# MATERIAL DE PRÀCTIQUES

# MATEMÀTIQUES II

CURS 2015-2016

GRAU D'ECONOMIA
GRAU D'ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES
GRAU DE FINANCES I COMPTABILITAT

CARÀCTER: TRONCAL

CURS: PRIMER

SEMESTRE: 2

Autor: D. Robert Meneu Gaya. Professor Titular d'Universitat del Departament de Matemàtiques per a l'Economia i l'Empresa.

# ÍNDEX

# PART 1. ÚS DEL PROGRAMA LINGO

## 1.1. Introducció

El programa LINGO ha sigut desenvolupat per LINDO Systems Inc. És un programa dissenyat per a resoldre sistemes d’equacions i inequacions i problemes d’optimització, tant lineals com no lineals.

La resolució dels models es fa mitjançant distints *solvers*: per a problemes lineals, no lineals (amb o sense condicions apropiades de concavitat-convexitat), quadràtics, enters, etc. Tot i això, l’usuari no s’ha de preocupar d’elegir-los perquè el programa analitza el problema i tria el més adequat automàticament.

El programa LINGO destaca per la familiaritat del llenguatge que utilitza. Es tracta d’una sintaxi semblant a la que s’utilitza quan s’escriu el problema en el paper. En un nivell més avançat, LINGO admet un llenguatge de modelització l’objectiu del qual és generar models d’una gran dimensió, mitjançant l’ús de conjunts que permeten crear vectors i matrius amb els quals definir sumatoris i escriure restriccions i condicions de domini d’una manera més ràpida.

LINGO també admet la possibilitat de vincular dades amb un full de càlcul com Excel. D’una banda, les dades del problema d’optimització (coeficients de la funció objectiu, de les restriccions o termes independents de les restriccions) es poden importar des del full de càlcul i, de l’altra, la solució obtinguda amb LINGO per a les variables principals del problema es pot exportar al full de càlcul.

Per obtenir la versió lliure del programa LINGO cal entrar en l’adreça <http://www.lindo.com>. Aquesta és la pàgina principal de l’empresa que comercialitza aquest programa informàtic i uns altres de semblants. En aquesta adreça d’Internet s’informa de les versions més actuals, novetats, material complementari, etc. Per continuar amb la instal·lació cal seguir amb l’enllaç Downloads, després amb Download LINGO i triar la versió més recent del programa per al sistema operatiu que cada usuari utilitze. Després d'omplir un formulari i enviar la petició, es rep un correu electrònic amb un enllaç a una pàgina que permet la descàrrega del programa.

Les limitacions d'un problema per a poder ser resolt amb aquesta versió són:

- 150 restriccions
- 300 variables
- 30 variables enteres
- 30 expressions no lineals

## 1.2. Sintaxi bàsica del programa LINGO

El programa LINGO funciona en l'entorn Windows. Per tant, l'ús de les icones, dels menús i de les finestres són els habituals en tota aplicació Windows. La sintaxi bàsica de LINGO és molt senzilla, ja que la majoria de la notació matemàtica que s'utilitza quan s'escriu en paper es pot incorporar directament sobre un problema en LINGO.

En aquest epígraf es descriu la sintaxi bàsica del programa LINGO. Per tal d'introduir-hi un problema d'optimització matemàtica s'han de respectar les regles següents:

1. Funció objectiu: la direcció d'optimització s'ha d'indicar en forma abreujada seguida d'un signe igual i de l'expressió matemàtica de la funció:

   *Max*=expressió funció objectiu*;* o *Min*=expressió funció objectiu.

2. Expressions matemàtiques: són combinacions de nombres, variables, funcions @ i operadors matemàtics que s'utilitzen a fi d'indicar la funció objectiu o els primers membres de les restriccions. Cal fer les observacions següents:

   <u>Nombres</u>: el caràcter que separa la part entera i la decimal és un punt (4.5, per exemple). LINGO utilitza freqüentment la notació científica: 1E6 significa 1.000.000 i 2.3E-3 vol dir 0,0023, per exemple.

   <u>Variables</u>: per a referir-se a variables s'han d'utilitzar noms que comencen amb una lletra, encara que els caràcters següents poden ser lletres o nombres. Per exemple: *x*, *y*, *x*1, *x*23, *cost*; són noms vàlids de variables.

   <u>Funcions @</u>: Són funcions definides en LINGO que representen funcions especials de tipus matemàtic, trigonomètric, estadístic, financer, etc. Totes elles s'hi poden incorporar a mesura que s'escriu un problema des de l'opció de menú *Edit – Paste Function*. Alguns exemples són: @sin i @cos per al sinus i cosinus, @exp per a l'exponencial amb base e, @log per al logaritme neperià i@sqrt per a l'arrel quadrada. Un tipus especial de funcions @ a fi d'expressar les condicions de domini de les variables es descriu amb detall més endavant.

   <u>Operadors matemàtics</u>: els símbols associats i l'ordre d'execució són els següents:

Primer: signe ( + o - ). Si apareix a l'inici d'una expressió matemàtica, és la primera operació que s'executa. Tot i això, aquest símbol en una posició no inicial s'interpreta com una suma o resta i és l'últim que s'executa.

Segon: exponent ( ^ ).

Tercer: producte( * ) i divisió ( / ).

Quart: suma ( + ) i resta ( – ).

Per alterar l'ordre d'execució d'aquestes operacions s'han d'utilitzar parèntesis.

3. Restriccions: s'escriu el primer membre, que sol ser una expressió matemàtica, seguit d'un operador de comparació (=, >, <) i el segon membre, que sol ser un nombre. La desigualtat estricta no s'utilitza quan s'escriu el problema d'optimització, però en LINGO equival a la desigualtat no estricta.
4. Condicions de domini: LINGO entén que les variables poden prendre valors reals no negatius per defecte. Si aquest no és el cas, cal especificar-ho mitjançant funcions @:
   - $X \geq 0$: no cal escriure res.
   - $X$ lliure: @FREE(X)
   - $X$ fitada: @BND (fita_inferior, X, fita_superior). Si una fita és infinita s'utilitza un nombre suficientment gran. Per exemple X ≥ 10 s'escriuria @BND(10,X,1E20).
   - $X$ entera: @GIN(X)
   - $X$ binària: @BIN(X)

   En el menú *SOLVER – Options – General Solver*, si es desactiva la casella *Variables assumed non-negative*, el valor per defecte seria el de variable lliure i caldria especificar si la variable és no negativa amb @BND(0,X,1E20).
5. Nom de les expressions: les expressions del model (funció objectiu i restriccions) es poden anomenar al començament de la línia entre claudàtors, és a dir, [nom]. A mesura que augmenta el nombre de restriccions, s'eviten confusions si s'anomenen i també es facilita la posterior interpretació econòmica de la solució. Aquests noms no poden contenir espais en blanc, ni accents, ni certs caràcters que signifiquen una altra cosa en el llenguatge de LINGO (*, -, +, /, @, !).
6. Comentaris: el símbol ! indica que a continuació s'escriurà un comentari. Apareixerà en verd i no s'executarà, per tant, no hi ha limitació per als caràcters que poden formar part d'un comentari.
7. Fi d'expressió: en acabar una expressió (funció objectiu, restricció o condició de domini) o un comentari, és obligat escriure un punt i coma (;).

**Problema 1.** El problema d'optimització següent:

$$\begin{array}{ll} Min. & x^2 + 2y^2 - 0{,}5xy \\ s.a: & 2x + 5y \geq 4 \\ & x + y = 1 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

En sintaxi de LINGO és:

```
Min=x^2+2*y^2-0.5*x*y;
2*x+5*y>4;
x+y=1;
```

I opcionalment, amb comentaris i noms de línies per tal de facilitar la lectura del problema i la posterior interpretació econòmica, el problema podria ser:

```
!Problema de minimitzar el risc d'una inversió;
[Risc] Min=x^2+2*y^2-0.5*x*y;
!Restriccions;
[Rendibilitat_minima] 2*x+5*y>4;
[Capital_invertit] x+y=1;
!No calen condicions de domini perquè són de no-
negativitat;
```

En cas d'errades en la sintaxi, LINGO mostra una finestra d'advertència (*LINGO Error Message*) amb una indicació de la línia i la posició exacta on s'ha detectat l'errada. Cal mirar abans d'aquesta posició, fins i tot en les línies precedents, a fi de localitzar-la i corregir-la.

## 1.3. Principals opcions de menú

*Opció File ('fitxer')*

S'encarrega de facilitar la gestió de fitxers. Les opcions del submenú són les habituals en aplicacions Windows: obri un model nou (*New*), obri un model ja existent (*Open*), guarda el model amb el mateix nom (*Save*), guarda el model amb un altre nom o a una ubicació distinta (*Save as*) i imprimeix (*Print*).

Cal distingir dos tipus d'arxius: LINGO *Models* (*.lg4) per a l'enunciat del model i LINGO *Report* (*.lgr) per a la solució i l'anàlisi de sensibilitat que veurem més endavant. Així doncs, un model i la solució són dos arxius distints. Quan es guarda un arxiu, el nom assignat apareix a la línia de títol de la finestra (en color blau).

*Opció Edit (‘edició’)*

Les opcions de submenú inclouen les habituals de desfer i refer, i les de copiar, tallar i enganxar. Una opció interessant és *Select Font*, per a canviar el tipus o la grandària del text. També convé esmentar, com s’ha dit abans, l’opció *Paste Function* per a enganxar funcions @, les quals apareixen agrupades per categories. Per a expressions matemàtiques llargues amb molts parèntesis, podem fer ús de l’opció *Match Parenthesis* per a localitzar on s’ha obert o s’ha tancat un determinat parèntesi.

*Opció SOLVER*

Inclou diverses opcions de submenú:

- *Solve*: executa el model actiu.
- *Solution*: s’utilitza per a determinar com volem mostrar la solució d’un model ja executat amb *Solve*.
- *Range*: mostra l’anàlisi de sensibilitat dels coeficients de la funció objectiu i dels termes independents de les restriccions. És una opció disponible solament en problemes lineals i s’explica més endavant.
- *Options*: Controla distints paràmetres que afecten la forma en què es resol el model. Per exemple, dins de la pestanya *General Solver* es pot desactivar l’opció per defecte que totes les variables siguen no negatives (*Variables assumed non-negative*) o es pot activar l’anàlisi de sensibilitat en programació lineal (seleccionant *Dual Computations* en *Prices&Ranges*). En la pestanya *Global Solver* es pot activar l’opció *Use Global Solver* per a programació no lineal. Tot i això, cal ser un usuari avançat per a modificar la majoria dels paràmetres que controlen la resolució dels problemes.

*Opció Window*

S’ocupa de la gestió de les finestres. Es poden tenir distints models oberts així com distintes finestres d’un mateix model. Amb el menú *Window* triarem la finestra activa en cada moment i com volem visualitzar al mateix temps diverses finestres.

*Opció Help (‘ajuda’)*

El submenú inclou *Help Topics* per a veure el contingut de l’ajuda, bé per capítols o bé per continguts alfabèticament, introduint en la casella corresponent l’opció que cal buscar.

## 1.4. Resolució d'un problema: parts de l'informe de solució

### *1.4.1. Anàlisi bàsica de la solució*

El problema es resol fent clic en l'eina , amb la combinació de tecles *Control+G* o amb l'opció de menú *SOLVER – Solve*. Quan es resol un model apareix, si no hi ha errors de sintaxi, la finestra *LINGO Solver Status*, que mostra informació sobre el progrés en la cerca de la solució. En acabar, apareix en la mateixa finestra certa informació bàsica de la solució (si n'hi ha o no, tipus de solució, valor de la funció objectiu) així com informació tècnica de l'algoritme utilitzat (temps de la cerca, nombre d'iteracions, etc.). En cas que no hi haja solució, el missatge que es mostra serà *Infeasible* ('problema infactible') o *Unbounded* ('problema no fitat').

Si hi ha solució, quan es tanca la finestra *LINGO Solver Status* apareix una finestra nova (*Solution Report*) amb la solució del problema. En el cas de l'exemple 1, la finestra amb l'informe de la solució és:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                                0.8888889
Infeasibilities:                                 0.000000
Total solver iterations:                                6
Elapsed runtime seconds:                             0.09
Model is convex quadratic

Model Class:                                           QP

Total variables:                     2
Nonlinear variables:                 2
Integer variables:                   0

Total constraints:                   3
Nonlinear constraints:               1

Total nonzeros:                      6
Nonlinear nonzeros:                  3


                    Variable           Value        Reduced Cost
                           X       0.3333333            0.000000
                           Y       0.6666667            0.000000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                        RISC       0.8888889           -1.000000
         RENDIBILITAT_MINIMA        0.000000          -0.7222222
             CAPITAL_INVERTIT        0.000000            1.111111
```

La primera part de l'informe inclou el valor òptim de la funció objectiu (*Objective value* = 0,8889 en aquest cas) i algunes dades tècniques del *solver* que ha utilitzat LINGO.

La segona part és la que cal interpretar tant matemàticament com econòmicament. La solució òptima del problema, en els aspectes més bàsics, està formada per les columnes *Value* i *Slack or Surplus*. En aquest cas, recordant que és un problema de selecció de cartera, la interpretació és la següent:

- **Columna *Value***: indica el valor òptim de les variables principals del problema. La inversió en el primer actiu és $x = 1/3$ u. m. i en el segon actiu és $y = 2/3$ u. m.
- **Columna *Slack or Surplus***: aquesta columna té tants valors com expressions hi ha en el model. Com que la primera és la funció objectiu, tenim que el risc mínim de la cartera d'inversió és 0,8889 unitats. La resta de valors en aquesta columna està associada a les restriccions. En concret, cada valor representa la diferència entre els dos membres de cada restricció, sempre en positiu. Si una restricció és d'igualtat, el valor que apareixerà serà un zero obligatòriament, com passa en aquest cas amb la segona restricció que obliga a invertir tot el capital d'1 u. m. Si la restricció és de desigualtat, els valors de la columna *Slack or Surplus* són els de les variables de marge de cada restricció, de manera que un valor igual a zero indicaria que la restricció se satura o es compleix amb igualtat, mentre que un valor distint de zero significaria que no se satura, i que n'hi ha un excés (*surplus*) en cas que la restricció siga de la forma $\geq$ o una mancança (*slack*) en cas que la restricció siga de la forma $\leq$.

  En aquest exemple, la restricció de rendibilitat mínima té una variable de marge igual a zero i això s'interpreta com que la rendibilitat de la cartera òptima és exactament la rendibilitat mínima requerida.
- **Columna *Dual Price***: en aquesta columna es proporcionen els multiplicadors de Kuhn i Tucker de cada restricció (no s'ha de considerar el *dual price* corresponent a la fila de la funció objectiu, normalment el primer). Perquè el valor del multiplicador de Kuhn i Tucker tinga la mateixa interpretació econòmica que la que hem vist en els apunts de teoria, el signe que apareix en la columna *Dual Price* caldrà canviar-lo si el problema és de minimitzar i deixar-lo igual si el problema és de maximitzar. A més, d'aquesta manera el signe dels multiplicadors serà coherent amb les condicions de Kuhn i Tucker estudiades: major o igual que zero si la restricció està en forma canònica i menor o igual que zero si no està en forma canònica.

Recordem que la interpretació econòmica dels multiplicadors prové de l'expressió:

$$\frac{\partial F^*}{\partial b_i} = \lambda_i^* \quad \rightarrow \quad \Delta F^* \approx \lambda_i^* \cdot \Delta b_i$$

És a dir, representen l'efecte que té un augment marginal del terme independent sobre el valor òptim de la funció objectiu. En l'exemple 1, els multiplicadors valen $\lambda_1 = 0{,}72$ i $\lambda_2 = -1{,}11$ (amb signe contrari al de l'informe de la solució perquè el problema és de minimitzar). Per tant, augments marginals en la rendibilitat mínima exigida per a la cartera (terme independent de la 1a restricció) implicaran nivells de risc més elevats (relació directa perquè el multiplicador és positiu), mentre que augments marginals en la quantitat invertida (si es poguera invertir més d'1 u. m.) implicaran nivells de risc menors (relació inversa perquè el multiplicador és negatiu).

El valor del multiplicador podria servir per fer aproximacions del nou valor de la funció objectiu davant de variacions concretes en el terme independent, i aquestes aproximacions són millors com menors siguen les variacions. Així, si la rendibilitat mínima exigida augmentara a 4,1 des del nivell previ de 4 (augment de 0,1), la funció objectiu variaria en una quantia aproximadament igual que el producte del multiplicador per aquesta variació del terme independent, cosa que permetria calcular el nou valor aproximat del risc mínim, $\overline{F}$ :

$$\Delta F^* \approx \lambda_i^* \cdot \Delta b_i \quad \rightarrow \quad (F - 0{,}8889) \approx 0{,}7222 \cdot (4{,}1 - 4) \quad \rightarrow \quad F \approx 0{,}9611$$

Si tornem a optimitzar el problema canviant el terme independent a 4,1, tindríem el valor exacte de la funció de risc, encara que en ocasions pot ser suficient amb l'aproximació calculada de la forma anterior.

Cal observar, no obstant això, que aquesta interpretació econòmica dels multiplicadors solament és vàlida si els canvis marginals no afecten decisivament la solució, i això és el que passa habitualment. Però si al mateix temps la restricció se satura i el multiplicador és zero, és a dir, si al mateix temps el *Slack or Surplus* i el *Dual Price* són zero per a alguna restricció, l'anterior interpretació econòmica no és vàlida per a cap multiplicador.

- **Columna *Reduced Cost***: aquesta columna solament s'interpreta en problemes lineals. En general, indica l'empitjorament de la funció objectiu per a cada unitat addicional que valguera la variable no bàsica corresponent. Alternativament, també indica quant hauria de millorar el coeficient de la variable no bàsica en la funció objectiu perquè el valor d'aquesta variable no fóra zero (o la fita en cas de variables fitades). Si el problema està en forma canònica, es pot equiparar al rendiment marginal (última fila de la taula del símplex) de les variables principals excepte el signe, que ha de ser negatiu en problemes de maximitzar i positiu, en problemes de minimitzar. Lògicament, les variables bàsiques tindran un *Reduced Cost* nul.

### *1.4.2. Òptim local - òptim global (cas no lineal)*

Quan es resol amb LINGO un problema no lineal, en cas que hi haja una solució òptima, aquesta serà un òptim local, en general. Una manera d'augmentar les possibilitats que l'òptim siga global és fent ús de l'opció de menú *SOLVER*, sub-opció *Options*, pestanya *General Solver* i activant la casella *Use Global Solver*. Açò farà que LINGO utilitze un *solver* que inclou un algoritme de cerca global de la solució.

En tot cas, l'única manera de garantir que l'òptim és global és comprovant les hipòtesis del teorema local global:

- funció objectiu còncava si es maximitza o convexa si es minimitza, i
- conjunt d'oportunitats convex.

En l'exemple 1 es verifiquen les hipòtesis del teorema local-global ja que:

- La funció objectiu és convexa (cas de minimitzar) perquè la matriu hessiana és $H = \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 4 \end{pmatrix}$, que és definida positiva perquè els menors conduents són estrictament positius:$H_1 = 2 > 0,\ H_{12} = 7{,}75 > 0$.
- El conjunt d'oportunitats és convex, ja que és la intersecció de tres semiespais (la primera restricció, que és una desigualtat lineal, i les dues condicions de no-negativitat) i un hiperplà (la segona restricció, que és una igualtat lineal), tots ells conjunts convexos.

En conseqüència, el mínim local que proporciona LINGO és també mínim global en l'exemple 1. Si alguna hipòtesi no es verificara, la conclusió seria que no es pot garantir que l'òptim siga global però tampoc que no ho siga.

Cal recordar que en el cas de problemes lineals, l'òptim que calcule LINGO, en cas d'existir, serà sempre òptim global ja que, com hem raonat en els apunts de teoria, els problemes lineals verifiquen sempre les hipòtesis del teorema local global.

### *1.4.3. Solució degenerada – no degenerada (cas lineal)*

En els apunts de teoria s'ha definit solució no degenerada com aquella en què totes les variables bàsiques són estrictament positives. Es tracta d'una definició referida al problema en forma estàndard, però quan es resol un problema amb ordinador no és habitual passar-lo a forma estàndard.

Per tant, deduir quines variables són bàsiques i no bàsiques en l'informe de solució de LINGO pot tenir una certa dificultat perquè no passem l'enunciat a forma estàndard. En concret, si l'enunciat del problema en LINGO té variables lliures o fitades, el raonament que s'utilitza teòricament en el mètode símplex per tal de distingir variables bàsiques i no bàsiques cal matisar-lo. A fi d'identificar correctament les variables no bàsiques s'ha de raonar en dos passos:

- Comptar quantes variables bàsiques hi ha (tantes com restriccions) i quantes no bàsiques (la resta, comptant les principals i les de marge associades a desigualtats).
- Quines són les bàsiques i quines les no bàsiques: comencem identificant les bàsiques de la manera següent:
    - Si la condició de domini de la variable és de no-negativitat (forma estàndard), és bàsica si assoleix un valor òptim estrictament major que zero.
    - Si la condició de domini és la de variable fitada, és bàsica si té un valor no igual que cap de les fites.
    - Si la condició de domini és la de variable lliure, sempre és bàsica.

  Si amb aquest raonament hem trobat totes les bàsiques, estem davant d'una solució no degenerada i la resta de variables són no bàsiques. Si en falta alguna, estem davant d'una solució degenerada (alguna variable bàsica val zero o és igual a una fita). A fi de trobar-la hem de veure quina de les variables aparentment no bàsiques (valor zero o igual a una fita) té valor zero en la segona columna (*Reduced Cost* o *Dual Price*, segons el cas) i aquesta serà la bàsica que falta. Així, les no bàsiques seran la resta.

### *1.4.4. Solució única – solució múltiple (cas lineal)*

En problemes lineals, pot ocórrer que la solució òptima del problema siga única (un vèrtex del conjunt d'oportunitats) o múltiple (una aresta, una cara, etc.). Per tal d'analitzar si la solució és única o no, com ja hem vist des d'una taula òptima del símplex en els apunts de teoria, cal fixar-se en els rendiments marginals (columnes *Reduced Cost* i *Dual Price*) de les variables no bàsiques: si algun valor és zero, la solució és múltiple i si tots són distints de zero, la solució és única.

La identificació de les no bàsiques segueix el raonament que s'ha explicat en l'epígraf 3.4.3.

**Problema 2.** En el problema lineal següent

$$\begin{aligned} Max. \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.a: \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

la solució òptima del qual amb LINGO és:

