



VNIVERSITAT  
D' VALÈNCIA

---

MODELOS NUMÉRICOS PARA LA  
SIMULACIÓN Y EL ANÁLISIS DE  
SEÑALES ATMOSFÉRICAS

---

**TESIS DOCTORAL**

Correspondiente a los Estudios de Doctorado de Tecnología de la  
Información, Computación y Comunicación  
**Departament d'Informàtica**

**Director: Enrique A. Navarro Camba**

**Iván García Alarcón**

**Valencia, mayo de 2015**





VNIVERSITAT  
DE VALÈNCIA

**Dr. Enrique A. Navarro Camba**, Catedrático de Universidad y miembro del Departament de Física Aplicada de la Universitat de València

### **CERTIFICA**

que la memoria titulada **"Modelos Numéricos Para la Simulación y el Análisis de Señales Atmosféricas"** ha sido realizada bajo su dirección por D. Iván García Alarcón para optar al grado de Doctor.

Y para que así conste a todos los efectos, firma el presente certificado

Fdo. Enrique A. Navarro Camba  
**Director**

València , mayo de 2015





VNIVERSITAT  
ID VALÈNCIA

**DEPARTAMENT D'INFORMÀTICA**

Tesis Doctoral:	MODELOS NUMÉRICOS PARA LA SIMULACIÓN Y EL ANÁLISIS DE SEÑALES ATMOSFÉRICAS.
Autor:	IVÁN GARCÍA ALARCÓN
Director:	ENRIQUE A. NAVARRO CAMBA

El tribunal formado para juzgar la Tesis Doctoral arriba citada compuesto por los Doctores:

Presidente:

Vocal:

Secretario:

Acuerda otorgarle la calificación:

Y para que así conste a los efectos oportunos, firma el presente certificado.

Valencia, a



*A mi hija Agatha y a mi madre Divina*



*“Thunder is good, thunder is impressive; but is lightning  
that does the work.”*

*Mark Twain*



## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar le agradezco infinitamente a mi director de tesis, el Dr. Enrique Navarro, su confianza, apoyo y paciencia, dado que sin su ayuda este trabajo no hubiera sido posible.

También quiero agradecer la financiación por parte del Ministerio de Economía y Competitividad a través del proyecto FIS 2013-44975-P, "Estudio experimental y numérico de fenómenos electromagnéticos naturales para el diagnóstico del medio ambiente", así como el apoyo de su investigador principal, el Profesor D. Alfonso Salinas Extremera de la Universidad de Granada.

Asimismo, no puedo si no reconocer la ayuda y colaboración brindada por mi familia y mis amigos Ricardo, Paco, Ramón y Manu en diferentes aspectos, así como al Dr. Steven Cummer de la Universidad de Stanford por haberme proporcionado ficheros de sferics para poder realizar simulaciones fundamentales del presente trabajo.



## RESUMEN

Los rayos son la principal fuente de radiación de origen natural en la atmósfera terrestre, dado que cada segundo, del orden de un centenar de ellos descargan sobre la superficie de la Tierra, siendo el fenómeno más frecuente en unas regiones que en otras. Dichas descargas emiten la mayor parte de dicha radiación en las bandas *ELF* y *VLf*, bandas en las cuales las señales presentan una baja atenuación. La radiación emitida da lugar, en la banda *ELF* a las resonancias de Schumann y en la banda *VLf* a campos resonantes en la guía formada por la ionosfera y la superficie de la Tierra. Estas señales nos permiten inferir, por una parte, las propiedades de la ionosfera, y por otra la ubicación donde se ha producido la descarga del rayo.

Entre los sistemas detectores de descargas, se puede establecer una clasificación en dos grupos. Un grupo es el formado por redes multi-estación, donde una descarga es detectada en varias estaciones, proporcionando la localización de la descarga con precisión, a través de un procedimiento de triangulación. Tales sistemas presentan el inconveniente de la necesidad de cubrir homogéneamente el área de interés al efecto de detectar con precisión el mayor número de descargas. En este sentido, los costes asociados al mantenimiento y sincronización de las estaciones no es baladí. Otro grupo se encuentra formado por estaciones individuales de detección de descargas, las cuales son menos precisas pero el coste de mantenimiento es muy inferior al de una red. En adición hay situaciones donde únicamente se puede hacer uso de este tipo de estaciones. En todos los casos, estos sistemas funcionan analizando la señal recibida en la banda *VLf*; estas señales son llamadas "radioatmosferics" o "sferics".

En el presente trabajo se presenta en primer lugar un modelo numérico tridimensional en diferencias finitas en el dominio del tiempo de la guía de ondas formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera para el estudio de la propagación de señales en la banda *VL*F, considerando el perfil de conductividad de la ionosfera y la anisotropía inducida por el campo magnético terrestre.

El campo magnético terrestre actúa sobre las partículas cargadas de la ionosfera dando lugar a las corrientes de Hall, Pedersen y la conductividad paralela al campo magnético. Dichas corrientes se introducen mediante sus correspondientes conductividades y su campo eléctrico asociado. Esto hace que se modifique la técnica FDTD convencional para ubicar en las celdas las correspondientes componentes de campo eléctrico que se encuentran localizadas en otras posiciones de la celda FDTD. También se modifica el procedimiento de integración temporal para ubicar correctamente las componentes del campo en sus correspondientes instantes temporales, permitiendo desarrollar un procedimiento iterativo FDTD estable, deduciendo la estabilidad del nuevo procedimiento teóricamente.

Esta técnica se aplica a la modelización de las descargas en la guía de ondas formada por la ionosfera y la superficie de la Tierra y permite, además, simular con precisión las señales detectadas, las cuales se han propagado a través de la guía, permitiendo así, analizar cambios en la ionosfera. Por otro lado, permite estudiar las técnicas de geolocalización de descargas procedentes de otros investigadores, realizando una comparación de la precisión de las mismas con resultados simulados. Finalmente, se desarrolla una nueva técnica basada en la pendiente de fase de la señal recibida. Para comparar tales técnicas con medidas propias, se diseña un sistema de medición de descargas portátil de tal manera que permite obtener señales en diferentes entornos de medida y nivel de ruido electromagnético. En

este sentido, el proceso de detección de descargas presenta diversos problemas, por una parte los asociados a la existencia de ruido, en las bandas de frecuencia de interés, procedente sobretodo de la actividad industrial, y por otra la referente a la recepción de múltiples señales procedentes de múltiples distancias, dada las numerosas descargas que se generan cada segundo.



# ÍNDICE

<b>1. Introducción General.....</b>	<b>3</b>
1.1. La Descarga del Rayo.....	4
1.2. Radioatmosféricos.....	8
1.3. Sistemas de Detección de Descargas.....	10
1.3.1. Detección desde el espacio.....	10
1.3.2. La Red Nacional de Detección de Descargas (NLDN).12	
1.3.3. La Red Mundial de Localización de Descargas (WWLLN).....	13
1.3.4. Otros Sistemas de Detección de Descargas .....	14
1.4. Contribuciones.....	15
<b>2. Propagación de Señales VLF en la Guía Tierra-Ionosfera.....</b>	<b>19</b>
2.1. Guía de Ondas Ideal de Planos Paralelos .....	19
2.2. Excitación de los modos en la guía Tierra-Ionosfera.....	25
2.2.1. Fuente de los Sferics.....	25
2.2.2. Excitación de los Modos .....	26
2.3. La Guía de Ondas Tierra-Ionosfera.....	28
2.3.1. Propiedades de la Tierra y de la Ionosfera.....	29
2.3.2. Teoría de propagación en la guía de ondas Tierra- Ionosfera.....	34
2.3.3. Corrección debida a la Curvatura de la Tierra.....	36
2.3.4. Características de la propagación de señales VLF.....	37
<b>3. Modelo FDTD de la Guía de Ondas Tierra-Ionosfera.....</b>	<b>43</b>
3.1. Las Ecuaciones de Maxwell.....	44
3.2. Diferencias Finitas.....	47
3.2.1. Aproximación del Operador Derivada.....	47

3.2.2. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.....	51
3.2.3. Estabilidad y Convergencia.....	53
3.2.4. El Algoritmo de Yee.....	54
3.2.5. Estabilidad del Algoritmo de Yee.....	62
3.2.6. Modelado.....	67
3.2.7. Dispersión del Algoritmo de Yee.....	67
3.3. Excitación.....	74
3.4. Modelización de Medios con Pérdidas por Conducción.....	75
3.5. Consideraciones Sobre la Inserción de la Conductividad en las Ecuaciones FDTD.....	80
3.6. El Problema de la Modelización de Cortezas Esféricas.....	85
3.7. Modelado FDTD de Cortezas Esféricas.....	88
3.7.1. FDTD en Coordenadas Curvilíneas.....	88
3.7.2. Consideración del Perfil de Conductividad.....	101
3.7.3. Sistemas con Simetría de Revolución. Modelo Bidimensional.....	103
3.7.4. Modelo Tridimensional.....	107
3.8. Formalismo FDTD para el Análisis de la Ionosfera con Anisotropía inducida por el Campo Magnético Terrestre.....	109
3.8.1. Implementación FDTD.....	115
3.8.2. Estabilidad del Nuevo Esquema FDTD.....	122
3.9. Validación del Modelo y Resultados.....	127
<b>4. Metodología del Tratamiento de la Señal VLF para la Localización de Descargas.....</b>	<b>139</b>
4.1. Método de Korol y Nikolaenko.....	141
4.2. Método de Rafalsky, Nickolaenko y Shvets.....	147
4.2.1. Estimación del Vector Dirección de la Descarga.....	147
4.2.2. Estimación de la Distancia de la Descarga.....	150

4.3. Método Nagano, Yagitani, Ozaki, Nakamura y Miyamura...	153
4.3.1. Estimación de la Distancia de la Descarga.....	153
4.4. Método de Ramachadran, Prakash, Deo y Kumar.....	158
<b>5. Resultados y Desarrollo Argumental de Aplicación a</b>	
<b>Métodos Existentes. Método Basado en la Pendiente de</b>	
<b>Fase.....</b>	<b>165</b>
5.1. Resultados y Desarrollo Argumental de Aplicación a	
Métodos existentes.....	166
5.1.1. Aplicación al Método de Nagano et al.....	166
5.1.2. Aplicación al Método de Ramachadran et al.....	171
5.2. Método de Localización de Descargas Basado en la	
Pendiente de Fase de la Señal.....	176
5.3. Sistemas Detectores de Sferics.....	182
5.3.1. Sistema Detector de Stanford.....	186
5.3.2. Sistema Detector Diseñado.....	187
5.3.2.1. Diseño de la Antena y Valores Eléctricos.....	188
5.3.2.2. Evaluación del Ruido.....	191
5.3.2.3. Circuito Preamplificador.....	193
5.3.2.4. Caracterización.....	196
5.4. Aplicación del Método de Localización Basado en la	
Pendiente de Fase a las Medidas Disponibles.....	199
<b>6. Conclusiones Finales.....</b>	<b>205</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>209</b>



# **Capítulo 1. Introducción General**



## 1. Introducción General

La localización de las descargas asociadas a los rayos ha sido desde tiempos inmemorables importante para el hombre, dado que conocer cuándo y dónde va suceder el fenómeno, es de ayuda para proteger tanto personas como bienes y evitar desastres. Es por ello que las compañías eléctricas hacen uso de redes de localización de descargas para proteger sus instalaciones.

Los rayos radian energía en forma de pulsos electromagnéticos, la cual se distribuye en un ancho de banda bastante amplio, abarcando desde unos pocos *Hz* [Burke and Jones, 1992] hasta decenas de *MHz* [Weiman and Krider, 1986].

Debido a las escalas tanto temporales (*ms*) como espaciales (varios *Km*) de la fuente de corriente de la descarga electromagnética asociada a los rayos, la mayor parte de la energía contenida en el espectro de radiación se encuentra comprendida en las bandas *ELF* (*Extremely Low Frequency 3-3.000 Hz*) y *VLF* (*Very Low Frequency 3-30 kHz*) [Uman, 1987].

Los pulsos electromagnéticos asociados a las descargas de rayos a frecuencias *ELF/VLF* se conocen como radio atmosféricos o más comúnmente como *sferics*, y son el principal elemento de estudio de esta tesis.

A frecuencias *ELF*, y *VLF* las ondas electromagnéticas se reflejan en la guía de ondas natural formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera, siendo guiadas por la misma y pudiendo alcanzar grandes distancias sin apenas atenuación (típicamente de unos  $2 - 3 \text{ dB}/1.000 \text{ km}$ ), pudiendo, por consiguiente, ser detectadas a gran distancia del lugar en el cual fueron originadas [Davies, 1990].

Observando sferics en diferentes localizaciones, se puede determinar el origen de la fuente de cada una de las descargas individuales de los rayos [Horner, 1954]. En adición, las características de la forma de la onda de los sferics registradas en cada receptor, revelan información relativa tanto a la fuente origen de la descarga como a propiedades de la ionosfera y la Tierra a lo largo de la trayectoria de propagación [Cummer, 1997].

## 1.1 La Descarga del Rayo

En una nube de tormenta típica, se forma un dipolo eléctrico entre una extensa capa cargada positivamente situada encima de otra capa de igual magnitud de carga negativa [Rakov y Uman, 2003]. Esta separación de carga se presume causada fundamentalmente por el mecanismo conocido como granizo suave-cristales de hielo en el cual las partículas pesadas de granizo caen e interaccionan con las partículas más ligeras de cristales de hielo atrapadas en la corriente de aire ascendente de una tormenta [Rakov y Uman, 2003].

Esta interacción da como resultado por un lado, partículas grandes y pesadas portadoras de carga eléctrica neta negativa y por otro partículas pequeñas y ligeras portadoras de carga eléctrica positiva. Una vez estas capas cargadas eléctricamente contienen suficiente carga, los campos eléctricos asociados a la separación de carga comienzan a superar el voltaje de ruptura del dieléctrico del aire y se genera una descarga.

Grosso modo, se pueden clasificar las descargas en dos grupos: las de nube y las de tierra. Las descargas de nube son aquellas que no terminan en la superficie de la Tierra, mientras que en las de Tierra, por lo menos, existe una descarga parcial en dicha superficie [Prentice y Mackerras, 1977]. Históricamente, las descargas de nube re-

presentan el tipo de descarga más numeroso, siendo las más difíciles de identificar [Prentice y Mackerras, 1977].

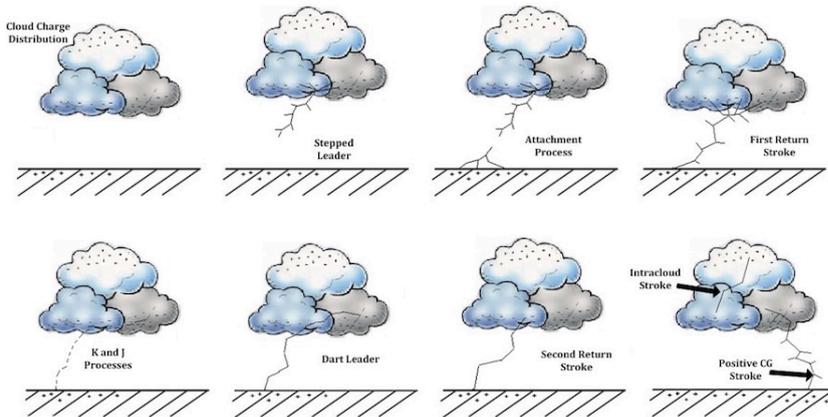


Figura 1.1: Diferentes estadios de una descarga negativa nube-Tierra [Adaptado de Rakov, 2003].

Adicionalmente, se puede establecer una segunda división de las descargas de tierra, dependiendo de la capa de carga en la cual se han originado. Si se han originado en la capa cargada negativamente, se denominan descargas nube-tierra negativas, y los electrones se transfieren desde la nube hasta la superficie de la Tierra, mientras que si el origen es la capa cargada positivamente, la denominación es descarga nube-tierra positiva, resultando en una transferencia de carga positiva de la nube a la superficie de la Tierra (los electrones se transfieren desde la superficie de la Tierra hasta la nube).

Tal y como ilustra la figura 1.1, una descarga negativa nube-tierra se inicia cuando un canal conductor descendente comienza a labrarse camino desde la nube hacia la superficie de la Tierra después de una

ruptura preliminar en el seno de la capa cargada negativamente. El canal conductor descendente se aproxima hacia la superficie de la Tierra en una serie de pequeños pasos de longitud (del orden de decenas a centenas de metros).

Conforme el canal conductor desciende hacia la superficie del suelo, el campo eléctrico existente entre el extremo del canal conductor y la superficie de la Tierra comienza a adquirir un valor lo suficientemente elevado como para inducir la creación de canales conductores los cuales ascienden desde la superficie de la Tierra hasta quedarse a una distancia de una centena de metros del canal descendente inferior. Una vez se ha alcanzado la mencionada distancia, tiene lugar el proceso de acoplamiento, facilitando la creación de un canal conductor entre la capa cargada negativamente de la nube y la superficie de la Tierra.

Es en este preciso instante cuando tiene lugar el primer impacto de retorno de la descarga, circulando gran cantidad de corriente desde la superficie de la Tierra hasta la nube y generando el impulso electromagnético conocido como radioatmosférico o *sferic*.

La corriente de una descarga típica tiene un valor de pico en torno a  $30 \text{ kA}$ , aunque descargas intensas pueden generar corrientes mayores, del orden de varios centenares de  $\text{kA}$ . Además, debido a la duración temporal de la corriente primaria y las longitudes típicas del canal conductor ( $\sim 10 \text{ km}$ ) [Rakov y Uman, 2003], el pico de la intensidad del campo radiado del *sferic* se encuentra en el intervalo  $(1 - 10) \text{ kHz}$  [Uman, 1987].

Tras el primer impacto de retorno, la capa de carga puede resultar mermada, dando como resultado la finalización del proceso. Sin embargo, en caso de quedar carga adicional disponible, tienen lugar los

procesos conocidos como  $J$  y  $K$  los cuales son los responsables de redistribuir la carga remanente en la nube [Uman, 1987]. El proceso  $J$  se caracteriza por la variación del campo eléctrico estacionario en un periodo de decenas de milisegundos, mientras que el proceso  $K$  se caracteriza por pequeñas variaciones relativamente rápidas de campo eléctrico en intervalos alrededor de  $(2 - 20) ms$  [Uman, 1987].

El canal conductor, desde el primer impacto de retorno aún se encuentra parcialmente ionizado, lo que facilita la reionización del canal facilitando el camino a un segundo impacto de retorno.

Este proceso puede tener lugar repetidas veces, dando lugar a docenas de impactos de retorno con intervalos entre ellos de decenas de milisegundos. Las corrientes pico típicas de segundos y posteriores impactos de retorno son aproximadamente del orden de la mitad del primero [Berger et al., 1975]. La figura 1.1 representa los diferentes estadios de dos impactos de una descarga negativa nube-tierra.

Un proceso análogo tiene lugar para descargas positivas nube-tierra. Las descargas positivas nube-tierra presentan corrientes de pico mayores que las descargas negativas nube-tierra. Este tipo de descargas representan una pequeña fracción del total, a pesar de ser el tipo predominante en algunas tormentas [Rakov y Uman, 2003].

En una tormenta típica, las descargas entre nubes representan el tipo de descarga más común, siendo la proporción superior al triple en relación con las descargas a Tierra [Prentice y Mackerras, 1977].

Las descargas entre nubes tienen lugar entre las capas negativa y positiva de las nubes de tormenta, presentando corrientes de una

magnitud similar a las descargas nube a tierra [Rakov y Uman, 2003].

## 1.2 Radioatmosféricos

Las bandas de radio *ELF* y *VLF* han sido objeto de estudio a lo largo de las décadas pasadas, debido a la transmisión de señales de radio de larga distancia en estas bandas.

Las ondas *ELF* y *VLF*, además de permitir comunicaciones a larga distancia, haciendo posible comunicaciones sin visión directa a través de las sucesivas reflexiones entre la guía de ondas formada por la superficie de la Tierra y la parte baja de la ionosfera, presentan una baja atenuación en la propagación a largas distancias, del orden de unos 2-3 *dB* por cada 1.000 *km* [Jones, 1967].

Así, estas bandas de frecuencia se presentan como ideales para comunicaciones transcontinentales y barcos de navegación oceánica.

La figura 1.2 muestra un espectrograma frecuencia-tiempo en el rango de (0 – 20) *kHz*, poniendo de manifiesto las señales típicas que ocupan las bandas de frecuencia *ELF/VLF*.

Cada línea vertical representa un sferic, apreciándose cientos de ellos en la muestra de 10 *s*.

Cada uno de estos sferics se ha generado a partir de la descarga de rayos procedentes de tormentas producidas a lo largo del Globo y cuyas ondas se han propagado a través de la guía de ondas Tierra-ionosfera hasta la ubicación del receptor.

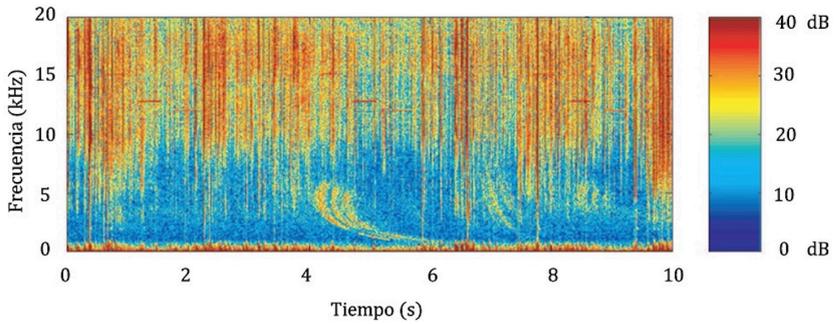


Figura 1.2: Espectro frecuencia-tiempo mostrando sferics.

La figura 1.3a muestra la forma de onda de un sferic típico correspondiente a una descarga negativa nube-tierra de intensidad  $-25 \text{ kA}$  de pico. Los pulsos semidiscretos en la cola de la forma de onda se deben a señales que se propagan a lo largo de diferentes trayectorias con diferente número de reflexiones entre la superficie de la Tierra y la ionosfera [Chapman y Pierce, 1957].

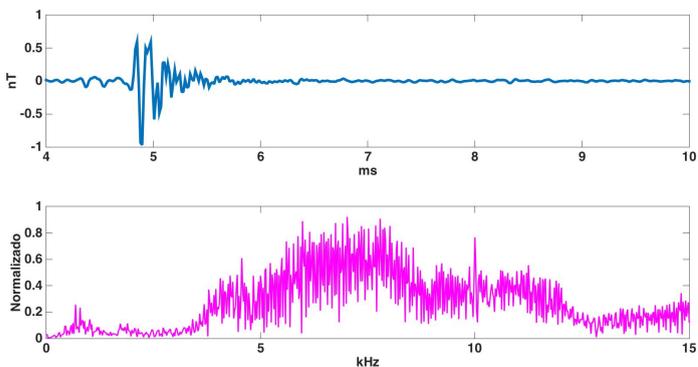


Figura 1.3: (a) Forma de onda de un sferic típico, (b) Representación espectral del sferic.

La figura 1.3b muestra la amplitud del sferic en el dominio de la frecuencia, computado haciendo uso de la transformada rápida de Fourier (FFT). Las variaciones en la amplitud de la frecuencia se deben a las interferencias constructivas y destructivas de los modos de la guía de ondas con velocidades de fase que varían con la frecuencia a diferentes tasas. A bajas frecuencias (de 3 a 9 kHz) las variaciones en la amplitud son bastante simples debido al reducido número de modos. A frecuencias superiores, más modos se encuentran involucrados en el proceso y las interferencias producidas producen variaciones más complicadas. Ambas representaciones del sferic proporcionan idéntica información sobre la ionosfera, dado que provienen de la propagación de la señal en la guía de ondas Tierra-ionosfera.

De la figura 1.3b se puede apreciar que el grueso de la energía recae en el rango de frecuencia *ELF/VLF*, teniendo lugar un pico en el rango (2.5 – 12) kHz [Cummer, 1997]. En general, sin embargo, la duración y el contenido espectral de los sferics es altamente variable dando lugar a formas de onda inusuales.

Se han observado variaciones en la forma de onda del sferic dependiendo de si la propagación tiene lugar durante el día o la noche, así como si la misma tiene lugar a través de la superficie de la Tierra o del mar. Dichas variaciones son debidas a diferentes condiciones de la guía de propagación como pueden ser el cambio de conductividad o la altura de la ionosfera a la cual tiene lugar la reflexión.

## **1.3 Sistemas de Detección de Descargas**

### **1.3.1 Detección desde el espacio**

La primera detección de descargas desde una plataforma espacial se realizó con un detector óptico transitorio (ODT) [Christian et al., 2003]

al cual le siguió el sensor de imagen de rayos (LIS) [Christian et al., 1999; Ushio et al., 2002] a bordo del satélite de la misión *Tropical Rainfall Measuring* (TRMM) en 1997. El satélite TRMM se encuentra posicionado a 350 km de altitud y su órbita presenta una inclinación de 35°. El sensor LIS detecta el total de descargas mediante el registro de señales ópticas, las cuales se producen como resultado de la dispersión que tiene lugar dentro de la parte superior de las nubes de radiación luminosa producida por los canales de los rayos.

Con un campo de visión de 600 km, LIS puede detectar puntos determinados en la Tierra a intervalos de 90 s y reportar los transitorios ópticos detectados por una CCD con una resolución de 2 ms. El tipo de datos de más bajo nivel proporcionado por LIS se llama evento, el cual es un transitorio detectado en un único pixel. Los eventos adyacentes se agrupan en unidades llamadas grupos. A grandes rasgos, un grupo corresponde a un evento óptico asociado a la descarga de un rayo. Los flashes LIS son conjuntos de grupos separados por no más de 330 ms en el tiempo y 5,5 km de distancia. LIS puede crear mapas de densidad de los sucesos de las descargas sobre el conjunto de la Tierra en un amplio intervalo temporal. Los datos OTD ponen de manifiesto que la mayoría de las descargas tienen lugar en el hemisferio sur durante los meses de diciembre a febrero, y en el hemisferio norte en el periodo comprendido entre los meses de junio y agosto.

Desafortunadamente, las emisiones ópticas detectadas por LIS y OTD no corresponden exactamente a la radiación electromagnética asociada a las descargas de los rayos. Así pues, a veces es difícil encontrar una correlación de los datos LIS con otros conjuntos de datos tales como sferics *VL*F o los proporcionados por sistemas formados por redes de detectores de descargas.

### 1.3.2 La Red Nacional de Detección de Descargas (NLDN)

La red nacional de detección de descargas de los EE.UU. (NLDN) proporciona datos de descargas de rayos de Norteamérica y territorios cercanos [Cummins et al., 1998]. Esta red suministra soporte a la industria eléctrica, el servicio nacional meteorológico de los EE.UU., la administración federal de aviación, así como a otros usuarios tanto gubernamentales como comerciales. La red hace uso de una técnica propietaria de Tiempo de Llegada y Dirección de Llegada del Campo Magnético (TOA/MDF) para detectar descargas nube-tierra. Las descargas nube-tierra se disciernen correlacionando las formas de onda de banda ancha ( $1\text{ kHz} - 1\text{ MHz}$ ) recibidas, con la forma de onda directa esperada de una descarga de este tipo [Cummings et al., 1998]. Esta técnica elimina muchos de los errores debidos a las múltiples reflexiones entre la ionosfera y la superficie de la Tierra así como los errores de polarización [Kridner et al., 1976], pero requiere componentes de alta frecuencia del espectro del sferic las cuales son a menudo demasiado débiles en medidas realizadas a largas distancias.

La red NLDN comercializa sus datos, excluyendo las descargas intranube, basándose en el hecho de que las formas de onda de las citadas descargas son muy diferentes de las forma de ondas de los sferics generados por descargas nube-tierra [Kridner et al., 1976].

Los datos suministrados por la red proporcionan el tiempo, ubicación, corriente de pico y polarización, así como el número de impactos de retorno y diversos parámetros relativos a la ubicación con exactitud de descargas. Los datos disponibles tienen una resolución temporal típica de  $1\text{ ms}$ , aunque la red dispone de resoluciones mucho mayores. Las descargas se localizan con un error medio de  $250\text{ m}$  y con una eficiencia de detección superior al 99% para descargas cuyo

impacto de retorno presenta corrientes de pico superiores a 5 kA. La eficiencia de detección es significativamente menor ( $\approx 50\%$ ) para los impactos de retorno subsiguientes, dado que impactos de retorno múltiples presentan típicamente corrientes de pico de la mitad del primer impacto de retorno [Berger et al., 1975]. La intensidad de pico de la descarga viene a veces proporcionada como un valor normalizado relativo a la fuerza de la señal (RNSS), el cual se basa en el modelo de propagación de la señal propuesto por Cummins et al. [1998]. Basado en este modelo, el RNSS se encuentra linealmente relacionado con la corriente mediante la ecuación

$$I_{pico} (kA) = 0,185 \times RNSS \quad (1.1)$$

Mientras que la corriente de pico no representa de manera adecuada la forma o la duración de la onda de un sferic en la banda de frecuencia *VLf*, los resultados indican que los valores típicos de la corriente suministrados por la red NLDN están altamente correlacionados con la intensidad máxima de la señal *VLf* en los sferics [Wood e Inan, 2000].

### 1.3.3 La Red Mundial de Localización de Descargas (WWLLN)

Las localizaciones de las descargas proporcionadas por la red mundial de localización de descargas (WWLLN) requieren el tiempo o momento de llegada del grupo (TOGA, time of group arrival) de al menos 5 sensores de la red. Estos sensores se pueden encontrar a varios miles de kilómetros de distancia de la descarga. Se ha de especificar que los sensores muy próximos a la descarga no son aptos a la hora de usarlos para su localización. La agrupación geográfica de los sensores reviste cierta importancia, dado que la localización de la descarga se establece más exactamente cuando los sensores se encuentran lejos de ella que por aquellos más cercanos. La situa-

ción óptima es la ubicación equiespaciada de la red de sensores alrededor de la Tierra. Dada la esfericidad de la Tierra, cada descarga se encuentra rodeada por sensores, pero no necesariamente por los sensores que la detectan.

Típicamente, sólo del 15% al 30% de las descargas detectadas por una estación es detectada por 5 o más, correspondiendo a las descargas más intensas.

Cubrir el mundo entero por estaciones detectoras espaciadas uniformemente, con cerca de 1.000 *km* de separación requeriría unos 500 sensores. Si la distancia de separación entre estaciones se incrementara hasta los 3.000 *km*, se necesitaría solamente alrededor de poco más de 50 sensores. Actualmente la red dispone de prácticamente la totalidad de sensores necesarios para cubrir completamente el globo terrestre, faltando alguna estación en zonas tropicales donde son más frecuentes las descargas.

El rango de detección de frecuencias para los sferics comprende desde los 0 a los 30 *kHz*, y la exactitud de la red se sitúa entre los 10 y 15 *km*, siendo la precisión temporal del orden de los 30  $\mu$ s. La red detecta tanto las descargas nube-tierra como las nube-nube. El umbral de detección de la red, según estudios realizados en EEUU, Brasil y Nueva Zelanda se encuentra entre el 5 y el 10% de todas las descargas con corrientes de pico mayores a 45 *kA*.

#### **1.3.4 Otros Sistemas de Detección de Descargas**

Muchos otros métodos de radiolocalización de descargas han sido implementados. Entre ellos se encuentran los sistemas monoestación, en cuyo estudio se centra parte de este trabajo. Dichos sistemas son utilizados para detectar descargas intensas producidas a

largas distancias del punto de medida, empleando la impedancia de la onda de la descarga para estimar el alcance de la misma y localizando la dirección del campo magnético para medir el ángulo de llegada de la descarga. [Burke y Jones, 1995; Huang et al, 1999; Price y Asfur, 2002]. Ambas medidas determinan la ubicación de la descarga.

Por otra parte, los métodos más comúnmente empleados para localizar descargas se basan en sistemas multiestación. Algunos de los métodos empleados se basan en encontrar la dirección del campo magnético de la onda detectada, mientras que otros métodos emplean técnicas basadas en la diferencia en el tiempo de llegada de las componentes de la onda. Asimismo existen métodos de detección que combinan ambas técnicas.

#### **1.4 Contribuciones**

Las contribuciones de la presente tesis doctoral son:

- Realización de un modelo numérico tridimensional en diferencias finitas en el dominio del tiempo de la guía formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera para el estudio de señales en la banda *VL*F teniendo en consideración el perfil de conductividad de la ionosfera y la anisotropía inducida por el campo magnético terrestre.
- Análisis de la señal recibida procedente de una descarga, dentro de la banda *VL*F, y comparación de los diferentes métodos de estimación existentes de localización de descargas desde una única estación
- Desarrollo de un nuevo procedimiento de análisis basado en la pendiente de la fase de la señal recibida.

- Diseño de un sistema de detección monoestación autónomo que permita obtener señales *VLf*, minimizando el ruido electromagnético. y optimizando el nivel de la señal para su posterior tratamiento.

## **Capítulo 2. Propagación de Señales VLF en la Guía Tierra-Ionosfera**



## 2 Propagación de Señales VLF en la Guía Tierra-ionosfera

Una de las características definitoria de los sferics reside en que la energía en la banda de frecuencias *VLF* se propaga alrededor de la Tierra mediante múltiples reflexiones entre la superficie de la Tierra y la ionosfera. La propagación *VLF* en el seno de la guía Tierra-ionosfera presenta un índice de atenuación dependiente de la frecuencia y de las propiedades de la trayectoria de propagación en la guía.

Estas propiedades comprenden la altura de la ionosfera a la cual tiene lugar la reflexión de los sferics, que varía en función de si la propagación tiene lugar durante el día o la noche, la conductividad de la trayectoria de propagación, debida a si tiene lugar sobre tierra, mar o hielo, y las diferencias de propagación este-oeste consecuencia del efecto del campo magnético terrestre.

Todo este conjunto de factores afectan a la forma de onda del sferic detectado en la estación receptora y han de ser tenidos en cuenta a la hora de hacer un análisis de los datos recibidos.

### 2.1 Guía de Ondas Ideal de Planos Paralelos

Muchos de los conceptos asociados a una guía de ondas ideal de planos paralelos son trasladables a la propagación de ondas *VLF* en la guía de ondas formada por la Tierra y la ionosfera, a pesar de que ésta última dista de ser una estructura ideal.

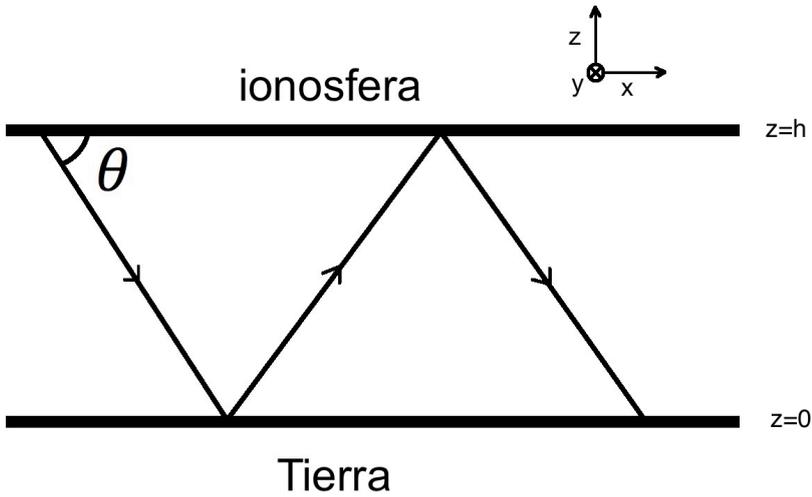


Figura 2.1: Propagación de una onda en una guía conductora ideal de planos paralelos

La figura 2.1 representa una región del espacio limitada por dos planos paralelos conductores ubicados en  $z = 0$  y  $z = h$ . Si se considera una onda plana linealmente polarizada propagándose en el plano  $x - z$  con un ángulo  $\theta$  relativo al eje  $x$  y con el vector campo eléctrico paralelo al eje  $y$  (perpendicularmente polarizada), el campo eléctrico de la onda incidente en el plano inferior viene descrito por la expresión

$$E_y^i = E_0 \exp\{-jk(x \cos\theta - z \sin\theta)\} \exp(j\omega t) \quad (2.1)$$

donde  $k$  es el número de onda dado por

$$k = 2\pi f / c \quad (2.2)$$

donde  $f$  es la frecuencia de la onda y  $c$  la velocidad de la luz. Para cumplir las condiciones de contorno de un conductor perfecto, la

componente tangencial del campo eléctrico  $E_y$ , debe anularse en  $z = 0$  [Inan e Inan, 2000]. Además, dado que un conductor perfecto no presenta pérdidas, la onda incidente se refleja completamente, teniendo el contorno un coeficiente de reflexión  $R = -1$  para ondas polarizadas perpendicularmente. Así, el campo eléctrico de la onda reflejada se puede escribir como

$$E_y^r = -E_0 \exp\{-jk(x \cos \theta + z \sin \theta)\} \exp(j\omega t) \quad (2.3)$$

La onda reflejada también es una onda plana con polarización perpendicular. El campo eléctrico total por encima del conductor inferior es la suma de las dos ondas planas representadas por las ecuaciones (2.1) y (2.3), y se puede escribir como

$$E_y^{tot} = j2E_0 \sin(kz \sin \theta) \exp(\omega t - kx \cos \theta) \quad (2.4)$$

Las condiciones de contorno para un conductor perfecto en  $z = h$  requiere también que  $E_y$  sea igual a 0. Por consiguiente, para satisfacer esta condición, se tiene que

$$kh \sin \theta = n\pi \quad (2.5)$$

donde  $n$  es un entero. La ecuación (2.5) pone de manifiesto que para una frecuencia determinada, existen valores determinados de  $\theta$  para los cuales una onda plana con un campo eléctrico total  $E_y$  dado por (2.4) puede existir, representando una onda reflejada de un lado al otro entre las placas propagándose en la dirección del eje  $x$ . Los casos específicos en los cuales tales ondas pueden tener lugar, se conocen como modos y la ecuación (2.5) es la ecuación de los modos para una guía de ondas conductora ideal de planos paralelos. Otra interpretación de la ecuación (2.5) corresponde a que para que un modo exista, las ondas planas uniformes constituyentes del mismo,

deben mantener los frentes planos después de sufrir una reflexión en los límites de la guía de ondas.

Los modos de la guía de onda se encuentran compuestos de ondas con polarización perpendicular llamados modos Transversal Eléctrico o modos **TE**, dado que sus campos eléctricos son siempre transversales a la dirección de propagación. Los modos **TE** tienen componentes de campo magnético,  $H_x$  y  $H_z$ , en las direcciones de los ejes  $x$  y  $z$  respectivamente. También pueden tener lugar modos compuestos de ondas con polarización paralela. Las ondas con polarización paralela presentan campos magnéticos,  $H_y$ , en la dirección del eje  $y$ ,  $E_x$  y  $E_z$ , en las direcciones de los ejes  $x$  y  $z$  respectivamente. Se ha de tener en consideración que el coeficiente de reflexión para ondas incidentes con polarización paralela sobre un conductor perfecto es  $R = -1$ . Tales modos se conocen como modos Transversal Magnético o **TM**, puesto que sus campos magnéticos son siempre transversales a la dirección de propagación.

Existe un caso específico en el cual el modo **TM** presenta un campo eléctrico que es siempre paralelo al eje  $z$ , siendo tanto el campo eléctrico como el magnético transversales a la dirección de propagación. Ese modo se conoce como modo Transversal Electromagnético o **TEM** [Inan e Inan, 2000].

Se puede establecer una ordenación de los modos de la guía de onda atendiendo a los valores del ángulo  $\theta$  para los cuales pueden existir, siendo el modo de orden más bajo el que presenta un menor valor de  $\theta$ .

Por ejemplo, el orden más bajo de modo **TE** se representa como el modo **TE<sub>1</sub>**. Además, a modos de diferentes frecuencias les corresponden diferentes valores de  $\theta$ , lo cual se desprende de las ecuacio-

nes (2.2) y (2.5). La figura 2.2a muestra la variación de  $\theta$  con la frecuencia para los 5 primeros modos  $TM$ . Se puede comprobar como para valores determinados de la frecuencia, las curvas se van aplanando hasta alcanzar los  $90^\circ$ . A esas frecuencias, conocidas como frecuencias de corte, las ondas no se propagan a lo largo de la guía, cumpliéndose las condiciones de contorno únicamente para una onda reflejándose de un lado a otro entre los límites superior e inferior de la guía.

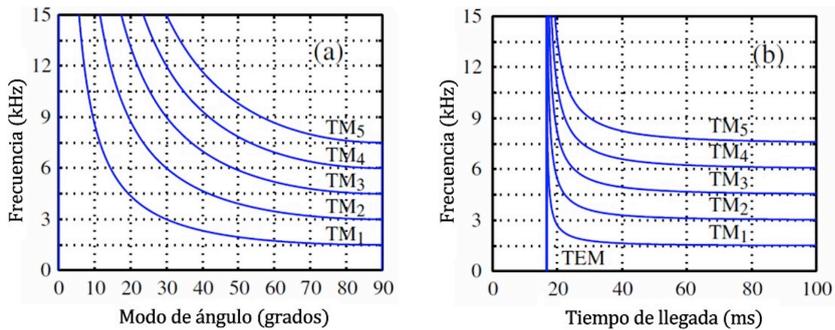


Figura 2.2: Relación Modo-Frecuencia en una guía de ondas ideal de altura  $h = 100 \text{ km}$ . a: Ángulo del modo respecto a la frecuencia para los 5 primeros modos. B: Tiempo de llegada del grupo respecto a la frecuencia para los 5 primeros modos y el modo  $TEM$  a una distancia de  $5.000 \text{ km}$ .

Para una onda con frecuencia por debajo de la frecuencia de corte, la ecuación (2.5) únicamente se cumple para valores de  $\theta$  pertenecientes al plano de los números complejos, dando lugar a una atenuación de la onda la cual se puede deducir de la ecuación (2.4).

Este tipo de modos se conoce como ondas evanescentes [Inan e Inan, 2000] y no son portadoras de potencia media real a lo largo de

la guía de ondas. La altura de la guía de ondas  $h$  determina la frecuencia de corte para cada modo de acuerdo con  $f_c = nc/2h$ . Las ondas **TEM** no presentan frecuencia de corte, dado que para una guía de ondas ideal de planos paralelos,  $\theta = 0$  para todas las frecuencias.

Con la excepción de los modos **TEM**, los modos se propagan reflejándose continuamente entre los límites de la guía de ondas a un determinado ángulo  $\theta$ , por lo que la velocidad de propagación de la energía transportada por un modo a lo largo de la guía de ondas es menor que la velocidad de la luz. La velocidad de fase de propagación de las ondas de la expresión (2.5) dependen de  $\theta$ , el cual para un modo determinado es función de la frecuencia, dado que las ondas que se propagan a través de una guía formada por planos paralelos presenta dispersión. La velocidad de grupo de un modo en la guía viene dado por

$$v_g = c \cos \theta = c \sqrt{1 - (f_n/f)^2} \quad (2.6)$$

donde  $f_n$  representa la frecuencia de corte para el modo de orden  $n$ . De la expresión (2.6) se desprende que conforme  $f$  se aproxima a la frecuencia de corte,  $v_g$  tiende a 0, mientras que si  $f$  toma valores mucho mayores que la frecuencia de corte,  $v_g$  tiende a valores cercanos a la velocidad de la luz. Además, para valores de  $f$  menores que la frecuencia de corte, la onda es evanescente y se atenúa rápidamente. La figura 2.2b ilustra la dispersión sufrida por una señal generada por una fuente debida a un impulso, lo cual excitaría todos los modos de una onda **TM**.

