

# Un modelo no hidrostático global con coordenada vertical basada en altura



Juan Pablo Simarro Grande

Director Dr. Víctor Homar Santaner, Universitat de les Illes Balears  
Tutora Dra. Soledad Gandia Franco, Departament de Física de la Terra  
i Termodinàmica, Universitat de València

Una Tesis propuesta para el Grado de  
*Doctor por la Universitat de València*

El Dr. Víctor Homar Santaner, Profesor Titular de la Universitat de les Illes Balears, del área de conocimiento de Física de la Tierra

HACE CONSTAR:

Que la presente Memoria titulada “UN MODELO NO HIDROSTÁTICO GLOBAL CON COORDENADA VERTICAL BASADA EN ALTURA” ha sido realizada bajo su dirección por D. Juan Pablo Simarro Grande y constituye su Tesis Doctoral para optar al grado de Doctor por la Universitat de València.

Todo lo cual queda ratificado por la Dra. Soledad Gandia Franco, profesora Titular de la Universitat de València, del área de conocimiento de Física de la Tierra, como tutora por la Universitat de València.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos el presente documento en Burjassot, el 15 de diciembre de 2014.

Dr. Víctor Homar Santaner

Dra. Soledad Gandia Franco

## Agradecimientos

Agradezco a Víctor Homar y a Soledad Gandia la ayuda que me han proporcionado a lo largo de la elaboración de esta tesis. Las discusiones con Mariano Hortal, Josef Vivoda, Petra Smolíková, Pierre Bénard, Jose Antonio García-Moya, Carlos Santos, Pau Escribà, Alfons Callado, Bartolomé Orfila y Gonzalo Simarro, entre otros, me han ayudado a entender cuestiones de modelización atmosférica, tema central de esta tesis. A ellos también mi agradecimiento. Agradezco a Cristina Suárez, a quien dedico este trabajo, la cuidadosa lectura que ha hecho de esta tesis, con sugerencias y correcciones que la han hecho más legible.

## Resumen

Esta tesis documenta la investigación que he realizado en modelización atmosférica: se parte de las ecuaciones físicas de la atmósfera y se aplican métodos numéricos eficientes para encontrar una solución a dichas ecuaciones a partir de unas condiciones iniciales dadas. Para este fin, se ha desarrollado un modelo atmosférico cuyas características principales son: espectral en la representación horizontal de los campos, discretización vertical de alto orden de exactitud, y semi-implícito en la integración temporal. Además, el modelo es no hidrostático y tiene una coordenada vertical basada en altura, en vez de la tradicional coordenada vertical basada en presión hidrostática. Se ha usado una formulación covariante de las ecuaciones de Euler, lo que ha permitido una expresión compacta y robusta de las condiciones de contorno y del operador divergencia. Una vez planteado y resuelto el problema, se han realizado una completa serie de test ampliamente documentados en la literatura científica para evaluar la precisión y eficiencia del modelo. Los resultados de los test son satisfactorios, quedando así demostrada la calidad de los métodos propuestos.



# Índice general

Índice general	v
Índice de figuras	ix
Indice de tablas	xv
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Métodos numéricos en modelos de predicción</b>	<b>7</b>
2.1. Perspectiva histórica . . . . .	7
2.2. Esquemas numéricos en modelos de predicción . . . . .	12
2.2.1. Métodos conservativos y no conservativos . . . . .	13
2.2.2. Estabilidad y eficiencia: métodos de integración temporal . . . . .	20
<b>3. Discretización en modelos espectrales</b>	<b>25</b>
3.1. Tipos de coordenada vertical . . . . .	26
3.1.1. Coordenada basada en masa . . . . .	27
3.1.2. Coordenada basada en altura . . . . .	29
3.1.3. Ecuaciones de Euler y coordenada vertical . . . . .	31
3.2. Discretización vertical . . . . .	33
3.2.1. Diferencias finitas . . . . .	34
3.2.2. Elementos finitos . . . . .	39
3.3. Discretización horizontal . . . . .	40

---

3.3.1.	Representación espectral . . . . .	41
3.3.2.	Representación en puntos de rejilla . . . . .	44
3.3.3.	Transformaciones espectrales . . . . .	45
3.3.4.	Derivadas horizontales . . . . .	47
3.3.5.	Representación espectral y velocidad horizontal . . . . .	48
3.3.6.	Coste de las transformaciones espectrales . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Modelo espectral no hidrostático propuesto</b>	<b>51</b>
4.1.	Formulación general del modelo . . . . .	52
4.2.	Caso 3D esférico . . . . .	53
4.2.1.	Sistema de coordenadas . . . . .	53
4.2.2.	Tensor métrico . . . . .	56
4.2.3.	Condiciones de contorno . . . . .	59
4.2.4.	Operador divergencia . . . . .	61
4.2.5.	Operador gradiente . . . . .	63
4.2.6.	Símbolos de Christoffel . . . . .	63
4.2.7.	Matrices de cambio de base y término de Coriolis . . . . .	65
4.3.	Caso 2D . . . . .	66
4.4.	Discretización espacial del modelo . . . . .	69
4.4.1.	Modelo no lineal . . . . .	70
4.4.2.	Modelo lineal . . . . .	75
4.5.	Discretización temporal: esquema semi-implícito . . . . .	76
4.6.	Estabilidad lineal . . . . .	81
<b>5.</b>	<b>Test 2D</b>	<b>83</b>
5.1.	Montaña Agnesi con parámetro de Scorer constante . . . . .	84
5.2.	Ondas a sotavento atrapadas . . . . .	90
5.3.	Test de Baldauf y Brdar . . . . .	95

---

5.4. Test con difusión: burbuja fría y cálida . . . . .	103
<b>6. Test 3D</b>	<b>111</b>
6.1. Onda de Rossby-Haurwitz . . . . .	111
6.2. Test de inestabilidad baroclina de Jablonowski . . . . .	116
6.2.1. Estado estacionario . . . . .	118
6.2.2. Caso rotado . . . . .	120
6.2.3. Onda baroclina . . . . .	122
6.3. Onda de Rossby inducida por una montaña . . . . .	123
6.4. Test climático Held-Suárez . . . . .	127
<b>7. Conclusiones</b>	<b>133</b>
<b>Referencias</b>	<b>143</b>





# Índice de figuras

2.1. Errores relativos de la solución numérica de la ecuación de oscilación simple para diferentes valores del parámetro $\alpha$ . Los gráficos en azul, rojo y verde corresponden a valores $\omega\Delta t$ iguales a 1/2, 1 y 2 respectivamente. . . . .	21
3.1. Niveles de coordenada sigma constante. . . . .	28
3.2. Rejilla vertical de Lorenz: en los niveles enteros se define la temperatura, la presión y la velocidad horizontal, y en los niveles intermedios la velocidad vertical. . . . .	35
3.3. Derivada de la función $f(Z) = \sin(9\pi Z)$ . En azul, el valor analítico, en rojo el valor numérico calculado con el operador $\mathbf{D}_Z$ de orden 4 a partir de los valores de la función en una rejilla vertical de 20 niveles regularmente espaciados. . . . .	37
3.4. Derivada de la función $f(Z) = \sin(9\pi Z)$ . En azul el valor analítico, en rojo el valor numérico calculado con el operador $\mathbf{D}_{\hat{Z}}$ de orden 4 a partir de los valores de la función en una rejilla vertical de 20 niveles regularmente espaciados. . . . .	38
3.5. Derivada de la función $f(Z) = \sin(9\pi Z)$ . En azul el valor analítico, en rojo el valor numérico calculado con el operador $\mathbf{D}_Z$ de orden 4 a partir de los valores de la función en una rejilla vertical de 20 niveles no regularmente espaciados. . . . .	39
3.6. Esquema de un paso de tiempo en un modelo espectral global. . . . .	41

---

3.7. Debido a que se usa una cuadratura de Gauss para la transformada directa de Legendre, las latitudes de la rejilla gaussiana se sitúan en el arco seno de los ceros del polinomio de Legendre. . . . .	46
4.1. Niveles de coordenada $Z$ constante para la coordenada vertical Gal-Chen, UM y Schär con distintos valores del parámetro que ajusta el decaimiento de la orografía con la altura. . . . .	55
4.2. Máximo módulo de los valores propios de la matriz de amplificación para diferentes valores del parámetro $\beta = \bar{T}'/\bar{T} - 1$ y números de onda horizontales desde $10^{-2} m^{-1}$ hasta $10^{-6} m^{-1}$ . . . . .	82
5.1. Velocidad vertical para el test de flujo potencial sobre una montaña de Agnesi. Resultado numérico (izquierda) y aproximación lineal de Boussinesq (derecha). El intervalo de contorno es de $0,5 ms^{-1}$ . El resultado numérico corresponde a $t^* = t\bar{u}/a = 24$ . . . . .	87
5.2. Velocidad vertical para el test de flujo hidrostático sobre una montaña de Agnesi. Resultado numérico (izquierda) y aproximación lineal de Boussinesq (derecha). El intervalo de contorno es de $10^{-4} ms^{-1}$ . El resultado numérico corresponde a $t^* = t\bar{u}/a = 135$ . . . . .	88
5.3. Velocidad vertical para el test de flujo no hidrostático sobre una montaña de Agnesi. Resultado numérico (izquierda) y aproximación lineal de Boussinesq (derecha). El intervalo de contorno es de $0,2 ms^{-1}$ . El resultado numérico corresponde a $t^* = t\bar{u}/a = 90$ . . . . .	89
5.4. Ilustración de ondas de montaña atrapadas reales. Imagen del Meteosat-8, del 28 de Diciembre de 2004 a las 20:45 UTC, canal 6, WV7.3. . . .	92
5.5. Ondas atrapadas a sotavento, test I. Velocidad vertical para $t = 20000 s$ . Intervalo de contorno de $0,1 ms^{-1}$ . . . . .	93

5.6. Ondas atrapadas a sotavento, test II. Velocidad vertical para $t = 38000 s$ . Intervalo de contorno de $0,1 ms^{-1}$ . . . . .	94
5.7. Velocidad vertical en el instante $t = 1800 s$ para el test de Baldauf y Brdar. El paso de tiempo es $\Delta t = 3,125 s$ , la resolución horizontal $\Delta x = 156,25 m$ y la resolución vertical $\Delta z = \Delta x/2$ . . . . .	99
5.8. Velocidad vertical de la solución analítica lineal (línea en negro) y tres experimentos numéricos con la misma resolución espacial ( $\Delta x = 625,0 m$ y $\Delta z = \Delta x/2$ ) y pasos de tiempo diferentes ( $\Delta$ igual a $12,5 s$ , $2,5 s$ y $0,5 s$ , en rojo, verde y azul respectivamente). Los test se realizan sin velocidad horizontal de fondo, con el factor semi-implícito $\epsilon = 0,07$ y $\bar{T} = 300 K$ . (a) velocidad vertical en el instante $t = 1800 s$ y $z = 5000 m$ . (b) velocidad vertical en la posición $x = 200 km$ and $z = 5000 m$ . (c) espectro de frecuencia de (b). . . . .	102
5.9. Test de burbuja fría. Evolución de la temperatura potencial desde el instante inicial hasta $t = 900 s$ . El contorno es a intervalos de $1,0 K$ . . .	104
5.10. Test de burbuja fría. Evolución de la velocidad horizontal desde el ins- tante $t = 225 s$ hasta $t = 900 s$ . Se parte de un estado inicial en reposo. El contorno es a intervalos de $2,5 m/s$ . . . . .	105
5.11. Test de burbuja fría. Evolución de la velocidad vertical desde el instante $t = 225 s$ hasta $t = 900 s$ . Se parte de un estado inicial en reposo. El contorno es a intervalos de $2,5 m/s$ . . . . .	106
5.12. Test de burbuja cálida. Evolución de la temperatura potencial desde el instante $t = 150 s$ hasta $t = 900 s$ a intervalos de $150 s$ . El contorno es a intervalos de $0,5 K$ . . . . .	109
6.1. Disposición de los niveles verticales en el test onda de Rossby-Haurwitz.	113

6.2.	Test de onda de Rossby-Haurwitz simulado con 26 niveles verticales y resolución horizontal T85. Los campos representados son: velocidad horizontal zonal y meridional, velocidad vertical y temperatura en 850 <i>hPa</i> , presión en superficie y geopotencial en 500 <i>hPa</i> . . . . .	115
6.3.	Test de onda de Rossby-Haurwitz simulado con 26 niveles verticales y resolución horizontal T42. Los campos representados son: velocidad horizontal zonal y meridional, velocidad vertical y temperatura en 850 <i>hPa</i> , presión en superficie y geopotencial en 500 <i>hPa</i> . . . . .	117
6.4.	Estado inicial del test de inestabilidad baroclina. Se representa la velocidad zonal y temperatura en función de la latitud y la altitud. Los perfiles de temperatura (abajo a la derecha) corresponden a la zona polar (azul), latitudes medias (rojo) y Ecuador (verde). . . . .	118
6.5.	Error cuadrático medio de la presión en superficie del test de Jablonowski con ángulos de rotación de 0° (negro), 45° (rojo) y 90° (azul). En líneas gruesas, los errores correspondientes a la simulación T85, en finas las T42.	121
6.6.	Temperatura interpolada al nivel de 850 <i>hPa</i> correspondiente al día 9 del test de onda baroclina de Jablonowski. . . . .	124
6.7.	Altura geopotencial, velocidad zonal y meridional en 700 <i>hPa</i> del test de onda de Rossby inducida por una montaña de 2000 <i>m</i> , correspondientes a los días 5 y 15. . . . .	125
6.8.	Onda de Rossby inducida por una montaña de 6000 <i>m</i> , velocidad horizontal en el primer nivel del modelo correspondiente al día 9. . . . .	126
6.9.	Test climático de Held-Suárez correspondientes al día D+315. Presión en superficie, temperatura en 850 <i>hPa</i> , velocidad del viento en 300 <i>hPa</i> y geopotencial en 500 <i>hPa</i> . . . . .	129

---

6.10. Test de climático de Held-Suárez a resolución T42. Valores medios en longitud y en tiempo (desde D+200 hasta D+1200) de la temperatura, la velocidad zonal, el flujo turbulento de calor y el flujo turbulento de momento. . . . .	130
--	-----



# Indice de tablas

5.1. Parámetros de los experimentos numéricos de flujo con parámetro de Scorer constante sobre una montaña de Agnesi: ancho $a$ , altura $h_0$ , velocidad horizontal $\bar{u}$ , Frecuencia Brunt-Väisälä $N$ , parámetro de Scorer por ancho $la$ , número de puntos de rejilla horizontal $N_x$ , número de niveles verticales $N_z$ , resolución horizontal $\Delta x$ y resolución vertical $\Delta z$ .	86
5.2. Parámetros de los experimentos numéricos de ondas atrapadas a sotavento: ancho $a$ , altura $h_0$ , velocidad horizontal $\bar{u}$ , parámetro de cizalladura $L$ , Frecuencia Brunt-Väisälä $N$ , parámetro de Scorer $l$ , número de puntos de rejilla horizontal $N_x$ , número de niveles verticales $N_z$ , resolución horizontal $\Delta x$ y resolución vertical $\Delta z$ .	91
5.3. Error cuadrático medio $L_2$ y error máximo $L_\infty$ para en la velocidad vertical en el test de Baldauf y Brdar. La configuración del test es con $\bar{T} = 300 K$ , $U = 20 ms^{-1}$ y $\epsilon = 0,07$ . Se realizan varios experimentos con diferentes resoluciones horizontales y pasos de tiempo. La resolución vertical es $\Delta z = \Delta z/2$ en todos los casos. Los logaritmos de los errores son lineales respecto de los logaritmos de la resoluciones espacial y temporal, con coeficientes de correlación de 0,988 para $L_\infty$ y 0,959 para $L_2$ . Las pendientes u órdenes de convergencia son de 0,42 para $L_\infty$ y 0,39 para $L_2$ .	100



- 5.4. Error cuadrático medio  $L_2$  y error máximo  $L_\infty$  para en la velocidad vertical en el test de Baldauf y Brdar. Los test están configurados con diferentes valores de la temperatura de referencia, temperatura de fondo, velocidad horizontal de fondo y filtro de Asselin. La resolución horizontal es de  $\Delta x = 156,25 m$  y el paso de tiempo es  $\Delta t = 3,125 s$  en todos los casos. . . . . 101

# Capítulo 1

## Introducción

Los modelos de predicción del tiempo usados en centros operativos, tratan de simular la evolución de la atmósfera de la forma más precisa y eficiente posible: precisa para disponer de predicciones del tiempo con calidad, y eficiente para disponer de las predicciones en un plazo tal que se mantenga alta su utilidad. Es obvio que estos dos objetivos se contraponen, pues los métodos numéricos más precisos son también los computacionalmente más caros, de manera que, en la práctica, se busca un consenso entre ambos aspectos.

Ser precisos en modelización implica realizar el menor número posible de aproximaciones en las ecuaciones usadas en las simulaciones. La aproximación hidrostática, muy usada en modelización atmosférica, consiste en suponer que, en la vertical de cualquier punto y en cualquier momento, se verifica el equilibrio hidrostático entre la fuerza de presión y la gravedad. El error que se comete al suponer este equilibrio es pequeño cuando se trata de movimientos atmosféricos de gran escala, y por tanto, la aproximación hidrostática es perfectamente válida en modelos de resolución relativamente baja. Sin embargo, cuando la escala de los movimientos a resolver es de unos pocos kilómetros, esta aproximación deja de ser correcta en determinadas situaciones, y por este motivo los modelos de resolución alta suelen ser no hidrostáticos. El umbral de resolución, por encima del cual los efectos no hidrostáticos se consideran importantes,

suele situarse en los  $10\text{ km}$ . La capacidad de cálculo ha aumentado de forma espectacular en los últimos años, y ha permitido incrementar la resolución de los modelos globales hasta el límite no hidrostático. Como consecuencia, hay una tendencia a excluir la aproximación hidrostática en los modelos globales, impulsada por la exigencia de la exactitud en las simulaciones.

Un grupo importante de modelos atmosféricos operativos, usa la técnica espectral en la dirección horizontal, junto a la técnica semi-implícita en la integración temporal. La técnica espectral es muy precisa en el cálculo de derivadas horizontales y se adapta bien a la técnica semi-implícita, que es eficiente debido a que permite pasos de tiempo grandes. Esta combinación es pues interesante desde el punto de vista de eficiencia y precisión. Además, se consigue un aumento muy significativo de la eficiencia al introducir la técnica semi-lagrangiana para la advección, en substitución de la advección euleriana, más costosa. La advección semi-lagrangiana, que se puede implementar sin artificios en los modelos espectrales semi-implícitos, es una técnica precisa y estable. Hoy en día se siguen usando estos tres métodos conjuntamente en los llamados modelos espectrales semi-implícitos semi-lagrangianos.

Los modelos globales espectrales, operativos hoy en día, son hidrostáticos, mientras que la gran mayoría de los modelos globales no hidrostáticos, si no todos, tienen una discretización horizontal no espectral (basada en métodos como diferencias finitas, volúmenes finitos o elementos finitos). Es pues lícito hacer la pregunta: ¿es posible construir un modelo global no hidrostático espectral?

El objetivo en esta tesis trata de contestar a esta pregunta, y para ello se ha construido un modelo global no hidrostático espectral semi-implícito, es decir, aplicable a resoluciones altas en las que la componente no hidrostática pueda tener importancia. A tal efecto, se han introducido algunas novedades respecto de los modelos espectrales. Una de estas novedades es el uso de una coordenada vertical basada en altura, en lugar de la tradicional coordenada vertical basada en presión hidrostática. Otra novedad es

---

el uso de las componentes contravariantes de la velocidad, lo que ha permitido introducir de forma natural las condiciones de contorno en los límites superior e inferior. Finalmente, se han usado métodos de alto orden de precisión en la vertical. Esta combinación de técnicas numéricas no se ha probado antes, de manera que consideramos que el trabajo es novedoso y trata de dilucidar la conveniencia de tal elección.

El modelo objeto de esta tesis está, en parte, descrito en dos artículos. El primero de ellos, *A semi-implicit non-hydrostatic dynamical kernel using finite elements in the vertical discretization* [Simarro y Hortal, 2011], describe un modelo bidimensional no hidrostático, en el que se usa la técnica de elementos finitos en la vertical, con una coordenada vertical basada en altura y la técnica espectral en la dirección horizontal. Los resultados son buenos, pero hay un inconveniente grave: el modelo no es suficientemente estable en presencia de orografía abrupta. Para paliar este problema tendrían que usarse métodos iterativos costosos computacionalmente. El segundo artículo, *A non-hydrostatic global spectral dynamical core using a height-based vertical coordinate* [Simarro et al., 2013], describe un modelo global no hidrostático espectral, similar al del primer artículo pero con dos diferencias importantes: en primer lugar, es global y por tanto tridimensional, y en segundo lugar, se descarta el uso de elementos finitos en la vertical, habiéndose optado por diferencias finitas de alto orden. Se obtiene un esquema más robusto, sin el problema de la inestabilidad en presencia de orografía abrupta.

Describimos la estructura de la tesis. En el capítulo 2 exponemos brevemente la evolución de la predicción numérica del tiempo operativa y los métodos numéricos más usados en este campo de la modelización.

El capítulo 3 versa sobre las técnicas de discretización espacial usadas en los modelos espectrales. En primer lugar, se exponen los tipos de coordenada vertical más utilizados en predicción numérica: las coordenadas híbridas basadas en presión hidrostática y en altura. A continuación, se explican los métodos de discretización

vertical más comunes: los de diferencias finitas y elementos finitos. Finalmente, se expone la técnica de discretización horizontal en los modelos espectrales, consistente en el uso de las funciones propias del operador de Laplace (los armónicos esféricos en el caso de modelos globales).

En el capítulo 4 se detalla el modelo no hidrostático espectral propuesto en esta tesis. Se inicia el capítulo con una exposición de las ecuaciones de Euler, en las que se escogen como variables de pronóstico las componentes contravariantes de la velocidad y los logaritmos de la presión y temperatura. Siguen dos apartados, con la descripción del modelo en sus versiones 3D y 2D. La versión 3D es el modelo global con geometría esférica, mientras que la versión 2D, con una dimensión horizontal y otra vertical, se ha usado para realizar test de dinámica no hidrostática con resoluciones altas. El modelo 2D es muy similar al 3D en cuanto a los métodos numéricos usados. Tras una explicación de la discretización espacial del modelo, se concluye con la discretización temporal semi-implícita y un análisis de estabilidad.

Los capítulos 5 y 6 se han dedicado a comprobar la calidad del modelo propuesto, en sus versiones 2D y 3D respectivamente. Se ha hecho una revisión de los test más citados en la literatura científica, para poder contrastar nuestros resultados con los de otros modelos. En el capítulo 5, el primer test expuesto consiste en simular ondas de montaña hidrostáticas y no hidrostáticas, producidas a sotavento de un obstáculo. Sigue un test de ondas de montaña atrapadas, producidas por resonancia para determinados perfiles verticales del parámetro de Scorer. Se expone a continuación un interesante test lineal con solución analítica conocida, el de Baldauf y Brdar [2013]. Este test es el único que proporciona una solución analítica de las ecuaciones de Euler con la que poder comparar las simulaciones. Finalmente, se incluyen dos test altamente no lineales y no hidrostáticos. Básicamente, consisten en simular la evolución de una burbuja de aire en un entorno con una temperatura potencial diferente, de forma que esta adquiere aceleraciones verticales importantes, formándose vórtices en su movimiento.

---

En cuanto a los test 3D expuestos en el capítulo 6, se han incluido los más clásicos. El primero consiste en una onda Rossby-Haurwitz, un interesante test con solución analítica conocida en el caso de la ecuación de vorticidad barotrópica. Sigue el conjunto de test de Jablonowski, centrados la inestabilidad baroclina. A continuación, un test en el que se evalúa el modelo en presencia de orografía. Finalmente, un test climático, el de Held-Suárez, donde se incluye una parametrización simplificada y se realiza una integración larga.

La tesis acaba con las conclusiones.



# Capítulo 2

## Métodos numéricos en modelos de predicción

Este capítulo pretende poner en contexto el trabajo desarrollado en esta tesis, es decir, el diseño y validación de un modelo espectral no hidrostático global, con una coordenada vertical basada en altura. En la sección 2.1 se hace una breve reseña histórica sobre la predicción numérica del tiempo. Sigue la sección 2.2 con una discusión sobre algunos de los métodos numéricos más usados en la predicción numérica del tiempo. La variedad de métodos aplicados en modelización atmosférica es enorme, por lo que no se pretende ser exhaustivo, sino simplemente resaltar aquellas técnicas que se han creído más interesantes.

### 2.1. Perspectiva histórica

Al principios del siglo XX surgieron las primeras ideas acerca del problema de la predicción del tiempo desde un punto de vista científico. Cleveland Abbe planteó el problema de la predicción del tiempo como una aplicación de las leyes físicas de la hidrodinámica y la termodinámica a la atmósfera. Expuso la necesidad de diseñar, a partir de estas leyes, métodos gráficos, numéricos o analíticos, para realizar predicciones del tiempo [Abbe, 1901]. Algunos años después, Vilhelm Bjerknes afirmó que,



al menos desde un punto de vista teórico, el problema de la predicción del tiempo se podía plantear en dos etapas: una *diagnosis* para determinar el estado de la atmósfera en un momento dado basándose en las observaciones, y una *prognosis* para calcular la evolución de la atmósfera usando las leyes físicas [Bjerknes, 1904]. En cuanto a la diagnosis, las observaciones atmosféricas empezaban a estar disponibles gracias a programas meteorológicos de colaboración internacional, de manera que se podían hacer análisis aproximados, en *cartas meteorológicas sinópticas*, en las que se representaban algunas variables meteorológicas en distintos niveles. En cuanto a la prognosis, dado que no era posible usar métodos numéricos en aquel momento, Bjerknes ideó métodos gráficos cualitativos para calcular, a partir de las cartas meteorológicas de una determinada hora, las cartas válidas para unas horas más tarde. Así, iterando este proceso de prognosis, se podrían realizar las predicciones.

Más adelante, Lewis Fry Richardson, influenciado por los trabajos de Bjerknes y su escuela, trató de resolver el problema de la predicción usando métodos numéricos [Richardson, 1922]. Diseñó un método numérico basado en diferencias finitas, para aproximar las ecuaciones físicas que habían señalado Abbe y Bjerknes. Representó el estado atmosférico en un momento dado, mediante una tabla con los valores de las variables meteorológicas en determinadas latitudes, longitudes y alturas. Construyó, aplicando la técnica de diferencias finitas, un método para calcular los valores de las variables meteorológicas de la tabla válidos un intervalo de tiempo más tarde. Richardson, partiendo de un estado inicial estimado con las observaciones disponibles, realizó con este método una predicción a seis horas de la presión y el viento en dos puntos de Europa central. El resultado fue muy poco realista: predijo un cambio de presión de  $145 \text{ hPa}$  en seis horas. Llegó a la conclusión de que los resultados fueron erróneos debido a que no había considerado un estado inicial adecuado para la velocidad, indicando que la predicción había sido *una deducción bastante acertada hecha a partir de una distribución poco natural* [Richardson, 1922]. De hecho, en un trabajo

---

reciente, Lynch reconstruye el método de Richardson y lo usa con los mismos datos iniciales sometidos a un proceso de inicialización basado en el filtro Dolph-Chebyshev, obteniendo unos cambios en la presión en superficie más realistas [Lynch, 1997, 2006]. A pesar de lo limitado de sus resultados, Richardson está hoy reconocido como uno de los fundadores de la moderna predicción numérica del tiempo.

Algunos años más tarde, se produjeron avances científicos y tecnológicos que permitieron el desarrollo de la predicción numérica del tiempo que conocemos hoy en día. La invención de los computadores hizo que se dispusiera de una capacidad de cálculo numérico inimaginable unas décadas antes. Hubo avances muy significativos en la teoría de cálculo numérico, lo que permitió analizar y evitar la inestabilidad computacional de los algoritmos y mejorar su precisión. Asimismo, los desarrollos teóricos en aspectos de dinámica atmosférica permitieron el uso de ecuaciones aproximadas más sencillas que las de la hidrodinámica y termodinámica, y más convenientes porque filtraban las ondas acústicas y gravitacionales. En el campo de las observaciones, empezaron a estar disponibles los sondeos atmosféricos con globos, que permitieron hacer mejores análisis de la atmósfera libre. Estos avances hicieron posible que en la década de 1950 se empezaran a realizar operativamente las primeras predicciones numéricas del tiempo.

Las primeras predicciones meteorológicas numéricas se realizaron el año 1950 en el computador ENIAC, *Electronic Numerical Integrator And Computer*, desarrollado en la Universidad de Pensilvania [Charney et al., 1950]. El proyecto que permitió el desarrollo del primer modelo de predicción y su implementación en el computador ENIAC, había comenzado unos años antes, en 1946 [Walker, 2011]. Se trataba de un proyecto interdisciplinar, dividido en ingeniería, programación, matemáticas y meteorología. El grupo de meteorología, liderado por Jules Charney, analizó el trabajo de Richardson a la luz de recientes conocimientos sobre los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, llegando a la conclusión de que, en el planteamiento de Richardson, la condición de estabilidad numérica CFL

[Courant et al., 1967] imponía un paso de tiempo excesivamente pequeño, y por tanto, un coste computacional excesivamente alto. Este hecho impulsó la búsqueda de ecuaciones alternativas a las usadas por Richardson. Charney encontró un conjunto de ecuaciones simplificadas que filtraban las ondas gravitatorias y acústicas: las ecuaciones cuasi-geostróficas [Holton y Hakim, 2012]. Éstas, con una condición de estabilidad CFL aceptable para los recursos computacionales de ese momento, fueron las que se usaron para producir las primeras predicciones numéricas en el computador ENIAC [Charney y Phillips, 1953; Charney et al., 1950, 1956]. Smagorinsky [1983] hace un interesante relato en primera persona de cómo se gestó y realizó ese proyecto.

A pesar del éxito obtenido con las ecuaciones cuasi-geostróficas, desde un primer momento se evidenció que no eran suficientemente exactas. El mismo Charney lo señaló, indicando que éstas no describían con suficiente exactitud movimientos atmosféricos de escala inferior a la sinóptica, relevantes sin embargo para la predicción del tiempo [Charney, 1951]. Además, la aproximación cuasi-geostrófica, al no ser aplicable en latitudes bajas (donde no existe balance entre la fuerza de gradiente de presión y la aceleración de Coriolis), impedía reproducir la circulación general de la atmósfera. Para avanzar en la calidad y generalidad de las predicciones, se hacía necesario volver al sistema usado por Richardson, el llamado sistema de *ecuaciones primitivas* [Holton y Hakim, 2012], consistente en las ecuaciones de la hidrodinámica y termodinámica, con la asunción de que el perfil atmosférico sea siempre hidrostático. Este sistema tiene unas características interesantes. En primer lugar, la aproximación hidrostática filtra las ondas acústicas, de poco o nulo interés meteorológico, de manera que las condiciones CFL resultan menos restrictivas. En segundo lugar, se simplifican cuando se escriben usando la presión como coordenada vertical, consistiendo en tres ecuaciones de *pronóstico* (en las que interviene la variación temporal) y tres de *diagnóstico* (en las que no interviene la variación temporal). Las ecuaciones de pronóstico son las del momento horizontal y la de la energía termodinámica, mientras que las de diagnósti-

---

co son la de continuidad de masa, la ecuación de estado del aire y la aproximación hidrostática (que substituye a la ecuación de la componente vertical del momento).

Los primeros modelos hemisféricos y globales con ecuaciones primitivas fueron desarrollados en la década de 1960 [Mintz, 1965; Smagorinsky, 1964]. Algunos incluían, de forma muy simplificada, procesos húmedos de evaporación y condensación de agua [Manabe et al., 1965]. Las primeras simulaciones a medio plazo fueron realizadas a principios de la década de 1970, con resultados esperanzadores. Si bien la calidad de las predicciones era escasa comparada con las de hoy en día, los modelos empezaban a tener utilidad en la predicción de perturbaciones sinópticas, con coeficientes de correlación positivos entre observación y predicción del geopotencial en 500 *hPa*, hasta el día 10 en algunos casos de estudio [Miyakoda et al., 1972]. Tal como figura en la revisión histórica de Shuman [1989] sobre la predicción numérica en el NCEP, el primer modelo global se puso operativo en 1974. Era un modelo de diferencias finitas con una resolución horizontal de 2,5°. En 1979 comenzaron las predicciones operativas en el ECMWF, con una resolución horizontal de 1,875°. Muy pronto otros centros de predicción, como Metoffice en Inglaterra o DWD en Alemania, comenzaron a realizar predicciones operativas con modelos globales, basados en las ecuaciones primitivas con la técnica de diferencias finitas.

El método de transformación espectral se basa en la representación de los campos meteorológicos, en cada nivel del modelo, mediante una combinación lineal de armónicos esféricos. Para evitar la singularidad de los polos, el vector velocidad horizontal se expresa en función de la vorticidad y divergencia [Eliassen et al.; Orszag, 1970]. Este método, además de ser mucho más preciso en el cálculo de las derivadas horizontales que el de diferencias finitas, se adecuaba bien a la implementación del esquema semi-implícito [Robert et al., 1972]. En la década de 1970 se empezaron a desarrollar modelos globales espectrales semi-implícitos con ecuaciones primitivas [Bourke, 1972; Daley et al., 1976; Hoskins y Simmons, 1975].

La advección semi-lagrangiana es muy usada en los modelos numéricos, tanto espectrales como de diferencias finitas. Sus principales ventajas son: ser incondicionalmente estable, tener poca dispersión numérica y substituir los términos no lineales de la advección euleriana por interpolaciones de los campos en los puntos origen de las trayectorias semi-lagrangianas. Los primeros trabajos sobre advección semi-lagrangiana se realizaron con modelos barotrópicos [Wiin-Nielsen, 1959]. Mas adelante, se combinó la técnica semi-lagrangiana y la semi-implícita [Robert et al., 1985], consiguiendo aunar las ventajas de ambas. Uno de los primeros modelos espectrales semi-lagrangianos y semi-implícitos fue el desarrollado en ECMWF [Ritchie, 1991]. Las ventajas de usar simultáneamente la discretización espectral, la advección semi-lagrangiana y un esquema temporal semi-implícito, hicieron que, durante los primeros años de la década de 1990, la mayoría de los modelos fueran espectrales (a excepción de unos pocos como el operativo en el Metoffice). Más adelante, la tendencia se fue invirtiendo, apareciendo bastantes modelos operativos basados en diferencias finitas, elementos finitos o volúmenes finitos [Benoit et al., 1997; Cullen y Davies, 1991; Majewski et al., 2002]. En la actualidad, sin embargo, siguen habiendo operativos modelos espectrales, como el *Integrated Forecast System* del ECMWF y el *Global Forecast System* del NCAR entre otros.

## 2.2. Esquemas numéricos en modelos de predicción

En la atmósfera se producen diversos procesos físicos que deben incluirse en un modelo de predicción para que éste sea lo más realista posible. Por una parte, se considera la atmósfera como un fluido que se rige por las ecuaciones de Euler, es decir, aire con una proporción variable de vapor de agua sometido a las leyes de la termodinámica y mecánica clásicas. La parte del modelo que resuelve las ecuaciones de Euler se llama *la dinámica del modelo*. Por otra parte, en la atmósfera se producen procesos físicos que no están incluidos en las ecuaciones de Euler, como son los procesos relacionados con la radiación, la interacción con el suelo, la turbulencia, la convección

o la nubosidad, por citar algunos. Estos procesos se denominan en su conjunto *las parametrizaciones físicas*. En esta sección no trataremos los métodos numéricos usados en las parametrizaciones físicas, ya que en esta tesis se construye y se contrasta la *dinámica* de un modelo espectral global.

### 2.2.1. Métodos conservativos y no conservativos

Las ecuaciones de Euler implican la conservación de determinadas magnitudes físicas en determinadas circunstancias. Las magnitudes que se pueden conservar son: la masa, la entropía, la energía y la vorticidad potencial. En una situación ideal, los esquemas numéricos utilizados para resolver estas ecuaciones deberían respetar estas propiedades de conservación, sin embargo, no es posible alcanzar este objetivo, o al menos no por ahora. Como mucho, se han conseguido métodos numéricos que conservan algunas de estas magnitudes. El esfuerzo de investigación dedicado a encontrar métodos conservativos es enorme, tal como lo atestigua el volumen de artículos publicados en este sentido. Veamos someramente algunos de los métodos numéricos más populares y sus propiedades respecto de la conservación.

En un sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$ , las ecuaciones de Euler en un campo gravitatorio se pueden escribir en forma conservativa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)), \quad (2.1)$$

donde las variables de pronóstico  $\mathbf{q}$ , los flujos  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$  y los términos fuente  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t))$  son

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + p & \rho v u & \rho w u \\ \rho u v & \rho v^2 + p & \rho w v \\ \rho u w & \rho v w & \rho w^2 + p \\ u(E + p) & v(E + p) & w(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \phi_x \\ -\rho \phi_y \\ -\rho \phi_z \\ \rho Q \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

siendo  $\rho$  la densidad,  $(u, v, w)$  las componentes de la velocidad,  $E$  la energía total,  $p$  la presión,  $Q$  el calor absorbido o cedido por unidad de masa y tiempo,  $\phi$  el geopotencial y  $\nabla\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$  su gradiente. La energía total  $E$  es la suma de las energías interna, cinética y gravitatoria. La presión se puede escribir en función de las variables de pronóstico usando la relación:

$$E = \rho(e + k + \phi) = \rho \left( \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \phi \right).$$

Las ecuaciones (2.1) son adecuadas para aplicar el método de volúmenes finitos y conseguir esquemas numéricos que sean conservativos. A partir de la expresión de  $\mathbf{s}$  en la ecuación (2.2), se deduce que la masa se conserva, pues la densidad no tiene término fuente. El momento por unidad de volumen se conserva en el caso de que no haya campo gravitatorio, y la energía total se conserva en el caso de flujos adiabáticos, en los que el calor intercambiado  $Q$  es cero.

El método de volúmenes finitos tiene muchas variantes y puede ser de alto orden de precisión [LeVeque, 2002; Toro, 1999]. Además de ser conservativo, el método de volúmenes finitos permite obtener soluciones precisas de problemas con discontinuidades (como ondas de choque, ondas de contacto y rarefracciones), usando para ello soluciones exactas o aproximadas del problema de Riemann.

La idea central del método de volúmenes finitos es dividir el dominio espacial del problema en una serie de volúmenes disjuntos, integrar espacialmente la ecuación (2.1) en cada uno de dichos volúmenes y usar el teorema de Gauss para la divergencia. De esta manera, la integral de volumen para los flujos  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$  se convierte en una integral de superficie, lo que permite obtener esquemas numéricos conservativos (con magnitudes que se conservan globalmente para los casos en los que el término fuente es nulo). Es decir, integrando (2.1) en un volumen  $V_i$  se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \mathbf{q} \, dv = \int_{\partial V_i} \mathbf{f}(\mathbf{q}) \, ds + \int_{V_i} \mathbf{s} \, dv,$$

donde  $\partial V_i$  es la frontera del volumen  $V_i$ .

Los métodos de volúmenes finitos se usan poco en los modelos de predicción numérica por motivos de eficiencia: son métodos costosos desde el punto de vista computacional ya que, al ser en general explícitos, requieren pasos de tiempo pequeños para asegurar la estabilidad. La condición Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [Courant et al., 1967] impone un paso de tiempo  $\Delta t \leq \Delta l/c$ , donde  $c$  es del orden de la velocidad de las ondas más rápidas y  $\Delta l$  la dimensión longitudinal más pequeña de los volúmenes. En el caso de los modelos atmosféricos no hidrostáticos, las ondas más rápidas son ondas acústicas (con velocidades típicas de  $c \approx 400 \text{ m/s}$ ), mientras que la dimensión longitudinal más pequeña corresponde habitualmente a la distancia entre niveles verticales cerca de la superficie (del orden de  $\Delta z \approx 10 \text{ m}$ ). Esto implica unos pasos de tiempo de  $\Delta t \approx 0,025 \text{ s}$ , inaceptables desde el punto de vista de coste computacional. Sin embargo, existen modelos atmosféricos que usan la técnica de volúmenes finitos, como del MCORE [Ullrich y Jablonowski, 2012], que mejora la eficiencia separando el método de volúmenes finitos en dos partes, una horizontal explícita y otra vertical implícita (en el siguiente apartado 2.2.2, veremos más detenidamente este tipo de técnica de integración temporal).

Así pues, los métodos de volúmenes finitos son apropiados para lograr integraciones en las que se conservan determinadas magnitudes, típicamente la masa y la energía. La conservación de la energía puede reemplazarse fácilmente por la conservación de la entropía substituyendo en (2.2) la variable de pronóstico energía  $E$  por la entropía o temperatura potencial  $\theta$  (función que depende exclusivamente de la entropía). La ecuación de pronóstico de la temperatura potencial es simplemente:

$$\frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \theta \mathbf{u}) = s(Q),$$

de manera que  $\rho \theta$  se conserva en el caso de flujos adiabáticos en los que el término fuente  $s(Q)$  es nulo. Hay que tener en cuenta que, en el caso de querer obtener soluciones de



problemas con discontinuidades (como es el caso de las aplicaciones para la aeronáutica, en las que pueden existir ondas de choque o de contacto), no se puede reemplazar la energía por la entropía, ya que la entropía no se conserva en las discontinuidades mientras que sí lo hace la energía. En modelización atmosférica, las soluciones discontinuas no son de interés, de manera que la substitución de la energía por la entropía como variable de pronóstico puede ser adecuada. Simplemente se obtiene un esquema que conserva la entropía en vez de la energía.

Una magnitud de gran importancia en meteorología dinámica es la vorticidad potencial. Esta magnitud es función de la densidad, temperatura potencial y vorticidad absoluta. Su expresión es:

$$\nu = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \theta}{\rho},$$

donde  $\boldsymbol{\omega}$  es la vorticidad absoluta. La ecuación de conservación se puede escribir como [Hayne y McIntyre, 1990]:

$$\frac{\partial \rho \nu}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nu \mathbf{u}) = \nabla \cdot (q \boldsymbol{\omega} - \mathbf{F} \times \nabla \theta), \quad (2.3)$$

siendo  $q$  la variación material de la temperatura potencial y  $\mathbf{F}$  las fuerzas viscosas por unidad de masa. Es de gran interés que los modelos atmosféricos verifiquen la conservación de la vorticidad potencial que se deriva de la ecuación (2.3), sin embargo, ninguno lo consigue. De hecho, en los artículos publicados sobre modelos numéricos no se suele hacer ningún test relacionado con esta magnitud, ausencia que resulta un tanto sorprendente. Arakawa y Lamb [1981] consiguieron un esquema numérico que conserva la vorticidad potencial y la energía para el sistema de ecuaciones de aguas someras. Sin embargo, para las ecuaciones de Euler no se ha encontrado un esquema similar. En los trabajos de Salmon [2005] y Gassmann [2013] se proponen generalizaciones del trabajo propuesto por Arakawa. Por ahora, los modelos de predicción operativos no conservan

la vorticidad potencial, y al respecto simplemente se estima que la vorticidad potencial se conserva de forma tanto más aproximada en las simulaciones cuanto mayor sea el orden de exactitud de los métodos numéricos utilizados.

