



VNIVERSITATIS VALÈNCIA
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria
Departament d'Informàtica

TESIS DOCTORAL

MODELOS HÍBRIDOS DE SIMULACIÓN
Y VISUALIZACIÓN INTERACTIVA DE
AVALANCHAS BASADOS EN MALLAS Y
DINÁMICA DE PARTÍCULAS.

Presentado por:
D. Angel Rodríguez Cerro
Valencia, Octubre de 2015

Trabajo dirigido por:
Dr. Rafael J. Martínez Durá y Dr. Ignacio García Fernández

D. RAFAEL JAVIER MARTINEZ DURA, profesor Titular del área de Arquitectura y Tecnología de Computadores de la Universitat de València y **D. IGNACIO GARCIA FERNANDEZ**, profesor Contratado Doctor del área de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universitat de València

CERTIFICAN que la presente memoria

“Modelos híbridos de simulación y visualización interactiva de avalanchas basados en mallas y dinámica de partículas”

ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Informática de la Universitat de València por **Angel Rodríguez Cerro**, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presentamos ante la Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ETSE) de la Universitat de València, a 30 de Octubre de 2015.

EL DIRECTOR

EL DIRECTOR

Rafael Javier Martínez Durá

Ignacio García Fernández

A tí

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. Introducción	5
1.1. Motivación	6
1.2. Objetivos	9
1.3. Metodología	9
1.4. Organización de la memoria	10
CAPÍTULO 2. Estado del arte	13
2.1. Materiales granulares y avalanchas	13
2.2. Visualización de flujos basada en textura	16
2.2.1. Control de deformación de la textura	18
2.3. Simulación de materiales granulares basada en malla	21
2.3.1. Métodos basados en malla	21
2.4. Simulación de avalanchas basada en sistemas de partículas	25
2.4.1. Métodos basados en elementos discretos	25
2.4.2. Métodos basados en posición	28
2.4.3. Métodos basados en modelos continuos	31
2.4.4. Simulaciones híbridas	38
2.5. Conclusiones	40
CAPÍTULO 3. Visualización basada en malla	43
3.1. Detección y evolución de una discontinuidad	44
3.1.1. Descripción de la discontinuidad	45
3.1.2. Evolución de los puntos de discontinuidad	46

3.1.3.	Cuestiones sobre la estimación de la velocidad	50
3.2.	Remallado de los triángulos afectados por la discontinuidad	51
3.3.	Conclusiones	53
CAPÍTULO 4.	Simulación usando diferencias finitas	55
4.1.	Evolución de avalanchas en esquemas de diferencias finitas	56
4.2.	Difusión lateral de una avalancha	60
4.2.1.	Análisis del esquema de diferencias finitas FV	61
4.2.2.	Análisis del Esquema de Diferencias Finitas de Lax-Friedrichs	63
4.2.3.	Discusión	65
4.3.	Obtención del campo de velocidades	66
4.3.1.	Cálculo del campo de velocidades	66
4.3.2.	Análisis del campo de velocidades	67
4.4.	Conclusiones	68
CAPÍTULO 5.	Modelo híbrido de avalancha	69
5.1.	Introducción	71
5.2.	Evolución de la capa estática	72
5.3.	Evolución de la capa móvil	73
5.3.1.	Discrete Element Method	76
5.3.2.	Smoothed Particle Hydrodynamics	78
5.4.	Intercambio de alturas entre capas	80
5.4.1.	Generación o eliminación de partículas	82
5.5.	Cálculo del campo velocidades	82
5.5.1.	Análisis del campo de velocidades	83
5.6.	Conclusiones	83
CAPÍTULO 6.	Pruebas y Resultados	85
6.1.	Descripción y objetivos de los experimentos	86
6.2.	Visualización de campos de flujo	87
6.3.	Simulación de avalanchas	94
6.3.1.	Simulación basada en diferencias finitas	94
6.3.2.	Simulación basada en partículas	98
6.3.3.	Interacción con obstáculos	110
6.3.4.	Comparación de los modelos de simulación de avalanchas	113

6.4. Conclusiones	115
CAPÍTULO 7. Evaluación de prestaciones	117
7.1. Advección de texturas en flujos con discontinuidades	118
7.1.1. Análisis del coste computacional	119
7.1.2. Evaluación de prestaciones	122
7.2. Simulación de avalanchas	126
7.2.1. Análisis del coste computacional	127
7.2.2. Evaluación de prestaciones	130
7.3. Estudio global	137
7.4. Diseño paralelo y resultados del modelo de visualización	138
7.5. Conclusiones	141
CAPÍTULO 8. Conclusiones y trabajo futuro	143
8.1. Consecución de los objetivos	143
8.2. Contribuciones	146
8.3. Líneas de investigación futuras	148
Bibliografía	149

ÍNDICE DE TABLAS

6.1.	Valores de las constantes utilizadas en el modelo de simulación de partículas basado en DEM.	103
6.2.	Valores de las constantes utilizadas en el modelo de simulación de partículas que utiliza SPH.	106
7.1.	Tiempos medios de ciclo obtenidos para el escenario de la avalancha normal.	124
7.2.	Tiempos medios de ciclo obtenidos para el escenario peor.	125
7.3.	Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha en el mejor caso.	132
7.4.	Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha en el peor caso.	133
7.5.	Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha típica.	134
7.6.	Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de una avalancha en una malla de 160×160 en los escenarios mejor, típico y peor caso.	135

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1.	Ángulo de reposo dibujado sobre un montículo de grano. . .	14
2.2.	Evolución de avalanchas descritas por Daerr. La flecha negra indica el punto de inicio de la avalancha. A la izquierda se observa una avalancha formada por una capa fina de granos que se expande lateralmente. La imagen de la derecha representa una avalancha formada por una capa gruesa de granos expandiéndose hacia arriba y lateralmente.	15
2.3.	Deformación de la imagen original producida por una discontinuidad horizontal en el campo de flujo.	19
2.4.	Geometría del modelo BCRE.	22
3.1.	Imágenes de flujos en los que la línea de puntos representa la discontinuidad y las flechas la dirección de los flujos. En la imagen de la izquierda se observa el flujo de una avalancha delimitado por una discontinuidad que lo separa del material en reposo. En la imagen de la derecha dos flujos con distinta dirección son separados por una discontinuidad.	44
3.2.	Descripción de un punto de discontinuidad y las variables involucradas.	47

- 3.3. Evolución de una discontinuidad a través de un vértice. Si una discontinuidad tiene velocidad constante, los puntos asociados alcanzarán finalmente el final de sus aristas (a). Entonces, los viejos puntos de discontinuidad desaparecerán (b), y nuevos aparecerán en las aristas al otro lado del vértice (c). 48
- 3.4. Cuando varias discontinuidades cruzan un vértice, la nueva velocidad se calcula usando la información de sus velocidades previas por aproximación de mínimos cuadrados. 49
- 3.5. Cuando un triángulo tiene aristas con discontinuidades se remalla. Dependiendo del número de discontinuidades detectadas, se usa un esquema distinto. En el vértice que pertenece a la frontera se necesita agregar doble o triple vértice para asignar diferentes coordenadas de textura en el mismo punto en diferentes triángulos. 52
- 4.1. Captura de la evolución de una avalancha en una pendiente en 2D tras un tiempo transcurrido. Las columnas negras representan el material móvil, las blancas la capa estática. El punto es el inicio de la avalancha. La flecha indica hacia donde ha evolucionado el material. En la imagen de la izquierda se ha usado el modelo BCRE con el esquema *Forward-Time Forward-Space* (FTFS). En la imagen de la derecha se ha usado el modelo BCRE con el esquema *Forward-Time Backward-Space* (FTBS). 58
- 4.2. Captura de la evolución de una avalancha tras un tiempo transcurrido en dos escenarios 2D con cambio de signo de gradiente. Las columnas negras representan el material móvil, las blancas la capa estática. La flecha indica el drástico incremento o decremento de material. En ambas imágenes se ha usado el modelo BCRE con el esquema *Central-Time Central-Space*. 60
- 4.3. El escenario considerado en el análisis. Una rejilla regular se utiliza para discretizar el dominio. Los nodos con doble círculo indican la existencia de material en la capa móvil. El punto de interés es el nodo (i, j) , el cual no está afectado por la avalancha pero junto a un nodo que sí que lo está. 62

5.1.	Área de influencia de la celda $c_{i,j}$. Las aspas representan partículas, todas las que caigan dentro del área cuadrada de influencia de lado l se registrarán en $P_{i,j}$	74
5.2.	Ciclo de proyección entre el espacio 2D y 3D para el cálculo de la fuerza que afecta a cada partícula. La posición de la partícula \mathbf{p}_k se proyecta al dominio 3D como \mathbf{p}_k^{3D} . En el dominio 3D se realiza el cálculo de fuerzas. La fuerza total \mathbf{f}_k^{3D} asociada a la partícula k se proyecta al dominio 2D como \mathbf{f}_k , en donde se integrará y se actualizará \mathbf{p}_k	75
5.3.	Interpolación bilineal para el cálculo de la altura h_k asociada a la partícula p_k	76
6.1.	Los cuatro escenarios de pruebas que se han usado para evaluar el método propuesto. Las discontinuidades se representan por líneas de trazos.	89
6.2.	La advección de textura sobre un dominio con dos campos vectores opuestos separados por una discontinuidad horizontal, sin detección de discontinuidad (izquierda) y con el método de detección de discontinuidad propuesto (derecha).	90
6.3.	Advección de textura sobre un dominio con dos campos de vectores opuestos, separados por una discontinuidad oblicua, sin detección de discontinuidad (izquierda) y con el método propuesto de detección de discontinuidad (derecha). El esquema de remallado se muestra en la imagen inferior, junto con los puntos de discontinuidad estimados.	91
6.4.	Cuatro campos vectoriales divididos por dos discontinuidades que se cruzan. La imagen de la izquierda sin detección de discontinuidad y la imagen de la derecha con detección de discontinuidad. El esquema de remallado se muestra en la imagen inferior.	92

- 6.5. Un círculo moviéndose alrededor del centro del dominio, visualizado con un textura con ruido de Perlin. El campo de velocidades dentro de la esfera coincide con la velocidad de su centro y la velocidad del campo del fondo se desplaza hacia abajo. La imagen izquierda muestra la advección sin detección de discontinuidad y la imagen derecha con detección de discontinuidad. El esquema de remallado se muestra en la imagen inferior. 93
- 6.6. Siluetas de avalanchas después de 2,8 segundos desde el inicio, generadas en la zona negra. Las líneas indican la expansión de la avalancha en intervalos de 0,20 segundos. En la imagen de la izquierda se muestra la propagación de la avalancha usando el esquema de diferencias finitas de FV. En la imagen de la derecha se muestra la propagación de la avalancha utilizando el esquema de Lax-Friedrichs. 96
- 6.7. Una visualización OpenGL de una avalancha simulada usando el esquema de diferencias finitas FV (izquierda) y el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs (derecha). . . 97
- 6.8. Control de expansión de la avalancha simulada con el modelo BCRE discretizado con diferencias finitas. Se muestran dos simulaciones distintas, manteniendo en ambas el mismo valor de β a 1.0. Las imágenes de la izquierda corresponden a una simulación usando $\gamma = 0,005$ y las imágenes de la derecha corresponden con la otra simulación en la que se ha usado $\gamma = 5,0$. Las capturas de la primera fila de imágenes corresponden al segundo 2.5 de simulación, mientras que las de la fila inferior se han tomado en el instante en que alcanzan un mismo punto (en la izquierda en el segundo 6.71 y en la derecha en el 3.96). 98
- 6.9. Tres imágenes de la evolución de un corrimiento de tierra pendiente abajo utilizando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs. La avalancha se expande lateralmente generando una forma ovalada. 99
- 6.10. Dos imágenes de la evolución de una avalancha bajando un valle utilizando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs. 100

6.11. Área afectada por una partícula en el escenario del corrimiento de tierra, representada en una malla de 160×160 puntos y $0,1m$ entre puntos. En la imagen de la izquierda se utiliza $\phi = 0,9m$ en el núcleo de suavizado utilizado para la generación del flujo de velocidades y el área de influencia de las celdas corresponden a un cuadrado con $l = 0,5m$. En la imagen de la derecha se ha usado un $\phi = 0,9m$ y $l = 2,0m$ 101

6.12. Área afectada por una partícula en el escenario del corrimiento de tierra, representada por una malla de 160×160 puntos y 0.1 metros de distancia entre puntos. En la imagen de la izquierda se limita el área con un radio de acción ϕ de 0.3 metros. En la imagen derecha se limita el área con un radio de acción ϕ de 0.6 metros. 102

6.13. Capturas del corrimiento de terreno sobre una pendiente. Las capturas de la izquierda utilizan un umbral τ de $0.1m$ para la creación de nuevas partículas y corresponden al segundo 11.76, mientras que las de la derecha $\tau = 0,2m$ y el tiempo es de 20.28 segundos. Las imágenes de arriba usan un radio de acción (ϕ) del núcleo de suavizado polinómico utilizado en el cálculo del campo de velocidades igual a $0,3m$, mientras que las imágenes de abajo $\phi = 0,6m$ 105

6.14. Secuencia de imágenes que muestra el corrimiento de terreno. La misma secuencia está duplicada en dos columnas, pero en la de la izquierdas se pueden visualizar las partículas que transportan el material móvil. Se ha utilizado $\tau = 0,13m$ y $\phi = 4m$ 106

6.15. Secuencia de imágenes de una avalancha de nieve en un valle. Las imágenes están duplicadas en las dos columnas, salvo que en las de la izquierda se muestra el detalle de las partículas. Se ha utilizado $\tau = 0,20m$ y un radio $h = 0,4m$ 107

6.16. Corrimiento de terreno en una pendiente. En todas las imágenes se ha utilizado un umbral τ para la creación de nuevas partículas de 0.25m. En cada imagen se utiliza una combinación distinta de ϕ y l . En la imagen superior izquierda $\phi = 0,9m$ y $l = 2,0m$, en la imagen superior derecha $\phi = 0,6m$ y $l = 1,2m$, en la imagen inferior izquierda $\phi = 0,3m$ y $l = 0,7$ y en la imagen inferior derecha $\phi = 0,3$ y $l = 2,0$ 109

6.17. Secuencia de imágenes del corrimiento de terreno utilizando el modelo basado en SPH. La misma secuencia está duplicada en dos columnas, pero en las de la izquierda se pueden visualizar las partículas que transportan el material móvil. Se ha utilizado $\tau = 0,25$, $\phi = 0,6$ y $l = 1,2$ metros. 110

6.18. Dos simulaciones de avalancha basadas en SPH en un mismo escenario. Ambas imágenes se han capturado en el instante 9.44 segundos desde el inicio de la avalancha. Las simulaciones comparten el radio de acción $\phi = 0,6m$ y una longitud $l = 1,2m$ de lado del área de influencia de toda celda. Pero en la imagen de la izquierda se usa un umbral $\tau = 0,15m$ en comparación con la imagen de la derecha donde se ha usado $\tau = 0,30m$ 111

6.19. Capturas desde dos puntos de vista distintos de la simulación de una avalancha de nieve en el escenario del valle. Se ha utilizado $\phi = 0,6m$, $l = 1,2m$ y $\tau = 0,30m$. En las imágenes de la izquierda se muestran las partículas. 111

6.20. Avalancha de arena con obstáculo. Se ha utilizado $\tau = 0,25$, $\phi = 0,6$ y $l = 1,2$ metros. 113

7.1. Mapa de velocidades del peor caso. Las diferentes velocidades se ordenan formando un tablero de ajedrez para asegurar un número de discontinuidades del orden $O(N^2)$ 122

7.2. Mapa de velocidades del caso típico. La discontinuidad, la línea discontinua, queda representada por dos velocidades con la misma dirección pero sentido opuesto. Cada tipo de velocidad ocupa una mitad de la malla. 123

7.3. Tiempos medios de ciclo obtenidos para el escenario de la avalancha normal. 124

7.4. Tiempos medios de ciclo obtenidos para el escenario peor.	125
7.5. Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha en el mejor caso.	131
7.6. Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha en el peor caso.	132
7.7. Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha típica, en la que se utiliza un número máximo de 300 partículas.	133
7.8. Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de una avalancha en una malla de 160×160 en los escenarios mejor, típico y peor caso.	134
7.9. Tiempo promedio por paso de integración en base al núme- ro de partículas utilizado en la simulación de una avalancha usando SPH en una malla de 160×160 en el escenario de peor caso.	136
7.10. Tiempo promedio por paso de integración en base al núme- ro de partículas utilizado en la simulación de una avalancha usando DEM en una malla de 160×160 en el escenario de peor caso.	136
7.11. Tiempos medios de ciclo del proceso global de visualización y simulación de una avalancha en un caso típico.	137
7.12. Aceleración obtenida para la tarea TRANS_DISC task en el escenario de avalancha normal.	139
7.13. Aceleración obtenida para la tarea TRANS_DISC en el es- cenario de peor caso.	140
7.14. Eficiencia obtenida para la tarea TRANS_DISC en el esce- nario de peor caso.	140
7.15. La comparación del tiempo de ciclo medio entre las propues- tas secuencial y paralela para rejilla de 60×60 nodos. La ejecución paralela se hace con 16 hilos.	141

RESUMEN

El trabajo de investigación que describe la presente memoria tiene como objetivo diseñar un modelo de visualización de avalanchas adecuado para simulación interactiva. Para ello se emplean técnicas de advección de texturas y se propone un método que corrige las distorsiones en las texturas producidas por las discontinuidades que aparecen cuando se simulan flujos granulares.

El modelo de visualización requiere el empleo de nuevas técnicas de simulación de materiales granulares que permitan visualizar grandes extensiones de terreno en tiempos interactivos. Estas técnicas se caracterizan porque generan campos de velocidades que son empleados posteriormente en los modelos de advección. En esta memoria se plantean tres modelos diferentes. El primero de ellos está basado en la discretización en diferencias finitas del modelo de desplazamiento de materiales granulares BCRE. Los otros dos presentan una arquitectura híbrida de simulación, que utiliza como base una malla de alturas controlada por el modelo BCRE y modela sobre ésta un sistema de partículas 2D. Ambos modelos híbridos se diferencian en el mecanismo de cálculo de fuerzas, utilizando en un caso DEM y en otro SPH.

Con el fin de validar la propuesta de visualización y los modelos de simulación se han llevado a cabo un conjunto de experimentos que evalúan la semejanza de los resultados con las propiedades que presentan las avalanchas reales. Se presta especial atención a la evolución y expansión de las avalanchas presentadas por los distintos métodos. Destaca la flexibilidad de los modelos híbridos para controlar la velocidad de desplazamiento y expansión de la avalancha generada, además de reproducir efectos de inercias y permitir la aplicación de cualquier algoritmo de detección de colisiones de partículas.

Finalmente se realiza un estudio de prestaciones de los modelos de visualización y simulación para detectar si cumplen con los requisitos temporales que impone su utilización en aplicaciones interactivas. Se detecta el principal cuello de botella en la parte de visualización, en la que se propone un modelo paralelo que consigue duplicar la resolución de visualización.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Materiales granulares, como arena, arroz o granos de café son conglomerados de elementos sólidos que muestran un comportamiento físico único en la naturaleza. Pueden estabilizarse en montículos y actuar como un sólido si la energía media de los elementos que lo componen es baja. Cuando fluyen libremente pueden tener características similares a los fluidos, aunque disipan rápidamente su energía. Estos flujos de material granular pueden ocurrir por causas naturales, como una avalancha de nieve cayendo por la ladera de una montaña o las avalanchas de arena en las dunas del desierto. Pero también son comunes en muchos procesos industriales que implican el movimiento del material granular, como la carga-descarga de carbón o arena en una tolva, camión o bodega.

La reproducción de este tipo de flujo en entornos virtuales es un tema de estudio que cuenta con numerosos trabajos y técnicas desarrolladas en las dos últimas décadas (Luciani et al., 1995; Li and Moshell, 1993; Miller and Pearce, 1989). Esto se debe entre otros motivos a la amplitud de sectores de la vida profesional que abarca, utilizándose en aplicaciones de realidad virtual en el sector de la industria minera, química, geotécnica o ambiental, con fines de entrenamiento de operadores (Holz, 2014; Pla-Castells et al., 2006), seguridad, aumento de rendimiento y de la producción. Pero también la visualización y simulación de flujos de materiales granulares en entornos 3D tiene una amplia acogida en el sector del ocio, donde destacan los efectos especiales de películas, animaciones o videojuegos.

Estas aplicaciones de realidad virtual que simulan flujos de materiales

granulares no sólo deben conseguir un detalle visual rico sino que también deben ofrecer un comportamiento mecánico adecuado, de acuerdo con la realidad. Adicionalmente también presentan el problema de que deben respetar fuertes restricciones temporales durante su ejecución, ya que, para que el usuario sienta una buena sensación de inmersión, se deben simular y renderizar las imágenes de los flujos granulares con frecuencias superiores a 30Hz.

1.1. MOTIVACIÓN

Existen multitud de técnicas de visualización de materiales granulares. Entre ellas, es frecuente la visualización de la propias partículas o utilizar mallas texturizadas. En el primer caso, cada grano del material granular se representa mediante un objeto visual. Esto consigue una alta resolución visual a expensas de tener un alto coste computacional. Para reducir este coste los investigadores decrementan el número de partículas, a la vez que aumentan su tamaño, para que ocupen todo el volumen del material a visualizar. A menudo utilizan un pequeño conjunto de modelos visuales diferentes que repiten aleatoriamente para dar sensación de disponer de granos de formas diversas.

Entre las estrategias de visualización de materiales granulares que se basan en malla texturizada, existe una gran variedad de ellas que utilizan una imagen para visualizar flujos de toda índole. En la visualización de flujos interactivos destacan las técnicas de advección de textura (Max and Becker, 1996), que desplazan las coordenadas de textura de una malla para simular el movimiento. Estas técnicas tienen el problema de que un excesivo desplazamiento puede producir deformación en la imagen original. Esta deformación es el punto de partida de diversos trabajos para controlarla y limitarla.

La primera técnica de visualización, basada en partículas, es adecuada para representar con una alta resolución agrupaciones de pocos gránulos. Sin embargo, su alto coste computacional dificulta visualizar en tiempo interactivo, por ejemplo, una playa de arena, donde el número de granos es muy elevado. Este escenario es más conveniente representarlo mediante una malla texturizada y visualizar las avalanchas que puedan ocurrir utilizando la advección de textura.

En este trabajo se pretende conseguir una visualización adecuada de avalanchas de materiales granulares mediante el uso de mallas texturizadas. Debido a que el flujo generado por una avalancha se caracteriza por presentar grandes diferencias de velocidad entre dos puntos cercanos del flujo y en el resto del mundo, que pueden ser interpretadas como discontinuidades, se produce deformación en la imagen original de la malla, con lo que los resultados obtenidos son bastante irreales.

La advección de la textura depende directamente de las propiedades del flujo que es generado por modelos de simulación de avalanchas. En consecuencia, se necesita un modelo de simulación de avalanchas que genere campos de velocidades correctos, flujos, que se usen como entrada en el modelo de visualización consiguiendo avalanchas realistas en tiempo interactivo.

Al igual que ocurre con las técnicas de visualización, el número de trabajos existentes para la simulación de avalanchas de modelos granulares en el ámbito de gráficos por ordenador es muy elevado. Se pueden clasificar, según su modelo de representación, en modelos basados en malla y en modelos basados en partículas.

Los primeros calculan la evolución del material granular empleando una malla de alturas y trasvasando material desde las celdas con mayor altura a las de menor altura. Destacan los trabajos basados en autómatas celulares (CA) (Pla-Castells et al., 2008) y en la utilización de modelos de evolución de avalanchas basados en ecuaciones en derivadas parciales como el BCRE (Bouchaud et al., 1994).

Los modelos de segundo tipo simulan el comportamiento del material granular mediante un sistema de partículas que interaccionan entre sí. Muchos trabajos se basan en modelos discretos, conocidos como el modelo DEM (del inglés *Discrete Element Method*), en los que se modelan agrupaciones de masas que interaccionan partícula a partícula. Otros trabajos utilizan modelos continuos, como las ecuaciones de Navier-Stokes en física de fluidos. Usando discretizaciones como *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) es posible adaptarlos a los materiales granulares, para definir su comportamiento a través de leyes de conservación de la masa y el momento, combinadas con modelos de estrés interno. Más actuales, son los trabajos de dinámicas basadas en posición (PBD) que no implementan directamente los modelos físicos de evolución del material, sino que controlan la posición y

velocidad de las partículas en base a restricciones, pero obtienen resultados similares.

A pesar del uso de técnicas de división espacial para acelerar su ejecución, los modelos anteriores pueden llegar a tener un coste muy elevado. Los modelos de simulación de materiales granulares basados en malla permiten la evolución de grandes avalanchas con un coste computacional reducido. Pero los modelos basados en malla presentan la necesidad de modelos específicos de evolución de la avalancha, mientras que los sistemas de partículas permiten reproducir diferentes fenómenos físicos de las avalanchas parametrizando el sistema.

En la tabla 1.1 se relacionan las técnicas destacadas de simulación de materiales granulares con el modelo de visualización que emplean otros investigadores en sus trabajos. Un estudio más detallado de los mismos se puede encontrar en el capítulo siguiente.

Modelos	Simulación		Visualización	
	Partículas	Malla	Partículas	Malla
BCRE	-	✓	-	✓
DEM	✓	-	✓	-
PBD	✓	-	✓	-
SPH	✓	-	✓	✓
CA	-	✓	-	✓

En general, los trabajos de simulación y visualización de avalanchas tienden a utilizar modelos del mismo índole para tanto en la parte de simulación como en la de visualización, tal y como refleja la Tabla 1.1.

En base a los trabajos de simulación de materiales granulares que utilizan visualización basada en malla y advección de textura (Sumner et al., 1999; Onoue and Nishita, 2003; Zeng et al., 2007), se ve adecuada su utilización para la visualización de avalanchas interactivas. Sin embargo, en los flujos que desplazan las texturas pueden existir regiones con velocidades muy distintas que generan deformaciones en la textura (Pla-Castells, 2009). La presente memoria va a tratar de resolver este problema con el objetivo último de conseguir visualizaciones realistas de grandes extensiones de avalanchas.

1.2. OBJETIVOS

El objetivo principal de este trabajo es diseñar e implementar un *modelo de visualización de avalanchas*, adecuado para simulación interactiva, que supere las dificultades encontradas en las técnicas existentes en las regiones en las que aparecen discontinuidades.

Derivado del objetivo principal a alcanzar se presentan a continuación una serie de subobjetivos a realizar.

- Revisión de las técnicas de visualización de textura y propuesta de un modelo de visualización de flujo adecuado para avalanchas de materiales granulares con discontinuidades.
- Análisis de los modelos de simulación de avalanchas para adaptarlos al modelo de visualización y generar campos de velocidades adecuados a las técnicas de advección de texturas.
- Análisis de la capacidad de los modelos existentes para reproducir comportamientos de avalanchas reales y propuesta de mejoras.
- Realizar un estudio de prestaciones de los modelos propuestos para detectar si cumplen con los requisitos temporales.

1.3. METODOLOGÍA

La visualización de flujos de materiales granulares se va a basar en un modelo de advección de textura. El campo de flujo que define la avalancha se caracteriza, entre otras propiedades, por presentar discontinuidades que deforman la imagen original. En consecuencia, se va a presentar una técnica de detección y rastreo de estas discontinuidades, que remalle y calcule correctamente las coordenadas de textura a ambos lados de la discontinuidad.

Se va a definir un modelo híbrido para la simulación de avalanchas de materiales granulares, basado tanto en malla como en dinámica de partículas, que genere un campo de flujo que se utilizará como entrada para el modelo de visualización. El modelo híbrido va a dividir el material en dos capas, una capa estática y otra dinámica. La primera está formada por los granos en estado de reposo y representada por un mapa de alturas. Sobre

ésta, la capa dinámica va a quedar constituida por los gránulos en movimiento y representada por un sistema de partículas basado en SPH. La comunicación entre ambas capas se va a realizar mediante el intercambio de alturas que ofrecen las ecuaciones diferenciales del modelo BCRE.

La capa estática favorece la reducción de partículas necesarias en la simulación, relegando el espacio ocupado por éstas a un dominio bidimensional, cubriendo únicamente la superficie del material estático. Por otro lado, el sistema de partículas va a ofrecer una gran flexibilidad en la configuración de avalanchas. Además, va a permitir una alta resolución visual utilizando un reducido número de partículas, debido a que éstas van a ser independientes de las propiedades de la malla.

El modelo va a permitir presentar avalanchas con propiedades de forma y evolución similares a las de la realidad, descritas en los trabajos de Daerr y Douady (Daerr and Douady, 1999a; Daerr, 2001a).

Por último, todo el modelo descrito va orientado a aplicaciones interactivas, por lo que debe de cumplir la restricción temporal de 30 Hz de tasa de refresco de las imágenes que se renderizan en pantalla. Por último, otro objetivo importante a cubrir será la realización de un análisis de las prestaciones del modelo, así como detección de cuellos de botella para su futura aceleración e implementación para arquitecturas multinúcleo y para unidades de procesamiento gráfico (GPU).

1.4. ORGANIZACIÓN DE LA MEMORIA

El trabajo de investigación que se ha realizado queda descrito en la presente memoria cuya estructura se detalla a continuación.

En el capítulo 2 se presenta el estado del arte, primero de los modelos de visualización de campos de flujo y en segundo lugar, de las propuestas de simulación de materiales granulares más relevantes.

Se revisan las técnicas de visualización basadas en advección de textura y se describe en el Capítulo 3 una nueva propuesta de visualización de avalanchas basada en advección de texturas.

En los Capítulos 4 y 5 se adaptan los modelos de simulación física de avalanchas a la nueva propuesta de visualización ya descrita. En el Capítulo 4 se genera un campo de flujo a partir del modelo BCRE, basado en malla, poniendo énfasis en la elección adecuada del esquema de diferencias

finitas utilizado para la discretización del modelo, con el fin de obtener una avalancha que resulte visualmente realista. En el Capítulo 5 se modela un sistema de partículas, comparando dos propuestas, una basada en elementos discretos (DEM) y otra basada en SPH, que termina generando el campo de flujo usado como entrada en el modelo de visualización.

En el capítulo 6 se llevan a cabo las pruebas realizadas para cada uno de los modelos propuestos de visualización y simulación, detallando al final los resultados obtenidos.

Posteriormente, en el capítulo 7 se realiza un análisis del coste temporal de los modelos propuestos, detectando los cuellos de botella en cada uno de ellos y presentando las limitaciones globales de la propuesta de visualización y simulación.

Por último, se exponen en el capítulo 8 las conclusiones del modelo presentado y las diferentes directrices de trabajo futuro que dan pie a la continuación y mejora de los resultados de la investigación.

ESTADO DEL ARTE

El presente capítulo muestra un repaso de las técnicas más relevantes existentes relacionadas con la visualización y simulación de avalanchas de materiales granulares en entornos virtuales. En la primera sección se realiza una descripción de las avalanchas, resaltando las propiedades más significativas. A continuación se exponen las técnicas de visualización de flujos basadas en imagen que utilizan advección para mostrar movimiento sobre superficies estáticas. En la última sección se detallan los trabajos de simulación orientados a entornos virtuales que pueden reproducir avalanchas de materiales granulares, tanto basados en malla como los basados en dinámica de partículas.

2.1. MATERIALES GRANULARES Y AVALANCHAS

Los materiales granulares se pueden encontrar hoy en día en cualquier sitio, desde un bote con arroz o sal, la arena de la playa, dunas del desierto, montículos de carbón o gravilla en entornos de construcción, etc. Un medio granular se puede considerar un conjunto de elementos sólidos en contacto, donde cada elemento puede ser distinto del resto en tamaño y composición. Por lo general, los medios granulares se suelen presentar en la naturaleza como acumulaciones de una gran cantidad de granos.

Se han diseñado modelos fenomenológicos que simulan el comportamiento del material granular a partir de lo que ocurre en sistemas reales. Estos modelos tienen en cuenta características esenciales definidas por un conjunto de parámetros típicos. Uno de los más importante es el **ángulo crítico**

o también conocido como el **ángulo de reposo**. Éste define la condición de reposo o movimiento del medio granular. En la Figura 2.1 muestra una representación visual del ángulo crítico.

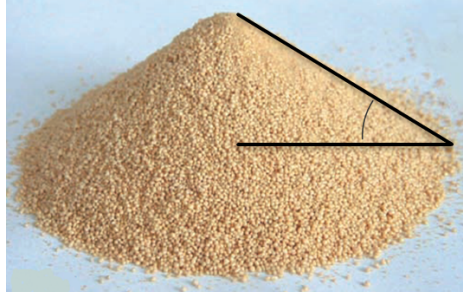


Figura 2.1: Ángulo de reposo dibujado sobre un montículo de grano.

Un montículo de partículas conserva su estado de reposo siempre que no se exceda el ángulo crítico. En caso de que se supere, se generará una avalancha pendiente abajo hasta que se recupere el estado de reposo, es decir, hasta que la pendiente deje de superar al ángulo crítico. Esta propiedad depende tanto de los materiales como del estado en que se encuentren. Por ejemplo, el ángulo crítico del carbón (45 grados) es superior al del trigo (30 grados), así como también es distinto el ángulo de reposo de la arena seca (37 grados) que el de la arena mojada (24 grados).

El ángulo crítico es una característica macroscópica que resulta de la fricción estática entre gránulos. Depende de las propiedades del grano, así como de la forma, distribución, rugosidad de la superficie e incluso de la forma en que esté apilado el grano. Un amplio estudio del ángulo de reposo se puede leer en (Haderler and Kuttler, 1999c).

Como se irá observando más adelante en la memoria de investigación, este trabajo se centra en la simulación de la evolución de una avalancha de materiales granulares, en donde el ángulo crítico juega un importante papel. Sin embargo, a la hora de simular una avalancha no es suficiente con estudiar el ángulo crítico, sino que también será necesario observar la forma de la misma y como evoluciona a lo largo del tiempo.

Diferentes investigadores han realizado descripciones empíricas de avalanchas de materiales granulares basadas en la observación experimental (Börzsönyi et al., 2005; Aranson and Tsimring, 2001; Pouliquen, 1999), pe-

ro destaca Daerr (Daerr and Douady, 1999a; Daerr, 2001b) que describe dos comportamientos distintos que se presentan en la evolución de una avalancha obtenidos a partir de un conjunto de estudios empíricos. Sobre una capa de material estático (granos en estado de reposo) se desplazan un conjunto de granos formando la avalancha. Dependiendo del grosor de la capa de desplazamiento, la avalancha evoluciona de una u otra forma. Si la avalancha está formada por una capa fina de partículas, esta capa tiende a expandirse lateralmente además de ir pendiente abajo. Pero en el caso de que la capa móvil sea lo suficientemente gruesa, al desplazarse la avalancha pendiente abajo, dejará sin sujeción a los granos de la zona superior de la avalancha, provocando que ésta evolucione también pendiente arriba, incluso hasta alcanzar el punto más alto del montículo. En la Figura 2.2 se aprecian los dos comportamientos descritos por Daerr en sus estudios. En ambas imágenes, se señalan los puntos en los que se inicia la avalancha. Se aprecia la forma triangular de la avalancha que avanza pendiente abajo, expandiéndose lateralmente en ambos casos. Únicamente en la segunda imagen, que representa una evolución de avalancha con capa móvil gruesa, se observa la expansión pendiente arriba.

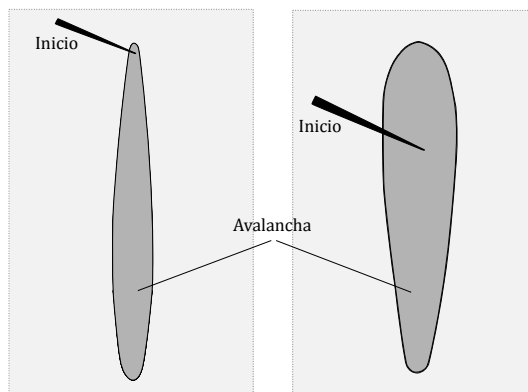


Figura 2.2: Evolución de avalanchas descritas por Daerr. La flecha negra indica el punto de inicio de la avalancha. A la izquierda se observa una avalancha formada por una capa fina de granos que se expande lateralmente. La imagen de la derecha representa una avalancha formada por una capa gruesa de granos expandiéndose hacia arriba y lateralmente.

A la hora de visualizar la evolución del material granular cuando se produce una avalancha, la técnica menos costosa, computacionalmente hablando, consiste en emplear una textura con la forma de la avalancha y hacer que ésta se mueva en función de la velocidad de caída. En el presente trabajo se va a emplear esta técnica y por tanto en la siguiente sección se van a exponer las técnicas más relevantes al respecto.

2.2. VISUALIZACIÓN DE FLUJOS BASADA EN TEXTURA

Existe una amplia bibliografía de trabajos de visualización de flujos que emplean texturas. En el trabajo de Laramee et al. (Laramee et al., 2004) se resumen las principales técnicas de visualización de flujo que existen, atendiendo a sus múltiples campos de aplicación. En él se clasifican estas técnicas en función de la primitiva en que se basan. Entre ellas destaca la advección¹ de textura, cuya primitiva es el téxel² en movimiento, ya que permite implementarse fácilmente en la GPU y por tanto puede ofrecer altas tasas de refresco. Estos métodos de advección de texturas permiten visualizar campos de velocidades transportando las propiedades de los téxel (posición, color, ...) o de grupos de ellos en la dirección del flujo.

Van Wijk (van Wijk, 2002) propone una Visualización de Flujo Basado en Imagen (IBFV) que transporta color en el espacio de textura. Cada fotograma del flujo de animación consiste en una mezcla entre una versión deformada de la imagen anterior y un conjunto de imágenes de fondo. Para este conjunto se usa una secuencia de imágenes de ruido blanco, que son filtradas en tiempo y en espacio para eliminar los componentes de alta frecuencia. Esta técnica soporta la visualización de flujos arbitrarios e inestables, dependientes del tiempo, como pueden ser las avalanchas.

Jobard et al. (Jobard et al., 2001) agregan un sistema de partículas a la advección euleriana para construir un sistema de advección de textura híbrido. Mientras el sistema de partículas, que usa una partícula por píxel, es actualizado en un esquema Lagrangiano, la distribución del color de los píxeles de la imagen se actualiza en un paso Euleriano. A las sucesivas

¹Proceso de transporte de una sustancia o propiedad por efecto del movimiento de un flujo.

²Unidad mínima de textura aplicada a una superficie.

imágenes se les aplica un filtro temporal para introducir un buen nivel de correlación espacio-temporal. Este método, a pesar de estar implementado en la CPU, consigue tiempos interactivos en la visualización del flujo gracias a la utilización de técnicas de paralelización empleando OpenMP (OpenMP, 2015). Rasmussen et al. (Rasmussen et al., 2004) también usan advección, en este caso de partícula, calculada durante la simulación del fluido para determinar la advección de propiedades de renderizado, incluyendo texturas.

Laramee et al. (Laramee et al., 2003) muestran visualización de flujo inestable sobre superficies. Genera representaciones densas de campos de flujo dependientes del tiempo con alta correlación espacio-temporal usando tanto advección Euleriana-Lagrangiana (LEA) (Jobard et al., 2001; Jobard et al., 2002) como visualización de flujo basada en imagen (IBFV) (van Wijk, 2002). Proyecta la geometría 3D de la superficie al espacio imagen 2D sobre la que se aplican una serie de texturas y advecciones. Este método permite realizar zoom manteniendo siempre una visualización de alta resolución espacial. Usan el espacio de imagen para superar los problemas que aparecen cuando se trabaja en el espacio físico o en el espacio de parametrización superficial. Éste método si es implementado en la GPU proporciona tiempos de renderizado interactivos.

Weiskopf y Ertl (Weiskopf and Ertl, 2004) combinan la advección en el espacio de imagen y el espacio del objeto para visualizar flujo sobre superficies curvas arbitrarias alojadas en un espacio tridimensional. Combinan los métodos basados en imagen con algunos aspectos de los métodos basados en objeto. Propone un trazado de partículas Lagrangiano en el espacio físico 3D del objeto y en el espacio 2D de la imagen, manteniendo las características de IBFV pero evitando sus desventajas. Entre éstas últimas, destaca el no garantizar la coherencia fotograma a fotograma cuando se mueve la cámara. Para superar este problema, la entrada de ruido para la advección de textura se modela sobre una textura 3D sólida. El método mapea todo el algoritmo en la GPU obteniendo tiempos interactivos.

Yu et al. (Yu et al., 2009) usaron una aproximación Lagrangiana para transportar un sistema de partículas e incorporar una textura, llamada en terminología inglesa *sprite*, sobre cada partícula. Mezclando los *sprites* consiguen la visualización del flujo de un río con diferentes efectos basados en física. El método es capaz de mostrar discontinuidades en los laterales del río, los cuales son definidos al principio de la simulación como parte de los

datos de entrada. Más tarde extienden su método para mejorar la conservación de las propiedades de la textura usando una rejilla deformable que es transportada por cada partícula (Yu et al., 2011). En ambos casos mantienen la distribución de partículas en el área visible agregando o eliminando partículas según su visibilidad.

También existen trabajos que utilizan la advección para sintetizar nuevas imágenes acordes a los flujos a visualizar. Entre ellos, en el trabajo (Kwatra et al., 2007) se transportan las propiedades de la textura y su orientación con el fin de sintetizar texturas adecuadas para el dominio de flujos 3D. Se visualiza el flujo de la superficie para generar la malla y se transportan las propiedades del flujo para sintetizar la textura, basada en imágenes de muestra. Permite visualizar avalanchas, pero su método va dirigido al renderizado offline y es demasiado costoso para simulaciones interactivas. De forma similar, Bargteil et al. (Bargteil et al., 2006a) generan una malla que es rastreada a lo largo del tiempo, transportando una función distancia que permite la preservación de sus características, como el color o las coordenadas de textura.

Bargteil et al. (Bargteil et al., 2006b) presentan un método de síntesis de textura que utiliza un proceso de optimización que trata de emparejar la textura de la superficie con una textura muestra de entrada. Con esta síntesis superan los problemas de discontinuidades y distorsiones de los parámetros transportados, además de mantener consistente el nivel de detalle a lo largo de la simulación.

En general, si bien los métodos de síntesis de textura pueden ser adecuados para la advección de textura, ya que tienen en cuenta la evolución del tiempo (Bargteil et al., 2006b; Lefebvre and Hoppe, 2006), la propuesta que en el presente trabajo se plantea, se enfoca en la visualización en tiempo interactivo de un flujo sobre una textura ya predefinida de antemano, sin tener que sintetizar ninguna. Ello supondrá una gran mejora en el coste computacional de la visualización de flujos basada en textura.

2.2.1. Control de deformación de la textura

La deformación de la imagen original es uno de los principales problemas que aparecen cuando se usan técnicas que transportan una textura usando un campo de flujo. A medida que se desplazan las coordenadas de textura, sobre todo si se trabaja con flujos inestables, se llega a un punto en el que

la textura ha perdido su imagen original, o sus propiedades características. Este efecto se puede apreciar en la Figura 2.3, en la que se visualiza un campo de flujo, con dos velocidades distintas, la parte superior se desplaza a la derecha y la parte inferior a la izquierda. En medio de la imagen se produce la distorsión.

