REFERENCIA: Gutiérrez-Soto, J., Arnau, D. & González-Calero, J.A. (2015). Un estudio exploratorio sobre el uso de DragnBox Algebra© como una herramienta para la enseñanza de la resolución de ecuaciones. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1). Enlace web: http://www.revista.uclm.es/index.php/ensayos - Consultada en fecha (dd-mm-aaaa)

UN ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL USO DE *DRAGONBOX ALGEBRA©* COMO UNA HERRAMIENTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

AN EXPLORATORY STUDY ON USING *DRAGONBOX ALGEBRA©* AS A TOOL FOR TEACHING EQUATION SOLVING SKILLS

Juan Gutiérrez-Soto
David Arnau
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidat de València
José Antonio González-Calero
Departamento de Matemáticas. Universidad de Castilla-La Mancha

Recibido: 15/04/2015
Aceptado: 17/06/2015

Resumen:
Numerosos estudios han analizado el papel del uso de distintos sistemas de representación como una forma de favorecer el aprendizaje de la manipulación de las expresiones algebraicas. La introducción de las nuevas tecnologías en el campo de la educación matemática ha posibilitado la utilización simultánea de distintos sistemas de representación. Han aparecido diversas aplicaciones que utilizan representaciones físicas de la ecuación como podría ser balanzas o áreas para dar significado a las manipulaciones algebraicas. Sin embargo, el uso de modelos reales plantea la dificultad de trasladar las acciones que realizamos en el soporte físico al lenguaje algebraico. En el trabajo que presentamos analizamos el efecto que tiene usar en una situación escolar el juego *DragonBox Algebra©*. En concreto, se estudia cómo varía la competencia de resolver ecuaciones cuando regresan al mundo del álgebra. Con este fin, comparamos los resultados de dos pruebas que se administraron antes y después de la intervención en un grupo de un Programa de Cualificación Profesional Inicial. Los cuestionarios estaban formados por ecuaciones que incluían una o más letras. Los resultados muestran un incremento significativo en las puntuaciones obtenidas en el post test.
Palabras clave: Álgebra, resolución de ecuaciones, sistemas de representación, entornos tecnológicos

Abstract:
Over the last decades, several representation systems have been used to improve the learning of the manipulations of algebraic expressions. In addition, the introduction of new technologies in Mathematical Education allowed the simultaneous use of different representation systems. Some of these applications use a physical representation of the equation, as for example, balances or areas, to give some meaning to the algebraic manipulations. However, the use of real models has the difficulty of translating the actions performed in the physical environment to the algebraic language. In this work

we analyse the effect of using the program *DragonBox Algebra*© in a school context. In particular, we study the students' competence in solving equations when the students return to the world of algebra. We compared the results of two tests taken by the students before and after an intervention in an Initial Professional Qualification Program group. The tests consisted of a set of equations with one or more letters. The results show a significant increase in the post test scores.
Keywords: Algebra, equation solving, representation systems, interactive learning environments

Introducción y antecedentes

Numerosas investigaciones (entre otras: Matz, 1982; Booth, 1984; Palarea, 1998) han descrito y elaborado listados de dificultades y errores observados en los estudiantes al enfrentarse a transformaciones algebraicas. Como origen de estos errores se señala la dificultad a la hora de adaptar el conocimiento aritmético previo, lo que acaba produciendo una extrapolación incorrecta de reglas. Surgen así una dificultad para entender que el signo igual no es únicamente una señal para hacer algo (Kieran, 1981); la idea de falsa linealidad, por ejemplo, de la propiedad distributiva (Matz, 1982); o la dificultad en aceptar la falta de clausura (Booth, 1984).