Se ha mencionado la técnica de volúmenes finitos como un método numérico esencialmente conservativo. Opuesto a éste, el método espectral es esencialmente no conservativo. Así como la técnica de volúmenes finitos es adecuada para obtener soluciones de problemas en los que existen discontinuidades, el método espectral no lo es, ya que una de sus hipótesis de partida es que las soluciones son continuas con derivadas continuas. A pesar de que el método espectral es no conservativo y no es capaz de obtener soluciones discontinuas, tiene otras ventajas, como es el alto orden de precisión en el cálculo de las derivadas. Además, es adecuado para la implementación del esquema semi-implícito, de interés por su eficiencia al permitir pasos de tiempo grandes. Estas propiedades hacen que el método espectral sea usado ampliamente hoy en día, sobre todo en modelos globales.

En los modelos de predicción, el método espectral se basa en representar los campos meteorológicos en las dimensiones horizontales mediante series truncadas de funciones ortonormales. Por conveniencia, se escogen las funciones propias del operador laplaciano: armónicos esféricos en el caso de modelos globales, y funciones sinusoidales en el caso de modelos de área limitada.

En general, una función cualquiera  $\mathbf{g}$  se puede representar, bien mediante un conjunto de componentes espectrales  $\mathbf{g}_k$ , o bien mediante el valor de la función en un conjunto suficientemente numeroso de nodos  $\mathbf{x}_k$  del espacio físico, es decir,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ . La transformación desde el espacio espectral al físico, llamada *transformación inversa*, consiste en evaluar la siguiente serie en cada uno de los nodos:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^N \mathbf{g}_j \psi_j(\mathbf{x}_k), \quad (2.4)$$

donde  $\psi_j(\mathbf{x})$  son las funciones ortonormales y  $N$  el orden de truncación. Por otra parte, la transformación desde el espacio físico al espectral, llamada *transformación directa*, consiste en integrar numéricamente la expresión:

$$\mathbf{g}_k = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) dv, \quad (2.5)$$

a partir de los valores de la función en cada nodo, es decir,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ . No entraremos en detalles, pero conviene mencionar que el número de nodos y el número de componentes espectrales debe ser consistente, de manera que se recuperen los mismos componentes espectrales después de hacer una transformación inversa seguida de una directa. Además, en los modelos numéricos espectrales, el problema de *aliasing*, relacionado con las transformaciones directa e inversa de términos no lineales, debe tenerse en cuenta cuidadosamente.

En un modelo espectral, las transformaciones directa e inversa se realizan en cada paso de tiempo, por lo que es muy importante optimizar estos cálculos. Para la transformada de Fourier, existe un algoritmo que permite realizar las transformaciones directa e inversa con un número de operaciones proporcionales a  $N \log N$ , en vez de  $N^2$ . Sin la existencia de este algoritmo, los modelos espectrales no serían viables a altas resoluciones, debido al excesivo coste computacional. Como se verá en el capítulo 3, en los modelos espectrales globales, además de transformadas de Fourier en la dirección de los paralelos, se requieren transformadas de Legendre en la dirección de los meridianos. La ausencia de un algoritmo rápido para estas transformaciones es un inconveniente grave cuando se aumenta la resolución por debajo de los 10 *km*.

En general, si se quiere usar el método espectral para resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)),$$

se substituye la función  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  por una serie truncada:

$$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{q}}_k(t) \psi_k(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

donde  $\hat{\mathbf{q}}_k(t)$  son los coeficientes que deben conocerse para determinar la solución aproximada de la ecuación a resolver. Los coeficientes  $\hat{\mathbf{q}}_k(t)$  se determinan aplicando el método de Galerkin, es decir, imponiendo que el residuo sea ortogonal a las funciones  $\psi_k(\mathbf{x})$ :

$$\int \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)) \right) \psi_k(\mathbf{x}) dv = 0. \quad (2.7)$$

Substituyendo en (2.7) la expresión para  $\hat{\mathbf{q}}$  dada en (2.6), y teniendo en cuenta que las funciones  $\psi_k(\mathbf{x})$  son ortonormales, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d\hat{\mathbf{q}}_k(t)}{dt} + \int \nabla \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)) \psi_k(x) dv = \int \mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)) \psi_k(x) dv. \quad (2.8)$$

Para resolver este sistema, en primer lugar se aplica la transformación inversa (2.4) a las componentes espectrales  $\hat{\mathbf{q}}_k(t)$  para obtener  $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_k, t)$ . De forma análoga se obtiene  $(\nabla \cdot \hat{\mathbf{q}})(\mathbf{x}_k, t)$  a partir de las componentes espectrales de las derivadas  $(\nabla \cdot \hat{\mathbf{q}})_k(t)$ . Es importante resaltar que estas derivadas, al estar calculadas en el espacio espectral, tienen un orden de exactitud igual al número de componentes espectrales, y por tanto muy superior a los órdenes usados en diferencias finitas. A continuación, a partir de estos valores se calcula en cada nodo el valor de  $(\nabla \cdot \mathbf{f})(\mathbf{x}_k, t)$  y  $\mathbf{s}(\mathbf{x}_k, t)$ . Finalmente se obtienen los coeficientes espectrales  $(\nabla \cdot \mathbf{f})_k(t)$  y  $\mathbf{s}_k(t)$  usando la transformación directa (2.5), de manera que la ecuación (2.8) se reemplaza por:

$$\frac{d\hat{\mathbf{q}}_k}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{f})_k(t) = \mathbf{s}_k(t).$$

Las ventajas del método espectral, tal y como se ha mencionado, es el alto orden de exactitud en el cálculo de las derivadas, y el hecho de que se adapta muy bien al esquema semi-implícito. Por contra, no es conservativo, defecto importante en algunos casos, como en las integraciones climáticas. Otro inconveniente, menos severo, es que no resuelve problemas con discontinuidades.

### 2.2.2. Estabilidad y eficiencia: métodos de integración temporal

En general, la eficiencia de un modelo de predicción es proporcional al paso de tiempo  $\Delta t$ , e inversamente proporcional al coste computacional requerido para avanzar un paso de tiempo.

Comparados con los métodos explícitos, los métodos implícitos son estables para pasos de tiempo relativamente grandes. Por tanto, son más eficientes desde este punto de vista. Sin embargo, un paso de tiempo implícito es, en general, más costoso que uno explícito. Veremos en esta sección una breve relación de algunos de los métodos de integración temporal más utilizados en los modelos atmosféricos, en relación a su eficiencia y estabilidad.

Un sencillo problema numérico permite mostrar la importancia de los métodos implícitos en la estabilidad y eficiencia de las simulaciones. Supongamos que queremos calcular la solución numérica de la siguiente ecuación de oscilación simple:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = i\omega\psi(t),$$

cuya solución analítica es:

$$\psi(t) = \psi_0 e^{i\omega t}, \quad (2.9)$$

mediante el esquema numérico siguiente:

$$\frac{\hat{\psi}(t + \Delta t) - \hat{\psi}(t)}{\Delta t} = i\omega \left( (1 - \alpha) \hat{\psi}(t) + \alpha \hat{\psi}(t + \Delta t) \right), \quad (2.10)$$

donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo y  $\alpha$  es un parámetro entre 0 y 1. El método se denomina Euler explícito cuando  $\alpha = 0$  y Euler implícito en el caso  $\alpha = 1$ . Además, es de segundo orden cuando  $\alpha = 1/2$ , siendo de primer orden en los demás casos. Un paso de tiempo consiste en obtener el valor  $\hat{\psi}(t + \Delta t)$  a partir de  $\hat{\psi}(t)$  mediante la resolución de la ecuación (2.10). De esta manera, conocido el valor inicial  $\psi_0$ , se puede obtener la solución numérica en un instante  $t = k\Delta t$  iterando  $k$  veces el procedimiento. En este sencillo ejemplo, la solución analítica (2.9) se conoce, de manera que es posible calcular el error de la amplitud y fase de la solución numérica (2.10) al cabo de un paso de tiempo.

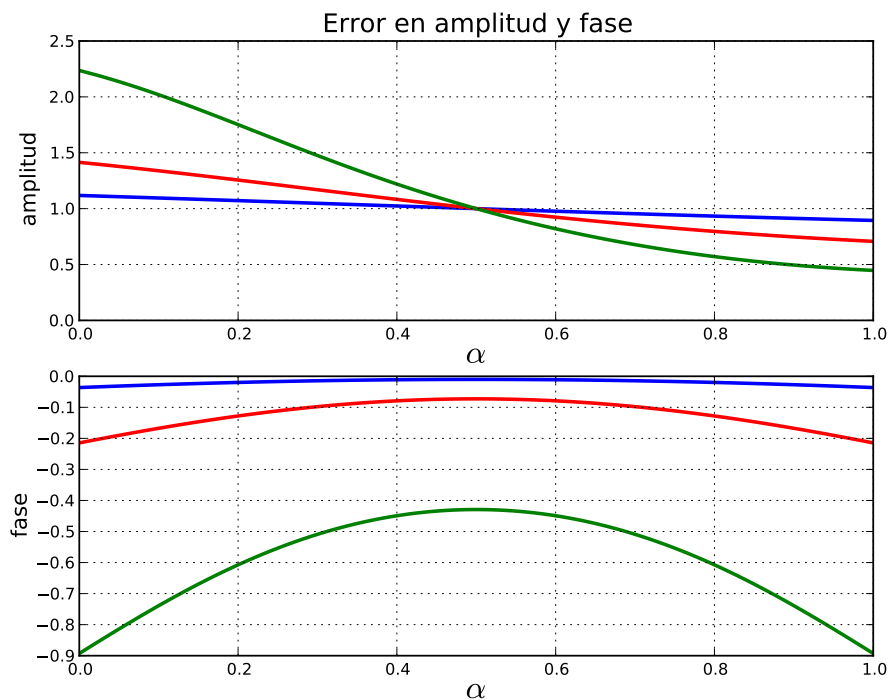


Figura 2.1: Errores relativos de la solución numérica de la ecuación de oscilación simple para diferentes valores del parámetro  $\alpha$ . Los gráficos en azul, rojo y verde corresponden a valores  $\omega\Delta t$  iguales a  $1/2$ , 1 y 2 respectivamente.

La amplitud de la solución numérica aumenta con el tiempo cuando  $\alpha < 1/2$ , indicando que el esquema es inestable en estos casos, tal como se observa en la figura 2.1. Por el contrario, para  $\alpha > 1/2$  la amplitud disminuye, y por tanto la solución se

amortigua progresivamente. Únicamente en el caso  $\alpha = 1/2$  la amplitud de la solución numérica coincide con la solución analítica. Por otra parte, los errores en amplitud son mayores cuanto mayor es el producto  $\omega\Delta t$ , es decir, cuanto mayor es el paso de tiempo respecto del período de la oscilación. Esto indica que, en el caso estable,  $\alpha \geq 1/2$ , las oscilaciones rápidas se amortiguan más rápidamente que las lentas. De forma similar, en el caso inestable  $\alpha < 1/2$ , las oscilaciones rápidas explotan más rápidamente que las lentas. En cuanto al error en la fase, para cualquier valor de  $\alpha$  la fase de la solución numérica es menor que la de la solución analítica, es decir, la solución numérica es siempre más lenta, y va retrasándose respecto de la analítica, tal como se observa en la figura 2.1. Como ocurre con la amplitud, los errores en la fase son más grandes cuanto mayor es el producto  $\omega\Delta t$ . Tal como cabe esperar, son menores en el caso  $\alpha = 1/2$ .

En problemas más complejos, el análisis de estabilidad es mucho más difícil. Sin embargo, en líneas generales, se obtienen resultados cualitativamente parecidos a los obtenidos en la ecuación de oscilación simple (2.10): los esquemas implícitos son más estables y amortiguan las ondas, especialmente aquellas con frecuencias más altas.

Exponemos a continuación un breve resumen de dos de los métodos de integración temporal más utilizados en modelización atmosférica: el método HEVI y el método semi-implícito. El método HEVI se usa en modelos no espectrales, como el modelo MM5 [Dudhia, 1993], el WRF [Skamarock et al., 2005] o el COSMO [Baldauf et al., 2011]. El método semi-implícito se utiliza en modelos espectrales y no espectrales, como el modelo espectral hidrostático del ECMWF [Ritchie et al., 1995], el modelo no espectral hidrostático HIRLAM [Gustafsson y McDonald, 1996] o el modelo espectral no hidrostático ALADIN [Bénard et al., 2010].

El método HEVI, *Horizontally Explicit Vertically Implicit*, se basa en distinguir, en las ecuaciones de pronóstico, los términos responsables de la evolución de modos rápidos de aquellos términos responsables de modos lentos, y en utilizar esquemas de integración temporal distintos para cada uno de ellos. Es decir, las ecuaciones de

evolución se escriben como:

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{F}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{S}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) = 0,$$

donde, tal como sugieren Skamarock y Klemp [1992], la aceleración de Coriolis y la advección se incluyen en el término lento  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ , y las ondas acústicas en el rápido  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ . Las ondas gravitatorias se consideran lentas en la horizontal y rápidas en la vertical. En general, no es posible hacer una separación clara de términos responsables de modos rápidos  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  y modos lentos  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ . Esta separación se realiza de forma aproximada, deduciendo los términos rápidos a partir de las perturbaciones lineales de las ecuaciones de pronóstico respecto de una atmósfera de referencia [Skamarock y Klemp, 1992].

En el método HEVI se usan dos pasos de tiempo distintos, uno grande  $\Delta t_{\mathbf{S}}$  para los modos lentos y otro pequeño  $\Delta t_{\mathbf{F}}$  para los modos rápidos. En cada paso de tiempo  $\Delta t_{\mathbf{S}}$  se realizan varios pasos de tiempo  $\Delta t_{\mathbf{F}}$ . El paso de tiempo pequeño es implícito en la vertical y explícito en la horizontal, mientras que el paso de tiempo grande es explícito tanto en la vertical como en la horizontal. La eficiencia se consigue por varios caminos. Por una parte, el paso de tiempo rápido es poco costoso (resuelve en cada punto de rejilla un sistema lineal relativamente sencillo) y los modos lentos se evalúan pocas veces (una sola vez cada paso de tiempo grande). Por otra parte, no es necesario resolver en cada paso de tiempo costosas ecuaciones de Helmholtz tridimensionales, como las que aparecen en los modelos semi-implícitos.

Al contrario que en el método HEVI, en el método semi-implícito no se hace una separación de las direcciones horizontal y vertical, sino que se tratan conjuntamente ambas [Robert et al., 1972]. Este método se basa en el uso de un modelo lineal respecto de una atmósfera de referencia isoterma y en equilibrio hidrostático. Así, las ecuaciones de pronóstico se escriben:

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{L}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{N}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (2.11)$$



donde  $\mathbf{L}(\mathbf{q})$  es el modelo lineal tratado implícitamente y  $\mathbf{N}(\mathbf{q})$  es la parte no lineal tratada explícitamente. Para poder resolver el sistema lineal que se deriva de (2.11), el modelo lineal debe tener coeficientes constantes y por tanto no incluye la orografía. Su función es la de amortiguar las ondas rápidas y estabilizar el modelo, haciendo posible el uso de pasos de tiempo relativamente grandes. Uno de los inconvenientes de este método es que, al no estar incluida la orografía en el modelo lineal, pueden producirse inestabilidades en simulaciones de muy alta resolución en zonas con orografía abrupta. Existen diversas variantes del método con distintas propiedades desde el punto de vista de la estabilidad [Bénard, 2003]. Así, el llamado esquema semi-implícito de tres pasos de tiempo se discretiza como:

$$\frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathbf{L} \left( \frac{\mathbf{q}(t - \Delta t) + \mathbf{q}(t + \Delta t)}{2} \right) + \mathbf{N}(\mathbf{q}(t)) = 0,$$

donde se resuelve para  $\mathbf{q}(t + \Delta t)$  invirtiendo un sistema lineal tridimensional mediante el método espectral.

# Capítulo 3

## Discretización en modelos espectrales

Las ecuaciones de pronóstico que rigen la dinámica atmosférica relacionan funciones, como la temperatura, la presión o la velocidad del aire, que deben representarse numéricamente de forma aproximada, tanto espacial como temporalmente. Esta representación debe ser óptima en algún sentido. En general, en modelización atmosférica operativa se trata de encontrar un equilibrio entre la precisión, la estabilidad y la eficiencia. Este último punto es importante, pues las predicciones deben estar disponibles en un tiempo que las mantenga útiles, con valor. En el capítulo 2 se mencionaron algunas de las técnicas de discretización más usadas, resaltando las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas. En este capítulo describiremos las técnicas de discretización espacial de los modelos espectrales. En estos modelos, la discretización horizontal se basa en las funciones propias del laplaciano horizontal, que en los modelos globales son los armónicos esféricos [Ritchie et al., 1995] y en los de área limitada funciones sinusoidales [Bénard et al., 2010; Bubnová et al., 1995]. Por otra parte, la discretización vertical se basa en la técnica de diferencias finitas [Bénard et al., 2010; Bubnová et al., 1995] o de elementos finitos [Untch y Hortal, 2006]. Además, la discretización temporal de los

modelos espectrales es semi-implícita, eficiente por permitir pasos de tiempo grandes [Robert, 1981].

El capítulo empieza con una descripción de los tipos de coordenada vertical más usados en modelización numérica del tiempo. Las coordenadas que *siguen el terreno*, usadas mayoritariamente, se pueden clasificar en dos grupos: las *basadas en masa* y las *basadas en altura*. Las primeras son utilizadas principalmente en modelos hidrostáticos, siendo las segundas más populares en modelos no hidrostáticos. En el apartado 3.1 se describen estos tipos de coordenada vertical y cómo se escriben las ecuaciones de Euler en cada caso. Sigue, en el apartado 3.2, una explicación de cómo se discretiza verticalmente la atmósfera en los modelos espectrales: en capas atmosféricas o *niveles enteros*, delimitadas por superficies que se denominan *niveles intermedios*. Los operadores verticales, como la derivada respecto de la coordenada vertical, se construyen siguiendo la técnica de diferencias finitas o elementos finitos. En el apartado 3.3 se expone en qué consiste la discretización horizontal en los modelos espectrales y cómo se usan las funciones propias del laplaciano horizontal para este propósito. Se describe cómo se calculan las derivadas horizontales y el uso en el espacio espectral de la divergencia y el rotacional como alternativa a las componentes horizontales de la velocidad [Temperton, 1991]. El capítulo acaba con una exposición del problema del coste computacional de las transformaciones espectrales en los modelos globales de alta resolución, y las líneas de investigación actualmente en marcha para resolver este problema.

### 3.1. Tipos de coordenada vertical

Tradicionalmente, los modelos de predicción numérica del tiempo se construyen utilizando algún tipo de coordenada vertical que *sigue la orografía*. Con este tipo de coordenada vertical, la orografía y el límite superior de la atmósfera coinciden con superficies definidas por un valor constante de la coordenada vertical, usualmente 0 y 1. Hoy en día se usan básicamente dos tipos de coordenada vertical que siguen la orografía: una basada en masa y otra basada en altura.

La coordenada vertical basada en masa se usa en muchos modelos hidrostáticos, tanto globales como de área limitada. Por ejemplo, el modelo global IFS [Ritchie et al., 1995] y el de área limitada HIRLAM, desarrollado por un consorcio de países europeos [Gustafsson y McDonald, 1996; McDonald y Haugen, 1992, 1993].

Por otra parte, la coordenada vertical basada en altura es más común encontrarla en modelos no hidrostáticos. Por ejemplo, el modelo global UM desarrollado en MetOffice [Davies et al., 2005] y el de área limitada COSMO, desarrollado por un consorcio de países europeos [Doms y Schättler, 2002].

En general, los modelos no hidrostáticos usan la coordenada basada en altura, mientras que la coordenada basada en masa es más popular en modelos hidrostáticos. Una notoria excepción a esta regla es el modelo ALADIN [Bénard et al., 2010; Bubnová et al., 1995], modelo no hidrostático con coordenada vertical basada en masa.

A continuación introducimos los dos tipos de coordenada vertical y discutimos brevemente cómo se escriben las ecuaciones de Euler en cada caso.

### 3.1.1. Coordenada basada en masa

Bajo la aproximación de una atmósfera hidrostática, la presión en un determinado nivel es proporcional a la masa de atmósfera que hay por encima de este nivel. Es decir, de la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{\partial \pi}{\partial z}(x, y, z, t) = -g \rho(x, y, z, t), \quad (3.1)$$

se deduce que:

$$\pi(x, y, z, t) = g \int_z^\infty \rho(x, y, z', t) dz', \quad (3.2)$$

donde  $\pi(x, y, z, t)$  es la presión hidrostática,  $g$  la aceleración de la gravedad considerada constante y  $\rho(x, y, z, t)$  la densidad del aire. Se ha considerado que la presión hidrostática es cero en el tope superior de la atmósfera. A partir de (3.1) se observa que, dado que

la densidad es una magnitud definida positiva, la presión hidrostática es una función monótona con la altura: siempre decrece conforme aumenta la altura. Esta propiedad permite definir la presión hidrostática como coordenada vertical.

Una forma de construir una coordenada vertical que *sigue el terreno* basada en la presión hidrostática es utilizando la presión hidrostática en superficie de esta forma:

$$\sigma(x, y, z, t) = \frac{\pi(x, y, z, t) - \pi_T}{\pi_s(x, y, t) - \pi_T}, \quad (3.3)$$

donde  $\pi(x, y, z, t)$  es la presión hidrostática definida en (3.2),  $\pi_s(x, y, t)$  es la presión hidrostática en superficie y  $\pi_T$  es la presión hidrostática en el límite superior considerado. En esta coordenada, llamada *coordenada sigma*,  $\sigma(x, y, z, t) = 1$  corresponde a la superficie, mientras que  $\sigma(x, y, z, t) = 0$  corresponde al límite superior.

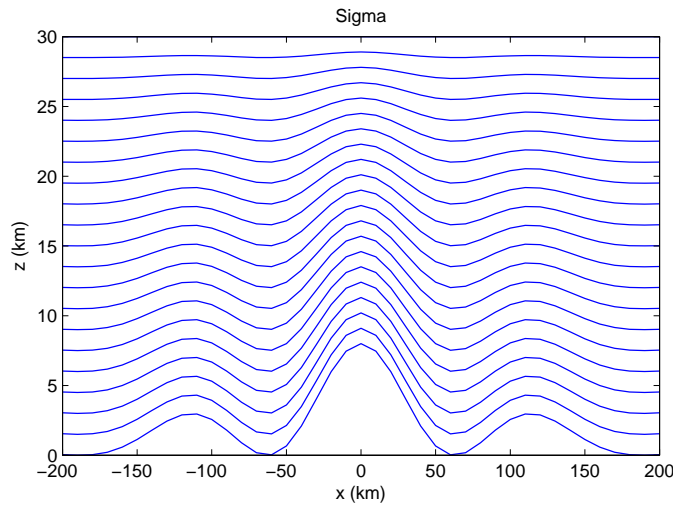


Figura 3.1: Niveles de coordenada sigma constante.

Una variante mejorada de esta coordenada vertical es la coordenada vertical híbrida introducida por Simmons y Burridge [Simmons y Burridge, 1981]. La coordenada vertical híbrida se comporta en niveles bajos como coordenada sigma y como coordenada isobárica en niveles altos, siendo la transición entre ambas suave. Se define de

forma implícita a través de la expresión:

$$\pi(x, y, \eta, t) = A(\eta) + \pi_s(x, y, t) B(\eta), \quad (3.4)$$

donde las funciones  $A(\eta)$  y  $B(\eta)$  controlan el comportamiento de la coordenada vertical y su transición de coordenada sigma a coordenada isobárica. Usualmente las funciones  $A(\eta)$  y  $B(\eta)$  no se dan de forma analítica, ya que es suficiente conocer su valor en cada uno de los niveles del modelo.

### 3.1.2. Coordenada basada en altura

Una de las diferencias entre las coordenadas verticales basadas en masa y las basadas en altura es que, las primeras dependen del tiempo a través de la presión hidrostática (3.2), mientras que las segundas no dependen el tiempo. Además, en la primeras es necesario realizar una integración de la ecuación de equilibrio hidrostático (3.1) para obtener la altura a la que se sitúa cada nivel, mientras que en las segundas esto no es necesario.

Por lo demás, la obtención de una coordenada que *sigue el terreno* se realiza de forma similar en ambos tipos de coordenada, a partir de la presión hidrostática en un caso y de la altura en otro.

La coordenada vertical basada en altura que sigue el terreno más sencilla es la de Gal-Chen [Gal-Chen y Sommerville, 1975]. Se define como:

$$Z(x, y, z) = \frac{z - H_B(x, y)}{H_T - H_B(x, y)}, \quad (3.5)$$

donde  $H_T$  es la altura del tope rígido del dominio espacial y  $H_B(x, y)$  representa la orografía. En este caso,  $Z = 0$  es el límite inferior del dominio mientras que  $Z = 1$  es el límite superior. Invirtiendo (3.5) se obtiene la altura a la que se sitúa cada nivel:

$$z(x, y, Z) = H_B(x, y) (1 - Z) + H_T Z, \quad (3.6)$$

y por tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (1 - Z) \frac{\partial H_B}{\partial x},$$

es decir, la inclinación de los niveles del modelo es proporcional al gradiente horizontal de la orografía y disminuye linealmente con la coordenada vertical.

Formulaciones alternativas a esta son las descritas en Davies et al. [2005] y Schär et al. [2002]. Ambas tratan de reducir la influencia de la orografía con la altura de forma más eficaz que la coordenada Gal-Chen.

La coordenada híbrida basada en masa tiene la característica de que, a partir de un determinado nivel, los niveles de coordenada vertical constante son superficies isobáricas [Simmons y Burridge, 1981]. La coordenada vertical híbrida basada en altura del modelo UM posee esta característica, aunque a partir de un determinado nivel son superficies de altura constante en lugar de superficies isobáricas [Davies et al., 2005]. Para esta coordenada vertical, el valor de la altura  $z(x, y, Z)$  en función del nivel  $Z$  y la orografía  $H_B(x, y)$  es:

$$z(x, y, Z) = \begin{cases} H_T Z + H_B(x, y) (1 - Z/Z_I)^2 & \text{si } 0 \leq Z \leq Z_I \\ H_T Z & \text{si } Z_I \leq Z \leq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

de manera que para  $Z \geq Z_I$  los niveles del modelo tienen altura constante, adaptándose progresivamente a la orografía para  $Z \leq Z_I$ . En la coordenada de Schär la función a utilizar es [Schär et al., 2002]:

$$z(x, y, Z) = H_T Z + H_B(x, y) \frac{\sinh(1 - Z)\beta}{\sinh \beta}, \quad (3.8)$$

donde  $\beta$  es un parámetro libre a determinar. En el caso  $\beta = 1$  se obtiene una coordenada vertical similar a la de Gal-Chen, mientras que en el caso  $\beta > 1$  la influencia de la orografía disminuye más rápidamente con la altura.

### 3.1.3. Ecuaciones de Euler y coordenada vertical

A continuación veremos cómo se expresan las ecuaciones de Euler usando distintas coordenadas verticales. Para simplificar, sin perder generalidad, se considera una dimensión horizontal y una vertical. Las ecuaciones de Euler en coordenadas Cartesianas  $(x, z)$  son [Laprise, 1992]:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F_x \quad (3.9)$$

$$\gamma \frac{dw}{dt} + g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \gamma F_z \quad (3.10)$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{C_p} \frac{d \ln p}{dt} = \frac{Q}{C_p} \quad (3.11)$$

$$\frac{d \ln p}{dt} + \frac{C_p}{C_v} D = \frac{Q}{C_v T}, \quad (3.12)$$

siendo la divergencia  $D$ :

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

En las ecuaciones (3.9) a (3.12)  $u, w$  son las componentes de la velocidad,  $p$  la presión,  $T$  la temperatura,  $F_x$  y  $F_z$  son las componentes de la fuerza por unidad de masa y tiempo (exceptuando la fuerza del gradiente de presión y gravitatoria),  $Q$  el calor dado al aire por unidad de masa y tiempo,  $C_v$  y  $C_p$  los calores específicos del aire seco a volumen y presión constante respectivamente y  $R$  la constante del aire seco. Si  $\gamma = 0$ , las ecuaciones son hidrostáticas, siendo no hidrostáticas en el caso  $\gamma = 1$ .

Si se utiliza la presión hidrostática como coordenada vertical, estas mismas ecuaciones se escriben [Kasahara, 1974; Laprise, 1992]:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial p}{\partial \pi} \frac{\partial z}{\partial x} &= F_x \\ \gamma \frac{dw}{dt} + g \left( 1 - \frac{\partial p}{\partial \pi} \right) &= \gamma F_z \end{aligned}$$



$$\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{C_p} \frac{d \ln p}{dt} = \frac{Q}{C_p}$$

$$\frac{d \ln p}{dt} + \frac{C_p}{C_v} D = \frac{Q}{C_v T},$$

donde la divergencia  $D$  es:

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + g\rho \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \pi} - g\rho \frac{\partial w}{\partial \pi},$$

y la altura se calcula mediante:

$$z(x, \pi, t) = z_s(x) - \int_{\pi_s}^{\pi} \frac{d\pi'}{g\rho(x, \pi', t)}.$$

Finalmente, en el caso de usar la coordenada vertical híbrida definida en (3.4) las ecuaciones de Euler no hidrostáticas son las siguientes [Laprise, 1992]:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{m} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial x} = F_x \quad (3.13)$$

$$\gamma \frac{dw}{dt} + g \left( 1 - \frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = \gamma F_z \quad (3.14)$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{C_p} \frac{d \ln p}{dt} = \frac{Q}{C_p} \quad (3.15)$$

$$\frac{d \ln p}{dt} + \frac{C_p}{C_v} D = \frac{Q}{C_v T} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \pi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial \pi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \dot{\eta} \frac{\partial \pi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (3.17)$$

donde se define:

$$m \equiv \frac{\partial \pi}{\partial \eta} = \frac{dA}{d\eta} + \pi_s \frac{dB}{d\eta},$$

la divergencia se expresa como:

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g\rho}{m} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{g\rho}{m} \frac{\partial w}{\partial \eta},$$

y la altura se calcula mediante:

$$z(x, \eta, t) = z_0(x) + \int_{\eta}^{\eta_s} \frac{m(x, \eta', t)}{g\rho(x, \eta', t)} d\eta'.$$

El modelo ALADIN [Bénard et al., 2010; Bubnová et al., 1995] se construye partiendo de las ecuaciones de Euler (3.13) a (3.17) en su versión tridimensional. Las variables de pronóstico del modelo ALADIN son las componentes horizontales de la velocidad, la temperatura, la presión hidrostática en superficie y dos variables relacionadas con la ecuación del momento vertical: la desviación de la presión respecto de la presión hidrostática y una variable relacionada con la divergencia vertical de la velocidad:

$$q \equiv \ln \frac{p}{\pi} \quad (3.18)$$

$$d \equiv -g \frac{p}{mRT} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (3.19)$$

Se escogen estas variables de pronóstico por criterios de estabilidad. En Bénard et al. [2005] se analiza la estabilidad de las ecuaciones linealizadas del modelo ALADIN en presencia de orografía y se concluye que la elección de las variables de pronóstico, y en particular la divergencia (3.19), son determinantes para la estabilidad del modelo.

Una consecuencia de elegir una coordenada vertical basada en masa es que, para escribir las ecuaciones de Euler, se requieren la derivada y la integral respecto de la coordenada vertical. Sin embargo, con la coordenada vertical basada en altura sólo es necesario la derivada. El siguiente apartado, donde se detallan aspectos de la discretización de los operadores verticales, se centrará en el operador derivada, pues el modelo numérico presentado en este trabajo utiliza una coordenada vertical basada en altura.

### 3.2. Discretización vertical

Para la discretización en la dirección vertical empleada en el modelo de esta tesis, se ha seguido la técnica bastante común de dividir la atmósfera en capas o niveles

enteros, separados por superficies o niveles semi-enteros.

En la construcción del operador derivada respecto de la coordenada vertical híbrida basada en altura, descrita en la sección 3.1.2, se han probado dos técnicas: la técnica de elementos finitos [Simarro y Hortal, 2011] y la de diferencias finitas [Simarro et al., 2013]. La técnica de elementos finitos, más precisa y menos estable en presencia de orografía que la de diferencias finitas, se ha probado en un modelo bidimensional [Simarro y Hortal, 2011]. Por otra parte, la técnica de diferencias finitas, menos precisa aunque más robusta, se ha implementado y probado en un modelo tridimensional global [Simarro et al., 2013].

### 3.2.1. Diferencias finitas

El dominio espacial se divide en la dirección vertical en  $N_v$  capas atmosféricas denominadas *niveles enteros*, delimitadas entre sí por los llamados *niveles intermedios*. La capa atmosférica más baja está delimitada por el límite inferior del modelo (orografía) y el nivel intermedio más bajo, mientras que la más alta lo está por el nivel intermedio más alto y el límite superior del modelo (tope atmosférico). Los niveles intermedios y los límites inferior y superior quedan determinados por  $N_v + 1$  valores de la coordenada vertical, desde  $Z_{\frac{1}{2}}$  hasta  $Z_{N_v + \frac{1}{2}}$ , siendo los límites inferior y superior  $Z_{\frac{1}{2}} = 0$  y  $Z_{N_v + \frac{1}{2}} = 1$  respectivamente. Por otra parte, los niveles enteros tienen asociados  $N_v$  valores de la coordenada vertical, desde  $Z_1$  hasta  $Z_{N_v}$ , situados en el punto medio de los niveles intermedios que las definen, es decir:

$$Z_j = \frac{1}{2}(Z_{j-\frac{1}{2}} + Z_{j+\frac{1}{2}}).$$

La altura a la que están situados los niveles depende de cómo esté definida la coordenada vertical. Las relaciones entre altura  $z$ , coordenada vertical  $Z$  y orografía  $H_B(x, y)$  para cada una de las coordenadas verticales descritas en la sección 3.1.2 son: (3.6) para la coordenada Gal-Chen [Gal-Chen y Sommerville, 1975], (3.7) para la

coordenada híbrida del modelo UM [Davies et al., 2005] y (3.8) para la coordenada vertical estudiada por Schär et al. [2002]. En cualquier caso, todas coinciden en que la altura  $z(x, y, Z)$  es una función monótona creciente en  $Z$  y en que la orografía y el tope atmosférico son las superficies definidas por  $Z(x, y, z) = 0$  y  $Z(x, y, z) = 1$  respectivamente.

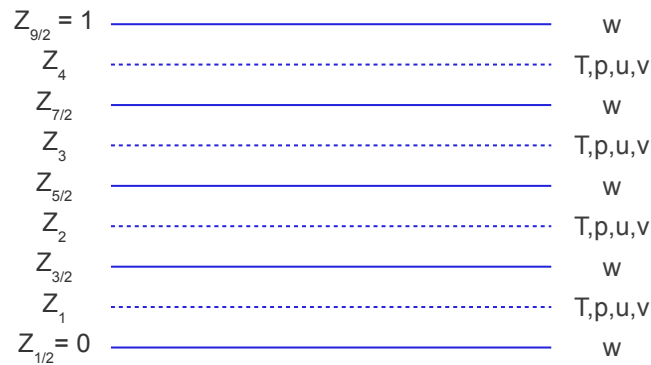


Figura 3.2: Rejilla vertical de Lorenz: en los niveles enteros se define la temperatura, la presión y la velocidad horizontal, y en los niveles intermedios la velocidad vertical.

Las variables de pronóstico se pueden situar en niveles intermedios o enteros. Lorenz [1960] propone situar todas las variables de pronóstico en niveles enteros excepto la velocidad vertical, que se sitúa en niveles intermedios. Otra opción es la propuesta por Charney y Phillips [1953] en la que, además de la velocidad vertical, también la temperatura potencial se sitúa en niveles intermedios. Como muestra de la importancia que tiene la discretización vertical de las variables de pronóstico, citamos los trabajos Thuburn y Woolings [2005] y Thuburn [2006], en los que se estudian los modos normales atmosféricos en función del tipo de coordenada vertical, las variables de pronóstico utilizadas y su disposición en los niveles enteros e intermedios. Thuburn y Woolings [2005] calculan las relaciones de dispersión numéricas de los modos normales para un amplio conjunto de diferentes discretizaciones verticales de las ecuaciones de Euler, y las comparan con las relaciones de dispersión analíticas. Consideran tres tipos de coor-

denada vertical: basada en altura, basada en masa e isentrópica. Para cada coordenada tienen en cuenta diferentes conjuntos de variables de pronóstico y disposición de éstas en los niveles verticales enteros e intermedios. Se detecta en este trabajo que muchas elecciones son problemáticas por tener modos computacionales, ser inestables o ser inexactas. Otro trabajo interesante a este respecto es un reciente estudio de Holdaway et al. [2012a,b] en el que se comparan las disposiciones de las variables de pronóstico de Lorenz y Charney-Phillips en relación a las parametrizaciones físicas de la capa límite.

En el modelo que proponemos en los siguientes capítulos hemos optado por la disposición de variables de pronóstico de Lorenz. En la figura 3.2 representamos los niveles enteros e intermedios y las variables de pronóstico del modelo. Es de notar que la única variable de pronóstico en los límites inferior y superior es la velocidad vertical. En el capítulo 4 explicamos con detalle que la variable de pronóstico en los niveles intermedios es la *velocidad vertical contravariante*, cuyo valor es cero en los límites inferior y superior (es decir,  $W(x, y, Z, t) = 0$  para  $Z = 0$  y  $Z = 1$ ). Este hecho lo tendremos en cuenta a la hora de discretizar los operadores verticales que operan sobre funciones definidas en niveles intermedios y que son nulas en los límites inferior y superior.

En las ecuaciones de Euler aparece el operador derivada respecto de la coordenada vertical, y por tanto, se requiere estimar el valor de la derivada de una función a partir de los valores de dicha función en los niveles del modelo. Normalmente, cuando se usa la técnica de diferencias finitas, el resultado de esta estimación se da en niveles enteros si la función viene dada en niveles intermedios, y viceversa, el resultado se da en niveles intermedios si la función viene dada en niveles enteros. Asimismo, como se verá más adelante, en el curso de la discretización vertical de las ecuaciones de Euler, es necesario estimar el valor de una función dada en niveles enteros cuando ésta está definida en niveles intermedios y viceversa.

Por tanto, se requieren dos tipos de operadores verticales: la derivada y la in-

terpolación respecto de la coordenada vertical. A su vez, para cada uno de éstos se requieren dos versiones: una, que dada una función en niveles intermedios, proporcione el resultado (derivada o interpolación) niveles enteros; y dos, que dada una función en niveles enteros, proporcione el resultado en niveles intermedios.

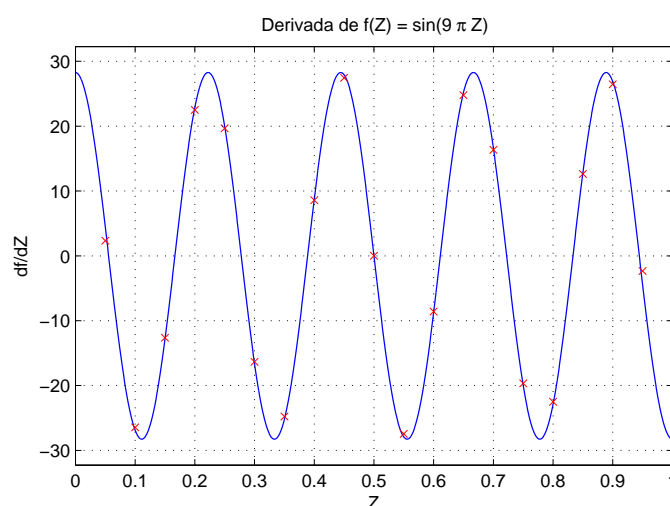


Figura 3.3: Derivada de la función  $f(Z) = \sin(9\pi Z)$ . En azul, el valor analítico, en rojo el valor numérico calculado con el operador  $\mathbf{D}_Z$  de orden 4 a partir de los valores de la función en una rejilla vertical de 20 niveles regularmente espaciados.

Siguiendo la técnica de diferencias finitas, los operadores verticales *derivada* e *interpolación* se obtienen considerando una serie de Taylor truncada. Dados  $P$  puntos en los cuales una función  $\phi(Z)$  es conocida (es decir, dados los valores  $\phi_1 = \phi(Z_1)$  a  $\phi_P = \phi(Z_P)$ ), el siguiente sistema de ecuaciones permite evaluar la función  $\phi(Z)$  y sus derivadas en un punto problema cualquiera  $\hat{Z}$ :

$$\phi_j = \sum_{k=0}^{P-1} \frac{\phi^{(k)}(\hat{Z})}{k!} (Z_j - \hat{Z})^k \quad j \in [1, P]. \quad (3.20)$$

En efecto, a partir del sistema (3.20), el valor interpolado  $\phi^{(0)}(\hat{Z})$  y la derivada  $\phi^{(1)}(\hat{Z})$  pueden calcularse en el punto problema  $\hat{Z}$  como una combinación lineal de los valores conocidos de la función  $\phi_1$  a  $\phi_P$ . Se observa que, aunque no son necesarias, se pueden estimar derivadas de orden superior.

De esta forma, se definen cinco operadores verticales.  $\mathbf{E}_Z$  y  $\mathbf{D}_Z$  son los operadores

interpolación y derivada que proporcionan los resultados en niveles intermedios a partir de una función conocida en niveles enteros. Se representan por matrices  $(N_v - 1) \times N_v$ . De forma análoga,  $\mathbf{E}_{\hat{Z}}$  y  $\mathbf{D}_{\hat{Z}}$  son los operadores interpolación y derivada que proporcionan los resultados en niveles enteros a partir de una función conocida en niveles intermedios. Se representan por matrices  $N_v \times (N_v - 1)$ . En la construcción de los operadores  $\mathbf{E}_{\hat{Z}}$  y  $\mathbf{D}_{\hat{Z}}$ , se asume implícitamente que la función a la cual se aplica el operador vale cero en los límites inferior y superior (esta función puede ser, por ejemplo, la velocidad vertical contravariante). Sin embargo, como se verá en el capítulo 4, en la ecuación del momento es necesario aplicar un operador interpolación a funciones definidas en niveles intermedios que no son cero en los límites del modelo. Este operador, denotado por  $\hat{\mathbf{E}}_{\hat{Z}}$ , se representa mediante una matriz  $N_v \times (N_v - 1)$ .

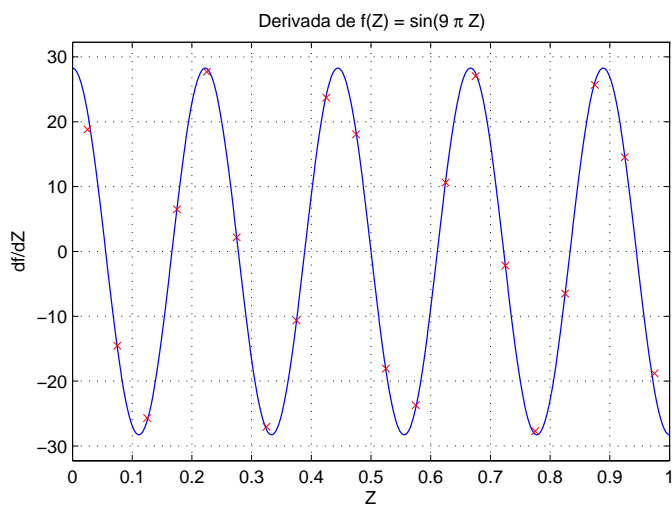


Figura 3.4: Derivada de la función  $f(Z) = \sin(9\pi Z)$ . En azul el valor analítico, en rojo el valor numérico calculado con el operador  $\mathbf{D}_{\hat{Z}}$  de orden 4 a partir de los valores de la función en una rejilla vertical de 20 niveles regularmente espaciados.