```
Variable      Value         Reduced Cost
X1          0.000000           1.000000
X2          4.000000           0.000000

Row     Slack or Surplus       Dual Price
1          8.000000            1.000000
2          0.000000            2.000000
3          2.000000            0.000000
```

Les variables bàsiques són dues, perquè hi ha dues restriccions, i són $x_2$ i $s_2$ ja que tenen un valor òptim distint de zero (variables amb condicions de domini de no-negativitat), raó per la qual la solució és no degenerada. Ara, observant les columnes *Reduced Cost* i *Dual Price* de les no bàsiques, $x_1$ i $s_1$, com que els valors són no nuls, la solució és única.

**Problema 3.** En canvi, en el problema amb variables fitades següent:

$$\begin{aligned} Màx. \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.a: \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 0 \leq x_1 \leq 5 \\ & 1 \leq x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

la solució òptima del qual amb LINGO és:

```
Variable        Value           Reduced Cost
X1          5.000000              -1.000000
X2          4.000000              -2.000000

Row     Slack or Surplus          Dual Price
1           13.00000              1.00000
2           3.000000              0.000000
```

L'única variable bàsica és $s_1$ (solament hi ha una restricció), mentre que $x_1$ i $x_2$ són no bàsiques perquè, encara que el valor d'aquestes variables no és zero, sí que és igual a una fita, en concret, les dues són iguals a la fita superior. Com que la variable bàsica $s_1$ no és zero, la solució és no degenerada i com que les columnes *Reduced Cost* i *Dual Price* de les no bàsiques $x_1$ i $x_2$ no tenen cap valor nul, la solució és única.

### *1.4.5. Anàlisi de sensibilitat (cas lineal)*

L'anàlisi de sensibilitat té com a objectiu calcular en quin rang o interval de valors pot situar-se un coeficient de la funció objectiu o un terme independent d'una restricció perquè la solució òptima canvie "de manera poc important". L'expressió "de manera poc important" vol dir, en el context del mètode símplex, que les variables bàsiques i no bàsiques siguen les mateixes (mateixa composició de la base), encara que canvie el valor d'aquestes variables bàsiques i/o de la funció objectiu.

Així doncs, si el valor original d'un paràmetre del problema canvia i se n'ix de l'interval de sensibilitat, la solució òptima sabem que canviarà de manera important ja que les variables bàsiques i no bàsiques seran unes altres. Però, si el canvi és tal que el valor del paràmetre roman dins de l'interval de sensibilitat, la solució òptima patirà solament canvis de poca importància que, pels coneixements teòrics que tenim, sabem que seran els següents segons el paràmetre concret de què es tracte:

- Canvis en un coeficient de la funció objectiu de variable no bàsica (dins de l'interval de sensibilitat): no canvia ni el valor de les variables bàsiques ni el valor de la funció objectiu.
- Canvis en un coeficient de la funció objectiu de variable bàsica (dins de l'interval de sensibilitat): no canvia el valor de les variables bàsiques però sí el valor de la funció objectiu.
- Canvis en un terme independent de les restriccions (dins de l'interval de sensibilitat): canvia el valor de les variables bàsiques i el valor de la funció objectiu.

En LINGO aquesta anàlisi es du a terme amb el menú *SOLVER*, opció *Range*. Però cal observar que el problema s'ha d'haver resolt amb l'opció de càlcul dels rangs de sensibilitat activada. Com que aquesta opció no està activada per defecte i l'anàlisi de sensibilitat és una eina interessant en la interpretació econòmica dels problemes d'optimització, és convenient activar-la per defecte i tenir-la sempre al nostre abast. La manera d'activar-la per defecte és amb la seqüència: menú *SOLVER*, opció *Options*, pestanya *General Solver*, desplegar el menú *Dual Computations*, seleccionar *Prices & Ranges* i botó *Save*.

Si no es prem el botó *Save*, l'anàlisi de sensibilitat estarà activa únicament en la sessió actual de LINGO. Amb el botó *Save*, en canvi, tot problema que es resolga en sessions posteriors també tindrà activada aquesta anàlisi, ja que passarà a ser l'opció per defecte. No obstant això, aquesta opció activada pot generar algun inconvenient en problemes no lineals, de manera que si apareix algun missatge en aquest sentit, caldrà desactivar l'anàlisi de sensibilitat.

Una vegada resolt el problema d'optimització amb aquesta opció activada, l'anàlisi de sensibilitat es mostra amb el menú *SOLVER*, opció *Range*; des de la finestra del model, no des de la de l'informe de solució.

L'anàlisi de sensibilitat apareix en una finestra nova anomenada *Range Report*, que es pot guardar en un arxiu per separat amb l'extensió .lgr. La manera de construir l'interval de sensibilitat dels coeficients de la funció objectiu i dels termes independents de les restriccions és aplicant els augments (Allowable Increase) i disminucions (Allowable Decrease) permeses sobre el valor original del coeficient (Current Coefficient) o del terme independent (Current RHS).

En el problema de l'exemple 2, l'anàlisi de sensibilitat amb LINGO origina la pantalla següent:

```
Objective Coefficient Ranges:

Current          Allowable        Allowable
Variable  Coefficient        Increase          Decrease
X1         1.000000          1.000000          INFINITY
X2         2.000000          INFINITY          1.000000

Righthand Side Ranges:

Current          Allowable        Allowable
Row              RHS          Increase          Decrease
2          4.000000          2.000000          4.000000
3          6.000000          INFINITY          2.000000
```

Sumant els augments (columna *Allowable Increase*) i restant les disminucions (columna *Allowable Decrease*) al valor original (columna *Current Coefficient* o *Current RHS*) es dedueix que l'interval de sensibilitat del primer coeficient de la funció objectiu és ]1-∞, 1+1]=]-∞, 2], el del segon coeficient de la funció objectiu és [2-1, 2+∞[=[1, +∞[, el del terme independent de la primera restricció és [4-4, 4+2] = [0, 6] i el del terme independent de la segona restricció és [6-2, 6+∞] = [4, +∞[.

La interpretació matemàtica és:

- Si el coeficient de la primera variable en la funció objectiu (coeficient de variable no bàsica) canvia entre -∞ i 2, la solució òptima seguirà tenint les mateixes variables bàsiques i no bàsiques amb els mateixos valors òptims de les variables bàsiques i el mateix valor òptim de la funció objectiu.
- Si el coeficient de la segona variable en la funció objectiu (coeficient de variable bàsica) canvia entre 1 i +∞, la solució òptima seguirà tenint les mateixes variables bàsiques i no bàsiques amb els mateixos valors òptims de les variables bàsiques encara que amb un valor òptim distint de la funció objectiu.
- Si el primer terme independent canvia entre 0 i 6 o el segon terme independent entre 4 i +∞, la solució òptima seguirà tenint les mateixes variables bàsiques i no bàsiques però amb valors òptims distints de les variables bàsiques i amb un valor òptim de la funció objectiu també distint.

La interpretació econòmica d'aquests intervals depèn de l'enunciat econòmic del problema. En cada aplicació econòmica la frase "la solució òptima continuarà tenint les mateixes variables bàsiques i no bàsiques" té un significat econòmic propi. Per exemple, en un problema de producció de quantitats de distints productes amb restriccions de recursos limitats vol dir que "l'estratègia òptima de producció continuarà consistint en produir els mateixos productes que abans es produïen i en no produir els que abans no es produïen, mentre que seguirem esgotant els mateixos recursos que abans també s'esgotaven". No vol dir necessàriament que la quantitat produïda o la quantitat de recurs que queda sense utilitzar siga la mateixa que abans o que els beneficis òptims siguen els mateixos, això depèn del paràmetre concret que s'estiga analitzant.

### *1.4.6. Programació lineal entera*

El tractament de problemes enters, tant si són lineals com no lineals, s'especifica mitjançant les funcions @GIN per a variables enteres i @BIN per a variables binàries. Automàticament, LINGO ja detecta que el problema és enter i aplica els mètodes de resolució corresponents.

La solució obtinguda, en cas que n'hi haja, serà global encara que no es podrà analitzar si es única o no, ja que no té sentit interpretar la columna *Reduced Cost* o *Dual Price* com abans. Tampoc no és possible fer una anàlisi de sensibilitat. Per tant, les úniques parts de l'informe de la solució que es poden interpretar són el valor de les variables principals (columna *Value*) i les de marge i funció objectiu (columna *Slack or Surplus*).

## 1.5. Sintaxi avançada de LINGO

### *1.5.1. Secció SETS (conjunts)*

LINGO admet una sintaxi avançada per tal d'introduir problemes de programació matemàtica amb una estructura especial, com realment passa en moltes aplicacions econòmiques. Amb aquesta sintaxi avançada es poden escriure, per exemple, sumatoris i expressions que es repeteixen per a distints elements d'un conjunt. Per a entendre la sintaxi avançada cal saber com s'utilitzen índex en les expressions matemàtiques.

L'ús de la sintaxi avançada comença definint conjunts dins de la secció *SETS*. Aquesta secció es defineix entre les paraules claus *SETS:* i *ENDSETS*. Entre aquestes dues paraules claus han d'aparèixer definits els conjunts que després s'utilitzaran. Els conjunts poden ser d'una dimensió (vectors) o de dues dimensions (matrius), encara que podrien ser de major dimensió. La forma de definir-los és:

- Conjunts d'una dimensió:

  NomConjunt/1..*n*/:*car1*,*car2*,etc.;

  D'aquesta manera es defineix un conjunt de *n* elements. En compte de 1..*n* també es poden escriure els noms dels elements del conjunt separats per comes. Car1, car2, etc. representa cada característica o atribut per a cada element del conjunt. Exemples:

  - Conjunt de 14 productes, cadascun amb un preu (*p*) i una quantitat produïda (*x*):

    SETS:
    Productes/1..14/:*p*, *x*;
    ENDSETS

  - Conjunt de 5 recursos productius, cadascun amb una disponibilitat màxima (*d*):

SETS:
Recursos/A, C, HM, HTQ, HTnQ/:*d*;
ENDSETS

No obstant, si dins d'alguna expressió matemàtica del model es vol fer referència a un element concret del conjunt s'ha d'utilitzar el nombre de l'índex, no el nom, entre parèntesi. Així $d(1)$ és la disponibilitat màxima del recurs A.

- Conjunts de dues (o més dimensions):

NomConjunt(conjunt1,conjunt2):*car1*,*car2*,etc.;

El conjunt de dues dimensions es crea a partir de conjunts d'una dimensió (conjunt1 i conjunt2). Exemples:

  - En un problema de producció amb recursos limitats farà falta un conjunt de dues dimensions (nom *Matriutecnica*) per a expressar la quantitat (*a*) de cada un dels recursos per a produir una unitat de cada un dels productes:

SETS:
Productes/1..14/:*p*, *x*;
Recursos/A, C, HM, HTQ, HTnQ/:*d*;
Matriutecnica(Recursos,Productes):*a*;
ENDSETS

  - En un problema de transport s'ha de definir un conjunt de dues dimensions (nom *Xarxa*) per a expressar els costos unitaris de transport (*c*) i les quantitats transportades (*x*) entre cada un dels centres de producció o origen (on hi hauran unes existències del producte, *q*) i cada un dels centres de demanda o destinació (que tindran unes demandes mínimes del producte, *d*):

SETS:
Origen/1..8/:*q*;
Destinacio/1..5/:*d*;
Xarxa(Origen,Destinacio):*c*,*x*;
ENDSETS

### *1.5.2. Funcions @SUM i @FOR*

Una vegada definits els conjunts ja es poden utilitzar en les distintes línies que formen el model de programació matemàtica. Les dues funcions més habituals que utilitzen conjunts són @SUM i @FOR. Aquestes funcions es poden utilitzar per separat o, en els casos més avançats, conjuntament (una funció @SUM dins d'una funció @FOR).

***Funció @SUM***

Equival a la notació matemàtica de sumatori. L'equivalència de notació matemàtica i sintaxi en LINGO és:

$expressió_1 + \cdots + expressió_n = \sum_{i=1}^{n} expressió_i \;\Rightarrow$ @SUM(Conjunt: *expressio*)

Exemples:

- $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n \;\Rightarrow$ @SUM(Productes: *x*)
- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \;\Rightarrow$ @SUM(Productes: *p***x*)
- $\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 = (y_1 - z_1)^2 + \cdots + (y_n - z_n)^2 \;\Rightarrow$ @SUM(Obs: (*y*-*z*)^2)

Si no hi ha ambigüitat, no cal incloure un índex en la sintaxi de Lingo, però en ocasions serà necessari especificar-lo per a evitar confusions. Per exemple, el segon dels sumatoris anteriors es podria escriure també @SUM(Productes(*i*): *p*(*i*)**x*(*i*)).

Amb @SUM també es poden expressar dobles sumatoris en notació matemàtica, sempre que abans s'haja definit el conjunt de dues dimensions corresponent:

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} = c_{11} x_{11} + \cdots + c_{nm} x_{nm} \;\Rightarrow$ @SUM(Xarxa: *c***x*)

El sumatori o doble sumatori formarà part d'alguna de les expressions del model (restricció o funció objectiu), que hauran d'acabar amb punt i coma. Exemples:

- Minimitzar el cost total de transport de cada origen a cada destinació:

  $Min.\; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \;\Rightarrow$ Min=@SUM(Xarxa: *c***x*);

- Restricció de producció total mínima:

  $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 500 \;\Rightarrow$ @SUM(Productes: *x*)>500;

***Funció @FOR***

Equival a la notació matemàtica ∀ (per a tot element del conjunt). Serveix per a aplicar una expressió matemàtica a cada element d'un conjunt. Així, si les 20 variables d'un model han de ser enteres no cal especificar-lo amb una línia per a cada variable, serà suficient amb una línia amb una funció @FOR. L'equivalència de notació matemàtica i sintaxi de Lingo és:

$expressió_i,\; \forall i = 1, \ldots, n \;\Rightarrow$ @FOR(Conjunt: *expressio*);

Exemples:

- $x_i \in \mathbb{Z},\; \forall i = 1, \ldots, n \;\Rightarrow$ @FOR(Productes: @GIN(*x*));

- $x_i \geq z, \forall i = 1, \dots, n \;\; \Rightarrow$ @FOR(Productes: *x*>*z*);

Si es vol donar nom a les línies generades per una expressió @FOR, que seran tantes com elements tinga el conjunt, s'ha d'escriure entre claudàtors abans de l'expressió. En el segon dels exemples anteriors quedaria:

@FOR(Productes: [Demanda] *x*>*z*);

I això generaria noms de línia que apareixeran en l'informe de solució com Demanda(1), ..., Demanda(*n*).

***Funció @SUM dins d'una funció @FOR***

Aquesta possibilitat és una de les més utilitzades en programació lineal. Permet, amb una única línia, expressar totes les restriccions que tenen una mateixa estructura. Per exemple, en el problema de producció amb recursos limitats, les restriccions expressen que cada recurs utilitzat (suma de productes dels coeficients tècnics per les variables) és menor o igual que la quantitat disponible i això per a cada recurs. D'aquesta manera tot el conjunt de restriccions de limitació de recursos s'escriurà amb una única línia:

$$Ax \leq b \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

⇒ @FOR ( Recursos(*i*): @SUM ( Productes(*j*) : *a*(*i*,*j*)**x*(*j*) ) < *b*(*i*) );

En aquest cas és necessari utilitzar els índex *i* i *j* per tal d'evitar confusions. Tant *Recursos* com *Productes* són conjunts d'una dimensió, mentre que s'ha d'haver definit un conjunt de dues dimensions a partir dels anteriors amb els coeficients tècnics ($a_{ij}$) com a característica.

Un altre exemple és el problema de transport. Si en cada origen hi ha unes existències màximes de producte:

$$\begin{matrix} x_{11} + \cdots + x_{1n} \leq q_1 \\ \vdots \\ x_{m1} + \cdots + x_{mn} \leq q_m \end{matrix}$$

⇒ @FOR ( Origen(*i*): @SUM ( Destinacio(*j*) : *x*(*i*,*j*) ) < *q*(*i*) );

I si en cada destinació hi ha unes demandes mínimes que s'han de cobrir:

$$\begin{matrix} x_{11} + \cdots + x_{m1} \geq d_1 \\ \vdots \\ x_{1n} + \cdots + x_{mn} \geq d_n \end{matrix}$$

⇒ @FOR ( Destinacio(*j*): @SUM ( Origen(*i*) : *x*(*i*,*j*) ) > *d*(*j*) );

En resum, el problema típic de programació lineal tindria les quatre sintaxis següents:

Sintaxi matricial:

$$\begin{array}{ll} Max. & c^t x \\ s.a: & \begin{array}{c} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{array} \end{array}$$

Sintaxi extensa:

$$\begin{array}{ll} Max. & c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \\ s.a: & \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \end{array} \end{array}$$

Sintaxi amb índex:

$$\begin{array}{ll} Max. & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.a: & \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j \ , \quad \forall j = 1, \dots, m \\ x_i \ge 0, \qquad \forall i = 1, \dots, n \end{array} \end{array}$$

Sintaxi amb LINGO:

⇒
```
SETS:
    Productes/1..n/c, x;
    Recursos/1..m/b;
    Matriu(Recursos,Productes):a;
ENDSETS
!Funció objectiu;
    [Benefici] @SUM(Productes: c*x);
!Restriccions;
    @FOR (Recursos(j): @SUM(Productes(i) : a(j,i)*x(i) ) < b(j) );
!Condicions de domini: no calen si està activada l'opció de no
negativitat per defecte;
```

### *1.5.3. Secció DATA (dades)*

L'última part de la sintaxi avançada de Lingo és la secció on s'incorporen les dades dels coeficients de la funció objectiu, dels coeficients tècnics i dels termes independents de les restriccions que s'han definit en la secció SETS. Aquesta part comença amb la paraula clau DATA: i acaba amb ENDDATA. Entre aquestes paraules van les línies amb els valors dels paràmetres. Si el paràmetre és d'una dimensió, les dades s'introdueixen en una sola línia separades per un espai en blanc i si és de dues dimensions és més clar si s'utilitza una estructura de varies línies i columnes. En l'exemple anterior, amb *i*=6 productes i *j*=4 recursos, podria quedar:

```
DATA:
c = 3   4  5.5   6  3  5;
b = 240   450  340   720;
a = 1.5    2     4     3     4.5    3
      3    5     2     3     5      4
      2.5  3     6     2     3      7
      2    1     4.5   2     4      5;
ENDDATA
```

Cal anar en compte especialment en les dades dels paràmetres associats a conjunts de dues dimensions. Observeu que el conjunt *Matriu* s'ha definit amb (Recursos, Productes), per això ha de tindre 4 files (tantes com recursos) i 6 columnes (tantes com productes).

***Funció @OLE***

Les dades del problema no caldria escriure-les a mà si les tenim en un arxiu d'Excel (amb un únic full de càlcul). Les dades en Excel han d'ocupar un rang de cel·les i li hem de donar un nom (amb el menú *Fórmulas, Asignar nombre*). Després en Lingo, dins de la secció DATA, s'ha d'utilitzar la funció @OLE. Si hi ha un únic full d'Excel obert i el nom del paràmetre coincideix amb el nom del rang, hi ha prou amb la següent sintaxi:

```
DATA:
   d = @OLE();
ENDDATA
```

Però si hi ha més d'un full de càlcul obert o els noms dels paràmetres no són iguals als noms dels rangs en Excel cal especificar tota la ruta de l'arxiu i els noms dels rangs. Exemple:

```
DATA:
   d = @OLE(C:\Documents and Settings\Meneu\Escritorio\Dades.xls, dem );
ENDDATA
```

La funció @OLE també serveix per a exportar la solució de LINGO a un full de càlcul. La diferència respecte a la importació és que el nom de la variable va al segon membre de la igualtat i la funció @OLE al primer. Exemple si sols hi ha un full de càlcul i el nom de la variable és igual al nom del rang:

```
DATA:
    @OLE = x;
ENDDATA
```

Exemple indicant la ruta completa i el nom del rang:

```
DATA:
    @OLE(C:\Documents and Settings\Meneu\Escritorio\Dades.xls, produccio ) = x;
ENDDATA
```

### *1.5.4. Exemples*

**Programació no lineal: recta de regressió.**

**Problema 4.** Es vol analitzar si hi ha relació entre la inseguretat ciutadana i el nivell de renda. Es disposa de dades per comunitats autònomes en 2010 segons l'INE:

| | Y=Detencions per 1.000 habitants | X=Renda per càpita |
|---|---|---|
| ANDALUCÍA | 8,45 | 17428 |
| ARAGÓN | 7,19 | 25322 |
| ASTURIAS | 6,62 | 21477 |
| BALEARS | 9,17 | 24111 |
| CANARIAS | 9,03 | 19281 |
| CANTABRIA | 7,1 | 22309 |
| CASTILLA Y LEÓN | 5,76 | 22355 |
| CASTILLA - LA MANCHA | 7,85 | 18338 |
| CATALUÑA | 6,6 | 26675 |
| COMUNITAT VALENCIANA | 9,54 | 20260 |
| EXTREMADURA | 6,02 | 16014 |
| GALICIA | 4,26 | 20709 |
| MADRID | 8,88 | 29351 |
| MURCIA | 8,97 | 19073 |
| NAVARRA | 5,2 | 29197 |
| PAÍS VASCO | 3,87 | 30152 |
| RIOJA | 7,13 | 25328 |

La regressió lineal per mínims quadràtics ordinaris ens dirà si la relació és positiva o negativa

Modelització:

- Identificació de variables:

$y_i^*$: Valors estimats de la variable dependent $i$=1,...,17 (en persones detingudes per 1.000 habitants)

$a$: constant de la regressió lineal.

$b$: coeficient o pendent de la regressió lineal.

Les dades del problema són els valors observats de la variable dependent ($y$) i independent ($x$).

- Funció objectiu:

  $Q$: funció de desviacions quadràtiques (en persones al quadrat).

  Direcció d'optimització: minimitzar

  Forma funcional: $Q = \sum_{i=1}^{17}(y_i^* - y_i)^2$

- Restriccions:

Relació entre els valors estimats de la variable dependent i els valors de la variable independent: $y_i^* = a + bx_i, \;\; i = 1, \dots, 17$

- Condicions de domini: no hi ha.
- Plantejament matemàtic del problema:

$$\begin{array}{ll} Min. & \sum_{i=1}^{17}(y_i^* - y_i)^2 \\ s.a: & y_i^* = a + bx_i, \;\; i = 1, \dots, 17 \end{array}$$

Model i solució amb LINGO:

```
!Exemple 4:
Anàlisi de la relació entre inseguretat ciutadana i renda;
SETS:
CCAA/1..17/:X,Y,Yobs;
ENDSETS

DATA:
Yobs=8.45 7.19 6.62 9.17 9.03 7.1 5.76 7.85 6.6 9.54 6.02 4.26 8.88
8.97 5.2 3.87 7.13;
X=17428 25322 21477 24111 19281 22309 22355 18338 26675 20260 16014
20709 29351 19073 29197 30152 25328;
ENDDATA

!Funció objecitu;
Min=@sum(CCAA(i): (Y-Yobs)^2);

!Restriccions;
@for(CCAA(i): Y=a+b*X);

!Condicions de domini: no hi ha. El model s'ha resolt sense activar
l'opció Variables assumed non-negatives;
```

```
      Solució per a les variables rellevants:

                   Variable           Value          Reduced Cost
                        A         10.11883            0.000000
                        B       -0.1300533E-03        0.000000

                        Row     Slack or Surplus      Dual Price
               DESVIACIONS        43.42249           -1.000000
```

Interpretació i anàlisi: La pendent de la recta de regressió és b = -0,00013. Un valor negatiu indica una relació inversa entre inseguretat ciutadana i renda per càpita. A major renda per càpita menor inseguretat. L'anàlisi estadística s'hauria de completar amb el càlcul del coeficient $R^2$ per a veure si aquesta relació és molt o poc significativa i amb el càlcul dels estadístics $t$ de la constant i el coeficient.

### Programació lineal: problema de transport

**Problema 5.** Una cooperativa agrícola disposa de dos magatzems de taronja a Pego i Vinaròs que transporta a tres capitals de província: Madrid, Barcelona i Saragossa. Els costos unitaris de transport, euros per tona, la demanda setmanal de cada ciutat i la producció màxima setmanal en cada magatzem estan en la taula següent:

| | Madrid | Barcelona | Saragossa | Producció (Tm.) |
|---|---|---|---|---|
| **Pego** | 40 | 60 | 70 | 550 |
| **Vinaròs** | 90 | 40 | 50 | 350 |
| **Demanda (Tm.)** | 400 | 300 | 100 | |

S'ha de determinar quant de producte cal transportar de cada magatzem a cada ciutat per minimitzar costos de transport setmanals.

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables

  $x_{ij}$ és la quantitat de taronges (en tones) que es transporten del magatzem $i$ a la ciutat $j$ (l'ordre dels subíndex és el mateix que el de la taula).

- Funció objectiu

  C: cost total del transport (en euros)

  Direcció: minimització

  Forma funcional: $C = 40x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 90x_{21} + 40x_{22} + 50x_{23}$

- Restriccions
  - Bloc de restriccions de demanda mínima en cada ciutat:
$$x_{11} + x_{21} \geq 400$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 300$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 100$$
  - Bloc de restriccions de capacitat màxima en cada magatzem:
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 550$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 350$$

- Condicions de domini (no-negativitat perquè són quantitats transportades).
$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i = 1,2; \;\; \forall j = 1,2,3$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$
\begin{array}{ll}
Min. & 40x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+90x_{21}+40x_{22}+50x_{23} \\
s.a: & x_{11}+x_{21}\geq 400 \\
 & x_{12}+x_{22}\geq 300 \\
 & x_{13}+x_{23}\geq 100 \\
 & x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 550 \\
 & x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 350 \\
 & x_{ij}\geq 0, \quad \forall i=1,2;\ \forall j=1,2,3
\end{array}
$$

Model amb sintaxi avançada i solució amb LINGO:

```
!Exemple 5: transport;

sets:
ciutats/Madrid,Barcelona,Saragossa/:demanda;
magatzems/Pego,Vinaros/:produccio;
matriu(magatzems,ciutats):cost,x;
end sets

data:
demanda= 400 300 100;
produccio = 550 350;
cost = 40 60 70
    90 40 50;
end data

!Funció objectiu;
min=@sum(matriu:cost*x);

!Restriccions;
!No pot arribar menys producte del que es demanda;

@for(ciutats(j):[desti]
        @sum(magatzems(i):x(i,j))>demanda(j));
!No pot eixir més producte del que tenim;
@for(magatzems(i):[origen]
        @sum(ciutats(j):x(i,j))<produccio(i));

                Variable           Value         Reduced Cost
        X( PEGO, MADRID)        400.0000            0.000000
     X( PEGO, BARCELONA)        50.00000            0.000000
     X( PEGO, SARAGOSSA)        0.000000            0.000000
     X( VINAROS, MADRID)        0.000000            70.00000
  X( VINAROS, BARCELONA)        250.0000            0.000000
  X( VINAROS, SARAGOSSA)        100.0000            0.000000

                     Row    Slack or Surplus     Dual Price
                       1        34000.00          -1.000000
          DESTI( MADRID)        0.000000          -40.00000
       DESTI( BARCELONA)        0.000000          -60.00000
       DESTI( SARAGOSSA)        0.000000          -70.00000
           ORIGEN( PEGO)        100.0000           0.000000
        ORIGEN( VINAROS)        0.000000           20.00000
```

Interpretació i anàlisi:

Les 400 tones que van a Madrid s’envien des de Pego, les 300 tones de Barcelona són 50 des de Pego i 250 de Vinaròs i a Saragossa arriben 100 tones de Vinaròs. Al magatzem de Pego s'han d'enviar 100 tones menys que la capacitat màxima. El cost total del transport és de 34.000 € setmanals. Matemàticament, s'observa que la solució és múltiple (enviament de Pego a Saragossa és no bàsica i amb un rendiment marginal, *Reduced Cost*, igual a zero), la qual cosa suggereix que la solució no és única, és a dir, hi ha unes altres alternatives de transport amb el mateix cost mínim.

Pel que fa als multiplicadors, els tres primers són positius, $\lambda_3$=40, $\lambda_4$=60 i $\lambda_5$=70 i indiquen, respectivament, l'augment en els costos mínims del transport que es produiria si cada ciutat incrementa una tona la demanda mínima. Els de cada magatzem són $\lambda_4$=0 i $\lambda_5$=-20: augments en la capacitat del magatzem de Pego no impliquen variacions de cost, però 1 tona addicional de capacitat en el magatzem de Vinaròs permetria reduir els costos 20 €.

# PART 2. MODELITZACIÓ DE PROBLEMES I APLICACIONS ECONÒMIQUES MÉS IMPORTANTS

## 2.1. Modelització de problemes d'optimització matemàtica

La modelització d'un problema d'optimització significa passar d'un enunciat econòmic a un enunciat matemàtic. Aquest procés és habitualment molt complex ja que en Economia intervenen una gran quantitat de variables i de restriccions, i cal seleccionar-ne les més rellevants. En general, la modelització definitiva d'un problema solament s'aconsegueix després de repetits intents en els quals la solució del problema no ha resultat satisfactòria i analitzant-ne els motius s'arriba a la conclusió que falten o sobren variables o restriccions. En aquest curs, els enunciats econòmics ja incorporaran simplificacions, motiu pel qual el procés de modelització serà més simple.

La modelització és un procés molt intuïtiu. No es tracta d'aprendre cap regla automàtica com passa amb uns altres aspectes de l'assignatura. No obstant això, sí que es poden distingir quatre parts en el procés de modelització d'un problema d'optimització: identificar las variables, plantejar la funció objectiu, identificar i plantejar les restriccions, i escriure les condicions de domini. En cada part, caldrà tenir en compte algunes observacions generals i evitar errors comuns.

### *2.1.1. Identificar les variables principals o de decisió*

Les variables principals del problema són aquelles sobre les quals el subjecte decisor pot influir de manera directa: quantes unitats produir de cada producte, quantes unitats s'han de consumir de cada bé, quants diners s'han d'invertir en cada actiu, prendre o no prendre una decisió determinada (construir una autovia, comprar una casa, etc.), etc.

Cal distingir les variables principals d'unes altres variables de tipus endogen, que són les que s'obtenen com a conseqüència de les primeres: nivell d'utilitat d'un consumidor, renda que es gasta en consumir, nivell de risc d'una inversió, quantitat de cada recurs utilitzat en la producció, etc. El subjecte no pot prendre una decisió directa sobre aquestes variables.

Les variables de decisió s'han d'identificar al començament de la modelització assignant un nom de variable amb lletres i, si és el cas, subíndexs numèrics. Per exemple $x$, $y$, $z$, $x_1$, $x_2$, $x_{13}$, ...; encara que també es poden utilitzar noms associats al significat econòmic de la variable. A continuació, cal afegir què representa cada variable en el context econòmic del problema i en quines unitats de mesura estarà expressada. Per exemple, en un problema d'inversió una identificació correcta i una incorrecta d'una variable és:

$x_1$: quantitat invertida en l'actiu de renda fixa (en milers d'euros) → correcta

$x_1$: renda fixa → incorrecta

### *2.1.2. Identificar i plantejar la funció objectiu*

La magnitud que el problema indique que s'ha de maximitzar o minimitzar és la funció objectiu. És una expressió matemàtica que combina nombres, variables de decisió i operadors matemàtics. Aquesta magnitud cal identificar-la, dir si es maximitza o minimitza, indicar-ne les unitats de mesura i, sobretot, plantejar l'expressió matemàtica o forma funcional. De vegades es construirà a partir d'unes altres funcions intermèdies. Per exemple, els beneficis són ingressos menys costos; els ingressos són preus de venda per unitats venudes; els costos totals són els fixes més els variables; els costos variables són els costos unitaris pel nombre d'unitats, etc.

### *2.1.3. Identificar i plantejar les restriccions*

Tot allò que implique una limitació per al valor de les variables principals s'ha d'expressar en forma de restricció o de condició de domini. Si la limitació afecta més d'una variable de decisió, tindrà forma de restricció i si afecta una única variable, serà normalment una condició de domini (de no negativitat o fites).

Les restriccions poden estar originades per multitud de situacions: limitacions de recursos, limitacions pressupostàries, motius tecnològics, condicions de demanda, etc.

Les restriccions estan formades per dos membres i per un operador de comparació ($\geq$, $\leq$ ó $=$) que els relaciona. Habitualment, el primer membre d'una restricció és una funció matemàtica que depèn de les variables de decisió, mentre que el segon membre és un nombre. Per exemple, la restricció pressupostària del problema del consumidor indica que el pressupost gastat en el consum dels béns (primer membre: depèn de les variables principals ja que és igual als preus de cada bé per les quantitats consumides) ha de ser menor o igual (operador de comparació) que el pressupost disponible (segon membre: és un valor numèric conegut).

Els dos membres d'una restricció han d'estar expressats en la mateixa unitat de mesura. Per tant, cal fer les transformacions adequades si les dades del problema no estan referides a unitats homogènies.

Si un problema es vol resoldre amb ordinador, pot aparèixer un possible problema d'escala en les xifres quan es planteja la funció objectiu, les restriccions o les fites. Això passa quan hi ha molta diferència de magnitud entre unes xifres i unes altres en l'enunciat. Açò és una dificultat per a la resolució del problema amb ordinador ja que la velocitat i exactitud de la solució numèrica que proporcione l'ordinador serà major si no hi ha molta diferència de magnitud en les xifres. Aquest inconvenient es resol redefinint les variables o les xifres amb un canvi d'escala. Per exemple, si en una restricció es combinen tipus d'interès del 2% i del 5% (ordre d'escala de $10^{-2}$) i un ingrés mínim per interessos d'un milió d'euros (ordre d'escala de $10^{6}$), si les variables (quantitats invertides en dos actius) estan expressades en euros quedaria, $0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 \geq 1000000$; però si les expressem en milions d'euros, reduirem la diferència d'escala entre les xifres que representen els tipus d'interès i la xifra que representa el capital: $0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 \geq 1$.

### *2.1.4. Condicions de domini*

Ací s'especificaran, si n'hi ha, les condicions de no-negativitat, les variables fitades i les variables que, per la interpretació econòmica que tenen, siguen enteres o binàries. Exemples de les condicions de domini principals són:

$$\begin{array}{ccc} x \geq 0 & \rightarrow & \text{variable no negativa} \\ 5 \leq x \leq 20 & \rightarrow & \text{variable fitada} \\ x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{N} & \rightarrow & \text{variable entera} \\ x \in \{0,1\} & \rightarrow & \text{variable binària} \end{array}$$

En cas de variables lliures no caldrà escriure res en el paper (recordeu que en Lingo seria al contrari si està activada l'opció *Variables assumed non-negatives*: no escriure res si són no negatives i escriure @FREE si són lliures). Les variables no negatives són les habituals en aplicacions econòmiques: quantitats consumides, quantitats produïdes, quantitats invertides, etc. Les variables fitades s'utilitzaran quan en el problema apareguen condicions de demanda o de capacitat productiva que afecten una única variable.

Encara que moltes vegades les variables del problema hagen de ser enteres pel significat econòmic que tenen, com que la resolució d'un problema amb variables enteres mitjançant l'ordinador és més lenta i no permet fer anàlisi de sensibilitat, de vegades resultarà convenient considerar que les variables no són enteres i obtenir la solució entera arredonint la solució del problema no enter. Açò, no obstant això, ha de ser correctament valorat pel subjecte decisor en funció de les característiques concretes del problema.

D'altra banda, les variables binàries són un tipus especial de variables que solament poden prendre valor 0 o 1 i que van lligades a decisions: executar o no executar un projecte, assignar un treballador a un lloc de treball o no assignar-l'hi, etc.

Encara que es poden plantejar infinits tipus de problemes d'optimització, en Economia és habitual que un problema tinga una estructura semblant a la d'algun dels problemes considerats com a bàsics. Per tant, convé estudiar les aplicacions econòmiques més habituals ja que molts problemes responen al mateix esquema o són variants d'algun d'aquests models més típics.

## 2.2. Aplicacions econòmiques més importants de la programació no lineal

### *2.2.1. Problema (de maximitzar la utilitat) del consumidor*

Aquest problema és el que origina tota la teoria de la demanda. Es tracta de determinar la combinació de consums de cada bé que fa màxima la utilitat del consumidor (funció *U*) tenint en compte la limitació pressupostària imposada per la renda disponible del consumidor (*M*). En el cas més bàsic de dos únics béns, el problema és el següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & U(x,y) \\ s.a: & p_x x + p_y y \leq M \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

La funció d'utilitat pot ser diversa, però per a ser compatible amb el supòsit habitual de comportament racional del consumidor ha de tenir derivades parcials estrictament positives (es prefereix més consum a menys) i ser còncava (es prefereix una mescla de béns que especialitzar-se en el consum d'un d'aquests). Amb aquests supòsits, el problema compleix el teorema local-global i el màxim local que proporcione l'ordinador és també el màxim global.

El problema pot tenir variants en cas d'exigències de consums mínims de subsistència, consums màxims de saturació, proporcions fixes en el consum dels béns, etc.

**Problema 1.** Un consumidor pot triar entre dos béns que tenen un preu de 5 i de 9 euros, respectivament. Disposa d'una renda de 450 euros que ha de gastar enterament entre tots dos béns. La funció d'utilitat és $U(x,y) = 20x^{0,4}y^{0,6}$, on *x* són les unitats consumides del primer bé i *y* les del segon. S'han de calcular les quantitats consumides a fi de maximitzar la utilitat.

Modelització:

- Identificació de variables:
  *x*: quantitat consumida del primer bé (en unitats)
  *y*: quantitat consumida del segon bé (en unitats)
- Funció objectiu:
  *U*: funció d'utilitat (en unitats d'utilitat).
  Direcció d'optimització: maximitzar
  Forma funcional: $U(x,y) = 20x^{0,4}y^{0,6}$
- Restriccions:
  Pressupost limitat: $5x + 9y \leq 450$
- Condicions de domini:
  No-negativitat: $x \geq 0,\ y \geq 0$
- Plantejament matemàtic del problema:

$$\begin{array}{ll} Max. & 20x^{0,4}y^{0,6} \\ s.a: & 5x + 9y \leq 450 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

Model i solució amb LINGO:

```
!Problema 1: problema del consumidor;
!Funció objectiu;
[Utilitat] Max=20*x^0.4*y^0.6;

!Restricció pressupostària;
[Renda_disponible] 5*x+9*y<450;
                       Variable           Value        Reduced Cost
                              X        36.00000            0.000000
                              Y        30.00000            0.000000
```

```
                Row     Slack or Surplus       Dual Price
           UTILITAT         645.3923             1.000000
   RENTA_DISPONIBLE         0.000000             1.434205
```

Interpretació i anàlisi: El vector òptim de consum és (36, 30). Consumirà 36 unitats del primer bé i 30 del segon. La utilitat màxima és de 645,3923 unitats d'utilitat. La variable de marge és zero i això vol dir que es gasta tot el pressupost comprant ambdós béns. El multiplicador de Kuhn i Tucker és 1,4342 i la interpretació és que per cada euro addicional de renda la utilitat màxima augmentarà 1,4342 unitats d'utilitat aproximadament. El màxim és global: funció objectiu còncava, perquè és del tipus Cobb-Douglass amb suma d'exponents menor o igual a 1, i el conjunt d'oportunitats és convex perquè és la intersecció de tres semiespais.

### *2.2.2. Problema (de minimitzar els costos) de l'empresa*

Aquest problema és el que origina tota la teoria de l'oferta. Es tracta de determinar en quines quantitats s'han d'utilitzar els factors productius per minimitzar els costos de l'empresa tenint en compte l'obtenció d'un nivell mínim de producció ($Q$). En el cas més bàsic de dos únics factors productius, capital ($K$) i treball ($L$), i si anomenem $F$ la funció de producció, el problema és:

$$\begin{array}{ll} Min. & p_K K + p_L L \\ s.a: & F(K,L) \geq Q \\ & K \geq 0, \qquad L \geq 0 \end{array}$$

La funció de producció $F$ ha de complir certes condicions de coherència econòmica, com ara tenir derivades de primer ordre positives (més factor productiu implica més producció) i de segon ordre negatives (quantitats addicionals de factor productiu fan augmentar cada vegada menys la producció). Les funcions còncaves compleixen aquesta segona condició, motiu pel qual les funcions de producció habituals són còncaves. Això provoca que el problema de l'empresa verifique el teorema local-global i, en conseqüència, el mínim local obtingut amb l'ordinador serà també mínim global.

Les principals variants d'aquest problema apareixen en cas que hi haja limitacions en els factors productius.

**Problema 2.** Una empresa en competència es planteja minimitzar els costos de producció. Els costos unitaris dels dos factors que utilitza (capital -$K$- i treball -$L$-) són de 4 i 5 unitats monetàries, respectivament. La producció mínima que ha de cobrir l'empresa és de 1.000 unitats físiques. L'empresa té la següent funció de producció $F(K,L) = 10K^{0,5}L^{0,5}$. S'ha de calcular la quantitat de factors productius que ha d'emprar l'empresa per a minimitzar els costos.

Modelització:

- Identificació de variables:

  *K*: quantitat utilitzada de capital (en unitats)

  *L*: quantitat utilitzada de treball (en unitats)
- Funció objectiu:

  *C*: funció de cost (en unitats monetàries).

  Direcció d'optimització: minimitzar

  Forma funcional: $C(K,L) = 4K + 5L$
- Restriccions:

  Producció mínima: $10K^{0,5}L^{0,5} \geq 1000$
- Condicions de domini:

  No-negativitat: $K \geq 0,\ L \geq 0$
- Plantejament matemàtic del problema:

$$\begin{array}{ll} Min. & 4K + 5L \\ s.a: & 10K^{0,5}L^{0,5} \geq 1000 \\ & K \geq 0, \quad L \geq 0 \end{array}$$

Model i solució amb LINGO:

```
!Problema 2: problema de l'empresa;
!Funció objectiu;
[Costos] Min=4*K+5*L;

!Restricció de producció mínima;
[Produccio] 10*K^0.5*L^0.5>1000;
```

```
                    Variable           Value        Reduced Cost
                           K        111.8034            0.000000
                           L        89.44272            0.000000
                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                      COSTOS        894.4272           -1.000000
                   PRODUCCIO        0.000000          -0.8944272
```

Interpretació i anàlisi: La solució és aproximadament (111'8, 89,44). S'empraran quasi 112 unitats de capital i 89,4 de treball. Els costos mínims són de 894,4 unitats monetàries. La variable de marge és zero, cosa que econòmicament significa que la producció que assoleix l'empresa és exactament igual a la mínima que s'exigia. El multiplicador de Kuhn i Tucker és 0,8944 (amb signe canviat perquè és l'objectiu de minimitzar) i la interpretació és que si s'augmenta una unitat marginal la producció mínima exigida, els costos augmentaran 0,8944 unitats monetàries marginals aproximadament. Aquest mínim local és també global perquè es compleix el teorema local-global: la funció objectiu és convexa, perquè és lineal; i el conjunt d'oportunitats és convex perquè és intersecció de convexos, dos semiespais (condicions de no-negativitat) i un conjunt de nivell superior (la restricció de producció mínima) amb funció còncava en el primer membre perquè és de tipus Cobb-Douglas amb suma d'exponents menor o igual a 1.

### *2.2.3. Problema no lineal de producció amb recursos limitats*

Encara que aquest problema és el més típic de la programació lineal (vegeu l'epígraf 2.3.1 a continuació), en ocasions la funció de beneficis que s'ha de maximitzar és no lineal. La no-linealitat pot ocórrer per dos motius principalment: en primer lloc, si en la funció d'ingressos els preus dels productes són funció decreixent de les quantitats venudes (per exemple, una empresa de vins haurà de baixar el preu per botella si la producció és molt elevada) i, en segon lloc, si en la funció de cost els costos unitaris són creixents amb les unitats produïdes (per exemple, augmentar la quantitat de marbre extret d'una pedrera implicarà treballs cada vegada més dificultosos i de cost més elevat). En els dos casos la funció de beneficis que s'obté és no lineal i còncava, i així es compleix el teorema local-global perquè les restriccions que indiquen les limitacions de recursos són lineals.

**Problema 3.** La gerència d'una empresa vol produir tres articles que denomina producte 1, producte 2 i producte 3. Disposa de tres màquines de les quals coneix la capacitat disponible i el nombre d'hores-màquina que es requereix per a cada producte:

| Tipus de màquina | Temps en hores-màquina per setmana | Productivitat en hores-màquina per unitat | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Prod. 1 | Prod. 2 | Prod. 3 |
| Fresadora | 500 | 9 | 3 | 5 |
| Torn | 350 | 5 | 4 | 0 |
| Polidora | 150 | 3 | 0 | 2 |

Els costos unitaris en produir els articles 1, 2 i 3 són 25, 10 i 15 unitats monetàries, respectivament, i els preus de venda unitaris són $35 + 100x_1^{-\frac{1}{3}}$, $15 + 40x_2^{-\frac{1}{4}}$ i $20 + 50x_3^{-\frac{1}{2}}$, respectivament, on $x_i$ és el nombre d'unitats venudes del producte $i$. Calcula les quantitats dels tres productes que maximitzen els beneficis i el benefici màxim. Calcula i interpreta les variables de marge i els multiplicadors de Kuhn i Tucker.

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables:

  $x_i$ és el nombre d'unitats venudes del producte $i$, $i$=1,2,3.

- Funció objectiu:

  $B$: beneficis (en unitats monetàries).

  Direcció d'optimització: maximitzar

  Forma funcional: $B = I - C = \left(35 + 100x_1^{-\frac{1}{3}}\right)x_1 + \left(15 + 40x_2^{-\frac{1}{4}}\right)x_2 + \left(20 + 50x_3^{-\frac{1}{2}}\right)x_3 - (25x_1 + 10x_2 + 15x_3)$

- Restriccions:

  Limitació del primer recurs productiu (temps d'ús de la fresadora en hores setmanals): $9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500$

  Limitació del segon recurs productiu (temps d'ús del torn en hores setmanals): $5x_1 + 4x_2 \leq 350$

  Limitació del tercer recurs productiu (temps d'ús de la polidora en hores setmanals): $3x_1 + 2x_3 \leq 150$

- Condicions de domini:

  No-negativitat: $x_i \geq 0, \ i = 1,2,3$

- Plantejament matemàtic del problema:

$$Max. \quad \left(35 + 100x_1^{-\frac{1}{3}}\right)x_1 + \left(15 + 40x_2^{-\frac{1}{4}}\right)x_2 + \left(20 + 50x_3^{-\frac{1}{2}}\right)x_3 - (25x_1 + 10x_2 + 15x_3)$$

$$s.a: \quad \begin{array}{c} 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 350 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 150 \\ x_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3 \end{array}$$

<u>Model i solució amb LINGO</u>:

```
!Problema 3: problema no lineal de producció amb recursos limmitats;
!Funció objectiu;
[Beneficis]
Max=(35+100*x1^(1/3))*x1+(15+40*x2^(1/4))*x2+(20+50*x3^(1/2))*x3-
(25*x1+10*x2+15*x3);

!Restriccions de limitació de recursos;
[Fresadora] 9*x1+3*x2+5*x3<500;
[Torn] 5*x1+4*x2<350;
[Polidora] 3*x1+2*x3<150;
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| X1 | 0.000000 | 386.0996 |
| X2 | 41.66667 | 0.000000 |
| X3 | 75.00000 | -434.4637 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| BENEFICIS | 37293.73 | 1.000000 |
| FRESADORA | 0.000000 | 44.01106 |
| TORN | 183.3333 | 0.000000 |
| POLIDORA | 0.000000 | 0.000000 |

Interpretació i anàlisi: La producció òptima és de 41,67 unitats del segon producte i de 75 unitats del tercer, mentre que no es produirà res del tercer. Els beneficis màxims seran de 37.293,73 unitats monetàries. Les variables de marge indiquen que totes les hores disponibles de fresadora i polidora estan utilitzades mentre que sobraran 183,33 hores de torn (se'n utilitzaran 350-183,33=166,66 hores). Com la restricció de polidora està saturada i el multiplicador és zero estem davant d'un cas excepcional en el que no és possible interpretar econòmicament els multiplicadors de Kuhn y Tucker. Aquest màxim local és també global perquè es compleix el teorema local-global: la funció objectiu és còncava, perquè la hessiana és una matriu diagonal amb elements negatius en la diagonal principal; i el conjunt d'oportunitats és convex perquè és intersecció de semiespais.

### *2.2.4. Problema de selecció de cartera*

És el problema que va originar la teoria moderna de la inversió. Es coneix també com el model de mitjana-variància perquè combina aquestes dues mesures en l'enunciat del problema d'optimització. La forma més habitual del problema és la de minimitzar el risc de la inversió amb una restricció de rendibilitat mínima i una altra de limitació de capital. L'altra opció és maximitzar la rendibilitat amb una restricció de risc limitat. Les variables de decisió són les quantitats que cal invertir en cada actiu. La funció de risc es representa mitjançant la variància de la inversió, una funció quadràtica del tipus forma quadràtica on la matriu representativa és la de variàncies i covariàncies de les rendibilitats històriques dels actius que formen part de la cartera d'inversió. Com que la matriu de variàncies i covariàncies és sempre almenys semidefinida positiva, la funció de risc sempre és convexa i això, juntament amb la linealitat de la resta de funcions, garantirà el compliment del teorema local-global.

Les principals variants del problema inclouen restriccions addicionals o fites i així forçar la diversificació de la cartera en algun sentit.

**Problema 4.** Un inversor planeja distribuir 100 € d'inversió entre dos actius financers (els imports dels quals són $x$ i $y$). Les rendibilitats anuals esperades són 12% i 6%, respectivament. El risc màxim que està disposat a assumir aquest inversor és de 1.360 €$^2$, i la funció de risc és $R(x,y) = 0{,}25x^2 + 0{,}05y^2 + 0{,}1xy$. Es vol obtenir la quantitat de diners que s'ha d'invertir en cada actiu per tal de minimitzar el risc.

Modelització:

- Identificació de variables:
  $x$: quantitat que cal invertir en el primer actiu (en €)
  $y$: quantitat que cal invertir en el segon actiu (en €)
- Funció objectiu:
  $I$: funció de rendiments de la inversió (en euros).
  Direcció d'optimització: maximitzar
  Forma funcional: $I(x,y) = 0{,}12x + 0{,}06y$
- Restriccions:
  Risc màxim: $0{,}25x^2 + 0{,}05y^2 + 0{,}1xy \leq 1360$
  Pressupost disponible màxim: $x + y \leq 100$
- Condicions de domini:
  No-negativitat: $x \geq 0,\ \ y \geq 0$
- Plantejament matemàtic del problema:

$$\begin{array}{ll} Max. & 0{,}12x + 0{,}06y \\ s.a: & 0{,}25x^2 + 0{,}05y^2 + 0{,}1xy \leq 1360 \\ & x + y \leq 1 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

Model i solució amb LINGO:

```
!Problema 4: selecció de cartera;
!Funció objectiu;
[Rendiments] Max=0.12*x+0.06*y;

!Restriccions;
[Risc] 0.25*x^2+0.05*y^2+0.1*x*y<1360;
[Capital] x+y<100;
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| X | 65.57444 | 0.3762693E-07 |
| Y | 34.42550 | 0.5734460E-07 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| RENDIMENTS | 9.934463 | 1.000000 |
| RISC | 0.1128090E-02 | 0.2287474E-02 |
| CAPITAL | 0.6081453E-04 | 0.3712532E-01 |

Interpretació i anàlisi: S'invertiran 65,57 euros en el primer actiu i 34,43 euros en el segon actiu. Els rendiments de la inversió són de 9,93 €. Les variables de marge són pràcticament zero, és a dir, el risc de la cartera és quasi el màxim permès i el pressupost s'inverteix totalment. El primer multiplicador és 0,0023, motiu pel qual si es permet un €$^2$ més de risc el rendiment augmentarà en 0,23 cèntims d'euro aproximadament. El segon multiplicador val 0,037, cosa que significa que si augmenta el capital a invertir en 1 €, el rendiment de la cartera augmentarà en 3,7 cèntims d'euro. El mínim local obtingut és global perquè es compleix el teorema local-global: en primer lloc, la funció objectiu és lineal i el conjunt d'oportunitats és convex, donat que la primera restricció és un conjunt de nivell inferior amb funció convexa, la hessiana és definida positiva: $H = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ amb menors principals conduents majors o iguals que zero; i la segona restricció i les condicions de no negativitat són semiespais.

### *2.2.5. Problema de minimitzar les desviacions quadràtiques*

El problema de minimitzar desviacions quadràtiques apareix quan tenim objectius per a diverses variables que no podem assolir totalment perquè són en certa manera incompatibles (augmentar el serveis públics, disminuir els impostos i tindre un pressupost equilibrat, per exemple). Aleshores, una manera de combinar-los adequadament és establir uns valors objectius per a cada variable i plantejar un objectiu conjunt de minimitzar la suma de les desviacions respecte a eixos valors objectius elevades al quadrat. Un altre exemple d'aquest problema es dona en Estadística, quan es vol estimar una recta de regressió per mínims quadrats ordinaris donat un conjunt d'observacions per a una variable dependent i una variable independent.

Aquest problema no lineal té una funció objectiu convexa i si les restriccions formen un conjunt convex complirà les hipòtesis del teorema local-global.

**Problema 5.** En una economia simplificada, el sector públic recapta impostos sobre la renda ($Y$) aplicant un tipus impositiu igual a $t$ i impostos sobre el consum ($C$) aplicant un tipus impositiu igual a $r$. Amb la recaptació total, $Ingressos = tY + rC$, ha de pagar la despesa pública ($G$). Per motius econòmics i demogràfics, s'ha d'ajustar la despesa pública en una taxa igual a $g$ i/o els tipus impositius, mantenint l'equilibri pressupostari: $tY + rC = G(1 - g)$. La situació de partida era d'equilibri amb uns valors $Y_0$=1.000, $C_0$=800 i $G_0$=448 per a les variables macroeconòmiques, uns tipus impositius $t_0 = 0{,}28$, $r_0 = 0{,}21$, i sense ajustos en la despesa, $g_0 = 0$. Calcula els valors òptims de $t$, $r$ i $g$ si, amb la crisi, l'Estat vol desviar-se el mínim possible dels seus valors inicials, considerats com a valors objectiu, mantenint l'equilibri pressupostari sabent que el valor esperat de les variables macroeconòmiques és $Y$=950, $C$=760 i $G$=448 (en milions d'€).

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables:

  $t$: tipus impositiu sobre la renda en tant per 1.

  $r$: tipus impositiu sobre el consum en tant per 1.

  $g$: ajust en la despesa pública en tant per 1.
- Funció objectiu:

  $D$: funció de desviacions quadràtiques respecte els valors desitjats.

  Direcció d'optimització: minimitzar

  Forma funcional: $D(t,r,g) = (t-0{,}28)^2 + (r-0{,}21)^2 + (g-0)^2$
- Restriccions:

  Equilibri pressupostari: $950t + 760r = 448(1-g)$ (en €)
- Condicions de domini:

  No-negativitat: $t \geq 0,\ \ r \geq 0,\ \ g \geq 0$
- Plantejament matemàtic del problema:

$$\begin{array}{ll} Min. & (t-0{,}28)^2 + (r-0{,}21)^2 + (g-0)^2 \\ s.a: & \quad 950t + 760r = 448(1-g) \\ & \quad t \geq 0, \qquad r \geq 0, \qquad g \geq 0 \end{array}$$

<u>Model i solució amb LINGO</u>:

```
!Problema 5: minimitzar desviacions quadràtiques;
!Funció objectiu;
[Desviacions] Min=(t-0.28)^2+(r-0.21)^2+g^2;

!Restriccions;
[Equilibri] 950*t+760*r=448*(1-g);
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| T | 0.2926606 | 0.000000 |
| R | 0.2201285 | 0.000000 |
| G | 0.5970480E-02 | 0.8752721E-08 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| DESVIACIONS | 0.2985238E-03 | -1.000000 |
| EQUILIBRI | 0.000000 | -0.2665391E-04 |

Interpretació i anàlisi: El tipus impositiu sobre la renda haurà de pujar fins el 0,29266 i el tipus impositiu sobre el consum haurà de pujar fins el 0,22, mentre que l'ajust en el gasto públic haurà de ser de 0,00597 en tant per 1 (un retall del 0,597%). D'aquesta manera es mantindrà l'equilibri pressupostari que s'exigia mitjançant la restricció (com és d'igualtat no hi ha variable de marge a interpretar). Les desviacions quadràtiques totals tampoc tenen una interpretació econòmica rellevant. El multiplicador és 0,0000266, i això ens diu que si fora possible tindre un dèficit d'1 (milions €) les desviacions quadràtiques disminuirien, aproximant-se més als valors desitjats.

El mínim local obtingut és global perquè es compleix el teorema local-global: en primer lloc, la funció objectiu és convexa, matriu diagonal amb valors iguals a 2 en la diagonal principal i, en segon lloc, el conjunt d'oportunitats és convex, donat està format per un hiperplà i tres semiespais.

## 2.3. Aplicacions econòmiques més importants de la programació lineal

### *2.3.1. Problema lineal de producció amb recursos limitats*

És el problema més típic de la programació lineal. En aquest problema les variables de decisió són les quantitats produïdes de cada producte i normalment s'assimilen a les quantitats venudes. Es tracta de maximitzar el benefici o l'ingrés de l'empresa però tenint en compte que en el procés productiu s'utilitzen uns recursos que estan limitats. Les restriccions indiquen que el factor utilitzat en la producció no pot excedir la disponibilitat que n'hi ha. Quan es planteja el primer membre de la restricció s'empren uns coeficients tècnics que depenen de l'eficiència tecnològica de l'empresa. La forma d'una restricció típica d'aquest problema és la següent:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

Els coeficients tècnics $a_{ij}$ indiquen la quantitat de recurs $i$ utilitzada en la producció d'una unitat del producte $j$. Així, el primer membre és la quantitat total de recurs utilitzat i el segon membre, $b_i$, la quantitat de recurs disponible.

El problema de producció amb recursos limitats pot tenir, addicionalment, restriccions o fites de demanda o de capacitat productiva.

**Problema 6.** L'empresa d'elaboració de sucs SUCS CINIL SA disposa de concentrat de sucs de bresquilla, de pinya i de pera, per barrejar-los amb aigua i produir sucs comercials aptes per al consum humà. La taula següent inclou la disponibilitat de cada suc concentrat en quilograms (última fila), la composició en kg. de suc concentrat per litre de suc comercial i el preu de venda de cada suc comercial en euros per litre (primera columna):

| Sucs comercials | | Concentrat de suc per litre de suc comercial (kg/l) | | |
|---|---|---|---|---|
| Nom | Preu (€/l.) | Bresquilla | Pinya | Pera |
| Bresquilla | 0,6 | 0,5 | 0 | 0 |
| Bresquilla-pinya | 0,65 | 0,25 | 0,5 | 0 |
| Bresquilla-pera | 0,75 | 0,2 | 0 | 0,4 |
| Pinya | 0,7 | 0 | 0,9 | 0 |
| Pera | 0,8 | 0 | 0 | 0,6 |
| Disponibilitat (kg.) | | 150 | 100 | 80 |

També té en compte que la demanda dels tres primers sucs ha de ser almenys el doble que la dels dos últims i que ha d'elaborar almenys 30 litres de suc de bresquilla, de pinya i de pera, respectivament. Amb aquestes condicions l'empresa desitja maximitzar els seus ingressos.

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables:

  $x_1$, ..., $x_5$: nombre de litres de cada tipus de suc comercial (en el mateix ordre que apareix en la taula de dades anterior).