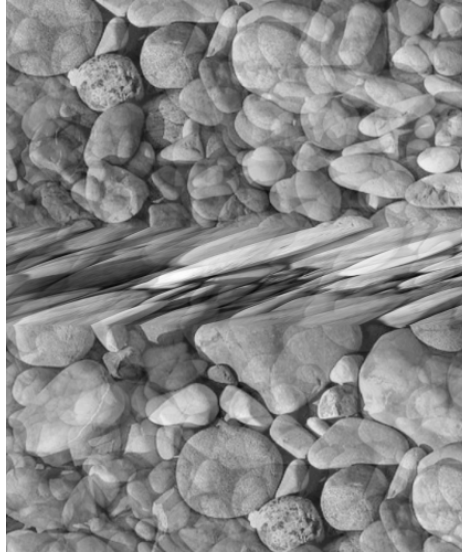


Figura 2.3: Deformación de la imagen original producida por una discontinuidad horizontal en el campo de flujo.

Varios trabajos han tratado este problema. Max y Becker (Max and Becker, 1996) derivan un modelo diferenciable para la advección de coordenadas de textura, con una estrategia de inicialización para evitar grandes deformaciones de la textura. Proponen transportar los vértices de los triángulos y un método para agregar o eliminar triángulos en el dominio de los límites cuando el flujo cause la degeneración de la malla.

Más concretamente, inicializar una textura consiste en actualizar las coordenadas de textura para que tomen su valor original. Esto se realiza después de un tiempo τ dado. Para asegurar la continuidad en el tiempo, la textura es modificada con un factor de peso ω que se aproxima a 0 a medida que se llega al fin de su tiempo de vida. (Un ejemplo de tiempo de vida es $\frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi \frac{t}{\tau}))$ donde t representa el instante de tiempo). Mezclando tres

texturas desplazadas en el tiempo $\frac{2\pi}{3}$ se asegura un peso constante.

Neyret (Neyret, 2003) propone un control de deformación usando una mezcla de N capas de texturas $\{T^i, i = 1..N\}$ que emplean. Cada capa está formada por 3 grupos de coordenadas de textura desplazadas $(u_j^i, v_j^i), j = 1..3$ y tiempo de vida τ_i diferente. Se aplica una mezcla lineal entre capas siguiendo la ecuación

$$T^i = \sum_{j=1}^3 \omega_j^i T(u_j^i, v_j^i),$$

donde $T()$ es el mapa de textura y ω_j^i el peso que se define como

$$\omega_j^i = \frac{1}{3} \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t - t0_j^i}{\tau^i}\right)\right),$$

donde $t0_j^i$ es la marca de tiempo desde que se regeneró la coordenada de textura.

El método emplea la capa más apropiada de acuerdo al nivel de deformación deseado d^* , definido por el usuario. Para ello se mide la deformación acumulada d^i de cada capa i como la suma de las deformaciones acumuladas de las tres coordenadas de textura respecto a las originales, utilizando para calcular la deformación ϵ de cada coordenada de textura la ecuación:

$$\epsilon = \frac{1}{2}(G + G^t)$$

donde G representa al gradiente velocidad.

Con la deformación acumulada se define el número l^* como:

$$l^* = \frac{d^* - d^i}{d^{i+1} - d^i}$$

para todo i que cumpla que $d^i < d^*$ y $d^* < d^{i+1}$.

Seguidamente se mezclan las capas i e $i + 1$, con pesos $f - 1$ y f respectivamente, donde f es la parte decimal de l^* , con lo que la textura final queda como:

$$T^* = (1 - f)T^i + fT^{i+1}.$$

En resumen, se ha de tener en cuenta que en cada paso se mezclan 6 coordenadas de texturas, tres de cada capa.

Independientemente del control de deformación de la textura, se requiere de un campo de flujo que represente adecuadamente el comportamiento de una avalancha para su correcta visualización. En consecuencia, en el siguiente apartado se van a describir los modelos de simulación de materiales granulares más relevantes que generen ese campo de velocidades.

2.3. SIMULACIÓN DE MATERIALES GRANULARES BASADA EN MALLA

La simulación de materiales granulares viene siendo estudiada en el campo de los gráficos por ordenador desde hace muchos años (Harlow, 1962) (Luciani et al., 1995) (Duran, 1999) (Haderler and Kuttler, 1999a) (Monaghan, 1992) (Prigozhin and Zaltzman, 2001) (Haderler and Kuttler, 1999b) (Savage and Hutter, 1991) (Sumner et al., 1999) (Aradian et al., 2002) (Lee and Herrmann, 1993) (Vélez et al., 2011) (De Dios et al., 2012) (Velez et al., 2013). Los trabajos más recientes, que todavía son muy influyentes en la actualidad, se pueden dividir en dos grandes grupos: las propuestas basadas en malla o mapa de alturas y las propuestas basadas en sistemas de partículas. También existen modelos híbridos, que combinan ambas técnicas para conseguir las ventajas de cada una.

Las simulaciones basadas en malla permiten generar grandes avalanchas en tiempos interactivos. Tienen el problema de que no ofrecen la misma calidad física en las simulaciones que la que consiguen los métodos basados en partículas. Estos últimos, por el contrario, requieren de un mayor coste computacional, lo que los aleja en principio de su uso en aplicaciones de realidad virtual, aunque a día de hoy existen varias soluciones implementadas dentro de la GPU que producen un efecto de gran realismo en tiempo interactivo.

En esta sección se van a describir los trabajos más relevantes de simulación interactiva de materiales granulares que emplean mallas. Aunque algunas propuestas se basan en modelos continuos, éstos finalmente son discretizados sobre mallas.

2.3.1. Métodos basados en malla

El modelo de simulación de avalanchas propuesto en (Bouchaud et al., 1994), conocido como BCRE, es bastante utilizado en la actualidad. Su

nombre viene de las iniciales de los investigadores que lo propusieron: Bouchard, Cates, Ravi Prakash y Edwards. Es un modelo analítico continuo que se basa en una descripción fenomenológica del proceso. Describe la evolución de la avalancha mediante un modelo de dos capas. Una primera capa de material estático, que la forman granos en estado de reposo, con una altura h y una segunda capa móvil, que se desplaza por encima de la estática, que está constituida principalmente por todo el material que se desplaza formando la avalancha, cuya altura es R , ver figura 2.4.

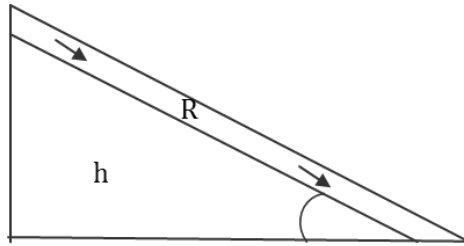


Figura 2.4: Geometría del modelo BCRE.

El modelo BCRE ha sido muy estudiado, pero destaca el trabajo de Haderer y Kuttler (Haderer and Kuttler, 1999a), donde se presenta una formulación basada en dos ecuaciones diferenciales parciales que calculan la altura, tanto de la capa estática como de la móvil, tras cada paso de tiempo:

$$\begin{aligned} R_t &= \beta (Rh_x)_x - \gamma(\alpha - |h_x|)R + f \\ h_t &= \gamma(\alpha - |h_x|)R \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde R_t y h_t son respectivamente el incremento de la capa móvil y estática tras el paso de un incremento de tiempo t , β es la constante que define la velocidad de la avalancha, α representa al ángulo crítico, más concretamente es la tangente del ángulo crítico, γ es la constante que define el intercambio de material entre las capas móvil y estática y f es una fuente de material extra que se agrega en la capa móvil.

El modelo BCRE proporciona un mecanismo que define la evolución de la avalancha. Presenta el problema de que es muy dependiente del esquema de diferencias finitas utilizado en la discretización de las ecuaciones diferenciales. Según se utilice un esquema de diferencias u otro, puede producir inestabilidad, picos, agujeros en la malla, que se expanda la avalancha la-

teralmente o no, etc. Muchos de estos esquemas se describen en el libro (Strikwerda, 2004).

Falcone y Vita (Falcone and Vita, 2006) proponen para el modelo BCRE un esquema de diferencias finitas particular, derivando una condición para la consistencia y otro para la convergencia. Este esquema de diferencias finitas explícito se puede escribir como:

$$\begin{aligned} R_{i,j}^{n+1} &= R_{i,j}^n + \Delta t \left[R_{i,j}^n D^2 h_{i,j}^n + \bar{D} R_{i,j}^n \cdot D h_{i,j}^n - (1 - |D h_{i,j}^n|) R_{i,j}^n \right], \quad (2.2) \\ h_{i,j}^{n+1} &= h_{i,j}^n + \Delta t (1 - |D h_{i,j}^n|) R_{i,j}^n, \end{aligned}$$

donde las diferencias involucradas se calculan empleando el siguiente método. Para cualquier cantidad A que tome valor en la rejilla, las diferencias laterales se definen como

$$\begin{aligned} D_x^- A_{i,j} &= \frac{A_{i,j} - A_{i-1,j}}{s}; & D_x^+ A_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} - A_{i,j}}{s}; \\ D_y^- A_{i,j} &= \frac{A_{i,j} - A_{i,j-1}}{s}; & D_y^+ A_{i,j} &= \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j}}{s}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde s representa la distancia espacial entre celdas.

De acuerdo con Falcone y Vita (Falcone and Vita, 2006), el gradiente $D h_{i,j}$ es calculado eligiendo las diferencias laterales que maximizan $|D h_{i,j}|$. El gradiente de R , denotado por $\bar{D} R_{i,j}$, se aproxima por las diferencias finitas hacia arriba con respecto a $D h_{i,j}$, definido como

$$\bar{D}_x R_{i,j} \equiv \begin{cases} D_x^+ R_i & \text{if } D_x h_i > 0, D_x^+ h_i > 0, \\ D_x^- R_i & \text{if } D_x h_i < 0, D_x^- h_i < 0, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2.4)$$

La definición para $\bar{D}_y R_{i,j}$ es análoga. Finalmente, $D^2 h_{i,j}$ se aproxima usando la diferencia centrada estándar de orden dos

$$D^2 h_{i,j} = \frac{h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j} + h_{i-1,j} + h_{i+1,j}}{s^2}.$$

Este esquema es utilizado para modelar la dinámica de crecimiento que genera un fuente vertical en un montículo de arena sobre una superficie plana limitada por paredes. El modelo reproduce la evolución estable de la generación del montículo, pero no detalla las propiedades visuales de la evolución de la arena.

Onoue y Nishita (Onoue and Nishita, 2005) presentan un algoritmo de deformación de superficies de materiales granulares orientado a aplicaciones gráficas interactivas. El algoritmo de deformación está dividido en 3 pasos: la detección de la colisión entre un objeto y la superficie del terreno, el desplazamiento del material granular y la erosión del material que se produce en las pendientes. Adicionalmente permite manejar objetos de diferentes tamaños, incluidos aquellos cóncavos. El modelo es interesante ya que utiliza advección de textura para visualizar las avalanchas producidas en el material granular. En el algoritmo propuesto, tanto los objetos como el material sobre ellos, se representa mediante mapas *Height-Spans*, que son vectores 2D de extensiones de altura. Cuando la altura de alguna columna del mapa de alturas está en contacto con algún objeto, se fuerza a que el material se retire a los laterales, se detectan las pendientes de salida y se suaviza la superficie con pequeñas avalanchas. En esta línea de trabajos de deformación de superficies de materiales granulares también destacan (Sumner et al., 1999; Zeng et al., 2007).

En los trabajos de Pla-Castells et al. (Pla-Castells et al., 2006; Pla-Castells et al., 2008) se propone un modelo de sistemas granulares eficiente basado en autómatas celulares, orientado al campo de la realidad virtual y gráficos por ordenador. Partiendo de un mapa de alturas, dos celdas vecinas intercambian una cantidad de material en función de la diferencia en altura existente entre ellas. Sigue un algoritmo de actualización de las celdas que prioriza a las que tienen una mayor diferencia de alturas entre vecinos. Además incluye un modelo de inercia que proporciona una evolución de la avalancha más realista. Para la visualización utiliza una malla de triángulos de OpenGL, donde la altura de cada punto representa la altura del terreno.

En general, los métodos basados en malla permiten simular avalanchas de materiales granulares en un tiempo interactivo. El coste temporal del algoritmo depende principalmente de las dimensiones de la malla y del número de celdas activas a actualizar. Presenta el problema de que en cada momento la resolución de la simulación queda limitada principalmente por el tamaño de celda, es decir la distancia existente entre puntos adyacentes de la malla. Este problema no lo presentan las simulaciones de avalancha basadas en sistemas de partículas que se describen en el siguiente apartado.

2.4. SIMULACIÓN DE MATERIALES GRANULARES BASADA EN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Las propuestas de simulación de materiales granulares que utilizan sistemas de partículas se pueden clasificar atendiendo a si el modelo es continuo o discreto. Los trabajos basados en Métodos de Elementos Discretos (DEM) consideran cada partícula como un sólido rígido independiente que interactúa con el resto de partículas del entorno. Por otro lado, existen mecanismos de simulación de materiales granulares basados en modelos continuos como el SPH, que es un mecanismo de interpolación que utiliza la formulación de la conservación del momento de Navier-Stokes para modelar fluidos incompresibles. Pero independiente a esta clasificación, destacan los trabajos de dinámicas basadas en posición, que no emplean modelos de fuerzas para describir el movimiento de las partículas, sino que usan restricciones en las posiciones de las partículas para simular materiales granulares. Estas técnicas consiguen comportamientos visualmente aceptables y en tiempos interactivos.

En esta sección se describen los trabajos más relevantes de simulación de materiales granulares clasificados siguiendo las técnicas anteriores: simulación de partículas basada en elementos discretos (DEM), simulación basada en posiciones (PBD) y simulación de partículas basada en modelos continuos.

2.4.1. Métodos basados en elementos discretos

Las propuestas basadas en elementos discretos, conocidas como DEM (Discrete Elements Method) en la bibliografía inglesa, modelan la fuerza interna de un medio granular gracias a las interacciones de contacto existentes entre partículas dinámicas. Este mecanismo ofrece una simulación de alta resolución, con interacciones partícula-partícula, pero a costa de un alto consumo computacional. El método se basa en tratar cada grano como un elemento independiente del resto, cuyas posiciones y velocidades se obtienen de las interacciones con el resto de elementos.

Destaca el trabajo de Bell et al. (Bell et al., 2005). Éste introduce una técnica de animación por ordenador que modela partículas como cuerpos rígidos orientados compuestos por varias esferas. Este modelo simula montones de arena estables usando únicamente las fuerzas de fricción entre las

partículas, sin la necesidad de fuerzas de adhesión. También simula fenómenos de salpicadura y avalanchas con una alta precisión. El método se basa en la fuerza de contacto entre partículas, la cual se define como la suma de la fuerza tangencial \mathbf{F}_t y normal \mathbf{F}_n entre todo par de elementos que entran en contacto,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t. \quad (2.5)$$

Antes de describir cada una de las fuerzas, es necesario definir una serie de conceptos. Se considera \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 como los centros de una partícula con radios R_1 y R_2 respectivamente. Se define la superposición ξ y la normal \mathbf{N} entre partículas como:

$$\xi = \max(0, R_1 + R_2 - \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|} \quad (2.7)$$

Se considera \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 como la velocidad de cada partícula. La velocidad relativa \mathbf{V} , la velocidad relativa en la dirección normal $\dot{\xi}$ y la velocidad tangencial \mathbf{V}_t se describen como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (2.8)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{V} - \dot{\xi}\mathbf{N} \quad (2.10)$$

Haciendo uso de las definiciones previas, la fuerza normal \mathbf{F}_n se describe como:

$$\mathbf{F}_n = f_n \mathbf{N} \quad (2.11)$$

$$f_n = -k_d \xi^\alpha \dot{\xi} + k_r \xi^\beta \quad (2.12)$$

donde k_d es una constante de amortiguación y k_r es una constante de restitución. La primera constante controla la disipación de la energía, mientras

que la segunda define la rigidez de las colisiones. En ambos sumandos aparece como factor el término de superposición ξ elevado a dos constantes α y β . Éstas controlan el comportamiento de las colisiones, produciendo colisiones más elásticas o disipando más energía. Según los estudios de (Schwager and Pöschel, 1998) y (Ramírez et al., 1999) los valores de $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{3}{2}$ son los que ofrecen unos resultados más fieles a la realidad.

Para adaptar las constantes de amortiguación k_d y rigidez k_r a cada simulación, se propone calcularlas de forma más intuitiva a partir del tiempo de contacto t_c permitido y una constante normal de restitución ϵ usando las siguientes ecuaciones:

$$k_d = 2m_{eff} \frac{-\ln \epsilon}{t_c} \quad (2.13)$$

$$k_r = \frac{m_{eff}}{t_c^2} (\ln^2 \epsilon + \pi^2) \quad (2.14)$$

donde m_{eff} representa a la masa efectiva que se calcula como:

$$\frac{1}{m_{eff}} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (2.15)$$

donde m_1 y m_2 son las masas de cada partícula.

La fuerza tangencial \mathbf{F}_t se modela con un muelle ficticio como en el trabajo de Lee y Herrmann (Lee and Herrmann, 1993). Al entrar en contacto dos partículas se crea un muelle fijando como posición deseada del muelle el punto de contacto entre las partículas. Cuando las partículas pierden el contacto, el muelle se elimina.

$$\mathbf{F}_t = \min(\mu f_n, k_t \|\mathbf{D}\|) \frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|} \quad (2.16)$$

donde μ es una constante de fricción, k_t es una constante tangencial y \mathbf{D} la distancia desde el punto de contacto inicial.

Bell et al. (Bell et al., 2005) exponen otras formulaciones posibles para las fuerzas normales y tangenciales, comparándolas con las presentadas en esta sección. Además permiten el contacto con otros modelos rígidos no esfera. Pero en todas sus pruebas los tiempos conseguidos no son interactivos. Por ejemplo, una de sus pruebas más simple consta de unas 100000 esferas y muestra un tiempo de unos 3 minutos por fotograma.

Alduán et al. (Alduán et al., 2009) proponen un método para simular medios granulares ofreciendo una alta resolución visual junto a una alta fidelidad mecánica a un coste computacional menor que los anteriores métodos basados en DEM. Realizan una descomposición espacial del cálculo de las fuerzas internas (fuerzas de contactos entre partículas y fricciones) y externas (fuerzas de gravedad, viento, colisiones con otros objetos), que permite ejecutar con distinto paso de integración ambos tipos de fuerzas. Ésto permite una mayor frecuencia de cálculo de las fuerzas internas, aumentando la precisión de los resultados, en comparación a otros métodos que calculan todas las fuerzas en el mismo paso de integración y a la misma frecuencia. El cálculo de fuerzas internas se basa en la formulación propuesta en (Bell et al., 2005) vista en el párrafo anterior, obteniendo para cada par de partículas una fuerza normal y otra tangencial. En un postproceso, el volumen esférico ocupado por cada partícula se rellena de granos más finos distribuidos uniformemente. Para cada uno de estos granos finos se interpola su velocidad a partir de las partículas gruesas, del paso anterior, más próximas. El peso w_i asociado a cada partícula en la interpolación se calcula como:

$$w_i = \frac{3r - 2d_i}{4r} \quad (2.17)$$

donde r es el radio de influencia y d_i es la distancia entre la partícula fina y la gruesa.

De este modo, usando el peso w_i se calcula la velocidad para cada partícula:

$$v_i = \frac{1}{\sum w_i} \sum w_i \mathbf{v}_i \quad (2.18)$$

donde \mathbf{v}_i es la velocidad de cada partícula gruesa del paso de baja resolución (se capturan las velocidades cada 20-50 pasos).

Sin embargo, a pesar de introducir este postproceso y acelerar toda la simulación del medio granular, los resultados temporales obtenidos todavía distan de poder ejecutarse en tiempos interactivos.

2.4.2. Métodos basados en posición

Las propuestas de simulación de sistemas de partículas suelen estar basadas en fuerzas. Se van acumulando tanto fuerzas internas como externa

y a partir de ellas se obtienen las aceleraciones usando la segunda ley de movimiento de Newton ($F = ma$). Integrando por el tiempo se obtienen las velocidades y posiciones. Existen algunas propuestas de simulación que tratan directamente con las velocidades a través de impulsos. Sin embargo esta nueva técnica, la dinámica basada en posición, omite tanto la capa de aceleraciones como la de velocidades ya que trabaja directamente con las posiciones.

Las principales características y ventajas de este tipo de propuestas en comparación con las basadas en fuerzas o impulsos radica en el poder de control de la integración explícita, eliminando muchos problemas de inestabilidad que presentan las anteriores técnicas. También permite manejar fácilmente restricciones de colisiones y penetraciones, u otro tipo de restricciones, proyectando los puntos en posiciones válidas.

Estas técnicas describen a un objeto dinámico como un conjunto de N puntos, con posiciones \mathbf{x}_i , velocidades v_i y masas m_i , y un conjunto de M restricciones, con una cardinalidad n_j , una función $C_j : \mathbb{R}^{3n_j} \rightarrow \mathbb{R}$, un conjunto de índices $\{i_1, \dots, i_{n_j}\}, i_k \in [1, \dots, N]$, un parámetro de rigidez $k_j \in [0 \dots 1]$ y un tipo, que puede ser de igualdad o desigualdad.

Müller et. al (Müller et al., 2007) introducen este nuevo concepto de dinámica basada en posición e implementan un ejemplo simulando ropa. Este método es tan general que se puede aplicar a terreno tal y como se hace en (Bender et al., 2013; Macklin et al., 2014).

El proceso general se resume en tres pasos. En un primer paso se estima la posición de cada uno de los puntos. Se realiza un paso explícito de integración de Euler, donde se estima la velocidad, pudiendo ser amortiguada, (Ecuaciones 2.19).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i + \Delta t w_i f_{ext}(\mathbf{x}_i) \\ \mathbf{p}_i &= \mathbf{x}_i + \Delta t \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde \mathbf{v}_i y \mathbf{p}_i son respectivamente la velocidad y la estimación de la nueva posición del punto i , transcurrido un tiempo Δt , pudiendo existir fuerzas externas $f_{ext}(\mathbf{x}_i)$ a las que se les aplica un peso equivalente a la inversa de la masa del punto $w_i = \frac{1}{m_i}$.

En el siguiente paso se genera la lista de restricciones violadas, como por ejemplo las colisiones, penetraciones, el mantener una distancia entre los puntos, etc. Todas ellas se introducen en un sistema de resolución nu-

mérico basado en el paso de iteración de Gauss-Seidel que proyectará los nuevos puntos a posiciones válidas. En la proyección de los puntos se trata de cumplir la conservación del momento lineal y angular cumpliendo estas ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \Delta \mathbf{p}_i &= 0 \\ \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \Delta \mathbf{p}_i &= 0\end{aligned}$$

donde \mathbf{r}_i es la distancia de \mathbf{p}_i a un centro de rotación arbitrario. Si estas restricciones se violan aparecen las llamadas *fuerzas fantasmas*, que actúan como fuerzas externas, arrastrando y rotando los objetos.

Por último se actualizan las posiciones y velocidades finales, pudiendo introducir un pequeño error de corrección.

Holz (Holz, 2014) desarrolla un modelo de simulación de material granular basado en posición, rápido y estable, para aplicaciones de realidad virtual orientadas al entrenamiento de operarios sobre maquinaria de movimiento de terreno. Su propuesta se basa en el trabajo de Müller et al. (Müller et al., 2007), visto en los parágrafos anteriores. En el sistema de resolución numérico se introducen una serie de cambios para conseguir un mayor paralelismo y aprovechar al máximo los equipos computacionales con arquitecturas multinúcleo. El método proporciona una simulación de material granular en tiempos interactivos, soportando fricción de Coulomb estática y dinámica. El único problema que presenta es que si se aplica más de un contacto a una partícula, las fuerzas normales pueden no converger a las del muelle amortiguado aunque se lleven a cabo muchas iteraciones.

Actualmente en el campo de gráficos por ordenador resulta muy conocido el trabajo de Macklin, Müller y otros, (Macklin et al., 2014), que han implementado una librería de dinámicas unificada para efectos visuales en tiempo real, conocida por el nombre de FLEX (FLEX, 2015) y distribuida por Nvidia Corporation. Se basa en partículas conectadas por restricciones para tratar tanto contactos como colisiones de una manera unificada. Es lo suficientemente flexible como para modelar gases, líquidos, sólidos deformables, cuerpos rígidos y ropa con interacciones bilaterales. En este trabajo además de que se discuten los principales problemas de las propuestas tradicionales de los modelos basados en partículas, se describe un sistema de resolución numérico de restricciones paralelo, para sus dinámicas basadas en posición, tan eficiente que permite utilizarse en aplicaciones en tiempo

interactivo.

2.4.3. Métodos basados en modelos continuos

Los trabajos de simulación de materiales granulares empleando sistemas de partículas dirigidos por modelos continuos se enmarcan en dos grandes grupos: las propuestas basadas en el método SPH, que se basa en las leyes de Navier-Stokes y las propuestas que se basan en FLIP, que calculan flujos usando partículas en rejillas adaptativas. En el siguiente apartado se van a distinguir los trabajos orientados en uno u otro grupo.

SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)

El método SPH fue diseñado originalmente para modelar dinámicas de fluido en astrofísica (Monaghan, 1992). El método se adaptó para gráficos por ordenador en (Stam and Fiume, 1995), que permitían simular fuego y humo, donde se resolvieron ecuaciones de difusión numéricamente. También se utilizó en otros problemas, como en sólidos altamente deformables (Desbrun and Gascuel, 1996) y flujos de lava (Stam, 1999), pero en el trabajo de Müller et al. (Müller et al., 2003) fue la primera vez que se utilizó el método SPH para dinámica de fluidos en gráficos por ordenador. En el trabajo de Ihmsen et al. (Ihmsen et al., 2014) se puede ver un extenso y detallado estado del arte del método SPH orientado a la simulación de fluidos.

El algoritmo SPH se incluye dentro del enfoque Lagrangiano. Es un mecanismo de interpolación, en el que una cantidad escalar A en la posición r es calculada mediante una suma pesada de contribuciones de todas partículas que se encuentran dentro de su volumen de influencia:

$$A_S(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(r - r_j, h) \quad (2.20)$$

donde j itera sobre todas las partículas, m_j es la masa de la partícula j , r_j es su posición, ρ_j la densidad, A_j la cantidad del campo en r_j y $W(r, s)$ es el núcleo de suavizado con un radio s (más adelante en esta sección se comentan los núcleos de suavizado más comunes).

En muchas ecuaciones utilizadas en los modelos es necesario usar derivadas. Sin embargo gracias a la naturaleza del método SPH, únicamente la función núcleo depende directamente de las coordenadas espaciales. Debido a ello es posible escribir la derivada de la Ecuación (2.20) como:

$$\nabla A_S(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W(r - r_j, s)$$

y el Laplaciano como:

$$\nabla^2 A_S(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla^2 W(r - r_j, s)$$

Los núcleos de suavizado determinan el conjunto de partículas que se van a tener en cuenta a la hora de aproximar un parámetro en un punto del espacio. Cuanto más se alejen las partículas de ese punto, menor influencia tendrán en el cálculo. El método permite tener total libertad de elección de la función de núcleo, únicamente debe estar normalizada, ser positiva e impar, asegurando de este modo la derivada de segundo orden. Los núcleos más comunes utilizados en los trabajos de dinámica de fluidos en el dominio tridimensional son los presentados por Müller et al. (Müller et al., 2003), que se resumen a continuación.

El núcleo polinómico se utiliza para ajustar la mayoría de parámetros del fluido, excepto los relativos a la fuerzas internas, como son la presión y la viscosidad. Este núcleo de suavizado representa una campana de Gauss.

$$W_{poly6}(r, h) = \frac{315}{64\pi h^9} \begin{cases} (h^2 - r^2)^3, & 0 \leq r \leq h, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.21)$$

donde h es la longitud de suavizado y r la distancia entre dos partículas.

Para calcular la fuerza ejercida por la presión se utiliza el *spiky kernel*, puesto que si el gradiente del núcleo polinómico se hace 0 en su centro provocaría que las fuerzas de repulsión desapareciesen a medida que las partículas se juntasen, formándose agrupaciones de altas presiones.

$$W_{spiky}(r, h) = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h - r)^3, & 0 \leq r \leq h, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.22)$$

Sin embargo, para las fuerzas de viscosidad el Laplaciano del núcleo utilizado debe ser positivo. En caso de que no lo fuese, al acercarse dos partículas provocaría un incremento de sus velocidades relativas, introduciendo energía e inestabilidad en el sistema. Debido a que ninguno de los dos anteriores núcleos aseguran que el Laplaciano siempre sea positivo, se utiliza un nuevo núcleo en el cálculo de las fuerzas de viscosidad:

$$W_{viscosity}(r, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \begin{cases} -\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1 & 0 \leq r \leq h, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Una vez conocidos los núcleos a utilizar, el método SPH para el modelo de fluido se basa en la formulación de la conservación del momento de la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.24)$$

donde ρ es un campo densidad, \mathbf{v} un campo velocidad, p un campo presión, \mathbf{g} es una fuerza externa y μ la viscosidad del fluido.

La parte derecha de la Ecuación (2.24) del Momento representa las fuerzas internas y externas que afectan al fluido: la presión ($-\nabla p$), fuerzas externas ($\rho \mathbf{g}$) y la fuerza de viscosidad ($\mu \nabla^2 \mathbf{v}$). La suma de todas ellas determinan el cambio del momento $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ de las partículas. De este modo la aceleración de una partícula se puede obtener como:

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\mathbf{f}_i}{\rho_i}. \quad (2.25)$$

Como la masa m_j de toda partícula j es constante a través de su tiempo de vida y a su vez representa un volumen del espacio, es necesario calcular la densidad en cada paso de tiempo. Por tanto se modifica la Ecuación (2.20) sustituyendo A por la densidad a calcular:

$$\rho_S(r) = \sum_j m_j W_{poly6}(r - r_j, s) \quad (2.26)$$

usando el núcleo de suavizado polinómico de orden 6 (Ecuación (2.21)).

Para la aproximación del gradiente de la presión ($-\nabla p$) en la partícula i se utiliza:

$$\mathbf{f}_i^{pressure} = - \sum_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, s) \quad (2.27)$$

donde se utiliza la media aritmética de las presiones de las partículas que interactúan $\frac{p_i + p_j}{2}$, ya que la presión no es simétrica y se incumpliría la ley de acción-reacción.

Pero antes es necesario conocer la presión en la posición de cada partícula. Para ello se utiliza una modificación de la ecuación de estado de los gases ideales propuesta por Desbrun y Gascuel (Desbrun and Gascuel, 1996):

$$p = k_s(\rho - \rho_0)$$

donde ρ_0 es la densidad característica del fluido en reposo y k es una constante de dureza del gas, que sólo depende de la temperatura. Con esto se consigue que la densidad tienda a ese valor de reposo ayudando a mantener la simulación más estable.

La fuerza de la viscosidad ($\mu \nabla^2 v$) se puede entender como la resistencia que ofrece un fluido para deformarse. En su cálculo se utiliza la aproximación Laplaciana:

$$\mathbf{f}_i^{viscosity} = \psi \sum_j m_j \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\rho_j} \nabla^2 W(r_i - r_j, s) \quad (2.28)$$

donde ψ representa el coeficiente de viscosidad dinámica y se utiliza la diferencia de velocidades de las partículas que interactúan para conseguir fuerzas simétricas. De esta manera, la partícula i se acelerará en la dirección de la velocidad relativa del entorno.

El modelo de SPH presentado en el trabajo de Müller et al. (Müller et al., 2003) para la simulación de fluidos, agrega una fuerza extra que no pertenece a las Ecuaciones (2.24) de Navier-Stokes. Esta es la tensión superficial, la fuerza que sufren las partículas de un líquido que se encuentran en la superficie, que actúan hacia el interior del fluido, en la dirección normal a la superficie de cada punto. Esto último produce la tendencia de aplanado de la superficie del líquido.

Más centrado en la simulación de materiales granulares utilizando SPH se puede encontrar en la bibliografía el trabajo de Alduán y Otaduy (Alduán and Otaduy, 2011), que agrega incompresibilidad unilateral al algoritmo Predictive-corrective incompressible SPH (PCISPH) de Solenthaler y Pajarola (Solenthaler and Pajarola, 2009), usado para simulación de fluidos. Le agrega nuevos modelos de fricción y cohesión, para disipar por un lado la velocidad relativa y por otro contrarrestar mediante la cohesión la dispersión del material hasta que se alcanza un límite de desunión. Este modelo gracias a la fricción consigue reproducir avalanchas dinámicas con movimientos realistas, y gracias a la cohesión puede ofrecer efectos de bloqueo y fracturas.

También se utiliza una versión modificada de las ecuaciones de Navier-Stokes para la conservación del momento. Así el flujo es gobernado por la incompresibilidad unilateral formulada por dos desigualdades complementarias. La primera obliga a una presión p positiva y la otra obliga a una densidad ρ menor que la densidad crítica ρ_{max} del material que permite fluir:

$$\rho \leq \rho_{max} \perp p \geq 0 \quad (2.29)$$

Esta complementariedad implica que las fuerzas de presión están presentes solo cuando se alcanza la densidad crítica. Cuando esto último ocurre, se calcula un incremento de presión correctivo Δp_i como en el algoritmo PCISPH original. En caso contrario, el material es libre a fluir y la presión no se corrige. Esto genera regiones de materiales con presión nula, en donde las partículas se mueven libremente, sólo que se limita la distancia mínima entre ellas para evitar posibles problemas si se reactiva la presión. Al utilizar el modelo Lagrangiano, el método no sufre de las inconsistencias producidas por el uso de rejillas Eulerianas, como ocurre en el trabajo de Narain et al. (Narain et al., 2010). De este modo los granos pueden fluir con fronteras arbitrarias.

Ihmsen et al. (Ihmsen et al., 2012) presentan una propuesta que comparado a las propuestas anteriores simula una dinámica granular realista con un alto detalle visual a un bajo coste computacional. Su modelo calcula las fuerzas de fricción y presión en partículas de baja resolución. En una fase posterior, emparejan cada partícula de baja resolución con un conjunto de granos más finos destinados a la visualización. Este trabajo parte del método continuo basado en SPH propuesto por Alduán y Otaduy (Alduán and Otaduy, 2011). Este último trabajo, al corregir las penetraciones de las partículas en los objetos, no conserva el momento y por tanto en el campo presión se pueden producir oscilaciones significativas, además de que puede resultar ruidoso cuando aparecen discontinuidades en las fuerzas de fricción.

En el trabajo de Ihmsen et al. (Ihmsen et al., 2012), para evitar las inconsistencias perceptibles, se emplea un tiempo de paso pequeño y un elevado número de iteraciones por paso. También mejora la robustez y calidad de la simulación adaptando el método de control de límites de Akinci et al. (Akinci et al., 2012) a iteraciones con material granular. Cada vez que se agrega una partícula de baja resolución se muestrea su volumen con

partículas de alta resolución. Así se implementa un núcleo para que las partículas de alta resolución sigan el flujo y puedan dispersarse libremente. Dependiendo de la distancia de la partícula de alta resolución a la de baja, y del radio de acción del núcleo, se suaviza el peso asociado hasta cero. Este núcleo se utiliza para calcular la velocidad de las partículas de alta resolución. Con todas estas modificaciones, el método consigue acelerar hasta en 6 veces el método propuesto por Alduán y Otaduy (Alduán and Otaduy, 2011). De este modo permite trabajar con millones de partículas en tiempos de 1 segundo por frame.

En un segundo trabajo, (Ihmsen et al., 2013), se extiende el estudio anterior elaborando más claramente la inicialización e implementación del modelo de simulación. Se discuten las interdependencias entre las fuerzas de restricción que resultan, ya que influyen negativamente en el sistema de resolución numérico de convergencia, por lo que tratan de adaptar el concepto de *dormir* los sólido rígidos. Además extienden el modelo de simulación para permitir animaciones de materiales secos, húmedos y mojados.

Chang et al. (Chang et al., 2012) presentan un nuevo método basado en SPH para la simulación de flujo granular. Se introduce un nuevo término de estrés elástico, que deriva de una modificación de la ley de elasticidad de Hooke, con el fin de controlar la fricción de los materiales granulares. Se agrega una fuerza de viscosidad a la función de conservación del momento, con el propósito de suavizar el campo velocidad y mejorar la estabilidad de la simulación. Permite grandes deformaciones del flujo con pasos rápidos de simulación. Las condiciones de frontera se refuerzan con un campo distancia con signo. Además, el método permite simular distintos comportamientos del terreno modificando un único parámetro. Cabe destacar que puede manejar un entorno de 10 mil partículas a 10Hzs en un equipo Intel i7 con una gráfica Geforce GTX 460, estando todo implementado en la CPU y sin ningún tipo de paralelismo. En caso de paralelizar e implementar en la GPU se podrían alcanzar tiempos interactivos en escenarios medianos de varios miles de partículas.

FLIP (Fluid-Implicit-Particle)

El método FLIP fue propuesto por Brackbill y Ruppel (Brackbill and Ruppel, 1986) para realizar al cálculo numérico de dinámica de fluidos. Combina representación de partículas con rejillas adaptativas que permiten

ajustar la resolución de ésta según las necesidades. Este método separa en cada ciclo la fase Euleriana sobre malla y la Lagrangiana sobre partículas. Existen trabajos de simulación de materiales granulares basados en este modelo.

Zhu y Bridson (Zhu and Bridson, 2005) presentan un modelo de simulación basado en física para la animación de arena. Ésta última es tratada como un continuo, y no grano a grano, transformando con ligeros cambios un simulador de fluido en un simulador de arena. Combina el uso de partículas y rejillas para obtener las ventajas de ambas técnicas. Usa partículas para la representación básica de la arena y el cálculo de desplazamientos. Utiliza rejillas auxiliares para calcular todas las interacciones espaciales, como las condiciones límite, la incompresibilidad y las fuerzas de fricción. Simula el medio granular comparando dos métodos de dinámica de fluidos: el Particle-in-Cell (PIC) de (Harlow, 1962) y el Fluid-Implicit-Particle (FLIP) de (Brackbill and Ruppel, 1986) adaptándolos a flujos incompresibles.

Narain et al. (Narain et al., 2010) adaptan el modelo de fluido a materiales granulares haciendo la incompresibilidad una restricción unilateral. Permiten la dispersión de partículas cuando se agita el material pero manteniendo el volumen cuando queda en reposo. Modela una unión global de fricción y presión que permite mantener pilas estables en equilibrio. Además ofrece una interacción bilateral entre el material granular y los objetos sólidos del escenario. En este trabajo, el material granular está sometido a fuerzas externas y estrés interno. Este estrés interno representa las fuerzas de contacto y fricción entre los granos individuales de material. Se utiliza una propuesta basada en partículas y rejilla partiendo del método FLIP. El estado del material se proyecta sobre una configuración Euleriana, acumulando los valores de las partículas sobre una rejilla. A partir de esta, se calcula el estrés interno y las fuerzas de interacción con otros cuerpos usando el modelo continuo, teniendo en cuenta la unión fricción-presión. El estrés calculado se usa en la representación Lagrangiana actualizando la velocidad de las partículas. Finalmente, el movimiento de cada partícula es integrado sobre el tiempo dando como resultado la actualización del estado del material.

Con el fin de conseguir una buena representación visual de los materiales granulares es necesario una buena distribución de las partículas, sobre todo en las situaciones en que se separan los granos. Se modela cada partícula

con una forma elipsoidal, que se estira o encoge según el flujo. En aquellos casos en que la forma llega a ser muy alargada o corta, se dividirá en dos o se unirán varias en una partícula, siempre con el fin de mantener una distribución uniforme.

En esta propuesta (Narain et al., 2010), se consigue eliminar la cohesión, se muestra un material incompresible, que con la unión de presión y fricción permite crear montículos de arena según un ángulo crítico. Permite simular diferentes tipos de materiales y tener una interacción bidireccional entre partículas y objetos sólidos. Aunque los tiempos de cálculo resultantes, a pesar de las simplificaciones en los modelos continuos y el sistema híbrido euleriano-lagrangiano, continúan siendo tiempos por encima de los 6 segundos por fotograma, trabajando con tamaños de rejilla de $50 \times 50 \times 50$ y unas 400 mil partículas simuladas.

Nkulikiyimfura et al. (Nkulikiyimfura et al., 2012) proponen un modelo continuo para la simulación física de arena como un fluido con incompresibilidad variable, basado en el trabajo de Narain et al. (Narain et al., 2010). Los cálculos numéricos los realizan en la GPU. Utilizan un modelo basado en rejilla para facilitar los cálculos de las fuerzas de fricción y obtener una presión estable. Se simula la arena como un fluido continuo de pequeños granos. Permite manejar interacciones en subrejillas. La proyección de la presión se trata como una minimización de la energía cinética, terminando en un problema de mínimos cuadrados. Sus pruebas se traducen en unos tiempos casi interactivos, 10 fps en una Geforce GTS 250 simulando 130.000 partículas en una rejilla de tamaño $15 \times 15 \times 15$.

2.4.4. Simulaciones híbridas

En esta sección se describen los trabajos que para simular y representar visualmente un sistema granular utilizan simultáneamente malla y sistemas de partículas. Éstos no incluyen las propuestas basadas en un sistema Lagrangiano de partículas, sino que para acelerar los cálculos hacen uso de rejillas Eulerianas auxiliares.

Tsuda et al. (Tsuda et al., 2010a) proponen un método para simular un tipo concreto de avalancha, formado por tres capas: humo, nieve líquida y nieve acumulada. Simulan el movimiento de la capa de suspensión, la de humo, usando una propuesta basada en rejilla, en donde para cada celda se calculan las fuerzas externas. Para las capas de flujo-denso y nieve acu-

mulada por el contrario se utiliza un sistema de partículas basado en SPH. Se tienen en cuenta las interacciones entre las capas de suspensión y flujo-denso, en donde las partículas de nieve pueden cambiar a la capa de humo, o el humo puede pasar a la capa de flujo-denso. Ambos fluidos se empujan entre sí a través de fuerzas de interacción. Por otro lado, las capas de flujo-denso y nieve acumulada interactúan arrastrando material y aumentando la masa total de la avalancha. Este método permite simular los fenómenos característicos de este tipo de avalanchas de tres capas que suceden en el mundo real. El método presenta el problema de que los tiempos de cálculo distan mucho de tiempos interactivos, ya que este trabajo se centra en la correcta simulación de la avalancha en animaciones, en donde el tiempo no es una restricción crítica.

