NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 88, marzo de 2015, páginas 93-103

Análisis competencial de una tarea de modelización abierta

César Gallart Palau (Colegio CEU-San Pablo y Universidad Cardenal Herrera -CEU. España)
Irene Ferrando (Universidad de Valencia. España)
Lluís M. García-Raffi (Universidad Politécnica de Valencia. España)

Fecha de recepción: 16 de julio de 2014
Fecha de aceptación: 4 de diciembre de 2014

Resumen

Según diversos autores, las actividades dirigidas al desarrollo conjunto de las competencias matemáticas deben relacionarse con la realidad y los procesos de modelización matemática. El objetivo del presente trabajo es describir, a partir de la producción de un grupo de alumnos de tercer curso de ESO, las competencias que los alumnos han de poner en juego para resolver una tarea genuina y completa de modelización y que formarían parte de la propia competencia en Modelización.

Palabras clave

Alfabetización matemática; Competencias matemáticas; Proceso de modelización; Tareas de modelización; Educación Secundaria

Title

Competence analysis of an open modelling task

Abstract

According to several authors, the activities that are focused to develop mathematical skills should be related with real problems and the mathematical modeling processes. The aim of this paper is to describe, analyzing the productions of a group of ninth grade's students, the competencies that they have to put into play in order to solve a genuine and complete modeling task These competencies form part of the modeling competence.

Keywords

Mathematical Literacy; Mathematics Competencies; Modelling Process; Modelling Task; Secondary Education

1. Introducción y marco teórico

El enfoque competencial en los sistemas educativos actuales tiene su referente en el informe PISA de la OCDE. Este enfoque tiene como intención promover la alfabetización matemática ("mathematical literacy" en el original en inglés), definida como la capacidad de "*entender las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos*" (OCDE, 2006, p. 74), siendo uno de sus aspectos cruciales encontrar nuevas formas de definir y describir las competencias que son necesarias desarrollar en los alumnos a lo largo de las diferentes etapas educativas para que sean competentes en matemáticas (Niss, 2003, p. 217). El informe PISA identifica ocho competencias matemáticas generales, similares a las identificadas en el proyecto KOM (Blomhøj y Jensen, 2007, p. 47), que los estudiantes deben poner en juego para resolver los problemas que plantean en las pruebas: Pensar y razonar; Argumentar; Plantear y resolver problemas; Modelizar; Representar; Usar símbolos y formalismos;

Comunicar; Utilizar herramientas y recursos (TICs). Dicho informe también incide en la importancia que, en los sistemas educativos actuales, debe tener el "aprender a matematizar":

> La evaluación de las matemáticas que hace PISA exige a los alumnos que se enfrenten con problemas matemáticos que están basados en algún contexto del mundo real, para lo cual los alumnos tendrán que, entre otras cosas, activar las competencias matemáticas pertinentes para resolver el problema y embarcarse en un proceso de matematización (Puig, 2006, p. 7).

Una forma de abordar el proceso al que se refiere Puig es a través de la resolución de tareas de modelización. Este tipo de tareas promueve la matematización de situaciones reales, al tiempo que lleva a los estudiantes a interpretar, reflexionar y validar los resultados matemáticos en la realidad, todos ellos procesos esenciales en la resolución de problemas orientados a fomentar la alfabetización matemática (Blum y otros, 2002, p. 151). En efecto, la resolución de una tarea de modelización, desde un punto de vista normativo e idealizado (Borromeo, 2006), abarca una serie de fases (que pueden variar de unos autores a otros, especialmente en las etapas iniciales correspondientes al mundo real) que transitan, en un doble proceso de matematización vertical y horizontal (Treffers, 1987), entre el mundo real y el mundo matemático. El ciclo de Blum y Leiβ (2007), en la Figura 1, nos ofrece un marco de referencia a partir del cual describir el proceso de resolución de una tarea de modelización. La representación del proceso completo de modelización mediante un ciclo tiene que ser visto como un esquema simplificado e idealizado, y no como un algoritmo que se debe recorrer de forma lineal (Maaβ 2006, p.115).

