

PREFERENCIAS ENTRE UNIDADES EFICIENTES. UNA APLICACIÓN DE SUPER EFICIENCIA FUZZY BASADA EN NIVELES DE EXIGENCIA

PLÁ FERRANDO, LEONOR

mpla@mat.upv.es

*Universidad Politécnica de Valencia/ Departamento Matemática Aplicada
Plaza Ferrándiz Carbonell, 03801-Alcoy*

CASASÚS ESTELLÉS, TRINIDAD

trinidad.casasus@uv.es

*Universitat de València/ Dep. Matemàtiques per a l'Economia i l'Empresa
Avda. Tarongers, 46022-Valencia*

PÉREZ CANTÓ, JUAN CARLOS

jpc4655@telefonica.net

IES Andreu Sempere, Alcoy

Recibido (13/04/2014)

Revisado (22/08/2014)

Aceptado (12/09/2014)

RESUMEN: En el contexto económico actual, lograr el máximo de eficiencia es una cuestión clave para las empresas. En ocasiones, los métodos clásicos de análisis de la eficiencia, como el Data Envelopment Analysis (DEA), no ofrecen al empresario información suficiente al clasificar las unidades de decisión en dos grupos, las eficientes y las ineficientes. Los gestores demandan más información sobre la eficiencia de su empresa, de modo que la puedan comparar con la del resto de firmas y conocer su posición relativa dentro del grupo de empresas eficientes o ineficientes.

En este trabajo se propone un enfoque, basado en la lógica fuzzy, que completa los modelos DEA clásicos y permite, a partir de los modelos de super-eficiencia fuzzy, llegar a una ordenación de las empresas clasificadas en primera instancia como eficientes. La aplicabilidad práctica del enfoque propuesto se ilustra con un ejemplo real en el campo de las empresas textiles.

Palabras claves: DEA, Lógica fuzzy, Super-eficiencia, ordenación.

ABSTRACT: In the current economic context, achieving maximum efficiency is a key issue for companies. Classical methods analysing efficiency, such as Data Envelopment Analysis (DEA) are often not able to provide the companies' managers enough information about the efficiency of their companies as those methods classify the decision units into only two groups, efficient and inefficient. Managers demand more information on the efficiency of their companies in order to be able to compare themselves with other firms and to know their relative position within the group of efficient or inefficient firms.

This paper presents a fuzzy logic based approach which complements the classical DEA models allowing, by means of the concept of fuzzy super-efficiency, the attainment of an order for the companies firstly classified as efficient. The practical applicability of the proposed approach is illustrated with a real example in the field of textile firms.

Keywords: DEA, Fuzzy logic, Super-efficiency, ranking.

1. Introducción

La situación actual de los sectores industriales, y productivos en general, está sufriendo profundos cambios como resultado de la crisis que nos afecta a todos. En este contexto, la aplicación de métodos matemáticos y económicos bien fundamentados y rigurosos puede ser de gran ayuda a los gestores de las empresas para tomar decisiones encaminadas a mejorar la eficiencia, a ser más competitivos y, en general, a posicionarse mejor en el sector.

El análisis de eficiencia de las empresas se ha estudiado desde diferentes puntos de vista. En 1978, Charnes, Cooper y Rhodes (CCR) [1] fueron los primeros en proponer un método no paramétrico basado en técnicas de programación lineal, el Análisis Envolvente de Datos (DEA), como una alternativa para medir la eficiencia de cada unidad de toma de decisiones (DMU). Desde entonces, los modelos DEA han sido ampliamente aplicados y desarrollados para evaluar la frontera de producción y para evaluar la eficiencia de un conjunto de DMUs de un proceso de producción. El método tiene la ventaja de que, al no asumir una forma particular de la frontera de producción, la eficiencia de cada unidad se calcula por comparación con el conjunto de todas las DMUs.

Los resultados del DEA clasifican las DMUs en dos grupos, las que son eficientes y definen la frontera de producción y las que son ineficientes. Sin embargo, esta clasificación en muchas ocasiones resulta poco operativa y en muchas aplicaciones prácticas, las empresas están interesadas en un ranking, más allá de esta clasificación. No es suficiente con compararse con las otras firmas, sino que les resultaría muy útil conocer su posición y, si es posible, mejorar con respecto a las consideradas *más eficientes* [2].

Existen líneas de investigación en DEA dedicadas a mejorar las capacidades diferenciales del DEA para ordenar las DMUs, un resumen de las mismas se pueden consultar en [3]. En este sentido cabe citar los modelos de supereficiencia (super-efficiency) [3], que desarrollan una versión modificada del DEA, basados en la comparación de DMUs eficientes respecto a una tecnología de referencia, o los modelos de eficiencia cruzada (cross-efficiency) que proporcionan una evaluación por pares de las diferentes unidades, lo que hace posible obtener una ordenación [2 - 6].

A esta necesidad de ordenar las unidades según su eficiencia, se añade que las situaciones reales a menudo no son rígidas, muchas veces éstas no pueden ser descritas con precisión, aunque se hayan fijado unas variables (inputs/outputs) que creamos que las describen [7, 8]. Por otro lado, la propia situación puede estar afectada de incertidumbre y la formulación de los modelos no puede considerarse más que una aproximación a una realidad. Ambas cosas nos llevan a utilizar modelos DEA que admitan incertidumbre [2, 8]. Si se considera que esta incertidumbre puede abordarse desde la probabilidad, se tienen los modelos DEA probabilísticos [2, 9], pero cuando no es así, cuando las distribuciones de probabilidad no están justificadas, precisaremos de modelos DEA fuzzy [7 - 11]. Segunpta [7] fue el primero en introducir en los modelos DEA una aproximación matemática fuzzy, en los que la borrosidad* (fuzziness) se incorpora al modelo CCR [1] y al de Banker, Charnes y Cooper [12] (modelo BCC) definiendo niveles de tolerancia tanto en la función objetivo como en la violación de las restricciones. Desde entonces, ha habido un aumento continuo de interés en los métodos y aplicaciones de la teoría fuzzy en los problemas del DEA [2, 13, 14].