Para probar la exactitud de los operadores verticales así definidos, se ha considerado la función  $f(Z) = \sin(9\pi Z)$  y una rejilla vertical de 20 niveles, y se han comparado los resultados numéricos y analíticos. En las figuras 3.3 y 3.4 se presentan los resultados para los operadores  $\mathbf{D}_Z$  y  $\mathbf{D}_{\hat{Z}}$  respectivamente, habiendo tomando  $P = 4$  en la ecuación (3.20). De esta manera, la derivada en cada nivel intermedio se aproxima utilizando el

valor de la función en los cuatro niveles enteros más cercanos.

En el caso de rejillas regulares, el orden del operador derivada es  $P$ , siendo  $P - 1$  en rejillas no regulares. En la figura 3.5 se ha aplicado el operador derivada  $\mathbf{D}_Z$  a la función  $f(Z) = \sin(9\pi Z)$  en una rejilla vertical de 20 niveles no regulares, con más densidad de niveles para valores pequeños de la coordenada vertical. Comparando las figuras 3.3 y 3.5 se observa que con la rejilla no regular la exactitud es menor, sobre todo donde la densidad de niveles es baja.

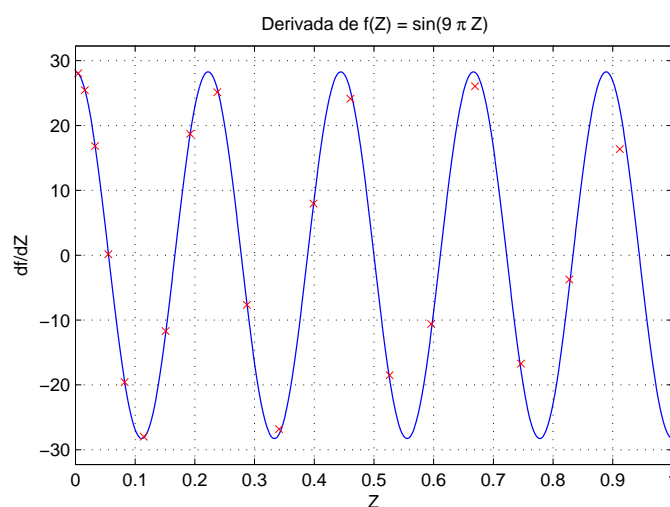


Figura 3.5: Derivada de la función  $f(Z) = \sin(9\pi Z)$ . En azul el valor analítico, en rojo el valor numérico calculado con el operador  $\mathbf{D}_Z$  de orden 4 a partir de los valores de la función en una rejilla vertical de 20 niveles no regularmente espaciados.

### 3.2.2. Elementos finitos

El modelo global IFS [Ritchie et al., 1995] en su versión hidrostática utiliza el método de elementos finitos para la discretización de los operadores verticales [Untch y Hortal, 2006]. Dado que es un modelo hidrostático con coordenada vertical basada en masa, el único operador necesario es la integral. El método de elementos finitos utilizado en Untch y Hortal [2006] se puede dividir esquemáticamente en tres pasos. En primer lugar, se representa la función dada en los niveles del modelo en el espacio de *splines*, polinomios cúbicos continuos hasta la segunda derivada. En segundo lugar, se calcula analíticamente en el espacio de *splines* el operador que se esté discretizando,



por ejemplo el operador integral. Finalmente, se proyecta el resultado nuevamente al espacio de niveles del modelo utilizando el método de Garlekin.

La técnica de elementos finitos se ha aplicado a un modelo bidimensional no hidrostático con coordenada vertical basada en altura. Los detalles de la implementación y resultados están descritos en Simarro y Hortal [2011]. Al ser un modelo no hidrostático con coordenada basada en altura, el único operador necesario es la derivada. El operador derivada resultante es más preciso que el obtenido mediante diferencias finitas, sin embargo, la estabilidad no lineal en presencia de orografía es significativamente menor y por este motivo no se ha utilizado esta técnica en el modelo global [Simarro y Hortal, 2011; Simarro et al., 2013].

### 3.3. Discretización horizontal

En los modelos espectrales, la resolución de la ecuación de Helmholtz, el cálculo de derivadas horizontales y la difusión horizontal, se realizan en el *espacio espectral*, mientras que el cálculo de los términos no lineales de las ecuaciones de Euler y de las tendencias debidas a la parametrización de procesos físicos, se realiza en el *espacio de puntos de rejilla*. Por tanto, es necesario realizar transformaciones desde el espacio espectral al espacio de puntos de rejilla (llamada *transformación inversa*) y desde el espacio de puntos de rejilla al espacio espectral (llamada *transformación directa*). En la figura 3.6 está representado un paso de tiempo en un modelo global espectral: dados los valores de las variables en cada nivel del modelo en el espacio espectral, se realiza una transformación inversa de Legendre seguida de una transformación inversa de Fourier para obtener los valores de las variables en cada nivel del modelo en el espacio punto de rejilla. En éste se realizan los cálculos no lineales de las ecuaciones de Euler y las parametrizaciones físicas para obtener las tendencias correspondientes del esquema semi-implícito. Estas tendencias se transforman al espacio espectral, realizando primero una transformación directa de Fourier, seguida de una transformación directa de Legendre. Finalmente, en el espacio espectral se resuelve la ecuación de Helmholtz

para obtener los valores de las variables de pronóstico en el siguiente paso de tiempo, se realiza la difusión horizontal y se calculan las derivadas horizontales.

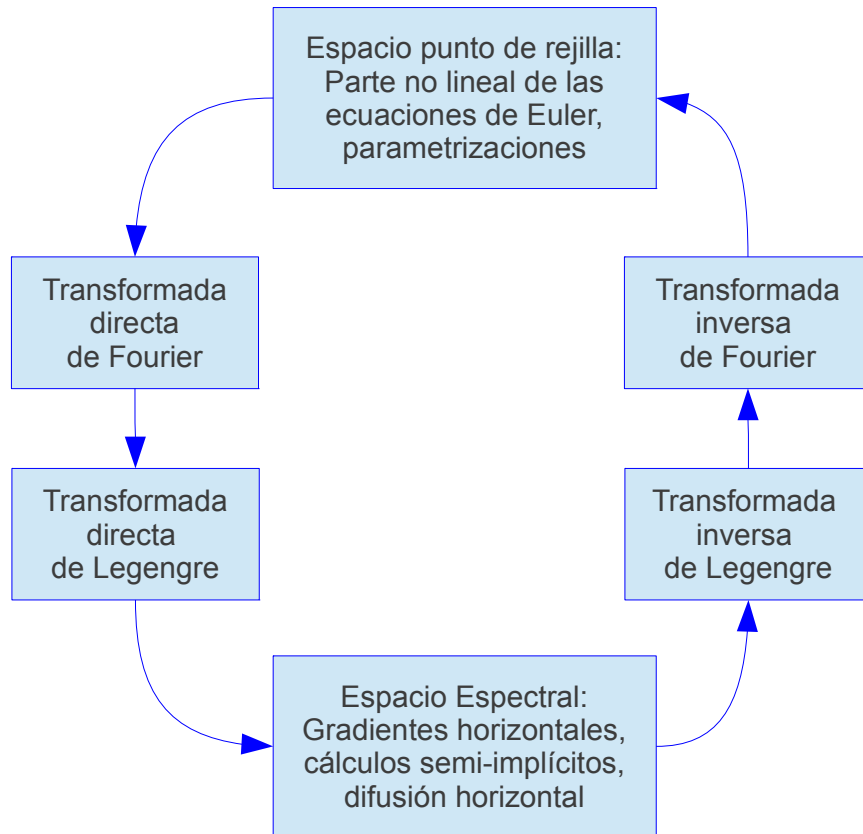


Figura 3.6: Esquema de un paso de tiempo en un modelo espectral global.

A continuación explicamos en qué consiste la discretización en ambos espacios, espectral y punto de rejilla, y cómo se realizan las transformaciones entre ambos.

### 3.3.1. Representación espectral

Una variable cualquiera, en un nivel del modelo cualquiera, se representa por una función  $\psi$  dependiente de la longitud  $\lambda$  y del seno de la latitud  $\mu \equiv \sin \phi$ . Esta función  $\psi(\lambda, \mu)$ , si cumple la condición de ser de cuadrado integrable, puede representarse como

una serie infinita de armónicos esféricos:

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \hat{\psi}_n^m Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (3.21)$$

donde  $Y_n^m(\lambda, \mu)$  es el armónico esférico:

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda}, \quad (3.22)$$

siendo  $P_n^m(\mu)$  el Polinomio Asociado de Legendre de orden  $m$  y grado  $n$ , que se puede escribir como [Abramowitz y Stegun, 1972]:

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{2^n n!}} (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2-1)^n.$$

Los polinomios asociados de Legendre son ortogonales, lo que permite que los armónicos esféricos también lo sean:

$$\iint_{\sigma} Y_n^m(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n'}^{m'}(\lambda, \mu) d\sigma = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Teniendo en cuenta (3.22) y reordenando los sumatorios, la ecuación (3.21) se puede escribir así:

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\lambda} \sum_{n=|m|}^{\infty} P_n^m(\mu) \hat{\psi}_n^m. \quad (3.23)$$

Esta ecuación representa la llamada *transformación inversa*, donde, a partir de los coeficientes espectrales  $\hat{\psi}_n^m$ , se calcula el valor de la función  $\psi(\lambda, \mu)$  en cada punto de longitud y latitud por medio de una *transformación inversa de Legendre*, seguida de una *transformación inversa de Fourier*. Gracias a la propiedad de ortogonalidad de los armónicos esféricos, es posible invertir la ecuación (3.21), es decir, encontrar las

componentes espectrales  $\hat{\psi}_n^m$  a partir de la función  $\psi(\lambda, \mu)$ :

$$\hat{\psi}_n^m = \iint_{\sigma} \psi(\lambda, \mu) \bar{Y}_n^m(\lambda, \mu) d\sigma,$$

o bien, desarrollando la integral sobre la esfera:

$$\hat{\psi}_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu P_n^m(\mu) \int_0^{2\pi} d\lambda e^{-im\lambda} \psi(\lambda, \mu). \quad (3.24)$$

Esta ecuación representa la llamada *transformación directa*, donde, a partir del valor de la función  $\psi(\lambda, \mu)$  en cada punto de longitud y latitud, se calculan los coeficientes espectrales  $\hat{\psi}_n^m$  por medio de una *transformación directa de Fourier*, seguida de una *transformación directa de Legendre*.

El uso de los armónicos esféricos es interesante, no sólo por la propiedad de ortogonalidad que permite definir fácilmente las transformaciones directas e inversas entre la función  $\psi(\lambda, \mu)$  y las componentes espectrales  $\hat{\psi}_n^m$ , sino porque es una función propia del laplaciano en coordenadas esféricas con valor propio  $-n(n+1)$ . Esta propiedad se usa en la resolución de la ecuación de Helmholtz, en la que el único operador horizontal es el laplaciano.

En la práctica, debido a que los computadores tienen una capacidad limitada, se usa un número finito de armónicos esféricos. Hay diferentes formas de truncar las series, siendo la más popular la llamada *truncación triangular M*, donde la representación espectral (3.21) se aproxima mediante la serie:

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M e^{im\lambda} \sum_{n=|m|}^M P_n^m(\mu) \hat{\psi}_n^m. \quad (3.25)$$

Como se ha mencionado, los armónicos esféricos  $Y_n^m$  son funciones propias del laplaciano en coordenadas esféricas con valores propios  $-n(n+1)$ . Siendo el laplaciano un operador lineal invariante bajo rotaciones, se deduce que sus espacios propios son

también invariantes bajo rotaciones. Esto implica que cualquier armónico esférico de grado  $n$  se transforma, bajo una rotación, en una combinación lineal de armónicos esféricos de grado  $n$ . La truncación triangular preserva esta propiedad y por este motivo se dice que es isotrópica [Naughton et al., 2006].

### 3.3.2. Representación en puntos de rejilla

Las funciones  $\psi(\lambda, \mu)$  se representan por su valor en un conjunto finito de puntos de rejilla. La disposición de los puntos de rejilla está supeditada al tipo de transformaciones espectrales a realizar en (3.23) y (3.24). Están situados sobre un determinado número de paralelos, siendo la rejilla regular en longitud (en cada paralelo la distancia angular en longitud entre puntos de rejilla es constante), e irregular en latitud (la distancia angular en latitud entre paralelos no es constante).

En la transformación directa (3.24) se realizan sucesivamente dos integrales. Por un lado, la integral en longitud se hace con una transformación de Fourier rápida, por lo que, en cada paralelo se requiere una rejilla regular en longitud. Si el número de puntos de rejilla es el mismo en todos los paralelos, la distancia entre éstos es mucho menor en los paralelos cercanos a los polos que en el ecuador. Este inconveniente se evita con la llamada *rejilla reducida*, consistente en variar el número de puntos en cada paralelo para conseguir distancias entre puntos de rejilla similares [Hortal y Simmons, 1991]. Por otro lado, la integral en latitud se lleva a cabo utilizando una cuadratura de Gauss para poder realizar integraciones exactas de los polinomios asociados de Legendre. Por este motivo, la rejilla no es regular en latitud, es decir, la distancia angular entre paralelos sucesivos no es constante.

Dada una truncación triangular  $M$ , la rejilla se llama *gausiana cuadrática* cuando tiene un número de paralelos suficientemente grande como para que la cuadratura de Gauss del producto de dos polinomios de grado  $M$  sea exacta. Esta rejilla es necesaria en el caso de que se esté usando advección euleriana (donde se calculan productos de velocidades por gradientes), de otra manera aparecerían inestabilidades asociadas

al *aliasing*. De forma similar, dada una truncación triangular  $M$ , la rejilla se llama *gausiana lineal* cuando el número de paralelos solamente asegura la exactitud de la cuadratura de Gauss de un polinomio de grado igual o inferior a la truncación escogida. Esta rejilla es útil para el caso en que se utilice la advección semi-lagrangiana.

En una rejilla gaussiana se deben verificar las siguientes relaciones entre el número máximo de puntos de rejilla por paralelo  $N_\lambda$  y la truncación espectral  $M$ : si es cuadrática,  $M$  debe ser el máximo entero que verifica que  $3M + 1 \leq N_\lambda$ ; si es lineal,  $M$  debe ser el máximo entero que verifica que  $2M + 1 \leq N_\lambda$ . Además, tanto  $N_\lambda$  como el número de paralelos  $N_\mu$  deben ser pares, siendo  $N_\mu = N_\lambda/2$  o  $N_\mu = N_\lambda/2 + 1$  según  $N_\lambda/2$  sea par o impar, respectivamente.

### 3.3.3. Transformaciones espectrales

Suponiendo una truncación triangular  $M$ , una función  $\psi(\lambda, \mu)$  cualquiera queda representada en el espacio espectral por los coeficientes  $\hat{\psi} = \{\hat{\psi}_n^m\}$ , y en espacio de puntos de rejilla por los valores  $\psi = \{\psi_{jk}\}$ .

Se requiere un método de cálculo que permita obtener los valores en puntos de rejilla  $\psi$  a partir de los coeficientes espectrales  $\hat{\psi}$  y viceversa. Se puede escribir  $\psi = \mathcal{A} \cdot \hat{\psi}$  para la transformación inversa, y  $\hat{\psi} = \mathcal{B} \cdot \psi$  para la transformación directa, donde  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  representan transformaciones lineales. Es necesario obtener los mismos coeficientes espectrales después de hacer una transformación inversa seguida de una directa. Es decir, se debe cumplir que  $\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = 1$ . Es importante darse cuenta de que la recíproca no es necesaria y no se requiere que  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 1$ , debido a que el número de puntos de rejilla es mayor que el número de componentes espectrales, de manera que las aplicaciones  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  no son invertibles.

La transformación inversa  $\psi = \mathcal{A} \cdot \hat{\psi}$  dada en (3.23), se reduce a una transformación inversa de Legendre, seguida de una transformación inversa de Fourier:

$$\psi_{jk} = \psi(\lambda_j, \mu_k) = \sum_{m=-M}^M e^{im\lambda_j} \sum_{n=|m|}^M F_n^m(\mu_k) \hat{\psi}_n^m. \quad (3.26)$$

Por otro lado, la transformación directa  $\hat{\psi} = \mathcal{B} \cdot \psi$  dada en (3.24), consiste en dos integrales que deben discretizarse adecuadamente para que  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 1$ . Esto se consigue reemplazando en (3.24) la transformación de Fourier por una transformación discreta de Fourier, y la transformación de Legendre por una cuadratura de Gauss. Para verlo, escribimos (3.24) desglosada de esta manera:

$$\hat{\psi}_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_n^m(\mu) \psi_m(\mu), \quad (3.27)$$

donde  $\psi_m(\mu)$ :

$$\psi_m(\mu) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda e^{-im\lambda} \psi(\lambda, \mu). \quad (3.28)$$

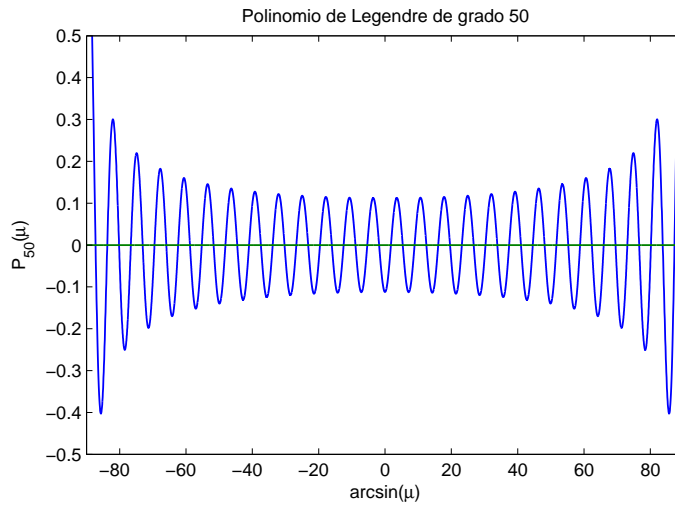


Figura 3.7: Debido a que se usa una cuadratura de Gauss para la transformada directa de Legendre, las latitudes de la rejilla gaussiana se sitúan en el arco seno de los ceros del polinomio de Legendre.

La integral (3.28) se aproxima con una transformada discreta de Fourier a partir de los valores conocidos  $\psi(\lambda_j, \mu)$ , de manera que esta transformación sea inversa de la que aparece en la ecuación (3.26).

La integral (3.27) se realiza con una cuadratura de Gauss, siendo exacta para polinomios de grado  $2N_\mu - 1$  o inferior. Es necesario evaluar la función  $\psi_m(\mu)$  en los ceros  $\mu_k$  del polinomio de Legendre de grado  $N_\mu$ , y por esta razón se define la rejilla

gausiana precisamente en el arco seno de los ceros de los polinomios de Legendre. La rejilla gausiana no es regular en latitud, aunque si bastante uniforme. Como ejemplo, se representa en la figura 3.7 el polinomio de Legendre de grado 50, cuyos ceros están espaciados de manera bastante uniforme en latitud, aunque no equidistantes.

Los coeficientes espectrales  $\hat{\psi}_n^m$  se obtienen así:

$$\hat{\psi}_n^m = \sum_{k=1}^{N_\mu} \omega(\mu_k) P_n^m(\mu_k) \psi_m(\mu_k),$$

donde los pesos  $\omega(\mu_k)$  valen:

$$\omega(\mu_k) = \frac{1 - \mu_k^2}{(N_\mu P_{N_\mu-1})^2}$$

### 3.3.4. Derivadas horizontales

Las derivadas horizontales se calculan en el espacio espectral, es decir, dada una la función  $\psi(\lambda, \mu)$  en (3.25) con una truncación triangular, la derivada respecto de la longitud es:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \psi(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{im\lambda}) \sum_{n=|m|}^M P_n^m(\mu) \hat{\psi}_n^m,$$

y respecto del seno de la latitud:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \psi(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M e^{im\lambda} \sum_{n=|m|}^M \frac{\partial}{\partial \mu} (P_n^m(\mu)) \hat{\psi}_n^m.$$

Por tanto, los coeficientes espectrales de la derivada respecto de la longitud son:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)_n^m = im \hat{\psi}_n^m,$$

y, teniendo en cuenta las propiedades de recurrencia de los polinomios asociados de



Legendre, los coeficientes espectrales de la derivada respecto del seno de la latitud serán:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)_n^m = -(n-1)e_n^m\hat{\psi}_{n-1}^m + (n+2)e_{n+1}^m\hat{\psi}_{n+1}^m,$$

donde  $e_0^0 = 0$  y

$$e_n^m = \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}}$$

### 3.3.5. Representación espectral y velocidad horizontal

Temperton [1991] realizó un análisis de cómo representar en el espacio espectral la velocidad horizontal, su divergencia y vorticidad, con el objetivo de minimizar el número de transformaciones espectrales necesarias en cada paso de tiempo.

Consideramos la velocidad horizontal sobre una esfera de radio  $a$ , y sus componentes  $(u, v)$  en una base ortonormal con vectores unitarios apuntando al Este y Norte respectivamente. En general, las funciones  $u(\lambda, \mu)$  y  $v(\lambda, \mu)$  no son continuas en los polos, de manera que no es posible representarlas correctamente en espacio espectral. Por esa razón, se consideran las funciones  $U \equiv u \cos \phi$  y  $V \equiv v \cos \phi$ . La vorticidad  $\zeta$  y divergencia  $\delta$  de la velocidad horizontal en función de  $(U, V)$  son:

$$\zeta = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \right)$$

$$\delta = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial \mu} \right).$$

Por otra parte, el potencial velocidad  $\chi$  y la función de corriente  $\gamma$  son tales que  $\delta = \nabla^2 \chi$  y  $\zeta = \nabla^2 \gamma$ , relaciones que en el espacio espectral se escriben así:

$$\hat{\zeta}_n^m = -\frac{n(n+1)}{a^2} \hat{\gamma}_n^m \tag{3.29}$$

$$\hat{\delta}_n^m = -\frac{n(n+1)}{a^2} \hat{\chi}_n^m. \tag{3.30}$$

Además, las componentes  $(U, V)$  de la velocidad en función del potencial velocidad  $\chi$  y la función de corriente  $\gamma$  son:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - (1 - \mu^2) \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} \right) \\ V &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} + (1 - \mu^2) \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right), \end{aligned}$$

expresiones que en el espacio espectral se escriben así:

$$\hat{U}_n^m = im \hat{\chi}_n^m + (n-1) e_n^m \hat{\gamma}_{n-1}^m - (n+2) e_{n+1}^m \hat{\gamma}_{n+1}^m \quad (3.31)$$

$$\hat{V}_n^m = im \hat{\gamma}_n^m - (n-1) e_n^m \hat{\chi}_{n-1}^m + (n+2) e_{n+1}^m \hat{\chi}_{n+1}^m. \quad (3.32)$$

Por tanto, las componentes espectrales de la velocidad horizontal se obtienen a partir de las componentes espectrales de la vorticidad  $\hat{\zeta}_n^m$  y divergencia  $\hat{\delta}_n^m$ , substituyendo en (3.31) y (3.32) las componentes espectrales del potencial velocidad  $\hat{\chi}_n^m$  y la función de corriente  $\hat{\gamma}_n^m$  obtenidas de (3.29) y (3.30).

Para hacer el proceso inverso, es decir, obtener las componentes espectrales de la vorticidad y divergencia a partir de la velocidad horizontal, Temperton [1991] propone considerar la velocidad horizontal en el espacio de puntos de rejilla, calcular  $U_m(\mu)$  y  $V_m(\mu)$  con la transformada discreta de Fourier de (3.28) y realizar las siguientes cuadraturas de Gauss:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n^m &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_n^m(\mu) \frac{U_m(\mu)}{1 - \mu^2} \\ \tilde{V}_n^m &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_n^m(\mu) \frac{V_m(\mu)}{1 - \mu^2}, \end{aligned}$$

de manera que las componentes espectrales de la vorticidad y divergencia son:

$$\hat{\zeta}_n^m = \frac{1}{a} \left( im \tilde{V}_n^m - n e_{n+1}^m \tilde{U}_{n+1}^m + (n+1) e_n^m \tilde{U}_{n-1}^m \right)$$

$$\hat{\delta}_n^m = \frac{1}{a} \left( im \tilde{U}_n^m + n e_{n+1}^m \tilde{V}_{n+1}^m - (n+1) e_n^m \tilde{V}_{n-1}^m \right).$$

Las derivadas de la velocidad respecto de la latitud pueden calcularse, sin necesidad de realizar transformaciones espectrales suplementarias, a partir de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \mu} &= \frac{\partial V}{\partial \lambda} - a(1 - \mu^2)\zeta \\ \frac{\partial V}{\partial \mu} &= a(1 - \mu^2)\delta - \frac{\partial U}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

### 3.3.6. Coste de las transformaciones espectrales

Un modelo espectral debe realizar, en cada paso de tiempo, un número fijo de transformaciones espectrales directas e inversas. Como se ha dicho, éstas son transformaciones lineales que consisten en una transformación de Fourier y una transformación de Legendre. Las transformadas rápidas de Fourier tienen un coste de  $\mathcal{O}(M^2 \log M)$ , siendo  $M$  la truncación espectral [Cooley y Tukey, 1965]. En ausencia de un algoritmo rápido para las transformadas de Legendre, éstas tienen un coste  $\mathcal{O}(M^3)$ . Por tanto, para resoluciones altas, el tiempo de cálculo debido a las transformaciones de Legendre puede llegar a ser excesivo. Recientemente se ha logrado reducir el tiempo de las transformaciones de Legendre en modelos globales espectrales a resoluciones altas [Wedi et al., 2013] aplicando algoritmos de transformaciones de Legendre rápidas [Tygert, 2008, 2010]. El coste de las transformaciones de Legendre rápidas es de  $\mathcal{O}(M^2 \log^3 M)$  aproximadamente. Aunque estos algoritmos están todavía en fase de experimentación, los resultados descritos en Wedi et al. [2013] son alentadores y dejan una puerta abierta al uso de modelos espectrales globales a resoluciones altas, del orden de pocos kilómetros, el objetivo que se está actualmente considerando en algunos centros de predicción operativos.

# Capítulo 4

## Modelo espectral no hidrostático propuesto

En esta tesis, se propone el uso de una formulación *covariante* de las ecuaciones de Euler en un modelo numérico. Por formulación covariante entendemos que las ecuaciones de pronóstico se escriben en un sistema de coordenadas curvilíneo, y que todos los tensores y operadores que aparecen en las ecuaciones se expresan en las bases covariante o contravariante, correspondientes a ese sistema de referencia. Esto no es habitual, ya que, usualmente, en la formulación de los modelos numéricos del tiempo se usan bases ortonormales, con dos vectores horizontales unitarios apuntando a las direcciones Este y Norte y un vector unitario apuntando al Cenit.

El uso de una formulación covariante en predicción numérica del tiempo no es nuevo. Por ejemplo, Pielke y Martin [1981] derivan una formulación covariante para el caso de coordenadas cartesianas en la horizontal y una coordenada vertical que sigue el terreno, la aplican a las ecuaciones de Euler con la aproximación hidrostática y hacen un estudio de los errores cometidos en los términos métricos. Sharman et al. [1988] exploran el uso de transformaciones de coordenadas conformes para obtener sistemas de coordenadas ortogonales. Estas coordenadas, generadas numéricamente, son

utilizadas para escribir las ecuaciones de forma covariante. Como ejemplo de aplicación, resuelven numéricamente flujos anelásticos y flujos incompresibles bidimensionales sobre un obstáculo orográfico. Yang [1993] elabora un modelo no hidrostático incompresible siguiendo el trabajo de Sharman et al. [1988], e incluye una parametrización de la turbulencia. Sin embargo, hasta donde conocemos, no se ha usado la formulación covariante para un modelo espectral no hidrostático compresible como el presentado en esta tesis.

Este capítulo se estructura de la siguiente manera. En el apartado 4.1 se describe la formulación general del modelo, esto es, las variables de pronóstico que se van a utilizar y la forma de las ecuaciones de Euler para estas variables. En el apartado 4.2 se escriben las ecuaciones de Euler del apartado anterior en forma covariante para las coordenadas híbridas del modelo y para la geometría esférica en 3D. En el siguiente apartado se particulariza para la versión 2D del modelo. En el apartado 4.4 se especifica la discretización espacial del modelo a partir de lo descrito en el capítulo 3. Sigue, en el apartado 4.5, una explicación detallada del esquema de integración temporal semi-implícito. Finalmente en el apartado 4.6 se hace una análisis de estabilidad lineal del modelo.

#### 4.1. Formulación general del modelo

Las variables de pronóstico del modelo propuesto son la velocidad  $\mathbf{v}$ , el logaritmo de la temperatura  $r \equiv \ln T$  y el logaritmo de la presión  $q \equiv \ln p$ . Para este conjunto de variables de pronóstico, las ecuaciones de Euler se escriben así [Zdunkowski y Bott, 2003]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + Re^r \nabla q + \nabla \phi = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

$$\frac{dr}{dt} + \frac{R}{C_v} \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{Q}{C_v e^r} \quad (4.2)$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{C_p}{C_v} \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{Q}{C_v e^r}, \quad (4.3)$$

donde  $\boldsymbol{\Omega}$  es la velocidad angular de la Tierra,  $\phi$  el geopotencial,  $\mathbf{F}$  el forzamiento adiabático para la ecuación del momento,  $Q$  el calor cedido o absorbido por unidad de masa y tiempo,  $\nabla$  operador gradiente,  $\nabla \cdot$  operador divergencia,  $R$  la constante de los gases para el aire seco,  $C_p$  la capacidad calorífica del aire seco a presión constante y  $C_v$  la capacidad calorífica del aire seco a volumen constante.

Con el uso de los logaritmos de la presión y la temperatura como variables de pronóstico, se consigue que sus ecuaciones de pronóstico sean lineales respecto de la divergencia de la velocidad. Esta propiedad es interesante, pues se usa el esquema semi-implícito para la integración temporal, cuya estabilidad suele reforzarse cuando las ecuaciones de pronóstico lineales y no lineales son parecidas.

## 4.2. Caso 3D esférico

Veamos a continuación cómo están definidos los términos métricos y los operadores diferenciales que aparecen en las ecuaciones de pronóstico (4.1) a (4.3), para el modelo tridimensional esférico.

### 4.2.1. Sistema de coordenadas

Consideramos tres sistemas de coordenadas diferentes. En primer lugar, un *sistema de coordenadas cartesiano*  $(x, y, z)$  fijo a la Tierra, cuyo origen está situado en su centro, el eje  $z$  en la dirección del Polo Norte, y los ejes  $x$  e  $y$  en el plano ecuatorial, con el eje  $x$  apuntando en la dirección del meridiano de longitud cero. En segundo lugar, un *sistema de coordenadas geográfico*, cuyas coordenadas son la longitud, la latitud y la distancia al centro de la Tierra, denotado por  $(\lambda, \varphi, \zeta)$ . Finalmente, el sistema de *coordenadas del modelo*  $(X, Y, Z)$ , cuyas coordenadas están definidas como la longitud y latitud geográficas y una coordenada vertical que sigue el terreno. La relación entre estos sistemas de coordenadas es:

$$x = \zeta \cos \varphi \cos \lambda \quad (4.4)$$

$$y = \zeta \cos \varphi \sin \lambda \quad (4.5)$$

$$z = \zeta \sin \varphi, \quad (4.6)$$

y

$$\lambda = X \quad (4.7)$$

$$\varphi = Y \quad (4.8)$$

$$\zeta = b(X, Y, Z), \quad (4.9)$$

donde  $b(X, Y, Z)$ , es una función que depende de la orografía. Esta función es tal que los límites inferior y superior de la atmósfera están definidos por valores de  $Z$  constante:  $Z = 0$  representa el límite inferior y  $Z = 1$  el límite superior.

Revisamos los tres tipos de coordenada vertical basada en altura que *sigue la orografía* vistas en el apartado 3.1.2. Una muy utilizada y simple, es la coordenada vertical de Gal-Chen, descrita en Gal-Chen y Sommerville [1975], y definida mediante la función:

$$b(X, Y, Z) = a + H_T Z + H_B(X, Y) (1 - Z), \quad (4.10)$$

donde  $a$  es el radio de la Tierra,  $H_T$  es la altura del tope rígido del dominio espacial y  $H_B(X, Y)$  representa la orografía. La coordenada del modelo UM [Davies et al., 2005] es:

$$b(X, Y, Z) = \begin{cases} a + H_T Z + H_B(X, Y) (1 - Z/Z_I)^2 & \text{si } 0 \leq Z \leq Z_I \\ a + H_T Z & \text{si } Z_I \leq Z \leq 1 \end{cases}, \quad (4.11)$$

siendo  $Z_I$  el nivel por debajo del cual los niveles del modelo se van adaptando progresivamente a la orografía, y por encima del cual los niveles del modelo están a una altura constante. La función  $b(X, Y, Z)$  definida en (4.11) es continua con derivada continua

en  $Z = Z_I$ . Finalmente, la coordenada vertical de Schär et al. [2002] es:

$$b(X, Y, Z) = a + H_T Z + H_B(X, Y) \frac{\sinh(1 - Z)\beta}{\sinh \beta}, \quad (4.12)$$

donde  $\beta$  es un parámetro libre a determinar. Para  $\beta = 1$  se obtiene una coordenada vertical similar a la de Gal-Chen, mientras que para  $\beta > 1$  la influencia de la orografía disminuye más rápidamente con la altura.

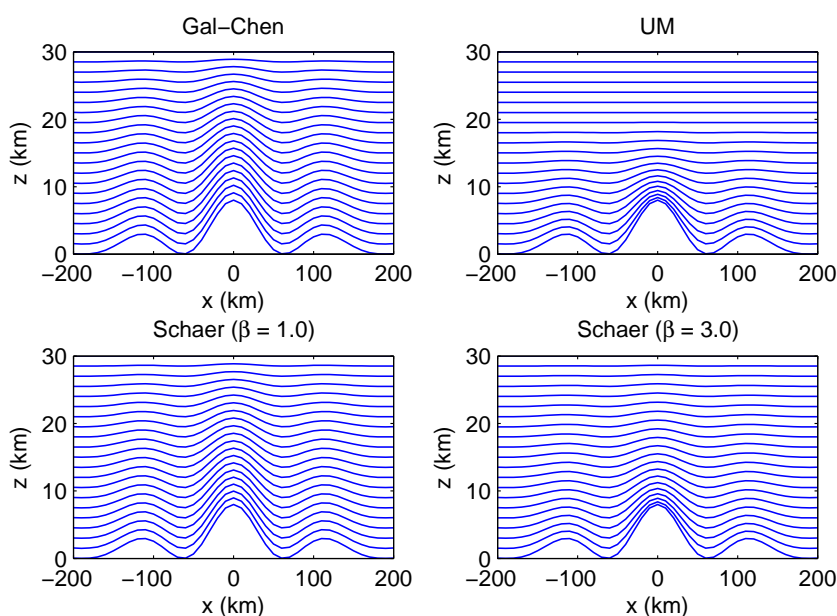


Figura 4.1: Niveles de coordenada  $Z$  constante para la coordenada vertical Gal-Chen, UM y Schär con distintos valores del parámetro que ajusta el decaimiento de la orografía con la altura.

En la figura 4.1 se han representado los niveles de coordenada vertical  $Z$  constante para distintas coordenadas verticales: la coordenada vertical de Gal-Chen, UM con  $Z_I = 0,7$ , y de Schär con  $\beta = 1$  y  $\beta = 0,3$ .

Independientemente de la función que se escoja en (4.9) para determinar la coordenada vertical, ésta debe cumplir dos condiciones: en primer lugar, las superficies definidas por la orografía y por el límite superior de la atmósfera (a una altura variable  $H_B(X, Y)$  y a una altura fija  $H_T$  respectivamente), deben estar definidas por valores de  $Z$  constante ( $Z = 0$  y  $Z = 1$  respectivamente). En segundo lugar, se debe asegurar



de que la transformación de coordenadas es biyectiva.

#### 4.2.2. Tensor métrico

Atendiendo a la Geometría de Riemann [Bär, 2010], para escribir las ecuaciones de pronóstico de forma covariante se requiere el tensor métrico  $\mathbf{G}$  en las coordenadas del modelo. En la Geometría de Riemann, los operadores diferenciales divergencia, gradiente y derivada covariante, se expresan usando el tensor métrico y las derivadas parciales respecto de las coordenadas curvilíneas.

El tensor métrico en las coordenadas del modelo se puede encontrar a partir de la expresión de este tensor en las coordenadas cartesianas, que es la matriz identidad, y de la matriz jacobiana correspondiente a la transformación desde coordenadas cartesianas a coordenadas del modelo,  $\mathbf{J}_{CM}$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}_{CM}^T \cdot \mathbf{J}_{CM}. \quad (4.13)$$

Además, siguiendo la regla de transformación de matrices jacobianas:

$$\mathbf{J}_{CM} = \mathbf{J}_{CG} \cdot \mathbf{J}_{GM},$$

donde  $\mathbf{J}_{CG}$  es la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas cartesianas a geográficas, y  $\mathbf{J}_{GM}$  la correspondiente a la transformación de coordenadas geográficas a coordenadas del modelo (observar que los subíndices  $C$ ,  $G$  y  $M$  denotan coordenadas cartesianas, geográficas y del modelo). La matriz  $\mathbf{J}_{CG}$  se obtiene de las ecuaciones (4.4) a (4.6) y es:

$$\mathbf{J}_{CG} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\lambda, \varphi, \zeta)} = \begin{pmatrix} -\zeta \cos \varphi \sin \lambda & -\zeta \sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \zeta \cos \varphi \cos \lambda & -\zeta \sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & \zeta \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

De forma similar,  $\mathbf{J}_{GM}$  se calcula a partir de (4.7) a (4.9) y es:

$$\mathbf{J}_{GM} = \frac{\partial(\lambda, \varphi, \zeta)}{\partial(X, Y, Z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_X & b_Y & b_Z \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

donde  $b_X$ ,  $b_Y$  y  $b_Z$  son las derivadas parciales de la función  $b(X, Y, Z)$  respecto de  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente. Substituyendo (4.14) y (4.15) en (4.13), se obtiene la siguiente expresión para el tensor métrico en las coordenadas del modelo:

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}_{CM}^T \cdot \mathbf{J}_{CM} = \begin{pmatrix} b^2 \cos^2 Y + b_X^2 & b_X b_Y & b_X b_Z \\ b_X b_Y & b^2 + b_Y^2 & b_Y b_Z \\ b_X b_Z & b_Y b_Z & b_Z^2 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

El tensor métrico contravariante  $\mathbf{H}$  es el inverso del tensor métrico covariante:

$$H^{XX} = \frac{1}{b^2 \cos^2 Y} \quad (4.17)$$

$$H^{XY} = H^{YX} = 0 \quad (4.18)$$

$$H^{XZ} = H^{ZX} = -\frac{b_X}{b^2 b_Z \cos^2 Y} \quad (4.19)$$

$$H^{YY} = \frac{1}{b^2} \quad (4.20)$$

$$H^{YZ} = H^{ZY} = -\frac{b_Y}{b^2 b_Z} \quad (4.21)$$

$$H^{ZZ} = \frac{(b^2 + b_Y^2) \cos^2 Y + b_X^2}{b^2 b_Z^2 \cos^2 Y}. \quad (4.22)$$

Finalmente, para la expresión de la divergencia, se requiere conocer la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico, que es:

$$|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}} = b^2 b_Z \cos Y.$$

La aproximación de *atmósfera poco profunda* o *atmósfera somera* consiste en suponer que el radio de la Tierra es similar a la distancia desde el centro de la Tierra hasta el tope de la atmósfera, que en los modelos de predicción se sitúa a unos 50 km de altura. Es decir, en esta aproximación se considera que  $H_T/a \ll 1$ . El tensor métrico en geometría de atmósfera poco profunda en las coordenadas del modelo es:

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 Y + b_X^2 & b_X b_Y & b_X b_Z \\ b_X b_Y & a^2 + b_Y^2 & b_Y b_Z \\ b_X b_Z & b_Y b_Z & b_Z^2 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Observar que las derivadas parciales de la función  $b(X, Y, Z)$  no son consideradas cero en esta aproximación. Esto se hace así porque de otra manera se incurriría en errores grandes en zonas con orografía abrupta: de la definición de la coordenada vertical dada en (4.10) se sigue que las derivadas parciales  $b_X = \partial_X H_B(X, Y)(1 - Z)$  y  $b_Y = \partial_Y H_B(X, Y)(1 - Z)$  pueden ser grandes, incluso en el caso en el que la aproximación de atmósfera somera  $H_T/a \ll 1$  sea válida. Esta aproximación geométrica simplifica la formulación de los términos métricos y se usa de forma bastante generalizada. Algunos de los test presentados en el capítulo 6 se realizarán utilizando esta aproximación.

A continuación describimos el tensor métrico correspondiente a la versión lineal de las ecuaciones de Euler. En el esquema semi-implícito que se usa para la integración temporal, es necesario disponer de una versión lineal de las ecuaciones de pronóstico no lineales (4.1) a (4.3), que llamamos *modelo lineal*. Para resolver el sistema lineal semi-implícito utilizando el método espectral, el modelo lineal debe ser homogéneo en las direcciones horizontales. Para ello se consideran perturbaciones respecto de una atmósfera isoterma, en reposo, en equilibrio hidrostático y sin orografía. La ausencia de orografía en el modelo lineal es necesaria para que este sea homogéneo en la horizontal. La geometría del modelo lineal se define, por tanto, usando una orografía plana, es

decir, utilizando la función  $\bar{b}(Z) = a + H_T Z$  en lugar de  $b(X, Y, Z)$  definida en (4.9).

Observar que los dominios en coordenadas cartesianas de los modelos no lineal y lineal coinciden en tener el mismo límite superior, situado a una altura  $H_T$ , pero tienen diferentes límites inferiores, uno con orografía y otro sin orografía. Sin embargo, el dominio en coordenadas del modelo es el mismo en ambas geometrías:  $X$  la longitud,  $Y$  la latitud y  $Z$  desde 0 a 1. Como las ecuaciones se resuelven en el dominio definido por las coordenadas del modelo, el hecho de que los modelos lineal y no lineal no tengan el mismo dominio en coordenadas cartesianas no plantea ningún problema.

En el caso de la coordenada vertical basada en masa o presión hidrostática ocurre algo análogo: en el modelo lineal se define una presión hidrostática en superficie constante y distinta de la presión hidrostática en superficie del modelo no lineal, que no es constante. Por tanto, los dominios en presión hidrostática de los modelos lineal y no lineal no coinciden, pero sí lo hacen los dominios en la coordenada vertical híbrida basada en masa (con valores comprendidos entre 0 en el tope de la atmósfera y 1 en la superficie).

El tensor métrico para el modelo lineal se puede encontrar a partir del tensor métrico (4.23) substituyendo  $b(X, Y, Z)$  con  $\bar{b}(Z)$ :

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 Y & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_T^2 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Denominamos a  $\bar{\mathbf{G}}$  el *tensor métrico lineal* en el sentido de que es el tensor métrico utilizado en el modelo lineal. Es de destacar que el tensor métrico (4.24) es diagonal, indicando que las coordenadas  $(X, Y, Z)$  en la métrica del modelo lineal son ortogonales.