El modo **TEM** viaja a la velocidad de la luz, llegando todas las frecuencias simultáneamente. El modo **TM<sub>1</sub>** se dispersa, y las ondas

con frecuencias cercanas a la frecuencia de corte del modo  $TM_1$  llegan más tarde que el modo  $TEM$ . Ondas con frecuencias mucho mayores que la de corte del modo  $TM_1$ , presentan velocidades de grupo cercanas a la velocidad de la luz y llegan prácticamente al mismo tiempo que el modo  $TEM$ . Es evidente que para frecuencias inferiores a las de corte, los modos no contribuyen energéticamente a la señal recibida.

El planteamiento anteriormente descrito es, en determinados supuestos, aplicable a la guía de ondas formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera pese a que diste de comportarse como una guía ideal de planos paralelos, dado que las características de la propagación de modos es análoga.

## 2.2 Excitación de los Modos en la Guía Tierra-Ionosfera

### 2.2.1 Fuente de los Sferics

La señal recibida de un sferic es fuertemente dependiente de la fuente de corriente que ocasiona la descarga electromagnética. Son de particular interés las señales generadas por corrientes verticales, las cuales tienen lugar en descargas nube-tierra y en porciones de descargas intranube, así como las corrientes horizontales asociadas a otras descargas intranube.

El tipo más simple de fuente es un elemento infinitesimal de corriente conocido como dipolo de Hertz [Budden, 1961], el cual consiste en dos cargas  $\pm q$  con valores idénticos y opuestos conectadas por un conductor de longitud  $l$ . En un dipolo de Hertz real,  $q$  se vuelve infinitamente grande mientras que  $l$  alcanza dimensiones infinitesimales. Para simplificar los cálculos de los campos eléctrico y magnético generados por un dipolo de Hertz, se hace uso de otro vector  $\vec{U}$ , deno-

minado vector de Hertz, dado que permite expresiones dotadas de mayor simplicidad que las derivadas de los campos  $\vec{E}$ , o  $\vec{H}$ , directamente [Stratton, 1941]. Los campos  $\vec{E}$ , y  $\vec{H}$ , se derivan de  $\vec{U}$ , mediante de las siguientes expresiones [Budden, 1961]

$$\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) \quad (2.7)$$

$$\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{U} \quad (2.8)$$

Para una fuente lineal, el vector de Hertz es siempre paralelo a la fuente de corriente. Por consiguiente, para una fuente vertical paralela al eje  $z$ , sólo la componente  $U_z$  del vector de Hertz es diferente de 0. Para hacer una modelización de un dipolo eléctrico lineal vertical portador de una corriente  $I$ , se puede integrar el vector infinitesimal de Hertz a lo largo de la distancia  $l$ , resultando [Cummer, 1997]

$$U_z = -\frac{kI}{8\pi^2\omega} \int_C \exp[-jk(x \cos\theta + z \sin\theta)] \cos\theta d\theta \quad (2.9)$$

donde  $\theta$  es el ángulo en el plano  $x - z$  relativo al eje  $x$ , y el término armónico  $\exp(i\omega t)$  ha desaparecido. Un desarrollo análogo se puede aplicar a una fuente horizontal, teniendo en consideración que la componente  $U_z$  del vector de Hertz es cero, mientras que las componentes  $U_x$  y  $U_y$  no son nulas debido a que el vector  $\vec{U}$  es paralelo a la fuente.

### 2.2.2 Excitación de los Modos

Si la fuente descrita en el apartado anterior se sitúa en el interior de una guía de ondas conductora ideal, conforme las ondas emitidas por

una descarga interactúan con los contornos de la misma, los modos quedan determinados. Sin embargo, la fuerza relativa del campo de un modo a una cierta distancia de la fuente origen depende del ángulo de propagación y de la orientación de dicha fuente.

En vez de establecer un conteo para todas las reflexiones en los contornos de la guía, *Budden [1961]* hace uso de la equivalencia de los campos de la onda creados por reflexiones con los campos de onda debidos a las imágenes de la fuente en el contorno conductor. Por ejemplo, una fuente situada en  $z = 0$  en una guía de ondas de planos paralelos es equivalente a fuentes ubicadas en  $z = 0, 2h, -2h, 4h, -4h, \dots$  habiendo eliminado los planos conductores, siendo  $h$  la altura de la guía de ondas. Esta equivalencia conduce a una estructura de fuentes similar a la de una red de difracción óptica [*Budden, 1961*].

Resolviendo el vector de Hertz bajo estas condiciones se pueden extraer diferentes conclusiones. En primer lugar, en una guía de ondas ideal de planos paralelos, las fuentes verticales excitan únicamente modos *TM* y *TEM*. Las amplitudes relativas de estos modos vienen descritas por los factores de excitación

$$\begin{aligned} &1/2; (\cos \theta_1)^{1/2} \cos(kz_1 \sin \theta_1); \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots; (\cos \theta_n)^{1/2} \cos(kz_1 \sin \theta_n) \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde  $z_1$  representa la altura de la fuente relativa al plano situado en  $z = 0$ , y  $\theta_n$  es el ángulo de propagación para el modo  $n$ . El término  $\cos(kz_1 \sin \theta_n)$  se conoce como la función ganancia de altura de la fuente. Para la recepción de la señal, se establece otro término de ganancia de altura equivalente. Sin embargo, en situaciones prácticas, el receptor se ubica típicamente en  $z = 0$ , excepto en el caso de observaciones realizadas desde aeronaves o globos aerostáticos, y

por consiguiente, la ganancia de altura del receptor es normalmente igual a la unidad. Además, el modo **TEM** siempre presenta una ganancia de 1/2 independientemente de la frecuencia.

En contraposición con las fuentes verticales, las fuentes de corriente horizontales en la guía de ondas excitan únicamente modos **TE**.

Así, las fuentes horizontales no excitan modos **TEM**, significando que no generan ninguna onda propagándose a frecuencias inferiores a la primera frecuencia de corte. Las amplitudes relativa para los modos **TE** excitados vienen dadas por los factores

$$\begin{aligned}
 &(\cos \theta_1)^{1/2} \sin(kz_1 \sin \theta_1); \dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots; (\cos \theta_n)^{1/2} \sin(kz_1 \sin \theta_n)
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

donde el término de la ganancia de altura es ahora  $\sin(kz_1 \sin \theta_n)$ . Se puede observar que una fuente horizontal ubicada en  $z_1 = 0$ . en una guía ideal no excita ningún modo, dado que las ganancias de altura son todas nulas.

Físicamente esto sucede porque cualquier radiación generada por la fuente situada inmediatamente encima del plano conductor inferior, queda cancelado por la imagen de la misma ubicada inmediatamente debajo.

### 2.3 La Guía de Ondas Tierra-Ionosfera

Bajo determinadas condiciones, la guía de ondas formada por la Tierra y la ionosfera se comporta como una guía ideal de planos paralelos. Sin embargo, las propiedades eléctricas de la Tierra, la ionosfera y el campo magnético terrestre causan desviaciones significativas del modelo ideal.

### 2.3.1 Propiedades de la Tierra y de la Ionosfera

La mayor diferencia entre una guía de ondas ideal y la guía formada por la Tierra y la ionosfera se debe a que los contornos no están formados por conductores perfectos. La Tierra presenta una conductividad finita, siendo diferente según el tipo de superficie (mar, tierra, hielo, etc.).

Por ejemplo, la tierra seca tiene una conductividad  $\sigma$  comprendida en el rango  $(10^{-4} - 10^{-2}) S/m$ , y una permitividad  $\varepsilon \sim 3.4$ , mientras que el agua del mar tiene una conductividad de  $\sigma = 4 S/m$  y un permitividad relativa  $\varepsilon = 81$  [Inan e Inan, 2000].

En comparación con un buen conductor como el cobre, el cual presenta una conductividad  $\sigma = 5.8 \times 10^7 S/m$ , la conductividad de la Tierra es relativamente baja. Sin embargo, a frecuencias VLF, la tierra y el mar pueden ser considerados buenos conductores dado que  $\sigma \gg \omega\varepsilon$  [Inan e Inan, 2000].

En general, puesto que la Tierra no es un conductor perfecto, las ondas se propagan a lo largo de superficies de conductividad finita, estando sujetas pues a atenuación.

La premisa de buen conductor no se corresponde con la realidad en el caso de superficies heladas, puesto que presentan una conductividad  $\sigma < 10^{-7} S/m$ . Por consiguiente, las ondas que se propagan sobre superficies heladas, tales como los casquetes polares, presentan índices más elevados de atenuación [Rogers y Peden, 1975].

El contorno superior de la guía de ondas conformada por la Tierra y la ionosfera dista mucho de ser un conductor perfecto. La ionosfera es una región ionizada de la atmósfera superior que contiene un número

significativo tanto de electrones libres como de iones positivos [Hargreaves, 1992].

La ionosfera se subdivide en diferentes regiones, denominadas *D*, *E*, *F1* y *F2* determinadas por los puntos de inflexión del perfil de densidad de electrones.

La concentración de electrones libres se debe durante el día principalmente a la radiación solar, como la ultravioleta y los rayos X, mientras que por la noche la causa de dicha concentración responde a radiaciones no solares como los rayos cósmicos y la precipitación de electrones [Hargreaves, 1992].

A pesar de que la densidad de electrones no es muy alta en comparación con el número de partículas neutras, la concentración de electrones libres es lo suficientemente alta para considerar la ionosfera como un buen conductor a frecuencias *VLF* y *ELF*.

Dado que la radiación solar es la fuente principal de la ionización, existe una diferencia significativa entre la ionosfera diurna y la nocturna. Durante el día, la región *D* se extiende, comenzando la ionización a unos 60 *km* de la superficie de la Tierra.

Por la noche, debido a procesos de recombinación, la región *D* se atenúa y la altitud a la cual comienza la ionización se incrementa hasta un valor de entre unos 85 *km* y 90 *km*.

Los perfiles típicos de densidad de electrones durante el día y la noche son los representados por la figura 2.3 [Hines et al, 1965]. Se puede observar la variación del perfil de la densidad de electrones al pasar de la noche al día, implicando asimismo la variación de la altura efectiva de la guía de ondas Tierra-ionosfera.

La altura de reflexión de la guía de ondas es dependiente de la frecuencia y del ángulo de incidencia de la señal. Para una incidencia normal a frecuencias *VLF* en un sistema altamente colisional, la altura de reflexión tiene lugar en el punto donde

$$\omega_p^2 = \omega\nu \quad (2.12)$$

donde  $\omega$  representa la frecuencia angular,  $\nu$  la frecuencia de colisión de electrones y  $\omega_p$  es la frecuencia de plasma dada por

$$\omega_p = \sqrt{N_e(h)q^2 / m_e \epsilon_0} \quad (2.13)$$

donde  $N_e(h) = 1.43 \times 10^{13} \exp(-0,15h') \exp[(\beta - 0,15)(h - h')]$  es la densidad de electrones, la cual representa un perfil exponencial biparamétrico. [Cummer, 1997]. Ambos parámetros controlan la altitud ( $h'$ ) y cuán brusco es el perfil ionosférico ( $\beta$ ).

$N_e(h)$  se mide en *electrones/cm<sup>3</sup>*,  $h'$  en *km* y  $\beta$  en *km<sup>-1</sup>*,  $q$  es la carga del electrón y  $m_e$  la masa del electrón [Ratcliffe, 1959].

A partir de las ecuaciones (2.12) y (2.13), la densidad de electrones requerida para la reflexión de ondas *VLF* ( $f = 3$  a  $30$  kHz;  $\nu = 10^5$  s<sup>-1</sup>) se calcula para que esté comprendida entre  $20$  y  $60$  cm<sup>-3</sup>, lo que corresponde a la región *D*.

En general, la densidad de electrones requerida para la reflexión de ondas *VLF* decrece conforme el ángulo de incidencia  $\theta$  decrece (figura 2.2) [Hargreaves, 1992]. Sin embargo, dado que la densidad de electrones inicialmente experimenta un incremento muy rápido con la altitud, este decrecimiento tiene un impacto mínimo en la altura de reflexión.

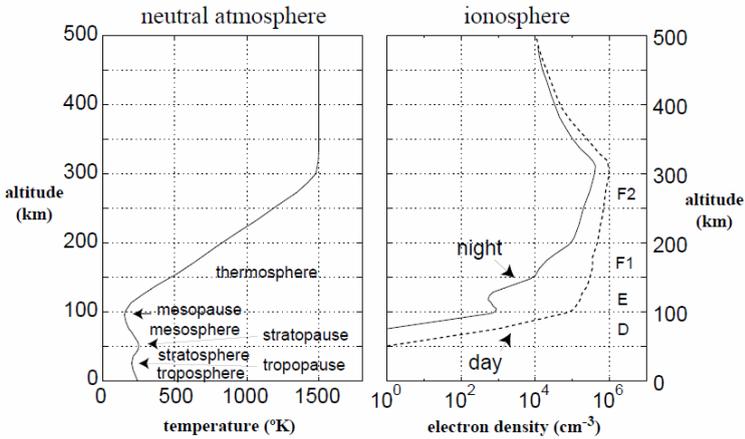


Figura 2.3: Variación del perfil de densidad de electrones y de la temperatura atmosférica neutra con la altitud (Hines et al [1965])

Las alturas de reflexión calculadas son consistentes con los resultados experimentales, arrojando unos valores de  $63 \text{ km}$  durante el día y  $85 \text{ km}$  durante la noche [Thomson, 1993].

Por otro lado, el contorno ionosférico de la guía de ondas se aparta del concepto de conductor perfecto en el sentido de que teniendo en consideración la presencia del campo magnético terrestre, la ionosfera debe de considerarse como un medio anisótropo [Wait y Spies, 1960], el cual se considerará en la simulación del capítulo 3.

Tal anisotropía implica que una onda incidente linealmente polarizada, paralela o perpendicular, al reflejarse, la onda presentará polarización elíptica con componentes que tengan polarización paralela y perpendicular. Una forma de visualizar este efecto consiste en considerar el coeficiente de reflexión en el límite ionosférico como una matriz  $2 \times 2$  tal que

$$\vec{R}_I(\theta) = \begin{bmatrix} {}_{\parallel}R_{\parallel}(\theta) & {}_{\parallel}R_{\perp}(\theta) \\ {}_{\perp}R_{\parallel}(\theta) & {}_{\perp}R_{\perp}(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde las componentes  ${}_{\parallel}R_{\parallel}$ ,  ${}_{\parallel}R_{\perp}$ ,  ${}_{\perp}R_{\parallel}$  y  ${}_{\perp}R_{\perp}$  representan los coeficientes de reflexión individuales para cada combinación de la polarización de la onda incidente y reflejada, perteneciendo generalmente al plano complejo.

Análogamente podemos representar los coeficientes de reflexión para la tierra como una matriz  $2 \times 2$ , teniendo en consideración que los términos de fuera de la diagonal principal son nulos dado que la Tierra en general no presenta anisotropía.

$$\vec{R}_T(\theta) = \begin{bmatrix} {}_{\parallel}\bar{R}_{\parallel}(\theta) & 0 \\ 0 & {}_{\perp}\bar{R}_{\perp}(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La relevancia del grado de anisotropía atribuido al campo magnético terrestre depende de los valores relativos de la frecuencia de colisión electrón-partículas neutras  $\nu$ , y la girofrecuencia de los electrones  $\omega_c$ .

Durante el día, el efecto de la anisotropía no es muy pronunciado dado que la reflexión tiene lugar a alturas menores donde  $\nu \gg \omega_c$ . Un efecto remarcable debido a la presencia del campo magnético terrestre y de la anisotropía de la ionosfera es la diferente tasa de atenuación dependiendo de si la señal se propaga de este a oeste o viceversa. En general, las ondas que se desplazan hacia el este experimentan una atenuación menor que aquellas que lo hacen hacia el oeste [Waits y Spies, 1960].

Esta diferencia se acentúa en el rango de frecuencias (1 – 4) kHz, donde las diferencias observadas son mayores de 45 dB/1.000 km

[Barr, 1971]. Este efecto se minimiza conforme se incrementa la frecuencia, siendo la diferencia de atenuación de tan sólo 1 dB/1.000 km para frecuencias superiores a los 20 kHz [Waits y Spies, 1960].

Otro efecto resultado de la anisotropía de la ionosfera es que los modos que pueden propagarse en la guía no son **TE** y **TM** puros tal y como sucedía en una guía ideal, dado que las polarizaciones de las ondas se encuentran acopladas a la ionosfera. En su lugar, la energía de propagación se encuentra constituida por una superposición de modos **casi-TE** o **CTE** y **casi-TM** o **CTM**.

Los modos **CTM** son similares a los modos **TM** excepto por el hecho de que presentan una componente axial pequeña de campo magnético [Budden, 1961] y las correspondientes componentes adicionales de campo eléctrico y magnético transversales no presentes en un modo **TM** ideal. Los casi-modos de orden más bajo tienden a ser más puros que aquellos de órdenes superiores, especialmente a frecuencias inferiores a los 15 kHz [Snyder y Pappert, 1969].

### 2.3.2 Teoría de propagación en la guía de ondas Tierra-ionosfera

Dado que los contornos de la guía de ondas conformada por la Tierra y la ionosfera no es ideal, el análisis de la propagación de señales se complica considerablemente. Puesto que no pueden tener lugar modos puros **TE** y **TM**, la ecuación de modos para una guía de ondas de planos paralelos dada por la ecuación (2.5) no es representativa de la realidad.

Para que un modo pueda propagarse en una guía de ondas, las ondas planas uniformes que constituyen el modo deben retener los frentes planos después de la reflexión en los dos contornos. En el

caso de la guía de ondas formada por la Tierra y la ionosfera, esta condición da como resultado la ecuación de modos

$$\vec{R}_I(\theta)\vec{R}_T(\theta)\exp(-2ikh\sin\theta) = \vec{I} \quad (2.16)$$

conocida como la ecuación fundamental de la teoría de modos en una guía de ondas [Budden, 1961], donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ . La ecuación (2.16) no presenta una resolución trivial, dado que las expresiones de los elementos  $\mathbf{R}_I$  presentan cierta complejidad [Budden, 1961]. Se puede comprobar que en caso de considerar la Tierra y la ionosfera como conductores perfectos la ecuación (2.16) se reduce a la (2.5).

Además, las imperfecciones derivadas de las condiciones de contorno de la guía Tierra-ionosfera complican sobremanera las funciones de excitación y de ganancia de altura. Sin embargo, si los ángulos modales  $\theta_n$  y los coeficientes de reflexión son conocidos, las funciones de ganancia de altura pueden ser fácilmente calculadas. Pappert y Ferguson [1986] reseñaron los factores de excitación y las funciones de ganancia de altura formuladas por Budden [1962] y ampliaron el análisis para incluir dipolos orientados arbitrariamente a una altura  $z_t$  medida desde el suelo.

Los factores de excitación dados por Pappert y Ferguson [1986] son funciones intrincadas de los elementos del coeficiente de reflexión y los ángulos modales que varían con dependencia del campo de la onda de interés y de la orientación del dipolo origen de la excitación. Estas funciones de ganancia de altura contienen funciones de Hankel modificadas que permiten que las magnitudes de dichas funciones oscilen con la altura de una manera similar a como lo hacen los senos y cosenos en las funciones de ganancia de altura de una guía de ondas ideal.

Cuando se tiene en consideración los factores de excitación, las funciones de ganancia de altura y la orientación del dipolo origen de la excitación, la ecuación general para un campo  $F$  se puede escribir como [Pappert y Ferguson, 1986; Cummer, 1997]

$$F = C(F) \frac{ik^{3/2} I l}{\sqrt{8\pi x}} \exp(i\pi/4) \sum_n \Lambda_m \Lambda_{rn} \exp(-ikx \sin \theta_n) \quad (2.17)$$

donde  $C(F) = \mu_0$  si  $F$  es la componente de campo magnético, y  $C(F) = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  si  $F$  es la componente de campo eléctrico.  $\Lambda_{tn}$  y  $\Lambda_{rn}$  son los factores de excitación y las funciones de ganancia de altura combinados para el transmisor y el receptor respectivamente. Para un dipolo eléctrico orientado con un ángulo  $\gamma$  en el eje  $z$  y un ángulo  $\phi$  relativo a la dirección de propagación a una altura  $z_t$ , el factor de excitación del transmisión  $\Lambda_{tn}$  viene dado por [Pappert y Ferguson, 1986; Cummer, 1997]

$$\Lambda_m = -\tau_1 \sin(\theta_n) \cos(\gamma) f_1(z_t) + \tau_3 \tau_4 \sin(\gamma) \cos(\phi) f_2 + \tau \sin(\gamma) \sin(\phi) f_3(z_t) \quad (2.18)$$

donde  $\tau_1, \tau_3, \tau_4, f_1, f_2$  y  $f_3$  son definidos por Pappert y Ferguson [1986]. Los factores de excitación  $\Lambda_{rn}$  fueron también definidos por Pappert y Ferguson [1986], los cuales para los campos transversales magnéticos, son simplemente la función ganancia de altura  $f_{1z_r}$ , donde  $z_r$  es la altura donde se encuentra el transmisor.

### 2.3.3 Corrección debida a la Curvatura de la Tierra.

Las ecuaciones descritas anteriormente son de aplicación a una guía de ondas de planos paralelos. Sin embargo, a largas distancias, no se puede hacer una extrapolación de dicho sistema a la guía de ondas conformada por la Tierra y la ionosfera. En el espacio libre, la

atenuación de los valores de campo debidos a la propagación es proporcional a  $r^{-1}$ , donde  $r$  es la distancia medida desde la fuente. Esta atenuación es equivalente al factor de propagación  $1/4\pi r^2$  de la onda de potencia. Para una guía de planos paralelos, el factor de propagación del campo se reduce a  $r^{-1/2}$ , donde  $r$  es ahora la distancia radial medida desde la fuente, dado que la onda únicamente se propaga en dos dimensiones en vez de tres. Para la Tierra, la cual es realmente una guía de ondas esférica de radio  $R_E$ , el factor de propagación correspondiente es  $[R_E \sin(s/R_E)]^{-1/2}$ , donde  $s$  es la distancia de gran círculo entre la fuente y los puntos de observación [Budden, 1962]. Se puede observar que conforme  $R_E \rightarrow \infty$  el factor de propagación tiende a  $s^{-1/2}$ , el cual corresponde con el factor de propagación cilíndrico para una guía de ondas de planos paralelos.

La ecuación de modos (2.16) debe de modificarse para incluir la curvatura de la guía de ondas de la Tierra-ionosfera dado que los ángulos modales  $\theta_n$  son válidos para superficies paralelas, no para cortezas esféricas. Un método utilizado con bastante frecuencia para incluir la curvatura de la Tierra en la formulación matemática consiste en considerar el índice de refracción de la atmósfera como el gradiente  $\mu = \exp(\frac{z}{R_E})$ , tal que los rayos que representan las ondas planas se curvan hacia arriba en lugar de propagarse en línea recta [Budden, 1961].

### 2.3.4 Características de la propagación de señales VLF

La propagación de ondas VLF en la guía de ondas Tierra-ionosfera ha sido objeto de estudio por un número elevado de autores entre los que destacan los trabajos de Wait [1957], Wait y Spies [1960], Wait [1962], Snyder y Pappert [1969], Galejs [1972], Pappert y Ferguson [1986], Cummer [1997] y Wood [2004].

Estas simulaciones ponen de manifiesto fenómenos interesantes que emanan de la propagación de señales en la guía de ondas Tierra-ionosfera bajo condiciones reales. En este sentido, el modo *CTEM*, análogo al modo *TEM*, el cual se encuentra presente para todas las frecuencias en una guía de ondas ideal de planos paralelos, contribuye con una cantidad de energía no muy significativa por encima de  $\sim 1.2 \text{ kHz}$  [Cummer, 1997], al total de la intensidad de los sferics originados en una descarga.

Además, mientras la tasa de atenuación para las señales *VLF* es, en general, baja, dicha tasa decrece conforme aumenta la frecuencia, siendo de pocos dB/1.000 km para frecuencias superiores a  $\sim 15 \text{ kHz}$  [Wait, 1962]. Se ha de tener en cuenta que a frecuencias mucho más elevadas, la consideración de buen conductor,  $\sigma \gg \omega\epsilon$ , no es válida dado que los contornos de la guía de onda empiezan a presentar pérdidas resultando en una mayor atenuación de la señal [Inan e Inan, 2000].

En contraste, las frecuencias más bajas se pueden excitar más fácilmente, y el factor de excitación (2.18) generalmente decrece conforme la frecuencia se incrementa [Wait, 1962]. Así, según la onda se propaga a lo largo de grandes distancias, la ratio de energía a alta frecuencia / energía a baja frecuencia se incrementa. Sin embargo, la excitación y la atenuación varían significativamente en función de los parámetros de la guía de ondas, tales como la altura de reflexión, la conductividad de la tierra y la anisotropía, los cuales varían tanto en el tiempo como a lo largo de toda la trayectoria de propagación [Wait, 1957].

Como se ha precisado anteriormente, debido a la anisotropía del contorno ionosférico, las señales propagándose hacia el oeste se atenúan en mayor medida que aquellas que lo hacen hacia el este

[Snyder y Pappert, 1969]. Además, debido a esta mayor atenuación, los modos de las ondas *CTM* que se propagan hacia el oeste presentan componentes longitudinales de campo magnético mayores que aquellas que lo hacen hacia el este, especialmente para frecuencias inferiores a  $\sim 15$  kHz [Snyder y Pappert, 1969].

Otro resultado interesante es el derivado de la no homogeneidad de la guía de ondas Tierra-ionosfera a lo largo de toda la trayectoria de propagación de la señal. Discontinuidades en los parámetros de la guía de ondas, tales como un cambio abrupto en la conductividad de la Tierra o un cambio en la altura a la cual tiene lugar la reflexión en la ionosfera, pueden originar energía que haga que un modo se convierta en otro. Este efecto es más obvio cuando el camino de propagación atraviesa la frontera día/noche. Cuando tal circunstancia tiene lugar, un modo que se propaga en una trayectoria diurna se convierte en dos modos al atravesar la frontera día/noche [Ferguson y Snyder, 1980].



## **Capítulo 3. Modelo FDTD de la Guía de Ondas Tierra-ionosfera**



### 3 Modelo FDTD de la Guía de Ondas Tierra-Ionosfera

Una vez se ha descrito en el capítulo anterior la propagación de ondas *VLf* en la guía de ondas formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera, se está en condiciones de proceder al diseño de un modelo numérico en diferencias finitas en el dominio del tiempo (DFDT ó FDTD) el cual permita simular la propagación del sferic asociado a una descarga con el mayor grado de fidelidad posible teniendo en consideración todos los factores anteriormente mencionados.

El método numérico de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, cuya base matemático-computacional se describe en el presente capítulo, proporciona una solución directa de las ecuaciones de Maxwell del rotacional. El algoritmo que se describe en este capítulo, discretiza las ecuaciones del rotacional empleando diferencias divididas para aproximar las derivadas. El resultado final proporciona un sistema completamente explícito de modo que no resulta necesario resolver un sistema de ecuaciones siendo la necesidad de memoria y tiempo de cálculo proporcional al tamaño eléctrico del modelo.

El algoritmo soluciona el sistema de ecuaciones en diferencias como un problema de valor inicial, en el que en el instante inicial se supone que se “enciende” la excitación. En el instante inicial se asume que el campo en todo el espacio es nulo, a continuación, una onda incidente aparece entrando en la región a partir de este instante. La propagación de dicha onda se simula con la iniciación del paso a paso temporal del algoritmo FDTD, el cual es simplemente la implementación mediante diferencias finitas de las ecuaciones de Maxwell del rotacional. El proceso soluciona paso a paso temporal las ecuaciones, simulando la evolución del campo electromagnético.

El método FDTD efectúa en realidad una simulación de la propagación de las ondas mediante una simulación análoga de la propagación en los datos almacenados en la memoria del ordenador.

En primer lugar, en el apartado 3.1 se introducirán las ecuaciones de Maxwell del rotacional en el caso más general y su simplificación para modos  $TE$  y  $TM$ . Luego en el apartado 3.2 se hace una ligera introducción al uso de diferencias finitas para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El algoritmo de Yee o método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, se explica detalladamente en el apartado 3.2.4, mostrando también las restricciones de estabilidad y dispersión impuestas por el tratamiento numérico. El tipo de excitación a utilizar y el modo de introducirla se analizan en el apartado 3.3; se contempla la separación entre zona de campo total y zona de campo dispersado así como su implementación. Las Condiciones de Contorno Absorbentes que deben de absorber las ondas para simular un medio indefinido, se tratan en los apartados 3.4 y 3.5. La disponibilidad de recursos informáticos es la principal limitación al método, por ello se abordan una serie de técnicas computacionales que a la postre permitirán el ahorro tanto de memoria como de tiempo de cálculo (CPU). En los apartados 3.6, 3.7 y 3.8 se realizan las adaptaciones necesarias de la técnica FDTD para adaptarse al modelo de simetría de revolución de la Tierra y a la anisotropía inducida por el campo magnético terrestre, lo cual permite una aproximación más real del modelo.

### 3.1 Las Ecuaciones de Maxwell

Consideremos una región del espacio libre de fuentes de campo y que tiene parámetros eléctricos independientes del tiempo. Entonces, usando el sistema MKS, y en coordenadas cartesianas, las ecuaciones de Maxwell del rotacional son:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{H} - \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{E} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} - \frac{\rho}{\mu} \vec{H} \quad (3.2)$$

donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico en volts/metro;  $\vec{H}$  es el campo magnético en amperios/metro;  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica en faradios/metro;  $\sigma$  es la conductividad eléctrica en mhos/metro;  $\mu$  es la permeabilidad magnética en henrys/metro, y  $\rho$  es la resistividad magnética equivalente en ohms/metro (este último factor es introducido para dar simetría a las ecuaciones y permitir la posibilidad de introducir pérdidas en el campo magnético).

Suponiendo que el medio es lineal, isótropo y homogéneo, el siguiente sistema de ecuaciones escalares es equivalente – en coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  a las ecuaciones del rotacional:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho H_x \right) \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \rho H_y \right) \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho H_z \right) \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (3.4c)$$

El sistema de seis ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas (3.3) y (3.4) forma la base de algoritmo FDTD para el análisis de cualquier problema electromagnético en tres dimensiones.

Antes de continuar con los detalles del algoritmo, es interesante considerar una importante simplificación del caso tridimensional.

Considerando que tanto la onda incidente como la geometría del modelo no presentan variación alguna con respecto al eje  $z$ , esto hace que todas las derivadas parciales con respecto a  $z$  sean cero.

Las ecuaciones de Maxwell del rotacional se reducen entonces a dos sistemas desacoplados de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Estos sistemas, dan lugar a los modos **TE** y **TM**.

En estos casos es posible un tratamiento bidimensional de la propagación, siendo necesarias solamente tres componentes del campo electromagnético. Considerando que el medio no presenta pérdidas, estas ecuaciones son:

Caso **TM**:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (3.5b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (3.5c)$$

Caso **TE**:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (3.5d)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.5e)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.5f)$$

## 3.2 Diferencias Finitas.

### 3.2.1 Aproximación del Operador Derivada.

Dada una función  $F(x)$ , de la cual se conoce su valor en  $N$  puntos  $x_j$ , el modo lógico de calcular su derivada en un punto  $x$  cualquiera de su dominio, es el que sigue:

- Primero: calcular el polinomio interpolador que aproxime la función  $F(x)$  en un punto cualquiera.

- Segundo: calcular la derivada del polinomio de interpolación en el punto dado.

Este proceso puede simplificarse considerablemente para el caso frecuente de que el paso  $x_j - x_{j-1} = h$  sea constante y de que la derivada haya de efectuarse en los puntos de interpolación. A continuación se describe el modo de calcular la derivada en uno de dichos puntos. La derivada se puede calcular por la derecha, por la izquierda y haciendo uso de diferencias centradas.

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  por la derecha, aproximación de primer orden:

Al desarrollar  $F(x+h)$  en serie de Taylor en torno a  $x$ , tenemos:

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2}F''(x) + \dots \quad (3.6)$$

de donde

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{h}{2}F''(x) + \dots = \\ &= \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + O(h) \end{aligned} \quad (3.7)$$

que usando la notación  $x = x_j$ ,  $x+h = x_{j+1}$  permite escribir la siguiente expresión que nos da la derivada en  $x_j$  con un error de orden uno en  $h$ .

$$F'(x_j) = \frac{F(x_{j+1}) - F(x_j)}{h} + O(h) \quad (3.8)$$

Derivada segunda de  $F(x)$  en  $x_j$  por la derecha, aproximación de primer orden:

En este caso se desarrolla en serie de Taylor  $F(x+h)$  y  $F(x+2h)$ . La combinación lineal de las dos expresiones permite escribir

$$F''(x_j) = \frac{F(x_j) - 2F(x_{j+1}) + F(x_{j+2}))}{h^2} + O(h) \quad (3.9)$$

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  por la derecha, aproximación de segundo orden:

Se puede obtener una mayor precisión desarrollando  $F(x+h)$  en serie de Taylor, y sustituyendo la expresión anterior obtenida para la derivada segunda. El resultado tiene una precisión de segundo orden ( $O(h^2)$ )

$$F'(x_j) = \frac{-3F(x_j) + 4F(x_{j+1}) - F(x_{j+2}))}{2h} + O(h^2) \quad (3.10)$$

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  por la izquierda, aproximación de primer orden: Se desarrolla  $F(x-h)$  en serie de Taylor, con lo cual:

$$F(x-h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2}F''(x) + \dots \quad (3.11)$$

de donde

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + \frac{h}{2} F''(x) + \dots = \\
 &= \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + O(h)
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

que usando la notación  $x = x_j, x-h = x_{j-1}$  permite escribir la siguiente expresión que nos da la derivada en  $x_j$  con un error de orden uno en  $h$ .

$$F'(x_j) = \frac{F(x_j) - F(x_{j-1})}{h} + O(h)
 \tag{3.13}$$

Derivada segunda de  $F(x)$  en  $x_j$  por la izquierda, aproximación de primer orden:

Análogamente al caso homólogo por la derecha, se desarrolla en serie de Taylor  $F(x-h)$  y  $F(x-2h)$ ; y se obtiene la siguiente expresión para la derivada segunda por la izquierda.

$$F''(x_j) = \frac{F(x_j) - 2F(x_{j-1}) + F(x_{j-2}))}{h^2} + O(h)
 \tag{3.14}$$

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  por la izquierda, aproximación de segundo orden:

Siguiendo un procedimiento parecido al caso precedente por la derecha, se obtiene la siguiente fórmula.

$$F'(x_j) = \frac{-3F(x_j) + 4F(x_{j+1}) - F(x_{j+2}))}{2h} + O(h^2)
 \tag{3.15}$$

Derivada de  $F(x)$  en  $x_j$  utilizando diferencias centradas:

Si consideramos los desarrollos de  $F(x+h)$  y de  $F(x-h)$ , efectuando una simple resta de ambos, podemos despejar  $F'(x)$ .

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} F'''(x) + \dots = \\ &= \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

que nos da la derivada en  $x_j$  con un error de orden dos en  $h$ .

$$F'(x_j) = \frac{F(x_{j+1}) - F(x_{j-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (3.17)$$

Derivada segunda de  $F(x)$  en  $x_j$  utilizando diferencias centradas:

Se suman los desarrollos de  $F(x+h)$  y  $F(x-h)$ . La expresión que se deduce permite despejar  $F''(x)$  con un error de orden dos en  $h$ .

$$F''(x_j) = \frac{F(x_{j+1}) + F(x_{j-1}) - 2F(x_j)}{h^2} + O(h^2) \quad (3.18)$$

### 3.2.2 Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.

En general, una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden con dos variables independientes, se podrá escribir:

$$G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}\right) = 0 \quad (3.19)$$

Donde  $u$  es la función incógnita, que ha de convertir la expresión anterior en una identidad. La ecuación diferencial anterior es lineal, si depende linealmente de todos sus argumentos. Es decir, si la podemos escribir como sigue:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y) \quad (3.20)$$

En donde los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , sólo dependen de las variables independientes. En el caso de que no hubiese tal dependencia, es decir, que fuesen constantes e independientes de  $x$  e  $y$  entonces la ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

Supongamos que tenemos el caso lineal de la ecuación diferencial anterior, y consideremos la cantidad

$$D = AC - B^2 \quad (3.21)$$

Según el signo de  $D$ , la ecuación anterior será de los siguientes tipos:

$D > 0$ , de tipo elíptico

$D < 0$ , de tipo hiperbólico,

$D = 0$ , de tipo parabólico

Si  $D$  cambia de signo en el correspondiente dominio de definición, se dice que es de tipo mixto.

Según Hadamard, un problema físico, descrito por una ecuación diferencial con sus correspondientes condiciones de contorno, es un problema bien planteado si su solución es única y depende continuamente de las condiciones de contorno.

El procedimiento numérico usual para resolver una ecuación diferencial -con condiciones de contorno- (un problema bien planteado) es el discretizarla en diferencias finitas, haciendo uso de las expresiones anteriormente deducidas. Posteriormente se procede a la solución del sistema. Dependiendo del tipo de ecuación diferencial (clasificación anterior), se suelen seguir unos determinados procedimientos para calcular la solución. Esta solución se podrá obtener siguiendo un procedimiento, que en los sistemas hiperbólicos y parabólicos puede ser implícito o explícito. En las ecuaciones elípticas los métodos que suelen ser más utilizados son los directos y los iterativos (método de Gauss-Seidel).

Las ecuaciones de Maxwell del rotacional, constituyen un sistema de ecuaciones de tipo hiperbólico.

### **3.2.3 Estabilidad y Convergencia.**

Se dice que el método es implícito cuando se despeja de un sistema de ecuaciones, en este caso se obtiene a la vez la solución en todos los puntos de la discretización. El método es explícito cuando el sistema se soluciona de forma iterativa en cada punto, haciendo uso de la solución obtenida en puntos anteriores. La ventaja del primero sobre el último radica en que es estable, independientemente de la relación que guarden las dos discretizaciones (la espacial y la temporal). La desventaja que presenta un algoritmo implícito es que dependiendo del problema físico modelado, se genera un gran sistema de ecuaciones; esto conlleva como problema el procesado de enormes

matrices, y por lo tanto mayores recursos de memoria que en un tratamiento explícito.

Los errores que se cometen cuando se soluciona un sistema, ya sea siguiendo un esquema u otro, son de dos tipos:

- De redondeo: que son inevitables e inherentes al ordenador utilizado ya que dependen de la longitud de la palabra (bytes).
- De truncamiento: Se deben a la diferencia entre el valor analítico de las operaciones indicadas en la ecuación diferencial original, y las numéricas obtenidas mediante la discretización de la misma.

Un método numérico es convergente, si suponiendo los errores de redondeo nulos, la solución numérica tiende a la solución analítica cuando el paso de discretización tiende a cero.

El algoritmo explícito se dice que es inestable cuando los errores de redondeo junto con los errores de truncamiento se amplifican. Esto sucede porque el valor de la función en cada punto se obtiene con los valores en otros puntos de la discretización.

### **3.2.4 El Algoritmo de Yee.**

En 1966, Yee [1966] introduce un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Maxwell del rotacional. Una parte importante del algoritmo de Yee (FDTD) es la situación de los puntos donde se efectúa el muestreo del campo, que se sustituye en las ecuaciones. El mallado del espacio mediante la celda unidad de Yee, establece los puntos fijos donde se va a muestrear cada componente del campo en los sucesivos instantes temporales. La situación de las componentes en cada celda permite además una natural satisfacción de las condiciones de contorno en las interfases.

La figura 3.1. muestra las posiciones del campo eléctrico y magnético en la celda unidad usada en su algoritmo, en coordenadas cartesianas. Cada componente del campo magnético está rodeada de cuatro componentes del campo eléctrico y viceversa. Esta disposición, permite el uso de diferencias centradas en la resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell del rotacional. Pero además establece una disposición natural para implementar la forma integral de las leyes de Faraday y Ampère al nivel de la celda unidad.

Cada punto del espacio se denota como:

$$(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) = (i, j, k) \quad (3.22)$$

y cualquier función del espacio y tiempo se expresa como:

$$F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = F^n(i, j, k) \quad (3.23)$$

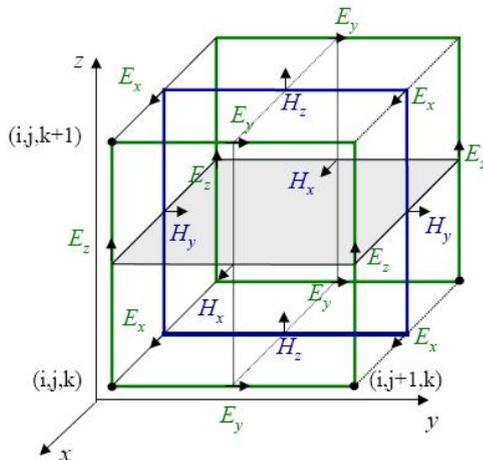


Figura 3.1: Posición de las componentes del campo en la celda unidad de Yee (FDTD) en tres dimensiones.

Donde  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  son respectivamente las dimensiones del cubo unidad usado en el mallado en las direcciones  $x, y, z$ ;  $\Delta t$  es el paso temporal (incremento del tiempo) e  $i, j, k, n$  son enteros. Yee usaba diferencias finitas centradas para las derivadas espaciales y temporales, que son fácilmente programables y tienen una precisión de segundo orden con respecto a los incrementos espacial y temporal.

$$\frac{\partial F^n}{\partial x} = \frac{F^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - F^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial F^n}{\partial t} = \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} \quad (3.25)$$

Para conseguir la precisión de (3.24) y efectuar las derivadas de las ecuaciones de Maxwell (sistema (3.3) y (3.4)). Yee situó las componentes del campo eléctrico y magnético alternativamente en la celda unidad que se muestra en la figura 3.1. Para obtener la precisión de segundo orden en la derivación temporal de (3.25), las componentes de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son evaluadas en intervalos de tiempo alternativos.

El resultado de todo ello es el siguiente sistema explícito de ecuaciones en diferencias finitas, que es una discretización de las ecuaciones de Maxwell del rotacional para medios lineales, isotrópicos, homogéneos y sin pérdidas.

$$\begin{aligned}
 E_x^{(n+1)}(i, j, k) &= E_x^{(n)}(i, j, k) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[ \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \right. \\
 &\left. - \frac{H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right]
 \end{aligned} \tag{3.26a}$$

$$\begin{aligned}
 E_y^{(n+1)}(i, j, k) &= E_y^{(n)}(i, j, k) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[ \frac{H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k + \frac{1}{2}) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \right. \\
 &\left. - \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i + \frac{1}{2}, j, k) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \right]
 \end{aligned} \tag{3.26b}$$

$$\begin{aligned}
 E_z^{(n+1)}(i, j, k) &= E_z^{(n)}(i, j, k) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[ \frac{H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i + \frac{1}{2}, j, k) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} - \right. \\
 &\left. - \frac{H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i, j + \frac{1}{2}, k) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right]
 \end{aligned} \tag{3.26c}$$

$$\begin{aligned}
 H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k) &= H_x^{(n-\frac{1}{2})}(i, j, k) - \\
 &- \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_z^{(n)}(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_z^{(n)}(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \right. \\
 &\left. - \frac{E_y^{(n)}(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_y^{(n)}(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right]
 \end{aligned} \tag{3.27a}$$

$$\begin{aligned}
 H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k) &= H_y^{(n-\frac{1}{2})}(i, j, k) - \\
 &-\frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_x^{(n)}(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_x^{(n)}(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \right. \\
 &\left. - \frac{E_z^{(n)}(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_z^{(n)}(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \right]
 \end{aligned} \tag{3.27b}$$

$$\begin{aligned}
 H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i, j, k) &= H_z^{(n-\frac{1}{2})}(i, j, k) - \\
 &-\frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_y^{(n)}(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_y^{(n)}(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} - \right. \\
 &\left. - \frac{E_x^{(n)}(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_x^{(n)}(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right]
 \end{aligned} \tag{3.27c}$$

El sistema en diferencias finitas (3.26) y (3.27), puede reducirse para los casos bidimensionales **TE** y **TM** de (3.5) y (3.6).