Como una posible solución a los problemas observados, desde principios de los años 80 del siglo pasado, se recurrió a entornos de aprendizaje interactivos (ILE) para la enseñanza/aprendizaje del álgebra. Su diseño se organizó alrededor de tres ejes (Fey, 1989): la inteligencia artificial, la utilización de representaciones múltiples simultáneas, y la posibilidad de realizar cálculos complejos. Desde el punto de vista de la inteligencia artificial la intención era sustituir al profesor para que los estudiantes pudieran tener un apoyo individualizado. Sin embargo, esta línea fue perdiendo fuerza poco a poco como consecuencia de las dificultades a la hora de implementar los programas (Welham, 2008). Las características de las computadoras ofrecían un campo abonado para la implementación de programas en los que se combinaran representaciones múltiples simultáneas como, por ejemplo, el gráfico-simbólico, lo que según Duval (2006) constituye una de las bases de los procesos de pensamiento matemático. Un ejemplo de este tipo de programas sería SimCalc (véase una descripción en Hegedus y Roschelle, 2013). Por otro lado, la capacidad de las computadoras para realizar, de manera casi instantánea, cálculos matemáticos que podían ser tediosos o complejos para el estudiante abría la posibilidad de que estos pudieran usarlas para comprobar la validez de las acciones o para que pudieran centrar sus esfuerzos en la toma de decisiones. En este caso podemos destacar el uso de los sistemas de álgebra computacional (en inglés *computer algebra systems*, CAS) como una manera de apoyar el aprendizaje y la enseñanza de la manipulación de expresiones algebraicas (Thomas, Monaghan y Pierce, 2004).

Actualmente podemos distinguir dos tipos de entornos que se utilizan para el aprendizaje de la manipulación de expresiones algebraicas:

- Entornos que son combinación de CAS con sistemas expertos que se limitan a comprobar la corrección de los pasos como por ejemplo *Equation Solving* (McArthur, Stasz y Hotta, 1987) y *Aplusix* (Nicaud, Bouhineau y Chaachoua 2004).
- Entornos que pretenden que el estudiante relacione las acciones que se siguen cuando se resuelven ecuaciones con acciones físicas en un contexto como los applets de balanzas y áreas.

1.1. Entornos combinación de CAS y sistemas expertos

El programa Equation Solving (McArthur et al., 1987) permite al estudiante resolver ecuaciones como lo haría en lápiz y papel utilizando las reglas de manipulación de expresiones algebraicas. El programa incorpora un sistema experto que permite comprobar si la solución final o cada paso intermedio son correctos. Además, el estudiante puede pedir ayuda al programa. En este caso el sistema es capaz de ofrecer tanto la solución de la ecuación como los pasos intermedios.

El estudiante puede resolver la ecuación utilizando diferentes caminos que se convertirán en diferentes ramas de un árbol. De esta forma, según McArthur et al. (1987), se pueden comparar diferentes soluciones, buscar patrones y así desarrollar las competencias de comprobar y autodiagnosticar para aprender de los propios errores.

El programa *Aplusix* (Nicaud et al. 2004) es similar al anterior, aunque con una interfaz más visual y adaptada al uso del ratón. Como se muestra en la Fig. 1, el estudiante a medida que va resolviendo la ecuación va construyendo un diagrama de árbol con diferentes caminos que llevan a la solución de la ecuación. El sistema experto de *Aplusix* nos indica si un paso es incorrecto mostrando una cruz roja encima de la flecha (ver camino de la izquierda en la Fig.1). Este programa añade una característica nueva: se puede pedir al sistema experto una ayuda verbal para resolver el siguiente paso. En la Fig. 1 mostramos un ejemplo de cómo tras solicitar ayuda el sistema marca en un rectángulo azul que debemos hacer el cálculo -1-5. Sin embargo, el sistema no es capaz de ofrecer ayuda en todas las situaciones (p. ej., no resuelve ni da ayudas en las ecuaciones que tienen la incógnita en el denominador).

