f)_{2n+1} &= \\ &\quad \frac{1}{8} (\nabla f_{n+1} - \nabla f_{n-1}) \left(\frac{1}{2} - 2 \frac{(\nabla f_n)^2}{(\nabla f_{n-1} + \nabla f_n)(\nabla f_n + \nabla f_{n+1})} \right). \end{aligned}$$

Utilizando desarrollos de Taylor, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \nabla f_{n+1} - \nabla f_{n-1} &= \mathcal{O}(h^2) \\ \frac{1}{2} - 2 \frac{(\nabla f_n)^2}{(\nabla f_{n-1} + \nabla f_n)(\nabla f_n + \nabla f_{n+1})} &= \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

por tanto

$$\|\mathbf{S}f - S_{2,2}f\|_\infty = \mathcal{O}(h^4)$$

Como el orden de aproximación después de una iteración del esquema $S_{2,2}$ es igual a 4, el orden de aproximación después de una iteración del esquema Pchip es también 4, y el resultado se sigue de la Proposición 1.4. ■

4.4

Experimentos numéricos

En esta sección presentamos una serie de experimentos numéricos que ilustran las propiedades del esquema de subdivisión

Pchip, que denotaremos en esta sección como S_{PC} para facilitar su identificación. Utilizaremos los esquemas lineales $S_{1,1}$ y $S_{2,2}$, y los esquema Power_p , S_{H_p} , con $p = 2, 3$ descritos en los Capítulos 1 y 3 para realizar comparaciones. Remarcamos que tanto el esquema PPH, S_{H_2} , como el esquema de 4-puntos $S_{2,2}$, y el esquema Pchip, estudiado en este capítulo, se basan en polinomios interpoladores de tercer grado.

4.4.1

Orden de aproximación

En esta sección efectuaremos un estudio numérico del orden de aproximación que se obtiene al reconstruir funciones suaves mediante el esquema S_{PC} .

Igual que en el capítulo anterior. El contexto general es el siguiente: Suponemos que se conocen los valores puntuales de una función suave $g(x)$ en una malla de puntos igualmente espaciados $\{x_i\}$ con paso de malla uniforme, h . Dado un esquema de subdivisión S y un intervalo $[a, b] \subset [\min_i x_i, \max_i x_i]$, calculamos

$$E_S^{[a,b]}(h) = \|S^\infty f^0 - g\|_{L^\infty([a,b])} \approx \max\{|(S^7 f^0)_n - g(n2^{-7}h)|, n2^{-7}h \in [a, b]\} \quad (4.25)$$

donde $f^0 = \{g(x_i)\}$ son los datos iniciales del proceso de subdivisión. Tomamos como referencia 7 aplicaciones del proceso de subdivisión puesto que en todos los experimentos numéricos realizados en esta memoria no se aprecian diferencias significativas si se efectúan más aplicaciones.

En los ejemplos numéricos considerados en esta sección se comparará el comportamiento de los esquemas $S_{1,1}$, $S_{2,2}$, S_{PC} y S_{H_2} , considerando valores iniciales $f^0 = \{g(nh)\}_{n \in l_\infty(\mathbb{Z})}$, con g una función suave, para distintos valores de h . A partir de una tabulación de los errores $E_S^{[a,b]}(h)$ en (4.25) para los diferentes valores de h considerados, y asumiendo que $\|S^\infty f^0 - g\|_{L^\infty([a,b])} = O(h^q)$, el orden de aproximación se calcula realizando un ajuste (log-log) por mínimos cuadrados sobre los valores obtenidos en la tabulación. Como viene siendo habitual, $S^\infty f \approx S^7 f$.

Ejemplo 1: curva gaussiana

En este ejemplo consideramos $g(x)$ una función gaussiana de media $\mu = 0$ y $\sigma = 0,5$, es decir

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x^2}, \quad (4.26)$$

y las regiones $[-1, -0,3]$ (Figura 4.2-izquierda) donde la función no es convexa, y $[-0,4, 0,4]$ (ver Figura 4.2-derecha) donde la función es convexa.

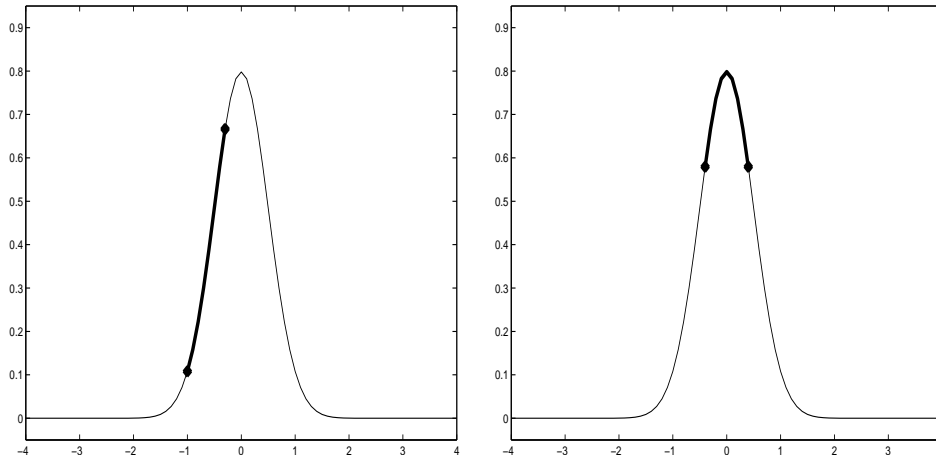


Figura 4.2: Datos gaussianos. Zonas marcadas: Izquierda $[a, b] = [-1, -0,3]$. Derecha $[a, b] = [-0,4, 0,4]$.

h	$E_{1,1}$	$E_{2,2}$	E_{PC}	E_2
0,1	$1,8e - 3$	$5,4e - 5$	$5,3e - 7$	$4,8e - 4$
0,05	$4,6e - 4$	$3,4e - 6$	$4,0e - 8$	$6,1e - 5$
0,025	$1,2e - 4$	$2,1e - 7$	$2,7e - 9$	$7,7e - 6$
0,0125	$3,2e - 5$	$1,3e - 8$	$1,7e - 10$	$9,6e - 7$
q	1,9	4,0	3,8	2,9

Tabla 4.1: Datos Gaussianos: Error respecto a h en $[-1, -0,3]$.

En la Tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos para $S_{1,1}$, $S_{2,2}$, S_{PC} y S_{H_2} , correspondientes al intervalo $[-1, -0,3]$, donde la función es creciente. Se observa que el orden de aproximación del esquema Pchip es 4, confirmando el resultado del Teorema 4.7. Se observa también que el esquema PPH sólo tiene orden de aproximación igual a 3 en esta región (no-convexa).

En la Tabla 4.2 se muestran los resultados obtenidos para $S_{1,1}$, $S_{2,2}$, S_{PC} y S_{H_2} , correspondientes al intervalo $[-0,4, 0,4]$. En este caso el orden del esquema Pchip es 2 (confirmando el resultado del Teorema 4.7), mientras que el esquema Power₂ tiene orden 4, al tratarse de una zona convexa.

h	$E_{1,1}$	$E_{2,2}$	E_{PC}	E_2
0,1	$5,4e - 5$	$3,4e - 6$	$9,8e - 4$	$1,9e - 4$
0,05	$1,5e - 5$	$2,4e - 7$	$2,4e - 4$	$1,4e - 5$
0,025	$4,2e - 6$	$1,5e - 8$	$6,2e - 5$	$9,7e - 7$
0,0125	$1,1e - 6$	$1,0e - 9$	$1,5e - 5$	$6,4e - 8$
q	1,8	3,9	1,9	3,8

Tabla 4.2: Datos Gaussianos: Error respecto a h en $[-,4, 0,4]$.

Ejemplo 2: $g(x) = \tan(\pi x)$

Consideramos ahora la función $g(x) = \tan(\pi x)$ y repetimos el estudio en los intervalos $[-0,25, -0,25]$ (Figura 4.3-izquierda), donde a función es creciente pero no convexa y $[0,1, 0,3]$ (Figura 4.3-derecha), donde la función es convexa y creciente.

En las Tablas 4.3 y 4.4 se muestran los resultados obtenidos para $S_{1,1}$, $S_{2,2}$, S_{PC} y S_{H_2} correspondientes al intervalo $[-0,25, 0,25]$ y $[0,1, 0,3]$. Puesto que esta función es creciente, el orden de aproximación del esquema Pchip es 4, independientemente de la convexidad de la función.

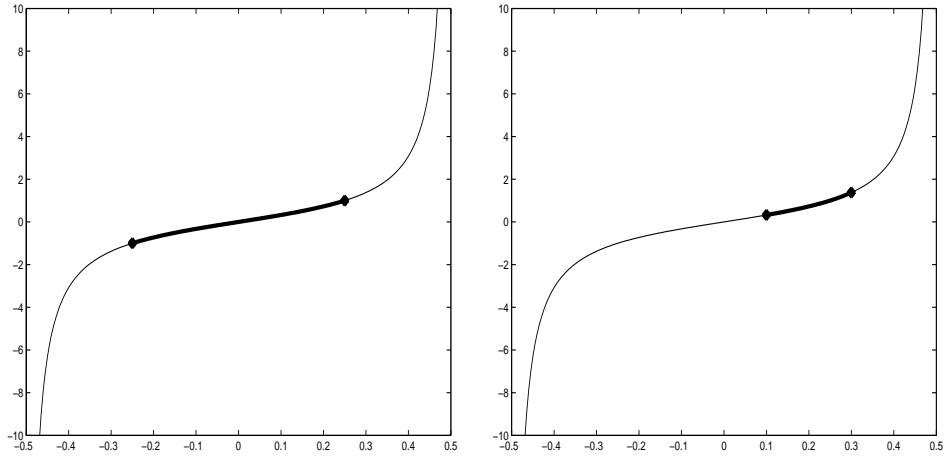


Figura 4.3: Datos iniciales. Zonas marcadas: Izquierda $[a, b] = [-0,25, -0,25]$. Derecha $[a, b] = [0,1, 0,3]$.

h	$E_{1,1}$	$E_{2,2}$	E_{PC}	E_2
0,05	$9,2e - 3$	$7,7e - 4$	$1,5e - 4$	$5,0e - 4$
0,025	$2,7e - 3$	$5,7e - 5$	$1,1e - 5$	$6,2e - 5$
0,0125	$7,1e - 4$	$3,9e - 6$	$8,0e - 7$	$7,7e - 6$
$6,25e - 3$	$1,8e - 4$	$2,6e - 7$	$5,2e - 8$	$9,7e - 7$
q	1,8	3,7	3,8	3,0

Tabla 4.3: Datos tangente: Error respecto a h en $[-0,25, 0,25]$.

h	$E_{1,1}$	$E_{2,2}$	E_{PC}	E_2
0,05	$1,7e - 2$	$2,2e - 3$	$3,6e - 4$	$1,0e - 4$
0,025	$5,1e - 3$	$1,6e - 4$	$2,8e - 5$	$7,3e - 6$
0,0125	$1,4e - 3$	$1,1e - 5$	$2,0e - 6$	$4,8e - 7$
$6,25e - 3$	$3,6e - 4$	$7,9e - 7$	$1,3e - 7$	$3,0e - 8$
q	1,8	3,8	3,8	3,9

Tabla 4.4: Datos tangente: Error respecto a h en $[0,1, 0,3]$.

4.4.2

Carácter No-Oscilatorio

Consideramos, de nuevo, datos iniciales que corresponden a la discretización de una función discontinua, suave a trozos, sobre una malla de puntos igualmente espaciados,

$$f^0 = \{f(x_i)\}, \{x_i\} = 0 : h : 1, \quad h = 1/8; \quad f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \leq 0,5 \\ -\sin(\pi x), & x > 0,5 \end{cases} \quad (4.27)$$

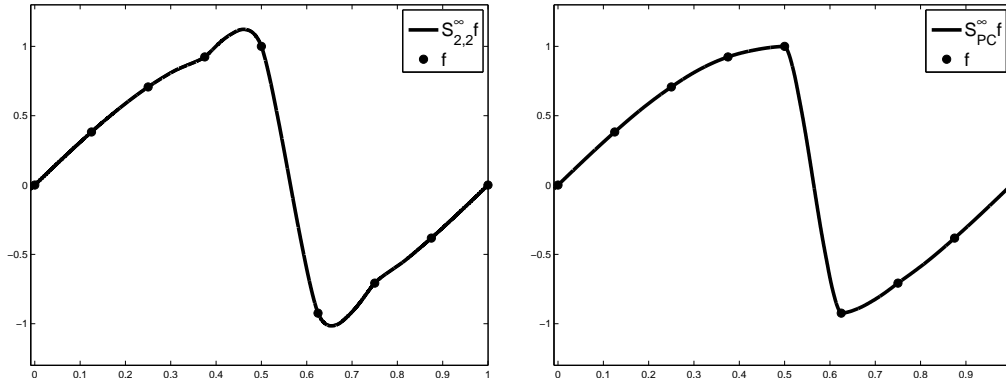


Figura 4.4: (●) Datos iniciales (4.27). Resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$ y Pchip.

En las Figuras 4.4 y 4.5 se muestran los resultados de aplicar diferentes esquemas de subdivisión a estos datos. El fenómeno de Gibbs, presente en el esquema $S_{2,2}$ no aparece en el esquema Pchip, lo cual confirma su carácter no-oscilatorio. En la Figura 4.5 se observa que el comportamiento alrededor de la discontinuidad de la función límite obtenida con el esquema Pchip es más 'suave' que la obtenida con los esquemas S_{H_p} presentados anteriormente.

Datos crecientes, no suaves

El siguiente ejemplo considera los siguientes datos, similares a los propuestos en [27] (ver Figura 4.6). Estos datos son de natura-

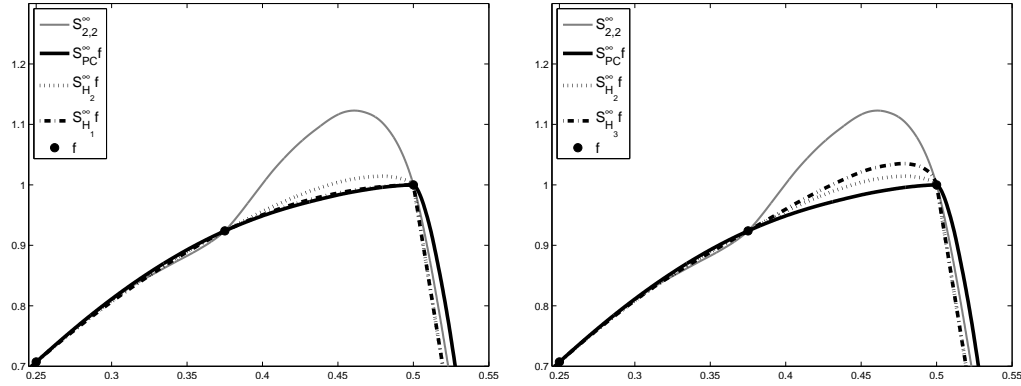


Figura 4.5: Zoom a la izquierda de $x = 0,5$. Datos iniciales en figura 4.4).

leza similar a los que pueden aparecer como resultado de simulaciones numéricas para leyes de conservación hiperbólicas, alrededor de ondas de choque o en el comienzo de ondas de rarefacción.

$$x = 1 : 1 : 17 \quad f(x_i) = \begin{cases} 10, & 1 \leq x_i \leq 5 \\ 10, 5, & 6 \leq x_i \leq 9 \\ 15, & x_i = 10 \\ 50, & 11 \leq x_i \leq 14 \\ 60, & x_i = 15 \\ 85, & 16 \leq x_i \leq 17 \end{cases} \quad (4.28)$$

Las figuras permiten apreciar el comportamiento no-oscilatorio de los esquemas no lineales. La falta de suavidad en la función límite de los esquemas S_{H_p} es evidente en las zonas con fuertes gradientes.

Datos con poca resolución inicial

En esta sección mostramos el comportamiento de los distintos esquemas considerados en este capítulo cuando se aplican a datos con estructura, pero con poca resolución inicial. Para ello consideramos dos discretizaciones diferentes de la función Gaussiana (4.26).

Consideramos en primer lugar los datos $f^0 = f(x_i)$ con $x = [-3, 2 : , 8 : 3, 2]$, de manera que $x = 0$ (la posición en la que la función

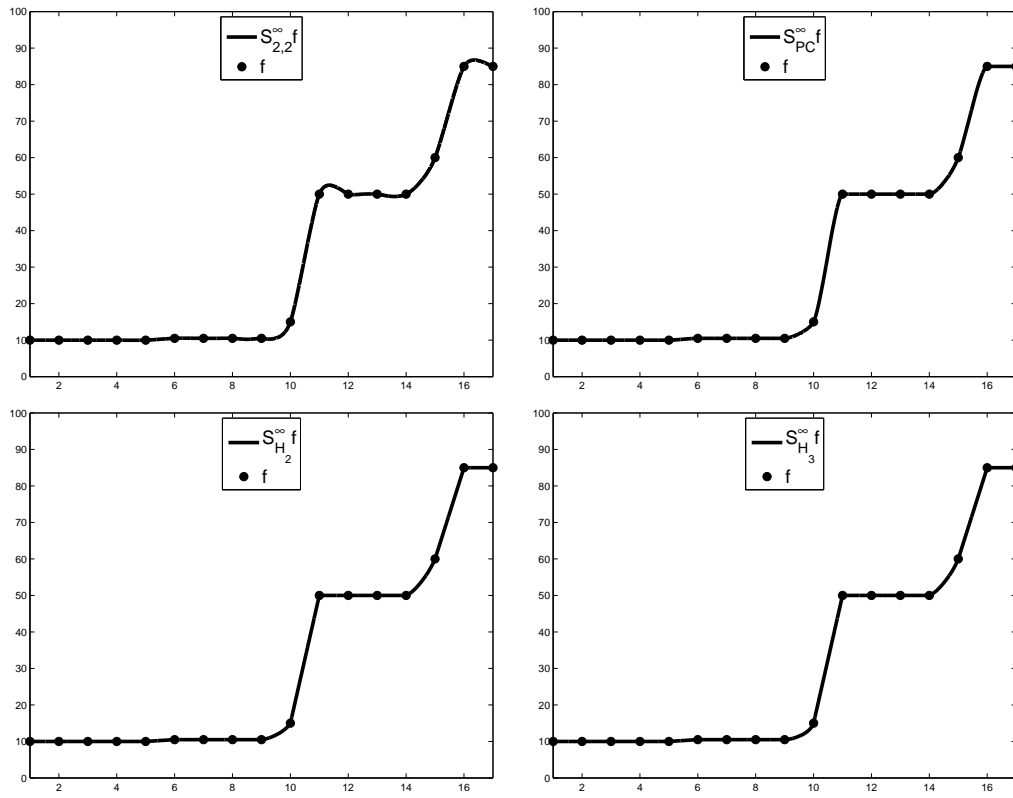


Figura 4.6: (●) Datos iniciales (4.28), resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$, Pchip y S_{H_p} para $p = 2, 3$.

alcanza su valor máximo) es uno de los puntos de la malla inicial. En la Figura 4.7 mostramos $S^\infty f^0 \approx S^7 f^0$ para distintos esquemas. Puesto que los datos iniciales contienen fuertes gradientes, el comportamiento de la función límite obtenida con los esquemas S_{H_p} es, como en casos anteriores, menos 'suave' que la correspondiente al esquema Pchip. En la zona de la campana de la reconstrucción de los datos gaussianos, este comportamiento es muy similar al del esquema $S_{2,2}$. Por otra parte, se observa claramente que el esquema Pchip evita las oscilaciones visibles en los intervalos segundo y séptimo.

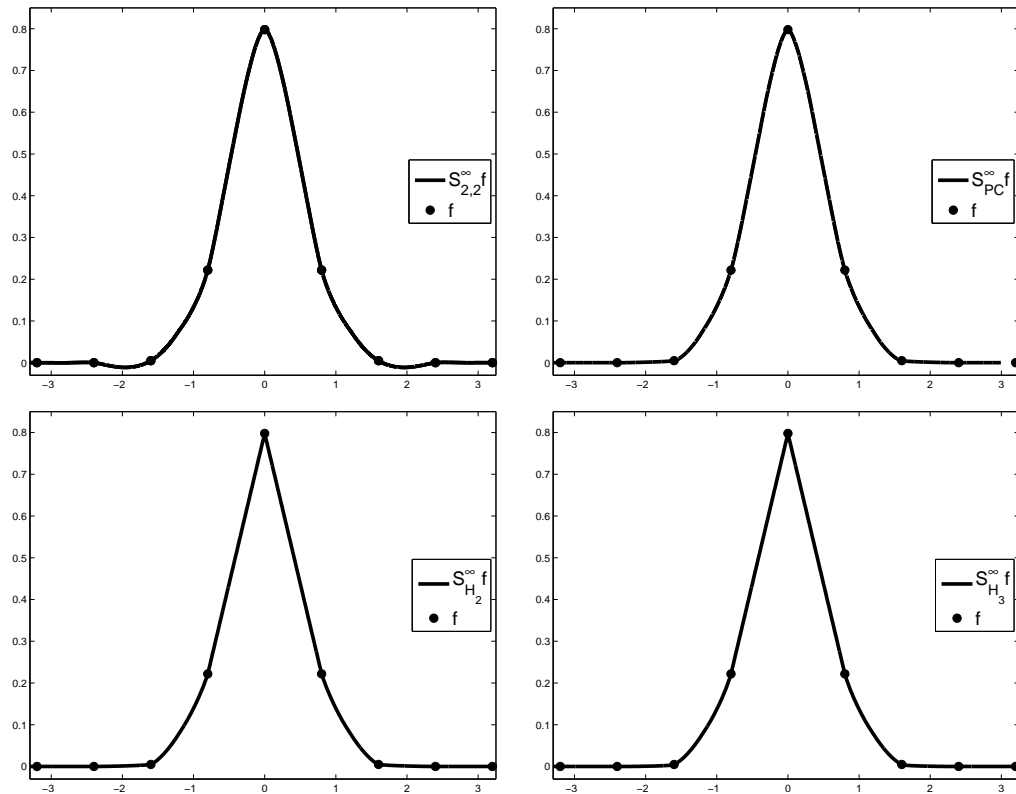


Figura 4.7: (•) Datos iniciales. Resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$, Pchip, S_{H_p} para $p = 2, 3$.

Consideramos ahora $f^0 = f(x_i)$, $x = [-2,96 : 0,615 : 2,575]$. Esta discretización no contiene a $x = 0$ como punto de la malla. En la Figura 4.8 se muestran los resultados correspondientes, en los

que se observa la incapacidad del esquema Pchip para reconstruir la zona convexa en el intervalo central.

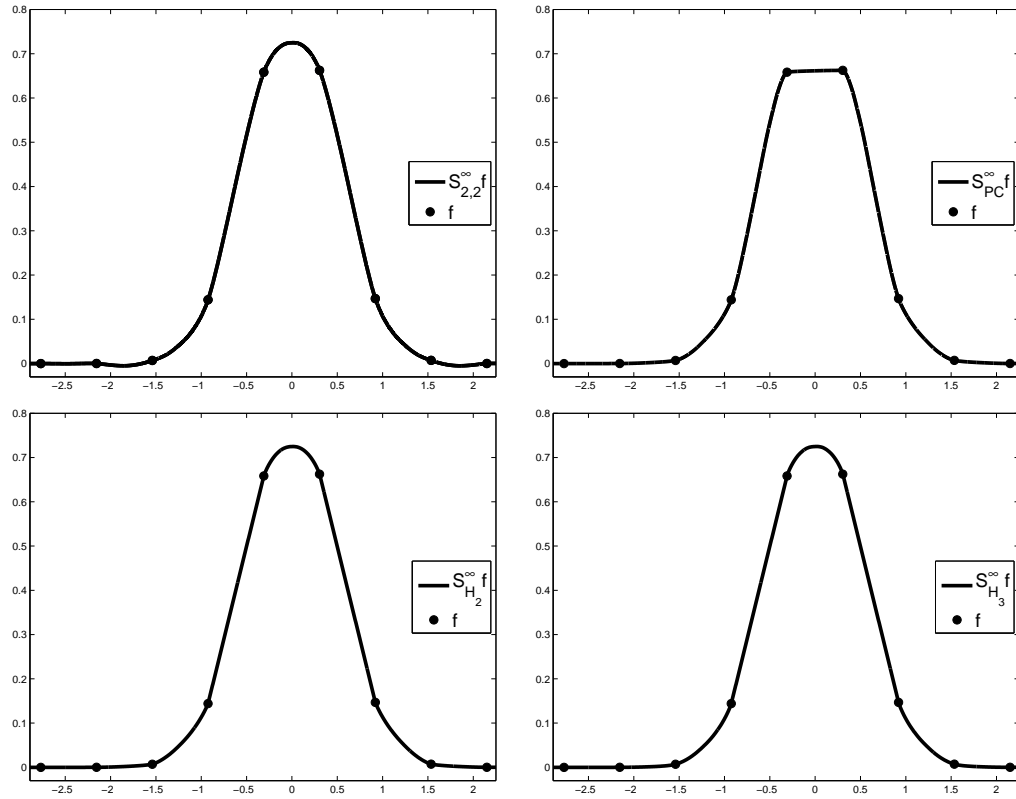


Figura 4.8: (•) Datos iniciales. Resultados después de 7 de los esquemas $S_{2,2}$, Pchip, S_{H_p} para $p = 2, 3$.

4.5

Cálculo numérico de los Jacobianos Generalizados

En esta sección mostramos el procedimiento numérico que nos ha permitido estimar la bondad de las cotas de los Jacobianos Generalizados obtenidas en el Teorema 4.5.