En el caso **TM** la discretización se efectúa mediante la celda unidad que se muestra en la figura 3.3. Las ecuaciones en diferencias a las que da lugar el sistema (3.5), son:

$$\begin{aligned}
 E_z^{(n+1)}(i, j) &= E_z^{(n)}(i, j) + \\
 &+\frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[ \frac{H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \right. \\
 &\left. - \frac{H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right]
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$H_x^{(n+\frac{1}{2})}(i, j) = H_x^{(n-\frac{1}{2})}(i, j) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_z^{(n)}(i, j + \frac{1}{2}) - E_z^{(n)}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (3.29)$$

$$H_y^{(n+\frac{1}{2})}(i, j) = H_y^{(n-\frac{1}{2})}(i, j) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_z^{(n)}(i + \frac{1}{2}, j) - E_z^{(n)}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \right] \quad (3.30)$$

En el caso **TE** la discretización se efectúa mediante la celda unidad que se muestra en la figura 3.2. Las ecuaciones en diferencias se generan a partir de (3.6) y son:

$$H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i, j) = H_z^{(n-\frac{1}{2})}(i, j) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_y^{(n)}(i + \frac{1}{2}, j) - E_y^{(n)}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{E_x^{(n)}(i, j + \frac{1}{2}) - E_x^{(n)}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (3.31)$$

$$E_x^{(n+1)}(i, j) = E_x^{(n)}(i, j) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[ \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i, j + \frac{1}{2}) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (3.32)$$

$$E_y^{(n+1)}(i, j) = E_y^{(n)}(i, j) - \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i+\frac{1}{2}, j) - H_z^{(n+\frac{1}{2})}(i-\frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \right] \quad (3.33)$$

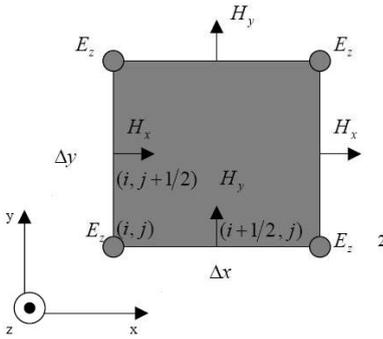


Figura 3.2. Posición de las componentes del campo en la celda unidad FDTD para un modo TE.

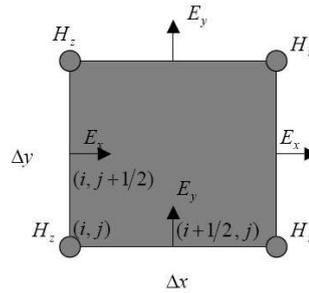


Figura 3.3. Posición de las componentes del campo en la celda unidad FDTD para un modo TM.

Con el sistema (3.26) y (3.27), el valor de cada nueva componente del campo en cada punto depende únicamente de su valor anterior y de los valores anteriores de las otras componentes del campo en puntos adyacentes. De esa forma, en un tiempo dado, el cálculo de una componente del campo puede calcularse en un punto a la vez o en  $p$  puntos a la vez (si se utilizan  $p$  procesadores trabajando en paralelo).

El algoritmo es como sigue:

### Algoritmo FDTD

Inicialmente las componentes de los campos eléctrico y magnético son nulas en todo el dominio de simulación.

Se repite el siguiente proceso iterativo hasta el final de la simulación:

- Se impone la excitación. Se calcula el campo magnético  $H^{(n+\frac{1}{2})}$  según (3.27).
- Se aplican las condiciones de contorno sobre las componentes de  $\vec{H}$ .
- Se calcula el campo eléctrico  $E^{(n+1)}$  según (3.26).
- Se aplican las condiciones de contorno sobre las componentes de  $\vec{E}$ .
- Se incrementa el tiempo,  $t = t + \Delta t$ .

La excitación se impone situando una condición de contorno que simula la fuente de campo con una estructura espacial y temporal. Esta estructura vendrá condicionada por el problema que se ha de resolver, en este caso la descarga de un rayo.

El paso a paso se sigue hasta que se ha obtenido la respuesta a la excitación introducida (pulso temporal), o se ha alcanzado el estado estacionario (en el caso de utilizar una señal sinusoidal como excitación). Se llega al estado estacionario cuando se observa una variación periódica en las componentes del campo que se muestrean.

En este paso a paso hay que asegurar la estabilidad del algoritmo para que no se acumulen los errores, que se irían incrementando progresivamente durante toda la simulación. Por ello la discretización

espacial y temporal son elegidas según una relación, para acotar errores en el proceso de muestreo y evitar cualquier posible inestabilidad.

### 3.2.5 Estabilidad del Algoritmo de Yee.

El algoritmo numérico propuesto en la sección anterior para resolver las ecuaciones de Maxwell, requiere que el paso temporal guarde una relación de proporcionalidad con los incrementos espaciales. Esta relación es necesaria para evitar la inestabilidad numérica. Ésta es una posibilidad presente en todos los esquemas explícitos y hace que los errores de cálculo se incrementen de forma incontrolada a la vez que se sigue con el proceso de iteración. En este apartado se va a mostrar la forma en que se obtiene el criterio de estabilidad.

Se considera por simplicidad un medio lineal, isótropo, homogéneo y libre de pérdidas. Se efectúa a continuación la normalización que permite que la permeabilidad magnética y la constante dieléctrica sean la unidad, ( $\varepsilon = 1, \mu = 1$ ). Entonces las ecuaciones de Maxwell (3.1) y (3.2) se pueden reescribir como sigue:

$$j\nabla \times (\vec{H} + j\vec{E}) = \frac{\partial(\vec{H} + j\vec{E})}{\partial t} \quad (3.34)$$

$$\vec{V} = \vec{H} + j\vec{E} \quad (3.35)$$

$$j\nabla \times \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (3.36)$$

Para analizar la estabilidad del método es conveniente descomponer el algoritmo en diferencias finitas en dos problemas de valores propios, uno para la variable espacial y otro para la variable temporal. Se

estudia la propagación de ondas planas propias del espacio numérico de datos, es decir, de la ecuación (3.34) discretizada. Se determinan los modos propios de la diferenciación espacial y los modos propios de la diferenciación temporal. La estabilidad numérica del algoritmo será posible si se exige que el espectro de valores propios espaciales esté contenido en el dominio de estabilidad de la red, esto es, de los valores propios temporales, de esta forma se evita el crecimiento sucesivo de los errores en cada iteración. El objetivo de este análisis es buscar una relación entre las discretizaciones temporal y espaciales que permita tal estabilidad.

Valores propios temporales.

La descomposición del algoritmo empieza por determinar el rango estable de valores propios temporales. Para ello se considera el lado derecho de la ecuación (3.36) como un problema de valores propios:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{numérico} \vec{V} = \lambda \vec{V} \quad (3.37)$$

Usando la derivación temporal de (3.24) y (3.25), se deduce la siguiente ecuación en un punto cualquiera del mallado:

$$\frac{\vec{V}^{(n+\frac{1}{2})} - \vec{V}^{(n-\frac{1}{2})}}{\Delta t} = \lambda \vec{V} \quad (3.38)$$

Ahora, se define el “factor de crecimiento”:

$$q = \frac{\vec{V}^{(n+\frac{1}{2})}}{\vec{V}^{(n)}} \quad (3.39)$$

Y se desea que  $|q_i| \leq 1$  para todos los posibles modos espaciales en la red FDTD, para evitar tener cualquier modo cuya dependencia temporal sea divergente (esto es, que crezca el valor del campo sin límite). Esta es esencialmente la condición de estabilidad. Sustituyendo  $q_i$  en (3.38) y sacando factor común, se obtiene la siguiente ecuación para  $q_i$

$$q_i^2 - \lambda q_i \Delta t - 1 = 0 \quad (3.40)$$

$$q_i = \frac{\lambda \Delta t}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2} = 0 \quad (3.41)$$

De (3.41) se observa que la condición  $|q_i| = 1$  automáticamente se verifica si:

$$\text{Real}(\lambda) = 0 \quad (3.42a)$$

$$\frac{-2}{\Delta t} \leq \text{Imag}(\lambda) \leq \frac{2}{\Delta t} \quad (3.42b)$$

Para asegurar la estabilidad del algoritmo, todos los posibles modos espaciales deben tener valores propios que cumplan estas dos últimas condiciones (3.42).

#### Valores propios espaciales.

Ahora se considera el lado izquierdo de la ecuación (3.36) como un problema de valores propios:

$$j \nabla_{\text{numerico}} \wedge \vec{V} = \lambda \vec{V} \quad (3.43)$$

A continuación, se suponen los siguientes modos de ondas planas:

$$\vec{V}(l,m,n) = \vec{V}_0 \exp[j(k_x l \Delta x + k_y m \Delta y + k_z n \Delta z)] \quad (3.44)$$

Donde  $k_x$  y  $k_y$  son respectivamente las componentes del vector  $\vec{k}$  (número de ondas). Sustituyendo la expresión (3.44) en (3.43), y efectuando las derivaciones espaciales numéricamente como en (3.24) y (3.25), se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} -2\left(\frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_x \Delta x)}{\Delta x}, \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_y \Delta y)}{\Delta y}, \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_z \Delta z)}{\Delta z}\right) \wedge \vec{V}(l,m,n) \quad (3.45) \\ = \lambda \vec{V}(l,m,n) \end{aligned}$$

Tras efectuar el producto vectorial, e identificar las componentes  $x, y, z$ , se obtiene un sistema de ecuaciones del cual se puede despejar  $\lambda^2$ :

$$\lambda^2 = -4\left(\frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_x \Delta x)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_y \Delta y)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k_z \Delta z)}{\Delta z^2}\right) \quad (3.46)$$

Donde, teniendo en cuenta que un seno al cuadrado es a lo sumo 1, independientemente de su argumento, se deduce que

$$\text{Real}(\lambda) = 0 \quad (3.47a)$$

$$|\text{Imag}(\lambda)| \leq 2\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \quad (3.47b)$$

Como se ha comentado anteriormente, estos valores propios espaciales deben de permanecer al rango de estabilidad definido en el problema de valores propios temporal. Para ello, se establece que la acotación dada en (3.42b) sea menor o igual que la dada en (3.47b),

$$2\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \leq \frac{2}{\Delta t} \quad (3.48)$$

Para todos los posibles valores de  $k_x, k_y$ , y  $k_z$ .

Esta ecuación proporciona la restricción que debe verificar el paso temporal con respecto a los incrementos espaciales, que desnormalizada es:

$$c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (3.49)$$

Siendo  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  la velocidad de la luz en el medio.

Es curioso el resultado que se obtiene, la interpretación que se desprende es evidente. La onda, cuya propagación se simula numéricamente, debe avanzar en el ordenador de modo que a lo sumo en un paso temporal se recorra un arco espacial infinitesimal. Este arco infinitesimal queda determinado por las unidades de discretización en  $x, y, z$ .

Si esta restricción no se cumple, durante la simulación en cada iteración temporal el algoritmo iría avanzando con respecto al avance de la onda real.

Esto induciría un error irreparable que se acumularía y daría lugar al fenómeno de inestabilidad.

### 3.2.6 Modelado

El modelado se efectúa mediante el establecimiento de las matrices del campo  $(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$ . Estas matrices en la práctica realizan el mallado de la región, de modo que las características del medio son interpretadas por el programa FDTD como coeficientes locales en el algoritmo (para cada punto). Las especificaciones del medio en este algoritmo y la situación de las componentes del campo en la celda unidad hacen que trabaje celda a celda, de modo que el modelado de contornos curvos se aproxime por contornos en escalera. La continuidad de las componentes tangenciales del campo en la interfase de distintos medios se asegura con sencillez, y la aproximación de los contornos curvos por contornos en escalera se ha demostrado adecuada en multitud de problemas de scattering.

### 3.2.7 Dispersión del Algoritmo de Yee.

El algoritmo numérico definido en los sistemas FDTD genera la dispersión de las ondas que son simuladas numéricamente en la red de cálculo. Esto es, la velocidad de fase de todo modo puede variar con la longitud de onda, la dirección de propagación y las dimensiones de la celda unidad utilizadas en el mallado. Esta dispersión, que es de tipo numérico, es debida al algoritmo FDTD, y puede dar lugar a resultados sin realidad física, tales como dispersión de pulsos, anisotropía artificial y pseudorefracción. La dispersión numérica es un importante factor a tener en cuenta para comprender la operatividad del algoritmo y sus limitaciones.

En esta parte se explicará cómo se deduce la relación de dispersión. El procedimiento seguido en el análisis de la dispersión consistirá en sustituir una onda plana monocromática en las ecuaciones (3.36). Después de algunas manipulaciones se obtiene una ecuación, que relaciona el vector numérico de ondas, la frecuencia de la onda y los incrementos espaciales y temporal. Esta ecuación con la relación de dispersión, será resuelta numéricamente en varios casos, variación de la discretización, variación de  $k$  y variación de la frecuencia para ilustrar los fenómenos sin realidad física asociados a esta dispersión.

Se considera la normalización efectuada anteriormente en (3.36), y se supone la siguiente onda plana, monocromática

$$\vec{V}(i, j, k, n) = \vec{V}_0 \exp j(k_x i \Delta x + k_y j \Delta y + k_z k \Delta z - \omega n \Delta t) \quad (3.50)$$

Donde  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  es el vector número de ondas,  $\omega$  es la frecuencia temporal de la onda, y  $n, k, j, i$  enteros.

Sustituyendo la expresión (3.50), en la ecuación de Maxwell normalizada (3.36) y efectuando las derivaciones espaciales y temporales numéricamente (3.24) y (3.25); se desarrolla una relación vectorial de modo que identificando los términos de componentes  $x, y, z$ , se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{\Delta t^2} = \left(\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k_x\Delta x\right)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k_y\Delta y\right)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k_z\Delta z\right)}{\Delta z^2}\right) \quad (3.51)$$

Desnormalizando se deduce:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{(c\Delta t)^2} = \left(\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k_x\Delta x\right)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k_y\Delta y\right)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k_z\Delta z\right)}{\Delta z^2}\right) \quad (3.52a)$$

La relación (3.52a) es la relación de dispersión numérica del algoritmo FDTD para el caso general en tres dimensiones.

Siguiendo un procedimiento análogo, se deduce la relación para los casos bidimensionales (**TE** y **TM**, (3.28)-(3.33)):

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{(c\Delta t)^2} = \left(\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k_x\Delta x\right)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k_y\Delta y\right)}{\Delta y^2}\right) \quad (3.52b)$$

En contraste con la relación de dispersión numérica, para el caso tridimensional, la relación de dispersión para una onda plana en un continuo libre de pérdidas es:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.53)$$

A primera vista presenta poco parecido la relación (3.52a) con el caso ideal (3.53). Se puede fácilmente demostrar que (3.52a) se reduce a (3.53) en el límite en que  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  tiendan a cero, esto

sugiere que la dispersión numérica puede reducirse al caso ideal simplemente con utilizar un mallado más fino.

Para efectuar un análisis cuantitativo retomaremos el caso bidimensional **TM**, suponiendo por simplicidad celdas cuadradas ( $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ ) y propagación con ángulo  $\alpha$  con respecto al eje  $x$  positivo ( $(\vec{k} = (k \cos \alpha, k \sin \alpha))$ ).

Entonces la relación (3.52b) se reduce a

$$\frac{\Delta h^2 \sin^2\left(\frac{1}{2} \omega \Delta t\right)}{(c \Delta t^2)} = \sin^2\left(\frac{1}{2} k \cos \alpha \Delta h\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2} k \sin \alpha \Delta h\right) \quad (3.54)$$

que puede resolverse para calcular el módulo del vector número de ondas  $k$  aplicando el método iterativo de Newton:

$$k_{i+1} = k_i - \frac{\sin^2(Ak_i) + \sin^2(Bk_i) - C}{A \sin(2Ak_i) + B \sin(2Bk_i)} \quad (3.55)$$

Donde  $k_{i+1}$  es el valor mejorado de  $k$ ;  $k_i$  es la estimación previa de  $k$ ; y  $A, B, C$  son coeficientes determinados por el ángulo de propagación de la onda con el mallado.

$$A = \frac{\Delta h \cos \alpha}{2} \quad (3.56a)$$

$$B = \frac{\Delta h \sin \alpha}{2} \quad (3.56b)$$

$$C = \frac{\Delta h^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{(c\Delta t^2)} \quad (3.56c)$$

Si se normaliza a la longitud de onda, (esto es hacer  $\lambda = 1$ ), es una buena elección empezar los cálculos con  $k_0 = 2\pi$ , la longitud de onda en el espacio libre. En este caso es fácil ver que la velocidad de fase numérica es:

$$\frac{v_p}{c} = \frac{2\pi}{k_{final}} \quad (3.57)$$

Siendo  $k_{final}$  el valor final de  $k$  obtenido con (3.55) (usualmente partiendo de  $k_0 = 2\pi$  bastan dos o tres iteraciones).

La figura 3.4 muestra los resultados obtenidos para la velocidad numérica de fase con respecto al ángulo de propagación ( $\alpha$  respecto al eje  $x$ ). Tres tipos de resolución son examinados: gruesa (1/5 de la longitud de onda); normal (1/10 de la longitud de onda); y fino (1/20 de la longitud de onda). Para cada resolución, la relación  $c\Delta t = \Delta h/2$  se mantiene fija, y cumple con la condición de estabilidad. Se observa que la velocidad de fase es máxima para  $45^\circ$  (incidencia oblicua), y mínima para  $0^\circ$  y  $90^\circ$  (incidencia a lo largo de los ejes coordenados) para todas las resoluciones. Se observa que en el peor de los casos el error para la resolución normal es solamente de un 1,3% y tan solo de un 0,31% en el caso de alta resolución (1/20 de la longitud de onda).

La figura 3.5 presenta las curvas de variación de la velocidad máxima de fase con la resolución para un ángulo de incidencia de  $45^\circ$  y de  $0^\circ$  ( $90^\circ$ ). La relación  $c\Delta t = \Delta h/2$  se mantiene como antes.

Se observa que la velocidad de fase numérica para cada ángulo de incidencia disminuye al utilizar un mallado más grueso, alcanzándose un umbral a partir del cual la velocidad de fase numérica se anula y la onda no se propaga.

El efecto que se produce es el de un filtrado pasa-bajo que es inherente al algoritmo de Yee, en el que los modos propagantes tienen una longitud de onda de al menos dos o tres celdas, dependiendo del ángulo de propagación.

Como resultado de esto, el modelado mediante FDTD de pulsos de corta duración y como consecuencia de banda infinita, da lugar a una progresiva distorsión de estos; las altas frecuencias espaciales, se propagan con mayor lentitud que las bajas, y las que tienen muy altas frecuencias espaciales con longitudes de onda inferiores a dos o tres celdas no se propagan. La dispersión numérica hace que los pulsos de duración finita se ensanchen y dejen un residuo numérico de alta frecuencia espacial en los bordes del pulso.

Para tener un control de la dispersión es conveniente efectuar la transformada de Fourier espacial del pulso deseado, entonces a la vista del espectro, se seleccionan las dimensiones de la celda, de modo que las componentes principales del espectro sean resueltas con al menos diez celdas por longitud de onda.

Esta medida limita la dispersión a menos de un 1% a pesar de la debida al ángulo de propagación con la red.

Otro efecto adicional a los comentados anteriormente, inherentes a la dispersión numérica del algoritmo, es la pseudo-refracción de la onda si el tamaño de la celda es función de la posición. La variación de la finura del mallado, varía la resolución de la onda que se propaga y en consecuencia perturba la distribución de velocidades de fase.

Esto da lugar a reflexiones sin significado físico y refracción de las ondas en las interfases entre zonas con distintos tamaños de las celdas, incluso aunque estas representan zonas del espacio libre, es como si las ondas se reflejaran y refractaran en las interfases de medios dieléctricos que tienen diferentes índices de refracción.

El grado de refracción depende de lo abrupto que sea el cambio en la velocidad de fase y puede ser estimado mediante la teoría convencional de reflexión y refracción de ondas en interfaces.

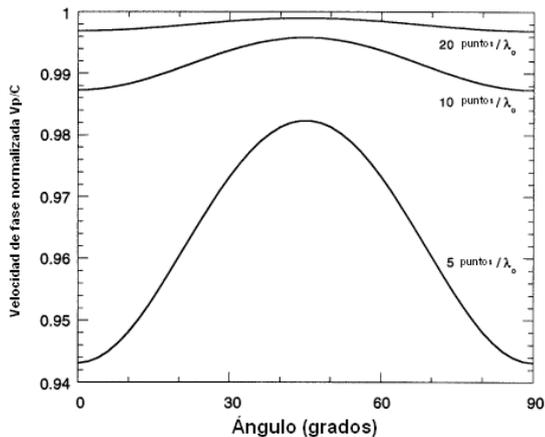


Figura 3.4: Variación de la velocidad de fase con el ángulo de propagación en un mallado FDTD para 3 discretizaciones diferentes.

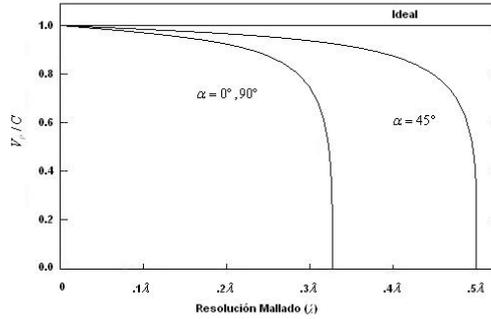


Figura 3.5: Variación de la velocidad de fase con la resolución del malla FDTD para dos ángulos de propagación.

### 3.3 Excitación.

Los parámetros que caracterizan un sistema, se obtienen con FDTD mediante dos posibles vías:

1. La modelización del proceso de scattering (dispersión), para cada una de las frecuencias de interés. En este caso se utilizan como excitación señales con dependencia armónica en el tiempo. El proceso de simulación se prolonga hasta que se alcanza el estado estacionario, al cual se ha llegado cuando se observa en el muestreo del campo dispersado una variación temporal periódica. El empleo de señales sinusoidales como excitación, permite que los parámetros se obtengan por simple comparación de las amplitudes del campo dispersado.
2. Se modeliza el proceso de dispersión haciendo uso de pulsos temporales. Este tipo de excitación permite experimentar con gran variedad de pulsos finitos. La única exigencia a estos, es que presenten una variación temporal finita y suave. El proceso de iteración FDTD se mantiene hasta que todo el campo introdu-

cido por el pulso se ha dispersado, saliendo por los contornos abiertos al exterior. Las características del sistema en el dominio de la frecuencia se obtienen efectuando la transformada de Fourier del campo dispersado en el dominio del tiempo.

El uso de pulsos tiene la ventaja de permitir obtener resultados en un amplio rango de frecuencias mediante una sola simulación. Con señales armónicas hay que repetir la simulación para cada frecuencia. Sin embargo en los pulsos, el fenómeno de dispersión numérica no está tan controlado como en el caso monocromático. En una señal temporal finita hay superpuestas infinitas señales armónicas de las cuales sólo interesará un reducido intervalo, el resto contiene frecuencias que no se propagan o que sufren una gran dispersión numérica. Estas señales indeseadas generan un cierto nivel de ruido numérico, para cuya eliminación es necesario recurrir al uso de filtros. El uso de señales temporales de variación suave tiene que ver con esto último, hay que evitar señales abruptas con armónicos cuya longitud de onda sea de baja resolución en celdas y que luego generen sobreoscilaciones artificiales en la señal que se propaga.

El número de ciclos que requiere la onda incidente para alcanzar el estado estacionario depende inversamente de las pérdidas de la estructura o fenómeno que se modela.

### **3.4 Modelización de Medios con Pérdidas por Conductión.**

Una parte importante de este trabajo es el modo en que se introduce la conductividad en las ecuaciones de actualización de las componentes electromagnéticas dentro del esquema FDTD. El objetivo perseguido es elaborar un modelo que permita analizar las variaciones de la frecuencia de resonancia de la cavidad Tierra-ionosfera en

función del perfil de conductividad. La técnica FDTD se emplea habitualmente en la modelización de sistemas formados por dieléctricos y conductores perfectos. En contadas ocasiones se consideran las pérdidas por conducción, pues las estructuras modeladas son prácticamente ideales. El dieléctrico se supone ideal, y el conductor se modeliza anulando directamente las componentes de campo en su interior. En algunos casos se consideran las pérdidas en el dieléctrico, que generalmente se representan asignando al dieléctrico una pequeña conductividad. Las pérdidas óhmicas se representan mediante unas corrientes de conducción proporcionales a la intensidad del campo eléctrico. La constante de proporcionalidad es la conductividad eléctrica, que deja de ser nula en aquellos medios con pérdidas. Estas corrientes óhmicas actúan como fuentes de campo magnético, por lo que aparecen en la ley de Ampère; que es de donde se parte para evaluar la ecuación de actualización de las componentes del campo eléctrico.

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{E} \quad (3.58)$$

El desarrollo es el mismo para las tres componentes del campo eléctrico. Por ello, sólo se va a presentar la deducción de las ecuaciones de actualización para la componente  $E_z$ . De forma análoga se obtienen las ecuaciones de actualización de las otras dos componentes. La ecuación de actualización de  $E_z$  en  $t = (n + 1/2)\Delta_t$  se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta_t} &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]_z^{n+1/2} - \frac{\sigma}{\varepsilon} E_z^{n+1/2}(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.59)$$

El problema de esta ecuación es que requiere el valor de la componente  $E_z^{n+1/2}$ , mientras que la componente  $E_z$  se evalúa en  $t = n\Delta_t$  y  $t = (n+1)\Delta_t$ . La solución habitual es aproximar  $E_z^{n+1/2}$  como el promedio de  $E_z^n$  y  $E_z^{n+1}$ . Con lo que la ecuación anterior queda:

$$\frac{E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta_t} = \frac{1}{\varepsilon} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]_z^{n+1/2} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{E_z^{n+1}(i, j, k) + E_z^n(i, j, k)}{2} \quad (3.60)$$

Reordenando se llega a la ecuación de actualización para medios con pérdidas empleada en la técnica FDTD [Kunz y Luebbers, 1993] y [Sullivan, 2000]:

$$E_z^{n+1}(i, j, k) = \frac{1 - \frac{\Delta_t \sigma}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta_t \sigma}{2\varepsilon}} E_z^n(i, j, k) + \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta_t \sigma}{2\varepsilon}} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]_z^{n+1/2} \quad (3.61)$$

La expresión (3.61) sólo es válida cuando se consideran valores de conductividad pequeños [Navarro, 1992], [Taflove, 2000]. Si se considera el término que acompaña a  $E_z^n$  en (3.61) se comprueba que para valores pequeños de  $\sigma$  se obtienen relaciones similares al caso sin pérdidas. Pero dicho término no reproduce la realidad cuando  $\sigma > 2\varepsilon / \Delta_t$ .

Considerando valores estándar de estos parámetros en las simulaciones ( $\varepsilon = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $\Delta_t \approx 8,8 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ ), y que la conductividad

eléctrica varía entre  $10^{-14} S/m$  y  $10^{-2} S/m$  se comprueba que la relación (3.61) no resulta apropiada para representar el amplio rango de valores de conductividad en que se está interesado [Holland et al., 1980].

La falta de exactitud de la ecuación de actualización (3.61) se debe a la aproximación del campo eléctrico en  $n + 1/2$  por el promedio de los campos en  $n$  y en  $n + 1$ . Otras aproximaciones posibles son

$$E_z^{n+1/2} \approx E_z^n \text{ y } E_z^{n+1/2} \approx E_z^{n+1} .$$

Aunque la mejor opción consiste en la diferenciación exponencial temporal [Longley y Longmire, 1973] y su aplicación a la técnica FDTD [Holland et al., 1980]. La ventaja de la diferenciación exponencial es que evalúa la integral temporal de la componente de campo eléctrico en cada iteración, en lugar de aproximarla a partir de los campos en los extremos del intervalo. En este caso, para obtener las ecuaciones de actualización se comienza reordenando (3.58) y multi-

PLICANDO AMBOS LADOS POR EL FACTOR  $e^{\frac{\sigma t}{\epsilon}}$ , con lo que se obtiene:

$$e^{\frac{\sigma t}{\epsilon}} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} + e^{\frac{\sigma t}{\epsilon}} \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{E}_z = e^{\frac{\sigma t}{\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]_z \quad (3.62)$$

que se puede escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t} [e^{\frac{\sigma t}{\epsilon}} \vec{E}_z] = e^{\frac{\sigma t}{\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]_z \quad (3.63)$$

La ecuación de actualización se obtiene integrando esta última relación entre los intervalos temporales  $n\Delta_t$  y  $(n+1)\Delta_t$ . En la integración

se supone que la variación temporal de la parte de la anterior ecuación viene dada únicamente por la exponencial.

$$\int_{n\Delta_t}^{(n+1)\Delta_t} \frac{\partial}{\partial t} [e^{\frac{\sigma t}{\varepsilon}} \vec{E}_z] dt = \int_{n\Delta_t}^{(n+1)\Delta_t} e^{\frac{\sigma t}{\varepsilon}} dt \frac{1}{\varepsilon} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]_z \quad (3.64)$$

$$\left[ e^{\frac{\sigma t}{\varepsilon}} \vec{E}_z \right]_{n\Delta_t}^{(n+1)\Delta_t} = e^{\frac{\sigma t}{\varepsilon}} \Big|_{n\Delta_t}^{(n+1)\Delta_t} \frac{1}{\sigma} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]_z \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{\sigma(n+1)\Delta_t}{\varepsilon}} (E_z^{n+1}(i, j, k) - e^{-\frac{\sigma\Delta_t}{\varepsilon}} E_z^n(i, j, k)) \\ = e^{\frac{\sigma(n+1)\Delta_t}{\varepsilon}} \frac{1 - e^{-\frac{\sigma\Delta_t}{\varepsilon}}}{\sigma} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]_z \end{aligned} \quad (3.66)$$

Finalmente, la ecuación de actualización de la componente  $E_z$  en el caso de un medio con pérdidas por conducción queda:

$$E_z^{n+1}(i, j, k) = e^{-\frac{\sigma\Delta_t}{\varepsilon}} E_z^n(i, j, k) + \frac{1 - e^{-\frac{\sigma\Delta_t}{\varepsilon}}}{\sigma} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]_z \quad (3.67)$$

Las ecuaciones de actualización del resto de componentes del campo eléctrico se obtienen siguiendo un procedimiento análogo. Quedando:

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i, j, k) = e^{-\frac{\sigma\Delta_t}{\varepsilon}} E_x^n(i, j, k) + \\ + \frac{1 - e^{-\frac{\sigma\Delta_t}{\varepsilon}}}{\sigma} \left[ \frac{H_z^{n+1/2}(i, j, k) - H_z^{n+1/2}(i, j-1, k)}{\Delta y} - \right. \\ \left. - \frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n+1/2}(i, j, k-1)}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (3.68a)$$

$$\begin{aligned}
 E_y^{n+1}(i, j, k) = & e^{-\frac{\sigma \Delta_t}{\epsilon}} E_y^n(i, j, k) + \\
 & + \frac{1 - e^{-\frac{\sigma \Delta_t}{\epsilon}}}{\sigma} \left[ \frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k) - H_x^{n+1/2}(i, j, k-1)}{\Delta y} - \right. \\
 & \left. - \frac{H_z^{n+1/2}(i, j, k) - H_z^{n+1/2}(i-1, j, k)}{\Delta x} \right]
 \end{aligned} \tag{3.68b}$$

$$\begin{aligned}
 E_z^{n+1}(i, j, k) = & e^{-\frac{\sigma \Delta_t}{\epsilon}} E_z^n(i, j, k) + \\
 & + \frac{1 - e^{-\frac{\sigma \Delta_t}{\epsilon}}}{\sigma} \left[ \frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n+1/2}(i-1, j, k)}{\Delta x} - \right. \\
 & \left. - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k) - H_x^{n+1/2}(i, j-1, k)}{\Delta y} \right]
 \end{aligned} \tag{3.68c}$$

Las ecuaciones de actualización de las componentes del campo magnético no se ven afectadas en el caso de medios con pérdidas óhmicas. Éstas se obtienen a partir de la ley de Faraday, que no se ve modificada por la conductividad eléctrica.

### 3.5 Consideraciones Sobre la Inserción de la Conductividad en las Ecuaciones FDTD

Finalmente, se pretende mostrar cómo afecta al resultado final la elección adecuada de la aproximación con la que introducir el efecto de la conductividad eléctrica.

Ya se ha mencionado anteriormente que el efecto de la conductividad eléctrica se introduce en la ley de Ampère (3.58). Desarrollando la derivada temporal de (3.58) se obtiene la ecuación en diferencias para la actualización del campo eléctrico en cada iteración (3.59), evaluada en  $t = (n + 1/2)\Delta_t$ .

El problema es que el término que considera la contribución de la conductividad eléctrica, es proporcional a  $E^{n+1/2}$ , pero el campo eléctrico sólo está evaluado en  $t = n\Delta_t$  y  $t = (n+1)\Delta_t$ . Resulta pues necesario reescribir  $E^{n+1/2}$  en función de los valores conocidos  $E^n$  y  $E^{n+1}$ , para, a continuación, obtener la ecuación de actualización del campo eléctrico; en la que  $E^{n+1}$  debe quedar en función de los valores conocidos  $E^n$  y  $[\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]^{n+1/2}$ . La forma que debe tener la ecuación de actualización del campo eléctrico es:

$$\vec{E}^{n+1} = C_E \vec{E}^n + C_R [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}]^{n+1/2} \quad (3.69)$$

donde los coeficientes  $C_E$  y  $C_R$  variarán en función de la aproximación empleada para reescribir  $E^{n+1/2}$  a partir de  $E^n$  y  $E^{n+1}$ .

Se han considerado diferentes aproximaciones para evaluar  $E^{n+1/2}$  a partir de los valores de campo eléctrico disponibles;  $E^{n+1/2} \approx (E^{n+1} + E^n)/2$ ,  $E^{n+1/2} \approx E^{n+1}$ ,  $E^{n+1/2} \approx E^n$ , y la solución proporcionada mediante la diferenciación exponencial.

En la tabla 3.1. se presentan las expresiones de  $C_E$  y  $C_R$  obtenidas con cada una de las aproximaciones de  $E^{n+1/2}$ .

De las expresiones mostradas en la tabla 3.1. se concluye que en función de la aproximación empleada pueden obtenerse resultados muy diferentes.

A continuación se comprobará que, lo que en principio parecía una cuestión menor, resulta ser muy importante. Porque algunas de las

aproximaciones consideradas pueden provocar que el proceso iterativo no se mantenga estable.

Aproximación	$C_E$	$C_R$
$E^{n+1/2} \approx E^n$	$(1 - \frac{\sigma}{\epsilon})\Delta_t$	$\frac{\Delta_t}{\epsilon}$
$E^{n+1/2} \approx (E^{n+1} + E^n)/2$	$\frac{(1 - \frac{\sigma}{2\epsilon})}{(1 + \frac{\sigma}{2\epsilon})}\Delta_t$	$\frac{\Delta_t}{\epsilon} \frac{1}{(1 + \frac{\sigma}{2\epsilon})}$
$E^{n+1/2} \approx E^{n+1}$	$\frac{\Delta_t}{1 + \frac{\sigma}{\epsilon}}$	$\frac{\Delta_t}{\epsilon} \frac{1}{(1 + \frac{\sigma}{\epsilon})}$
Diff. Exponencial	$e^{-\frac{\sigma\Delta_t}{\epsilon}}$	$\frac{1 - e^{-\frac{\sigma\Delta_t}{\epsilon}}}{\sigma}$

Tabla 3.1: Expresiones de  $C_E$  y  $C_R$  en función de la aproximación empleada para reescribir  $E^{n+1/2}$  a partir de  $E^n$  y  $E^{n+1}$

En la figura 3.6 se presenta, para cada una de las aproximaciones, la variación del coeficiente  $C_E$  que acompaña a  $\bar{E}^n$  en las ecuaciones de actualización, en función de la conductividad eléctrica.

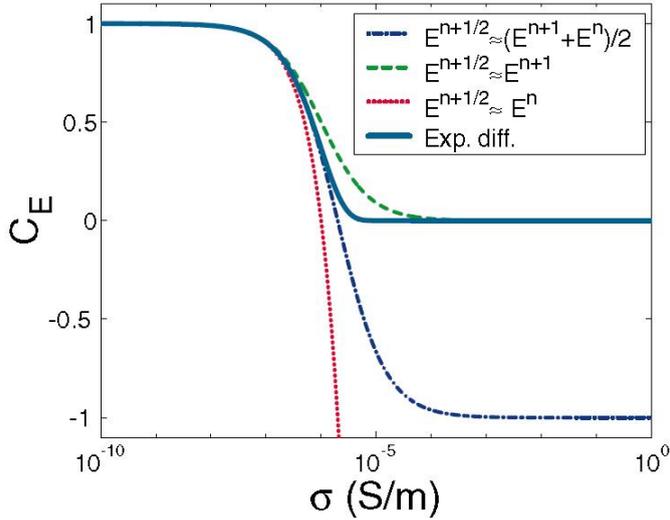


Figura 3.6: Coeficiente que acompaña a la componente  $E^n$  en las ecuaciones de actualización en función de la conductividad empleando diferentes aproximaciones para  $E^{n+1/2}$

Además de la conductividad, los coeficientes presentados dependen de otros parámetros,  $\Delta_t$  y  $\varepsilon$ . Dado que la atmósfera es gaseosa  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . El valor de  $\Delta_t$  se ha fijado a partir de valores típicos de las simulaciones de la atmósfera terrestre realizadas,  $\Delta_t = 2,8\mu s$ . De esta manera se puede analizar los valores que tomará este coeficiente en las simulaciones realizadas.

Se comprueba en la figura 3.6 que para valores pequeños de la conductividad eléctrica  $\sigma < 10^{-9}$  S/m los resultados proporcionados por las diferentes aproximaciones son muy similares. Pero a medida que aumenta la conductividad, se va observando cómo las diferentes curvas comienzan a separarse. La idea que en principio podría pare-

cer la más adecuada, asignar a  $E^{n+1/2}$  el valor que tenía en  $E^n$ , se muestra del todo inadecuada pues hace que el coeficiente  $C_E$ , representado en la figura 3.6 por una línea de puntos roja, aumente de forma lineal con la conductividad eléctrica. A priori, la segunda opción más adecuada, consistente en aproximar el valor de  $E^{n+1/2}$  como el promedio de los instantes temporales anterior y posterior, tampoco proporciona resultados mucho mejores. En este caso, los valores que toma el coeficiente están acotados dentro del intervalo  $(-1,+1)$ . El valor de  $C_E$  obtenido con esta aproximación toma valores negativos cuando  $\sigma > 10^{-5}$  S/m. Estos valores negativos generarán oscilaciones de alta frecuencia numérica durante la simulación, conduciendo a un algoritmo inestable.

Para que la aproximación deba ser tomada en consideración, de cara a su aplicación en las ecuaciones en diferencias, debe reproducir al menos los conocimientos que se tienen de electromagnetismo. Cuando  $\sigma \rightarrow 0$  las ecuaciones deben ser equivalentes a las de un medio sin pérdidas por conducción. Cuando  $\sigma \rightarrow \infty$  debe reproducirse la extinción del campo eléctrico en el interior del conductor perfecto. La primera de las afirmaciones es verificada en todas las aproximaciones. Pero la segunda no se verifica en los dos primeros casos. El que el campo eléctrico se anule en el interior del conductor se traduce en que al aumentar la conductividad el coeficiente analizado debe anularse. Eso se reproduce tanto en la aproximación  $E^{n+1/2} \approx E^{n+1}$ , como en el caso de la diferenciación exponencial. De estas dos, la ecuación obtenida mediante la diferenciación exponencial reproduce con mayor exactitud la evolución del campo electromagnético en función de la conductividad. Así, deben descartarse las dos primeras aproximaciones por conducir a situaciones inestables. En el caso de estudiar sistemas reales con pocas pérdidas

( $\sigma < 10^{-9}$  S/m para dieléctricos, o  $\sigma > 10^{-2}$  S/m en el caso de conductores) es factible el uso de la aproximación  $E^{n+1/2} \approx E^{n+1}$ . Pero, en el caso de analizar sistemas en los que el efecto de las pérdidas es considerable es preciso recurrir a las expresiones obtenidas mediante diferenciación exponencial.

### 3.6 El Problema de la Modelización de Cortezas Esféricas.

La mayor parte de aplicaciones de la técnica FDTD han sido pensadas para la modelización y el análisis de estructuras con simetría paralelepípedica. Las estructuras cilíndricas o esféricas estudiadas han sido resueltas empleando un “mallado” paralelepípedico. Se entiende por mallado aquella distribución de puntos, en un espacio bidimensional o tridimensional, que van a representar numéricamente la realidad modelizada. Esta distribución finita de puntos, regularmente espaciados, supone una discretización de la realidad.

Previamente se ha presentado la celda elemental, celda de Yee (figura 3.1), empleada en la técnica FDTD para la discretización espacial. Dado que la celda de Yee tiene una morfología paralelepípedica, se adapta perfectamente a contorno de sistemas con formas planoparalelas con ángulos rectos. Pero cuando se pretenden modelar elementos curvos, la forma de la celda elemental no se ajusta de forma natural a las condiciones de contorno. Al intentar aproximar los contornos de elementos curvos con celdas rectangulares aparece el llamado efecto escalera o *staircasing*. La figura 3.7 muestra este efecto cuando se pretende modelizar una circunferencia con un mallado formado por 40 celdas en las direcciones  $x$  e  $y$ . Aunque el efecto de *staircasing* es apreciable, con este mallado es posible obtener los primeros modos de la estructura sin un error excesivo. Si se pretende evaluar modos de mayor orden es necesario el uso de mallados mayores,

más densos. Así, la primera posibilidad para minimizar el efecto de *staircasing* es hacer uso de un mallado más denso. Este parche al problema del *staircasing* no es demasiado elegante pero es la mejor opción en la mayoría de los casos. En el caso en que la superficie curva separa un conductor perfecto y un dieléctrico, es posible emplear la solución proporcionada por *Dey-Mitra* [Dey y Mitra, 1997].

También se ha propuesto una solución para el caso en que se tiene dos dieléctricos [Dey y Mitra, 1999], pero en este segundo caso la aproximación de *Dey-Mitra* no resulta tan interesante. Otra solución empleada en la modelización de perfiles curvos es la técnica de sub-gridding [Zivanovic et al., 1991], [Okoniewski et al., 1997], [Wang et al., 2002], [Krishnaiah and Rialton, 1999].