- Funció objectiu:

  *I*: ingressos (en euros)

  Direcció d'optimització: maximitzar

  Forma funcional: $I = 0{,}6x_1 + 0{,}65x_2 + 0{,}75x_3 + 0{,}7x_4 + 0{,}8x_5$

- Restriccions:

  Bloc de restriccions de limitació de concentrat de suc:

  - Concentrat de bresquilla: $0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}2x_3 \leq 150$
  - Concentrat de pinya: $0{,}5x_2 + 0{,}9x_4 \leq 100$
  - Concentrat de pera: $0{,}4x_3 + 0{,}6x_5 \leq 80$

  Unes altres restriccions (de demanda):

  $$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(x_4 + x_5)$$

- Condicions de domini (fites de demanda mínima i no negativitat):

  $$x_1 \geq 30, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0, \qquad x_4 \geq 30, \qquad x_5 \geq 30$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$
\begin{array}{ll}
Màx. & I = 0{,}6x_1 + 0{,}65x_2 + 0{,}75x_3 + 0{,}7x_4 + 0{,}8x_5 \\
 & 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}2x_3 \leq 150 \\
 & 0{,}5x_2 + 0{,}9x_4 \leq 100 \\
s.a: & 0{,}4x_3 + 0{,}6x_5 \leq 80 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(x_4 + x_5) \\
 & x_1 \geq 30, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 30, x_5 \geq 30
\end{array}
$$

Model amb sintaxi avançada de LINGO:

```
!Problema 19: problema de producció amb recursos limitats
Modelització amb sintaxi avançada;
SETS:
Productes/1..5/:x,preu,demanda;
Recursos/1..3/:disponibilitat;
Matriu(Productes,Recursos):a;
ENDSETS

DATA:
preu=0.6 0.65 0.75 0.7 0.8;
demanda= 30 0 0 30 30;
disponibilitat=150 100 80;
a=0.5  0   0
  0.25 0.5 0
  0.2  0   0.4
  0    0.9 0
  0    0   0.6;
ENDDATA

!Funció objectiu;
[Ingres] max=@sum ( Productes: preu*x ); !en euros;

!Restriccions;
!Limitacions de recursos;
@for ( Recursos(j): [Recurs] @sum ( Productes(i): a(i,j)*x(i) ) <
disponibilitat(j) ); !en Kgs;

!Condicions de demanda;
[Relacio] x(1)+x(2)+x(3)-2*x(4)-2*x(5)>0;


!Condicions de domini: no negativitat i fites;
@for ( Productes: [Demanda_minima] @bnd(demanda,x,1E20));
```

```
Solució per a les variables rellevants:

                      Variable           Value        Reduced Cost
                         X( 1)        260.9195            0.000000
                         X( 2)        0.000000           0.1944444E-01
                         X( 3)        97.70115            0.000000
                         X( 4)        111.1111            0.000000
                         X( 5)        68.19923            0.000000

                           Row    Slack or Surplus      Dual Price
                        INGRES        362.1648            1.000000
                     RECURS( 1)       0.000000            1.224138
                     RECURS( 2)       0.000000           0.7509579
                     RECURS( 3)       0.000000            1.293103
                       RELACIO        0.000000         -0.1206897E-01
```

```
Objective Coefficient Ranges:

                        Current         Allowable         Allowable
    Variable          Coefficient        Increase          Decrease
       X( 1)            0.6000000        1.633333         0.5833333E-01
       X( 2)            0.6500000       0.1944444E-01      INFINITY
       X( 3)            0.7500000       0.2333333E-01     0.2333333E-01
       X( 4)            0.7000000        INFINITY         0.3500000E-01
       X( 5)            0.8000000       0.3500000E-01     0.3500000E-01

       Righthand Side Ranges:

                        Current         Allowable         Allowable
         Row              RHS            Increase          Decrease
  RECURS( 1)            150.0000         94.44444          55.38889
  RECURS( 2)            100.0000         49.85000          73.00000
  RECURS( 3)            80.00000         334.8333          56.66667
     RELACIO            0.000000         110.7778          188.8889
```

Interpretació i anàlisi: es produiran 260,9 litres de suc de bresquilla, cap de suc de bresquilla-pinya, 97,7 litres de suc de bresquilla-pera, 111,1 litres de suc de pinya i 68,2 litres de suc de pera. Si exigirem produir un litre de suc de bresquilla-pinya els ingressos disminuirien en 0,019 euros (Columna *Reduced Cost*) o, en altres paraules, per què siga rentable la producció d'aquest suc el preu de venda hauria d'agmentar 0,019 euros per litre. No sobrarà cap quilo de cap tipus de concentrat i la relació de demanda es complirà de forma exacta. La columna *Dual Price* ens diu que si disposarem d'un quilo més de concentrat de bresquilla els ingressos augmentarien en 1,22 euros, un quilo més disponible de concentrat de pinya els faria augmentar en 0,75 euros i un quilo més disponible de concentrat de pera provocaria un augment de 1,29 euros en els ingressos. En quan a la relació de demanda, si dels tres primers sucs exigirem produir el doble que dels altres dos més un litre, els ingressos baixarien en 0,012 euros. La solució que mostra Lingo és única (les 5 variables no bàsiques valen zero en la segona columna) i no degenerada (4 variables bàsiques, tantes com restriccions, i les quatre estrictament positives).

La primera taula de l'anàlisi de sensibilitat determina els intervals de preus dels sucs per què la producció es mantinga al nivell òptim obtingut. Així, la producció òptima no canviarà si el preu del suc de bresquilla puja no més de 1,63 euros (fins 2,23 euros) o baixa 0,058 euros (fins 0,54 euros). El suc de bresquilla-pinya no entraria a formar part de la producció òptima fins que el preu no pujara 0,019 euros (fins 0,67 euros). Igualment els intervals de preus per els tres sucs finals són de [0'73,0'77] per al de bresquilla-pera, [0'665,+∞[ per de de pinya i [0'765,0'835] per al de pera.

La segona taula de l'anàlisi de sensibilitat indica els intervals per a les disponibilitats de cada concentrat per què continue sent òptim produir els mateixos sucs (tots excepte el segon), encara que no necessàriament en la mateixa quantitat; i per què continue sense sobrar disponibilitat de cap concentrat. Els intervals per a cada concentrat són, [95,204] per al de bresquilla, [27,150] per al de pinya i [23,415] per al de pera.

### *2.3.2. Problema de la dieta*

Aquest problema tracta de determinar les quantitats de cada un dels aliments escollits que formaran part de la dieta òptima. La funció objectiu és el cost de la dieta, que s'ha de minimitzar, i cada restricció assegura arribar al requeriment mínim d'un nutrient (proteïnes, vitamines, etc.). Addicionalment, poden existir altres restriccions per tal de diversificar la dieta.

**Problema 20.** Un veterinari desitja elaborar la dieta de cost mínim per a un grup de zebres del zoo que complisca uns requisits vitamínics que ha estimat i que són els següents: ha de contenir entre 26 i 32 unitats de vitamina A, almenys 25 unitats de vitamina B, almenys 30 de C i almenys 10 de vitamina D. La taula següent ens dóna el nombre d'unitats de les diferents vitamines per unitat d'aliment triat entre sis tipus disponibles, així com el cost de cada unitat de l'aliment corresponent.

| | Vitamines | | | | Cost per unitat |
|---|---|---|---|---|---|
| Aliments | A | B | C | D | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 10 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 14 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 0 | 12 |
| 4 | 3 | 1 | 0 | 1 | 18 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | 0 | 20 |
| 6 | 1 | 0 | 2 | 1 | 16 |

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables:

  $x_1, \ldots, x_6$: nombre de racions de cada aliment (en el mateix ordre que apareix en la taula de dades anterior).

- Funció objectiu:

  $C$: cost de la dieta (en euros)

  Direcció d'optimització: minimitzar

  Forma funcional: $C = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 + 18x_4 + 20x_5 + 16x_6$

- Restriccions:

  Requeriments vitamínics:

  - Nivell mínim de vitamina A: $x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 26$
  - Nivell màxim de vitamina A: $x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 32$
  - Nivell mínim de vitamina B: $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 25$
  - Nivell mínim de vitamina C: $x_2 + 2x_3 + 2x_5 + 2x_6 \geq 30$
  - Nivell mínim de vitamina D: $x_1 + x_4 + x_6 \geq 10$

- Condicions de domini (no negativitat):

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 6$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$\begin{array}{ll} Min. & 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 + 18x_4 + 20x_5 + 16x_6 \\ & x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 26 \\ & x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 32 \\ s.a: & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 25 \\ & x_2 + 2x_3 + 2x_5 + 2x_6 \geq 30 \\ & x_1 + x_4 + x_6 \geq 10 \\ & x_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 6 \end{array}$$

Model amb sintaxi avançada de LINGO:

```
!Problema 20: problema de la dieta
Modelització amb sintaxi avançada;
SETS:
Aliments/1..6/:x,preu;
Vitamines/A,B,C,D/:requeriment;
Matriu(Aliments,Vitamines):a;
ENDSETS

DATA:
preu=10 14 12 18 20 16;
requeriment=26 25 30 10;!La restricció de requeriment màxim de
vitamina A s'escriurà a part;
a=1 1 0 1
  1 2 0 0
  0 1 2 0
  3 1 0 1
  2 1 2 0
  1 0 2 1;
ENDDATA

!Funció objectiu;
[Cost] min=@sum ( Aliments: preu*x ); !en euros;

!Restriccions;
!Requeriments mínims de cada vitamina;
@for ( Vitamines(j): [Vitamina] @sum ( Aliments(i): a(i,j)*x(i) ) >
requeriment(j) ); !en Kgs.;

!Requeriment màxim de vitamina A;
```

```
[VIT_A_Maxim] x(1)+x(2)+3*x(4)+2*x(5)+x(6)<32;

Solució per a les variables rellevants:
                      Variable           Value        Reduced Cost
                          X( 1)        10.00000           0.000000
                          X( 2)        0.000000           4.000000
                          X( 3)        7.000000           0.000000
                          X( 4)        0.000000           0.000000
                          X( 5)        8.000000           0.000000
                          X( 6)        0.000000           0.000000
                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                          COST         344.0000          -1.000000
                  VITAMINA( A)         0.000000          -4.000000
                  VITAMINA( B)         0.000000          -3.000000
                  VITAMINA( C)         0.000000          -4.500000
                  VITAMINA( D)         0.000000          -3.000000
                   VIT_A_MAXIM         6.000000           0.000000

 Objective Coefficient Ranges:

                       Current        Allowable        Allowable
     Variable      Coefficient         Increase         Decrease
        X( 1)         10.00000         0.000000         6.000000
        X( 2)         14.00000         INFINITY         4.000000
        X( 3)         12.00000         8.000000         0.000000
        X( 4)         18.00000         INFINITY         0.000000
        X( 5)         20.00000         0.000000         8.000000
        X( 6)         16.00000         6.000000         4.000000

        Righthand Side Ranges:

                       Current        Allowable        Allowable
          Row              RHS         Increase         Decrease
 VITAMINA( A)         26.00000         6.000000         16.00000
 VITAMINA( B)         25.00000         0.000000         14.00000
 VITAMINA( C)         30.00000         40.00000         0.000000
 VITAMINA( D)         10.00000         16.00000         0.000000
  VIT_A_MAXIM         32.00000         INFINITY         6.000000
```

<u>Interpretació i anàlisi</u>: la dieta òptima està formada per 10 racions de l'aliment 1, 7 racions de l'aliment 3 i 8 racions de l'aliment 5. El cost mínim és de 344 euros. Tots els requeriments de vitamines estan al nivell mínim exigit i, per tant, el requeriment màxim de vitamina A li queden 6 unitats per assolir-lo. La interpretació de les columnes *Reduced Cost* i *Dual Price* no es pot fer perquè la solució és degenerada (hi ha una variable bàsica amb valor zero). També té solució múltiple perquè hi ha una variable no bàsica amb valor zero en la segona columna.

L'anàlisi de sensibilitat ens diu els intervals per als preus de cada aliment (primera taula) i per als requeriments de cada vitamina (segona taula). El primer aliment formarà part de la dieta òptima si el preu està entre 4 i 10 euros. El segon hauria de baixar en 4 euros (fins 10 euros) per a entrar. El tercer ha de mantindré el preu entre 12 i 20, el preu del quart hauria de baixar de 18 euros per a entrar en la dieta òptima, el preu del cinquè ha d'estar entre 12 i 20 i el preu del sisè aliment no formarà part de la dieta si el seu preu es manté entre 12 i 22 euros.

D'altra banda els requeriments mínims podrien variar en certs intervals de manera que la dieta òptima seguiria estant formada pels mateixos aliments (1, 3 i 5), encara que no necessàriament en la mateixa quantitat. Aquests intervals són [10,32] per a la vitamina A, [11,25] per a la vitamina B, [30,70] per a la vitamina C i [10,26] per a la vitamina D. Per últim, el requeriment màxim de la vitamina A podria baixar de 32 a 26 i la solució es mantindria.

### *2.3.3. Problema de mescles*

En els problemes de mescles (*blending* en anglès) s'ha d'obtenir la mescla de mínim cost o de màxim benefici que compleix una sèrie de propietats mitjançant restriccions. Normalment les propietats de la mescla s'estableixen en forma de proporcions i això requereix fer operacions matemàtiques prèvies per a passar a restriccions lineals.

El problema té moltes variants. En una d'elles els ingredients que es mesclen no són productes finals i es tracta d'obtenir una unitat del producte final (la mescla) de la forma més econòmica possible, les variables representen les quantitats de cada ingredient per cada unitat de producte final i poden haver pèrdues al fer la mescla.

En una altra variant, que apareix en el problema detallat a continuació, els productes que formen part de la mescla sí que són productes finals i cal determinar la producció de cada producte que es ven directament i la producció que es destina a la mescla.

**Problema 21.** Una cooperativa vinícola produeix dos tipus de vins amb una graduació que depèn de les zones de la comarca i del tipus de raïm dels seus associats, d'acord amb el següent quadre:

| | GRADUACIÓ | QUANTITAT |
|---|---|---|
| VI 1 | 15 | 200.000 |
| VI 2 | 10 | 100.000 |

La cooperativa ha observat que aquests dos tipus de vins són difícils de comercialitzar atès que el primer té una graduació excessiva i el segon una graduació massa baixa, motiu pel qual la demanda del primer no és superior mai a 100.000 litres i la del segon a 60.000 litres, per la qual cosa cada any es produeixen excedents de tots dos tipus de vins que la cooperativa ha de destinar a la producció d'alcohol, que ven posteriorment a un preu d'un euro per litre.

Per aquest motiu es planteja realitzar una mescla de tots dos tipus de vi amb la finalitat d'obtenir-ne una nova marca (v3) amb una graduació intermèdia que té una major acceptació en el mercat.

Després de fer un exhaustiu estudi, la cooperativa ha determinat que el vi que té una major acceptació en el mercat és el que té una graduació compresa entre els 12 i els 13 graus, i que en aquest cas tindria garantida una comercialització total de la producció si el preu fóra de 5 euros el litre.

El preu de cost del vi 1 (v1) és de 2,5 euros per litre i el del vi 2 (v2) és d'1,5 euros per litre. Els preus de venda actuals de tots dos vins són de 4 i 2,5 euros respectivament.

Determina la quantitat que cal produir i comercialitzar de cadascun dels tipus de vi i del vi de mescla (v3).

Modelització:

- Identificació de variables:

  $x_1$, $x_2$:quantitat produïda de cada tipus de vi que es ven directament (en litres).

  $x_{13}$, $x_{23}$:quantitat produïda de cada tipus de vi que es mescla (en litres).

  $x_3$ : quantitat produïda de la mescla (en litres).

- Funció objectiu:

  $B$: benefici (en euros)

  Direcció d'optimització: maximitzar

  Forma funcional: els ingressos provenen de la venda de cada tipus de vi, de la venda del vi de mescla i de la venda d'alcohol del vi excedent:

$$I = \underbrace{4x_1 + 2{,}5x_2 + 5x_3}_{\text{venda de vi}} + \underbrace{\big(200000 - (x_1 + x_{13})\big) + \big(100000 - (x_2 + x_{23})\big)}_{\text{venda d'alcohol}}$$

  Els costos són el cost unitari pel nombre de litres produïts:

$$C = 2{,}5(x_1 + x_{13}) + 1{,}5(x_2 + x_{23})$$

  Els beneficis són la diferència entre ingressos i costos, simplificant es té:

$$B = 300000 + 0{,}5x_1 + 5x_3 - 3{,}5x_{13} - 2{,}5x_{23}$$

- Restriccions:

La graduació alcohòlica de la mescla ha d'estar entre 12 i 13 graus de percentatge, és a dir, $12 \leq \frac{15x_{13}+10x_{23}}{x_{13}+x_{23}} \leq 13$. Fent operacions per a passar a restriccions lineals s'arriba a:

$$15x_{13} + 10x_{23} \geq 12(x_{13} + x_{23}) \;\rightarrow\; 3x_{13} - 2x_{23} \geq 0$$

$$15x_{13} + 10x_{23} \leq 13(x_{13} + x_{23}) \;\rightarrow\; 2x_{13} - 3x_{23} \leq 0$$

Nivell de producció:

$$x_1 + x_{13} = 200000, \;\; x_2 + x_{23} = 100000$$

Producció de la mescla:

$$x_{13} + x_{23} = x_3$$

- Condicions de domini (fites per motius de demanda i no negativitat):

$$0 \leq x_1 \leq 100000, 0 \leq x_2 \leq 60000, x_3 \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{23} \geq 0$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$Max. \quad 300000 + 0{,}5x_1 + 5x_3 - 3{,}5x_{13} - 2{,}5x_{23}$$

$$s.a: \begin{array}{c} 3x_{13} - 2x_{23} \geq 0 \\ 2x_{13} - 3x_{23} \leq 0 \\ x_1 + x_{13} = 200000 \\ x_2 + x_{23} = 100000 \\ x_{13} + x_{23} = x_3 \\ 0 \leq x_1 \leq 100000, 0 \leq x_2 \leq 60000 \\ x_3 \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{23} \geq 0 \end{array}$$

<u>Model amb sintaxi avançada de LINGO:</u>

```
!Problema 21: problema de mescles;
!Funció objectiu: maximitzar beneficis;
Max=300000+0.5*x1+5*x3-3.5*x13-2.5*x23;

!Restriccions;
!Graduació de la mescla;
[gr_min] 3*x13-2*x23>0;
[gr_max] 2*x13-3*x23<0;
!Limits de Producció;
[V1] x1+x13=200000;
[V2] x2+x23=100000;
!Producció de la mescla;
[V3] x13+x23-x3=0;

!Demanda;
@bnd(0,x1,100000);
@bnd(0,x2,60000);

Solució per a les variables rellevants:
                      Variable           Value          Reduced Cost
```

```
                         X1        50000.00          0.000000
                         X3        250000.0          0.000000
                        X13        150000.0          0.000000
                        X23        100000.0          0.000000
                         X2        0.000000          4.000000

                        Row    Slack or Surplus      Dual Price
                          1        800000.0          1.000000
                     GR_MIN        250000.0          0.000000
                     GR_MAX        0.000000         0.5000000
                         V1        0.000000         0.5000000
                         V2        0.000000          4.000000
                         V3        0.000000         -5.000000

 Objective Coefficient Ranges:

                     Current        Allowable        Allowable
     Variable    Coefficient         Increase         Decrease
           X1      0.5000000         1.000000         INFINITY
           X3       5.000000         INFINITY         1.000000
          X13      -3.500000         INFINITY         1.000000
          X23      -2.500000         INFINITY         4.000000
           X2       0.000000         4.000000         INFINITY

        Righthand Side Ranges:

                     Current        Allowable        Allowable
          Row            RHS         Increase         Decrease
       GR_MIN       0.000000         250000.0         INFINITY
       GR_MAX       0.000000         100000.0         100000.0
           V1       200000.0         50000.00         50000.00
           V2       100000.0         33333.33         33333.33
           V3       0.000000         250000.0         INFINITY
```

<u>Interpretació i anàlisi</u>: la producció del primer tipus de vi es destinarà a la venda directa en 50.000 litres i a la mescla en 150.000 litres, mentre que tota la producció del segon tipus de vi va a la mescla. En total es produiran 250.000 litres de vi de mescla. En la columna *Reduced Cost* se'ns informa que si destinarem un litre del vi 2 a la venda directa els beneficis empitjorarien en 4 euros. Els beneficis màxims són de 800.000 euros. La graduació de la mescla es situarà en el nivell màxim (13%). Les tres últimes restriccions són d'igualtat i no hi ha més variables de marge. En quan als multiplicadors (*Dual Price*), un litre més de producció del primer vi suposaria 0,5 euros de benefici addicional i un litre més de producció del segon vi suposaria 4 euros més de benefici. No té sentit interpretar el multiplicador de la cinquena restricció perquè és una identitat. La solució que mostra Lingo és única i no degenerada.

La primera taula de l'anàlisi de sensibilitat és complicada d'interpretar perquè la funció objectiu s'ha transformat matemàticament i els coeficients no tenen una interpretació clara. El més evident és el coeficient de la variable $x_3$, que representa el preu de venda del vi de mescla. L'interval és [4,+∞[ i indica la variabilitat que podria experimentar aquest preu per què no canviara la solució òptima. En la segona taula sols tindria sentit interpretar els nivells de producció de cada vi. L'interval per a la producció del primer és [150.000, 250.000] i del segon vi [66.667, 133.333]. Si la producció queda en aquests intervals no hi ha canvis rellevants en la solució òptima.

### *2.3.4. Problema de transport*

És un problema amb una estructura lineal molt concreta. El problema de transport bàsic tracta de minimitzar el cost de transportar un producte des d'uns centres d'origen (ciutats, magatzems, plantes productives, etc.) a uns centres de destinació on es troba la demanda d'aquests productes. Per a la identificació de les variables en aquest problema sol ser convenient utilitzar un doble subíndex, $x_{ij}$, a fi de representar la quantitat de producte que ix del centre d'origen $i$ al centre de destinació $j$. La funció objectiu es construeix sumant els costos d'enviar cada quantitat de cada centre d'origen a cada centre de destinació, on cada cost unitari estarà normalment relacionat amb la distància entre els centres. La part més peculiar del problema és el plantejament de les restriccions, que són de dos tipus:

- de cada centre d'origen $i$ no pot eixir més producte del que hi ha ($b_i$):

$$x_{i1} + \cdots + x_{in} \leq b_i$$

- a cada centre de destí $j$ ha d'arribar producte suficient per tal de satisfer-ne la demanda ($c_j$):

$$x_{1j} + \cdots + x_{mj} \geq c_j$$

Les principals variants del problema inclouen la possibilitat que es transporte més d'un producte, el requeriment de passar per algun centre intermedi (problema de transbord) o l'existència de fites.