Recordamos que las entradas no-nulas de la matriz bi-infinita $DS^{[2]}(w)$ en las filas genéricas $2n$ y $2n + 1$ son

$$\begin{aligned} (DS^{[1]}(w))_{2n,n-1} &= \frac{1}{8} D_x \mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) \\ (DS^{[1]}(w))_{2n,n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} (D_y \mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) - D_x \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1})) \\ (DS^{[1]}(w))_{2n,n+1} &= -\frac{1}{8} D_y \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1}), \\ \\ (DS^{[1]}(w))_{2n+1,n-1} &= -\frac{1}{8} D_x \mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) \\ (DS^{[1]}(w))_{2n+1,n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} (D_y \mathbf{H}_2(w_{n-1}, w_n) - D_x \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1})) \\ (DS^{[1]}(w))_{2n+1,n+1} &= \frac{1}{8} D_y \mathbf{H}_2(w_n, w_{n+1}). \end{aligned}$$

Además, en el primer y tercer cuadrante

$$\begin{aligned} D_x \mathbf{H}_2|_{\Omega}(x, y) &= \frac{1}{2} (1 + |\tau|^2 + 2|\tau|) := \phi(\tau), \\ D_y \mathbf{H}_2|_{\Omega}(x, y) &= \frac{1}{2} (1 + |\tau|^2 - 2|\tau|) = \phi(-\tau), \end{aligned}$$

con $\tau = (x - y)/(x + y) \in [-1, 1]$, mientras que en el segundo y cuarto cuadrante, las componentes de DH_p son cero.

El siguiente código en Matlab calcula $\phi(t)$ para un valor concreto de la variable t ,

```
function [ y ] = phif( t )
    y = .5 * ( 1 + abs( t ) . * abs( t ) + 2 * t );
```

Denotamos $A(w) := DS_{H_p}^{[2]}(w)$. Fijamos $n \in \mathbb{Z}$ y definimos

$$t = \frac{w_n - w_{n-1}}{w_n + w_{n-1}}, \quad \tilde{t} = \frac{w_{n+1} - w_n}{w_n + w_{n+1}},$$

en el caso en que $w_{n-1} \cdot w_n \geq 0$, $w_n \cdot w_{n+1} \geq 0 \equiv t, \tilde{t} \in [-1, 1]$ tenemos

$$\begin{aligned} A_{[4n, 2n-1:2n+1]} &= \frac{1}{8} (\phi(s), 4 + \phi(-s) - \phi(\tilde{s}), -\phi(-\tilde{s})) \\ A_{[4n+1, 2n-1:2n+1]} &= \frac{1}{8} (-\phi(s), 4 - \phi(-s) + \phi(\tilde{s}), \phi(-\tilde{s})) \end{aligned}$$

142 4.5. Cálculo numérico de los Jacobianos Generalizados

Estas expresiones, que representan el caso 'más desfavorable' para las componentes no nulas de las filas genéricas $A_{[2n,:]}$, $A_{[2n+1,:]}$ y se implementan fácilmente en Matlab,

```
function [ Ae ] = Apar(t,s)

dxt=phif(t)/8;
dyt=phif(-t)/8;

dxs=phif(s)/8;
dys=phif(-s)/8;
Ae(1)=dxt;
Ae(2)=.5+dyt-dxs;
Ae(3)=-dys;

end

function [ Ao ] = AimparPCHIP(t,s)

dxt=phif(t)/8;
dyt=phif(-t)/8;

dxs=phif(s)/8;
dys=phif(-s)/8;
Ao(1)=-dxt;
Ao(2)=.5-dyt+dxs;
Ao(3)=dys;

end
```

Para estimar el producto de dos Jacobianos se ha de estimar

$$\|B\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq 3} \|B_{[4n+i,:]}\|_1$$

con

$$A := DS_{H_p}^{[2]} w, \quad \tilde{A} := DS_{H_p}^{[2]} v, \quad B := DS_{H_p}^{[2]} w D S_{H_p}^{[2]} v = A \tilde{A}.$$

Para ello, se observa que las entradas no nulas de las filas $B_{[4n+k,:]}$, $k = 0, 1, 2, 3$ se obtienen al efectuar el siguiente producto matricial

$$C_{4n} = \begin{pmatrix} A_{4n,2n-1} & A_{4n,2n} & A_{4n,2n+1} & 0 \\ A_{4n+1,2n-1} & A_{4n+1,2n} & A_{4n+1,2n+1} & 0 \\ 0 & A_{4n+2,2n} & A_{4n+2,2n+1} & A_{4n+2,2n+2} \\ 0 & A_{4n+3,2n} & A_{4n+3,2n+1} & A_{4n+3,2n+2} \end{pmatrix}$$

$$D_{2n} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{2n-1,n-2} & \tilde{A}_{2n-1,n-1} & \tilde{A}_{2n-1,n} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{2n,n-1} & \tilde{A}_{2n,n} & \tilde{A}_{2n,n+1} \\ 0 & \tilde{A}_{2n+1,n-1} & \tilde{A}_{2n+1,n} & \tilde{A}_{2n+1,n+1} \\ 0 & \tilde{A}_{2n+2,n} & \tilde{A}_{2n+2,n+1} & \tilde{A}_{2n+2,n+2} \end{pmatrix}.$$

Notar que las filas de C_{4n} dependen únicamente de los valores

$$s := \frac{w_{2n} - w_{2n-1}}{w_{2n} + w_{2n-1}} \quad \tilde{s} := \frac{w_{2n+1} - w_{2n}}{w_{2n+1} + w_{2n}} \quad \bar{s} := \frac{w_{2n+2} - w_{2n+1}}{w_{2n+2} + w_{2n+1}}$$

mientras que las filas de D_{2n} lo hacen de

$$\hat{t} := \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{u_{n-1} + u_{n-2}} \quad t := \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n + u_{n-1}} \quad \tilde{t} := \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} + u_n}.$$

Los siguientes códigos calculan C_{4n} y D_{4n} en función de las variables definidas anteriormente.

```
function [ C ] = C4nPCHIP( s1, s2, s3)
```

```
    C=[AparPCHIP(s1, s2), 0;
        AimparPCHIP(s1, s2), 0;
        0, AparPCHIP(s2, s3);
        0, AimparPCHIP(s2, s3)];
```

```
end
```

```
function [ D ] = D2nPCHIP( t1, t2, t3, t4)
```

```
    D=[AimparPCHIP(t1, t2), 0, 0;
        0, AparPCHIP(t2, t3), 0;
        0, AimparPCHIP(t2, t3), 0;
        0, 0, AparPCHIP(t3, t4)];
```

```
end
```

Observamos que

$$\sup_{w, v \in l_\infty(\mathbb{Z})} \|B_{[4n+k, :]} \|_1 = \sup\{\|B_{[4n+k, :]} \|_1, s, \tilde{s}, \bar{s}, \hat{t}, t, \tilde{t} \in [-1, 1]\}$$

Utilizamos el siguiente código de Matlab para calcular

$$\max_{0 \leq k \leq 3} \sup\{\|B_{[4n+k, :]} \|_1, s, \tilde{s}, \bar{s}, \hat{t}, t, \tilde{t} \in [-1 : h : 1]\}$$

144 4.5. Cálculo numérico de los Jacobianos Generalizados

```

function [ cot ] = J2PCHIP (h,p)
t=[-1:h:1];
n=length(t);
cot=[0,0,0,0];

for is1=1:n
    for is2=1:n
        for is3=1:n
            C=C4nPCHIP (t (is1),t (is2),t (is3),p);
            for it1=1:n
                for it2=1:n
                    for it3=1:n
                        D=D2nPCHIP (t (it1),t (it2),t (it3),p);
                        B=C*D;
                        cot (1)=max (cot (1),norm (B (1,:),1));
                        cot (2)=max (cot (2),norm (B (2,:),1));
                        cot (3)=max (cot (3),norm (B (3,:),1));
                        cot (4)=max (cot (4),norm (B (4,:),1));
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end

```

En la Tabla 4.5 comparamos las cotas obtenidas en la demostración del Teorema 4.5 y este programa, las cotas obtenidas teóricamente no se diferencian mucho de las obtenidas con Matlab. Además se observa que las cotas obtenidas para $\|B_{[4n,:]} \|_1$ coinciden con las de $\|B_{[4n+3,:]} \|_1$ y sucede lo mismo para $\|B_{[4n+1,:]} \|_1$ y $\|B_{[4n+2,:]} \|_1$.

p	$\ B_{[4n,:]} \ _1$	$\ B_{[4n+1,:]} \ _1$	$\ B_{[4n+2,:]} \ _1$	$\ B_{[4n+3,:]} \ _1$
numéricas	6/8	28/32	28/32	6/8
teóricas	7/8	29/32	29/32	7/8

Tabla 4.5: Con $h = 0,1$ y cualquier h más pequeño.

5

Esquemas no-oscilatorios de 6-puntos

Los esquemas S_{H_p} constituyen una familia de esquemas interpolatorios, asociados de manera natural al stencil centrado de 4 puntos, que se pueden considerar versiones no lineales, no oscilatorias, del esquema $S_{2,2}$.

Resulta natural intentar extender las ideas subyacentes a los esquemas H_p para construir esquemas no oscilatorios, no lineales, relacionados con el esquema centrado $S_{3,3}$. El Teorema 1.1 permite escribir el esquema $S_{3,3}$ como una combinación de los esquemas $S_{2,3}$ y $S_{3,2}$

$$S_{3,3} = \frac{1}{2}S_{2,3} + \frac{1}{2}S_{3,2},$$

de manera que podemos intentar definir versiones no lineales de

este esquema del mismo modo que se definen los esquemas Power_p . Es sencillo ver que que los esquemas $S_{3,2}$ y $S_{2,3}$ también se pueden escribir como perturbaciones del esquema $S_{1,1}$ (ver [19])

$$\begin{aligned} S_{3,2} &= S_{1,1} + \mathcal{F}_{3,2} \circ \nabla^2 \\ S_{2,3} &= S_{1,1} + \mathcal{F}_{2,3} \circ \nabla^2 \end{aligned}$$

donde $\forall w \in l_\infty(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{3,2}w)_{2n} &= 0, & (\mathcal{F}_{3,2}w)_{2n+1} &:= (\mathcal{L}_{3,2}w)_n \\ (\mathcal{F}_{2,3}w)_{2n} &= 0, & (\mathcal{F}_{2,3}w)_{2n+1} &:= (\mathcal{L}_{2,3}w)_n \end{aligned}$$

con $\mathcal{L}_{l,r} : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ operadores lineales que satisfacen

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{2,3}w)_{2n+1} &= -\frac{1}{128} (5w_{n-1} + 14w_n - 3w_{n+1}) \\ (\mathcal{L}_{3,2}w)_{2n+1} &= -\frac{1}{128} (-3w_{n-2} + 14w_{n-1} + 5w_n) \end{aligned}$$

y $(\mathcal{L}_{l,r}w)_{2n} = 0$. Como

$$S_{3,3} = S_{1,1} + \text{mean}(\mathcal{F}_{3,2} \circ \nabla^2, \mathcal{F}_{2,3} \circ \nabla^2).$$

podríamos considerar en primera instancia la siguiente versión no lineal del esquema $S_{3,3}$

$$S_{3,H_p} := S_{1,1} + H_p(\mathcal{F}_{3,2} \circ \nabla^2, \mathcal{F}_{2,3} \circ \nabla^2).$$

Sin embargo, esta definición reduce, pero no elimina, el comportamiento oscilatorio del esquema $S_{3,3}$. En la Figura 5.1 se muestra $S_{3,H_p}^j f$ para $f = \{f(x_l)\}$ correspondiente a la discretización de una función discontinua sobre una malla con 9 puntos. Como se observa en la Figura 5.1 (para $j = 1$ y $j = 7$ con $p = 1, 2$) la construcción anterior limita la amplitud de las oscilaciones, pero sin eliminarlas por completo en los intervalos adyacentes a la discontinuidad. La razón se puede entender fácilmente examinando la Figura 5.2.

Puesto que la exactitud de los esquemas $S_{l,r}$ se pierde por completo cuando el stencil interpolador cruza una discontinuidad, en los intervalos adyacentes a $x = 0,5$ los dos valores que se promedian son $O(1)$ -inexactos, por lo que el valor obtenido con la media

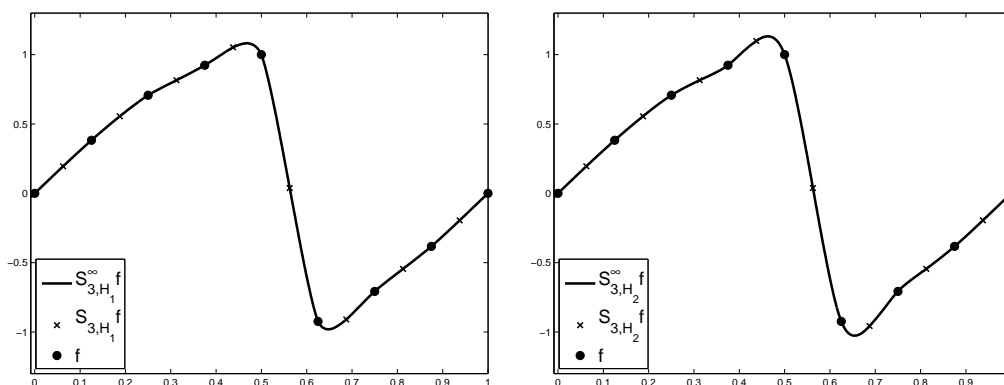


Figura 5.1: Funciones límite sobre datos discontinuos obtenidas con los esquemas S_{3,H_1} , S_{3,H_2}

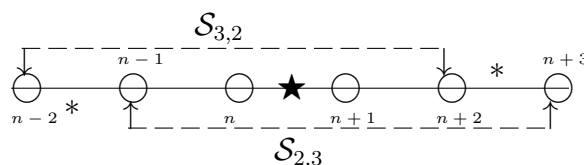


Figura 5.2: \star representa $x_{n+\frac{1}{2}}$. \circ marca el stencil $S_{3,3}$ y las líneas discontinuas los stencils $S_{2,3}$ y $S_{3,2}$.

H_p sigue siendo $O(1)$ -inexacto, aunque está más cerca del menor valor promediado.

Se puede obtener una alternativa más apropiada si partimos de las relaciones (Teorema 1.1)

$$S_{3,2} = \frac{3}{8}S_{3,1} + \frac{5}{8}S_{2,2}, \quad S_{2,3} = \frac{3}{8}S_{1,3} + \frac{5}{8}S_{2,2} \quad (5.1)$$

y las expresiones $S_{l,r} = S_{1,1} + \mathcal{L}_{l,r} \circ \nabla^2$. Para los esquemas que forman parte de la expresión anterior es fácil deducir

$$\begin{aligned} (S_{3,1}f)_{2n+1} &= \frac{1}{2}(f_n + f_{n+1}) - \frac{1}{16}(3\nabla^2 f_{n-1} - \nabla^2 f_{n-2}), \\ (S_{2,2}f)_{2n+1} &= \frac{1}{2}(f_n + f_{n+1}) - \frac{1}{16}(\nabla^2 f_{n-1} + \nabla^2 f_n), \\ (S_{1,3}f)_{2n+1} &= \frac{1}{2}(f_n + f_{n+1}) - \frac{1}{16}(3\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n+1}), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{3,1}(w))_{2n+1} &= -w_{n-2} + 3w_{n-1} \\ (\mathcal{L}_{2,2}(w))_{2n+1} &= w_{n-1} + w_n \\ (\mathcal{L}_{1,3}(w))_{2n+1} &= 3w_n - w_{n+1}. \end{aligned}$$

Así, de las relaciones (5.1) deducimos que

$$\begin{aligned} (S_{3,2}f)_{2n+1} &= (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{16} \left(\frac{3}{8}(\mathcal{L}_{3,1}\nabla^2 f) + \frac{5}{8}(\mathcal{L}_{2,2}\nabla^2 f) \right)_{2n+1} \\ (S_{2,3}f)_{2n+1} &= (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{16} \left(\frac{3}{8}(\mathcal{L}_{1,3}\nabla^2 f) + \frac{5}{8}(\mathcal{L}_{2,2}\nabla^2 f) \right)_{2n+1} \end{aligned}$$

de modo que esquema $S_{3,3}$ se puede reescribir como

$$S_{3,3} = S_{1,1} - \frac{1}{16} \text{ave}_{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}} \left(\text{ave}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathcal{L}_{1,3} \circ \nabla^2, \mathcal{L}_{3,1} \circ \nabla^2), \mathcal{L}_{2,2} \circ \nabla^2 \right) \quad (5.2)$$

con $\text{ave}_{a,b}(x, y) = ax + by, \quad a > 0, b > 0, a + b = 1.$

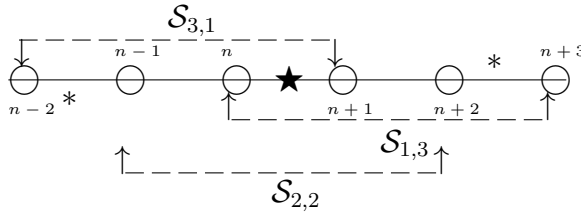


Figura 5.3: \star : representa $x_{n+\frac{1}{2}}$. \circ marca el stencil $S_{3,3}$. Líneas discontinuas: stencils $S_{2,2}$, $S_{1,3}$ y $S_{3,1}$.

En la Figura 5.3 se muestran los stencils de los esquemas que intervienen en esta expresión. Para obtener una versión no-oscilatoria en los intervalos adyacentes al que contiene a la discontinuidad, deberíamos substituir los promedios lineales por promedios no lineales similares a la media H_p . Obviamente,

$$\text{ave}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, y) \approx H_p(x, y),$$

pero para generar versiones no lineales no-oscilatorias del esquema $S_{3,3}$ de manera análoga a la construcción de los esquemas H_p

se requiere, además, una versión no lineal de la media ponderada

$$\text{ave}_{a,b}(x, y) = ax + by, \quad a > 0, b > 0, a + b = 1$$

con propiedades similares a la media H_p . A continuación definiremos la media armónica ponderada $WH_{p,a,b}$, que generaliza la media Power_p y que permitirá construir una versión mínimamente-oscilatoria del esquema $S_{3,3}$.

5.1

La media Weighted-Power_p

Definición 5.1. *Media Armónica Ponderada Power_p*

Dados $a > 0, b > 0$ con $a + b = 1$ y $p \in \mathbb{N}, p \geq 1. \forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$WH_{p,a,b}(x, y) := \text{sgn}(x, y) |ax + by| \left(1 - \frac{|x - y|^p}{(M + \frac{m}{\alpha})(M + \alpha m)^{p-1}} \right),$$

donde $M = \max\{|x|, |y|\}$, $m = \min\{|x|, |y|\}$, $\alpha = \max\{a, b\} / \min\{a, b\}$.

Es fácil ver que $WH_{p, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, y) = H_p(x, y)$. Los siguientes resultados ponen de manifiesto que esta media proporciona una generalización adecuada de la media Power_p .

Proposición 5.1. *La media ponderada Power_p satisface las siguientes propiedades algebraicas.*

$$\mathbf{E1} \quad WH_{p,a,b}(x, x) = x. \quad (5.3)$$

$$\mathbf{E2.} \quad WH_{p,a,b}(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad xy \leq 0. \quad (5.4)$$

$$\mathbf{E3.} \quad WH_{p,a,b}(x, y) = WH_{p,b,a}(y, x). \quad (5.5)$$

$$\mathbf{E4.} \quad WH_{p,a,b}(-x, -y) = -WH_{p,a,b}(x, y). \quad (5.6)$$

La prueba de estos resultados se deduce directamente de la Definición 5.1. La siguiente proposición establece que la Media

Ponderada (5.1) satisface una generalización de la propiedad **C4**-Proposición 3.2, válida para $H_p(x, y)$

Proposición 5.2. $\forall p \geq 1$ se satisface la siguiente relación:

$$WH_{p,a,b}(x, y) = \operatorname{sgn}(x, y) \frac{ax + by}{cM + dm} m \left[1 + \alpha \sum_{k=1}^{p-1} \frac{|x - y|^k}{(M + \alpha m)^k} \right], \quad (5.7)$$

donde $c = \max\{a, b\}$ y $d = \min\{a, b\}$.

Demostración

Supondremos que $x > 0, y > 0$, ya que todos los demás casos son o bien triviales o se pueden reducir a este utilizando (5.4) y (5.6). El resultado se deduce fácilmente de la expresión de $WH_{1,a,b}$ y la relación entre las medias ponderadas para dos índices consecutivos. Notar que

$$\begin{aligned} WH_{p+1,a,b}(x, y) &= (ax + by) \left(1 - \frac{|x - y|^{p+1}}{(M + \frac{d}{c}m)(M + \frac{c}{d}m)^p} \right) \\ &= (ax + by) \left(1 - \frac{|x - y|^p}{(M + \frac{1}{\alpha}m)(M + \alpha m)^{p-1}} \frac{|x - y|}{(M + \alpha m)} \right). \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|) & i.e. & \quad |x + y| = M + m \\ m &= \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|) & & \quad |x - y| = M - m, \end{aligned} \quad (5.8)$$

se tiene que

$$\frac{|x - y|}{M + \alpha m} = \frac{M - m}{M + \alpha m} = 1 - (1 + \alpha) \frac{m}{M + \alpha m}, \quad (5.9)$$

así que se puede escribir

$$\begin{aligned} WH_{p+1,a,b}(x, y) &= WH_{p,a,b}(x, y) + (1 + \alpha)m \frac{ax + by}{(M + \frac{1}{\alpha}m)(M + \alpha m)^p} |x - y|^p \\ &= WH_{p,a,b}(x, y) + \alpha m \frac{ax + by}{(cM + dm)(M + \alpha m)^p} |x - y|^p, \end{aligned}$$

donde se utiliza que

$$c(\alpha + 1) = c \frac{c + d}{d} = \frac{c}{d} = \alpha.$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$\frac{|x - y|}{M + \frac{m}{\alpha}} = \frac{M - m}{M + \frac{m}{\alpha}} = 1 - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{m}{M + \frac{m}{\alpha}} = 1 - \frac{m}{c(M + \frac{m}{\alpha})}, \quad (5.10)$$

de donde se deduce

$$\text{WH}_{1,a,b}(x, y) = (ax + by) \left(1 - \frac{|x - y|}{M + \frac{1}{\alpha}m}\right) = \frac{ax + by}{cM + dm}m.$$

Esto permite probar (5.7). ■

El siguiente resultado establece ciertas estimaciones sobre la media $\text{WH}_{p,a,b}$ que generalizan las correspondientes a la media H_p .

Proposición 5.3. *La media ponderada $\text{WH}_{p,a,b}$, $p \geq 1$ satisface las siguientes estimaciones $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$*

$$\mathbf{C1} \quad |\text{WH}_{p,a,b}(x, y)| \leq |ax + by| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{C2} \quad |\text{WH}_{p,a,b}(x, y)| \leq p\alpha \text{mín}\{|x|, |y|\}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{C3} \quad \forall q > p, |\text{WH}_{p,a,b}(x, y)| \leq |\text{WH}_{q,a,b}(x, y)|, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{C4} \quad \frac{1}{\alpha}m \leq \frac{|ax + by|}{cM + dm}m \leq |\text{WH}_{p,a,b}(x, y)|. \quad (5.14)$$

Demostración

Como en el caso de la proposición previa, es suficiente considerar el caso $x, y > 0$.

C1: Utilizando (5.9) y $d(1 + \alpha) = 1$ deducimos que

$$\frac{|x - y|}{M + \alpha m} = 1 - \frac{m}{dM + cm}.$$

Dado que

$$0 < \frac{m}{dM + cm} = \frac{(d+c)m}{dM + cm} \leq 1,$$

fácilmente se obtiene que

$$0 \leq \frac{|x-y|}{M + \alpha m} \leq 1. \quad (5.15)$$

Similarmente, usando (5.10) se tiene

$$0 \leq \frac{|x-y|}{M + \frac{m}{\alpha}} \leq 1,$$

de ahí

$$0 < 1 - \frac{|x-y|^p}{(M + \frac{1}{\alpha}m)(M + \alpha m)^{p-1}} \leq 1.$$

Así,

$$\begin{aligned} |WP_{p,a,b}(x,y)| &= |(ax+by)| \left| \left(1 - \frac{|x-y|^p}{(M + \frac{1}{\alpha}m)(M + \alpha m)^{p-1}} \right) \right| \\ &\leq |ax+by| \leq \max\{|x|, |y|\}, \end{aligned}$$

ya que $a+b=1$.

C2: Utilizaremos (5.7). Observamos en primer lugar que

$$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{ax+by}{cM+dm} \leq 1. \quad (5.16)$$

Para probar esta desigualdad, suponemos (sin pérdida de generalidad) que $a=c$. Entonces

$$\frac{ax+by}{cM+dm} = \frac{cx+dy}{cM+dm} = \begin{cases} 1 & \text{si } x=M, \\ \frac{cm+dM}{cM+dm} & \text{si } x=m, \end{cases}$$

Notar que $c(M-m) \geq d(M-m)$, por tanto $cM+dm \geq dM+cm$. Además, $d(M+m) \leq cm+dM$ y $cM+dm \leq c(M+m)$, por tanto

$$1 \geq \frac{cm+dM}{cM+dm} \geq \frac{d(m+M)}{c(M+m)} = \frac{1}{\alpha}.$$

En segundo lugar, teniendo en cuenta (5.15) obtenemos

$$1 + \alpha \sum_{k=1}^{p-1} \frac{|x-y|^k}{(M + \alpha m)^k} \leq 1 + \alpha(p-1) \leq p\alpha, \quad (5.17)$$

dato que $1 - \alpha < 0$. La estimación deseada se sigue de (5.7), (5.16) y (5.17)

C3: Se sigue directamente de (5.7).