Describimos a continuación el modelo DEA fuzzy usado en el trabajo. En concreto, estudiamos un modelo de super-eficiencia fuzzy [14 - 17] y analizaremos las ordenaciones obtenidas al aplicar métodos basados en grados de tolerancia [18 - 22]. Por tratarse de un trabajo aplicado, en lugar de trabajar con modelos hechos directamente con los números fuzzy, hemos preferido considerar un enfoque basado en α -cortes, dado que el uso de intervalos de números entre 0 y 1 creemos que es una forma sencilla, práctica y fácilmente interpretable en el mundo empresarial. Partiremos de un modelo DEA fuzzy basado en α -cortes, siguiendo el modelo propuesto por Kao y Liu [8] y estudiamos las diferencias y mejoras de las diferentes opciones propuestas. Presentaremos un algoritmo que, basándose en los resultados de estos modelos, permiten ordenar las unidades eficientes. Ilustraremos nuestro método con una aplicación real a 48 empresas del sector textil (subsectores hilatura, tejeduría y acabados).

* En todo el trabajo hemos preferido conservar el término inglés “fuzzy”, en lugar de traducirlo como borroso, difuso, nebuloso, etc., y hacemos lo mismo para el término “crisp”. Tampoco lo hemos traducido por nítido, preciso, etc., puesto que en ambos casos la traducción no es única.

Habitualmente existe bastante consenso con respecto a las empresas que no resultan eficientes porque ellas mismas suelen ser conscientes de sus debilidades. Sin embargo, para los gestores resulta poco operativo que el número de empresas que resultan eficientes resulte elevado. Conocedores de la realidad de estas empresas los empresarios son reacios a admitir ese empate. Por esta razón, el análisis de super-eficiencia, que permite profundizar en las empresas que en una primera fase resultan eficientes, resulta muy útil. Además, utilizando modelos de supereficiencia se puede establecer una ordenación que ayuda a diseñar políticas de actuación.

2. Modelo DEA fuzzy basado en α -cortes

Consideramos n DMUs de las que conocemos m inputs y s outputs. La eficiencia de una DMU, j_0 , puede obtenerse resolviendo el modelo DEA, desarrollado por Charnes, Cooper and Rhodes [1, 23]:

$$E_{j_0} = \text{Max} \left\{ \frac{\sum_{l=1}^s u_{lj_0} y_{lj_0}}{\sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij_0}} : \frac{\sum_{l=1}^s u_{lj_0} y_{lj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij_0} x_{ij}} \leq 1, u_{lj_0} \geq \varepsilon, v_{ij_0} \geq \varepsilon, 1 \leq j \leq n, 1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq m \right\} \quad (1)$$

Si por la naturaleza de los datos o de la situación modelizada necesitamos extender este modelo a una formulación fuzzy [23, 9], existen varias posibilidades [2, 7, 8, 14]. En este trabajo, por comodidad, tanto de la implementación como de la interpretación de los resultados, seguimos la aproximación fuzzy propuesta por Kao y Liu [8]. Para el conjunto de las n DMUs, suponemos que los m inputs y los s outputs vienen dados, respectivamente, por los números fuzzy \tilde{X}_{ij} y \tilde{Y}_{rj} , con funciones de pertenencia dadas respectivamente por $\mu_{\tilde{X}_{ij}}$ y $\mu_{\tilde{Y}_{rj}}$. Los α -cortes de estos números fuzzy, conjuntos de nivel para un grado de exigencia $\alpha \in [0,1]$, pueden formularse con los intervalos siguientes [8, 11]:

$$x_{ij}(\alpha) = \left[x_{ij}(\alpha)^L, x_{ij}(\alpha)^U \right], \quad y_{rj}(\alpha) = \left[y_{rj}(\alpha)^L, y_{rj}(\alpha)^U \right], \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq r \leq s, \quad (2)$$

donde

$$x_{ij}(\alpha)^L = \min_{x_{ij}} \left\{ x_{ij} \in \tilde{X}_{ij} \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha \right\}, \quad x_{ij}(\alpha)^U = \max_{x_{ij}} \left\{ x_{ij} \in \tilde{X}_{ij} \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha \right\}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

$$y_{rj}(\alpha)^L = \min_{y_{rj}} \left\{ y_{rj} \in \tilde{Y}_{rj} \mid \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha \right\}, \quad y_{rj}(\alpha)^U = \max_{y_{rj}} \left\{ y_{rj} \in \tilde{Y}_{rj} \mid \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha \right\}, \quad 1 \leq r \leq s, 1 \leq j \leq n.$$

Para incorporar la formulación fuzzy al modelo (1), Kao and Liu [6] proponen el siguiente problema

$$\tilde{E}_k = \text{Max} \left\{ \sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{rk} / \left(v_0 + \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ik} \right) : \sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{rj} / \left(v_0 + \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ij} \right) \leq 1, 1 \leq j \leq n, u_r, v_i \geq \varepsilon, v_0 \text{ sin restric.} \right\}. \quad (3)$$

Nosotros preferimos trabajar con el modelo dual del programa lineal asociado a (3), porque presenta menos dificultades computacionales y la interpretación de los multiplicadores es más directa para las empresas [2]. En concreto, el modelo con el que nosotros trabajamos es

$$\tilde{E}_k = \text{Min} \left\{ \theta_k : \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{X}_{ij} \leq \theta_k \tilde{X}_{ik}, \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{Y}_{rj} \geq \tilde{Y}_{rk}, \lambda_j \geq \varepsilon, 1 \leq i \leq m, 1 \leq r \leq s, 1 \leq j \leq n \right\}. \quad (4)$$

A partir del Principio de Extensión de Zadeh [10], la función de pertenencia correspondiente a la eficiencia fuzzy de la k -ésima DMU puede obtenerse como

$$\mu_{\tilde{E}_k}(z) = \sup_{x_{ij}, y_{rj}} \min \left\{ \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}), \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}), \forall i, j, r \mid z = E_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\}, \quad (5)$$

donde $E_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se calcula en la expresión (1).