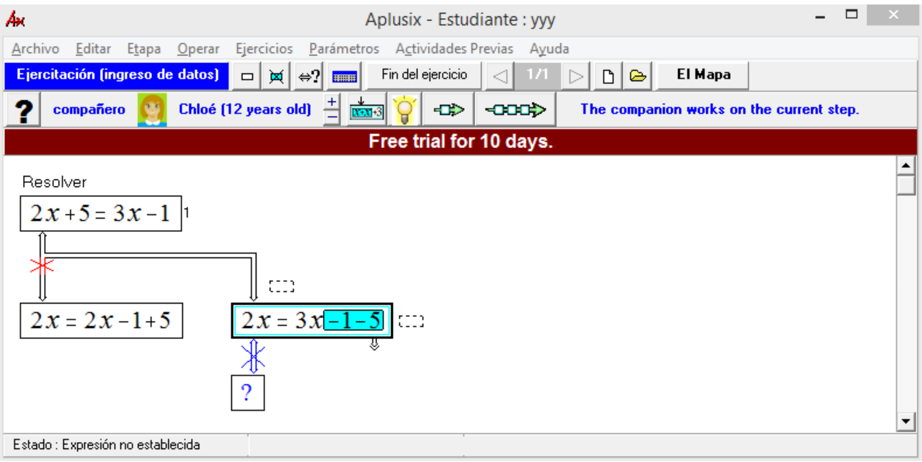

Figura 1: Pantalla del programa *Aplusix* que muestra un árbol con diferentes caminos para resolver la ecuación. La cruz roja encima de un camino indica que el paso no es correcto. En la segunda rama el sistema ha dado una ayuda, indicando que debemos realizar el cálculo -1-5.

1.2. Entornos basados en representaciones físicas de la ecuación

Estos entornos se basan en dotar de significado a las transformaciones algebraicas mediante acciones concretas que se realizan en un modelo físico familiar para el estudiante. Este acercamiento es muy diferente a la enseñanza sintáctica de las transformaciones algebraicas que ponen el énfasis en las propias reglas de uso. Así por ejemplo, Filloy y Rojano (1989) emplearon dos modelos concretos, la balanza y un modelo geométrico basado en la comparación de áreas, para enseñar a operar con la incógnita cuando se resolvían ecuaciones no aritméticas.

Vlassis (2002) concluye que el método de la balanza es útil para enseñar la equivalencia de ambos términos, pero destaca la necesidad de actividades que sirvan para distanciarse del modelo concreto y superar todos los obstáculos. Sin embargo, Filloy y Rojano (1989) encontraron que estos modelos no necesariamente incrementan la habilidad de los estudiantes cuando resuelven ecuaciones algebraicas de forma simbólica. En concreto, señalaron: a) el dominio en el modelo concreto desarrolla una tendencia a permanecer y progresar en dicho modelo, lo que puede retrasar la construcción de una sintaxis algebraica; b) cuando el modelado se desarrolla de forma espontánea tiende a ocultar lo que se pretende enseñar; c) la enseñanza es necesaria en momentos clave para separarse del modelo y poder construir nuevas nociones. En una misma línea, Pirie y Martin (1997) apuntaron que los estudiantes no necesariamente están familiarizados con el funcionamiento de una balanza y que, en consecuencia, preguntarse '¿Cómo es de real la imagen de la balanza?' implicaría preguntarse '¿La realidad de quién?'.

Las nuevas tecnologías permiten la recreación de estos modelos y la representación simultánea de las acciones en lenguaje algebraico, lo cual supone un elemento de interés respecto al uso de modelos en la realidad. Sin embargo, no hemos encontrado programas para resolver ecuaciones a partir de su representación mediante áreas o modelos geométricos, aunque sí que abundan los *applets*, como el Algebra Tiles de la National Library Virtual Manipulatives (NLVM), que permiten al alumno realizar operaciones entre polinomios a partir de áreas de figuras geométricas (ver Fig. 2).