C4: Se sigue directamente de (5.7) y (5.16). ■

Los resultados de esta sección muestran que la media ponderada $\text{WH}_{p,a,b}(x, y)$ proporciona una generalización adecuada de la media $\text{H}_p(x, y) = \text{WH}_{p, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, y)$. En particular, la propiedad **C2** en la Proposición 5.3 limita el valor promediado, acercando el valor promedio al menor de los valores que intervienen. Notar que el factor $\alpha = \max\{a, b\} / \min\{a, b\}$ podría hacer que el valor promedio fuese mucho mayor que el mínimo de los valores promediados si $\alpha \gg 1$.

5.2

El esquema $S_{3,W(p,q)}$

Teniendo en cuenta las propiedades de la media ponderada $\text{WH}_{p,a,b}$ y la Figura 5.3, proponemos sustituir la expresión

$$S_{3,3} = S_{1,1} - \frac{1}{16} \text{ave}_{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}} \left(\text{ave}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathcal{L}_{1,3} \circ \nabla^2, \mathcal{L}_{3,1} \circ \nabla^2), \mathcal{L}_{2,2} \circ \nabla^2 \right)$$

por la siguiente versión no lineal:

$$S_{3,W(p,q)} = S_{1,1} - \frac{1}{16} \text{WH}_{p, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}} \left(\text{H}_q(\mathcal{L}_{1,3} \circ \nabla^2, \mathcal{L}_{3,1} \circ \nabla^2), \mathcal{L}_{2,2} \circ \nabla^2 \right)$$

Este esquema es de la forma (1.25), dado que

$$S_{3,W(p,q)} = S_{1,1} + \mathcal{G}_{(p,q)} \circ \nabla^2$$

donde $\mathcal{G}_{(p,q)} : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ está definida como

$$\begin{cases} (\mathcal{G}_{(p,q)}f)_{2n} &= 0 \\ (\mathcal{G}_{(p,q)}f)_{2n+1} &= -\frac{1}{16}G_{(p,q)} \circ \chi_{[n-2,n+1]}f \end{cases}, \quad f \in l_\infty(\mathbb{Z}) \quad (5.18)$$

con $G_{(p,q)} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$G_{(p,q)}(x) = \mathbf{WH}_{p, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}} \left(\mathbf{H}_q(-x_1 + 3x_2, 3x_3 - x_4), x_2 + x_3 \right). \quad (5.19)$$

5.2.1

Propiedades del esquema $S_{3,W(p,q)}$

Los esquemas $S_{3,W(p,q)}$ reproducen polinomios de grado menor o igual a 3, y, como sus homólogos S_{H_p} , son 2-OSI, puesto que también están definidos en función de operadores lineales que dependen de ∇^2 .

Proposición 5.4. *El esquema $S_{3,W(p,q)}$ reproduce Π_3*

Demostración

Como $S_{3,1}$, $S_{2,2}$ y $S_{1,3}$ reproducen exactamente polinomios de grado 3, se tiene que si $P \in \Pi_3$ y $f = \{P(n)\}$,

$$(S_{3,1}f)_{2n+1} = (S_{2,2}f)_{2n+1} = (S_{1,3}f)_{2n+1} = P(n + 1/2),$$

por tanto

$$(\mathcal{L}_{3,1}(\nabla^2 f))_{2n+1} = (\mathcal{L}_{2,2}(\nabla^2 f))_{2n+1} = (\mathcal{L}_{1,3}(\nabla^2 f))_{2n+1}$$

y, en consecuencia, $\forall p, q \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{WH}_{p, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}} \left(\mathbf{H}_p \left((\mathcal{L}_{3,1}(\nabla^2 f))_{2n+1}, (\mathcal{L}_{1,3}(\nabla^2 f))_{2n+1} \right), (\mathcal{L}_{2,2}(\nabla^2 f))_{2n+1} \right) \\ = (\mathcal{L}_{2,2}(\nabla^2 f))_{2n+1}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}(S_{3,W(p,q)}f)_{2n+1} &= (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{16}(\mathcal{L}_{2,2}(\nabla^2 f))_{2n+1} \\ &= (S_{2,2}f)_{2n+1} = P(n + 1/2)\end{aligned}$$

■

Proposición 5.5. *Los esquemas $S_{3,W(p,q)}$ son 2-OSI*

Demostración

Si $P(x) \in \mathbb{P}_2$ y $g = P|_{\mathbb{Z}}$, entonces $\nabla^2 g = 0$. Así,

$$(\mathcal{L}_{3,1}(\nabla^2 g))_{2n+1} = (\mathcal{L}_{2,2}(\nabla^2 g))_{2n+1} = (\mathcal{L}_{1,3}(\nabla^2 g))_{2n+1} = 0$$

por tanto $\forall f \in l_\infty(\mathbb{Z})$

$$\mathcal{G}_{(p,q)} \circ \chi_{[n-2,n+1]} \nabla^2(f + g) = \mathcal{G}_{(p,q)} \circ \chi_{[n-2,n+1]} \nabla^2 f$$

de manera que

$$\begin{aligned}(S_{3,W(p,q)}(f + g))_{2n+1} &= (S_{3,W(p,q)}f)_{2n+1} + (S_{1,1}(g))_{2n+1} \\ &= S_{3,W(p,q)}f_{2n+1} + P(n + 1/2),\end{aligned}$$

puesto que $S_{1,1}$ es lineal y reproduce polinomios de grado 1 de manera exacta. ■

Los esquemas diferencia

Calculamos a continuación el segundo esquema diferencia, ya que es el que utilizaremos para estudiar la convergencia de los esquemas $S_{3,W(p,q)}$. Este esquema se calcula a partir de las diferencias de orden dos:

$$\begin{aligned}(\nabla^2 S_{3,W(p,q)}f)_{2n} &= (S_{3,W(p,q)}f)_{2n+2} - 2(S_{3,W(p,q)}f)_{2n+1} + (S_{3,W(p,q)}f)_{2n} \\ &= \frac{1}{8}G_{(p,q)}(\nabla^2 f_{n-2}, \nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n, \nabla^2 f_{n+1}), \\ (\nabla^2 S_{3,W(p,q)}f)_{2n+1} &= (S_{3,W(p,q)}f)_{2n+3} - 2(S_{3,W(p,q)}f)_{2n+2} + (S_{3,W(p,q)}f)_{2n+1} \\ &= \frac{\nabla^2 f_n}{2} - \frac{1}{16}G_{(p,q)}(\nabla^2 f_{n-2}, \nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n, \nabla^2 f_{n+1}) \\ &\quad - \frac{1}{16}G_{(p,q)}(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n, \nabla^2 f_{n+1}, \nabla^2 f_{n+2}),\end{aligned}$$

por tanto, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} (S_{3,W(p,q)}^{[2]} w)_{2n} &= \frac{1}{8} G_{(p,q)} \circ \chi_{[n-2,n+1]} w \\ (S_{3,W(p,q)}^{[2]} w)_{2n+1} &= \frac{w_n}{2} - \frac{1}{16} (G_{(p,q)} \circ \chi_{[n-2,n+1]} w + G_{(p,q)} \circ \chi_{[n-1,n+2]} w). \end{cases}$$

Convergencia del esquema $S_{3,W(p,q)}$.

Las propiedades de acotación de las funciones $WH_{p,a,b}(x, y)$ y $H_2(x, y)$ permiten probar de manera inmediata la convergencia de los esquemas $S_{3,W(p,q)}$, utilizando el Teorema 1.6. Veamos a continuación un Lema auxiliar.

Lema 5.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}^4$, se tiene*

$$\|G_{(p,q)}(x)\|_\infty \leq \frac{11}{8} \|x\|_\infty.$$

Demostración

La propiedad **C1** de la Proposición 5.3 conduce a

$$|G_{(p,q)}(x_1, x_2, x_3, x_4)| \leq \frac{3}{8} |\mathbf{H}_q(3x_2 - x_1, 3x_3 - x_4)| + \frac{5}{8} |x_2 + x_3|.$$

De manera análoga, por la propiedad **C3**-Proposición 3.2

$$|\mathbf{H}_q(3x_2 - x_1, 3x_3 - x_4)| \leq \frac{1}{2} |(3x_2 - x_1) + (3x_3 - x_4)| \leq \frac{3}{2} |x_2 + x_3| + \frac{1}{2} |x_1 + x_4|.$$

Por tanto

$$|G_{(p,q)}(x_1, x_2, x_3, x_4)| \leq \left(\frac{3}{8} \frac{3}{2} + \frac{5}{8}\right) |x_2 + x_3| + \frac{3}{8} \frac{1}{2} |x_1 + x_4| \leq \frac{11}{8} \|x\|_\infty.$$

■

Teorema 5.1. *Para todo $p, q \geq 1$, el esquema de subdivisión no lineal $S_{3,W(p,q)}$ es uniformemente convergente.*

Demostración

Demostramos la convergencia del esquema comprobando las hipótesis del Teorema 1.6.

Para comprobar la estimación (1.36), se necesita acotar la norma del operador no lineal $\mathcal{G}_{(p,q)}$ en (5.18). El Lema 5.1 conduce a

$$|(\mathcal{G}_{(p,q)}(d))_{2n+1}| \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{11}{8} \|d\|_\infty = \frac{11}{128} \|d\|_\infty \quad \forall d \in l^\infty(\mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Para comprobar (1.37), se considerarán separadamente los índices pares e impares. Para índices pares, el Lema 5.1 proporciona

$$|S_{3,W(p,q)}^{[2]}(f)_{2n}| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{11}{8} \|f\|_\infty = \frac{11}{64} \|f\|_\infty.$$

Para las componentes impares, si definimos la función

$$Z_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{x_3}{2} - \frac{1}{16} \left(G_{(p,q)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + G_{(p,q)}(x_2, x_3, x_4, x_5) \right)$$

podemos escribir

$$(S_{3,W(p,q)}^{[2]}(f))_{2n+1} = Z_3(f_{n-2}, f_{n-1}, f_n, f_{n+1}, f_{n+2}).$$

Utilizando el Lema 5.2

$$|Z_3(x)| \leq \frac{43}{64} \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^5$$

por tanto

$$\|S_{3,W(p,q)}^{[2]}(f)\|_\infty \leq \frac{43}{64} \|f\|_\infty, \quad \forall p.$$

Esta estimación, nos permite concluir que el esquema $S_{3,W(p,q)}$ al menos $C^{\beta-}$ convergente, con $\beta = \min\{-\log_2\left(\frac{43}{64}\right), 1\} = 0,5737$.

■

Lema 5.2. La función $Z_3 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$Z_3(x) = \frac{x_3}{2} - \frac{1}{16} \left(G_{(p,q)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + G_{(p,q)}(x_2, x_3, x_4, x_5) \right)$$

satisface $|Z_3(x)| \leq \frac{43}{64} \|(x)\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^5.$

Demostración

El valor de la función $Z_3(x)$ depende del signo de x_3 y de las cantidades

$$V_1 = G_{(p,q)}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad V_2 = G_{(p,q)}(x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Notar que por el Lema 5.1, denotando, por comodidad, $\sigma = 11/4$

$$-\sigma\|x\|_\infty \leq V_i \leq \sigma\|x\|_\infty$$

podemos escribir

$$\frac{x_3}{2} - \frac{2}{16}\sigma\|x\|_\infty \leq \frac{x_3}{2} - \frac{1}{16}(V_1 + V_2) \leq \frac{x_3}{2} + \frac{2}{16}\sigma\|x\|_\infty$$

Notar, además, que $G_{(p,q)}(-s) = -G_{(p,q)}(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}^4$, por tanto es suficiente con demostrar este resultado para $x_3 > 0$. En este caso podemos escribir

$$\frac{x_3}{2} + \frac{2}{16}\sigma\|x\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{8}\right)\|x\|_\infty, \quad -\frac{\sigma}{8}\|x\|_\infty \leq \frac{x_3}{2} - \frac{2}{16}\sigma\|x\|_\infty$$

por tanto

$$-\frac{\sigma}{8}\|x\|_\infty \leq Z_3(x) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{8}\right)\|x\|_\infty,$$

es decir

$$|Z_3(x)| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{8}\right)\|x\|_\infty \leq \frac{43}{64}\|x\|_\infty$$

■

Estabilidad del esquema $S_{3,W(p,q)}$

Para estudiar la estabilidad de este esquema a través del Jacobiano Generalizado de $S_{3,W(p,q)}^{[2]}$ se necesita desarrollar la teoría que permita calcular un gradiente generalizado de la función $G_{(p,q)}$ en (5.19). Este estudio no se realizará en esta memoria.

Orden de aproximación

Proposición 5.6. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $f = \{g(nh)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Si el esquema $S_{3,W(p,q)}$ es estable entonces el orden de aproximación de $S_{3,W(p,q)}^\infty$ es al menos 4.

Demostración

Los esquemas $S_{3,W(p,q)}$ reproducen polinomios de grado 3. Si el método es estable, por la Proposición 1.5 se deduce directamente este resultado. ■

Proposición 5.7. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $f = \{g(nh)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Si las expresiones $(\mathcal{L}_{3,1} \nabla^2 f)_n$, $(\mathcal{L}_{1,3} \nabla^2 f)_n$ $(\mathcal{L}_{2,2} \nabla^2 f)_n$ tienen el mismo signo $\forall n \in \mathbb{Z}$, entonces,

$$\|S_{3,3}f - S_{3,W(p,q)}f\|_\infty = \mathcal{O}(h^{\min\{2p+2, 3q+2\}}). \quad (5.20)$$

Si además $S_{3,W(p,q)}$ es estable, entonces el orden de aproximación de $S_{3,W(p,q)}^\infty$ es $r = \min\{2p + 2, 3q + 2, 6\}$.

Demostración

Recordamos que

$$S_{3,3} = S_{1,1} - \frac{1}{16} \text{ave}_{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}} \left(\text{ave}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} (\mathcal{L}_{1,3} \circ \nabla^2, \mathcal{L}_{3,1} \circ \nabla^2), \mathcal{L}_{2,2} \circ \nabla^2 \right)$$

$$S_{3,W(p,q)} = S_{1,1} - \frac{1}{16} \text{WH}_{p, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}} \left(\text{H}_q(\mathcal{L}_{1,3} \circ \nabla^2, \mathcal{L}_{3,1} \circ \nabla^2), \mathcal{L}_{2,2} \circ \nabla^2 \right),$$

por tanto

$$\begin{aligned} & (S_{3,3}f)_{2n+1} - (S_{3,W(p,q)}f)_{2n+1} \\ &= \frac{-1}{16} \left(\text{ave}_{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}} \left(\text{ave}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x, z), y \right) - \text{WH}_{p, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}}(\text{H}_q(x, z), y) \right). \end{aligned}$$

Consideramos la función

$$Z(x, y, z) = \text{ave}_{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}}(\text{mean}(x, z), y) - \text{WH}_{p, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}}(\text{H}_q(x, z), y)$$

que se puede escribir como

$$Z(x, y, z) = Z_1(x, y, z) + Z_2(x, y, z)$$

con

$$\begin{aligned} Z_1(x, y, z) &= \text{ave}_{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}}(\text{mean}(x, z), y) - \text{ave}_{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}}(\text{H}_q(x, z), y) \\ &= \frac{3}{8}(\text{mean}(x, z) - \text{H}_q(x, z)) \end{aligned}$$

$$Z_2(x, y, z) = \text{ave}_{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}}(\text{H}_q(x, z), y) - \text{WH}_{p, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}}(\text{H}_q(x, z), y).$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\begin{aligned} x &:= (\mathcal{L}_{3,1}f)_{2n+1} = 3\nabla^2 f_{n-1} - \nabla^2 f_{n-2} \\ y &:= (\mathcal{L}_{2,2}f)_{2n+1} = \nabla^2 f_{n-1} + \nabla^2 f_n \\ z &:= (\mathcal{L}_{1,3}f)_{2n+1} = 3\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n+1}. \end{aligned}$$

Es facil deducir que

$$\begin{aligned} x - z &= 3\nabla^2 f_{n-1} - \nabla^2 f_{n-2} - 3\nabla^2 f_n + \nabla^2 f_{n+1} \\ &= -\nabla^4 f_{n-2} + \nabla^4 f_{n-1} = \nabla^5 f_{n-2} = \mathcal{O}(h^5) \\ x + z &= 3\nabla^2 f_{n-1} - \nabla^2 f_{n-2} + 3\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n+1} = \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Si $xz > 0$, de la definición de H_q deducimos

$$|\text{mean}(x, z) - \text{H}_q(x, z)| \leq \frac{1}{2} \frac{|x - z|^q}{|x + z|^{q-1}}$$

por tanto

$$|Z_1(x, y, z)| \leq \frac{\mathcal{O}(h^{5q})}{\mathcal{O}(h^{2(q-1)})} = \mathcal{O}(h^{3q+2}).$$

Podemos estimar $Z_2(x, y, z)$, observando primeramente que si x, y, z tienen el mismo signo (positivo sin perdida de generalidad)

$$\begin{aligned} \text{H}_q(x, z) - y &= \frac{x + z}{2} \left(1 - \frac{|x - z|^q}{(x + z)^{q-1}}\right) - y \\ &= \frac{x - 2y + z}{2} - \frac{|x - z|^q}{(x + z)^{q-1}} \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -\nabla^2 f_{n-2} + \nabla^2 f_{n-1} + \nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n+1} \\ &= \nabla^3 f_{n-2} - \nabla^3 f_n = \nabla^4 f_{n-2} = \mathcal{O}(h^4), \end{aligned}$$

tenemos que

$$|\mathbf{H}_q(x, z) - y| \leq \mathcal{O}(h^4) - \mathcal{O}(h^{3q+2}) = \mathcal{O}(h^4),$$

puesto que para $q \geq 1$, $\min\{4, 3q + 2\} = 4$. Además,

$$\min\{x, z\} \leq H_q(x, z) \leq \max\{x, z\} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_q(x, z) = \mathcal{O}(h^2)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la definición de la media ponderada $\mathbf{WH}_{p,a,b}$ tenemos que si s e $y > 0$,

$$(as + by) - \mathbf{WH}_{p,a,b}(s, y) = (as + by) \frac{|s - y|^p}{M + \frac{m}{\alpha}(M + \alpha m)^{p-1}} \quad (5.21)$$

con $M = \max\{s, y\}$, $m = \min\{s, y\}$, $\alpha = \max(a, b)/\min(a, b)$. Por tanto, considerando $s = H_q(x, z)$ tenemos que

$$\mathbf{ave}_{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}}(s, y) = \mathcal{O}(h^2)$$

$$M = \min\{s, y\} = \mathcal{O}(h^2), \quad m = \max\{s, y\} = \mathcal{O}(h^2), \quad \alpha = \frac{5}{3}$$

de manera que, utilizando estas estimaciones y (5.21)

$$Z_2(x, y, z) = \mathcal{O}(h^2) \frac{\mathcal{O}(h^{4p})}{h^{2p}} = \mathcal{O}(h^{2p+2}).$$

Por tanto

$$Z(x, y, z) = \mathcal{O}(h^{3q+2}) + \mathcal{O}(h^{2p+2}) = \mathcal{O}(h^{\min\{3q+2, 2p+2\}})$$

y en consecuencia

$$\|S_{3,3}f - S_{3,W(p,q)}f\|_\infty = \mathcal{O}(h^{\min\{3q+2, 2p+2\}}).$$

Notar que

$$\begin{aligned} \|S_{3,W(p,q)}f - f\|_\infty &\leq \|S_{3,W(p,q)}f - S_{3,3}f\|_\infty + \|S_{3,3}f - f\|_\infty \\ &= \mathcal{O}(h^{\min\{3q+2, 2p+2\}}) + \mathcal{O}(h^6) = \mathcal{O}(h^{\min\{2p+2, 3q+2, 6\}}). \end{aligned}$$

por tanto, el orden de aproximación del esquema $S_{3,W(p,q)}$ después de una iteración es $r = \min\{2p+2, 3q+2, 6\}$. Si el esquema es estable, la Proposición 1.4 justifica que el orden de aproximación de $S_{3,W(p,q)}^\infty$ es también $r = \min\{2p+2, 3q+2, 6\}$. ■

5.3

Experimentos Numéricos

En esta sección mostramos algunos experimentos que ilustran las diferencias entre los esquemas $S_{3,W(p,q)}$ para distintos valores de p y q al aplicarlos sobre datos discretos que provienen de funciones suaves y suaves a trozos.

5.3.1

Orden de aproximación

En el caso de funciones suaves, el objetivo es estudiar el orden de aproximación de $S_{3,W(p,q)}^\infty$ y su dependencia con respecto a los parámetros p y q . Para ello, y al igual que en capítulos anteriores calculamos

$$E_S(h) = \|S^\infty f^0 - g\|_{L^\infty([a,b])} \approx \max\{|(S^7 f)_n - g(n2^{-7}h)|, \quad n2^{-7}h \in [a, b]\}$$

para cada uno de los esquemas de subdivisión considerados, en distintas regiones $[a, b]$ y para diferentes valores de h . Asumiendo que $\|S^\infty f^0 - g\|_{L^\infty([a,b])} = \mathcal{O}(h^q)$, el orden de aproximación calcula realizando un ajuste (log-log) por mínimos cuadrados. Los errores se miden considerando $S_{3,W(p,q)}^\infty f^0 \approx S_{3,W(p,q)}^7 f^0$. Notamos que si g es una función suave, entonces $(\mathcal{L}_{3,1} f^0)_{2n+1} \approx 2f''(\xi_n)h^2$, $(\mathcal{L}_{2,2} f^0)_{2n+1} \approx 2f''(\rho_n)h^2$, $(\mathcal{L}_{1,3} f^0)_{2n+1} \approx 2f''(\mu_n)h^2$, por tanto en la zona convexa estas cantidades son positivas (al menos para h suficientemente pequeño).

En el caso de funciones suaves a trozos, el objetivo es mostrar el carácter no-oscilatorio de los esquemas $S_{3,W(p,q)}$ y la influencia de los parámetros p y q .

Ejemplo 1: curva gaussiana

En este apartado realizaremos un estudio numérico del orden de aproximación de los esquemas $S_{3,W(p,q)}$, con el objetivo de ilustrar los resultados obtenidos en la Proposición 5.6. Para ello con-

sideramos $f^0 = \{g(nh)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con $g(x)$ una función gaussiana de media $\mu = 0$ y $\sigma = 0,5$,

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x^2},$$

y las regiones $[-1, -0,3]$ (Figura 5.4-izquierda) donde la función no

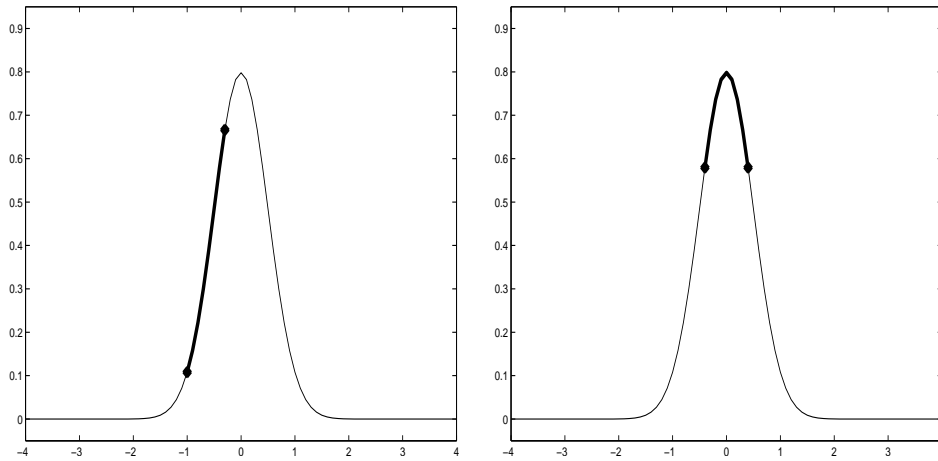


Figura 5.4: (x) Datos iniciales, más marcado la zona donde estudiamos el orden de aproximación, izquierda intervalo $[-1, -0,3]$ y derecha $[-0,4, 0,4]$.

es convexa, y $[-0,4, 0,4]$ (ver Figura 5.4-derecha) donde la función es convexa.

En las Tablas 5.1 y 5.4 se muestran los errores obtenidos para $S_{3,3}$ y $S_{3,W(p,q)}$, $p = 1$, $q = 1, 2, 3, 4$, en el intervalo $[-1, -0,3]$ y $[-0,4, 0,4]$ respectivamente para distintos valores de h . En las Tablas 5.2 y 5.5 se considera el caso $p = 2$ y en las Tablas 5.3 y 5.6 se presentan los resultados correspondientes al caso $p = 3$.