La aproximación para construir la función de pertenencia (5) propuesta en Kao y Liu [8] es la obtención de sus α -cortes que forman una estructura anidada con respecto a α [11]. Precisamente esta estructura permite obtener la función de pertenencia calculando los extremos superior e inferior de los α -cortes. En otras palabras, podemos describir la función de pertenencia dada en (5) a través de los α -cortes,

$$E_{j_0}(\alpha) = [E_{j_0}^L(\alpha), E_{j_0}^U(\alpha)], \text{ para cada nivel } \alpha \in [0,1]. \quad (6)$$

Los extremos de los intervalos se obtienen resolviendo los dos programas lineales siguientes:

$$E_{j_0}^L(\alpha) = \text{Min} \left\{ \theta_{j_0} : \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j x_{ij}^L(\alpha) + \lambda_{j_0} x_{j_0}^U(\alpha) \leq \theta_{j_0} x_{j_0}^U, \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j y_{rj}^U(\alpha) + \lambda_{j_0} y_{rj_0}^L(\alpha) \geq y_{rj_0}^L, \lambda_j \geq \varepsilon, \right. \\ \left. 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq r \leq s \right\} \quad (7)$$

$$E_{j_0}^U(\alpha) = \text{Min} \left\{ \theta_{j_0} : \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j x_{ij}^U(\alpha) + \lambda_{j_0} x_{j_0}^L(\alpha) \leq \theta_{j_0} x_{j_0}^L, \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j y_{rj}^L(\alpha) + \lambda_{j_0} y_{rj_0}^U(\alpha) \geq y_{rj_0}^U, \lambda_j \geq \varepsilon, \right. \\ \left. 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq r \leq s \right\} \quad (8)$$

que pueden considerarse [8, 23] como funciones de $\alpha \in [0,1]$. Por tanto, si ambos son invertibles respecto a α , es posible definir $L(z) = [E_k^L(\alpha)]^{-1}$ y $R(z) = [E_k^U(\alpha)]^{-1}$ y la función de pertenencia vendrá dada por:

$$\mu_{E_k}(z) = \begin{cases} L(z), & z_1 \leq z \leq z_2, \\ 1, & z_2 < z < z_3, \\ R(z), & z_3 \leq z \leq z_4. \end{cases} \quad (9)$$

Si no podemos aceptar que sean invertibles, el conjunto de intervalos

$$\{[E_k^L(\alpha), E_k^U(\alpha)], \alpha \in [0,1]\}, \quad (10)$$

también permite mostrar la función de pertenencia, μ_E aunque la forma exacta de la función no se conozca de forma explícita. Disponemos por tanto de un sistema de conjuntos fuzzy que nos proporcionen la medida de eficiencia de cada DMU como un conjunto fuzzy, cuando a cualquiera de los datos, inputs y/u outputs se les atribuye naturaleza fuzzy.

Como hemos observado anteriormente, a los gestores de las empresas analizadas, conocer si la empresa es eficiente o no les suele resultar insuficiente, porque necesitan conocer en qué lugar está situada su firma respecto de las otras. Es conocido que no existen argumentos teóricos para ordenar las DMUs según su score de eficiencia [21, 12], por lo tanto debemos establecer algoritmos que permitan una ordenación a partir de los grados de eficiencia y que además resulte útil para los encargados de tomar decisiones en las empresas.

3. Algunas propuestas de ordenación de número fuzzy

Es conocido que los números fuzzy no siempre proporcionan un conjunto completamente ordenado, y esto hace que con los modelos de toma de decisión formulados a través de números y/o relaciones fuzzy resulte difícil distinguir el posible mejor caso del mediocre o incluso del peor. Conscientes de esto, a partir de los años setenta comenzó el estudio de la ordenación fuzzy. Bortolan y Degani [24] proporcionaron una revisión sistemática de los métodos de ordenación y analizaron algunas comparaciones entre ellos. Sin embargo, fueron Chen y Hwang [25] los primeros que presentaron una veintena de métodos de ordenación de números fuzzy clasificados dentro de cuatro clases principales de acuerdo con el método que cada uno utiliza. Hay métodos de relación de preferencia, métodos de medida fuzzy y su extensión, métodos de puntuación fuzzy y métodos de expresiones lingüísticas.

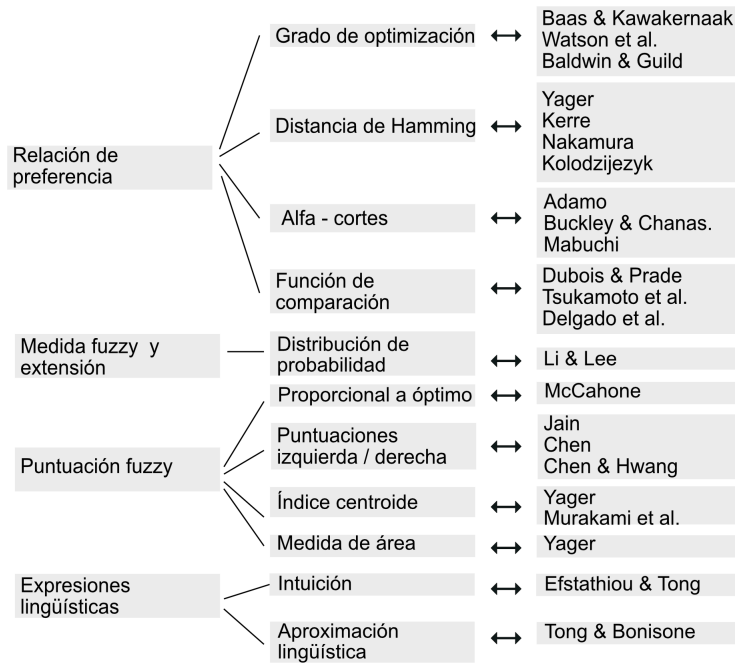


Figura 1: Clasificación de métodos de ordenación fuzzy basada en Chen y Hwang [25].
Fuente: Elaboración propia a partir de [26]

Sin embargo, en nuestro trabajo seguiremos dos estudios más recientes: Wang y Kerre [20, 27] y García-Cascales y Lamata [22] para organizar más de treinta índices de ordenación agrupados en tres categorías, de acuerdo al correspondiente número real, con referencia a los conjuntos y en función de las relaciones fuzzy.

Cuando aplicamos modelos DEA a casos reales, es habitual considerar un alto número de DMUs, y también de inputs y outputs. Esto hace que sea desaconsejable utilizar métodos de clasificación basados sólo en las relaciones fuzzy, lo que Wang y Kerre [27] clasifican como *enfoque de ordenación de tercera clase*, que necesitan $n(n-1)/2$ comparaciones (a veces para cada α -corte). Por estas razones, se recurre a métodos basados en puntuaciones numéricas y, entre ellos, destacan los basados en α -cortes. Una idea simple para comparar números fuzzy sería transformar estos intervalos en números crisp (que llamaremos *índices*) y tomarlos como referencia para establecer un orden. Recordemos que el objetivo de esta técnica no es obtener una clasificación final, sino una guía para elegir mejores alternativas.