### 4.2.3. Condiciones de contorno

En el modelo 3D esférico sólo existen dos superficies de contorno, la orografía y el tope atmosférico, a diferencia de lo que ocurre con los modelos 3D de área limitada,

en los que, adicionalmente, hay que considerar los contornos laterales del dominio.

Una de las ventajas de usar la velocidad contravariante como variable de pronóstico, y especialmente su componente vertical, es que la formulación e implementación de las condiciones de contorno con deslizamiento (en la literatura anglosajona, *free slip boundary conditions*) en los límites superiores e inferiores del modelo es muy simple y robusta. En efecto, la condición de que el flujo no traspase los límites inferior y superior es simplemente:

$$W(X, Y, 1) = W(X, Y, 0) = 0, \quad (4.25)$$

es decir, la componente vertical de la velocidad contravariante debe ser cero en los límites superior e inferior. La condición (4.25) se deduce fácilmente teniendo en cuenta que la base de vectores contravariantes  $(\vec{\partial}_X, \vec{\partial}_Y, \vec{\partial}_Z)$  son tangentes a las líneas coordenadas  $(X, Y, Z)$  respectivamente. En el caso del límite inferior, siendo el razonamiento el mismo para el límite superior, el vector velocidad:

$$\mathbf{V}(X, Y, 0) = U(X, Y, 0) \vec{\partial}_X + V(X, Y, 0) \vec{\partial}_Y + W(X, Y, 0) \vec{\partial}_Z,$$

debe ser tangente a la superficie definida por  $Z = 0$ , es decir, a la superficie definida por la orografía del modelo (si la velocidad no fuera tangente a la orografía, habría flujo de masa a través de ésta, lo cual no sería correcto). La velocidad será tangente a la orografía siempre que la componente vertical sea cero,  $W(X, Y, 0) \vec{\partial}_Z = 0$ , ya que las componentes horizontales  $U(X, Y, 0) \vec{\partial}_X$  y  $V(X, Y, 0) \vec{\partial}_Y$  son tangentes a esta superficie. Las condiciones (4.25) son las mismas para las geometrías del modelo no lineal y lineal, ya que no dependen de la orografía.

En la base geográfica ortonormal (vectores unitarios perpendiculares apuntando a Este, Norte y Cenit), la condición de contorno con deslizamiento en el límite inferior

es:

$$w(X, Y, 0) = u(X, Y, 0) \frac{\partial H_B}{\partial X}(X, Y) + v(X, Y, 0) \frac{\partial H_B}{\partial Y}(X, Y), \quad (4.26)$$

siendo  $(u, v, w)$  las componentes de la velocidad en la base geográfica ortonormal y  $H_B$  la orografía. Se deduce que  $w(X, Y, 0)$  es, en general, diferente de cero en el contorno inferior. Satisfacer las condición (4.26) en el siguiente paso de tiempo (resolviendo el sistema semi-implícito) es realmente difícil. Sin embargo, la condición (4.25) es inmediata, y puede darse de forma implícita en la construcción de los operadores verticales. Se muestra así claramente que usar las componentes contravariantes de la velocidad es una elección muy práctica.

#### 4.2.4. Operador divergencia

Como acabamos de ver, disponer de condiciones de contorno sencillas es una buena razón para elegir la velocidad contravariante como variable de pronóstico. Otra razón de peso es disponer de una expresión del operador divergencia que se adapte convenientemente al esquema semi-implícito. La divergencia se puede escribir [Bär, 2010]:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X^j} \left( |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}} V^j \right), \quad (4.27)$$

donde  $(V^1, V^2, V^3) = (U, V, W)$  son las componentes contravariantes de la velocidad, mientras que  $(X^1, X^2, X^3) = (X, Y, Z)$  son las coordenadas del modelo. Esta forma de expresar la divergencia es más conveniente que la expresión obtenida con las componentes de la velocidad en una base geográfica ortonormal, ya que es más compacta. Sin embargo, el cálculo de (4.27) es computacionalmente caro, ya que las derivadas espaciales  $\partial_X(|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}} U)$  y  $\partial_Y(|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}} V)$  deberían calcularse en cada paso de tiempo usando el método espectral. Hay, sin embargo, una formulación alternativa a (4.27) más eficiente. Aprovechando el hecho de que las componentes espectrales de la divergencia

y vorticidad de la velocidad horizontal se calculan en cada paso de tiempo usando el *tensor métrico lineal*  $\bar{\mathbf{G}}$ , es conveniente expresar la divergencia como:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} + \sum_{j=1}^3 V^j \frac{\partial}{\partial X^j} \ln \frac{|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.28)$$

donde  $\bar{\nabla} \cdot \mathbf{V}$  es la *divergencia lineal* en el sentido de que está calculada con el *tensor métrico lineal*  $\bar{\mathbf{G}}$ , es decir:

$$\bar{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X^j} \left( |\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}} V^j \right) = D + \frac{\partial W}{\partial Z}, \quad (4.29)$$

donde la divergencia horizontal  $D$  se expresa en términos de las componentes contra-variantes horizontales de la velocidad como:

$$D = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\cos Y} \frac{\partial}{\partial Y} (V \cos Y). \quad (4.30)$$

El segundo término del miembro de la derecha de (4.28) contiene derivadas espaciales que no son caras computacionalmente, porque son derivadas de magnitudes métricas que se mantienen constantes a lo largo de la integración del modelo, y por tanto se calculan una sola vez. De hecho, estos términos son una simple advección de un campo constante en el tiempo, y puede ser calculado usando el esquema euleriano o semi-lagrangiano:

$$\sum_{j=1}^3 V^j \frac{\partial}{\partial X^j} \ln \frac{|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}} = \frac{d}{dt} \ln \frac{|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}}.$$

Así, utilizando la expresión (4.28) para la divergencia se evita el costoso cálculo de las derivadas  $\partial_X(|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}} U)$  y  $\partial_Y(|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}} V)$  en cada paso de tiempo.

#### 4.2.5. Operador gradiente

El operador gradiente aplicado a una función cualquiera  $\gamma(X, Y, Z)$  es:

$$(\nabla\gamma)^j = H^{jk} \frac{\partial\gamma}{\partial X^k}, \quad (4.31)$$

donde  $\mathbf{H}$  es el tensor métrico contravariante, cuya expresión matricial es la matriz inversa de  $\mathbf{G}$ . Cuando se trabaja con el modelo lineal, se debe usar  $\bar{\mathbf{H}}$  obtenido con  $\bar{\mathbf{G}}$ .

Observar que el gradiente del geopotencial  $\phi(X, Y, Z) \equiv gb(X, Y, Z)$  es muy simple. Sus componentes horizontales  $(\nabla\phi)^X$  y  $(\nabla\phi)^Y$  son cero, pues, teniendo en cuenta las componentes del tensor métrico contravariante (4.17) a (4.22):

$$\begin{aligned} (\nabla\phi)^X &= g \left( H^{XX} \frac{\partial b}{\partial X} + H^{XZ} \frac{\partial b}{\partial Z} \right) = 0 \\ (\nabla\phi)^Y &= g \left( H^{YY} \frac{\partial b}{\partial Y} + H^{YZ} \frac{\partial b}{\partial Z} \right) = 0, \end{aligned}$$

y su componente vertical:

$$(\nabla\phi)^Z = H^{Zk} \frac{\partial\phi}{\partial X^k} = \frac{1}{b_Z}. \quad (4.32)$$

#### 4.2.6. Símbolos de Christoffel

Finalmente, cuando se usa el esquema de advección euleriano, se requieren los Símbolos de Christoffel para encontrar la derivada covariante de la velocidad, ya que:

$$\frac{dV^j}{dt} = \frac{\partial V^j}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V^k \frac{\partial V^j}{\partial X^k} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \Gamma_{kl}^j V^k V^l.$$

Usando el tensor métrico (4.16) se obtienen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{XX}^X &= \frac{2b_X}{b} \\ \Gamma_{XY}^X &= \Gamma_{YX}^X = \frac{b_Y}{b} - \frac{\sin Y}{\cos Y} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\Gamma_{XZ}^X &= \Gamma_{ZX}^X = \frac{b_Z}{b} \\
\Gamma_{XX}^Y &= \cos Y \sin Y \\
\Gamma_{XY}^Y &= \Gamma_{YX}^Y = \frac{b_X}{b} \\
\Gamma_{YY}^Y &= \frac{2b_Y}{b} \\
\Gamma_{YZ}^Y &= \Gamma_{ZY}^Y = \frac{b_Z}{b} \\
\Gamma_{XX}^Z &= -\frac{b \cos^2 Y + b_Y \cos Y \sin Y}{b_Z} + \frac{b_{XX}}{b_Z} - \frac{2b_X^2}{bb_Z} \\
\Gamma_{XY}^Z &= \Gamma_{YX}^Z = \frac{b_X \tan Y}{b_Z} + \frac{b_{XY}}{b_Z} - \frac{2b_X b_Y}{bb_Z} \\
\Gamma_{XZ}^Z &= \Gamma_{ZX}^Z = \frac{b_{XZ}}{b_Z} - \frac{b_X}{b} \\
\Gamma_{YY}^Z &= -\frac{b}{b_Z} + \frac{b_{YY}}{b_Z} - \frac{2b_Y^2}{bb_Z} \\
\Gamma_{YZ}^Z &= \Gamma_{ZY}^Z = \frac{b_{YZ}}{b_Z} - \frac{b_Y}{b} \\
\Gamma_{ZZ}^Z &= \frac{b_{ZZ}}{b_Z}.
\end{aligned}$$

En el caso de la aproximación de atmósfera somera se usa el tensor métrico  $\hat{\mathbf{G}}$  dado en (4.23) y se obtienen los Símbolos de Christoffel  $\hat{\Gamma}$  siguientes:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{XY}^X &= \hat{\Gamma}_{YX}^X = -\frac{\sin Y}{\cos Y} \\
\hat{\Gamma}_{XX}^Y &= \cos Y \sin Y \\
\hat{\Gamma}_{XX}^Z &= -\frac{b_Y \cos Y \sin Y}{b_Z} + \frac{b_{XX}}{b_Z} \\
\hat{\Gamma}_{XY}^Z &= \hat{\Gamma}_{YX}^Z = \frac{b_X \tan Y}{b_Z} + \frac{b_{XY}}{b_Z} \\
\hat{\Gamma}_{XZ}^Z &= \hat{\Gamma}_{ZX}^Z = \frac{b_{XZ}}{b_Z} \\
\hat{\Gamma}_{YY}^Z &= \frac{b_{YY}}{b_Z} \\
\hat{\Gamma}_{YZ}^Z &= \hat{\Gamma}_{ZY}^Z = \frac{b_{YZ}}{b_Z} \\
\hat{\Gamma}_{ZZ}^Z &= \frac{b_{ZZ}}{b_Z}.
\end{aligned}$$

#### 4.2.7. Matrices de cambio de base y término de Coriolis

Es interesante disponer de las matrices de cambio de base entre la base contravariante correspondiente a las coordenadas de modelo, que denotamos con  $(\vec{\partial}_X, \vec{\partial}_Y, \vec{\partial}_Z)$ , y otras bases, como la geográfica ortonormal de vectores unitarios apuntando a Este, Norte y Cenit, que denotamos con  $(\vec{n}_\lambda, \vec{n}_\varphi, \vec{n}_\zeta)$ .

Estas matrices de cambio de base nos permiten, conocidas las componentes de un vector en una base, calcular su expresión en otra base. Se usarán para calcular la aceleración de Coriolis en la base contravariante correspondiente a las coordenadas de modelo.

En las siguientes expresiones usamos el vector velocidad, aunque serán válidas para cualquier vector. Usamos la siguiente notación para las componentes contravariantes de la velocidad: en coordenadas cartesianas  $\mathbf{V}_C$ , en coordenadas geográficas  $\mathbf{V}_G$  y en coordenadas del modelo  $\mathbf{V} = (U, V, W)$ . Además, las componentes de la velocidad en una base geográfica ortonormal son  $\mathbf{V}_N$ .

Las relaciones entre las componentes en coordenadas cartesianas  $\mathbf{V}_C$ , coordenadas geográficas  $\mathbf{V}_G$  y coordenadas del modelo  $\mathbf{V}$  son:  $\mathbf{V}_C = \mathbf{J}_{CG} \cdot \mathbf{V}_G$  y  $\mathbf{V}_G = \mathbf{J}_{GM} \cdot \mathbf{V}$ , donde  $\mathbf{J}_{CG}$  y  $\mathbf{J}_{GM}$  son las matrices jacobianas dadas en (4.14) y (4.15) respectivamente. Las componentes de la velocidad en la base geográfica ortonormal de vectores unitarios apuntando a Este, Norte y Cenit puede calcularse usando la expresión  $\mathbf{V}_N = \mathbf{K}_{NM} \cdot \mathbf{V}$ , donde

$$\mathbf{K}_{NM} = \begin{pmatrix} b \cos Y & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ b_X & b_Y & b_Z \end{pmatrix}.$$

Observar que la matriz  $\mathbf{K}_{NM}$  no es una matriz jacobiana, como corresponde al hecho de que la base ortonormal  $(\vec{n}_\lambda, \vec{n}_\varphi, \vec{n}_\zeta)$  no es una base contravariante.

La aceleración de Coriolis debida a la rotación de la Tierra es  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ , siendo  $\boldsymbol{\Omega}$  la

velocidad angular de la Tierra y  $\mathbf{v}$  la velocidad. La aceleración de Coriolis en la base geométrica ortonormal es  $\mathbf{C}_N \cdot \mathbf{V}_N$ , siendo:

$$\mathbf{C}_N = \begin{pmatrix} 0 & -f_c & g_c \\ f_c & 0 & 0 \\ -g_c & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{C}_N^f + \mathbf{C}_N^g,$$

donde  $f_c = 2\Omega \sin Y$  y  $g_c = 2\Omega \cos Y$ , y las matrices  $\mathbf{C}_N^f$  y  $\mathbf{C}_N^g$  contienen las contribuciones correspondientes a  $f_c$  y  $g_c$  respectivamente. En el caso de que se esté usando la aproximación de atmósfera somera, el término  $\mathbf{C}_N^g$  no se tiene en cuenta por razones de consistencia energética [Staniforth y Wood, 2003]. Usando las matrices de cambio de base del apartado anterior, el término de Coriolis  $\mathbf{C}_N \cdot \mathbf{V}_N$  puede escribirse en la base contravariante de las coordenadas del modelo como  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{V}$ , donde  $\mathbf{C} = \mathbf{K}_{MN} \cdot \mathbf{C}_N \cdot \mathbf{K}_{NM}$ , siendo  $\mathbf{K}_{MN}$  la inversa de  $\mathbf{K}_{NM}$ . Por tanto, el tensor de Coriolis expresado en la base contravariante de las coordenadas del modelo es  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^f + \mathbf{C}^g$ , donde

$$\mathbf{C}^f = 2\Omega \begin{pmatrix} 0 & -\tan Y & 0 \\ \sin Y \cos Y & 0 & 0 \\ -b_Y b_Z^{-1} \sin Y \cos Y & b_X b_Z^{-1} \tan Y & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{C}^g = 2\Omega \begin{pmatrix} b_X b^{-1} & b_Y b^{-1} & b_Z b^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -b \cos^2 Y b_Z^{-1} - b_X^2 (bb_Z)^{-1} & -b_X b_Y (bb_Z)^{-1} & -b_X b^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

### 4.3. Caso 2D

Además del modelo tridimensional esférico, se ha codificado un modelo similar bidimensional, con una dimensión horizontal y otra vertical. Los modelos son similares en todos los aspectos, excepto en la geometría horizontal. Este modelo se ha construido

para poder realizar una serie de test bidimensionales ampliamente documentados en la literatura. En esta sección detallamos los aspectos del modelo bidimensional que difieren del modelo tridimensional desarrollado en la sección anterior 4.2.

Consideramos dos sistemas de coordenadas diferentes: un *sistema de coordenadas cartesianas*  $(x, z)$  y el *sistema de coordenadas del modelo*  $(X, Z)$ , definido mediante:

$$x = X \quad (4.35)$$

$$z = b(X, Z), \quad (4.36)$$

donde  $b(X, Z)$  es una función que depende de la orografía. Esta función, al igual que en el caso tridimensional, es tal que los límites inferior y superior de la atmósfera están definidos por valores de  $Z$  constante:  $Z = 0$  representa el límite inferior, y  $Z = 1$  el límite superior. El límite inferior está a una altura variable dada por la orografía,  $H_B(X)$ , mientras que el límite superior está a una altura constante,  $H_T$ . Las variantes Gal-Chen, UM y Schäer para la función  $b(X, Z)$  definidas en las ecuaciones (4.10), (4.11) y (4.12) son igualmente válidas en el caso bidimensional [Davies et al., 2005; Gal-Chen y Somerville, 1975; Schär et al., 2002].

De forma similar al caso tridimensional, es necesario calcular el tensor métrico para expresar los operadores divergencia, gradiente y derivada covariante en función de éste [Bär, 2010]. El tensor métrico en las coordenadas del modelo se calcula a partir de la expresión conocida de este tensor en las coordenadas cartesianas, que es la matriz identidad, y de la matriz jacobiana correspondiente a la transformación desde coordenadas cartesianas a coordenadas del modelo:

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}_{CM}^T \cdot \mathbf{J}_{CM} = \begin{pmatrix} 1 + b_X^2 & b_X b_Z \\ b_X b_Z & b_Z^2 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

donde la matriz jacobiana  $\mathbf{J}_{CM}$  se calcula a partir de (4.35) y (4.36):

$$\mathbf{J}_{CM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_X & b_Z \end{pmatrix}.$$

El tensor métrico contravariante  $\mathbf{H}$  es el inverso del tensor métrico covariante:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{b_Z^2} \begin{pmatrix} b_Z^2 & -b_X b_Z \\ -b_X b_Z & 1 + b_X^2 \end{pmatrix}.$$

El modelo lineal se obtiene calculando las perturbaciones de las ecuaciones de pronóstico (4.1), (4.2) y (4.3) respecto de una atmósfera isoterma, en reposo, en equilibrio hidrostático y sin orografía. Como se mencionó en el apartado 4.2, la ausencia de orografía en el modelo lineal es necesaria para que este sea homogéneo en la horizontal. La geometría del modelo lineal se define, por tanto, usando una orografía plana, es decir, utilizando la función  $\bar{b}(Z) = H_T Z$  en lugar de  $b(X, Z)$ . El *tensor métrico lineal* resulta ser:

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_T^2 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Las condiciones de contorno para el caso bidimensional son exactamente las mismas que en el tridimensional, explicadas con detalle en la sección 4.2.3:

$$W(X, 1) = W(X, 0) = 0, \quad (4.39)$$

es decir, la componente vertical de la velocidad contravariante debe ser cero en los límites superior e inferior. La condición (4.39) se deduce fácilmente teniendo en cuenta que la base de vectores contravariantes  $(\vec{\partial}_X, \vec{\partial}_Z)$  son tangentes a las líneas coordenadas  $(X, Z)$  respectivamente.

El operador divergencia es el mismo que en el caso tridimensional, dado en (4.27). Además, por motivos de eficiencia computacional, la divergencia de la velocidad se expresa como suma de un término advectivo y la divergencia calculada con el *tensor métrico lineal*, tal como se explica en la sección 4.2.4.

De forma similar al caso tridimensional, el operador gradiente es el dado en la ecuación (4.31), donde se usa el tensor métrico contravariante.

Finalmente, para los términos de advección de la ecuación del momento se requieren los Símbolos de Christoffel, que para la métrica del modelo lineal (4.38) son nulos, por ser una métrica constante. Para la métrica del modelo no lineal (4.37) los Símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\begin{aligned}\Gamma_{XX}^Z &= \frac{b_{XX}}{b_Z} \\ \Gamma_{XZ}^Z &= \Gamma_{ZX}^Z = \frac{b_{XZ}}{b_Z} \\ \Gamma_{ZZ}^Z &= \frac{b_{ZZ}}{b_Z}.\end{aligned}$$

#### 4.4. Discretización espacial del modelo

A continuación detallamos la discretización de las ecuaciones de Euler dadas en las coordenadas del modelo. Algunos aspectos de la discretización vertical ya han sido descritos en la sección 3.2, en particular, aquellos referentes a cómo se definen los niveles del modelo, dónde se sitúan las variables de pronóstico y cómo se calculan los operadores interpolación y derivada vertical. Respecto de la discretización horizontal, en la sección 3.3 se describe el espacio de puntos de rejilla y el espacio espectral, así como las transformaciones entre ambos espacios. Además, se expone cómo se representa la velocidad horizontal en el espacio espectral a través de su divergencia y vorticidad.

En esta sección,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{q}$  representan vectores de  $N_v$  valores (uno para cada nivel entero), correspondientes a las componentes contravariantes de la velocidad horizontal, el logaritmo de la temperatura y el logaritmo de la presión respectivamente.

$\mathbf{W}$  representa un vector de  $N_v - 1$  valores (uno por cada nivel intermedio), correspondientes a la velocidad vertical contravariante (recordemos que su valor es cero en los límites inferior y superior del modelo).

Estos valores pueden corresponder a un punto de la rejilla gaussiana o a una componente espectral, dependiendo del espacio en el que estén escritos. Además,  $g \mathbf{b}_E$  (donde  $g$  es la aceleración de la gravedad), denota los valores del geopotencial en niveles enteros, obtenidos de la definición de coordenada vertical (Gal-Chen, UM o Schär de las ecuaciones (4.10), (4.11) o (4.12) respectivamente).

Por otra parte, los tensores métricos covariantes y contravariantes, así como los Símbolos de Christoffel, se calculan en los niveles enteros o intermedios, según donde se requiera su evaluación.

#### 4.4.1. Modelo no lineal

Las ecuaciones de Euler (4.1) a (4.3) expresadas en las coordenadas del modelo, toman la forma:

$$\frac{\partial V^j}{\partial t} + \Gamma_{kl}^j V^k V^l + V^k \frac{\partial V^j}{\partial X^k} + C_k^j V^k + H^{jk} \left( Re^r \frac{\partial q}{\partial X^k} + \frac{\partial \phi}{\partial X^k} \right) = F^j \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + V^k \frac{\partial}{\partial X^k} \left( r + \frac{R}{C_v} \ln \frac{|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{R}{C_v |\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial X^k} \left( |\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}} V^k \right) = \frac{Q}{C_v e^r} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + V^k \frac{\partial}{\partial X^k} \left( q + \frac{C_p}{C_v} \ln \frac{|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{C_p}{C_v |\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial X^k} \left( |\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}} V^k \right) = \frac{Q}{C_v e^r}. \quad (4.42)$$

Estas ecuaciones no están escritas en forma conservativa, y por tanto no son aptas para métodos conservativos como el método de volúmenes finitos. No obstante, cabe señalar que la formulación covariante no es incompatible con métodos conservativos. Por ejemplo, Jørgensen [Jørgensen, 2003] deduce un sistema de ecuaciones en forma estrictamente conservativa para un fluido incompresible usando la formulación covariante. El hecho de que las ecuaciones (4.40) a (4.42) no sean conservativas no tiene trascendencia en el modelo presentado en esta tesis, ya que éste está basado en el

método espectral, y por tanto no puede ser conservativo por ser el método espectral inherentemente no conservativo.

Una posible desventaja de las ecuaciones propuestas, es la presencia de los Símbolos de Christoffel en los términos advectivos de la ecuación del momento (4.40), que son no nulos en presencia de orografía. Sin embargo, los Símbolos de Christoffel no son necesarios en el caso de que se use el esquema de advección semi-lagrangiana, ya que son reemplazados por interpolaciones de las componentes de la velocidad corriente arriba de cada punto de rejilla, siguiendo el procedimiento descrito en Simarro y Hortal [2011].

Describimos en primer lugar la discretización espacial de la fuerza de gradiente de presión y fuerza gravitacional de la ecuación del momento. Teniendo en cuenta que  $H^{XY} = 0$ , la componente  $(Re^r \nabla q + \nabla \phi)^X$  es:

$$H^{XX} \left( Re^r \frac{\partial q}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + H^{XZ} \left( Re^r \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right). \quad (4.43)$$

Esta expresión es parte de la ecuación de pronóstico de la velocidad contravariante  $U$ , y por tanto debe estar definida en niveles enteros. El primer término en (4.43) se calcula usando la derivada horizontal espectral  $\mathbf{D}_X$ , y por tanto es:

$$H^{XX} \left( Re^r \frac{\partial q}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) := H^{XX} (Re^r \cdot \mathbf{D}_X \mathbf{q} + g \mathbf{D}_X \mathbf{b}_E), \quad (4.44)$$

donde el símbolo “:=” significa “discretizado como” y el punto “.” significa “producto elemento por elemento en cada nivel”. La derivada  $\mathbf{D}_X \mathbf{b}_E$ , como cualquier otra derivada de la función  $b(X, Y, Z)$ , se calcula en la inicialización del modelo y se conserva su valor durante la simulación. La derivada  $\mathbf{D}_X \mathbf{q}$  se calcula en el espacio espectral al principio de cada paso de tiempo, y su valor en el espacio de puntos de rejilla se obtiene con una



transformación espectral inversa. El segundo término de (4.43) se discretiza así:

$$H^{XZ} \left( Re^r \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) := H^{XZ} \hat{\mathbf{E}}_{\hat{Z}} (R (\mathbf{E}_Z e^r) \cdot (\mathbf{D}_Z \mathbf{q}) + g \mathbf{D}_Z \mathbf{b}_E), \quad (4.45)$$

donde se han utilizado los operadores interpolación de niveles enteros a intermedios, y de niveles intermedios a enteros,  $\mathbf{E}_Z$  y  $\hat{\mathbf{E}}_{\hat{Z}}$  respectivamente. Recordamos que este último operador se construye sin considerar implícitamente que la función a interpolar es cero en los límites inferior y superior del modelo, a diferencia del operador interpolación  $\mathbf{E}_{\hat{Z}}$ . Usar el operador  $\mathbf{E}_{\hat{Z}}$  en esta expresión sería equivalente a suponer que hay un equilibrio hidrostático en los límites inferior y superior del modelo, lo cual, en general, no es cierto.

El término  $(Re^r \nabla q + \nabla \phi)^Y$  se trata de forma similar a  $(Re^r \nabla q + \nabla \phi)^X$ , y por tanto las ecuaciones discretizadas correspondientes son similares a (4.44) y (4.45) con  $Y$  substituyendo a  $X$ .

Finalmente, la componente vertical del gradiente  $(Re^r \nabla q + \nabla \phi)^Z$  tiene tres términos. El primer término se discretiza como:

$$H^{ZX} \left( Re^r \frac{\partial q}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) := H^{ZX} \mathbf{E}_Z (R e^r \cdot \mathbf{D}_X \mathbf{q} + g \mathbf{D}_X \mathbf{b}_E), \quad (4.46)$$

y el segundo

$$H^{ZY} \left( Re^r \frac{\partial q}{\partial Y} + \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) := H^{ZY} \mathbf{E}_Z (R e^r \cdot \mathbf{D}_Y \mathbf{q} + g \mathbf{D}_Y \mathbf{b}_E), \quad (4.47)$$

donde  $\mathbf{E}_Z$  se usa para interpolar de niveles enteros a niveles intermedios. La discretización del tercer término es:

$$H^{ZZ} \left( Re^r \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) := H^{ZZ} (R (\mathbf{E}_Z e^r) \cdot (\mathbf{D}_Z \mathbf{q}) + g \mathbf{D}_Z \mathbf{b}_E). \quad (4.48)$$

Como se puede observar, en la discretización de la fuerza de gradiente de pre-

sión y de la fuerza gravitacional, no se usa la expresión simple para el gradiente del geopotencial dada en la ecuación (4.32). En vez de esta simplificación, el gradiente del geopotencial acompaña al gradiente de presión en todas las componentes del término  $Re^r \nabla q + \nabla \phi$  (dadas en las ecuaciones (4.46), (4.47) y (4.48)), que representa el desequilibrio entre la fuerza de gradiente de presión y la fuerza gravitacional. Hemos probado distintas configuraciones para este término, y teniendo todas el mismo orden de exactitud, hemos seleccionado la más estable.

Vemos ahora los términos advectivos de la ecuación del momento. Los términos de advección de la componente  $U$  de la ecuación del momento (4.1) se discretizan como:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{D}_X \mathbf{U} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}_Y \mathbf{U} + \mathbf{E}_{\hat{z}} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{D}_Z \mathbf{U}),$$

más los términos de curvatura siguientes:

$$\Gamma_{XX}^X \mathbf{U}^2 + 2\Gamma_{XY}^X \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} + 2\Gamma_{XZ}^X \mathbf{U} \cdot (\mathbf{E}_{\hat{z}} \mathbf{W}).$$

De forma similar, los términos de advección de la componente  $V$  de la ecuación del momento, se discretizan como:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{D}_X \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}_Y \mathbf{V} + \mathbf{E}_{\hat{z}} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{D}_Z \mathbf{V}),$$

más los términos de curvatura siguientes:

$$\Gamma_{XX}^Y \mathbf{U}^2 + 2\Gamma_{XY}^Y \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} + \Gamma_{YY}^Y \mathbf{V}^2 + 2\Gamma_{YZ}^Y \mathbf{V} \cdot (\mathbf{E}_{\hat{z}} \mathbf{W}).$$

Finalmente, los términos de advección de la componente vertical  $W$  de la ecuación del momento se discretizan como:

$$(\mathbf{E}_Z \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{D}_X \mathbf{W}) + (\mathbf{E}_Z \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{D}_Y \mathbf{W}) + \mathbf{E}_Z \mathbf{D}_{\hat{z}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{W}^2 \right),$$

más los términos de curvatura correspondientes:

$$\mathbf{E}_Z(\Gamma_{XX}^Z \mathbf{U}^2 + 2\Gamma_{XY}^Z \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} + \Gamma_{YY}^Z \mathbf{V}^2) + 2\mathbf{W} \cdot \mathbf{E}_Z(\Gamma_{XZ}^Z \mathbf{U} + \Gamma_{YZ}^Z \mathbf{V}) + \Gamma_{ZZ}^Z \mathbf{W}^2.$$

El término de Coriolis se discretiza usando las matrices (4.33) y (4.34), aplicando los operadores de interpolación a las componentes de la velocidad donde es necesario pasar de niveles enteros a intermedios o viceversa.

La discretización de las ecuaciones de pronóstico del logaritmo de la temperatura (4.41) y del logaritmo de la presión (4.42) son muy similares, ya que son exactamente las mismas a excepción de una constante. Los términos advectivos de la ecuación de pronóstico del logaritmo de la temperatura  $\mathbf{r}$  son:

$$V^k \frac{\partial r}{\partial X^k} := \mathbf{U} \cdot \mathbf{D}_X \mathbf{r} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}_Y \mathbf{r} + \mathbf{E}_{\hat{Z}}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{D}_Z \mathbf{r}), \quad (4.49)$$

más

$$V^k \frac{\partial}{\partial X^k} \left( \ln \frac{|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}} \right) := (\mathbf{U} \cdot \mathbf{D}_X + \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}_Y) \cdot \ln \frac{|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}} + \mathbf{E}_{\hat{Z}}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{D}_Z \ln \frac{|\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}}). \quad (4.50)$$

Subrayamos que las condiciones de contorno, implícitamente incluidas en el operador  $\mathbf{E}_{\hat{Z}}$  de las ecuaciones (4.49) y (4.50), son aplicadas de forma consistente, ya que éste opera sobre un producto que incluye la velocidad vertical contravariante, que es cero en los límites inferior y superior del modelo. Finalmente, teniendo en cuenta (4.29), la *divergencia lineal* se discretiza así:

$$\frac{1}{|\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial X^k} \left( |\bar{\mathbf{G}}|^{\frac{1}{2}} V^k \right) := \mathbf{D} + \mathbf{D}_{\hat{Z}} \mathbf{W}, \quad (4.51)$$

donde  $\mathbf{D}$  está dado en la ecuación (4.30). Como ya se mencionó en la sección 4.2.4, la divergencia (4.51) es idéntica a la divergencia usada en el modelo lineal, llamada

*divergencia lineal* porque se usa en su definición la *métrica lineal*  $\bar{\mathbf{G}}$ .

#### 4.4.2. Modelo lineal

El esquema de integración temporal semi-implícito requiere una versión lineal de las ecuaciones de Euler (4.40) a (4.42). Para ello, se considera un estado de referencia que consiste en una atmósfera en reposo, isoterma, en equilibrio hidrostático y sin presencia de orografía. Se consideran las ecuaciones de evolución lineales de una perturbación respecto de este estado de referencia.

El estado de referencia isoterma se usa en muchos modelos de predicción semi-implícitos, tanto espectrales como de punto de rejilla, hidrostáticos y no hidrostáticos [Bénard et al., 2010; Gustafsson y McDonald, 1996; Ritchie et al., 1995]. Otros modelos, como el modelo COSMO [Baldauf et al., 2011] o el WRF [Skamarock et al., 2005], usan un estado de referencia no isoterma, con un perfil vertical de temperatura más parecido al de la atmósfera real. Estos modelos sólo usan la técnica semi-implícita en la dimensión vertical, siendo explícitos en las dimensiones horizontales. Por este motivo, y por motivos de estabilidad, pueden usar perfiles no isotermos en la atmósfera de referencia.

Detallamos a continuación las ecuaciones lineales correspondientes a las ecuaciones no lineales de Euler (4.40) a (4.42), también descritas en [Simarro y Hortal, 2011; Simarro et al., 2013]. Siendo  $\bar{T}$  la temperatura de referencia, la ecuación de balance hidrostático para la atmósfera de referencia es:

$$R\bar{T} \frac{\partial \bar{q}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{b}}{\partial Z} = 0,$$

donde la derivada vertical  $\bar{b}_Z = H_T$  es constante y por tanto el logaritmo de la presión  $\bar{q}(Z)$  disminuye linealmente con la coordenada vertical. Es decir,  $\bar{q}(Z) = \bar{q}_0 + \bar{q}_Z Z$ . Teniendo en cuenta esto, la versión lineal de las ecuaciones de Euler (4.40) a (4.42) es:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{H}^{XX} R\bar{T} \frac{\partial q}{\partial X} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{H}^{YY} R\bar{T} \frac{\partial q}{\partial Y} &= 0 \\
\frac{\partial W}{\partial t} + \bar{H}^{ZZ} R\bar{T} \frac{\partial q}{\partial Z} - \frac{g}{\bar{b}_Z} r &= 0 \\
\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{R}{C_v} \left( D + \frac{\partial W}{\partial Z} \right) &= 0 \\
\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{C_p}{C_v} \left( D + \frac{\partial W}{\partial Z} \right) - \frac{g\bar{b}_Z}{R\bar{T}} W &= 0.
\end{aligned}$$

La discretización espacial de estas ecuaciones se realiza de forma análoga a la discretización de las ecuaciones no lineales, ya descrita en la sección 4.4.1. Resultan ser:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \bar{H}^{XX} R\bar{T} \mathbf{D}_X \mathbf{q} = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \bar{H}^{YY} R\bar{T} \mathbf{D}_Y \mathbf{q} = 0 \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \bar{H}^{ZZ} R\bar{T} \mathbf{D}_Z \mathbf{q} - \frac{g}{\bar{b}_Z} \mathbf{E}_Z \mathbf{r} = 0 \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{R}{C_v} (\mathbf{D} + \mathbf{D}_{\hat{Z}} \mathbf{W}) = 0 \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{C_p}{C_v} (\mathbf{D} + \mathbf{D}_{\hat{Z}} \mathbf{W}) - \frac{g\bar{b}_Z}{R\bar{T}} \mathbf{E}_{\hat{Z}} \mathbf{W} = 0. \quad (4.56)$$

Las ecuaciones de Euler lineales y no lineales espacialmente discretizadas (descritas en este apartado y en el anterior respectivamente), se usan conjuntamente en esquema semi-implícito descrito en la sección siguiente, donde finalmente se discretiza la dimensión temporal.

#### 4.5. Discretización temporal: esquema semi-implícito

Los esquemas de integración más utilizados en meteorología son de tipo semi-implícito, tanto en modelos espectrales como en modelos de punto de rejilla [Robert, 1981]. Esto es debido a que, con esta técnica, se consigue estabilidad numérica con pasos de tiempo relativamente grandes, lo cual significa eficiencia computacional. La eficiencia, junto con la exactitud, es uno de los requerimientos de un modelo de predicción

operativo. Como se ha mencionado en la sección 2.2.2, algunos modelos meteorológicos no hidrostáticos de uso operativo, como el modelo COSMO [Baldauf et al., 2011] o el WRF [Skamarock et al., 2005], usan una técnica de integración temporal mixta, explícita en las dimensiones horizontales e implícita en la vertical.

En el modelo presentado en esta tesis, hemos utilizado la técnica semi-implícita con tres niveles de tiempo (*three time level semi-implicit scheme* en la literatura anglosajona). Se llama así porque se usan, en cada paso de tiempo, el estado atmosférico en tres momentos distintos, separados entre sí un paso de tiempo. Este esquema temporal tiene dos soluciones: un modo físico, que es una solución aproximada de las ecuaciones analíticas, y un modo computacional, que no es una solución aproximada de las ecuaciones analíticas y que por tanto no interesa y debe amortiguarse. Para amortiguar el modo computacional se aplica el filtro temporal de Asselin [Asselin, 1972]. Describimos en esta sección la versión con advección euleriana. La extensión a advección semi-lagrangiana está descrita en [Simarro y Hortal, 2011].

El objetivo es expresar las ecuaciones de Euler (4.40), (4.41) y (4.42), substituyendo las derivadas temporales mediante una aproximación de segundo orden.

Se representa un estado atmosférico en un instante de tiempo  $t_n = n\Delta t$  mediante el vector  $\mathcal{X}_n$ , que contiene los valores de las variables de pronóstico (componentes contravariantes de la velocidad y los logaritmos de la temperatura y la presión), en el instante de tiempo  $t_n$ . La derivada temporal del estado atmosférico  $\mathcal{X}_n$  en el instante  $t_n$  se aproxima mediante:

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t}(t_n) \approx \frac{\mathcal{X}_{n+1} - \mathcal{X}_{n-1}}{2\Delta t}.$$

Esta aproximación es la que se usa para las derivadas temporales de las ecuaciones de Euler (4.40), (4.41) y (4.42). Por otra parte, los términos de forzamiento de estas ecuaciones (es decir, todos los términos menos las derivadas temporales), se substituyen por la suma de un término explícito no lineal,  $\mathcal{M}(\mathcal{X}_n) - \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ , y otro término lineal

implícito. Se usa un factor  $\epsilon$  de descentrado para incrementar la estabilidad, como se explica con detalle más adelante en la sección 4.6. Por tanto, el esquema temporal de tres pasos de tiempo 3TL se representa mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\mathcal{X}_{n+1} - \bar{\mathcal{X}}_{n-1}}{2\Delta t} = \mathcal{M}(\mathcal{X}_n) - \mathcal{L}(\mathcal{X}_n) + \frac{1-\epsilon}{2}\mathcal{L}(\bar{\mathcal{X}}_{n-1}) + \frac{1+\epsilon}{2}\mathcal{L}(\mathcal{X}_{n+1}), \quad (4.57)$$

donde  $\bar{\mathcal{X}}$  es [Asselin, 1972]:

$$\bar{\mathcal{X}}_n = \mathcal{X}_n + \alpha (\bar{\mathcal{X}}_{n-1} - 2\mathcal{X}_n + \mathcal{X}_{n+1}). \quad (4.58)$$

La ecuación (4.57) se puede escribir, pasando al miembro de la izquierda los términos implícitos y al miembro de la derecha los explícitos, de la siguiente manera:

$$(1 - \Delta t(1 + \epsilon)\mathcal{L})\mathcal{X}_{n+1} = \mathcal{R}(\mathcal{X}_n, \bar{\mathcal{X}}_{n-1}), \quad (4.59)$$

donde el término explícito  $\mathcal{R}$ , que depende de los valores conocidos  $\mathcal{X}_n$  y  $\bar{\mathcal{X}}_{n-1}$ , es:

$$\mathcal{R} = \bar{\mathcal{X}}_{n-1} + 2\Delta t \left( \mathcal{M}(\mathcal{X}_n) - \mathcal{L}(\mathcal{X}_n) + \frac{1-\epsilon}{2}\mathcal{L}(\bar{\mathcal{X}}_{n-1}) \right).$$

Usando el modelo lineal (4.52) a (4.56) descrito en el apartado anterior, el esquema semi-implícito (4.59) resulta ser:

$$\mathbf{U}_{n+1} + \beta \bar{H}^{XX} R\bar{T} \mathbf{D}_X \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{R}_U \quad (4.60)$$

$$\mathbf{V}_{n+1} + \beta \bar{H}^{YY} R\bar{T} \mathbf{D}_Y \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{R}_V, \quad (4.61)$$

para las componentes horizontales de la velocidad y

$$\mathbf{W}_{n+1} + \beta \left( \bar{H}^{ZZ} R\bar{T} \mathbf{D}_Z \mathbf{q}_{n+1} - \frac{g}{\bar{b}_Z} \mathbf{E}_Z \mathbf{r}_{n+1} \right) = \mathbf{R}_W \quad (4.62)$$

$$\mathbf{r}_{n+1} + \beta \left( \frac{R}{C_v} \mathbf{D}_{n+1} + \frac{R}{C_v} \mathbf{D}_{\hat{z}} \mathbf{W}_{n+1} \right) = \mathbf{R}_r \quad (4.63)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} + \beta \left( \frac{C_p}{C_v} \mathbf{D}_{n+1} + \frac{C_p}{C_v} \mathbf{D}_{\hat{z}} \mathbf{W}_{n+1} - \frac{g\bar{b}_z}{RT} \mathbf{E}_{\hat{z}} \mathbf{W}_{n+1} \right) = \mathbf{R}_q, \quad (4.64)$$

para la componente vertical de la velocidad y los logaritmos de la temperatura y presión. En las ecuaciones (4.60) a (4.64) se usa la definición  $\beta = (1 + \epsilon)\Delta t$ , y los términos de la derecha  $\mathbf{R}_U$ ,  $\mathbf{R}_V$ ,  $\mathbf{R}_W$ ,  $\mathbf{R}_r$  y  $\mathbf{R}_q$  son los términos explícitos, es decir, los conocidos a partir del estado atmosférico en los pasos de tiempo actual y anterior.

El sistema lineal (4.60) a (4.64) debe resolverse para conocer el valor de las variables de pronóstico en el siguiente paso de tiempo,  $\mathbf{U}_{n+1}$ ,  $\mathbf{V}_{n+1}$ ,  $\mathbf{W}_{n+1}$ ,  $\mathbf{r}_{n+1}$  y  $\mathbf{q}_{n+1}$ . Para ello se aplica el método espectral, en el que se usan las funciones propias del laplaciano horizontal, es decir, los armónicos esféricos en el caso de geometría 3D esférica y las funciones sinusoidales en el caso de geometría 2D plana. El sistema lineal (4.60) a (4.64) se resuelve de forma similar a otros modelos espectrales semi-implícitos hidrostáticos [Ritchie et al., 1995] o no hidrostáticos [Bénard et al., 2010]. Obviamente hay diferencias, debido a que en el modelo propuesto en esta tesis se usa otra coordenada vertical y otras variables de pronóstico. Simarro y Hortal [2011] describen cómo se resuelve el sistema lineal (4.60) a (4.64) en el caso 2D plano. Veamos a continuación como se invierte el sistema lineal en el caso 3D.