Los resultados muestran que el orden de aproximación es al menos 4 en todos los casos, tal y como se especifica en la Proposición 5.6. En la zona convexa el orden de aproximación r coincide con $\min\{2p+2, 3q+2, 6\}$, para todos los casos estudiados. Este resultado coincide con la estimación teórica obtenida en la Proposición 5.7, válida en el caso en que el esquema sea estable.

h	$E_{3,3}$	$E_{W(1,1)}$	$E_{W(1,2)}$	$E_{W(1,3)}$	$E_{W(1,4)}$
0,1	$2,6e - 6$	$1,0e - 4$	$8,6e - 5$	$8,6e - 5$	$8,6e - 5$
0,05	$4,0e - 8$	$7,3e - 6$	$5,6e - 6$	$5,6e - 6$	$5,6e - 6$
0,025	$6,4e - 10$	$4,6e - 7$	$3,5e - 7$	$3,5e - 7$	$3,5e - 7$
0,0125	$1,3e - 11$	$2,9e - 8$	$2,2e - 8$	$2,2e - 8$	$2,2e - 8$
r	5,86	3,95	3,96	3,96	3,96
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.1: Datos Gaussianos: $p = 1$ ($2p + 2 = 4$), $[a, b] = [-1, -0,3]$.

h	$E_{3,3}$	$E_{W(2,1)}$	$E_{W(2,2)}$	$E_{W(2,3)}$	$E_{W(2,4)}$
0,1	$2,5e - 6$	$1,5e - 5$	$8,9e - 6$	$8,7e - 6$	$8,7e - 6$
0,05	$4,0e - 8$	$5,3e - 7$	$2,1e - 7$	$2,1e - 7$	$2,1e - 7$
0,025	$6,4e - 10$	$1,7e - 8$	$5,7e - 9$	$5,6e - 9$	$5,6e - 9$
0,0125	$1,3e - 11$	$5,3e - 10$	$1,5e - 10$	$1,5e - 10$	$1,5e - 10$
r	5,86	4,95	5,26	5,24	5,24
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.2: Datos Gaussianos: $p = 2$ ($2p + 2 = 6$), $[a, b] = [-1, -0,3]$.

h	$E_{3,3}$	$E_{W(3,1)}$	$E_{W(3,2)}$	$E_{W(3,3)}$	$E_{W(3,4)}$
0,1	$2,5e - 6$	$1,5e - 5$	$3,3e - 6$	$3,0e - 6$	$3,0e - 6$
0,05	$4,0e - 8$	$5,3e - 7$	$5,0e - 8$	$4,6e - 8$	$4,6e - 8$
0,025	$6,4e - 10$	$1,6e - 8$	$7,4e - 10$	$7,0e - 10$	$7,0e - 10$
0,0125	$1,3e - 11$	$5,3e - 10$	$1,1e - 11$	$1,0e - 11$	$1,0e - 11$
r	5,86	4,95	6,07	6,04	6,04
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.3: Datos Gaussianos: $p = 3$ ($2p + 2 = 8$), $[a, b] = [-1, -0,3]$.

h	$E_{3,3}$	$E_{W(1,1)}$	$E_{W(1,2)}$	$E_{W(1,3)}$	$E_{W(1,4)}$
0,1	$3,4e - 6$	$1,7e - 4$	$1,3e - 4$	$1,3e - 4$	$1,3e - 4$
0,05	$5,7e - 8$	$1,1e - 5$	$9,1e - 6$	$9,1e - 6$	$9,1e - 6$
0,025	$9,0e - 10$	$7,5e - 7$	$5,8e - 7$	$5,8e - 7$	$5,8e - 7$
0,0125	$1,4e - 11$	$4,7e - 8$	$3,6e - 8$	$3,6e - 8$	$3,6e - 8$
r	5,95	3,95	3,96	3,96	3,96
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.4: Datos Gaussianos: $p = 1$ ($2p + 2 = 4$), $[a, b] = [-0,4, 0,4]$

h	$E_{3,3}$	$E_{W(2,1)}$	$E_{W(2,2)}$	$E_{W(2,3)}$	$E_{W(2,4)}$
0,1	$3,4e - 6$	$1,7e - 5$	$6,3e - 6$	$6,3e - 6$	$6,3e - 6$
0,05	$5,7e - 8$	$5,4e - 7$	$1,0e - 7$	$1,0e - 7$	$1,0e - 7$
0,025	$9,0e - 10$	$1,7e - 8$	$1,7e - 9$	$1,7e - 9$	$1,7e - 9$
0,0125	$1,4e - 11$	$5,3e - 10$	$2,7e - 11$	$2,7e - 11$	$2,7e - 11$
r	5,95	4,99	5,94	5,94	5,94
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.5: Datos Gaussianos: $p = 2$ ($2p + 2 = 6$), $[a, b] = [-0,4, 0,4]$

h	$E_{3,3}$	$E_{W(3,1)}$	$E_{W(3,2)}$	$E_{W(3,3)}$	$E_{W(3,4)}$
0,1	$3,4e - 6$	$1,6e - 5$	$3,5e - 6$	$3,5e - 6$	$3,5e - 6$
0,05	$5,7e - 8$	$5,3e - 7$	$5,7e - 8$	$5,7e - 8$	$5,7e - 8$
0,025	$9,0e - 10$	$1,6e - 8$	$9,0e - 10$	$9,0e - 10$	$9,0e - 10$
0,0125	$1,4e - 11$	$5,3e - 10$	$1,4e - 11$	$1,4e - 11$	$1,4e - 11$
r	5,95	4,98	5,97	5,97	5,97
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.6: Datos Gaussianos: $p = 3$ ($2p + 2 = 8$), $[a, b] = [-0,4, 0,4]$

Ejemplo 2: tangente

En este apartado realizamos un estudio similar al del apartado anterior para datos $f^0 = \{g(nh)\}_{n \in l_\infty(\mathbb{Z})}$ con $g(x) = \tan(\pi x)$. (ver Figura 5.5)

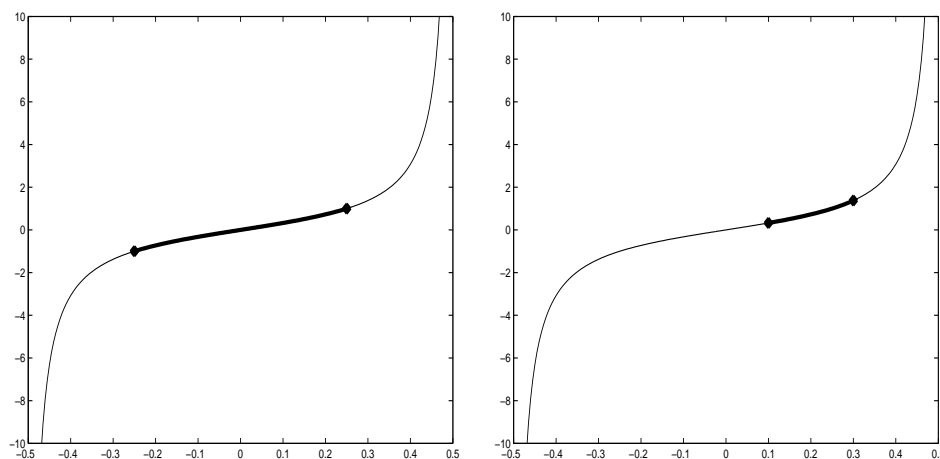


Figura 5.5: (x) Datos iniciales, más marcado la zona donde estudiamos el orden de aproximación, izquierda intervalo $[-0.25, 0.25]$ y derecha intervalo $[0, 0.3]$.

En las Tablas 5.7, 5.8 y 5.9 se muestran los resultados obtenidos para $S_{3,3}$ y $S_{3,W(p,q)}$, $p = 1, 2, 3$ $q = 1, 2, 3, 4$, correspondientes al intervalo $[-0.25, 0.25]$, mientras que en las Tablas 5.10, 5.11 y 5.12 se muestran los resultados correspondientes al intervalo $[0, 0.3]$.

Los resultados de estas tablas son similares a los obtenidos para la curva gaussiana considerada anteriormente.

5.3.2

Carácter No-Oscilatorio

Consideramos de nuevo los siguientes datos, que corresponden a la discretización de una función discontinua, pero suave a trozos, sobre una malla de puntos igualmente espaciados,

$$f^0 = \{f(x_i)\}, \{x_i\} = 0 : \frac{1}{8} : 1, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \leq 0.5 \\ -\sin(\pi x), & x > 0.5 \end{cases} \quad (5.22)$$

h	$E_{3,3}$	$E_{W(1,1)}$	$E_{W(1,2)}$	$E_{W(1,3)}$	$E_{W(1,4)}$
0,05	$2,0e - 4$	$3,8e - 3$	$2,8e - 3$	$2,1e - 3$	$2,0e - 3$
0,025	$3,4e - 6$	$2,0e - 4$	$1,0e - 4$	$1,0e - 4$	$1,0e - 4$
0,0125	$6,0e - 8$	$1,1e - 5$	$6,8e - 6$	$6,8e - 6$	$6,8e - 6$
$6,25e - 3$	$1,0e - 9$	$7,1e - 7$	$4,4e - 7$	$4,4e - 7$	$4,4e - 7$
r	5,87	4,12	4,12	4,06	4,04
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.7: Datos tangente: $p = 1$ ($2p + 2 = 4$), $[a, b] = [-0, 25, 0, 25]$.

h	$E_{3,3}$	$E_{W(2,1)}$	$E_{W(2,2)}$	$E_{W(2,3)}$	$E_{W(2,4)}$
0,05	$2,0e - 4$	$1,3e - 3$	$5,1e - 4$	$5,1e - 4$	$5,1e - 4$
0,025	$3,4e - 6$	$2,1e - 5$	$6,0e - 6$	$6,0e - 6$	$6,0e - 6$
0,0125	$6,0e - 8$	$6,0e - 7$	$9,8e - 8$	$9,8e - 8$	$9,8e - 8$
$6,25e - 3$	$1,0e - 9$	$1,8e - 8$	$1,6e - 9$	$1,6e - 9$	$1,6e - 9$
r	5,87	5,35	6,07	6,07	6,07
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.8: Datos tangente: $p = 2$ ($2p + 2 = 6$), $[a, b] = [-0, 25, 0, 25]$.

h	$E_{3,3}$	$E_{W(3,1)}$	$E_{W(3,2)}$	$E_{W(3,3)}$	$E_{W(3,4)}$
0,05	$2,0e - 4$	$7,7e - 4$	$4,4e - 4$	$2,7e - 4$	$2,3e - 4$
0,025	$3,4e - 6$	$1,8e - 5$	$3,7e - 6$	$3,5e - 6$	$3,5e - 6$
0,0125	$6,0e - 8$	$5,5e - 7$	$6,1e - 8$	$6,0e - 8$	$6,0e - 8$
$6,25e - 3$	$1,0e - 9$	$1,7e - 8$	$1,0e - 9$	$1,0e - 9$	$1,0e - 9$
r	5,87	5,13	6,21	6,00	5,93
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.9: Datos tangente: $p = 3$ ($2p + 2 = 8$), $[a, b] = [-0, 25, 0, 25]$.

h	$E_{3,3}$	$E_{W(1,1)}$	$E_{W(1,2)}$	$E_{W(1,3)}$	$E_{W(1,4)}$
0,025	$1,5e - 3$	$3,3e - 4$	$3,3e - 4$	$3,3e - 4$	$3,2e - 4$
0,0125	$2,7e - 7$	$2,0e - 5$	$2,0e - 5$	$2,0e - 5$	$2,0e - 5$
$6,25e - 3$	$4,7e - 9$	$1,3e - 6$	$1,3e - 6$	$1,3e - 6$	$1,3e - 6$
$3,125e - 3$	$7,7e - 11$	$1,3e - 7$	$8,5e - 8$	$8,5e - 8$	$8,5e - 8$
r	5,88	4,09	3,97	3,97	3,96
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.10: Datos tangente: $p = 1$ ($2p + 2 = 4$), $[a, b] = [0, 1, 0, 3]$.

h	$E_{3,3}$	$E_{W(2,1)}$	$E_{W(2,2)}$	$E_{W(2,3)}$	$E_{W(2,4)}$
0,025	$1,5e - 3$	$9,0e - 5$	$2,8e - 5$	$2,7e - 5$	$2,7e - 5$
0,0125	$2,7e - 7$	$2,3e - 6$	$4,5e - 7$	$4,5e - 7$	$4,5e - 7$
$6,25e - 3$	$4,7e - 9$	$6,9e - 8$	$7,6e - 9$	$7,6e - 9$	$7,6e - 9$
$3,125e - 3$	$7,7e - 11$	$2,1e - 9$	$1,2e - 10$	$1,2e - 10$	$1,2e - 10$
r	5,88	5,11	5,94	5,91	5,91
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.11: Datos tangente: $p = 2$ ($2p + 2 = 6$), $[a, b] = [0, 1, 0, 3]$.

h	$E_{3,3}$	$E_{W(3,1)}$	$E_{W(3,2)}$	$E_{W(3,3)}$	$E_{W(3,4)}$
0,025	$1,5e - 3$	$7,1e - 5$	$1,7e - 5$	$1,6e - 5$	$1,6e - 5$
0,0125	$2,7e - 7$	$2,1e - 6$	$2,8e - 7$	$2,7e - 7$	$2,7e - 7$
$6,25e - 3$	$4,7e - 9$	$6,6e - 8$	$4,7e - 9$	$4,7e - 9$	$4,7e - 9$
$3,125e - 3$	$7,7e - 11$	$2,0e - 9$	$7,7e - 11$	$7,7e - 11$	$7,7e - 11$
r	5,88	5,02	5,93	5,89	5,89
$3q + 2$		5	8	11	14

Tabla 5.12: Datos tangente: $p = 3$ ($2p + 2 = 8$), $[a, b] = [0, 1, 0, 3]$.

En las Figuras 5.6 y 5.7 comparamos el esquema $S_{3,3}$ y los esquemas $S_{3,W(p,q)}$, para $p = 1, q = 1, 2, 3$. En las Figuras 5.8 y 5.9 mostramos los resultados correspondientes al caso $p = 2$ y en las Figuras 5.8 y 5.9 los obtenidos para $p = 3$. En todos los casos se observa un comportamiento no-oscilatorio. Se observa, además, que los parámetros p y q controlan la *tensión* de la reconstrucción.

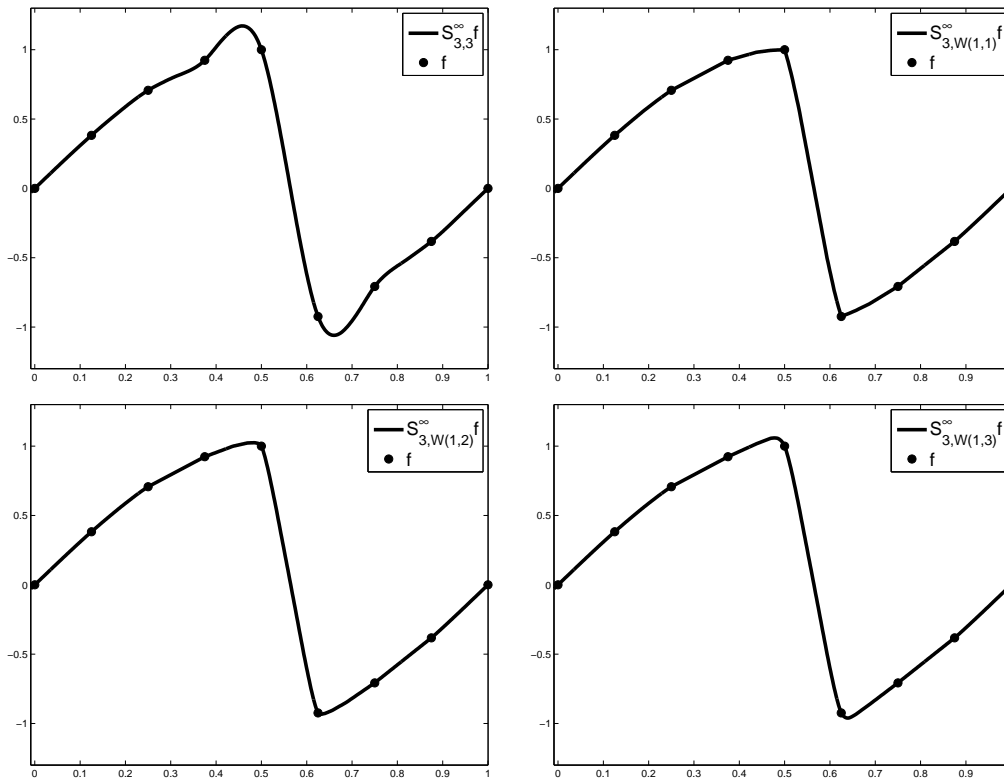


Figura 5.6: (•) Datos iniciales en (5.22). Resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$, $S_{3,W(1,q)}$ para $q = 1, 2, 3$.

Datos Escalera

Por último, consideraremos los siguientes datos, similares a los propuestos en [27] (ver Figura 4.6)

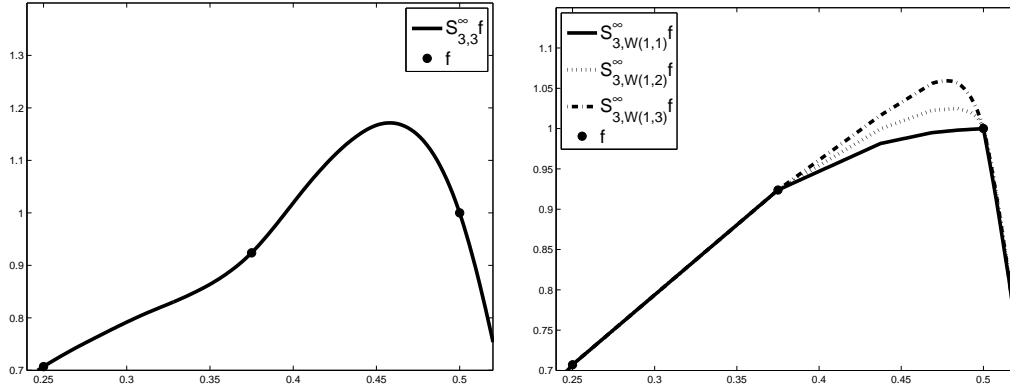


Figura 5.7: (●) Zoom a la izquierda de $x = 0,5$ en la Figura 5.6

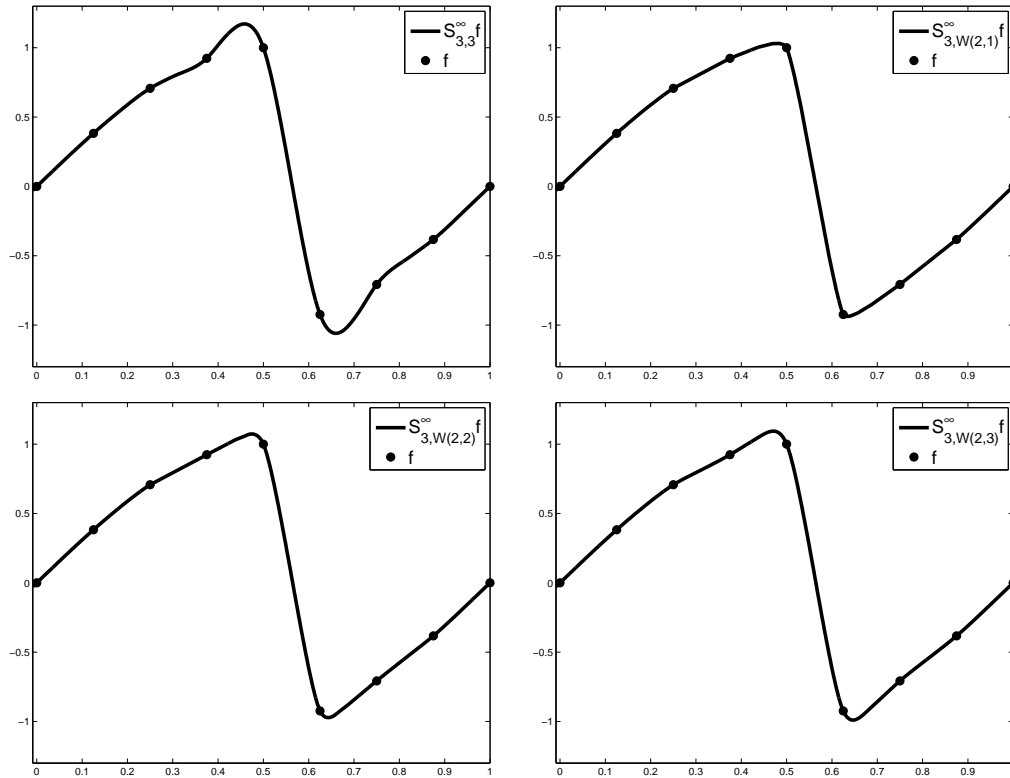


Figura 5.8: (●) Datos iniciales en (5.22). Resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$, $S_{3,W(2,q)}$ para $q = 1, 2, 3$.

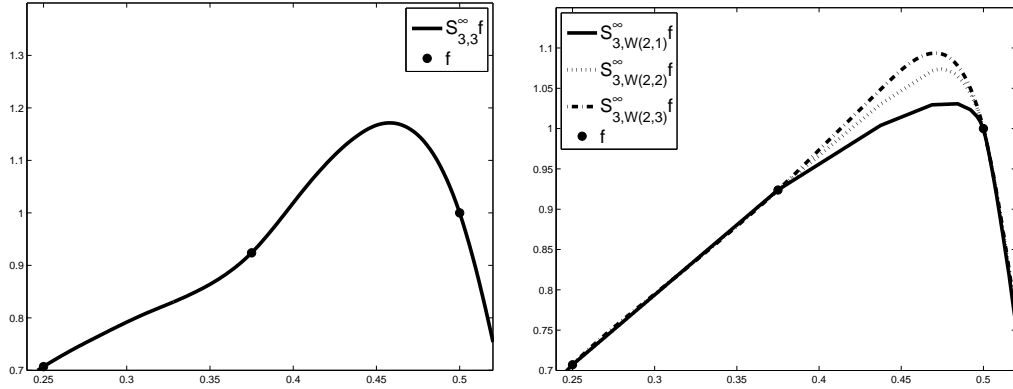


Figura 5.9: (●) Zoom a la izquierda de $x = 0,5$ en la Figura 5.8.

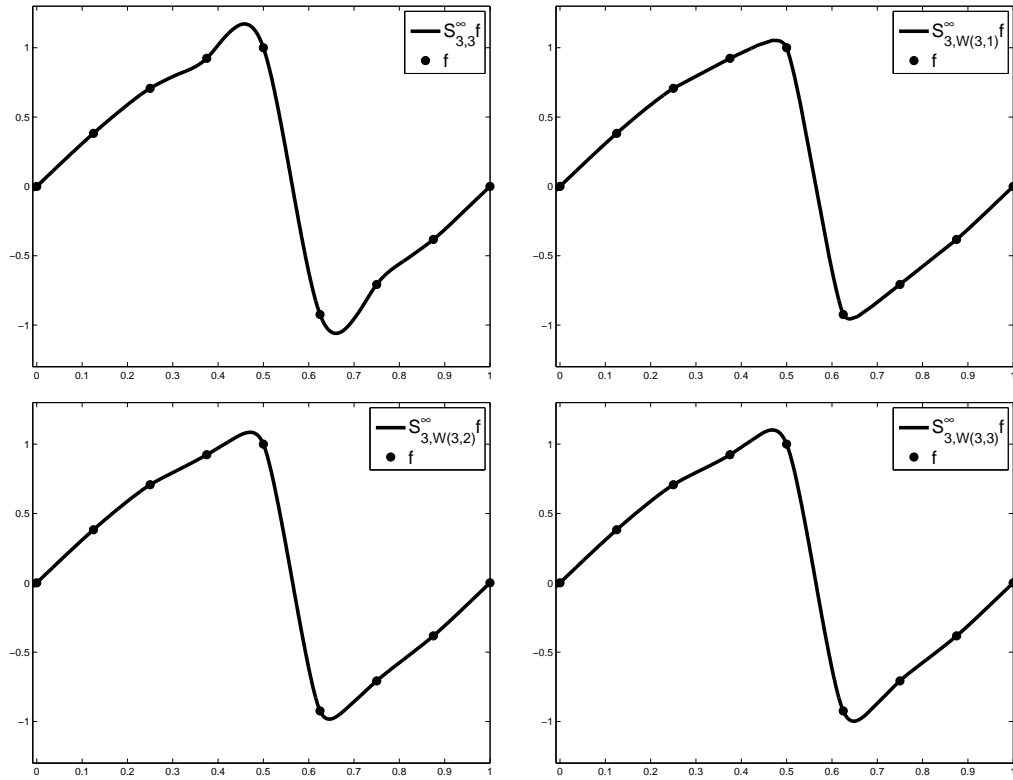


Figura 5.10: (●) Datos iniciales en (5.22). Resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$, $S_{3,W(3,q)}$ para $q = 1, 2, 3$.

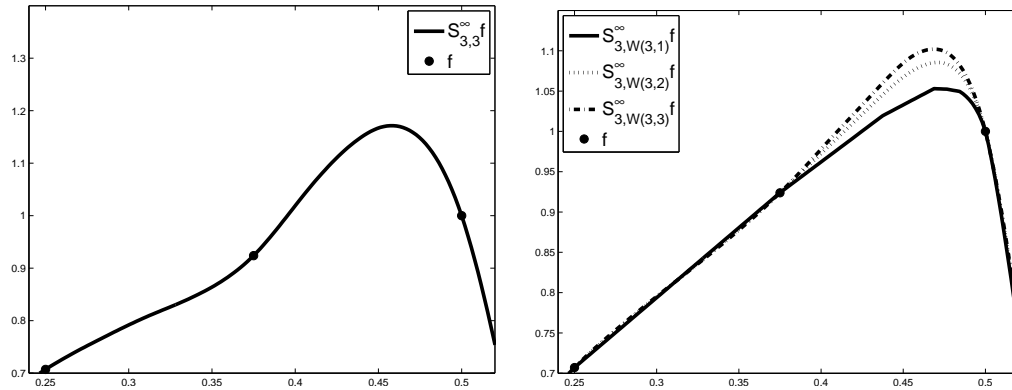


Figura 5.11: (●) Zoom a la izquierda de $x = 0,5$ en la fFigura 5.10.