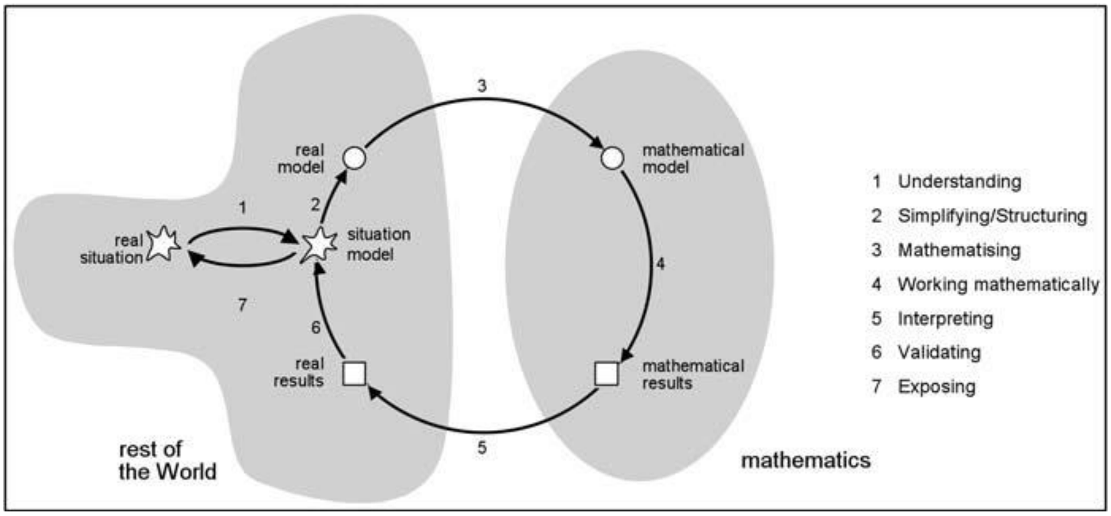

Figura 1. Ciclo de modelización de Blum y Leiβ (2007)

Se parte de una situación real que debe ser *comprendida* por el estudiante con el fin de *formular* un problema (1). Para obtener un modelo de la realidad, ésta debe ser previamente *simplificada y estructurada* (2). Mediante suposiciones, generalizaciones y formalizaciones se realiza la *matematización* (3) de forma que, al identificar las matemáticas que subyacen en el modelo real, éste se transforma en un modelo matemático. Una vez establecido el modelo matemático, se *resuelve matemáticamente* (4), obteniendo una solución matemática, que tendrá que *interpretarse* (5) en la situación real inicial, obteniendo así una solución real. Posteriormente se *valida* (6) todo el proceso seguido y se comprueba que la solución real efectivamente resuelve el problema y que el modelo es el adecuado, o por el contrario, que debe ser redefinido o refinado en una nueva vuelta por el ciclo. Finalmente el proceso de resolución debe ser *comunicado* (7) (Blum y Niss, 1991, p. 38-39).

Blomhøj y Jensen (2003, p.129) definen la competencia en Modelizar como la capacidad de afrontar correctamente y de forma autónoma todos los aspectos de un proceso de resolución de una tarea de modelización en un contexto determinado. Por tanto, para recorrer este ciclo esquematizado en la Figura 1, los estudiantes deben poner en juego los conocimientos, habilidades y actitudes que conforman la competencia en Modelizar, que comprende las subcompetencias cognitivas necesarias para llevar adelante cada una de las fases individuales del ciclo de modelización: *comprensión*, *simplificación*, *matematización*, *trabajo matemático*, *interpretación*, *validación*, *comunicación* (Maaß, 2006, p. 116; Biccard y Wessels, 2011, p. 376-378). Estas subcompetencias, consideradas en su aspecto productivo (Niss 2004, p. 9), se ponen en juego cuando el alumno lleva a cabo con éxito, de forma activa y repetida, una acción, asociada con una de las transiciones que se dan entre las fases del ciclo de modelización. Estas acciones, numeradas del (1)-(7), tal y como las hemos descrito anteriormente y como quedan recogidas en la Figura 1, pueden reconocerse a través del análisis cualitativo de la producción de los alumnos durante su proceso de modelización (Sol, Giménez y Rosich, 2011, p.233).

2. Objetivo

El objetivo del presente trabajo es describir las competencias matemáticas que es necesario activar para transitar con éxito por el ciclo de modelización durante el proceso de resolución de una tarea completa de modelización, y que constituirán la competencia en Modelizar en su aspecto cognitivo.

