UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Investigación en Didácticas Específicas

EXPLORACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL RAZONAMIENTO VISUAL EN ALUMNOS DE E.S.O. EN PARTICULAR, ALUMNOS CON TALENTO MATEMÁTICO

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

REBECA GÓMEZ ROBERTO

Tutor:

Ángel Gutiérrez Rodríguez

Departamento de Didáctica de la Matemática

Valencia, diciembre de 2013

Ficha técnica

Máster: Máster en Investigación en Didácticas Específicas (Universitat de València)

Especialidad: Matemáticas.

Autor: Gómez Roberto, Rebeca

Título de la memoria:

Exploración de las características del razonamiento visual en alumnos con talento matemático.

Tutor: Gutiérrez Rodríguez, Ángel.

Departamento:

Didàctica de la Matemàtica.

Fecha de defensa: Diciembre de 2013

Calificación: Sobresaliente

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas; Visualización; Talento matemático; Geometría.

Keywords: Mathematics teaching; Visualization; Mathematical giftedness; Geometry.

Códigos Unesco:

1299 (otras: Didáctica de las Matemáticas), 6104.01 (procesos cognitivos), 5801.06 (evaluación de alumnos).

Resumen: El tema implicado que se describe en esta memoria viene motivado por estudiar la relación que puede existir entre la visualización y el talento matemático. Nos centraremos en caracterizar, de forma exploratoria, la actuación de dos grupos de estudiantes, entre los que se encuentran alumnos considerados con talento matemático, ante una colección de tareas de geometría en los que predomina la visualización, diseñada especialmente para este estudio. Clasificaremos sus respuestas según el razonamiento utilizado y, además, identificaremos errores en el uso de la visualización para resolver estos problemas. Para finalizar, agruparemos a los alumnos con talento matemático según predomine su pensamiento de tipo visual, de tipo analítico o de tipo armónico (siguiendo la clasificación de Kruttestki).

AGRADECIMIENTOS

En estas líneas quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que, directa o indirectamente, me han ayudado tanto con sus conocimientos como con su apoyo moral para llevar a cabo y finalizar esta investigación.

A Ángel Gutiérrez, quien durante este año, con sus sugerencias, su apoyo y sus valiosas aportaciones me ha ayudado a la realización de este estudio. Porque sus investigaciones sobre talento matemático han sido un referente para este trabajo y sus orientaciones han mejorado la culminación de esta memoria.

A los profesores del Máster en Investigación en Didácticas Específicas por su valiosa formación.

Al Instituto Juanelo Turriano (Toledo) porque sin su colaboración no podría haberse llevado a cabo la investigación.

A Soraya Munuera, a la que su interés por echarme una mano desinteresadamente, le llevó múltiples reuniones con la dirección del centro antes mencionado.

A los estudiantes del centro, por participar en mi proyecto.

Y por último, de una manera muy especial,

ante todo y por todo, a mi hermana y mis padres.

INDICE

INTRODUCCIÓN

La investigación que se presenta en esta memoria tiene por finalidad el estudio de los procesos de visualización de alumnos con talento matemático[1], y en particular en el aprendizaje de algunos conceptos de Geometría.

La elección del tema viene motivada por la necesidad de atender a los alumnos con talento matemático. Esta necesidad no solamente viene demandada por las distintas investigaciones que lo tratan, sino que es reflejo del interés que el propio sistema educativo manifiesta por dotar al profesorado de técnicas de intervención para la atención del alumnado con talento matemático.

Al igual que otros alumnos, los considerados con talento matemático requieren un tipo de atención individualizada. En la actualidad, su consideración como alumnos con necesidades educativas especiales, lleva a diseñar una metodología y unos recursos particulares que den respuesta a sus características propias. Es importante resaltar que una falta de atención puede generar desinterés por el estudio de las matemáticas, dificultades de aprendizaje e incluso alteraciones en su personalidad y comportamiento.

Descubrir el potencial que cada alumno posee y desarrollar sus capacidades con la mejor atención educativa ayudará, no sólo a mejorar su rendimiento escolar, sino también a su desarrollo como persona que, en definitiva, es lo que se pretende. El proceso de enseñanza debe ir dirigido a que el alumno desarrolle al máximo su potencialidad y viene determinado por las habilidades específicas que se desean mejorar.