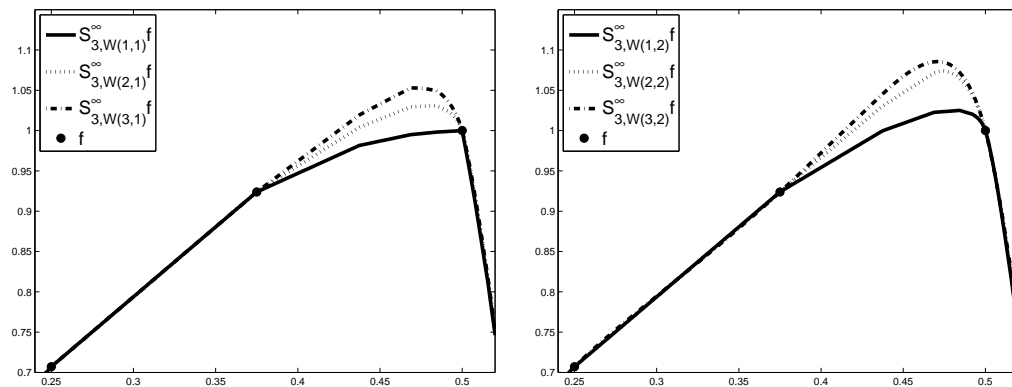


Figura 5.12: Izquierda: zoom con $S_{3,W(p,1)}$. Derecha: : zoom con $S_{3,W(p,2)}$. $p = 1, 2, 3$

$$1 \leq x_i \leq 17 \quad f(x_i) = \begin{cases} 10, & 1 \leq x_i \leq 5 \\ 10, 5, & 6 \leq x_i \leq 9 \\ 15, & x_i = 10 \\ 50, & 11 \leq x_i \leq 14 \\ 60, & x_i = 15 \\ 85, & 16 \leq x_i \leq 17 \end{cases} \quad (5.23)$$

En las Figuras 5.13, 5.14 y 5.15 comparamos como se comportan los esquemas $S_{3,3}$ y $S_{3,W(p,q)}$ con $p = 1, 2, 3$ y $q = 1, 2, 3$ para los datos crecientes presentados en (5.23). Los esquemas no lineales $S_{3,W(p,q)}$ son no-oscilatorios y no presentan diferentes sustanciales para las distintas p, q .

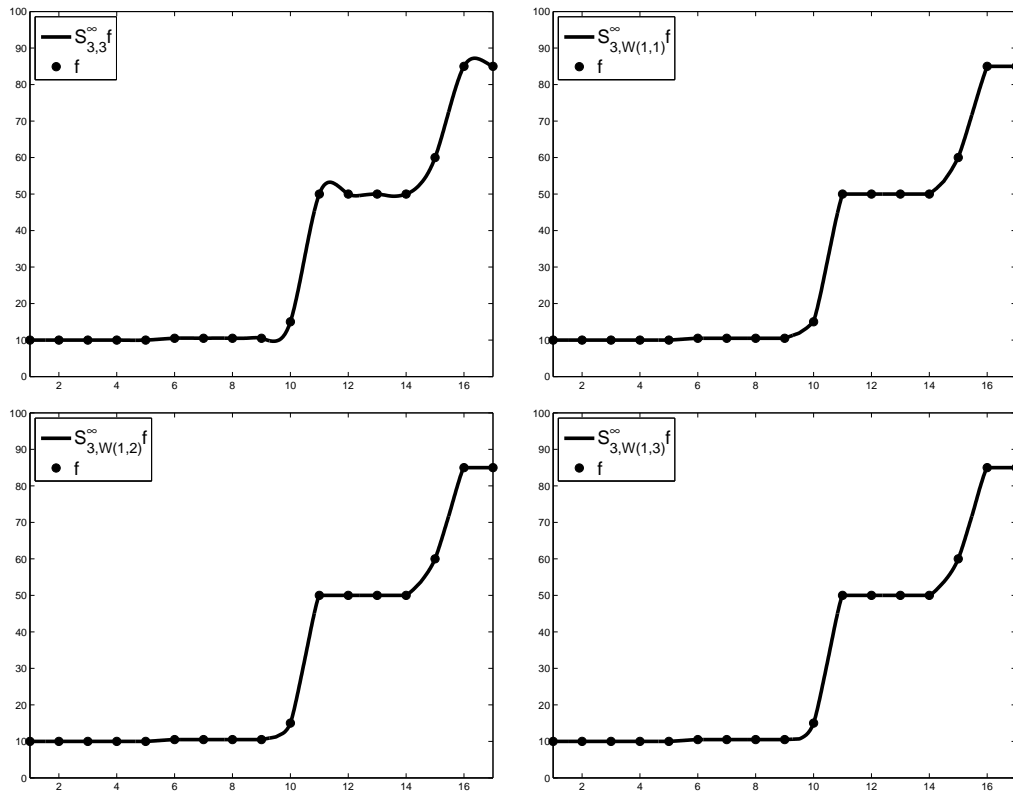


Figura 5.13: (●) Datos iniciales crecientes, resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$, $S_{3,W(1,q)}$ para $q = 1, 2, 3$.

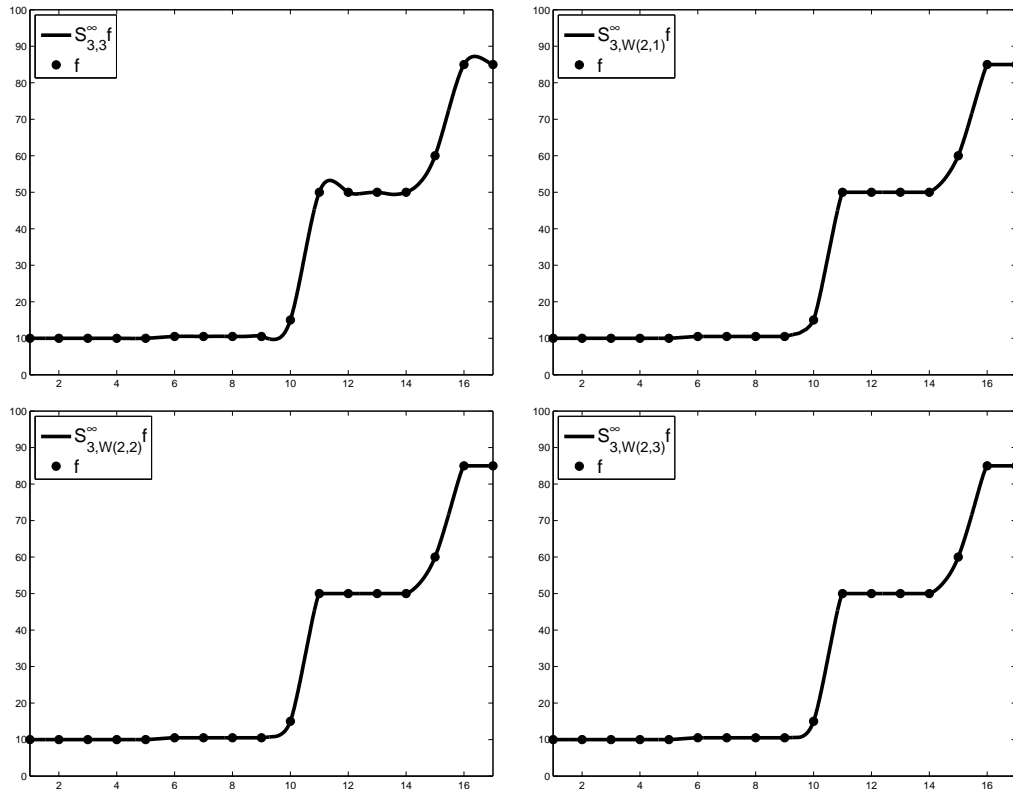


Figura 5.14: (●) Datos iniciales crecientes, resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$, $S_{3,W(2,q)}$ para $q = 1, 2, 3$.

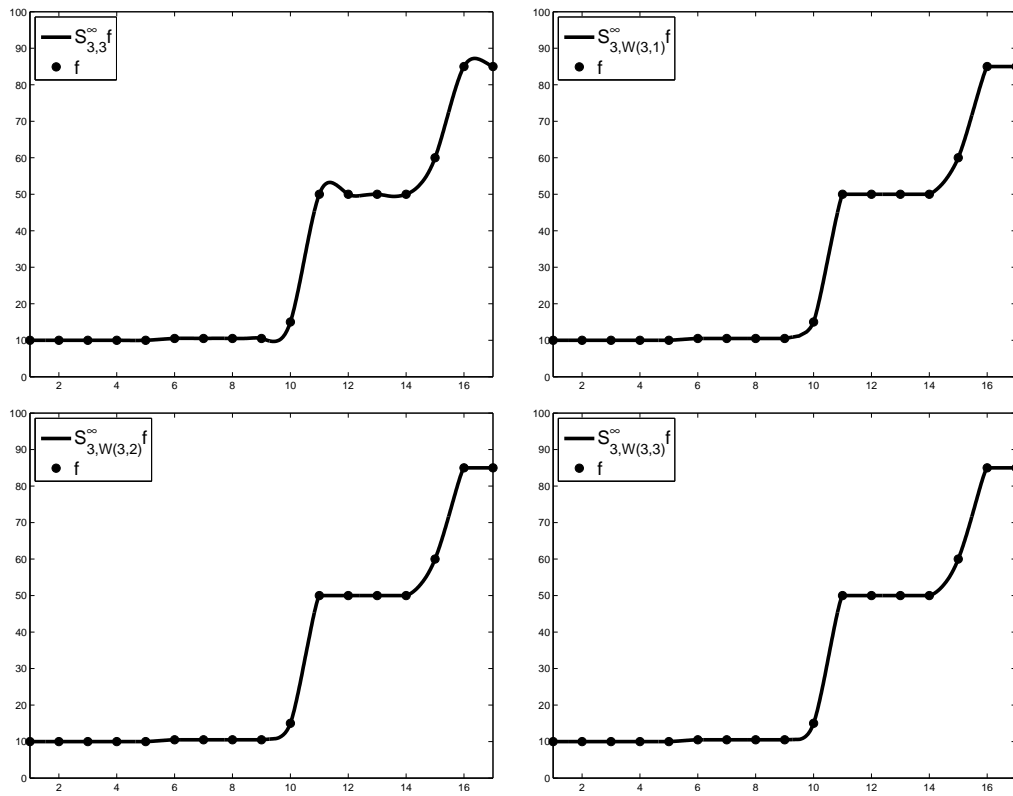


Figura 5.15: (●) Datos iniciales crecientes, resultados después de 7 aplicaciones de los esquemas $S_{2,2}$, $S_{3,W(3,q)}$ para $q = 1, 2, 3$.

6

Esquemas WH de 4 puntos

La media armónica ponderada $WH_{p,a,b}$ se puede utilizar para definir una familia de esquemas de cuatro puntos que generalizan a los esquemas S_{H_p} . En efecto, si definimos

$$\begin{cases} (S_{WH_{p,a,b}}f)_{2n} = f_n, \\ (S_{WH_{p,a,b}}f)_{2n+1} = \frac{1}{2}(f_n + f_{n+1}) - \frac{1}{8}WH_{p,a,b}(\nabla^2 f_n, \nabla^2 f_{n+1}) \end{cases} \quad (6.1)$$

se cumple que $S_{WH_{p,1/2,1/2}} = S_{H_p}$. En [11] se definieron estos esquemas, considerando la introducción y utilización de la media ponderada $WH_{p,a,b}(x, y)$ como un paso intermedio hacia el diseño de versiones no lineales del esquema lineal de 6 puntos $S_{3,3}$.

Es evidente que los esquemas $S_{WH_{p,a,b}}$ se pueden escribir en la forma general (1.25),

$$(S_{WH_{p,a,b}}f) = (S_{1,1}f) + \mathcal{F}(\nabla^2 f), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in l_\infty(\mathbb{Z}). \quad (6.2)$$

$$\mathcal{F} : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}) \quad \begin{cases} (\mathcal{F}(f))_{2n} & = 0 \\ (\mathcal{F}(f))_{2n+1} & = -\frac{1}{8} \text{WH}_{p,a,b}(f_n, f_{n+1}). \end{cases} \quad (6.3)$$

En [11] se llevó a cabo el estudio de la convergencia y la estabilidad de estos esquemas comprobando las hipótesis de los Teoremas 1.4 y 1.5. En ese trabajo se puso de manifiesto la conveniencia de contar con técnicas avanzadas que permitiesen llevar a cabo el estudio de la convergencia y la estabilidad de esquemas basados en funciones Lipschitz y suaves por sectores.

En este capítulo veremos, en primer lugar, que los esquemas $S_{\text{WH}_{p,a,b}}$ definidos en (6.1) son 2-OSI. Veremos además que la función $\text{WH}_{p,a,b}(x, y) \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$, y esto nos permitirá utilizar las técnicas desarrolladas en esta memoria para revisar los resultados de convergencia y estabilidad establecidos en [11] utilizando, como en capítulos anteriores, los Teoremas 1.6 y 2.4.

6.1

Propiedades de los esquemas WH de 4 puntos

Es sencillo comprobar que los esquemas $\text{WH}_{p,a,b}$ reproducen polinomios de grado menor o igual a 2. Al igual que en el caso de los esquemas S_{H_p} , garantizamos la existencia de esquemas diferencia comprobando que se trata de, además, de esquemas 2-OSI.

Proposición 6.1. *El esquema $S_{\text{WH}_{p,a,b}}$ reproduce Π_2 de manera exacta*

Demostración

Si $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ y $p = P|_{\mathbb{Z}}$, entonces $(\nabla^2 p)_n = 2A$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, por la ecuación (6.1):

$$\begin{aligned} (S_{WP_{p,a,b}})_{2n+1} &= (S_{1,1}p)_{2n+1} - \frac{1}{8}\text{WH}_{p,a,b}(2A, 2A) \\ &= (S_{1,1}p)_{2n+1} - \frac{1}{8}(a2A + b2A) = (S_{2,2}p)_{2n+1} = P\left(n + \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

el resultado se sigue de que $S_{2,2}$ reproduce Π_3 . ■

Proposición 6.2. *Los esquemas $\text{WH}_{p,a,b}$ son 2-OSI.*

Demostración

Si $P(x) \in \mathbb{P}_2$ y $p = P|_{\mathbb{Z}}$, entonces $\nabla^2 p \equiv 0$. Así,

$$\begin{aligned} (S_{\text{WH}_{p,a,b}}(f+p))_{2n+1} &= (S_{1,1}(f+p))_{2n+1} - \frac{1}{8}\text{WH}_{p,a,b}(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n) \\ &= (S_{\text{WH}_{p,a,b}}f)_{2n+1} + (S_{1,1}p|_{\mathbb{Z}})_{2n+1} \\ &= (S_{\text{WH}_{p,a,b}}f)_{2n+1} + P(n+1/2), \end{aligned}$$

el resultado se sigue de que $S_{1,1}$ es lineal y reproduce polinomios de grado 1 de manera exacta. ■

Los esquemas diferencia

Los esquemas $\text{WH}_{p,a,b}$, son 2-OSI, al igual que los esquemas Power_p , y ello implica la existencia de los esquemas diferencia $S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[1]}$ y $S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[2]}$, que se pueden calcular de la manera habitual,

$$\begin{aligned} (\nabla S_{\text{WH}_{p,a,b}}f)_{2n} &:= (S_{\text{WH}_{p,a,b}}f)_{2n+1} - (S_{\text{WH}_{p,a,b}}f)_{2n} \\ &= \frac{\nabla f_n}{2} - \frac{1}{8}\text{WH}_{p,a,b}(\nabla f_n - \nabla f_{n-1}, \nabla f_{n+1} - \nabla f_n), \\ (\nabla S_{\text{WH}_{p,a,b}}f)_{2n+1} &:= (S_{\text{WH}_{p,a,b}}f)_{2n+2} - (S_{\text{WH}_{p,a,b}}f)_{2n+1} \\ &= \frac{\nabla f_n}{2} + \frac{1}{8}\text{WH}_{p,a,b}(\nabla f_n - \nabla f_{n-1}, \nabla f_{n+1} - \nabla f_n), \end{aligned}$$

por tanto, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[1]} w)_{2n} = \frac{w_n}{2} - \frac{1}{8} \text{WH}_{p,a,b}(w_n - w_{n-1}, w_{n+1} - w_n), \\ (S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[1]} w)_{2n+1} = \frac{w_n}{2} + \frac{1}{8} \text{WH}_{p,a,b}(w_n - w_{n-1}, w_{n+1} - w_n), \end{cases}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 S_{\text{WH}_{p,a,b}} f)_{2n} &:= (S_{\text{WH}_{p,a,b}} f)_{2n+2} - 2(S_{\text{WH}_{p,a,b}} f)_{2n+1} + (S_{\text{WH}_{p,a,b}} f)_{2n} \\ &= \frac{1}{4} \text{WH}_{p,a,b}(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n), \\ (\nabla^2 S_{\text{WH}_{p,a,b}} f)_{2n+1} &:= (S_{\text{WH}_{p,a,b}} f)_{2n+3} - 2(S_{\text{WH}_{p,a,b}} f)_{2n+2} + (S_{\text{WH}_{p,a,b}} f)_{2n+1} \\ &= \frac{\nabla^2 f_n}{2} - \frac{1}{8} (\text{WH}_{p,a,b}(\nabla^2 f_{n-1}, \nabla^2 f_n) + \text{WH}_{p,a,b}(\nabla^2 f_n, \nabla^2 f_{n+1})). \end{aligned}$$

Así, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[2]} w)_{2n} = \frac{1}{4} \text{WH}_{p,a,b}(w_{n-1}, w_n), \\ (S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[2]} w)_{2n+1} = \frac{w_n}{2} - \frac{1}{8} (\text{WH}_{p,a,b}(w_{n-1}, w_n) + \text{WH}_{p,a,b}(w_n, w_{n+1})), \end{cases}$$

Convergencia

La teoría presentada en el Capítulo 1 permite estudiar la convergencia de los esquemas $S_{\text{WH}_{p,a,b}}$ utilizando el Teorema 1.6 con $k = 2$.

Teorema 6.1. *Para todo $p \geq 1$, el esquema de subdivisión $S_{\text{WH}_{p,a,b}}$ es uniformemente convergente, y para toda secuencia inicial la función límite pertenece a C^{1-} .*

Demostración

La Función \mathcal{F} en (6.3) se puede acotar uniformemente utilizando la Proposición 5.3-C1. En efecto, $\forall d \in l_\infty(\mathbb{Z}) \forall n \in \mathbb{Z}$,

$$|(F(d))_{2n+1}| \leq \frac{1}{8} \max\{|d_{n-1}|, |d_n|\}, \quad \forall n \quad \rightarrow \quad \|F(d)\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|d\|_\infty.$$

por tanto se cumple (1.36) con $M = 1/8$.

Para comprobar (1.37), se considera separadamente los casos de índices pares e impares. De la Proposición 5.3-C1 se obtiene

$$|(S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[2]} w)_{2n}| \leq \frac{1}{4} \|w\|_\infty. \quad (6.4)$$

Para acotar las componentes impares, observamos que

$$(S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[2]} w)_{2n+1} = Z_p(w_{n-1}, w_n, w_{n+1}),$$

con

$$Z_p(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{2} - \frac{1}{8}(\text{WH}_{p,a,b}(x_1, x_2) + \text{WH}_{p,a,b}(x_2, x_3)).$$

Es fácil ver que

$$|Z_p(x_1, x_2, x_3)| \leq \frac{1}{2} \|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty, \quad (6.5)$$

por tanto

$$|(S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[2]} w)_{2n+1}| \leq \frac{1}{2} \|w\|_\infty. \quad (6.6)$$

Así, (6.4) y (6.6) conducen a

$$\|S_{\text{WH}_{p,a,b}}^{[2]} w\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|w\|_\infty,$$

y esta estimación permite concluir, por el Teorema 1.6 que el esquema $S_{\text{WH}_{p,a,b}}$ es al menos C^{1-} -convergente.

Para comprobar (6.5), procedemos del siguiente modo. Dado que $Z_p(x, y, z) = -Z_p(-x, -y, -z)$, es suficiente considerar el caso $y \geq 0$. En este caso, $\text{WH}_{p,a,b}(x, y) \geq 0$, $\text{WH}_{p,a,b}(y, z) \geq 0$ y tenemos (Proposición 5.3-C1)

$$\frac{y}{2} - \frac{1}{8} \|(x, y, z)\|_\infty - \frac{1}{8} \|(x, y, z)\|_\infty \leq Z_p(x, y, z) \leq \frac{y}{2} \leq \frac{\|(x, y, z)\|_\infty}{2}.$$

Por otro lado, dado que $y > 0$

$$-\frac{\|(x, y, z)\|_\infty}{4} \leq \frac{y}{2} - \frac{2}{8} \|(x, y, z)\|_\infty,$$

y tenemos

$$-\frac{\|(x, y, z)\|_\infty}{4} \leq Z_p(x, y, z) \leq \frac{\|(x, y, z)\|_\infty}{2},$$

lo cual prueba el resultado. ■

6.1.1

Gradientes Generalizados

Las funciones $WH_{p,a,b}(x, y)$ son bastante más complicadas que las correspondientes funciones $H_p(x, y)$ cuando $p \geq 3$. Por ello, estudiaremos solamente la suavidad por sectores y los gradientes generalizados para los casos $p = 1, 2$.

El gradiente generalizado $DWH_{1,a,b}$

La función

$$WH_{1,a,b}(x, y) = \operatorname{sgn}(x, y)|ax + by| \left(1 - \frac{|x - y|}{M + \frac{m}{\alpha}} \right) \quad (6.7)$$

con $M = \max\{|x|, |y|\}$, $m = \min\{|x|, |y|\}$ y $\alpha = \max\{a, b\}/\min\{a, b\}$ es suave en cada uno de los sectores de la partición por sectores asociada a los hiperplanos de separación $\mathcal{H}_2 = \{x = 0\}$, $\mathcal{H}_1 = \{y = 0\}$ $\mathcal{H}_3 = \{x = y\}$ (ver Figura 3.1).

En esta sección comprobaremos que $WH_{1,a,b} \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ y satisface todas las propiedades que garantizan la existencia de un gradiente generalizado, que se puede calcular a partir de los gradientes de la función en zonas de suavidad.

Proposición 6.3. *La función de la Definición 5.1 con $p = 1$ $WH_{1,a,b} \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$ y satisface la Propiedad de Compatibilidad, Definición 2.5, sobre su partición asociada. Además $\forall \Omega$ sector en esta partición*

$$\sup_{(x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}} \|\nabla WH_{1,a,b}|_{\overset{\circ}{\Omega}}(x, y)\|_1 \leq 1 + 2(c - d), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

con $c = \max\{a, b\}$ y $d = \min\{a, b\}$.

Demostración

$\text{WH}_{1,a,b}(x, y)$ es continua $\forall(x, y) \neq (0, 0)$. Además, por la propiedad **C1**-Proposición 5.3,

$$|\text{WH}_{1,a,b}(x, y) - \text{WH}_{1,a,b}(0, 0)| = |\text{WH}_{1,a,b}(x, y)| \leq |ax + by|, \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

por lo que la función es continua también en el origen de coordenadas, es decir, $\text{WH}_{1,a,b} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$.

Estudiamos a continuación las propiedades de diferenciabilidad de $\text{WH}_{1,a,b}(x, y)$ en cada uno de los sectores de la partición de la Figura 6.1. Por simplicidad de notación definimos

$$\Omega_{ij} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j - \{0\}, \quad \text{cuando } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \{0\}$$

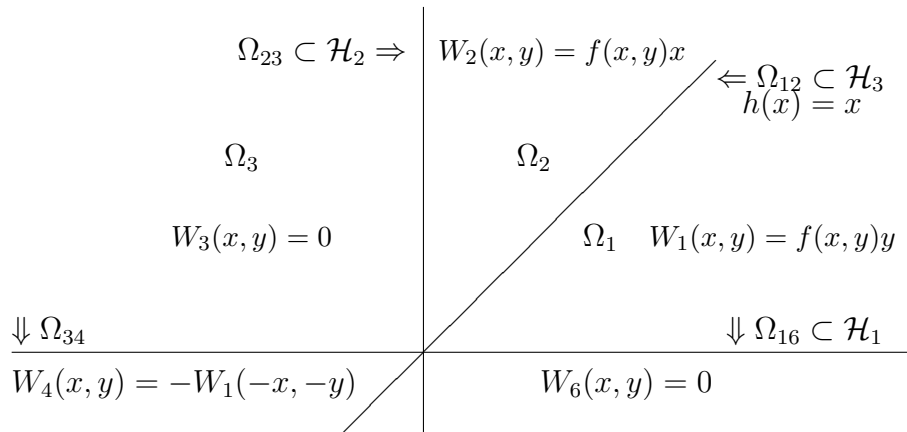


Figura 6.1: Partición por sectores para $\text{WH}_{1,a,b}(x, y)$ con $f(x, y) = \frac{ax+by}{cM+dm}$ en el semiplano $y \geq 0$.

Dado que $\text{WH}_{1,a,b}(-x, -y) = \text{WH}_{1,a,b}(x, y)$, es suficiente estudiar la función en el semiplano $y \geq 0$, representado en la Figura 6.1.