Zhu y Yang (Zhu and Yang, 2010) usan el modelo BCRE para separar una pila de arena en dos capas: una de flujo superficial y otra estática. La capa superficial se simula utilizando un método de elementos discretos (DEM) para capturar el comportamiento detallado del flujo. La capa estática e invisible se representa usando un mapa de alturas para conseguir una mayor eficiencia. Se utiliza una interfaz de partículas que permite la transferencia de material entre ambas capas, mediante un proceso de erosión y depósito de partículas, manteniendo siempre constante el grosor de la interfaz. El proceso de simulación de la arena consta de tres fases en cada paso de integración: Primero, el mapa de alturas evoluciona utilizando las ecuaciones del BCRE, ver Ecuaciones (2.1). En segundo lugar, se realiza la transferencia de material a través de la interfaz de partículas. Y en tercer lugar, se actualiza la posición y velocidad de las partículas activas. El modelo emplea un sistema de resolución numérico de DEM para describir el comportamiento del movimiento en la escena.

Wong y FU (Wong and Fu, 2015) desarrollan un sistema interactivo para simulación y renderizado de nieve. Utilizan una estructura híbrida que modela la nieve móvil con partículas y la nieve estática con celdas de una rejilla 3D. Toda celda ocupada estará llena de nieve, mientras que si está vacía podrá tener partículas de nieve moviéndose libremente por ella, utilizando DEM para la animación de las partículas. La fuerza total de toda partícula se calcula mediante la suma de la fuerza de repulsión, amortiguación, tangencial y la resultante de un muelle que se acopla entre todo par de partículas próximas. Este muelle proporciona cohesión entre las

partículas de nieve.

El intercambio de material entre celdas y partículas depende del movimiento de la nieve. Partiendo de reposo, la nieve forma parte de una celda de la rejilla, si por fuerzas externas debe desplazarse, toda la celda se convertirá en partículas ocupando todo el volumen. En caso contrario, cuando se acumulen muchas partículas en una celda, esta celda, si no es superficial, se convertirá en nieve estática destruyendo las partículas de su interior. Este intercambio de material está regido por unas reglas que impiden que se muestren celdas ocupadas, con lo que siempre va a existir una capa de partículas en la superficie.

Esta propuesta permite replicar algunos de los comportamientos básicos de la nieve como son: pilas de nieve, división en pedazos después de colisiones y nieve resquebrajándose cuando se empieza a comprimir verticalmente. Ofrece tiempos interactivos en la fase de simulación pero presenta un alto consumo en el proceso de visualización.

2.5. CONCLUSIONES

En la Sección 2.2 se han revisado los diferentes métodos que existen en la literatura para visualizar flujos de material granular. Las diferentes técnicas descritas que emplean para controlar la deformación de la textura se basan en la premisa de que el flujo es gobernado por una ley diferenciable, por ello, el campo de velocidad es continuo. Por esta razón, cuando aparecen discontinuidades en el flujo, los trabajos presentados no pueden mantener un ratio bajo de deformación de la textura. La técnica propuesta en este trabajo está basada en estrategias de advección de textura Eulerianas, basadas en malla de triángulos, como en los trabajos (Max and Becker, 1996; Neyret, 2003). En el método propuesto se usa el algoritmo de Neyret (Neyret, 2003) para el control de deformación fuera de las discontinuidades. Pero además se van a detectar y trazar las discontinuidades en el flujo para realizar una correcta advección de la textura de la malla.

En la Sección 2.4 se ha observado que los modelos que se basan en mallas permiten generar grandes avalanchas a un bajo coste computacional, aunque presentan el problema de que la resolución de la simulación depende de la separación entre puntos de la malla. Esta dependencia no existe si para la simulación de materiales granulares se utiliza un sistema de partí-

culas. En este caso para obtener resultados de alta calidad suelen utilizar un gran número de partículas, aumentando considerablemente el coste de computacional del modelo. Finalmente las simulaciones híbridas destacan al combinar mapas de alturas, actualizadas mediante técnicas Eulerianas, con sistemas de partículas. Estos trabajos consiguen buenas prestaciones al reducir el número de partículas en la simulación, pero siguen perdiendo mucho tiempo en el renderizado de cada una de las partículas.

En consecuencia, este trabajo se basa en la idea de modelo híbrido de Zhu y Yang (Zhu and Yang, 2010), al cual se le va a añadir un modelo 2D para la simulación de partículas, lo que va a reducir las operaciones a un dominio de dos dimensiones. Además, las partículas no se van a renderizar, sino que almacenarán información de alturas que se utilizará para actualizar mediante el modelo BCRE las alturas de cada punto de la malla. Siguiendo la idea de Ihmsen et al. (Ihmsen et al., 2013) de usar un núcleo de suavizado del SPH para calcular la velocidad de las partículas de alta resolución partiendo de las de baja, se va a proponer el uso de un núcleo de suavizado para calcular la velocidad en cada punto de la malla a partir de la velocidad de las partículas. Esto va a generar un campo de velocidades que se usará como entrada en el modelo de visualización para la advección.

VISUALIZACIÓN BASADA EN MALLA

La línea de investigación desarrollada y descrita en esta memoria viene motivada por la necesidad de visualizar en tiempo interactivo una avalancha de material granular. Tal como se ha concluido en el capítulo anterior, la forma menos costosa de visualizar el material granular, así como todos sus comportamientos fenomenológicos, consiste en hacerlo empleando una malla texturizada. Esta malla representa la altura y cantidad de material granular en cada punto del escenario. Para visualizar la avalancha se desplazará la textura acorde a la velocidad del material en movimiento.

La simulación del material granular generará un campo de flujo, que será empleado por el modelo de visualización para decidir cuanto se debe desplazar la textura. Los campos de flujo se caracterizan por presentar discontinuidades, que son variaciones en la velocidad y dirección de los flujos. Estas discontinuidades pueden por ejemplo separar el material estático del que se encuentra en movimiento o pueden separar dos flujos o avalanchas en distinta dirección, delimitando la avalancha, (ver Figura 3.1).

En el presente capítulo se va a describir un nuevo método para la visualización de un campo de flujo con discontinuidades sobre una malla de triángulos texturizada. El flujo se va a representar mediante advección de textura, utilizando los mecanismos de control de deformación presentados en (Max and Becker, 1996; Neyret, 2003) en las áreas del flujo sin discontinuidades. Se va a describir formalmente una discontinuidad, un mecanismo para detectarla cuando tiene lugar en los vértices de una malla, y un modelo de rastreo y evolución de la misma. Posteriormente, se propone un método

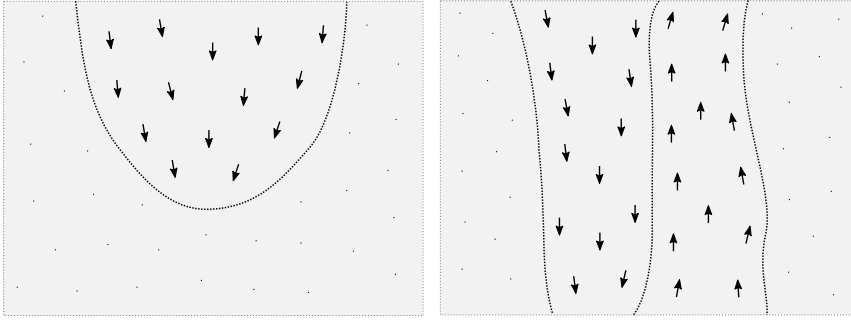


Figura 3.1: Imágenes de flujos en los que la línea de puntos representa la discontinuidad y las flechas la dirección de los flujos. En la imagen de la izquierda se observa el flujo de una avalancha delimitado por una discontinuidad que lo separa del material en reposo. En la imagen de la derecha dos flujos con distinta dirección son separados por una discontinuidad.

de remallado de las zonas afectadas por la discontinuidad, en donde se va a aproximar la advección de textura a ambos lados de la discontinuidad.

3.1. DETECCIÓN Y EVOLUCIÓN DE UNA DISCONTINUIDAD

Se considera un campo vectorial que representa el campo velocidad de un flujo, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ en un dominio de 2 dimensiones. Se visualiza el flujo usando una malla de triángulos texturizada cubriendo todo su dominio. También se asume que la textura es transportada sobre la malla siguiendo el campo velocidad usando los métodos de advección de textura (Max and Becker, 1996; Neyret, 2003) descritos en el estado del arte en la subsección 2.2.1.

Se considera que el campo vector contiene una discontinuidad y se asume que los puntos de la discontinuidad son la imagen de una curva diferenciable sobre el dominio del flujo. Se trabaja sobre la premisa de que no se tiene una descripción analítica, ni de la forma de la discontinuidad, ni de su evolución durante la simulación. Además, la velocidad de la discontinuidad no necesita tener ninguna relación con el campo vector.

Para todo vértice, i , se considera su posición, \mathbf{x}_i , y sus coordenadas de textura, $\mathbf{c}_i = (u_i, v_i)$. Sean i, j los índices de dos vértices en la malla de

triángulos conectados por una arista, $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$ será el vector que los conecta. Además, para todo vértice se tiene el valor del campo de velocidad en su posición, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i)$.

En esta sección se describe como detectar la existencia de una discontinuidad inspeccionando el campo vectorial en los vértices de la malla y cómo trazar su evolución. Primero se detectan las discontinuidades asociadas a las aristas comparando la velocidad de los vértices adyacentes. Como suposición inicial, se asume que la discontinuidad no viaja a través del dominio. Si más tarde se detecta que la discontinuidad ha dejado la arista inicial y se ha movido a otra vecina, se estima la velocidad de traslación de la discontinuidad y se calcula su evolución.

3.1.1. Descripción de la discontinuidad

Con el fin de construir una representación de la discontinuidad, se necesita detectar los puntos donde se interseca a las aristas de la malla de triángulos. Se considera que una discontinuidad del campo vector cruza una arista i, j si la derivada direccional de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ a lo largo de la arista \mathbf{x}_{ij} , estimada por la diferencia de primer orden, es mayor que un umbral definido por el usuario M

$$\nabla_{\mathbf{x}_{ij}} \mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{x}_{ij}\|} \geq M. \quad (3.1)$$

En ese caso, se agrega un punto de discontinuidad \mathcal{D}_{ij} a la lista de intersecciones entre la discontinuidad y la malla de triángulos. Este umbral M controla la sensibilidad de detección de discontinuidades, si se establece muy bajo, pequeñas diferencias de velocidad entre vértices adyacentes serán detectadas como discontinuidad.

Para cada punto de discontinuidad se almacena información sobre su posición y sobre su velocidad. La posición de la intersección será descrita con un parámetro $f_{ij} \in [0, 1]$ que indica la distancia normalizada desde un vértice \mathbf{x}_i a la intersección a lo largo de la arista, de este modo la intersección es localizada en el punto \mathbf{d}_{ij} como

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{x}_i + f_{ij}\mathbf{x}_{ij}.$$

Se asume que la discontinuidad puede viajar a lo largo del dominio del flujo y que un punto de discontinuidad \mathcal{D}_{ij} tiene una velocidad \mathbf{w}_{ij} . Nótese

que esta velocidad no tiene ninguna relación con el campo velocidad definido sobre el dominio. En realidad, el hecho de que haya una discontinuidad hace que el campo velocidad no esté definido en ese punto. Se va a aproximar la velocidad del punto de discontinuidad, \mathbf{d}_{ij} , a lo largo de la arista \mathbf{x}_{ij} . Para hacer esto, se linealiza la curva en \mathbf{d}_{ij} , aproximándola por su tangente. Interesa la velocidad de la discontinuidad sólo en la dirección ortogonal a la curva, ya que la velocidad en la dirección tangencial no cambiará la localización de la intersección. Abusando de anotación se llama velocidad ortogonal de la curva a \mathbf{w}_{ij} .

Bajo asunciones previas, se define la velocidad de la intersección a lo largo de la dirección de la arista, w_{ij} , como sigue. Sea $s_{ij} = \|\mathbf{w}_{ij}\|$ el módulo de la velocidad ortogonal, y $\mathbf{s}_{ij} = \frac{\mathbf{w}_{ij}}{s_{ij}}$ y $\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|}$ vectores unitarios en la dirección de la velocidad y de la arista respectivamente. Entonces, la proyección del vector $w_{ij}\mathbf{u}_{ij}$ sobre la dirección de \mathbf{s}_{ij} tiene que ser s_{ij} . Esto es

$$w_{ij}\mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{s}_{ij} = s_{ij} \quad (3.2)$$

La Figura 3.2 muestra las variables usadas para describir un punto de discontinuidad. También se registra el tiempo en el que la discontinuidad es creada, t_{ij} , y que será usado más tarde para actualizar la estimación de w_{ij} .

Todas las variables relacionadas con \mathcal{D}_{ij} se han definido considerando que la arista está orientada, yendo desde el vértice i al vértice j . Si se considera la situación inversa (ir desde el vértice j al vértice i), entonces las cantidades correspondientes son $f_{ij} = 1 - f_{ji}$ y $w_{ij} = -w_{ji}$.

3.1.2. Evolución de los puntos de discontinuidad

En este apartado se va a describir como se traza el desplazamiento de un punto de discontinuidad \mathcal{D}_{ij} debido a su velocidad \mathbf{w}_{ij} . Para ello se necesita determinar la evolución de las variables f_{ij} y w_{ij} . Cuando se detecta un punto de discontinuidad \mathcal{D}_{ij} , se van almacenando todos sus datos mientras permanezca activa, es decir, mientras la condición (3.1) se cumpla para la pareja (i, j) . Durante este tiempo, se considera que w_{ij} es constante. En consecuencia, en todo fotograma se actualiza la posición del punto de

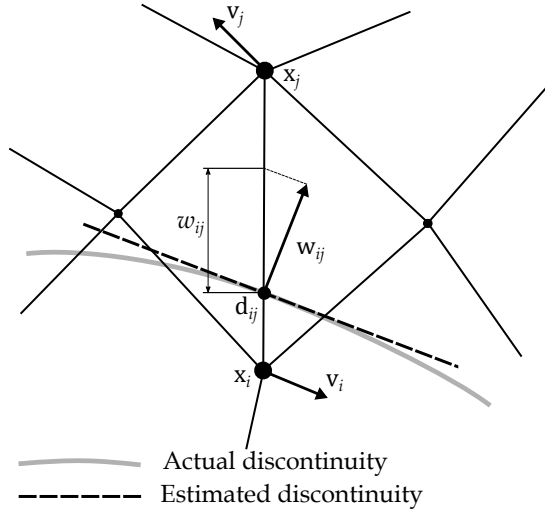


Figura 3.2: Descripción de un punto de discontinuidad y las variables involucradas.

discontinuidad siguiendo la siguiente ecuación:

$$f_{ij}^{t+\Delta t} = f_{ij}^t + w_{ij}\Delta t$$

donde los superíndices indican el tiempo t y Δt representa el tiempo entre dos fotogramas consecutivos.

Si la discontinuidad se está moviendo actualmente con velocidad $w_{ij} \neq 0$ a lo largo de la dirección \mathbf{u}_{ij} , entonces alcanzará eventualmente a algunos de los vértices, por ejemplo el vértice j . Cuando esto ocurra, ambos vértices i y j estarán en el mismo lado de la discontinuidad y D_{ij} ya no existirá. Esta situación se detectará cuando la ecuación (3.1) no se cumpla.

Por otra parte, la discontinuidad también podrá intersecarse con otras aristas $(j, \beta), \beta = k_1, \dots, k_r$ que inciden en el vértice j . Si es este el caso y aparece alguna nueva discontinuidad, entonces, con el fin de calcular la $w_{j\beta}$ diferente, se necesita estimar la velocidad de la discontinuidad cuando cruza el vértice j .

La Figura 3.3 muestra una posible transición de dos puntos de discontinuidad a uno nuevo cruzando un vértice.

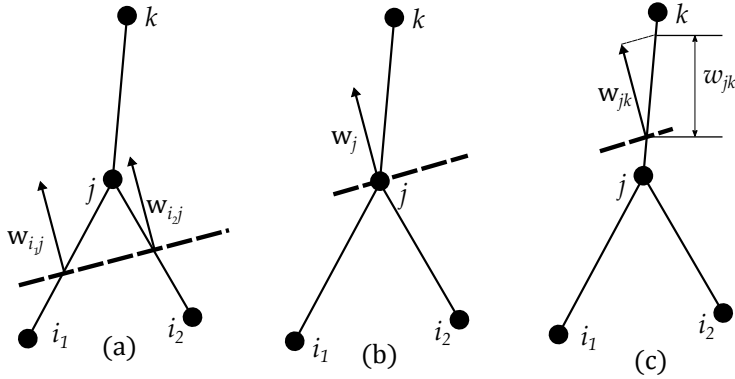


Figura 3.3: Evolución de una discontinuidad a través de un vértice. Si una discontinuidad tiene velocidad constante, los puntos asociados alcanzarán finalmente el final de sus aristas (a). Entonces, los viejos puntos de discontinuidad desaparecerán (b), y nuevos aparecerán en las aristas al otro lado del vértice (c).

Se considera la situación en la que se tiene un conjunto de n puntos de discontinuidad $\mathcal{D}_{\alpha j}$, $\alpha = i_1, \dots, i_n$ que convergen en el vértice j en el instante de tiempo t . El primer paso para estimar la velocidad de la discontinuidad cuando cruza el vértice j supone corregir los valores $w_{\alpha j}$ calculando la actual media de velocidades como

$$\bar{w}_{\alpha j} = \frac{\|\mathbf{x}_{\alpha j}\|}{t - t_{\alpha j}} \quad (3.3)$$

donde $t_{\alpha j}$ es el tiempo en el que $\mathcal{D}_{\alpha j}$ fue creado.

Una vez que las velocidades longitudinales han sido actualizadas, la velocidad de la discontinuidad, $\mathbf{w}_j = s_j \mathbf{s}_j$, se estima por aproximación de mínimos cuadrados. Con el fin de plantear el problema de mínimos cuadrados, se usa la ecuación (3.2), que define la relación entre \mathbf{w}_j y $\bar{w}_{\alpha j}$,

$$\bar{w}_{\alpha j} \mathbf{u}_{\alpha j} \cdot \mathbf{s}_j = s_j, \quad \alpha = i_1, \dots, i_n, \quad (3.4)$$

donde \mathbf{s}_j y s_j son desconocidos. Si se divide (3.4) por s_j , y se considera

$\mathbf{r}_j = \mathbf{s}_j/s_j$ entonces

$$\bar{w}_{\alpha j} \mathbf{u}_{\alpha j} \cdot \mathbf{r}_j = 1, \quad \alpha = i_1, \dots, i_n, \quad (3.5)$$

Se puede escribir el sistema de ecuaciones (3.5) en forma matricial como $\mathbf{W} \cdot \mathbf{r}_j = \mathbf{1}$ donde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{i_1 j} \mathbf{u}_{i_1 j} \\ \vdots \\ w_{i_n j} \mathbf{u}_{i_n j} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Si $n > 2$, esto es, si más de dos puntos de discontinuidad convergen en el vértice j , entonces el sistema está sobre determinado y se necesita resolver un problema de mínimos cuadrados, tal y como se ha indicado anteriormente. Si $n = 2$, entonces (3.5) es un sistema de ecuaciones 2×2 . Finalmente, si $n = 1$, entonces no se tiene información suficiente para decidir la dirección y magnitud de \mathbf{w}_j . En ese caso se utiliza $\mathbf{w}_j = \bar{w}_{i_1 j} \mathbf{u}_{i_1 j}$, que cumple (3.5) y es consistente con la información que se tiene del punto de discontinuidad que desaparece. La Figura 3.4 representa los vectores envueltos en el problema de mínimos cuadrados.

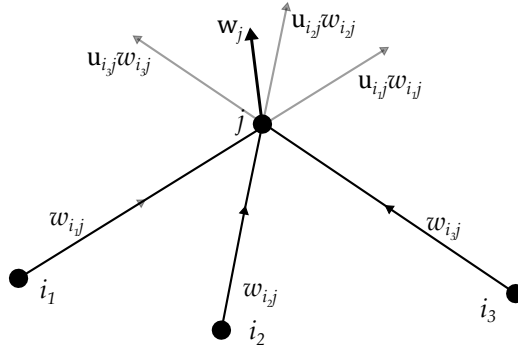


Figura 3.4: Cuando varias discontinuidades cruzan un vértice, la nueva velocidad se calcula usando la información de sus velocidades previas por aproximación de mínimos cuadrados.

Una vez se ha determinado el valor de \mathbf{w}_j usando (3.5) se inicializa la velocidad de todas las aristas (j, β) que tienen una discontinuidad. Usando

(3.2) y la definición de \mathbf{r}_j se establece

$$w_{j\beta} = \frac{1}{\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{x}_{j\beta}}, \quad \beta = k_1, \dots, k_r. \quad (3.7)$$

El procedimiento propuesto para actualizar w_{jk} depende de la existencia de una discontinuidad anterior (i, j) que desaparezca cuando (j, k) aparezca. Sin embargo, cuando un punto de discontinuidad \mathcal{D}_{jk} se detecta por primera vez comprobando la ecuación (3.1), no se tiene información previa sobre el punto de intersección exacto o de la velocidad de la discontinuidad. Como suposición inicial, en este caso, se considera que el punto está en el medio de la arista entre los vértices j y k , y que tiene velocidad cero, poniendo $f_{jk} = 1/2$ y $w_{jk} = 0$.

3.1.3. Cuestiones sobre la estimación de la velocidad

La estimación de \mathbf{w}_{ij} se ha considerado constante en el lapso de tiempo en el que la discontinuidad permanece en el vértice (i, j) . A continuación se discute como esta suposición afecta a la estimación de la discontinuidad.

Si, de media, la velocidad actual del punto de discontinuidad \mathcal{D}_{ij} es mayor que la velocidad estimada \mathbf{w}_{ij} , entonces la posición estimada \mathbf{d}_{ij} no alcanzará \mathbf{x}_j . Antes de que esto ocurra, la discontinuidad actual cruzará el vértice y la discontinuidad de la arista (i, j) desaparecerá. Este problema, sin embargo, no es difícil de superar. La vieja discontinuidad puede mantenerse activa hasta que $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{x}_j$. La velocidad podría incrementarse por un factor para reducir el error.

Si, por el contrario, la velocidad actual del punto de discontinuidad \mathcal{D}_{ij} es más pequeña que \mathbf{w}_{ij} , entonces la posición \mathbf{d}_{ij} alcanzará \mathbf{x}_j antes que la discontinuidad actual. Cuando esto ocurre, el punto de discontinuidad se retiene en el vértice \mathbf{x}_j hasta que la discontinuidad actual lo alcance y en ese instante la velocidad del punto de discontinuidad se corrige aplicando la ecuación (3.3).

Un caso particular de la situación anterior es cuando la discontinuidad para antes de alcanzar el vértice. En este caso, la posición de la discontinuidad estimada no será exacta, pero la visualización no sufrirá inconsistencias.

La última posibilidad que no ha sido considerada es cuando la discontinuidad actual cambia su dirección y sale de la arista por el mismo vértice por el que entró. Visualmente este caso es similar al caso cuando la velocidad

actual es mayor que la estimada; se produce un salto de \mathbf{d}_{ij} , el cual regresa a \mathbf{x}_i cuando va a mitad camino del vértice opuesto. Otra vez, el problema puede ser solventado con la misma estrategia propuesta anteriormente, sin embargo este caso necesita una consideración adicional. Si aplicamos la Ecuación (3.3) directamente entonces tenemos $\bar{w}_{ij} = 0$, el cual tal vez haya subestimado otra vez el valor correcto provocando un nuevo salto en el siguiente vértice. En el modelo presentado se considera que el punto se ha movido bajo una aceleración negativa constante. En este caso, la velocidad de salida sería

$$\bar{w}_{ij} = -w_{ij}. \quad (3.8)$$

3.2. REMALLADO DE LOS TRIÁNGULOS AFECTADOS POR LA DISCONTINUIDAD

Usando la lista de puntos de discontinuidad construida en la sección previa, se va a proceder a modificar la malla con el fin de evitar la deformación de la textura en los triángulos afectados por la discontinuidad. Para ello durante el proceso de renderizado de la malla de triángulos, todos aquellos que presentan alguna discontinuidad en cualquiera de sus lados, son divididos en varios subtriángulos.

Dependiendo del número de lados del triángulo afectados por una discontinuidad se proponen tres esquemas de remallado diferente, los cuales se muestran en la Figura 3.5. La tercera imagen de esta figura, que representa la situación donde un triángulo envuelve tres discontinuidades, es poco probable si se tiene una única discontinuidad sin intersecciones. Sin embargo, esta situación puede ocurrir cuando dos discontinuidades se cruzan dentro de un triángulo.

En todas las posiciones de la discontinuidad, \mathbf{d}_{ij} , se introducen dos vértices. Para hacer esto, el triángulo que incluye la subarista desde \mathbf{x}_i a \mathbf{d}_{ij} debería tener diferentes coordenadas de textura que el triángulo que incluye la subarista desde \mathbf{d}_{ij} to \mathbf{x}_j . En la Figura 3.5 los puntos que contienen un doble vértice se indican con un doble punto. Como ejemplo, en el esquema para una única discontinuidad se subdivide el triángulo original en tres subtriángulos 012, 023 y 034. Notese que el segundo triángulo es degenerado y ayuda creando la discontinuidad visual en la textura.

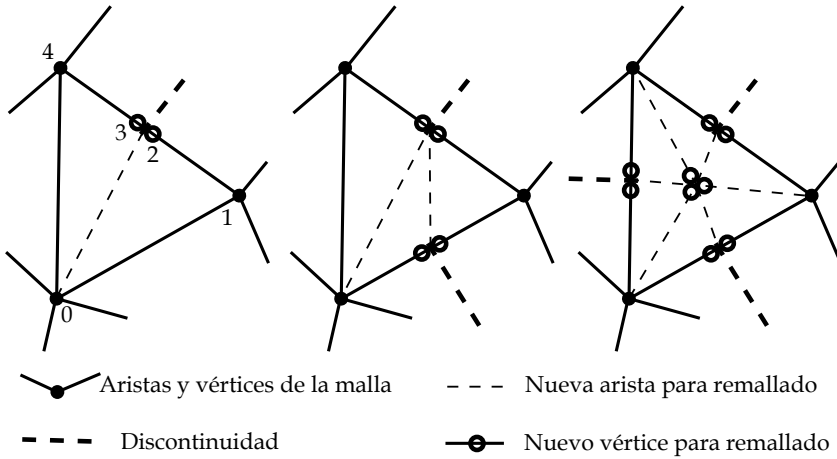


Figura 3.5: Cuando un triángulo tiene aristas con discontinuidades se remalla. Dependiendo del número de discontinuidades detectadas, se usa un esquema distinto. En el vértice que pertenece a la frontera se necesita agregar doble o triple vértice para asignar diferentes coordenadas de textura en el mismo punto en diferentes triángulos.

A la nueva posición del vértice en el punto de discontinuidad tendrá que asignársele un valor de coordenada de textura dependiendo de que lado de la discontinuidad en que se encuentre. Como la coordenada de textura no está definida en tales puntos, sino que está sólo almacenada en los vértices de la malla original, el valor de la coordenada de textura tendrá que ser estimado.

Se propone usar extrapolación lineal usando la Jacobiana de la coordenada de textura en los vértices del triángulo (Correa et al., 2011), estimada con los vertices adyacentes no afectados por ninguna discontinuidad. Sea $\mathbf{c}_i = (u_i, v_i)$ la coordenada de textura en el vértice i . Se desarrolla la estimación para la coordenada de textura u , mientras que el desarrollo para la coordenada v es completamente análogo. Si se considera la coordenada de textura como una función diferenciable de la posición, entonces, por su expansión de Taylor en \mathbf{x}_i , se tiene que la coordenada de textura para el punto \mathbf{d}_i se puede aproximar como

$$u(\mathbf{d}_i) \simeq u(\mathbf{x}_i) + \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{d}_i - \mathbf{x}_i). \quad (3.9)$$

Con el fin de estimar $\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}_i)$ se aplica (3.9) a cualquier vértice adyacente a \mathbf{x}_i que no esté separado por una discontinuidad. Eso es, dados los vértices vecinos $\mathbf{x}_{k_1}, \dots, \mathbf{x}_{k_r}$ a \mathbf{x}_i tal que la arista (i, k_l) no es intersecada por una discontinuidad (p.e. no cumple (3.1)), se tiene

$$u(\mathbf{x}_{k_l}) = u(\mathbf{x}_i) + \nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{x}_{k_l i}, \quad l = 1, \dots, r \quad (3.10)$$

expresión que define un sistema de ecuaciones no lineales sobre la desconocida $\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}_i)$. Otra vez, se usa la aproximación por mínimos cuadrados si el sistema es sobredeterminado.

Puede ocurrir que no se tengan vértices vecinos disponibles para estimar el gradiente. En este caso, el vértice está completamente aislado por discontinuidades. Si es así, para estimar su valor se usará el valor del gradiente de un paso anterior si lo hubiese y en caso contrario se empleará un gradiente precalculado que use las coordenadas de textura sin deformar.

Si se está usando una técnica de advección de textura que implica la mezcla de varias capas de textura, como ocurre en el método de Neyret (Neyret, 2003), entonces se necesita extrapolar el valor de cada capa. Sin embargo el gradiente solo necesita ser calculado una vez, ya que las texturas de las diferentes capas se desplazan normalmente una cantidad fija.

3.3. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado un método de visualización de flujos basado en advección de textura que resuelve el problema de la deformación de la textura cuando se tienen flujos que presentan discontinuidades. Se ha propuesto un algoritmo para detectar una discontinuidad y trazar su evolución usando sólo la información disponible en los vértices de la malla de triángulos. Cuando una discontinuidad se detecta, la malla se modifica para proporcionar una representación marcada de la frontera con una advección de textura consistente.

Este método va a ser utilizado para visualizar avalanchas de materiales granulares. Para ello, es necesario generar un flujo adecuado, que represente tales avalanchas. En los capítulos siguientes se van a proponer modelos de simulación de avalanchas de materiales granulares que generen estos flujos.

ESQUEMAS DE DIFERENCIAS FINITAS PARA SIMULACIÓN DE AVALANCHAS

En el capítulo anterior se ha propuesto una técnica para visualizar flujos de materiales granulares mediante una malla texturizada. En este capítulo se plantea la utilización del modelo BCRE para generar un campo de velocidades adecuado para el modelo de visualización anterior. Primeramente se estudiará si la discretización del modelo permite simular los comportamientos observados en estudios experimentales. En segundo lugar se analizará la exactitud de los campos de velocidades obtenidos después de discretizar el modelo BCRE.

El modelo BCRE es un sistema de ecuaciones derivadas parciales (2.1). La forma más adecuada de discretizarlo es mediante esquemas de diferencias finitas (Haderler and Kuttler, 1999a; Falcone and Vita, 2006). Dependiendo de este esquema las avalanchas presentarán distintas características, tanto en forma como en su evolución. En consecuencia se va a estudiar el esquema de diferencias finitas que obtenga una evolución y expansión más similar a estudios experimentales de avalanchas (Daerr and Douady, 1999b).

Durante el capítulo se va a demostrar como el esquema propuesto por Falcone y Vita (Falcone and Vita, 2006) ofrece una correcta evolución de la avalancha, pero no es capaz de expandirla. Como alternativa se propone utilizar el esquema de Lax-Friedrichs que ofrece tanto una correcta evolución de la avalancha como la posibilidad de su expansión.

Finalmente se concluye que tanto el modelo del BCRE como su discretización presentan una serie de limitaciones que no lo hacen adecuado para reproducir avalanchas en un entorno virtual.

4.1. EVOLUCIÓN DE AVALANCHAS EN ESQUEMAS DE DIFERENCIAS FINITAS

En este apartado se verá como al utilizar las ecuaciones en derivadas parciales del BCRE (2.1), la evolución de la avalancha, así como su estabilidad y forma, depende directamente del esquema de diferencias finitas utilizado en la discretización del modelo. Se van a estudiar diferentes esquemas encontrados en la bibliografía, que deben ofrecer al discretizar el modelo una evolución de la avalancha estable y coherente con la pendiente.

De acuerdo a estudios empíricos, una avalancha causada en un punto de una pendiente se extiende definiendo una forma característica. En los trabajos de Daerr y Douady (Daerr and Douady, 1999a) (Daerr, 2001b) se describen dos comportamientos principales en las avalanchas dependiendo del grosor de la capa de material móvil. Cuando una avalancha está formada por una capa móvil fina, crecerá lateralmente conforme se desplaza hacia abajo, generando una forma triangular. Mientras que si la capa móvil es gruesa, la avalancha también se propagará pendiente arriba, causando eventualmente que la superficie entera se deslice. En ambas situaciones, la avalancha no solo se propaga pendiente abajo sino que también se expande lateralmente

Para poder estudiar cual es el esquema de diferencias finitas más adecuado, se va a utilizar un entorno tridimensional con material granular en reposo donde se simula una avalancha utilizando el modelo BCRE. Se considera que el material está dispuesto formando una pendiente en el eje Y con un ángulo igual al ángulo crítico del material que se simula. Por simplicidad en el análisis se considera nulo el gradiente en el eje X . El dominio del espacio está dividido por un rejilla 2D de celdas cuadradas iguales, las cuales almacenan la altura del material en cada posición del espacio. Se inicia una avalancha incrementando la altura de la capa móvil de un grupo de celdas centrales y se deja evolucionar el sistema, calculando las alturas de cada celda utilizando el modelo BCRE, Ecuaciones(2.1).

La ecuación que calcula la altura R_t de la capa móvil del modelo BCRE es una ecuación hiperbólica:

$$u_t + au_x + bu = f(t, x) \quad (4.1)$$

donde u_t y u_x son las derivativas de un valor u respecto al tiempo y espacio, y los dos parámetros a y b caracterizan respectivamente las velocidades de

propagación y las oscilaciones del valor u . Las dos derivativas presentes en la ecuación son las que se van a discretizar a continuación empleando cualquiera de los siguientes esquemas de diferencias finitas.

Se ha definido una rejilla de puntos en el plano XY , de tal manera que, siendo n y m números arbitrarios, cualquier punto de la rejilla se identifica con $(n, m) = (nk, mh)$, donde k y h son números positivos que en este escenario hacen referencia al tiempo y al espacio respectivamente. Para cualquier función v definida en la rejilla se escribe v_m^n para identificar al valor de v en el punto de la rejilla (n, m) .

Los esquemas más comunes de diferencias finitas que existen son el *Forward-Time Forward-Space* (Ecuación 4.3) y el *Forward-Time Backward-Space* (Ecuación 4.5) que presentan propiedades similares.

Forward-Time Forward-Space. En este esquema se realizan las diferencias del valor v en el tiempo y espacio actual con el valor de la posición siguiente en el espacio.

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = -bv_m^n \quad (4.2)$$

Si se despeja el valor del siguiente paso de tiempo v_m^{n+1} se obtiene:

$$v_m^{n+1} = \left(-bv_m^n - a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} \right) k + v_m^n \quad (4.3)$$

Forward-Time Backward-Space. En este esquema se compara el valor v en el tiempo y espacio actual con el valor de la posición anterior en el espacio.

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = -bv_m^n \quad (4.4)$$

Despejando el valor del siguiente paso de tiempo v_m^{n+1} se obtiene:

$$v_m^{n+1} = \left(-bv_m^n - a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} \right) k + v_m^n \quad (4.5)$$

Estos esquemas aplicados al escenario descrito en esta sección, ofrecen una evolución correcta del material pendiente abajo siempre que el gradiente de la pendiente sea opuesto al sentido de la diferencia espacial. En caso contrario, el material de la capa móvil se acumulará en la celda formada únicamente por material estático ($h \geq 0, R = 0$) anterior a otra con

material móvil ($R > 0$). La ventaja de ambos esquemas es que mantienen constante la cantidad de material granular, es decir la suma de las alturas de la capa estática y de la dinámica. La Figura 4.1 muestra un ejemplo de evolución de avalancha en un escenario en dos dimensiones, en donde se deja evolucionar el material móvil, representado por una columna negra, usando *Forward-Time Forward-Space* en la imagen de la izquierda y *Forward-Time Backward-Space* en la figura de la derecha. El punto indica el inicio de la avalancha y la flecha hacia donde evoluciona.

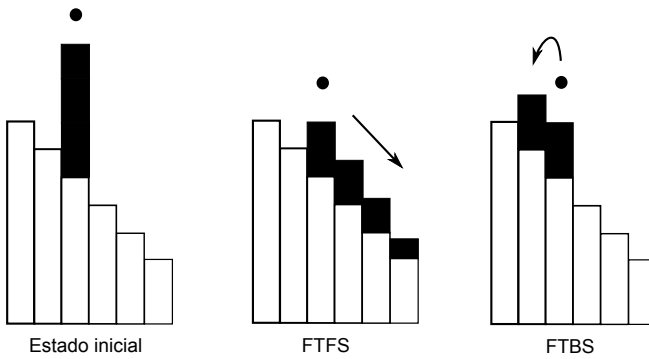


Figura 4.1: Captura de la evolución de una avalancha en una pendiente en 2D tras un tiempo transcurrido. Las columnas negras representan el material móvil, las blancas la capa estática. El punto es el inicio de la avalancha. La flecha indica hacia donde ha evolucionado el material. En la imagen de la izquierda se ha usado el modelo BCRE con el esquema *Forward-Time Forward-Space*(FTFS). En la imagen de la derecha se ha usado el modelo BCRE con el esquema *Forward-Time Backward-Space*(FTBS).

Los esquemas *Forward-Time Central-Space* (Ecuación 4.7) y *Central-Time Central-Space* (Ecuación 4.9) ofrecen un funcionamiento similar, produciendo éste último una evolución más rápida en el tiempo que el primero.

Forward-Time Central-Space. En este caso, la diferencia se realiza entre el valor en el instante de tiempo actual de la posición anterior v_{m-1}^n y la siguiente v_{m+1}^n del dominio del espacio. Destacar que el recorrido en el espacio es de dos incrementos y no sólo de uno como en los casos anteriores.

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = -bv_m^n \quad (4.6)$$

Despejando el valor del siguiente paso de tiempo v_m^{n+1} se obtiene:

$$v_m^{n+1} = \left(-bv_m^n - a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} \right) k + v_m^n \quad (4.7)$$

Central-Time Central-Time (Leapfrog). En este esquema de diferencias finitas, el valor en el siguiente paso de tiempo no depende del valor actual, sino del valor que tenía en el instante de tiempo anterior v_m^{n-1} . El esquema realiza la diferencia centrada en el espacio, entre el valor siguiente v_{m+1}^n y el anterior v_{m-1}^n .

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = -bv_m^n \quad (4.8)$$

Despejando el valor del siguiente paso de tiempo v_m^{n+1} se obtiene:

$$v_m^{n+1} = \left(-bv_m^n - a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} \right) 2k + v_m^{n-1} \quad (4.9)$$

Estos esquemas no tienen en cuenta en el cálculo de la diferencia en el espacio la altura de la celda actual v_m^n , sino que restan $v_{m+1}^n - v_{m-1}^n$. No presentan el problema de direccionalidad de los esquemas anteriores, ya que el material va a evolucionar correctamente pendiente abajo independiente del sentido del gradiente. Sin embargo ambos esquemas producen inestabilidades cuando la avalancha alcanza una celda en la que se produce un cambio de gradiente. Si la celda que presenta el cambio de signo posee una altura inferior que sus vecinas, la altura de su material móvil se incrementa drásticamente. En la situación contraria, si la celda de cambio de signo de gradiente posee mayor altura que sus vecinas, su altura se reducirá rápidamente. Un ejemplo gráfico se muestra en la Figura 4.2.

El esquema particular para el modelo BCRE descrito por Falcone y Vita (Falcone and Vita, 2006) modela el proceso de generación de una pila de arena, resultante de verter arena por medio de una fuente vertical sobre una superficie plana limitada por paredes. Este esquema realiza diferencias *Forward-Space* o *Backward-Space*, como las usadas en (4.3) y (4.5), dependiendo del signo del gradiente de la celda. En el escenario planteado en esta sección, este esquema va a producir una correcta evolución de la avalancha

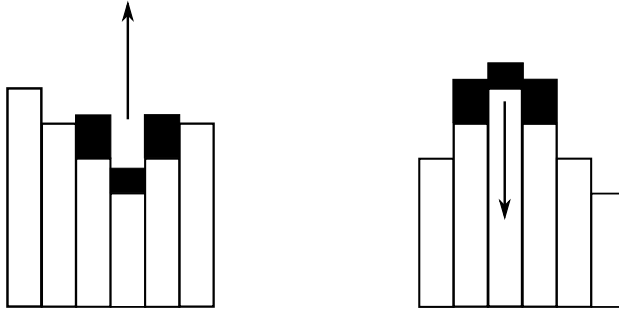


Figura 4.2: Captura de la evolución de una avalancha tras un tiempo transcurrido en dos escenarios 2D con cambio de signo de gradiente. Las columnas negras representan el material móvil, las blancas la capa estática. La flecha indica el drástico incremento o decremento de material. En ambas imágenes se ha usado el modelo BCRE con el esquema Central-Time Central-Space.

pendiente abajo, manteniendo constante la cantidad de material en el sistema. Pero esto no es suficiente ya que también es importante que la avalancha generada durante la evolución del material presente un comportamiento realista, como el descrito por Daerr y Douady (Daerr and Douady, 1999a). La avalancha debe expandirse lateralmente e incluso pendiente arriba dependiendo del grosor de la capa de material móvil. En la siguiente sección se analiza el comportamiento cuando simula una avalancha generada en un punto aislado en la pendiente.

4.2. DIFUSIÓN LATERAL DE UNA AVALANCHA

En este apartado se va a realizar un análisis matemático de la difusión lateral que ofrece el esquema de diferencias finitas propuesto por Falcone y Vita (Falcone and Vita, 2006) (el esquema FV a partir de ahora) aplicado al modelo BCRE. El objetivo del análisis es cuantificar la expansión lateral y pendiente arriba de una avalancha en una pendiente.

Para ello, se considera un sistema con una avalancha activa, y se analiza la evolución de un punto de la rejilla de diferencias finitas que está junto a

la avalancha, pero no afectado por ella.

Se considera una rejilla regular alineada con los ejes X e Y , que discretiza el dominio espacial del problema. El espacio entre celdas de la rejilla se denota como s y el paso de tiempo para la integración temporal numérica se denota como Δt . Los nodos de la rejilla se denotan por índices (i, j) . El valor de la solución discretizada de la ecuación (2.1) en el punto de la rejilla (i, j) y el tiempo $t_n = t_0 + n\Delta t$ se denota como $(h_{i,j}^n, R_{i,j}^n)$.

Se considera un punto de la rejilla (i, j) que no tiene avalancha activa en el tiempo t_n . Como el grosor de la avalancha es dado por $R(x, t)$ en (2.1), esto es equivalente a $R_{i,j}^n = 0$. Como también se considera que este punto está en el borde de una avalancha activa, sólo uno de sus nodos adyacentes tiene activa una avalancha. Sin pérdida de generalidad se asume que es el nodo $(i - 1, j)$, teniendo

$$R_{i-1,j}^n > 0; \quad R_{i+1,j}^n = R_{i,j+1}^n = R_{i,j-1}^n = 0. \quad (4.10)$$

Por otra parte, se considera que ninguna fuente externa agrega material móvil en el punto (i, j) , es decir $f_{i,j} = 0$. La Figura 4.3 muestra la situación descrita. En la figura, los nodos con doble círculo representan las posiciones con avalancha, mientras que los que sólo tienen un círculo corresponden a posiciones sin avalancha.