Pese a que la visualización es un pilar fundamental para el razonamiento, especialmente en el geométrico, su práctica en los centros es muy deficiente. El hecho de destacarlo es porque para una correcta comprensión de los contenidos es importante la percepción visual de los conceptos, especialmente en estudiantes "visuales" (Krutetskii 1976). Por ello, mostramos en este trabajo una clasificación de

[1] Este Trabajo de Fin de Máster se ha realizado en el contexto del proyecto de investigación *Análisis de Procesos de Aprendizaje de Estudiantes de Altas Capacidades Matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259) del Programa Nacional de I+D+I.

las imágenes, procesos y habilidades visuales, para analizar la repercusión de la visualización en la enseñanza.

Específicamente nos centraremos en caracterizar, de forma exploratoria, la actuación de dos grupos de estudiantes, entre los que se encuentran alumnos considerados con talento matemático, ante una colección de problemas de geometría en los que predomina la visualización, construida especialmente para este estudio. Además nos interesa identificar posibles errores en el uso de la visualización para resolver problemas; así tendremos abierta una línea de trabajo para futuras investigaciones.

La memoria de esta investigación viene secuenciada de la siguiente manera:

El primer capítulo 1 es el que ayuda a saber sobre qué se va a investigar. En él exponemos el planteamiento del problema que incluye las justificaciones y motivaciones que nos han llevado hasta tratar el tema: presentamos la descripción del problema a investigar, las preguntas de investigación y los objetivos que nos proponemos.

El capítulo 2 muestra el marco teórico en el que nos basamos para fundamentar nuestra investigación. Realizamos una revisión de literatura para incluir aquellos estudios que consideramos importantes para nuestro proyecto y justificamos la necesidad de investigar las habilidades visualizadores que ponen en juego los alumnos a la hora de resolver tareas matemáticas.

El capítulo 3 trata sobre la metodología empleada en este trabajo y describe el tipo de investigación en el cual se enmarca el estudio, el diseño de la investigación y las categorías de análisis. Explicamos las condiciones y el contexto en el que llevamos a cabo la fase experimental con estudiantes de 3º y 4º de E.S.O.

En el capítulo 4 mostramos los resultados relativos a las capacidades de los alumnos. Analizamos los datos obtenidos en los que demuestran las habilidades, los errores y las dificultades que han encontrado a la hora de resolver la tarea.

Por último, no por ello menos importante, en el capítulo 5 exponemos las conclusiones de esta investigación que fueron organizadas de acuerdo con las preguntas de investigación que nos planteamos en el primer capítulo. De igual forma comentamos las aportaciones y limitaciones de nuestra investigación y las perspectivas futuras de continuidad.

Capítulo 1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el capítulo que nos encontramos se sitúa el problema de investigación que vamos a llevar a cabo y exponemos las principales ideas tanto de talento matemático como de visualización.

A continuación, pasaremos a entrelazar ambos campos de investigación y, para finalizar, pretendemos exponer y justificar las motivaciones que nos han llevado a tratar este tema plasmando el problema a investigar, los objetivos que dirigen este estudio y las preguntas de investigación.

Aunque existen pocos trabajos que relacionen ambos tópicos de forma que pongan de manifiesto las características de los alumnos con talento matemático ante problemas de visualización, en la actualidad tanto el talento matemático como la visualización son campos que despiertan un gran interés en la investigación y en la educación. Así, con esta investigación pretendemos hacer un primer acercamiento entre ambos campos.

1.1.- CARACTERIZACIÓN DEL TALENTO MATEMÁTICO

Basándonos en el sistema educativo vigente, la atención a la diversidad tiene como objetivo enseñar a cada individuo según sus necesidades sin caer en la exclusión. Son muchas las organizaciones (Ministerio de Educación y Cultura, 2000; la National Council of Teachers of Mathematics, 2000; y la UNESCO) que consideran a los individuos con talento matemático como un grupo particular dentro de los que tienen necesidades educativas especiales por lo que inciden e insisten en su atención.