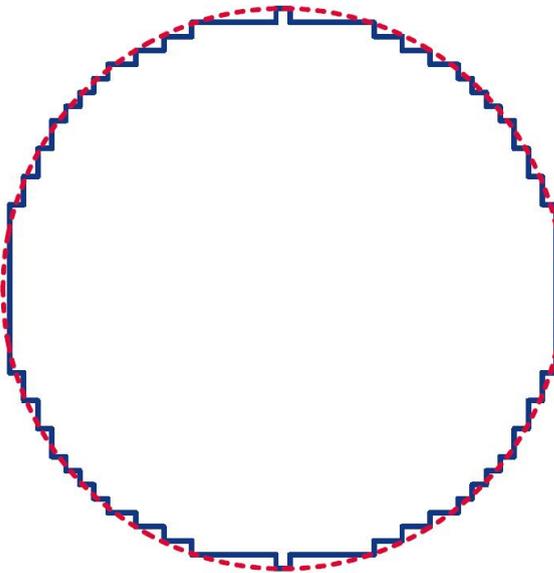


Figura 3.7: Efecto de staircasing al modelar elementos circulares

Esta técnica combina mallados más densos en aquellas regiones donde es necesario un mayor nivel de detalle. La técnica del *subgridding* está especialmente indicada cuando el perfil curvo sólo afecta a una parte del sistema. Finalmente, las combinaciones de *unstructured grids* o *non-orthogonal grids* con la técnica FDTD [Taflove, 2000], [Masden, 1992], [Gedney et al., 1996], [Navarro et al., 1995], han sido explotadas con éxito en gran cantidad de casos en los que el contorno del sistema no es rectangular. El inconveniente de estas técnicas es su complejidad. Requiere en todo momento el uso de coordenadas covariantes y contravariantes, además de manejar simultáneamente un mallado y su mallado recíproco. Por lo que esta técnica resulta bastante tediosa para su uso.

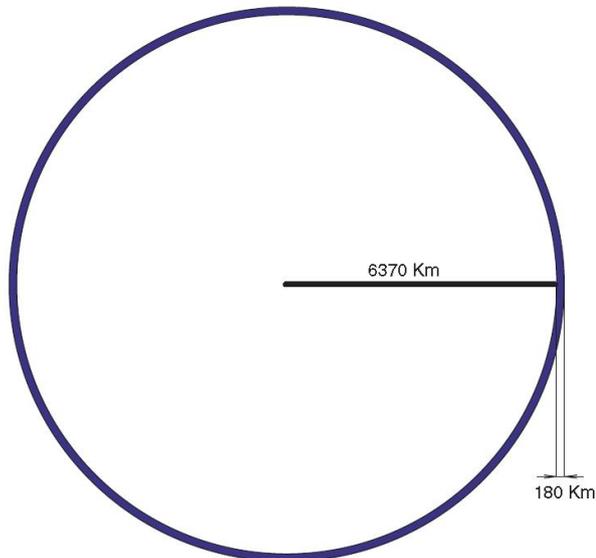


Figura 3.8: Espesor de la atmósfera terrestre.

Antes de escoger una alternativa para la modelización electromagnética de la guía de ondas formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera, resulta interesante visualizar el sistema que se pretende modelizar. La figura 3.8 es una representación a escala de la atmósfera terrestre. Suponiendo que el radio interior de la corona circular coincidiese con el radio terrestre, una atmósfera de 180 km de espesor quedaría representada por la franja en azul. Al ver el sistema que se pretende analizar se descartan algunas de las soluciones empleadas usualmente en FDTD para la modelización de sistemas curvos. Sólo las técnicas basadas en *unstructured grids* o *non-uniform* FDTD parecen ofrecer alguna mejora de cara a resolver el problema, pero tampoco suponen una ventaja considerable. La figura 3.8 pone de manifiesto que el sistema de coordenadas cartesianas no es el más adecuado para resolver el problema. La solución planteada es el uso de coordenadas curvilíneas, concretamente coordenadas esféricas.

### 3.7 Modelado FDTD de Cortezas Esféricas

#### 3.7.1 FDTD en Coordenadas Curvilíneas

El desarrollo y uso de la técnica FDTD ha estado íntimamente ligado durante los últimos 30 años a la modelización de dispositivos electromagnéticos aplicados en tecnología. La técnica FDTD ha ido generalmente asociada a los sistemas de representación cartesianos. Pero, en la guía formada por la Tierra y la ionosfera, el sistema de coordenadas esféricas permite una descripción natural de la región a analizar. La sencillez con que queda descrito el problema en coordenadas esféricas compensa los inconvenientes derivados del uso de este sistema de coordenadas

Las coordenadas curvilíneas han sido poco empleadas junto con la técnica FDTD. Prácticamente todas las aplicaciones han estado rela-

cionadas con la modelización de sistemas de simetría cilíndrica. El uso de coordenadas curvilíneas con la técnica FDTD fue introducido en 1990 por Fusco [Fusco, 1990], posteriormente fue extendido a sistemas tridimensionales [Fusco et al., 1991], [Soriano, 2006], [Soriano, 2007]. Para la obtención de las ecuaciones de actualización para los campos eléctrico y magnético se recurre a las ecuaciones de Maxwell en forma integral:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\mu \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{s} \quad (3.70a)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \epsilon \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} \quad (3.70b)$$

donde S hace referencia a la superficie de integración, y L al camino que la delimita.

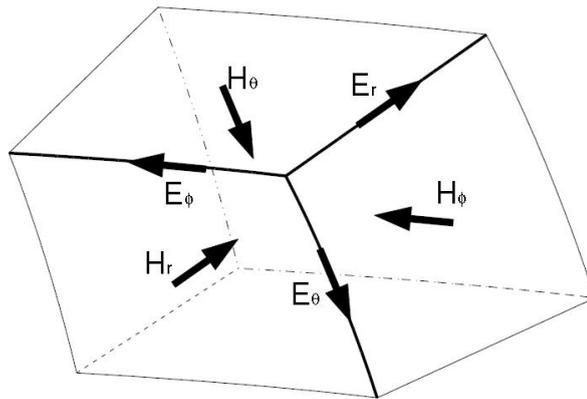


Figura 3.9: Celda FDTD en coordenadas esféricas.

En la figura 3.9 se presenta la celda de Yee en coordenadas esféricas. En dicha figura se presenta la distribución de las componentes electromagnéticas en cada uno de los nodos.

El mallado empleado se obtiene replicando la celda elemental de la figura 3.9, en las direcciones radial y angulares hasta cubrir toda la región tridimensional objeto de la modelización.

La corteza esférica considerada comprende la región situada entre la superficie de la Tierra ( $R_T$ ) y la parte inferior de la ionosfera situada a una altitud ( $h$ ) sobre la superficie. Siendo los rangos de variación de la magnitud radial  $r \in (R_T, R_T+h)$ , latitud  $\theta \in (0, \pi)$ , y longitud  $\phi \in (0, 2\pi)$ .

$$\begin{aligned} E_r(\vec{r}, t) &\approx E_r(R_T + (i+0.5)\Delta_r, j\Delta_\theta, k\Delta_\phi, n\Delta_t) \\ &= E_r^n(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.71a)$$

$$\begin{aligned} E_\theta(\vec{r}, t) &\approx E_\theta(R_T + i\Delta_r, (j+0.5)\Delta_\theta, k\Delta_\phi, n\Delta_t) \\ &= E_\theta^n(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.71b)$$

$$\begin{aligned} E_\phi(\vec{r}, t) &\approx E_\phi(R_T + i\Delta_r, j\Delta_\theta, (k+0.5)\Delta_\phi, n\Delta_t) \\ &= E_\phi^n(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.71c)$$

$$\begin{aligned} H_r(\vec{r}, t) &\approx H_r(R_T + i\Delta_r, (j+0.5)\Delta_\theta, (k+0.5)\Delta_\phi, (n+0.5)\Delta_t) \\ &= H_r^{n+1/2}(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.71d)$$

$$\begin{aligned} H_\theta(\vec{r}, t) &\approx H_\theta(R_T + (i+0.5)\Delta_r, j\Delta_\theta, (k+0.5)\Delta_\phi, (n+0.5)\Delta_t) \\ &= H_\theta^{n+1/2}(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.71e)$$

$$\begin{aligned} H_{\phi}(\vec{r}, t) &\approx H_{\phi}(R_T + (i+0.5)\Delta_r, (j+0.5)\Delta_{\theta}, k\Delta_{\phi}, (n+0.5)\Delta_t) \\ &= H_{\phi}^{n+1/2}(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.71f)$$

Los índices enteros  $i, j, k$  están asociados a las direcciones radial  $r$  y angulares  $\theta, \phi$ , respectivamente. Hacen referencia al elemento de matriz en que queda representado cada región de la corteza esférica. El elemento de matriz identificado con la terna  $(i=0, j=0, k=0)$  corresponde al polo norte.

La inclusión explícita del radio terrestre  $R_T$  en (3.71) evita la modelización de la parte interior de la corteza terrestre, donde no se propaga la señal electromagnética. De este modo se aprovechan todas las celdas del mallado en la modelización de la atmósfera terrestre, que es la región de interés.

Las ecuaciones de actualización de cada componente se obtienen a partir de las ecuaciones (3.70), teniendo en cuenta la discretización de cada componente (3.71) y, la posición que ocupa dicha componente en cada nodo FDTD, ver figura. 3.9.

En la figura 3.10 se detalla el área de integración empleada en la actualización de  $H_r$ , donde se observa más claramente qué componentes del campo eléctrico intervienen en la actualización de  $H_r$ .

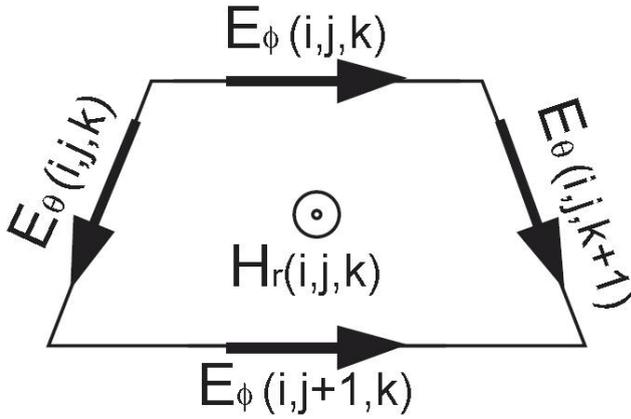


Figura 3.10: Detalle del área de integración empleada en la actualización de  $H_r$ .

El resto de componentes emplean áreas de integración análogas a la presentada en la figura 3.10, dando como resultado las ecuaciones de actualización:

$$E_r^{n+1}(i, j, k) = E_r^n(i, j, k) + \frac{\Delta_t}{\epsilon S_{er}(i, j)} \left\{ \begin{aligned} & \left[ H_\phi^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{h\phi}(i, j) - H_\phi^{n+1/2}(i, j-1, k) \cdot l_{h\phi}(i, j-1) \right] \\ & - \left[ H_\theta^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{h\theta}(i) - H_\theta^{n+1/2}(i, j, k-1) \cdot l_{h\theta}(i) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.72a)$$

$$E_\theta^{n+1}(i, j, k) = E_\theta^n(i, j, k) + \frac{\Delta_t}{\epsilon S_{e\theta}(i, j)} \left\{ \begin{aligned} & \left[ H_\phi^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{h\phi}(i, j) - H_\phi^{n+1/2}(i-1, j, k) \cdot l_{h\phi}(i-1, j) \right] \\ & - \left[ H_r^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{hr}(i) - H_r^{n+1/2}(i, j, k-1) \cdot l_{hr}(i) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.72b)$$

$$E_{\phi}^{n+1}(i, j, k) = E_{\phi}^n(i, j, k) + \frac{\Delta_t}{\epsilon S_{e\phi}(i)} \left[ \begin{aligned} & \left[ H_{\theta}^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{h\theta}(i) - H_{\theta}^{n+1/2}(i-1, j, k) \cdot l_{h\theta}(i-1) \right] \\ & - \left[ H_r^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{hr}(i) - H_r^{n+1/2}(i, j-1, k) \cdot l_{hr} \right] \end{aligned} \right] \quad (3.72c)$$

$$H_r^{n+1/2}(i, j, k) = H_r^{n-1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta_t}{\mu S_{hr}(i, j)} \left[ \begin{aligned} & \left[ E_{\phi}^n(i, j, k) \cdot l_{e\phi}(i, j) - E_{\phi}^n(i, j+1, k) \cdot l_{e\phi}(i, j+1) \right] \\ & - \left[ E_{\theta}^n(i, j, k) \cdot l_{e\theta}(i) - E_{\theta}^n(i, j, k+1) \cdot l_{e\theta}(i) \right] \end{aligned} \right] \quad (3.72d)$$

$$H_{\theta}^{n+1/2}(i, j, k) = H_{\theta}^{n-1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta_t}{\mu S_{h\theta}(i, j)} \left[ \begin{aligned} & \left[ E_r^n(i, j, k) \cdot l_{er} - E_r^n(i, j, k+1) \cdot l_{er} \right] \\ & - \left[ E_{\phi}^n(i, j, k) \cdot l_{e\phi}(i, j) - E_{\phi}^n(i+1, j) \cdot l_{e\phi}(i+1, j) \right] \end{aligned} \right] \quad (3.72e)$$

$$H_{\phi}^{n+1/2}(i, j, k) = H_{\phi}^{n-1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta_t}{\mu S_{h\phi}(i, j)} \left[ \begin{aligned} & \left[ E_{\theta}^n(i, j, k) \cdot l_{e\theta}(i) - E_{\theta}^n(i+1, j, k) \cdot l_{e\theta}(i+1) \right] \\ & - \left[ E_r^n(i, j, k) \cdot l_{er} - E_r^n(i, j+1, k) \cdot l_{er} \right] \end{aligned} \right] \quad (3.72f)$$

En las ecuaciones (3.72) aparecen los elementos de superficie  $S_{er}$  y los de longitud  $l_{er}$  asociados a cada componente. Éstos cuantifican la superficie y la longitud del camino de integración empleado en la actualización de cada componente. Dado que el tamaño de las celdas varía con la posición de las mismas, también los coeficientes de

área y longitud dependen del punto de aplicación. Esta dependencia se indica con los índices enteros  $i$  y  $j$ . Los elementos de longitud (3.73) se obtienen mediante una integración a lo largo de las aristas de cada celda:

$$l_{er} = \Delta_r \quad (3.73a)$$

$$l_{e\theta}(i) = (R_T + i\Delta_r)\Delta_\theta \quad (3.73b)$$

$$l_{e\phi}(i, j) = (R_T + i\Delta_r)\sin(j\Delta_\theta)\Delta_\phi \quad (3.73c)$$

$$l_{hr} = \Delta_r \quad (3.73d)$$

$$l_{h\theta}(i) = (R_T + (i+0.5)\Delta_r)\Delta_\theta \quad (3.73e)$$

$$l_{h\phi}(i, j) = (R_T + (i+0.5)\Delta_r)\sin((j+0.5)\Delta_\theta)\Delta_\phi \quad (3.73f)$$

De forma similar, los elementos de superficie se obtienen integrando cada una de las caras de la celda elemental.

$$\begin{aligned} S_{er}(i, j) &= \int_{(k-0.5)\Delta_\phi}^{(k+0.5)\Delta_\phi} d\phi \int_{(j-0.5)\Delta_\theta}^{(j+0.5)\Delta_\theta} r^2 \sin(\theta) d\theta = \\ &= (R_T + (i+0.5)\Delta_r)^2 \Delta_\phi \left\{ \cos((j-0.5)\Delta_\theta) - \cos((j+0.5)\Delta_\theta) \right\} \end{aligned} \quad (3.74a)$$

$$\begin{aligned} S_{e\theta}(i, j) &= \int_{(k-0.5)\Delta_\phi}^{(k+0.5)\Delta_\phi} d\phi \int_{(i-0.5)\Delta_r}^{(i+0.5)\Delta_r} r \sin(\theta) dr = \\ &= (R_T + i\Delta_r)\sin((j+0.5)\Delta_\theta)\Delta_r\Delta_\phi \end{aligned} \quad (3.74b)$$

$$\begin{aligned}
 S_{e\phi}(i) &= \int_{(j-0.5)\Delta_\theta}^{(j+0.5)\Delta_\theta} d\theta \int_{(i-0.5)\Delta_r}^{(i+0.5)\Delta_r} r dr = \\
 &= (R_T + i\Delta_r)\Delta_r\Delta_\theta
 \end{aligned} \tag{3.74c}$$

$$\begin{aligned}
 S_{hr}(i, j) &= \int_{k\Delta_\phi}^{(k+1)\Delta_\phi} d\phi \int_{j\Delta_\theta}^{(j+1)\Delta_\theta} r^2 \sin(\theta) d\theta = \\
 &= (R_T + i\Delta_r)^2 \Delta_\phi \left\{ \cos(j\Delta_\theta) - \cos((j+1)\Delta_\theta) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.74d}$$

$$\begin{aligned}
 S_{h\theta}(i, j) &= \int_{k\Delta_\phi}^{(k+1)\Delta_\phi} d\phi \int_{i\Delta_r}^{(i+1)\Delta_r} r \sin(\theta) dr = \\
 &= (R_T + (i+0.5)\Delta_r) \sin(j\Delta_\theta) \Delta_r \Delta_\phi
 \end{aligned} \tag{3.74e}$$

$$\begin{aligned}
 S_{h\phi}(i) &= \int_{j\Delta_\theta}^{(j+1)\Delta_\theta} d\theta \int_{i\Delta_r}^{(i+1)\Delta_r} r dr = \\
 &= (R_T + (i+0.5)\Delta_r) \Delta_r \Delta_\theta
 \end{aligned} \tag{3.74f}$$

A diferencia de los mallados en coordenadas cartesianas, donde generalmente los elementos de longitud y superficie son iguales en todo el mallado, cada celda es ligeramente diferente a sus vecinas.

En (3.73) y (3.74) se observa como el tamaño de las celdas aumenta de forma progresiva desde la superficie terrestre hasta el límite inferior de la ionosfera; y desde los polos hasta el ecuador. Por esta razón se debe tener especial cuidado en la indexación de las matrices de variables y coeficientes:

- La primera de ellas se corresponde con el origen de coordenadas ( $r = 0$ ) En el origen de coordenadas, independientemente del valor que tomen las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$ , siempre que ( $r = 0$ ) se está haciendo referencia a la misma posición.
- La segunda discontinuidad no es tan acusada como la primera. Se sitúa sobre el eje de rotación (Norte-Sur). Independientemente

te del valor que tome  $\phi$ , siempre que  $\theta = 0$  se hace referencia al mismo punto del sistema de representación. En el caso en que  $\theta = \pi$  ocurre exactamente lo mismo.

El inconveniente que plantean estas discontinuidades es que en las matrices que contienen la información sobre cada una de las componentes del campo electromagnético hay toda una fila o columna de valores que representan un mismo punto. La solución al problema es bastante sencilla, simplemente hay que tener esto muy presente, y actualizar estos elementos de matriz de forma adecuada.

El que la solución al problema sea sencilla no contradice el que la programación de estos puntos sea delicada. Cualquier error en la actualización de estos elementos de matriz es fuente de importantes inestabilidades, que tienen como consecuencia inmediata una fuerte divergencia de la solución numérica.

El hecho de que el sistema que se estudia sea una corteza esférica, y no una esfera, tiene como ventaja que la discontinuidad en el origen de coordenadas no está presente.

En el caso que el sistema a estudiar fuese la esfera completa, resultaría preferible el uso de coordenadas cartesianas, pues presentan estas discontinuidades. Aunque el efecto de *staircasing* degrade la solución, las celdas son más uniformes, es decir, no hay tanta diferencia entre los tamaños de las celdas centrales y las del borde de la esfera.

A la segunda discontinuidad sí se va a tener que prestar especial atención. Es la que se tiene sobre el eje Norte-Sur ( $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ ). Para salvar esta discontinuidad se deben escoger de forma adecua-

da las componentes del campo y, su posición dentro de la celda en que se representa el eje.

En la figura 3.11 se presenta el modo en que se deben situar las diferentes componentes del campo sobre el eje  $\theta = 0$ . Se puede comprobar que en esta celda sólo están representadas cuatro de las seis componentes del campo electromagnético.

De acuerdo con la celda presentada en la figura 3.11, no hay elementos de área a partir de los que calcular las componentes  $E_\phi$  y  $H_\theta$ . Por lo que estas dos componentes no están contempladas en la celda que representa los ejes  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ .

Atendiendo a la posición de cada componente en la figura 3.11, se comprueba que la actualización de las componentes  $E_r$  y  $H_r$  sobre el eje, requieren de caminos de integración diferentes a los empleados para estas componentes en el resto del espacio de simulación. Estos caminos de integración quedan detallados en la figura 3.12. De la figura 3.12(a) se extrae que la actualización de la componente  $E_r$  en  $\theta = 0$  viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\Delta_\theta}{2}} \frac{\partial E_r(r, \theta, \phi, t)}{\partial t} r^2 \sin(\theta) d\theta = \\ = \int_0^{2\pi} H_\phi \left( r, \frac{\Delta_\theta}{2}, \phi, t \right) r \sin\left(\frac{\Delta_\theta}{2}\right) d\phi \end{aligned} \quad (3.75)$$

Con la intención de hacer más sencilla la actualización de la componente radial del campo eléctrico a lo largo del eje  $\theta = 0$  se ha añadido la variable  $E_{\text{North}}$ . Ésta se corresponde con el valor que toma dicha componente sobre el mencionado eje.

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\Delta\theta}{2}} \frac{\partial E_r(r, \theta, \phi, t)}{\partial t} r^2 \sin(\theta) d\theta \approx \left\{ E_{North}^{n+1}(i) - E_{North}^n(i) \right\} S_{er}(i, 0) \quad (3.76)$$

Con lo que la actualización de la componente radial del campo eléctrico sobre el eje  $\theta = 0$  queda:

$$E_{North}^{n+1}(i) = E_{North}^n(i) + A_i \sum_{k=0}^{K_{max}} H_{\phi}^{n+0.5}(i, 0, k) \quad (3.77)$$

Todas las dependencias de las discretizaciones espaciales y de las propiedades eléctricas quedan recogidas en el coeficiente  $A_i$ .

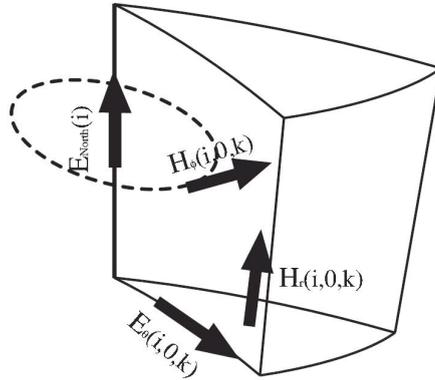


Figura 3.11: Detalle de la disposición de las diferentes componentes del campo electromagnético sobre el eje  $\theta = 0$ .

$$A_i = \frac{l_{h\phi}(i,0)\Delta_t}{\epsilon S_{er}(i,0)} = \frac{\Delta_t \Delta_\phi}{2\pi\epsilon [1 - \cos(0.5\Delta_\theta)](R_T + (i+0.5)\Delta_r)} \quad (3.78)$$

Dado que en las celdas situadas sobre el eje  $\theta = 0$  no está contemplada la componente  $E_\phi$ , también debe prestarse especial atención a la actualización de la componente  $H_r$  de dicha celda. Para dicha actualización se hace uso del área representada en la figura 3.12(b), quedando la actualización de dicha componente:

$$H_r^{n+1/2}(i,0,k) = H_r^{n-1/2}(i,0,k) + \frac{\Delta_t}{\mu S_{hr}(i,0)} \left\{ E_\phi^n(i,1,k) \cdot l_{e\phi}(i,1) + [E_\theta^n(i,0,k) \cdot l_{e\theta}(i) - E_\theta^n(i,0,k+1) \cdot l_{e\theta}(i)] \right\} \quad (3.79)$$

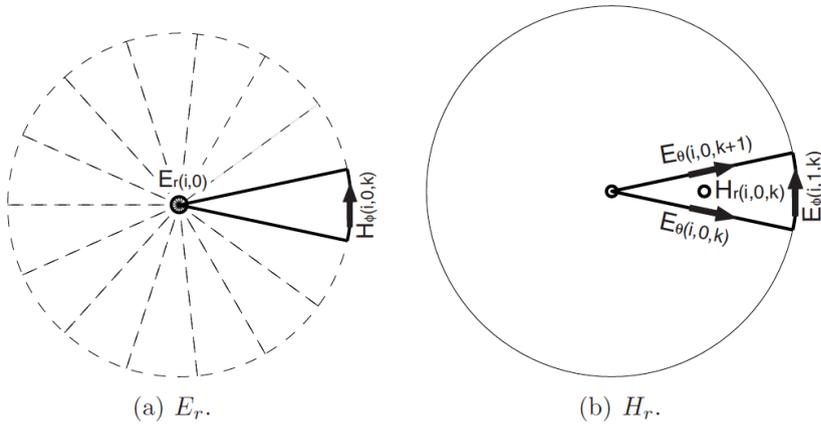


Figura 3.12: Caminos integración actualización componentes  $E_r$  y  $H_r$  sobre el eje  $\theta = 0$ .

En el polo sur se tiene una situación similar, que se ha representado en la figura 3.13. En este caso, la celda que representa el eje  $(\theta = \pi)$  sólo tiene la componente  $E_r$ , a la que se ha llamado  $E_{\text{South}}$ .

La actualización de esta componente va a depender de las celdas adyacentes al eje  $\theta = \pi$ , que se han identificado con  $j = j_{\text{max}} - 1$ . A diferencia de la primera celda, las celdas identificadas con  $j = j_{\text{max}} - 1$  son celdas normales, con todas las componentes electromagnéticas.

Aunque en la figura 3.13 sólo se han representado las que van a ser necesarias para modelizar correctamente la discontinuidad en el eje  $\theta = \pi$ . En cualquier caso hay que insistir que en el modelo sí se consideran las componentes  $E_\phi(i, j_{\text{max}} - 1, k)$  y  $H_\theta(i, j_{\text{max}} - 1, k)$ .

Los caminos de integración empleados en este caso son análogos a los mostrados en la figura 3.12; dando lugar a las ecuaciones de actualización.

$$E_{\text{South}}^{n+1}(i) = E_{\text{South}}^n(i) - A_i \sum_{k=0}^{K_{\text{max}}} H_\phi^{n+0.5}(i, j_{\text{max}}, k) \quad (3.80)$$

donde el coeficiente  $A_i$  toma el mismo valor que en (3.78)

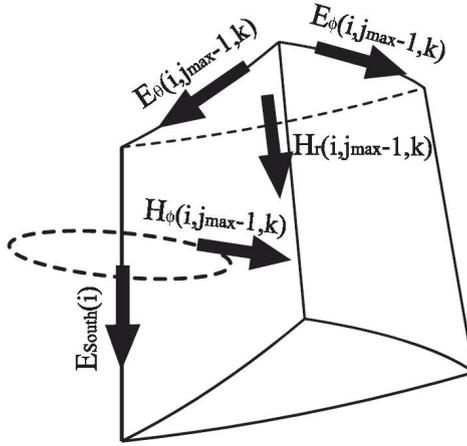


Figura 3.13: Disposición de las diferentes componentes en el eje  $\theta = \pi$ .

$$H_r^{n+1/2}(i, j_{\max} - 1, k) = H_r^{n-1/2}(i, j_{\max} - 1, k) + \frac{\Delta_t}{\mu S_{hr}(i, j_{\max} - 1)} \left\{ \begin{array}{l} \left[ E_{\theta}^n(i, j_{\max} - 1, k) \cdot l_{e\theta}(i) - E_{\theta}^n(i, j_{\max} - 1, k + 1) \cdot l_{e\theta}(i) \right] \\ - E_{\phi}^n(i, j_{\max} - 1, k) \cdot l_{e\phi}(i, j_{\max} - 1) \end{array} \right\} \quad (3.81)$$

### 3.7.2 Consideración del Perfil de Conductividad

Anteriormente, en la sección 3.4, se ha establecido el modo en que debe introducirse el perfil de conductividad en las ecuaciones de actualización de cada componente. Si se consideran de nuevo las ecuaciones de Maxwell en forma integral presentadas en (3.70), y se incorpora el término referente a las pérdidas por efecto Joule, se llega a la forma integral de las ecuaciones de Maxwell para medios con pérdidas.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\mu \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{s} \quad (3.82a)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \varepsilon \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} + \int_S \sigma(r) \vec{E} d\vec{s} \quad (3.82b)$$

La conductividad eléctrica sólo modifica a la ley de Ampère y por tanto sólo afectará a la ecuación de actualización del campo eléctrico. Siguiendo un procedimiento análogo al empleado para obtener las ecuaciones (3.72), considerando la inserción de la conductividad tal y como se planteó en la sección 3.4, se obtienen las ecuaciones en diferencias para actualizar el campo eléctrico en cada instante temporal.

$$E_r^{n+1}(i, j, k) = e^{-(\sigma(i)\Delta_t/\varepsilon)} E_r^n(i, j, k) + \frac{e^{-(\sigma(i)\Delta_t/\varepsilon)}}{\sigma(i)S_{er}(i, j)} \left\{ \begin{aligned} & \left[ H_\phi^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{h\phi}(i, j) - H_\phi^{n+1/2}(i, j-1, k) \cdot l_{h\phi}(i, j-1) \right] \\ & - \left[ H_\theta^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{h\theta}(i) - H_\theta^{n+1/2}(i, j, k-1) \cdot l_{h\theta}(i) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.83a)$$

$$E_\theta^{n+1}(i, j, k) = e^{-(\sigma(i)\Delta_t/\varepsilon)} E_\theta^n(i, j, k) - \frac{1 - e^{-(\sigma(i)\Delta_t/\varepsilon)}}{\sigma(i)S_{e\theta}(i, j)} \left\{ \begin{aligned} & \left[ H_\phi^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{h\phi}(i, j) - H_\phi^{n+1/2}(i-1, j, k) \cdot l_{h\phi}(i-1, j) \right] \\ & - \left[ H_r^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{hr}(i) - H_r^{n+1/2}(i, j, k-1) \cdot l_{hr}(i) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.83b)$$

$$E_{\phi}^{n+1}(i, j, k) = e^{-(\sigma(i)\Delta_t/\epsilon)} E_{\phi}^n(i, j, k) + \frac{1 - e^{-(\sigma(i)\Delta_t/\epsilon)}}{\sigma(i)S_{e\phi}(i)} \left[ \begin{array}{l} \left[ H_{\theta}^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{h\theta}(i) - H_{\theta}^{n+1/2}(i-1, j, k) \cdot l_{h\theta}(i-1) \right] \\ - \left[ H_r^{n+1/2}(i, j, k) \cdot l_{hr} - H_r^{n+1/2}(i, j-1, k) \cdot l_{hr} \right] \end{array} \right] \quad (3.83c)$$

Las ecuaciones de actualización del campo magnético no se ven afectadas por la conductividad eléctrica, por lo que no es necesario volver a escribirlas.

### 3.7.3 Sistemas con Simetría de Revolución. Modelo Bidimensional.

En el caso de un medio ideal entre dos superficies esféricas de conductores perfectos, la dependencia angular de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  está relacionada con los armónicos esféricos.

$$E_r(r, \theta, \phi) \propto e(r) P_n^m(\cos\theta) [C \cos(m\phi) + D \sin(m\phi)] \quad (3.84)$$

Donde  $n$  hace referencia al grado, y  $m$  al orden, de las funciones asociadas de Legendre,  $C$  y  $D$  son constantes cuyo valor depende de las condiciones de contorno. El orden está relacionado con las variaciones de los campos en la dirección  $\phi$ , y el grado con las variaciones en la dirección  $\theta$ .

$$f_n = \frac{c}{2\pi r_0} \sqrt{n(n+1) \left(1 - \frac{h}{r_0}\right)} \quad (3.85)$$

Los perfiles de conductividad no son excesivamente detallados en cuanto a la variación de la conductividad en función de la latitud y longitud. Generalmente, se emplean perfiles de conductividad pro-

medio, en los que la conductividad eléctrica depende únicamente de la altitud. El interés del orden  $m = 0$  está relacionado con el hecho de que los campos tengan simetría de revolución alrededor del eje Norte-Sur ( $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ ). Que equivale a la condición:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.86)$$

Explotando esta invariabilidad de los campos en la dirección  $\phi$  se puede construir un modelo bidimensional de la atmósfera terrestre. La principal ventaja del modelo bidimensional es su mayor rapidez frente al mallado tridimensional, ya que con ambos modelos se obtienen valores muy similares. El mallado empleado por este modelo bidimensional se detalla en la figura 3.14. Este mallado sólo emplea una celda en la dirección  $\phi$ . Mediante la condición (3.86) se impone que los campos no varíen en la dirección  $\phi$ , y por tanto queden determinados únicamente por las coordenadas  $r$  y  $\theta$ . El modo de forzar la simetría en la dirección  $\phi$  no es exactamente mediante la relación (3.86), sino mediante condiciones de contorno periódicas:

$$E_r(i, j, 2) = E_r(i, j, 1) \quad (3.87a)$$

$$E_\theta(i, j, 2) = E_\theta(i, j, 1) \quad (3.87b)$$

$$H_r(i, j, 0) = H_r(i, j, 1) \quad (3.87c)$$

$$H_\theta(i, j, 0) = H_\theta(i, j, 1) \quad (3.87d)$$

Por supuesto, también en este caso hay que prestar especial atención a la actualización de los ejes  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Debe tenerse en

cuenta que, a pesar de considerar sólo una celda, la actualización de  $E_r(i,0)$  y  $E_r(i,j_{\max})$  requiere la integración del campo magnético sobre un camino que rodea el eje de simetría. Esto implica una integración para valores de  $\phi$  entre 0 y  $2\pi$ .

Debido a las condiciones de contorno que se han impuesto, el campo magnético es constante en todo el camino de integración. Así, las ecuaciones de actualización de la componente radial sobre los ejes se escriben:

$$E_{North}^{n+1}(i) = E_{North}^n(i) - 2\pi A_i H_{\phi}^{n+0.5}(i,0,1) \quad (3.88a)$$

$$E_{South}^{n+1}(i) = E_{South}^n(i) - 2\pi A_i H_{\phi}^{n+0.5}(i,j_{\max}-1,1) \quad (3.88b)$$

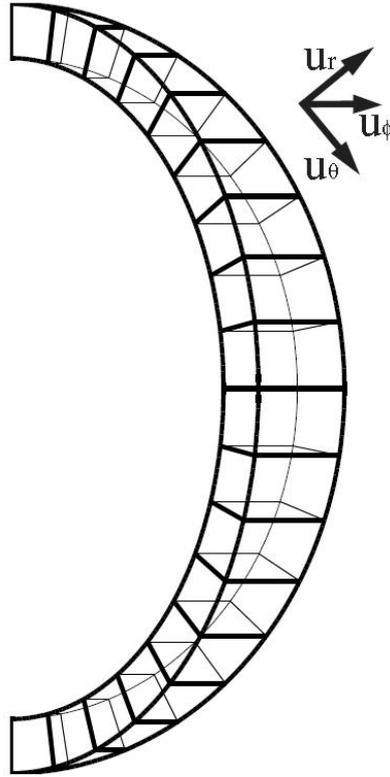


Figura 3.14: Esquema del mallado correspondiente al modelo tridimensional.

La única cuestión que queda abierta es el tamaño de la celda simulada en la dirección  $\phi$ , es decir  $\Delta_\phi$ . Aunque ahora se considere únicamente un plano ( $\phi \equiv cte$ ), el valor  $\Delta_\phi$  aparece en los coeficientes  $l_{h\phi}$ ,  $S_{er}$  y  $S_{e\theta}$ . La diferencia entre estos coeficientes entre celdas adyacentes es la que da lugar a un modelo en coordenadas cilíndricas, en donde sólo dependerían de la dirección radial, y un modelo en coordenadas esféricas donde además dependen de la dirección angular  $\theta$ . La elección tomada ha sido fijar el valor de  $\Delta_\phi$  de forma

que las celdas resulten lo más cuadradas posible tanto en el ecuador como en los polos. Esta elección resulta de un compromiso por mantener celdas lo más regulares posible. Se toma entonces  $\Delta_\phi$  de forma que, a latitudes medias,  $l_{e\phi}$  y  $l_{e\theta}$  sean similares.

### 3.7.4 Modelo Tridimensional

Siguiendo el razonamiento llevado a cabo para el modelo bidimensional, el modelo tridimensional es mucho más intuitivo. Se han realizado algunas simplificaciones matemáticas para construir el modelo bidimensional. La razón de emplear el modelo bidimensional como paso previo, es la reducción importante de la carga computacional y el tiempo de cálculo. Este ahorro de tiempo de cálculo ha ayudado a agilizar todo el proceso de depuración de errores, y validación del modelo desarrollado. La otra gran ventaja del modelo bidimensional es que la visualización resulta mucho más sencilla y por tanto la detección de errores es mucho más rápida. La exploración del modelo tridimensional resulta bastante tediosa, pues se debe recurrir a cortes bidimensionales representando planos para valores de  $r \equiv cte$  o  $\phi \equiv cte$ . También la comparación entre los diferentes perfiles de conductividad; y el análisis de diferentes efectos sobre la propagación de los sferics resultan mucho más rápidos en el caso de un modelo bidimensional.

A pesar de todo lo mencionado en el párrafo anterior, un modelo matemático riguroso de la atmósfera terrestre requiere de un tratamiento tridimensional. Este modelo tridimensional va a permitir la modelización de las inhomogeneidades asociadas a las variaciones diurna/nocturna de los perfiles de conductividad.

Los detalles del modelo tridimensional se han ido desglosando a lo largo del presente capítulo. Sólo queda abierta una cuestión sobre las condiciones de contorno impuestas en los extremos del mallado en la dirección  $\phi$ . Estas condiciones de contorno son las que van a cerrar el mallado y de ese modo la espera. Estas condiciones van a ser análogas a las presentadas en (3.87), la diferencia es que ahora van a unir el final con el principio del mallado en la dirección  $\phi$ .

$$E_r(i, j, k_{\max}) = E_r(i, j, 1) \quad (3.88a)$$

$$E_\theta(i, j, k_{\max}) = E_\theta(i, j, 1) \quad (3.88b)$$

$$H_r(i, j, 0) = H_r(i, j, k_{\max} - 1) \quad (3.88c)$$

$$H_\theta(i, j, 0) = H_\theta(i, j, k_{\max} - 1) \quad (3.88d)$$

En la figura 3.15 se presenta un esquema del mallado empleado en el modelo tridimensional. Se ha practicado una oquedad en el mallado para mostrar el detalle del interior del mallado. Las líneas representan la separación entre las diferentes celdas unidad.

Cabe indicar que la densidad de líneas de la figura. 3.15 es bastante menor que la empleada en el modelo. La densidad de puntos empleados en el modelo *VLf* es cuatro veces superior en las direcciones angulares y quince veces superior en la dirección radial. Para representar más claramente el mallado se ha optado por reducir la densidad de puntos.

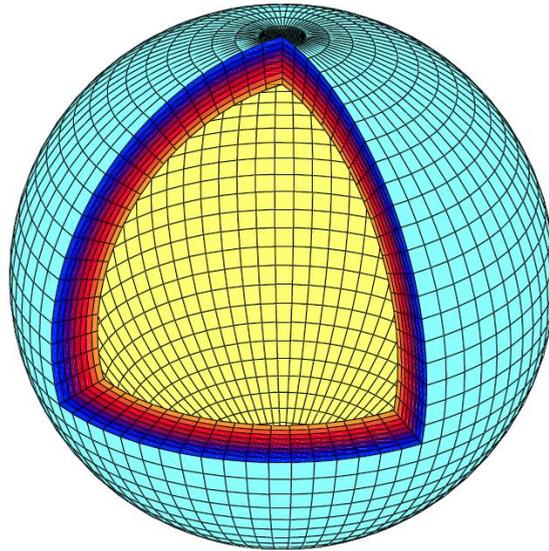


Figura 315: detalle del mallado tridimensional.

### 3.8 Formalismo FDTD para el Análisis de la Ionosfera con Anisotropía inducida por el Campo Magnético Terrestre

Tal y como se ha hecho referencia anteriormente, para realizar una simulación con cierto grado de precisión de la propagación de ondas *VLF* en la guía de ondas formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera, se ha de introducir el efecto de la anisotropía inducida por el campo magnético terrestre. En este sentido, a continuación se pasa a tratar el formalismo FDTD asociado al mismo.

El viento en la parte alta de la ionosfera modula las corrientes ionosféricas, que, en combinación con la actividad del núcleo terrestre, da lugar a variaciones del campo geomagnético. La corriente fluye de acuerdo con la Ley de Ohm, sin embargo, debido a la presencia del campo magnético terrestre, se establece una relación anisótropa con el campo eléctrico. La teoría de conductividad eléctrica ha sido

tratada por diversos autores [Cowling y Berger, 1948], [Maeda, 1951], [Baker y Martyn, 1953], [Chapman, 1956], y respecto a la dinámica ionosférica, se puede encontrar una descripción detallada en el trabajo de Maeda y Kato [Maeda y Kato, 1966], Matsushita [Matsushita, 1969], Rishbeth y Garriott [Garriott y Rishbeth, 1963], [Rishbeth, 1997] y Kelley [Kelley, 1989],

Se suele introducir la conductividad como un tensor [Rishbeth, 1997], en coordenadas cartesianas con el campo geomagnético alineado según la dirección del eje  $z$ . Con esta configuración, el tensor de conductividad presenta una relación anisótropa entre la corriente y el campo eléctrico.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_p & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\bar{J} = [\sigma] \bar{E} \quad (3.90)$$

donde  $\sigma_H$  es la conductividad Hall,  $\sigma_p$  la conductividad de Pederesen o transversal y  $\sigma_{\parallel}$  la conductividad paralela al campo magnético.

Por consiguiente, la corriente total se descompone en 3 corrientes definidas en términos de la dirección de flujo magnético y la dirección del campo eléctrico, esto es

$\bar{J}_{\parallel}$  corriente paralela a lo largo de la dirección del campo magnético.

$\vec{J}_P$ : corriente de Pedersen o corriente perpendicular al campo geomagnético en el plano del campo eléctrico.

$\vec{J}_H$  corriente de Hall o corriente perpendicular tanto al campo geomagnético como al campo eléctrico.