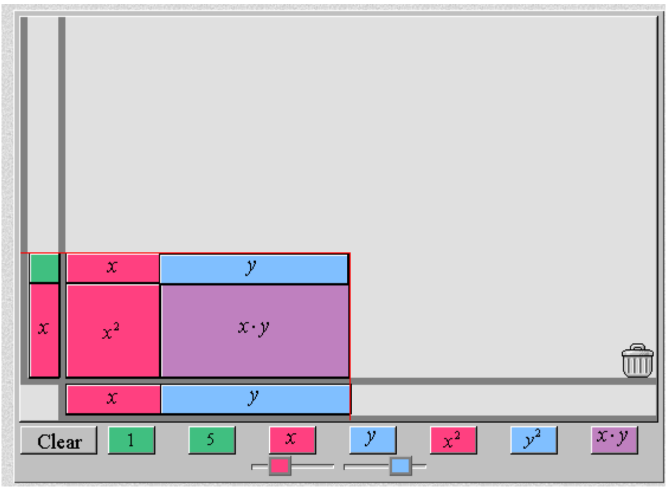

Figura 2: Pantalla del Applet Algebra Tiles de NLVM que calcula el producto entre polinomios a partir de áreas de rectángulos y cuadrados. En este caso estamos calculado el producto entre x+1 por x+y (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_189_g_1_t_2.html , consultado el 13/04/2015).

Por otra parte, hemos encontrado varios applets de balanzas virtuales: el del NLVM y el desarrollado por el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE) para el proyecto Descartes. Este último es que el utilizamos a continuación para explicar este método.

En la Fig. 3 se muestra una balanza virtual para resolver la ecuación $4x + 1 = 9$. Con este fin, para equilibrar la balanza ponemos en la parte de la izquierda cuatro pesos de la cantidad desconocida x y un peso de una unidad y en la parte de la derecha nueve pesos de una unidad. El objetivo es calcular cuánto pesa el valor de x para que la balanza siga estando equilibrada. El estudiante debe tirar las pesas de cada lado a la basura hasta quedarse solo con un peso de la cantidad x en un lado y pesos de una unidad en el otro lado.

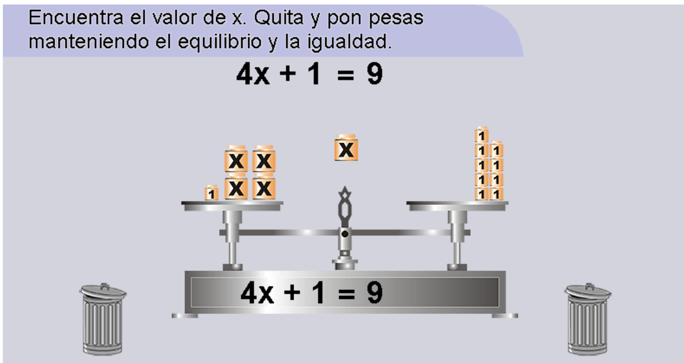

Figura 3: Pantalla del programa de balanzas para resolver la ecuación $4x+1=9$.
(http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b03_t02_s01_descartes/ consultado el 13/04/2015).

En esta versión del programa de balanzas se puede trabajar solo con enteros positivos y por tanto, presenta grandes limitaciones. Sin embargo, existe una versión llamada balanzas y poleas (ver Fig. 4) que permite resolver ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$, con a, b, c y d enteros positivos o negativos usando el modelo de la balanza. En esta ocasión se añade a la balanza clásica unas poleas que hacen que las pesas que están en los platillos superiores resten peso al peso del platillo inferior, pudiendo incluir de esta forma términos independientes o coeficientes negativos.

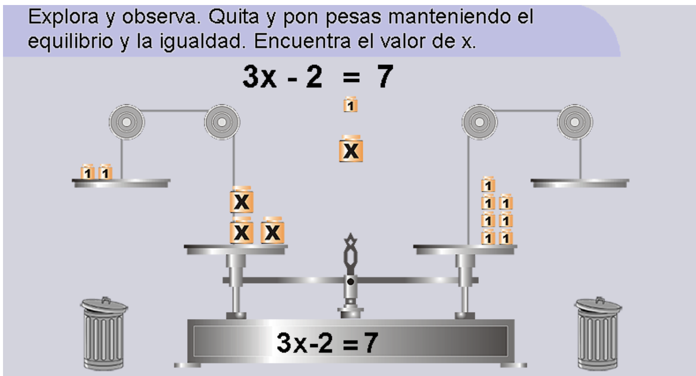

Figura 4: Pantalla del programa de balanzas y poleas.
(http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b03_t02_s01_descartes/ consultado el 13/04/2015)

En Rojano (2010) se propone una secuencia de enseñanza que transita por *applets* con diferentes tipos de balanza que incluye la simple, la de poleas y una fija en la que los alumnos deben resolver la ecuación usando el lenguaje del álgebra. De esta manera se pretende que el estudiante se separe del modelo físico de la balanza asociando las acciones con las pesas a transformaciones al nivel de la sintaxis del álgebra.