Una de las dificultades presentes en el estudio de estos individuos es la multitud de terminología que existe para referirse a ellos (talentosos, superdotados, etc.). Por ello, es imprescindible plasmar lo que, para nosotros, entendemos como alumnos con talento matemático por lo que hemos elegido el término en el sentido que define Passow (1993):

Los alumnos con ***talento matemático*** *son aquellos que poseen ciertas habilidades sobresalientes dentro del campo de las matemáticas y, gracias a ellas, obtienen un alto rendimiento.*

1.2.- VISUALIZACIÓN

Al igual que ocurre con el talento, no existe un acuerdo general sobre la terminología usada en la visualización espacial y de ahí que este campo haya recibido diferentes nombres como “percepción espacial”, “imaginación espacial”, “imaginería”, “razonamiento visual”, “visión espacial” “visualización” o “pensamiento espacial”. Autores diferentes han desarrollado distintos significados para los mismos términos, o bien que atribuyen el mismo significado a términos distintos.

Si nos centramos en nuestro campo, las matemáticas; la geometría puede considerarse como el origen de la visualización en éste. Nuestro interés es analizar la visualización en un contexto geométrico por lo que adoptamos la definición de Gutiérrez (1996):

La ***visualización*** *es el tipo de actividad de razonamiento basado en el uso de elementos visuales o espaciales, ya sea física o mental, que se realizan para resolver problemas o demostrar propiedades.*

1.3.- JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

Como quedó indicado anteriormente hoy son muchas las cuestiones que están planteadas relativas a los procesos de visualización, por ejemplo: ¿Qué aspectos de visualización promover en los estudiantes para lograr un aprendizaje matemático eficaz? ¿Qué elementos en el uso de representaciones y visualizaciones son efectivos en la resolución de problemas matemáticos en el último ciclo de E.S.O.? ¿Cómo establecer conexiones entre lo visual y las representaciones simbólicas? ¿Qué métodos ayudan a lograr la intuición de lo abstracto?

La investigación trata de dar respuesta a algunas de estas cuestiones. Las hipótesis de partida para nuestro estudio son las siguientes:

- Hipótesis 1: El estudio del conocimiento matemático, en particular los tipos de objetos y procesos propuestos, permitirá trabajar con nociones cognitivas usadas (habilidades, imágenes, esquemas, etc.) y aportará explicaciones complementarias de los conflictos de los sujetos al resolver tareas de visualización.

- Hipótesis 2: El enriquecimiento curricular centrado tanto en contenidos como en elementos de razonamiento visual favorecerá la mejor utilización y el desarrollo de sus habilidades de visualización.

- Hipótesis 3: Conjeturamos que los alumnos con talento matemático no presentan deficiencias respecto a las capacidades visuales.

Hemos concretado nuestras inquietudes sobre visualización, en una única disciplina, la Geometría, planteando el siguiente objetivo general:

Explorar procesos y habilidades de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría con alumnado de último ciclo de Educación Secundaria Obligatoria.

Este objetivo general incluye las siguientes cuestiones de investigación:

- ¿Qué tipo de consideraciones visuales favorece la enseñanza de la Geometría?
- ¿Se pueden establecer perfiles de pensamiento matemático de los estudiantes desde el punto de vista de los procesos de visualización usados en la construcción del conocimiento?

De acuerdo a estas cuestiones determinamos los siguientes objetivos específicos dentro de nuestra investigación:

- Objetivo 1: *Determinar las configuraciones de objetos y procesos que ponen en juego los sujetos cuando realizan las prácticas requeridas en la solución de tareas. En particular, analizar los razonamientos de los alumnos con talento matemático.*
- Objetivo 2: *Estudiar los tipos, usos, errores y dificultades que presentan los alumnos implicados en los procesos de visualización en la resolución de problemas geométricos propuestos:*
    - *a. Extraer una tipología de imágenes empleadas por los alumnos.*
    - *b. Extraer categorías de usos más comunes de las imágenes mentales en geometría.*
    - *c. Extraer categorías de las dificultades encontradas.*
- Objetivo 3: *Analizar posibles diferencias, en cuanto a la puntuación total obtenida, centrándonos en el curso académico y en el género.*

Concluimos diciendo que la cuestión de la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista de la visualización es una cuestión compleja pero necesaria para el desarrollo del pensamiento hacia niveles más avanzados, por lo que nos planteamos, entre otras perspectivas futuras de investigación, que expondremos al final de este trabajo, el diseño de materiales e instrumentos didácticos que tengan en cuenta los resultados de este trabajo.