**Problema 22.** Una companyia de transport terrestre pot comprar gasolina a tres proveïdors. Els proveïdors en disposen mensualment de 2.000, 6.000 i 6.000 litres, respectivament. La companyia necessita gasolina a tres localitats que en requereixen 5.000, 3.000 i 2.000 litres mensuals, respectivament. El preu per litre de gasolina en el moment del lliurament a cada localitat és el següent:

| | | localitat | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** |
| proveïdor | **1** | 2 | 3 | 1 |
| | **2** | 4 | 2 | 5 |
| | **3** | 1 | 8 | 9 |

La companyia desitja minimitzar el cost.

Modelització:

- Identificació de variables

$x_{ij}$ és la quantitat de gasolina (en litres) que se'n transporta del proveïdor $i$ a la localitat $j$ (l'ordre dels subíndex és el mateix que el de la taula).

- Funció objectiu

$C$: cost total del transport (en euros)

Direcció: minimització

Forma funcional: $C = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} p_{ij} \cdot x_{ij}$

- Restriccions
    - Bloc de restriccions de capacitat màxima de cada proveïdor:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq c_i, \quad \forall i = 1,2,3$$

On $c_i$ són les capacitats de cada proveïdor.

- Bloc de restriccions de demanda mínima en cada localitat:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq d_j, \quad \forall j = 1,2,3$$

On $d_j$ són les demandes de cada localitat.

- Condicions de domini (no-negativitat perquè són quantitats transportades).

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i = 1,2,3; \ \ \forall j = 1,2,3$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$Min. \qquad \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} p_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$s.a: \qquad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq c_i, \quad \forall i = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq d_j, \quad \forall j = 1,2,3$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i = 1,2,3; \ \ \forall j = 1,2,3$$

Model amb sintaxi avançada de LINGO:

```
!Problema 22: transport;

sets:
localitat/1..3/:demanda;
proveidor/1..3/:disponibilitat;
matriu(proveidor,localitat):preu,x;
end sets

data:
demanda= 5000 3000 2000;
disponibilitat = 2000 6000 6000;
preu = 2 3 1
    4 2 5
    1 8 9;
end data

!Funció objectiu;
[Cost] min=@sum(matriu:preu*x);

!Restriccions;
!No pot arribar menys producte del que es demanda;

@for(localitat(j):[desti]
       @sum(proveidor(i):x(i,j))>demanda(j));
!No pot eixir més producte del que tenim;
@for(proveidor(i):[origen]
       @sum(localitat(j):x(i,j))<disponibilitat(i));
```

```
Solució per a les variables rellevants

      Variable           Value        Reduced Cost
      X( 1, 1)        0.000000            1.000000
      X( 1, 2)        0.000000            1.000000
      X( 1, 3)        2000.000            0.000000
      X( 2, 1)        0.000000            3.000000
      X( 2, 2)        3000.000            0.000000
      X( 2, 3)        0.000000            4.000000
      X( 3, 1)        5000.000            0.000000
      X( 3, 2)        0.000000            6.000000
      X( 3, 3)        0.000000            8.000000

            Row    Slack or Surplus      Dual Price
           COST        13000.00          -1.000000
      DESTI( 1)        0.000000          -1.000000
      DESTI( 2)        0.000000          -2.000000
      DESTI( 3)        0.000000          -1.000000
     ORIGEN( 1)        0.000000           0.000000
     ORIGEN( 2)        3000.000           0.000000
     ORIGEN( 3)        1000.000           0.000000

Ranges in which the basis is unchanged:

          Objective Coefficient Ranges:
                      Current        Allowable        Allowable
    Variable      Coefficient         Increase         Decrease
    X( 1, 1)         2.000000         INFINITY         1.000000
    X( 1, 2)         3.000000         INFINITY         1.000000
    X( 1, 3)         1.000000         4.000000         1.000000
    X( 2, 1)         4.000000         INFINITY         3.000000
    X( 2, 2)         2.000000         1.000000         2.000000
    X( 2, 3)         5.000000         INFINITY         4.000000
```

```
    X( 3, 1)          1.000000          1.000000          1.000000
    X( 3, 2)          8.000000          INFINITY          6.000000
    X( 3, 3)          9.000000          INFINITY          8.000000

                   Righthand Side Ranges:
                        Current         Allowable         Allowable
          Row             RHS            Increase          Decrease
    DESTI( 1)          5000.000          1000.000          5000.000
    DESTI( 2)          3000.000          3000.000          3000.000
    DESTI( 3)          2000.000          0.000000          2000.000
   ORIGEN( 1)          2000.000          INFINITY          0.000000
   ORIGEN( 2)          6000.000          INFINITY          3000.000
   ORIGEN( 3)          6000.000          INFINITY          1000.000
```

<u>Interpretació i anàlisi</u>:

El proveïdor 1 subministrarà 2.000 litres de gasolina a la localitat 3, el proveïdor 2 n'enviarà 3.000 a la localitat 2 i el proveïdor 3 en vendrà 5.000 litres a la localitat 3. El proveïdor 2 es quedarà amb 3.000 litres no venuts i el proveïdor 3 amb 1.000 litres. L'import mínim del total de les vendes és de 13.000 euros. La solució és degenerada perquè hi ha 6 variables bàsiques (tantes com restriccions) i una d'elles val zero (la variable de marge del primer proveïdor). Aleshores no es poden interpretar correctament els valors de la segona columna. També cal dir que la solució és única.

Els intervals de sensibilitat ens diuen com podrà canviar el preu per litre de gasolina de cada proveïdor a cada localitat (primera taula) o com podrà canviar la disponibilitat de cada proveïdor o els requeriments de cada localitat per què la solució òptima obtinguda no canvie de forma important.

### *2.3.5. Problema de planificació financera*

Aquest problema tracta la manera òptima d'invertir un capital entre distints actius financers de manera que es maximitzen els rendiments esperats i atenent a unes restriccions de diversificació de la inversió per tal de controlar el risc. Les restriccions de diversificació poden basar-se en distintes característiques de l'actiu: tipus de rendiment, país emissor, divisa, etc. Addicionalment, poden existir fites d'inversió mínima o màxima en algun dels actius.

**Problema 23.** Un inversor disposa de mig milió de euros per a invertir. Ha seleccionat set actius per distribuir entre ells la inversió, amb les característiques que podem veure en la taula següent. El seu objectiu és maximitzar el rendiment en la situació més probable, però limitant les pèrdues al 5% del capital disponible en la situació menys probable. A més, per prevenir situacions encara més inesperades exigeix no invertir més del doble en renda variable que en renda fixa i mantenir una proporció d'almenys 4 a 3 a favor de la inversió en euros respecte a la inversió en altres divises.

| Actiu | Tipus rendiment | Divisa | Rendibilitat més probable | Rendibilitat menys probable |
|---|---|---|---|---|
| Bons del tresor dels EUA | Fix | Dòlar | 3% | 1% |
| Accions Microsoft | Variable | Dòlar | 12% | -5% |
| Bons Alemanya | Fix | Euro | 2% | 2% |
| Accions France Telecom | Variable | Euro | 15% | -10% |
| Bons del tresor espanyol | Fix | Euro | 5% | 1% |
| Accions Telefònica | Variable | Euro | 20% | -12% |
| Accions Sony | Variable | Ien | 10% | -2% |

Planteja i resol el problema

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables

  $x_i$ és el capital invertit en cada actiu (en euros).

- Funció objectiu

  *R*: rendiment de la inversió (en euros)

  Direcció: maximització

  Forma funcional: $R = 0{,}03x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}15x_4 + 0{,}05x_5 + 0{,}2x_6 + 0{,}1x_7$

- Restriccions
  - Restricció de limitació de pèrdues:

$$0{,}01x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}02x_3 - 0{,}1x_4 + 0{,}01x_5 - 0{,}12x_6 - 0{,}02x_7 \geq -25000$$

  On el terme independent és el 5% del capital disponible.

  - Bloc de restriccions de diversificació:

$$x_2 + x_4 + x_6 + x_7 \leq 2(x_1 + x_3 + x_5)$$

$$3(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \geq 4(x_1 + x_2 + x_7)$$

- Condicions de domini (no-negativitat perquè són quantitats invertides).

$$x_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, \dots, 7$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$\begin{array}{rl} Max. & 0{,}03x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}15x_4 + 0{,}05x_5 + 0{,}2x_6 + 0{,}1x_7 \\ s.a: & 0{,}01x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}02x_3 - 0{,}1x_4 + 0{,}01x_5 - 0{,}12x_6 - 0{,}02x_7 \geq -25000 \\ & x_2 + x_4 + x_6 + x_7 \leq 2(x_1 + x_3 + x_5) \\ & 3(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \geq 4(x_1 + x_2 + x_7) \\ & x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, 7 \end{array}$$

```
!Problema 23: planificació financera;

!Funció objectiu;
[Rendiment] max=0.03*x1+0.12*x2+0.02*x3+0.15*x4+0.05*x5+0.2*x6+0.1*x7;

!Restriccions;
[Capital] x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7<500000;
[perdues] 0.01*x1-0.05*x2+0.02*x3-0.1*x4+0.01*x5-0.12*x6-0.02*x7
                                        >-25000;
[Fixe_variable] x2+x4+x6+x7<2*(x1+x3+x5);
[Euro_Resta] 3*(x3+x4+x5+x6)>4*(x1+x2+x7);
```

Solució:

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| X1 | 0.000000 | 0.2000000E-01 |
| X2 | 0.000000 | 0.1000000E-01 |
| X3 | 0.000000 | 0.2000000E-01 |
| X4 | 0.000000 | 0.3000000E-01 |
| X5 | 166666.7 | 0.000000 |
| X6 | 200000.0 | 0.000000 |
| X7 | 133333.3 | 0.000000 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| RENDIMENT | 61666.67 | 1.000000 |
| CAPITAL | 0.000000 | 0.7333333E-01 |
| PERDUES | 0.000000 | -1.000000 |
| FIXE_VARIABLE | 0.000000 | 0.6666667E-02 |
| EURO_RESTA | 566666.7 | 0.000000 |

Ranges in which the basis is unchanged:

| Row | Slack or Surplus | Dual Price | |
|---|---|---|---|
| X1 | 0.3000000E-01 | 0.2000000E-01 | INFINITY |
| X2 | 0.1200000 | 0.1000000E-01 | INFINITY |
| X3 | 0.2000000E-01 | 0.2000000E-01 | INFINITY |
| X4 | 0.1500000 | 0.3000000E-01 | INFINITY |
| X5 | 0.5000000E-01 | 0.2000000E-01 | 0.2000000E-01 |
| X6 | 0.2000000 | 0.6666667E-01 | 0.3333333E-01 |
| X7 | 0.1000000 | 0.1000000 | 0.1428571E-01 |

| Row | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| CAPITAL | 500000.0 | 239436.6 | 173913.0 |
| PERDUES | -25000.00 | 8095.238 | 13333.33 |
| FIXE_VARIABLE | 0.000000 | 186813.2 | 307692.3 |
| EURO_RESTA | 0.000000 | 566666.7 | INFINITY |

Interpretació i anàlisi:

El proveïdor 1 subministrarà 2.000 litres de gasolina a la localitat 3, el proveïdor 2 n'enviarà 3.000 a la localitat 2 i el proveïdor 3 en vendrà 5.000 litres a la localitat 3. El proveïdor 2 es quedarà amb 3.000 litres no venuts i el proveïdor 3 amb 1.000 litres. L'import mínim del total de les vendes és de 13.000 euros. La solució és degenerada perquè hi ha 6 variables bàsiques (tantes com restriccions) i una d'elles val zero (la variable de marge del primer proveïdor). Aleshores no es poden interpretar correctament els valors de la segona columna. També cal dir que la solució és única.

Els intervals de sensibilitat ens diuen com podrà canviar el preu per litre de gasolina de cada proveïdor a cada localitat (primera taula) o com podrà canviar la disponibilitat de cada proveïdor o els requeriments de cada localitat per què la solució òptima obtinguda no canvie de forma important.

### *2.3.6. Problema maximín o minimax*

Aquest problema lineal apareix quan s'adopta una estratègia conservadora davant d'una situació en la existeixen diversos objectius incompatibles entre sí. Una manera de combinar-los tots és maximitzar el progrés mínim cap a tots els objectius (estratègia *maximín*) o, en cas que els objectius siguen de costos, minimitzar el progrés màxim de tots ells (estratègia *minimax*). Camps importants d'aplicació d'aquests problemes son la teoria de jocs i la programació multiobjectiu.

Si tenim varies funcions objectiu que volem maximitzar, ($f_1$,..,$f_m$), la estratègia *maximín* consisteix a maximitzar el valor mínim que assoleix cada una de les funcions, d'aquesta manera ens assegurem que tots els objectius progressen al menys en certa mesura. L'òptim s'obtindrà quan la millora d'un dels objectius implicarà l'empitjorament d'un altre. La forma de modelitzar el problema *maximín* és:

- Identificar una nova variable $y$.
- Plantejar la funció objectiu com a la maximització d'aquesta variable $y$
- Plantejar les restriccions de forma que cada objectiu original siga major o igual que la nova variable $y$.

El problema queda plantejat de la següent manera:

$$\begin{array}{lll} Max. & y & \\ s.a: & f_j(x_1,\dots,x_n) \geq y, & \forall j = 1,\dots,m \\ & x_i \geq 0, & \forall i = 1,\dots,n \end{array}$$

Igualment, el problema *minimax* apareix quan els objectius es volen minimitzar el màxim possible. L'enunciat és:

$$\begin{array}{lll} Min. & y & \\ s.a: & f_j(x_1,\dots,x_n) \le y, & \forall j = 1,\dots,m \\ & x_i \ge 0, & \forall i = 1,\dots,n \end{array}$$

**Problema 24.** Una indústria pot realitzar el procés productiu mitjançant tres tècniques o alguna combinació d'aquestes. Cada tècnica suposa l'emissió de gasos contaminants. La taula següent mostra l'emissió de cada gas (un valor major que 1 significa excedir la normativa legal):

| Tècnica | $CO_2$ | $SO_2$ | $NO_2$ |
|---|---|---|---|
| A | 1,3 | 0,5 | 0,2 |
| B | 0,6 | 0,6 | 1,2 |
| C | 0,3 | 1,4 | 0,6 |

L'elecció d'una única tècnica suposa sobrepassar l'emissió legalment permesa d'algun dels gasos. Suposant que les emissions es combinen linealment, determina la combinació òptima de les tres tècniques (la suma ha de ser igual a 1) que minimitza el màxim nivell d'emissió de cada gas (criteri *minimax*).

Modelització:

- Identificació de variables

  $x_i$ és la proporció en què s'utilitza cada tècnica (en tant per 1).

- Funció objectiu

  $y$: és el màxim nivell d'emissió de cada gas (un valor 1 indicaria sobrepassar la normativa legal)

  Direcció: minimització

  Forma funcional: $Min.\ y$

- Restriccions
  - $y$ és el màxim nivell d'emissió de cada gas:

$$\begin{array}{c} 1{,}3x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3 \le y \\ 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 1{,}4x_3 \le y \\ 0{,}2x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}6x_3 \le y \end{array}$$

  - La proporció en què s'utilitza cada tècnica ha de sumar 1:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

- Condicions de domini (no-negativitat perquè són proporcions en què s'utilitza cada tècnica).

$$x_i \ge 0, \qquad \forall i = 1,2,3$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$\begin{array}{ll} Min. & y \\ & 1{,}3x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3 \leq y \\ s.a: & 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 1{,}4x_3 \leq y \\ & 0{,}2x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}6x_3 \leq y \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad \forall i = 1,2,3 \end{array}$$

```
!Problema 24: problema minimax;

!Funció objectiu;
[Progres_maxim] min=y;

!Restriccions;
[CO2] 1.3*x1+0.6*x2+0.3*x3<y;
[SO2] 0.5*x1+0.6*x2+1.4*x3<y;
[NO2] 0.2*x1+1.2*x2+0.6*x3<y;
[Suma_proporcions] x1+x2+x3=1;
```

```
Solució:

                       Variable           Value        Reduced Cost
                              Y       0.7507109            0.000000
                             X1       0.3127962            0.000000
                             X2       0.4597156            0.000000
                             X3       0.2274882            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                  PROGRES_MAXIM       0.7507109           -1.000000
                            CO2        0.000000           0.4075829
                            SO2        0.000000           0.3412322
                            NO2        0.000000           0.2511848
               SUMA_PROPORCIONS        0.000000          -0.7507109
```

Interpretació i anàlisi:

El procés productiu òptim haurà de combinar les tècniques en una proporció aproximada de 31% la tècnica A, 46% la tècnica B i 23% la tècnica C. Combinant-les d'aquesta manera l'emissió dels gasos no excedirà la normativa legal en cap cas, de fet es situarà en el pitjor dels casos en un 0.75 (al 75% de la normativa legal). Com les variables de marge són zero en les tres restriccions vol dir que l'emissió dels tres gasos es situa exactament en el 75% de la normativa legal.  Degut a les característiques del problema no té sentit la interpretació dels multiplicadors ni l'anàlisi de sensibilitat.

S'observa clarament que la solució és única i no degenerada.

## 2.4. Aplicacions econòmiques més importants de la programació lineal entera

Qualsevol dels problemes d'optimització matemàtica poden incorporar com a condicions de domini les d'integritat de les variables. És la pròpia naturalesa de les variables la que aconsellarà incloure aquestes condicions o no. No obstant això, encara que les variables representen magnituds no divisibles (quantitat de cotxes produïts, per exemple) no resulta incorrecte resoldre el problema amb variables contínues i simplement una solució no entera es pot interpretar com que la producció d'aquest producte s'ha quedat en una fase intermèdia del procés productiu i s'acabarà en el període següent. En unes altres ocasions, les variables poden ser contínues (euros invertits en un actiu financer, per exemple) però quan s'intenta executar la solució òptima es troba algun requeriment d'haver d'invertir en paquets de 1.000 € o de 1.000 accions, per exemple, que aconsella replantejar el problema amb variables enteres. El subjecte decisor ha de valorar correctament els avantatges i inconvenients de tractar amb variables enteres.

D'altra banda hi ha problemes on les variables representen decisions i aquestes es representen amb variables binàries (valor 0 ó 1), un cas especial de les variables enteres. Això donarà lloc a enunciats específics de la programació lineal entera, alguns dels quals es detallen a continuació.

La resolució amb LINGO té com a fet diferencial l'ús de les funcions @GIN per a variables enteres generals i @BIN per a variables binàries. Quan s'interpreta la solució, ens limitarem al valor de les variables principals, de les variables de marge i de la funció objectiu.

### *2.4.1. Problema de motxilla*

El problema de motxilla té aquest nom perquè és el que s'aplicava a un excursionista que havia de decidir quins objectes havia de col·locar en la motxilla i quins no, tenint en compte la utilitat que li proporcionava cada objecte i l'espai que ocupava en la motxilla, que era limitat. Les variables són binàries perquè l'elecció és col·locar o no l'objecte i no té sentit endur-se dos objectes iguals o una fracció d'un objecte. Aquest mateix plantejament del problema de motxilla es pot aplicar en distints àmbits econòmics, sempre que s'haja de triar entre opcions alternatives que no es puguen fraccionar ni repetir: infraestructures, grans adquisicions, etc.

Les principals variants del problema apareixen si algunes de les alternatives són incompatibles entre elles (construir una autovia per l'interior o per la costa, per exemple) o si estem obligats a triar necessàriament una opció dins d'algun subconjunt d'opcions (triar obligatòriament un traçat de línia d'AVE entre 3 possibles amb distints pressupostos i rendibilitat esperada). En altres casos el problema de motxilla pot ser multidimensional, amb una restricció per cada magnitud que s'haja de limitar o de les quals exigir un nivell mínim.

**Problema 39.** Agnès se'n va de vacances amb una aerolínia de baix cost que li permet facturar un màxim de 15 quilos i portar-ne 10 més d'equipatge de mà. Ha pesat les maletes buides. La que pensa facturar pesa 4,1 quilos i la que portarà com a equipatge de mà, 2,5 quilos. Té una sèrie d'objectes que li agradaria portar. Per a cadascun d'ells ha estimat el benefici que li reportaria portar-lo i n'ha calculat el pes (en quilos). Les dades es mostren en la taula següent:

| | Objecte 1 | Objecte2 | Objecte3 | Objecte4 | Objecte5 | Objecte6 | Objecte7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| pes | 5 | 4 | 5 | 7 | 4 | 6 | 5 |
| benef. | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 0,1 | 0,4 | 0,7 | 0,2 |

A més, els objectes 2 i 7 no els pot portar en l'equipatge de mà i és necessari portar l'objecte 3.

Planteja el problema de programació matemàtica que resol el problema d'Agnès.

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables:

$x_i$: variables binàries que representen decisions de portar cada objecte en la maleta que pensa facturar (0 vol dir no portar-lo i 1 sí)

$y_i$: variables binàries que representen decisions de portar cada objecte en la maleta de mà (0 vol dir no portar-lo i 1 sí)

- Funció objectiu:

*B*: benefici de portar els objectes.

Direcció d'optimització: maximitzar.