Interesa la situación cuando el punto (i, j) se localiza pendiente arriba o en el mismo nivel que el punto con una avalancha activa $(i - 1, j)$. En consecuencia, se considera que, en el punto (i, j) , la pendiente no va hacia abajo en la dirección desde el punto de la rejilla (i, j) al punto $(i + 1, j)$. Esto es lo mismo que decir que el gradiente de la capa estática, $Dh_{i,j}(x, t)$, tiene la primera coordenada positiva o nula.

$$Dh_{i,j}(x, t) = (a, b); \quad a \geq 0, b \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

A continuación se muestra cómo, usando el esquema de diferencia finitas FV, la avalancha no tiene efecto en el punto (i, j) .

4.2.1. Análisis del esquema de diferencias finitas FV

Usando las definiciones previas del esquema de diferencias finitas FV (ver sección 2.3.1), el valor de $R_{i,j}^{n+1}$ puede ahora calcularse desde la ecua-

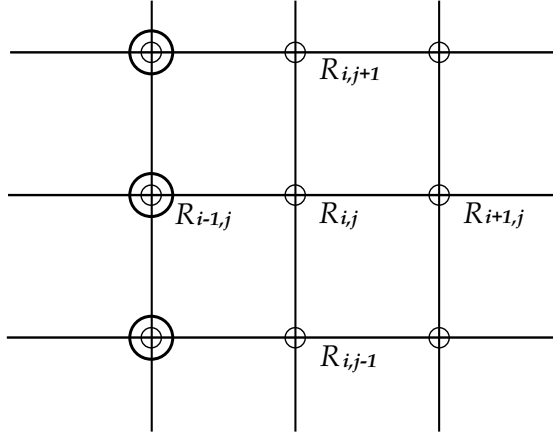


Figura 4.3: El escenario considerado en el análisis. Una rejilla regular se utiliza para discretizar el dominio. Los nodos con doble círculo indican la existencia de material en la capa móvil. El punto de interés es el nodo (i, j) , el cual no está afectado por la avalancha pero junto a un nodo que sí que lo está.

ción:

$$R_{i,j}^{n+1} = R_{i,j}^n + \Delta t \left[R_{i,j}^n D^2 h_{i,j}^n + \overline{D} R_{i,j}^n \cdot D h_{i,j}^n - (1 - |D h_{i,j}^n|) R_{i,j}^n \right].$$

El primer término, involucrando la diferencia de segundo orden es cero, ya que $R_{i,j}^n = 0$, y el último término también es nulo por la misma razón, dejando

$$R_{i,j}^{n+1} = \Delta t \left[\overline{D} R_{i,j}^n \cdot D h_{i,j}^n \right]. \quad (4.12)$$

La componente x del gradiente $\overline{D} R_{i,j}^n$ viene dada por (2.4). De acuerdo con la condición (4.11) el gradiente de R cumple $D_x h_{i,j}^n = a > 0$ y

$$\overline{D}_x R_{i,j}^n \equiv \begin{cases} D_x^+ R_{i,j}^n & \text{si } D_x^+ h_{i,j}^n > 0 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, por la ecuación (4.10), $R_{i,j}^n = R_{i+1,j}^n = 0$ y $D^+ R_{i,j}^n = 0$, se obtiene

$$\overline{D}_x R_{i,j}^n = 0.$$

Por otro lado, la componente y de $\overline{DR}_{i,j}^n$ es también cero, otra vez por (4.10), $R_{i,j-1}^n = R_{i,j}^n = R_{i,j+1}^n = 0$ y

$$D_y^+ R_{i,j}^n = D_y^- R_{i,j}^n = 0. \quad (4.13)$$

Usando (4.13) en (4.12) se obtiene finalmente

$$R_{i,j}^{n+1} = 0. \quad (4.14)$$

Es decir, bajo ninguna condición, $R_{i,j}^{n+1}$ será distinto de 0. Con esto queda demostrado matemáticamente que el esquema de diferencias finitas FV aplicado al modelo BCRE no ofrece difusión lateral por lo que no va a ser apropiado para simular una avalancha de forma realista. Como alternativa a este esquema de diferencias finitas se va a proponer en el siguiente apartado la utilización del esquema de Lax-Friedrichs. Se va a demostrar como este último esquema va a ofrecer una correcta evolución y expansión de la avalancha.

4.2.2. Análisis del Esquema de Diferencias Finitas de Lax-Friedrichs

En este apartado se va a analizar el esquema de diferencia finitas Lax-Friedrichs con el objetivo de averiguar si contempla la expansión de la avalancha. Se va a repetir el experimento realizado en la sección anterior, pero esta vez discretizando el modelo BCRE con el nuevo esquema.

El esquema de diferencias finitas Lax-Friedrichs se basa en diferencias centradas, como los esquemas *Forward-Time Central-Space* y *Central-Time Central-Space*, aunque no va a presentar los problemas de inestabilidad de éstos. Este esquema realiza una diferencia del valor v centrada en el espacio, pero esta diferencia no se suma al valor actual en su posición v_m^n , sino que se promedia el valor con su posición siguiente y anterior ($v_m^n = \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n)$)

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n)}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = -bv_m^n \quad (4.15)$$

$$v_m^{n+1} = \left(-bv_m^n - a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} \right) k + \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n) \quad (4.16)$$

Gracias a que se estima el valor actual v_m^n como el promedio $\frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n)$, la evolución de la avalancha va a seguir una trayectoria coherente

pendiente abajo y en las situaciones de cambio de gradiente. Además este esquema converge bajo ciertas condiciones tanto en fluidos unidimensionales como en 2D, (Rezzolla, 2010).

A priori el modelo parece adecuado para los propósitos de la simulación realista de la avalancha. A continuación se va a analizar matemáticamente si también cumple con la propiedad de difusión lateral cuando se aplica al modelo BCRE. Para este análisis se va a emplear el mismo escenario descrito en el apartado 4.2. Más concretamente se va demostrar que usando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs el punto (i, j) , al borde de una avalancha, va a cambiar su valor.

La ecuación para la capa móvil $R(x, t)$ en (2.1) se puede discretizar usando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs (Strikwerda, 2004) obteniendo:

$$R_{i,j}^{n+1} = \overline{R_{i,j}^n} + \Delta t [R_{i,j}^n D^2 h_{i,j}^n + DR_{i,j}^n \cdot Dh_{i,j}^n - (1 - |Dh_{i,j}^n|)R_{i,j}^n] \quad (4.17)$$

En este caso, los gradientes se calculan por diferencias centradas

$$D_x R_{i,j}^n = \frac{R_{i+1,j}^n - R_{i-1,j}^n}{2s}; \quad D_y R_{i,j}^n = \frac{R_{i,j+1}^n - R_{i,j-1}^n}{2s}, \quad (4.18)$$

y el valor de $R_{i,j}^n$ se aproxima por

$$\overline{R_{i,j}^n} = \frac{R_{i+1,j}^n + R_{i-1,j}^n + R_{i,j+1}^n + R_{i,j-1}^n}{4} \quad (4.19)$$

De la ecuación (4.17), y teniendo en cuenta que $R_{i,j}^n = 0$, se puede derivar el incremento de la capa móvil como

$$R_{i,j}^{n+1} = \overline{R_{i,j}^n} + \Delta t [DR_{i,j}^n \cdot Dh_{i,j}^n] \quad (4.20)$$

Usando la hipótesis de que sólo $R_{i-1,j}^n \neq 0$, expresado por la ecuación (4.10), y de que $D_x h_{i,j}^n = a$, expresado por la ecuación (4.11), se puede desarrollar el producto escalar en la ecuación (4.20) empleando las diferencias

centradas definidas en (4.18),

$$\begin{aligned}
 DR_{i,j}^n \cdot Dh_{i,j}^n &= \frac{\left(R_{i+1,j}^n - R_{i-1,j}^n\right) \left(h_{i+1,j}^n - h_{i-1,j}^n\right)}{4s^2} + \\
 &\quad + \frac{\left(R_{i,j+1}^n - R_{i,j-1}^n\right) \left(h_{i,j+1}^n - h_{i,j-1}^n\right)}{4s^2} \\
 &= -\frac{R_{i-1,j}^n}{2s} \left(\frac{h_{i+1,j}^n - h_{i-1,j}^n}{2s}\right) \\
 &= -\frac{R_{i-1,j}^n}{2s} a.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Aplicando otra vez la hipótesis de que sólo $R_{i-1,j}^n \neq 0$, la aproximación a $R_{i,j}^n$ dada por (4.19) resulta en

$$\overline{R_{i,j}^n} = \frac{R_{i-1,j}^n}{4}. \tag{4.22}$$

Finalmente, sustituyendo (4.21) y (4.22) en (4.20) tenemos que usando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs el valor de la capa móvil en el punto (i, j) será

$$\begin{aligned}
 R_{i,j}^{n+1} &= \overline{R_{i,j}^n} + \Delta t [DR_{i,j}^n \cdot Dh_{i,j}^n] = \\
 &= R_{i-1,j}^n \left(\frac{1}{4} - a \frac{\Delta t}{2s}\right).
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Esta ecuación ofrece valores no nulos, salvo en la situación particular cuando $a = \frac{s}{2\Delta t}$. Esta situación, sin embargo, es poco probable que dure en el tiempo, ya que la propia evolución de la avalancha hará que la situación desaparezca en pocos pasos de tiempo.

4.2.3. Discusión

En las dos subsecciones anteriores hemos probado que, bajo las asunciones (4.10) y (4.11), que sitúan el punto de análisis en el borde de una avalancha activa y ésta no va hacia él, el esquema de diferencias finitas propuesto en el trabajo de Falcone y Vita (Falcone and Vita, 2006) sólo propaga una avalancha, provocada en un punto, en la dirección de pendiente abajo del sistema granular simulado. Bajo las mismas condiciones, pero usando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs, las avalanchas

se expanden en todas las direcciones, mostrando una evolución que es más coherente con los estudios empíricos.

En general, el esquema FV es adecuado para situaciones de avalanchas masivas, donde la expansión lateral no es relevante, como se muestra en su trabajo (Falcone and Vita, 2006). Sin embargo, en situaciones donde la avalancha empieza como un proceso local y se pretende que la geometría de la avalancha reproduzca las propiedades descritas por Daerr y Douady en (Daerr and Douady, 1999a), el termino de promedio en el esquema de Lax-Friecrichs permite obtener mejores resultados cualitativos.

4.3. OBTENCIÓN DEL CAMPO DE VELOCIDADES

Finalmente, una vez simulada la avalancha, se debe generar un campo de velocidades adecuado que se usará como entrada en el modelo de visualización descrito en el Capítulo 3.

En este apartado se va a describir este mecanismo de generación del campo de velocidades y se va a realizar un análisis donde se van a exponer los problemas de visualización que puede presentar.

4.3.1. Cálculo del campo de velocidades

El propósito del algoritmo es generar un campo de velocidades de las mismas dimensiones que la rejilla que recubre el material granular. Se supone por tanto que la discretización usada para el modelo BCRE coincide con las dimensiones de la malla. En caso contrario se usarían mecanismos de interpolación. Para cada punto de la rejilla se va a asociar un valor de velocidad, que se utilizará en el modelo visual para transportar las coordenadas de texturas asociadas también a los mismos puntos.

Se considera la descripción del escenario presentada en el apartado 4.1. Para todo punto de la rejilla se calculará la velocidad $\mathbf{v}_{i,j}$ como:

$$\mathbf{v}_{i,j} = -\beta \frac{R_{i,j} + h_{i,j}}{\|R_{i,j} + h_{i,j}\|}, \quad (4.24)$$

donde $R_{i,j}$ es la altura del material móvil en la posición de la rejilla (i, j) , $h_{i,j}$ es la altura del material estático en (i, j) y β es la constante que define la velocidad de la avalancha en el modelo BCRE.

Esto campo de velocidades va a definir el flujo de material granular que se podrá visualizar mediante el modelo descrito en el Capítulo 3. Sin

embargo aquí no finaliza el trabajo, ya que como se verá más adelante las velocidades generadas van a producir deformaciones y un efecto de desplazamiento que no se corresponde con el esperado.

4.3.2. Análisis del campo de velocidades

El campo de velocidad descrito en el apartado anterior permite transportar las coordenadas de textura de la malla que recubre el material granular. La avalancha se expande correctamente siguiendo el gradiente del relieve, pero el término de promedio, ya comentado en el apartado (4.2.2), característico de Lax-Friedrichs, produce que en cada paso de simulación se trasvase una cantidad infinitesimal de material de una celda a todas sus vecinas. A los pocos pasos el material móvil puede llegar a cubrir toda la malla, aunque con valores muy pequeños, próximos a 0. Esto tiene un efecto directo en las velocidades, exagerándose al estar normalizadas, lo que provoca el desplazamiento de todas las coordenadas de textura, distorsionan la imagen original y por tanto no se puede apreciar la avalancha correctamente. Para evitar este efecto la solución empleada es la utilización de un umbral sobre el valor de $R_{i,j}$, de manera que sólo en el caso de superar ese umbral mínimo de material se calculará la velocidad en ese punto de la rejilla. En otro caso directamente se anulará la velocidad directamente.

Con este umbral se consigue delimitar la silueta de la avalancha que se desplaza por el material en reposo. Sin embargo las velocidades en el interior de la avalancha van a presentar direcciones muy dispares. Esto va a producir un remallado extra en el interior de la avalancha que va a impedir la correcta visualización del desplazamiento de la textura. En este caso, la solución resulta muy complicada de implementar en el modelo de simulación, con lo que se ha modificado el modelo visual descrito en el Capítulo 3 para que sólo detecte discontinuidad en aquellas aristas en las que uno de sus vértices tenga asociada una velocidad nula. Este último cambio permite transportar uniformemente el interior de la avalancha produciéndose el remallado únicamente en los límites con el material estático, que es realmente en donde se encuentra la discontinuidad.

4.4. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha empleado una metodología para el análisis de la simulación de avalanchas de material granular utilizando un mecanismo basado en rejilla haciendo uso del modelo BCRE. La principal dificultad de este modelo es la correcta elección del esquema de diferencias finitas que lo discretiza. En el contexto de este trabajo, el esquema elegido debe generar campos de velocidad que reproduzcan de forma realista la evolución y propiedades de una avalancha.

Los esquemas FV y Lax-Friedrichs han sido los que han presentado una mejor evolución de la avalancha, a parte de ser estables bajo ciertas condiciones. El estudio de la difusión lateral de la avalancha usando ambos esquemas ha demostrado que el método FV no presenta ningún tipo de difusión, a diferencia de la mostrada por Lax-Friedrichs.

La simulación de avalanchas utilizando estos mecanismos basados en malla presentan limitaciones en entorno gráficos. Al discretizar el modelo BCRE empleando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs, se han observado deficiencias en el campo de velocidades que se han podido resolver, excepto las diferencias de velocidades generadas en el interior de las avalanchas, que provocan el remallado de todo el interior de la misma. Para presentar unos resultados correctos, se ha tenido que modificar el modelo visual ya presentado en el Capítulo 3.

En el siguiente capítulo se estudia la evolución de una avalancha guiada por un sistema de partículas, el cual desliga las propiedades de la avalancha de la resolución de la rejilla y permite generar campos de velocidades con valores nulos en cualquier posición, ya que todo el material estará contenido en las partículas y serán estas quienes definirán el campo de velocidades.

MODELO HÍBRIDO MALLA-PARTÍCULAS PARA SIMULACIÓN DE AVALANCHAS

Vistos los problemas que presentaba la simulación basada en diferencias finitas descrita en el Capítulo anterior, en el presente capítulo se va a proponer una alternativa a la misma basada en este caso en dinámica de partículas, con el objetivo de que pueda generar campos de velocidad adecuados para el modelo de visualización descrito en el Capítulo 3.

Los sistemas de partículas permiten simular materiales granulares, pudiendo simular la interacción partícula a partícula. Debido al gran número de granos que habitualmente forman un montículo de material granular, como arena o carbón, (sobre unos miles de millones de partículas) y la diversidad en las propiedades de estos granos (tamaño, peso, forma ...) resulta costoso realizar una simulación física real con esta técnica. Las propuestas existentes que tratan de simular el material granular mediante un sistema de partículas, tienden a reducir el número de partículas aumentando el tamaño del grano en comparación con el que tienen en la realidad. Además, es común utilizar partículas esféricas de mismas dimensiones y propiedades con el fin de simular los mismos comportamientos que el material granular en la vida real. Pero no sólo el cálculo de fuerzas de las interacciones entre partículas limita la simulación de materiales granulares, sino que la visualización de un gran número de granos moviéndose por el escenario virtual también afecta al rendimiento.

Aquí se propone una solución a estas dificultades con el fin de simular el comportamiento de grandes extensiones de materiales granulares en tiempo interactivo. Se va a modelar un sistema híbrido en el que los materiales

granulares van a formar montículos en donde, siguiendo los estudios fenomenológicos de Haderler y Kuttler (Haderler and Kuttler, 1999c), los granos van a dividirse en una capa estática y otra móvil, dependiendo de su estado de reposo o movimiento. Se va a plantear un sistema híbrido, donde el material estático se va a representar por un mapa de alturas y los granos pertenecientes a la capa móvil van a formar parte de un sistema de partículas. Esto reduce considerablemente el número de partículas necesarias para la simulación, permitiendo simular mayores extensiones de terreno granular que con las otras propuestas no híbridas. Esta misma idea de modelo híbrido ha sido utilizada por Zhu y Yang (Zhu and Yang, 2010) para animar arena, por Tsuda et al (Tsuda et al., 2010b) y Wong y Fu (Wong and Fu, 2015) para simular avalanchas de nieve y por Cheng y Wong (Chen and Wong, 2013) para proponer un método de dibujado con arena consiguiendo tiempos interactivos. El problema que presentan todos estos trabajos es que se centran en pequeños espacios de simulación, mientras que la propuesta que plantea el presente trabajo se orienta a superficies más extensas.

En el mundo real los granos pueden tener diferentes dimensiones, desde no llegar al milímetro, hasta alcanzar las dimensiones de grandes rocas. En los trabajos anteriores basados en sistemas de partículas, es una práctica habitual aumentar las dimensiones de las partículas. Con esto se reduce el número de ellas, pero se continúa cubriendo toda la superficie de material granular, con el último fin de visualizar las partículas. Como ya se ha indicado, el presente trabajo prescinde de esta visualización y propone representar todo el material con una textura, que muestre el movimiento de los granos en conjunto transportando las coordenadas de textura. Esto permite reducir el espacio de simulación de las partículas a un dominio bidimensional, proporcionando la consiguiente reducción en el coste de los cálculos. Como resultado final, el modelo de simulación no puede ser cualquiera sino que deberá generar un campo de velocidades adecuado para desplazar las texturas del modelo de visualización presentado en el Capítulo 3. Como no se van a representar las partículas, la resolución utilizada es irrelevante siempre que se obtenga un campo de velocidades adecuado.

En el nuevo modelo, al igual que el basado en diferencias finitas, es importante el estudio de la evolución y forma de la avalancha del material granular. En este caso la expansión de la avalancha no viene controlada por esquemas de diferencias finitas, sino que el sistema de partículas va a poder

controlar el flujo mediante el ajuste de una serie de parámetros. Enseguida se va a ver que va a ser indispensable el dotar al sistema de un control de creación y destrucción de partículas en función de las necesidades de expansión de la avalancha.

Este capítulo va a centrarse en la descripción del modelo de simulación híbrida de avalanchas en materiales granulares. Se va a describir el modelo general para tener una visión global y posteriormente se detallará la descripción y evolución de la capa estática y de la móvil. En la simulación de la capa móvil se van a proponer dos métodos distintos para el cálculo de fuerzas. Así mismo será necesaria una descripción del intercambio de material entre ambas capas. Finalmente se detallará el proceso de generación del campo de velocidades que se utilizará como entrada al modelo de visualización.

5.1. INTRODUCCIÓN

El experimento va a seguir las pautas que el modelo anterior basado en diferencias finitas, pero en este caso adaptado a la dinámica de partículas. Se va a considerar un escenario tridimensional con material granular en estado de reposo, formando montículos. A éste se le va a agregar más material y cuando se supere el ángulo crítico del mismo se generará una avalancha, tal y como ocurre en la realidad. La avalancha va a estar formada por partículas que se desplazarán por la superficie del material. Las partículas podrán estancarse y desaparecer pasando a formar parte del material estático, o erosionar más material generando nuevas partículas en movimiento. El desplazamiento de los granos se va a transformar en un campo de velocidades que se utilizará en el modelo de visualización descrito en el Capítulo 3 para transportar las coordenadas de textura y mostrar visualmente la avalancha.

El modelo emplea la misma rejilla del capítulo anterior, pero en su descripción se añade la información necesaria para la simulación con partículas. Todo el material granular se va a dividir en dos capas, estática y dinámica. Los granos inmóviles van a formar parte de la capa estática representada mediante un mapa de alturas, que va a corresponder con la rejilla ya descrita. Cada celda (i, j) de esta rejilla, indexada mediante los índices i, j , va a cubrir un área de la superficie del espacio con material granular. Toda celda (i, j) se va a identificar por la posición $\mathbf{c}_{i,j}$ en coordenadas (X, Y) , que

representa el centro de la celda. Toda celda va a almacenar información de la altura $h_{i,j}$ del material estático en su posición $\mathbf{c}_{i,j}$. Además, cada celda va a contener una lista de partículas móviles $P_{i,j}$ que interactúan dentro de su área.

Los granos móviles van a formar parte del sistema de partículas que constituye la capa móvil, que va a estar restringido a la superficie del material. Cada grano va a quedar representado por una partícula p_k , el subíndice k es el identificador de la partícula en el sistema. Esta partícula va a contener información de su posición \mathbf{p}_k en el dominio 2D, velocidad \mathbf{v}_k en 2D, masa m_k , densidad d_k y la altura de material móvil que representa R_k .

La evolución de la capa estática va a estar gestionada por las ecuaciones (2.1) del modelo de avalancha BCRE. En el caso del sistema de partículas se han propuesto dos mecanismos diferentes, en uno se utilizará un modelo de fuerzas basado en DEM y en el otro se utilizará un modelo basado en SPH. La capa estática y la dinámica van a intercambiar información de alturas usando el mecanismo de intercambio del modelo BCRE.

5.2. EVOLUCIÓN DE LA CAPA ESTÁTICA

Todo el espacio que se desea simular, compuesto por material en reposo, va a estar representado por las celdas (i, j) . La evolución de esta capa se basa en la ecuación (5.1) del modelo BCRE, que calcula la altura del material estático $h_{i,j}$.

$$h_{i,j} = h_{i,j} + \Delta t \gamma (\alpha - |h_x|) R_{i,j} \quad (5.1)$$

donde α representa a la tangente del ángulo crítico del material granular, h_x el gradiente de (i, j) , γ una constante que indica el grado de intercambio de material entre las dos capas y Δt el incremento de tiempo transcurrido.

Existe una dependencia de la altura del material estático $h_{i,j}$ con la altura del material móvil $R_{i,j}$ en la misma posición $\mathbf{c}_{i,j}$. Si no existe material móvil en una posición dada, $R_{i,j} = 0$, el valor de altura de la capa estática no cambia. En el cálculo del gradiente h_x se utiliza el esquema de diferencias finitas centradas, ecuación (4.7), que proporciona una evolución del material correcta, independiente del signo y de la dirección del gradiente. A pesar de que en esta capa se utiliza de nuevo un modelo de diferencias finitas, el modelo híbrido global no va a presentar los problemas en el campo de

velocidades que tenía el modelo anterior, ya que la generación del campo de velocidades se va a realizar a partir de las partículas, como se verá más adelante.

Por otro lado, las dimensiones de cada una de las celdas van a ser independiente del tamaño de las partículas. Estas dimensiones van a afectar directamente a la resolución del campo de velocidades final obtenido a partir de las partículas, por tanto cuanto más pequeñas sean las celdas, mayor resolución tendrá el campo de velocidades final.

5.3. EVOLUCIÓN DE LA CAPA MÓVIL

La capa móvil va a evolucionar en un espacio bidimensional, en el que las partículas van a estar restringidas a la superficie de la malla que recubre el material granular por la que fluirán libremente.

Se va a utilizar una división espacial del dominio bidimensional, distinta a la rejilla con la que se describe la capa estática, que va a definir las áreas de interacción entre partículas. Por otro lado las celdas de la capa estática proporcionan una división espacial del área de simulación. Cada celda (i, j) contiene una lista $P_{i,j}$ de partículas que interactúan dentro de su área. Toda partícula p_k cuya posición \mathbf{p}_k esté dentro del área cuadrada centrada en $\mathbf{c}_{i,j}$ de lado l , pertenecerá a la lista $P_{i,j}$. Con l se permite controlar el área de influencia de una celda de manera independiente del tamaño de celda, ver Figura 5.1.

Durante la simulación, sólo se van a tener en cuenta las interacciones entre partículas dentro de la misma área de influencia. Para ello, se identificará, por su posición, a qué celda $c_{i,j}$ pertenece una partícula p_k y se calcularán los efectos de las interacciones que tenga únicamente con las partículas de la lista $P_{i,j}$.

Como se ha comentado en la introducción, se van a describir dos propuestas para el cálculo de fuerzas que va a guiar el movimiento de las partículas: el Discrete Element Method (DEM) y el Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), descritas ya en el estado del arte (sección 2.4). En este capítulo, en las subsecciones 5.3.1 y 5.3.2, se explica como se han adaptado cada una de las propuestas al problema aquí planteado.

Debido a que las partículas están representadas sobre un plano bidimensional que recubre un modelo 3D, las posiciones de las partículas \mathbf{p}_k

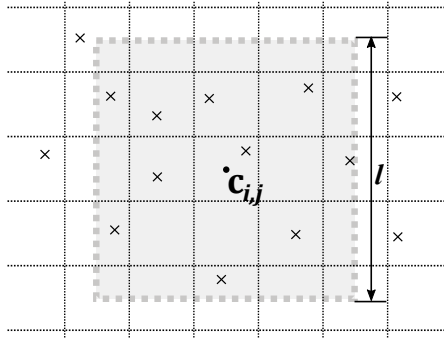


Figura 5.1: Área de influencia de la celda $c_{i,j}$. Las aspas representan partículas, todas las que caigan dentro del área cuadrada de influencia de lado l se registrarán en $P_{i,j}$

deben proyectarse al dominio 3D, realizar los cálculos de fuerzas en tres dimensiones y proyectar la fuerza total asociada a cada partícula \mathbf{f}_k sobre la superficie 2D donde se aplica a la partícula. En la Figura 5.2 se describe gráficamente el proceso.

La proyección de \mathbf{p}_k al dominio 3D se realiza obteniendo la coordenada en el eje Z de las alturas $h_{i,j}$ de las celdas próximas a \mathbf{p}_k mediante interpolación bilineal, ver figura 5.3. Por otro lado la proyección al dominio 2D de la fuerza asociada a la partícula \mathbf{f}_k^{3D} se realiza utilizando la ecuación siguiente, en donde se anula la coordenada Z :

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_k - \mathbf{n}_k(\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{n}_k) \quad (5.2)$$

donde \mathbf{f}_k es la fuerza total asociada a la p_k y \mathbf{n}_k es el vector normal asociado a la partícula obtenida por interpolación bilineal de las normales de las celdas próximas a \mathbf{p}_k .

Estudios experimentales de avalanchas (Haderler and Kuttler, 1999c; Daerr and Douady, 1999b) describen el movimiento resultante de aplicar las fuerzas externas e internas a una partícula como un flujo con velocidad constante. Para modelarlo, se agrega una constante de amortiguación ζ que compensa las fuerzas externas cuando el material granular forma el ángulo crítico, ver la siguiente ecuación:

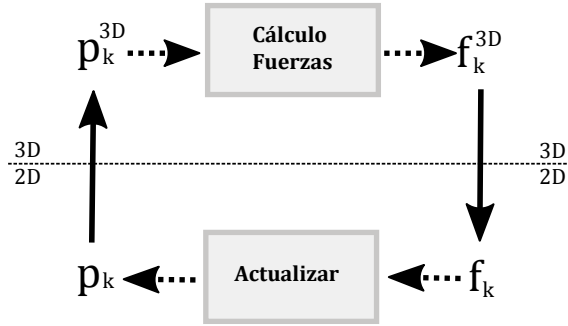


Figura 5.2: Ciclo de proyección entre el espacio 2D y 3D para el cálculo de la fuerza que afecta a cada partícula. La posición de la partícula \mathbf{p}_k se proyecta al dominio 3D como \mathbf{p}_k^{3D} . En el dominio 3D se realiza el cálculo de fuerzas. La fuerza total \mathbf{f}_k^{3D} asociada a la partícula k se proyecta al dominio 2D como \mathbf{f}_k , en donde se integrará y se actualizará \mathbf{p}_k .

$$F_g(\alpha_0) - \zeta\beta = 0 \quad (5.3)$$

donde $F_g(\alpha_0)$ representa la fuerza de la gravedad que actúa sobre una partícula cuando ésta se encuentra sobre una pendiente con ángulo crítico, β es la constante de velocidad de las ecuaciones del modelo BCRE y ζ representa a la constante de amortiguación a calcular.

La fuerza total \mathbf{f}_k de la partícula en el dominio 2D es amortiguada usando:

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_k - \mathbf{v}_k \zeta m_k \quad (5.4)$$

Aplicando la segunda ley de Newton sobre la fuerza total de la partícula e integrando por el tiempo, se obtiene la velocidad de la partícula,

$$\mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{f}_k}{m_k} \Delta t, \quad (5.5)$$

donde \mathbf{v}_k es la velocidad resultante de la partícula k en el dominio 2D, \mathbf{f}_k es la fuerza total que se aplica a la partícula, m_k su masa y Δt el incremento de tiempo. \mathbf{v}_k se emplea para la posición final de la partícula $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k + \mathbf{v}_k \Delta t$ en el paso actual de tiempo.

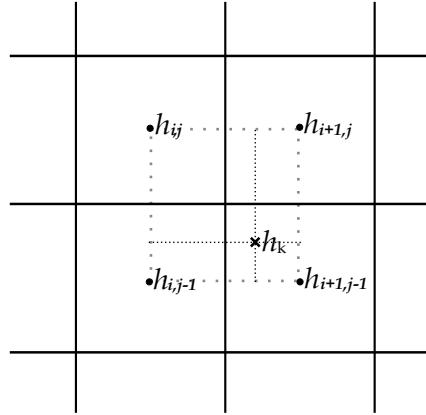


Figura 5.3: Interpolación bilineal para el cálculo de la altura h_k asociada a la partícula p_k

Para quedar totalmente descrito el proceso de evolución de la capa móvil, resta por detallar los dos métodos de cálculo de las fuerzas que se producen entre las partículas que interactúan entre sí. Debido a su extensión y con el fin de separar más claramente ambas propuestas, se han descrito en apartados separados.

5.3.1. Discrete Element Method

Tal y como se ha expuesto en el estado del arte existen varias propuestas de simulación de sistemas granulares basados en elementos discretos. En este apartado, se detalla como se va a emplear en el nuevo modelo el método de cálculo de fuerzas de elementos discretos, ya descrito en la sección 2.4.1, extraído del trabajo de Bell et al. (Bell et al., 2005).

La fuerza de una partícula k se calcula por la interacción con todas las partículas que influyen en la celda $c(i, j)$ en la que se posiciona p_k . La fuerza total de cada interacción f_k la suma de las fuerzas normales \mathbf{f}_n y tangenciales \mathbf{f}_t .

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t$$

Antes de describir cada una de las fuerzas que aparecen en la ecuación

anterior se van a repasar los conceptos previos, ya expuesto en el estado del arte. Se va a considerar una distancia deseada ϱ que se quiere mantener entre partículas. Se define la superposición ξ y la normal \mathbf{n} entre todo par de partículas k y l como:

$$\xi = \max(0, \frac{\varrho_k + \varrho_l}{2} - \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_l\|)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_l}{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_l\|}$$

También se define la velocidad relativa \mathbf{v}_{lk} , la velocidad relativa en la dirección normal $\dot{\xi}$ y la velocidad tangencial \mathbf{v}_t como

$$\mathbf{v}_{lk} = \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_k$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{v}_{lk} \cdot \mathbf{n}$$

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{lk} - \dot{\xi} \mathbf{n}$$

Haciendo uso de las definiciones previas, la fuerza normal \mathbf{f}_n que recibe la partícula k se describe como:

$$\mathbf{f}_n = f_n \mathbf{n},$$

$$f_n = -k_d \xi^\alpha \dot{\xi} + k_r \xi^\beta$$

donde k_d es una constante de amortiguación y k_r es una constante de restitución. Se eligen los valores de $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{3}{2}$ ya que según (Schwager and Pöschel, 1998) y (Ramírez et al., 1999) son los que ofrecen unos resultados más fieles a la realidad.

Para adaptar las constantes de amortiguación k_d y rigidez k_r a cada simulación empleando una forma más intuitiva, se va a utilizar la propuesta de Bell et al. (Bell et al., 2005), donde las calcula utilizando el tiempo de contacto t_c permitido y una constante normal de restitución ϵ con las siguientes ecuaciones:

$$k_d = 2m_{eff} \frac{-\ln \epsilon}{t_c} \quad (5.6)$$

$$k_r = \frac{m_{eff}}{t_c^2} (\ln^2 \epsilon + \pi^2) \quad (5.7)$$

donde m_{eff} representa a la masa efectiva de la partícula que se calcula como:

$$\frac{1}{m_{eff}} = \frac{1}{m_l} + \frac{1}{m_k} \quad (5.8)$$

Para el caso de las fuerzas tangenciales, tal como se describe en el estado del arte, se va a emplear un muelle que tiene efecto cuando entran en contacto dos partículas. En el presente trabajo, para mantener una determinada distancia ϱ entre ellas, se configura el muelle para que haga efecto cuando la distancia entre partículas sea menor a la distancia deseada ϱ .

$$\mathbf{f}_t = \min(\mu f_n, k_t \|\varrho\|) \frac{\varrho \mathbf{n}}{\|\varrho\|}$$

Por último, a la fuerza total \mathbf{f}_k resultante que afecta a una partícula k , se le agregan las fuerzas externas, en este caso sólo la gravedad.

5.3.2. Smoothed Particle Hydrodynamics

Este método de interpolación para sistemas de partículas está explicado en el estado del arte en la sección 2.4.3. En ella se detalla la descripción base del algoritmo orientado a la simulación de fluidos en un entorno tridimensional propuesto en el trabajo de Müller et al. (Müller et al., 2003).

En el presente trabajo se van a simular flujos de materiales granulares que se pueden modelar utilizando las leyes de Navier-Stokes para fluidos incompresibles (Ecuación 2.24).

El sistema de partículas va a evolucionar en un entorno 2D, por ello se ha de adaptar la formulación del SPH descrita en el estado del arte al dominio 2D. Gracias a la naturaleza de la ecuación 2.20 en la que se basa el SPH, sólo el núcleo de suavizado depende directamente de las coordenadas espaciales. En consecuencia, únicamente se han de sustituir los 3 núcleos de suavizado presentados por sus análogos en un dominio 2D.

Existen trabajos (Lee and Han, 2010; Solenthaler et al., 2011) que se han enfrentado a la misma situación de trabajar en escenarios bidimensionales con el SPH. En el presente trabajo se va a utilizar la misma adaptación

de los núcleos de suavizado que los presentados en estos estudios citados, considerando $r = \|\mathbf{p}_l - \mathbf{p}_k\|$ para todo par de partículas l y k .

$$W_{poly6}(r, s) = \frac{4}{\pi s^8} \begin{cases} (s^2 - r^2)^3, & 0 \leq r \leq s, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (5.9)$$

$$W_{spiky}(r, s) = \frac{10}{\pi s^5} \begin{cases} (s - r)^3, & 0 \leq r \leq s, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$W_{viscosity}(r, s) = \frac{10}{9\pi s^5} \begin{cases} -4r^3 + 9r^2s - 5s^3 + 6s^3(\ln s - \ln r), & 0 \leq r \leq s, \\ 0 & \text{otro.} \end{cases} \quad (5.11)$$

donde s representa la longitud de suavizado. El Laplaciano de los dos primeros núcleos, necesario para el cálculo de la viscosidad, no asegura que sea siempre positivo. En consecuencia se ha diseñado $W_{viscosity}$ para que cumpla esta propiedad:

$$\nabla^2 W_{viscosity}(r, h) = \frac{40}{\pi h^5}(h - r) \quad (5.12)$$

Una vez los núcleos están adaptados al nuevo espacio 2D, se van a calcular las fuerzas de presión, viscosidad y fuerzas externas para todo par de partículas vecinas, siguiendo el algoritmo del SPH. Se van a considerar partículas vecinas a k todas aquellas que pertenezcan al área de influencia de la celda (i, j) en la que se posiciona \mathbf{p}_k , es decir que pertenezcan a $P_{i,j}$.

Para el cálculo de la fuerza de presión primero es necesario conocer la presión en la posición de cada partícula. Para ello se va a utilizar una modificación de la ecuación de estado de los gases ideales propuesta por Desbrun y Gascuel (Desbrun and Gascuel, 1996):

$$p = k_s(\rho - \rho_0)$$

donde ρ_0 es la densidad característica del fluido en reposo y k_s es una constante de dureza del gas, que sólo depende de la temperatura. Con esto se consigue que la densidad tienda a ese valor de reposo ayudando a mantener la simulación más estable.

Como la masa de toda partícula m_k es constante en todo su tiempo de vida y representa un volumen del espacio, va a ser necesario calcular la

densidad en cada paso de tiempo:

$$\rho_S(r) = \sum_l m_l W_{poly6}(r, s)$$

usando el núcleo de suavizado polinómico de orden 6 (Ecuación 5.9).

Una vez se dispone de toda la información necesaria, se va a calcular la fuerza de la presión usando:

$$\mathbf{f}_i^{presion} = - \sum_l \frac{p_k + p_l}{2\rho_l} \nabla W_{spiky}(r, s)$$

donde se utiliza la media aritmética de las presiones de las partículas que interaccionan $\frac{p_k + p_l}{2}$, ya que la presión no es simétrica y si se utilizase únicamente p_l se incumpliría la ley de acción-reacción.

El cálculo de la fuerza de la viscosidad se va a realizar utilizando la aproximación Laplaciana, haciendo uso del Laplaciano del núcleo de suavizado $W_{viscosity}$:

$$\mathbf{f}_i^{viscosidad} = \psi \sum_l m_l \frac{\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_k}{\rho_l} \nabla^2 W_{viscosity}(r, s) \quad (5.13)$$

donde ψ representa el coeficiente de viscosidad dinámica y se utiliza la diferencia de velocidades de las partículas que interaccionan para conseguir fuerzas simétricas. De esta manera, la partícula k se acelerará en la dirección de la velocidad relativa del entorno.

El método SPH también considera las fuerzas generadas por la energía de la tensión superficial de un líquido, estas fuerzas son normales a la superficie y apuntan hacia el interior del líquido. Esto evita que el líquido en la superficie trate de expandirse como si fuese un gas, pero además también hace que se tienda a alisar su superficie. En el presente trabajo, al simular flujos de materiales granulares sobre una superficie bidimensional no va a tener sentido la utilización de la tensión superficial, por lo que no va a tenerse en cuenta.

5.4. INTERCAMBIO DE ALTURAS ENTRE CAPAS

Una vez descrita la evolución tanto de la capa estática como de la móvil, en esta sección se va a proceder a detallar el intercambio de material entre ambas capas. El intercambio de alturas entre capas permite erosionar

material generando nuevas partículas en movimiento y sedimentar material cuando las partículas recuperen su estado de reposo. Es un intercambio bidireccional entre la capa estática y la dinámica que se va a realizar independientemente de las metodologías de evolución utilizadas en cada capa. Este intercambio se va a basar en el mecanismo de interpolación del SPH 2D visto anteriormente.

Para actualizar la altura de cada una de sus celdas la capa estática necesita conocer la altura de la capa móvil, ver Ecuación 5.1. Para ello, toda celda (i, j) calcula la altura $R_{i,j}$ del material móvil asociado mediante la Ecuación (5.14), aplicada sobre el conjunto de partículas influyentes $P_{i,j}$. Se utiliza el núcleo de suavizado *poly6* debido a que representa una campana de Gauss permitiendo que conforme las partículas se alejen del centro de la celda $\mathbf{c}_{i,j}$ se reduzca su peso gradualmente.

$$R_{i,j} = \sum_k R_k \frac{m_k}{\rho_k} W_{poly6}(r_k, s) \quad (5.14)$$

donde $R_{i,j}$ representa la altura de la capa móvil en la celda $c_{i,j}$, k itera sobre las partículas de la lista $P_{i,j}$, m_k es la masa de la partícula p_k , ρ_k la densidad, r_k la distancia de la partícula k al centro de la celda $\mathbf{c}_{i,j}$, s el radio de acción del núcleo de suavizado y R_k la información de altura que almacena la partícula p_k .

El intercambio de material con la capa móvil se calcula reutilizando el valor $R_{i,j}$ previamente calculado, tal como muestra la siguiente ecuación del modelo BCRE.

$$R_{i,j}^t = \Delta t (\beta (R_{i,j} h_x)_x - \gamma(\alpha - |h_x|)R_{i,j} + f) \quad (5.15)$$

donde, $R_{i,j}^t$ representa el incremento de la altura de la capa móvil en la posición de la celda $c_{i,j}$ y el resto de parámetros quedan explicados anteriormente en la ecuación 2.1.

El incremento de altura en la capa móvil $R_{i,j}^t$, que puede ser negativo, se distribuye entre las partículas incluidas en $P_{i,j}$ utilizando las ecuaciones de interpolación del SPH usando el mismo núcleo de suavizado polinómico de orden 6 que en (5.14):

$$R_k = R_k + R_{i,j}^t \frac{m_k}{\rho_k} W_{poly6}(r_k, s). \quad (5.16)$$

5.4.1. Generación o eliminación de partículas

Las partículas, aunque no se visualicen, deben representar todo el material móvil que se desplaza cubriendo parcial o totalmente la superficie del material. Según el estudio matemático de Haderler y Schieborn (Haderler and Schieborn, 2012), el grosor de la avalancha tiende a ser constante en toda su superficie. Debido a ello se ha decidido establecer un tamaño máximo de altura κ para las partículas. Por tanto, cuando la información de altura R_k de una partícula supere este umbral κ , se tratará de crear nuevas partículas con la información de altura excedente en la posición $\mathbf{c}_{i,j}$ de las celdas próximas a \mathbf{p}_k .

En el caso contrario, cuando la información de altura de una partícula R_k , sea menor que un valor mínimo, en nuestro caso de 0.0001 metros, todo su material pasará a formar parte de la celda en la que se posiciona y se destruirá la partícula k .

El mecanismo de creación de una nueva partícula en $\mathbf{c}_{i,j}$ comprueba que no exista ninguna partícula a una distancia menor que ϱ , con el objetivo de mantener una separación mínima entre partículas por la superficie del material, y que el valor de $R_{i,j}$ sea mayor que un umbral τ definido por el usuario. Este umbral τ va a controlar directamente la expansión de la avalancha, generando o no nuevas partículas. El valor de altura de la nueva partícula generada se va a calcular utilizando las ecuaciones 5.15 y 5.16.