En toda la descripción que daremos a continuación utilizamos la siguiente notación:

$$\text{WH}_{1,a,b}(x, y) = \text{sgn}(x, y)f(x, y)m,$$

con

$$f(x, y) = \frac{ax + by}{cM + dm}.$$

Sector Ω_1 : $(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1 \leftrightarrow 0 < y < x$,

$$W_1(x, y) := \mathbf{WH}_{1,a,b}|_{\Omega_1}(x, y) = f(x, y)y, \quad f(x, y) := \frac{ax + by}{cx + dy}.$$

Por tanto, $\forall (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1$

$$\partial_x W_1(x, y) = f_x(x, y)y \quad \partial_y W_1(x, y) = f_y(x, y) \cdot y + f(x, y).$$

Se pueden dar entonces los siguientes casos:

1. Si $a = c$ entonces $f(x, y) \equiv 1$ y $f_x(x, y) \equiv 0 \equiv f_y(x, y)$. Por tanto

$$\partial_x W_1(x, y) = 0 \quad \partial_y W_1(x, y) = f(x, y) = 1.$$

2. Si $a = d$ entonces

$$f(x, y) = \frac{dx + cy}{cx + dy} \rightarrow \begin{cases} f_x(x, y) = (d^2 - c^2) \frac{y}{(cx + dy)^2}, \\ f_y(x, y) = (c^2 - d^2) \frac{x}{(cx + dy)^2}. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $d^2 - c^2 = (d - c)(d + c) = d - c$

$$\partial_x W_1(x, y) = (d - c) \frac{y^2}{(cx + dy)^2} \leq 0,$$

$$\partial_y W_1(x, y) = (c - d) \frac{xy}{(cx + dy)^2} + f(x, y) \geq 0.$$

Por tanto, $\forall (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1$ podemos escribir

$$\nabla W_1(x, y) = \begin{cases} (0, 1) & a \geq b \\ \frac{(c - d)}{(cx + dy)^2} (y^2, xy) + (0, f(x, y)) & a < b \end{cases} \quad (6.8)$$

Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow d} \nabla W_1(x, y)$ para cada $0 \neq d \in \mathcal{H}_k$, $k = 1, 3$, los hiperplanos que forman la frontera del sector Ω_1 , y

$$\lim_{\substack{0 < y < x \\ y \rightarrow 0}} \nabla W_1(x, y) = \begin{cases} (0, 1) & a \geq b \\ (0, 1/\alpha) & a < b \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\lim_{\substack{0 < y \leq x \\ y \rightarrow x}} \nabla W_1(x, y) = \begin{cases} (0, 1) & a \geq b \\ (d - c, c - d + 1) & a < b \end{cases} \quad (6.10)$$

Por último, veamos que las derivadas están acotadas si $d = a < b$. En efecto,

$$\frac{y^2}{(cx + dy)^2} = \frac{1}{\left(c\frac{x}{y} + d\right)^2} \leq \frac{1}{(c + d)^2} = 1 \rightarrow d - c \leq \partial_x W_1(x, y) \leq 0.$$

ya que $x/y > 1$ en $\overset{\circ}{\Omega}_1$. Por otra parte,

$$\frac{xy}{(cx + dy)^2} = \frac{y/x}{(c + dy/x)^2} = \frac{t}{(c + dt)^2}, \quad t := y/x.$$

Como $(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1 \leftrightarrow t \in (0, 1)$ y se cumple que

$$\sup_{(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1} \frac{xy}{(cx + dy)^2} = \sup_{t \in (0, 1)} \frac{t}{(c + dt)^2}.$$

Si $a, b > 0$, $a + b = 1$, la función $q(t) := \frac{t}{(c + dt)^2} \in C^1([0, 1])$, y satisface

$$q(0) = 0, \quad q(1) = 1, \quad q'(t) = \frac{c - dt}{(c + dt)^3} > 0 \quad \forall t \in (0, 1),$$

por tanto es creciente y $\sup_{t \in (0, 1)} q(t) = q(1) = 1$. Así, puesto que $0 \leq f(x, y) \leq 1$ tenemos

$$0 \leq \partial_y W_1(x, y) \leq (c - d) + 1.$$

Las cotas obtenidas permiten afirmar que

$$\sup_{(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1} \|DW_1(x, y)\|_1 \leq 1 + 2(c - d). \quad (6.11)$$

Así, $W_1(x, y) \in C^1(\overset{\circ}{\Omega}_1)$, $\nabla W_1(x, y)$ está uniformemente acotado en $\overset{\circ}{\Omega}_1$ y se cumple la primera propiedad de la Definición 2.5 en la frontera del sector Ω_1 .

Sector Ω_2 : $(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2 \leftrightarrow 0 < x < y$,

$$W_2(x, y) := \text{WH}_{1,a,b}|_{\Omega_2}(x, y) = f(x, y)x, \quad f(x, y) := \frac{ax + by}{cy + dx}.$$

Por tanto, $\forall (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2$

$$\partial_x W_2(x, y) = f_x(x, y) \cdot x + f(x, y) \quad \partial_y W_2(x, y) = f_y(x, y)x.$$

Así

$$\partial_x W_2(x, y) = f_x(x, y)x + f(x, y) \quad \partial_y W_2(x, y) = f_y(x, y) \cdot x.$$

Se pueden dar entonces los siguientes casos:

1. Si $a = c$ entonces

$$f(x, y) = \frac{cx + dy}{cy + dx} \rightarrow \begin{cases} f_x(x, y) = (c - d) \frac{y}{(cy + dx)^2}, \\ f_y(x, y) = (d - c) \frac{x}{(cy + dx)^2}. \end{cases}$$

En este caso

$$\partial_x W_2(x, y) = (c - d) \frac{xy}{(cy + dx)^2} + f(x, y) \geq 0,$$

$$\partial_y W_2(x, y) = (d - c) \frac{x^2}{(cy + dx)^2} \leq 0.$$

2. Si $a = d$ entonces $f(x, y) \equiv 1$ y $f_x(x, y) \equiv 0 \equiv f_y(x, y)$. Por tanto

$$\partial_x W_1(x, y) = f(x, y) = 1 \quad \partial_y W_1(x, y) = 0.$$

Así, $\forall (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2$ podemos escribir

$$\nabla W_2(x, y) = \begin{cases} \frac{(c - d)}{(cy + dx)^2} (xy, -x^2) + (f(x, y), 0) \\ (1, 0) \end{cases} \quad a < b \quad (6.12)$$

En la frontera del sector Ω_2 tenemos que

$$\lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_2(x, y) = \begin{cases} (\frac{1}{\alpha}, 0) & a \geq b \\ (1, 0) & a < b \end{cases} \quad (6.13)$$

$$\lim_{\substack{0 < x < y \\ y \rightarrow x}} \nabla W_2(x, y) = \begin{cases} (c - d + 1, d - c) & a \geq b \\ (1, 0) & a < b \end{cases} \quad (6.14)$$

Por último, veamos que las derivadas están acotadas si $a \geq b$.
En efecto

$$\frac{x^2}{(cy + dx)^2} = \frac{1}{(c\frac{y}{x} + d)^2} \leq \frac{1}{(c + d)^2} \rightarrow d - c \leq \partial_y W_2(x, y) \leq 0,$$

ya que $y/x > 1$ en $\overset{\circ}{\Omega}_2$. Por otra parte

$$\frac{xy}{(cy + dx)^2} = \frac{\frac{x}{y}}{(c + d\frac{x}{y})^2} = \frac{t}{(c + dt)^2}, \quad t := \frac{y}{x}.$$

Como $(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2 \leftrightarrow t \in (0, 1)$ y cumple

$$\sup_{(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2} \frac{xy}{(cy + dx)^2} = \sup_{t \in (0, 1)} \frac{t}{(c + dt)^2}.$$

Si $a, b > 0$, $a + b = 1$, la función $q(t) := \frac{t}{(c + dt)^2} \in C^1([0, 1])$, y satisface

$$q(0) = 0, \quad q(1) = 1, \quad q'(t) = \frac{c - dt}{(c + dt)^2} > 0 \quad t \in (0, 1)$$

por tanto es creciente y $\sup_{t \in (0, 1)} q(t) = q(1) = 1$. Así, puesto que $0 \leq f(x, y) \leq 1$ tenemos

$$0 \leq \partial_x W_2(x, y) \leq (c - d) + 1.$$

Las cotas obtenidas permiten afirmar que

$$\sup_{(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2} \|\nabla W_2(x, y)\|_1 \leq 1 + 2(c - d). \quad (6.15)$$

Así, $W_2(x, y) \in C^1(\overset{\circ}{\Omega}_2)$, $\nabla W_2(x, y)$ está uniformemente acotado en $\overset{\circ}{\Omega}_2$ y se cumple la primera propiedad de la Definición 2.5 en la frontera del sector Ω_2 .

Puesto que $W_3(x, y) \equiv 0$, todas las restricciones de la función $\text{WH}_{1,a,b}(x, y)$ a los sectores del semiplano $y \geq 0$ son funciones suaves por sectores (Definición 2.3) satisfacen la propiedad 1 de la Definición 2.5 y verifican (3.6).

Las restricciones a los hiperplanos de separación de la partición 'natural' asociada

$$\psi^{\mathcal{H}_1} = \psi^{\mathcal{H}_2} = 0, \quad \psi^{\mathcal{H}_3}(x) = x = \text{WH}_{1,a,b}(x, x)$$

son diferenciables, por tanto $\text{WH}_{1,a,b}(x, y) \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$.

Comprobaremos ahora que la condición de compatibilidad, Definición 2.5-propiedad 2, se verifica $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}$, para cada uno de los hiperplanos de separación de la partición de la Figura 6.1.

1. $\mathcal{H}_1 = \langle \vec{v} \rangle$, con $\vec{v} = (1, 0)^T$. Puesto que $W_6 \equiv 0 \forall x > 0$,

$$\lim_{0 > y \rightarrow 0} \nabla W_6(x, y) \cdot \vec{v} = 0 \cdot (1, 0) = 0 = D_{\vec{v}} \text{WH}_{1,a,b}(x, 0),$$

$$\lim_{\substack{0 < y < x \\ y \rightarrow 0}} \nabla W_1 \cdot \vec{v} = \begin{cases} (0, 1) \cdot (1, 0) = 0, & a = c \\ (0, \frac{1}{\alpha}) \cdot (1, 0) = 0, & a = d \end{cases},$$

por tanto $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}_1$,

$$\lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1} \nabla W_1 \cdot \vec{v} = \lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_6} \nabla W_6 \cdot \vec{v} = 0 = D_{\vec{v}} \text{WH}_{1,a,b}(x, 0).$$

La compatibilidad sobre Ω_{34} se comprueba de manera similar.

2. $\mathcal{H}_2 = \langle \vec{w} \rangle$, con $\vec{w} = (0, 1)^T$. Puesto que $W_3 \equiv 0 \forall y > 0$

$$\lim_{0 > x \rightarrow 0} \nabla W_3 \cdot \vec{w} = 0 \cdot (0, 1) = 0,$$

$$\lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_2 \cdot \vec{w} = \begin{cases} (\frac{1}{\alpha}, 0) \cdot (0, 1) = 0, & a = c \\ (1, 0) \cdot (0, 1) = 0, & a = d \end{cases}$$

por tanto $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}_2$,

$$\lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2} \nabla W_2 \cdot \vec{w} = \lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_3} \nabla W_3 \cdot \vec{w} = 0 = D_{\vec{w}} \text{WH}_{1,a,b}(0, y).$$

La compatibilidad sobre Ω_{56} se comprueba de manera similar.

3. $\mathcal{H}_3 = \langle \vec{u} \rangle$, con $\vec{u} = (1, 1)^T$.

Si $a = c$

$$\lim_{\substack{0 < y < x \\ y \rightarrow x}} \nabla W_1 \cdot \vec{u} = \begin{cases} (0, 1) \cdot (1, 1) = 1, & a = c \\ (d - c, c - d + 1) \cdot (1, 1) = 1, & a = d \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow y}} \nabla W_2 \cdot \vec{u} = \begin{cases} (c - d + 1, d - c) \cdot (1, 1) = 1, & a = c \\ (1, 0) \cdot (1, 1) = 1, & a = d \end{cases}$$

Como $\text{WH}_{1,a,b}(x, x) = x$ se tiene que $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}_3$,

$$\lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1} \nabla W_1 \cdot \vec{u} = \lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2} \nabla W_2 \cdot \vec{u} = 1 = D_{\vec{u}} \text{WH}_{1,a,b}(x, x).$$

■

La proposición anterior justifica que la siguiente expresión proporciona un gradiente generalizado para $\text{WH}_{1,a,b}(x, y)$, $x \geq 0, y \geq 0$.

Si $a = c$

$$D\text{WH}_{1,a,b}(x, y) = \begin{cases} (1, 0), & 0 < x < y \\ ((c - d) \frac{xy}{(cy+dx)^2} + \frac{cx+dy}{cy+dx}, (d - c) \frac{x^2}{(cy+dx)^2}), & 0 < y < x \\ (0, 0), & xy \leq 0. \end{cases}$$

Si $a = d$

$$D\text{WH}_{1,a,b}(x, y) = \begin{cases} ((d - c) \frac{y^2}{(cx+dy)^2}, (c - d) \frac{xy}{(cx+dy)^2} + \frac{dx+cy}{cx+dy}), & 0 < x < y \\ (1, 0), & 0 < y < x \\ (0, 0), & xy \leq 0. \end{cases}$$

Enunciamos el siguiente resultado de manera separada para facilitar su referencia en el desarrollo posterior de esta memoria.

Corolario 6.1. *La función $\text{WH}_{1,a,b}$ admite un gradiente generalizado que satisface $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$*

$$a = d, \begin{cases} -(c - d) \leq D_x \text{WH}_{1,a,b}(x, y) \leq 1, \\ 0 \leq D_y \text{WH}_{1,a,b}(x, y) \leq c - d + 1. \end{cases} \quad (6.16)$$

$$a = c, \begin{cases} 0 \leq D_x \text{WH}_{1,a,b}(x, y) \leq c - d + 1, \\ -(c - d) \leq D_y \text{WH}_{1,a,b}(x, y) \leq 1. \end{cases} \quad (6.17)$$

$$y \|D\text{WH}_{1,a,b}(x, y)\|_1 \leq 1 + 2(c - d), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, el Teorema 2.1 implica que $WH_{1,a,b}(x, y)$ es Lipschitz.

Corolario 6.2. $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall a > 0, b > 0, a + b = 1$

$$\|WH_{1,a,b}(x_1, y_1) - WH_{1,a,b}(x_2, y_2)\|_\infty \leq (1+2(c-d))\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty.$$

Al igual que para la función $Power_p$, el gradiente generalizado $DWH_{1,a,b}$ puede no estar unívocamente definido en los hiperplanos de separación. Notar que si $(0, y) \in \Omega_{23}$ y $a = d$, podemos definir

$$DWH_{1,a,b}(0, y) = \lim_{\substack{0 < x < y \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_2(x, y) = (1, 0)$$

o, alternativamente,

$$DWH_{1,a,b}(0, y) = \lim_{\substack{y > 0, x < 0 \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_3(x, y) = (0, 0).$$

Aunque las dos alternativas conducen a diferentes definiciones puntuales para el gradiente generalizado sobre Ω_{23} , la Propiedad de Compatibilidad implica que, en cualquier caso la propiedad fundamental

$$DWH_{1,a,b}(0, y) \cdot (0, 1) = D_{(0,1)}WH_{1,a,b}(0, y) = 0$$

se sigue manteniendo, y con ella los teoremas que permiten aplicar la regla de la cadena para la composición con curvas suaves.

El gradiente generalizado $DWH_{2,a,b}$

Proposición 6.4. *La función $WH_{2,a,b} \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$, satisface la Propiedad de Compatibilidad, Definición 2.5, sobre su partición asociada. Además $\forall \Omega$ sector en esta partición se cumple que*

$$\sup_{(x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}} \|\nabla WH_{2,a,b}|_{\overset{\circ}{\Omega}}(x, y)\|_1 \leq \frac{1}{d}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.18)$$

Demostración

Es fácil verificar que

$$\text{WH}_{2,a,b}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{bx + ay}, & \text{si } xy > 0 \\ 0, & xy \leq 0 \end{cases}$$

con $a + b = 1$ es una función continua en $\forall(x, y) \neq (0, 0)$. Además por la propiedad **C3**-Proposición 3.2 se cumple que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\text{WH}_{2,a,b}(x, y) - \text{WH}_{2,a,b}(0, 0)| = |\text{WH}_{2,a,b}(x, y)| \leq |ax + by| \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

por lo que la función es continua también en el origen de coordenadas. Por tanto, $\text{WH}_{2,a,b} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$.

Estudiamos a continuación las propiedades de diferenciabilidad de $\text{WH}_{2,a,b}(x, y)$ en cada uno de los sectores de la partición de la Figura 3.1. Como en el apartado anterior, definimos

$$\Omega_{ij} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j - \{0\}, \quad \text{cuando } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \{0\}$$

Dado que $\text{WH}_{2,a,b}(-x, -y) = -\text{WH}_{2,a,b}(x, y)$, es suficiente considerar el semiplano $y \geq 0$, representado en la Figura 6.2.

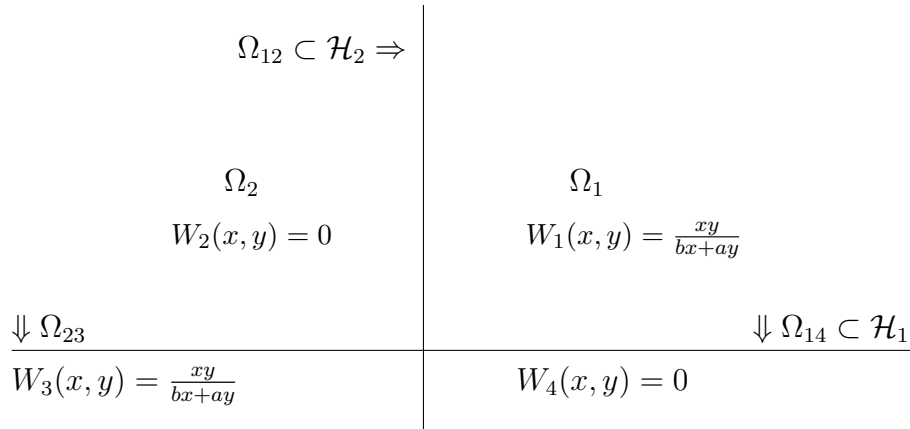


Figura 6.2: Partición por sectores para $\text{WH}_{2,a,b}(x, y)$ en el semiplano $y \geq 0$.

Sector Ω_1 : $(x, y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1 \leftrightarrow 0 < x, y,$

$$W_1(x, y) = \frac{xy}{bx + ay}, \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \partial_x W_1(x, y) = \frac{ay^2}{(bx + ay)^2} \leq \frac{1}{a}, \\ 0 \leq \partial_y W_1(x, y) = \frac{bx^2}{(bx + ay)^2} \leq \frac{1}{b}. \end{cases}$$

Se tiene que $W_1(x, y) \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{\Omega}_1)$. Además existe $\lim_{(x,y) \rightarrow d} \nabla W_1(x, y)$ para cada $0 \neq d \in \mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$, los hiperplanos que forman la frontera del sector Ω_1 , y

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{0 < y, 0 < x \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_1(x, y) &= \left(\frac{1}{a}, 0 \right), \\ \lim_{\substack{0 < y, 0 < x \\ y \rightarrow 0}} \nabla W_1(x, y) &= \left(0, \frac{1}{b} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\|\nabla W_1(x, y)\|_1 = \frac{d}{d} \frac{ay^2 + bx^2}{(bx + ay)^2} \leq \frac{1}{d} \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{(bx + ay)^2} \leq \frac{1}{d}.$$

Además ya que $W_2(x, y) \equiv 0$, todas las restricciones a los sectores del semiplano $y \geq 0$ son funciones suaves por sectores (Definición 2.3) satisfacen la propiedad 1 de la Definición 2.5 y verifican (6.18). Como las restricciones a los hiperplanos de separación de la partición son nulas, $\text{WH}_{2,a,b}(x, y) \in C_{pw}^1(\mathbb{R}^2)$.

Comprobaremos ahora que la condición de compatibilidad, Definición 2.5- propiedad 2, se verifica $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}$, para cada uno de los hiperplanos de separación de la partición de la Figura 3.1.

1. $\mathcal{H}_1 = \langle \vec{v} \rangle$, con $\vec{v} = (1, 0)^T$. Puesto que $W_4 \equiv 0 \forall x > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{0 < y, 0 < x \\ y \rightarrow 0}} \nabla W_1 \cdot \vec{v} &= 0, \\ \lim_{0 > y \rightarrow 0} \nabla W_4(x, y) \cdot \vec{v} &= 0 = D_{\vec{v}} \text{WH}_{2,a,b}(x, 0) \end{aligned}$$

Por tanto $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}_1$

$$\lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1} \nabla W_1 \cdot \vec{v} = \lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_4} \nabla W_4(x, y) \cdot \vec{v} = 0 = D_{\vec{v}} \text{WH}_{2,a,b}(x, 0)$$

La compatibilidad sobre Ω_{23} se comprueba de manera similar.

2. $\mathcal{H}_2 = \langle \vec{w} \rangle$, con $\vec{w} = (0, 1)^T$. Puesto que $W_2 \equiv 0 \forall y > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{0 < y, 0 < x \\ x \rightarrow 0}} \nabla W_1 \cdot \vec{w} &= 0, \\ \lim_{0 > x \rightarrow 0} \nabla W_2(x, y) \cdot \vec{v} &= 0 \cdot (0, 1) = 0 = D_{\vec{w}} \mathbf{WH}_{2,a,b}(0, y) \end{aligned}$$

Por tanto $\forall 0 \neq d \in \mathcal{H}_2$

$$\lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_1} \nabla W_1 \cdot \vec{w} = \lim_{d \leftarrow (x,y) \in \overset{\circ}{\Omega}_2} \nabla W_2(x, y) \cdot \vec{w} 0 = D_{\vec{w}} \mathbf{WH}_{2,a,b}(x, 0)$$

La compatibilidad sobre Ω_{34} se comprueba de manera similar. ■

De manera análoga al caso $p = 1$, la proposición anterior justifica que la siguiente expresión proporciona un gradiente generalizado para la función $\mathbf{WH}_{2,a,b}(x, y)$.

$$D\mathbf{WH}_{2,a,b}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{ay^2}{(bx + ay)^2} \frac{bx^2}{(bx + ay)^2} \right), & xy > 0 \\ (0, 0), & xy \leq 0. \end{cases}$$

Enunciamos el siguiente resultado de manera separada para facilitar su referencia en el desarrollo posterior de esta memoria.

Corolario 6.3. *La función $\mathbf{WH}_{2,a,b}(x, y)$ admite un gradiente generalizado que satisface $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$*

$$0 \leq D_x \mathbf{WH}_{2,a,b}(x, y) \leq \frac{1}{a}, \quad 0 \leq D_y \mathbf{WH}_{2,a,b}(x, y) \leq \frac{1}{b},$$

$$\|D\mathbf{WH}_{2,a,b}(x, y)\|_1 \leq \frac{1}{d} \text{ con } d = \min\{a, b\}.$$

Por tanto, el Teorema 2.1 asegura que la función $\mathbf{WH}_{2,a,b}$ es Lipschitz.

Corolario 6.4. $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall a > 0, b > 0, a + b = 1$

$$\|WH_{2,a,b}(x_1, y_1) - WH_{2,a,b}(x_2, y_2)\|_\infty \leq \frac{1}{d} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty \text{ con } d = \min\{a, b\}.$$

Estabilidad

Las funciones que definen el esquema $S_{WH_{p,a,b}}^{[2]}$ (3.19) son combinaciones lineales de funciones diferenciables y/o funciones del tipo $WH_{p,a,b} \circ M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una matriz de rango 2. Por tanto, los resultados del Capítulo 2 aseguran que podemos calcular el Jacobiano Generalizado del esquema $S_{WH_{p,a,b}}^{[2]}$ utilizando la regla de diferenciación habituales (regla de la cadena) sobre estas funciones. Así, las entradas no nulas del Jacobiano Generalizado, $DS_{WH_{p,a,b}}^{[2]} w$, en las filas genéricas $[2n, :]$ y $[2n + 1, :]$ se pueden calcular en función de los gradientes generalizados de $WH_{p,a,b}(x, y)$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} (DS_{WH_{p,a,b}}^{[2]}(w))_{2n,n-1} &:= \frac{1}{4} D_x WH_{p,a,b}(w_{n-1}, w_n), \\ (DS_{WH_{p,a,b}}^{[2]}(w))_{2n,n} &:= \frac{1}{4} D_y WH_{p,a,b}(w_{n-1}, w_n), \\ (DS_{WH_{p,a,b}}^{[2]}(w))_{2n+1,n-1} &:= -\frac{1}{8} D_x WH_{p,a,b}(w_{n-1}, w_n), \\ (DS_{WH_{p,a,b}}^{[2]}(w))_{2n+1,n} &:= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} D_y WH_{p,a,b}(w_{n-1}, w_n) - \frac{1}{8} D_x WH_{p,a,b}(w_n, w_{n+1}), \\ (DS_{WH_{p,a,b}}^{[2]}(w))_{2n+1,n+1} &:= -\frac{1}{8} D_y WH_{p,a,b}(w_n, w_{n+1}). \end{aligned}$$

Estudiaremos la estabilidad del esquema $S_{WH_{p,a,b}}$ utilizando el Teorema 2.4 con $k = 2$. El objetivo de esta sección es estudiar la influencia de los parámetros a y b en la estabilidad de los esquemas (6.1) para $p = 1$ y $p = 2$.