Forma funcional:

$$I = 0{,}2(x_1 + y_1) + 0{,}3(x_2 + y_2) + 0{,}5(x_3 + y_3) + 0{,}1(x_4 + y_4) + 0{,}4(x_5 + y_5) + 0{,}7(x_6 + y_6) + 0{,}2(x_7 + y_7)$$

- Restriccions:

  Limitació de quilos en la maleta per a facturar (descomptant el pes en buit):

$$5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 5x_7 \leq 10{,}9$$

  Limitació de quilos en la maleta de mà (descomptant el pes en buit):

$$5y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 7y_4 + 4y_5 + 6y_6 + 5y_7 \leq 7{,}5$$

  Cada objecte sols es pot dur en una maleta:

$$x_i + y_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, 7$$

  Restriccions especials:

$$y_2 = 0, \qquad y_7 = 0, \qquad x_3 + y_3 = 1$$

- Condicions de domini:

$$x_i, y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 7$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$\begin{array}{ll} Max. & 0{,}2(x_1 + y_1) + 0{,}3(x_2 + y_2) + 0{,}5(x_3 + y_3) + 0{,}1(x_4 + y_4) + \\ & +0{,}4(x_5 + y_5) + 0{,}7(x_6 + y_6) + 0{,}2(x_7 + y_7) \\ s.a: & 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 5x_7 \leq 10{,}9 \\ & 5y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 7y_4 + 4y_5 + 6y_6 + 5y_7 \leq 7{,}5 \\ & x_i + y_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, 7 \\ & y_2 = 0, \ y_7 = 0, \ x_3 + y_3 = 1 \\ & x_i, y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 7 \end{array}$$

Plantejament i solució amb sintaxi avançada de LINGO

```
!Problema 39: problema de motxilla;

SETS:
Objecte/1..7/:x,y,benefici,pes;
ENDSETS

DATA:
benefici= 0.2 0.3 0.5 0.1 0.4 0.7 0.2;
pes= 5 4 5 7 4 6 5;
ENDDATA

!Funció objectiu;
[Benef] Max=@sum(objecte:benefici*(x+y));

!Restriccions;
[Maleta_facturar] @sum(objecte:pes*x)<10.9;
[Maleta_ma] @sum(objecte:pes*y)<7.5;
@for(objecte:x+y<1);
y(2)=0;
y(7)=0;
x(3)+y(3)=1;

!Condicions de domini;
@for(Objecte:@bin(x));
```

```
@for(Objecte:@bin(y));

           Variable           Value        Reduced Cost
              X( 1)        0.000000          -0.2000000
              X( 2)        0.000000          -0.3000000
              X( 3)        1.000000          -0.5000000
              X( 4)        0.000000          -0.1000000
              X( 5)        1.000000          -0.4000000
              X( 6)        0.000000          -0.7000000
              X( 7)        0.000000          -0.2000000
              Y( 1)        0.000000          -0.2000000
              Y( 2)        0.000000            0.000000
              Y( 3)        0.000000          -0.5000000
              Y( 4)        0.000000          -0.1000000
              Y( 5)        0.000000          -0.4000000
              Y( 6)        1.000000          -0.7000000
              Y( 7)        0.000000            0.000000

                Row    Slack or Surplus      Dual Price
              BENEF        1.600000            1.000000
     MALETA_FACTURAR       1.900000            0.000000
           MALETA_MA       1.500000            0.000000
                  4        1.000000            0.000000
                  5        1.000000            0.000000
                  6        0.000000            0.000000
                  7        1.000000            0.000000
                  8        0.000000            0.000000
                  9        0.000000            0.000000
                 10        1.000000            0.000000
                 11        0.000000           0.3000000
                 12        0.000000           0.2000000
                 13        0.000000            0.000000
```

<u>Interpretació i anàlisi</u>:

S'han de dur en la maleta per a facturar els objectes 3 i 6 i en la maleta de mà l'objecte 6. El pes de la maleta per a facturar serà 1,9 quilos per baix del màxim (pesarà 9 quilos d'objectes més 4,1 quilos del pes en buit igual a 13,1 quilos) i el de la maleta de mà serà d'1,5 quilos per baix del màxim (en total pesarà 6 quilos). El benefici màxim dels objectes que pot dur en la maleta assoleix un valor de 1,6.

### *2.4.2. Problema d'assignació*

Originalment aquest problema té l'objectiu d'assignar treballadors a llocs de treball de manera que es maximitze algun indicador de rendiment, eficiència o productivitat total. En el problema bàsic, amb *n* treballadors i llocs de treball, les restriccions s'ocupen d'assegurar que cada treballador ocupe un lloc de treball i que cada lloc de treball estiga ocupat per un treballador. Les variables del problema representen decisions d'assignar o no cada treballador a cada lloc de treball, és a dir, són binàries. A fi d'identificar-les és convenient utilitzar un doble subíndex, $x_{ij}$, per tal de representar si el treballador *i* s'assigna o no al lloc de treball *j*. La funció objectiu es genera multiplicant el rendiment de cada treballador en cada lloc de treball per la corresponent variable binària. Les restriccions tenen una estructura particular en dos blocs:

- Cada treballador *i* s'ha d'assignar a un lloc de treball:

$$x_{i1} + \cdots + x_{in} = 1$$

- Cada lloc de treball *j* ha d'estar ocupat per un treballador:

$$x_{1j} + \cdots + x_{nj} = 1$$

Les principals variants del problema inclouen la possibilitat que hi haja un distint nombre de treballadors i llocs de treball o que algun lloc de treball haja d'estar ocupat per més d'un treballador.

**Problema 40.** L'encarregat de recursos humans d'una gran empresa ha d'assignar als tres treballadors que s'encarreguen de la part comptable a tres tasques que fins ara realitzaven indistintament: tresoreria, finançament i comptabilitat. Després de passar-los un test de coneixements en els tres camps, obtenen una qualificació en cada part que indica el rendiment de cada treballador en cada lloc de treball. Les dades del test són:

| | Tresoreria | Finançament | Comptabilitat |
|---|---|---|---|
| Treballador 1 | 7'5 | 8'6 | 8'4 |
| Treballador 2 | 5'3 | 7'2 | 6'1 |
| Treballador 3 | 6'7 | 7'9 | 7'5 |

L'encarregat ha de decidir quin treballador assigna a cada tasca per maximitzar el rendiment total.

Modelització:

- Identificació de variables:

$x_{ij}$ representa la decisió d'assignar el treballador *i* al lloc de treball *j* (en el mateix ordre en què apareixen en la taula de dades). Són variables binàries de manera que un valor 1 significa que sí que s'assigna i un valor 0, que no.

- Funció objectiu:

*R*: indicador d'eficiència o rendiment total.

Direcció d'optimització: maximitzar.

Forma funcional: $R = 7{,}5x_{11} + 8{,}6x_{12} + 8{,}4x_{13} + 5{,}3x_{21} + 7{,}2x_{22} + 6{,}1x_{23} +$
$+6{,}7x_{31} + 7{,}9x_{32} + 7{,}5x_{33}$

- Restriccions:

Cada treballador a un lloc de treball:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1$$

Cada lloc de treball ocupat per un treballador:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1$$

- Condicions de domini:

  Variables binàries $x_{ij}\in\{0,1\},\ \forall i=1,2,3;\ \ \forall j=1,2,3$

- Enunciat complet del problema:

$$Max.\quad 7{,}5x_{11}+8{,}6x_{12}+8{,}4x_{13}+5{,}3x_{21}+7{,}2x_{22}+6{,}1x_{23}+6{,}7x_{31}+7{,}9x_{32}+7{,}5x_{33}$$

$$\begin{aligned} s.a: \quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}=1\\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}=1\\ & x_{31}+x_{32}+x_{33}=1\\ & x_{11}+x_{21}+x_{31}=1\\ & x_{12}+x_{22}+x_{32}=1\\ & x_{13}+x_{23}+x_{33}=1\\ & x_{ij}\in\{0,1\},\qquad \forall i=1,2,3;\ \ \forall j=1,2,3 \end{aligned}$$

Plantejament i solució amb sintaxi avançada de LINGO

```
!Problema 40: problema d'assignació;

SETS:
Treballador/1..3/;
Lloc/Tresoreria,Financament,Comptabilitat/;
Matriu(Treballador,Lloc):x,test;
ENDSETS

DATA:
test= 7.5 8.6 8.4
   5.3 7.2 6.1
   6.7 7.9 7.5;
ENDDATA

!Funció objectiu;
[Rendiment] Max=@sum(matriu:test*x);

!Restriccions;
@for(treballador(i): [assignar_treballador] @sum(lloc(j): x(i,j))=1);
@for(lloc(j): [assignar_lloc] @sum(treballador(i): x(i,j))=1);

!Condicions de domini;
@for(Matriu:@bin(x));

                Variable        Value         Reduced Cost
        X( 1, TRESORERIA)       0.000000           -7.500000
       X( 1, FINANCAMENT)       0.000000           -8.600000
     X( 1, COMPTABILITAT)       1.000000           -8.400000
        X( 2, TRESORERIA)       0.000000           -5.300000
       X( 2, FINANCAMENT)       1.000000           -7.200000
     X( 2, COMPTABILITAT)       0.000000           -6.100000
```

```
        X( 3, TRESORERIA)        1.000000           -6.700000
       X( 3, FINANCAMENT)        0.000000           -7.900000
     X( 3, COMPTABILITAT)        0.000000           -7.500000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                   RENDIMENT         22.30000            1.000000
       ASSIGNAR_TREBALLADOR( 1)      0.000000            0.000000
       ASSIGNAR_TREBALLADOR( 2)      0.000000            0.000000
       ASSIGNAR_TREBALLADOR( 3)      0.000000            0.000000
     ASSIGNAR_LLOC( TRESORERIA)      0.000000            0.000000
    ASSIGNAR_LLOC( FINANCAMENT)      0.000000            0.000000
  ASSIGNAR_LLOC( COMPTABILITAT)      0.000000            0.000000
```

<u>Interpretació i anàlisi</u>: el treballador 1 s'assignarà a comptabilitat, el treballador 2, a finançament i el treballador 3, a tresoreria. La suma dels resultats del test com a aproximació del rendiment és 22'3. Les característiques del problema, restriccions d'igualtat i variables binàries, no permeten fer més interpretacions econòmiques.

### *2.4.3. Problema de localització*

El problema bàsic de localització tracta de determinar en quines ciutats s'han de localitzar les fàbriques o magatzems per tal que el cost de transport als centres de demanda siga mínim. A diferència del problema de transport, els centres d'origen no són coneguts i cal triar-los entre un conjunt de possibilitats.

A part d'algunes característiques que hem vist en el problema de transport, ara s'ha de decidir, mitjançant variables binàries, si el magatzem es localitza o no en cada ciutat. Això afecta a les restriccions de disponibilitat en cada origen, que adoptaran una estructura especial. Per exemple, si les quantitats transportades del primer origen a cada destinació $j$ s'anomenen $x_{1j}$ i la quantitat disponible en el primer origen (en cas de localitzar allí la fàbrica) és de 1.000 unitats, la restricció de no excedir la disponibilitat quedarà:

$$x_{11} + \cdots + x_{1n} \leq 1000y_1$$

on $y_1$ és la variable binària que representa la decisió de localitzar o no la fàbrica en el primer origen.

D'altra banda, el bloc de restriccions de requeriments de demanda en cada destinació no patirà cap canvi respecte al problema de transport. El problema pot tindre variants si es pot instal·lar més d'una fàbrica en les ciutats, si s'exigeix instal·lar una fàbrica obligatòriament en un subconjunt de ciutats, etc.

**Problema 41.** Una empresa de productes cosmètics de dona vol construir tres laboratoris a la província d'Alacant. Tria les sis localitats amb major nombre de dones segons el padró municipal, i estima que la demanda mínima d'unitats del seu producte és aproximadament el 15% de la població.

| | Nre. dones | Demanda |
|---|---|---|
| Alacant | 172.183 | 25.827 |
| Elx | 115.707 | 17.356 |
| Torrevella | 52.178 | 7.827 |
| Oriola | 45.508 | 6.826 |
| Benidorm | 36.611 | 5.492 |
| Alcoi | 30.894 | 4.634 |

Els laboratoris tenen una capacitat de 24.000 unitats de producte. Calcula en quines ciutats ha d’instal·lar els laboratoris, no més d'un per ciutat, i quina quantitat de producte se subministrarà de cada laboratori a cada ciutat, si els costos de transport són de 0,003 € per unitat de producte i quilòmetre de distància, atesa la taula de distàncies següent (en quilòmetres):

| | Alacant | Elx | Torrevella | Oriola | Benidorm | Alcoi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Alacant | 0 | 27 | 49 | 56 | 45 | 60 |
| Elx | 27 | 0 | 45 | 33 | 72 | 75 |
| Torrevella | 49 | 45 | 0 | 34 | 113 | 116 |
| Oriola | 56 | 33 | 34 | 0 | 104 | 106 |
| Benidorm | 45 | 72 | 113 | 104 | 0 | 92 |
| Alcoi | 60 | 75 | 116 | 106 | 92 | 0 |

Modelització:

- Identificació de variables:

  $x_{ij}$ representa les unitats transportades de la ciutat $i$ a la ciutat $j$.

  $y_i$: són variables binàries que representen les decisions de localització, de manera que un valor 1 significa que sí que es localitza el laboratori en la ciutat $i$.

- Funció objectiu:

  $C$: cost total de transport (en euros).

  Direcció d’optimització: minimitzar.

  Forma funcional: $C = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} 0{,}003 d_{ij}\, x_{ij}$

  on $d_{ji}$ són les distàncies entre les ciutats.

- Restriccions:

  Limitacions en les ciutats d’origen:

$$\sum_{j=1}^{6} x_{ij} \leq 24000 y_i\,, \quad \forall i = 1,..,6$$

Requeriments de demanda en les ciutats de destinació:

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} \geq d_j\,, \quad \forall j = 1,..,6$$

on $d_j$ són les demandes de producte en cada ciutat.
Localització de tres laboratoris:

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = 3$$

- Condicions de domini:

Variables no negatives per a les quantitats transportades i variables binàries per a les decisions de localització:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6; \quad \forall j = 1, \ldots, 6$$

$$y_i \in \{0,1\}, \qquad \forall i = 1, \ldots, 6$$

- Enunciat complet del problema:

$$Min. \qquad \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} 0{,}003 d_{ij}\, x_{ij}$$

$$s.a: \quad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{6} x_{ij} \leq 24000 y_i\,, \quad \forall i = 1,..,6 \\ &\sum_{i=1}^{6} x_{ij} \geq d_j\,, \quad \forall j = 1,..,6 \\ &\sum_{i=1}^{6} y_i = 3 \\ &x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6; \quad \forall j = 1, \ldots, 6 \\ &y_i \in \{0,1\}, \qquad \forall i = 1, \ldots, 6 \end{aligned}$$

Plantejament i solució amb sintaxi avançada de LINGO

```
!Problema 41: problema de localització;

sets:
ciutats/1..6/:demanda,y;
matriu(ciutats,ciutats):d,x;
end sets

data:
demanda= 25827 17356 7827 6826 5492 4634;
d= 0 27 49 56 45 60
  27 0  45 33 72 75
  49 45 0  34 113 116
  56 33 34 0  104 106
  45 72 113 104 0 92
  60 75 116 106 92 0;
```

```
end data

!Función objetivo;
min=@sum(matriu:0.003*d*x);

!Restricciones;

!Nombre laboratoris;
[total] @sum(ciutats:y)=3;

!Demanda;
@for(ciutats(j):[destinacio] @sum(ciutats(i):x(i,j))>demanda(j) );

!Capacitat;
@for(ciutats(i):[origen]  @sum(ciutats(j):x(i,j))<24000*y(i) );

!Condicions de domini;
@for(ciutats:@bin(y));
```

```
Solució per a les variables distintes de zero:

                    Variable           Value        Reduced Cost
                       Y( 1)        1.000000           -3528.000
                       Y( 2)        1.000000           -1584.000
                       Y( 3)        1.000000            0.000000
                       Y( 4)        0.000000           -2448.000
                       Y( 5)        0.000000           -6768.000
                       Y( 6)        0.000000           -6984.000
                    X( 1, 1)        20518.00            0.000000
                    X( 1, 5)        3482.000            0.000000
                    X( 2, 2)        17356.00            0.000000
                    X( 2, 5)        2010.000            0.000000
                    X( 2, 6)        4634.000            0.000000
                    X( 3, 1)        5309.000            0.000000
                    X( 3, 3)        7827.000            0.000000
                    X( 3, 4)        6826.000            0.000000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           1        3423.555           -1.000000
                  ORIGEN( 3)        4038.000            0.000000
```

<u>Interpretació i anàlisi</u>: els laboratoris s'han de localitzar en Alacant, Elx i Torrevella. D'Alacant han d'eixir 20.518 unitats a la pròpia Alacant i 3.482 a Benidorm. D'Elx han d'eixir 17.356 unitats a Elx, 2.010 a Benidorm i 4.634 a Alcoi i de Torrevella han d'eixir 5.309 unitats a Alacant, 7.827 a Torrevella i 6.826 a Oriola. El cost total de transport es de 3.423,55 euros. Per últim, en el laboratori de Torrevella quedaran 4.038 unitats de producte sense distribuir.

# PART 3. ENUNCIATS DE PROBLEMES DE MODELITZACIÓ I RESOLUCIÓ AMB LINGO

En tots els enunciats dels problemes que apareixen a continuació cal fer la modelització completa (inclosa la identificació de variables), la resolució amb LINGO i la interpretació econòmica de la solució en tots aquells aspectes rellevants.

## 3.1. Programació no lineal

**1.** ***Problema del consumidor*** Un consumidor vol maximitzar la utilitat del consum al llarg del cicle de vida, dividida en dues etapes, l'activa i la de jubilat. La funció d'utilitat és separable additiva i logarítmica: $U(c_1, c_2) = \ln c_1 + 0{,}5 \ln c_2$. La restricció pressupostària indica que el consum en la segona etapa, $c_2$, no pot excedir l'estalvi (renda de l'etapa activa, *Y*=30, menys consum de la primera etapa, $c_1$) més el rendiment d'aquest estalvi a un tipus d'interès *r*=0,4.

a) Determineu els consums òptims de cada etapa que maximitzen la utilitat.
b) Si el tipus d'interès augmenta, *r*=0,5, calculeu la nova solució òptima i raoneu l'efecte econòmicament: com canvia la preferència pel consum en les dues etapes? L'augment del tipus d'interès fa augmentar l'estalvi?
c) Si el consumidor tinguera una renda superior, *Y*=33, raoneu sense tornar a resoldre el problema l'efecte sobre la utilitat. Resoleu el problema, calculeu l'efecte exacte sobre la utilitat i raoneu si els consums en les dues etapes són béns normals o inferiors.

**2.** ***Preus decreixents*** Els preus de venda dels dos productes($p_i$, en euros) d'una empresa són decreixents amb la quantitat produïda ($q_i$, en tones) segons les funcions $p_1 = -q_1 + 48 - {}^{300}/_{q_1}$ i $p_2 = -q_2 + 64 - {}^{400}/_{q_2}$, respectivament. Calculeu les quantitats produïdes que maximitzen els ingressos totals si la producció conjunta dels dos productes no pot excedir les 50 tones.

**3.** ***Costos creixents*** El cost variable ($c_i$ en euros) d'extraure dos tipus de carbó és creixent amb la quantitat extreta ($q_i$ en tones) segons les funcions següents $c_1 = 0{,}5q_1 + 14$ i $c_2 = 0{,}8q_2 + 18$. Els costos fixos són de 2.400 €. Els preus de venda de cada tona de carbó són de $p_1 = 68$ € i $p_2 = 84$ €. Si cada tona del primer tipus necessita un treballador i cada tona del segon, dos treballadors i tenim un màxim de 120 treballadors, determineu quantes tones s'han d'extraure de cada tipus de carbó per a maximitzar beneficis.

**4.** ***Preus decreixents i costos creixents*** Una empresa produeix tres tipus d'oli d'oliva: normal, verge i extraverge. Els costos totals en euros són $C(x_1, x_2, x_3) = 120 + 0{,}002x_1^2 + 0{,}003x_2^2 + 0{,}004x_3^2$, on $x_i$ són els litres de cada tipus d'oli, respectivament, mentre que els preus unitaris de venda són una funció decreixent de la quantitat produïda: $p_1 = 2{,}4 - 0{,}002x_1,\ \ p_2 = 2{,}8 - 0{,}0025x_2,\ \ p_3 = 3{,}2 - 0{,}003x_3$. Suposant que tota la producció es ven i que la collita d'olives permet produir com a màxim 500 litres d'oli, calculeu quants litres s'han de produir de cada tipus d'oli per a maximitzar-ne el benefici.

**5.** ***Problema de l'empresa*** Una Economia disposa de tres factors productius (capital, *K*; treball, *L*; i despesa pública, *G*) per a obtenir l'únic producte final (*Y*), el valor del qual en milions d'euros és $Y = 50K^{0,5}L^{0,3}G^{0,2}$. Els preus unitaris (en euros) dels factors productius són $p_K = 60000$; $p_L = 15$; $p_G = 120000$; on les unitats de capital i despesa pública estan en milions d'euros i les unitats de treball, en hores. Si la producció mínima desitjada de l'Economia és de 150.000 milions d'euros:

a) Calculeu les quantitats que s'utilitzaran de cada factor productiu per a minimitzar el cost.

b) Resoleu el problema si l'Economia és més eficient, *A*=55 en la funció de producció, i compareu la solució òptima amb l'original.

c) Resoleu el problema si apuja el preu de la despesa pública, $p_G = 150000$, i compareu la solució òptima (sobretot la intensitat en l'ús de cada factor productiu) amb l'original.

d) Sense resoldre el problema, raoneu com canviaria el cost òptim si puja la producció mínima desitjada un 2%.