Es importante conseguir una distribución uniforme de las partículas por la superficie del material granular, debido a que a partir de ellas se va generar el campo de flujo que definirá la avalancha final. En la siguiente sección se detalla cómo se genera este campo.

5.5. CÁLCULO DEL CAMPO VELOCIDADES

El resultado final de la simulación del material granular es generar un campo de velocidades para transportar las coordenadas de textura asociadas a la malla que recubre los montículos de grano. Para obtener este campo se va a calcular para toda celda (i,j) la velocidad $\mathbf{v}_{i,j}$ utilizando la Ecuación (5.17). Esta última ecuación se basa en la interpolación del SPH (que emplea el núcleo de suavizado polinómico de orden 6) utilizando las velocidades de las partículas \mathbf{v}_k listadas en $P_{i,j}$.

$$\mathbf{v}_{i,j} = \sum_k \mathbf{v}_k \frac{m_k}{\rho_k} W_{poly6}(r_k, s) \quad (5.17)$$

Debido a la variabilidad de las velocidades $\mathbf{v}_{i,j}$ resultantes asociadas a cada celda (i, j) , al resultado anterior se le ha sometido a una regularización matemática,

$$\mathbf{v}_{i,j} = \frac{\mathbf{v}_{i,j}}{\sum_k \frac{m_k}{\rho_k} W_{poly6}(r_k, s)} \quad (5.18)$$

Este conjunto de velocidades $\mathbf{v}_{i,j}$ asociadas a todas las celdas es por fin el campo de flujo resultante final que se utilizará como entrada en el algoritmo de visualización presentado en el Capítulo 3. El calculo del campo de velocidades a partir de los movimientos de las partículas por la superficie va a presentar una serie de ventajas e inconvenientes que se van a discutir en el siguiente apartado.

5.5.1. Análisis del campo de velocidades

El campo de velocidades generado a partir de las partículas va a transportar las coordenadas de textura asociadas a la malla que recubre todo el material, ofreciendo la sensación de movimiento. Pero, a pesar de haber regularizado ya el campo de velocidades en el apartado anterior, en el interior de la avalancha se presentan velocidades en nodos vecinos lo suficientemente diferentes como para detectarse como discontinuidad. En consecuencia, se va a mantener la modificación que permite detectar únicamente discontinuidades en aquellas aristas en las que uno de sus vértices tenga asociada una velocidad nula.

También se puede dar el caso que alguna partícula se aisle del resto, ya sea por una incorrecta parametrización del sistema o por las características del relieve. La velocidad generada a partir de esa partícula aislada va a producir un desplazamiento de la textura poco realista por lo que se eliminará.

5.6. CONCLUSIONES

Se ha descrito un modelo híbrido de simulación de materiales granulares, en el que todo el material se divide en dos capas, una estática formada por

los gránulos en reposo, y una móvil, representando a los granos en movimiento. La evolución de la capa estática está gestionada por las ecuaciones del modelo BCRE, mientras que la capa móvil está basada en un sistema de partículas, que evolucionan pudiendo seguir dos modelos distintos de fuerzas, bien el modelo DEM, bien el modelo SPH. El modelo BCRE también es utilizado como intermediario entre ambas capas, pero en este caso ya no presenta los problemas en la evolución de las avalanchas que presentaba en el modelo de malla descrito en el Capítulo 4, puesto que el peso de la evolución de la avalancha recae ahora sobre el sistema de partículas.

Se han utilizado núcleos de suavizado para recolectar información de las partículas en cada celda de la rejilla, con el propósito de intercambiar alturas entre malla y partículas y por último generar el campo de velocidades a utilizar como entrada en el modelo de visualización presentado en el Capítulo 3.

Se ha definido una altura máxima para todas las partículas favoreciendo la creación de nuevas partículas, influyendo en la expansión de la avalancha. Además se han definido unos umbrales para controlar esta expansión, que se estudiarán en más detalle en las pruebas realizadas en el Capítulo 6.

La separación en capas reduce el número de partículas considerándose ahora únicamente las de la capa móvil, en comparación con las metodologías no híbridas, que representan todo un montículo con partículas. El sistema de partículas se desarrolla en el dominio 2D, reduciendo el coste computacional y espacial frente a las propuestas que usan un dominio tridimensional. Las partículas no se van a visualizar, sino que sólo son portadoras de información de alturas de material, por lo que se ha conseguido un gran avance ya que gracias a ello ahora no es necesario cubrir toda la superficie del material con partículas, tal y cómo hacían las propuestas híbridas presentadas en el estado del arte (Wong and Fu, 2015; Tsuda et al., 2010b). Esto reduce aún más el número de partículas en la simulación necesarias para representar todo el material de la capa móvil, con lo que la simulación es mucho menos costosa.

PRUEBAS Y RESULTADOS

En el presente capítulo se detallan las pruebas realizadas de los modelos diseñados en los capítulos anteriores y se muestran los resultados obtenidos tras su ejecución. Estos modelos se han implementado en C++ y se han utilizado librerías gráficas basadas en OpenGL para la visualización de los campos de flujo.

Las primeras pruebas llevadas a cabo se centran en el modelo de visualización de campos de flujo con discontinuidades, descrito en el Capítulo 3. Se ha implementado el modelo y se han sintetizado diferentes campos de velocidades para evaluar la detección y seguimiento de las discontinuidades y la deformación de la textura.

En las pruebas posteriores se utiliza este modelo de visualización usando como entrada los campos de velocidades generados por los mecanismos de simulación de avalanchas descritos en los Capítulos 4 y 5. En un primer caso, el campo de flujo se va a calcular a partir de los modelos basados en diferencias finitas del Capítulo 4, evaluando si la evolución de las avalanchas es capaz de reproducir los comportamientos observados empíricamente por Daerr y Douady (Daerr and Douady, 199b; Daerr, 2001a) en escenarios reales. En un segundo caso, el campo de flujo se va a generar de los modelos híbridos presentados en el Capítulo 5. Las pruebas van a ir orientadas a comparar las dos alternativas que se han contemplado en el cálculo de fuerzas, DEM y SPH. Por último se van a comparar los resultados ofrecidos por los modelos basados en dinámica de partículas con los resultados de aquellos basados en diferencias finitas. No obstante, antes de abordar las

diferentes pruebas, en la primera sección de este capítulo se presentan con más detalle los experimentos realizados y los objetivos con los que se han diseñado.

6.1. DESCRIPCIÓN Y OBJETIVOS DE LOS EXPERIMENTOS

El objetivo de la propuesta de visualización del Capítulo 3 ha sido poder realizar advección de texturas en flujos con una discontinuidad. Para determinar el nivel de cumplimiento de este objetivo se van a llevar a cabo varios experimentos para determinar el correcto funcionamiento del método propuesto. Para ello se va a comprobar el correcto funcionamiento del algoritmo de detección y seguimiento de discontinuidades. También se pretende comprobar si este algoritmo elimina las deformaciones de la textura ante discontinuidades en los campos de velocidades que provocan su desplazamiento. Adicionalmente se pretende detectar aquellas situaciones en la que el algoritmo no puede detectar correctamente la discontinuidad produciéndose artefactos en la visualización. Para llevar a cabo tales comprobaciones se han creado cuatro campos de velocidades sintéticos que van a desplazar las coordenadas de una textura de cuadros blancos y negros.

En los capítulos 4 y 5 se revisaron o propusieron modelos de evolución de una avalancha. Se probarán también estos modelos en diferentes situaciones para determinar su validez y conocer las diferencias entre ellos. Para las diferentes pruebas se han definido dos escenarios distintos discretizados por una malla de triángulos de 160×160 vértices, con una distancia entre vértices de $0,1m$. El primero de ellos representa un corresponde con un corrimiento de tierra por una pendiente que forma un ángulo con la horizontal igual al ángulo crítico del material granular que se simula. El segundo escenario representa una avalancha de nieve cayendo por un valle. En ambos escenarios se agrega material en la capa móvil, lo que generará la avalancha.

Para el modelo de simulación de avalanchas analizado y revisado en el Capítulo 4 se va a comprobar cómo afecta en la evolución de la avalancha la utilización de diferentes esquemas de diferencias finitas en la discretización del modelo BCRE. Se va a corroborar mediante simulación cómo el esquema de diferencias de Lax-Friedrichs ofrece expansión de la avalanchas frente al esquema propuesto por Falcone y Vita (Falcone and Vita, 2006). Por

último se va a comprobar la evolución y forma de la avalancha sobre los dos escenarios comunes de pruebas, en donde se va a hacer incapié en las posibilidades de control de la expansión de la avalancha modificando los parámetros del modelo BCRE.

En el Capítulo 5 se describen dos modelos híbridos de simulación que se diferencian principalmente por la técnica de cálculo de fuerzas utilizada, DEM o SPH. Ambos modelos necesitan de una parametrización previa del sistema de partículas particular para los escenarios comunes sobre los que se va a trabajar. Se va a estudiar la relación entre el radio de acción del núcleo de suavizado para el cálculo de las velocidades y el área de influencia de cada celda. En ambos modelos híbridos, se va a estudiar la influencia en la expansión de la avalancha el umbral τ que define la altura máxima de material móvil a partir del cual se permite la creación de nuevas partículas. Adicionalmente, en la propuesta que utiliza SPH, se va a estudiar la influencia en la expansión de la avalancha de la variación del área de influencia de cada celda, definida por su lado l . Ambos modelos se van a ejecutar sobre los escenarios comunes de pruebas utilizando las configuraciones que ofrezcan avalanchas realistas y se compararán entre ellas, mirando el número de partículas utilizado, la forma de la avalancha, la definición de la discontinuidad que separa la avalancha del material estático y la distribución de partículas sobre la superficie.

Por último se van a comparar los modelos híbridos de simulación frente a la discretización del modelo BCRE basada en diferencias finitas, con el fin de comparar la flexibilidad para la configuración de la avalancha, su forma y la definición de la discontinuidad.

6.2. VISUALIZACIÓN DE CAMPOS DE FLUJO BASADA EN ADVECCIÓN DE TEXTURA

Para evaluar el algoritmo de visualización del flujo de avalancha propuesto en el Capítulo 3, se han implementado una serie de escenarios para pruebas con flujos con diferentes campos de velocidad que determinan diferentes configuraciones de discontinuidad. Los primeros dos escenarios incluyen dos campos de velocidades opuestos. En el primero, una discontinuidad horizontal separa dos flujos con campos de velocidad opuestos. En este primer ejemplo la discontinuidad no se desplaza, con lo que se evalua-

r  unicamente la capacidad para evitar la deformaci3n de la textura, sin incluir el proceso de seguimiento de la discontinuidad. Un tercer escenario est  compuesto por cuatro campos vectores apuntando en las cuatro principales direcciones: arriba, abajo, izquierda y derecha. Dos discontinuidades se cruzan en el centro del dominio, creando cuatro cuadrantes que hospedan los cuatro campos de velocidades. Las discontinuidades rotan alrededor del centro de cruce formando un molinillo. En este escenario se evaluarán el efecto de regiones de discontinuidad con diferentes velocidades y el cruce de discontinuidades.

Adicionalmente, como todos los test previos s3lo consideran discontinuidades rectas, se ha incluido un test con una frontera curva. El cuarto escenario de prueba incluye un c3rculo desplazándose alrededor del centro del dominio del flujo. Dentro del c3rculo el campo de velocidad corresponde con la velocidad de desplazamiento de su centro, mientras que fuera del c3rculo el campo de velocidad apunta hacia abajo con velocidad constante. La Figura 6.1 muestra los campos de velocidad de los cuatro escenarios de prueba implementados.

Para mostrar los resultados se ha usado una textura de tablero de ajedrez. En todos los tests, la advecci3n de la textura se ha implementado usando la aproximaci3n de mezcla propuesta por Neyret (Neyret, 2003), que es usada en muchos trabajos de advecci3n de texturas para controlar la deformaci3n de la textura. Por esta raz3n, las texturas aparecen en las imágenes mezcladas consigo mismas con diferentes valores de transparencia.

En el primer test se cumplen todas las suposiciones que se toman cuando se detecta la discontinuidad, ya que la discontinuidad es una línea recta que no se desplaza. Por esta raz3n la discontinuidad se detecta de forma correcta. El resultado puede verse en la Figura 6.2. Se puede apreciar c3mo el algoritmo de advecci3n de texturas sin gesti3n de la discontinuidad da lugar a una deformaci3n no deseada en los triángulos atravesados por la discontinuidad. Sin embargo, al aplicar el m3todo de detecci3n y remallado propuesto en el Capítulo 3 se consigue una discontinuidad bien definida y la textura no se ve afectada por deformaci3n.

En el segundo test se muestra que el algoritmo de remallado reproduce adecuadamente líneas oblicuas. En esta prueba la discontinuidad se desplaza con una velocidad que sigue una funci3n senoidal. Por esta raz3n est  continuamente desplazándose arriba y abajo, a medida que va cambiando

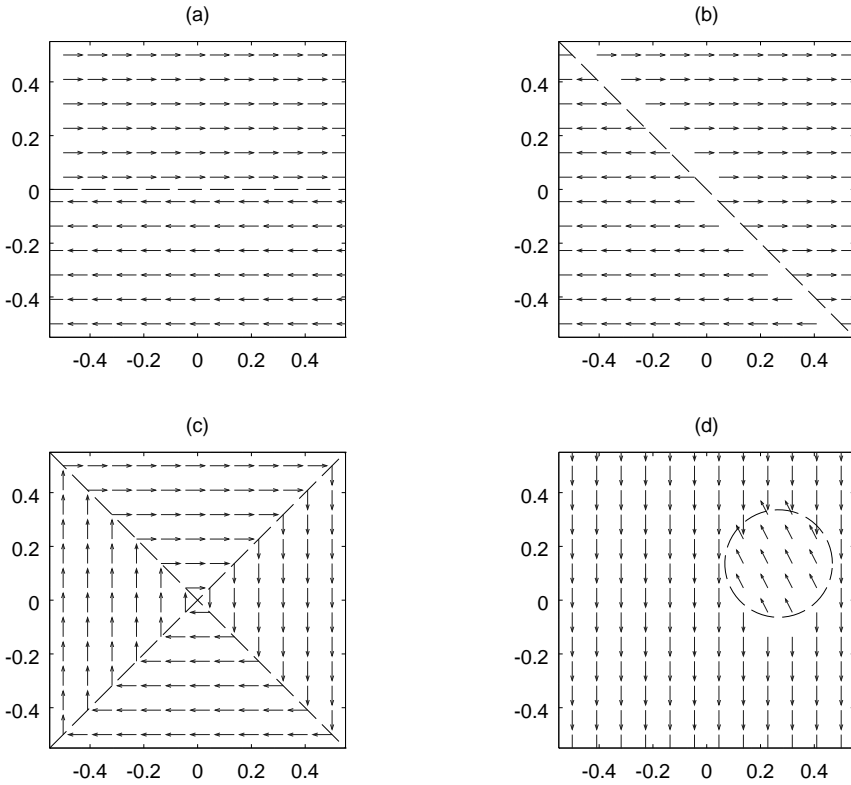


Figura 6.1: Los cuatro escenarios de pruebas que se han usado para evaluar el método propuesto. Las discontinuidades se representan por líneas de trazos.

su velocidad. En este test se producen los saltos de la discontinuidad descritos en la Sección 3.1.3 ya que en estas pruebas no se ha implementado ninguna corrección para prevenirlos, aunque en las capturas no se aprecian, es necesario visualizar un video para observarlas. Tales saltos son más notables cuando la discontinuidad actual se detiene y cambia el signo de su movimiento. El resultado, comparado con la técnica estándar de advección de textura, se puede ver en la Figura 6.3. En esta figura, también se ha incluido un detalle de la malla triangular modificada con los puntos de discontinuidad estimados.

En el tercer test se puede observar el comportamiento del método en una situación con dos discontinuidades cruzándose (Figura 6.4). Una propiedad

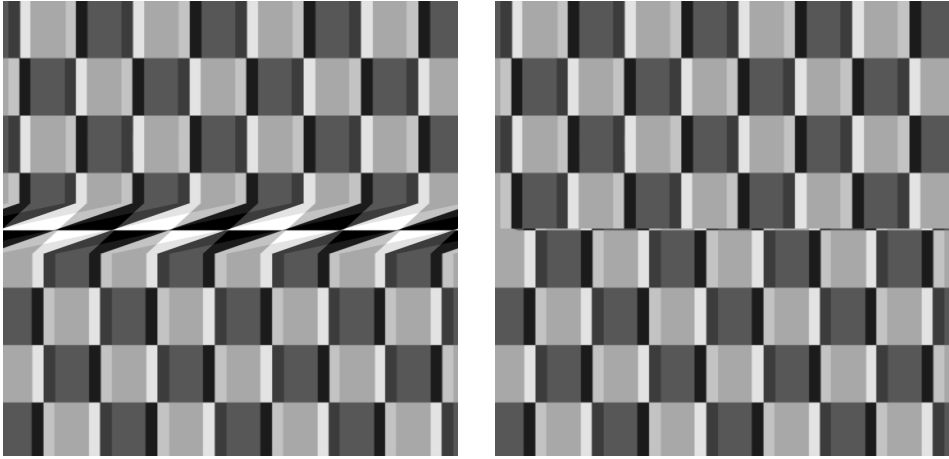


Figura 6.2: La advección de textura sobre un dominio con dos campos vectores opuestos separados por una discontinuidad horizontal, sin detección de discontinuidad (izquierda) y con el método de detección de discontinuidad propuesto (derecha).

remarcable de este escenario es el hecho de que cuanto más lejos esté el punto de discontinuidad del centro, mayor será su velocidad. Además, como las discontinuidades rotan como si fuesen un molinillo, van cambiando su velocidad a lo largo del tiempo. Estas dos propiedades hacen que la exactitud de la estimación de la velocidad dependa del ángulo entre una arista y la discontinuidad. Esto produce la aparición de pequeños picos en la aproximación de la frontera entre los diferentes flujos. Este problema, sin embargo, se corrige en el momento en que la discontinuidad alcanza un vértice y no se nota apenas para mallas densas. El método propuesto asume que la discontinuidad puede aproximarse localmente empleando una única línea recta. Por esta razón, el remallado alrededor del centro no siempre es consistente con el campo vector subyacente. Sin embargo, es un efecto muy local y el comportamiento en conjunto es considerado positivo.

El último test de la circunferencia moviéndose plantea un escenario más desafiante para el paso de detección de aristas. En esta prueba la curvatura de la discontinuidad causa un mayor error en la estimación de las velocidades locales. Esto produce que se note más la apariencia de picos en la frontera,

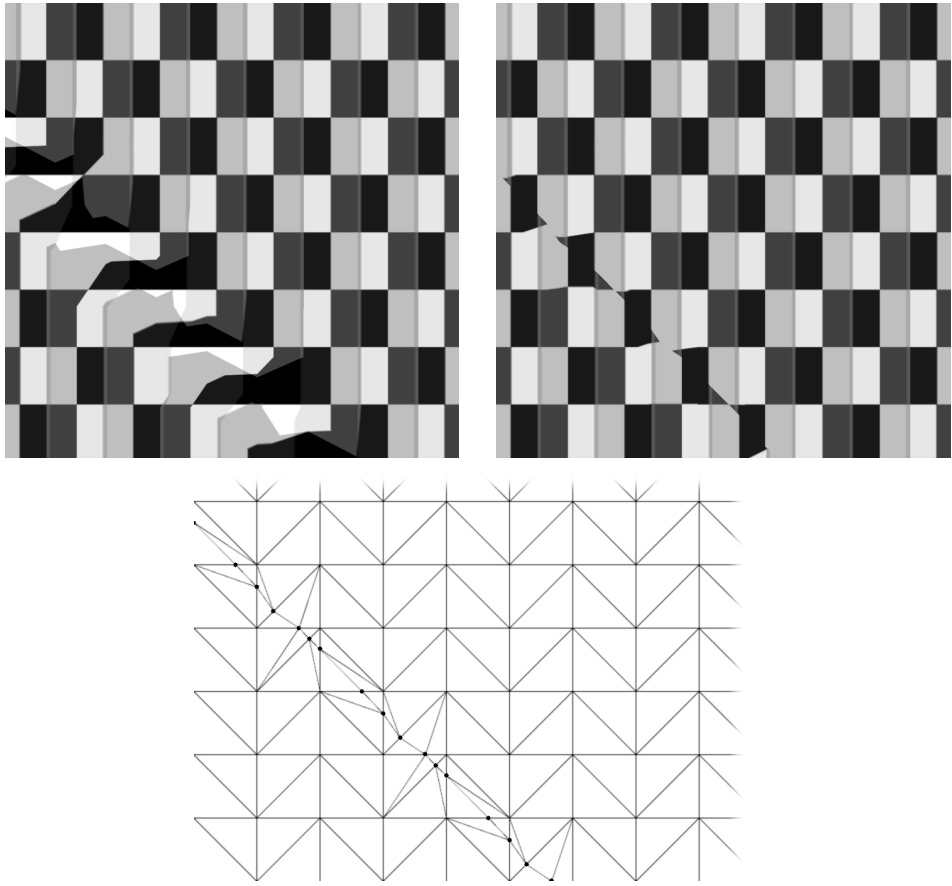


Figura 6.3: Advección de textura sobre un dominio con dos campos de vectores opuestos, separados por una discontinuidad oblicua, sin detección de discontinuidad (izquierda) y con el método propuesto de detección de discontinuidad (derecha). El esquema de remallado se muestra en la imagen inferior, junto con los puntos de discontinuidad estimados.

de la misma manera que ocurría en el test del molinillo. Sin embargo, estos efectos se reducen conforme la resolución de la malla se incrementa. Otra causa de la aparición de este efecto es una discontinuidad casi paralela a una arista. Esta situación se puede solventar si se evitan en la malla triangular los ángulos cercanos a 180 grados. La Figura 6.5 muestra los resultados de este test con una resolución de 160×160 celdas, donde se puede observar

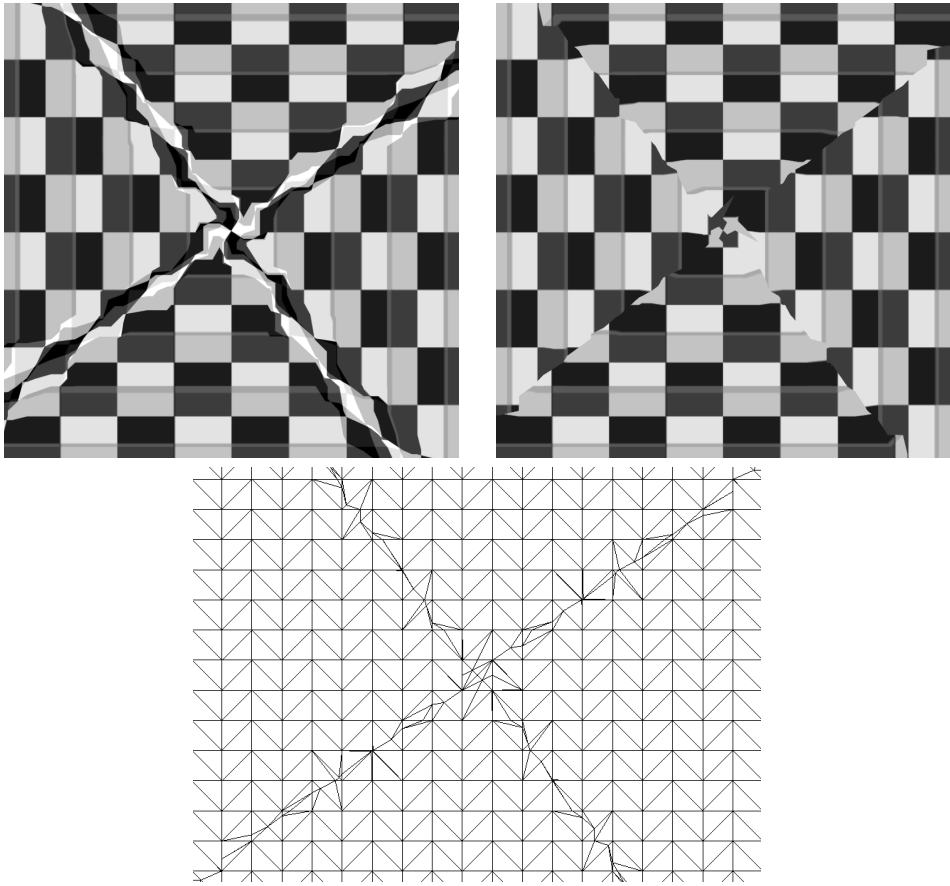


Figura 6.4: Cuatro campos vectoriales divididos por dos discontinuidades que se cruzan. La imagen de la izquierda sin detección de discontinuidad y la imagen de la derecha con detección de discontinuidad. El esquema de remallado se muestra en la imagen inferior.

que los picos casi no se aprecian. La textura utilizada en esta prueba ha sido generada con un ruido Perlin.

Los resultados de estas pruebas indican que la técnica de advección de textura con detección de discontinuidades propuesta permite detectar y seguir la evolución de discontinuidades en los flujos, representando tal discontinuidad visualmente con una buena exactitud sin necesidad de aumentar necesariamente la resolución de la malla. A pesar de los problemas de pi-

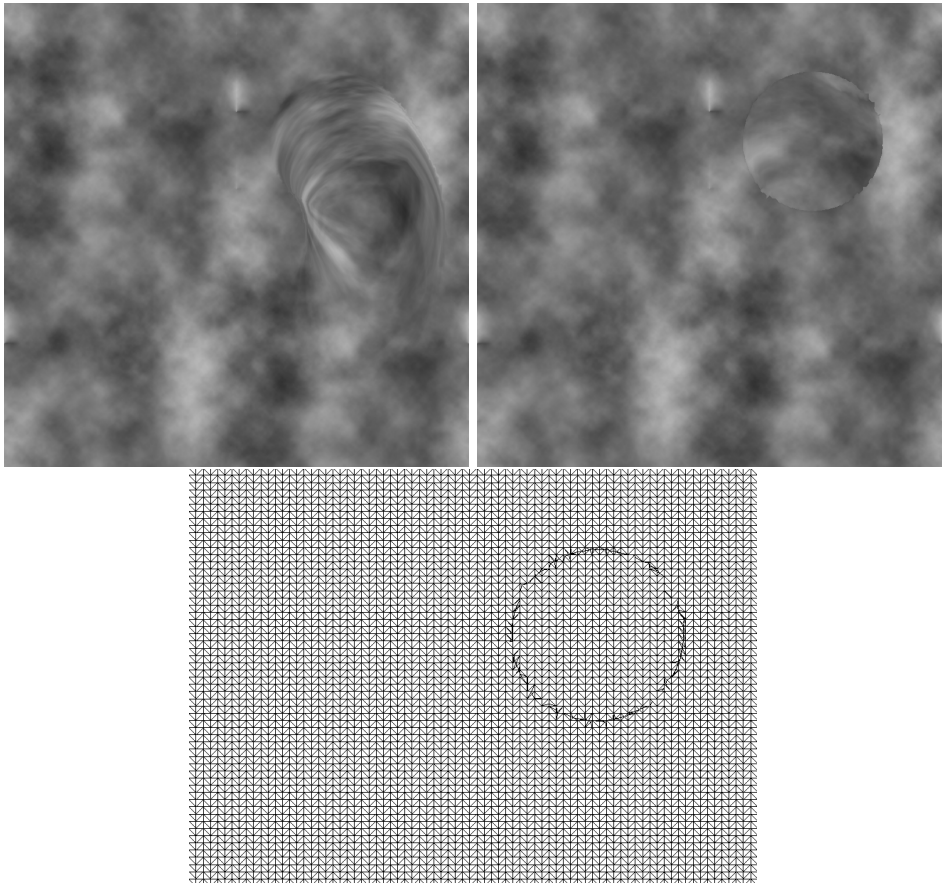


Figura 6.5: Un círculo moviéndose alrededor del centro del dominio, visualizado con un textura con ruido de Perlin. El campo de velocidades dentro de la esfera coincide con la velocidad de su centro y la velocidad del campo del fondo se desplaza hacia abajo. La imagen izquierda muestra la advección sin detección de discontinuidad y la imagen derecha con detección de discontinuidad. El esquema de remallado se muestra en la imagen inferior.

cos y saltos que se producen en determinadas situaciones, la calidad de la visualización de las discontinuidades es notablemente mejor que al utilizar un algoritmo estándar de advección de textura, reduciendo o eliminando la deformación.

6.3. SIMULACIÓN DE AVALANCHAS

Una vez analizado el sistema de visualización de avalanchas, a continuación se revisan las propiedades de los modelos de simulación que se han propuesto en este trabajo. Se han implementado tres modelos, uno basado en la discretización por diferencias finitas del modelo BCRE y los otros dos restantes basados en el sistema híbrido propuesto en el Capítulo 5. Todos ellos se han simulado sobre los mismos escenarios. El primer escenario de avalancha es un corrimiento de tierra sobre un plano inclinado con un ángulo igual al ángulo crítico característico del material. El segundo escenario es una avalancha de nieve sobre un valle. Se provoca el inicio de la avalancha agregando material y dejando que evolucione pendiente abajo. En estos escenarios se ha incluido una textura de *bump mapping* que también se transporta con el flujo cuando es necesario. Para poder apreciar bien la discontinuidad, se han ensombreciendo algunos de los vértices agregados. Este tipo de mejora se puede realizar sin ningún coste adicional, ya que se puede acceder durante el remallado a las propiedades de los vértices.

Para las diferentes pruebas realizadas en esta sección se ha utilizado el modelo de visualización visto anteriormente con flujos de velocidades generados por los distintos modelos de simulación de avalanchas de materiales granulares descritos en los Capítulos 4 y 5.

6.3.1. Simulación basada en diferencias finitas

El esquema de diferencias finitas utilizado en la discretización del modelo BCRE afecta directamente a los resultados obtenidos en la simulación. En el capítulo 4 se ha realizado un análisis matemático de las propiedades de dos de los esquemas de diferencias finitas más adecuados para simular ciertos comportamientos observados en avalanchas localizadas. Como primera prueba, se compara el comportamiento de los dos métodos numéricos, mostrando visualmente las propiedades demostradas de forma analítica.

Con este fin, se ha diseñado un escenario dividido por una rejilla de 80×80 celdas, donde se ha simulado una avalancha en una pendiente estática de 45 grados de inclinación. La pendiente coincide con el ángulo crítico del material que se simula. Al incrementar la cantidad de material en la capa móvil se provoca la avalancha en una región limitada, discretizada como un cuadrado de 3×3 celdas.

La Figura 6.6 muestra la evolución de dos avalanchas, en la imagen de la izquierda se emplea el esquema de diferencias finitas propuesto por Falcone y Vita (Falcone and Vita, 2006) y en la imagen de la derecha se utiliza el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs. En la figura el sentido de la pendiente es hacia abajo y muestra la región ocupada por la avalancha después de 2,8 segundos de simulación desde su inicio. Se detallan los estados intermedios obtenidos cada 0,2 segundos del tiempo de simulación. En el caso de la avalancha de la izquierda, como se ha predicho en el análisis matemático, el material fluye pendiente abajo, pero no se desplaza lateralmente, perpendicular a la dirección de la pendiente principal, ni tampoco se expande pendiente arriba. Mientras que en la imagen de la derecha generada utilizando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs, la avalancha se desplaza pendiente abajo y se expande lateralmente. También se aprecia como la avalancha se propaga hacia arriba. Esta reproduce un comportamiento más parecido a una avalancha real, en la que los granos localizados pendiente arriba progresivamente caen por la pérdida del soporte, como se describe en el trabajo de Daerr y Douady (Daerr and Douady, 1999a).

Como resulta interesante observar la sensación producida en una aplicación en el contexto de un entorno de Realidad Virtual. Se han repetido las pruebas utilizando una textura realista. En la Figura 6.7 se muestra la visualización OpenGL del modelo usando ambos esquemas de diferencias finitas. La visualización está basada en advección de texturas, como se describe en el Capítulo 3, sobre una malla de triángulos que se construye sobre la discretización del modelo BCRE.

Debido a que es relevante el tiempo de cálculo en los modelos usados en simulaciones de Realidad Virtual, a la hora de compararlos, hay que destacar que los dos esquemas de diferencias finitas son esquemas explícitos y que requieren de un número de cálculos del mismo orden de magnitud, por lo que ofrecen prestaciones similares.

Como ya se ha comentado, el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs presenta una difusión de la avalancha más adecuada que la obtenida por el esquema FV. Sin embargo resulta interesante conocer hasta que punto es posible controlar la expansión de la avalancha utilizando este primer esquema. En las ecuaciones del modelo BCRE (Ecuación 2.1) dos constantes permiten controlar la evolución de la avalancha: β define la velocidad de la avalancha y γ controla el intercambio de material entre capas. Se

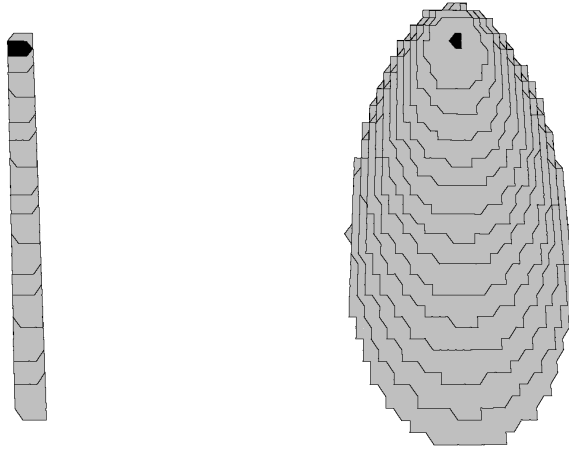


Figura 6.6: Siluetas de avalanchas después de 2,8 segundos desde el inicio, generadas en la zona negra. Las líneas indican la expansión de la avalancha en intervalos de 0,20 segundos. En la imagen de la izquierda se muestra la propagación de la avalancha usando el esquema de diferencias finitas de FV. En la imagen de la derecha se muestra la propagación de la avalancha utilizando el esquema de Lax-Friedrichs.

han probado distintas configuraciones muy diferentes con el fin de apreciar mejor las diferencias y poder sacar alguna conclusión sobre cuales son los valores más adecuados.

Todas las pruebas, tal como se puede apreciar en la Figura 6.8, se han realizado sobre el mismo escenario anterior de la pendiente usando el ángulo crítico del material. Adicionalmente se ha empleado una textura de nieve para obtener una mejor visualización. En las imágenes de la izquierda se ha utilizado el valor de 0.005 para γ , mientras que en la de la derecha $\gamma = 5,0$, ya que valores superiores provocan inestabilidad en el modelo. La constante β se mantiene a 1.0 en ambas simulaciones, ya que influye en el cálculo del campo de velocidades final (Ecuación 4.24), si se modificase se vería afectada la velocidad de desplazamiento de la textura de la avalancha.

Una vez vistos los resultados se puede apreciar que a pesar de la gran diferencia de valor de γ que existe entre ambas simulaciones se mantiene la

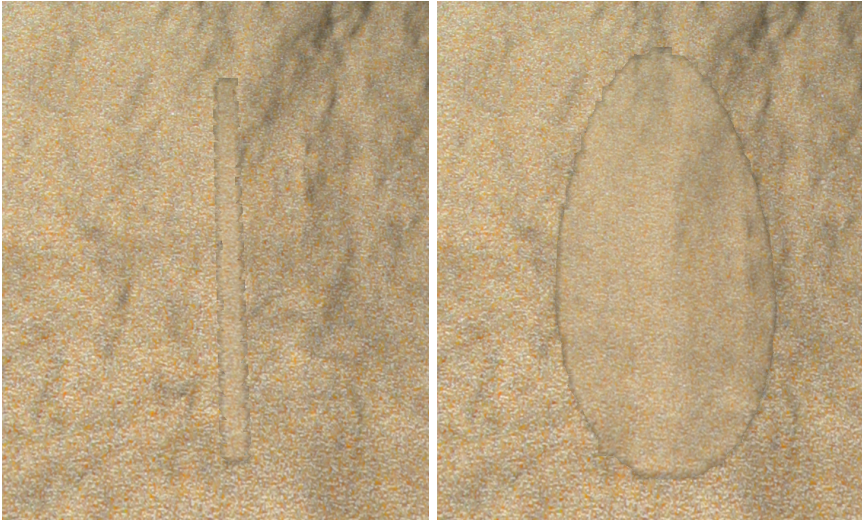


Figura 6.7: Una visualización OpenGL de una avalancha simulada usando el esquema de diferencias finitas FV (izquierda) y el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs (derecha).

misma forma ovalada en la avalancha, afectando mucho más a la velocidad de expansión que a su forma.

Por último, para la generación de avalanchas se ha aplicado el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs en los dos escenarios de pruebas citados. La Figura 6.9 muestra una secuencia de imágenes de la evolución del corrimiento de tierra pendiente abajo. La Figura 6.10 muestra dos imágenes de avalancha de nieve en el valle, usando una configuración de posición y orientación de la cámara distinta en cada imagen. En ambos escenarios se ha iniciado la avalancha en una región limitada, discretizada como un cuadrado de 3×3 celdas, incrementando la altura de la capa móvil. Ambos escenarios se han discretizado mediante una rejilla de 160×160 celdas.

Al analizar la visualización de las simulaciones de avalanchas mostradas en la Figura 6.9 y la Figura 6.10, se aprecia como las avalanchas quedan definidas por una línea curva y suave que describe la avalancha con una silueta ovalada, casi circular en el caso del corrimiento del tierra. Las diferencias finitas que discretizan el modelo ofrecen un desplazamiento y expansión de la avalancha celda a celda que favorece el algoritmo de visualización propuesto

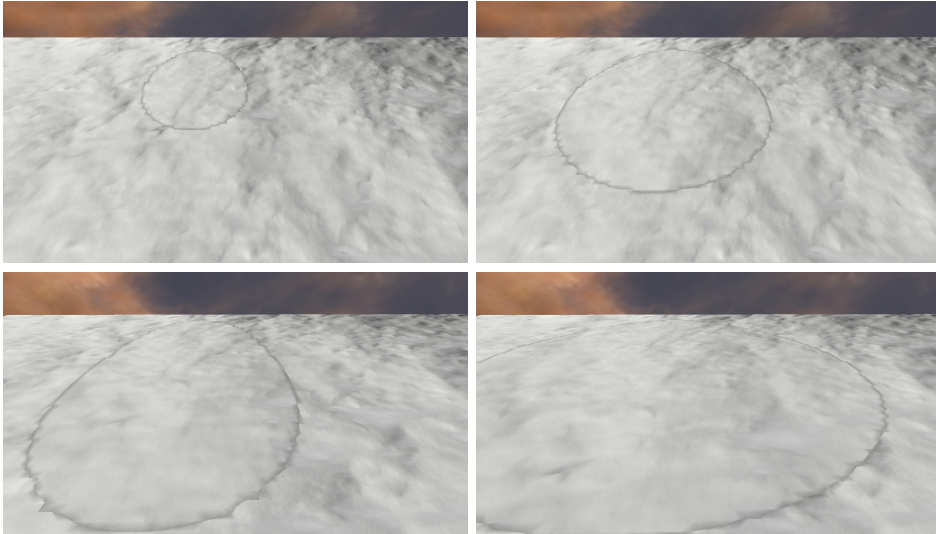


Figura 6.8: Control de expansión de la avalancha simulada con el modelo BCRE discretizado con diferencias finitas. Se muestran dos simulaciones distintas, manteniendo en ambas el mismo valor de β a 1.0. Las imágenes de la izquierda corresponden a una simulación usando $\gamma = 0,005$ y las imágenes de la derecha corresponden con la otra simulación en la que se ha usado $\gamma = 5,0$. Las capturas de la primera fila de imágenes corresponden al segundo 2.5 de simulación, mientras que las de la fila inferior se han tomado en el instante en que alcanzan un mismo punto (en la izquierda en el segundo 6.71 y en la derecha en el 3.96).

en el Capítulo 3. La principal dificultad encontrada durante las pruebas, es el control de la expansión de la avalancha, ya que con el modelo BCRE se puede controlar la velocidad pero ya no tanto la expansión, dependiendo dicha tarea directamente del modelo de diferencias finitas utilizado en su discretización.

6.3.2. Simulación basada en partículas

En el Capítulo 5 se han descrito dos modelos híbridos de simulación de avalanchas basado en partículas utilizando en cada uno una propuesta distinta para el cálculo de fuerzas, DEM o SPH. Ambos modelos, comparten

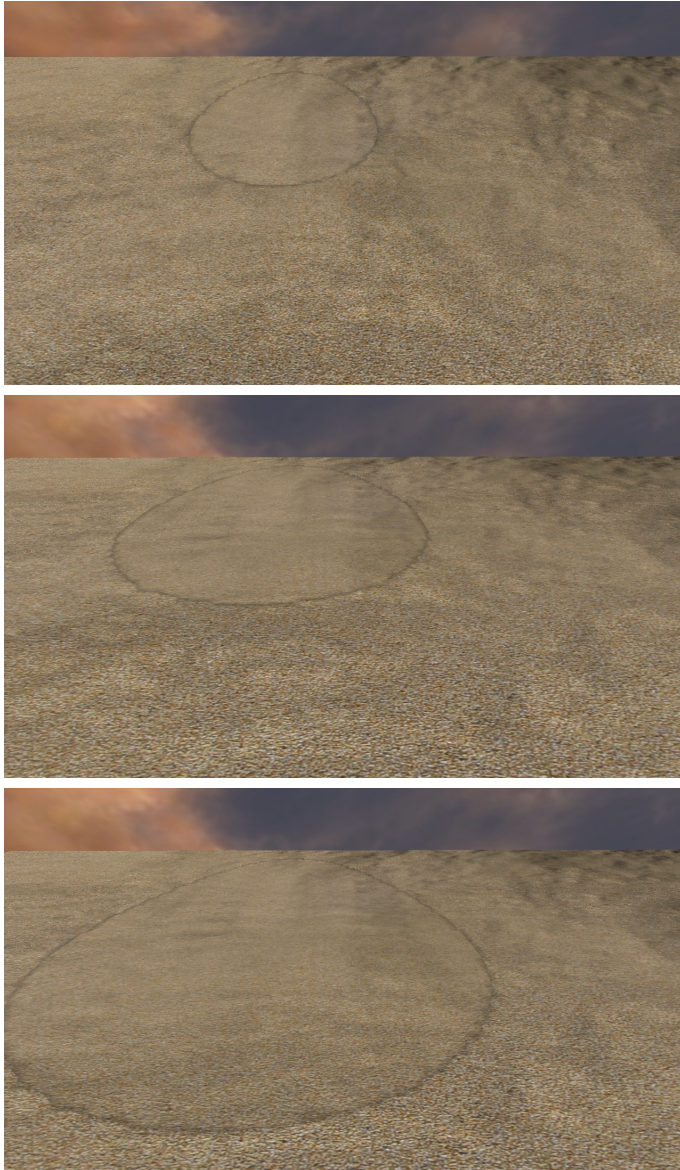


Figura 6.9: Tres imágenes de la evolución de un corrimiento de tierra pendiente abajo utilizando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs. La avalancha se expande lateralmente generando una forma ovalada.