Para ello deberemos:

- Identificar, a partir del análisis del proceso de resolución seguido por un grupo de estudiantes, las acciones que están involucradas en estas transiciones y que los estudiantes deben realizar para moverse a lo largo del ciclo.
- Describir las competencias matemáticas que los alumnos han de poner en juego para realizar estas acciones y que formarían parte de la propia competencia en Modelizar en el marco de la resolución de este tipo de tareas.
- Establecer una identificación entre las competencias matemáticas y las subcompetencias cognitivas que conforman la competencia en Modelizar.

3. Descripción de la experiencia

En el presente artículo centramos nuestra atención en el proceso de modelización llevado a cabo por un grupo de tres alumnos de 3ºESO (13-14 años), en el marco de una actividad de modelización realizada por un grupo completo de clase de 21 alumnos. Ninguno de ellos ha trabajado anteriormente en actividades de este tipo, siguiendo, hasta el momento una enseñanza tradicional basada en los problemas clásicos de los libros de texto, según la programación establecida por el currículo oficial. La actividad se desarrolla a lo largo de tres sesiones de clase más una sesión final de presentación de los trabajos y es supervisada por el investigador que es, asimismo, el profesor titular de la materia de Matemáticas.

Durante la experiencia los alumnos deben asumir el papel protagonista y tomar el control del proceso, trabajando de forma independiente en grupo. El profesor se limita a supervisar su trabajo, y solo en caso de bloqueo y a petición del grupo, interviene, orientándolos a través de preguntas que les lleven a reflexionar sobre su proceso de resolución.

La tarea propuesta a este grupo de estudiantes, "La sombra en el patio de recreo" (ver Figura 2), sigue los criterios establecidos en el LEMA-Project[1], así como los principios de construcción de las llamadas Modeling-Eliciting Activities (abreviadamente MEAs[2]).

Tarea 2: La sombra en el patio de recreo

Como os habréis dado cuenta, el picudo ha obligado a talar numerosas palmeras en el patio central del Colegio, con lo que se nos presenta el problema de seleccionar nuevos árboles para plantar en su lugar y de esta manera establecer y mejorar las zonas de sombra de los recreos. Este problema también se plantea a la hora de diseñar un parque o jardín público. ¿Qué decisiones tomarías tú para mejorar la zona de sombra del patio?

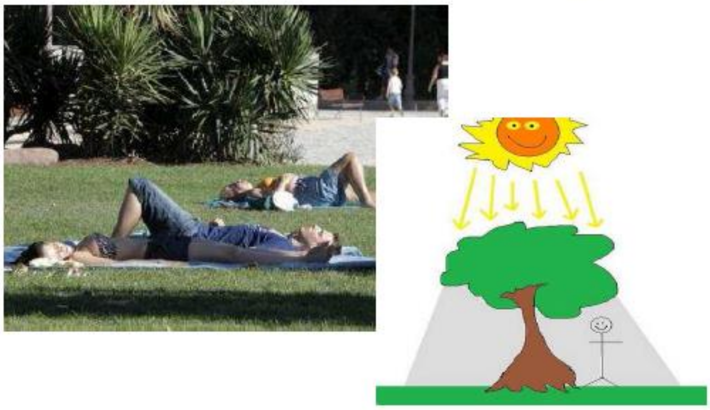

Figura 2. Tarea "La sombra en el patio de recreo", tal y como se presenta a los alumnos[3]

Esta tarea, según los indicadores competenciales desarrollados en el trabajo de Mora y Rosich (2011), puede permitir a los estudiantes llegar a altos niveles de desarrollo de las competencias matemáticas, ya que:

- Implica nuevas estrategias de resolución y abre vías de investigación.
- Permite utilizar diversas estrategias en contextos nuevos.
- Implica una reflexión sobre los conocimientos necesarios en su resolución.
- El proceso de resolución debe ser razonado y justificado.
- Permite trabajar con objetos y representaciones no estándares.
- Plantea el uso del lenguaje simbólico en contextos nuevos.
- Precisa comunicar los resultados en una exposición pública al resto de la clase.
- No es preciso el uso de herramientas pero se podrían utilizar en su resolución o comunicación.

4. Reconstrucción del proceso de modelización

A continuación describimos el proceso de resolución seguido por este grupo de alumnos, según el ciclo propuesto en la Figura 1. Se detallan las acciones que han llevado a cabo para moverse a través del ciclo así como las competencias matemáticas necesarias para implementar estas acciones y que integrarían la competencia en Modelización. Para ello hemos analizado la documentación generada

---

[1] Ver: http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php
[2] Ver: http://serc.carleton.edu/sp/library/mea/index.html
[3] El picudo es un gorgojo que se hospeda en las palmeras. El único tratamiento efectivo contra esta plaga es la tala de la palmera afectada.

por el grupo de alumnos (diario del alumno, power-point de presentación) y por el profesor-investigador (entrevistas, diario del profesor). Se incluyen, entrecomillados y en cursiva, los comentarios originales de los alumnos.