**6.** ***Selecció de cartera***

a) Planteja i resol un problema de selecció de cartera per tal de distribuir una inversió entre mercats desenvolupats i emergents si es vol minimitzar el risc i la matriu de variàncies i covariàncies és $V = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

b) Igual si, a més a més, volem obtenir una rendibilitat mínima del 8%, i la rendibilitat esperada en mercats desenvolupats és del 5% i en emergents del 15%.
c) Raoneu, sense tornar a resoldre el problema, l'efecte d'una disminució de la rendibilitat mínima al 7,5%.

**7.** ***Fiscalitat òptima*** Amb 14 milions de persones que cotitzen en el règim general de la seguretat social i un 23,6% de tipus de cotització sobre el salari mitjà anual de 19.500 € es recapten 64.428 milions d'euros. S'estima que per cada punt percentual que baixa el tipus de cotització les persones que cotitzen augmentarien un 5%.

a) Calculeu el tipus de cotització i les persones que cotitzaran si volem que la recaptació siga màxima, assumint que el salari no canvia.
b) Calculeu el tipus de cotització i les persones que cotitzaran si volem que la recaptació siga màxima si el salari apuja un 1% per cada punt percentual que baixa el tipus de cotització.

**8.** ***Desviacions quadràtiques*** En una Economia simplificada, el sector públic recapta impostos sobre la renda (*Y*) i aplica un tipus impositiu igual a *t* i impostos sobre el consum (*C*) aplicant un tipus impositiu igual a $r$. Amb la recaptació total ha de pagar la despesa pública ($G$). Per motius econòmics i demogràfics, s'ha trencat l'equilibri pressupostari i s'han d'ajustar els tipus impositius i/o ajustar la despesa pública en una taxa igual a $g$, mantenint l'equilibri pressupostari: $tY + rC = G(1-g)$. La situació de partida era d'equilibri amb uns valors $t_0 = 0{,}28$, $r_0 = 0{,}21$, $g_0 = 0$. L'Estat vol desviar-se el mínim possible d'aquests valors però mantenint l'equilibri.

Si els valors esperats de les variables macroeconòmiques són *Y*=950, *C*=760 i la despesa desitjada abans de l'ajust és la mateixa que l'any anterior G=448, calculeu:

a) Els tipus impositius i la taxa d'ajust de la despesa pública per a minimitzar les desviacions quadràtiques respecte als valors de partida si les desviacions tenen la mateixa ponderació: $Min.\ (t-0{,}28)^2 + (r-0{,}21)^2 + g^2$
b) El mateix si ponderem el doble les desviacions en la despesa pública: $Min.\ (t-0{,}28)^2 + (r-0{,}21)^2 + 2g^2$

## 3.2. Programació lineal

**9.** ***Producció amb recursos limitats*** En una pastisseria es fan pastissos de poma, de nous i d'ametlla amb recursos limitats de pasta fullada, crema pastissera, temps de màquina i temps de mà d'obra. Els preus de venda de cada tipus de pastís, les existències de cada recurs i els requeriments per pastís són els de la taula següent:

| | Pastís de poma | Pastís de nous | Pastís d'ametlla | Limitacions |
|---|---|---|---|---|
| Pasta fullada | 50 gr | 80 gr | 40 gr | 28,2 kg |
| Crema pastissera | 30 gr | 20 gr | 20 gr | 17 kg |
| Temps màquina | 1'40" | 1'30" | 3'20" | 25 hores |
| Temps mà d'obra | 5' | 6' | 4' | 43 hores |
| Preu venda (€/unitat) | 1,3 | 1,5 | 1,4 | |

Calculeu la quantitat de cada tipus de pastís que maximitza els ingressos.

**10.** ***Producció amb recursos limitats*** Una empresa de regals d'empresa prepara tres classes de caixes de vins. La caixa Excel està formada per 4 botelles de vi negre de reserva i 2 de vi blanc. La caixa Plus està formada per 2 botelles de vi negre reserva, 2 botelles de vi negre criança i 2 botelles de vi blanc. La caixa Estàndard està formada per 3 botelles de vi negre criança i 3 botelles de vi blanc. Els preus de cada caixa són de 80 € l'Excel, 65 € la Plus i 40 € l'Estàndard. Si disposa de 500 botelles de vi negre reserva, 590 botelles de vi negre criança i 610 botelles de vi blanc, i tenint en compte que de caixes Excel ha de preparar-ne almenys 50 però no més que de les altres dues conjuntament, calculeu quantes caixes de cada tipus ha de preparar per a maximitzar els ingressos. Cal plantejar el problema amb variables enteres?

**11.** ***Producció i transport*** Una empresa té dues plantes de piscines prefabricades. La primera té un cost de fabricació més baix perquè és més eficient, però està més lluny de dues grans ciutats on s'ha de transportar el producte. Els costos unitaris i de transport són els següents:

| | Cost unitari de fabricació (€) | Cost unitari de transport a València (€) | Cost unitari de transport a Castelló (€) |
|---|---|---|---|
| **Planta d'Alcora** | 2200 | 440 | 120 |
| **Planta de Sagunt** | 2600 | 100 | 180 |
| **Demanda (unitats)** | | 85 | 35 |

Calculeu quantes unitats ha de produir en cada planta i quantes n'ha de transportar de cada planta a cada ciutat per a minimitzar el cost conjunt de fabricació i transport, tenint en compte que la capacitat màxima de cada planta és de 70 unitats.

**12.** ***Transport amb transbord*** Tres centres de producció han de dur un producte a dos centres intermedis on s'han d'etiquetar i després s'han de distribuir a tres grans centres comercials. En els centres de producció A, B i C n'hi ha 5.000, 3.000 i 7.500 unitats, respectivament. En cada centre intermedi, N i M, s'admeten com a molt 9.000 i 6.000 unitats, respectivament. En cada centre comercial, X, Y i Z es requereixen 3.000, 4.000 i 8.000 unitats. Els costos de transport unitari (en cèntims d'euro) són els següents entre cada centre:

| | M | N | | M | N | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 12 | 17 | | 19 | 32 | X |
| B | 8 | 22 | | 15 | 25 | Y |
| C | 18 | 15 | | 28 | 21 | Z |

Calculeu les quantitats transportades dels centres de producció als centres intermedis i dels centres intermedis als centres comercials per a minimitzar els costos de transport totals.

**13.** ***Planificació financiera*** Un gestor de patrimonis disposa de 200 milers d'euros d'un client i de 300 milers d'euros d'un altre client. El primer client és més arriscat i vol invertir entre el 35% i el 60% dels diners en renda variable, almenys el 30% en dòlars i un màxim del 25% en renda variable no euros. El segon és més prudent i vol invertir almenys un 60% en renda fixa en euros i no més del 20% en renda variable. El gestor estima una rendibilitat probable per a cada actiu d'inversió, però també assigna una rendibilitat en un escenari menys probable. Les dades de cada actiu són les següents:

| Actiu | Tipus rendiment | Divisa | Rendibilitat més probable | Rendibilitat menys probable |
|---|---|---|---|---|
| **Bons U.S. Treasury** | Fix | Dòlar | 3% | 1% |
| **Accions Microsoft** | Variable | Dòlar | 12% | -5% |
| **Bons Alemanya** | Fix | Euro | 2% | 2% |
| **Accions France Telecom** | Variable | Euro | 15% | -10% |
| **Bons tresor espanyol** | Fix | Euro | 5% | 1% |
| **Accions Telefónica** | Variable | Euro | 20% | -12% |
| **Accions Sony** | Variable | Yen | 10% | -2% |

a) El gestor vol decidir quina quantitat de diners de cada client inverteix en cada actiu per a maximitzar el rendiment conjunt sota l'escenari més probable, però assegurant que en el cas menys probable la rendibilitat conjunta dels dos clients no serà negativa.

b) Calculeu la rendibilitat de cada client en el cas més probable i en el menys probable si se segueix la inversió òptima de l'apartat anterior.

**14.** ***Problema de la dieta*** Una granja de conills vol establir la dieta de mínim cost. Disposa de 5 aliments bàsics amb una composició distinta de 4 fonts d'energia. Les dades del problema són:

| Composició per ració diària | Fibra (gr) | Proteïna (gr) | Greix (gr) | Calci (gr) | Preu per ració diària (cèntims d'€) |
|---|---|---|---|---|---|
| **Pinso (ració de 20 gr)** | 9 | 7 | 0,5 | 0,25 | 3 |
| **Fenc (ració de 30 gr)** | 18 | 2 | 0,1 | 0 | 1,5 |
| **Vegetals (un feix)** | 7 | 0 | 0 | 0,2 | 0,8 |
| **Fruita (1/4 de peça)** | 4 | 0 | 0 | 0,4 | 8 |
| **Aigua (ració de 20 ml)** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,001 |
| **Necessitats diàries** | 44 | 14 | 1,5 | 0,51 | |

Cada ració de pinso ha d'anar acompanyada d'una d'aigua com a mínim. Les racions conjuntes de vegetals i fruita han de ser com a mínim un terç de les racions de pinso. Com a màxim ha d'ingerir 80 grams en forma de pinso i fenc. Determineu les racions diàries de cada aliment bàsic que minimitzen el cost de la dieta.

**15.** ***Problema d'inventari*** Una empresa es dedica a comprar, emmagatzemar i vendre dosis de vacuna antigripal per a països desenvolupats. Fa les compres a l'inici de l'agost, setembre i octubre i les ven al final d'aquests mesos, motiu pel qual incorre en un cost d'emmagatzematge mensual. Al final d'octubre, les vacunes no venudes no tenen cap valor. Les demandes màximes de vacunes de cada mes, el cost unitari de les compres, el preu unitari de les vendes i el cost unitari d'emmagatzematge són els següents:

| | Agost | Setembre | Octubre |
|---|---|---|---|
| **Cost compra (€ per dosi)** | 1,44 | 1,52 | 1,66 |
| **Preu venda (€ per dosi)** | 1,78 | 1,95 | 2,16 |
| **Cost emmagatzematge (€ per dosi)** | 0,08 | 0,08 | 0,08 |
| **Demandes màximes (milions de dosis)** | 12,5 | 18 | 16 |

La capacitat màxima del magatzem és de 20 milions de dosis. Determineu les compres i vendes de dosis en cada mes per a maximitzar el benefici.

**16.** ***Problema Maximin*** Un inversor planteja dos escenaris per a l'any següent: que desaparega l'euro com a moneda única o que es mantinga. Té tres opcions d'inversió en distints països i vol ponderar adequadament cada inversió a fi de guanyar el màxim possible. Els guanys de cada inversió completa en cada país segons cada escenari són els següents:

| Guanys (milers €) | Inversió a Alemanya | Inversió a Espanya | Inversió a la Xina |
|---|---|---|---|
| **Desapareix l'euro** | 230 | 120 | 140 |
| **Es manté l'euro** | 140 | 200 | 170 |

Determineu la ponderació de cada inversió (suma de les ponderacions igual a 1) per a maximitzar els guanys en el pitjor dels casos (estratègia *maximin*), suposant que la inversió és divisible.

**17.** ***Problema multiobjectiu*** Una indústria pot realitzar el procés productiu mitjançant tres tècniques o alguna combinació entre aquestes. Cada tècnica suposa l'emissió de gasos contaminants. La taula següent mostra l'emissió de cada gas (un valor major que 1 significa excedir la normativa legal):

| Tècnica | $CO_2$ | $SO_2$ | $NO_2$ |
|---|---|---|---|
| **A** | 1,3 | 0,5 | 0,2 |
| **B** | 0,6 | 0,6 | 1,2 |
| **C** | 0,3 | 1,4 | 0,6 |

Suposant que les emissions es combinen linealment, determineu la combinació òptima de les tres tècniques (la suma ha de ser igual a 1) sota cadascun dels següents criteris:

a) Minimitzar la suma de les tres emissions sense excedir la normativa legal de cadascun.
b) Minimitzar el màxim nivell d'emissió de cada gas (criteri *minimax*).

**18.** ***Problema de mescles*** Una empresa de productes cosmètics vol produir una nova crema de protecció solar amb factor de protecció entre 15 i 20 i amb una densitat major que 1,5 gr/mm$^3$. Els ingredients són dues cremes solars que no han tingut acceptació en el mercat perquè els factors de protecció són massa extremats i una solució aquosa perfumada amb contingut de rosa mosqueta. Les característiques i els preus de cada ingredient són:

| | Crema solar intensa | Crema solar lleugera | Solució aquosa |
|---|---|---|---|
| **Factor protecció** | 60 | 10 | 0 |
| **Densitat** | 2 gr/mm$^3$ | 1,6 gr/mm$^3$ | 1,05 gr/mm$^3$ |
| **Preu (€ per 100 ml)** | 1,55 | 1,30 | 0,55 |

Calculeu la forma òptima de combinar els tres ingredients per a minimitzar el cost del producte nou respectant les especificacions requerides, sabent que no hi ha pèrdues en la mescla.

**19.** ***Seqüència de tasques*** Una empresa ha de decidir com encadena un conjunt de tasques per tal d'acabar una obra. La primera tasca (A) comença avui i acaba 25 dies després. La tasca B tarda 20 dies i solament pot començar quan la tasca A haja completat 10 dies. La tasca C dura 40 dies i necessita que s'haja completat totalment la tasca A. La tasca D acaba en 22 dies i requereix que tant la tasca B com la C s'hagen completat en un 40%. La tasca E tarda 12 dies a completar-se i no es pot començar fins que no haja acabat la tasca B. Per últim, la tasca F ha de començar com a molt prompte quan haja acabat la tasca E i quan finalitze, 45 dies després, han d'estar acabades la resta de tasques. Calculeu quin dia ha de començar cada tasca després del començament de la A per tal d'acabar l'obra en el menor temps possible.

## 3.3. Programació lineal entera

**20.** ***Producció amb recursos limitats*** Una empresa de l'Horta nord es dedica al conreu ecològic de verdures. Cada setmana prepara 3 tipus de basquets, tots amb verdura variada segons la producció setmanal però amb distintes quantitats de tomaques, creïlles i cebes. En el basquet tipus 1 inclou 2 quilos de tomaques, 2 de creïlles i 1 de cebes. En el basquet tipus 2 inclou 1,5 quilos de tomaques, 3 quilos de creïlles i 2 de cebes. En el basquet 3 inclou 3 quilos de tomaques, 3 de creïlles i 1,5 de cebes. La producció setmanal ha sigut de 80 quilos de tomaques, 90 de creïlles i 50 de cebes. Si els preus de venda de cada tipus de basquet són de 18 €, 20 € i 22 €, respectivament, calculeu quants basquets ha de preparar de cada tipus per a maximitzar els ingressos si ven com a màxim 40 basquets.

**21.** ***Assignació*** Un equip de triatló vol presentar-se a una competició de triatló per relleus i ha de triar un nadador, un ciclista i un corredor per a fer la distància en el menor temps possible. Els 5 millors membres del club tenen les marques següents en cada segment:

| | 1.500 metres natació | 40 quilòmetres ciclisme | 10 quilòmetres de cursa |
|---|---|---|---|
| **Albert** | 22:35 | 1:01:34 | 34:25 |
| **Ximo** | 21:45 | 1:00:45 | 32:52 |
| **Emili** | 20:32 | 1:00:25 | 31:57 |
| **Josep** | 21:12 | 1:01:21 | 32:15 |
| **Marc** | 22:19 | 1:00:38 | 33:25 |

Decideix quins serien els components de l'equip i quin segment faria cada un.

**22.** ***Motxilla*** Un ajuntament vol rehabilitar un espai rústic pròxim al municipi de 25.000 m$^2$ a fi de destinar-lo a zona d'oci. Disposa de diverses opcions amb distints costos de construcció, de manteniment, d'espai requerit i d'usuaris previstos. Aquesta informació apareix en la taula següent:

| Instal·lació | Cost inicial (milers d'€) | Cost manteniment anual (milers d'€) | Espai requerit (m$^2$) | Usuaris previstos |
|---|---|---|---|---|
| **Camp futbol 7** | 120 | 8 | 2.500 | 800 |
| **Pista tennis terra batuda** | 80 | 6 | 1.200 | 500 |
| **Pista tennis normal** | 50 | 4 | 1.200 | 400 |
| **Pista pàdel** | 30 | 3 | 400 | 300 |
| **Pavelló poliesportiu cobert** | 200 | 25 | 3.000 | 1.300 |
| **Zona pícnic gran** | 25 | 2 | 20.000 | 1.200 |
| **Zona pícnic menuda** | 15 | 1 | 10.000 | 1.000 |

L'ajuntament disposa d'una subvenció d'un quart de milió d'euros per a la rehabilitació i de 30.000 € del pressupost de cada any per al manteniment. Decidiu quines instal·lacions s'elegiran si volem maximitzar el nombre d'usuaris, tenint en compte que són incompatibles entre elles les dues pistes de tennis i les dues zones de pícnic.

**23.** ***Inventari*** Una cooperativa de taronja de la Safor ha d'enviar camions de taronja al mercat de Madrid. Els camions han d'anar complets, amb 15.000 quilos de taronja, però no pot enviar més de 4 camions al dia. Les vendes (en quilos) de cada dia de la setmana són:

| Dilluns | Dimarts | Dimecres | Dijous | Divendres |
|---|---|---|---|---|
| 43.000 | 32.000 | 47.000 | 56.000 | 77.000 |

Calculeu quants camions han d'anar cada dia per a minimitzar els costos de conservació de la taronja no venuda (2 cèntims per quilo i dia). Nota: les dades estan ajustades perquè no queden existències el divendres.

**24.** ***Problema d'inversió*** Un inversor disposa de 870.000 € provinents d'un premi a fi d'invertir en quatre actius.

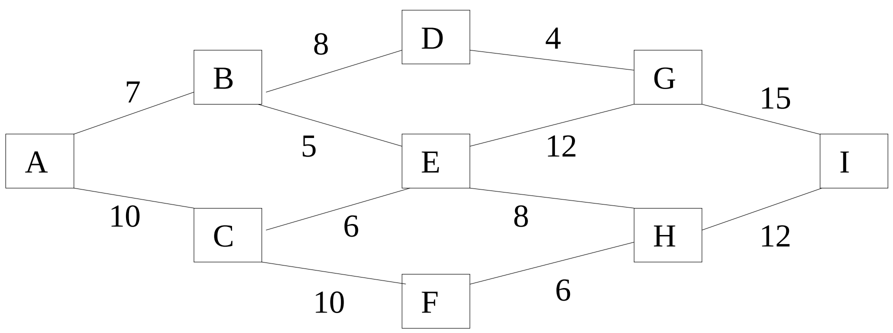
- Actiu 1: Dipòsit a termini fix amb una rendibilitat del 4,25% bruta anual amb un pagament impositiu del 21% dels interessos. L'import del dipòsit no pot superar els 300.000 €.
- Actiu 2: Accions d'Inditex a 100 € cadascuna. Té dos tipus de rendiment: els dividends generats durant l'any s'estimen en un 3% (amb un pagament impositiu del 21% dels dividends) i la plusvàlua quan es venguen les accions s'estima en un 8% (amb un pagament impositiu del 52% de les plusvàlues obtingudes). Les accions no són divisibles.
- Actiu 3: Fons d'inversió al 3% de rendibilitat. El pagament impositiu és del 2% dels guanys.
- Actiu 4: Compra d'un unifamiliar per 480.000 €. Els ingressos que obtindria pel lloguer serien de 24.000 € i el cost impositiu és del 26% d'aquests ingressos. S'estima que el valor de la casa seria el mateix al final de l'any.

Per a limitar el risc dels actius 2 i 4, la inversió conjunta en els dos no pot superar els 2/3 del capital disponible i la inversió en l'actiu 2 no pot superar 1/3 del capital. Calculeu la quantitat de diners que cal invertir en els actius 1 i 3, el nombre d'accions que cal comprar de l'actiu 2 i si es compra o no l'unifamiliar, per a maximitzar els ingressos anuals després d'impostos.

**25.** ***Problema de lot mínim*** Torneu a resoldre el problema 24 si, en cas d'invertir en el fons d'inversió (actiu 3), no s'accepten inversions inferiors a 300.000 €.

**26.** ***Funcions a trossos*** Torneu a resoldre el problema 24 si la rendibilitat del fons d'inversió és del 2% en cas d'invertir menys de 300.000 € i es manté el 3% si la inversió supera aquesta quantitat (les rendibilitats s'apliquen a tota la quantitat invertida).

**27.** ***Problema del camí més curt*** Una persona ha de desplaçar-se des d'una ciutat A fins una ciutat I. El mapa de carreteres i distàncies és el següent:




Es demana que:

a) Calculeu el camí més curt.

b) Calculeu el camí alternatiu més curt si es talla per pluja la carretera de la ciutat E a la H.