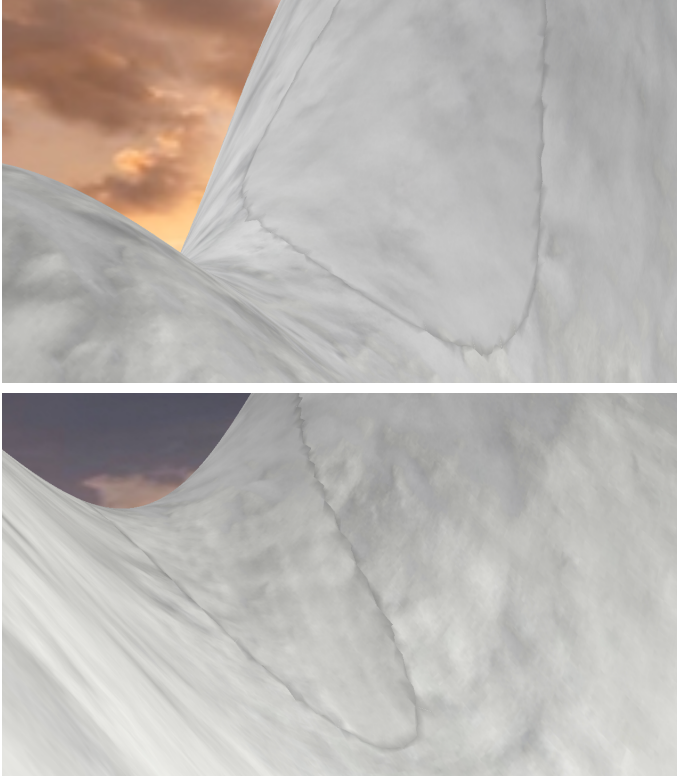


Figura 6.10: Dos imágenes de la evolución de una avalancha bajando un valle utilizando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs.

parámetros que caracterizan la expansión de la avalancha. En la Sección 5.4.1 se han descrito las variables que influyen en la creación de nuevas partículas, que producen directamente la expansión del flujo, además de influir en la velocidad de su avance. Estas variables son el valor máximo de material móvil τ a partir del cual se permite generar nuevas partículas y la distancia mínima ϱ que debe existir entre 2 partículas.

En el cálculo de la altura de material móvil $R_{i,j}$ (Ecuación 5.14) y de la velocidad final $\mathbf{v}_{i,j}$ (Ecuación 5.17) asociada a cada celda (i, j) , se utiliza un núcleo de suavizado polinómico con un radio de acción ϕ . Este radio, junto al área cuadrada de influencia asociada a cada celda definida por el tamaño del lado l , delimitan la superficie afectada por una partícula. Es importante



Figura 6.11: Área afectada por una partícula en el escenario del corrimiento de tierra, representada en una malla de 160×160 puntos y $0,1m$ entre puntos. En la imagen de la izquierda se utiliza $\phi = 0,9m$ en el núcleo de suavizado utilizado para la generación del flujo de velocidades y el área de influencia de las celdas corresponden a un cuadrado con $l = 0,5m$. En la imagen de la derecha se ha usado un $\phi = 0,9m$ y $l = 2,0m$.

destacar que el área cubierta por el radio de acción del núcleo de suavizado es redonda, mientras que la zona de influencia de cada celda es cuadrada, por lo que el área de influencia final será la intersección de ambas. Es decir, si el área redonda es mayor que la cuadrada, el área de influencia final será cuadrada, y la misma situación al revés.

Este efecto se hace visible en el cálculo del campo de velocidades, ya que es usado directamente para transportar las coordenadas de textura de la malla. En la Figura 6.11 se muestran las dos situaciones extremo. En la imagen de la izquierda se muestra un área cuadrada menor que la definida por el radio de acción del núcleo y en la imagen de la derecha el área cuadrada es mayor que la definida por el radio de acción del núcleo.

En la naturaleza es muy poco común encontrar avalanchas con forma cuadrada, aunque el inicio de la avalancha sea provocado por una área cuadrada, a medida que evolucione la avalancha tenderá a tener líneas curvas y una silueta más redondeada (Daerr and Douady, 1999b). En consecuencia, para obtener mejores resultados en las pruebas siguientes, se va a configurar

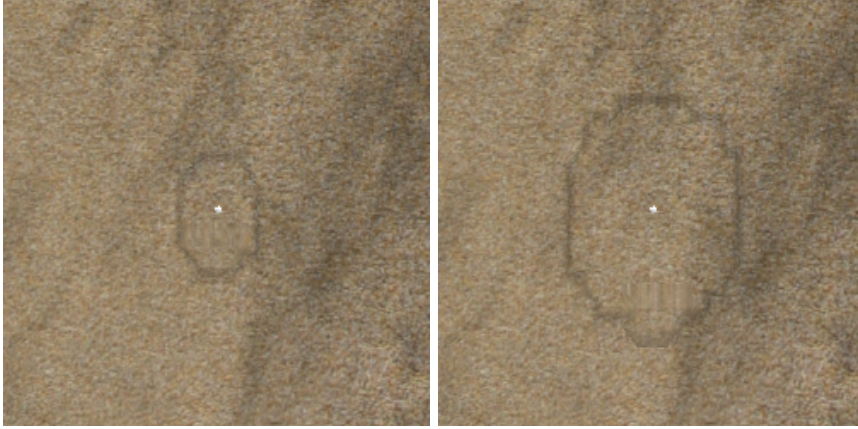


Figura 6.12: Área afectada por una partícula en el escenario del corrimiento de tierra, representada por una malla de 160×160 puntos y 0.1 metros de distancia entre puntos. En la imagen de la izquierda se limita el área con un radio de acción ϕ de 0.3 metros. En la imagen derecha se limita el área con un radio de acción ϕ de 0.6 metros.

el área de influencia de cada celda y el radio de acción ϕ del núcleo de suavizado utilizado para la generación del campo de velocidades, de manera que la intersección de las dos áreas sea igual al círculo con radio ϕ . Esto se consigue cumpliendo la condición (6.1), que indica que el radio ϕ debe ser menor o igual que la mitad del lado l del área cuadrada de influencia de cada celda.

$$\phi \leq \frac{l}{2} \quad (6.1)$$

En la figura 6.12 se muestra el área afectada por una partícula modificando el radio de acción y adecuando el área ocupada por los vecinos para no infringir la condición 6.1.

Durante las pruebas se ha detectado que al utilizar en el núcleo de suavizado polinómico de orden 6 (Ecuación 5.9) valores de ϕ menores a 9 veces la distancia entre puntos de la malla produce como resultado pesos con valores muy distintos, con diferencias superiores a 1. Esto se traduce en el cálculo de la altura del material móvil en cada celda $R_{i,j}$ en valores muy distintos en zonas próximas y en que el cálculo de velocidades $\mathbf{v}_{i,j}$ produce

constantes	m_k	ϵ	t_c	k_t	μ
valores	200.0 kg	0.05	0.02s	0.1	0.1

Cuadro 6.1: Valores de las constantes utilizadas en el modelo de simulación de partículas basado en DEM.

un campo de flujo muy inestable, con velocidades de modulo y dirección muy distintos dentro de la avalancha. Para evitar este problema se recomienda utilizar para ϕ valores de 9 o 10 veces la distancia entre puntos de la malla, puesto que para una distancia $r = 0$ el resultado del núcleo es próximo a la unidad, delimitando así la altura de la campana de Gauss que genera en 1.

En las siguientes pruebas la distancia mínima ϱ entre partículas se va a mantener constante con el objeto de mantener la misma distribución uniforme de partículas por la superficie del material. Sin embargo se van a probar distintas configuraciones de umbral mínimo τ con el fin de controlar la expansión de la avalancha. Estas configuraciones van a ser distintas para el modelo basado en DEM y el basado en SPH, puesto que ambos presentan una distribución de las partículas diferente.

Simulación utilizando DEM

La simulación de un sistema de partículas utilizando el modelo de elementos discretos detallado en el Capítulo 5 requiere de una parametrización correcta de las constantes que afectan al cálculo de las fuerzas. Ésta parametrización depende del escenario de simulación utilizado. En el Cuadro 6.1 se muestran los valores utilizados para las constantes de las ecuaciones del modelo descritas en la Sección 2.4.1 usadas en las pruebas siguientes. Se ha comprobado que esta configuración ofrece una simulación estable de las partículas, cumpliendo con las restricciones de colisión y distancia mínima deseada.

Ambos escenarios de pruebas están discretizados mediante una rejilla de 160×160 celdas cuadradas de 0.1 metros de lado. Para cada celda se utiliza un área cuadrada de influencia de lado $1,2m$. En ambos escenarios se provoca una avalancha agregando 3 partículas alineadas con el eje X con 5 centímetros de altura inicial ($R_k = 0,05$) cada una y con una separación entre ellas de 0.2 metros, $\varrho = 0,2$.

En la Figura 6.13 se observan cuatro simulaciones de desplazamiento de terreno. Las imágenes de una misma fila tienen umbrales τ diferentes pero el mismo radio de acción ϕ y las imágenes de una misma columna lo contrario. Las capturas que comparten ϕ corresponden al mismo instante de tiempo. Se puede observar que al modificar τ , la velocidad de expansión cambia, alterando la velocidad global de la avalancha. Se ha optado por elegir en la columna de la derecha las capturas en el instante en que la avalancha alcanza el mismo punto que en las simulaciones de la parte izquierda. En las imágenes inferiores, al utilizar en la simulación un valor de ϕ mayor que el empleado en las simulaciones de las imágenes de arriba, la frontera de la avalancha se presenta con líneas más suaves y alejadas de las partículas. En las imágenes de la derecha, al usar en la simulación un mayor umbral τ que el empleado en las simulaciones representadas en las imágenes de la izquierda, se crean un menor número de partículas produciendo una menor expansión.

La configuración elegida que ofrece un mejor aspecto visual de la avalancha y que se asemeja más a los resultados experimentales estudiados en el trabajo de Daerr y Douady (Daerr and Douady, 1999b), ha sido obtenida utilizando para la creación de nuevas partículas $\phi = 0,4m$ y un umbral $\tau = 0,13m$. En la Figura 6.14 pueden verse varias capturas de la evolución de la avalancha pendiente abajo con y sin partículas visibles. Destaca la creación de partículas en los límites de la avalancha, produciendo su expansión. Nótese que la aparición de una nueva partícula en la frontera produce un salto de la discontinuidad que provoca distorsión en la advección de textura, por lo que es deseado que las nuevas partículas se creen dentro de la avalancha y no en su frontera.

En el escenario de la avalancha de nieve bajando el valle se ha utilizado un radio de acción $\phi = 0,4m$ y un umbral $\tau = 0,20m$. En la Figura 6.15 se muestran capturas de la simulación tomadas desde distintos ángulos. En las imágenes de la izquierda se repiten las mismas capturas pero mostrando las partículas.

En la evolución de las avalanchas en ambos escenarios se aprecian irregularidades en el campo de velocidad, producido por la aparición de nuevas partículas que empujan al resto para hacerse hueco. Esto se traduce en un cambio de dirección en la velocidad en algunas áreas del flujo durante unos segundos.

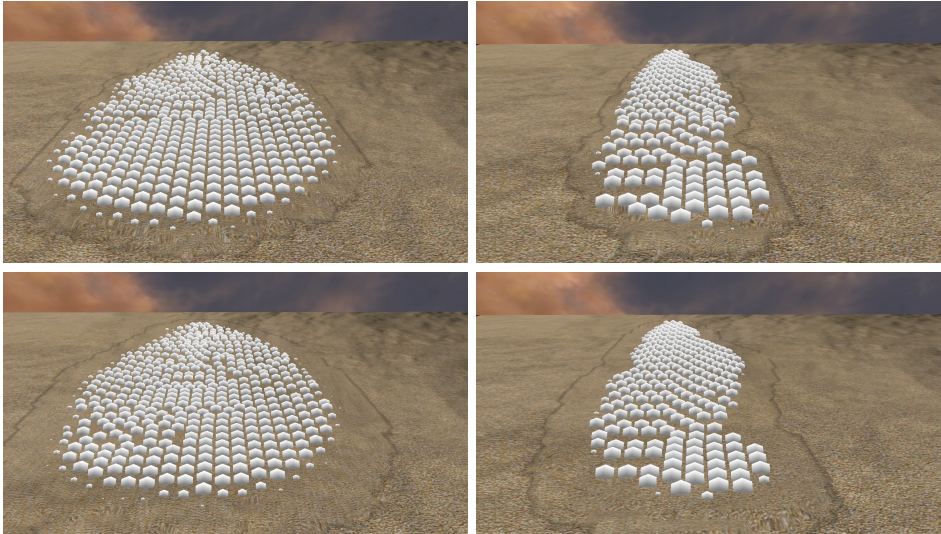


Figura 6.13: Capturas del corrimiento de terreno sobre una pendiente. Las capturas de la izquierda utilizan un umbral τ de 0.1m para la creación de nuevas partículas y corresponden al segundo 11.76, mientras que las de la derecha $\tau = 0,2m$ y el tiempo es de 20.28 segundos. Las imágenes de arriba usan un radio de acción (ϕ) del núcleo de suavizado polinómico utilizado en el cálculo del campo de velocidades igual a 0,3m, mientras que las imágenes de abajo $\phi = 0,6m$.

Simulación utilizando SPH

El modelo de simulación de fluidos SPH adaptado a materiales granulares descrito en el Capítulo 5, necesita de una parametrización previa para mantener el sistema de partículas estable. Por ejemplo, con partículas de 200kg si se utiliza una constante de rigidez del gas k_s con valores superiores a 1 y una densidad $\rho = 99,86$, las partículas que estén muy próximas entre sí saldrán disparadas en sentidos opuesto a alta velocidad. O si se utiliza una alta densidad ρ las partículas tenderán a formar grupos y no a desplazarse independientemente. En el Cuadro 6.2 se muestran los valores de las constantes utilizadas en las pruebas. Resulta interesante utilizar un valor de viscosidad ψ bastante elevado en comparación con la constante del gas k_s , con el fin de igualar las velocidades de las partículas cercanas.

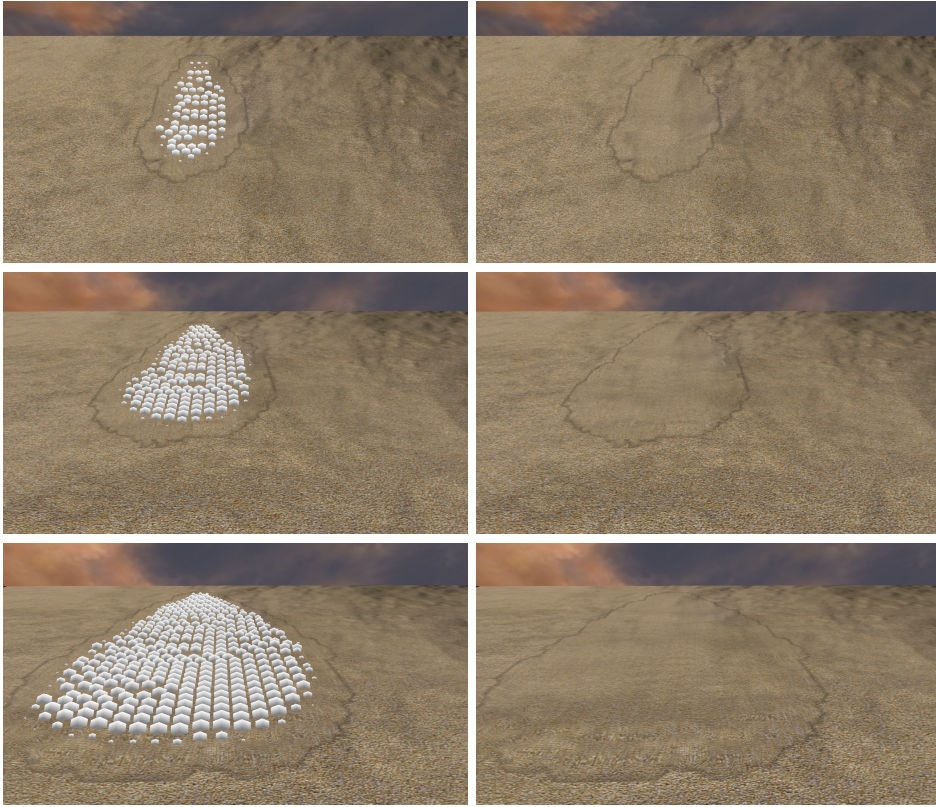


Figura 6.14: Secuencia de imágenes que muestra el corrimiento de terreno. La misma secuencia está duplicada en dos columnas, pero en la de la izquierdas se pueden visualizar las partículas que transportan el material móvil. Se ha utilizado $\tau = 0,13m$ y $\phi = 4m$.

constantes	m_k	k_s	ψ	s	ρ_0
valores	200.0 kg	0.5	50.0	1.0 m	99.86 kg/m ³

Cuadro 6.2: Valores de las constantes utilizadas en el modelo de simulación de partículas que utiliza SPH.

En las pruebas realizadas se ha usado un radio de acción s de 1.0 metros para los diferentes núcleos de suavizado utilizados, ya que ofrecen una buena estabilidad en los escenarios implementados. Sin embargo, para el radio de

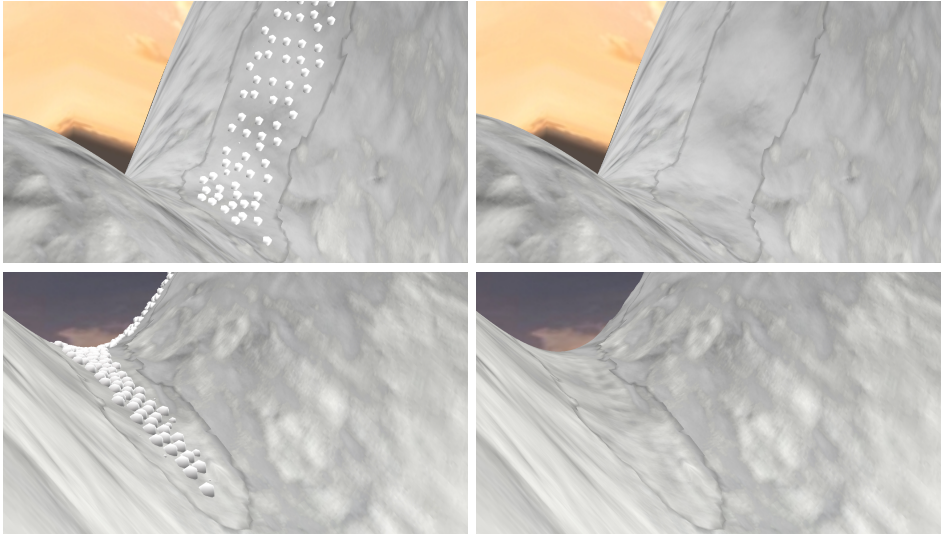


Figura 6.15: Secuencia de imágenes de una avalancha de nieve en un valle. Las imágenes están duplicadas en las dos columnas, salvo que en las de la izquierda se muestra el detalle de las partículas. Se ha utilizado $\tau = 0,20m$ y un radio $h = 0,4m$.

acción ϕ del núcleo de suavizado polinómico utilizado en el cálculo de las velocidades $\mathbf{v}_{i,j}$ y alturas $R_{i,j}$, se han probado distintas configuraciones ya que juegan un importante papel en el control de expansión de las avalanchas.

Este modelo de simulación permite controlar la avalancha modificando los valores de ϕ y τ , como en el modelo de simulación anterior. Adicionalmente, el área cuadrada de influencia de las celdas, definida por el tamaño del lado l , también permitirá controlar la expansión de las partículas. Esto es así porque aunque no se modifique el radio de acción de los núcleos de suavizado, el tamaño del área de influencia de cada celda varía el número de partículas incluidas en $P_{i,j}$ asociada a cada celda (i, j) , produciendo fuerzas diferentes.

Ambos escenarios de pruebas están discretizados mediante una rejilla de 160×160 celdas cuadradas de 0,1 metros de lado. En ellos se provoca una avalancha agregando 3 partículas alineadas con el eje X con $R_k = 0,05$ cada una y con una separación entre ellas de 0,2 metros, $\rho = 0,2$.

En la primera prueba realizada se estudia la variación en la expansión de

la avalancha producida por la modificación del radio de acción ϕ y el tamaño del área de influencia de cada celda definido por l . En la Figura 6.16 se muestra una serie de imágenes de distintas simulaciones del corrimiento de terreno sobre una pendiente. En cada simulación se ha utilizado una combinación de valores de ϕ y l distinta. En todas las simulaciones se cumple la condición (6.1) y se mantiene el umbral τ a 0.25 metros. Las imágenes corresponden al mismo instante de tiempo en todas las simulaciones, siendo este 9.38 segundos desde el inicio de la avalancha. En la secuencia ordenada de imágenes formada por la superior-izquierda, la superior-derecha e la inferior-izquierda se ha ido decrementando l , dando lugar a una reducción de la separación existente entre las partículas que forman la avalancha. En esta secuencia también se ha reducido ϕ , pero sólo afecta en la advección de textura, acercando la discontinuidad de la avalancha a las partículas. En la imagen inferior derecha, se demuestra la independencia de los efectos de l y ϕ , donde se observa una gran separación entre partículas, pero la frontera de la avalancha en la textura está muy próxima a las partículas. En esta imagen, la separación entre partículas es mayor que el área de influencia de las celdas, dando lugar a áreas cerradas con velocidad 0 rodeadas por avalancha.

La configuración elegida que ofrece para la avalancha un mejor aspecto visual, que se asemeja más a los resultados experimentales de Daerr y Douady, (Daerr and Douady, 1999b), ha sido aquella que utiliza $\phi = 0,6m$ para el núcleo de suavizado, un umbral τ de 0.25 metros y un lado l del área cubierta por los vecinos de 1.2 metros. En la Figura 6.17 pueden verse varias capturas de la evolución de la avalancha pendiente abajo, mostrando las partículas en las imágenes de la columna de la izquierda. El flujo es regular, expandiéndose poco lateralmente y con una discontinuidad que separa la avalancha del material estático bien definida, generando una apariencia en forma de nube.

Sobre el escenario de la avalancha de nieve bajando el valle se ha realizado un estudio de la expansión de la avalancha en función del umbral τ . En la Figura 6.18 se muestran los resultados de dos simulaciones sobre el escenario del valle utilizando en ambos casos un radio de acción $\phi = 0,6m$ y un tamaño del área ocupada por los vecinos correspondiente a $l = 1,2m$. Ambas imágenes se han capturado en el mismo instante de tiempo. En la imagen de la izquierda se ha usado un umbral $\tau = 0,15m$ mientras que en

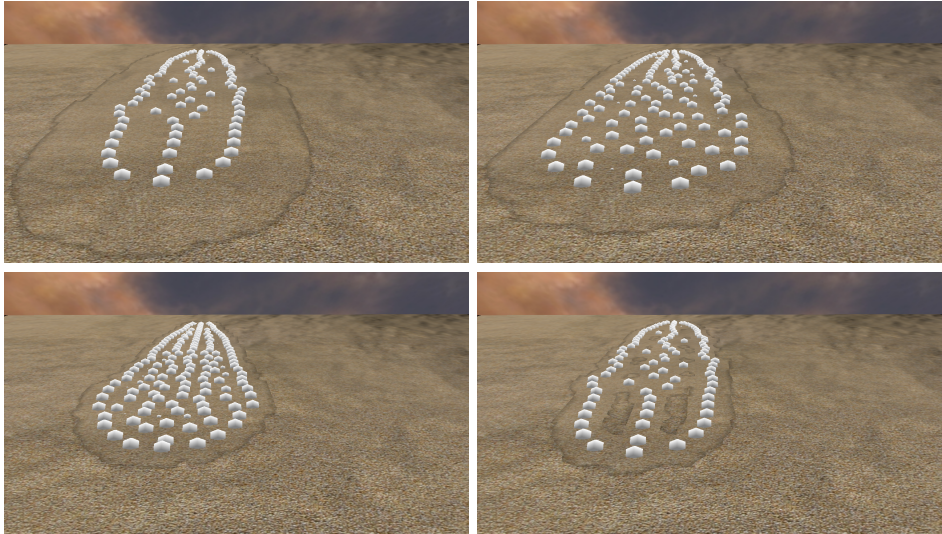


Figura 6.16: Corrimiento de terreno en una pendiente. En todas las imágenes se ha utilizado un umbral τ para la creación de nuevas partículas de $0.25m$. En cada imagen se utiliza una combinación distinta de ϕ y l . En la imagen superior izquierda $\phi = 0,9m$ y $l = 2,0m$, en la imagen superior derecha $\phi = 0,6m$ y $l = 1,2m$, en la imagen inferior izquierda $\phi = 0,3m$ y $l = 0,7$ y en la imagen inferior derecha $\phi = 0,3$ y $l = 2,0$.

la imagen de la derecha se ha usado $\tau = 0,30m$. Se aprecia la expansión de la avalancha, pero destaca que al reducir el umbral τ se acelera la avalancha debido a la creación de nuevas partículas en el frente. Téngase en cuenta, como ya se ha remarcado anteriormente, que todas las imágenes representan el mismo tiempo de simulación, por lo que si la avalancha es mayor, es porque va más rápida.

En el escenario de la avalancha de nieve bajando el valle se han utilizado los valores $\tau = 0,30m$, $l = 1,2m$ y $\phi = 0,6m$ para obtener el resultado mostrado en la Figura 6.19. Se muestran capturas de la simulación desde distintos ángulos. En la columna de la izquierda la simulación muestra las partículas que transportan la información de altura de la capa móvil.

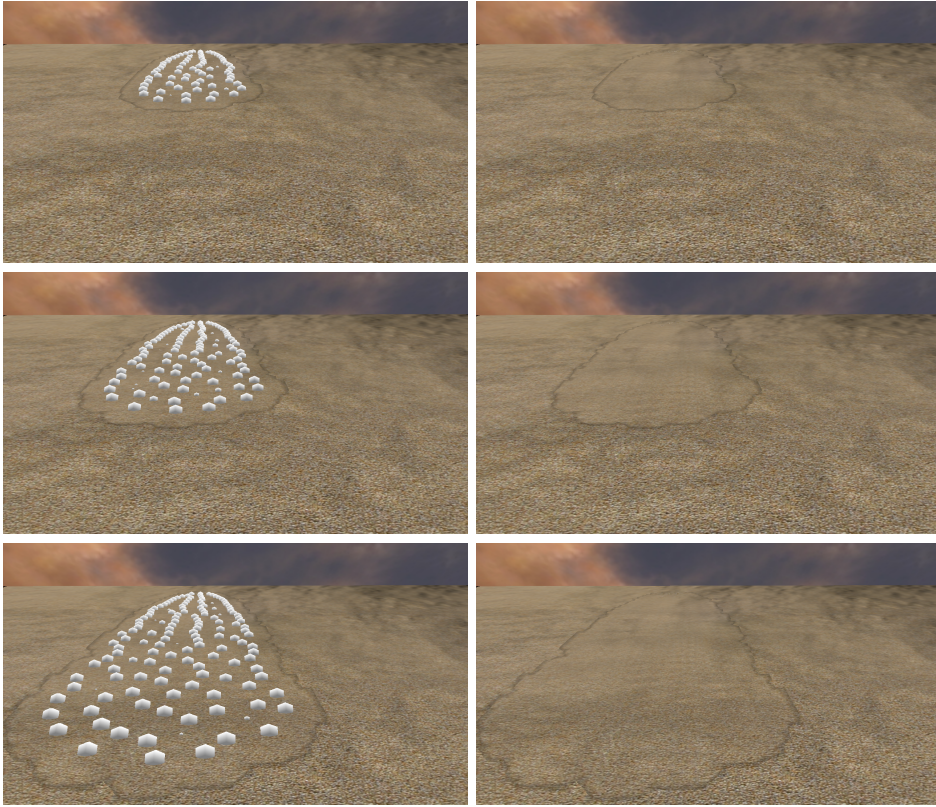


Figura 6.17: Secuencia de imágenes del corrimiento de terreno utilizando el modelo basado en SPH. La misma secuencia está duplicada en dos columnas, pero en las de la izquierda se pueden visualizar las partículas que transportan el material móvil. Se ha utilizado $\tau = 0,25$, $\phi = 0,6$ y $l = 1,2$ metros.

6.3.3. Interacción con obstáculos

La utilización de sistemas de partículas para simular la capa deslizante de una avalancha supone una ventaja importante respecto al método de diferencias finitas cuando se trata de simular la interacción con el entorno. Dado que la evolución de las partículas se realiza a partir de la segunda ley de Newton, tanto en el modelo con DEM como en el modelo con SPH, es posible interactuar con la avalancha por medio de fuerzas o de detección de colisiones. Así, se puede conseguir de forma natural que una avalancha se vea afectada por un obstáculo que se encuentra en su camino.

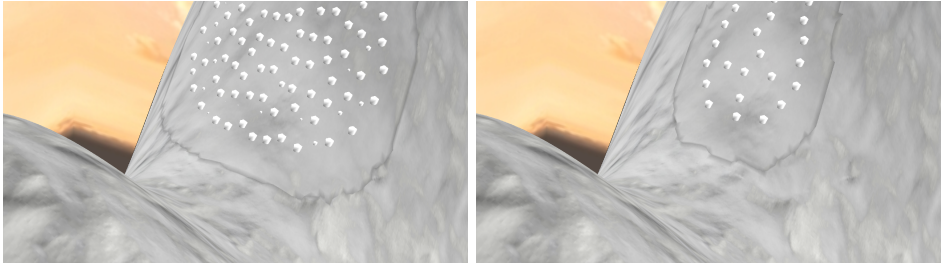


Figura 6.18: Dos simulaciones de avalancha basadas en SPH en un mismo escenario. Ambas imágenes se han capturado en el instante 9.44 segundos desde el inicio de la avalancha. Las simulaciones comparten el radio de acción $\phi = 0,6m$ y una longitud $l = 1,2m$ de lado del área de influencia de toda celda. Pero en la imagen de la izquierda se usa un umbral $\tau = 0,15m$ en comparación con la imagen de la derecha donde se ha usado $\tau = 0,30m$.

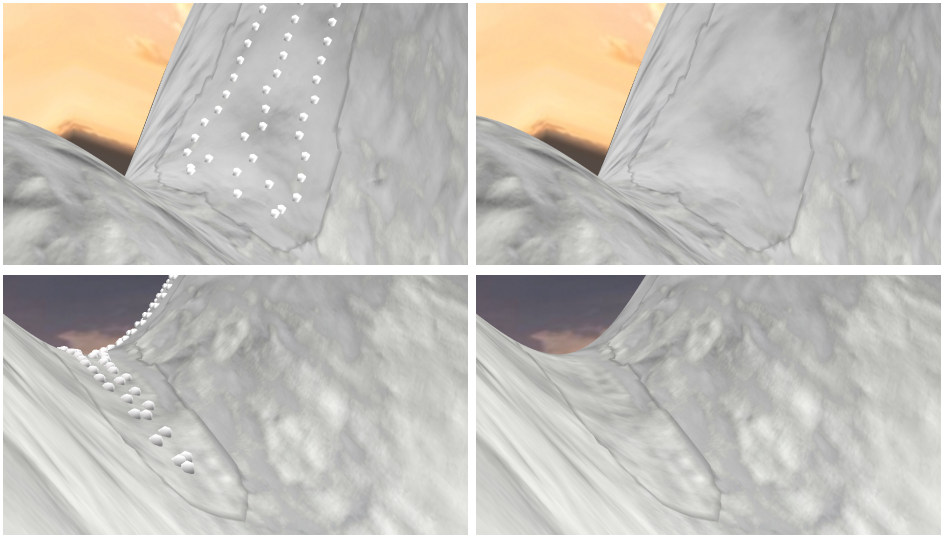


Figura 6.19: Capturas desde dos puntos de vista distintos de la simulación de una avalancha de nieve en el escenario del valle. Se ha utilizado $\phi = 0,6m$, $l = 1,2m$ y $\tau = 0,30m$. En las imágenes de la izquierda se muestran las partículas.

Para demostrar esta capacidad de los modelos basados en partículas se ha implementado una variación del escenario de un corrimiento de tierra que desciende por una ladera con la pendiente crítica. A cierta altura en la ladera, se ha situado un objeto sólido y se ha implementado un algoritmo de detección de colisiones para impedir que las partículas entren en el objeto. Como resultado, las partículas de la capa deslizante acaban bordeando el obstáculo, y el flujo de la avalancha se divide en dos ramas que prosiguen ladera abajo. La Figura 6.20 muestra dos imágenes de la simulación que se ha descrito, junto con las vistas correspondientes del sistema de partículas.

Vale la pena destacar que conseguir este efecto por medio de una implementación basada exclusivamente en malla, como la resolución del modelo BCRE con un esquema en diferencias finitas, es notablemente más complicado. En primer lugar, sería necesario describir el obstáculo sobre la rejilla, marcando las celdas afectadas para considerarlas como condiciones de contorno del método de resolución numérica. Y en segundo lugar, la interacción no resultaría fácil de aplicar de la avalancha hacia el objeto ya que no se dispone, en este caso, de un modelo de presión que permita calcular las fuerzas que aparecen sobre el objeto. Con el sistema de partículas, sin embargo, una vez calculada la colisión con el obstáculo resulta sencillo obtener un conjunto de fuerzas o impulsos, a partir de los cambios de velocidad de las partículas.

Otra de las diferencias que aparecen al introducir el sistema de partículas, frente al uso exclusivo de la malla, es la posibilidad de tener en cuenta la inercia de la avalancha. Dado que el esquema basado en malla considera que la velocidad es de módulo constante y siempre en la dirección del gradiente, nunca podrá darse una velocidad pendiente arriba. Se ha mostrado que es posible reproducir la propagación ladera arriba de la región afectada por una avalancha. Sin embargo, como ya se apuntó, esto se debe a que el material situado justo encima de la avalancha se desmorona. Pero el movimiento de la capa deslizante se considera siempre descendente.

Sin embargo, con los modelos propuestos que utilizan un sistema de partículas, la interacción con el relieve sobre el que se propaga la avalancha se hace en forma de fuerzas. Esto da lugar a que la avalancha puede, en algunos casos, subir ladera arriba debido a la velocidad acumulada por las partículas. Este efecto se puede apreciar, por ejemplo, en el escenario de demostración del alud de nieve. Cuando el alud llega al punto de ensilladura

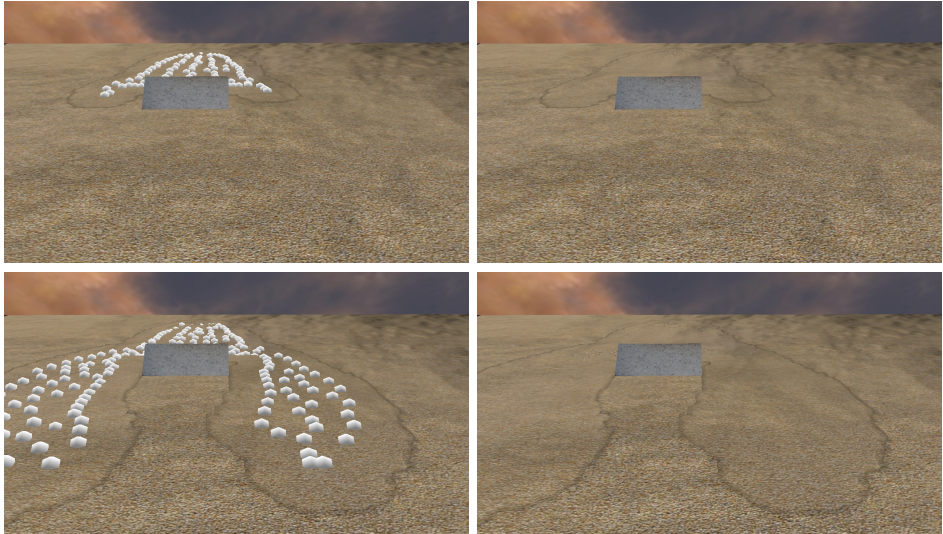


Figura 6.20: Avalancha de arena con obstáculo. Se ha utilizado $\tau = 0,25$, $\phi = 0,6$ y $l = 1,2$ metros.

de la superficie que representa a la montaña, parte de la avalancha avanza hacia la ladera opuesta.

6.3.4. Comparación de los modelos de simulación de avalanchas

Se han probado los flujos generados por los modelos de simulación de avalancha descritos en los Capítulos 4 y 5 haciendo uso del modelo de visualización descrito en el Capítulo 3. Las pruebas se han realizado sobre dos escenarios, un derrumbamiento de tierra por una pendiente y una avalancha de nieve bajando por un valle.

Las primeras pruebas presentadas, corresponden con la simulación basada en la discretización del modelo BCRE usando el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs. Se observa una expansión de las avalanchas con forma ovalada en ambos escenarios. La silueta del flujo de la avalancha es muy regular, destacando la suavidad de la línea curva de discontinuidad que separa la avalancha del material estático. Esta simulación depende directamente del tamaño y número de celdas que dividen el escenario.

El resto de pruebas realizadas están basadas en el modelo híbrido presentado. En este caso, al estar basadas en sistemas de partículas, permite mantener independiente el número y tamaño de celdas en que se divide el escenario con el avance de la avalancha y el número de partículas. Las avalanchas evolucionan según los cálculos de física utilizados en cada modelo. Su velocidad también puede verse incrementada por la aparición de nuevas partículas en el frente de la avalancha.

En el modelo basado en DEM, la discontinuidad que define la forma de la avalancha es una línea muy irregular, que presenta picos poco comunes en fenómenos naturales de avalanchas (Daerr and Douady, 1999b). Es posible suavizarla ampliando el radio de acción ϕ del núcleo de suavizado que se utiliza para el cálculo del campo de velocidades. Es posible controlar la amplitud de la avalancha mediante τ , la altura de material móvil a partir del cual se desea que se expanda la avalancha. Este modelo presenta variaciones en las direcciones de las velocidades dentro del flujo debido a la aparición de nuevas partículas que se hacen hueco empujando al resto en cualquier dirección.

En las pruebas realizadas con el modelo basado en SPH, la forma del flujo es mucho más regular que en el caso anterior, aunque no tanto como el conseguido con el modelo BCRE. Permite suavizar la frontera de la avalancha aumentando el radio ϕ , además de controlar el grado de expansión de la avalancha mediante el umbral de altura de material móvil τ . Es este modelo, además, se permite controlar la separación de las partículas aumentando el área de influencia de cada celda.

Se ha comprobado que para simulaciones que presentan las mismas características y ofrecen resultados similares, destaca la propuesta basada en SPH ya que utiliza un menor número de partículas. Sin embargo ambas propuestas pueden presentar flujos con áreas con velocidad 0 aisladas por la avalancha, mientras que en el caso de la simulación del modelo BCRE esto no puede suceder. Estas situaciones se pueden evitar aumentando el radio de acción ϕ . Los modelos basados en partículas también se diferencian en la posición en la que aparecen las nuevas partículas al aumentar el material de la capa móvil y tender a expandirse. En el modelo basado en SPH las partículas tienden a surgir desde el interior de la avalancha, cubriendo los huecos que aparecen por causa de la separación de las partículas entre sí. En el modelo basado en DEM, además de crearse nuevas partículas en los agu-

jeros, es frecuente que se creen nuevas fuera de la frontera de la avalancha. Esto se debe a lo próximas que están unas partículas de otras y provoca un aumento de velocidad en el avance de la avalancha.

En los tres modelos se utiliza el BCRE para el intercambio de material entre la capa estática y la dinámica. En el caso del modelo basado en diferencias finitas, el control del intercambio de material es el único mecanismo para poder modificar mínimamente la expansión de la avalancha. En los modelos basados en dinámica de partículas el intercambio de material no ejerce ningún control en la expansión de la avalancha, sino que únicamente modifica la velocidad con la que las partículas crecen o decrecen.

Se ha visto también que la introducción del sistema de partículas propuesto proporciona además la posibilidad de interactuar con el entorno de una forma más sencilla y natural. Por una parte es posible realizar detección de colisiones con objetos del escenario, y modificar el curso de las avalanchas y por otra parte permite introducir el efecto de la inercia respecto a las implementaciones basadas sólo en rejilla.

6.4. CONCLUSIONES

En este capítulo se han mostrado los resultados de las pruebas realizadas del modelo de visualización propuesto en el Capítulo 3 y los modelos de simulación de avalanchas del Capítulo 4 y el Capítulo 5. El modelo visual se ha sometido a pruebas con campos de flujo artificiales en donde ha obtenido resultados positivos, detectando en todos los casos las discontinuidades en los flujos, aunque no definiendo del todo bien algunas discontinuidades curvas. Se ha demostrado que también que este hecho puede mejorarse aumentando la resolución de la malla que se visualiza. El algoritmo elimina las deformaciones de la textura ante discontinuidades en los campos de velocidades.

En los modelos de simulación se ha prestado especial atención al control de la expansión de la avalancha, con el fin de conseguir un campo de velocidades que reproduzca avalanchas con aspecto realista. A pesar de que el modelo basado en diferencias finitas ofrece una discontinuidad bien definida, utilizando un umbral en el modelo de visualización para ignorar los valores casi nulos de velocidad, resulta muy complicado controlar el expansión de la avalancha, sólo pudiendo controlar la velocidad, pero no su forma. En el

caso de los modelos híbridos que utilizan partículas para definir el campo de velocidades, se pueden emplear diferentes parámetros para controlar la expansión de la avalancha. Estos modelos no consiguen definir la discontinuidad con una línea curva suave, sino que más bien la discontinuidad se presenta con formas de nube, que también se asemejan a los estudios de Daerr y Douady (Daerr and Douady, 1999a). Pero tienen la ventaja frente al modelo basado en diferencias finitas de poder detectar y esquivar obstáculos, además de introducir el efecto de la inercia.

Una vez estudiado el mecanismo de simulación y visualización de las avalanchas, también es importante conocer las prestaciones de los modelos y si son capaces de funcionar en tiempos interactivos. Por consiguiente, en el siguiente capítulo se va a realizar este análisis tratando de detectar el principal cuello de botella. Adicionalmente se va a presentar una propuesta de aceleración.

EVALUACIÓN DE PRESTACIONES

En capítulos anteriores se ha descrito la propuesta de visualización de flujos de materiales granulares y las propuestas de simulación de avalanchas que generan campos de velocidades apropiadas para ser usados como entrada por la visualización. Se han realizado pruebas a cada uno de los modelos con el fin de validar experimentalmente los resultados finales obtenidos, prestando especial atención a la forma y evolución de la avalancha. Dado que todo este estudio está orientado a aplicaciones interactivas, en donde el tiempo es una restricción fuerte a tener en cuenta, este capítulo va a presentar un análisis de los algoritmos implementados para cada modelo, abstrayendo los pasos más importantes y midiendo el coste computacional de cada uno. Se van a detectar los cuellos de botella y factores que determinan este coste y se propondrán estrategias de aceleración en algunos casos. El objetivo de este capítulo no es realizar un análisis de escalabilidad exhaustivo sino determinar la viabilidad de los modelos propuestos en entornos interactivos.