Capítulo 2.- FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y ANTECEDENTES

Una vez delimitada el área problemática en que se ubica nuestro problema de investigación, en este capítulo analizamos los conceptos relativos a talento matemático y visualización. En el primer punto relativo al talento, justificaremos la necesidad de atender a los alumnos con talento como alumnos de necesidades educativas especiales, para lo que examinaremos las características que determinan el talento y presentaremos diferentes formas de identificación, evaluación y tratamiento. En el segundo punto mostraremos la importancia de la visualización en matemáticas, especialmente en el área de geometría y estableceremos el marco teórico en el que se contextualizará nuestro estudio, que se focalizará en el estudio de las habilidades de visualización.

En la segunda parte del capítulo realizamos una revisión de las investigaciones que relacionan talento matemático y visualización, mostrando la diversidad de aspectos en los que las investigaciones se han basado, para poder describir con precisión el problema de investigación y sus objetivos. Describiremos los errores y dificultades en el uso de la visualización que han recogido las investigaciones y haremos una valoración final para delimitar los antecedentes de nuestra investigación.

2.1.- TALENTO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA

El interés por la investigación relacionada con la inteligencia y la superdotación no son una novedad, ya que han sido estudiados desde el siglo XX; sin embargo, esto no es así para las relacionadas con el talento en matemáticas que tienen un desarrollo más reciente. Al respecto, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) afirma que *los estudiantes más olvidados en términos de alcanzar su desarrollo potencial, son los estudiantes con talento en matemáticas. La habilidad matemática resultante es* *un recurso valioso para la sociedad, tan necesario para mantener el liderazgo en un mundo tecnológico (NCTM, 1980, p. 18)*.

En la actualidad se ha cambiado de parecer y la atención al talento matemático es un tema de gran interés para la comunidad de educadores e investigadores en educación matemática.

Centrándonos en la caracterización del talento matemático, algunos investigadores actuales en educación, entre los que destaca Ramírez (2012), ofrecen un listado de descripciones del talento matemático basándose en investigadores de gran renombre en este tema como son Krutetskii (1976) y Miller (1990). Algunas de ellas tienen que ver con la capacidad para:

- ✓ Examinar el contenido matemático de un problema analítica y sintéticamente.
- ✓ Simplificar el razonamiento para obtener soluciones económicas.
- ✓ Invertir fácilmente su proceso de razonamiento.
- ✓ Poseer memoria matemática; esto es recordar conceptos, algoritmos y métodos de resolución de problemas y principios de planteamiento.
- ✓ Producir ideas originales a la vez que rápidas en los caminos empleados para la resolución.

Gracias a los estudios que se han realizado sobre este tema, podemos asegurar que los estudiantes con talento matemático no solo tienen mejor memoria y aprenden más rápido que sus compañeros, sino que también parecen pensar de forma diferente sobre las matemáticas y, gracias a las habilidades que poseen, emplean estrategias de resolución poco comunes.

Es, por todo lo anterior, que, como ya hemos mencionado, entendemos al alumno con talento matemático como aquel que en virtud de tener ciertas habilidades sobresalientes, es capaz de obtener un alto rendimiento en el ámbito matemático. Uno de los objetivos primordiales para el docente debe ser que estos alumnos desarrollen al máximo su potencialidad y haga de ella un uso óptimo en sus actuaciones matemáticas. La elección de esta definición de talento matemático va condicionada por la intencionalidad de determinar habilidades específicas que determinan el potencial y el tipo de enseñanza que favorece la manifestación de estas habilidades.

2.1.1.- CÓMO IDENTIFICARLOS Y ATENDERLOS

Tradicionalmente se ha prestado atención diferenciada sólo a aquellos estudiantes que muestran alguna necesidad educativa especial; sin embargo, actualmente los alumnos con talento están reclamando atención especializada como resultado de la atención a la diversidad.