4.1. Comprensión

Durante esta transición los alumnos deben entender y construir su propia imagen mental de la situación real presentada. Esto les llevará a la formulación de un problema, lo que activa su competencia en **Plantear problemas**, en el siguiente sentido. En algunas tareas los objetivos están explícitamente establecidos en el propio enunciado: los alumnos deben entender y centrarse únicamente en las cuestiones propuestas. En estos casos se hace difícil distinguir esta fase en el proceso de resolución. Sin embargo, en otras tareas, como la que nos ocupa, los alumnos deben formular un problema a partir de la situación real propuesta después de un proceso de reflexión sobre el contexto en que se sitúa, su propia experiencia en este contexto y sus conocimientos en matemáticas.

La observación de la sombra proyectada por la copa del árbol sobre el suelo lleva a los alumnos a determinar que el problema real debe ser formulado en términos geométricos: "*Coger las diferentes formas geométricas* [de las copas de los árboles] *para ir probando cual genera una mayor sombra*".

4.2. Simplificación

Para obtener su modelo real, los alumnos deben identificar las variables relevantes de la realidad que le permitan plantearse cuestiones propias de las matemáticas. Esto pertenece al dominio de la competencia en **Pensar y razonar**. En esta transición, distinguimos dos tipos de tareas. Aquellas en las que durante este proceso de simplificación los alumnos deben separar la información superflua de la que es esencial, a partir de su conocimiento matemático y su propia experiencia, como ocurre en la tarea propuesta, y aquellas en las que se dan de forma explícita diferentes variables que son claramente identificables y donde tan solo se debe escoger un subgrupo de ellas (incluso en algunas tareas, tipo MEAs, los datos se presentan directamente en tablas).

Nuestros alumnos consideran que el problema, tal y como ellos lo han planteado en la fase anterior, puede resolverse estudiando el caso de un único árbol. El elemento importante es la sombra que proyectará en el suelo en el momento del recreo. Además, estudian la sombra proyectada en un momento determinado del año (en el mes de marzo) y del día (entre las 11.30 y las 12.00, durante el recreo), lo cual supone también una simplificación del problema.

4.3. Matematización

Durante esta transición los alumnos deben relacionar los elementos que forman parte del modelo real con los objetos matemáticos necesarios para construir lo que será su modelo matemático. Para ello pueden valerse de diferentes tipos de representaciones (gráficos, diagramas, dibujos,…) que junto al uso del lenguaje matemático, les ayude en esta transición. En este caso será necesario activar la competencia en **Representar** y **Usar símbolos y formalismos** matemáticos.

En nuestra tarea, los alumnos utilizan formas geométricas (aquellas que conocen) para abordar el problema geométrico del cálculo del área (la de la sombra proyectada). Construyen modelos en 2D que son representaciones idealizadas de la sección plana de las copas de los árboles, mediante el triángulo, el círculo y el rectángulo (ver Figura 3). El uso de estos modelos geométricos les da la posibilidad de trabajar con las formas geométricas y establecer relaciones de proporcionalidad entre las áreas de estas formas y las de las sombras proyectadas, como veremos a continuación.

Figura 3. Modelos geométricos construidos por los alumnos

4.4. Trabajo matemático

Durante esta transición, los alumnos deben resolver el modelo matemático utilizando los procedimientos matemáticos adecuados, activando su competencia en **Resolver problemas**. En nuestro caso, los alumnos utilizan procedimientos geométricos para resolver su modelo matemático.

Calculan mediante las fórmulas correspondientes (círculo, triángulo y cuadrado) el área de las secciones de las copas de sus modelos de árboles. Con sus maquetas van al patio del colegio, durante el recreo, y proyectan sus sombras sobre un papel, marcando su contorno. Calculan las áreas de las sombras utilizando de nuevo las fórmulas de las formas conocidas, en el caso de la copa circular, aproximando su sombra, de forma más bien elíptica, a un círculo, de área conocida por ellos. Obtienen así la razón entre el área de sus modelos y la de la sombra que proyectan. Sus resultados se recogen en la Tabla 1.