En una primera sección se analiza el modelo de visualización en diferentes escenarios, utilizando campos de flujos que reproducen la mejor y peor situación desde el punto de vista de tiempo de cálculo. En la segunda sección se estudia el modelo híbrido implementado para la generación de avalanchas de materiales granulares, sin tener en cuenta la visualización de la sección anterior. Finalmente se ponen en común los resultados de ambos estudios y se propone una estrategia de aceleración del modelo de visualización basada en OpenMP. De los resultados finales obtenidos, se discuten las principa-

les limitaciones encontradas y se proponen algunas líneas de investigación futuras.

7.1. ADVECCIÓN DE TEXTURAS EN FLUJOS CON DISCONTINUIDADES

El algoritmo descrito en el Capítulo 3 detecta y rastrea el estado de toda discontinuidad a lo largo del tiempo durante la simulación del flujo. El proceso se realiza en varios pasos que se detallan a continuación. Sin embargo para ofrecer una mayor claridad en la descripción, los pasos no se van a presentar aquí en el mismo orden en que se calculan. En el Algoritmo 1 se han descrito los pasos en el orden correcto. En la siguiente explicación, se van a definir etiquetas para las diferentes tareas que implican cálculos en el método, las cuales serán usadas posteriormente cuando se evalúen las prestaciones.

En un primer paso, las coordenadas de textura son transportadas en todos los vértices usando el método propuesto por Neyret (Neyret, 2003). Este paso se hace para todos los vértices de la malla de triángulos y se etiqueta como `ADVECTION`.

A continuación se comprueban todas las aristas de la malla de triángulos para decidir si tienen o no discontinuidades. Este test se etiqueta como `EXIST`. Se crean e inicializan los nuevos puntos de discontinuidad con un conjunto de valores por defecto y se actualizan los puntos de discontinuidad D_{ij} que ya existían en el fotograma anterior.

Los puntos de discontinuidad existentes se comprueban para detectar si han cruzado algún vértice. Si una discontinuidad sobrepasa un vértice, se destruirán los puntos de discontinuidad de las aristas que cruzaba la discontinuidad en el paso anterior y se crearán nuevos puntos de discontinuidad sobre las nuevas aristas que en el paso actual están atravesadas por la discontinuidad. Las velocidades de desplazamiento de estos puntos a lo largo de sus aristas se aproxima por mínimos cuadrados utilizando las velocidades estimadas de los puntos de discontinuidad destruidos. Este paso se etiqueta como `TRANS_DISC`.

En los puntos de discontinuidad la textura es extrapolada usando una estimación del gradiente de la coordenada de textura. La estimación del gradiente se hace para cada vértice que se encuentre junto a una discon-

Algorithm 1 Algoritmo del método de rastreo y visualización de la discontinuidad

```

1: for all vértices do
2:   Advección de las coordenadas de textura
3:   for all arista incidente,  $e$  do
4:     if  $e$  tiene discontinuidad  $d$  then
5:       if  $d$  cruza un vértice then
6:         Calcular mínimo cuadrados para velocidades
7:       end if
8:       Estimar velocidad y posición para  $d$ 
9:       Extrapola coordenadas de textura
10:    end if
11:  end for
12: end for
13: Dibujar

```

tinuidad resolviendo un problema de mínimos cuadrados con dos variables desconocidas y n ecuaciones, siendo n al menos igual al número de aristas del vértice. Este paso, junto con la actualización de las variables de la discontinuidad, se ha etiquetado como UP_DISC. El Algoritmo 1 describe en pseudocódigo el bucle principal del proceso descrito en esta sección.

7.1.1. Análisis del coste computacional

A la hora de realizar el análisis del coste computacional del algoritmo se va a considerar que se tiene un escenario cuadrado de lado unidad, con una rejilla de resolución $N \times N$ vértices, y que el flujo tiene una discontinuidad que afecta a M aristas. Se ha de tener en cuenta la dependencia de M con N para una discontinuidad dada; es decir si aumenta el número de vértices por unidad de longitud, también aumentará el número de éstas que son afectadas por la discontinuidad. Dado que la discontinuidad es una estructura unidimensional el crecimiento de M es lineal con el incremento del valor de N .

El coste temporal del algoritmo será calculado como la suma de los costes de los diferentes pasos de los que se componen, ya que se ejecuta secuencialmente. Dichos pasos se definieron en el apartado anterior y son

los siguientes:

- **ADVECTION**: Advección de las coordenadas de textura de todo vértice de acuerdo al campo velocidad. En la implementación del modelo presentado se usa el método de Neyret (Neyret, 2003). Este paso, que corresponde a la línea 2 del Algoritmo 1, se hace por vértice y por tanto tiene un coste de $O(N^2)$. Este paso es independiente de si hay discontinuidades o no en el flujo.
- **EXIST**: Detección de la discontinuidad entre cada par de vértices que se encuentren directamente conectados por una arista. Se lleva a cabo en la línea 4 del Algoritmo 1. Esta operación se hace por vértice en todo fotograma siendo por tanto del orden $O(N^2)$ operaciones en coma flotante.
- **CHECK_LOST**: Detecta si una discontinuidad se produce debido a que se han *perdido* una o más discontinuidades. Esto indica que cada discontinuidad *perdida* en ese instante de tiempo ha alcanzado y cruzado un vértice. Este test se lleva a cabo en la línea 5 del Algoritmo 1. El orden del coste es $O(M)$.
- **TRANS_DISC**: Esta fase tiene lugar cuando una discontinuidad alcanza un vértice y viaja de una arista a otra diferente. Esto requiere la estimación de nuevas velocidades y la solución de un problema de mínimos cuadrados para cada vértice afectado. Se lleva a cabo en la línea 6 del Algoritmo 1. En un fotograma dado puede ocurrir que no haya transición, pero también puede ocurrir que todas las aristas afectadas por una discontinuidad tengan una transición. El coste será, como mucho, del orden $O(M)$.
- **UP_DISC**: En esta fase se actualiza la posición y la velocidad de todas las aristas que se ven afectadas por la discontinuidad. Además, la advección de la textura se extrapola en ambos lados de la discontinuidad, con lo que conlleva la resolución de otro problema de mínimos cuadrados. Esto se lleva a cabo en las líneas 8 y 9 del Algoritmo 1 y tiene un coste de orden $O(M)$.

Visto el análisis de los pasos que se realizan en el Algoritmo 1, se puede concluir que el coste de cada paso depende de tres factores principales:

- El número de aristas afectadas por una discontinuidad, denotado por M en la discusión anterior. Si la longitud de la discontinuidad es grande, más puntos tendrán que actualizar sus posiciones.
- La resolución de la rejilla, de valor $N \times N$, siendo N el número de vértices por lado. Si el número de puntos de la rejilla aumenta, también se incrementa el tiempo de cálculo. Además, como ya se ha comentado, también se incrementarán linealmente el número de aristas afectadas M para una discontinuidad de tamaño fijo.
- La velocidad de la discontinuidad. Se asume que la discontinuidad viaja a través del dominio del flujo con cierta velocidad. Si la velocidad es alta causa más transiciones de la discontinuidad a través de un vértice, forzando más ejecuciones del bloque TRANS_DISC. Esto lleva a que el coste promedio de la ejecución de un paso de simulación aumente linealmente con el valor de la velocidad.

Nótese que analizando el Algoritmo 1 y teniendo en cuenta la discusión anterior, se puede deducir que algunos de los pasos no se ejecutan en todos los fotogramas. Sólo se calculará TRANS_DISC para aquellos vértices que hayan sido cruzados por la discontinuidad en ese fotograma; en el peor caso, podría ejecutarse para toda arista afectada por la discontinuidad, pero, por el contrario, puede ocurrir que no haya transición de vértice en un fotograma dado. Con el fin de evaluar empíricamente el coste del método se han diseñado dos escenarios; un escenario de peor caso y un escenario que podemos considerar como estándar.

El escenario del peor caso es en el que el mayor número posible de aristas tienen discontinuidad y para el que TRANS_DISC se ejecuta para todo fotograma en todas las discontinuidades. Para conseguir esto, se ha usado un campo de velocidad sintético que tiene 4 valores diferentes, formando un tablero de ajedrez en la malla de la rejilla, como se muestra en la Figura 7.1. El campo de velocidad cambia después de cada fotograma, desplazando todas las velocidades un vértice en ambos ejes X e Y . Esto causa que M crezca con $N \times N$ y que en cada fotograma TRANS_DISC necesite ser ejecutado en todas las aristas que presente una discontinuidad.

El escenario estándar o típico corresponde a una discontinuidad cruzando el dominio del flujo. En este trabajo se asume que las discontinuidades

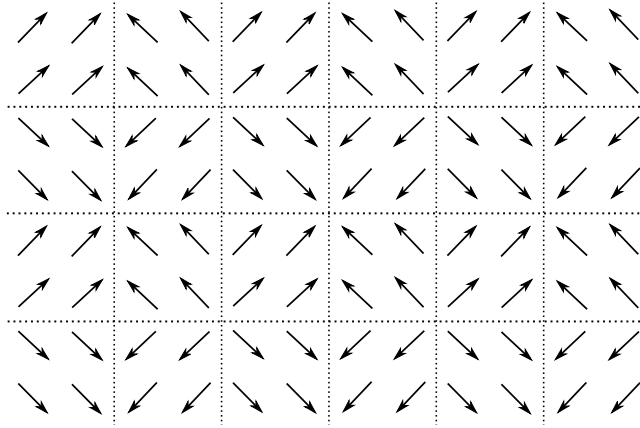


Figura 7.1: Mapa de velocidades del peor caso. Las diferentes velocidades se ordenan formando un tablero de ajedrez para asegurar un número de discontinuidades del orden $O(N^2)$.

son curvas diferenciables, y que son aproximadas como segmentos rectos, tangentes a la curva, tal y como se ha descrito en el Capítulo 3. Con el fin de simplificar el escenario y tener un número estable de discontinuidades, se ha decidido usar una discontinuidad recta, como se muestra en la Figura 7.2. Se ha llamado a este escenario *caso de avalancha normal* ya que su comportamiento es similar a la situación que surge durante la visualización de una avalancha.

7.1.2. Evaluación de prestaciones

El método de visualización descrito en la sección anterior toma como entrada un campo vectorial y lleva a cabo dos tareas principales. En un primer paso, las coordenadas de textura se transportan de acuerdo al campo vectorial y, en un segundo paso, las discontinuidades son detectadas, rastreadas y visualizadas. En la sección anterior se ha etiquetado la primera tarea como ADVECT. La segunda tarea se ha referenciado como StepDiscontinuity y comprende las subtareas EXIST, TRANS_DISC, UP_DISC y CHECK_LOST. El tiempo consumido por estas tareas y también por las subtareas involucradas en actualizar las discontinuidades en ambos escena-

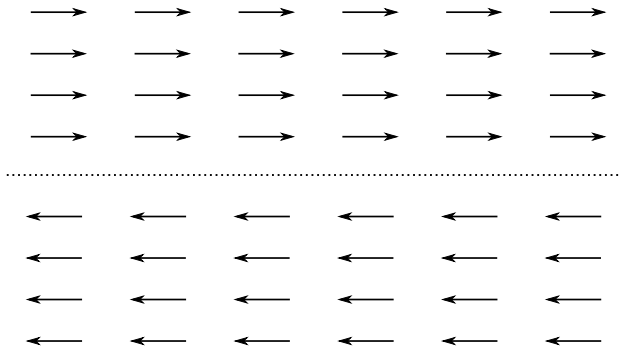


Figura 7.2: Mapa de velocidades del caso típico. La discontinuidad, la línea discontinua, queda representada por dos velocidades con la misma dirección pero sentido opuesto. Cada tipo de velocidad ocupa una mitad de la malla.

rios (caso normal y peor) se muestra en las Figuras 7.3 y 7.4. En ellas se puede observar cómo las actualizaciones de las discontinuidades son más costosas que la advección de texturas a lo largo del flujo definido por el campo vector de entrada. Las Figuras 7.3 y 7.4 muestran los tiempos de ejecución del algoritmo que calcula el modelo inicial de la implementación C++ llevada a cabo para calcular el modelo. Con el fin de calcular la media de los datos presentados se han ejecutado 800 ciclos de simulación sobre un ordenador multinúcleo con 4 Intel Xeon E5-2650 @2.00Ghz CPUs y 32GB de RAM.

Es notable recordar que este método de visualización está dirigido a escenarios interactivos, en los que se deben ejecutar a una frecuencia fija. Es por ello por lo que se ha decidido fijar la velocidad de refresco deseada en 60Hz, lo que supone emplear tiempos de ciclo de 0,017 segundos aproximadamente. De esta forma el coste de las técnicas propuestas permitirá integrarlas en bucles de simulación en las que sea necesario dejar recursos disponibles para otras tareas. En las discusiones de este apartado se va a utilizar este umbral como el límite del coste para considerar que la visualización es adecuada para una aplicación interactiva.

Considerando la ya mencionada restricción temporal, el tiempo de paso medio obtenido para el caso de avalancha normal indica que el tamaño de malla no se puede escalar más allá de 80x80 nodos, ver Figura 7.3. En esta

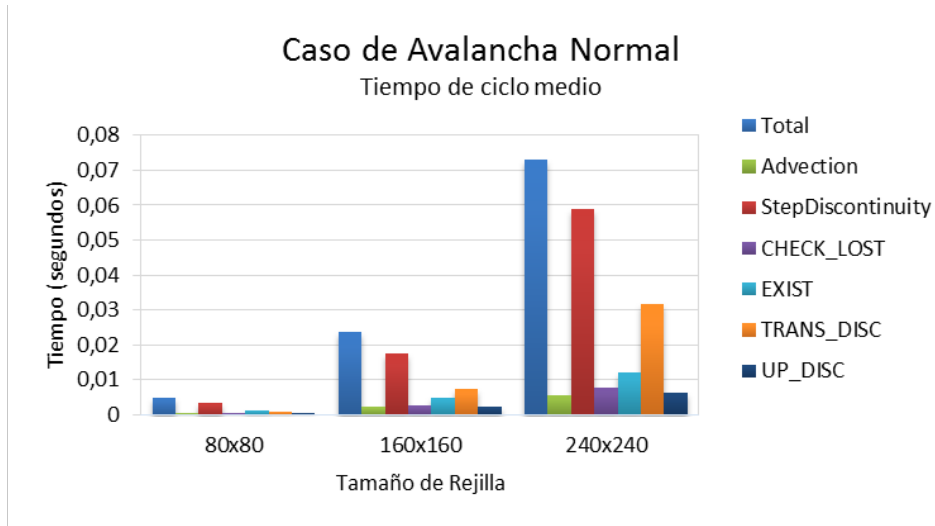


Figura 7.3: Tiempos medios de ciclo obtenidos para el escenario de la avalancha normal.

	80x80	160x160	240x240
Total	0,005017	0,023867	0,072975
Advection	0,000602	0,002494	0,005749
StepDiscontinuity	0,003510	0,017753	0,059022
CHECK_LOST	0,000648	0,002775	0,007653
EXIST	0,001209	0,004830	0,012300
TRANS_DISC	0,000822	0,007256	0,031556
UP_DISC	0,000701	0,002340	0,006265

Cuadro 7.1: Tiempos medios de ciclo obtenidos para el escenario de la avalancha normal.

situación, la tarea identificada como más costosa ha sido TRANS_DISC. También se ha medido el tiempo medio de paso para el escenario de peor caso y los resultados muestran, tal como era de esperar, como esta situación es más costosa de calcular que el caso normal; en este caso sólo se pueden manejar mallas de 40x40 nodos de acuerdo a los requisitos temporales. Este segundo test también confirma que el cuello de botella está asociado a la tarea TRANS_DISC. Si comparamos estos resultados con el análisis teórico desarrollado en la sección anterior, se puede ver que hay otras tareas con

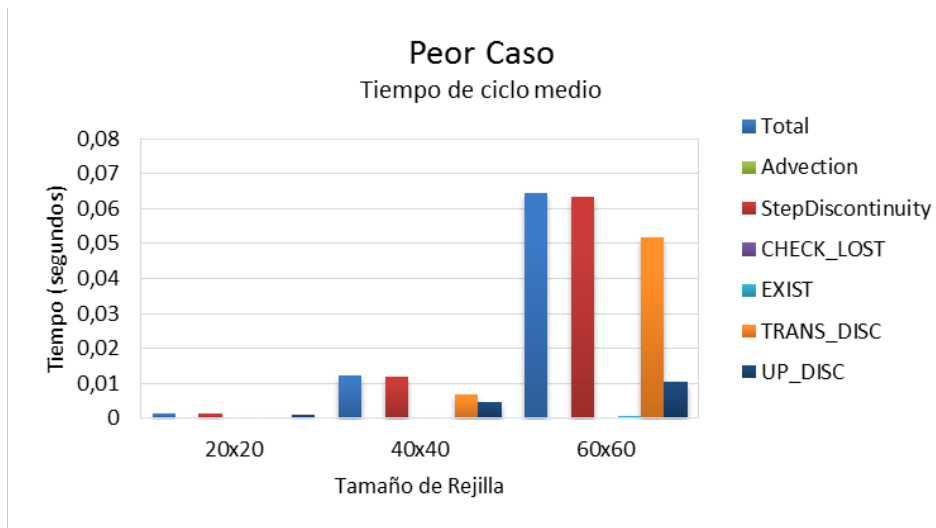


Figura 7.4: Tiempos medios de ciclo obtenidos para el escenario peor.

	20x20	40x40	60x60
Total	0,001539	0,012248	0,064339
Advection	0,000041	0,000164	0,000371
StepDiscontinuity	0,001438	0,011849	0,063441
CHECK_LOST	0,000039	0,000160	0,000373
EXIST	0,000077	0,000305	0,000699
TRANS_DISC	0,000235	0,006764	0,051781
UP_DISC	0,001083	0,004586	0,010506

Cuadro 7.2: Tiempos medios de ciclo obtenidos para el escenario peor.

un crecimiento mayor que TRANS_DISC. Sin embargo, para el tamaño de malla considerado, dado que en cada vértice de TRANS_DISC se hacen un mayor número de operaciones que en EXIST y UP_DISC, su coste por paso es claramente superior.

En la siguiente sección se va a repetir el proceso de análisis, pero en vez de hacerlo con el modelo de visualización se va a realizar con el modelo de simulación.

7.2. SIMULACIÓN DE AVALANCHAS

El Capítulo 5 presenta el modelo híbrido de simulación de avalanchas de materiales granulares que utiliza SPH. En esta sección se van a resumir los diferentes pasos del algoritmo, etiquetándolos para posteriormente distinguirlos en el estudio de prestaciones. En el siguiente apartado se comenta el consumo teórico de cada paso.

En un primer paso del algoritmo se obtiene por interpolación bilineal la normal asociada a la posición de cada partícula en la malla que recubre el material. Por el mismo método se calcula, para cada partícula, el valor de la tercera coordenada del mundo para conseguir la posición de la partícula en el dominio 3D. Este paso se etiqueta como BLERP.

Tanto la normal como la posición 3D de la partícula se utilizan en las proyecciones usadas en el paso de cálculo de fuerzas. Este último paso se lleva a cabo para cada partícula y se ha etiquetado como FORCES. Para este paso, en el Capítulo 5 se han propuesto dos alternativas, usar DEM o SPH. Pero en esta sección únicamente se van a mostrar los resultados de la medición de costes para el SPH, ya que ambas propuestas presentan un coste computacional del mismo orden y la utilización de SPH obtenía mejores resultados visuales.

A partir de la fuerza asociada a cada partícula, utilizando la segunda ley de Newton e integrando por el tiempo, se actualizan las posiciones y velocidades de cada partícula. Este paso se ha etiquetado como UPDATE. Tras conocer la nueva posición de la partícula, esta partícula se asocia con las celdas a las que influye.

Todos los pasos anteriores se realizan para todas las partículas activas en el sistema. Los siguientes pasos centran sus operaciones en las celdas de la rejilla.

En el siguiente paso del algoritmo se calcula la velocidad asociada a cada celda en función de las velocidades de las partículas próximas al centro de la celda. Con ello se obtiene el campo de velocidades que se usa como entrada al algoritmo de visualización de flujos. Este paso se etiqueta como VELOCITY.

El último paso consiste en la ejecución de las ecuaciones del modelo BCRE para el intercambio de material entre la capa móvil y la estática. El paso se ha etiquetado como BCRE_STEP. En primer lugar se calcula el in-

Algorithm 2 Algoritmo de simulación de avalanchas mediante partículas

```

1: for all partícula,  $p$  do
2:   Interpolación de la normal y de la 3a componente de la malla asociada a la posición de  $p$ 
3:   Calcular la fuerza total asociada
4:   Actualizar la posición y velocidad 2D de  $p$ 
5: end for
6: for all vértice,  $v$  do
7:   Calcular la velocidad a partir de las partículas próximas
8:   Calcular el incremento  $i$  de la capa móvil
9:   Actualizar altura  $R$  de las partículas con  $i$ 
10:  if  $R >$ máxima altura permitida ||  $v$  sin partículas asociadas then
11:    Crear nueva partícula si es posible
12:  else
13:    if  $R < 0$  then Destruir partícula
14:    end if
15:  end if
16:  Actualizar altura del material estático con  $i$ 
17: end for

```

cremento de material móvil $R_{i,j}^t$ y con este valor se actualizan las partículas cercanas. Si la partícula ha alcanzado el tope máximo de altura permitido o aparece material móvil en una celda sin partículas, se generarán nuevas partículas cumpliendo las restricciones de distancia mínima entre ellas. En caso de que se reduzca la información de altura de la partícula a valores por debajo de 0, ésta es destruida. En segundo lugar, si las partículas se han actualizado exitosamente, se actualiza la altura de cada celda. Ambos bucles queda esquematizados en el Algoritmo 2.

7.2.1. Análisis del coste computacional

A partir de los pasos etiquetados anteriormente y el pseudo-código presentado en el Algoritmo 2, se va a analizar el coste computacional del algoritmo en función de los parámetros de configuración. Se considera un escenario de lado 1 con una malla cuadrada, con $N \times N$ vértices, el flujo de la avalancha está constituido por P partículas distribuidas por la rejilla y

el radio de acción de cada partícula afecta a un máximo de Q partículas.

El análisis del coste computacional de cada paso es el siguiente:

- **BLERP**: Interpolación bilineal para calcular la normal de la partícula en función de su posición en la malla. De igual manera se obtiene la 3ª coordenada interpolando las alturas de los vértices de la malla. Este paso se realiza para todas las partículas activas de la simulación, con un coste de $O(P)$.
- **FORCES**: Cálculo de la fuerza total 2D que se aplica sobre cada partícula. En este paso, a pesar de las diferencias entre los dos modelos DEM y SPH, como ambos presentan un coste temporal del mismo orden en el cálculo de fuerzas, en el estudio de prestaciones se ha considerado sólo el SPH. Para cada partícula se calcula la fuerza a la que está sometida teniendo en cuenta la influencia de todas las partículas que estén dentro de su área de acción. Este paso implica un coste de $O(PQ)$ como máximo.
- **UPDATE**: En este paso se actualiza la posición y velocidad en el dominio 2D de cada partícula a partir de la fuerza total 2D asociada. Además también se registra cada partícula con el vértice de la malla, que es el centro de la celda en cuya área se posiciona la partícula. Este paso se realiza para todas las partículas y requiere de $O(P)$ operaciones.
- **VELOCITY**: En este paso se calcula el campo de velocidades que se utiliza como entrada en el algoritmo de visualización. Para todo vértice de la malla se calcula su velocidad interpolando las velocidades de todas las partículas que están posicionadas dentro de su área de influencia. Este paso tiene un coste máximo de $O(N^2Q)$.
- **BCRE_STEP**: En este paso se actualiza la altura de material de la capa móvil y estática. Esto implica el cálculo del gradiente de cada celda de la malla y la actualización de la información de altura de las partículas, además de la creación o destrucción de nuevas partículas cuando sea necesario. Este paso se realiza para cada vértice de la malla actualizando las partículas dentro de su radio de acción, por tanto presenta un coste de $O(N^2Q)$.

Según el análisis previo de cada uno de los pasos, se pueden extraer los 3 factores principales que repercuten directamente en el coste del algoritmo.

- **Tamaño de la rejilla.** Es el número de puntos de la rejilla. A medida que aumenta este número se incrementa el tiempo de cálculo. Al definir una rejilla cuadrada de N puntos por lado, el factor se mide en $N \times N$ vértices.
- **Número de partículas,** denotado por P . Son todas las partículas que forman parte de la avalancha. Cuanto mayor sea su número, más pasos de BLERP, FORCES y UPDATE se han de realizar. Lo ideal es que las avalanchas se formen y evolucionen con el menor número de partículas posible.
- **Partículas en el área de influencia,** denotado por Q . Es el número de partículas que interaccionan entre sí dentro del área de influencia de una celda, se emplean para calcular la velocidad y el material móvil que tiene para esa celda. Un mayor número de partículas en el área implica un mayor tiempo de cálculo en los pasos de UPDATE, VELOCITY y BCRE_ROLLING. Este factor se expresa con una aproximación del número máximo de partículas que pueden existir dentro del área de influencia y depende de la distancia de separación deseada entre partículas y del tamaño de este área.

Observando el Algoritmo 2 se deduce que todos los pasos se realizan secuencialmente en todos los fotogramas. Sin embargo el número de partículas cambia a medida que avanza la avalancha y erosiona o deposita material en la capa estática. De esto se deduce que el coste del cálculo del algoritmo varía en función de las alturas de la capa estática y de la capa deslizante. El umbral τ , es decir la constante que indica la altura de material móvil a partir de la cual se permite crear nuevas partículas, es otro factor que afecta al coste computacional indirectamente. Cuanto más bajo sea el umbral, más partículas se crearán, aumentando el coste temporal global.

En este modelo de simulación de una avalancha mediante un sistema de partículas es muy complicado definir un escenario de mejor caso y de peor caso sobre el algoritmo. Influyen muchos factores que evolucionan en el tiempo, lo que complica la definición de un escenario concreto. Es por ello por lo que para medir las prestaciones del algoritmo, se ha considerado

que el nivel de expansión de avalancha va a ser el factor decisivo para diferenciar entre escenarios de mejor y peor caso. La expansión de la avalancha implica que aumente el número de partículas en el escenario, aumentando en consecuencia el consumo de todos los pasos descritos anteriormente. El tener un mayor número de partículas en el escenario también implica que aumente el número medio de partículas que se encuentran dentro del área de influencia de cada vértice de la malla.

El gradiente en cada celda de la malla es importante para el intercambio de material entre la capa móvil y la estática, sin embargo controlando la expansión de la avalancha en escenarios con distinto gradiente se puede conseguir una avalancha de características similares. En consecuencia, aunque en las pruebas se han utilizado dos escenarios, las medidas temporales se han realizado únicamente en el derrumbamiento de terreno por una pendiente.

Se considera la peor situación cuando toda la malla queda cubierta por partículas. Esto se consigue reduciendo el umbral τ , que controla la expansión de la avalancha en función de la altura de la capa móvil en cada vértice de la malla. En pocos pasos tras el inicio de la avalancha, toda la malla quedará cubierta por partículas.

El escenario de mejor caso se caracteriza por tener el menor número de partículas. Se fija el umbral τ lo suficientemente alto como para que no se cree ninguna nueva partícula. Se impide que la avalancha se expanda, quedando formada únicamente por las partículas que provienen de la fuente externa. Mientras que en el experimento que simula una avalancha típica se ha configurado la expansión lateral en función del resultado visual, sin tener en cuenta el número de partículas que se generen.

7.2.2. Evaluación de prestaciones

El método de simulación de avalanchas basado en partículas descrito en la sección anterior se ha dividido en 5 tareas, BLERP, FORCES, UPDATE, VELOCITY y BCRE_STEP. Todas ellas se ejecutan en cada ciclo. El tiempo medio consumido por estas tareas en cada uno de los escenarios, peor, mejor y avalancha habitual, se muestra en las Figuras 7.5, 7.6 y 7.7. En ellas se puede observar como los pasos VELOCITY y BCRE_STEP son los más costosos, con una diferencia notable con el resto. Ambos pasos se caracterizan por depender directamente del tamaño de la malla y del número

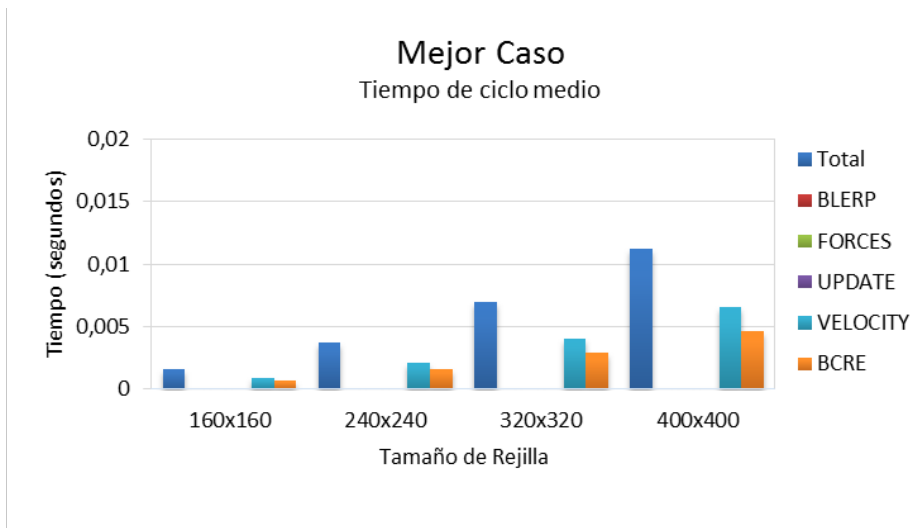


Figura 7.5: Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha en el mejor caso.

de partículas en la simulación. Al igual que en los experimentos anteriores, donde es imprescindible mantener tiempos interactivos con frecuencias de refresco de al menos 60Hz, el objetivo del experimento va a ser definir cuáles son los valores máximos permitidos del tamaño de rejilla, del número de partículas y del tamaño del área de influencia que permitan mantener esta restricción. Las Figuras 7.5, 7.6 y 7.7 muestran los tiempos que corresponden con la versión secuencial de la implementación del algoritmo en C++ realizada. El promedio de los tiempos se ha obtenido de la ejecución de 800 ciclos de simulación sobre el mismo ordenador que en las medidas de prestaciones anteriores, un equipo multinúcleo con 4 Intel Xeon E5-2650 @2.00Ghz CPU y 32GB de RAM.

En las tres figuras se muestran los valores del tiempo de ciclo obtenido al simular diferentes escenarios con diferentes tamaños de rejilla. Sin embargo también es importante estudiar como afecta el número de partículas en la simulación para tamaños de rejilla constantes. En la Figura 7.8 se muestra el coste temporal por ciclo medio de cada paso del algoritmo de simulación en una rejilla de 160×160 puntos en los tres casos planteados, escenario mejor, típico y peor. En la figura se puede comprobar el gran incremento del tiempo de los pasos VELOCITY y BCRE_STEP en comparación con

	160x160	240x240	320x320	400x400
Total	0,001640	0,003763	0,006975	0,011237
BLERP	0,000010	0,000010	0,000011	0,000011
FORCES	0,000038	0,000041	0,000050	0,000057
UPDATE	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
VELOCITY	0,000891	0,002109	0,004005	0,006556
BCRE	0,000700	0,001601	0,002908	0,004611

Cuadro 7.3: Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha en el mejor caso.

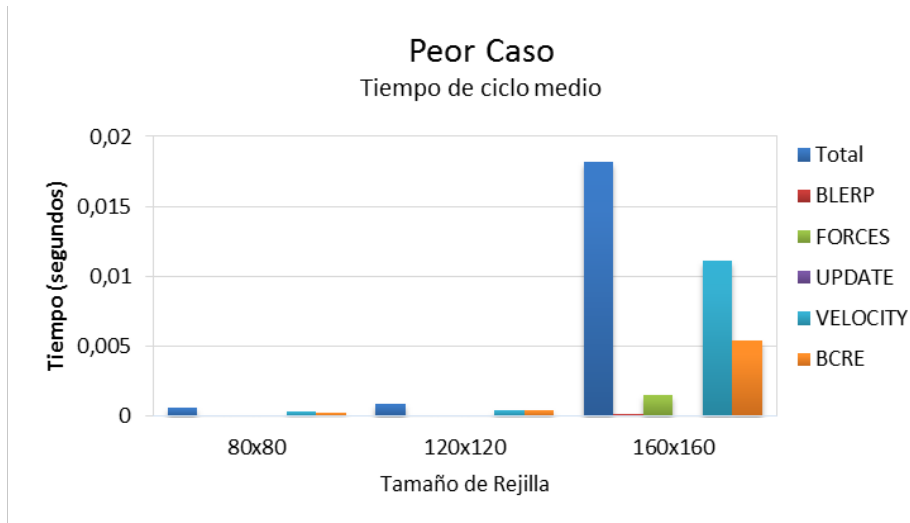


Figura 7.6: Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha en el peor caso.

el resto cuando aumenta el número de partículas en la simulación.

El número de partículas utilizado en la simulación depende, como ya se ha mencionado, del umbral τ , que controla la expansión de la avalancha, y de los gradientes de los puntos de la rejilla. Sin embargo, cuando se emplea el modelo de simulación basado en SPH, es común utilizar pocas partículas, entorno a las 300 en el caso típico, que coincide con la simulación mostrada en la Figura 6.17. Para el caso mejor se ha reducido el número de partículas a la mitad.

	80x80	120x120	160x160
Total	0,000638	0,000888	0,018162
BLERP	0,000012	0,000010	0,000119
FORCES	0,000082	0,000044	0,001500
UPDATE	0,000002	0,000001	0,000027
VELOCITY	0,000304	0,000450	0,011103
BCRE	0,000238	0,000383	0,005414

Cuadro 7.4: Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha en el peor caso.

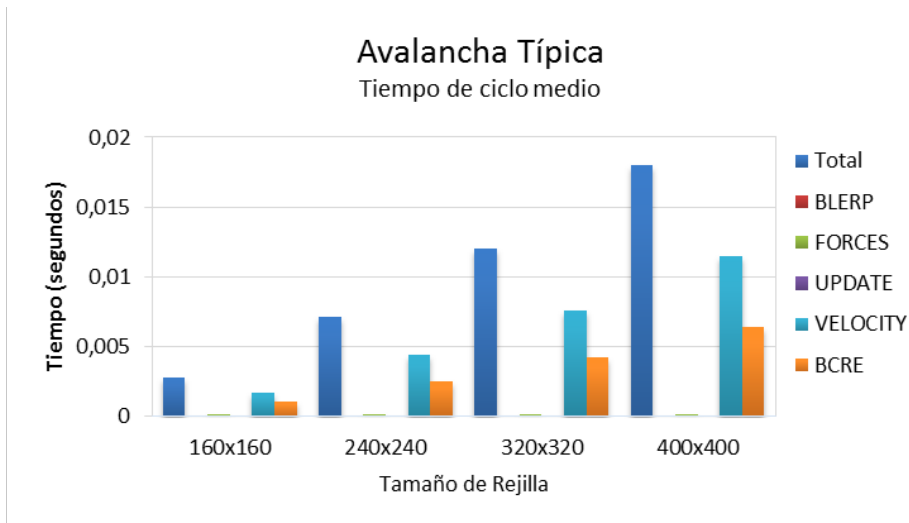


Figura 7.7: Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha típica, en la que se utiliza un número máximo de 300 partículas.

A tenor de las Figuras 7.5, 7.6, 7.7 y 7.8, se deduce que el número de partículas es el factor más crítico, ya que afecta mucho más sobre el tiempo de ciclo medio que el aumento del tamaño de la rejilla. Teniendo en cuenta la restricción temporal de $1/60$ segundos, el tiempo medio de ciclo, tanto del caso peor como de avalancha habitual, permite mallas de un tamaño aproximado de hasta 400×400 nodos utilizando un paso de integración de 0,01 segundos. En el peor caso, al incrementarse considerablemente el número de partículas en la simulación, sólo se cumple la restricción temporal con

	160x160	240x240	320x320	400x400
Total	0,002822	0,007099	0,011978	0,018030
BLERP	0,000017	0,000019	0,000019	0,000019
FORCES	0,000111	0,000144	0,000138	0,000138
UPDATE	0,000003	0,000003	0,000003	0,000003
VELOCITY	0,001667	0,004440	0,007586	0,011478
BCRE	0,001025	0,002492	0,004232	0,006392

Cuadro 7.5: Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de la avalancha típica.

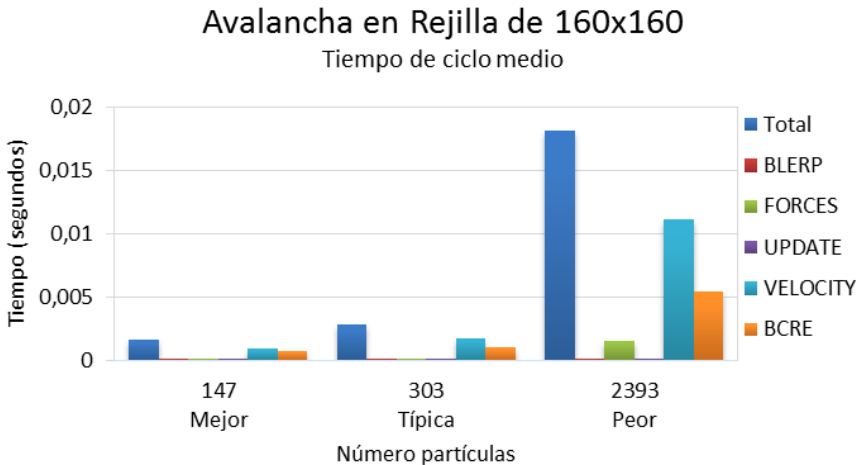


Figura 7.8: Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de una avalancha en una malla de 160×160 en los escenarios mejor, típico y peor caso.

mallas de hasta 160×160 nodos. En todas las figuras el cuello de botella está asociado directamente al paso VELOCITY, aunque el paso BCRE_STEP es el segundo de mayor coste temporal. Ambos pasos han mostrado el mayor coste teórico en el análisis desarrollado en la sección anterior por lo que los resultados de esta sección corroboran la teoría en este caso. Sin embargo se puede adelantar que el paso de simulación no va a ser el principal cuello de botella del modelo global de visualización y simulación de avalanchas.

Para conocer con mayor detalle la influencia que tiene el número de

	Mejor (147)	Típica (303)	Peor (2393)
Total	0,001640	0,002822	0,018162
BLERP	0,000010	0,000017	0,000119
FORCES	0,000038	0,000111	0,001500
UPDATE	0,000001	0,000003	0,000027
VELOCITY	0,000891	0,001667	0,011103
BCRE	0,000700	0,001025	0,005414

Cuadro 7.6: Tiempos medios de ciclo obtenidos para la simulación de una avalancha en una malla de 160×160 en los escenarios mejor, típico y peor caso.

partículas en el coste por paso de simulación, se ha medido el tiempo de ejecución del algoritmo de la simulación del corrimiento de tierra bajando por una ladera, registrando esta vez el coste de diez pasos de simulación y el número de partículas empleadas durante esos diez pasos. Los modelos se han ajustado para reproducir el denominado peor caso, de forma que el número de partículas crezca considerablemente durante la simulación. En las Figuras 7.9 y 7.10 se muestran los resultados obtenidos para el cálculo de fuerzas usando SPH y DEM respectivamente. Debe tenerse en cuenta que para facilitar la apreciación del comportamiento de las simulaciones, se han empleado en las gráficas diferentes escalas para expresar el tiempo de simulación.

En el caso del SPH se observa que el crecimiento del coste es lineal respecto al número de partículas mientras que el crecimiento del coste en el caso del DEM tiene una tendencia cuadrática. Uno de los motivos principales para esta diferencia es que en el caso del DEM las partículas permanecen más agrupadas que en el modelo con SPH utilizando un juego de parámetros equivalente. Es decir, para conseguir la misma expansión en la avalancha es necesario involucrar un mayor número de partículas. Esto provoca que el cálculo de las interacciones se consuma más tiempo de CPU. Sin embargo, no se descarta que haya otros posibles factores que deberán ser investigados en mayor profundidad.

En cualquier caso, como ya se indicó al plantear el conjunto de pruebas de este capítulo, el objetivo no es tanto realizar un análisis de escalabilidad riguroso como comprobar de forma experimental la viabilidad de utilizar

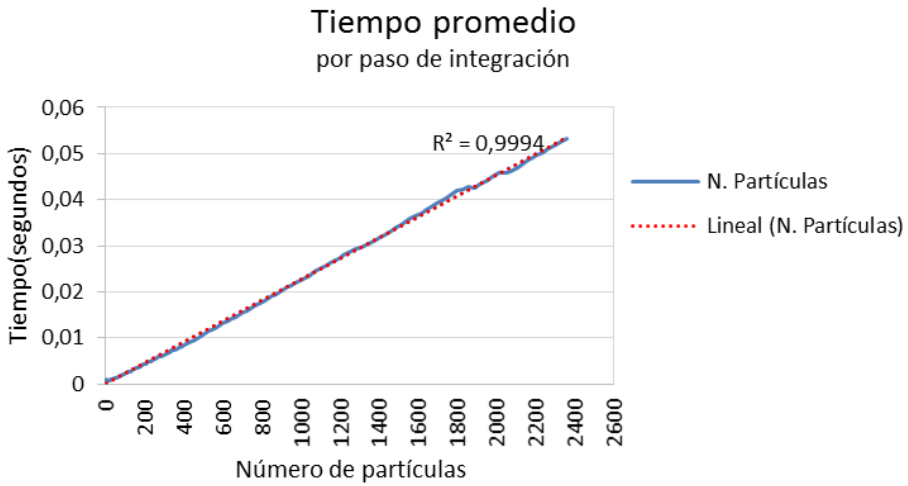


Figura 7.9: Tiempo promedio por paso de integración en base al número de partículas utilizado en la simulación de una avalancha usando SPH en una malla de 160×160 en el escenario de peor caso.

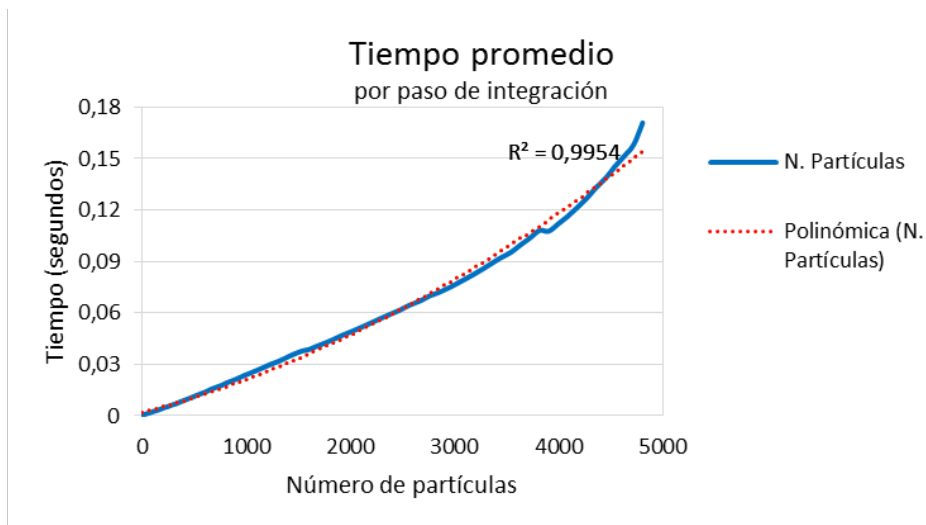


Figura 7.10: Tiempo promedio por paso de integración en base al número de partículas utilizado en la simulación de una avalancha usando DEM en una malla de 160×160 en el escenario de peor caso.