Describimos brevemente algunos de ellos:

- (1) Métodos de Yager [18]. R. R. Yager propone cuatro índices para clasificar números fuzzy en $[0,1]$, de los que probablemente el más intuitivo y más utilizado sea el que nosotros utilizamos en este trabajo

$$Y(\tilde{E}_j) = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{1}{2} (E_j^L(\alpha) + E_j^U(\alpha)) d\alpha. \tag{11}$$

- (2) Método de Chen y Klein [19]. Hacen una partición del intervalo $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ tomando N valores del parámetro, $\alpha_l, l = 0, 1, \dots, N$, y consideran el siguiente índice

$$CK(\tilde{E}_j) = \frac{\sum_{l=0}^N (E_j^U(\alpha_l) - c)}{\sum_{l=0}^N (E_j^U(\alpha_l) - c) - \sum_{l=0}^N (E_j^L(\alpha_l) - d)}, \tag{12}$$

siendo $c = \min_j \{E_{ij}^L(\alpha_l)\}$ y $d = \max_j \{E_{ij}^U(\alpha_l)\}$.

(3) Método basado en distancias. Calcula la similitud de cualquier DMU a una eficiente ideal, es decir una para la que su eficiencia vendrá dada por el intervalo [1, 1]. Por ejemplo, si usamos la distancia de Manhattan, calculamos la similitud como:

$$S(\tilde{E}_0) = 1 - d_M(\tilde{E}_j) = 1 - \frac{1}{2N} \left(\sum_{j=1}^N |E_j^U(\alpha) - 1| + \sum_{j=1}^N |E_j^L(\alpha) - 1| \right) \quad (13)$$

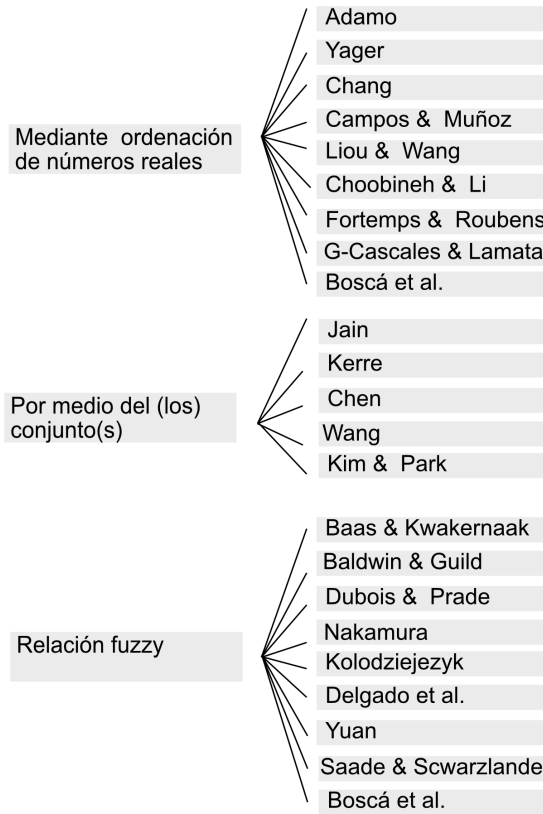


Figura 2: Clasificación de métodos de ordenación fuzzy basada en Wang y Kerre [20, 27]
Fuente: Elaboración propia a partir de [26]

Por simplificar la notación, representamos los índices (11), (12) y (13), genéricamente por Ψ de modo que, para todos ellos se puede establecer un orden del siguiente modo [21, 20, 27]:

Definición 1. El conjunto de números fuzzy $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^n$ puede ordenarse siguiendo el criterio.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_j > \tilde{E}_k & \text{ para } \Psi \Leftrightarrow \Psi_j > \Psi_k \\ \tilde{E}_j \approx \tilde{E}_k & \text{ para } \Psi \Leftrightarrow \Psi_j = \Psi_k \\ \tilde{E}_j \succeq \tilde{E}_k & \text{ para } \Psi \Leftrightarrow \Psi_j \geq \Psi_k \end{aligned} \quad (14)$$

Además, hemos incluido otro criterio, un método propuesto por Boscá et al. [21], en el que a partir de los números LR-fuzzy que representan los inputs

$$\tilde{X}_{ij} = (x_{ij}^L, x_{ij}^R, \gamma_{ij}^L, \gamma_{ij}^R), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

y los outputs

$$\tilde{Y}_{ij} = (y_{ij}^L, y_{ij}^R, \delta_{ij}^L, \delta_{ij}^R), \quad 1 \leq r \leq s, 1 \leq j \leq n$$

se consigue establecer una preferencia entre las DMUs y se permite diferenciar entre las DMUs cuando se dé la igualdad de índices.

- (4) Método de Boscá *et al.* [21]. Se trata de de un método estadístico en el que los autores analizan la eficiencia de cada DMU en diferentes escenarios. Así, para la unidad j_0 , los autores consideran dos índices:

$$R_{j_0}^1 = \frac{e_{j_0}}{\text{card}(\Gamma_{j_0})}, \quad R_{j_0}^2 = \begin{cases} \frac{\sum_{a,b,c,d} E(x_{ij}^a, x_{j_0}^b, y_{ij}^c, y_{j_0}^d) - e_{j_0}}{\text{card}(\Gamma_{j_0}) - e_{j_0}}, & \text{card}(\Gamma_{j_0}) \neq e_{j_0} \\ 0, & \text{card}(\Gamma_{j_0}) = e_{j_0} \end{cases} \quad (15)$$

donde e_{j_0} es el número de veces en el que la j_0 -ésima DMU es eficiente, el conjunto Γ_{j_0} viene

dado por $\Gamma_{j_0} = \{E(x_{ij}^a, x_{j_0}^b, y_{ij}^c, y_{j_0}^d) \mid a, b, c, d \in I\}$, y $\text{card}(\Gamma_{j_0})$ representa el cardinal de Γ_{j_0}

En este trabajo, como en el de Boscá et al. [21], consideraremos $I = \{t, A, T\}$, es decir que cada dato puede tomar tres valores, que serán los siguientes:

$$\begin{aligned} x_{ij}^t &= x_{ij}^L - \gamma_{ij}^L, & x_{ij}^A &= \frac{x_{ij}^L + x_{ij}^U}{2}, & x_{ij}^T &= x_{ij}^U + \gamma_{ij}^U, \\ y_{ij}^t &= y_{ij}^L - \delta_{ij}^L, & y_{ij}^A &= \frac{y_{ij}^L + y_{ij}^U}{2}, & y_{ij}^T &= y_{ij}^U + \delta_{ij}^U. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la elección que hemos hecho de I , se tiene que $\text{card}(\Gamma_{j_0}) = 3^4 = 81$.