	Círculo	**Triángulo**	**Cuadrado**
Área de la figura	*33,18 cm2*	*38,45 cm2*	*63,86 cm2*
Área de la sombra	*60,79 cm2*	*51,7 cm2*	*72,93 cm2*
Razón	*1,83*	*1,34*	*1,14*

Tabla 1. Tabla presentada por los alumnos con sus resultados

4.5. Interpretación

Es necesario interpretar la solución matemática obtenida en la situación real, haciendo el camino inverso desde el mundo de las matemáticas al mundo real. Como veremos, la traducción y decodificación de la solución matemática a la realidad se apoyará en el uso y la interpretación correcta de los elementos matemáticos (representaciones, gráficas, ecuaciones,...) y el lenguaje matemático (que corresponde a las competencias de **Representar** y **Usar símbolos y formalismos** matemáticos), junto con el activación de la competencia **Pensar y razonar**.

Los alumnos deben interpretar los resultados recogidos en la Tabla 1 en los términos del problema real que ellos mismos han planteado: la mayor razón se corresponde con la forma geométrica que producirá una mayor superficie de sombra. Llegan por tanto a la conclusión de que deben seleccionar un árbol con una copa circular. El árbol escogido, tras consultar internet, es el ombú, cuya copa, según ellos, se puede ajustar a un círculo (ver Figura 4). Recaban sus dimensiones medias: altura de 10,15 metros y radio de la copa de 4,5 metros. La elección de este árbol se debe únicamente a criterios de gusto personal, y los alumnos no entran en otras consideraciones tales como su adecuación a nuestro clima, su coste, o factor de crecimiento. Obviamente, el hecho de no tener en cuenta otros factores es una simplificación del problema.

Figura 4. Imagen presentada por los alumnos con el árbol escogido, el Ombú

Con estos datos, pueden dar respuesta a su pregunta inicial: Un ombú medio produce una sombra de $\pi \times 4{,}5^2 \times 1{,}83 = 116{,}4$ m2.

Pero este resultado no agota el problema. Deberán determinar que superficie del patio quieren sombrear y cuántos de estos árboles necesitarán, lo que les llevará a una nueva vuelta por el ciclo: *"La sombra del edificio del Colegio cubría 552,5m2 → 10,24 % del patio. Únicamente debíamos sombrear otro 10%, 510m2, para obtener un 20% de sombra, previamente acordado"*

Tendrán que dividir el área del patio de recreo que quieren sombrear entre la sombra que proyecta un ombú, lo que les dará la respuesta al número de árboles que necesitan. Este razonamiento les lleva a plantearse la expresión general: $N = \dfrac{S}{r \times C}$, donde N es el número de árboles necesarios para sombrear un área S, r es la razón entre la forma geométrica de la sección plana de la copa del árbol y el área de sombra que proyecta (recogida en la Tabla 1) y C es el área de la copa del árbol.

Esta expresión se deriva de la identificación de la relación entre diferentes variables: el número de árboles es directamente proporcional al área que debe ser sombreada e inversamente proporcional a la sombra proyectada por un árbol, es decir, cuanto menor es el área de sombra proyectada por el árbol, mayor será el número de árboles necesarios. Pero además, la obtención de esta fórmula les permite generalizar su modelo a otras situaciones similares a la planteada inicialmente en el problema.

Finalmente, manipulan su expresión, para determinar el número de árboles, ombúes, necesarios $N = \dfrac{S}{r \times C} = \dfrac{510}{1{,}83 \times (\pi \times 4{,}5^2)} = 4{,}383$. Esta solución debe interpretarse en la realidad: son necesarios cinco ombúes, concluyen, para sombrear el mínimo de superficie propuesto.

4.6. Validación

Validar el modelo implica pensar de manera crítica sobre el proceso de resolución seguido, los argumentos y razonamientos aportados que respalden y justifiquen este proceso y la validez de la solución aportada, lo que activa su competencia en **Argumentar**. En esta transición se ha observado que los alumnos pueden utilizar argumentos y criterios que no son estrictamente matemáticos. En algunas tareas la validación representa la ejecución directa de la solución en la realidad. En otras tareas esto no es posible y, en consecuencia, se acepta la solución o no dependiendo de su viabilidad y/o su grado de aproximación a la realidad, como en nuestro caso.