1.3. Entornos basados en entretenimiento educativo

Desde principios de los 90s se han desarrollado programas llamados *edutainment* o de entretenimiento educativo. Son aplicaciones que poseen el atractivo de los juegos pero que tienen la intención de lograr objetivos educativos. El propósito es atraer y mantener la atención de los estudiantes captando sus emociones a través de un entorno lleno de animaciones alegres y de colores (Okan, 2003). El programa que hemos utilizado en este trabajo exploratorio, que se llama *DragonBox Algebra*©, se puede incluir en el grupo de entretenimiento educativo.

1.4. Objetivos

Como acabamos de ver, es habitual centrar el potencial del *edutainment* en su capacidad para atraer la atención del estudiante, pero siempre surge la duda de si realmente son capaces de producir un efecto educativo. El propósito de nuestra investigación, a largo/medio plazo, es analizar si los estudiantes trasladan al mundo del álgebra las acciones que utilizan en el *DragonBox Algebra*© y cómo lo hacen. En la parte que presentamos en este artículo nos planteamos realizar un estudio exploratorio con los siguientes objetivos:

- Analizar cómo varía la competencia a la hora de resolver ecuaciones tras unas sesiones después de utilizar el programa *DragonBox Algebra*©.
- Analizar cómo varía la forma de resolver ecuaciones después de la utilización del *DragonBox Algebra*©. ¿Aparecen nuevas actuaciones o patrones en la resolución?

1.5. Características de DragonBox Algebra©

DragonBox Algebra© es un programa para tabletas y ordenadores que pretende que los niños de primaria y secundaria aprendan a resolver ecuaciones de primer grado a través de un juego, de una manera natural, divertida y efectiva. Entre las características que señalan los creadores del entorno destacamos: la retroalimentación es inmediata, lo que permite al usuario darse cuenta del error nada más cometerlo; posibilita que cada estudiante aprenda a ritmos diferentes; estimula el aprendizaje por descubrimiento. Realmente, el programa puede ser usado de dos formas distintas: (a) como un juego en que los usuarios resuelven rompecabezas usando unas reglas; (b) como una herramienta de enseñanza de ecuaciones que se integra en la enseñanza habitual para intentar dar un significado a las manipulaciones algebraica a través de las acciones en el programa.

Como se puede ver en la Fig. 6, el programa contiene un tablero que se divide en dos partes (dos miembros de la ecuación) en el que se distribuyen iconos con dibujos de animales o números (que son los elementos de la ecuación) y mediante la selección y arrastre de estos iconos el usuario pueden ir moviéndolos de un miembro al otro. El tablero siempre contiene un icono especial con el dibujo de una caja (que será la incógnita). El objetivo principal del juego es dejar una caja sola en un lado, moviendo los iconos por el tablero y siguiendo unas estrategias y reglas que el programa va introduciendo a lo largo de una secuencia de capítulos. Por ejemplo, la primera regla que se aprende es que existe un icono verde que desaparece del tablero al hacer clic en él. Este icono representa el cero y en niveles posteriores aparecerá después de superponer un icono a otro con el mismo dibujo pero distinto color (suma de dos números iguales de distinto signo).