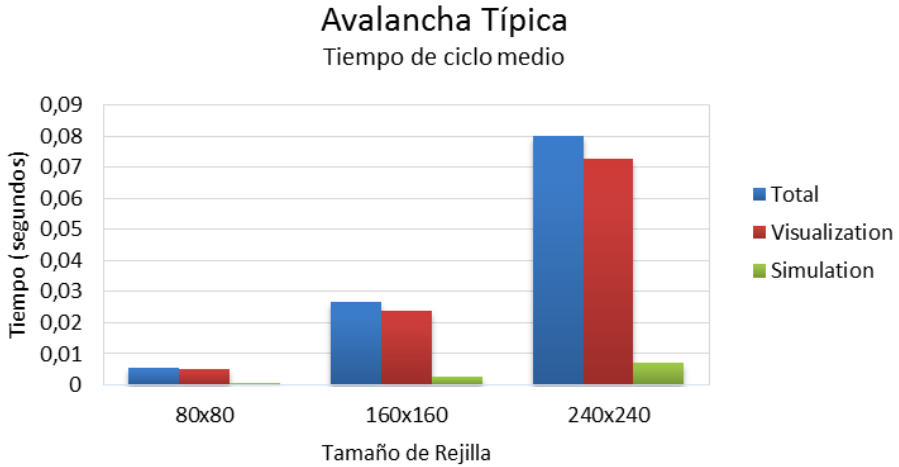


Figura 7.11: Tiempos medios de ciclo del proceso global de visualización y simulación de una avalancha en un caso típico.

estos modelos en entornos interactivos. La realización de este análisis se deja, por tanto, como una posible futura línea de investigación.

7.3. ESTUDIO GLOBAL

En las secciones anteriores se han analizado las prestaciones del modelo de visualización y del modelo de simulación por separado. En este apartado se realiza el estudio de un modelo conjunto con el fin de detectar el cuello de botella global y en su caso tener alguna pista que permita acelerar el modelo global.

En la Figura 7.11 se muestra el promedio de tiempo por ciclo del paso de visualización y del paso de simulación en el caso de una avalancha típica. La gráfica muestra la gran diferencia en el coste temporal que existe entre la simulación y la visualización del modelo global presentado. La visualización consume la mayor parte del tiempo de ciclo, dejando una décima parte del tiempo aproximadamente para el paso de simulación.

Considerando la restricción temporal de los 60Hz fijos que debe cumplir todo el proceso de simulación y visualización de avalanchas, el algoritmo secuencial implementado sólo alcanza esta frecuencia usando mallas de me-

nos de 160x160 nodos y siempre y cuando el número de partículas en la simulación no exceda de las 2000-3000 aproximadamente.

El cuello de botella principal detectado en el modelo global queda identificado dentro del algoritmo de visualización. En la siguiente sección se va a plantear una mejora a la implementación del algoritmo consistente en la paralelización del modelo de visualización de forma que se puede repartir el trabajo entre diferentes núcleos de procesado.

7.4. DISEÑO PARALELO Y RESULTADOS DEL MODELO DE VISUALIZACIÓN

Con el fin de acelerar el actual cuello de botella del sistema de visualización se ha implementado el algoritmo utilizando un conjunto de hilos OpenMP (Dagum and Enon, 1998; OpenMP, 2015) que permiten ejecutar concurrentemente esta tarea. El diseño OpenMP propuesto introduce una nueva sección *for* paralela para trabajar con los puntos de la malla (vértices). El diseño paralelo está basado en una organización por vértice. La implementación usa un entorno multi-hilo de forma que todos los hilos comparten las estructuras de datos del problema, las cuales están almacenadas en memoria principal. Todas las pruebas se han ejecutado sobre un ordenador multi-núcleo con 4 Intel Xeon E5-2650 @2.00Ghz CPU, con 4 núcleos cada uno, y la posibilidad de 2 hilos por núcleo, usando HyperThreadingTM. Tiene 32GB de RAM y es el mismo usado en la sección anterior.

Dado que la carga asociada a los nodos de la rejilla no es homogénea (depende principalmente del número de discontinuidades asociadas a un vértice y si una discontinuidad está cruzando un vértice), para evaluar el grado de equilibrio asociado al problema, se han realizado varias pruebas empleando las diferentes opciones de planificación que proporciona OpenMP para organizar la carga de trabajo dentro del entorno multihilo. Como todos los hilos escriben en paralelo sobre los nodos de la malla, se han protegido estas escrituras mediante una sección crítica, lo que impide tener una aceleración lineal. Se ha empleado la estrategia dinámica, la estática y otra guiada donde se asigna el trabajo que va a realizar cada hilo en cada momento. La Figura 7.12 muestra la aceleración obtenida en el caso normal para la subtarea TRANS_DISC con un tamaño de malla de 160x160 nodos. La aceleración máxima obtenida por estrategias de planificación estática y

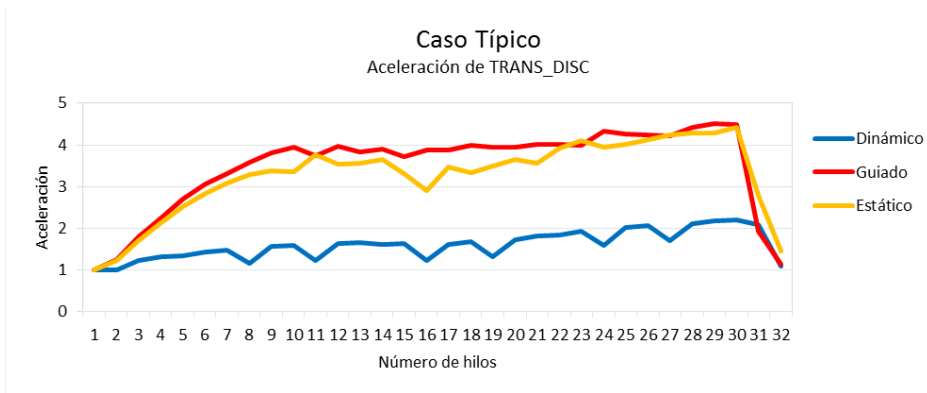


Figura 7.12: Aceleración obtenida para la tarea TRANS_DISC task en el escenario de avalancha normal.

guiada es de 4, mientras que la planificación dinámica sólo puede acelerar 2.5 veces la versión secuencial. En el caso normal, solo hay unos pocos nodos de la rejilla (hilos) que tienen carga de trabajo y esta carga no es alta, ya que TRANS_DISC no se ejecuta en cada fotograma. Estos hilos acceden a la sección crítica para actualizar la malla de forma secuencial, como consecuencia, la aceleración obtenida para el caso normal se reduce. La figura también muestra como la situación es todavía peor para las estrategias dinámicas, ya que estas tienen que pagar un tiempo extra para planificar cada vez que un hilo complete sus tareas.

La Figura 7.13 muestra que la aceleración obtenida para el peor caso simulado. En este caso una estrategia de planificación dinámica es casi 8 veces más rápida que la versión secuencial (16 es el máximo esperado), mientras que las aproximaciones estáticas son sólo 6 veces más rápidas sobre este escenario. Considerando el caso anterior, ahora la situación ha cambiado debido principalmente a que la carga actual de trabajo es mayor y desequilibrada (no todos los nodos tienen el mismo trabajo), por ello la planificación dinámica puede explotar esta situación y finalmente alcanzar una mejor aceleración.

Para analizar la escalabilidad asociada al algoritmo multihilo también se ha calculado la eficiencia obtenida cuando se acelera la tarea TRANS_DISC para el peor caso, interpretando eficiencia como la relación entre los recursos utilizados, en este caso el número de núcleos, y los logros conseguidos, la

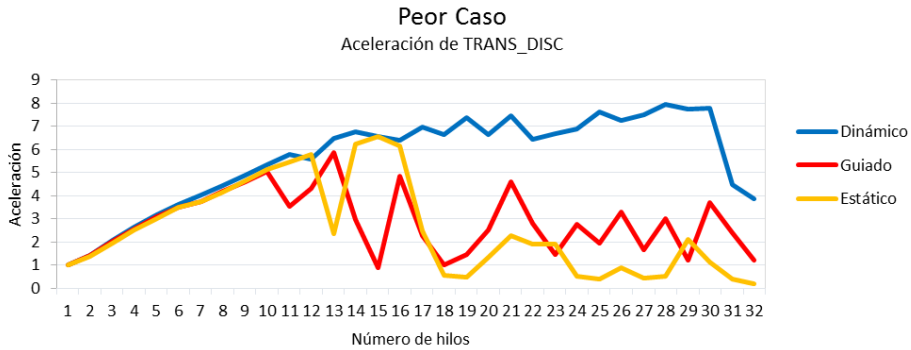


Figura 7.13: Aceleración obtenida para la tarea TRANS_DISC en el escenario de peor caso.

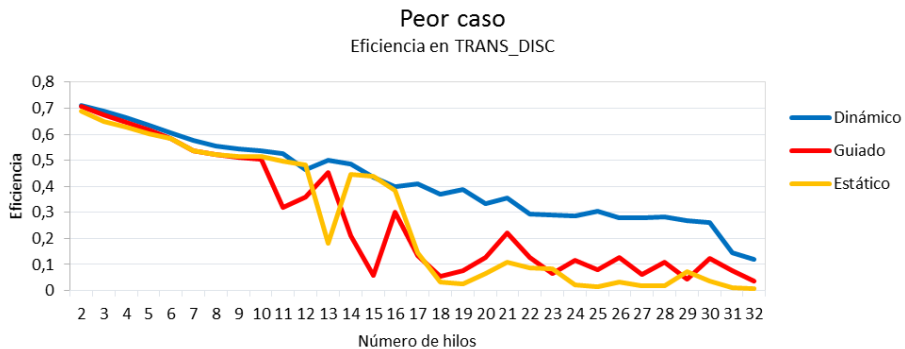


Figura 7.14: Eficiencia obtenida para la tarea TRANS_DISC en el escenario de peor caso.

aceleración. La Figura 7.14 muestra como el sistema puede escalar correctamente hasta 10 núcleos, ya que la eficiencia es mayor que 0.5 dentro de este rango. No vale la pena, sin embargo, usar un número mayor de núcleos, ya que ellos no van a proporcionar una mayor aceleración.

La Figura 7.15 muestra una comparación de tiempo entre la versión paralela del peor caso, usando 16 hilos y una rejilla de 60x60 nodos, y la versión secuencial, con el fin de mostrar la aceleración máxima global que se puede alcanzar, pero manteniendo los mismos resultados finales. Aquí el tiempo *Total* indica el tiempo requerido para resolver el problema entero

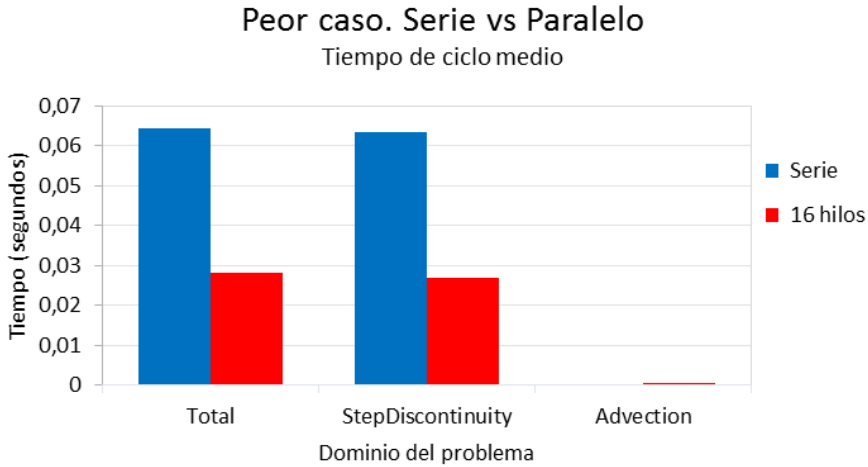


Figura 7.15: La comparación del tiempo de ciclo medio entre las propuestas secuencial y paralela para rejilla de 60×60 nodos. La ejecución paralela se hace con 16 hilos.

de visualización, mientras *Advection* y *StepDiscontinuity* indican el tiempo consumido por las dos subtareas principales consideradas. Como la figura muestra, la aceleración global alcanzada en la versión paralela depende principalmente de la aceleración obtenida mientras se actualizan las discontinuidades (*StepDiscontinuity*).

7.5. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha realizado un estudio de prestaciones del modelo de visualización y simulación de avalanchas de materiales granulares. El contexto de aplicación del modelo global (aplicaciones gráficas por ordenador interactivas) introduce una fuerte restricción temporal asociada al tiempo de ciclo medio (60 Hz) que se debe cumplir.

Se han evaluado por separado las prestaciones del modelo de visualización y del modelo de simulación. En el primer caso, el modelo cumple la restricción temporal usando mallas de hasta de 80×80 nodos, mientras que en el peor caso no soporta más de 40×40 nodos. El modelo híbrido de simulación que emplea SPH permite ejecutarse en rejillas de 400×400 nodos

en un caso de avalancha típica, pero es muy dependiente del número de partículas utilizadas y no tanto del tamaño de la rejilla.

La implementación secuencial del modelo global presentado que mezcla simulación y visualización, tiende a cumplir el requisito temporal en la simulación de avalanchas típicas cuando el tamaño máximo de la rejilla no supera los 160x160 nodos y no se simulan más de 3000 partículas. El principal cuello botella del modelo está presente en la parte de visualización.

Se ha introducido una propuesta paralela sobre OpenMP para acelerar el modelo de visualización. Los experimentos llevados a cabo sobre el caso peor y típico, muestran que los hilos no pueden explotar totalmente las actuales prestaciones de las arquitecturas multinúcleo, debido a los conflictos derivados de las operaciones de escritura. Para evitar estos conflictos se debe reducir el ámbito de la sección crítica. Una primera idea es asociar bloques de nodos (submatrices de nodos desde la rejilla) a la carga de trabajo de hilos en vez de asociar un sólo nodo. Esto reduciría los conflictos de escritura a sólo los bordes de los nodos, que pueden ser gestionados independientemente.

En el modelo de simulación presentado en el Capítulo 5 el factor crítico está en las operaciones que dependen tanto de las dimensiones de la rejilla como del número de partículas. Sin embargo ante las pequeñas dimensiones de la rejilla soportadas por el paso de visualización, aunque estuviese toda la superficie cubierta de partículas, el modelo visual seguiría siendo el cuello de botella principal. En consecuencia no se ha realizado ningún análisis para acelerar este paso de simulación.

El resultado del nuevo algoritmo paralelo ha sido que se ha conseguido casi duplicar el tamaño de las rejillas involucradas. Este aspecto tiene un claro impacto sobre la calidad asociada a la visualización de la avalancha usando el método estudiado.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En la presente memoria se ha presentado un nuevo modelo de visualización de avalanchas, adecuado para simulación interactiva, que permite superar las dificultades encontradas en las técnicas existentes en las regiones en las que aparecen discontinuidades. Se han propuesto diferentes modelos de simulación que generan campos de flujo a visualizar y se han analizado sus bondades haciendo hincapié en la semejanza de los resultados con la realidad, la flexibilidad de control de la forma y velocidad de las avalanchas y el cumplimiento de la restricción temporal necesaria para que puedan ser utilizadas en aplicaciones interactivas.

A continuación se va a realizar un resumen del grado de consecución de los principales objetivos que se plantearon cuando se inició el trabajo de investigación, especificados en la introducción, y de las contribuciones científicas que aporta el modelo de visualización y simulación de materiales granulares ilustrado en esta memoria. Por último, se van a proponer las líneas de investigación futuras que se abren tras los resultados obtenidos en este trabajo.

8.1. CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS

El objetivo principal de este trabajo ha sido diseñar e implementar un modelo de visualización de avalanchas, adecuado para simulación interactiva, que permita superar las distorsiones en las texturas que generan las técnicas existentes ante la presencia de flujos con discontinuidades. Para lograr el objetivo se han revisado las técnicas de visualización de flujos ba-

sadas en textura, prestando especial atención a los mecanismos de control de deformación de textura implementados. Se han ampliado estos mecanismos para impedir la deformación de la textura ante discontinuidades. En el Capítulo 3 se ha diseñado un algoritmo para detectar una discontinuidad y trazar su evolución usando sólo la información disponible en los vértices de la malla de triángulos. Este algoritmo permite modificar la malla a lo largo de la discontinuidad, proporcionando una advección de textura consistente.

Para conseguir visualizar avalanchas de grandes extensiones en tiempos interactivos ha sido necesario adaptar las técnicas de simulación de materiales granulares existentes al modelo de visualización planteado en esta memoria y de este modo poder generar campos de velocidades adecuados a las técnicas de advección. Para conseguir tal fin se han planteado tres modelos de simulación de avalanchas que generan tales campos de velocidades: un modelo basado en diferencias finitas y otros dos modelos basados en dinámica de partículas que se diferencian en la utilización de DEM o SPH en el cálculo de fuerzas. El diseño de estos modelos se pueden ver en los Capítulos 4 y 5.

El primer modelo de simulación se basa en el esquema de diferencias finitas de Lax-Friedrichs que discretiza el BCRE. Esta propuesta genera un campo de flujo que define con líneas suaves las avalanchas, pero no es muy flexible en el control de la expansión de la avalancha, por lo que sus resultados aunque realistas son bastante limitados. La evolución de la avalancha descrita por el modelo BCRE depende del esquema de diferencias finitas con que se discretice, por ello para la propuesta final de este modelo de simulación, se ha realizado un estudio numérico de las propiedades de evolución y expansión de las avalanchas de los esquemas de diferencias que más estabilidad dan, Lax-Friedrichs y el propuesto por Falcone y Vita, obteniendo el primero mejores resultados de expansión.

El diseño de los modelos de simulación que emplean dinámicas de partículas, se ha basado en un modelo híbrido que utiliza como base una técnica que emplea malla dirigida por el BCRE, lo cual les aporta la estabilidad y el bajo consumo requerido para simular grandes avalanchas. Sobre la malla se utiliza un modelo de dinámicas de partículas, donde se ha diseñado una propuesta basada en DEM y otra basada en SPH, adaptado a materiales granulares en un dominio 2D. El modelo híbrido utiliza por un lado una rejilla para generar el campo de velocidades final y sobre la que se ejecutan las

ecuaciones discretizadas del modelo BCRE, y por otro lado se utiliza otra rejilla para trabajar con las partículas. El flujo que representa la avalancha se genera a partir de las velocidades de las partículas. Esto ofrece resultados físicamente realistas y las avalanchas generadas permiten detectar y esquivar obstáculos, además de proporcionar el efecto de la inercia. El modelo híbrido propuesto ofrece flexibilidad para modelar las propiedades de velocidad, tamaño y forma de la avalancha, parametrizando el área de acción de cada partícula y de cada vértice de la malla, y la altura de la capa móvil a partir de la cual se permite expandir la avalancha. La propuesta SPH en comparación con DEM, permite representar avalanchas de características visualmente muy parecidas, pero con un menor número de partículas, ya que se distribuyen mejor en el interior de la avalancha.

Se ha comprobado el funcionamiento del modelo de visualización de avalanchas mediante una serie de pruebas utilizando campos de velocidades sintéticos. Se ha comprobado como el algoritmo planteado detecta en todos los casos las discontinuidades en los flujos, aunque no definiendo muy bien algunas discontinuidades curvas, pero este hecho se puede mejorar aumentando la resolución de la malla triangular con la que se visualiza. El algoritmo además permite eliminar las deformaciones de la textura ante flujos con discontinuidades.

Así mismo se han estudiado las propiedades de evolución y expansión de las avalanchas generadas por los modelos de simulación propuestos, con el fin de evaluar si reproducen comportamientos de avalanchas reales. El modelo basado en diferencias finitas consigue reproducir avalanchas muy semejantes a la realidad, definiendo el contorno de la avalancha con líneas curvas suaves. Sin embargo con este modelo resulta muy complicado controlar la expansión de la avalancha, sólo pudiendo modificar la velocidad pero no su forma.

En los modelos híbridos diseñados en el Capítulo 5, el campo de flujo que define la avalancha se genera a partir de las velocidades de las partículas, esto otorga a los modelos un mayor control de la expansión y evolución de las avalanchas frente al modelo basado en diferencias finitas. Los flujos generados por estos modelos no definen de manera tan regular la discontinuidad de la avalancha como el modelo anterior, pero la flexibilidad de controlar la expansión de la avalancha, permite configurar su forma, favoreciendo el asemejarse a avalanchas reales. Estos modelos basados en partículas permiten detectar y esquivar obstáculos en el camino aplicando cualquier algoritmo

de detección de colisiones de partículas, además se consigue reproducir el efecto de la inercia, más difícil de reproducir con el modelo basado en diferencias finitas.

Finalmente, en el Capítulo 7 se ha realizado un estudio de prestaciones de los modelos para detectar si cumplen con los requisitos temporales que impone su utilización en aplicaciones interactivas. Se ha detectado que el principal cuello de botella es la parte de visualización, la cual permite visualizar avalanchas típicas en rejillas de no más de 80×80 nodos, siempre que el número de partículas no supere las 800. Por ello, se ha realizado un estudio de paralelización del algoritmo, resultando provechosa la utilización de hasta 10 núcleos de procesamiento consiguiendo duplicar la resolución de la malla de visualización.

8.2. CONTRIBUCIONES

El presente trabajo ha estado motivado en la visualización de avalanchas de grandes extensiones de materiales granulares para aplicaciones interactivas. Existen muchos trabajos de investigación relacionados, cada uno aportando su contribución científica, pero hasta la fecha no se ha presentado un modelo que ofrezca los objetivos que en el trabajo de investigación se han planteado.

Se ha estudiado que los modelos de visualización basados en advección de textura son los más adecuados para reproducir avalanchas en aplicaciones interactivas. Pero estos modelos presentan el gran inconveniente de la deformación de la textura, para lo que existen distintas técnicas para su control. Pero no tratan la deformación cuando es producida por una discontinuidad en el campo de flujo. La técnica de visualización presentada en esta memoria permite evitar este tipo de deformación, mediante la detección y seguimiento de las discontinuidades y realizando remallado dinámico.

Los esquemas de diferencias finitas empleados habitualmente para la simulación de avalanchas no permiten reproducir el comportamiento de avalanchas localizadas. Este trabajo, presenta el esquema de Lax-Friedrichs como alternativa que permite solucionar este problema detectado, permitiendo la reproducción de avalanchas más reales.

Existen muchas técnicas de simulación de materiales granulares que permiten reproducir avalanchas, pero por lo general utilizan para simular los

materiales, bien mecanimos basados en rejilla, bien basados en dinámica de partículas. Ambos mecanismos aportan sus ventajas y desventajas, por ello, este trabajo presenta un modelo híbrido de simulación de avalanchas que utiliza un sistema de partículas 2D en la superfiie del sistema. Existen otros modelos híbridos de simulación de materiales granulares pero el presentado en esta memoria ofrece las siguientes características:

- Está adaptado para la generación de un campo de velocidades que pueda visualizarse mediante advección de textura. Esto implica un menor coste computacional al no ser necesario visualizar las partículas que representan el material granular.
- Se ha reducido el número de partículas necesarias para simular una avalancha, gracias a la simulación del sistema de partículas sobre un dominio 2D, con lo que el coste de ejecución del algoritmo se reduce.
- Ofrece mucha flexibilidad a la hora de controlar la simulación de las avalanchas, ya que por medio de un conjunto de parámetros se pueden ajustar las simulaciones a los comportamientos observados experimentalmente.

Publicaciones derivados de la tesis

Como resultado de la presente tesis se han derivado las siguientes publicaciones científicas de carácter internacional.

Publicaciones en revistas internacionales:

1. **Texture advection on discontinuos flows.** Rodríguez-Cerro, Angel; García-Fernández, Ignacio; Martínez-Durá, Rafael J. and Pla-Castells, Marta. *Visual Computer*, vol 31, 1033-1043, 2015.

Publicaciones en congresos internacionales:

1. **Lateral diffusion in finite difference schemes for avalanche simulation.** Rodríguez-Cerro, Angel; Molner-Siurana, Nuria; García-Fernández, Ignacio and Martínez-Durá, Rafael J. *Industrial Simulation Conference 2015*.

2. **Performance evaluation of discontinuity tracking in vector fields for avalanche simulation.** Rodríguez-Cerro, Angel; Lozano-Ibañez, Miguel; García-Fernández, Ignacio and Martínez-Durá Rafael J. *29th European Simulation and Modelling Conference, ESM'2015.*

8.3. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Como resultado del trabajo realizado se plantean nuevas líneas de trabajo. Adicionalmente, ciertos aspectos estudiados pueden ser analizados como resultados del presente trabajo que se detallan a continuación.

El método de visualización se ha derivado considerando que no hay información sobre el flujo fuera de los nodos de la rejilla. Sin embargo, el esquema de remallado puede ser mejorado si el campo velocidad está disponible en más localizaciones, permitiendo un mejor remallado de las áreas afectadas por la discontinuidad. La malla puede ser simplificada utilizando técnicas como las propuestas González et al. (González et al., 2008) e implementado el remallado en el shader de teselación (Ripolles et al., 2012).

Se han observado algunos problemas en forma de pequeñas irregularidades cuando la velocidad de la frontera no es constante. Aunque mallas densas superan el problema, se necesita un esfuerzo extra para hacer la representación de las discontinuidades más robusta.

La utilización de partículas en la evolución de una avalancha permite modelar ondas de movimiento y efectos similares sobre la superficie del material. Además de permite influir en el desplazamiento de elementos por la superficie de la avalancha, como rocas rodantes o humo.

El modelo de visualización y simulación de avalanchas presentado se ha descrito e implementado de forma secuencial. Tras el análisis del coste computacional de los modelos, se ha detectado el cuello de botella en la parte de visualización. Ésta se ha paralelizado, sin grandes cambios en el código, utilizando OpenMP, consiguiendo duplicar la resolución de la malla de visualización en el mejor de los casos. Se puede profundizar más este estudio de paralelismo y centrarlo en la implementación del código en la Unidad de Procesado Gráfico, con el fin de trabajar con altas resoluciones en tiempo interactivo.

BIBLIOGRAFÍA

- Akinci, N., Ihmsen, M., Akinci, G., Solenthaler, B., and Teschner, M. (2012). Versatile rigid-fluid coupling for incompressible sph. *ACM Trans. Graph.*, 31(4):62:1–62:8. 2.4.3
- Alduán, I. and Otaduy, M. A. (2011). Sph granular flow with friction and cohesion. In *Proceedings of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, SCA '11, pages 25–32, New York, NY, USA. ACM. 2.4.3, 2.4.3
- Alduán, I., Tena, A., and Otaduy, M. A. (2009). Simulation of high-resolution granular media. In *Proc. of Congreso Español de Informática Gráfica*, volume 1. 2.4.1
- Aradian, A., Raphael, E., and de Gennes, P.-G. (2002). Surface flows of granular materials: a short introduction to some recent models. *Comptes Rendus Physique*, 3(2):187 – 196. 2.3
- Aranson, I. S. and Tsimring, L. S. (2001). Continuum description of avalanches in granular media. *Phys. Rev. E*, 64:020301. 2.1
- Bargteil, A. W., Goktekin, T. G., O'Brien, J. F., and Strain, J. A. (2006a). A semi-lagrangian contouring method for fluid simulation. *ACM Trans. Graph.*, 25(1):19–38. 2.2
- Bargteil, A. W., Sin, F., Michaels, J. E., Goktekin, T. G., and O'Brien, J. F. (2006b). A texture synthesis method for liquid animations. In *SCA '06*:

- Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 345–351. 2.2
- Bell, N., Yu, Y., and Mucha, P. J. (2005). Particle-based simulation of granular materials. In *Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, SCA '05, pages 77–86, New York, NY, USA. ACM. 2.4.1, 2.4.1, 5.3.1
- Bender, J., Müller, M., Otaduy, M. A., and Teschner, M. (2013). Position-based methods for the simulation of solid objects in computer graphics. In *EUROGRAPHICS 2013 State of the Art Reports*. Eurographics Association. 2.4.2
- Börzsönyi, T., Halsey, T. C., and Ecke, R. E. (2005). Two scenarios for avalanche dynamics in inclined granular layers. *Phys. Rev. Lett.*, 94:208001. 2.1
- Bouchaud, J.-P., Cates, M., Ravi Prakash, J., and Edwards, S. (1994). A model for the dynamics of sandpile surfaces. *Journal de Physique I*, 4(10):1383–1410. 1.1, 2.3.1
- Brackbill, J. and Ruppel, H. (1986). Flip: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 65(2):314 – 343. 2.4.3
- Chang, Y., Bao, K., Zhu, J., and Wu, E. (2012). A particle-based method for granular flow simulation. *Science China Information Sciences*, 55(5):1062–1072. 2.4.3
- Chen, P.-Y. and Wong, S.-K. (2013). Real-time auto stylized sand art drawing. In *Computer-Aided Design and Computer Graphics (CAD/Graphics), 2013 International Conference on*, pages 439–440. 5
- Correa, C. D., Hero, R., and Ma, K.-L. (2011). A comparison of gradient estimation methods for volume rendering on unstructured meshes. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.*, 17(3):305–319. 3.2
- Daerr, A. (2001a). Dynamical equilibrium of avalanches on a rough plane. *Physics of Fluids*, 13:2115–2124. 1.3

- Daerr, A. (2001b). Dynamical equilibrium of avalanches on a rough plane. *Physics of Fluids (1994-present)*, 13(7):2115–2124. 2.1, 4.1
- Daerr, A. and Douady, S. (1999a). Two types of avalanche behaviour in granular media. *Nature*, 399(6733):241–243. 1.3, 2.1, 4.1, 4.1, 4.2.3, 6.3.1, 6.4
- Daerr, A. and Douady, S. (1999b). Two types of avalanche behaviour in granular media. *Nature*, 399:241–243. 4, 5.3, 6.3.2, 6.3.2, 6.3.2, 6.3.4
- Dagum, L. and Enon, R. (1998). Openmp: an industry standard api for shared-memory programming. *IEEE Computat. Science & Engineering*, 5(1):46–55. 7.4
- De Dios, C., Marín, J., Ordás, F., Matey, L., Suescun, A., Vélez, G., and Schelenz, T. Marín, J. (May 2012). Simulador de máquina de proyección de hormigón. *Ingeopres, No. 214, pp. 64-69*. 2.3
- Desbrun, M. and Gascuel, M.-P. (1996). Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies. In *Proceedings of the Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation '96*, pages 61–76, New York, NY, USA. Springer-Verlag New York, Inc. 2.4.3, 2.4.3, 5.3.2
- Duran, J. (1999). *Sands, Powders and Grains*. Springer. 2.3
- Falcone, M. and Vita, S. F. (2006). A finite-difference approximation of a two-layer system for growing sandpiles. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(3):1120–1132. 2.3.1, 2.3.1, 4, 4.1, 4.2, 4.2.3, 6.1, 6.3.1
- FLEX (2015). Nvidia flex web page. <https://developer.nvidia.com/flex>. Last visited, September 2015. 2.4.2
- González, C., Gumbau, J., Chover, M., and Castelló, P. (2008). Mesh simplification for interactive applications. *WSCG '2008: Communication Papers: The 16-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision in co-operation with EUROGRAPHICS: University of West Bohemia, Plzen, Czech Republic, February 4 - 7, 2008, p. 87-94*. 8.3

- Hadeler, K. and Schieborn, D. (2012). Granular matter and the time-dependent viscous eikonal equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(5):616 – 622. 5.4.1
- Hadeler, K. P. and Kuttler, C. (1999a). Dynamical models for granular matter. *Granular Matter*, 2(1):9–18. 2.3, 2.3.1, 4
- Hadeler, K. P. and Kuttler, C. (1999b). Dynamical models for granular matter. *Granular Matter*, 2(1):9–18. 2.3
- Hadeler, K. P. and Kuttler, C. (1999c). Granular matter in a silo. *Granular Matter*, 3:193–197. 2.1, 5, 5.3
- Harlow, F. (1962). The particle-in-cell method for numerical solution of problems in fluid dynamics. Technical report, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex. 2.3, 2.4.3
- Holz, D. (2014). Parallel Particles (P2): A Parallel Position Based Approach for Fast and Stable Simulation of Granular Materials. pages 135–144. 1, 2.4.2
- Ihmsen, M., Orthmann, J., Solenthaler, B., Kolb, A., and Teschner, M. (2014). SPH Fluids in Computer Graphics. In Lefebvre, S. and Spagnuolo, M., editors, *Eurographics 2014 - State of the Art Reports*. The Eurographics Association. 2.4.3
- Ihmsen, M., Wahl, A., and Teschner, M. (2012). High-resolution simulation of granular material with sph. In *VRIPHYS*, pages 53–60. 2.4.3
- Ihmsen, M., Wahl, A., and Teschner, M. (2013). A lagrangian framework for simulating granular material with high detail. *Computers & Graphics*, 37(7):800 – 808. 2.4.3, 2.5
- Jobard, B., Erlebacher, G., and Hussaini, M. Y. (2001). Lagrangian-eulerian advection for unsteady flow visualization. In *Proceedings of the Conference on Visualization '01*, VIS '01, pages 53–60. IEEE Computer Society. 2.2
- Jobard, B., Erlebacher, G., and Hussaini, M. Y. (2002). Lagrangian-eulerian advection of noise and dye textures for unsteady flow visualization.

- IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 8(3):211–222. 2.2
- Kwatra, V., Adalsteinsson, D., Kim, T., Kwatra, N., Carlson, M., and Lin, M. C. (2007). Texturing fluids. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 13(5):939–952. 2.2
- Laramee, R. S., Hauser, H., Doleisch, H., Vrolijk, B., Post, F. H., and Weiskopf, D. (2004). The state of the art in flow visualization: Dense and texture-based techniques. *Computer Graphics Forum*, 23(2):203–221. 2.2
- Laramee, R. S., Jobard, B., and Hauser, H. (2003). Image space based visualization of unsteady flow on surfaces. In *Proceedings of the 14th IEEE Visualization 2003 (VIS'03)*, page 18. IEEE Computer Society. 2.2
- Lee, H. and Han, S. (2010). Solving the shallow water equations using 2d sph particles for interactive applications. *The Visual Computer*, 26(6-8):865–872. 5.3.2
- Lee, J. and Herrmann, H. J. (1993). Angle of repose and angle of marginal stability: molecular dynamics of granular particles. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(2):373. 2.3, 2.4.1
- Lefebvre, S. and Hoppe, H. (2006). Appearance-space texture synthesis. In *ACM SIGGRAPH 2006 Papers*, pages 541–548. 2.2
- Li, X. and Moshell, J. M. (1993). Modeling soil: Realtime dynamic models for soil slippage and manipulation. In *In Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pages 361–368. 1
- Luciani, A., Habibi, A., and Manzotti, E. (1995). A multi-scale physical model of granular materials. In *Graphics interface' 95*, pages 136–146, Québec, Canada. 1, 2.3
- Macklin, M., Müller, M., Chentanez, N., and Kim, T.-Y. (2014). Unified particle physics for real-time applications. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 33(4):104. 2.4.2, 2.4.2

- Max, N. and Becker, B. (1996). Flow visualization using moving textures. 1.1, 2.2.1, 2.5, 3, 3.1
- Miller, G. and Pearce, A. (1989). Globular dynamics: A connected particle system for animating viscous fluids. 1
- Monaghan, J. J. (1992). Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30(1):543–574. 2.3, 2.4.3
- Müller, M., Charypar, D., and Gross, M. (2003). Particle-based fluid simulation for interactive applications. In *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, SCA '03, pages 154–159. 2.4.3, 2.4.3, 2.4.3, 5.3.2
- Müller, M., Heidelberger, B., Hennix, M., and Ratcliff, J. (2007). Position based dynamics. *J. Vis. Comun. Image Represent.*, 18(2):109–118. 2.4.2, 2.4.2
- Narain, R., Golas, A., and Lin, M. C. (2010). Free-flowing granular materials with two-way solid coupling. *ACM Trans. Graph.*, 29(6):173:1–173:10. 2.4.3, 2.4.3
- Neyret, F. (2003). Advected textures. In *In ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation (2003)*, pages 147–153. 2.2.1, 2.5, 3, 3.1, 3.2, 6.2, 7.1, 7.1.1
- Nkulikiyimfura, D., Kim, J.-I., and Kim, H. (2012). A real-time sand simulation using a gpu. In *Computing Technology and Information Management (ICCM), 2012 8th International Conference on*, volume 1, pages 495–498. 2.4.3
- Onoue, K. and Nishita, T. (2003). Virtual sandbox. In *Proceedings of the 11th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, PG '03, pages 252–, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society. 1.1
- Onoue, K. and Nishita, T. (2005). An interactive deformation system for granular material. *Computer Graphics Forum*, 24(1):51–60. 2.3.1
- OpenMP (2015). Openmp web page. <http://openmp.org>. Last visited, June 2015. 2.2, 7.4

- Pla-Castells, M. (2009). *Modelos de simulación en tiempo real de sistemas granulares mediante autómatas celulares*. PhD thesis, Universidad de Valencia. 1.1
- Pla-Castells, M., García-Fernández, I., and Martínez-Durá, R. J. (2006). Interactive terrain simulation and force distribution models in sand piles. *Lecture Notes on Computer Science*, 4173:392–401. 1, 2.3.1
- Pla-Castells, M., García-Fernández, I., and Martínez-Durá, R. J. (2008). Physically-based interactive sand simulation. In *Eurographics 2008 - Short Papers*, pages 21–24. 1.1, 2.3.1
- Pouliquen, O. (1999). Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Physics of Fluids*, 11(3):542–548. 2.1
- Prigozhin, L. and Zaltzman, B. (2001). Two continuous models for the dynamics of sandpile surfaces. *Physical Review E*, 63(4):041505. 2.3
- Ramírez, R., Pöschel, T., Brilliantov, N. V., and Schwager, T. (1999). Coefficient of restitution of colliding viscoelastic spheres. *Phys. Rev. E*, 60:4465–4472. 2.4.1, 5.3.1
- Rasmussen, N., Enright, D., Nguyen, D., Marino, S., Sumner, N., Geiger, W., Hoon, S., and Fedkiw, R. (2004). Directable photorealistic liquids. In *Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pages 193–202. 2.2
- Rezzolla, L. (2010). Numerical methods for the solution of partial differential equations. *Potsdam, Albert Einstein Institute, Max-Planck-Institute for Gravitational Physics, Potsdam, Germany*. 4.2.2
- Ripolles, O., Ramos, F., Puig-Centelles, A., and Chover, M. (2012). Real-time tessellation of terrain on graphics hardware. *Computers & Geosciences*, 41:147 – 155. 8.3
- Savage, S. and Hutter, K. (1991). The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. part i: Analysis. *Acta Mechanica*, 86(1-4):201–223. 2.3

- Schwager, T. and Pöschel, T. (1998). Coefficient of normal restitution of viscous particles and cooling rate of granular gases. *Phys. Rev. E*, 57:650–654. 2.4.1, 5.3.1
- Solenthaler, B., Bucher, P., Chentanez, N., Müller, M., and Gross, M. (2011). Sph based shallow water simulation. In *Virtual Reality Interactions and Physical Simulations (VRIPhys)*. 5.3.2
- Solenthaler, B. and Pajarola, R. (2009). Predictive-corrective incompressible sph. *ACM Trans. Graph.*, 28(3):40:1–40:6. 2.4.3
- Stam, J. (1999). Stable fluids. In *Proceedings of SIGGRAPH'99*, pages 121–128. 2.4.3
- Stam, J. and Fiume, E. (1995). Depicting fire and other gaseous phenomena using diffusion processes. In *Proceedings of the 22Nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '95, pages 129–136, New York, NY, USA. ACM. 2.4.3
- Strikwerda, J. (2004). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2 edition. 2.3.1, 4.2.2
- Sumner, R. W., O'Brien, J. F., and Hodgins, J. K. (1999). Animating sand, mud, and snow. *Computer Graphics Forum*, 18(1):17–26. 1.1, 2.3, 2.3.1
- Tsuda, Y., Yue, Y., Dobashi, Y., and Nishita, T. (2010a). Visual simulation of mixed-motion avalanches with interactions between snow layers. *The Visual Computer*, 26(6-8):883–891. 2.4.4
- Tsuda, Y., Yue, Y., Dobashi, Y., and Nishita, T. (2010b). Visual simulation of mixed-motion avalanches with interactions between snow layers. *The Visual Computer*, 26(6-8):883–891. 5, 5.6
- van Wijk, J. J. (2002). Image based flow visualization. *ACM Trans. Graph.*, 21:745–754. 2.2
- Vélez, G., Matey, L., Amundarain, A., Ordás, F., and Marín, J. (2011). Real-time modelling and rendering of sprayed concrete. In *Proceedings of V Ibero-American Symposium in Computer Graphics (SIACG), Faro, Portugal*, pages 141–146. 2.3

- Velez, G., Matey, L., Amundarain, A., Suescun, Á., Marín, J. A., and de Dios, C. (2013). Modeling of shotcrete application for use in a real-time training simulator. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 28(6):465–480. 2.3
- Weiskopf, D. and Ertl, T. (2004). A hybrid physical/device-space approach for spatio-temporally coherent interactive texture advection on curved surfaces. In *Proceedings of Graphics Interface 2004*, GI '04, pages 263–270. 2.2
- Wong, S.-K. and Fu, I.-T. (2015). Hybrid-based snow simulation and snow rendering with shell textures. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 26(3-4):413–421. 2.4.4, 5, 5.6
- Yu, Q., Neyret, F., Bruneton, E., and Holzschuch, N. (2009). Scalable real-time animation of rivers. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics 2009)*, 28(2). 2.2
- Yu, Q., Neyret, F., Bruneton, E., and Holzschuch, N. (2011). Lagrangian texture advection: Preserving both spectrum and velocity field. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 17(11):1612–1623. 2.2
- Zeng, Y.-L., Tan, C. I., Tai, W.-K., Yang, M.-T., Chiang, C.-C., and Chang, C.-C. (2007). A momentum-based deformation system for granular material. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 18(4-5):289–300. 1.1, 2.3.1
- Zhu, B. and Yang, X. (2010). Animating sand as a surface flow. *Eurographics 2010, Short Papers*. 2.4.4, 2.5, 5
- Zhu, Y. and Bridson, R. (2005). Animating sand as a fluid. *ACM Trans. Graph.*, 24(3):965–972. 2.4.3