Teorema 6.2. *El esquema $WH_{1,a,b}$ es estable $\forall a, b$ con $0 < a, b < 1$ y $a + b = 1$.*

Demostración

Veamos que

$$\|DS_{\text{WH}_{1,a,b}}^{[2]}(w)\|_{\infty} < 1, \quad \forall w \in l_{\infty}(\mathbb{Z}).$$

Probaremos la cota anterior en el caso $a = d$ (el caso $a = c$ es absolutamente similar) a partir de las cotas obtenidas para $D\text{WH}_{1,a,b}$ en el Lema 6.3. Por simplicidad de notación denotaremos $A := DS_{\text{WH}_{1,a,b}}^{[2]}(w)$. Entonces,

$$\begin{aligned} -\frac{(c-d)}{4} \leq A_{2n,n-1} \leq \frac{1}{4}, & \quad \Rightarrow |A_{2n,n-1}| \leq \frac{1}{4}, \\ 0 \leq A_{2n,n} \leq \frac{(c-d)+1}{4}, & \quad \Rightarrow |A_{2n,n}| \leq \frac{(c-d)+1}{4}, \\ -\frac{1}{8} \leq A_{2n+1,n-1} \leq \frac{c-d}{8}, & \quad \Rightarrow |A_{2n+1,n-1}| \leq \frac{1}{8}, \\ -\frac{(c-d)+1}{8} \leq A_{2n+1,n+1} \leq 0, & \quad \Rightarrow |A_{2n+1,n+1}| \leq \frac{c-d+1}{8}, \end{aligned}$$

y, operando,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{c-d}{8} = \frac{1}{2} - \frac{c-d+1}{8} - \frac{1}{8} \leq A_{2n+1,n} \leq \frac{1}{2} + \frac{c-d}{8}, \\ \Rightarrow |A_{2n+1,n}| \leq \frac{4+c-d}{8}. \end{aligned}$$

Así, las filas con índice impar cumplen

$$\|A_{[2n+1, \cdot]}\|_1 = \sum_{j=n-1}^{n+1} |A_{2n+1,j}| \leq \frac{1}{8} + \frac{4+c-d}{8} + \frac{c-d+1}{8} = \frac{3+c-d}{4}.$$

Para filas con índices pares tenemos

$$\|A_{[2n, \cdot]}\|_1 = \sum_{k=n-1}^n |A_{2n,k}| = \left\| \frac{1}{4} DS_{\text{WH}_{1,a,b}}^{[2]}(w_{n-1}, w_n) \right\|_1 \leq \frac{1+2(c-d)}{4}.$$

Por tanto,

$$\|A\|_{\infty} \leq \max \left\{ \frac{3}{4} + \frac{c-d}{4}, \frac{1}{4} + \frac{2(c-d)}{4} \right\} < 1,$$

dado que $0 \leq c - d < 1$. Por tanto, se cumple (2.41) para $L = 1$, lo cual prueba la estabilidad del esquema $S_{\text{WH}_{1,a,b}}$, $\forall a, b$ con $0 < a, b < 1$ y $a + b = 1$. ■

Observamos que para $a = b = \frac{1}{2}$, $c - d = 0$ y el Teorema 6.2 reproduce la cotas obtenidas para H_1 :

$$\|DS_{H_1}^{[2]}w\|_\infty \leq \frac{3}{4}, \quad \forall w \in l_\infty(\mathbb{Z}).$$

El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales se obtiene estabilidad para los esquemas $\text{WH}_{2,a,b}$.

Teorema 6.3. *El esquema $\text{WH}_{2,a,b}$ es estable si $ab \geq \frac{1}{8}$ y $d = \min\{a, b\} \in [0,3583, 0,5]$.*

Demostración

Estudiamos la contractividad de las potencias del operador $S^{[2]}$ estudiando las potencias de su Jacobiano Generalizado. En este caso, utilizaremos la Proposición 6.4 para acotar las entradas de la matriz $A := DS_{\text{WH}_{2,a,b}}^{[2]}(w)$, $w \in l_\infty(\mathbb{Z})$. Sumarizamos a continuación las acotaciones obtenidas

$$\begin{aligned} 0 \leq A_{2n,n-1} &\leq \frac{1}{4a} &\Rightarrow & |A_{2n,n-1}| \leq \frac{1}{4a}, \\ 0 \leq A_{2n,n} &\leq \frac{1}{4b} &\Rightarrow & |A_{2n,n}| \leq \frac{1}{4b}, \\ -\frac{1}{8a} \leq A_{2n+1,n-1} &\leq 0 &\Rightarrow & |A_{2n+1,n-1}| \leq \frac{1}{8a}, \\ -\frac{1}{8b} \leq A_{2n+1,n+1} &\leq 0 &\Rightarrow & |A_{2n+1,n+1}| \leq \frac{1}{8b}, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{8ab} \leq A_{2n+1,n} &\leq \frac{1}{2} &\Rightarrow & |A_{2n+1,n}| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Notar que

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{8ab} \equiv \frac{1}{8ab} \leq 1$$

lo cual conduce a la cota especificada para $|A_{2n+1,n}|$.

Utilizando las cotas anteriores, o la cota obtenida para el gradiente generalizado de la función $WH_{2,a,b}$ en la Proposición 6.4, tenemos

$$\|A_{[2n,:]} \|_1 = \sum_{k=n-1}^n |A_{2n,k}| = \frac{1}{4} \|DWH_{2,a,b}(w_n, w_{n-1}) \|_1 \leq \frac{1}{4a}, \quad (6.19)$$

$$\|A_{[2n+1,:]} \|_1 = \sum_{j=n-1}^{n+1} |A_{2n+1,j}| \leq \frac{1}{8b} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8ab}. \quad (6.20)$$

En la Tabla 6.1 aparece resumizada toda la información sobre las cotas de las entradas del Jacobiano Generalizado $A = DS_{WH_{2,a,b}}^{[2]}(w)$.

$ A_{2n,n-1} \leq \frac{1}{4a}$	$ A_{2n,n} \leq \frac{1}{4b}$		$\ A_{[2n,:]} \ _1 \leq \frac{1}{4d}$
$ A_{2n+1,n-1} \leq \frac{1}{8a}$	$ A_{2n+1,n} \leq \frac{1}{2}$	$ A_{2n+1,n+1} \leq \frac{1}{8b}$	$\ A_{[2n+1,:]} \ _1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8ab}$

Tabla 6.1: Estimaciones para las entradas del Jacobiano generalizado $A = DS_{WH_{2,a,b}}^{[2]}$.

Observamos que para las filas pares

$$\frac{1}{4d} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad d \geq \frac{1}{4}$$

Es útil hacer algunas observaciones en este momento sobre el rango de los parámetros impuesto en el enunciado del teorema y sus implicaciones. En primer lugar, notamos que para $0 < a < 1$, $b = 1 - a$, se cumple

$$0 < ab = a(1 - a) \leq 1/4 \quad \rightarrow \quad 0 < 8ab = 8a(1 - a) \leq 2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{8ab} \geq \frac{1}{2}$$

Así, la restricción sobre los parámetros impuesta en el teorema

$$\frac{1}{8ab} \leq 1 \Leftrightarrow 8a(1-a) \geq 1 \Leftrightarrow a, b = 1-a \in [\theta, 1-\theta] \approx [0,1464, 0,8563]$$

con $\theta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ (θ y $1-\theta$ son las raíces de $p(a) = 8a(1-a) - 1$).

Así, cuando $8ab \geq 1 \equiv a, b \in [\theta, (1-\theta)]$, la cota obtenida para las filas impares nunca es menor que 1, ya que

$$\frac{1}{8ab} \geq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{8ab} + \frac{1}{2} \geq 1,$$

Por otra parte, si $8ab \leq 1 \equiv a, b = 1-a \notin [\theta, 1-\theta]$, entonces

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8ab} < -\frac{1}{2} \rightarrow |A_{2n+1,n}| \leq \frac{1}{8ab} - \frac{1}{2} \rightarrow \|A_{[2n+1, :]}\|_1 \leq \frac{2}{8ab} - \frac{1}{2}$$

Puesto que

$$1 \geq 8ab \rightarrow \frac{2}{8ab} - \frac{1}{2} \geq 2 - \frac{1}{2} > 1.$$

Por tanto, en ningún caso las cotas obtenidas para las filas impares son < 1 y es necesario estudiar el caso $L = 2$.

Manteniendo la notación anterior, definimos ahora

$$\tilde{A} := DS_{\text{WH}_{2,a,b}}^{[2]} v, \quad B := A\tilde{A} = DS_{\text{WH}_{2,a,b}}^{[2]} w DS_{\text{WH}_{2,a,b}}^{[2]} v.$$

Procedemos como en la Proposición 3.6, para calcular

$$\|B\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq 3} \|B_{[4n+i, :]}\|_1.$$

Puesto que

$$\|B_{[4n, :]}\|_1 \leq |A_{4n,2n}| \|\tilde{A}_{[2n, :]}\|_1 + |A_{4n,2n-1}| \|\tilde{A}_{[2n-1, :]}\|_1, \quad (6.21)$$

$$\|B_{[4n+2, :]}\|_1 \leq |A_{4n+2,2n+1}| \|\tilde{A}_{[2n+1, :]}\|_1 + |A_{4n+2,2n}| \|\tilde{A}_{[2n, :]}\|_1, \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \|B_{[4n+1, :]}\|_1 &\leq |A_{4n+1,2n-1}| \|\tilde{A}_{[2n-1, :]}\|_1 + |A_{4n+1,2n}| \|\tilde{A}_{[2n, :]}\|_1 \\ &\quad + |A_{4n+1,2n+1}| \|\tilde{A}_{[2n+1, :]}\|_1. \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \|B_{[4n+3, :]}\|_1 &\leq |A_{4n+3,2n}| \|\tilde{A}_{[2n, :]}\|_1 + |A_{4n+3,2n+1}| \|\tilde{A}_{[2n+1, :]}\|_1 \\ &\quad + |A_{4n+3,2n+2}| \|\tilde{A}_{[2n+2, :]}\|_1. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Utilizando la información de la Tabla 6.1, y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $d = \min\{a, b\} = a$, obtenemos las siguientes cotas

$$\|B_{[4n, :]} \|_1 \leq \frac{1}{4b} \frac{1}{4a} + \frac{1}{4a} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8ab} \right) =: q_0(a, b) \quad (6.25)$$

$$\|B_{[4n+1, :]} \|_1 \leq \left(\frac{1}{8a} + \frac{1}{8b} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8ab} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4a} =: q_1(a, b) \quad (6.26)$$

$$\|B_{[4n+2, :]} \|_1 \leq \frac{1}{4b} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8ab} \right) + \frac{1}{4a} \frac{1}{4a} =: q_2(a, b) \quad (6.27)$$

$$\|B_{[4n+3, :]} \|_1 \leq \frac{1}{8a} \frac{1}{4a} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8ab} \right) + \frac{1}{8b} \frac{1}{4a} =: q_3(a, b) \quad (6.28)$$

Obtendremos la estabilidad del esquema para aquellos valores de a, b que garanticen

$$q_i(a, b) < 1, \quad i = 0, \dots, 3$$

Dado que $0 < a < 1$ y $b = 1 - a$, operando podemos reformular la condición anterior

$$q_i(a, b) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_i(a) < 0$$

donde $p_i(a)$ es una función polinómica. Efectuamos el desarrollo para $i = 0$:

$$\begin{aligned} q_0(a, b) &= \frac{1}{8a} \left[1 + \frac{1}{2b} \left(1 + \frac{1}{2a} \right) \right] < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{2b} \left(1 + \frac{1}{2a} \right) < 8a \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{2a} < (8a - 1)2(1 - a) \quad \Leftrightarrow \quad 4a(8a - 1)(a - 1) + 2a + 1 < 0 \end{aligned}$$

Los polinomios obtenidos en cada caso son los siguientes,

$$\begin{aligned} p_0(a) &= 32a^3 - 36a^2 + 6a + 1 \\ p_1(a) &= -64a^4 + 136a^3 - 84a^2 + 12a - 1 \\ p_2(a) &= -32a^4 + 60a^3 - 26a^2 - 3a + 2 \\ p_3(a) &= 28a^3 - 28a^2 + a + 1 \end{aligned}$$

La Figura 6.3 muestra una representación gráfica de los polinomios anteriores para $a \in [0, 0,5]$. La raíz de $p_0(a)$ en el intervalo

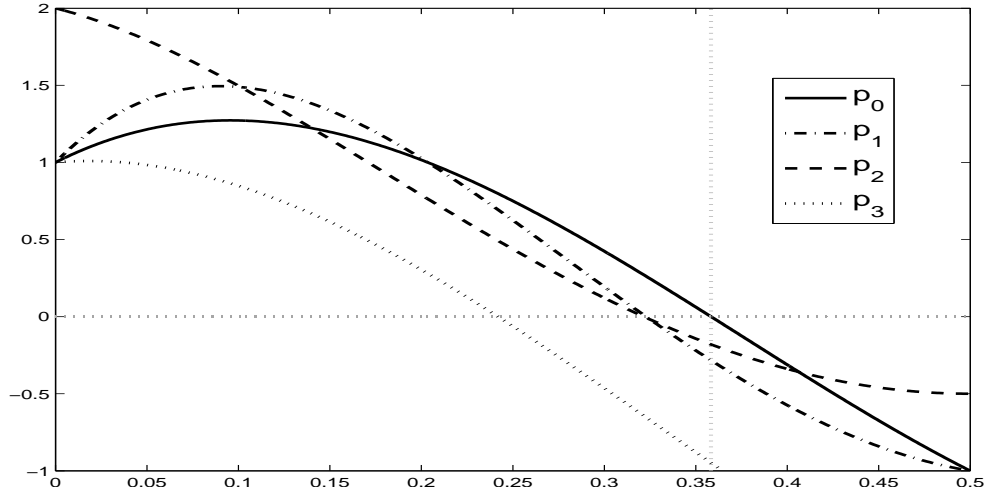


Figura 6.3: Gráficas de los polinomios: $p_0(a)$, $p_1(a)$, $p_2(a)$, $p_3(a)$.

$[0, 0,5]$ se ha calculado numéricamente, y su valores $\approx 0,3583$. La Figura 6.3 muestra que el esquema es estable si $a \in [0,3583, 0,5]$.

Por otra parte, si $8ab \leq 1 \equiv a, b = 1 - a \notin [\theta, 1 - \theta]$, entonces

$$\|B_{[4n,:]} \|_1 \leq \frac{1}{4b} \frac{1}{4a} + \frac{1}{4a} \left(\frac{1}{8ab} - \frac{1}{2} \right) =: \tilde{q}_0(a, b)$$

y, al igual que en el caso anterior $\tilde{q}_0(a, b) < 1 \iff \tilde{p}_0(a) < 0$, con $p_0 = 32a^3 - 28a^2 - 2a + 1$. La gráfica de este polinomio aparece en la Figura 6.4, y es facil comprobar que para $a \in]0, \theta[$, $\tilde{p}_0(a) > 0$, por tanto si $8ab \leq 1$ no podríamos asegurar que $\|B\|_\infty < 1$. ■

Observamos que si $a = b = \frac{1}{2}$, obtenemos las mismas cotas que hemos obtenido para H_2 , dado que

$$\|B\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq 3} \|B_{[4n+i,:]} \|_1 \leq \max_{0 \leq i \leq 3} \left\{ q_i \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{3}{4}.$$

También observamos que con este método, los resultados obtenidos son mejores que los presentados en [11]-Teorema 4, dado que en este artículo obteníamos que si $ab \geq \frac{1}{8}$ y $\alpha \leq -1 + \sqrt{5}$ entonces el esquema $S_{WH_{2,a,b}}$ era estable.

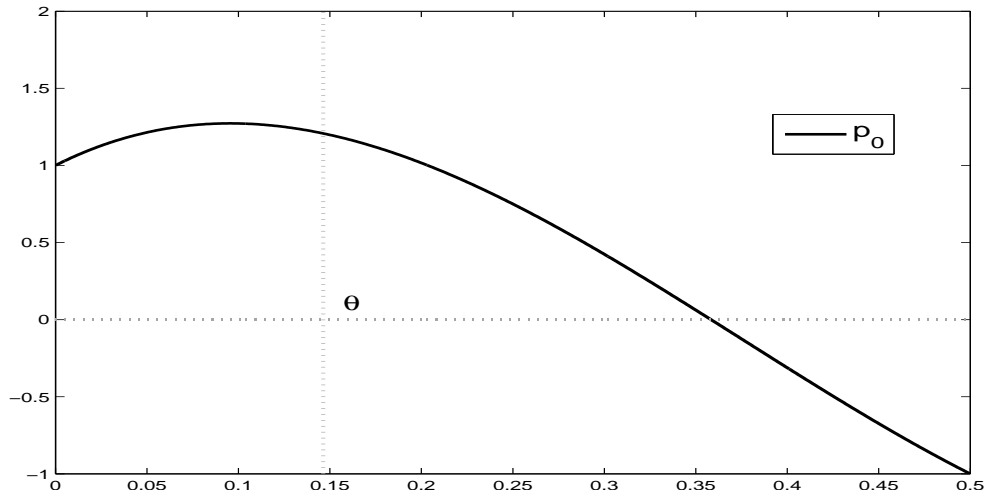


Figura 6.4: $\tilde{q}_0(a, b) < 1 \iff \tilde{p}_0(a) < 0$, con $p_0 = 32a^3 - 28a^2 - 2a + 1$.

Si suponemos que $a = \min\{a, b\}$, entonces $\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1-a}{a} \leq -1 + \sqrt{5}$, por tanto el esquema es estable si $0,4472 = \frac{\sqrt{5}}{5} \leq a \leq \frac{1}{2}$, en el Teorema 6.3 el esquema es estable si $a \in [0,3583, 0,5]$, por lo tanto con este método hemos simplificado la demostración de la estabilidad y hemos mejorado en una amplitud de 0,0889 el resultado presentado en [11].

Orden de aproximación

Lema 6.1. Si el esquema $S_{WH_{p,a,b}}$ es estable, entonces $S_{WP_{p,a,b}}^\infty$ tiene orden de aproximación al menos 3.

Demostración

Los esquemas $S_{WP_{p,a,b}}$ reproducen polinomios de grado 2, por tanto el resultado se sigue de la Proposición 1.5. ■

6.2

Experimentos Numéricos

Mostramos a continuación algunos experimentos que ilustran los resultados teóricos de este capítulo y el carácter no-oscilatorio de los esquemas $S_{\text{WH}_{p,a,b}}$, así como las diferencias entre los esquemas $S_{\text{WH}_{p,a,b}}$ para distintos valores de p , a y b .

6.2.1

Orden de aproximación

En esta sección efectuamos un estudio numérico del orden de aproximación que se obtiene al reconstruir funciones suaves mediante los esquemas $S_{\text{WH}_{p,a,b}}$ para distintos valores de p , a y b para una función gaussiana de media $\mu = 0$ y $\sigma = 0,5$, es decir

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x^2}.$$

El contexto general es el mismo que en capítulos anteriores: Suponemos que se conocen los valores puntuales de una función suave $g(x)$ en una malla de puntos igualmente espaciados $\{x_i\}$ con paso de malla uniforme, h . Dado un esquema de subdivisión S y un intervalo $[a, b] \subset [\text{mín}_i x_i, \text{máx}_i x_i]$, calculamos

$$\begin{aligned} E_S^{[a,b]}(h) &= \|S^\infty f^0 - g\|_{L^\infty([a,b])} \\ &\approx \text{máx}\{|(S^7 f^0)_n - g(n2^{-7}h)|, n2^{-7}h \in [a, b]\} \end{aligned} \quad (6.29)$$

donde $f^0 = \{g(x_i)\}$ son los datos iniciales del proceso de subdivisión. Tomamos como referencia 7 aplicaciones del proceso de subdivisión puesto que en todos los experimentos numéricos realizados en esta memoria no se aprecian diferencias significativas si se consideran más aplicaciones. Consideramos distintos valores de h y tabulamos los errores $E_S^{[a,b]}(h)$ en (6.29) para los diferentes valores de h considerados. Asumiendo que $\|S^\infty f^0 - g\|_{L^\infty([a,b])} = O(h^q)$, el orden de aproximación se calcula realizando un ajuste (log-log) por mínimos cuadrados sobre los valores obtenidos en la tabulación.

Consideramos las regiones $[-1, -0,3]$ (Figura 6.5-izquierda) donde la función no es convexa, y $[-0,4,0,4]$ (ver Figura 6.5-derecha) donde la función es convexa y realizamos tabulaciones de los errores obtenidos, comparando también con el esquema $S_{2,2}$.

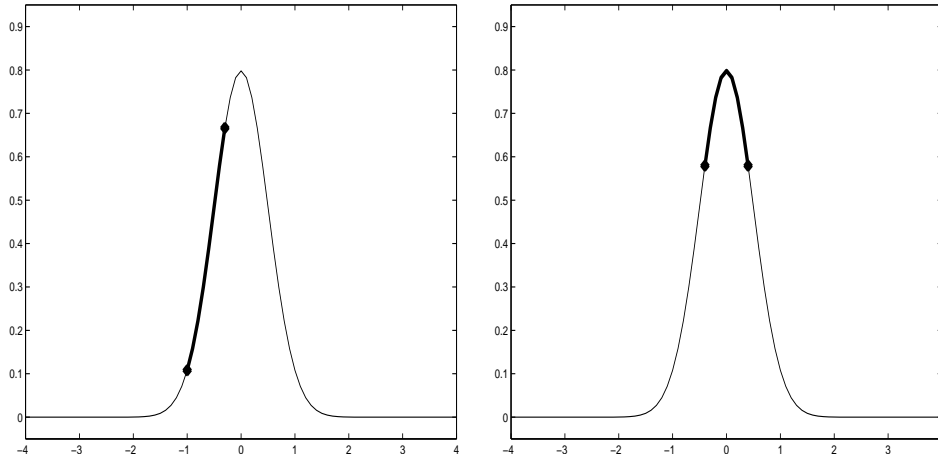


Figura 6.5: Datos iniciales, más marcado la zona donde estudiamos el orden de aproximación, izquierda intervalo $[-1, -0,3]$ y derecha $[-0,4,0,4]$.

h	$E_{2,2}$	$E_{1,1/2,1/2}$	$E_{2,1/2,1/2}$	$E_{3,1/2,1/2}$	$E_{4,1/2,1/2}$
0,1	$5,4e - 5$	$5,5e - 4$	$4,8e - 4$	$4,7e - 4$	$4,6e - 4$
0,05	$3,4e - 6$	$7,0e - 5$	$6,1e - 5$	$6,0e - 5$	$6,0e - 5$
0,025	$2,1e - 7$	$8,8e - 6$	$7,7e - 6$	$7,6e - 6$	$7,6e - 6$
0,0125	$1,3e - 8$	$1,1e - 6$	$9,6e - 7$	$9,6e - 7$	$9,6e - 7$
q	4,0	2,99	2,97	2,97	2,97

Tabla 6.2: Datos Gaussianos: $[-1, -0,3]$. Notar que $WH_{p,1/2,1/2} = H_p$.

La Tabla 6.2, que coincide con la Tabla 3.1 y la volvemos a presentar para poder realizar una mejor comparativa, y las Tablas 6.3- 6.4 muestran los resultados correspondientes al intervalo $[-1, -0,3]$ para distintos valores de p , a y b . En todos los casos se obtiene orden de aproximación igual a 3, tal y como especifica el Lema 6.1. Los resultados correspondientes a la zona $[-0,4,0,4]$,

h	$E_{2,2}$	$E_{1,3/8,5/8}$	$E_{2,3/8,5/8}$	$E_{3,3/8,5/8}$	$E_{4,3/8,5/8}$
0,1	$5,4e - 5$	$5,6e - 4$	$4,7e - 4$	$4,6e - 4$	$4,6e - 4$
0,05	$3,4e - 6$	$7,2e - 5$	$6,0e - 5$	$6,0e - 5$	$6,0e - 5$
0,025	$2,1e - 7$	$9,8e - 6$	$7,6e - 6$	$7,6e - 6$	$7,6e - 6$
0,0125	$1,3e - 8$	$1,3e - 6$	$9,6e - 7$	$9,6e - 7$	$9,6e - 7$
q	4,0	2,90	2,98	2,97	2,97

Tabla 6.3: Datos Gaussianos: $[-1, -0,3]$. $S_{WH_{p,3/8,5/8}}$

h	$E_{2,2}$	$E_{1,5/8,3/8}$	$E_{2,5/8,3/8}$	$E_{3,5/8,3/8}$	$E_{4,5/8,3/8}$
0,1	$5,4e - 5$	$7,4e - 4$	$4,9e - 4$	$4,7e - 4$	$4,6e - 4$
0,05	$3,4e - 6$	$1,0e - 4$	$6,2e - 5$	$6,1e - 4$	$6,0e - 5$
0,025	$2,1e - 7$	$1,3e - 5$	$7,7e - 6$	$7,6e - 6$	$7,6e - 6$
0,0125	$1,3e - 8$	$1,7e - 6$	$9,7e - 7$	$9,6e - 7$	$9,6e - 7$
q	4,0	2,91	2,99	2,98	2,97

Tabla 6.4: Datos Gaussianos: $[-1, -0,3]$. $S_{WH_{p,5/8,3/8}}$

donde la función es convexa, se muestran en la Tabla 6.5, que coincide con la Tabla 3.2 para poder realizar una mejor comparativa, y en las Tablas 6.6-6.7. En este caso, la mejora en el orden de aproximación correspondiente a $a = b = 1/2$ es consecuencia de la Proposición 3.7. No se produce, en general, ninguna mejora en zonas convexas para otros valores de a y b .

h	$E_{2,2}$	$E_{1,1/2,1/2}$	$E_{2,1/2,1/2}$	$E_{3,1/2,1/2}$	$E_{4,1/2,1/2}$
0,1	$3,5e - 6$	$5,6e - 4$	$1,9e - 4$	$8,6e - 5$	$4,5e - 4$
0,05	$2,4e - 7$	$7e - 5$	$1,4e - 5$	$5,6e - 6$	$5,9e - 5$
0,025	$1,6e - 8$	$8,8e - 6$	$9,8e - 7$	$3,5e - 7$	$7,6e - 6$
0,0125	$1e - 9$	$1,1e - 6$	$6,4e - 8$	$2,2e - 8$	$9,6e - 7$
q	3,9	2,9	3,8	3,9	2,9

Tabla 6.5: Datos Gaussianos: $[-0,4, 0,4]$. Notar que $WH_{p,1/2,1/2} = H_p$.

h	$E_{2,2}$	$E_{1,3/8,5/8}$	$E_{2,3/8,5/8}$	$E_{3,3/8,5/8}$	$E_{4,3/8,5/8}$
0,1	$3,5e - 6$	$7,4e - 4$	$3,0e - 4$	$1,8e - 4$	$1,6e - 4$
0,05	$2,4e - 7$	$1,0e - 5$	$3,0e - 5$	$1,9e - 5$	$1,8e - 5$
0,025	$1,6e - 8$	$1,3e - 6$	$3,0e - 6$	$2,2e - 6$	$2,1e - 6$
0,0125	$1e - 9$	$1,7e - 6$	$3,2e - 7$	$2,7e - 7$	$2,7e - 7$
q	3,9	2,91	3,28	3,14	3,06

Tabla 6.6: Datos Gaussianos: $[-0,4,0,4]$. $S_{WH_{p,3/8,5/8}}$

h	$E_{2,2}$	$E_{1,5/8,3/8}$	$E_{2,5/8,3/8}$	$E_{3,5/8,3/8}$	$E_{4,5/8,3/8}$
0,1	$3,5e - 6$	$7,4e - 4$	$3,0e - 4$	$1,8e - 4$	$1,6e - 4$
0,05	$2,4e - 7$	$1,0e - 5$	$3,0e - 5$	$1,9e - 5$	$1,8e - 5$
0,025	$1,6e - 8$	$1,3e - 6$	$3,0e - 6$	$2,2e - 6$	$2,1e - 6$
0,0125	$1e - 9$	$1,7e - 6$	$3,2e - 7$	$2,7e - 7$	$2,7e - 7$
q	3,9	2,91	3,28	3,14	3,06

Tabla 6.7: Datos Gaussianos: $[-0,4,0,4]$. $S_{WH_{p,5/8,3/8}}$

Carácter No-Oscilatorio

En esta sección presentaremos algunos ejemplos que muestran el carácter no-oscilatorio de los esquemas $S_{WH_{p,a,b}}$, similar al de los esquemas S_{H_p} , e ilustran las diferencias entre estos esquemas en función de los valores de p , a y b . Para ello consideramos, de nuevo, datos f^0 que corresponden a la discretización de una función discontinua, suave a trozos, sobre una malla de puntos igualmente espaciados,

$$f^0 = \{f(x_i)\}, \{x_i\} = 0 : \frac{1}{8} : 1, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \leq 0,5, \\ -\sin(\pi x), & x > 0,5. \end{cases} \quad (6.30)$$

El comportamiento de los esquemas $S_{WH_{p,a,b}}$ para estos datos es muy similar al obtenido para los esquemas S_{H_p} . En la Figura 6.6 se muestran diferentes opciones, comparando con el caso $S_{WH_{1,1/2,1/2}} \equiv S_{H_p}$.