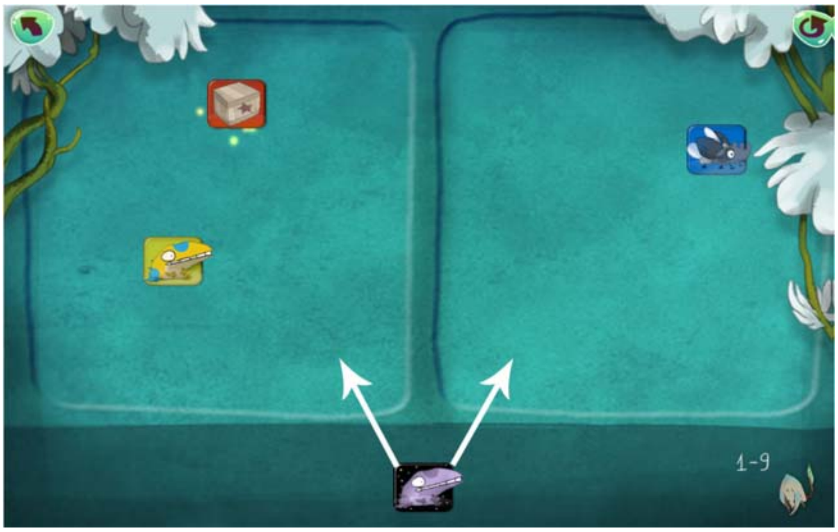

Figura 6: Pantalla del *DragonBox Algebra©* que muestra el tablero con sus dos lados, la caja que se debe dejar sola y los iconos con dibujos que debemos arrastrar utilizando diferentes reglas. En este nivel el programa nos enseña la regla en la que podemos añadir un icono en los dos lados del tablero para poder eliminar un icono con la misma figura pero distinto color que se encuentra en el lado de la caja. (http://wewanttoknow.com/algebra/, consultado el 13/04/2015)

El programa contiene diez capítulos de 20 niveles cada uno. En cada capítulo aparecen nuevas reglas y dificultades. En un principio, los iconos son dibujos de animales de diferentes colores, que se irán remplazando por números o letras a medida que van aumentando los niveles y capítulos. Desde el punto de vista de la enseñanza de las transformaciones algebraicas, se pueden dividir los contenidos que se enseñan en seis bloques:

- Competencias para resolver ecuaciones básicas (capítulos 1-3), que incluye equilibrar los miembros de la ecuación con las cuatro operaciones básicas.
- Factorización y operaciones entre números con signo (capítulos 4-5)
- Paréntesis y propiedad distributiva (capítulo 6)
- Factorización y simplificación de fracciones (capítulo 7)
- Adición de términos semejantes (capítulo 8)

- Sustitución algebraica (capítulos 9-10)

El programa permite jugar utilizando dos lados o caminos diferentes:

- El “lado a” en el que el tablero contiene iconos de dibujos o letras que no están unidos con los signos de las operaciones algebraicas. Es el camino con el que los alumnos deben comenzar y en el que el programa muestra las reglas con demos.
- El “lado b”, en el que el tablero contiene ya letras y números unidos por los signos de las operaciones algebraicas y que permite a los estudiantes practicar lo que han aprendido en el lado a, conectando el juego con las ecuaciones que resolverían en lápiz y papel.

Además el programa permite al estudiante pedir ayuda si en algún nivel no sabe cómo seguir. El programa resuelve la ecuación, moviendo los iconos como en una demo, para que el alumno pueda ver qué tiene que hacer.

Método

En el estudio empírico participaron inicialmente 14 estudiantes de un centro público que pertenecían a segundo curso de un Programa de Cualificación Profesional Inicial (PCPI). De los 14 estudiantes, solo nueve asistieron en todas las sesiones, por lo que únicamente éstos fueron considerados a efectos de la comparación. Todos los sujetos tenían una edad comprendida entre 17 y 18 años. Los alumnos habían sido instruidos tanto en cursos anteriores como en el actual en la sintaxis del álgebra y, en particular, en la resolución de ecuaciones de primer grado.

La secuencia del estudio empírico fue la siguiente:

- En la primera sesión, los alumnos realizaron un cuestionario (que llamaremos pre-test) en lápiz y papel con doce ecuaciones de primer grado que incluían una o más letras. Para muestrear bien el contenido de cada capítulo del *DragonBox Algebra©* elegimos dos ecuaciones por capítulo y estimamos que la mayoría de los alumnos alcanzarían seis capítulos en las dos sesiones de intervención. En la Tabla 1 se proporcionan las ecuaciones que contenía el pre-test. Tanto en el pre como en el post-test los estudiantes no recibieron ninguna ayuda y la única instrucción que recibieron fue que debían dejar la equis sola en un lado y que debían intentar que el resultado apareciera lo más simplificado posible.
- Dos sesiones de alrededor de 1 hora y 15 minutos cada una en días consecutivos. Se les suministró a los alumnos tabletas iPad con el programa *DragonBox Algebra©*. Sin explicación por parte del profesorado, procedieron a jugar.
- En la cuarta sesión, los alumnos realizaron un cuestionario (que llamaremos post-test) en lápiz y papel con 12 ecuaciones isomorfas al pre-test que incluían una o más letras.