La teoría de las inteligencias múltiples de Gardner (1995, 2001) afirma que la competencia cognitiva del hombre queda descrita de manera más completa en términos de un conjunto de habilidades, talentos o capacidades mentales, que denomina inteligencias, y que nombra como musical, cinético-corporal, lógico-matemática, lingüística, espacial, interpersonal e intrapersonal. Más adelante, Gardner (2001) se cuestiona añadir alguna inteligencia más a las siete anteriores, la moral y espiritual. Puesto que las inteligencias se manifiestan de distinta forma en los diferentes niveles evolutivos, tanto el estímulo como la evaluación deben tener lugar de manera oportuna y adecuada.

Se pueden mencionar varios instrumentos de evaluación diagnóstica que se agrupan en dos grandes bloques: las subjetivas o informales y las técnicas objetivas. Las primeras se basan generalmente en la observación de aquellas personas que pueden proporcionar información referente al desarrollo, intereses, expectativas o aficiones del sujeto valorado. Las pruebas de este tipo utilizadas con mayor regularidad son: informes de los profesores, informes de los padres, nominaciones de los compañeros y autoinformes. Mientras que las técnicas del segundo grupo, las objetivas, se refieren a pruebas psicométricas, estandarizadas o inventarios de personalidad. Este tipo de pruebas reúnen criterios de consistencia interna, validez y fiabilidad estadísticas. Algunos tipos de pruebas objetivos son: test de inteligencia general, test de aptitudes específicas, pruebas de rendimiento, test de creatividad y los test de personalidad.

En cuanto a la identificación del talento matemático, la literatura especializada describe diversos métodos tanto de enfoque cualitativo como cuantitativo; sin embargo, los más utilizados han sido los test estandarizados, corriendo el peligro de rechazar a niños que deberían ser identificados como talentos matemáticos. (Benavides, 2008). Niederer e Irwin (2001) propone seis formas de identificar el talento matemático: test, nominación de los profesores, nominación de los padres, nominación por parte del alumno, la nominación de los compañeros y la habilidad de los estudiantes para resolver problemas.

Un aspecto importante en relación con la identificación del talento matemático es, ¿qué se mide en los test y de qué tipo son los ítems que constituyen los test? Esto es porque tradicionalmente se aplicaban test de rendimiento cuyos ítems eran de cálculo aritmético, por lo que se primaba en la identificación del talento matemático la capacidad de los sujetos sobre el cálculo matemático, frente a otras formas de pensar matemáticamente (Benavides, 2008). Esta misma autora menciona que se decidía sobre el talento matemático de acuerdo al número de ítems acertados y se prestaba menos atención a los procesos de pensamiento del estudiante o a cómo razonaba en matemáticas.

Los modelos de identificación no deben perseguir únicamente la categorización de un sujeto como talento, sino saber en qué forma y en qué grado lo es, a fin de establecer medidas de actuación que permitan su desarrollo.

En situaciones particulares de niños que han demostrado talento en matemáticas se han señalado diferencias entre talento convergente y divergente (Giménez, 2008). Se entiende por talento matemático de pensamiento convergente al que poseen las personas que tienen un dominio del hemisferio izquierdo del cerebro, se centran más en procesos lógicos, en análisis y en detalles y cuya comunicación es verbal o escrita. En el pensamiento divergente, dominio del hemisferio derecho del cerebro, predomina la intuición, el pensamiento visual, y parece no seguir una estructura lógica ni convencional, siendo única la forma de trabajo.