Se observa que los únicos operadores horizontales del sistema lineal (4.60) a (4.64) son las derivadas horizontales  $\mathbf{D}_X$  y  $\mathbf{D}_Y$  que aparecen en las ecuaciones de las componentes horizontales de la velocidad (4.60) y (4.61). El objetivo es utilizar el operador laplaciano en coordenadas esféricas, lo cual permite substituir el operador laplaciano por un número real y resolver el problema de forma algebraica. Hay diversas maneras de proceder. Temperton realizó un análisis en profundidad para minimizar el número de transformaciones espectrales a realizar y por tanto minimizar el coste computacional [Temperton, 1991]. En la sección 3.3.6 se comenta por qué el coste computacional es un problema serio en los modelos espectrales con geometría esférica de alta resolución,



y cuáles son los últimos avances publicados para resolver este escollo. Nosotros hemos seguido un procedimiento similar al propuesto por Temperton. Modificamos las ecuaciones de las componentes horizontales de la velocidad (4.60) y (4.61) como describimos a continuación. En primer lugar, introducimos las definiciones siguientes:

$$\hat{\mathbf{U}} \equiv \cos^2 Y \cdot \mathbf{U}$$

$$\hat{\mathbf{V}} \equiv \cos Y \cdot \mathbf{V},$$

y los operadores divergencia y rotacional:

$$\alpha_D(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \equiv \frac{1}{\cos^2 Y} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X} + \cos Y \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial Y} \right)$$

$$\alpha_C(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \equiv \frac{1}{\cos^2 Y} \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial X} - \cos Y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial Y} \right).$$

Es inmediato ver que  $\alpha_D(\hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{V}})$  es la divergencia horizontal dada en la ecuación (4.30):

$$\alpha_D(\hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{V}}) = \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + \frac{1}{\cos Y} \frac{\partial}{\partial Y} (\mathbf{V} \cos Y).$$

Teniendo en cuenta que según (4.24) los términos métricos son  $\bar{H}^{XX} = (a \cos Y)^{-2}$  y  $\bar{H}^{YY} = a^{-2}$ , al aplicar los operadores  $\alpha_D$  y  $\alpha_C$  a las ecuaciones  $\cos^2 Y \cdot$  (4.60) y  $\cos Y \cdot$  (4.61), se desacoplan las componentes irrotacionales y no divergentes del flujo horizontal:

$$\mathbf{D}_{n+1} + \beta R \bar{T} \bar{\nabla}^2 \mathbf{q}_{n+1} = \alpha_D(\cos^2 Y \cdot \mathbf{R}_U, \cos Y \cdot \mathbf{R}_V) \quad (4.65)$$

$$\mathbf{C}_{n+1} = \alpha_C(\cos^2 Y \cdot \mathbf{R}_U, \cos Y \cdot \mathbf{R}_V), \quad (4.66)$$

donde la vorticidad del flujo horizontal  $\mathbf{C}_{n+1}$  queda resuelta. Las otras variables,  $\mathbf{D}_{n+1}$ ,  $\mathbf{W}_{n+1}$ ,  $\mathbf{r}_{n+1}$  y  $\mathbf{q}_{n+1}$ , se resuelven a partir de las ecuaciones (4.62), (4.63), (4.64) y

(4.65). En estas ecuaciones, los operadores son derivadas e interpolaciones verticales, exceptuando el término:

$$\bar{\nabla}^2 \mathbf{q} = \frac{1}{a^2 \cos^2 Y} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial X^2} + \cos Y \frac{\partial}{\partial Y} \left( \cos Y \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y} \right) \right),$$

donde aparece el operador laplaciano horizontal. Mediante el uso de las funciones propias del laplaciano horizontal, puede encontrarse una ecuación de Helmholtz para la componente vertical de la velocidad de forma similar a la propuesta en Bénard et al. [2010] en el modelo ALADIN. Una vez se conoce la velocidad vertical, se calculan las otras variables.

#### 4.6. Estabilidad lineal

La estabilidad del esquema temporal descrito en la sección anterior puede ser estimada utilizando un método de análisis numérico como el descrito en Côté et al. [1983] y Bénard et al. [2004]. Para ello, el término  $\mathcal{M}(\mathcal{X}_n)$  de la ecuación (4.57) se substituye por el término lineal  $\mathcal{L}'(\mathcal{X}_n)$ , exactamente igual a  $\mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$  excepto por la temperatura de referencia utilizada:  $\bar{T}'$  en vez de  $\bar{T}$ .

Las ecuaciones (4.57) y (4.58), con el cambio mencionado de substituir  $\mathcal{M}(\mathcal{X}_n)$  con  $\mathcal{L}'(\mathcal{X}_n)$ , pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{n+1} \\ \bar{\mathcal{X}}_n \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{X}_n \\ \bar{\mathcal{X}}_{n-1} \end{pmatrix},$$

siendo la matriz de amplificación  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & (\mathcal{J} - \epsilon^+ \mathcal{L})^{-1} \\ \mathcal{J} & \alpha(\mathcal{J} - \epsilon^+ \mathcal{L})^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1 - 2\alpha)\mathcal{J} & \alpha\mathcal{J} \\ 2\Delta t(\mathcal{L} - \mathcal{L}') & (\mathcal{X} + \epsilon^- \mathcal{L}) \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

donde  $\epsilon^\pm = \Delta t(1 \pm \epsilon)$  y  $\mathcal{J}$  es la matriz identidad.

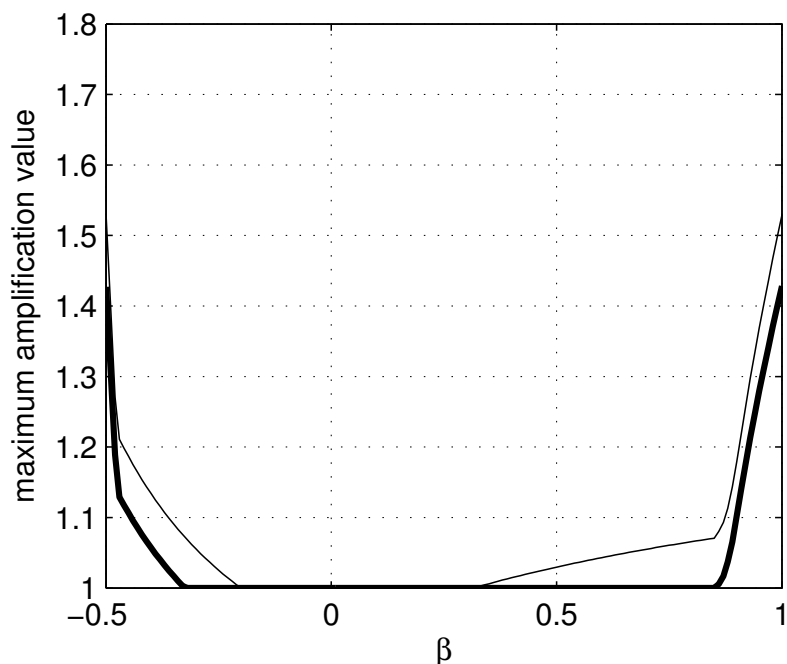


Figura 4.2: Máximo módulo de los valores propios de la matriz de amplificación para diferentes valores del parámetro  $\beta = \bar{T}'/\bar{T} - 1$  y números de onda horizontales desde  $10^{-2} m^{-1}$  hasta  $10^{-6} m^{-1}$ .

Dado un determinado número de onda horizontal, o valor propio del laplaciano horizontal, y unas temperaturas de referencia  $\bar{T}$  y  $\bar{T}'$ , todos los valores propios de la matriz de amplificación  $\mathcal{A}$  deben tener módulo menor o igual a la unidad, de otra forma el modo es inestable.

El valor de los coeficientes  $\epsilon$  y  $\alpha$  que aparecen en la matriz de amplificación (4.67) tienen impacto en la estabilidad. En la figura 4.2 se muestra en línea gruesa la región de estabilidad con  $\epsilon = 0,07$  y  $\alpha = 0,07$ , para un amplio rango de números de onda horizontales (desde  $10^{-2} m^{-1}$  hasta  $10^{-6} m^{-1}$ ), en función del parámetro  $\beta = \bar{T}'/\bar{T} - 1$ . Este rango de estabilidad es suficiente para configuraciones realistas. En el caso de  $\epsilon = 0$  y  $\alpha = 0,07$  el rango de estabilidad se reduce significativamente, tal como se observa en la misma figura en línea más fina.

# Capítulo 5

## Test 2D

En este capítulo se realizan una serie de test con el modelo descrito en los capítulos anteriores en su versión 2D, con una dimensión horizontal y otra vertical. El motivo de haber construido un modelo 2D es el de probar que la discretización espacial y temporal elegidas permiten simular flujos no hidrostáticos con suficiente precisión. El modelo 3D global no es apropiado para este propósito, porque la resolución a la que debería usarse tendría un coste computacional prohibitivo. En modelización atmosférica es habitual la estrategia de codificar un modelo 2D que mantenga las características más importantes de la discretización espacial y temporal del modelo 3D correspondiente. En el caso del modelo presentado en esta tesis, el modelo 2D conserva las siguientes características idénticas al modelo 3D esférico: la discretización vertical, el uso del método espectral y el esquema semi-implícito.

Existe en la literatura científica un amplio abanico de test para modelos atmosféricos bidimensionales. Se pueden distinguir dos grandes grupos: *lineales* y *no lineales*. En los lineales, el flujo atmosférico consiste en una perturbación respecto de un estado estacionario, y es posible calcular una solución analítica con la que comparar los resultados obtenidos. Para los test no lineales no se dispone de ningún tipo de solución analítica conocida y, por tanto, el único método de verificación es comparar las simulaciones con los resultados de otros modelos.

### 5.1. Montaña Agnesi con parámetro de Scorer constante

Consideramos un fluido bidimensional, estacionario, adiabático, no viscoso. Además suponemos que la aproximación de Boussinesq es válida, es decir, los movimientos verticales son pequeños comparados con la escala vertical del fluido y la densidad se considera constante excepto en el término de flotabilidad de la ecuación del momento vertical [Lin, 2007].

Supongamos también la existencia de una montaña de poca amplitud y un flujo con un perfil de velocidad horizontal corriente arriba dado por la función  $\bar{u}(z)$ . Bajo estas condiciones, las ecuaciones lineales que gobiernan el flujo son [Lin, 2007]:

$$\begin{aligned}\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{u}_z w' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} - g \frac{\theta'}{\theta_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \frac{N^2 \theta_0}{g} w' &= 0,\end{aligned}$$

donde las magnitudes  $u'$ ,  $w'$ ,  $\theta'$  y  $p'$  representan perturbaciones de las componentes horizontal y vertical de la velocidad, temperatura potencial y presión respecto del flujo sin perturbar.

El flujo sin perturbar consiste en una atmósfera en equilibrio hidrostático, con una velocidad horizontal media que depende de la altura  $\bar{u}(z)$ , con velocidad vertical nula, con una temperatura potencial media  $\theta_0$  y con un perfil vertical de la frecuencia de Brunt-Väisälä dado por la función  $N^2(z)$ . De las anteriores ecuaciones se obtiene fácilmente la llamada *ecuación de Scorer* [Scorer, 1954]:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + l^2(z) \right) w'(x, z) = 0, \quad (5.1)$$

donde la función  $l(z)$  o *parámetro de Scorer*, depende de la estratificación de la atmósfe-

ra y del perfil de velocidad horizontal:

$$l^2(z) = \frac{N^2}{\bar{u}^2} - \frac{\bar{u}_{zz}}{\bar{u}}. \quad (5.2)$$

Un caso especialmente simple de la ecuación (5.1) se da cuando el parámetro de Scorer es despreciable. En este caso, se tiene  $\nabla^2 w'(x, y) = 0$ , es decir flujo potencial.

Estamos interesados en conocer una solución a la ecuación (5.1) en presencia de una montaña de pequeña amplitud dada por la función  $h(x)$ . Esta montaña induce la siguiente condición de contorno cinemática para la perturbación de la velocidad vertical  $w'(x, z)$ :

$$w'(x, 0) = \bar{u}(0)h_x(x). \quad (5.3)$$

Las transformadas de Fourier en la dirección horizontal de las ecuaciones (5.1) y (5.3) permiten resolver la ecuación diferencial (5.1) con la condición de contorno (5.3), ya que transforman esta última en una relación algebraica entre la velocidad vertical y el perfil orográfico:

$$\hat{w}_{zz}(k, z) + (l^2(z) - k^2) \hat{w}(k, z) = 0 \quad (5.4)$$

$$\hat{w}(k, 0) = ik\bar{u}(0)\hat{h}(k), \quad (5.5)$$

donde  $\hat{w}(k, z)$  y  $\hat{h}(k)$  son las transformadas de Fourier de  $w'(x, z)$  y  $h(x)$  respectivamente. Estas dos ecuaciones se usan más adelante para encontrar una solución lineal de las ondas que se producen a sotavento de un obstáculo.

Vamos a considerar el caso en el que el parámetro de Scorer es constante. Suponemos que el perfil de viento horizontal y la estratificación de la atmósfera ( $\bar{u}$  y  $N$  respectivamente) son constantes. Dependiendo del signo de  $l^2 - k^2$  la solución va a ser

Parámetro	Unidad	Flujo Potencial	Hidrostático	No hidrostático
$a$	$m$	100	16000	500
$h_0$	$m$	50	1	100
$\bar{u}$	$ms^{-1}$	15	8	15
$N$	$s^{-1}$	0,01	0,01	0,01
$la$		0,0666	20	0,333
$N_x$		256	512	512
$N_z$		150	200	200
$\Delta x$	$m$	20	3200	100
$\Delta z$	$m$	20	100	100
$\Delta t$	$s$	0,4	90	2

Tabla 5.1: Parámetros de los experimentos numéricos de flujo con parámetro de Scorer constante sobre una montaña de Agnesi: ancho  $a$ , altura  $h_0$ , velocidad horizontal  $\bar{u}$ , Frecuencia Brunt-Väisälä  $N$ , parámetro de Scorer por ancho  $la$ , número de puntos de rejilla horizontal  $N_x$ , número de niveles verticales  $N_z$ , resolución horizontal  $\Delta x$  y resolución vertical  $\Delta z$ .

oscilatoria (perturbación de tipo onda de montaña):

$$\hat{w}(k, z) = \hat{w}(k, 0)e^{i\sqrt{l^2 - k^2}z} \text{ para } l^2 - k^2 > 0,$$

o evanescente (perturbación cuya amplitud disminuye exponencialmente con la altura):

$$\hat{w}(k, z) = \hat{w}(k, 0)e^{-\sqrt{k^2 - l^2}z} \text{ para } l^2 - k^2 < 0.$$

En las anteriores ecuaciones,  $\hat{w}(k, 0)$  se obtiene de la condición de contorno (5.5). Haciendo la transformada inversa de Fourier de la suma de las distintas contribuciones  $\hat{w}(k, z)$  (oscilatorias y evanescentes según el valor de  $k$  respecto de  $l$ ), se obtiene la solución siguiente para la perturbación de la velocidad vertical:

$$w'(x, z) = 2\Re \left( \int_0^l \hat{w}(k, 0)e^{i\sqrt{l^2 - k^2}z + ikx} dk + \int_l^\infty \hat{w}(k, 0)e^{-\sqrt{k^2 - l^2}z + ikx} dk \right). \quad (5.6)$$

Esta solución es válida para cualquier perfil orográfico de pequeña amplitud, con la condición de que el parámetro de Scorer sea constante.

Es bastante habitual encontrar en la literatura test de modelos numéricos con el

perfil orográfico dado por la función “Bruja de Agnesi” (llamada así después de que la matemática italiana Maria Gaetana Agnesi la estudiara en el siglo XVIII). La función es:

$$h(x) = \frac{h_0 a^2}{x^2 + a^2},$$

y su transformada de Fourier es especialmente simple:

$$\hat{h}(k) = \frac{h_0 a}{2} e^{-|k|a}. \quad (5.7)$$

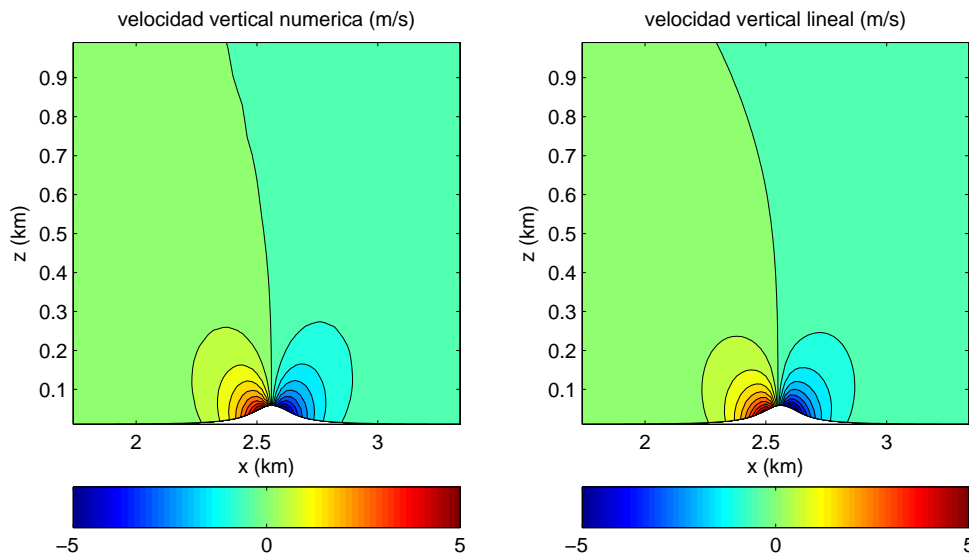


Figura 5.1: Velocidad vertical para el test de flujo potencial sobre una montaña de Agnesi. Resultado numérico (izquierda) y aproximación lineal de Boussinesq (derecha). El intervalo de contorno es de  $0,5 \text{ m s}^{-1}$ . El resultado numérico corresponde a  $t^* = t\bar{u}/a = 24$ .

Se observa a partir de (5.7) que las contribuciones de la orografía  $\hat{h}(k)$  a la perturbación de la velocidad vertical  $w'(x, z)$ , serán tanto más importantes cuanto menor sea el valor de  $|k|a$ .

Con el fin de evaluar el modelo 2D en regímenes claramente distintos, hemos configurado tres experimentos numéricos correspondientes a casos de flujo potencial, onda hidrostática y onda no hidrostática. Estos se han realizado con los parámetros



definidos en la tabla 5.1. Para el esquema temporal semi-implícito se han usado en todos ellos  $\alpha = 0,07$ ,  $\epsilon = 0,07$  y una temperatura de referencia de  $\bar{T} = 300 K$ . Los operadores verticales en diferencias finitas son de orden cuatro, tanto para la interpolación como para la derivada.

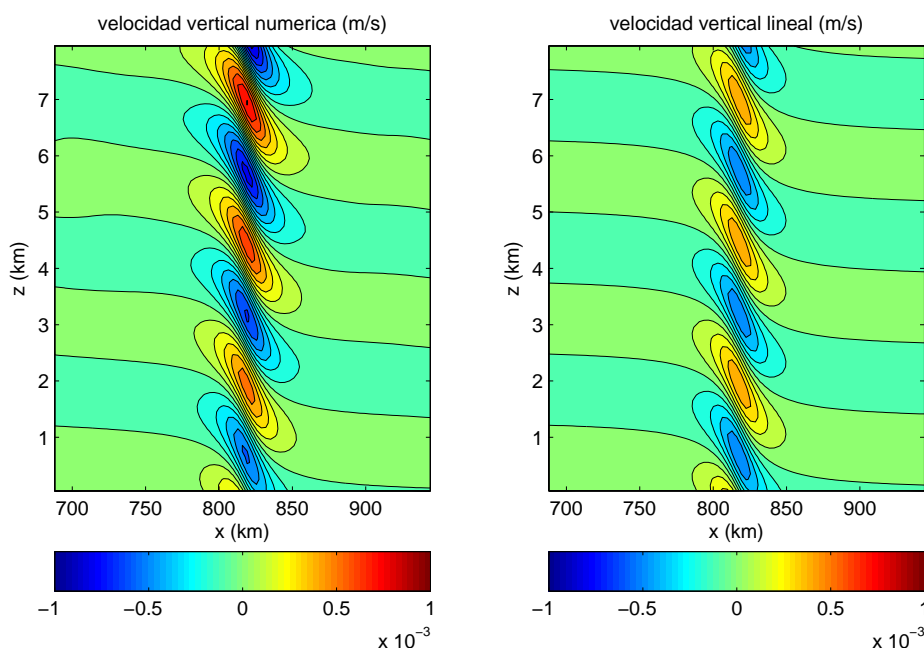


Figura 5.2: Velocidad vertical para el test de flujo hidrostático sobre una montaña de Agnesi. Resultado numérico (izquierda) y aproximación lineal de Boussinesq (derecha). El intervalo de contorno es de  $10^{-4} m s^{-1}$ . El resultado numérico corresponde a  $t^* = t\bar{u}/a = 135$ .

Como se ha mencionado, el flujo potencial se produce cuando  $l \cdot a \ll 1$  (producto del parámetro de Scorer por ancho del obstáculo pequeños), y se caracteriza porque la perturbación decae exponencialmente con la altura. Para este test, los parámetros del flujo y el ancho de la montaña se han escogido de forma que  $l \cdot a = 0,0666$  (ver tabla 5.1). En la figura 5.1 están representados los resultados obtenidos con el modelo numérico y con la aproximación lineal de Boussinesq estacionaria, calculada con la ecuación (5.6). El resultado numérico corresponde a  $t^* = t\bar{u}/a = 24$ , de forma que ha dado tiempo a formarse un flujo casi estacionario. Se observa que los resultados son muy parecidos.

Las ondas hidrostáticas se dan con parámetros de Scorer por ancho del obstáculo

grandes,  $l \cdot a \gg 1$ , y en este caso la perturbación, en vez de decaer con la altura, se propaga en la vertical sin disminuir su amplitud, manteniéndose sobre el obstáculo. El test se ha realizado con  $l \cdot a = 20$  (ver tabla 5.1), y los resultados numéricos y lineales son similares, tal como se observa en la figura 5.2, donde el resultado numérico corresponde a  $t^* = t\bar{u}/a = 135$  y el lineal está también calculado con la expresión (5.6). En la figura 5.2 se observa que el resultado numérico se amplifica con la altura, mientras que el lineal tiene una amplitud constante. Esto es debido a que las ecuaciones de Boussinesq, usadas para el cálculo de la solución lineal analítica, no representan adecuadamente el aumento de la amplitud de la perturbación con la altura.

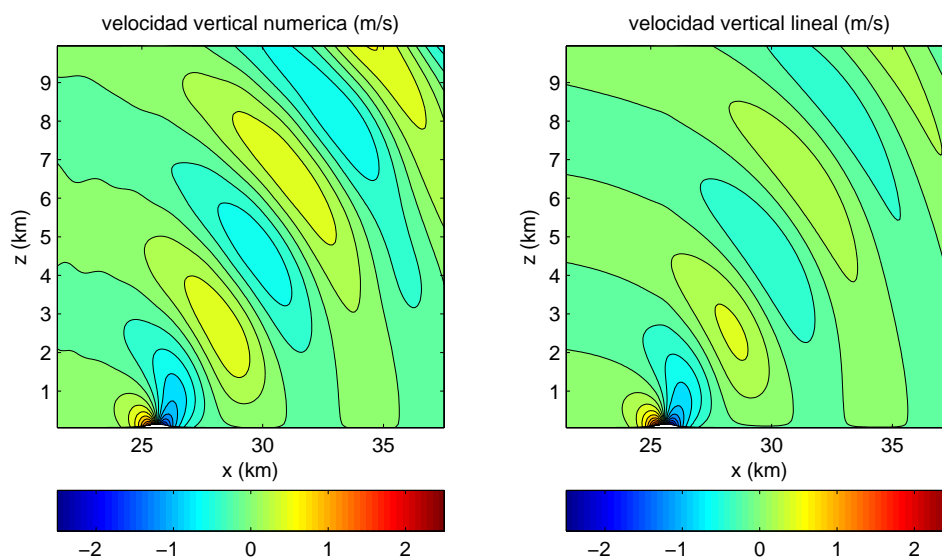


Figura 5.3: Velocidad vertical para el test de flujo no hidrostático sobre una montaña de Agnesi. Resultado numérico (izquierda) y aproximación lineal de Boussinesq (derecha). El intervalo de contorneo es de  $0,2 \text{ m s}^{-1}$ . El resultado numérico corresponde a  $t^* = t\bar{u}/a = 90$ .

Las ondas no hidrostáticas se dan con parámetros de Scorer por ancho del obstáculo del orden de la unidad,  $l \cdot a \approx 1$ . En este caso, los términos de flotabilidad y de gradiente de presión de la ecuación del momento vertical, son del mismo orden de magnitud, y el resultado es una onda que se propaga tanto horizontal como verticalmente. El test se ha realizado con  $l \cdot a = 0,333$  (ver tabla 5.1) y el resultado numérico, representado en la figura 5.3, corresponde a  $t^* = t\bar{u}/a = 90$ . Este tiempo es suficiente

para que se alcance un estado casi estacionario que pueda compararse con la solución lineal calculada con (5.6). Vemos que la solución numérica y lineal difieren por dos motivos. En primer lugar, de forma análoga al test de onda hidrostática, la aproximación de Boussinesq no representa adecuadamente el aumento de la amplitud de la perturbación con la altura. En segundo lugar, a diferencia del test de onda hidrostática, la montaña tiene una altura no despreciable en relación a su anchura (ver tabla 5.1) y por tanto la aproximación lineal pierde exactitud (esta aproximación es mejor cuanto menor sea la razón entre altura y anchura de la montaña). Estas dos causas explican la diferencia entre las soluciones numérica y lineal de la figura 5.3, además las inexactitudes del modelo 2D, propias de cualquier modelo numérico.

## 5.2. Ondas a sotavento atrapadas

En la atmósfera el parámetro de Scorer varía con la altura, ya que tanto el perfil de velocidad horizontal como la estratificación, son variables. En el caso de que el parámetro de Scorer varíe de forma lenta con la altura, se puede obtener una solución para la velocidad vertical del tipo [Lin, 2007]:

$$\hat{w}(k, z) = A(k, z)e^{i\phi(k, z)}, \quad (5.8)$$

donde la amplitud  $A$  y la fase  $\phi$  son funciones de variación lenta. Substituyendo (5.8) en (5.4) se obtiene:

$$[-A\phi_z^2 + (l^2 - k^2)A] + i[A\phi_{zz} + 2A_z\phi_z] + A_{zz} = 0, \quad (5.9)$$

donde el último término  $A_{zz}$  se desprecia, pues se ha supuesto que la amplitud varía de forma lenta. Igualando a cero la parte real e imaginaria de (5.9) se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A^2 \sqrt{l^2 - k^2} \right) = 0. \quad (5.10)$$

Parámetro	Unidad	Test I	Test II
$a$	$m$	2500	2500
$h_0$	$m$	100	100
$\bar{u}_0$	$ms^{-1}$	10	10
$L$	$m$	2830	4000
$N$	$s^{-1}$	0,01	0,01
$N_x$		512	1014
$N_z$		100	140
$\Delta x$	$m$	500	500
$\Delta z$	$m$	250	250
$\Delta t$	$s$	2	2

Tabla 5.2: Parámetros de los experimentos numéricos de ondas atrapadas a sotavento: ancho  $a$ , altura  $h_0$ , velocidad horizontal  $\bar{u}$ , parámetro de cizalladura  $L$ , Frecuencia Brunt-Väisälä  $N$ , parámetro de Scorer  $l$ , número de puntos de rejilla horizontal  $N_x$ , número de niveles verticales  $N_z$ , resolución horizontal  $\Delta x$  y resolución vertical  $\Delta z$ .

Esta ecuación proporciona una relación entre la amplitud de la onda y el parámetro de Scorer para cada número de onda, indicando que la onda se amplifica o debilita en función de la variación vertical del viento horizontal y de la estratificación. En el caso de ondas hidrostáticas  $l^2 \gg k^2$  y la ecuación (5.10) se simplifica a:

$$\frac{\partial}{\partial z} (A^2 l) = 0,$$

y por tanto, teniendo en cuenta (5.2) y la variación lenta del perfil de viento  $\bar{u}(z)$ , se deduce que la velocidad vertical de las ondas hidrostáticas se amplifica en zonas de viento fuerte o estratificación débil (lo contrario ocurre en zonas de viento débil o estratificación fuerte).

Si el parámetro de Scorer varía rápidamente con la altura, se pueden producir ondas de sotavento atrapadas (*lee trapped waves* en la literatura anglosajona). Se diferencian de las descritas hasta ahora en que no tienen inclinación en la vertical, están confinadas en la troposfera baja y pueden propagarse corriente abajo sin perder intensidad. En la figura 5.4 se observa una situación en la que se produjeron este tipo de ondas en áreas de la Península Ibérica, Francia y Norte de Africa.

Como se ha dicho, las ondas a sotavento atrapadas, requieren un estado básico

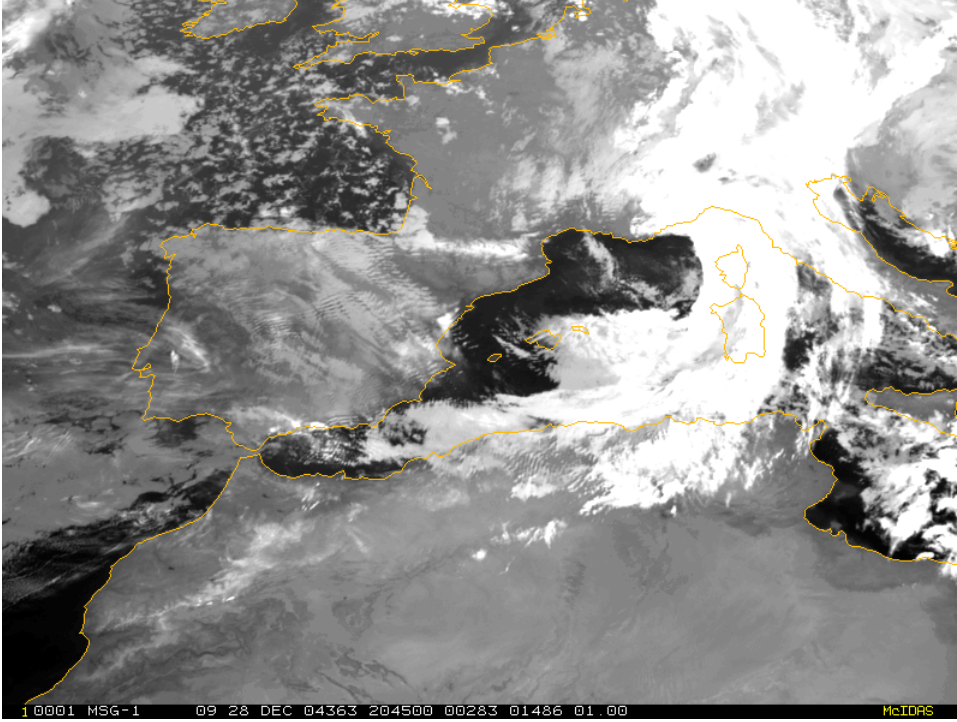


Figura 5.4: Ilustración de ondas de montaña atrapadas reales. Imagen del Meteosat-8, del 28 de Diciembre de 2004 a las 20:45 UTC, canal 6, WV7.3.

no perturbado que tenga un parámetro de Scorer que varía con la altura. Supogamos que la estratificación del estado de referencia es constante y que el viento horizontal de referencia tiene cizalladura:

$$\bar{u}(z) = \bar{u}_0 \left( 1 + \frac{z}{L} \right). \quad (5.11)$$

Entonces, la solución de la ecuación (5.4) con la condición cinemática de contorno (5.5) no es inmediata, debido a la dependencia del parámetro de Scorer con la altura. En el caso considerado aquí, en el que la estabilidad es constante y la cizalladura es lineal, se obtiene una ecuación diferencial cuyas soluciones son funciones de Bessel modificadas de primera especie con argumento imaginario [Wurtele et al., 1987]. La solución a (5.4) con la condición cinemática de contorno (5.5) es [Smith, 1979]:

$$w'(x, z) = 2\Re \int_0^\infty ik\bar{u}_0\hat{h}(k) \frac{\hat{w}(k, z)}{\hat{w}(k, 0)} e^{ikx} dk, \quad (5.12)$$

donde  $\hat{w}(k, x)$  debe satisfacer la ecuación (5.4). En el caso de ondas atrapadas, estamos interesados en soluciones que tiendan a cero para  $z$  grande, y que sean no nulas para  $x$  grande. Teniendo en cuenta el Lema Riemann-Lebesgue, la integral (5.12) tiende a cero para  $x$  grandes si el integrando es regular, es decir, no tiene singularidades. Sin embargo, si existen valores de  $k$  para los que  $\hat{w}(k, 0) = 0$ , la integral (5.12) puede no tender a cero para  $x$  grandes. En estos casos, la perturbación  $w'(x, z)$  puede propagarse indefinidamente en la horizontal, es decir, pueden haber ondas atrapadas. La integral (5.12) se aproxima con el método de Laplace, que permite encontrar expresiones para la velocidad vertical  $w'(x, z)$  corriente abajo de la montaña.

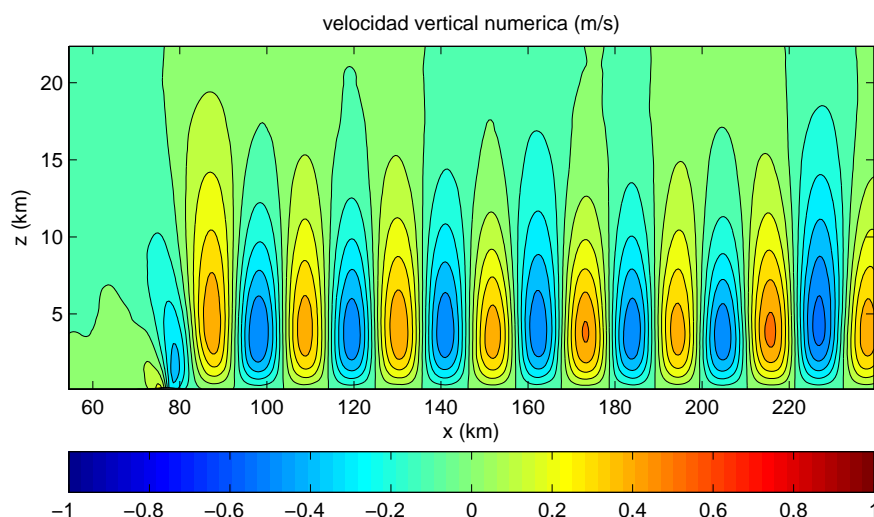


Figura 5.5: Ondas atrapadas a sotavento, test I. Velocidad vertical para  $t = 20000$  s. Intervalo de contorno de  $0,1 \text{ m s}^{-1}$ .

En el caso aquí considerado, el número de soluciones a  $\hat{w}(k, 0) = 0$ , será tanto mayor cuanto menor sea la cizalladura horizontal, es decir, cuanto mayor sea el parámetro  $L$  de la ecuación (5.11) [Wurtele et al., 1987]. Cada solución  $k_j$  de  $\hat{w}(k_j, 0) = 0$  constituye un modo libre  $w'_j(x, z)$  que se propaga horizontalmente de forma indefinida. La suma de estos modos es la solución para  $w'(x, z)$  corriente abajo lejos de la montaña.

Para comprobar que el modelo numérico puede representar adecuadamente este tipo de soluciones, se han realizado dos test. Usamos configuraciones adecuadas para poder comparar nuestros resultados con test publicados en la bibliografía. Así, los

parámetros indicados en la tabla 5.2, corresponden a los test I y II de Wurtele et al. [1987].

Ambos test consisten en un flujo de estabilidad constante, con una frecuencia de Brunt-Väisälä de  $0,01 s^{-1}$ , sobre una montaña de Agnesi de ancho  $2500 m$  y altura máxima de  $100 m$ . La diferencia entre los dos test está en la cizalladura del viento. En el primer test  $L = 2830 m$ , mientras que en el segundo la cizalladura es menor, con  $L = 4000 m$ .

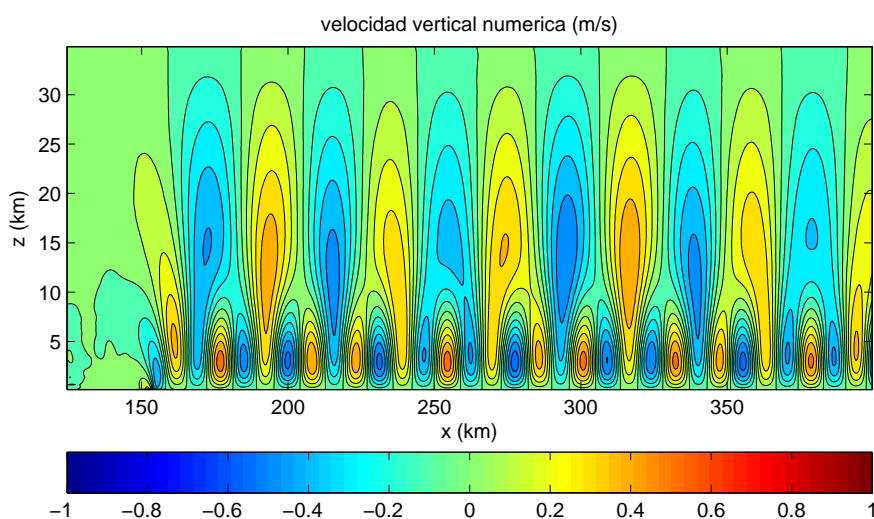


Figura 5.6: Ondas atrapadas a sotavento, test II. Velocidad vertical para  $t = 38000 s$ . Intervalo de contorno de  $0,1 ms^{-1}$ .

Como se ha indicado, el número de modos libres depende del número de ceros de la ecuación  $\hat{w}(k, 0) = 0$ , siendo  $\hat{w}(k, z)$  solución de la ecuación de estructura (5.4). Como ya hemos comentado,  $\hat{w}(k, z)$  son funciones de Bessel modificadas de primera especie con argumento imaginario, y el número de ceros de  $\hat{w}(k, 0) = 0$  es mayor cuanto menor sea la cizalladura [Wurtele et al., 1987]. En el test I hay un modo libre que contribuye a la solución, mientras que en el test II, con menor cizalladura, son dos los modos libres, como se puede apreciar en las figuras 5.5 y 5.6.

En el test I, las ondas atrapadas de la figura 5.5 obtenidas con el modelo numérico, tienen una longitud de onda de  $22,0 km$  aproximadamente, siendo de  $20,3 km$  en el análisis lineal [Wurtele et al., 1987]. En el test II, las ondas atrapadas obtenidas

con el modelo numérico tienen dos contribuciones con longitudes de onda de aproximadamente  $16,0\text{ km}$  y  $40,0\text{ km}$ , mientras que las del análisis lineal son de  $15,2\text{ km}$  y  $35,9\text{ km}$  respectivamente [Wurtele et al., 1987]. En ambos casos, el modelo numérico es capaz de reproducir las ondas atrapadas con el número de modos libres correcto y con longitudes de onda algo mayores a las que resultan del análisis lineal.

### 5.3. Test de Baldauf y Brdar

En un trabajo recientemente publicado, se describen soluciones lineales analíticas de las ecuaciones de Euler, aplicadas a ondas en un canal bidimensional [Baldauf y Brdar, 2013]. El hecho de que sean soluciones analíticas de las ecuaciones de Euler, y no de ecuaciones aproximadas, permite comparar con un alto grado de exactitud estas soluciones con las soluciones numéricas del modelo. Baldauf y Brdar consideran una atmósfera isoterma en equilibrio hidrostático con velocidad constante, en un canal bidimensional de longitud y altura dadas, con condiciones de contorno periódicas en la dirección horizontal. A esta atmósfera se le añade una pequeña perturbación que produce ondas gravitatorias y acústicas, y se calcula su evolución usando las ecuaciones de Euler lineales. Al ser la atmósfera de referencia isoterma con temperatura  $T_0$ , la frecuencia de Brünt-Väisälä es constante, así como la velocidad de las ondas acústicas:

$$N = \frac{g}{\sqrt{C_p T_0}}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{C_p}{C_v} RT_0}.$$

Baldauf y Brdar aplican la transformación de Bretherton [1966] a las ecuaciones de Euler. La solución de las ecuaciones lineales resultantes se encuentra aplicando, en primer lugar, la transformada de Fourier a las dimensiones espaciales horizontal y vertical (transformando las derivadas parciales espaciales en multiplicaciones por números de onda), y en segundo lugar, utilizando la transformación de Laplace para la integración temporal (transformando las derivadas parciales temporales en multiplicaciones



por frecuencias más un término que contiene el estado inicial). De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en espacio y tiempo, se transforma en un sistema algebraico que se puede resolver siempre y cuando las condiciones iniciales y de contorno sean conocidas.

El proceso de encontrar la solución analítica es complejo desde el punto de vista algebraico, y no lo incluimos aquí por ser demasiado extenso. No obstante, sí hemos creído oportuno describir el planteamiento del problema y su solución.