$c-d=x+a-b$	$2+5+3=x+2+5$	$5+2\cdot i=3x+5$
$ax=\frac{b}{c}-d$	$\frac{x}{4}+3=5$	$\frac{6}{a}=\frac{3cx}{b}+e$
$c+\frac{m}{x}=\frac{m}{j}+c$	$8=\frac{6}{x}+7$	$6a\cdot b=x(-a)(-b)+2$
$10=\frac{(-2)\cdot 5}{x}$	$b+m=\frac{x\cdot m+d}{x}$	$8=3(\frac{x}{6}+2)$

Tabla 1: Listado de ecuaciones que los alumnos tenían que resolver en la primera sesión.

Resultados

Para poder valorar si la intervención con el programa *DragonBox Algebra©* había producido un aumento significativo en la competencia de los alumnos a la hora de resolver ecuaciones de primer grado, realizamos una comparación entre las respuestas del cuestionario pre y el post.

Se utilizó la siguiente codificación de las respuestas: 0 si la respuesta es incorrecta o está en blanco; 0,5 si se había aislado la incógnita pero la respuesta no aparecía lo más simplificado posible; 1 si la respuesta es correcta. A cada estudiante se le asignó una puntuación tanto en el cuestionario pre como en el post, obtenida de la suma de las puntuaciones de cada pregunta. En la Tabla 2 mostramos la media y la desviación típica de las puntuaciones de los cuestionarios pre y post.

	Pre-test	Post-test
Número	9	9
Media	2,2	5,2
Desviación Típica	1,7	2,3

Tabla 2: Media y desviación típica de las nueve respuestas de los cuestionarios pre y post.

A primera vista, se observa un incremento en la media de respuestas correctas en el post-test. Para determinar si esta diferencia era significativa decidimos realizar un contraste de hipótesis. Debido al reducido tamaño de la muestra decidimos realizar pruebas no paramétricas. En este caso y por la configuración del experimento, realizamos una prueba de Wilcoxon para datos pareados, exigiendo un valor $p < 0,05$ para considerar un resultado como estadísticamente significativo.

A partir de este análisis, encontramos que existen diferencias significativas entre los rangos de las variables Pre (mediana=2) y Post (mediana=5,5) en las pruebas anterior y posterior a la enseñanza ($Z = -2,53$; $p = 0,012$).

Además del análisis comparativo entre los dos cuestionarios pre y post para valorar si el programa *DragonBox Algebra©* aumenta la competencia de resolver ecuaciones de primer grado, realizamos un estudio de patrones en las respuestas del cuestionario post, con el fin de identificar posibles actuaciones de los alumnos a la hora de resolver ecuaciones que se asemejaran a estrategias utilizadas en el programa.

En el cuestionario post aparecieron unos patrones que no estaban presentes en el cuestionario pre y que los repitieron diferentes alumnos. Encontramos dos patrones:

1. En las ecuaciones con denominador (número, letra o incógnita), aparecieron casos en que los alumnos usaron una técnica basada en mantener la equivalencia en los sumandos para conseguir que en todos apareciera un mismo denominador. En concreto, multiplicaron y dividieron todos los sumandos, excepto aquel que inicialmente tenía el denominador, por el valor de este denominador. A continuación, como todos los términos contenían el mismo denominador procedieron a eliminarlo. En la Fig. 7 se muestran dos respuestas de dos alumnos diferentes que utilizan este mismo patrón.
2. En las ecuaciones en las que aparecían letras iguales en los dos miembros sumando, los estudiantes tacharon las letras en una manera similar en que se hacía en el *DragonBox Algebra©* (ver respuesta de la derecha de la Fig.7).