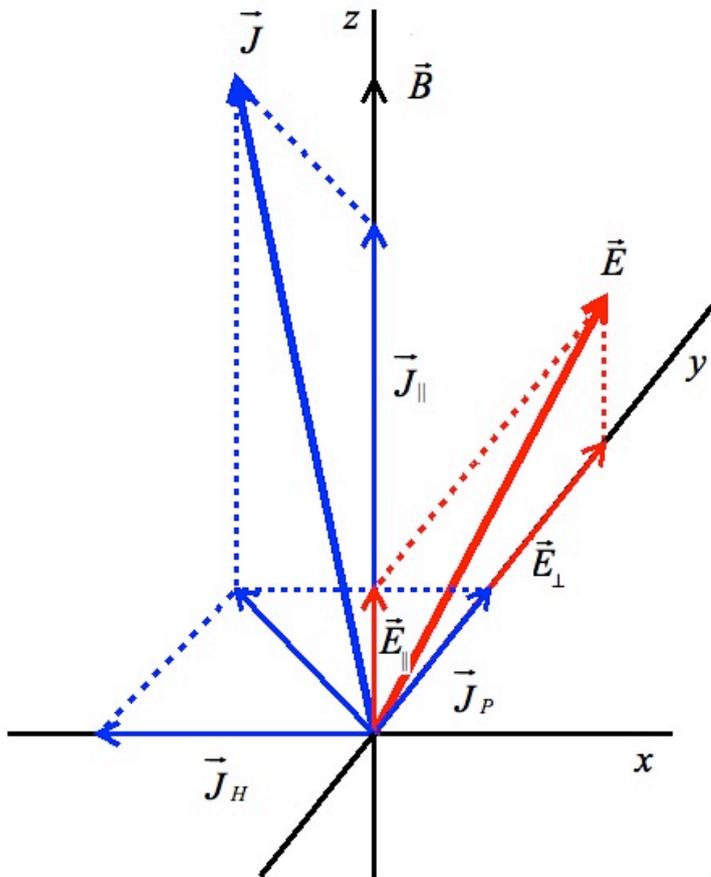


Figura 3.16. Vector campo eléctrico geomagnético, vector campo eléctrico y corriente ionosférica.

y

$$\vec{J} = \vec{J}_{\parallel} + \vec{J}_P + \vec{J}_H, \quad (3.91)$$

En un sistema de coordenadas cartesianas, se tiene que para cualquier dirección del vector campo geomagnético  $\vec{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z})$ , y cualquier campo eléctrico  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ , las corrientes se pueden escribir como

$$\vec{J}_{\parallel} = \sigma_{\parallel} \vec{B}_0 \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{E}}{|\vec{B}_0|^2} \quad (3.92)$$

$$\vec{J}_P = \sigma_P \frac{\vec{B}_0 \times (\vec{E} \times \vec{B}_0)}{|\vec{B}_0|^2} \quad (3.93)$$

$$\vec{J}_H = \sigma_H \frac{\vec{B}_0 \times \vec{E}}{|\vec{B}_0|} \quad (3.94)$$

Un modelo más realístico de la ionosfera teniendo en cuenta la existencia del campo geomagnético, necesariamente implica la introducción de anisotropía en las ecuaciones de Maxwell del rotacional. Las ecuaciones de Maxwell considerando las corrientes de Hall, Pedersen y paralela al campo magnético son:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.95a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\parallel} + \vec{J}_H + \vec{J}_P + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.95b)$$

La introducción de las tres corrientes en el modelo no afecta a la ecuación (3.95a), siendo la misma que para medios homogéneos lineales e isotrópicos, en cambio, la ecuación (3.95b) deriva en una relación anisótropa.

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\parallel} = \sigma_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} &= \left\{ (B_{0x} \ B_{0y} \ B_{0z}) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} B_{0x} \\ B_{0y} \\ B_{0z} \end{pmatrix} \frac{\sigma_{\parallel}}{|\vec{B}_0|^2} = \\ &= \frac{\sigma_{\parallel}}{|\vec{B}_0|^2} \begin{pmatrix} B_{0x}^2 & B_{0x}B_{0y} & B_{0x}B_{0z} \\ B_{0x}B_{0y} & B_{0y}^2 & B_{0y}B_{0z} \\ B_{0x}B_{0z} & B_{0y}B_{0z} & B_{0z}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = [A_{\parallel}] \vec{E} \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_P &= \frac{\sigma_P}{|\vec{B}_0|^2} \begin{pmatrix} B_{0y}^2 + B_{0z}^2 & -B_{0x}B_{0y} & -B_{0x}B_{0z} \\ -B_{0x}B_{0y} & B_{0x}^2 + B_{0z}^2 & -B_{0y}B_{0z} \\ -B_{0x}B_{0z} & -B_{0y}B_{0z} & B_{0x}^2 + B_{0y}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \\ &= [A_P] \vec{E} \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\vec{J}_H = \frac{\sigma_H}{|\vec{B}_0|} \begin{pmatrix} 0 & -B_{0z} & B_{0y} \\ B_{0z} & 0 & -B_{0x} \\ -B_{0y} & B_{0x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = [A_H] \vec{E} \quad (3.98)$$

siendo la corriente total

$$\vec{J} = \vec{J}_{\parallel} + \vec{J}_H + \vec{J}_P = \left\{ \left[ A_{\parallel} \right] + \left[ A_H \right] + \left[ A_P \right] \right\} \vec{E} = \left[ A \right] \vec{E} \quad (3.99)$$

donde la matriz  $[A]$  es

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.100a)$$

con

$$a_{11} = \frac{\sigma_{\parallel}}{|B_0|^2} B_{0x}^2 + \frac{\sigma_P}{|B_0|^2} (B_{0y}^2 + B_{0z}^2) \quad (3.100b)$$

$$a_{12} = \left( \frac{\sigma_{\parallel}}{|B_0|^2} - \frac{\sigma_P}{|B_0|^2} \right) B_{0x} B_{0y} - \frac{\sigma_H}{|B_0|} B_{0z} \quad (3.100c)$$

$$a_{13} = \left( \frac{\sigma_{\parallel}}{|B_0|^2} - \frac{\sigma_P}{|B_0|^2} \right) B_{0x} B_{0z} + \frac{\sigma_H}{|B_0|} B_{0y} \quad (3.100d)$$

$$a_{21} = \left( \frac{\sigma_{\parallel}}{|B_0|^2} - \frac{\sigma_P}{|B_0|^2} \right) B_{0x} B_{0y} + \frac{\sigma_H}{|B_0|} B_{0z} \quad (3.100e)$$

$$a_{22} = \frac{\sigma_{\parallel}}{|B_0|^2} B_{0y}^2 + \frac{\sigma_P}{|B_0|^2} (B_{0x}^2 + B_{0z}^2) \quad (3.100f)$$

$$a_{23} = \left( \frac{\sigma_{\parallel}}{|B_0|^2} - \frac{\sigma_P}{|B_0|^2} \right) B_{0y} B_{0z} - \frac{\sigma_H}{|B_0|} B_{0x} \quad (3.100g)$$

$$a_{31} = \left( \frac{\sigma_{\parallel}}{|B_0|^2} - \frac{\sigma_P}{|B_0|^2} \right) B_{0x} B_{0z} - \frac{\sigma_H}{|B_0|} B_{0y} \quad (3.100h)$$

$$a_{32} = \left( \frac{\sigma_{\parallel}}{|B_0|^2} - \frac{\sigma_P}{|B_0|^2} \right) B_{0y} B_{0z} + \frac{\sigma_H}{|B_0|} B_{0x} \quad (3.100i)$$

$$a_{33} = \frac{\sigma_{\parallel}}{|B_0|^2} B_{0z}^2 + \frac{\sigma_P}{|B_0|^2} (B_{0x}^2 + B_{0y}^2) \quad (3.100j)$$

### 3.8.1 Implementación FDTD.

La Ley de Faraday en la ionosfera (3.95b) junto con la corriente total (3.99), pone de manifiesto una anisotropía inducida, dado que el campo magnético terrestre causa un desalineamiento de las corrientes con el campo eléctrico. En ausencia de campo geomagnético, la matriz  $[A]$  es diagonal, siendo los valores de la diagonal  $\sigma_{\parallel}$ , tal y como se desprende de (3.100).

La Ley de Faraday en términos de la matriz  $[A]$  es

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \left\{ [A] + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{E} \quad (3.101)$$

La ecuación (3.101) deriva en las tres ecuaciones escalares

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right)_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} E_j + \varepsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial t}, \quad (3.102)$$

siendo los subíndices  $i, j = 1, 2, 3$  que se corresponden con las componentes  $x, y, z$  respectivamente.

Las tres ecuaciones escalares (3.102) se adaptan al mallado FDTD, y se adopta una versión modificada del método tridimensional descrito por Yu y Simpson [Yu y Simpson, 2010], en el cual las componentes  $J_x, J_y, J_z$ , se ubican en la misma posición que  $E_x, E_y$ , y  $E_z$ , respectivamente. En el método desarrollado, se define la corriente como el producto tensorial de la matriz de conductividad  $[A]$  y el campo eléctrico. Así las componentes  $E_x, E_y$ , y  $E_z$ , se disponen en cada posición de la célula de Yee y se hace uso de diferencias centradas. En (3.102) para  $i = x$  se tiene

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = A_{xx} E_x + A_{xy} E_y + A_{xz} E_z + \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (3.103)$$

Para aplicar diferencias centradas en las derivadas espaciales en (3.103), aplicando el esquema FDTD, las componentes  $E_y$  y  $E_z$  se ubican en la misma posición que  $E_x$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{H_z(i+1/2, j+1/2, k) - H_z(i+1/2, j-1/2, k)}{\Delta y} - \frac{H_y(i+1/2, j, k+1/2) - H_y(i+1/2, j, k-1/2)}{\Delta z} \right]^{n+1/2} = \\
 & \left[ \begin{aligned} & A_{xx} E_x(i+1/2, j, k) + \\ & + A_{xy} E_y(i+1/2, j, k) + \\ & + A_{xz} E_z(i+1/2, j, k) \end{aligned} \right]^{n+1/2} + \\
 & + \varepsilon_0 \frac{E_x^{n+1}(i+1/2, j, k) - E_x^n(i+1/2, j, k)}{\Delta t} \quad (3.104)
 \end{aligned}$$

Sin embargo, en aras de la simplicidad, resulta de mayor interés aplicar el método FDTD a la ecuación (3.101). En primer lugar se calcula la derivada temporal mediante diferencias centradas. Matricialmente se escribe:

$$\left[ \vec{\nabla} \times \vec{H} \right]^n = [A] \left( \frac{\vec{E}^{n+1/2} + \vec{E}^{n-1/2}}{2} \right) + \varepsilon_0 \frac{\vec{E}^{n+1/2} - \vec{E}^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (3.105)$$

El campo eléctrico en el paso temporal  $n+1/2$  se deriva en lo sucesivo mediante

$$\left\{ \frac{\varepsilon_0}{\Delta t} [I] + \frac{1}{2} [A] \right\} \vec{E}^{n+1/2} = \left[ \vec{\nabla} \times \vec{H} \right]^n + \left\{ \frac{\varepsilon_0}{\Delta t} [I] - \frac{1}{2} [A] \right\} \vec{E}^{n-1/2} \quad (3.106)$$

siendo  $[I]$  la matriz identidad

Se define la matriz no singular 3x3

$$[B] = \left\{ \frac{\epsilon_0}{\Delta t} [I] + \frac{1}{2} [A] \right\} \quad (3.107)$$

Multiplicando ambos lados de (3.106) por  $[B]^{-1}$ , se obtiene la expresión de actualización del campo eléctrico en  $(n+1/2)\Delta t$ ,

$$\begin{aligned} \vec{E}^{n+1/2} &= \\ &= \left\{ \frac{\epsilon_0}{\Delta t} [I] + \frac{1}{2} [A] \right\}^{-1} \left\{ [\vec{\nabla} \times \vec{H}]^n + \left[ \frac{\epsilon_0}{\Delta t} [I] - \frac{1}{2} [A] \right] \right\} \vec{E}^{n-1/2} \end{aligned} \quad (3.108)$$

La ecuación de actualización para el campo eléctrico (3.108) es explícita, sin embargo se introducen detalles adicionales para proporcionar una implementación adecuada haciendo uso de la celda clásica de Yee.

En la aplicación del método FDTD, para cada componente de campo eléctrico en la parte izquierda de (3.108), se ha de proporcionar en la parte derecha dos componentes de campo magnético (al igual que en el caso isótropo) y las tres componentes del campo eléctrico (debido a la anisotropía inducida por la matriz  $[A]$ ). Por consiguiente, en este nuevo método FDTD, además de la componente  $E_i$  ya existente, se introducen dos variables adicionales por posición de campo eléctrico,  $E_j, E_k, j, k \neq i$ , necesarias en cada ubicación de campo eléctrico de la celda clásica de Yee.

La celda de Yee presenta diferentes posiciones para las distintas componentes de campo, siendo, en el nuevo esquema presentado, necesarias las tres componentes en cada ubicación del campo.

Las componentes adicionales de campo en cada ubicación se obtienen a partir de las componentes existentes de la celda de Yee mediante un promedio de las mismas.

En la posición de  $E_x(i, j, k)$ , las componentes de campo  $E_y$ ,  $E_z$  son

$$\begin{aligned}
 E_{y\_nueva} &= \\
 &= \frac{E_y(i, j-1, k) + E_y(i+1, j-1, k)}{4} + \\
 &+ \frac{E_y(i, j, k) + E_y(i+1, j, k)}{4}
 \end{aligned} \tag{3.109a}$$

$$\begin{aligned}
 E_{z\_nueva} &= \\
 &= \frac{E_z(i, j, k-1) + E_z(i+1, j, k-1)}{4} \\
 &+ \frac{E_z(i, j, k) + E_z(i+1, j, k)}{4}
 \end{aligned} \tag{3.109b}$$

donde por simplicidad se han omitido los superíndices asociados al paso temporal.

En la posición de  $E_y(i, j, k)$ , las componentes de campo  $E_x$  y  $E_z$  son:

$$\begin{aligned}
 E_{x\_nueva} &= \\
 &= \frac{E_x(i-1, j, k) + E_x(i-1, j+1, k)}{4} + \\
 &+ \frac{E_x(i, j, k) + E_x(i, j+1, k)}{4}
 \end{aligned} \tag{3.109c}$$

$$\begin{aligned}
 E_{z\_nueva} &= \\
 &= \frac{E_z(i, j, k-1) + E_z(i, j+1, k-1)}{4} \\
 &+ \frac{E_z(i, j, k) + E_z(i, j+1, k)}{4}
 \end{aligned} \tag{3.109d}$$

Finalmente, en la posición  $E_z(i, j, k)$ , las componentes de campo  $E_x$  y  $E_y$  son:

$$\begin{aligned}
 E_{x\_nuevo} &= \\
 &= \frac{E_x(i-1, j, k) + E_x(i-1, j, k+1)}{4} + \\
 &+ \frac{E_x(i, j, k) + E_x(i, j, k+1)}{4}
 \end{aligned} \tag{3.109e}$$

$$\begin{aligned}
 E_{y\_nueva} &= \\
 &= \frac{E_y(i, j-1, k) + E_y(i, j-1, k+1)}{4} + \\
 &+ \frac{E_y(i, j, k) + E_y(i, j, k+1)}{4}
 \end{aligned} \tag{3.109f}$$

El nuevo procedimiento de cálculo FDTD de las componentes del campo eléctrico en el paso temporal  $(n+1/2)\Delta t$  en el método FDTD propuesto es:

- 1) Cálculo de las nuevas componentes de campo eléctrico  $\vec{E}_{nueva}^{n-1/2}$  mediante (3.109).
- 2) Cálculo de las componentes de campo eléctrico haciendo uso del esquema clásico FDTD. En este cálculo, la anisotropía introduci-

da no se considera, empleándose la matriz diagonal de  $[A]$ , la

nueva matriz  $[A_D]$

$$\vec{E}_{FDTD\_clasica}^{n+1/2} = \left\{ \left[ \vec{\nabla} \times \vec{H} \right]^n + \left[ \frac{\epsilon_0}{\Delta t} [I] - \frac{1}{2} [A_D] \right] \right\} \vec{E}^{n-1/2} \quad (3.110)$$

- 3) Modificación de los cálculos anteriores para considerar la anisotropía inducida

$$\vec{E}_{FDTD\_final}^{n+1/2} = [B]^{-1} \left\{ \vec{E}_{FDTD\_clasica}^{n+1/2} - \frac{1}{2} [A] \vec{E}_{new}^{n-1/2} \right\} \quad (3.111)$$

Las matrices  $[A]$  y  $[B]^{-1}$  se calculan en cada posición de campo eléctrico de la celda de Yee, y las nuevas componentes de campo eléctrico  $\vec{E}_{nueva}^{n-1/2}$  se calculan y almacenan en el paso 1) y se actualizan en el paso 2). El nuevo método hace uso de 20 variables adicionales por cada celda FDTD del esquema clásico las cuales se materializan en las matrices  $[A]$ ,  $[B]^{-1}$  y las nuevas componentes de campo eléctrico. El incremento total en demanda de memoria de cálculo del nuevo esquema es 20N, donde N es el tamaño total del mallado.

Las matrices  $[A]$  y  $[B]^{-1}$  no varían con el tiempo, y se calculan una única vez antes del bucle del dominio temporal. Sin embargo, el cálculo de las nuevas componentes de campo, y la modificación del cálculo mediante el esquema clásico se llevan a cabo en cada paso temporal. Por consiguiente el tiempo adicional de procesamiento computacional respecto al método clásico se debe fundamentalmente a los pasos 1) y 3).

### 3.8.2 Estabilidad del Nuevo Esquema FDTD

Para analizar la estabilidad del método propuesto, se hace uso del procedimiento de Von Newman, mediante el cual se introduce el vector global de magnitud compleja  $\vec{V} = \vec{H} + j\vec{E}$ , en el que se incluye tanto los vectores eléctricos como magnéticos normalizados ( $\epsilon_0 = 1, \mu_0 = 1$ ).

Se puede reescribir las ecuaciones de Maxwell del rotacional (3.95) en términos de la mencionada magnitud y la matriz de conductividad  $[A]$ :

$$j\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left\{ [A] + \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{V} \quad (3.112)$$

El método FDTD emplea una discretización numérica haciendo uso de diferencias centradas tanto en el espacio como en el tiempo, obteniendo una precisión de segundo orden en ambos. La discretización temporal  $\Delta t$  es el incremento entre campos calculados consecutivamente en la aproximación numérica descrita en la sección anterior. La elección de  $\Delta t$  es crítica en las simulaciones FDTD. El coste computacional disminuye conforme aumenta  $\Delta t$  debido a que pasos temporales mayores llevan aparejados mayores tiempos de simulación con el mismo número de iteraciones. Por otro lado, la implementación FDTD del plasma mediante pasos temporales mayores acarrea una menor estabilidad de la simulación.

La elección del paso temporal se lleva a cabo mediante una solución de compromiso entre el coste computacional y la estabilidad de la simulación. En este sentido, es deseable seleccionar un paso temporal tan grande como sea factible dado que repercutirá en una

mayor estabilidad de la simulación. Por consiguiente, es fundamental establecer un paso temporal máximo que asegure la estabilidad de la simulación. Se hace necesaria una relación entre las discretizaciones temporal y espacial en aras de mantener bajo control la propagación del error numérico inherente a la simulación.

Resulta interesante hacer la traslación del problema planteado en diferencias finitas a otro de valores propios, tanto temporal como espacial, dada la viabilidad de su estudio. Considerando la propagación de ondas electromagnéticas como la superposición de ondas planas, siendo cada onda plana la una función propia en el dominio numérico. Los valores propios asociados a la diferenciación espacial y a los operadores temporales se calculan mediante (3.112). Si el espectro de valores propios espaciales se encuentra contenido en el espectro de valores propios temporales, entonces el algoritmo será numericamente estable [Navarro, 1992]. De este modo, la estabilidad numérica queda asegurada evitando la ganancia descontrolada de errores numéricos en cada iteración temporal.

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} = \lambda \vec{V} \quad (3.113)$$

Se introduce el operador diferencial mediante su operador discreto homólogo al objeto de obtener la diferenciación numérica

$$\frac{\vec{V}^{n+1/2}(i, j, k) - \vec{V}^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} \approx \lambda \vec{V}^n(i, j, k) \quad (3.114)$$

El factor de ganancia  $q$  determina la ganancia de la función de onda en cada iteración temporal

$$q = \frac{\vec{V}^{n+1/2}}{\vec{V}^n} \quad (3.115)$$

Se introduce  $q$  en (3.114) y para obtener el factor de crecimiento en función de  $\Delta t$  y  $\lambda$ .

$$q^2 - q\lambda\Delta t - 1 = 0 \quad (3.116)$$

$$q = (\lambda\Delta t / 2) \pm \sqrt{(\lambda\Delta t / 2)^2 + 1} \quad (3.117)$$

La inestabilidad tiene lugar cuando la función propia asociada al valor propio  $\lambda$  aumenta en cada iteración. La estabilidad de la dependencia temporal de cada modo espacial se asume imponiendo la condición  $|q| \leq 1$ . Esto se verifica automáticamente si  $\lambda$  pertenece al conjunto de los números reales y además  $|\lambda\Delta t| \leq 2$ .

A partir de esta relación se deriva la condición de estabilidad considerando las discretizaciones espaciales y temporales.

Se realiza un proceso análogo para los valores propios espaciales, reordenando la ecuación (3.112)

$$j\vec{\nabla} \times \vec{V} - [A]\vec{V} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} \quad (3.118)$$

Se hace un cambio de base mediante el cual se pasa del sistema de coordenadas cartesianas a otro de coordenadas ortogonales en el cual la matriz  $[A]$  es diagonal cuyos valores propios son  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ .

La solución general de la ecuación (3.118) se puede describir mediante la superposición de ondas planas

$$\vec{V} = \vec{V}_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (3.119)$$

se mantiene la misma denominación de las magnitud en aras de la simplicidad pese a que se encuentran referidas al nuevo sistema coordenado. La diferenciación numérica asociada a las derivadas espaciales es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}(l\Delta x, m\Delta y, p\Delta z, n\Delta t)}{\partial x} &\approx \\ &\approx \frac{\vec{V}_0 e^{j(k_x (l+1/2)\Delta x + k_y m\Delta y + k_z p\Delta z - \omega n\Delta t)}}{\Delta x} - \\ &- \frac{\vec{V}_0 e^{j(k_x (l-1/2)\Delta x + k_y m\Delta y + k_z p\Delta z - \omega n\Delta t)}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}(l\Delta x, m\Delta y, p\Delta z, n\Delta t)}{\partial x} &\approx \\ &\approx \frac{\vec{V} \left( e^{j(k_x \Delta x / 2)} - e^{-j(k_x \Delta x / 2)} \right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{2j \sin(k_x \Delta x / 2)}{\Delta x} \vec{V} \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial \vec{V}(l\Delta x, m\Delta y, p\Delta z, n\Delta t)}{\partial x} \approx \Delta_x \vec{V} \quad (3.122)$$

definiendo el operador discreto

$$\Delta_x \approx \frac{2j \sin(k_x \Delta x / 2)}{\Delta x} \quad (3.123)$$

análogamente

$$\Delta_y \approx \frac{2j \sin(k_y \Delta y / 2)}{\Delta y} \quad (3.124)$$

$$\Delta_z \approx \frac{2j \sin(k_z \Delta z / 2)}{\Delta z} \quad (3.125)$$

que sustituyendo en (3.118) proporciona el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \Delta_y V_z - \Delta_z V_y &= -j(\alpha_1 + \lambda) V_x \\ -\Delta_x V_z + \Delta_z V_x &= -j(\alpha_2 + \lambda) V_y \\ \Delta_x V_y - \Delta_y V_x &= -j(\alpha_3 + \lambda) V_z \end{aligned} \right\} \quad (3.126)$$

Para satisfacer la solución no trivial en las ecuaciones anteriores se ha de cumplir

$$\begin{vmatrix} j(\alpha_1 + \lambda) & -\Delta_z & \Delta_y \\ \Delta_z & \Delta_x & j(\alpha_3 + \lambda) \\ -\Delta_y & j(\alpha_2 + \lambda) & -\Delta_x \end{vmatrix} = 0 \quad (3.127)$$

o

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \lambda)\Delta_x^2 + (\alpha_2 + \lambda)\Delta_y^2 + (\alpha_3 + \lambda)\Delta_z^2 &= \\ = (\alpha_1 + \lambda)(\alpha_2 + \lambda)(\alpha_3 + \lambda) \end{aligned} \quad (3.128)$$

cuya solución es

$$\left(\frac{\Delta_x}{\beta_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_y}{\beta_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_z}{\beta_2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{\beta_1 \beta_2 \beta_3}\right)^2 \quad (3.129)$$

donde  $(\alpha_i + \lambda) / \lambda = \beta_i^2$  que sustituyendo el operador discreto

$\Delta_{xi} \approx \frac{2j \sin(k_{xi} \Delta x / 2)}{\Delta x_i}$  y la condición  $|\lambda \Delta t| \leq 2$ , proporciona la relación

de estabilidad

$$\left(\frac{\Delta_x}{\beta_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_y}{\beta_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_z}{\beta_3}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{\beta_1 \beta_2 \beta_3}\right)^2 \quad (3.130)$$

### 3.9 Validación del Modelo y Resultados

La técnica FDTD desarrollada se ha aplicado a la modelización de la guía formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera, donde se ha hecho uso de los perfiles de conductividad de Hall, Pedersen y conductividad paralela de Qiao et al. [Qiao et al., 2006] (figura 3.17).

Los perfiles de conductividad se interpolan para adaptarlos a la resolución del mallado FDTD, que en el caso del presente trabajo es de  $100 \times 100 \times 100$  celdas. Se simula una zona de la Tierra correspondiente al Polo Norte con  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 2 \text{ km}$  siendo  $\Delta t = 0.5 \Delta x$ .

La elección de  $\Delta t$  viene establecida por la condición de estabilidad derivada en la sección anterior. En este sentido se observa inestabilidad para  $\Delta t = 0.7 \Delta x$ , que correspondería con la elección en un medio isótropo.

La figura 3.18 muestra la simulación de una descarga a  $2 \text{ km}$  de altura sobre la superficie de la Tierra con un detector situado a  $100 \text{ km}$  de distancia. Se puede observar como la señal muestreada en la simulación presenta inestabilidad en el procedimiento numérico, creciendo exponencialmente.

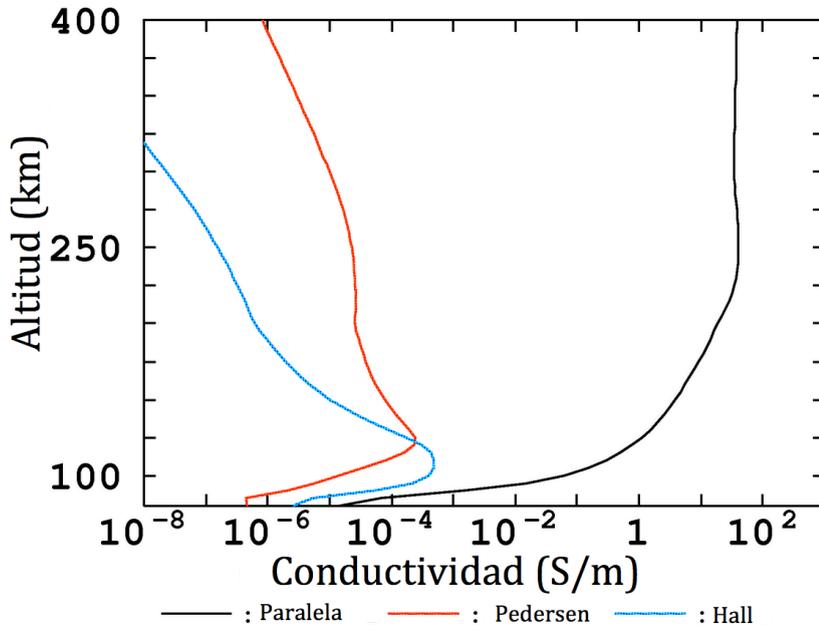


Figura 3.17. Perfiles de la conductividad ionosférica en función de la altitud. Adaptado de [Qiao et al., 2006]

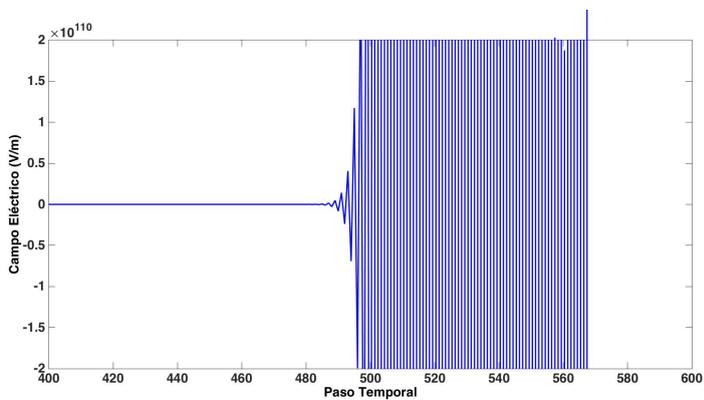


Figura 3.18. Simulación por encima del límite de estabilidad

Las figuras 3.19 muestran el valor del campo para diferentes valores temporales:  $30\Delta t, 40\Delta t, 60\Delta t, 110\Delta t$ . Representan el pulso de la descarga inicial y la posterior inestabilidad. La descarga tiene lugar a  $5\text{ km}$  de altura.

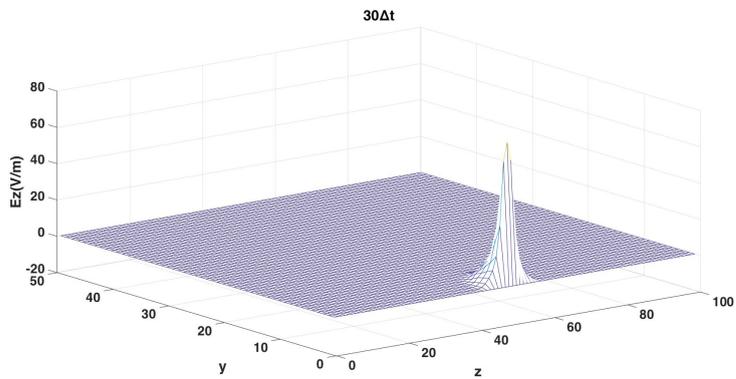


Figura 3.19a. Pulso en  $30\Delta t$ .

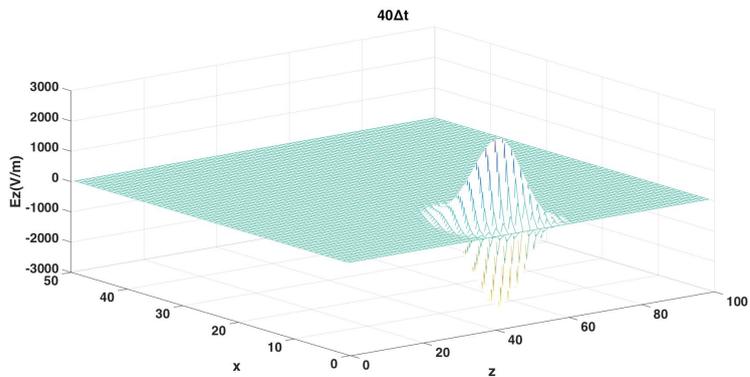


Figura 3.19b. Pulso en  $40\Delta t$ .

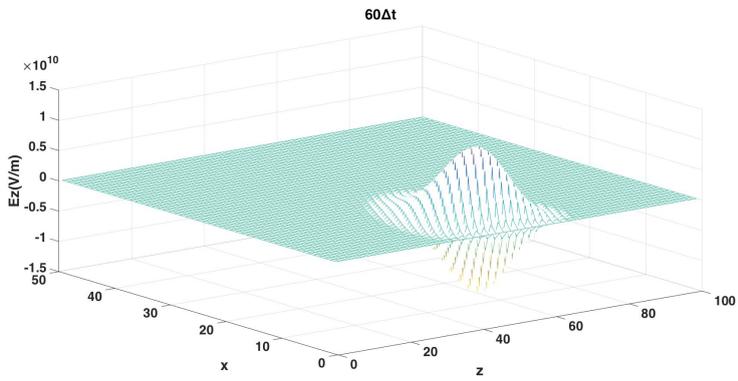


Figura 3.19c. Pulso en  $60\Delta t$  .

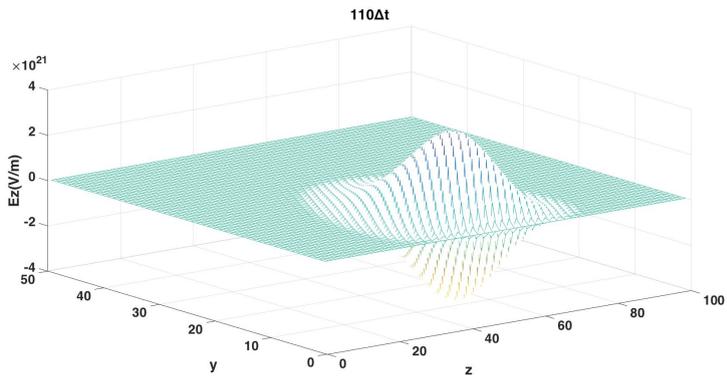


Figura 3.19d. Pulso en  $110\Delta t$  .

Sin embargo, el procedimiento es estable para  $\Delta t \leq 0.55\Delta x$  con  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ . La figura 3.20 muestra la señal correspondiente a una descarga que tiene lugar a  $5km$  de altura, con un muestreo de  $100\Delta t$

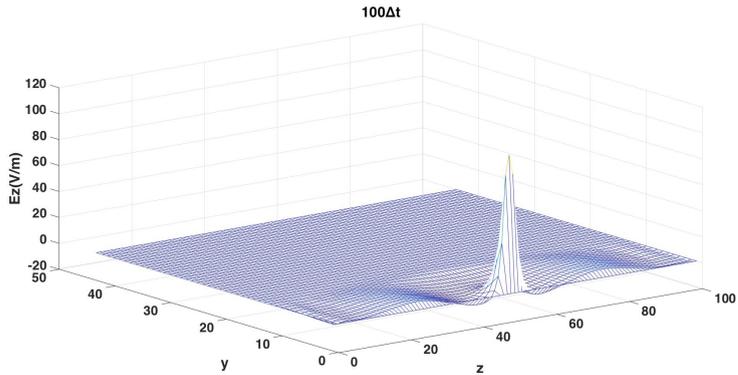


Figura 3.20. Descarga estable con muestreo de  $100\Delta t$ .

En la figura 3.21 se representa la señal muestreada hasta  $1000\Delta t$  donde se puede apreciar una cierta periodicidad debida a la resonancia con la ionosfera.

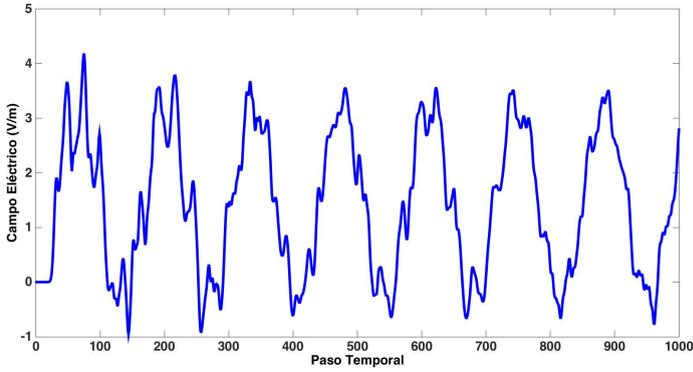


Figura 3.21. Periodicidad observada con muestreo de  $1000\Delta t$ .

Para proceder a la validación la técnica FDTD propuesta, se va a actuar de idéntica manera a la seguida por *Yu y Simpson [2010]* para validar su trabajo. Dicha validación hace uso del efecto de la rotación de Faraday en un plasma electrónico sin pérdidas en ausencia de iones. De acuerdo con la teoría de plasma [*Francis, 1984*], una onda plana linealmente polarizada propagándose en una dirección paralela a la dirección del campo magnético aplicado, se puede descomponer en una onda dextrógira (RH) y otra levógira (LH) circularmente polarizadas con velocidades de fase diferentes. Esto provoca que el plano de polarización de la onda linealmente polarizada rote a medida que la onda se propaga a través del plasma. El ángulo de rotación por unidad de distancia  $\theta_F$  se puede escribir como

$$\theta_F = \frac{\theta_l}{d} = \frac{\beta_{LH} - \beta_{RH}}{2} \quad (3.131)$$

donde  $\theta_t$  es el ángulo total de rotación a lo largo de una distancia  $d$ ,  $\beta_{LH}$  y  $\beta_{RH}$  son las constantes de propagación para las ondas polarizadas LH y RH respectivamente.

$$\beta_{LH} = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2} \sqrt{1 - \frac{\frac{\omega_{pe}}{\omega}}{\omega_{ce} + \omega}} \quad (3.132)$$

$$\beta_{RH} = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2} \sqrt{1 + \frac{\frac{\omega_{pe}}{\omega}}{\omega_{ce} + \omega}} \quad (3.133)$$

donde  $\omega_{pe}$  y  $\omega_{ce}$  son las frecuencias de plasma y de ciclotrón de los electrones respectivamente.  $\omega$  es la frecuencia de la onda linealmente polarizada. Para probar el efecto de rotación de Faraday, se genera una onda plana sinusoidal linealmente polarizada inicialmente según el eje coordenado  $x$ .

La propagación de la onda y el campo magnético aplicado son según el eje coordenado  $z$ . Los parámetros de simulación son

$$\begin{aligned} \Delta x = \Delta y = \Delta z &= 75 \mu m \\ \Delta t &= 0,125 ps \\ \omega_{pe} &= 3,14 \times 10^{11} \frac{rad}{s} \\ \omega &= 5,718 \times 10^{11} \frac{rad}{s} \end{aligned} \quad (3.134)$$

Cada simulación se ejecuta para 1.750 pasos temporales y se repite para valores de campo magnético dentro del rango (1,0–1,7) Teslas. Las componentes de campo eléctrico  $E_x$  y  $E_y$  se obtienen para diferentes distancias de la onda plana. El ángulo de rotación por unidad

de distancia  $\theta_F$  calculado, mediante el método FDTD propuesto, para cada valor de campo magnético viene dado por

$$\theta_F = \frac{\theta_t}{d} = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)}{d} \quad (3.135)$$

La figura 3.22 muestra la comparación de los resultados obtenidos en la simulación de (3.135) con los resultados analíticos proporcionados por (3.131). Los resultados de la simulación FDTD presentan una buena consistencia con los resultados analíticos, con un margen de error del 0,0040%. El error medio se ha definido como

$$error = \frac{\sum_n |\theta_{FS} - \theta_{FA}|}{\sum_n |\theta_{FA}|} \quad (3.136)$$

donde  $\theta_{FS}$  y  $\theta_{FA}$  son los ángulos de rotación por unidad de distancia simulado y analítico respectivamente, y  $n$  es el número de muestras, que en este caso es  $n = 8$ .

La ventaja de la técnica presentada respecto a otras radica en que el  $\Delta t$  empleado no es tan pequeño, siendo cercano al caso isótropo, ahorrando tiempo de cálculo. El  $\Delta t$  del método descrito es un orden de magnitud inferior al de *Yu y Simpson [2010]*.

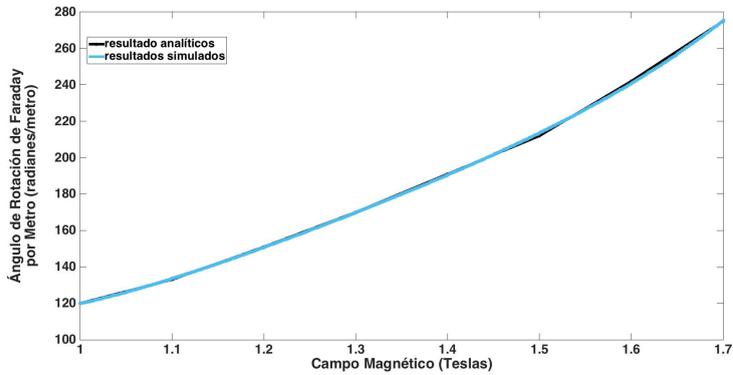


Figura 3.22. Comparación entre los resultados analíticos y simulados del ángulo de rotación por metro de Faraday

Finalmente, tras validar y comprobar la estabilidad del método, se procede a simular un sferic FDTD considerando la anisotropía inducida y compararlo con el caso isótropo pudiendo observar pequeñas diferencias debido al cambio de conductividades. (figura 3.23)

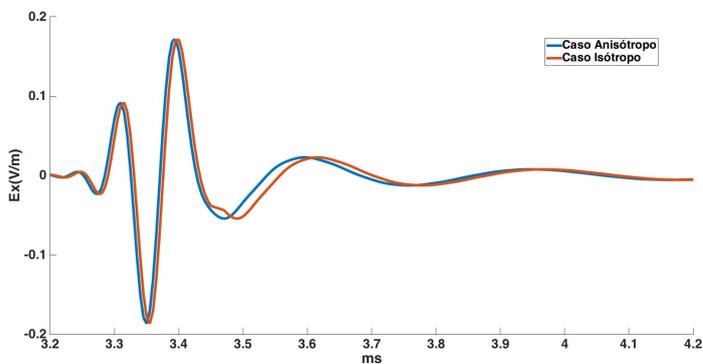


Figura 3.23. Comparación propagación FDTD Sferic caso isótropo/anisótropo.



## **Capítulo 4. Metodología del Tratamiento de la Señal VLF para la Localización de Descargas**



## 4. Metodología del Tratamiento de la Señal VLF para la Localización de Descargas

Una vez se ha descrito la propagación de señales *VLF* en la guía formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera y se ha diseñado un modelo en diferencias finitas en el dominio del tiempo el cual representa con cierto grado de fiabilidad la realidad, en el presente capítulo se realiza un estudio de las diferentes técnicas de detección de esas señales que se han propagado por la guía natural y son detectadas en una estación de medida. Se trata de a partir de esas señales poder inferir, a través de diferentes técnicas la ubicación de la descarga.

En este sentido, los diferentes métodos de detección de descargas identifican los sferics a distancias considerables mediante el análisis de los trenes de pulsos electromagnéticos recibidos como resultado de la reflexión entre la ionosfera y la superficie de la Tierra.

Existen dos tipos de métodos de evaluación para la localización de descargas, los que hacen uso de múltiples estaciones detectoras y aquellos que tan sólo utilizan una estación.

En los sistemas multiestación, existen básicamente tres técnicas de localización de descargas, a partir de la dirección de llegada del campo magnético, a partir del tiempo de llegada y por último a partir de técnicas de interferometría.

En la técnica que utiliza la dirección de llegada del campo magnético MDF (Magnetic Direction Finder), se hace uso de dos antenas de lazo ortogonalmente situadas para detectar el campo magnético y una antena de dipolo para detectar el campo eléctrico. Las antenas de lazo se utilizan para obtener la dirección de la descarga a partir de

la ratio de las señales en los dos lazos, dado que es proporcional a la tangente del ángulo formado con la dirección a la fuente [Kridner et al., 1976].

La polaridad de la descarga se determina a partir de la señal eléctrica. Una red MDF requiere, al menos, dos estaciones, proporcionando la ubicación de la descarga mediante el punto de intersección obtenido a partir de las MDF de las dos estaciones receptoras.

El tiempo de llegada TOA (Time of Arrival) identifica la ubicación de la descarga a partir de la diferencia de tiempo de las detecciones en medidas simultáneas en más de tres detectores de diferentes emplazamientos [Cummins et al., 1998]. El empleo de un sistema integrado por múltiples detectores implica una importante inversión en infraestructuras y todo lo asociado a las mismas.

Por otra parte, es posible identificar las ubicaciones de las descargas mediante el procesado de la información contenida en las formas de onda de los pulsos de los sferics detectados en una única estación de medida.

A pesar de que la localización a partir de un punto de medida no es tan precisa como la obtenida mediante sistemas multiestación, el sistema es más simple y menos costoso. En determinadas situaciones la detección desde una estación es la única solución posible, por ejemplo en sistemas de detección instalados en aeronaves o embarcaciones.