Definición 2. El conjunto de números $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^n$ puede ordenarse como:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_j > \tilde{E}_k &\Leftrightarrow R_j^1 > R_k^1 \text{ o } [R_j^1 = R_k^1 \text{ y } R_j^2 > R_k^2] \\ \tilde{E}_j \approx \tilde{E}_k &\Leftrightarrow R_j^1 = R_k^1 \text{ y } R_j^2 = R_k^2 \\ \tilde{E}_j \succeq \tilde{E}_k &\Leftrightarrow R_j^1 \geq R_k^1 \text{ o } R_j^2 \geq R_k^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Como hemos dicho, los valores de los respectivos índices no son útiles para clasificar las unidades de acuerdo a su eficiencia. En realidad, se trata de indicadores de magnitud para establecer preferencias entre las unidades. Pasemos a continuación a describir el modelo fuzzy a cuyas soluciones aplicamos la ordenación.

4. Modelos de super-eficiencia

El objetivo de los modelos DEA, como ya se ha comentado, es evaluar la eficiencia general de las DMUs que son responsables de convertir un conjunto de inputs en un conjunto de outputs, donde las DMUs eficientes se identifican con índices de eficiencia 1 y las DMUs ineficiente con índices de eficiencia inferiores a 1. Cuando se está evaluando, la valoración de la eficiencia de una DMU es medida en referencia a la combinación de un conjunto de DMUs DEA eficientes que definen la frontera de eficiencia. De la aplicación de algunos modelos DEA, como el modelo CCR, no podemos deducir una comparación entre las unidades eficientes. Ésta es una de las razones por la que algunos investigadores han dedicado su esfuerzo al estudio de la super-eficiencia, cuyo objetivo es establecer una clasificación entre las DMUs DEA eficientes.

4.1. Evolución de los modelo de super-eficiencia

El modelo de super-eficiencia inicialmente desarrollado por Banker et al. [28] y posteriormente modificado por Andersen y Petersen [4], introduce una técnica para evaluar la eficiencia en el que incorpora los principios básicos de la DEA y relaja el límite superior de 1 para las unidades eficientes. La esencia del modelo de super-eficiencia propuesto por Andersen y Petersen está en el hecho de que los datos de una determinada DMU, mientras que se está evaluando, no están incluidos en la frontera de eficiencia y los valores de eficiencia de alguna DMU pueden ser mayor 1, derivando de aquí el término super-eficiencia. Tal como se afirma en [15], el modelo de Andersen y Petersen no sólo se emplea originalmente para reordenar la eficiencia de DMUs [2, 5, 7], [29 – 31], sino también en la identificación de valores atípicos y clasificación de unidades eficientes [32].

En cuanto a trabajos que hayan introducido metodología fuzzy podemos citar entre otros a Wang Mei *et al.* [33] que realizan una extensión fuzzy del modelo super-eficiencia, cuyo modelo se construye sobre la base de las reglas de comparación de números fuzzy. Yang y Zhao [34] proponen un modelo de super-eficiencia fuzzy utilizando la teoría de posibilidades. Por otra parte Hsiao *et al.* [35] proponen un modelo DEA fuzzy de super-eficiencia basado en holguras, aplicando el modelo a entidades bancarias, en el que exponen un procedimiento para discriminar mejor las DMUs que tienen un mismo índice de eficiencia.

4.2. Modelo super-eficiencia fuzzy propuesto

A partir del modelo de Andersen y Petersen [4], consideramos el modelo dual para evaluar la super-eficiencia, en el que ya aparece eliminada la restricción k -ésima

$$\begin{aligned}
 E_k &= \text{Min } \theta \\
 \text{s.a. } & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Siguiendo el razonamiento propuesto por Kao y Liu [8] y teniendo en cuenta el planteamiento anterior, de super-eficiencia, una extensión fuzzy del modelo vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
 E_k &= \text{Min } \theta \\
 \text{s.a: } & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} \leq \theta \tilde{x}_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} \geq \tilde{y}_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Como hacíamos en (9), obtenemos la función de pertenencia por medio de los α -cortes

$$E_k(\alpha) = [E_k^L(\alpha), E_k^U(\alpha)], \tag{19}$$

calculados para cada nivel de exigencia $\alpha \in [0, 1]$. Los extremos inferiores (caso desfavorable) y extremos superiores (caso favorable) se obtienen mediante los dos programas lineales siguientes:

$$\begin{aligned}
 E_k^L(\alpha) &= \text{Min } \theta \\
 \text{s.a: } & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j x_{ij}^L(\alpha) \leq \theta x_{ik}^U, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j y_{rj}^U(\alpha) \geq y_{rk}^L, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 E_k^U(\alpha) &= \text{Min } \theta \\
 \text{s.a: } & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j x_{ij}^U(\alpha) \leq \theta x_{ik}^L, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j y_{rj}^L(\alpha) \geq y_{rk}^U, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{21}$$

obteniendo (por el proceso descrito anteriormente) los n conjuntos fuzzy $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^n$ correspondientes.

A partir de aquí, tal como se describen en la sección 2, aplicamos el modelo de super-eficiencia fuzzy basado en el método de α -cortes, para establecer una clasificación entre las DMUs. Cabe insistir en que el método discutido aquí lo consideramos post-análisis ya que no sustituyen al modelos DEA, sino que, más bien proporciona un valor añadido.

PASO 1: Construir números fuzzy trapezoidales a partir de los inputs y outputs.

PASO 2: Establecer niveles de satisfacción adecuados, un conjunto finito de valores de $\alpha \in [0, 1]$.

PASO 3: Resolvemos los modelos

$$E_k^L(\alpha) = \text{Min} \left\{ \theta : \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j x_{ij}^L(\alpha) \leq \theta x_{ik}^U, \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j y_{rj}^U(\alpha) \geq y_{rk}^L, \lambda_j \geq 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq r \leq s \right\}$$

$$E_k^U(\alpha) = \text{Min} \left\{ \theta : \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j x_{ij}^U(\alpha) \leq \theta x_{ik}^L, \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j y_{rj}^L(\alpha) \geq y_{rk}^U, \lambda_j \geq 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq r \leq s \right\}$$

y obtener los intervalos $E_k(\alpha) = [E_k^L(\alpha), E_k^U(\alpha)]$.