Como se ha dicho, el estado de referencia es isoterma con temperatura  $T_0$  constante y en equilibrio hidrostático, de manera que la presión es:

$$p_0(z) = p_s e^{-\delta z}, \text{ con } \delta = \frac{g}{RT_0}.$$

Cada variable  $\phi(x, z, t)$ , se expresa como suma de un término de referencia que solamente depende de la altura  $\phi_0(z)$ , y una perturbación  $\phi'(x, z, t)$ :

$$\phi(x, z, t) = \phi_0(z) + \phi'(x, z, t).$$

La transformación de Bretherton se aplica a las perturbaciones, de manera que:

$$\phi'(x, z, t) = e^{+\alpha z} \phi_b(x, z, t),$$

donde  $\alpha = +\delta/2$  para las componentes de la velocidad y la temperatura, y  $\alpha = -\delta/2$  para la presión y la densidad. Las ecuaciones de Euler lineales para las perturbaciones  $\phi_b$  son:

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_b}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_b}{\partial x} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_b}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\delta}{2} \right) p_b - \frac{g}{\rho_s} \rho_b \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho_b}{\partial x} - \delta \rho_s w_b = -\rho_s \frac{\partial u_b}{\partial x} - \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\delta}{2} \right) w_b \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial p_b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p_b}{\partial x} - \delta p_s w_b = c_s^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho_b - c_s^2 \delta \rho_s w_b. \quad (5.16)$$

A través de la ecuación de estado se obtiene una relación entre  $T_b$ ,  $\rho_b$ , y  $p_b$ :

$$\frac{T_b}{T_0} = \frac{\rho_b}{\rho_s} - \frac{p_b}{p_s}. \quad (5.17)$$

Se trata de resolver las ecuaciones en derivadas parciales (5.13) a (5.16), junto con la relación (5.17) y las condiciones iniciales y de contorno. Las condiciones de contorno consisten en que la velocidad vertical sea cero en los límites superior e inferior, es decir,  $w_p(x, 0, t) = w_p(x, H, t) = 0$ , donde  $H$  es la altura del canal. Por otra parte, las condiciones iniciales se escogen arbitrariamente según el test que se quiera realizar. Para encontrar la solución analítica, las perturbaciones  $\phi_b(x, z, t)$  se expresan en función de los coeficientes  $\hat{\phi}_b(k_x, k_z, t)$  de las siguientes series de Fourier:

$$\phi_b(x, z, t) = \sum_{k_x \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}} \sum_{k_z \in \frac{\pi}{H}\mathbb{Z}} \hat{\phi}_b(k_x, k_z, t) e^{i(k_x x + k_z z)}, \quad (5.18)$$

donde  $L$  es la longitud del canal. Las condiciones de contorno para la velocidad vertical en términos de los coeficientes de Fourier  $\hat{w}_b$  resultan ser simplemente:

$$\hat{w}_b(k_x, -k_z, t) = -\hat{w}_b(k_x, k_z, t). \quad (5.19)$$

La solución de las ecuaciones (5.13) a (5.16) para  $t \geq 0$ , con las condiciones de contorno (5.19), expresada en función de los coeficientes de las series de Fourier (5.18), resulta ser:

$$\hat{u}_b(k_x, k_z, t) = ik_x \left( g - c_s^2 \left( ik_z + \frac{\delta}{2} \right) \right) g \frac{\hat{\rho}_b(k_x, k_z, 0)}{\rho_s} L_0(t) \quad (5.20)$$

$$\hat{w}_b(k_x, k_z, t) = -c_s^2 k_x^2 g \frac{\hat{\rho}_b(k_x, k_z, 0)}{\rho_s} L_0(t) - g \frac{\hat{\rho}_b(k_x, k_z, 0)}{\rho_s} L_2(t) \quad (5.21)$$

$$\hat{\rho}_b(k_x, k_z, t) = \left( p_l + g \left( ik_z - \frac{\delta}{2} \right) \right) \hat{\rho}_b(k_x, k_z, 0) L_1(t) + \hat{\rho}_b(k_x, k_z, 0) L_3(t) \quad (5.22)$$

$$\hat{p}_b(k_x, k_z, t) = - \left( g - c_s^2 \left( ik_z + \frac{\delta}{2} \right) \right) g \hat{\rho}_b(k_x, k_z, 0) L_1(t), \quad (5.23)$$

donde  $\hat{\rho}_b(k_x, k_z, 0)$  son los coeficientes de Fourier de la perturbación de la densidad en el instante inicial, y las funciones  $L_p(t)$  son las transformadas de Laplace de  $l_p(s)$ :

$$l_p(s) = \frac{s^p}{(s^2 + \alpha^2)(s^2 + \beta^2)}, \quad (5.24)$$

donde  $\alpha^2$  y  $\beta^2$  son las raíces del polinomio  $s^4 + p_l s^2 + q_l$ , siendo  $p_l = c_s^2 (k_x^2 + k_z^2 + \delta^2/2)$  y  $q_l = g k_x^2 (c_s^2 \delta - g)$ . Las transformadas de Laplace de las funciones (5.24) para  $p = 0, 1, 2, 3$  son:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t - \frac{1}{\beta} \sin \beta t \right) \\ L_1(t) &= \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} (\cos \alpha t - \cos \beta t) \\ L_2(t) &= \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} (-\alpha \sin \alpha t + \beta \sin \beta t) \\ L_3(t) &= \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} (-\alpha^2 \cos \alpha t + \beta^2 \cos \beta t). \end{aligned}$$

La solución analítica lineal dada por los coeficientes de Fourier (5.20) a (5.23), es válida solamente en el caso de que las perturbaciones iniciales de la velocidad y de la presión sean nulas. Por esta razón, las soluciones vienen dadas exclusivamente en función de la perturbación inicial de la densidad  $\hat{\rho}_b(k_x, k_z, 0)$ .

Hasta aquí la descripción de la solución analítica lineal de las ecuaciones de Euler, tal como está expuesta en [Baldauf y Brdar, 2013]. A continuación, se usa esta solución lineal para compararla con la solución numérica proporcionada por el modelo descrito en esta tesis. La condición inicial es la misma que la usada en [Baldauf y Brdar, 2013] para evaluar, en ese caso, el modelo no hidrostático COSMO [Baldauf et al., 2011]. Consiste en una burbuja cálida similar al test propuesto por [Skamarock y Klemp,

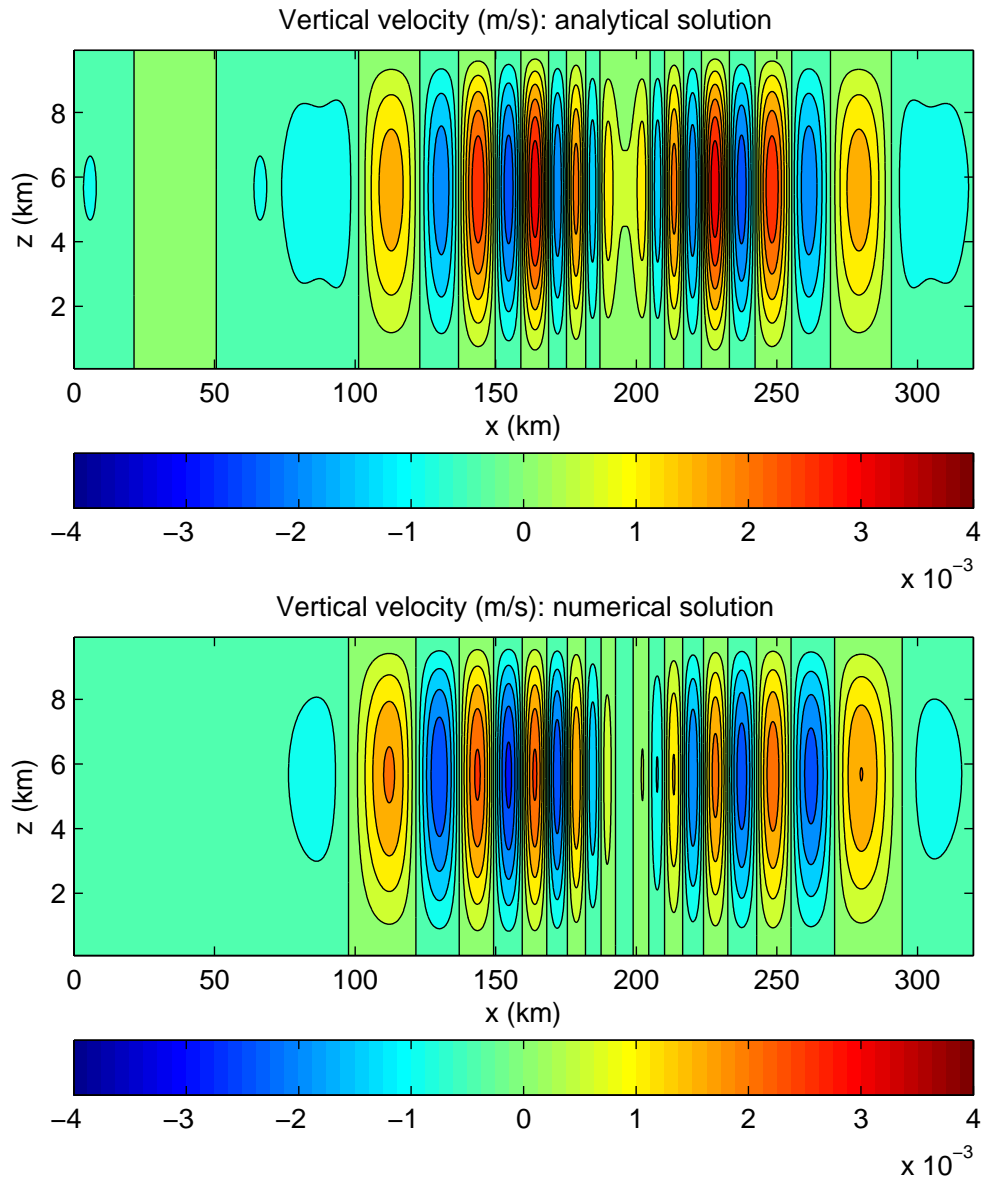


Figura 5.7: Velocidad vertical en el instante  $t = 1800 s$  para el test de Baldauf y Brdar. El paso de tiempo es  $\Delta t = 3,125 s$ , la resolución horizontal  $\Delta x = 156,25 m$  y la resolución vertical  $\Delta z = \Delta x/2$ .

$\Delta x(m)$	$\Delta t(s)$	$L_2 (\times 10^5)$	$L_\infty (\times 10^5)$
2500.00	50.000	80.7	370.5
1250.00	25.000	55.8	316.8
625.00	12.500	39.2	222.5
312.50	6.250	31.2	161.2
156.25	3.125	28.0	120.6

Tabla 5.3: Error cuadrático medio  $L_2$  y error máximo  $L_\infty$  para en la velocidad vertical en el test de Baldauf y Brdar. La configuración del test es con  $\bar{T} = 300 K$ ,  $U = 20 ms^{-1}$  y  $\epsilon = 0,07$ . Se realizan varios experimentos con diferentes resoluciones horizontales y pasos de tiempo. La resolución vertical es  $\Delta z = \Delta z/2$  en todos los casos. Los logaritmos de los errores son lineales respecto de los logaritmos de la resoluciones espacial y temporal, con coeficientes de correlación de 0,988 para  $L_\infty$  y 0,959 para  $L_2$ . Las pendientes u órdenes de convergencia son de 0,42 para  $L_\infty$  y 0,39 para  $L_2$ .

1994]. La temperatura inicial es:

$$T(x, z, 0) = T_0 + e^{\frac{g}{2RT_0}} \cdot \Delta T \cdot e^{-\frac{(x-x_c)^2}{d^2}} \cdot \sin \pi \frac{z}{H},$$

donde la amplitud de la perturbación es  $\Delta T = 0,01 K$ , el radio  $d = 5000 m$  y la posición  $x_c = 160 km$ . El tope del modelo se sitúa en  $H = 10 km$  y el canal tiene una longitud de  $L = 320 km$ . La temperatura de fondo es  $T_0 = 250 K$  y la presión en superficie  $p_s = 1000 hPa$ . La velocidad horizontal inicial es constante,  $u_0 = 20 m/s$ . En la figura 5.7 se muestra la solución lineal y la numérica para la velocidad vertical, confirmándose un buen ajuste entre ambas soluciones en todo el dominio espacial. El mismo test se ha realizado para resoluciones más bajas, manteniéndose constante la razón entre el paso de tiempo y la resolución espacial. A partir de los resultados dados en la tabla 5.3, se observa que la solución numérica converge hacia la solución lineal analítica.

Con la ayuda de este test vamos a evaluar ahora distintas fuentes de error del modelo, concretamente tres: la diferencia entre la temperatura  $T_0$  y la temperatura de referencia del sistema lineal semi-implícito  $\bar{T}$ ; la advección; y el factor semi-implícito  $\epsilon$ . Estas fuentes de error son algunas de las que están presentes en los núcleos dinámicos de los modelos espectrales semi-implícitos. Realizamos el experimento con todas las fuentes de error activadas ( $\bar{T} = 300$ ,  $u_0 = 20 ms^{-1}$  y  $\epsilon = 0,07$ ), con todas desactivadas ( $\bar{T} = 250 K$ ,  $u_0 = 0$  y  $\epsilon = 0$ ) y con cada una de las fuentes de error activadas separadamente.

$\bar{T} (K)$	$u (ms^{-1})$	$\epsilon$	$L_2 (\times 10^5)$	$L_\infty (\times 10^5)$
300	20	0.07	28.0	120.6
250	0	0	25.0	78.7
300	0	0	25.6	75.7
250	20	0	25.3	91.4
250	0	0.07	27.4	100.7

Tabla 5.4: Error cuadrático medio  $L_2$  y error máximo  $L_\infty$  para en la velocidad vertical en el test de Baldauf y Brdar. Los test están configurados con diferentes valores de la temperatura de referencia, temperatura de fondo, velocidad horizontal de fondo y filtro de Asselin. La resolución horizontal es de  $\Delta x = 156,25 m$  y el paso de tiempo es  $\Delta t = 3,125 s$  en todos los casos.

Los resultados, dados en la tabla 5.4, revelan que, para esta configuración, el factor semi-implícito ( $\epsilon = 0,07$ ) es la mayor fuente de error.

Finalmente, evaluamos la convergencia del modelo hacia la solución analítica a medida que reducimos el paso de tiempo. Para ello comparamos la solución analítica del problema con tres soluciones numéricas obtenidas con distintos pasos de tiempo ( $\Delta t = 12,5 s$ ,  $\Delta t = 2,5 s$  y  $\Delta t = 0,5 s$ ), pero con la misma resolución espacial ( $\Delta x = 625,0 m$  y  $\Delta z = \Delta x/2$ ). En los tres casos,  $\bar{T} = 300 K$ ,  $u_0 = 0$  y  $\epsilon = 0,07$ . En la figura 5.8(a), se muestra la velocidad vertical analítica y numérica para  $z = 5000 m$  y  $t = 1800 s$  para todo el dominio horizontal. En 5.8(b) se muestra, para el punto  $z = 5000 m$  y  $x = 200 km$ , la evolución temporal de la velocidad vertical desde el instante inicial hasta  $t = 1800 s$ . La convergencia hacia la solución analítica a medida que se reduce el paso de tiempo es clara.

El espectro de frecuencia de la evolución temporal, mostrado en la figura 5.8(c), presenta dos frecuencias dominantes, con períodos aproximadamente iguales a  $500 s$  y  $60 s$ . La componente de frecuencia alta de la solución sólo se reproduce bien en el experimento con menor paso de tiempo ( $\Delta t = 0,5 s$ ), mientras que la componente de frecuencia baja se reproduce en todas las soluciones, siendo el error mayor cuanto mayor es el paso de tiempo.

En conclusión, a partir de este test, que permite comparar soluciones numéricas y analíticas en el caso lineal, se deduce que el modelo presentado en esta tesis puede

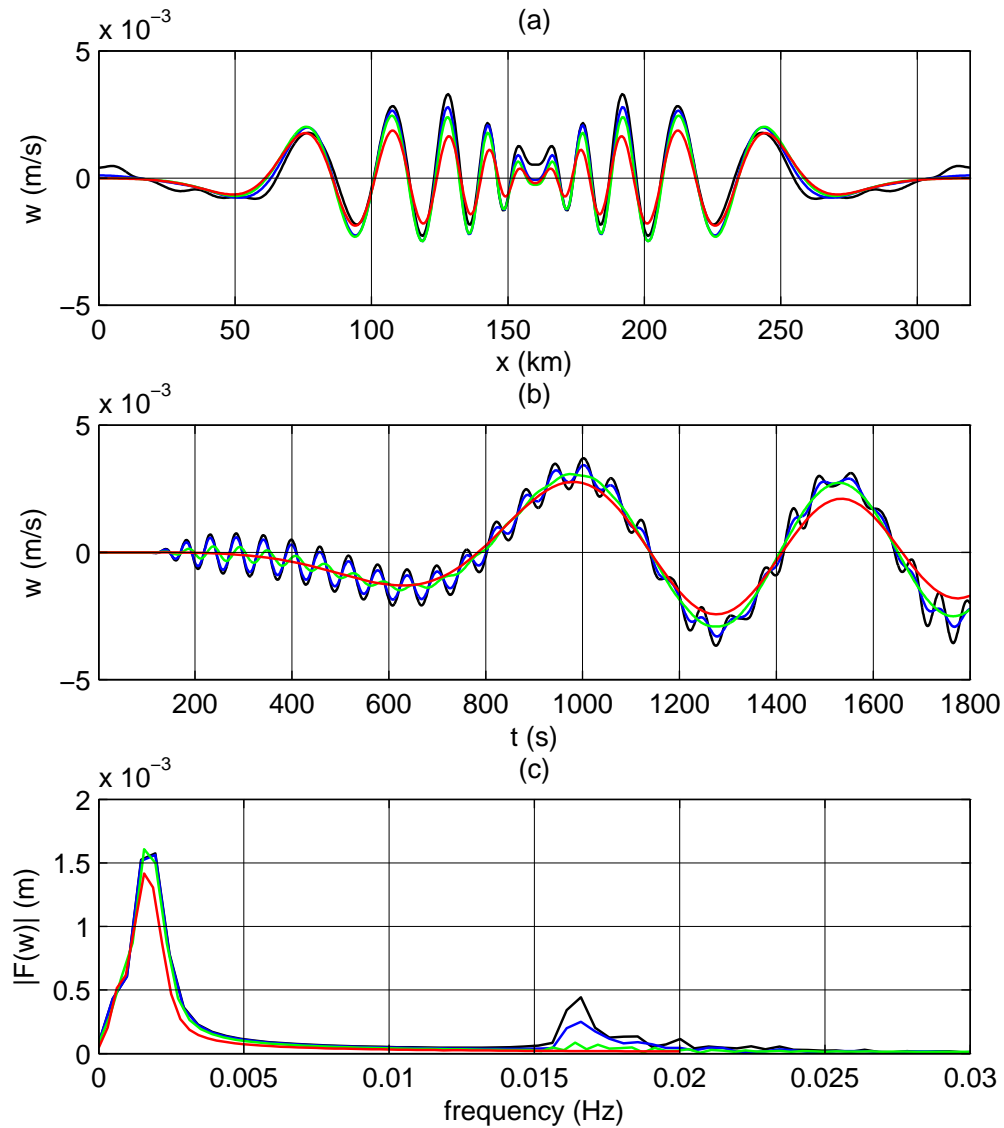


Figura 5.8: Velocidad vertical de la solución analítica lineal (línea en negro) y tres experimentos numéricos con la misma resolución espacial ( $\Delta x = 625,0 m$  y  $\Delta z = \Delta x/2$ ) y pasos de tiempo diferentes ( $\Delta$  igual a  $12,5 s$ ,  $2,5 s$  y  $0,5 s$ , en rojo, verde y azul respectivamente). Los test se realizan sin velocidad horizontal de fondo, con el factor semi-implícito  $\epsilon = 0,07$  y  $\bar{T} = 300 K$ . (a) velocidad vertical en el instante  $t = 1800 s$  y  $z = 5000 m$ . (b) velocidad vertical en la posición  $x = 200 km$  and  $z = 5000 m$ . (c) espectro de frecuencia de (b).

reproducir flujos no hidrostáticos de pequeña escala con precisión, aunque queda de manifiesto que el esquema de integración semi-implícito, que es solamente de primer orden, es una relevante fuente de error.

#### 5.4. Test con difusión: burbuja fría y cálida

En este apartado se exponen los resultados de dos test altamente no lineales. En el primero, una burbuja fría se desploma, acelerándose e impactando contra la superficie, tras lo cual se forman una serie de vórtices [Straka et al., 1993]. En el segundo de ellos, una burbuja cálida asciende en un entorno relativamente más frío, generándose vórtices a ambos lados de ésta [Janjic et al., 2001].

En estos test es necesario usar un término de difusión, debido a que se forman gradientes muy intensos en el campo de temperatura potencial. Se usa difusión lineal, es decir, los coeficientes de los términos de difusión son constantes. En el cálculo de la difusión, se considera de forma implícita en el operador derivada vertical, que las primeras derivadas de la temperatura, presión y velocidad horizontal son cero en los límites superior e inferior del dominio. Además, el esquema temporal usado es implícito, asegurando así su estabilidad para cualquier valor del paso de tiempo. La difusión se realiza en el espacio espectral, después de resolver el sistema lineal semi-implícito.

En el caso de la burbuja fría, la configuración del experimento es similar a la reproducida en [Straka et al., 1993], con un coeficiente de difusión de  $75 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Inicialmente, la atmósfera es neutral, con una temperatura potencial de  $\theta_0 = 300 \text{ K}$  y una perturbación inicial en la temperatura de:

$$T'(x, z) = \delta T \cos^2 \left( \frac{\pi d}{2} \right),$$

donde:

$$d(x, z) \equiv \sqrt{\left( \frac{x - x_c}{x_r} \right)^2 + \left( \frac{z - z_c}{z_r} \right)^2} < 1,$$



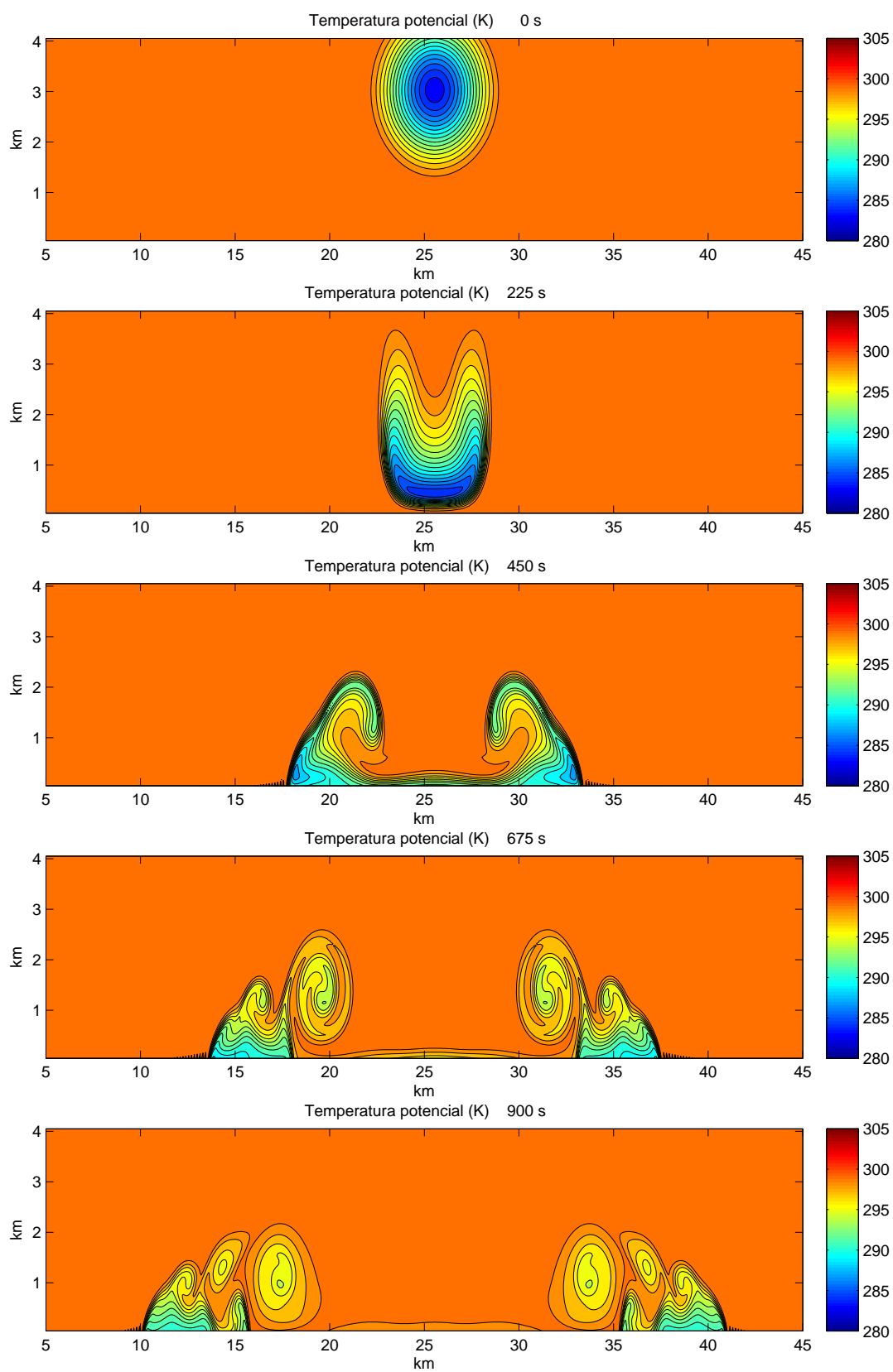


Figura 5.9: Test de burbuja fría. Evolución de la temperatura potencial desde el instante inicial hasta  $t = 900$  s. El contorno es a intervalos de  $1,0$  K.

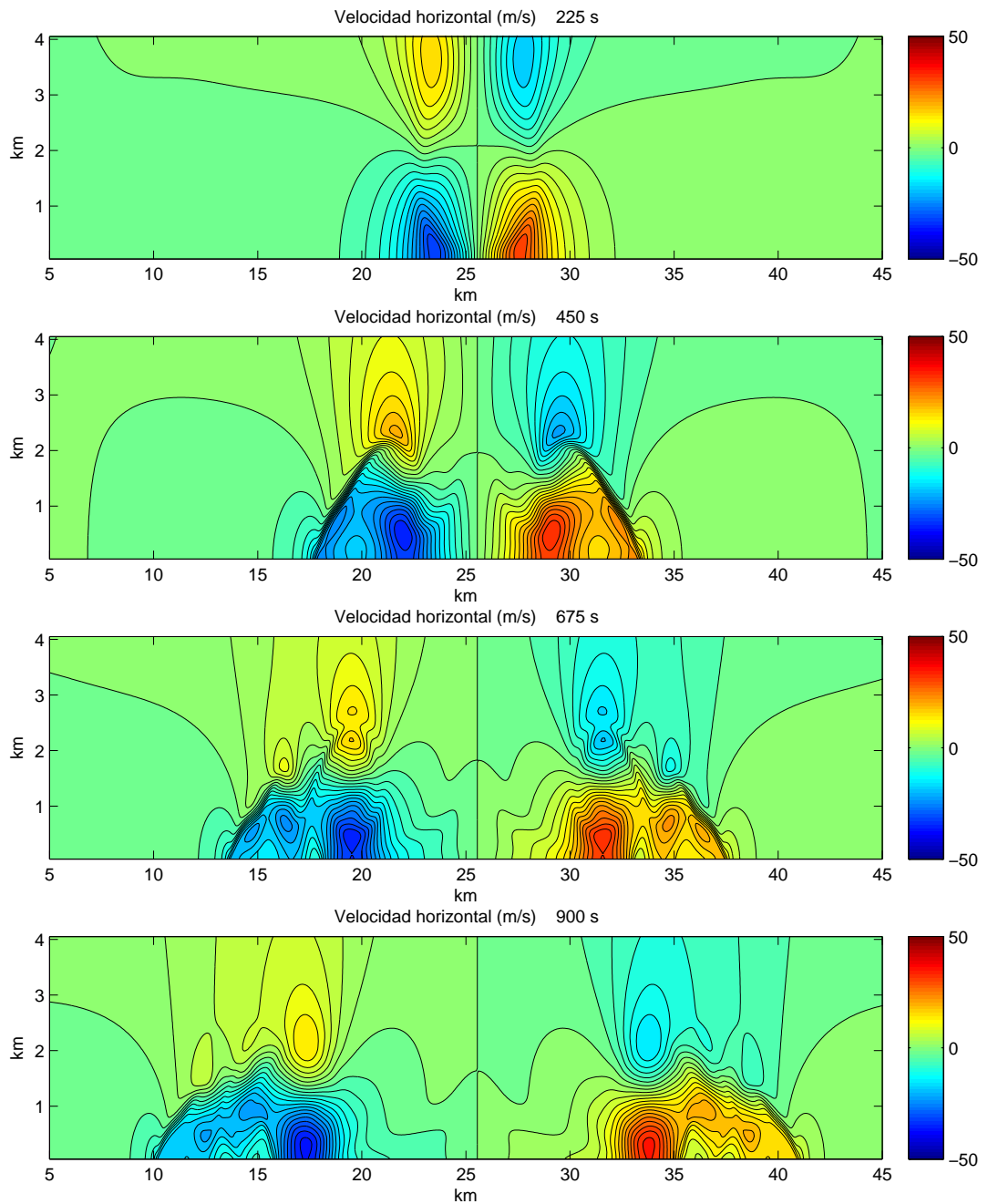


Figura 5.10: Test de burbuja fría. Evolución de la velocidad horizontal desde el instante  $t = 225$  s hasta  $t = 900$  s. Se parte de un estado inicial en reposo. El contorno es a intervalos de  $2,5$  m/s.

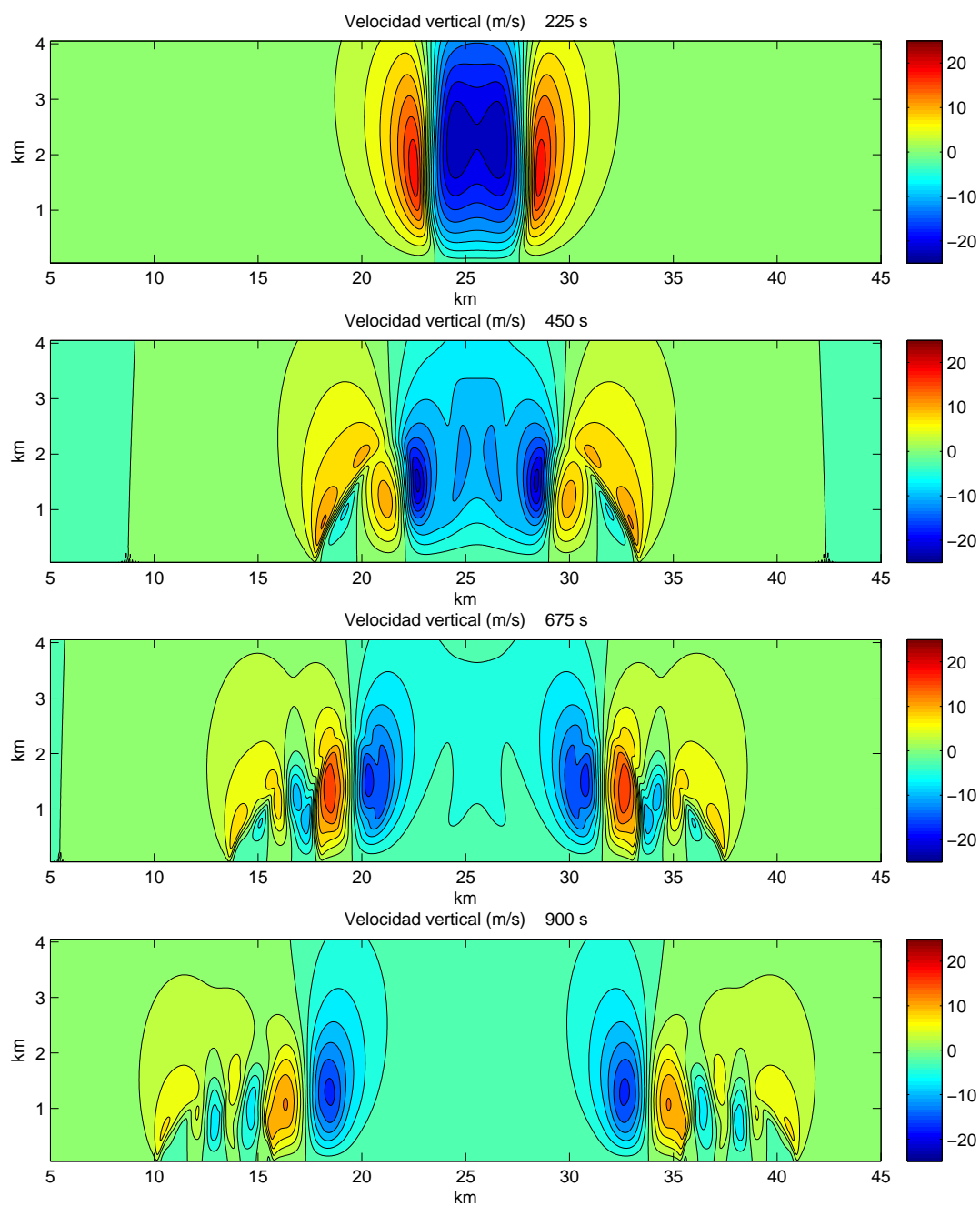


Figura 5.11: Test de burbuja fría. Evolución de la velocidad vertical desde el instante  $t = 225 s$  hasta  $t = 900 s$ . Se parte de un estado inicial en reposo. El contorno es a intervalos de  $2,5 m/s$ .

y  $\delta T = 15 K$ ,  $x_c = 0 m$ ,  $x_r = 4000 m$ ,  $z_c = 3000 m$  y  $z_r = 2000 m$ . El dominio es de  $51,2 km$  en la horizontal y  $6,4 km$  en la vertical. El centro de la perturbación inicial está situado en el centro del dominio horizontal. Las resoluciones horizontal y vertical son de  $50 m$  y el paso de tiempo de  $0,75 s$ .

En la figura 5.9 se dibuja la temperatura potencial desde el instante inicial  $t = 0 s$  hasta el instante  $t = 900 s$ , a intervalos de  $225 s$ . Asimismo, en las figuras 5.10 y 5.11, se dibuja la velocidad vertical y horizontal desde el instante inicial  $t = 225 s$  hasta el instante  $t = 900 s$ , a intervalos de  $225 s$ .

Se observa el desplome de la burbuja fría inicialmente en reposo, su aceleración al estar en un entorno relativamente más cálido y su impacto contra la superficie. A partir de ese momento, el aire frío se desplaza hacia izquierda y derecha de forma simétrica generándose vórtices. La temperatura potencial no se conserva a lo largo de las trayectorias debido al proceso de difusión. Las componentes horizontal y vertical de la velocidad tienen valores absolutos máximos del mismo orden de magnitud: en torno a  $36 m/s$  y  $15 m/s$  respectivamente. Esto confirma el hecho de que, en este test, los movimientos verticales y horizontales tienen escalas espaciales y temporales similares. Un modelo no hidrostático, del que se espera que represente bien los movimientos atmosféricos en los que la aceleración vertical es grande, debe ser capaz de simular bien este test. Al comparar los resultados de este modelo (dados en las figuras 5.9, 5.10 y 5.11) con los reproducidos en Straka et al. [1993], se observa un gran parecido, tanto en la forma de los vórtices generados, como en los valores de la temperatura potencial y velocidad horizontal y vertical.

El test de la burbuja cálida consiste en el caso inverso: una masa de aire cálido respecto de su entorno, se acelera en un movimiento ascendente debido a la fuerza de flotabilidad. En este movimiento, la burbuja cálida se deforma y se generan un par de vórtices simétricos a ambos lados de ésta. La configuración del experimento es similar a los referidos en Janjic et al. [2001] y Drogemeier [1985]. La burbuja cálida

se encuentra en un entorno de atmósfera con estratificación neutra, con temperatura potencial constante e igual a  $\bar{\theta} = 300 K$ . Sobre esta atmósfera Janjic et al. [2001] consideran una perturbación de la temperatura potencial igual a:

$$\theta(x, z) = \bar{\theta} + \delta\theta \cos^2\left(\frac{\pi d}{2}\right),$$

donde:

$$d(x, z) \equiv \sqrt{\left(\frac{x - x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{z_r}\right)^2} < 1,$$

siendo y  $\delta\theta = 6,6 K$ ,  $x_c = 0 m$ ,  $x_r = 2500 m$ ,  $z_c = 2750 m$  y  $z_r = 2500 m$ . El dominio es de  $25,6 km$  en la horizontal y  $13,6 km$  en la vertical. El centro de la perturbación inicial está situado en el centro del dominio horizontal. Las resoluciones horizontal y vertical son de  $50 m$  y el paso de tiempo de  $0,75 s$ . El coeficiente de difusión es igual a  $125 m^2 s^{-1}$ .

La evolución de la burbuja cálida está representada en la figura 5.12, donde se ha dibujado la temperatura potencial en varios instantes de tiempo, desde  $t = 150 s$  hasta  $t = 900 s$ , a intervalos de  $150 s$ . Se comprueba que estos resultados son similares a los representados en Janjic et al. [2001].

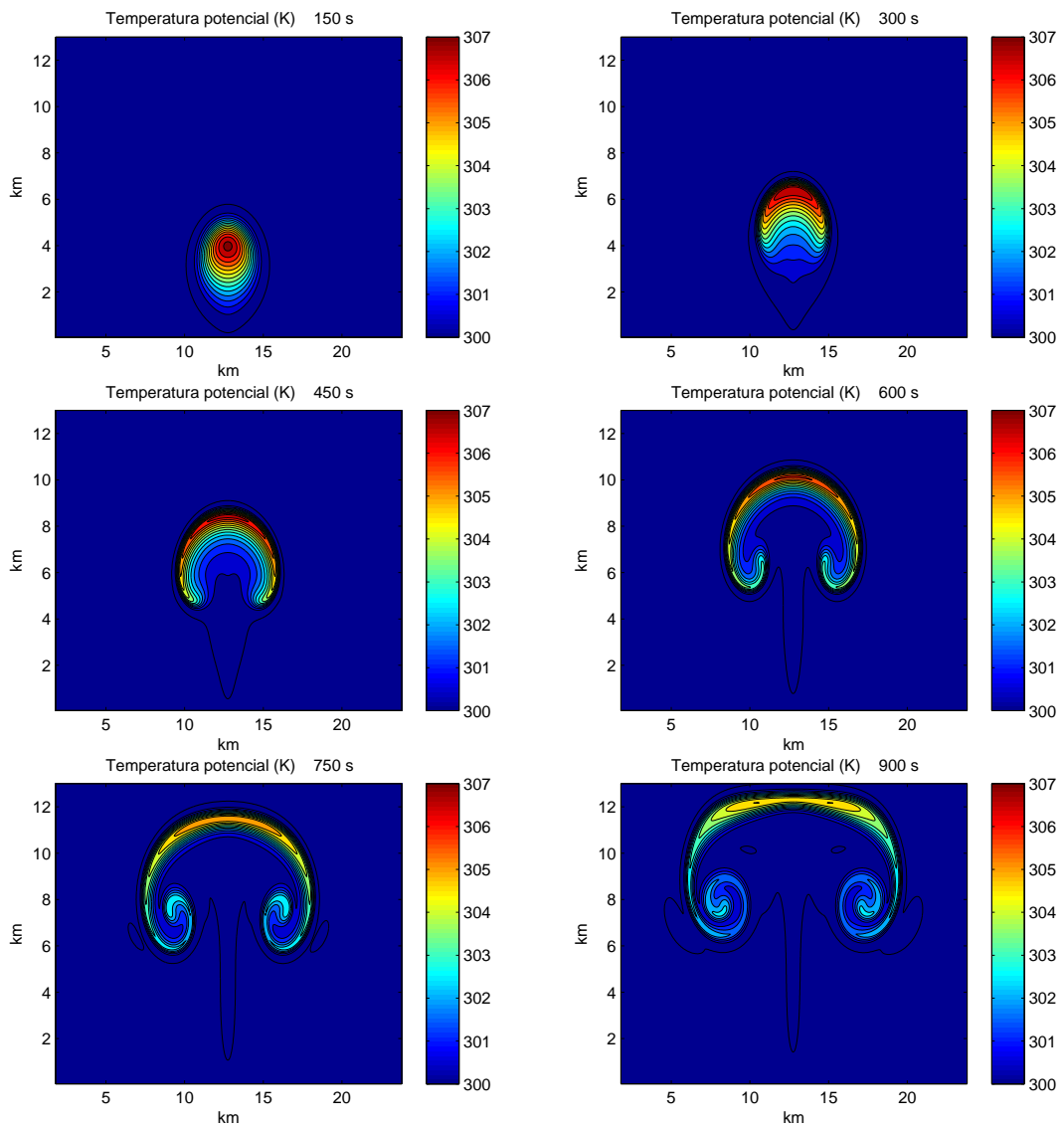


Figura 5.12: Test de burbuja cálida. Evolución de la temperatura potencial desde el instante  $t = 150$  s hasta  $t = 900$  s a intervalos de 150 s. El contorno es a intervalos de  $0,5$  K.



# Capítulo 6

## Test 3D

En este capítulo se prueba nuestro modelo con algunos de los test tridimensionales más conocidos. En el apartado 6.1 se expone el test de la *onda de Rossby-Haurwitz*. Este test proviene de la solución analítica de la ecuación barotrópica conocida como onda Rossby-Haurwitz. En el apartado 6.2 se expone el test de *inestabilidad baroclina de Jablonowski*. Este test tiene tres variantes. En la primera, se comprueba durante cuanto tiempo el modelo es capaz de mantener un estado inicial estacionario e inestable desde el punto de vista baroclino. En la segunda, se realiza el mismo test con la rejilla rotada, es decir, situando los polos geográficos en distintas posiciones respecto de los polos de la rejilla del modelo. En la tercera, se añade una perturbación al estado inicial, de manera que se genera una onda baroclina. En la sección 6.3 se estudia la generación de una onda de Rossby inducida por la presencia de una montaña. Por último, en el apartado 6.4 se describen los resultados del test *climático de Held-Suárez*.

### 6.1. Onda de Rossby-Haurwitz

La onda de Rossby-Haurwitz es una solución analítica de la ecuación de vorticidad barotrópica sobre la esfera, consistente en una perturbación no estacionaria que se traslada en la dirección longitudinal conservando su forma [Haurwitz, 1940]. Se han hecho extensiones de esta onda al sistema de ecuaciones de aguas someras [Williamson



et al., 1992], y también al sistema de ecuaciones de Euler en una atmósfera barotrópica [Giraldo y Rosmond, 2004]. A pesar de no ser una solución analítica de las ecuaciones de aguas someras, ni de las ecuaciones de Euler, se ha usado mucho para test de modelos numéricos desde Phillips [1959].

Presentamos en esta sección la configuración del test de Rossby-Haurwitz tridimensional y los resultados obtenidos con el modelo numérico.

En este test la velocidad horizontal es un campo no divergente, dado por la función de corriente:

$$\psi(X, Y) = -a^2 M \sin Y + a^2 K \cos^n Y \sin Y \cos(nX), \quad (6.1)$$

donde  $X$  es la longitud,  $Y$  la latitud,  $a$  el radio de la Tierra y  $n$  es un número de onda. Para las simulaciones se ha tomado  $n = 4$ . Además:

$$M = K = \frac{u_0}{na},$$

con  $u_0 = 50m/s$ , de manera que  $M = K \approx 1,96 \times 10^{-6} s$ . Para flujos no divergentes barotrópicos, Haurwitz [1940] demuestra que la función de corriente (6.1) se traslada en la dirección zonal sin cambiar su forma, con una velocidad angular:

$$\omega = \frac{n(n+3)M - 2\Omega}{(n+1)(n+2)}, \quad (6.2)$$

siendo  $\Omega$  la velocidad angular de la Tierra. El signo de la velocidad angular (6.2) indica si la onda se desplaza hacia el Este o el Oeste. Con el valor de los parámetros definidos anteriormente, se obtiene una propagación de la onda hacia el Oeste, de aproximadamente  $15,2^\circ$  por día. A partir de la función de corriente (6.1) se obtienen las siguientes expresiones para las componentes de la velocidad horizontal en las direcciones

longitudinal y latitudinal:

$$u(X, Y, Z) = aM \cos Y + aK \cos^{n-1} Y \cos(nX)(n \sin^2 Y - \cos^2 Y) \quad (6.3)$$

$$v(X, Y, Z) = -aKn \cos^{n-1} Y \sin Y \sin(nX). \quad (6.4)$$

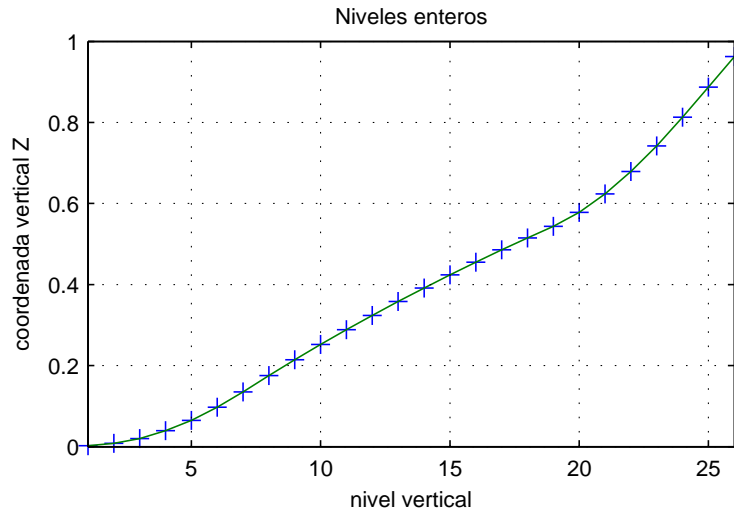


Figura 6.1: Disposición de los niveles verticales en el test onda de Rossby-Haurwitz.