A continuación se hará una descripción de los métodos de localización de descargas electromagnéticas asociadas al rayo más relevantes a partir de una única estación. En este sentido se describirán los

métodos de Korol et al. [1993], Rafalsky et al. [1995], Nagano et al. [2007] y Ramachadrán et al. [2007].

Aunque el método más simple para estimar la distancia se basa en la disminución de la amplitud de la señal generada por la descarga del rayo con la distancia [Horner, 1960]. Este método no ha será objeto de estudio dado sus deficientes resultados, los cuales sirven para localizar de manera burda la tormenta, no una descarga individual.

#### **4.1 Método de Korol y Nikolaenko.**

El método de Korol y Nikolaenko [1993] de medida de la distancia entre la fuente de la descarga y el detector emplea la dependencia de la frecuencia del valor absoluto de la impedancia de la onda, la cual no es función del espectro de la corriente de la descarga.

Las medidas efectuadas se realizan en la banda de frecuencias *VLF* con el objeto de seleccionar la zona de la señal con más información de interés y así poder obtener fórmulas analíticas simples para la estimación de la distancia.

El modelo de Korol y Nikolaenko [1993] considera una guía plana formada por la Tierra y la ionosfera, con su superficie inferior caracterizada como conductor perfecto y su superficie superior definida por un coeficiente de reflexión efectivo  $R$ . La descarga, fuente del campo electromagnético es un dipolo eléctrico vertical. Las componentes eléctrica vertical y magnética horizontal  $E_z$  y  $H_\phi$  del campo electromagnético se registran en el punto de observación.

En el caso de que la altura del campo sobre la superficie de la Tierra sea igual a 0 ( $H = 0$ ), la fórmula para la componente eléctrica vertical del campo a frecuencia  $\omega$  es

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{2P_1} E_z = \alpha \cos kD - \beta \sin kD - i(\beta \cos kD + \alpha \sin kD) +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{d_n^3} (\gamma_n \sin kd_n + \delta_n \cos kd_n) \quad (4.1)$$

donde  $\epsilon_0$  es la constante dieléctrica en el vacío,  $P_1$  el momento dipolar de la fuente,  $k = \omega/c$ ,  $\omega = 2\pi F$  la frecuencia angular,  $c$  la velocidad de la luz,  $D$  la distancia horizontal fuente-detector,  $R$  el coeficiente de reflexión efectivo de la ionosfera,  $h$  la altitud del intervalo Tierra-ionosfera,  $n$  el número de reflexión,  $\alpha = (k^2 D - 1)/D^2$ ,  $\beta = k/D^2$ ,  $\gamma_n = k^2 D^2 + C_n/d_n^2$ ,  $C_n = 2(2nh)^2 - D^2$ ,  $\delta_n = kC_n/d_n^2$ , y  $d_n = ((2nh)^2 + D^2)^{1/2}$ .

La fórmula 4.1. es una expansión en serie de fuentes imaginarias [Galejs, 1972] y [Wait, 1962], y los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_n$ ,  $C_n$ ,  $\delta_n$  y  $d_n$  tienen en consideración las tres componentes de campo, creadas no sólo por el dipolo, también por sus imágenes en un sistema de espejos planos uno de los cuales (la Tierra) se considera ideal, mientras que el otro (la ionosfera) presenta un coeficiente de reflexión  $|R| < 1$ .

En el mismo modelo, no resulta complicado obtener una expresión similar de fuentes imaginarias para la componente horizontal del campo magnético  $H_\phi$ . Sin embargo, los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  de las funciones trigonométricas varían debido a la ausencia de componente electrostática en el campo magnético.

En este sentido, se puede escribir

$$\begin{aligned}
 \frac{H_\phi}{iP_1} E_Z &= \hat{\alpha} \cos kD - \beta \sin kD + i(\beta \cos kD - \hat{\alpha} \sin kD) + \\
 &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n (\hat{\gamma}_n \cos kd_n + \hat{\delta}_n \sin kd_n) + \\
 &+ 2i \sum_{n=1}^{\infty} R^n (\hat{\delta}_n \cos kd_n + \hat{\gamma}_n \sin kd_n)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde  $\hat{\alpha} = k^2/D$ ,  $\hat{\gamma}_n = k^2 D/d_n^2$ ,  $\hat{\delta}_n = kD/d_n^3$ .

A partir de las fórmulas anteriormente descritas se calculan las amplitudes de las componentes espectrales de los campos eléctrico y magnético  $|E_Z(F)|$  y  $|H_\phi(F)|$  generados por un dipolo vertical a varias distancias. Los resultados se muestran en la figura 4.1. La frecuencia  $F$  se representa en el eje de abcisas en escala logarítmica, y el valor absoluto de la componente eléctrica vertical  $|E_Z(F)|$  y el valor absoluto de la componente magnética horizontal  $|H_\phi(F)|$  medida en decibelios se representan en el eje de ordenadas. En la columna de la izquierda se representan gráficos para  $h = 60 \text{ km}$ ,  $R = 0,6$  y  $n \geq 10$ , simulando condiciones de propagación diurnas. En la columna de la derecha, se representan gráficas derivadas de un modelo de propagación nocturna para el cual  $h = 90 \text{ km}$ ,  $R = 0,9$  y  $n \leq 50$ . La dependencia de la frecuencia de los campos se ha modelado para distancias fuente-detector  $D = 10, 20, 30, 40, 50, 80$  y  $100 \text{ km}$ . En los cálculos se asume que el momento dipolar eléctrico de la fuente no es función de la frecuencia:  $P_1(F) = \text{constante} = 1$ . Tal y como se refleja en la figura 4.1, el valor absoluto de componente magnética horizontal  $|H_\phi(F)|$  se incrementa monótonamente conforme aumenta la frecuencia, inicialmente proporcionalmente a  $F$  y posteriormente a  $F^2$ . El valor absoluto de la componente eléctrica vertical es inicialmente independiente de la frecuencia (campo electrostático) para

pasar posteriormente a variar proporcionalmente a  $F$  (campo de inducción).

En la región de radiación, tiende hacia la asíntota  $F^2$ . La región de transición que comprende desde  $|E_z(F)| \cong \text{constante}$  hasta la asíntota  $|E_z(F)| \cong F^2$  queda determinada por la distancia  $D$ . Al incrementar la distancia fuente-detector, las componentes de radiación e inducción son determinantes a frecuencias bajas.

En ausencia de límites reflectantes, la frecuencia de transición  $F_1$ , la cual queda controlada por la distancia  $D$  a la que el efecto del campo electrostático es débil y las componentes de radiación e inducción dominan, queda fácilmente determinada a partir de la condición  $kD \cong 1$ . En presencia de límites reflectantes, se ha de tener en consideración fuentes adicionales, para las cuales  $d_n > D$ , y como consecuencia, el procedimiento de determinación de  $F_1$  se complica. Es difícil hacer uso de las curvas de las componentes eléctrica vertical y magnética horizontal en la figura 4.1 por comparación con datos experimentales, ya que en los cálculos se ha realizado la asunción de  $P_1 = \text{constante}$ .

En los modelos más simplificados de descargas, resulta necesario que  $P_1 \propto F^{-1}$ , pero tal y como se deduce posteriormente no es esencial. Para eliminar el efecto del espectro de la fuente en los resultados de la estimación de la distancia, se mide el valor absoluto de la impedancia de la señal del campo  $|W(F)| = |E_z(F)|/|H_\phi(F)|$  [Kono-nov et alí, 1986]. La última fila de la figura 4.1 representa las curvas calculadas del valor absoluto de la impedancia de la señal. La principal ventaja de la impedancia de la onda es su dependencia del espectro de emisión de la fuente  $P_1(F)$ . La impedancia de la onda es alta a bajas frecuencias y decrece conforme aumenta la frecuencia

proporcionalmente a  $F^{-1}$ . En la región de radiación,  $|W(F)| \cong 1$ . En la región intermedia, la cual es función de la distancia  $D$ , el valor absoluto de la impedancia de la onda se iguala a su valor en el vacío.

$$\log[W(F_1/120\pi)] = 0 \quad (4.3)$$

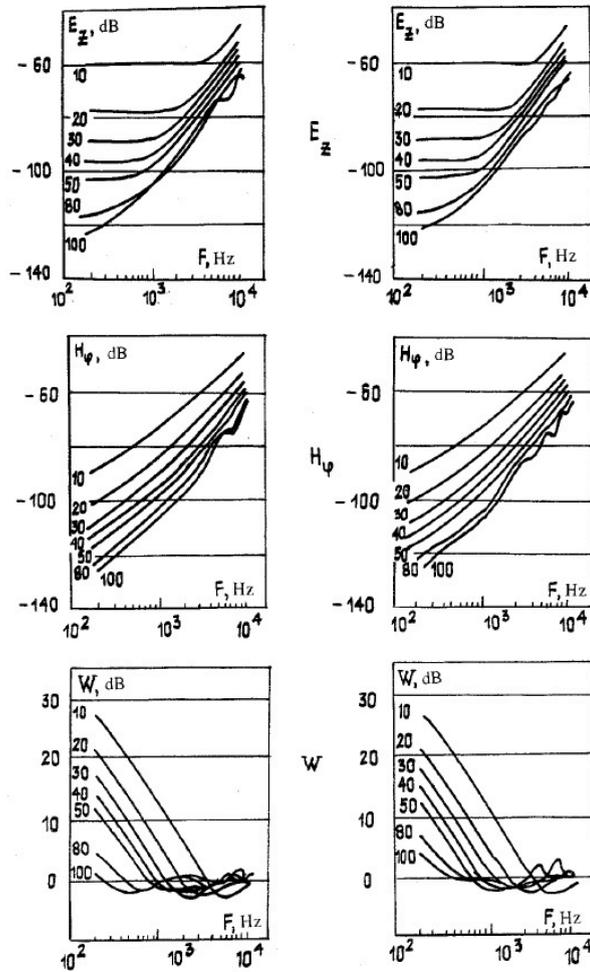


Figura 4.1. Campos  $H_\phi(F)$  y  $E_z(F)$  a diversas frecuencias. Korol et. al.

La figura 4.2 muestra las gráficas de la frecuencia intermedia, es decir, la primera raíz de la ecuación (4.3), en función de la distancia  $D$  entre la fuente y el detector bajo condiciones diurnas y nocturnas.

De la gráfica, se observa que las curvas se solapan y son prácticamente rectas en la representación doble logarítmica a distancias inferiores a  $D \leq 50 \text{ km}$ . Mediante técnicas de regresión lineal, resulta sencillo obtener la siguiente relación

$$D[\text{dB}] = 96 - 1,1F_i[\text{dB}] \quad (4.4)$$

donde la distancia  $D$  se mide en decibelios por  $\text{km}$ , y  $F_i$  se mide en decibelios por  $\text{Hz}$ .

Así, la componente de campo electrostático es la predominante tanto en condiciones diurnas como nocturnas en la zona próxima ( $D \leq 50 \text{ km}$ ) a una descarga vertical.

La precisión de la estimación de la distancia a la fuente queda fundamentalmente determinada por el error de la medida de la impedancia de la onda.

Para un error relativo de la medida del valor absoluto  $|W| \cong 10\%$  o  $\pm 1 \text{ dB}$ , la distancia tendrá la misma precisión.

El método descrito hace innecesario realizar medidas absolutas. Una ligera modificación del algoritmo consistente en reemplazar la frecuencia intermedia  $F_i$  por  $F_m$ , la cual corresponde al primer mínimo de  $|W(F)|$  da como resultado la ecuación

$$D[\text{dB}] = 107 - 1,2F_m[\text{dB}] \quad (4.5)$$

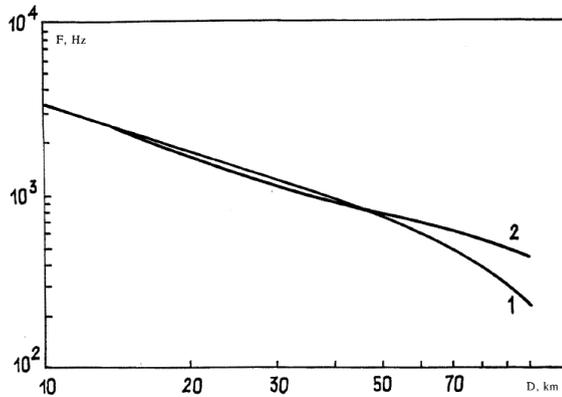


Figura 4.2. Gráficas de frecuencia intermedia. Korol et al.

En conclusión, este método de determinación de la distancia de las descargas hace uso de un modelo simplificado, en el cual sólo se han tenido en consideración descargas verticales, la ionosfera queda determinada por 2 parámetros (la altitud y el coeficiente de reflexión) independientes de la frecuencia. Pese a ello, los resultados finales obtenidos por Korol et al. muestran la consistencia del modelo.

#### 4.2 Método de Rafalsky, Nickolaenko y Shvets.

Rafalsky et al. [1995] desarrollan un modelo de detección de sferics desde una única estación combinando técnicas de dirección de llegada (DF) y de tiempo de llegada (TOA).

##### 4.2.1 Estimación del Vector Dirección de la Descarga.

En el modelo se toma en consideración el vector de Poynting de la siguiente manera

$$\vec{P}(\omega) = \text{Re}[\vec{E}(\omega) \times \vec{H}^*(\omega)] \quad (4.6)$$

donde el asterisco denota el conjugado complejo,  $\vec{E}(\omega)$  y  $\vec{H}(\omega)$  son las componentes en el dominio de la frecuencia de los campos eléctrico y magnético, derivados de los campos en el dominio del tiempo a través de la transformada de Fourier

$$\vec{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.7)$$

$$\vec{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.8)$$

Se introduce el vector de Poynting completo como la integral de  $\vec{P}(\omega)$  en el dominio de la frecuencia

$$\vec{\Pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.9)$$

La magnitud del vector describe la densidad total del flujo energético, mientras que su orientación indica la dirección promedio del flujo de energía. Se pueden reescribir las ecuaciones anteriores como

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} [\vec{E}(\omega) \times \vec{H}^*(\omega)] d\omega = \\ &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\vec{E}(t) \times \vec{H}^*(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)}] = \\ &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\vec{E}(t) \times \vec{H}^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-\tau)}] \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde la última integral sobre  $d\omega$  es la función delta de Dirac  $\delta(t - \tau)$ , por consiguiente

$$\vec{\Pi} = \int_{-\infty}^{\infty} [\vec{E}(t) \times \vec{H}(t)] dt \quad (4.11)$$

donde se omite el símbolo  $Re$  dado que el integrando es un valor real. En las ecuaciones (4.10) y (4.11) se hace uso del Teorema de Plancherel.

Cuando se miden las componentes del campo en intervalos temporales discretos  $\Delta t$ , la integral (4.11) se puede escribir como

$$\vec{\Pi} = \sum_i [\vec{E}(t_i) \times \vec{H}(t_i)] \Delta t \quad (4.12)$$

Considerando la superficie de la Tierra como conductora perfecta, solamente las componentes  $H_x$ ,  $H_y$  y  $E_z$  del campo son no nulas. Por consiguiente se tiene que el flujo de energía promedio

$$\begin{aligned} \Pi_x &= - \sum_i [E_z(t_i) H_y(t_i)] \Delta t \\ \Pi_y &= - \sum_i [E_z(t_i) H_x(t_i)] \Delta t \end{aligned} \quad (4.13)$$

La dirección de la cual proviene la descarga queda determinada dado que su orientación es la opuesta al vector  $\Pi$ .

Resulta interesante en el método de determinación de la dirección de llegada de la señal en una banda amplia de frecuencias, hacer uso del procesado en el dominio del tiempo, obviando el tedioso empleo de técnicas de Fourier.

Omitiendo factores constantes positivos que no afectan la ubicación de la fuente, la ecuación (4.13) se puede reescribir

$$\begin{aligned} \Pi_x &= - \sum_i [U_z(t_i) U_y(t_i)] \Delta t \\ \Pi_y &= - \sum_i [U_z(t_i) U_x(t_i)] \Delta t \end{aligned} \quad (4.14)$$

Donde  $U_x$ ,  $U_y$  y  $U_z$  son los voltajes de salida de los canales  $H_x$ ,  $H_y$  y  $E_z$  respectivamente.

Las relaciones (4.14) requieren que se satisfagan las siguientes condiciones:

- a) La amplitud y la fase de la señal frente a las características de frecuencia de los canales son idénticas.
- b) La fase de la señal frente a las características de frecuencia del canal es la misma que para los canales  $H$ .

La amplitud de la señal frente a la característica frecuencial de  $E_z$  y los canales  $H$  puede diferir. Para obtener la ecuación (4.14), se modifica la definición inicial de vector de Poynting de la ecuación (4.6)

$$\vec{\Pi} = \int_{-\infty}^{\infty} K_E(\omega)K_H(\omega)\vec{P}(\omega)d\omega \quad (4.15)$$

donde  $K_E(\omega)$  y  $K_H(\omega)$  representan las amplitudes frente a las características de respuesta frecuencial de  $E_z$  y los canales  $H$  respectivamente. Esta última definición es más conveniente y natural cuando se opera con voltajes de salida en vez de con campos.

#### 4.2.2 Estimación de la Distancia de la Descarga.

Rafaslky, tiene en consideración el modelo Tierra-ionosfera como una guía de ondas de planos paralelos perfectamente conductora y asume que la fuente de la descarga presenta la forma de un impulso  $\delta(t)$ . Por consiguiente el modo enésimo tanto del campo transversal magnético ( $TM$ ) o transversal eléctrico ( $TE$ ) es [Wait, 1962]

$$F_n = krS_n \quad (4.16)$$

donde  $S_n = [1 - (n\pi/kh)^2]^{1/2}$ ,  $k = 2\pi f/c$  es el número de onda,  $kS_n$  la componente horizontal del vector de ondas,  $r$  la distancia entre la descarga y el punto de medida, y  $h$  la altura de la guía de ondas Tierra-ionosfera.

La ecuación (4.16) es válida cuando la frecuencia  $f$  supera la frecuencia de corte para un valor de  $n$  determinado de la guía  $f_n = nc/2h$ , siendo por consiguiente el valor de  $S_n$  real.

Dado que se desconoce el instante temporal de la descarga, en el análisis se trabaja con el instante temporal de la detección el cual es conocido, por ello, la ecuación (4.16) se puede reescribir como

$$F_n = krS_n - 2\pi fr/c = kr(S_n - 1) \quad (4.17)$$

La primera frecuencia de corte  $f_n$  de la guía Tierra-ionosfera comprende el rango (1,5 – 2,5) kHz. A frecuencias inferiores a  $f_1$  (referenciada como  $\Delta f_{01}$ ), sólo el modo de orden 0 se puede propagar. Para un sistema conductor ideal, la fase de este modo es igual a 0 a lo largo de toda la guía de ondas ( $S_0 = 1$ ) en (4.17) y por consiguiente no se utiliza en el proceso de determinación de la distancia.

En la banda de frecuencias  $f_1 < f < f_2$  ( $\Delta f_{12}$ ), se propagan los modos de primer orden **TE** y **TM**. La dependencia de la fase de la señal frente a la frecuencia de estos modos así como de modos superiores queda determinada por los parámetros  $h$  y  $r$ , siendo posible obtener el espectro de la fase del modo de primer orden y a partir de la ecuación (4.17) obtener los valores de  $h$  y  $r$ .

Los campos de radiación del modo transversal electromagnético (**TEM**) de orden cero y de los modos **TM** superiores generados de

las descargas presentan las componentes  $E_z$ ,  $H_\phi$  y  $E_r$ , en el sistema de coordenadas cilíndrico. Las otras 3 componentes  $H_z$ ,  $E_\phi$  y  $H_r$  corresponden a los modos **TE**. Así, considerando la Tierra como conductora perfecta, las componentes  $E_z$  y  $H_\phi$  pertenecen a los modos **TM**, mientras que la componente  $H_r$  pertenece solamente a los modos **TE**. Dado que las ondas **TM** no presentan modos de orden cero, se puede hacer uso del espectro de la fase en el procedimiento de comparación. En un primer paso se debe de determinar la dirección de la cual proviene la descarga para poder resolver la componente  $H_r$ .

La aproximación descrita tiene validez para una onda Tierra-ionosfera isótropa. En tal caso, la ecuación (4.17) es una aproximación a la función fase frente a frecuencia. Los valores de  $S_n$  se calculan a partir de la ecuación de dispersión [Wait, 1962]

$$1 = R_i R_g e^{-21kC_n h} \quad (4.18)$$

donde  $R_i$  y  $R_g$  son los coeficientes de reflexión de la ionosfera y la superficie de la Tierra respectivamente, y  $C_n = (1 - S_n^2)^{1/2}$  es la raíz enésima de la ecuación de modal (4.18).

La ecuación trascendente (4.18) es válida tanto para ondas **TM** como **TE** y se resuelve numéricamente sustituyendo los coeficientes de reflexión apropiados para las polarizaciones vertical y horizontal respectivamente. Para encontrar los coeficientes de reflexión, la técnica más usual es la de impedancia capa a capa o la de recálculo de la matriz de admitancia [Budden, 1961].

Rafalsky et al. [1995] hacen uso de un modelo exponencial de ionosfera con un perfil de densidad de electrones

$$N_e = 1cm^{-3}e^{(z-h)/2} \quad (4.19)$$

y la frecuencia de colisión efectiva de electrones dependiente de la altitud

$$v_{ef} = 4 \times 10^7 s^{-1} e^{(60-z)/65} \quad (4.20)$$

donde  $h$  y  $z$  se miden en  $km$ .

Para obtener la dependencia fase-frecuencia exacta de un modo tanto para modelos isótropos como anisótropos, se tiene en consideración las expresiones completas de los campos generados por la descarga. De este modo, la dependencia variará ligeramente en función del tipo de fuente.

### **4.3 Método Nagano, Yagitani, Ozaki, Nakamura y Miyamura**

#### **4.3.1 Estimación de la Distancia de la Descarga**

Nagano et al. [2007] en su trabajo para estimar la distancia entre la ubicación de la descarga y el detector, consideran que los sferics radiados por una descarga se propagan en ondas esféricas a través del espacio.

Tales ondas esféricas pueden descomponerse en una onda directa (onda de tierra) la cual se propaga directamente sobre la superficie de la Tierra y una onda reflejada (onda espacial) la cual se propaga a través de múltiples reflexiones entre la Tierra y la ionosfera.

Asimismo, asumen que la onda reflejada se propaga a través de múltiples trayectorias debido a que la distancia es relativamente corta.

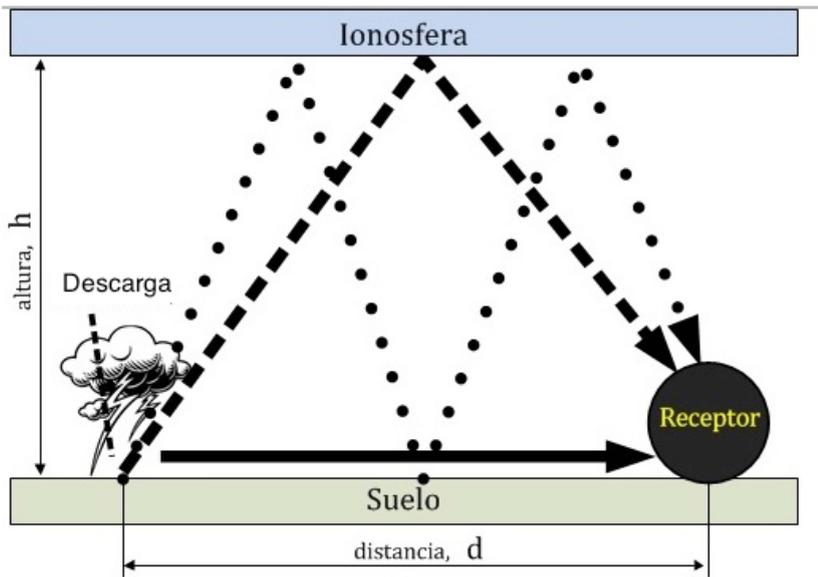


Figura 4.3. Modelo de propagación de los esféric

En el modelo utilizado por Nagano et al., mostrado en la figura 4.3, se puede observar que el tiempo requerido para la propagación de los pulsos del sferic desde el punto de descarga hasta el punto de observación para la onda directa y la reflejada es

$$\frac{d}{c}(n=0), \frac{2n}{c} \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2n}\right)^2} \quad (n \geq 1) \quad (4.21)$$

donde  $d$  es la distancia horizontal desde el punto de descarga hasta el punto de observación,  $c$  es la velocidad de la luz, y  $n$  es el número de reflexiones en la ionosfera. A pesar de que las reflexiones de las ondas *VLF* por la ionosfera en la práctica son diferentes, debido a que la altura de reflexión es diferente, se asume que la diferencia es pequeña y se puede considerar que la altura de la ionosfera a la cual

se produce la reflexión es  $h$ . Si los sferics se propagan de acuerdo con este modelo, los pulsos detectados en el punto de medida se corresponden con los mostrados en la figura 4.4.

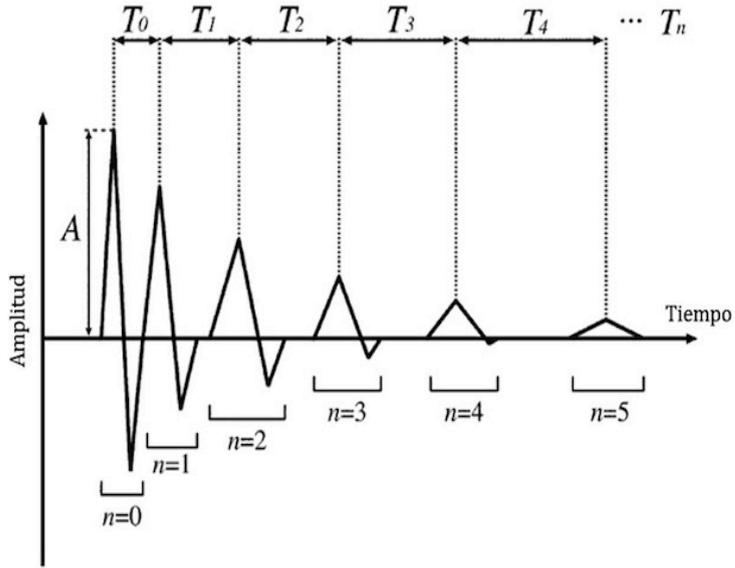


Figura 4.4. pulsos del sferic

El intervalo de tiempo del pulso de llegada expresado en términos de la ecuación (4.21) después de  $n$  reflexiones es

$$\frac{2n}{c} \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2n}\right)^2} - \frac{d}{c} = T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1} \quad (4.22)$$

donde  $T_n$  es el intervalo de tiempo del pulso entre las reflexiones  $n - 1$  y  $n$ . Si la altura  $h$  de la ionosfera a la cual tiene lugar la refle-

ción del sferic es conocida, la distancia de propagación  $d$  viene dada por

$$d = \frac{4n^2h^2 - (T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1})^2 c^2}{2(T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1})c} \quad (4.23)$$

Si existen más de dos valores del intervalo  $T$  del pulso, o si se detectan más de tres pulsos, se pueden obtener ecuaciones simultáneas mediante la sustitución de la onda directa y los intervalos de dos pulsos arbitrarios en la ecuación (4.23). Por consiguiente, la distancia de propagación  $d$  y la altitud de la ionosfera a la cual tiene lugar la reflexión del sferic se puede obtener a partir de las siguientes ecuaciones

$$h = \sqrt{\frac{(T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1})(T_1 + \dots + T_{n-1})c^2}{4((n^2 - 1) - (T_1 + \dots + T_{n-1}))}} \quad (4.24)$$

$$d = \frac{4h^2 - T_0^2 c^2}{2T_0 c} \quad (4.25)$$

La onda directa se convierte en una onda de superficie que no se propaga a la velocidad de la luz [Komonmae et al., 2001]. Para poder eliminar este error, se obtienen tanto la distancia de propagación  $d$  como la altura de reflexión  $h$  sin hacer uso de  $T_0$

$$h = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} A &= 16(n^2 - 1)T_1^2 - 144(T_1 + T_2 \dots + T_{n-1})^2 \\ B &= (-4n^2 + 16)(T_1 + T_2 \dots + T_{n-1})^2 T_1^2 c^2 \\ C &= T_1^2 (T_1 + T_2 \dots + T_{n-1})^2 ((T_1 + T_2 \dots + T_{n-1})^2 - T_1^2) c^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$d = \sqrt{\frac{144h^4 - 40T_1^2 h^2 c^2 + T_1^4 c^4}{4T_1^2 c^2}} \quad (4.28)$$

La dirección de llegada de los sferics se estima a partir de las componentes del campo magnético horizontal (componente Este-Oeste  $B_x$  y componente Norte-Sur  $B_y$ ) y de la componente vertical de campo eléctrico ( $E_z$ ) de la forma de onda del sferic recibido.

En primer lugar, teniendo en consideración el vector suma de las dos componentes horizontales del campo magnético del primer pulso (onda directa) del sferic, se puede determinar la dirección de las componentes del campo magnético horizontal en el punto de medida.

Si denominamos los valores de la amplitud de onda de  $B_x$  y  $B_y$  como  $A_x$  y  $A_y$  respectivamente, entonces el ángulo azimutal  $\theta$  en el plano horizontal, es decir, el ángulo del vector campo magnético medido en sentido antihorario es

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x} \quad (4.29)$$

Si la dirección del vector campo magnético queda fijada, la dirección de propagación del sferic queda determinada con una ambigüedad de  $\pm 90^\circ$ . A pesar de ello, se puede obtener la dirección de propagación a partir de la relación del flujo del vector de Poynting si se conoce la polaridad del campo eléctrico de la onda directa de los sferics.

Se ha de hacer notar que la onda directa se propaga con polarización lineal, mientras que las reflexiones ionosféricas del segundo y posteriores pulsos causan que la polarización cambie de lineal a elíptica, conllevando que el vector campo magnético varíe con el tiempo.

Por consiguiente, la dirección de llegada de los sferics tan solo puede hallarse con precisión a partir de la onda directa.

#### 4.4 Método de Ramachandran, Prakash, Deo y Kumar

El método de *Ramachandran et al. [2007]* estima la distancia  $d$ , desde el punto de observación a la descarga, teniendo en consideración el periodo y el retraso extraído de la forma de onda cuasi periódica del campo eléctrico del sferic recibido.

La corriente típica de una descarga alcanza su máximo en  $\sim 2\mu s$  y decae hasta la mitad en  $\sim 40\mu s$  [*Uman, 1987*], generando un pulso breve de radiación electromagnética  $\sim 100\mu s$  abarcando un amplio espectro de frecuencias, pero conteniendo el grueso de la energía en la banda *VLF*.

La fuente de radiación *VLF* es un elemento de corriente de longitud reducida, dado que toda la potencia en la mencionada banda del primer impacto de descarga proviene de los primeros  $2\text{ km}$  [*Lee, 1989*], lo que representa una pequeña fracción de la longitud de onda de la banda *VLF* ( $10 - 100\text{ km}$ ). *Ramachandran et al. [2007]* asumen que la fase de todas las componentes *VLF* de la corriente es la misma, y por ende, la fase inicial para todas las componentes *VLF* del campo eléctrico radiado también es la misma.

Considerando la propagación de un modo *TM* del sferic una modelización básica de la guía de ondas, formada por la Tierra y la ionosfera, esto es, de planos paralelos, y asumiendo la frecuencia de corte de la misma como  $f_c$ , la constante de fase para la componente de Fourier de frecuencia  $f$  propagándose en la guía es

$$k = \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \left( \frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

y la velocidad de fase viene dada por

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (4.31)$$

La traza del campo del sferic, después de aplicar un filtro paso bajo se corresponde con la de la figura 4.5.

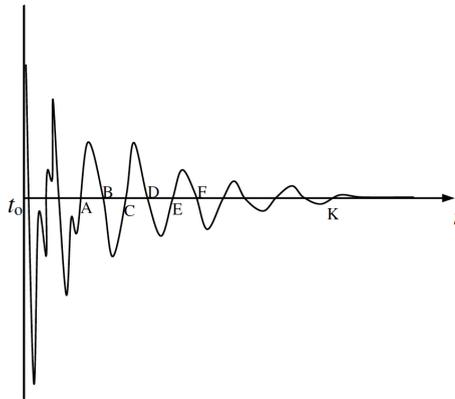


Figura 4.5. Traza del sferic del modelo de Ramachandran

En ella se puede observar que las componentes de Fourier de alta frecuencia ( $f \gg f_c$ ), se propagan a velocidad  $c$  y llegan en el mismo instante temporal  $t_0$  (respecto al instante de la descarga) al receptor situado a una distancia  $d$  de la descarga.

Asimismo, las componentes de Fourier de baja frecuencia ( $f > f_c$  pero cercanas a  $f_c$ ), experimentarán dispersión. Considerando esta

región, varias señales se superponen y dan como resultado una onda cuasi periódica que se propaga con velocidad de grupo  $v_g$ . Para componente de frecuencia  $f$  próximas a la frecuencia de corte, la velocidad de grupo  $v_g = d\omega/dk$ . Haciendo uso de la ecuación (4.30)

$$v_g = c \left[ 1 - \left( \frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

Las velocidades de grupo decrecen progresivamente conforme  $f$  se aproxima a  $f_c$ .

Ramachandran et al. [2007] descomponen la parte oscilatoria del patrón de campo del sferic en ondas casiperiódicas de diferentes frecuencias. En la figura 4.5, la porción de la onda que comprende desde el punto  $A$  al punto  $K$  es de carácter oscilatorio. La frecuencia de la onda cuasi periódica  $A - C$  es

$$f = \frac{1}{T_C - T_A} \quad (4.33)$$

y se recibe en el instante  $t_0 + T_B$  relativo al instante de la descarga. De modo similar, la onda casiperiódica  $B - D$  de frecuencia  $f = 1/(T_D - T_B)$  se recibe en el instante  $t_0 + T_C$ , etc. En general, el tiempo  $T_B, T_C$  respecto al comienzo de la traza se representa como  $T$ . Se ha de hacer notar que  $f$  es mayor que la frecuencia de corte  $f_c$  de la guía.

Para un grupo de ondas de frecuencia  $f (> f_c)$ , el tiempo de llegada al detector se expresa como

$$t_0 + T = \frac{d}{v_g} \quad (4.34)$$

donde  $t_0 = \frac{d}{c}$ . Sustituyendo para  $t_0$  y  $v_g$  se tiene que

$$T = \frac{d}{c} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{d}{c} \quad (4.35)$$

La ecuación (4.35) obtenida por Ramachandran et al. [2007] es idéntica a la ecuación obtenida por Hepburn (1960). En adición, cuando la diferencia de fase se computa después de un tiempo  $T$ , es idéntica a la ecuación (4.17) propuesta por Rafasly et al.

A partir de la ecuación (4.35), se puede observar que, mediante una representación gráfica de  $T$  frente a  $\left[1 - (f_c/f)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ , la pendiente obtenida es  $d/c$  y la ordenada en el origen  $-d/c$ , proporcionando pues, dos métodos independientes de calcular la distancia a la fuente de la descarga.



**Capítulo 5. Resultados y Desarrollo Argumental de Aplicación a Métodos Existentes. Método Basado en la Pendiente de Fase.**



## **5. Resultados y Desarrollo Argumental de Aplicación a Métodos Existentes. Método Basado en la Pendiente de Fase.**

A continuación se pasará a hacer una comparación de los resultados así como el desarrollo argumental de los métodos existentes de localización de descargas más significativos haciendo uso de diversos tipos de señales. Posteriormente, tras un análisis de los resultados obtenidos, se propondrá un método basado en la pendiente de fase del sferic el cual proporciona resultados con un margen de precisión más elevado.

Para la comparación de los métodos existentes, se dispone de un conjunto de datos de diferente naturaleza. En primer lugar se realizan simulaciones con sferics proporcionados por el Dr. Steven Cummer y obtenidos en el laboratorio STAR de la Universidad de Stanford. Dicho conjunto comprende un total de 47 sferics detectados a una distancia de entre (1.955 – 2004) *km* del origen de la descarga.

En segundo lugar se hace uso de 30 sferics obtenidos con el sistema de detección desarrollado al efecto para este trabajo, el cual se explica en el presente capítulo, y generados a una distancia de entre (2.029 – 2.050) *km* del mencionado detector.

Por último, dado que los sferics obtenidos a través de sistemas detectores reales presentan un nivel de ruido considerable, para aplicar y validar las técnicas existentes objeto de comparación (aunque para el método propuesto de la pendiente de fase sí que son válidos), se generan sferics sintéticamente, los cuales nos proporcionan un grado de nitidez excelente para poder trabajar con ellos.

Los datos proporcionados por la Universidad de Stanford son validados con la red de detectores NLDN, mientras que los obtenidos con el sistema detector diseñado se validan con la red de detectores WWLLN, de la cual es miembro la Universitat de València.

## 5.1 Resultados y Desarrollo Argumental de Aplicación a Métodos existentes.

### 5.1.1 Aplicación al Método de Nagano et al.

El procedimiento de *Nagano et al.* [Nagano, 2007] parece el más sencillo de implementar, puesto que trabaja directamente con la señal temporal sin ningún tipo de procesado previo o posterior. Se basa en apreciar la interferencia que se produce entre el pulso emitido por la descarga que llega directamente al detector y el que llega tras sucesivas reflexiones en la guía de ondas formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera. Así, el tiempo necesario para detectar la señal directa desde que se produce la descarga es  $d/c$ , y el tiempo de llegada tras  $n$  reflexiones es el expresado por la ecuación (4.21). La coincidencia hace que se detecte un máximo de la señal recibida cada  $T_i$  segundos, siendo  $\frac{d}{c} = T_0$  el instante temporal de detección de la onda que se propaga horizontalmente a través de la superficie terrestre,  $T_1$  la onda que llega tras experimentar una reflexión en la ionosfera,  $T_2$  la onda que ha experimentado 2 reflexiones y así sucesivamente. No se ignora en términos absolutos  $d$  ni  $T_i$ , pero se conoce la diferencia a partir de la señal temporal registrada. Así,  $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$  representan los instantes en los cuales se obtiene un máximo a partir de la señal inicial, la cual se detecta en el instante  $T_0$ , lo cual viene descrito por la ecuación (4.22), o lo que es lo mismo,  $\sum_{i=0}^{n-1} T_i = \Delta t$  desde la recepción del primer máximo a la recepción del máximo  $n$ . Haciendo uso de dos instantes temporales se puede plan-

tear un sistema de ecuaciones a partir del cual se obtiene  $d$  y  $h$ , aunque se puede deducir directamente  $d$ , suponiendo una altura de la ionosfera  $h \approx 85 \text{ km}$ , pese a que en realidad  $h \approx 70 \text{ km}$  durante el día y  $h \approx 90 \text{ km}$  durante la noche. Así pues, tal y como se describió en el capítulo anterior, el valor de  $d$  viene determinado por la ecuación (4.28), siendo necesaria la detección de cuatro máximos consecutivos de la señal para que el procedimiento pueda ser de aplicación.

El sistema de medida utilizado por *Nagano et al. [2007]* consiste en dos espiras cruzadas, para detectar el campo magnético paralelo al suelo, y una antena de dipolo vertical de  $2 \text{ m}$  para detectar el campo eléctrico vertical. Las espiras de medida del campo magnético tienen un diámetro de  $0,8 \text{ m}$ . El circuito consiste en un preamplificador y un filtro pasabanda. Las frecuencias de filtrado o rango de observación es  $(1 - 14 \text{ kHz})$ , siendo la señal digitalizada por un conversor AD de 16 bits con frecuencia de muestreo por canal de  $66,67 \text{ kHz}$ . El sistema se calibra mediante la inyección de señales  $(1 - 16) \text{ kHz}$  para obtener la función de transferencia del sistema detector. El sistema se aplica a varias observaciones, representando en su publicación las formas de onda obtenidas con bastante claridad. *Nagano et al. [2007]* hacen uso de su técnica para localizar una descarga a  $258,8 \text{ km}$  y un ángulo de  $49,1^\circ$  obteniendo un error del  $12,5 \%$ .

Asimismo, los autores afirman haber estimado el error de un conjunto de 17 sferics con calidad suficiente, analizando un centenar de descargas, obteniendo una precisión del orden del  $10\%$ . Aplicando la técnica de *Nagano et al. [2007]* para el análisis con sferics reales se obtienen resultados similares a los obtenidos por los autores. El procedimiento proporciona un sistema de ecuaciones que aplicado a las medidas y la simulación, proporciona resultados muy similares aun-

que dotados de una precisión menor debido al ruido de las señales disponibles y también que la precisión alcanzada por Nagano es para sferics generados a baja distancia, unas 10 veces inferior a los datos disponibles para realizar el presente estudio.

**A) Resultados de Aplicación Procedimiento de Nagano et al. a los Sferics Proporcionados por la Universidad de Stanford.**

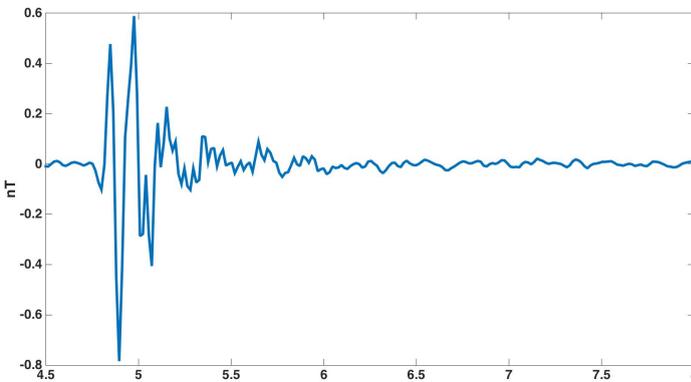


Figura 5.1. Sferic proporcionado por la Universidad de Stanford

<b>Resultados Aplicación Procedimiento de Nagano et al. a Sferics de la Universidad de Stanford</b>			
Nº de Sferics	Error Máximo	Error Mínimo	Error Medio
47	22,32%	18,05%	20,12%

Tabla 5.1. Errores obtenidos en la estimación de la distancia de los Sferics proporcionados por la Universidad de Stanford al aplicar el procedimiento de Nagano et al.

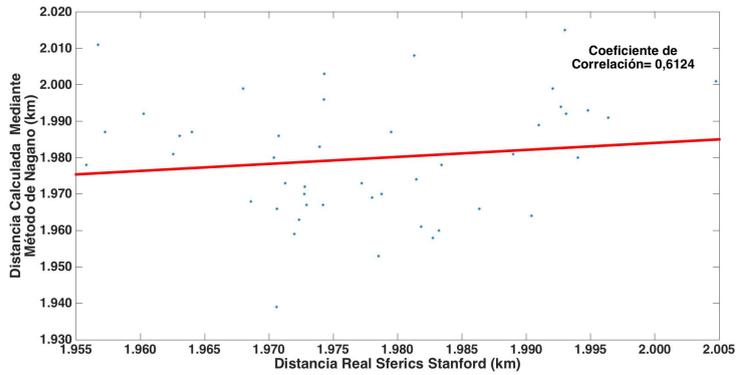


Figura 5.2. Correlación obtenida entre distancia real y distancia calculada mediante el procedimiento de Nagano et al. aplicado a los sferics proporcionados por la Universidad de Stanford

**B) Resultados de Aplicación Procedimiento de Nagano et al. a los Sferics Obtenidos con el Sistema Detector Diseñado.**

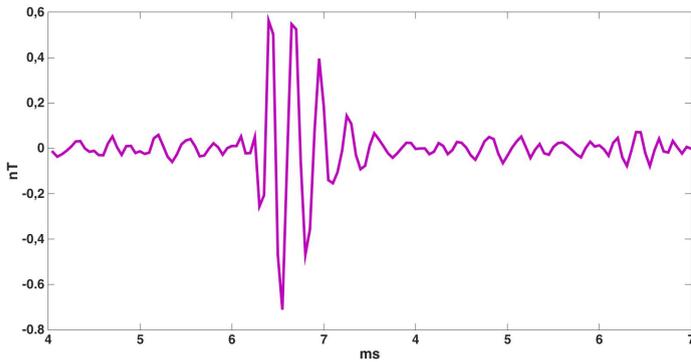


Figura 5.3. Sferic obtenido con el sistema detector diseñado

<b>Resultados Aplicación Procedimiento de Nagano et al. a Sferics Obtenidos con el Sistema Detector Diseñado</b>			
Nº de Sferics	Error Máximo	Error Mínimo	Error Medio
30	22,34%	19,12%	21,03%

Tabla 5.2. Errores obtenidos en la estimación de la distancia de los Sferics obtenidos por el sistema detector diseñado al aplicar el procedimiento de Nagano et al.