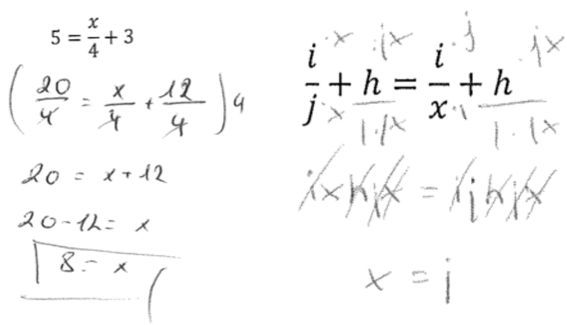

Figura 7: Dos respuestas de dos alumnos diferentes al cuestionario post en el que se muestran patrones de respuesta.

La consulta con el profesor de los alumnos nos condujo a identificar que estos patrones de respuesta habían sido enseñados previamente en el aula, lo que nos llevó a concluir que posiblemente los estudiantes recordaron esta técnica a partir de la interacción con el programa *DragonBox Algebra©*, puesto que una de las reglas que el programa enseña es que para que en un sumando aparezca una expresión en el denominador, ésta también debe aparecer multiplicando en el numerador. La explicación del segundo patrón es más sencillo, ya que en el programa se pueden eliminar los iconos iguales que están en diferentes miembros de una forma muy rápida.

Discusión

En este trabajo hemos hallado un aumento significativo en la competencia de la resolución de ecuaciones en lápiz y papel, después del uso por parte de los alumnos del programa *DragonBox Algebra©*. Sin embargo, estos resultados se deben tomar con cautela puesto que la muestra es pequeña y posiblemente las variaciones observadas puedan deberse a una diferencia de motivación entre pre y post-test. En este sentido, sería necesario realizar un estudio más completo con más alumnos y en grupos estándar para poder confirmar estos resultados. Además necesitaríamos comparar los resultados de la intervención con un grupo de control.

Por otro lado, parece que los alumnos han recuperado o recordado unos modos de resolución que se pueden relacionar con alguna de las acciones que se usan cuando resuelven con el *DragonBox Algebra©*. Esta observación marca una posible línea futura de investigación centrada en realizar un estudio más detallado en el que se observe cómo los alumnos traducen las reglas que usan para resolver ecuaciones en el programa al lápiz y papel.

Referencias bibliográficas

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor, United Kingdom: NFER-NELSON.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Fey, J. T. (1989). Technology and Mathematics Education: A Survey of Recent Developments and Important Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(3), 237-272.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kaput, J. J. (1998). Representations, Inscriptions, Descriptions and Learning: A Kaleidoscope of Windows. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 265-281.

Hegedus, S. y Roschelle, J. (2013). *The SimCalc Vision and Contributions: Democratizing Access to Important Mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D. Gleeman y J. S. Brown (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). New York: Academic Press.

McArthur, D., Stasz, C., y Hotta, J. Y. (1987). Learning problem-solving skills in algebra. *Journal of Educational Technology Systems*, *15*, 303-324.

Nicaud, J.-F., Bouhineau, D., y Chaachoua, H. (2004). Mixing Microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra. International *Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(2), 169–211.

Okan, Z. (2003). Edutainment: is learning at risk? *British Journal of Educational Technology*, *34* (3), 255-264.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de La Laguna, La Laguna, España.

Pirie, S. y Martin, L. (1997). The Equation, the Whole Equation and Nothing but the Equation! One Approach to the Teaching of Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(2), 159-181.

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números*, *75*, 5-20.

Thomas, O. J. M., Monaghan, J., y Pierce, R. (2004). Computer Algebra Systems and Algebra: Curriculum, Assessment, Teaching and Learning. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 155-186). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vlassis, J. (2002). Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 341-359.

Welham, D. (2008). AI in training (1980--2000): Foundation for the future or misplaced optimism? *British Journal of Educational Technology*, *39*(2), 287-296.