Se observa en (6.3) y (6.4) que el campo de velocidad no depende de la coordenada vertical. La velocidad vertical inicial es cero, lo cual es compatible con el hecho de que el flujo horizontal es no divergente. La temperatura disminuye linealmente con la altura, con una variación  $\Gamma = 0,0065 \text{ K m}^{-1}$ , similar en orden de magnitud al gradiente adiabático húmedo en la atmósfera. Una vez está definida la temperatura, la presión se escoge de forma que la atmósfera esté inicialmente en equilibrio hidrostático y sea barotrópica, resultando la siguiente relación entre presión y temperatura:

$$T(p) = T_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\Gamma R_d}{g}}, \quad (6.5)$$

con  $p_0 = 995 \text{ hPa}$  y  $T_0 = 288 \text{ K}$ . La presión en superficie depende de la longitud y

latitud:

$$p_s(X, Y) = p_0 \left( 1 + \frac{\Gamma}{gT_0} \Phi(X, Y) \right)^{\frac{g}{\Gamma R_d}},$$

donde la función  $\Phi(X, Y)$  se define como:

$$\Phi(X, Y) = a^2 A(Y) + a^2 B(Y) + a^2 C(Y) \cos(nX) + a^2 D(Y) \cos(2nX),$$

siendo:

$$\begin{aligned} A(Y) &= \frac{M(2\Omega + M)}{2} \cos^2 Y \\ B(Y) &= \frac{K^2}{4} \cos^{2n-2} Y \left( (n+1) \cos^4 Y + (2n^2 - n - 2) \cos^2 Y - 2n^2 \right) \\ C(Y) &= \frac{2(\Omega + M)K}{(n+1)(n+2)} \cos^n Y \left( n^2 + 2n + 2 - (n+1)^2 \cos^2 Y \right) \\ D(Y) &= \frac{K^2}{4} \cos^{2n} Y \left( (n+1) \cos^2 Y - n - 2 \right). \end{aligned}$$

Considerando que la atmósfera está inicialmente en equilibrio hidrostático y que la temperatura es una función de la presión dada por (6.5), la presión en función de la altura es:

$$p(X, Y, z) = p_s(X, Y) \left( 1 - \frac{\Gamma z}{T_s(X, Y)} \right)^{\frac{g}{\Gamma R_d}},$$

donde la temperatura en superficie es:

$$T_s(X, Y) = T_0 \left( \frac{p_s(X, Y)}{p_0} \right)^{\frac{\Gamma R_d}{g}}.$$

Las ecuaciones anteriores (desde (6.3) en adelante), permiten configurar el estado inicial del modelo, es decir, calcular los valores en cada punto de rejilla de las variables de pronóstico: componentes de la velocidad contravariante, logaritmo de la temperatura

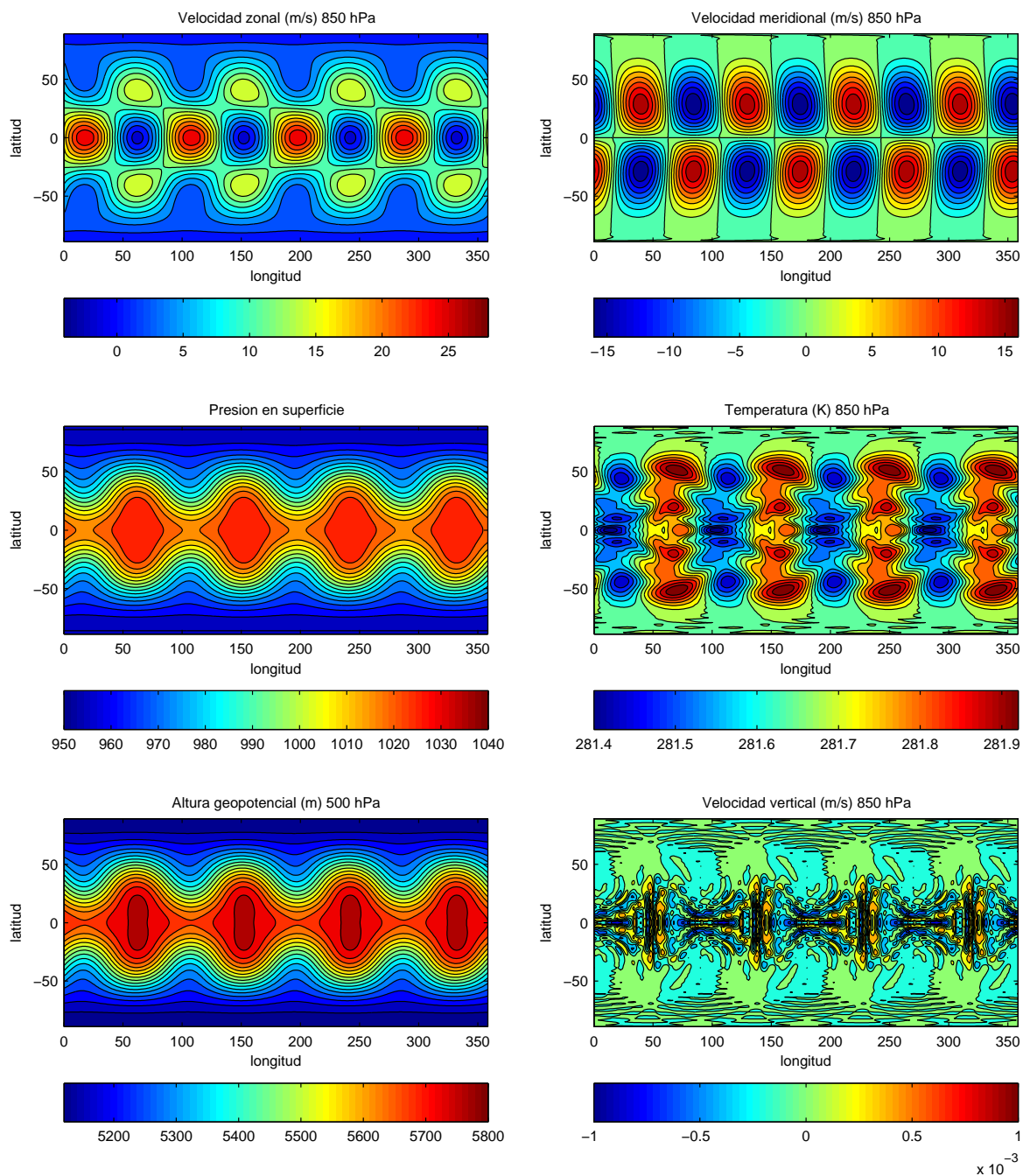


Figura 6.2: Test de onda de Rossby-Haurwitz simulado con 26 niveles verticales y resolución horizontal T85. Los campos representados son: velocidad horizontal zonal y meridional, velocidad vertical y temperatura en 850 hPa, presión en superficie y geopotencial en 500 hPa.

y logaritmo de la presión.

El test se ha realizado con resoluciones horizontales de T85 y T42, con 26 niveles verticales en ambos casos, obteniéndose resultados muy parecidos entre sí. Los niveles enteros del modelo, representados en la figura 6.1, están más concentrados cerca de la superficie y más espaciados cerca del tope atmosférico. En niveles intermedios están dispuestos de forma relativamente regular. Se ha usado la coordenada vertical Gal-Chen para el cálculo de la altura.

En las figuras 6.2 y 6.3 presentamos los resultados de la simulación para el día 15, a resoluciones de T85 y T42 respectivamente. Los campos representados son la velocidad horizontal, temperatura y velocidad vertical en  $850\text{ hPa}$ , el geopotencial en  $500\text{ hPa}$  y la presión en superficie. Se puede observar que los campos de velocidad horizontal en  $850\text{ hPa}$  y geopotencial en  $500\text{ hPa}$  son muy parecidos a los publicados en Jablonowski et al. [2008] y Ullrich y Jablonowski [2012].

Como el test consiste en un flujo casi barotrópico, la temperatura en niveles isobáricos es aproximadamente constante. Este campo de pequeña variación, que para el día 15 tiene un rango de  $0,55\text{ K}$  en la superficie de  $850\text{ hPa}$ , es muy similar a los publicados en [Jablonowski et al., 2008] y Ullrich y Jablonowski [2012]. El campo que más difiere entre los distintos modelos es la velocidad vertical, que tiene un rango de valores también muy pequeño, debido a la ausencia de movimientos verticales importantes en este test. El modelo hidrostático [Jablonowski et al., 2008] produce un campo de velocidad vertical más suave que los no hidrostáticos (MCORE en Ullrich y Jablonowski [2012] y el modelo aquí presentado).

## 6.2. Test de inestabilidad baroclina de Jablonowski

El test de inestabilidad baroclina de Jablonowski está descrito en los trabajos de Jablonowski y Williamson [2006] y Lauritzen et al. [2010]. Se basa en un estado atmosférico de referencia baroclino, que es estacionario respecto de las ecuaciones de Euler y que, por tanto, se mantiene constante en el tiempo. Debido a los errores de

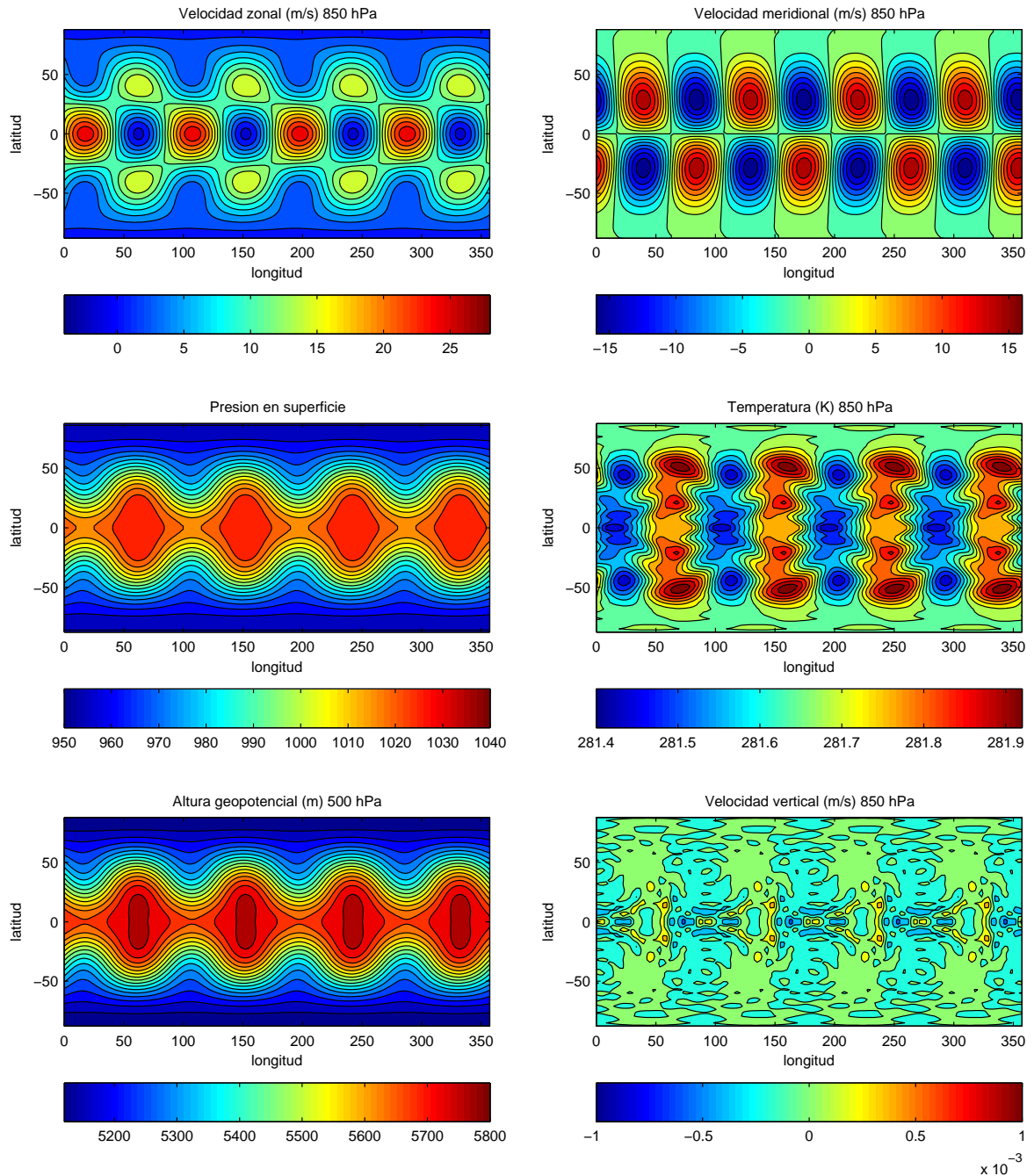


Figura 6.3: Test de onda de Rossby-Haurwitz simulado con 26 niveles verticales y resolución horizontal T42. Los campos representados son: velocidad horizontal zonal y meridional, velocidad vertical y temperatura en 850 hPa, presión en superficie y geopotencial en 500 hPa.

truncación en la discretización del modelo y a la inestabilidad baroclina del estado inicial, al cabo de un tiempo de integración, el estado atmosférico se aleja de su estado estacionario y se generan vórtices en forma de sistemas de altas y bajas presiones. Este test se ejecuta utilizando distintas configuraciones, como detallamos a continuación.

### 6.2.1. Estado estacionario

El estado inicial de referencia pretende asemejarse a la atmósfera real en algunos aspectos. En cuanto a la temperatura, tiene mínimos en las zonas polares y máximos en la zona ecuatorial, además de una inversión en la tropopausa. La velocidad es zonal, con máximos a unos  $12\text{ km}$  en latitudes medias, simulando el chorro polar en ambos hemisferios. El campo de presión y la orografía se ajustan de forma que el estado de referencia sea estacionario respecto de las ecuaciones de Euler.

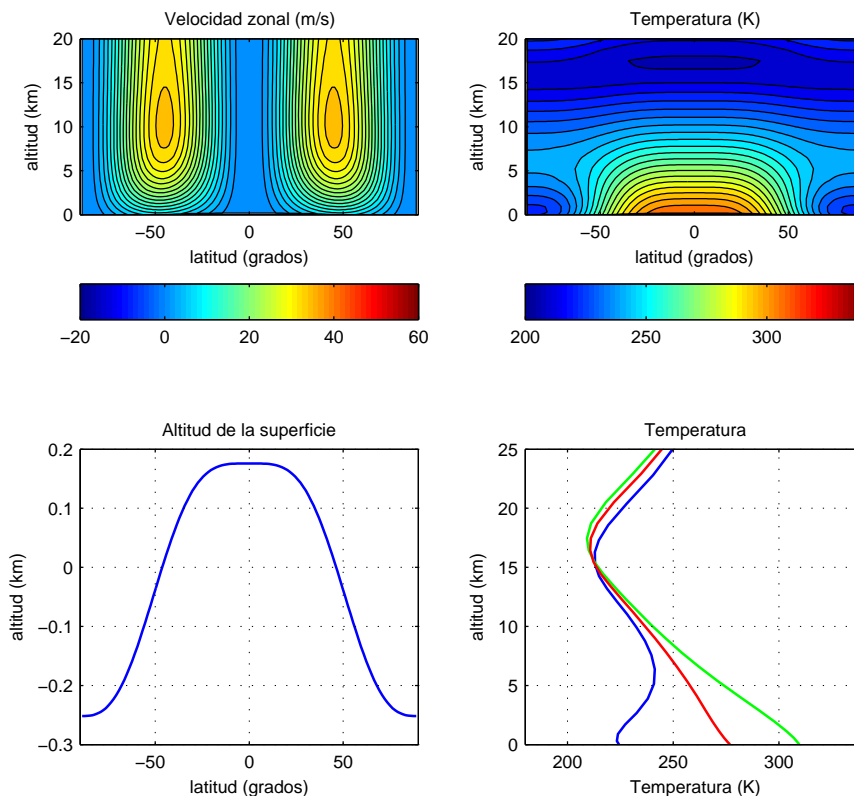


Figura 6.4: Estado inicial del test de inestabilidad baroclina. Se representa la velocidad zonal y temperatura en función de la latitud y la altitud. Los perfiles de temperatura (abajo a la derecha) corresponden a la zona polar (azul), latitudes medias (rojo) y Ecuador (verde).

El estado inicial se expresa usando la coordenada vertical híbrida basada en masa  $\eta$ , dada en la ecuación (3.4). Se define un nivel  $\eta_0 = 0,252$  y la variable auxiliar

$$\eta_v = (\eta - \eta_0) \frac{\pi}{2}.$$

La velocidad horizontal del estado inicial es:

$$u(X, Y, \eta) = u_0 \cos^{\frac{3}{2}} \eta_v \sin^2(2Y) \quad (6.6)$$

$$v(X, Y, \eta) = 0, \quad (6.7)$$

donde la velocidad zonal máxima  $u_0 = 35 \text{ m s}^{-1}$  es similar a la velocidad zonal media de los chorros troposféricos de latitudes medias. Además, la velocidad vertical inicial es cero. El flujo así definido es no divergente. La temperatura del estado inicial tiene dos contribuciones: la temperatura media en cada nivel  $\bar{T}(\eta)$ , y una perturbación  $T'(Y, \eta)$  que depende de la altitud y latitud. La temperatura media es:

$$\bar{T}(\eta) = \begin{cases} T_0 \eta^{\frac{R\Gamma}{g}} & \text{si } 1 \geq \eta \geq \eta_t \\ T_0 \eta^{\frac{R\Gamma}{g}} + \Delta T (\eta_t - \eta)^5 & \text{si } \eta_t \geq \eta \geq 0 \end{cases}, \quad (6.8)$$

donde el nivel de la tropopausa es  $\eta_t = 0,2$ , la temperatura en superficie es  $T_0 = 288 \text{ K}$ , la variación de la temperatura con la altura es  $\Gamma = 0,005 \text{ km}^{-1}$  y  $\Delta T = 4,8 \times 10^5 \text{ K}$ . La segunda contribución a la temperatura es:

$$T'(Y, \eta) = \frac{3\eta\pi u_0}{4R} \sin \eta_v \cos^{\frac{1}{2}} \eta_v \left( \left( -2 \sin^6 Y (\cos^2 Y + \frac{1}{3}) + \frac{10}{63} \right) 2u_0 \cos^{\frac{3}{2}} \eta_v + \left( \frac{8}{5} \cos^3 Y (\sin^2 Y + \frac{2}{3}) - \frac{\pi}{4} \right) a\Omega \right). \quad (6.9)$$

En la figura 6.4 están representados los campos de velocidad zonal y la tempe-



ratura en función de la latitud y altitud, observándose claramente las características principales de estos campos: máximo de viento cerca de la tropopausa en latitudes medias, y temperatura con valores mínimos en los polos y máximos en el Ecuador, y una inversión térmica al nivel de la tropopausa.

La presión en superficie es constante,  $p_s = 1000 \text{ hPa}$ . Finalmente, el geopotencial tiene, como la temperatura, dos contribuciones: el geopotencial medio en cada nivel y una perturbación que depende de la altitud y latitud, cuyas expresiones, bastante complejas, pueden encontrarse en Jablonowski y Williamson [2006].

Estas ecuaciones permiten calcular el estado inicial para un modelo que usa la coordenada vertical híbrida basada en masa [Simmons y Burridge, 1981]. Para modelos con coordenada vertical híbrida basada en altura, es necesario un cálculo adicional. El procedimiento para encontrar el estado inicial en un punto de rejilla de coordenadas  $(X, Y, Z)$  es, en primer lugar, obtener el geopotencial  $\phi$  del punto de rejilla con la definición de la coordenada vertical (4.10). A partir de este valor, se calcula  $\eta$  invirtiendo la ecuación que da el geopotencial en función de  $(X, Y, \eta)$  [Jablonowski y Williamson, 2006]. En segundo lugar, con el valor de  $\eta$  así obtenido, se calcula la presión con (3.4), la temperatura con (6.8) y (6.9) y la velocidad horizontal utilizando (6.6).

### 6.2.2. Caso rotado

Como se ha mencionado, el estado inicial propuesto y descrito en Jablonowski y Williamson [2006] es estacionario, es decir, los campos de temperatura, presión y velocidad se mantienen constantes en el tiempo, a pesar de depender de la latitud y de la coordenada vertical. Sin embargo, es un estado estacionario baroclínicamente inestable, y pequeñas perturbaciones a ese estado se amplifican hasta desarrollar, al cabo de un tiempo, ondas baroclinas. Si un modelo numérico se inicializa con este campo estacionario, debería a lo largo de la integración mantener el estado inicial sin cambios. Sin embargo, debido a los errores de truncación del modelo y a la inestabilidad baroclina, el estado inicial no se mantiene constante. Cuanto más tarda el modelo en

desarrollar vórtices, más exacta se considera la simulación, y evaluar esta exactitud es uno de los objetivos de este test.

Una variante muy interesante de este test es el test con la rejilla horizontal rotada [Lauritzen et al., 2010]. Se trata de mantener el estado inicial igual y rotar la rejilla horizontal del modelo, de manera que los polos Norte y Sur de la rejilla estén desplazados respecto de los polos Norte y Sur geográficos (o eje de rotación). El motivo de este test es claro: el hecho de que los polos de la rejilla coincidan con los polos geográficos, hace que el flujo dado en las ecuaciones (6.6) y (6.7) esté en la dirección de los paralelos de la rejilla. Al rotar la rejilla, el flujo cruza los paralelos de la rejilla y pasa por encima de sus polos. Además, los campos de temperatura, presión y velocidad dependen de las tres coordenadas (longitud, latitud y coordenada vertical), en lugar de depender sólo de la latitud y de la coordenada vertical. El test rotado permite evaluar la habilidad del modelo para mantener el estado estacionario con la rejilla rotada antes de generar ondas baroclinas.

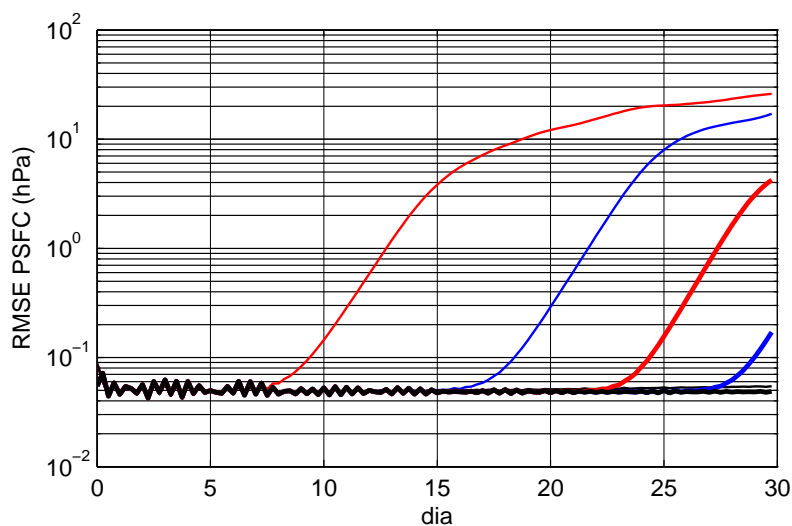


Figura 6.5: Error cuadrático medio de la presión en superficie del test de Jablonowski con ángulos de rotación de  $0^\circ$  (negro),  $45^\circ$  (rojo) y  $90^\circ$  (azul). En líneas gruesas, los errores correspondientes a la simulación T85, en finas las T42.

El test se ha repetido con tres ángulos de rotación diferentes,  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $90^\circ$ , con una configuración idéntica a la descrita en [Lauritzen et al., 2010]. Además, se han hecho las simulaciones con dos resoluciones horizontales diferentes, T42 y T85. Como se ha mencionado, al cabo de unos cuantos días de integración, debido a los errores de truncación del modelo y a la inestabilidad baroclina del estado inicial, se desarrollan ondas baroclina con sistemas de altas y bajas presiones en superficie.

En la figura 6.5 hemos representado la raíz cuadrada de los errores cuadráticos medios (RMSE) de la presión en superficie, inicialmente con un valor uniforme de  $p_s = 1000 \text{ hPa}$ . El error se mantiene durante unos días pequeño: por debajo de  $0,1 \text{ hPa}$ . Al cabo de un tiempo, que depende de la configuración del experimento, el error crece de forma exponencial durante unos días, reduciéndose finalmente su tasa de crecimiento. En la fase inicial, con RMSE por debajo de valor de  $0,1 \text{ hPa}$ , el modelo es capaz de mantener el estado inicial sin cambios significativos, mientras que en la fase de crecimiento exponencial, la inestabilidad baroclina claramente lo desvirtúa. Los errores se mantienen por debajo del umbral de  $0,5 \text{ hPa}$  durante más días para el modelo aquí presentado que para los modelos evaluados en Lauritzen et al. [2010], con la excepción de la versión euleriana del modelo CAM, que muestra resultados similares a los presentados aquí. De la figura 6.5 se desprende que el RMSE se mantiene por debajo de  $0,5 \text{ hPa}$  durante más de 30 días en el caso no rotado. Para el ángulo de rotación de  $90^\circ$ , el error se mantiene por debajo de  $0,5 \text{ hPa}$  durante 21 y 30 días para las resoluciones T42 y T85 respectivamente, siendo estos resultados mejores que los del modelo CAM euleriano (20 y 27 días para T42 y T85). Para el ángulo de rotación de  $45^\circ$ , el error se mantiene por debajo de  $0,5 \text{ hPa}$  hasta el día 12 para T42 (el CAM euleriano llega hasta el día 19) y hasta el día 27 para T85 (igual que el CAM euleriano).

### 6.2.3. Onda baroclina

En esta modalidad del test se simula una onda baroclina al añadir una perturbación al estado estacionario descrito en el apartado 6.2.1. En efecto, la perturbación

rompe el equilibrio del estado estacionario y, debido a la presencia de inestabilidad baroclina, se produce una onda que aumenta de amplitud con el tiempo. En Jablonowski y Williamson [2006] se propone añadir al viento zonal dado en (6.6) la siguiente perturbación:

$$u'(X, Y, \eta) = u_p e^{-(r/R)^2},$$

donde  $R = a/10$  siendo  $a$  el radio medio de la Tierra,  $u_p = 1 \text{ ms}^{-1}$  y  $r$  la distancia desde punto  $(X, Y)$  al punto localizado en  $(X_c, Y_c) = (20^\circ E, 40^\circ N)$ . Esta distancia, medida por la longitud del círculo máximo que une ambos puntos, es:

$$r = a \arccos(\sin Y_c \sin Y + \cos Y_c \cos Y \cos(X - X_c)). \quad (6.10)$$

Al cabo de unos días empieza a hacerse visible una onda baroclina que aumenta en amplitud y no linealidad. Se ha realizado una simulación T106 de este test, y en la figura 6.6 está representada la temperatura interpolada al nivel de  $850 \text{ hPa}$  correspondiente al día 9. Se observa que el resultado es similar al de otros modelos numéricos [Jablonowski y Williamson, 2006].

### 6.3. Onda de Rossby inducida por una montaña

El estado inicial de este test consiste en una atmósfera isoterma e hidrostática, con un flujo zonal que incide sobre un obstáculo de forma aproximadamente circular centrado en latitudes medias, induciéndose ondas de Rossby a sotavento de este. Este test tiene una versión más simple para las ecuaciones de aguas someras [Williamson et al., 1992]. La versión tridimensional de este test utilizada aquí es idéntica a la expuesta en Jablonowski et al. [2008]. Otra versión parecida a esta puede encontrarse en Tomita y Satoh [2004].

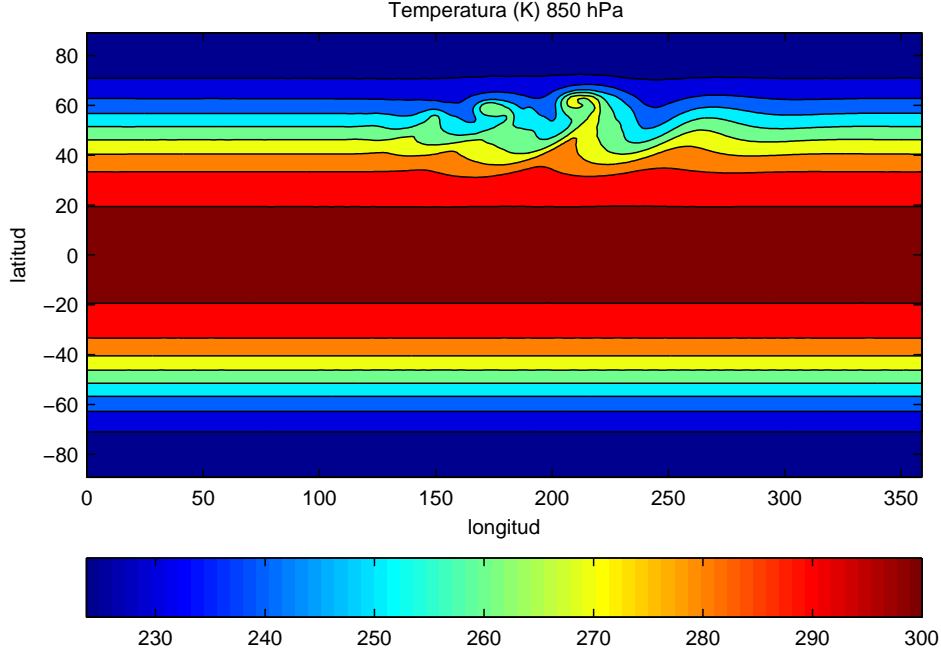


Figura 6.6: Temperatura interpolada al nivel de  $850 \text{ hPa}$  correspondiente al día 9 del test de onda baroclina de Jablonowski.

El obstáculo viene definido por la altura de la superficie:

$$H_B(X, Y) = H_0 e^{-(r/R)^2}, \quad (6.11)$$

donde  $H_0 = 2000 \text{ m}$  es la altura máxima,  $R = 1500 \text{ km}$  es la mitad de la anchura del perfil gaussiano de la montaña y  $r$  es la distancia desde  $(X, Y)$  hasta el centro de la montaña  $(X_c, Y_c) = (90^\circ E, 30^\circ N)$  dada por (6.10). La velocidad horizontal del estado inicial es zonal:

$$\begin{aligned} u(X, Y, \eta) &= u_0 \cos Y \\ v(X, Y, \eta) &= 0, \end{aligned}$$

siendo  $u_0 = 20 \text{ ms}^{-1}$ . La temperatura inicial es constante,  $T = T_0 = 288 \text{ K}$ , de manera que la frecuencia de Brunt-Väisälä es  $N \approx 0,0182 \text{ s}^{-1}$ . El campo de presión inicial es

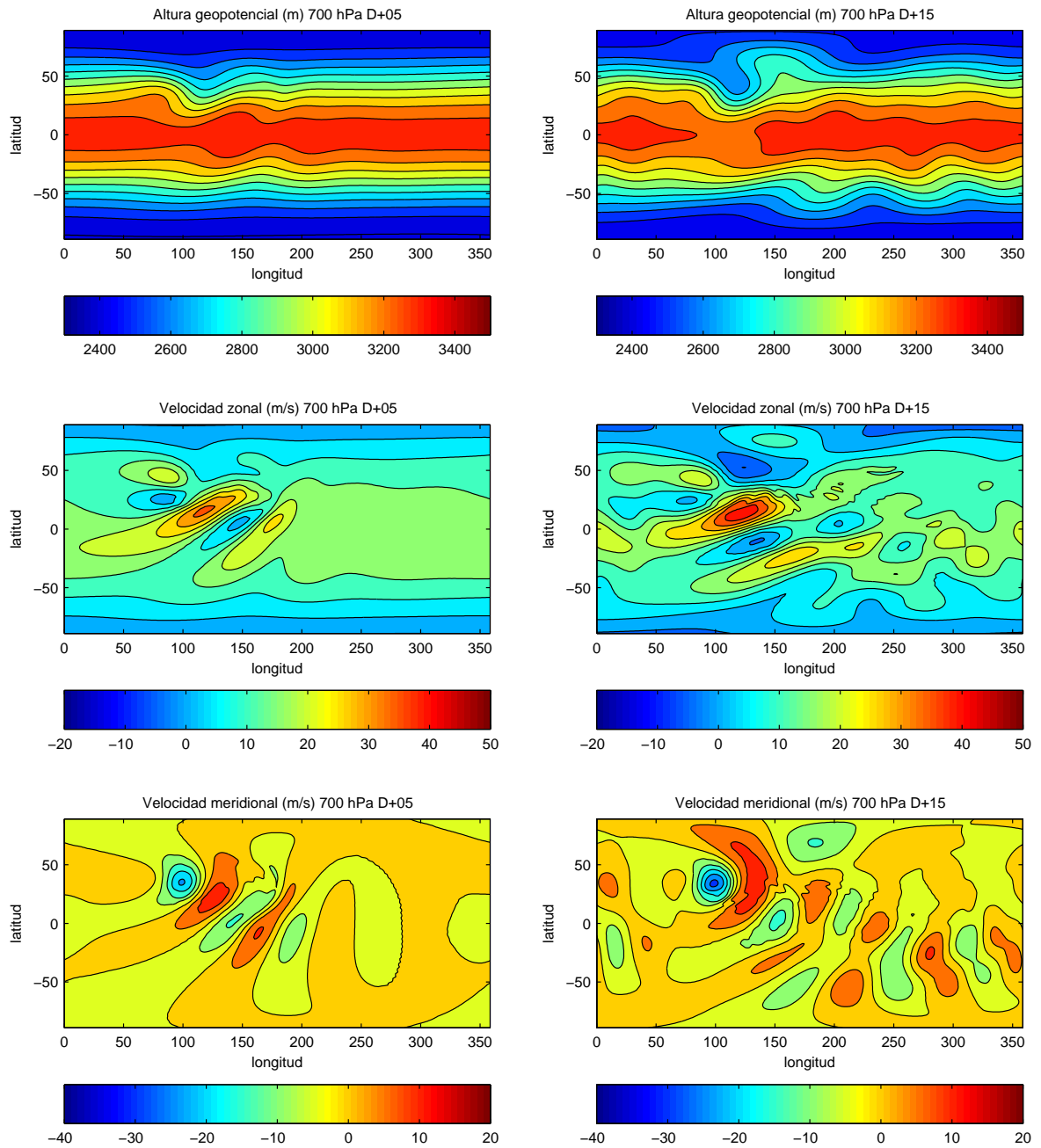


Figura 6.7: Altura geopotencial, velocidad zonal y meridional en 700 hPa del test de onda de Rossby inducida por una montaña de 2000 m, correspondientes a los días 5 y 15.

hidrostático y la presión en superficie del estado inicial es:

$$p_s(X, Y) = p_0 \exp \left( -\frac{aN^2u_0}{2g^2\kappa} \left( \frac{u_0}{a} + 2\Omega \right) (\sin^2 Y - 1) - \frac{N^2}{g\kappa} H_B(X, Y) \right),$$

donde  $\kappa = 2/7$ ,  $a$  es el radio medio de la Tierra,  $p_0 = 930 \text{ hPa}$  y  $H_B(X, Y)$  es la orografía dada en (6.11). Los parámetros  $N$ ,  $R$ ,  $H_0$  y  $u_0$  determinan las características físicas de la onda generada a sotavento: el flujo es hidrostático (ya que  $NR/u_0 \approx 1140, 0 \gg 1$ ) y no lineal (pues el inverso del número de Froude es  $NH_0/u_0 \approx 1,8 > 1$ ).

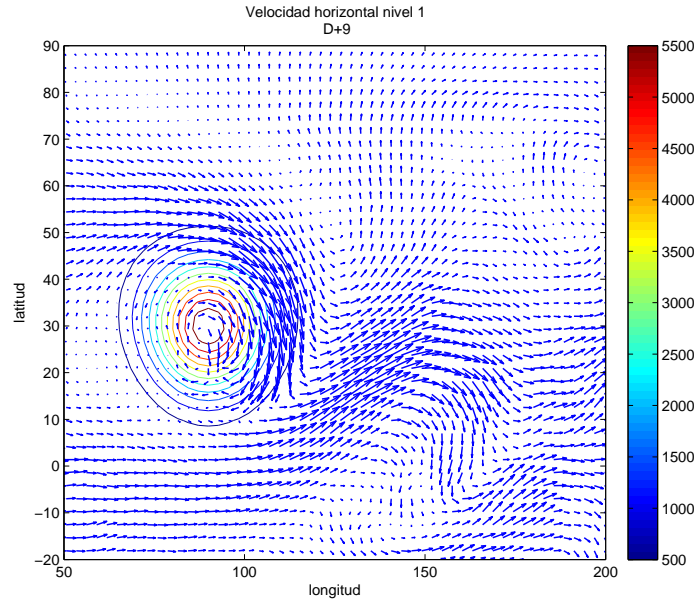


Figura 6.8: Onda de Rossby inducida por una montaña de  $6000 \text{ m}$ , velocidad horizontal en el primer nivel del modelo correspondiente al día 9.

El test se ha realizado con una resolución horizontal de T85. En la figura 6.7 están representados el geopotencial, la temperatura y la velocidad zonal y meridional en  $700 \text{ hPa}$ , correspondientes a los días 5 y 15. Los resultados para el día 5 son muy similares a los reproducidos en Jablonowski et al. [2008], donde se ha usado la versión de volúmenes finitos del modelo CAM [Lin, 2004]. Los resultados para el día 15 son similares, aunque las diferencias entre ambas simulaciones son visibles a simple vista.

Se ha repetido el test con una altura máxima de  $H_0 = 6000 \text{ m}$  a resolución T42,

y en la figura 6.8 están representadas la orografía y la velocidad horizontal en el primer nivel del modelo correspondiente al día 9.

#### 6.4. Test climático Held-Suárez

El propósito de este test es proporcionar una referencia para evaluar núcleos dinámicos de modelos globales, con un conjunto mínimo de parametrizaciones físicas [Held y Suarez, 1994]. Para ello se proponen unas parametrizaciones físicas muy simplificadas, que solamente afectan a las ecuaciones de la temperatura y del momento horizontal. Por una parte, la temperatura se fuerza hacia un estado simétrico respecto del Ecuador e independiente de la longitud, mediante la técnica de relajación Newtoniana, simulando el calentamiento diferencial de la Tierra (con un máximo en el Ecuador y mínimos en los polos). Por otra parte, se aplica al momento horizontal una amortiguación de Rayleigh (*Rayleigh damping* en literatura anglosajona) en los niveles atmosféricos bajos, para simular la fricción de la capa límite. El test consiste en realizar integraciones largas, de varios años, y obtener estadísticas relativas a la circulación general que se desarrolla con las parametrizaciones mencionadas. Este test se ha utilizado en numerosos estudios sobre modelización atmosférica, con una lista de referencias muy extensa, por ejemplo, Boer y Denis [1997], Ringler et al. [2000], Smolarkiewicz et al. [2001], Giraldo y Rosmond [2004], Adcroft et al. [2004], Fournier et al. [2004], Lin [2004], Toigo y Newman [2007], Gassmann [2013].

La amortiguación de Rayleigh para la ecuación del momento horizontal, expresada en función de la coordenada vertical sigma dada en la ecuación (3.3), es:

$$F_u = -k_V(\sigma) u \quad (6.12)$$

$$F_v = -k_V(\sigma) v, \quad (6.13)$$



donde

$$k_V(\sigma) = k_f \text{máx} \left( 0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right),$$

siendo  $\sigma_b = 0,7$  el nivel sigma por debajo del cual se aplica la amortiguación Rayleigh al momento horizontal, con una constante de decaimiento  $k_f = 1 \text{ día}^{-1}$ . El relajamiento Newtoniano de la temperatura hacia una temperatura de equilibrio es:

$$F_T = -k_T(Y, \sigma) (T - T_{eq}(Y, p)), \quad (6.14)$$

donde la temperatura de equilibrio es:

$$T_{eq}(Y, p) = \text{máx} \left( T_0, \left( T_1 - T_Y \sin^2 Y - T_p \ln \frac{p}{p_0} \cos^2 Y \right) \left( \frac{p}{p_0} \right)^\kappa \right),$$

siendo sus valores mínimo y máximo  $T_0 = 200 \text{ K}$  y  $T_1 = 315 \text{ K}$  respectivamente. Los parámetros  $T_Y = 60 \text{ K}$  y  $T_p = 10 \text{ K}$ , definen la variación de la temperatura de equilibrio con la latitud y la presión. Además, la presión de referencia es  $p_0 = 1000 \text{ hPa}$  y  $\kappa = 2/7$ . La función de decaimiento de la temperatura hacia la temperatura de equilibrio es:

$$k_T(Y, \sigma) = k_a + (k_s - k_a) \text{máx} \left( 0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right) \cos^4 Y,$$

donde la constante de decaimiento es  $k_a = 0,025 \text{ día}^{-1}$  en capas atmosféricas por encima del nivel sigma  $\sigma_b = 0,7$ . Por debajo de este nivel, la constante de decaimiento varía, siendo máxima en el Ecuador y mínima en los polos, y aumentando con la coordenada vertical sigma hasta un valor máximo de  $k_s = 0,25 \text{ día}^{-1}$ .