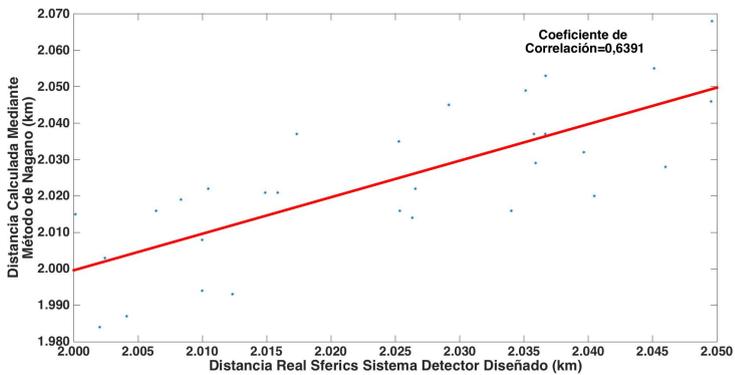


Figura 5.4. Correlación obtenida entre distancia real y distancia calculada mediante el procedimiento de Nagano et al. aplicado a los sferics obtenidos por el sistema detector diseñado

Otra dificultad añadida surge en la detección con claridad de cuatro pulsos, dado que generalmente se producen errores a partir del ter-

cer pulso, no detectándose el cuarto pulso o detectándose con baja calidad.

Dado los resultados obtenidos mediante la implementación de la técnica de Nagano, es aconsejable realizar el estudio con otras alternativas. La siguiente técnica de radiolocalización de descargas a aplicar es la de *Ramachandran et al [2007]*.

### 5.1.2 Aplicación al Método de Ramachandran et al.

*Ramachandran et al. [2007]* afirman que su procedimiento permite estimar distancias entre (3.000 – 16.250) km, perteneciendo el rango del error al intervalo (4.7 – 8.8)% para  $d < 3.500$  km, siendo estos errores derivados de la estimación de  $d$  a través de la pendiente y la ordenada en el origen de un ajuste obtenido por mínimos cuadrados.

La técnica de *Ramachandran et al.[2007]*, tal y como se describió en el capítulo anterior, se basa en el cálculo del retardo del grupo de la señal del sferic a partir de la gráfica temporal.

El procedimiento consiste en determinar los  $T_i$  de la señal temporal a partir del instante de recepción  $t_0$ . Conociendo los  $T_i$ , se determina cada casiperiodo y cada casifrecuencia, que al sustituirla en la ecuación del retardo del grupo (4.34), obteniendo un conjunto de pares de datos  $(T_i, \frac{d}{v_{g_i}} - \frac{d}{c})$  a partir de los cuales se realiza un ajuste por mínimos cuadrados, siendo  $\frac{d}{c}$  la pendiente de la recta y  $-\frac{d}{c}$  la ordenada en el origen, proporcionando así dos estimaciones independientes de  $d$ .

El sistema de recepción utilizado consiste en una antena whip de 5 m de cobre trenzado de 1 mm insertada dentro de un tubo de PVC de unos 2 m de longitud y una antena GPS. El tubo de PVC se une a un

tubo de metal de unos 2 m de longitud con un solapamiento de aproximadamente 30 cm. El conjunto se instala sobre un edificio de dos alturas.

La señal VLF recibida por la antena se introduce en un preamplificador de dos salidas en paralelo, siendo la salida de pico del amplificador de 10 V. El amplificador dispone de un filtro RC con atenuación proporcional a  $\sqrt{f}$ , (6 dB a 40 kHz y 48 db a 2,5 MHz).

La señal de la descarga, combinada con la señal proporcionada por un GPS alimentan un picoscope con una frecuencia de muestreo de 3 MS/s.

Con la aplicación de la técnica, Ramachandran et al.[2007] obtuvieron estimaciones de distancias comprendidas entre (4.900 – 9.200)km con errores del orden del 5 %, logrando un error medio del 8,8 % para un conjunto de 77 descargas.

El procedimiento de Ramachandran hace uso de un ajuste  $(T_i, \frac{d}{v_{g_i}} - \frac{d}{c})$ , obteniendo los  $v_{g_i}$  a partir de los casiperiodos. Siendo realistas, a lo sumo se pueden obtener tres o cuatro casi periodos debido al ruido, y realizar un ajuste por mínimos cuadrados con un número tan reducido de muestras arroja resultados poco precisos.

**A) Resultados de Aplicación Procedimiento de Ramachandran et al. a Sferics Proporcionados por la Universidad de Stanford.**

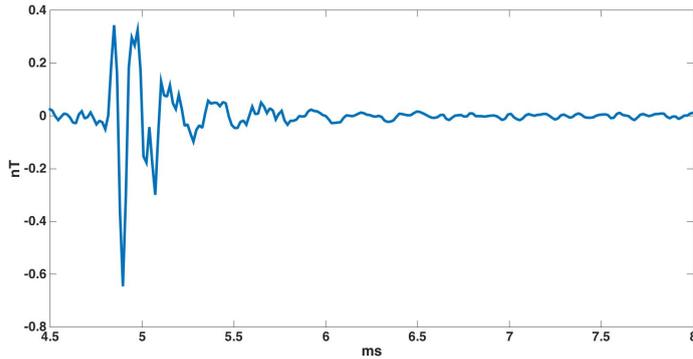


Figura 5.5. Sferic proporcionado por la Universidad de Stanford

<b>Resultados Aplicación Procedimiento de Ramachandran et al. a Sferics de la Universidad de Stanford</b>			
Nº de Sferics	Error Máximo	Error Mínimo	Error Medio
47	12,13%	7,02%	10,05%

Tabla 5.3. Errores obtenidos en la estimación de la distancia de los Sferics proporcionados por la Universidad de Stanford al aplicar el procedimiento de Ramachandran et al.

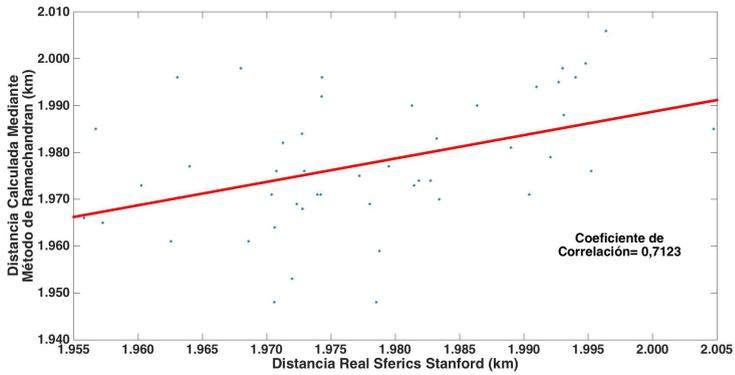


Figura 5.6. Correlación obtenida entre distancia real y distancia calculada mediante el procedimiento de Ramachandran et al. aplicado a los sferics proporcionados por la Universidad de Stanford.

### B) Resultados de Aplicación Procedimiento de Ramachandran et al. a los Sferics Obtenidos con el Sistema Detector Diseñado.

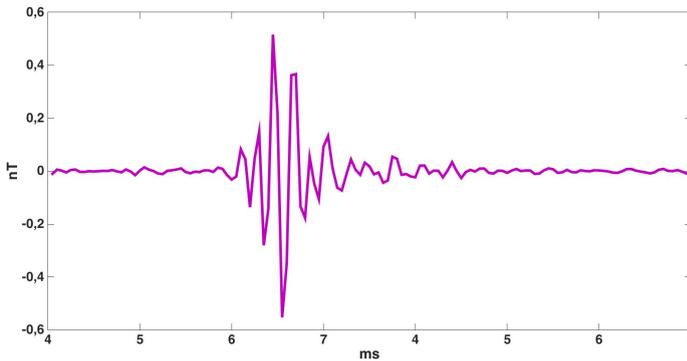


Figura 5.7. Sferic obtenido con el sistema detector diseñado

<b>Resultados Aplicación Procedimiento de Ramachandran et al. a Sferics Obtenidos con el Sistema Detector Diseñado</b>			
Nº de Sferics	Error Máximo	Error Mínimo	Error Medio
30	13,05%	9,23%	11,13%

Tabla 5.4. Errores obtenidos en la estimación de la distancia de los Sferics obtenidos por el sistema detector diseñado al aplicar el procedimiento de Ramachandran et al.

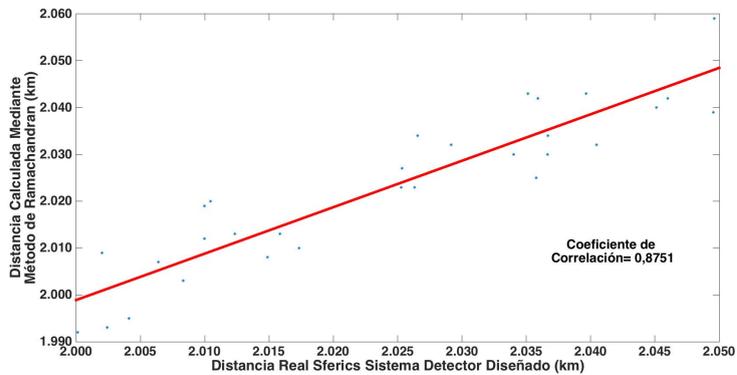


Figura 5.8. Correlación obtenida entre distancia real y distancia calculada mediante el procedimiento de Ramachandran et al. aplicado a los sferics obtenidos por el sistema detector diseñado

Mediante la aplicación de la técnica de *Ramachandran et al. [2007]* a los sferics reales, tanto los proporcionados por la Universidad de Stanford como los obtenidos a partir del sistema de medida diseñado,

se obtienen resultados similares, aunque al igual que al aplicar el método de *Nagano et al [2007]* la precisión obtenida es ligeramente inferior debido sobretodo al nivel de ruido de las señales disponibles.

En consecuencia, se propone un método alternativo de ubicación de la descarga basado en la pendiente de fase de la señal detectada.

## 5.2 Método de Localización de Descargas Basado en la Pendiente de Fase de la Señal.

Para poder hacer una comparativa de los diferentes métodos de localización de descargas con el nuevo método propuesto en esta tesis, basado en la pendiente de fase de la señal detectada, y dada la dificultad de obtener señales lo suficientemente nítidas y limpias, se procede a trabajar con sferics sintéticos [*Dowden et al., 2002*] dado que conocemos exactamente la localización de la descarga, para una vez comprobada la validez del método con los mismos, se proceda a su validación con datos reales.

En el presente caso se asume que el sistema formado por la superficie de la Tierra y la ionosfera se comporta como una guía de ondas formada por planos paralelos, asemejándose la propagación de un sferic a la de un modo *TM*. La dispersión experimentada por el modo viene definida por la ecuación

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)/c^2 \quad (5.1)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia de corte, siendo de 1,67 kHz para el modo de primer orden. La velocidad de fase es

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_0^2/\omega^2}} \quad (5.2)$$

Se generan sferics sintéticos en la banda  $(\omega_0 - 24)kHz$  de la forma

$$\begin{aligned}
 f(r, t, \omega) &= \sum_{i=1}^{100} A(\omega_i) \cos \left[ \omega_i \left( t - \frac{r}{v_p} \right) \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^{100} A(\omega_i) \cos \left\{ \omega_i \left[ t - \frac{r}{c} \sqrt{1 - \omega_0^2 / \omega_i^2} \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

donde  $A(\omega)$  es una función peso que aproxima el espectro de potencia de los sferics

$$A(\omega_i) = \cos^2 \left( \pi \frac{\omega - \omega_a}{2\omega_r} \right)
 \tag{5.4}$$

donde  $\omega_a$  es la frecuencia a la cual la densidad espectral manifiesta un máximo a unos  $12 kHz$ , y  $\omega_r$  es el ancho de banda el cual se ha fijado a  $14 kHz$ .

La expresión (5.3) representa un sferic sintético. Si consideramos una suma de 100 armónicos para diferentes valores de  $r$ ,  $r = 0 km, 1.000 km, 3.000 km$ , etc, se puede observar cómo se va ensanchando el pulso a causa de la dispersión sufrida (figura 5.9) debido a la distinta velocidad de fase de cada armónico.

Dado que la corriente asociada a una descarga típica alcanza su valor máximo a los  $2 \mu s$ , y decae hasta la mitad de ese valor aproximadamente a los  $40 \mu s$  [Uman, 1983], esto provoca como resultado un pulso de corta duración de  $\sim 100 \mu s$ , abarcando un amplio ancho de banda que se extiende desde *ULF* hasta frecuencias ópticas.

La potencia en la banda *VLF* del primer impacto de la descarga proviene de los  $2 km$  más bajos [Lee, 1989], lo que representa una pe-

queña fracción de la longitud de onda de la banda *VLF* (10 – 100) *km*. Por consiguiente la fuente de radiación *VLF* tiene su origen en un elemento de corriente de pequeña longitud .

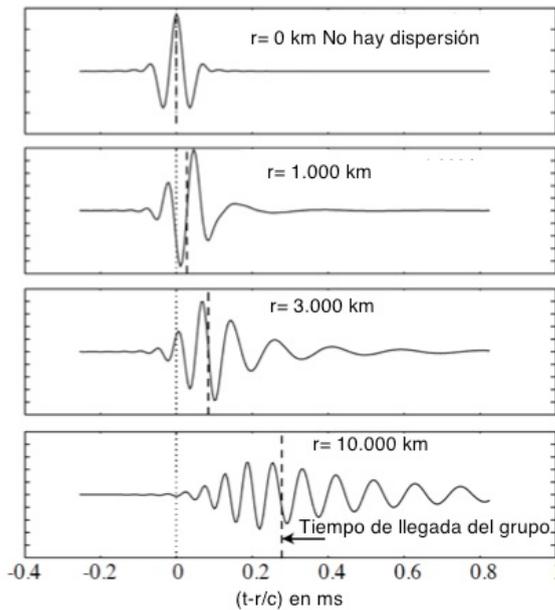


Figura 5.9. Ensanchamiento Sferic debido a dispersión Adap. Dowden et al., 2012].

Así, se puede hacer la suposición de que la fase de todos los armónicos *VLF* de la corriente es idéntica, siendo la fase inicial  $\phi_0$  la misma para todas los armónicos *VLF* del campo eléctrico radiado.

Dado que la componente vertical de la corriente de la descarga es la predominante en la propagación de los sferics *VLF* a través de la guía de ondas formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera [Lee, 1989], y el elemento de corriente es prácticamente vertical en

los últimos centenares de metros más cercanos a la superficie de la Tierra [Kridler et al., 1976], el valor de  $\phi_0$  en la ecuación (5.2) debería de ser 0 o  $\pi$ , pero tal y como se desprende de la ecuación (5.3) realmente tal circunstancia no es significativa.

Así, a una distancia  $r$  del punto de la descarga en un instante  $t$ , el campo de la onda se puede expresar como

$$F(r, t, \omega) = \sum A(\omega) \cos(\phi(\omega)) \quad (5.5)$$

donde, para cualquier componente de Fourier de la frecuencia  $\omega$  se cumple que

$$\phi(\omega) = \omega t - k(\omega)r + \phi_0 \quad (5.6)$$

siendo el vector de onda  $k$  dependiente de la frecuencia, mientras que la fase  $\phi_0$  no lo es. Realizando la derivada de  $\phi$  respecto de la frecuencia se tiene que

$$\frac{d\phi}{d\omega} = t - r \frac{dk}{d\omega} = t - \frac{r}{v_g(\omega)} \quad (5.7)$$

siendo  $v_g(\omega)$  la velocidad de grupo dependiente de la frecuencia.

A partir de la definición de velocidad de grupo, el instante temporal  $t_g(\omega)$ , empleado por el grupo de ondas en desplazarse la distancia  $r$  desde el punto de la descarga al receptor es  $\frac{r}{v_g(\omega)}$ . Considerando frecuencias superiores a las de corte de los modos dominantes, la dependencia con la frecuencia de  $t_g(\omega)$  no es muy acusada.

A partir de la ecuación (5.7), se puede observar que  $d\phi/d\omega = 0$  cuando  $t = t_g(\omega)$ , lo cual significa que el tiempo de desplazamiento del grupo a frecuencia  $\omega$ ,  $t_g(\omega)$  se puede obtener mediante ensayo-error. Sin embargo, resulta de mayor simplicidad medir  $d\phi/d\omega$  en un instante conocido  $t_0$ . Por consiguiente

$$t_g(\omega) = t_0 - \frac{d\phi}{d\omega} \quad (5.8)$$

donde  $t_0$  queda determinado por el sistema de timing del receptor.

En la figura 5.9, se observa la forma de onda del pulso a varios valores de  $r$ . Para  $r = 0$ , el pulso es simétrico y no presenta dispersión, dado que aún no se ha desplazado a lo largo de la guía de ondas. Se ha definido  $t = 0$  como el instante donde  $d\phi/d\omega = 0$ , es decir donde todas las frecuencias que componen la señal se encuentran en fase ( $\phi_0 = 0$ ) en este caso.

La línea vertical de figura 5.9 indica  $t - \frac{r}{c} = 0$ , o el instante donde se encontraría el pulso en el caso de que no se hubiera deformado debido a la naturaleza dispersiva de la guía de ondas.

Únicamente para propagaciones carentes de dispersión, tal y como ocurre con el modo **TEM**, el pulso se propaga conservando su forma original, cumpliéndose que en cualquier instante temporal y a cualquier  $r$ ,  $d\phi/d\omega$  no depende de la frecuencia y se anula para  $r = ct$ , donde todas las componentes frecuenciales del pulso se encuentran en fase.

En el caso de que la propagación tenga carácter dispersivo, como en el caso que nos ocupa, la velocidad de fase depende de la frecuencia y por consiguiente, el número de onda  $k$  no es proporcional a la mis-

ma. En consecuencia,  $dk/d\omega$  es dependiente de la frecuencia y, de la ecuación (5.7) se observa que lo mismo ocurre con  $d\phi/d\omega$ .

Un pulso de amplio espectro conformado por una superposición de señales, las cuales se encuentran en fase en  $r = 0, t = 0$ , propagándose a través de un medio dispersivo, es imposible que vuelvan a encontrarse en fase en cualquier otro instante.

Exceptuando el modo **TEM**, el cual no experimenta dispersión, para cualquier modo propagándose en la guía de ondas formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera, a partir de las ecuaciones (5.7) y (5.8) se tiene que

$$\frac{d\phi}{d\omega} = t - \frac{r}{c} \sqrt{1 - \omega_0^2/\omega^2} \quad (5.9)$$

Y teniendo en consideración que  $t = \frac{r}{c}$ , se obtiene

$$\left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_c = \frac{r}{c} \left( 1 - 1/\sqrt{1 - \omega_0^2/\omega^2} \right) \quad (5.10)$$

La realización de un ajuste de la pendiente de la fase permite obtener por un lado la distancia  $r$  a la cual se ha originado la descarga y por otro la altura de la ionosfera  $h$  a la cual tiene lugar la reflexión del tren de ondas, dado que la frecuencia de corte es  $c/2h$ .

Por consiguiente, a partir de la ecuación (5.10) podemos obtener una expresión para obtener la distancia a la cual se ha originado la descarga.

$$r = \frac{d\phi}{d\omega} c \left/ \left( 1 - 1/\sqrt{1 - \omega_0^2/\omega^2} \right) \right. \quad (5.11)$$

No obstante, dado que el instante temporal de detección de la primera muestra del sferic va a depender del sistema de medida, el mismo se encuentra afectado tanto de errores sistemáticos como aleatorios  $\gamma$ , por consiguiente la ecuación (5.11) se puede reescribir para considerar tal circunstancia.

$$r = \frac{d\phi}{d\omega} c / \left( \gamma - 1 / \sqrt{1 - \omega_0^2 / \omega^2} \right) \quad (5.12)$$

Una vez se ha detectado el sferic, para obtener el ángulo de llegada, se hace uso de la dirección de llegada del campo magnético del sferic en el dominio de Fourier. Se hace una media pesada del arcotangente del cociente del voltaje obtenido por las antenas E-O y N-S sobre el rango de frecuencias de estudio. [Wood, 2004]

$$\theta = \frac{\int_{f_1}^{f_2} \tan^{-1} \left( \frac{|B_{E-O}(f)|}{|B_{N-S}(f)|} \right) B_{total}(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} B_{total}(f) df} \quad (5.13)$$

donde  $B_{E-O}(f)$  y  $B_{N-S}(f)$  son las transformadas de Fourier de las señales temporales detectadas por las antenas E-O y N-S, y

$$B_{total}(f) = \sqrt{B_{E-O}(f)^2 + B_{N-S}(f)^2} \quad (5.14)$$

## 5.3 Sistemas Detectores de Sferics

### 5.3.1 Sistema Detector de Stanford

Los sferics proporcionados por Steven Cummer se detectan mediante los receptores de radio *ELF/VLF* de la Universidad de Stanford. El diagrama de bloques es el mostrado en la figura 5.10. Cada sistema

receptor consiste de dos antenas de lazo perpendiculares, un preamplificador, un receptor de línea, un sistema de determinación temporal GPS y un conversor A/D para almacenar las señales en soporte digital. El receptor se encuentra ubicado en una atmósfera de bajo ruido y cuenta con un amplio rango dinámico capaz de detectar sferics generados tanto a una distancia cercana como lejana (~12.000 km), dado que si el rango dinámico es muy bajo, la amplitud de los sferics cercanos saturaría la electrónica del receptor y distorsionaría la señal recibida. Asimismo, el nivel de ruido es considerablemente alto, los sferics con una amplitud de señal baja generados a una distancia lejana del detector quedarían enmascarados por el ruido. Además, dado que el contenido frecuencial de los sferics abarca las bandas *ELF/VLF*, se desea que la respuesta en frecuencia sea plana en la zona de interés.

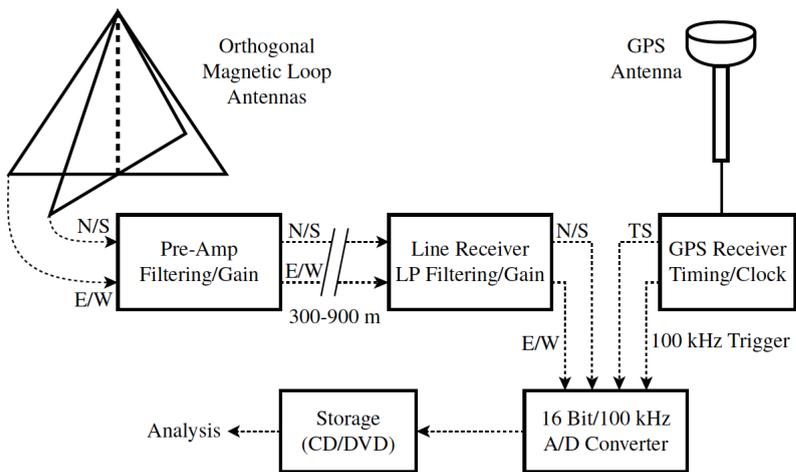


Figura 5.10 Sistema receptor de la Universidad de Stanford

Las antenas de lazo utilizadas en la Universidad de Stanford consisten en  $N$  vueltas de cable conductor con un núcleo de aire, donde  $N = 1$  a  $6$ . Las antenas son ortogonales y orientadas según las direcciones N/S y E/O. La antena N/S se encuentra alineada con el campo geomagnético terrestre, por consiguiente presenta un offset respecto del Norte geográfico debido al ángulo local de declinación magnética de la Tierra. La antena ubicada en la Estación Palmer, Antártica, se encuentra conectada a un preamplificador el cual presenta una sensibilidad ( $S_0 = \sim 1 \times 10^{-8} \text{ VHz}^{-1/2} \text{ m}^{-1}$  a  $10 \text{ kHz}$ ). Dichas antenas junto al preamplificador presentan una sensibilidad mucho más elevada que los niveles de ruido atmosférico.

El preamplificador y el receptor de línea acondiciona el voltaje inducido en los terminales de la antena para su posterior filtrado y amplificado para pasar al conversor A/D. Las antenas se encuentran separadas a una distancia de  $\sim 600 \text{ m}$  de fuentes de ruido electromagnético, y el preamplificador se encuentra situado junto a las antenas, de tal modo que tiene acceso directo a los bornes de la antena.

El preamplificador se alimenta mediante un cable de  $\sim 600 \text{ m}$  que realiza, además, la función de portador de la señal amplificada al receptor de línea.

El preamplificador contiene niveles de ganancia y un filtro paso-alto para evitar que el zumbido de red sature los amplificadores. Además de amplificar y filtrar la señal, el preamplificador está compuesto por un transformador de adaptador de entrada, un amplificador diferencial y un driver de línea. El circuito de adaptación de entrada permite una respuesta frecuencial plana y un alto grado de sensibilidad a lo largo del ancho de banda de interés mediante una compensación de la ganancia de las antenas la cual es dependiente de la frecuencia.

El driver de línea, el cual se alimenta mediante una fuente DC desde el receptor de línea, permite que las antenas se puedan situar a una distancia de  $\sim 600$  m de la fuente de alimentación AC del receptor de línea.

Además de alimentar el preamplificador, el driver de línea filtra y amplifica la señal *VLf*. El filtro pasa-bajo presenta un punto de  $-3$  dB a una frecuencia de  $\sim 22$  kHz. Dicho sistema de filtrado está basado en el hecho que, históricamente, se digitalizaba la señal haciendo uso de técnicas de grabación de equipo de audio, con una frecuencia de muestreo de  $\sim 44,1$  kHz. La respuesta en frecuencia del receptor *VLf* situado en la Estación Palmer, Antártica es la mostrada en la figura 5.11.

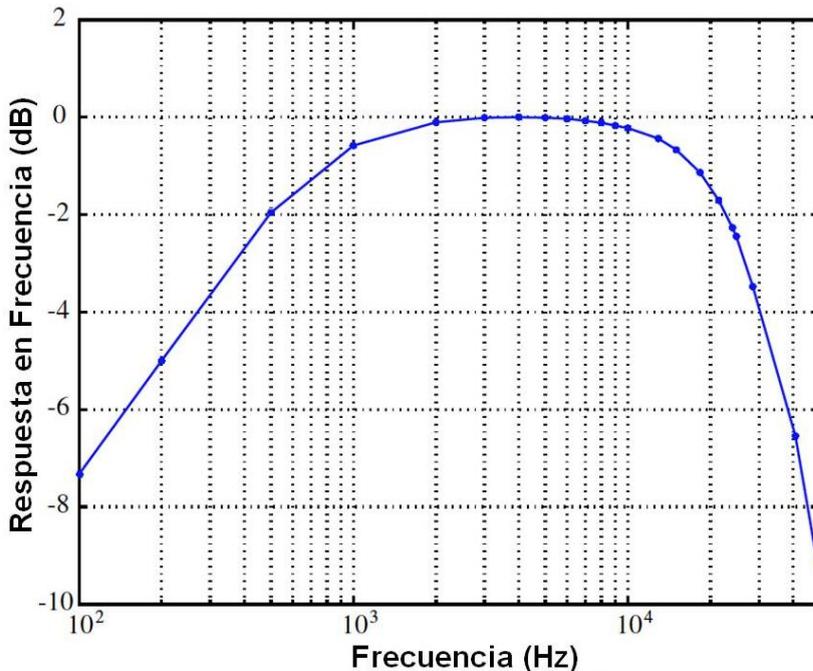


Figura 5.11. Respuesta en frecuencia del receptor en Palmer Station, Antártica.

Una vez la señal *VLF* se ha acondicionado mediante el preamplificador y el receptor de línea, pasa a digitalizarse por el conversor A/D y a almacenarse en un soporte digital. Los conversores utilizados son tarjetas de adquisición de datos de National Instruments que permiten muestrear los canales N/S y E/O a  $100\text{ kS/s}$  con una precisión de  $16\text{ bits}$  proporcionando un ancho de banda de  $50\text{ kHz}$  y  $\sim 100\text{ dB}$  de rango dinámico.

Para prevenir que se recorte la señal en el conversor A/D, la ganancia del preamplificador y del receptor de línea se han ajustado de tal manera que el voltaje de salida del receptor de línea se encuentra dentro del rango de  $\pm 5\text{ V}$ .

Para registrar con precisión el instante temporal en el cual se detecta la señal, el muestreador se encuentra controlado por un reloj GPS. El reloj GPS tiene una salida de  $100\text{ kpps}$  utilizada como disparador de muestreo, y un disparador de comienzo de toma de muestras de  $1\text{ pps}$  con una precisión de  $200\text{ ns}$ . De esta manera se pueden correlacionar temporalmente señales recibidas en otros receptores de la red.

Las tarjetas A/D utilizadas no son capaces de muestrear ambos canales simultáneamente a  $100\text{ kS/s}$ , lo que hacen es realizar los dos canales juntos a  $200\text{ kS/s}$ . Es decir, el canal N/S se muestrea seguido del E/O y así sucesivamente, tomando  $100.000$  muestras por segundo.

Finalmente, los datos se graban en una cinta magnética de video BETAMAX haciendo uso de un codificador Sony PCM 601-ESD.

Los sferics detectados se comparan con los obtenidos por la red NLDN (National Lightning detection Network) , consistente en un

sistema de ubicación de descargas multiestación con 114 estaciones receptoras situadas en diferentes regiones sobre la superficie continental de EE.UU.. La información obtenida de cada estación se combina con la de otras estaciones para obtener con precisión la localización de emisión del sferic. Las ubicaciones de las descargas proporcionadas por la red NLDN presentan una precisión  $\sim 250 m$ , siendo la eficiencia de detección de tormentas superior al 99 %. Los sensores de la red utilizan los métodos basados en la dirección de llegada del campo magnético y el tiempo de llegada para proporcionar múltiples identificadores de cada descarga, como el instante temporal, la ubicación, la polaridad, amplitud y multiplicidad.

### 5.3.2 Sistema Detector Diseñado

Por otra parte, también se hace uso en las simulaciones, de sferics proporcionados por el sistema de medida diseñado específicamente para esta tesis. El esquema del mismo es el representado en la figura 5.12.

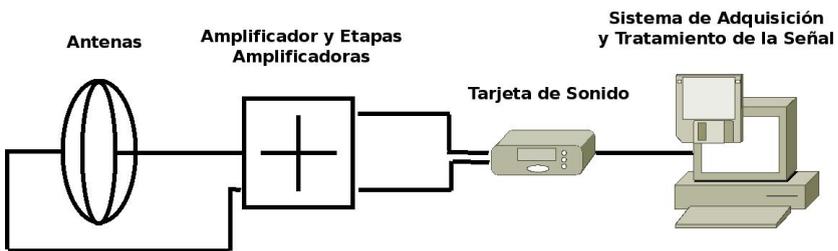


Figura 5.12. Esquema del sistema detector diseñado.

El hardware consiste fundamentalmente en un sistema de antenas receptoras mediante el cual se detectan las señales *VLF*, un amplifi-

cador *VL*F de banda ancha que amplifica la señal proporcionada por la antena para un posterior procesado, y un sistema de almacenamiento y tratamiento compuesto por una tarjeta de sonido y un PC

La antena utilizada es de lazo de banda ancha de alto rendimiento, presentando una buena adaptación con el preamplificador así como un adecuado dimensionamiento de vueltas para superar tanto el ruido térmico intrínseco como el ruido de entrada del amplificador operacional.

El tamaño, el número de vueltas y la sección de cable de cobre son los elementos de la antena que determinan el resultado final.

Hay muchos parámetros que contribuyen a un buen funcionamiento del sistema y se encuentran estrechamente relacionados unos con otros. Por ejemplo, al aumentar el número de vueltas, aumentamos el área de captura, recibiendo mayor intensidad de la señal, pero al mismo tiempo disminuimos la frecuencia de resonancia, aumentando así la impedancia del sistema. Si la impedancia crece, el ruido aumenta inducido por el ruido de corriente del amplificador operacional.

La impedancia del lazo es, de hecho, otro parámetro muy importante. Además del ruido térmico generado por la resistencia del cable de cobre, también se ha de tener en consideración el ruido de entrada a los amplificadores operacionales.

### **5.3.2.1 Diseño de la Antena y Valores Eléctricos**

Se desea obtener el mejor valor de compromiso entre el tamaño de la antena de lazo y la sensibilidad de la misma. Para determinar el número de vueltas en función del voltaje en los terminales del lazo en un medio conocido es

$$E[V] = \mu_0 N A \omega H \quad (5.15)$$

Donde  $N$  es el número de vueltas de la antena de lazo,  $A$  es el área de la antena en  $m^2$ ,  $f$  es la frecuencia en  $Hz$  y  $H$  el campo magnético en  $A/m$ .

Dado que la intención es diseñar un sistema de recepción portable con una buena sensibilidad, el área de la antena se establece en  $0,39 m^2$ . La sensibilidad de la antena de lazo queda determinada por el número de vueltas del cable de cobre, así como de su sección, utilizado para construir el área de recepción de la antena. En este sentido, el límite de la sensibilidad queda representado únicamente por el ruido térmico del lazo.

La impedancia del lazo, y por consiguiente el número de vueltas, afectan al ruido de la entrada del amplificador, repercutiendo en la sensibilidad final del detector.

El tamaño y la sección del cobre que forma del lazo se decide de acuerdo con las secciones existentes en el mercado, es por ello que se realizan más o menos vueltas dependiendo del mismo para emplear la cantidad de cobre deseada. Se ha de tener en cuenta que un número de vueltas reducido implica un menor voltaje inducido, menor impedancia y menor ruido térmico así como mayor frecuencia de resonancia. Por el contrario, un mayor número de vueltas lleva asociado mayor voltaje inducido en los terminales del lazo, mayor resistencia, mayor ruido térmico y menor frecuencia de resonancia.

Los parámetros seleccionados para la construcción de la antena son:

- Tipo de lazo: circular, ligeramente ovalado, dado que es más fácil de realizar y se puede encontrar en soportes de material no fe-

romagnético que a su vez sirven como blindaje para el campo eléctrico, el cual no es de interés. (Por ejemplo las llantas de aluminio comerciales de bicicleta).

- Diámetro: 70 *cm*, presenta un área suficiente para detectar señales siendo compatible con la portabilidad.
- Número de vueltas: 275, las suficientes para proporcionar una buena sensibilidad manteniendo un valor de la impedancia adecuada y un valor de resonancia por encima de los 20 *kH*.
- Cable: 648 *m* de cable esmaltado de cobre de 0.5 *mm* de diámetro, siendo la resistencia estimada de 59  $\Omega$ , lo que implica un ruido térmico relativamente bajo y una alta sensibilidad.

Con un óhmetro con pinza shunt a 4 hilos se obtiene una resistencia del devanado de 60 $\Omega$  medida a 20 °C. A partir de los datos de la resistencia de la antena, se obtiene el valor del ruido térmico basal. Ruido térmico=  $4\sqrt{(60/1000)} nV/\sqrt{Hz} = 0,98 nV/\sqrt{Hz}$  a 20 °C. Mediante el medidor RLC se obtienen los siguientes valores a una frecuencia de 100 *Hz*:

- Inductancia: 127 *mH*.
- Capacidad parásita: 665 *pF*.
- Capacidad entre el devanado y el soporte de aluminio: 830 *pF*

Al igual que en el sistema receptor de Stanford, se construyen dos antenas, una orientada N-S y otra, ortogonalmente situada, E-O. Gracias al pequeño ovalamiento de las circunferencias de los dos lazos, se puede meter uno dentro del otro formando los 90°.

Se ha de tener presente que es materialmente imposible obtener valores idénticos de inductancia para las dos antenas, pese a que su diseño y elaboración han sido análogos. No obstante, en la práctica, esto no supone ningún tipo de problema.

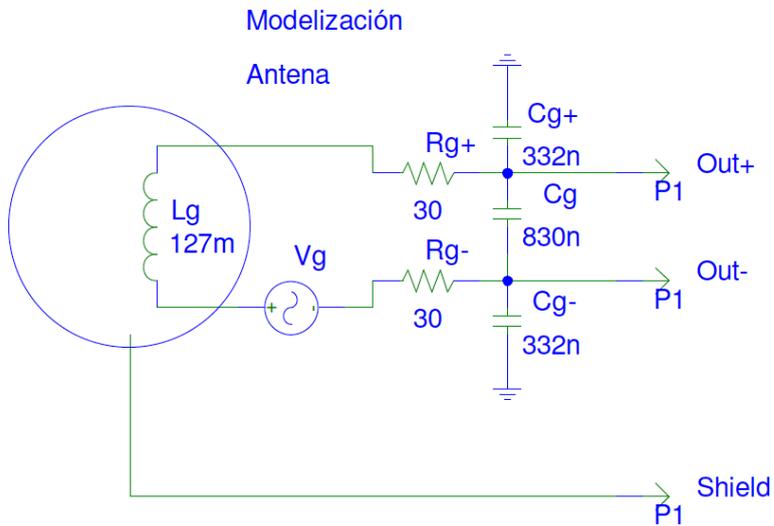


Figura 5.13. Circuito equivalente de la antena diseñada.

### 5.3.2.2 Evaluación del Ruido

La elección del amplificador operacional adecuado, lejos de ser trivial, representa un aspecto crucial del detector de descargas dado que afecta a la sensibilidad del mismo. El voltaje y la corriente de ruido a la entrada es diferente para cada amplificador operacional.

Además, dichos valores dependen de la frecuencia de trabajo, siendo el ruido total a la entrada para cada frecuencia función del ruido de

voltaje derivado del ruido térmico de la resistencia del lazo, el ruido de voltaje generado por el amplificador operacional y el ruido de voltaje debido al ruido de intensidad del amplificador operacional que circula por la impedancia del lazo.

Después de realizar un estudio detallado de las hojas de características los diferentes amplificadores operacionales disponibles en el mercado, el modelo seleccionado es el AD797.

El circuito preamplificador mostrado en la figura 5.14 presenta una configuración diferencial balanceada, lo cual proporciona diversas ventajas para la antena de lazo diseñada. Presenta un alto modo de rechazo común de las señales, derivando en la amplificación de las señales magnéticas detectadas por la antena de lazo, y el rechazo de señales no deseadas de otra naturaleza como aquellas relacionadas con capacidades parásitas. En definitiva, la antena es muy sensible al campo magnético pero no resulta afectada en exceso por el campo eléctrico y otras perturbaciones como las asociadas entre otras a fuentes de alimentación.

### 5.3.2.3 Circuito Preamplificador

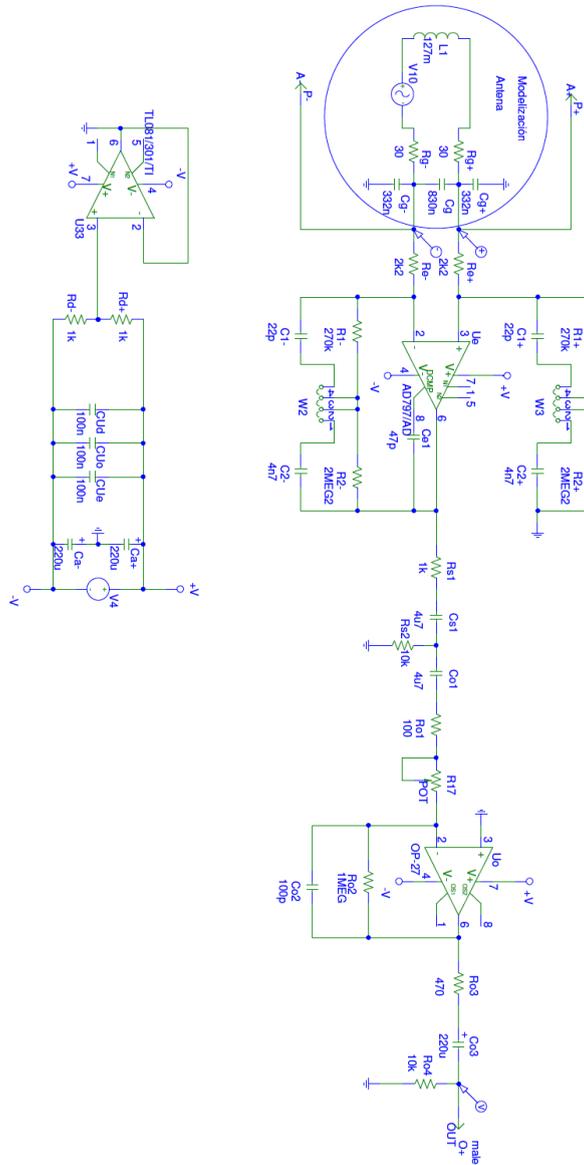


Figura 5.14. Esquema eléctrico del amplificador.

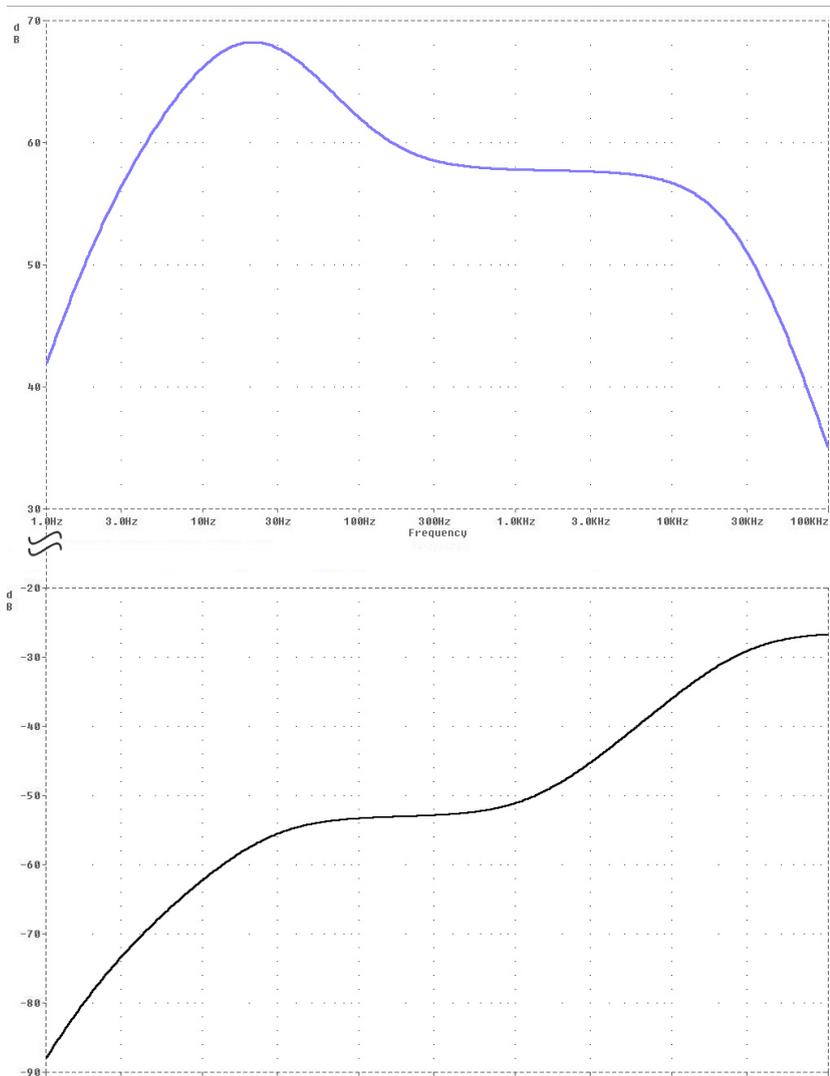


Figura 5.15. Curva de ganancia del sistema detector y rechazo en modo común.