PASO 4: Construcción de números fuzzy $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^n$

PASO 5: Ordenación de las DMUs a partir de la ordenación de $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^n$

5. Aplicación numérica

En este estudio nos proponemos aplicar la metodología DEA a un grupo de empresas del sector textil-hogar, para posteriormente incorporar, como un elemento más del problema, la incertidumbre que aparece de forma natural. Los gestores saben que, a menudo, los datos involucrados en las aplicaciones reales no pueden ser medidos de forma precisa. En este sentido cabe preguntarse hasta qué punto los resultados de un análisis que no contemple la incertidumbre deberían modificar la política de la empresa.

5.1. Entorno de aplicación

Los datos utilizados se refieren al año 2009 y han sido extraídos de la base de datos SABI (directorio de empresas españolas y portuguesas que recoge información general y datos financieros y dentro de España cubre más del 95 % de las compañías de las 17 Comunidades Autónomas que presentan sus cuentas en Registros Mercantiles), elaborada por Bureau Van Dijk. Se trata de empresas localizadas en los municipios Alcoi, Cocentaina y Muro cuya actividad se encuadra en alguno de los grupos en que la clasificación CNAE-93 divide el sector textil. Del total de empresas se han escogido aquellas con un número de empleados superior a 4 y que estén activas por lo menos hasta acabar el año 2009. En total se tomaron 48 empresas, dedicadas a los subsectores hilatura, tejeduría y acabados.

Teniendo en cuenta que las empresas seleccionadas cubren por completo todas las fases necesarias (hilatura, tejeduría y acabados) para obtener el producto final, el modelo dual DEA CCR con orientación input se ha aplicado a las empresas, agrupadas por subsectores. Hemos comparado los resultados obtenidos de la eficiencia con los obtenidos al aplicar el mismo modelo para todo el conjunto de las empresas, no separados por subsectores. Se observa que los resultados crisp son ligeramente más bajos cuando las empresas están agrupadas en subsectores. Los cambios en los índices de eficiencia son debidos al hecho de que la frontera de la eficiencia varía cuando se consideran diferentes conjuntos de estudio.

Considerando los resultados obtenidos al analizar la eficiencia crisp de las empresas textiles y realizando a continuación un tratamiento de la incertidumbre desde una perspectiva fuzzy utilizando números fuzzy trapezoidales cuya construcción detallamos a continuación, avanzamos ya que los soportes de los números fuzzy considerados son intervalos con desviaciones variables de hasta un 20% [22, 23]. Además nos interesa analizar una posible ordenación de las empresas eficientes siguiendo las metodologías descritas en la sección 2.

La aplicación del modelo DEA fuzzy descrito en la sección 3 (modelo basado en α -cortes) a nuestros datos proporciona un conjunto de intervalos de eficiencia. Como hemos visto en la sección 2, una posibilidad para comparar los números fuzzy es transformar estos valores en números crisp (índices), y considerarlos para el establecimiento de un orden similar al existente en los números crisp. Nuestro objetivo no es establecer una clasificación final, sino proporcionar una herramienta útil para la elección de las mejores alternativas, así como para la obtención de una relación de orden, como lo hemos descrito en la sección 2. Describimos a continuación el procedimiento seguido en nuestra aplicación.

5.2. Resultados de super-eficiencia y super-eficiencia fuzzy

En primer lugar, hemos aplicado el modelo DEA para estudiar la eficiencia de 48 DMUs. Como en [23] se han considerado cuatro inputs y dos outputs que reflejan[†] las características de las empresas.

INPUTS:

- *Existencias*: bienes de la empresa destinados a la venta o a su transformación e incorporación al proceso productivo.
- *Número de empleados*: Personal de la empresa en el año de referencia.
- *Gastos de personal*: Retribuciones al personal, cuotas a la Seguridad Social y otros gastos de carácter social.
- *Dotaciones para amortización de inmovilizado*: Depreciación sistemática anual efectiva sufrida por el inmovilizado intangible y material, por su aplicación al proceso productivo.

OUTPUTS:

- *Importe neto de cifras de ventas*: La renta que una empresa recibe de sus actividades comerciales normales, por lo general de la venta de bienes y servicios a los clientes.
- *Ingresos de explotación*: Ingresos obtenidos por la empresa al realizar su actividad típica.

[†] Los datos numéricos para estos inputs y outputs pueden consultarse en el trabajo previo de los autores [23].

Tras aplicar el modelo (1), obtenemos 9 DMUs con valor de eficiencia 1, y dos DMUs con valores de eficiencia cercana a 1, en concreto 0.975 y 0.913, (véase Tabla 1 [14, 23]). Las DMUs con eficiencia inferior a estos valores no se consideran ya en la siguiente etapa.

Tabla 1. Eficiencia crisp de 48 empresas.

DMU	Ef. Crisp	DMU	Ef. Crisp	DMU	Ef. Crisp	DMU	Ef. Crisp
K1	0.850	K13	1.000	K25	0.553	K37	0.359
K2	0.310	K14	0.877	K26	1.000	K38	1.000
K3	0.814	K15	0.615	K27	0.836	K39	0.509
K4	1.000	K16	0.480	K28	0.747	K40	0.242
K5	0.339	K17	1.000	K29	0.601	K41	0.329
K6	0.312	K18	0.913	K30	0.975	K42	0.306
K7	0.562	K19	0.562	K31	0.687	K43	1.000
K8	0.526	K20	1.000	K32	0.249	K44	0.607
K9	1.000	K21	0.097	K33	1.000	K45	0.526
K10	0.504	K22	0.306	K34	0.503	K46	0.892
K11	0.559	K23	0.333	K35	0.572	K47	0.828
K12	0.445	K24	0.196	K36	0.592	K48	0.375

Fuente: Elaboración propia.

A continuación aplicaremos modelos de super-eficiencia a las unidades señaladas, pero además vamos a introducir métodos fuzzy de forma que, además de abordar la incertidumbre de los datos, sea viable considerar como “eficientes” las dos DMUs con eficiencia casi 1. Tendremos así modelos de super-eficiencia fuzzy que nos van a proporcionar información extra deseada sobre las DMUs.

Para transformar los inputs y outputs en números fuzzy construimos números fuzzy trapezoidales [11] estableciendo como soporte de los trapecios variaciones aleatorias (entre 10% y 20%) de los datos crisp, y para la meseta variaciones aleatorias (entre 5% y 10%) de los datos considerados precisos. Por ejemplo, podemos construir trapecios cuya base es $[0.85*\text{dato crisp}, 1.15*\text{dato crisp}]$ y cuyo techo es $[0.95*\text{dato crisp}, 1.05*\text{dato crisp}]$. Desde el punto de vista técnico, para todas las aplicaciones prácticas hemos utilizado el programa GAMS® con el solver LINGO® o CPLEX® para optimizar.