La solución aportada por nuestro grupo de alumnos, cinco árboles, parece un número razonable, teniendo en cuenta el tamaño del patio de recreo. Pero además, la validación de este resultado les lleva a plantearse nuevas cuestiones no consideradas hasta ahora, como a qué distancia de la base del árbol se proyecta la sombra de su copa, para poder así distribuirlos en el patio de manera que no se superpongan sus sombras: *"Sabiendo ahora la altura del árbol (10,15m) necesitábamos saber a qué distancia del tronco se proyectaría la sombra de la copa […] Con estos datos podemos realizar una regla de tres para averiguar donde se proyectará la sombra del ombú (Objeto de 12cm alto – Sombra de 13cm; Objeto de 1015cm alto – X sombra). Aproximadamente 11m de longitud sombra".* Los cinco árboles deben situarse a 11 metros unos de otros.

4.7. Comunicación

Cada grupo expuso, con ayuda de diapositivas digitales y durante diez minutos, su trabajo al resto de compañeros (ver Figura 5). Durante esta sesión se plantean preguntas, se intercambian ideas y se establecen debates respecto a los distintos enfoques seguidos en la resolución de las tareas. La finalidad de esta exposición pública es posibilitar la evaluación del trabajo mediante el contraste de opiniones entre iguales, especialmente entre alumnos de distintos grupos que han realizado, de forma independiente, la misma tarea. Esta presentación oral activa la competencia en **Comunicar**.

Figura 5. Un momento de la presentación

Durante la exposición, sus compañeros plantean la posibilidad de utilizar nuevas formas para las copas de los árboles, como el rectángulo; comentan también los posibles errores de cálculo al idealizar las formas de las secciones de las copas de los árboles así las limitaciones del modelo, que se circunscribe a un momento del año y del día concreto. En este sentido, cabe destacar que la tarea de modelización se finaliza cuando se considera que se ha llegado a una solución razonable o bien a causa de las limitaciones de tiempo, pero esto no agota el problema, pues la resolución puede seguir enriqueciéndose añadiendo nuevas variables o supuestos, como los planteados durante esta fase de comunicación.

5. Conclusiones

La identificación de las transiciones del ciclo de modelización con acciones y éstas con competencias matemáticas, ejemplificada a través de la reconstrucción del proceso de resolución realizado por este grupo de alumnos, nos permite concluir que todas las competencias matemáticas se activan durante el proceso de modelización. Esta activación de las competencias establecidas en el informe PISA se realiza de forma simultánea y combinada en algunas transiciones del ciclo de modelización, lo que implica una necesaria interacción entre ellas para lograr el éxito en la resolución de la tarea.

En la Tabla 2 resumimos este proceso, ayudándonos de una serie de preguntas que pueden determinar si el alumno ha llevado a cabo con éxito la acción y la activación de la/s competencia/s necesaria/s. Además de si la respuesta a esta pregunta es positiva o negativa, el que el que se trate de una tarea abierta, compleja y rica, según los diferentes instrumentos expuestos, permitirá a los profesores detectar qué elementos de la competencia matemática en general, y de la competencia en modelización en particular, se han trabajado con éxito y cuales precisan de una mayor atención por su parte en aras de romper y superar los bloqueos o dificultades que puedan surgir.

	Competencias matemáticas	**Pregunta**	**Acción**
MODELIZAR	Plantear problemas	¿El problema ha sido formulado correctamente?	Se simplifica y estructura la situación hasta formular un problema, abordable desde su conocimiento matemático: *“Coger las diferentes formas geométricas para ir probando cual genera una mayor sombra”*
	Pensar y razonar	¿La correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático es adecuada?	Idealizan la copa de los árboles con formas geométricas regulares: triángulo, rectángulo, círculo. Construyen modelos geométricos a escala para simular la realidad.
	Representar	¿Se usan representaciones matemáticas para plantear y resolver el modelo matemático de forma adecuada?	Se utilizan maquetas, tablas e idealizaciones geométricas para representar la realidad.
	Usar símbolos y formalismos	¿Se utiliza el lenguaje matemático de forma correcta?	Se construyen expresiones algebraicas con las que resolver el problema planteado.
	Resolver problemas	¿Se utilizan los procedimientos y las herramientas matemáticas adecuadas para resolver matemáticamente el modelo planteado?	Utilizan distinto contenido matemático en la resolución del problema: Formas geométricas, medida y cálculo de áreas, semejanza, lenguaje algebraico.
	Argumentar	¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	Los alumnos reflexionan sobre la validez de los primeros resultados obtenidos, lo que les lleva a añadir nuevas variables a su modelo en sucesivos ciclos
	Comunicar	¿Se comunica de forma oral y escrita el proceso de resolución de forma clara y precisa?	El debate entre los miembros del grupo está presente en todo el proceso de resolución. El producto final es expuesto finalmente al resto de compañeros