La figura 5.15. muestra cómo las señales recibidas se amplifican en voltaje por la antena de lazo (en lila), y cómo aquellas capturadas en modo común (en negro) son rechazadas, siendo la ratio entre la se-

ñal rechazada y señal recibida superior a  $70 \text{ dB}$  en el rango comprendido entre  $(1 - 20.000) \text{ Hz}$ .

La respuesta final en frecuencia del detector respecto del campo magnético incidente es la mostrada en la figura 5.16. En ella se puede observar los dos triplos de respuesta, tanto la respuesta plana como la compensada. Por una parte, la respuesta es plana en el intervalo  $(1 - 20.000) \text{ Hz}$  con un margen de  $\pm 3 \text{ dB}$ , lo que significa que se puede hacer uso de la antena de lazo como lazo de medida, conociendo el factor de antena, pudiéndose calcular el campo magnético en  $pT$  midiendo el nivel de salida en  $mV$  con un multímetro.

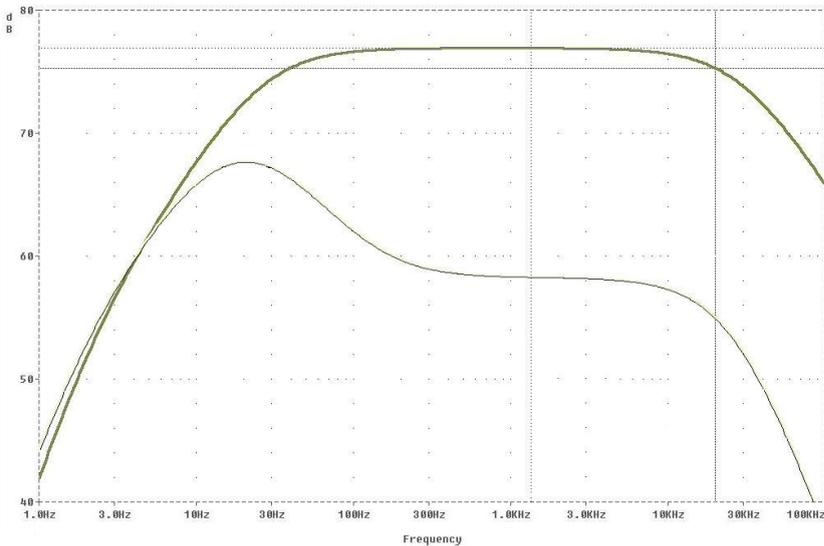


Figura 5.16. Curva de ganancia del sistema detector. Respuesta plana y compensada.

Por otra parte, la adición de un filtro compensador, induce una respuesta en frecuencia que compensa la ganancia en función de los

niveles esperados de la señal, de acuerdo con los gráficos de Maxwell/Stone [Maxwell y Stone, 1963]. En el intervalo (1 – 20.000) Hz el rango dinámico de las señales es normalmente superior a 30 dB, mientras que con el filtro de compensación el rango es de unos 10 dB.

Siguiendo esta recomendación se emplea un filtro compensador con dos trampas centradas en 15 Hz y 27 kHz. Además, la utilización del filtro compensador es de utilidad para atenuar los armónicos más potentes hacia la parte alta, y el filtrado del zumbido de red de 50 Hz, hacia la parte baja del espectro frecuencial. Dado que el filtro compensador se encuentra en la primera etapa de ganancia, las señales no deseadas son atenuadas antes de ser amplificadas, resultando en la no saturación del circuito de detección incluso en presencia de señales de ruido cercanas. La utilización del filtro compensador reduce la sensibilidad del detector a bajas frecuencias a costa de poder utilizarlo en entornos de ruido severo.

#### 5.3.2.4 Caracterización

La caracterización del sistema detector de descargas asociadas al rayo se ha realizado en la cámara anecoica de la Universitat de València. Para poder llevar a cabo la misma, se hace uso de una antena transmisora de lazo cuadrada, de 45 cm de lado, formada por 40 vueltas de cable de cobre de 0,4 mm de diámetro. En serie con la antena, se añade una resistencia de 1.000  $\Omega$  que hace las funciones de shunt, obteniendo por una parte el voltaje en un osciloscopio y por consiguiente conociendo la corriente que circula por el lazo para poder calcular el campo magnético generado, y por otra proporciona un factor  $Q$  bastante bajo pero prácticamente constante, adecuado para mantener constante la corriente en el rango de frecuencias empleado.

La antena receptora y la emisora se sitúan separadas una distancia de 85 cm dentro de la cámara anecoica, y separadas del generador de funciones, el cual se sitúa fuera de la misma. La antena de lazo objeto de caracterización se alinea con la antena emisora. Para recibir la señal test, se hace uso de una tarjeta de sonido externa. La antena transmisora se alimenta mediante un generador de funciones ajustando la amplitud hasta obtener una diferencia de potencial de 100 mV en la resistencia de shunt de 1.000  $\Omega$ , lo que indica que circulan 0.1 mA por el lazo. A partir de esa intensidad de corriente, haciendo uso de la fórmula de Biot-Savart, se calcula que el campo generado donde se encuentra la antena receptora es de 214,3 pT.

A partir de esa configuración, y variando la frecuencia del generador de funciones, se obtienen diferentes ficheros, muestreados a 48.000 S/s., con la respuesta tanto del filtro de respuesta plana como con el filtro compensado, tal y como muestra la figura 5.17.

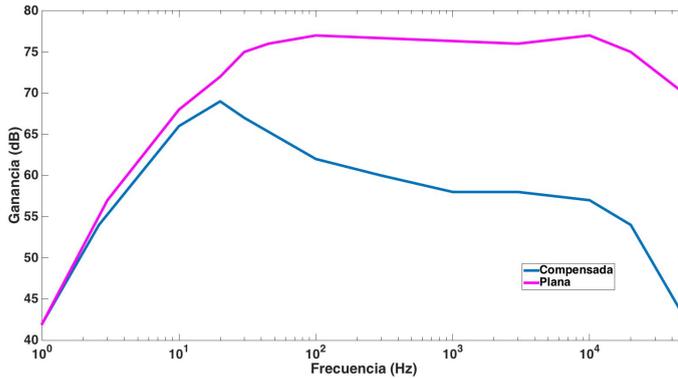


Figura 5.17. Curvas de sensibilidad del detector de descargas.

Las dos curvas de sensibilidad obtenidas indican que donde sea posible se ha de hacer uso del filtro de respuesta plana, dado que está dotado de una sensibilidad mayor.

Los sferics detectados se comparan con los obtenidos por la red WWLLN de detección descargas a nivel mundial, de la cual la Universitat de València forma parte. Actualmente, la red se encuentra conformada por 40 sensores. Cada localización de una descarga requiere el tiempo o momento de llegada del pulso del sferic de al menos de 5 sensores de la red WWLLN. Estos sensores pueden estar a varios miles de kilómetros de distancia de la descarga. Se ha de hacer notar que los sensores muy cercanos a la descarga son casi inútiles a la hora de usarlos para su localización.

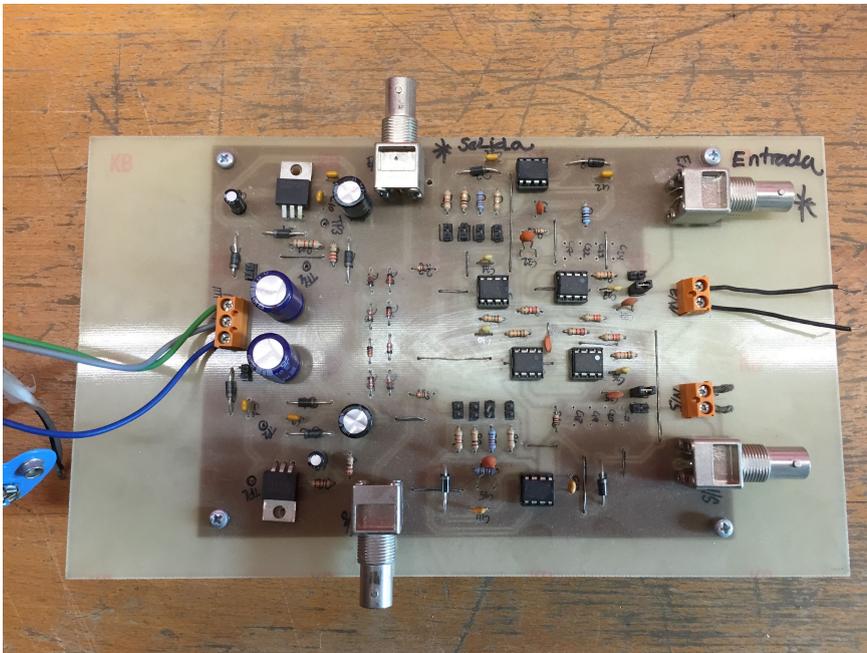


Figura 5.18. detector de sferics.

La agrupación geográfica de los sensores es importante: la localización de la descarga se establece más exactamente cuando los sensores están lejos de ella que por aquellos que están más cerca. Un espaciamiento uniforme de sensores alrededor de la tierra es claramente el ideal.

Puesto que la tierra es redonda, no hay bordes: cada descarga está rodeada por sensores, pero no necesariamente por los sensores que lo detectan. El grado de precisión de detección de la red es de aproximadamente de entre el 5% y el 10% para descargas superiores a 45 kA

#### **5.4 Aplicación del Método de Localización Basado en la Pendiente de Fase a las Medidas Disponibles**

Para comprobar la validez del método de localización de descargas propuesto basado en la pendiente de fase, se aplicará, en primer lugar, el procedimiento a los sferics generados sintéticamente (figura 5.19), dado que se encuentran libres de cualquier perturbación y se conoce exactamente el lugar de la descarga. Para ello, se generan sferics a varias distancias  $r$  y a partir de la aplicación del método se obtiene la precisión del mismo.

Posteriormente, y con el objeto de validar la técnica propuesta se realiza el mismo procedimiento con los sferics reales, tanto los proporcionados por la Universidad de Stanford como a los obtenidos con el sistema diseñado.

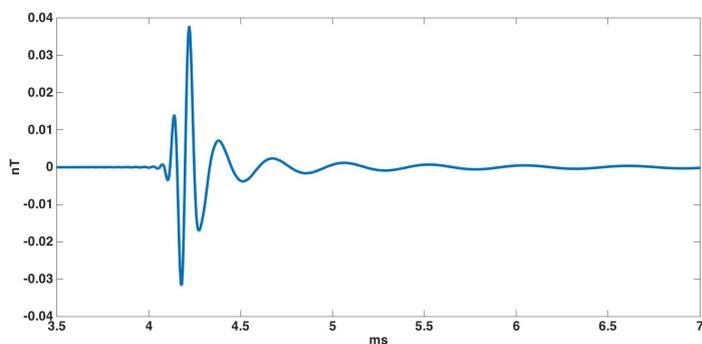


Figura 5.19. Sferic generado sintéticamente

<b>Resultados Aplicación Procedimiento Basado en la Pendiente de la Fase a Sferics Generados Sintéticamente</b>				
Tipo Datos	Nº de Sferics	Error Máximo	Error Mínimo	Error Medio
Sintéticos	10	0,35%	0,02%	0,20%
Stanford	47	75,79%	37,89%	43,88%
Dector	30	1,8%	0,50%	1,5 %

Tabla 5.5. Errores obtenidos en la estimación de la distancia  $d$  con los sferics disponibles al aplicar el procedimiento de basado en la Pendiente de la Fase.

De los datos obtenidos al aplicar el método basado en la pendiente de fase a los sferics sintéticos son muy buenos, dado que están limpios de ruido y se sabe exactamente donde se han generado. Res-

pecto a los sferics reales, se observa que el resultado obtenido con los sferics detectados con el sistema diseñado es excelente, presentando un error del 1,5%, mientras que el resultado obtenidos con los sferics de la Universidad de Stanford, se obtiene un error medio aproximado del 44%, siendo el coeficiente de correlación del ajuste por mínimos cuadrados muy cercano a la unidad, lo que hace suponer que podría existir un desplazamiento de los datos debido a algún tipo de error sistemático asociado al sistema de detección de los datos.

Es por ello que a partir de los datos obtenidos con la regresión obtenida se procede a hacer una corrección estadística de los mismos, obteniendo para el conjunto de datos proporcionado por la Universidad de Stanford un error medio cercano al 1%, siendo congruente con el resultado alcanzado con los sferics proporcionados por el sistema detector diseñado.

<b>Resultados Aplicación Procedimiento Basado en la Pendiente de la Fase a Sferics con Corrección Estadística</b>				
CONJUNTO DATOS	Nº de Sferics	Error Máximo	Error Mínimo	Error Medio
STANFORD	47	1.9%	0,95%	1,1%

Tabla 5.6. Errores obtenidos en la estimación de la distancia de Sferics reales al aplicar el procedimiento de basado en la Pendiente de la Fase con corrección estadística.

El procedimiento de corrección contempla el uso de todos los datos disponibles, pudiéndose calibrar el procedimiento para conseguir un alto grado de precisión. Se ha de comentar que dicha corrección se ha tenido en consideración al aplicar a los sferics de la Universidad de Stanford las técnicas de *Nagano et al.[2007]* y de *Ramachandran et al. [2007]*.

En el caso de los sferics reales, dado que los mismos se propagan a través de un medio dispersivo, no es trivial establecer un tiempo de detección exacto debido a que el sferic detectado está compuesto por un conjunto de señales viajando cada una con su velocidad de fase. Es por ello que el instante temporal de detección establecido para la señal ha de ser el instante de llegada del grupo,  $t_g$ , [*Dowden et al., 2002*] y va a depender significativamente del sistema de detección utilizado. Es complicado conocer con exactitud la caracterización de dichos sistemas de medida por lo que respecta a la respuesta en fase y amplitud de la señal, por lo cual será constitutivo de un error sistemático,  $\gamma$  en la ecuación (5.12).

Si se pudiera caracterizar completamente las condiciones bajo las cuales el sistema detector obtiene las medidas, sería innecesaria la corrección estadística, como es el caso del detector diseñado, pero en el sistema de medida, influye en un grado considerable las perturbaciones del entorno. La caracterización se debería de realizar en cada ubicación y para cada sistema de medida. Dada la complejidad de tal procedimiento, es más viable hacer un ajuste estadístico para un conjunto de datos reales, el cual proporciona los parámetros de corrección de aplicación a todo el sistema de medida.

## **Capítulo 6. Conclusiones Finales**



## 6 Conclusiones Finales

Del estudio realizado al desarrollar la presente tesis doctoral se contemplan tres conceptos que proporcionan una amplia visión de un mismo fenómeno, la descarga electromagnética en la banda *VLf* asociada a un rayo y la propagación de la señal en un medio complejo como lo es la ionosfera.

En primer lugar se ha realizado un modelo numérico tridimensional en diferencias finitas en el dominio del tiempo de la guía formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera. Dicho modelo permite simular con cierto grado de precisión la propagación de sferics *VLf* asociados a una descarga. En dicha simulación se ha tenido en consideración la curvatura de la Tierra, el perfil de conductividad de la ionosfera y la anisotropía inducida por el campo magnético terrestre. Los resultados de la simulación permiten detectar variaciones y perturbaciones en los parámetros que definen la trayectoria de propagación de los sferics. Se ha validado el método propuesto con técnicas aplicadas por otros autores como es el efecto de rotación de Faraday y se ha comparado el resultado con el caso isótropo.

Por otra parte, en lo que atañe a la detección, y más concretamente respecto de las técnicas de geolocalización de descargas desde una única estación detectora, se ha realizado una revisión bibliográfica y se han puesto de manifiesto los escasos estudios existentes. Este tipo de técnicas hacen uso de métodos para obtener la distancia desde la descarga al detector, así como la dirección de llegada obtenida a partir del campo magnético de la señal detectada. Los métodos existentes, y descritos en el capítulo 4 del presente trabajo, se combinan con técnicas sofisticadas de localización basadas en redes conformadas por múltiples detectores. Ambas técnicas presentan pros y contras.

A partir de los métodos ya existentes, se ha realizado una comparación entre todas las técnicas existentes. Tal comparativa se ha realizado con simulaciones con medidas procedentes de otros investigadores y con medidas propias.

Se ha visto que la precisión de los resultados obtenidos (entre el 11% y el 21%), está influenciada por la limpieza de la señal respecto del ruido, y además dependen de unos pocos parámetros de la señal recibida muy susceptibles al ruido. Es por ello que se ha propuesto una nueva técnica que obtiene la distancia a partir de la pendiente de la fase de la señal, la cual se ha visto más robusta, la cual se ha descrito en el capítulo 5.

El método propuesto proporciona tanto con los sferics sintéticos como con los reales resultados con un error de alrededor del 1 % debido a que se hace uso de la fase de la onda y no de máximos bien definidos de la misma como en otros métodos.

Asimismo se ha contribuido a desarrollar un detector que mejora la calidad de la señal recibida minimizando los efectos del ruido.

En definitiva, en el presente trabajo:

- Se ha realizado un modelo numérico tridimensional en diferencias finitas en el dominio del tiempo de la guía formada por la superficie de la Tierra y la ionosfera para el estudio de señales en la banda *VL*F teniendo en consideración el perfil de conductividad de la ionosfera y la anisotropía inducida por el campo magnético terrestre.

- Se ha realizado un análisis de la señal generada en una descarga, dentro de la banda *VLf*, y se han comparado las diferentes técnicas de localización de sferics con un única estación.
- Se ha propuesto una técnica nueva basada en el cálculo de la pendiente de la fase que proporciona una precisión mayor que los métodos existentes.
- Se ha diseñado un sistema detector de sferics con una única estación y se han obtenido medidas en diferentes entornos.



## **Bibliografía**



[Baker y Martin, 1953] Baker, W.G and D.F. Martyn, Electric currents in the ionosphere, Phil. Trans. Roy. Soc. London, .A. 246, 281-320. 1953.

[Barr, 1971] Barr, R., The propagation of ELF and VLF radio waves beneath an inhomogeneous anisotropic ionosphere, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 33, 343-353, 1971.

[Berger et al., 1975] Berger, K., R. B. Anderson and H. Kroninger, Parameters of Lightning Flashes, Electra, 80, 23-37, 1975.

[Brooks, 1925] Brooks, C. E. P., The Distribution of Thunderstorms Over the Globe, Geophysical Memoirs, 3, No. 24, 147-164, 1925.

[Brundell, 1999] Brundell, J.B., Location of lightning and related phenomena using VLF/ELF raio techniques, Ph.D. thesis, University of Otago, Dunedin, New Zealand, 1999.

[Brundell et al., 2002] Brundell,J.B., C.J. Rodger, L.Dowden, Validation of Single-Station Lightning Location Technique, Radio Science, Vol 37, NO.4, 12-1,12-9, 2002.

[Budden, 1961] Budden, K. G., The Wave-Guide Mode Theory of Wave Propagation, Logos Press, London, 1961.

[Budden, 1962] Budden, K. G., The influence of the earth's magnetic field on radio propagation of wave-guide modes, Proceedings of the Royal Society A, 265, 538, 1962.

[Burke y Jones, 1992] Burke, C. P. and D. L. Jones, An experimental investigation on ELF attenuation rates in the Earth-ionosphere duct, Journal of Atmospherica and Terrestrial Physics, 54, p. 243, 1992.

[Burke y Jones, 1995] Burke, C. P. and D. L. Jones, Global radioloca-

tion in the lower ELF frequency band, *Journal of Geophysical Research*, 100, 26263-26271, 1995.

[Burton y Boardman, 1933] Burton, E. T. and E. M. Boardman, Audio-Frequency Atmospherics, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 21, 1476-1494, 1933.

[Chalmers, 1967] Chalmers, J. A., *Atmospheric Electricity*, Pergamon Press, Oxford, New York, 1967.

[Chapman, 1956] Chapman, The electrical conductivity of the ionosphere a review, *Nuovo Cimento*, 4, suppl. 1385 – 1412. 1956

[Chapman y Pierce, 1957] Chapman, F. W. and E. T. Pierce, Relations Between the Character of Atmospherics and Their Place of Origin, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 45, 804-806, 1957.

[Chrissan, 1998] Chrissan, Doug, *Statistical Analysis and Modeling of Low-Frequency Radio Noise and Improvement of Low-Frequency Communications*, PhD Thesis, Technical Report D179-1, Stanford University, 1998.

[Christian et al., 1999a] Christian, H. J., R. J. Blakeslee, D. J. Boccipio, W. L. Boeck, D. E. Buechler, K. T. Driscoll, S. J. Goodman, J. M. Hall, W. J. Koshak, D. M. Mach and M. F. Stewart, Global Frequency and Distribution of Lightning as Observed By the Optical Transient Detector (OTD), *Proceedings of the 11 th International Conference on Atmospheric Electricity*, Gunthersville, Alabama, 726-729, 1999.

[Christian et al., 1999b] Christian, H. J., R. J. Blakeslee, S. J. Goodman, D. A. Mach, M. F. Stewart, D. E. Buechler, W. J. Koshak, J. M. Hall, W. L. Boeck, K. T. Driscoll and D. J. Boccipio, *The Lightning*

Imaging Sensor, Proceedings of the 11 th International Conference on Atmospheric Electricity, Gunthersville, Alabama 746-749, 1999.

[Christian et al., 2003] Christian, H. J., R. J. Blakeslee, D. J. Boccippio, W. L. Boeck, D. E. Buechler, K. T. Driscoll, S. J. Goodman, J. M. Hall, W. J. Koshak, D. M. Mach and M. F. Stewart, Global frequency and distribution of lightning as observed from space by the Optical Transient Detector, *Journal of Geophysical Research*, 108, D1, 4005-4019, 2003.

[Chronis, et al., 2003] Chronis.T.G., E.N.Anagnostou, Error analysis for a long-range lightning monitoring network of ground-based receivers in Europe, *J. Geophys. Res.*, 108(D24), 4779. 2003.

[Cowling y Borger, 1948] Cowling, T.G and R. Borger, Electric conductivity of the ionospheric Dregion, *Nature*, 162, 142-142. 1948.

[Cummer, 1997] Cummer, S. A., Lightning and Ionospheric Remote Sensing Using VLF/ELF Radio Atmospherics, Ph.D. Thesis, Stanford University Department of Electrical Engineering, September 1997.

[Cummins et al., 1998] Cummins, K. L., M. J. Murphy, E. A. Bardo, W. L. Hiscox, R. B. Pyle y A. E. Pifer, A Combined TOA/MDF Technology Upgrade of the U.S. National Lightning Detection Network, *Journal of Geophysical Research*, 103, 9035-9044, April 27, 1998.

[Davies, 1990] Davies, K., *Ionospheric Radio*, Peregrinus, London, 1990.

[Dey y Mittra, 1997] Dey, S. and Mittra, R., A locally conformal finite-difference time-domain algorithm for modeling three dimensional perfectly conducting objects., *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 7, 273-275, 1997.

[Dey y Mittra, 1999] Dey, S. and Mittra, R., A locally conformal finite-difference time-domain technique for modeling cylindrical dielectric resonators., IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques 47, 1737-1739, 1999.

[Dowden et al., 2002] Dowden, R. L., J. B. Brundell y C. J. Rodger, VLF lightning location by time of group arrival (TOGA) at multiple sites, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, 64, 817-830, 2002.

[Dowden et al., 2002] Dowden, R.L., C.J.Rodger, True global mapping of lightning using widely spaced VLF receivers on the ground, 27th General Assembly of URSI, Russia, 2001.

[Ferguson et al., 1989] Ferguson, J. A., F. P. Snyder, D. G. Morfett and C. H. Shellman, Long-wave propagation capability and documentation, Technical Document 1518, Naval Ocean Systems Center, San Diego, California, 1989.

[Francis, 1984] Francis, F.C., Introduction to plasmaphysics and controlled fusion, 2nd ed, New York and London, Plenum Press, 1984.

[Fullerkrug y Constable, 2000] Fullerkrug, M. and S. Constable, Global Triangulation of Intense Lightning Discharges, Geophysical Research Letters, 27, 333-336, 2000.

[Fusco, 1990] Fusco, M., FDTD algorithm in curvilinear coordinates, IEEE Transactions on Antennas and Propagation 38(1), 76-89, 1990.

[Fusco, 1991] Fusco, M., Smith, M. and Lawrence, W., A three-dimensional FDTD algorithm in curvilinear coordinates, IEEE Transactions on Antennas and Propagation 39(10), 1463-147, 1991.

[Galejs, 1972] Galejs, J., *Terrestrial Propagation of Long Electromagnetic Waves*, Pergamon Press, Oxford, 1972.

[Garriott y Rishbeth, 1963] Garriott, O. K., and H. Rishbeth, Effects of temperature changes on the electron density profile in the F2 layer, *Planet. Space Sci.*, 11, 587 – 590. 1963.

[Gedney et al., 1996] Gedney, S., Lansing, F. and Rascoe, D., A generalized yee-algorithm for the analysis of mmic devices, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 44, 1393-1400, 1996.

[Hargreaves, 1992] Hargreaves, J. K., *The Solar-Terrestrial Environment*, Cambridge, Cambridge University Press, 1992.

[Helliwell, 1965] Helliwell, R. A., *Whistlers and Related Ionospheric Phenomena*, Stanford University Press, Stanford, California, 1965.

[Hepburn,1960] Hepburn,F., Analysis of smooth type atmospheric waveforms, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.*, 19,37-53, 1960.

[Hines et al., 1965] Hines, C. O., I. Paghis, T. R. Hartz and J. A. Fejer, *Physics of the Earth's Upper Atmosphere*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1965.

[Holland et al., 1980] Holland, R., Simpson, L. and Kunz, K., Finite difference analysis of emp coupling to lossy dielectric structures., *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility EMC-22*, 203-209, 1980.

[Horner, 1954] Horner, F., The Accuracy of the Location of Sources of Atmospherics by Radio Direction-Finding, *Proceedings of the Institute of Electrical Engineers*, 101, 383-390, 1954.

[Horner, 1960] Horner, F., The design and use of instruments for counting local lightning flashes., Proceedings of the Institute of Electrical Engineers, B 107, 321-330, 1960.

[Horner y Clarke, 1955] Horner, F. and C. Clarke, Some waveforms of atmospheric and their use in the location of thunderstorms, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 7, 1-13, 1955.

[Huang et al.,1999] Huang,E.,E.Williams, R.Boldi, S.Heckman, W.Lyons, M.Taylor, T.Nelson y C.Wong, Criteria for sprites and elves based on Schumann resonance observations, Journal of Geophysical Research, 104, D14, 16943-16964, 1999.

[Inan e Inan, 2000] Inan, U. S. and A. S. Inan, Electromagnetic Waves, Prentice Hall, 2000.

[Itano et al., 2006] Itano. W, I.Nagano,S.Yagitani,M.Ozaki, Lightning location with single-station observations of VLF sferics, WAVE11-P22,2nd Kanazawa Workshop, Japan, 2006.

[Jacobson et al., 2006] Jacobson.A.R., R.Holzworth, R.Harlin, J.Dowden, R.Lay, Performance Assessment of the World Wide Lightning Location Network (WWLLN), Using the Los Alamos Sferic Array (LASA) as Ground Truth, J.Atmos.Ocean.Technol.,23,1082-1092,2006.

[Jones, 1967] Jones, D. L., Schumann resonances and ELF propagation for inhomogeneous isotropic ionosphere profiles, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 29, 1037-1044, 1967.

[Kelley, 1989] Kelley, M.C., The Earth's Ionosphere, Academic Press, 1989.

[Kemp y Jones, 1971] Kemp, D.T., D.L. Jones, A new technique for the analyses of transient ELF electromagnetic disturbances within the earth-ionosphere cavity, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 33, 567-572, 1971.

[Komonmae et al., 2001] Komonmae, H., I. Nagano, S. Yagitani, N. Takezono, Determination of lightning locations by VLF sferics observations with a single station, *Tech Rep IEICE 101:15-19*, 2001.

[Konokov et al., 1986] Konokov, I.I., I.A. Petrenko, y V.S. Snegurov, *Radio-Engineering Methods for Location of Thunderstorm Centers*, Gidrometeoizdat, Leningrad, 1986.

[Korol y Nikolaenko, 1993] Korol, M.A., A.P. Nikolaenko, Measurements of distances to nearby thunderstorm discharges, *Radiophysics and Quantum Electronics*, Vol. 36, Nos. 3-4, 1993.

[Krehbiel, 1986] Krehbiel, P. R., *The Electrical Structure of Thunderstorms*, *The Earth's Electrical Environment*, 90-113, National Academy Press, Washington, D.C., 1986.

[Krider et al., 1976] Krider, E. P., R. C. Noggle and M. A. Uman, A Gated, Wideband Magnetic Direction Finder for Lightning Return Strokes, *Journal of Applied Meteorology*, 15, 301-306, 1976.

[Krider and Guo, 1983] Krider, E. P. y C. Guo, The Peak Electromagnetic Power Radiated by Lightning Return Strokes, *Journal of Geophysical Research*, 88, 8471-8474, 1983.

[Krishnaiah y Rialton, 1999] Krishnaiah, K. and Rialton, C., A stable subgridding algorithm and its application to eigenvalue problems, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 47(5), 620-628, 1999.

[Kunz y Luebbers, 1993] Kunz, K. y Luebbers, R., *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, CRC Press, 1993.

[Lee, 1986] Lee, A. C. L., An experimental study on the remote location of lightning ashes using a VLF arrival time difference technique, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 112 203-229, 1986.

[Lee, 1989] Lee, A. C. L., Part B. Ground truth confirmation and theoretical limits of an experimental VLF arrival time difference lightning flash locating system, *Q.J.Roy. Meteor. Soc.*, Part B., 115(489), 1147-1166, 1989.

[Lee, 1990] Lee, A. C. L., Bias Elimination and Scatter in Lightning Location by the VLF Arrival Time Difference Technique, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 7, 719-733, 1990.

[Lewis et al., 1960] Lewis, E. A., R. B. Harvey and J. E. Rasmussen, Hyperbolic Direction Finding with Sferics of Transatlantic Origin, *Journal of Geophysical Research*, 65, 1879-1905, 1960.

[Longley y Longmire, 1973] Longley, H. and Longmire, C., Development of the glanc emp code, Technical Report DNA3221T, Defense Nuclear Agency, 1973.

[Maeda y Kato, 1966] Maeda, K., Kato, S. Electrodynamics of the ionosphere. *Space Science Review*, v. 5, n. 57, 1966.

[Maeda, 1951] . Maeda. K., The effects of atmospheric motion and dynamo current on the electron density of the ionosphere, *J. Geomagn. Geoelect.*, 3,77-80. 1951.

[Mach et al., 1986] Mach, D. M., D. R. MacGorman and W. D. Rust,

Site Errors and Detection Efficiency in a Magnetic Direction-Finder Network for Locating Lightning Strikes to Ground, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 3, 67-74, 1986.

[Martin, 1965] Martin, H. G., The polarization of low frequency radio waves in the terrestrial wave-guide, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 27, 995-1007, 1965.

[Masden, 1992] Masden, N., Divergence preserving discrete surface integral methods for maxwell's equations using non-orthogonal unstructured grids, Technical Report UCRL-JC-109787, LLNL, 1992.

[Matsushita, 1969] Matsushita, S., Dynamo currents, winds and electric fields. *Radio Science*, v. 4, n. 9, p. 771, 1969.

[Maxwell y Stone, 1963] Maxwell, E.L., D.L. Stone, Natural Noise fields, from 1 cps to 100 kc, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, AP-11, 339, 1963.

[Nagano et al., 2007] Nagano. I, S.Yagitani, K.Miyazaki, M.Ozaki, An Improved Distance Finding Technique for Single-Site Lightning Location System Using Reflection Characteristics of the Anisotropic Ionosphere, *IEEE*, 978-142446051-9/11, 2011.

[Nagano et al., 2011] Nagano. I, S.Yagitani, M.Ozaki, Y.Nakamura, K.Miyamura, Estimation of Lightning Location from Single Station Observations of Sferics, *Electronics and Communications in Japan*, Part 1, Vol.90, No.1, 2007.

[Navarro, 1992] Navarro, E., Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT) para el Análisis de Dispositivos Pasivos de Microondas, Tesis Doctoral, Universidad de Valencia, Valencia, 1992.

[Navarro et al., 1995] Navarro, E., Wu, C., Chung, P. and Litva, J., Sensitivity analysis of nonorthogonal fdtd method applied to the study of square coaxial waveguide structures, *Microwave and Optical Technology Letters* 8, 138-140, 1995.

[Okoniewski et al., 1997] Okoniewski, M., Okoniewska, E. and Stuchly, M., Threedimensional subgridding algorithm for fdtd, *IEEE Transactions on Antennas & Propagation* 45(3), 422-429, 1997.

[Orville y Spencer, 1979] Orville, R. E. and D. W., Spencer, Global Lightning Flash Frequency, *Monthly Weather Review*, 107, 934-943, 1979.

[Orville, 1987] Orville, R. E. Jr., An Analytical Solution to Obtain the Optimum Source Location Using Multiple Direction Finders on a Spherical Surface, *Journal of Geophysical Research*, 92, 10877-10886, 1987.

[Pappert y Ferguson, 1986] Pappert, R. A. and J. A. Ferguson, VLF/LF mode conversion model calculations for air to air transmissions in the earth-ionosphere waveguide, *Radio Science*, 21, 551, 1986.

[Pascal, 1988] Pascal, E. W., The Design of Broad-Band VLF Receivers with Air-Core Loop Antennas, (internal report) Stanford University Space, Telecommunications and Radioscience Laboratory, Stanford, California, 1988.

[Pasko et al, 2002] Pasko, V. P., M. A. Stanley, J. D. Mathews, U. S. Inan y T.G. Wood, Electrical discharge from a thundercloud top to the lower ionosphere, *Nature*, 416, 152-154, 2002.

[Passi y Lopez, 1989] Passi, R. M. y R. E. Lopez, A Parametric Esti-

mation of Systematic Errors in Networks of Magnetic Direction Finders, *Journal of Geophysical Research*, 94, 13319-13328, 1989.

[Pinto et al., 1999] Pinto, I. R. C. A., O. Pinto Jr., R. M. L. Rocha, J. H. Diniz, A. M. Carvalho and A. C. Filho, Cloud-to-ground lightning in the southeastern Brazil in 1993, 2, Time variations and ash characteristics, *Journal of Geophysical Research*, 104, 31381-31387, 1999.

[Porrat et al., 2001] Porrat, Dana, P. R. Bannister y A. C. Fraser-Smith, Modal phenomena in the natural electromagnetic spectrum below 5 kHz, *Radio Science*, Vol. 36, Num. 3, 499-506, 2001.

[Prentice y Mackerras, 1977] Prentice, S. A. y D. Mackerras, The ratio of cloud to cloud-to-ground lightning ashes in thunderstorms, *Journal of Applied Meteorology*, 16, 545, 1977.

[Price y Asfur, 2002] Price, C. y M. Asfur, An improved ELF/VLF method for globally geolocating sprite-producing lightning, *Geophysical Research Letters*, 29, 2002.

[Qiao et al., 2006] Qiao, J.I, M.A. Rui-Ping, Xu. Ji-Yao, Variations of the ionospheric conductivity with different solar and geomagnetic conditions, *Chinese Journal of Geophysics*, Vol. 49, N°. 5, 1121-1129, 2006.

[Rafalsky et al., 1995] Rafalsky, V.A., A.P. Nickolaenko y A.V. Shvets, Location of lightning discharges from a single station, *Journal of geophysical research*, Vol 100, No.D10, pages 20829-20838, october 20, 1995.

[Ramachandran et al., 2005] Ramachandran, V, S.Kumar, A.Kishore, Remote sensing of Cloud.to.Ground lightning location using the TOGA of sferics, *Atmos. Sci.Lett.*, 6, 128-132, 2005.

[Ramachandran et al., 2007] Ramachandran.V, N.Prakash, A.Deo, S.Kumar, Lightning stroke distance estimation from single station observation and validation with WWLLN data, Ann.Geophys.,25,1509-1517,2007.

[Rakov y Uman, 2003] Rakov, V. A. y M. A. Uman, Lightning Physics and Effects, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[Ramo et al., 1994] Ramo, S., J. R. Whinnery and T. Van Duzer, Fields and Waves in Communications Electronics, John Wiley and Sons, New York, 1994.

[Rasmussen et al., 1980] Rasmussen, J. E., P. A. Kossey and E. A. Lewis, Evidence of an Ionospheric Reecting Layer Below the Classical D Region, Journal of Geophysical Research, 85, 3037-3044, 1980.

[Ratcliffe, 1959] Ratcliffe, J. A., The Magneto-Ionic Theory and its Applications to the Ionosphere, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

[Reising, 1998] Reising, S. C., Remote Sensing of the Electrodynamic Coupling Between Thunderstorm Systems and the Mesosphere/Lower Ionosphere, Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, California, 1998.

[Reising et al., 1999] Reising, S. C., U. S. Inan and T. F. Bell, ELF spheric energy as a proxy indicator for sprite occurrence, Geophysical Research Letters, 26, 987-990,1999.

[Rishbeth, 1997] Rishbeth, H., Long-term changes in the ionosphere, Adv. Space Res., 20, 2149 – 2155. 1997

[Rogers y Peden, 1975] Rogers, J. C., I. C. Peden, The VLF complex permittivity of deep Antarctic ice measured in situ, *Radio Science*, 10, 763-771, 1975.

[Snyder y Pappert, 1969] Snyder, F. P. and R. A. Pappert, A parametric study of VLF modes below anisotropic ionospheres, *Radio Science*, 4, 213-226, 1969.

[Soriano, 2006] Soriano, A., Aplicación de la técnica numérica de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) al estudio de atmósferas planetarias, Tesis Doctoral, Universitat de Valencia, 2006.

[Soriano, 2007] Soriano, A., Navarro, E., Paul, D., Portf, J., Morente, J. and Craddock, I., Finite difference time domain simulation of the earth-ionosphere resonant cavity: Schumann resonances, *IEEE Transactions on Antennas & Propagation* 53(4), 1535-1541, 2005.

[Strangeways y Rycroft, 1980] Strangeways, H. J. and M. J. Rycroft, Systematic errors in VLF direction-finding of whistler ducts, II, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 42, 1009, 1980.

[Stratton, 1941] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, New York, McGraw Hill, 1941.

[Sullivan, 2000] Sullivan, D., *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method*, IEEE Microwave Theory and Techniques Society, 2000.

[Taflove, 2000] Taflove, A., *Computational Electrodynamics*, 2nd edn, Wiley, New York, 2000.

[Thomson, 1980] Thomson, E. M., The dependence of lightning return stroke characteristics on latitude, *Journal of Geophysical Research*,

85, 1050-1056, 1980.

[Thomson, 1993] Thomson, N. R., Experimental daytime VLF ionospheric parameters, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 55, 173, 1993.

[Uman et al., 1980] Uman, M. A., Y. T. Lin and E. P. Krider, Errors in magnetic direction finding due to nonvertical lightning channels, *Radio Science*, 15, 35-39, 1980.

[Uman, 1987] Uman, M. A., *The Lightning Discharge*, International Geophysics Series - Vol. 39, Academic Press, Orlando, 1987.

[Ushio et al., 2002] Ushio, T., S. Heckman, K. Driscoll, D. Boccippio, H. Christian and Z. Kawasaki, Cross-sensor comparison of the Lightning Imaging Sensor (LIS), *International Journal of Remote Sensing*, 23, 13, 2703-2712, 2002.

[Wait, 1957] Wait, J. R., The Attenuation vs. Frequency Characteristics of VLF Waves, *Proceedings of the IRE*, 45, 768-771, 1957.

[Wait and Spies, 1960] Wait, J. R. and K. Spies, Influence of Earth Curvature and the Terrestrial Magnetic Field on VLF Propagation, *Journal of Geophysical Research*, 65, 2325-2331, 1960.

[Wait, 1962] Wait, J. R., Excitation of Modes at Very Low Frequency in the Earth-Ionosphere Wave Guide, *Journal of Geophysical Research*, 67, 3823-3828, 1962.

[Wait, 1968] Wait, J. R., Mode Conversion and Refraction Effects in the Earth-Ionosphere Waveguide for VLF Radio Waves, *Journal of Geophysical Research*, 73, 3537-3548, 1968.

[Wang et al., 2002] Wang, S., F.L., T., Lee, R. and Lee, J., Optimiza-

tion of subgridding schemes for fdtd, IEEE Microwave and Wireless Components Letters 12(6), 223-225, 2002.

[Weidman y Krider, 1986] Weidman, C. D. and E. P. Krider, The amplitude spectra of lightning radiation fields in the interval from 1 to 20 MHz, Radio Science,21, 964-970, 1986.

[Wood and Inan, 2000] Wood, T. G. and U. S. Inan, Long Range Tracking of Thunderstorms Using Sferic Measurements, paper #A62D-16, American Geophysical Union, December, 2000.

[Wood e Inan, 2002] Wood, T.G. y U.S. Inan, Long-range tracking of thunderstorms using sferics measurements, J.Geopys.Res., 107(D21), 4553,2002.

[Wood, 2004] Wood, T.G. Geo-Location of Individual Lightning Discharges Using Impulsive VLF Electromagnetic Waveforms, Tesis Doctoral Universidad de Stanford, 2004.

[Yamashita y Sao, 1974a] Yamashita, M. y K. Sao, Some considerations of the polarization error in direction finding of atmospherics - I. Effect of the Earth's magnetic field, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 36, 1623-1632, 1974.

[Yamashita y Sao, 1974b] Yamashita, M. and K. Sao, Some considerations of the polarization error in direction finding of atmospherics - II. Effect of the inclined electric dipole, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 36, 1633-1641, 1974.

[Yee, 1993] Yee, K.: 1966, Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media, IEEE Transactions on Antennas & Propagation 14(3), 302-307.

[Yu y Simpson, 2010] Yu, Y y J. J. Simpson, "An E-J collocated 3-D FDTD model of electromagnetic wave propagation in magnetized cold plasma," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 58, no. 2, pp. 469-478, 2010.

[Zajac and Rutledge, 2001] Zajac, B. A. and S. A. Rutledge, Cloud-to-ground Lightning Activity in the Contiguous United States from 1995-1999, Monthly Weather Review, 129, 999-1019, 2001.

[Zivanovic et al., 1991] Zivanovic, S., Yee, K. and Mei, K., A subgridding method for the time-domain finite-difference method to solve maxwell's equations, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques 39(3), 471-479, 1991.