Tomando las once DMUs consideradas eficientes, que denominaremos KE1, KE2, ..., KE11, al aplicar el modelo DEA fuzzy a las empresas textiles y calcular los índices de Yager, Chen y Klein, índice basado en distancias y el índice de Bosca *et al.* [14, 23], las ordenaciones obtenidas son muy parecidas, no proporcionando información extra sobre preferencias de unas DMUs respecto a otras, tan solo la diferenciación y poco más, entre las eficientes y las no eficientes. Intentar obtener más información nos hace plantearnos introducir los modelos de super-eficiencia y de super-eficiencia fuzzy.

Aplicamos a las once DMUs consideradas el programa (17) para obtener la super-eficiencia crisp, y los programas lineales (20) y (21) que nos proporcionan el extremo inferior y superior de los α -cortes del modelo de super-eficiencia fuzzy.

Tabla 2. Intervalos de super-eficiencia

DMU	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$	<i>E. crisp</i>
KE1	[0.8097,1]	[0.837,1]	[0.865,1]	[0.8937,1]	[0.9232,1]	[0.953,1]	1
KE2	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	1
KE3	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	1
KE4	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	1
KE5	[0.7583,1]	[0.7801,1]	[0.8025,1]	[0.8256,1]	[0.8493,1]	[0.8737,0.981]	0.913
KE6	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	1
KE7	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	1
KE8	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	0.975
KE9	[0.9917,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	1
KE10	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	1
KE11	[0.7956,1]	[0.8238,1]	[0.853, 1]	[0.8834,1]	[0.9149,1]	[0.948,1]	1

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 2 se muestran los resultados de super-eficiencia crisp y super-eficiencia fuzzy, caso favorable y desfavorables, expresados como intervalos, para los diferentes valores α , para las DMUs seleccionadas. Se observa que en muchos casos el intervalo se reduce a un punto y en otros hay una pequeña variación en la longitud del intervalo, lo cual puede interpretarse como que esas DMUs podrían mejorar.

En la tabla 3 mostramos los valores numéricos de los índices de ordenación expresados en (11), (12), (13) y (15). Se puede comprobar que, a pesar de que los valores numéricos no son los mismos, los cuatro métodos establecen exactamente la misma ordenación de las once empresas.

Tabla 3. Resultados de los índices analizados

DMUs	Yager	Chen & Klein	Dis. Manhattan	R1	R2	Ef. Crisp
KE1	0.9402	0.6688	0.94016	0.5000	0.8803	1
KE2	1	1	1	1.0000	0.0000	1
KE3	1	1	1	1.0000	0.0000	1
KE4	1	1	1	1.0000	0.0000	1
KE5	0.9058	0.563	0.9059	0.4167	0.8386	0.913
KE6	1	1	1	1.0000	0.0000	1
KE7	1	1	1	1.0000	0.0000	1
KE8	1	1	1	1.0000	0.0000	0.975
KE9	0.9993	0.9943	0.99931	0.9167	0.9917	1
KE10	1	1	1	1.0000	0.0000	1
KE11	0.9349	0.6498	0.9349	0.5000	0.8697	1

Fuente: Elaboración propia.

En las tablas 4 y 5 quedan reflejados los resultados de ordenación de super-eficiencia crisp y super-eficiencia fuzzy.

Tabla 4. Ordenación de super-eficiencia crisp

Posición	DMU
Primero	KE1, KE2, KE3, KE4, KE6, KE7, KE9, KE10, KE11
Segundo	KE8
Tercero	KE5

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Ordenación de super-eficiencia fuzzy

Posición	DMU
Primero	KE2, KE3, KE4, KE6, KE7, KE8, KE10
Segundo	KE9
Tercero	KE1
Cuarto	KE11
Quinto	KE5

Fuente: Elaboración propia.

Las ordenaciones basadas en los modelos de super-eficiencia crisp no discriminan lo suficiente entre las DMUs empatadas con un 1, por lo tanto no aportan adicional a los modelos de eficiencia. Sin embargo, al introducir pequeñas tolerancias en los datos de las once DMUs, comprobamos que todos los métodos de ordenación utilizados coinciden en el ranking. Aparecen siete empresas empatadas en la primera posición y las otras cuatro ordenadas.

El uso de la super-eficiencia fuzzy no sólo resulta útil porque sea capaz de discriminar más que su versión crisp, sino que, además, describe mejor el comportamiento de algunas empresas. Así, la empresa KE8, que no era eficiente desde el punto de vista crisp, pasa a ocupar la primera posición junto con otras seis empresas. Sin embargo, la empresa KE5 no era eficiente crisp y ocupa el último lugar en el ranking fuzzy. Por otro lado, si se observa la tabla 2, se puede comprobar que los intervalos de eficiencia que presentan mayor amplitud son penalizados en la ordenación, así las empresas KE1, KE11 y KE5 (que son las que presentan intervalos más amplios) pasan a ocupar las últimas posiciones.

6. Conclusiones

El estudio de la eficiencia permite clasificar las DMUs en dos grandes grupos, los que tienen eficiencia 1 y los que no. Estos métodos, a pesar de ser muy utilizados en la empresa, presentan una dificultad para transmitir los resultados a los gestores ya que clasifican como ineficiente tanto a una empresa cuyo ratio de eficiencia ha sido 0.1 como a una empresa que haya obtenido un 0.9. Para paliar esta dificultad existen varios métodos que permiten ordenar las DMUs.

Si nuestro interés es poder utilizar modelos de eficiencia en presencia de incertidumbre y que los gestores cuenten con herramientas suficientes para poder ordenar las empresas evitando los empates, los modelos de supereficiencia pueden resultar muy útiles. Por ello, en nuestro estudio hemos relajado la condición de eficiencia, que es cumplida por 9 DMUs y añadimos otras dos, que serán la DMU5 y la DMU8, con eficiencia 0.913 y 0.975 respectivamente. El resto queda ya por debajo de 0.9 de eficiencia crisp.

Al aplicar el modelo de super-eficiencia fuzzy, utilizando modelos basados en α -cortes y siguiendo el razonamiento propuesto por Kao y Liu, y la posterior ordenación por los métodos de ordenación fuzzy de Yager, Chen y Klein, Manhattan y Boscá et al., obtenemos los mismos resultados en todos ellos.