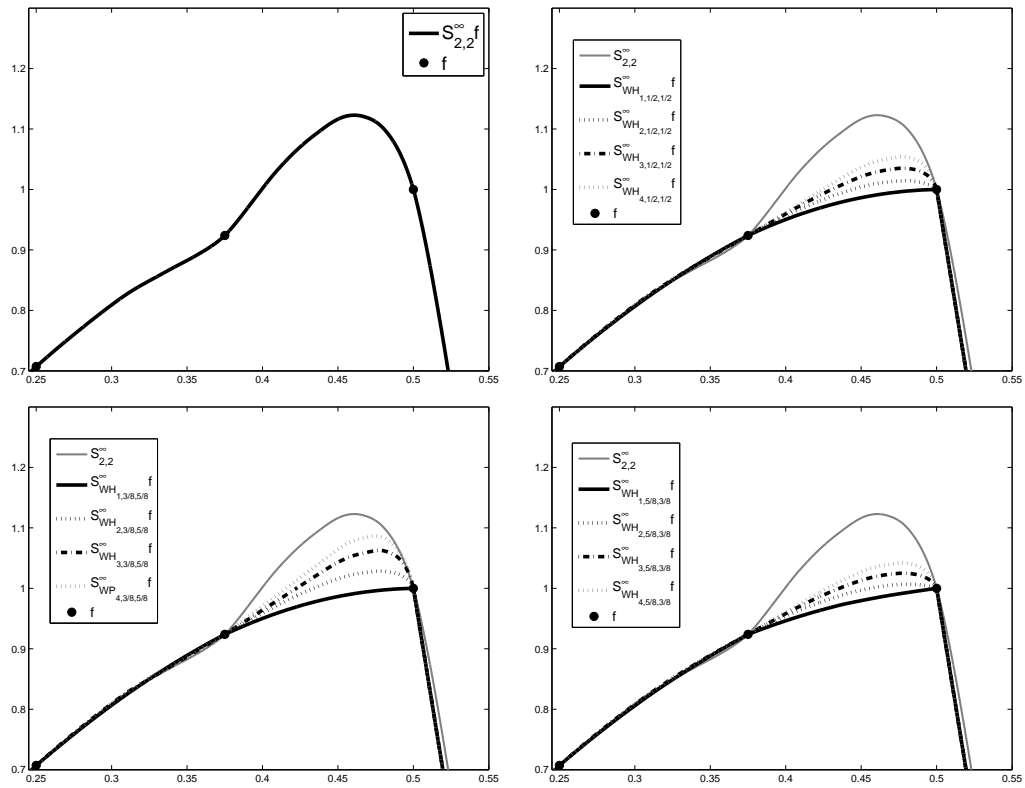


Figura 6.6: (●) Datos iniciales en (6.30). Zoom a la izquierda de $x = 0,5$.

7

Conclusiones y perspectivas

En el presente trabajo de tesis doctoral se ha analizado un conjunto de esquemas no lineales que se pueden escribir como una perturbación de un esquema lineal convergente. Siguiendo el marco teórico propuesto por Oswald y Harizanov [29, 30], hemos propuesto unas herramientas que sirven para el estudio de las propiedades de convergencia y estabilidad de forma sistemática para este tipo de esquemas. A diferencia de la exposición en [29, 30], no hemos pretendido abordar el caso más general posible. El énfasis está puesto en la claridad y completitud de la exposición.

Hemos extendido las ideas subyacentes a los esquemas Power_p para construir esquemas no oscilatorios, no lineales, relacionados con el esquema centrado $S_{3,3}$ utilizando la media no lineal Weighted-Power_p presentada en [11]. Con esta media no lineal y siguiendo la idea de la construcción del esquema $S_{3,3}$ podemos crear

diferentes esquemas no lineales y estudiar su convergencia.

Hemos generalizado los esquemas Power_p y, también, hemos presentado los esquemas Pchip, en todos los casos hemos estudiado su convergencia, estabilidad y orden de aproximación con las herramientas que hemos propuesto en los Capítulos 1 y 2. Además, hemos sistematizado la acotación de los Jacobianos Generalizados pudiendo ser programado de forma sencilla en Matlab.

Como línea futura de investigación queremos buscar como estudiar la estabilidad de los esquemas no lineales que hemos obtenido utilizando los esquemas $S_{3,3}$.

A

Algunos resultados de Análisis y de Álgebra Lineal

A.1

Introducción

Oswald y Harizanov [29, 30] utilizan un marco teórico que facilita el estudio de las propiedades de convergencia y estabilidad de los esquemas de subdivisión asociados a los esquemas Power_p . Este marco teórico resulta particularmente adecuado para analizar los esquemas WH, objeto de esta memoria, por lo que daremos a continuación una descripción detallada de los elementos esenciales de esta teoría.

En esta sección se establecen con precisión las definiciones y se prueban los resultados que cubren todas las situaciones que se estudiarán a lo largo de esta memoria. A diferencia de la exposición en [29, 30], no se pretende abordar el caso más general posible. El énfasis en esta sección está puesto en la claridad y completitud de la exposición.

A.2

Funciones suaves

Si $U \subset \mathbb{R}^m$, denotaremos como $\overset{\circ}{U}$ el interior de U , \bar{U} la clausura de U y ∂U la frontera de U .

Recordamos que si $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es $C^1(U)$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^m , entonces el *gradiente* de ψ en $x \in U$, definido como

$$\nabla\psi(x) = (\partial_1\psi(x), \dots, \partial_p\psi(x)),$$

está asociado a la aplicación lineal

$$\nabla\psi(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla\psi(x)(y) = y^T \cdot \nabla\psi(x) \equiv \nabla\psi(x)y,$$

En la última relación se ha utilizado notación matricial, considerando $y \in \mathbb{R}^m$ como vector columna, $\forall y \in \mathbb{R}^m$. Esta notación será habitual a lo largo de esta memoria.

Recordamos además, que la aplicación lineal asociada al gradiente de una función de clase C^1 recupera todas las derivadas direccionales de la función ψ , es decir, si ψ es de clase C^1 en un punto x , e $y \in \mathbb{R}^m$, entonces

$$\nabla\psi(x)y = D_y\psi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(x + ty) - \psi(x)}{t}. \quad (\text{A.1})$$

En esta sección realizaremos un breve repaso de varios resultados que serán de utilidad en el desarrollo de este capítulo. Enunciamos a continuación el Teorema del Valor Medio Clásico (TVM),

Lema A.1. ([26]-Teorema 3.4, Capítulo 2) Sea $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto y $\psi \in C^1(U)$. Si $x, y \in U$ entonces existe un punto $\xi \in \mathbb{R}^m$ en el segmento que une los puntos x e y , tal que

$$\psi(x) - \psi(y) = \nabla\psi(\xi)(x - y).$$

Necesitaremos, además, la siguiente generalización del Teorema fundamental del Cálculo para curvas diferenciables en \mathbb{R}^m .

Teorema A.1. ([26]-Teorema 1.5, Capítulo 5) Sea $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto y $\psi \in C^1(U)$. Sea $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow U$, $\gamma \in C^1([a, b])$. Entonces $\psi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es también una curva diferenciable que satisface

$$\psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) = \int_a^b \nabla\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (\text{A.2})$$

En este último teorema se supone que la imagen de la curva $\gamma([a, b]) \subset U$, el conjunto abierto en el cual la función $\psi \in C^1(U)$. Si las derivadas de la función $\psi(x)$ están acotadas, y el intervalo $[a, b]$ es acotado, se prueba fácilmente la siguiente extensión, para el caso en que $\gamma(a)$ y/o $\gamma(b)$ sean puntos de la frontera del conjunto abierto U .

Teorema A.2. Sea $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow U$, $\gamma \in C^1([a, b])$, $\gamma([a, b]) \subset U$. Sea $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto, $\psi \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$ tal que

$$\exists C > 0 \quad : \quad \sup_{x \in U} \|\nabla\psi(x)\|_1 \leq C.$$

Entonces $\psi \circ \gamma \in C^1([a, b]) \cap C([a, b])$ y se cumple

$$\psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) = \int_a^b \nabla\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (\text{A.3})$$

Demostración

Dado que $\gamma(]a, b[) \subset U$, $\forall \epsilon > 0$, $\gamma([a + \epsilon, b - \epsilon]) \subset U$. Por tanto, el Teorema A.1 permite escribir

$$\psi(\gamma(b - \epsilon)) - \psi(\gamma(a + \epsilon)) = \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} \nabla \psi(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Así, si definimos $\psi_\epsilon(t) : [a, b] \rightarrow U$,

$$\psi_\epsilon(t) := \nabla \psi(\gamma(t)) \gamma'(t) \chi_{[a+\epsilon, b-\epsilon]}(t),$$

donde $\chi_{[a+\epsilon, b-\epsilon]}(t)$ es la función característica del intervalo $[a+\epsilon, b-\epsilon]$, tenemos que ψ_ϵ es una función integrable en $[a, b]$ y $\forall t \in]a, b[$

- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi_\epsilon(t) = \nabla \psi(\gamma(t)) \gamma'(t)$
- $\|\psi_\epsilon(t)\|_\infty \leq \|\nabla \psi(\gamma(t))\|_1 \|\gamma'(t)\|_\infty \leq C \|\gamma'(t)\|_\infty \leq \tilde{C}$

Aplicando el Teorema de la Convergencia Acotada de Lebesgue [4] podemos escribir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b \psi_\epsilon(t) dt = \int_a^b \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi_\epsilon(t) dt = \int_a^b \nabla \psi(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

puesto que $\psi \in C(\bar{U})$ y $\gamma \in C([a, b])$

$$\begin{aligned} \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\psi(\gamma(b - \epsilon)) - \psi(\gamma(a + \epsilon))] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} \nabla \psi(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b \psi_\epsilon(t) dt \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el resultado. ■

Teorema A.3. ([4]-Teorema 5.5)([26]-Teorema 3.1, Capítulo 2) Sea U y V dos subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente. Si $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ son diferenciables en $a \in U$ y $\psi(a) \in V$ respectivamente, entonces su composición $\chi = \phi \circ \psi$ es diferenciable en a y

$$d\chi_a = d\phi_{\psi(a)} \circ d\psi_a.$$

Donde \circ es la composición de mapas lineales. En términos de derivadas:

$$\chi'(a) = \phi'(\psi(a)) \cdot \psi'(a).$$

Donde \cdot es la multiplicación de matrices.

A.3

Funciones Lipschitz

Definición A.1. Se dice que $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es Lipschitz si existe $M > 0$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$

$$\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty \leq M\|x - y\|_\infty.$$

Diremos que la función ψ es M -Lipschitz cuando sea necesario hacer referencia de manera explícita a la constante M .

Es sencillo comprobar que la composición de funciones Lipschitz sigue siendo Lipschitz.

Un resultado clásico establece que si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz en $[a, b]$, entonces γ es derivable casi por todas partes en $]a, b[$ y además

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) dt.$$

Es evidente que si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ es Lipschitz en $[a, b]$ entonces existe $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_m(t))$ casi por todas partes en (a, b) y

además se cumple la igualdad (vectorial)

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) dt.$$

Para curvas $\gamma : [a, b] \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$, la definición natural es la siguiente,

Definición A.2. Se dice que una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ es Lipschitz si $\gamma(t) = \{\gamma_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ con $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ M_i -Lipschitz y $M = \sup_i M_i < +\infty$.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ es Lipschitz, entonces

$$\|\gamma(s) - \gamma(t)\|_\infty \leq M|s - t| \quad \forall s, t \in [a, b].$$

Además, existe $\gamma'(t) = \{\gamma'_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ casi por todas partes en $[0, 1]$ y

$$\gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t) dt.$$

Teorema A.4. Sea $\psi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\psi \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$, con U abierto convexo, $U \in \mathbb{R}^m$, tal que $\sup_{x \in U} \|\nabla \psi(x)\|_1 \leq C$. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{U}$ es una curva Lipschitz, tal que $\gamma([a, b]) \subset U$ entonces $\tilde{\gamma} := \psi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$\tilde{\gamma}'(t) = \nabla \psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \tag{A.4}$$

casi por todas partes en (a, b) .

Demostración

Como γ es Lipschitz, es derivable casi por todas partes en (a, b) , es decir, el conjunto

$$E := \{t \in (a, b) : \exists \gamma'(t)\}$$

es denso en $[a, b]$. Sea F el conjunto de puntos aislados en E . Este conjunto es numerable¹, y por tanto el conjunto $\tilde{E} = E - F$ es denso en $[a, b]$. Veremos a continuación que existe $\tilde{\gamma}'(t) \forall t \in \tilde{E}$ y además $\tilde{\gamma}'(t) = \nabla\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, lo cual prueba el resultado.

En efecto, si $t \in \tilde{E}$, dado que $t \notin F$ y $\gamma(]a, b[) \subset U$, $\exists h_t > 0$ tal que $\gamma|_{[t-h, t+h]} \subset U$, $\forall h \leq h_t$. Así, por el TVM Clásico

$$\psi(\gamma(t+h)) - \psi(\gamma(t)) = \nabla\psi(\xi_h) \cdot (\gamma(t+h) - \gamma(t)),$$

donde $\xi_h \in \mathbb{R}^m$ es un punto del segmento que une $\gamma(t+h)$ y $\gamma(t)$. Hay que notar que este segmento está contenido en U , ya que este es convexo. Es evidente que $\xi_h \rightarrow \gamma(t)$ cuando $h \rightarrow 0$.

Puesto que

$$\frac{\psi(\gamma(t+h)) - \psi(\gamma(t))}{h} = \nabla\psi(\xi_h) \cdot \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h},$$

$t \in E$ y $\psi \in C^1(U)$, tomando límites cuando $h \rightarrow 0$ tenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \nabla\psi(\xi_h) \cdot \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \nabla\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t). \tag{A.5}$$

Por tanto $\forall t \in \tilde{E} \exists \tilde{\gamma}'(t)$,

$$\tilde{\gamma}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(\gamma(t+h)) - \psi(\gamma(t))}{h} = \nabla\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$



Corolario A.1. *Con las hipótesis del teorema anterior, $\tilde{\gamma}$ es una curva Lipschitz y se cumple que*

$$\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) = \int_a^b \nabla\psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Demostración

La curva $\tilde{\gamma}(t)$ es Lipschitz por ser composición de funciones Lipschitz. Por tanto $\tilde{\gamma}'(t)$ es integrable en $[a, b]$ y $\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) = \int_a^b \tilde{\gamma}'(t)$

¹ \mathbb{R} verifica el segundo axioma de numerabilidad, es decir, existe una base numerable de abiertos. Cada punto de F ha de estar en alguno de estos abiertos.

A.4

Normas matriciales subordinadas

Definición A.3. ([10]-Definición 1.2.8) Sea $\|\cdot\|_\alpha$ una norma vectorial en \mathbb{R}^n . Definimos la norma matricial asociada como:

$$\|A\|_\alpha = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}.$$

Proposición A.1. ([10]-Proposición 1.2.10) (Propiedad multiplicativa) Sea A una matriz $m \times n$ y representamos por $\|\cdot\|$ tanto una norma vectorial como la norma matricial asociada entonces

- $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \forall B$ matriz $n \times p$

Proposición A.2. ([10]-Proposición 1.2.11) Sea A una matriz $m \times n$. Entonces

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \max\{\|A_{[:,1]}\|_1, \dots, \|A_{[:,n]}\|_1\} \quad (\text{A.6})$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max\{\|A_{[1,:]}\|_1, \dots, \|A_{[n,:]}\|_1\}. \quad (\text{A.7})$$

Estas definiciones se pueden extender a operadores lineales entre espacios de dimensión infinita (ver por ejemplo [34]). En particular, si $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ y $T : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$ es un operador lineal, entonces

$$\|T\| := \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \in X \setminus \{0\} \right\} = \sup\{\|Tx\| \mid x \in X \setminus \{0\}\}$$

define una norma que cumple la propiedad multiplicativa.

A.5

La matriz pseudo-inversa

Definición A.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la matriz pseudo-inversa de A , A^+ , es la única matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ que satisface las cuatro condiciones de Moore-Penrose:

1. $AXA = A$.
2. $XAX = X$.
3. $(AX)^T = AX$.
4. $(XA)^T = XA$.

Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una matriz de rango máximo.

- Si $rg(A) = n \leq m$, $A^T A$ no es singular, y

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad A^+ A = I_n$$

Además $AA^+ : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un proyector ortogonal sobre $\text{Im}(A)$

- Si $rg(A) = m \leq n$, AA^T no es singular, y

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad AA^+ = I_m$$

Además $A^+ A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un proyector ortogonal sobre $\text{Im}(A^T)$

- Si A es una matriz cuadrada e invertible, la matriz pseudo-inversa coincide con su inversa, $A^+ = A^{-1}$.

Bibliografía

- [1] S. Amat, K. Dadourian, and J. Liandrat. Analysis of a class of nonlinear subdivision schemes and associated multiresolution transforms. *Adv. Comput. Math.*, 34(3):253–277, 2011.
- [2] S. Amat, R. Donat, J. Liandrat, and J.C. Trillo. Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing. *Applications in Image Processing. Found. Comput. Math.*, pages 193–225, 2006.
- [3] S. Amat and J. Liandrat. On the stability of the PPH nonlinear multiresolution. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 18(2):198–206, 2005.
- [4] T.M. Apostol. *Análisis Matemático*. editorial Reverté S.A., 1979.
- [5] F. Aràndiga, R. Donat, and A. Harten. Multiresolution based on weighted averages of the HAT function I: linear reconstruction techniques. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36:160–203, 1999.
- [6] F. Aràndiga. On the Order of Nonuniform Monotone Cubic Hermite Interpolants. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51(5):2613–2633, 2013.
- [7] F. Aràndiga, A. M. Belda, and P. Mulet. Point-Value WENO Multiresolution Applications to Stable Image Compression. *J Sci Comput*, 43:158–182, 2010.

- [8] F. Aràndiga and R. Donat. Nonlinear multiscale decomposition: the approach of A. Harten. *Numer. Algorithms*, 23:175–216, 2000.
- [9] F. Aràndiga and R. Donat. Stability through synchronization in nonlinear multiscale transformations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(1):265–289, 2007.
- [10] F. Aràndiga, R. Donat, and P. Mulet. *Mètodes numèrics per a l'àlgebra lineal*. Universitat de València, 2000.
- [11] F. Aràndiga, R. Donat, and M. Santàgueda. Weighted-Power_p nonlinear subdivision schemes. *J.-D. Boissonnat et al. (Eds.): Curves and Surfaces 2011, LNCS 6920*, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012, pages 109–129, 2012.
- [12] A.M. Belda. *Técnicas de interpolación WENO y su aplicación al procesamiento de imágenes*. PhD thesis, Universitat de València, 2010.
- [13] C. De Boor. *A practical guide to splines*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [14] C. De Boor and B. Swartz. Piecewise monotone interpolation. *J. Approx. Theory*, 21:411–416, 1977.
- [15] R. L. Burden and J. D. Faires. *Numerical Analysis. International Student Edition*. Thomson Brooks/Cole, 2005.
- [16] A. S. Cavaretta, W. Dahmen, and C.A. Michelli. Stationary subdivision. *Mem. Amer. Math. Soc.* 93, 93(453):346–349, 1991.
- [17] A. Cohen, N. Dyn, and B. Matei. Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 15:89–116, 2003.
- [18] S.D. Conte and Carl de Boor. *Elementary Numerical Analysis. An algorithmic approach*. McGraw-Hill Publishing Company, 1980.

- [19] K. Dadourian. *Schémas de Subdivision, Analyses Multirésolutions non-linéaires. Applications*. PhD thesis, Université de Provence, 2008.
- [20] G. Deslauriers and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constr. Approx.*, 5:49–68, 1989.
- [21] D.L. Donoho. Interpolating Wavelet Transforms. *Technical Report Department of Statistics, Stanford University*, 1992.
- [22] R. L. Dougherty, A. Edelman, and J. M. Hyman. Nonnegativity-, Monotonicity-, or Convexity-Preserving Cubic and Quintic Hermite Interpolation. *Math. Comp.*, 52:471–494, 1989.
- [23] N. Dyn. Subdivision schemes in computer-aided geometric design. *Advances in numerical analysis, Vol. II (Lancaster, 1990)*, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, pages 36–104, 1992.
- [24] N. Dyn, J. A. Gregory, and D. Levin. A 4-point interpolatory subdivision schemes for curve design. *Comput. Aided Geom. Design*, 4(4):257–268, 1987.
- [25] N. Dyn and P. Oswald. Univariate subdivision and multi-scale transforms: The nonlinear case. R.A. DeVore, A. Kuno (eds.), *Multiscale, Nonlinear and Adaptive Approximation* © Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pages 203–245, 2009.
- [26] C.H. Edwards. *Advanced Calculus of Several Variables*. Academic Press New York and London, 1973.
- [27] F. N. Fritsch and R. E. Carlson. Piecewise Cubic Interpolation. *SIAM J. Num. Anal.*, 17, 2:238–246, 1980.
- [28] S. Harizanov. Stability of nonlinear subdivision schemes and multiresolutions, 2007.
- [29] S. Harizanov. *Analysis of nonlinear subdivision and multi-scale transforms*. PhD thesis, Jacobs University, 2011.

- [30] S. Harizanov and P. Oswald. Stability of nonlinear subdivision and multiscale transforms. *Constr. Approx.*, 31:359–393, 2010.
- [31] A. Harten. Multiresolution Representation of Data: A General Framework. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3):1205–1256, 1996.
- [32] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. Chakravarthy. Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, III. *J. Comput. Phys.*, 131(1):3–47, 1997.
- [33] H. T. Huynh. Accurate Monotone Cubic Interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30:57–100, 1993.
- [34] G. J. O. Jameson. *Topology and normed spaces*. John Wiley and Sons, 1974.
- [35] G-S Jiang and C-W Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.*, 126(1):202–228, 1996.
- [36] F. Kuijt. *Convexity preserving interpolation. Stationary nonlinear subdivision and splines*. PhD thesis, University of Twente (The Netherlands), 1998.
- [37] X-D Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, 115(1):200–212, 1994.
- [38] A. Marquina and S. Serna. Power ENO methods: a fifth-order accurate Weighted Power ENO method. *J. Comput. Phys.*, 194:632–658, 2004.
- [39] C. Moler. *Numerical Computing with MATLAB*. SIAM, Philadelphia, 2004.
- [40] M. J. Panik. *Fundamentals of Convex Analysis. Duality, Separation, Representation and Resolution*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [41] G. Xie and T. P.-Y. Yu. Smoothness Analysis of Nonlinear Subdivision Schemes of Homogeneous and Affine Invariant Type. *Constr. Approx.*, 22:219–254, 2005.