Estos forzamientos del test Held-Suárez se han de adaptar a las ecuaciones pronóstico del modelo propuesto dadas en (4.1), (4.2) y (4.3) o en su forma final en (4.40), (4.41) y (4.42). El forzamiento al momento horizontal dado en (6.12) y (6.13), se aplica a las

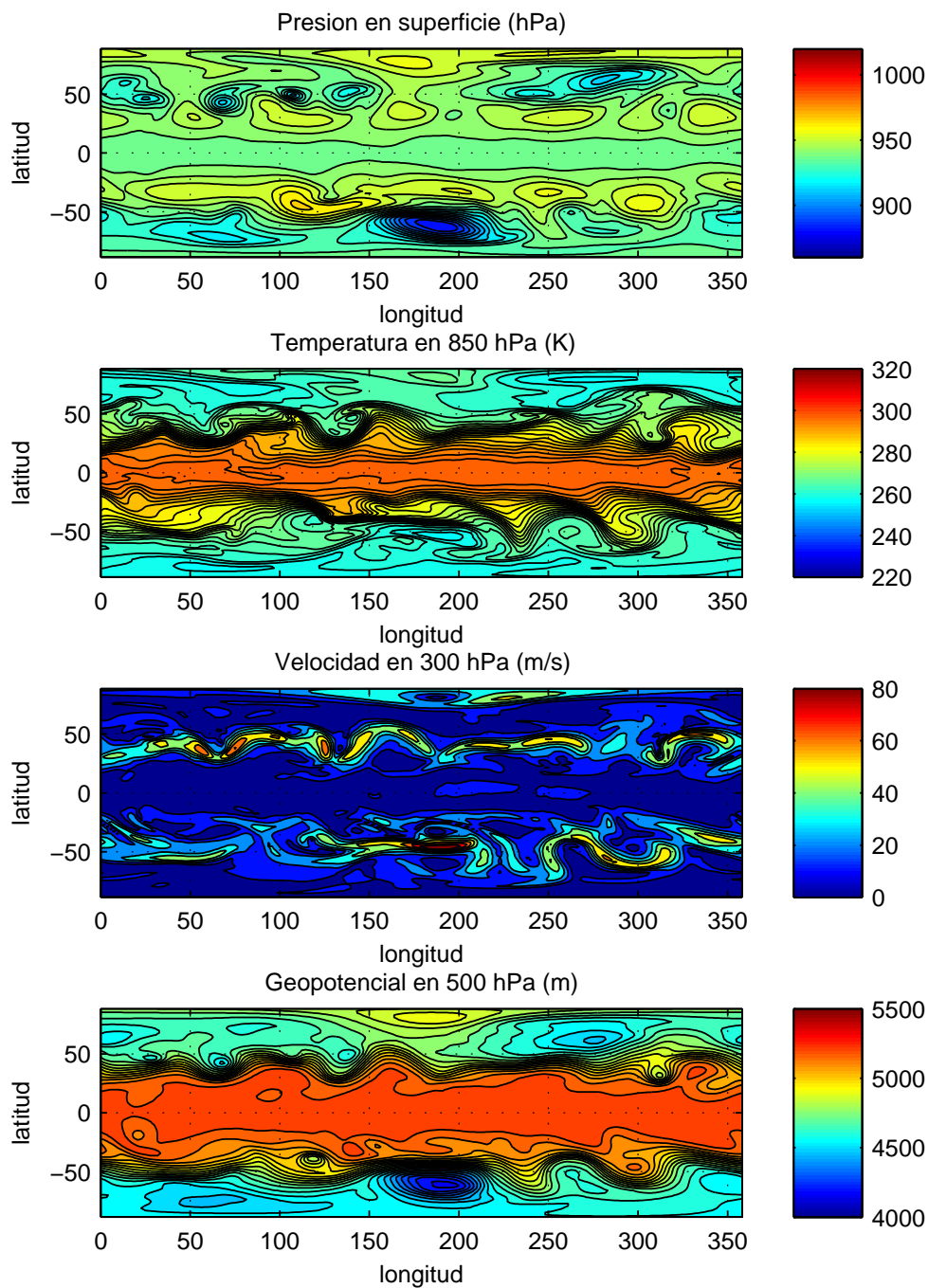


Figura 6.9: Test climático de Held-Suárez correspondientes al día D+315. Presión en superficie, temperatura en 850 hPa, velocidad del viento en 300 hPa y geopotencial en 500 hPa.

componentes contravariantes horizontales  $U$  y  $V$  de esta manera:

$$F_U = -k_V(\sigma) U$$

$$F_V = -k_V(\sigma) V.$$

El forzamiento a la temperatura dado en (6.14), debe aplicarse por consistencia a las variables de pronóstico logaritmo de la presión  $q \equiv \ln p$  y logaritmo de la temperatura  $r \equiv \ln T$ , ya que, según se observa en (4.2) y (4.3), ambas variables de pronóstico tienen el mismo término de forzamiento. En este caso, teniendo en cuenta (6.14):

$$F_q = F_r = \frac{F_T}{T} = -k_T(Y, \sigma) \left( 1 - \frac{T_{eq}(Y, p)}{T} \right).$$

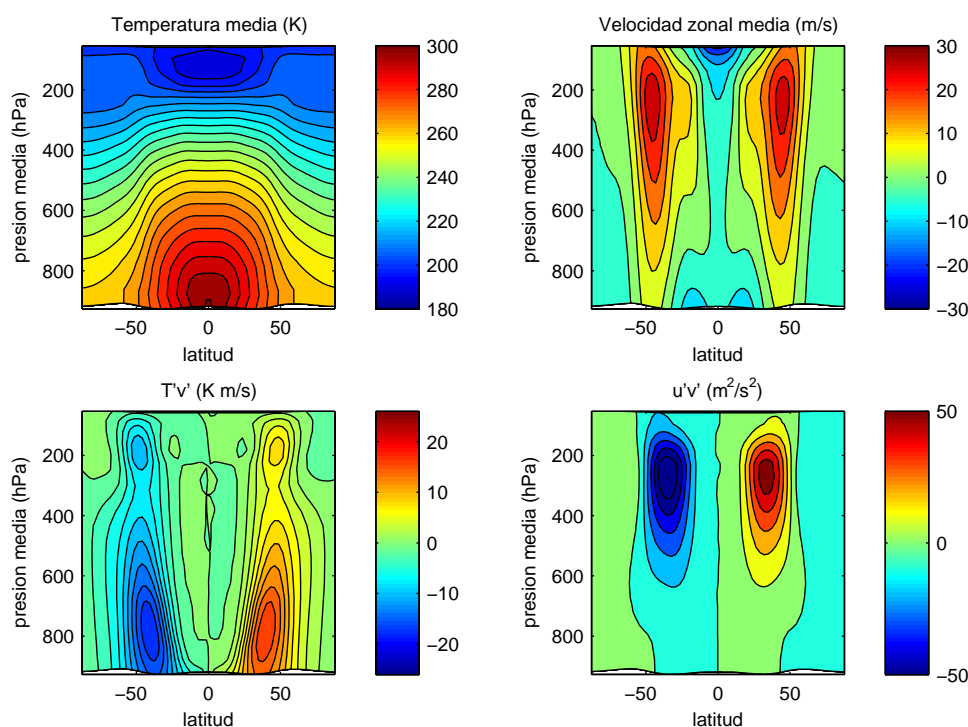


Figura 6.10: Test de climático de Held-Suárez a resolución T42. Valores medios en longitud y en tiempo (desde D+200 hasta D+1200) de la temperatura, la velocidad zonal, el flujo turbulento de calor y el flujo turbulento de momento.

Se han realizado integraciones a resoluciones T42 y T63 hasta completar 1200

días de simulación. Inicialmente la velocidad es cero, de manera que durante los primeros días de integración se produce una situación de ajuste, antes de disponer de una circulación normal. Al cabo de unos meses de integración, la circulación pierde la memoria del estado inicial, debido a la naturaleza caótica de las ecuaciones que rigen la dinámica atmosférica. En la figura 6.9 están representados la presión en superficie, la temperatura en  $850 hPa$ , la velocidad del viento en  $300 hPa$  y el geopotencial en  $500 hPa$ , correspondientes a un día cualquiera, en particular el día 315. Se han escogido estos campos para demostrar como, a pesar de la simplicidad de las parametrizaciones físicas de este test, la circulación generada reproduce aspectos que se dan en la circulación general de la atmósfera, como sistemas de altas y bajas presiones, frentes y chorros.

En la figura 6.10 se han representado algunos estadísticos correspondientes a 1000 días de simulación, desde el día 200 al 1200. Se han considerado las predicciones de la temperatura y de la velocidad zonal cada 6 horas, y se han calculado sus promedios temporales y longitudinales.

Se observa que el campo de temperatura media tiene el máximo en superficie sobre el Ecuador, y un mínimo en la estratosfera también sobre el Ecuador. El campo de velocidad zonal media presenta máximos cerca de la tropopausa en latitudes medias, correspondientes al chorro polar con claro predominio de la componente Este. Asimismo, se observa un mínimo relativo en la troposfera baja ecuatorial, correspondiente a los vientos alisios de componente Oeste.

Una de las formas de describir la circulación atmosférica, es a través del transporte promedio de una magnitud en una determinada dirección debido a las perturbaciones. El transporte promedio de una magnitud  $\psi$  en la dirección longitudinal debido a las perturbaciones es:

$$\overline{\psi'v'} = \overline{(\psi - \bar{\psi})(v - \bar{v})}. \quad (6.15)$$

Reemplazando  $\psi$  con la temperatura en (6.15), se obtiene el transporte promedio de temperatura en la dirección longitudinal debido a las perturbaciones. En la figura 6.10 se ha representado el resultado para la simulación T42, observándose máximos en la troposfera baja en latitudes medias. Estos máximos corresponden a las zonas frontales de las perturbaciones baroclinas, mecanismo eficiente de transporte de calor desde el Ecuador hacia los polos.

Por otra parte, substituyendo  $\psi$  con la velocidad zonal en (6.15), se obtiene el transporte promedio de momento zonal en la dirección longitudinal. En este caso, tal como se observa en la figura 6.10, los máximos se sitúan alrededor de la tropopausa en latitudes medias. Estos máximos se producen por los chorros que hay en las zonas más baroclinas del frente polar, y que dirigen las perturbaciones en niveles atmosféricos altos.

Los resultados obtenidos son muy similares a los de otros modelos, por ejemplo el modelo global no hidrostático ICON-IAP [Gassmann, 2013], comprobándose que el modelo aquí presentado es capaz de reproducir correctamente la circulación general atmosférica que se produce en el test de Held-Suárez.

# Capítulo 7

## Conclusiones

El trabajo reflejado en esta tesis es el resultado de varios años de investigación en modelización numérica del tiempo, tratando de encontrar una mejora en la exactitud de la discretización vertical de un modelo de predicción espectral semi-implícito no hidrostático. En el punto de partida hay dos referencias claras: el modelo global IFS del ECMWF [Ritchie et al., 1995] y el modelo de área limitada ALADIN [Bénard et al., 2010]. Estos dos modelos coinciden en el uso de la técnica espectral, en el esquema semi-implícito y en la coordenada vertical híbrida basada en masa. Difieren en que el IFS es global e hidrostático y ALADIN de área limitada y no hidrostático. Además, la discretización vertical del IFS es de alto orden de exactitud (basada en elementos finitos cúbicos), mientras que la de ALADIN es de primer orden (basada en diferencias finitas). Por tanto, ALADIN mejora al IFS en el sentido de que es no hidrostático y permite simulaciones de alta resolución, pero no dispone de una discretización vertical tan precisa.

Así pues, surge de forma natural la pregunta de si es posible implementar en ALADIN una discretización vertical de alto orden de exactitud. Lamentablemente, este objetivo es muy difícil, si no imposible: la dificultad estriba en que los operadores verticales deben verificar unas relaciones de consistencia, que se cumplen en el caso de usar diferencias finitas, pero no cuando se usan operadores verticales de alto orden de exactitud.

Tratando de encontrar una solución alternativa, se ha optado por investigar la posibilidad de usar una coordenada vertical basada en altura en vez de en masa, y al mismo tiempo mantener las otras características del modelo ALADIN (espectral, semi-implícito y de advección semi-lagrangiana). Las ventajas que se pueden esperar de entrada son, una simplificación de las ecuaciones de pronóstico, y la ausencia de relaciones de consistencia entre los operadores verticales. Esto facilita el uso de órdenes de exactitud más altos. Como desventaja, el análisis de estabilidad lineal muestra que la coordenada vertical basada en altura es menos estable que la basada en masa. Este problema se resuelve con un leve descentrado del esquema semi-implícito, a costa de reducir algo la exactitud de la integración temporal. Con estas ideas de partida, en esta tesis se ha elaborado un modelo atmosférico no hidrostático espectral con una coordenada vertical basada en altura, y se han probado discretizaciones verticales de alto orden de exactitud.

El trabajo está centrado en la parte de la dinámica del modelo, es decir, en la resolución numérica de las ecuaciones de Euler. La tesis viene acompañada de la publicación de dos artículos, en los que se describe la formulación del modelo en sus dos versiones: una versión 2D con una discretización vertical basada en elementos finitos [Simarro y Hortal, 2011], y otra versión, 3D, con una discretización vertical basada en diferencias finitas de orden arbitrario [Simarro et al., 2013].

El modelo presentado tiene algunas novedades respecto de otros modelos espectrales como son: el uso de una coordenada vertical basada en altura; es no hidrostático con operadores verticales de alto orden de exactitud; y se han elegido como variables de pronóstico las componentes contravariantes de la velocidad y los logaritmos de la presión y de la temperatura.

Los logaritmos de la presión y de la temperatura tienen unas ecuaciones de pronóstico simples. En particular, son lineales respecto de la divergencia de la velocidad y tienen el mismo término fuente diabático. La linealidad de las ecuaciones de

---

pronóstico es especialmente interesante cuando se usa la técnica semi-implícita, ya que los parecidos entre los modelos lineal y no lineal aumentan la estabilidad numérica.

La elección de las componentes contravariantes de la velocidad tiene dos motivaciones. La primera, es que la expresión de la divergencia de la velocidad es compacta cuando se expresa en dichas componentes. La segunda, es que permiten una expresión muy simple de las condiciones de contorno, ya que se reducen a asumir que la componente contravariante vertical es cero en los límites superior e inferior del modelo. Las condiciones de contorno simples facilitan enormemente el planteamiento del esquema semi-implícito y la inversión del sistema lineal resultante.

Una vez construido el modelo, se hace necesario probarlo. A este objetivo se han dedicado los capítulos 5 y 6. El 5 está dedicado a test bidimensionales, mientras que en el 6 se exponen los resultados de test tridimensionales. Se han considerado una gran variedad de test, todos ellos obtenidos de publicaciones científicas. En algunos, se dispone de soluciones analíticas con las que comparar los resultados numéricos. En otros, la única verificación posible ha sido la de comparar cualitativamente los resultados con soluciones aproximadas de las ecuaciones de Euler, o con resultados numéricos publicados.

En la discretización vertical se han probado dos técnicas de alto orden de exactitud: elementos finitos [Simarro y Hortal, 2011] y diferencias finitas de orden arbitrario [Simarro et al., 2013]. La técnica de elementos finitos que hemos usado es similar a la del IFS, basada en funciones polinómicas diferenciables definidas en tramos o *splines*. Los resultados obtenidos con esta técnica no han sido del todo satisfactorios, debido a que el modelo no ha mostrado ser suficientemente estable en presencia de orografía abrupta. Sin embargo, la técnica de diferencias finitas no ha presentado este problema, y es la que se ha escogido para realizar los test presentados en esta tesis.

Como se ha dicho, se ha dedicado todo un capítulo a test 2D, con una dimensión horizontal y otra vertical. El uso de un modelo 2D es una práctica muy habitual en el



desarrollo de modelos numéricos, ya que permite disponer de una versión simplificada en la que probar diversas técnicas, antes de incorporarlas a uno 3D, más complejo. Además, es viable usarlo a resoluciones altas, objetivo difícil en modelos globales, en los que los requerimientos computacionales son muy elevados cuando se aumenta la resolución al límite no hidrostático. El modelo 2D mantiene muchas de las características del 3D esférico: la discretización en la dirección vertical es idéntica; en la dirección horizontal se mantiene el uso del método espectral, reemplazando los armónicos esféricos por funciones sinusoidales; y se mantiene el mismo esquema de integración temporal semi-implícito. Además, las ecuaciones de pronóstico son las mismas, así como el tratamiento de las condiciones de contorno en los límites inferior y superior.

Los primeros test que se han considerado, consisten en un flujo con un perfil de velocidad y estabilidad constante corriente arriba e incidente sobre un obstáculo montañoso, en concreto sobre una montaña de Agnesi. Al cabo de un tiempo, se genera una perturbación estacionaria alrededor de la montaña, cuyas características dependen del ancho y alto de ésta y de la velocidad y estabilidad del flujo incidente. El producto del ancho de la montaña por el parámetro de Scorer es un número real adimensional, que caracteriza el tipo de perturbación: flujo potencial para valores pequeños; ondas no hidrostáticas para valores cercanos a la unidad; y ondas hidrostáticas para valores altos. Se han diseñado test para cada uno de estos casos: en régimen lineal para la onda hidrostática, y en no lineal para el flujo potencial y onda no hidrostática. Se han verificado los resultados numéricos con las soluciones analíticas que se obtienen usando las ecuaciones de Boussinesq linealizadas y, además, se han comparado cualitativamente con las simulaciones de otros modelos numéricos [Bubnová et al., 1995]. En definitiva, con este primer test se demuestra que el modelo es capaz de proporcionar soluciones correctas a flujos con perfiles constantes del parámetro de Scorer sobre obstáculos orográficos en distintos regímenes.

Añadiendo dificultad a los test anteriores, se consideró un flujo incidente con un

---

perfil variable del parámetro de Scorer, en concreto, con una velocidad horizontal que aumenta linealmente con la altura. En este caso, se producen por resonancia ondas atrapadas a sotavento del obstáculo, cuya amplitud no disminuye con la distancia a éste y que se propagan indefinidamente corriente abajo. Los test están configurados de forma idéntica a los publicados en Wurtele et al. [1987]. Los resultados numéricos reproducen de forma satisfactoria las ondas atrapadas. Las longitudes de onda de las soluciones analíticas (calculadas con la aproximación de Boussinesq) y numéricas (con el modelo propuesto), son muy parecidas. Es de destacar que la amplitud de las ondas en la solución numérica apenas se amortigua con la distancia al obstáculo, permaneciendo prácticamente inalteradas a sotavento de éste.

Hasta aquí, se han comparado los resultados numéricos de los test con soluciones analíticas de las ecuaciones de Boussinesq linealizadas alrededor de un estado estacionario, así como con soluciones numéricas de otros modelos. Baldauf y Brdar [2013], en un reciente e interesante trabajo, encontraron la solución analítica de las ecuaciones de Euler lineales sin orografía. Este trabajo nos ha permitido comparar un conjunto de soluciones numéricas y analíticas del mismo sistema, sin necesidad de recurrir a ecuaciones aproximadas como las de Boussinesq. Así, es posible hacer inspecciones detalladas sobre la exactitud del modelo, tanto en la integración temporal como en la discretización espacial. De nuevo, configuramos los test de forma similar a los dados en la literatura. Los resultados muestran que el modelo es convergente, es decir, los logaritmos de los errores disminuyen linealmente con los logaritmos de las resoluciones espacial y temporal, con coeficientes de correlación altos. Además, se analizan por separado los errores debidos al descentrado del esquema semi-implícito, a la advección y a la diferencia entre la temperatura de referencia y la temperatura real. Los resultados obtenidos son similares a los referidos por Baldauf y Brdar [2013] para el modelo no hidrostático COSMO.

El modelo bidimensional también se ha probado en regímenes altamente no lineal-

les, en contraposición a los mencionados hasta ahora. Hemos escogido test muy citados en la literatura científica, consistentes en un estado inicial en el que una burbuja tiene una temperatura potencial diferente a la del entorno, de manera que evoluciona con una fuerte aceleración vertical, positiva en el caso de la burbuja cálida y negativa en el caso de la burbuja fría. Debido a la fuerte aceleración sufrida, la burbuja se deforma y aparecen vórtices. Para estos test, debido a que son altamente no lineales, no hay solución analítica, ni siquiera aproximada. La única forma que hemos encontrado de evaluar las simulaciones, es comparándolas con resultados numéricos de otros modelos. Se ha configurado el test de la burbuja cálida como el descrito en Straka et al. [1993] y el de la burbuja fría siguiendo a Janjic et al. [2001]. En ambos casos hemos obtenido simulaciones cualitativamente muy parecidas a las publicadas.

Los test 2D nos han permitido llegar a la conclusión de que los esquemas numéricos propuestos proporcionan soluciones de calidad. Se ha conseguido el objetivo de usar una discretización vertical de alto orden de exactitud, una discretización horizontal espectral, y una integración temporal semi-implícita, es decir, precisión y eficiencia. Los test han permitido probar el modelo en una amplia variedad de casos: flujos no hidrostáticos e hidrostáticos, lineales y no lineales, con y sin orografía.

Se ha dedicado todo un capítulo para la evaluación de la versión 3D esférica del modelo. El primer test 3D está basado en el uso de la solución analítica de la ecuación barotrópica, conocida como onda Rossby-Haurwitz. La ecuación barotrópica difiere de las ecuaciones de Euler, pero ambas proporcionan soluciones parecidas cuando la atmósfera es barotrópica. Tal es el caso de este test, en donde el estado inicial barotrópico está configurado idénticamente al descrito en Ullrich y Jablonowski [2012]. La comparación de las simulaciones con la solución analítica de la ecuación barotrópica y con los resultados numéricos obtenidos de otros modelos, permite comprobar que el modelo propuesto describe correctamente la evolución de las ondas de Rossby-Haurwitz con un alto grado de precisión.

---

A continuación se añade dificultad considerando una atmósfera baroclina. El ingenioso test diseñado por Jablonowski y Williamson [2006] se basa en una solución estacionaria, baroclina e hidrostática, en la que aparecen elementos parecidos a los de la atmósfera terrestre: un perfil térmico con tropopausa, masas frías en ambos polos y presencia un chorro a nivel de la tropopausa en cada hemisferio. Esta solución analítica es estacionaria, aunque, y este punto da interés al test, es inestable. Es decir, pequeñas perturbaciones se amplifican, de forma que al cabo de un tiempo se destruye el estado estacionario, formándose circulaciones complejas y caóticas. Un modelo inicializado en este estado inestable, debido a los pequeños errores numéricos, producirá soluciones numéricas que con el tiempo irán degradándose y alejándose del estado estacionario inicial. Puede decirse que, cuanto mejor es el modelo, más tiempo tardará la solución numérica en alejarse del estado estacionario. El modelo propuesto en esta tesis, produce resultados para este test que igualan, y mejoran en algunos casos, a los de modelos operativos hidrostáticos referidos en Lauritzen et al. [2010], tanto en malla rotada como en malla sin rotar. Una variante de este test consiste en añadir, al estado inicial inestable, una perturbación en latitudes medias, que producirá una onda baroclina determinada al cabo de 8 días. Nuevamente los resultados son acordes con los publicados en Lauritzen et al. [2010].

Estos test 3D, barotrópico y baroclino, se han realizado con una orografía casi inexistente. Hay que demostrar que el modelo 3D es también estable y preciso en presencia de orografía. Para ello, se ha considerado un test consistente en inducir la formación de ondas de Rossby a sotavento de una montaña circular, situada en latitudes medias. Hemos seguido la configuración dada en [Jablonowski et al., 2008] para poder comparar resultados. Nuevamente podemos confirmar que las soluciones numéricas son muy parecidas a las publicadas.

Finalmente, se ha realizado un test muy popular, el llamado test de Held y Suarez [1994], diseñado para evaluar el modelo en integraciones largas, de varios años. Consiste

en simular de forma muy simplificada los procesos físicos que se dan en la atmósfera, no incluidos en las ecuaciones de Euler. Esto se consigue introduciendo términos fuente en las ecuaciones del momento horizontal y termodinámica. El término fuente en la ecuación del momento horizontal simula la fricción de la capa límite planetaria, mientras que el de la ecuación termodinámica simula el calentamiento diferencial de la Tierra, con un máximo en el Ecuador y mínimos en los polos. Para el modelo propuesto en esta tesis, los términos fuente han de ser convenientemente reescritos para las variables de pronóstico que usamos: componentes contravariantes de la velocidad, y logaritmos de presión y temperatura. Una vez configurado convenientemente, se han realizado integraciones largas, de 1200 días. Gracias a las parametrizaciones introducidas, se generan movimientos sinópticos similares a los que encontramos en la atmósfera terrestre, y se pueden hacer estadísticas sobre, por ejemplo, la velocidad y temperatura zonal media. Aunque cada modelo hace integraciones diferentes, pues la atmósfera es caótica en estas escalas temporales, las estadísticas mencionadas deben ser parecidas para los distintos modelos. La comparación de estas estadísticas permite llegar a conclusiones sobre el grado de acuerdo entre los modelos en cuanto a las características estadísticas de las perturbaciones generadas, es decir, sobre el *clima*. Hemos comprobado que las estadísticas obtenidas son muy parecidas a las de otros modelos. En consecuencia, concluimos que el modelo propuesto, además de ser no hidrostático y permitir simulaciones de alta resolución, es adecuado para integraciones largas de tipo climático.

Por lo tanto, los resultados de los test realizados en los capítulos 5 y 6 son apropiados, en el sentido de que el modelo desarrollado demuestra tener un alto orden de precisión espacial, usa un esquema de integración eficiente y muestra un amplio abanico de soluciones estables. La realización de esta tesis ha requerido codificar, probar y depurar un código complejo, realizar numerosas pruebas y compararlas con gran cantidad de trabajos publicados. El resultado ha sido muy satisfactorio, y creemos que el modelo propuesto es suficientemente estable, preciso y eficiente como para ser implementado

en un modelo operativo.



# Referencias

- C. Abbe. The physical basis of long-range weather forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, 29: 551–561, 1901. 7
- M. Abramowitz y I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1972. ISBN 0486612724. 42
- A. Adcroft, J.M. Campin, C. Hill, y J. Marshall. Implementation of an atmosphere-ocean general circulation model on the expanded spherical cube. *Mon. Wea. Rev.*, 132(12):2845–2863, 2004. 127
- A. Arakawa y V.R. Lamb. A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equations. *Mon. Wea. Rev.*, 109, 1981. 16
- R. Asselin. Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, 100:487–490, 1972. 77, 78
- M. Baldauf y S. Brdar. An analytic solution for linear gravity waves in a channel as a test for numerical models using the non-hydrostatic, compressible euler equations. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 2013. doi: 10.002/qj.2105. 4, 95, 98, 137
- M. Baldauf, A. Seifert, J. Förstner, D. Majewski, M. Raschendorfer, y T. Reinhardt. Operational convective-scale numerical weather prediction with the COSMO model: description and sensitivities. *Mon. Wea. Rev.*, 139:3887–3905, 2011. 22, 75, 77, 98



- C. Bär. *Elementary Differential Geometry*. Cambridge University Press, 2010. 56, 61, 67
- P. Bénard. Stability of semi-implicit and iterative centered-implicit time discretizations for various equation systems used in NWP. *Mon. Wea. Rev.*, 131:2479–2491, 2003. 24
- P. Bénard, R. Laprise, J. Vivoda, y P. Smolíková. Stability of leapfrog constant-coefficients semi-implicit schemes for the fully elastic system of euler equations: flat-terrain case. *Mon. Wea. Rev.*, 132:1306–1318, 2004. 81
- P. Bénard, J. Mašek, y P. Smolíková. Stability of leapfrog constant-coefficient semi-implicit schemes for the fully elastic system of euler equations: Case with orography. *Mon. Wea. Rev.*, 133:1065–1075, 2005. 33
- P. Bénard, J. Vivoda, J. Mašek, P. Smolíková, K. Yessad, C. Smith, R. Brožková, y J.F. Geleyn. Dynamical kernel of the Aladin-NH spectral limited-area model: Revised formulation and sensitivity experiments. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 136:155–169, 2010. 22, 25, 27, 33, 75, 79, 81, 133
- R. Benoit, M. Desgagné, P. Pellerin, S. Pellerin, Y. Chartier, y S. Desjardins. The Canadian MC2: A semi-Lagrangian, semi-implicit wideband atmospheric model suited for finescale process studies and simulation. *Mon. Wea. Rev.*, 125:2382–2415, 1997. 12
- V. Bjerknes. The problem of weather forecasting as a problem in mechanics and physics. *Meteorol. Z*, 21:1–7, 1904. 8
- G.J. Boer y B. Denis. Numerical convergence of the dynamics of a gcm. *Climate dynamics*, 13(5):359–374, 1997. 127
- W. Bourke. An efficient, one-level, primitive-equation spectral model. *Mon. Wea. Rev.*, 100:683–689, 1972. 11

- 
- F. Bretherton. The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 92:466–480, 1966. doi: 10.1002/qj.2105. 95
- R. Bubnová, G. Hello, P. Bénard, y J.F. Geleyn. Integration of the fully elastic equations cast in the hydrostatic pressure terrain-following coordinate in the framework of the ARPEGE/Aladin NWP system. *Mon. Wea. Rev.*, 123:515–535, 1995. 25, 27, 33, 136
- J.G. Charney. Dynamic forecasting by numerical process. *Compendium of Meteorology, American Meteorological Society*, pages 470–482, 1951. 10
- J.G. Charney y N.A. Phillips. Numerical integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows. *J. Meteorolo.*, 10:71–99, 1953. 10, 35
- J.G. Charney, R. Fjörtoft, y J.V. Neumann. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 2:237–254, 1950. 9, 10
- J.G. Charney, B. Gilchrist, y F.G. Shuman. The prediction of general quasi-geostrophic motions. *Journal of Meteorology*, 13:489–499, 1956. 10
- J.W. Cooley y J.W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Comput.*, 19:297–301, 1965. 50
- J. Côté, M. Beland, y A. Staniforth. Stability of vertical discretization schemes for semi-implicit primitive equation models: Theory and application. *Mon. Wea. Rev.*, 111:1189–1207, 1983. 81
- R. Courant, K. Friedrichs, y H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, 11:215–234, 1967. 10, 15
- M.J.P. Cullen y T. Davies. A conservative split-explicit integration scheme with fourth-order horizontal advection. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 117:993–1002, 1991. 12

- R. Daley, C. Girard, J. Henderson, y I. Simmonds. Short-term forecasting with a multi-level spectral primitive equation model. Part I: model formulation. *Atmosphere*, 14: 98–116, 1976. 11
- T. Davies, M. J.P. Cullen, A.J. Malcolm, M.H. Mawson, A. Staniforth, A.A. White, y N. Wood. A new dynamical core for the Met Office’s global and regional modelling of the atmosphere. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 131:1759–1782, 2005. 27, 30, 35, 54, 67
- G. Doms y U. Schättler. *The non-hydrostatic local-area model LM a (Lokal-Modell) of DWD. Part I: Scientific documentation*. Deutscher Wetterdienst (DWD): Offenbach, Germany, 2002. 27
- K.K. Drogemeier. The numerical simulation of thunderstorm outflow dynamics. *Ph.D. dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign*, 1985. 107
- J. Dudhia. A non-hydrostatic Penn State-NCAR mesoscale model: Validation tests and simulation of an atlantic cyclone and cold front. *Mon. Wea. Rev.*, 121:1493–1523, 1993. 22
- E. Eliassen, B. Machenhauer, y E. Rasmussen. On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields. *Kobenhavns Universitet, Institut for Teoretisk Meteorologi*. 11
- A. Fournier, M.A. Taylor, y J.J. Tribbia. The spectral element atmosphere model (seam): High-resolution parallel computation and localized resolution of regional dynamics. *Mon. Wea. Rev.*, 132(3):726–748, 2004. 127
- T. Gal-Chen y R.C. Somerville. On the use of a coordinate transformation for the solution of Navier-Stokes. *J. Comput. Phys.*, 17:209–228, 1975. 29, 34, 54, 67
- A. Gassmann. A global hexagonal c-grid non-hydrostatic dynamical core (icon-iap) designed for energetic consistency. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 139:152–175, 2013. doi: 10.1002/qj.1960. 16, 127, 132

- 
- F.X. Giraldo y T.E. Rosmond. A scalable spectral element eulerian atmospheric model (see-am) for NWP: dynamical core tests. *Mon. Wea. Rev.*, 132:133–153, 2004. 112, 127
- N. Gustafsson y A. McDonald. A Comparison of the HIRLAM gridpoint and spectral semi-lagrangian models. *Mon. Wea. Rev.*, 124:2008–2022, 1996. 22, 27, 75
- B. Haurwitz. The motion of atmospheric disturbances on the spherical earth. *J. mar. Res*, 3:254–267, 1940. 111, 112
- P.H. Hayne y M.E. McIntyre. On the conservation and impermeability theorems for potential vorticity. *Journal of the atmospheric sciences*, 16, 1990. 16
- I.M. Held y M.J. Suarez. A proposal for the intercomparison of the dynamical cores of atmospheric general circulation models. *Bulletin of the American Meteorological society*, 75(10):1825–1830, 1994. 127, 139
- D. Holdaway, J. Thuburn, y N. Wood. Comparison of Lorenz and Charney–Phillips vertical discretisations for dynamics–boundary layer coupling. Part I: Steady states. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 2012a. doi: 10.1002/qj.2016. 36
- D. Holdaway, J. Thuburn, y N. Wood. Comparison of Lorenz and Charney–Phillips vertical discretisations for dynamics–boundary layer coupling. Part II: Transients. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 2012b. doi: 10.1002/qj.2017. 36
- J.R. Holton y G.J. Hakim. *An introduction to dynamic meteorology*. Academic press, 2012. 10
- M. Hortal y A.J. Simmons. Use of reduced gaussian grids in spectral models. *Mon. Wea. Rev.*, 119:1057–1074, 1991. 44
- B.J. Hoskins y A.J. Simmons. A multi-layer spectral model and the semi-implicit method. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 101:637–655, 1975. 11

- C. Jablonowski y D.L. Williamson. A baroclinic instability test case for atmospheric model dynamical cores. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 132:2943–2975, 2006. 116, 120, 123, 139
- C. Jablonowski, P.H. Lauritzen, M.A. Taylor, y R.D. Nair. Idealized test cases for the dynamical cores of atmospheric general circulation models: a proposal for the NCAR ASP 2008 summer colloquium. <http://esse.engin.umich.edu/admg/publications.php>. 2008. 116, 123, 126, 139
- Z.I. Janjic, J.P. Gerrity, y S. Nickovic. An alternative approach to nonhydrostatic modeling. *Mon. Wea. Rev.*, 129(5):1164–1178, 2001. 103, 107, 108, 138
- B.H. Jørgensen. *Tensor formulation of the model equations on strong conservation form for an incompressible flow in general coordinates*. Denmark. Forskningscenter Risoe. Risoe-R. 2003. ISBN 87-550-3293-1(Internet). 70
- A. Kasahara. Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. *Mon. Wea. Rev.*, 102:509–522, 1974. 31
- R. Laprise. The euler equations of motion with hydrostatic pressure as an independent variable. *Mon. Wea. Rev.*, 120:197–207, 1992. 31, 32
- P.H. Lauritzen, C. Jablonowski, M.A. Taylor, y R.D. Nair. Rotated versions of the Jablonowski steady-state and baroclinic wave test cases: A dynamical core intercomparison. *J. Adv. Model. Earth Syst.*, 2:15–34, 2010. 116, 121, 122, 139
- R.J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge university press, 2002. 14
- S.J. Lin. A vertically lagrangian finite-volume dynamical core for global models. *Mon. Wea. Rev.*, 132:2293–2307, 2004. 126, 127
- Y.L. Lin. *Mesoscale Dynamics*. Cambridge University Press, 2007. 84, 90

- 
- E.N. Lorenz. Energy and numerical weather prediction. *Tellus A*, 12:364–373, 1960. 35
- P. Lynch. The dolph-chebyshev window: A simple optimal filter. *Mon. Wea. Rev.*, 125: 655–660, 1997. 9
- P. Lynch. *The Emergence of Numerical Weather Prediction: Richardson’s Dream*. Cambridge University Press, 2006. 9
- D. Majewski, D. Liermann, P. Prohl, B. Ritter, M. Buchhold, y T. Hanischand J. Baumgardner. The operational global icosahedral-hexagonal gridpoint model GME: Description and high-resolution tests. *Mon. Wea. Rev.*, 130:319–338, 2002. 12
- S. Manabe, J. Smagorinsky, y R.F. Strickler. Simulated climatology of a general circulation model with a hydrologic cycle. *Mon. Wea. Rev.*, 93:769–798, 1965. 11
- A. McDonald y J. Haugen. A two-time-level, three-dimensional semi-lagrangian, semi-implicit, limited-area gridpoint model of the primitive equations. *Mon. Wea. Rev.*, 120:2603–2612, 1992. 27
- A. McDonald y J. Haugen. A two time-Level, three-dimensional, semi-lagrangian, semi-implicit, limited-area gridpoint model of the primitive equations. Part II: extension to hybrid vertical coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, 121:2077–2087, 1993. 27
- Y. Mintz. Very long-term global integration of the primitive equations of atmospheric motion. *WMO Technical Note Number 66*, pages 141–155, 1965. 11
- K. Miyakoda, G.D. Hembree, R.F. Strickler, y I. Shulman. Cumulative results of extended forecast experiments I. Model performance for winter cases. *Mon. Wea. Rev.*, 100:836–855, 1972. 11
- M. Naughton, P. Courtier, y W. Bourke. Representation errors in various grid and

- spectral truncations for a symmetric feature on the sphere. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 122:253–265, 2006. doi: 10.1002/qj.49712252910. 44
- S.A. Orszag. Transform method for the calculation of vector-coupled sums: application to the spectral form of the vorticity equation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 27:890–895, 1970. 11
- N.A. Phillips. Numerical integration of the primitive equations on the hemisphere. *Mon. Wea. Rev.*, 87:333–345, 1959. 112
- R. A. Pielke y C. L. Martin. The derivation of a terrain-following coordinate system for use in a hydrostatic model. *J. Atmos. Sci.*, 38:1707–1713, 1981. 51
- L.F. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922. 8
- T.D. Ringler, R.P. Heikes, y D.A. Randall. Modeling the atmospheric general circulation using a spherical geodesic grid: a new class of dynamical cores. *Mon. Wea. Rev.*, 128(7):2471–2490, 2000. 127
- H. Ritchie. Application of the semi-Lagrangian method to a multilevel spectral primitive-equations model. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 117:91–106, 1991. 12
- H. Ritchie, C. Temperton, A. Simmons, M. Hortal, T. Davies, D. Dent, y M. Hamrud. Implementation of the semi-lagrangian method in a high-resolution version of the ECMWF forecast model. *Mon. Wea. Rev.*, 123:489–514, 1995. 22, 25, 27, 39, 75, 79, 133
- A. Robert. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmos.-Ocean*, 19:35–46, 1981. 26, 76
- A. Robert, J. Henderson, y C. Turnbull. An implicit time integration scheme for baroclinic models of the atmosphere. *Mon. Wea. Rev.*, 100:329–335, 1972. 11, 23

- 
- A. Robert, T.L. Yee, y H. Ritchie. A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for multilevel atmospheric models. *Mon. Wea. Rev.*, 113:388–394, 1985. 12
- R. Salmon. A general method for conserving quantities related to potential vorticity in numerical models. *Nonlinearity*, 18, 2005. 16
- C. Schär, D. Leuenberger, O. Fuhrer, D. Lüthi, y C. Girard. A new terrain-following vertical coordinate formulation for atmospheric prediction models. *Mon. Wea. Rev.*, 130:2459–2480, 2002. 30, 35, 55, 67
- R.S. Scorer. Theory of airflow over mountains: III - Airstream characteristics. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 80:417–428, 1954. doi: 10.1002/qj.49708034511. 84
- R.D. Sharman, T.L. Keller, y M.G. Wurtele. Incompressible and anelastic flow simulations on numerically generated grids. *Mon. Wea. Rev.*, 116:1124–1136, 1988. 51, 52
- F.G. Shuman. History of numerical weather prediction at the National Meteorological Center. *Weather and Forecasting*, 4:286–296, 1989. 11
- J.P. Simarro y M. Hortal. A semi-implicit non-hydrostatic dynamical kernel using finite elements in the vertical discretization. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 2011. doi: 10.1002/qj.952. 3, 34, 40, 71, 75, 77, 79, 134, 135
- J.P. Simarro, V. Homar, y G. Simarro. A non-hydrostatic global spectral dynamical core using a height-based vertical coordinate. *Tellus A*, 2013. 3, 34, 40, 75, 134, 135
- A.J. Simmons y D.M. Burridge. An energy and angular-momentum conserving vertical finite-difference scheme and hybrid vertical coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, 109:758–766, 1981. 28, 30, 120



- W.C. Skamarock y J.B. Klemp. The stability of time-split numerical methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equations. *Mon. Wea. Rev.*, 120:2109–2127, 1992. 23
- W.C. Skamarock y J.B. Klemp. Efficiency and accuracy of the klemp-wilhelmson time-splitting scheme. *Mon. Wea. Rev.*, 122:2623–2630, 1994. 98
- W.C. Skamarock, J.B. Klemp, J. Dudhia, D.O. Gill, D.M. Barker, W. Wang, y J.G. Powers. A description of the advanced research wrf version 2. near tech. note 468. *Natl. Cent. for Atmos. Res., Boulder, Colorado*, 2005. 22, 75, 77
- J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment. *Mon. Wea. Rev.*, 91:99–164, 1964. 11
- J. Smagorinsky. The beginnings of numerical weather prediction and general circulation modeling: early recollections. *Advances in Geophysics*, 25:3–37, 1983. 10
- R.B. Smith. The influence of mountains on the atmosphere. *Advances in Geophysics.*, 21:87–230, 1979. 92
- P.K. Smolarkiewicz, L.G. Margolin, y A.A. Wyszogrodzki. A class of nonhydrostatic global models. *Journal of the atmospheric sciences*, 58(4):349–364, 2001. 127
- A. Staniforth y N. Wood. The deep-atmosphere euler equations in a generalized vertical coordinate. *Mon. Wea. Rev.*, 131:1931–1938, 2003. 66
- J.M. Straka, R.B. Wilhelmson, L.J. Wicker, J.R. Anderson, y K.K. Droegemeier. Numerical solutions of a non-linear density current: A benchmark solution and comparisons. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 17:1–22, 1993. doi: 10.1002/fld.1650170103. 103, 107, 138
- C. Temperton. On scalar and vector transform methods for global spectral models. *Mon. Wea. Rev.*, 119:1303–1307, 1991. 26, 48, 49, 79

- 
- J. Thuburn. Vertical discretizations giving optimal representation of normal modes: Sensitivity to the form of the pressure-gradient term. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 2006. doi: 10.1256/qj.06.10. 35
- J. Thuburn y T.J. Woolings. Vertical discretizations for compressible euler equation atmospheric models giving optimal representation of normal. *J. Comput. Phys.*, 203: 386–404, 2005. 35
- M.I. Richardson A.D. Toigo y C.E. Newman. Planetwrf: A general purpose, local to global numerical model for planetary atmospheric and climate dynamics. *Journal of Geophysical Research: Planets (1991–2012)*, 112(E9), 2007. 127
- H. Tomita y M. Satoh. A new dynamical framework of nonhydrostatic global model using the icosahedral grid. *Fluid Dyn. Res.*, 34:357–400, 2004. 123
- E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, 1999. 14
- M. Tygert. Fast algorithms for spherical harmonic expansions, ii. *J. Comput. Phys.*, 227:4260–4279, 2008. 50
- M. Tygert. Fast algorithms for spherical harmonic expansions, iii. *J. Comput. Phys.*, 229:6181–6192, 2010. 50
- P.A. Ullrich y C. Jablonowski. Mcore: A non hydrostatic atmospheric dynamical core utilizing high order finite volume methods. *J. Comput. Phys.*, 2012. 15, 116, 138
- A. Untch y M. Hortal. A finite-element scheme for the vertical discretization of the semi-lagrangian version of the ecmwf forecast model. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 2006. doi: 10.1256/qj.03.173. 25, 39
- M. Walker. *History of the meteorological office*. Cambridge University Press, 2011. 9

- N.P. Wedi, M. Hamrud, y G. Mozdzynski. A fast spherical harmonics transform for global nwp and climate models. *Mon. Wea. Rev.*, 2013. doi: 10.1175/MWR-D-13-00016. 1. 50
- A. Wiin-Nielsen. On the application of trajectory methods in numerical forecasting. *Tellus*, 11:180–196, 1959. 12
- D. Williamson, J. Drake, J. Hack, R. Jakob, y P. Swarztrauber. A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.*, 102:211–224, 1992. 111, 123
- M.G. Wurtele, R.D. Sharman, y T.L. Keller. Analysis and simulations of a troposphere-stratosphere gravity wave model. Part I. *J. Atmos. Sci.*, 44:3269–3281, 1987. 92, 93, 94, 95, 137
- X. Yang. A non-hydrostatic model for simulation of airflow over mesoscale bell-shaped ridges. *Boundary-Layer Meteorol.*, 65:401–424, 1993. 52
- W. Zdunkowski y A. Bott. *Dynamics of the atmosphere: a course in theoretical meteorology*. Cambridge University Press, 2003. 52