Los métodos fuzzy aplicados permiten establecer una mayor discriminación, cinco posiciones diferentes, observando además que la DMU *incorporada* con eficiencia crisp 0.975 (cercana al valor 1) mejora frente a otras que tenían valor 1 de eficiencia. Esto corrobora la intuición de no abandonar una eficiencia cercana a 1. La DMU *incorporada* con valor de eficiencia crisp 0.913 se mantiene en la última posición.

La aplicación del modelo de super-eficiencia fuzzy, permite refinar los resultados obtenidos en el caso de eficiencia crisp, clasificando las DMUs en cinco grupos. El estudio se ha realizado con gran simplicidad y sin hipótesis añadidas sobre los datos ni necesidad de introducir distribuciones de probabilidad. Como inconveniente cabe señalar que seguimos sin poder establecer preferencias entre las siete DMUS mejor posicionadas todas con super-eficiencia unitaria.

Referencias bibliográficas

1. A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research* 2 (1978) 429–444.
2. L. Plá Ferrando, Modelos flexibles para la valoración de la eficiencia, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2013.
3. N. Adler, L. Friedman, Z. Sinuany-Stern, Review of ranking methods in data envelopment analysis context, *European Journal of Operational Research* 140 (2002) 249–265.
4. P. Andersen, N.C. Petersen, A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, *Management Science* 39 (10) (1993) 1261–1264.
5. J. Doyle, R. Green, Efficiency and Cross-Efficiency in DEA: derivations, meanings and uses. *Journal of the Operations Research Society* 45 (1994) 567–578.
6. J. Doyle, R. Green, Cross-evaluation in DEA: improving discrimination among DMUs. *INFOR* 33 (1995) 205–222.
7. J. K. Sengupta, A fuzzy systems approach in Data Envelopment Analysis. *Computers and Mathematics with Applications* 24 (1992) 259–266.
8. C. Kao, S.T. Liu, Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems* 113 (2000) 427–437.
9. L. Plá, T. Casasús, J. C. Pérez, V. Liern, Análisis de eficiencia con datos inciertos. Una aplicación a la industria textil. *Actas XVI Congreso Español sobre Tecnología y lógica Fuzzy* (2012).
10. L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets, Information and Control* 8 (1965) 338–353.
11. H. J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, 2nd ed., Kluwer–Nijho, Boston (1991). PP
12. R. Banker, A. Charnes, W. Cooper, Some models for estimating technical and scale efficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science* 30 (1984) 1078–1092.
13. J. M. Cadenas, M. J. Canós, M. C. Garrido, C. Ivorra, V. Liern, Soft-computing based heuristics for location on networks: The p -median problem, *Applied Soft Computing Journal* 11(2) (2011) 1540–1547.

14. T. Casasús, V. Liern, L. Plá, J.C. Pérez An efficiency fuzzy study with application to the textile sector, *Actas The 5th WSEAS International Conference on Manufacturing Engineering, Quality and Production Systems (MEQAPS 12)* (2012) 95-100.
15. C. P. Bao, C. H. Jen, C. C. Guey, C. L. Lin, The linear programming approach on A-P super-efficiency Data Envelopment Analysis model of infeasibility of solving model. *American Journal of Applied Sciences* 11(4) (2014) 601-605.
16. M. Xue, P.T. Harker, Note: Ranking DMUs with infeasible super-efficiency DEA models. *Manage. Sci.*, 48 (2002) 705-710.
17. Y.Chen, Measuring super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility, *European Journal of Operational Research*, 161 (2005) 545-551.
18. R. R. Yager, A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of the Unit Interval, *Information Sciences* 24 (1981) 143-161.
19. C.B. Chen, C.M. Klein, An efficient approach to solving fuzzy MADM problems, *Fuzzy Sets and Systems* 88 (1997) 51–67.
20. X. Wang, E. Kerre, Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I), *Fuzzy Sets and Systems* 118 (2001) 375 –385.
21. J.E. Boscá, V. Liern, R. Sala, A.Martínez, Ranking decision making units by means soft computing DEA models. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 19(1) (2011) 115-134.
22. M. S. García-Cascales, M. T. Lamata, A modification of the index of Liou and Wang for ranking fuzzy number, *Int Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 15(4) (2007) 411- 424.
23. L. Plá, J.C. Pérez, T. Casasús El sector textil en la zona del alcoià. Un análisis fuzzy de eficiencia, *rect@ 13* (2012) 57-74.
24. G. Bortolan, R. Degani, A review of some methods for ranking subsets, *Fuzzy Sets and Systems* 15 (1985) 1-19.
25. S. J. Chen, C. L. Hwang, *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*, Springer-Verlang, Berlin 1992.
26. M. S. García-Cascales, *Métodos para la comparación de alternativas mediante un Sistema de Ayuda a la Decisión (S.A.D.) y Soft Computing*, Tesis Doctoral, <http://repositorio.bib.upct.es/dspace/bitstream/10317/1022/1/Msgc.pdf>, 2009.
27. X.Wang, E. Kerre, Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II). *Fuzzy Sets and Systems* 118 (2001) 387–405.
28. R. D. Banker, S. M. Datar, Analysis of cost variances for management control in hospitals. *Research in Governmental and Nonprofit Accounting* 5 (1989)268–91.
29. S.C. Ray, The directional distance function and measurement of super-efficiency: An application to airlines data, *European Journal of Operational Research* 59 (2008) 788-797.
30. S.C., Pan, S.Y. Liu, C.J. Peng ,P.C. Wu., Local government efficiency evaluation: Consideration of undesirable outputs and super-efficiency. *Afr. J. Bus. Manage.* 5 (2011) 4746-4758.
31. S. Ebadi, Using a Super Efficiency Model for Ranking units in DEA. *Applied Math. Sci.*, 41 (2012) 2043-2048.
32. R. D. Banker, H. Chang, The super-efficiency procedure for outlier identification, not for ranking efficient units, *European Journal of Operational Research* 175 (2005) 1311-1320.
33. M. Wang, L. Liang, Y. Li, Fuzzy Super-Efficiency DEA Model. *Chinese Journal of Management Science*, 17(2) (2009) 117–124.
34. J. Yang, H. Zhao, Fuzzy Super-Efficiency DEA Model and Its Application: Based on Fuzzy Structured Element. *Fuzzy Information and Engineering*, AISC 78 (2010) 345–351.
35. B. Hsiao, C. Cher, Y. Chiu, C. Chiu, Using fuzzy super-efficiency slack- based measure data envelopment analysis to evaluate Taiwan’s commercial bank efficiency. *Expert Systems with Applications* 38 (2011) 9147–9156.