Tabla 2. Resumen del proceso de modelización seguido por nuestros alumnos

El resultado de este análisis es extrapolable a otras tareas de modelización abiertas que permitan que los estudiantes transiten a lo largo del ciclo completo de modelización, es decir, la Tabla 2 es una herramienta de trabajo que puede ayudar a analizar la resolución de los estudiantes. Además esta tabla permite inferir que todas las competencias establecidas en el informe PISA no parecen estar al mismo nivel, ya que la competencia en Modelizar se trabaja a través del resto. Por otra parte, el uso integrado y combinado de la mayoría de las competencias matemáticas propuestas en el proyecto PISA, pone de relieve la importancia de las tareas completas y genuinas de modelización en el fomento de la alfabetización matemática en nuestros alumnos.

Agradecimientos

I. Ferrando agradece la ayuda del Ministerio de Economía y Competitividad (Spain) a través del proyecto de investigación EDU2012-35638.

Bibliografía

Biccard, P. y Wessels, D. (2011). Documenting the Development of Modelling Competencies of Grade 7 Mathematics Students. En Kaiser, G., Blum, W., Borromeo, R. y Stillman, G. (eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, 569-578. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Blomhøj, M. y Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational plannig. *Teaching mathematics and its applications*, 22, 3, 123-139.

Blomhøj, M. y Jensen, T.H. (2007). What's all the fuss about competencies? En Blum, Galbraith, Henn & Niss (eds.) *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, 45-56. Heidelberg: Springer.

Blum, W. y Leiβ D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? En Haines y otros (eds.) *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*, 222-231. Chichester: Horwood Publishing.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.

Blum, W. y otros (2002). ICMI STUDY 14: Applications and modeling in mathematics education-Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 149-171.

Borromeo, R. (2006). Theorical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86-95.

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.

Mora, L. y Rosich, N. (2011) Las actividades matemáticas y su valor competencial. Un instrumento para su detección, Números. 76, 69-82.

Niss, M. (2003). Quantitative Literacy and Mathematical Competencies. En Madison, B. y Steen, L.A. (eds.) *Quantitative Literacy – Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, 215-220. Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.

Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. En Gagtsis y Papastavridis (eds.) *3rd Mediterranean Conference on mathematical education, 3-5 January 2003, Athens, Greece*, 115-124. Athens: The Hellenic mathematical society.

OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* Recuperado el 2 de septiembre del 2013 en http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

Puig, L. (2006). *Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos.* En Bolea, P., González, Mª. J. y Moreno, M. (eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del*

Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 107-126. Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Sol, M., Giménez, J. y Rosich, N. (2011) Project Modelling Routes in 12-16 Year-Old Pupils. En G. Kaiser et al. (eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, 231-240. Springer Dordrecht, Heidelberg New York.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

César Gallart Palau es licenciado en Matemáticas por la Universitat de València. Es profesor del Colegio CEU-San Pablo y profesor del Máster en Formación del Profesorado en la Universidad Cardenal Herrera CEU. Actualmente está finalizando su tesis doctoral en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria.

Irene Ferrando Palomares es licenciada en Matemáticas por la Universitat de València (UV). Se doctoró en Matemáticas por la Universidad Politécnica de Valencia en el año 2009. Durante dos años trabajó como profesora de Educación Secundaria para la Conselleria d'Educació de València. Desde el año 2012 ocupa una plaza de Ayudante Doctor en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la UV y ha orientado su investigación hacía el uso de la modelización como herramienta de enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias en educación primaria y secundaria.

Lluís Miquel Garcia Raffi estudió CC. Físicas en la Facultat de Física de la Universitat de València. Se doctoró en Física Nuclear en el Instituto de Física Corpuscular en 1995, año en el que pasó a la Universitat Politècnica de València como profesor del Departament de Matemàtica Aplicada. Se doctoró en Matemáticas en el año 2003 y en la actualidad es Catedrático de Universidad en el citado departamento. Además de diversos trabajos en Física y Matemáticas, ha publicado artículos y libros dedicados al uso de la modelización en la enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias Básicas.