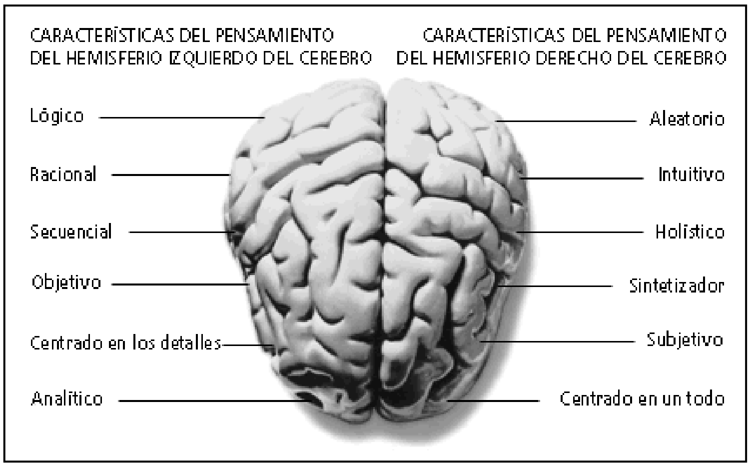


Figura 1.- Funciones hemisféricas del cerebro

Es sabido que el tratamiento que reciben estos alumnos en sus clases ordinarias no responde a sus necesidades. Estos alumnos con frecuencia emplean su tiempo en clase en tutorizar a otros compañeros. A veces, el currículo no les supone retos ni intrigas. Dejan las actividades que no despiertan su interés al sentirse forzados a estar sentados y escuchar la instrucción repetitiva o al trabajar siempre con el mismo tipo de problemas.

Como ya hemos apuntado antes, existe una gran diversidad de grados en cuanto al talento matemático por lo que es necesario tener diferentes fuentes de intervención. El enriquecimiento curricular es una de las estrategias educativas más interesantes para dar respuesta a los alumnos superdotados y con talento.

El enriquecimiento curricular consiste en añadir nuevos contenidos que no estén cubiertos en el currículo oficial. No consiste en avanzar sobre contenidos de cursos posteriores, sino en ampliar los temas y abordarlos con un nivel mayor de abstracción y de complejidad; promover el pensamiento creativo y de explorar la lógica interna de éste y sus relaciones con otras áreas de conocimiento.

2.2.- *VISUALIZACIÓN EN EL APRENDIZAJE Y EN LA ENSEÑANZA*

La percepción visual es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida, no sólo en las relacionadas con el aprendizaje escolar o con la geometría. Para aludir a este tipo de habilidades, en Didáctica de las Matemáticas, se emplean generalmente los términos equivalentes de “visualización” o “visualización espacial”.

Según investigaciones en el área (Presmeg, 1986, Bishop, 1989, Del Grande 1990) podemos encontrar tres componentes diferenciadas de la visualización:

- Imágenes mentales.
- Procesos.
- Habilidades.

2.2.1- IMÁGENES MENTALES

El elemento central en la visualización son las imágenes mentales, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos, relaciones, etc. (Gutiérrez 1991)

En el campo de las Matemáticas, Presmeg (1986) clasificó las imágenes mentales como:

- *Imágenes concretas pictóricas*: imágenes figurativas de objetos físicos.
- *Imágenes de fórmulas*: visualiza la fórmula y se apoya el ella para desarrollar el trabajo q realizar.
- *Imágenes patrón:* ideas que se generan que nos ayudan a tener un esquema del resultado.
- *Imágenes cinéticas:* imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.
- *Imágenes dinámicas:* imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

2.2.2- PROCESOS

Poco tiempo después, para Bishop (1989), para el cual las imágenes visuales (físicas o mentales) son los objetos que se manipulan en la actividad de visualización, esta manipulación tiene lugar bajo dos tipos de procesos:

- *Procesamiento visual de la información (VP):* proceso en el cual se transforma información no visual en imágenes mentales (información visual). También se transforman imágenes mentales en otras distintas para obtener una nueva información.
- *Interpretación de información figurativa (IFI):* proceso de comprensión e interpretación de imágenes mentales para obtener información.

2.2.3- HABILIDADES

Aunque Bishop no diferencia entre procesos y habilidades, numerosos investigadores dejan clara esta distinción. Este es el caso de Del Grande (1990), para el cual existen diversos tipos de habilidades que entran en juego en el proceso de visualización. Estas son:

- *Coordinación motriz de los ojos*
- *Identificación visual:* habilidad de reconocer una figura aislándola.
- *Conservación de la percepción:* habilidad de reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente.

- *Reconocimiento de posiciones en el espacio:* habilidad para relacionar un objeto con el punto de referencia elegido.
- *Reconocimiento de las relaciones espaciales:* habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.
- *Discriminación visual:* habilidad para comparar varios objetos identificando semejanzas y diferencias.
- *Memoria visual*

Desde el punto de vista matemático, la visualización supone la habilidad para interpretar y comprender la información proveniente de figuras usadas en el trabajo geométrico y la habilidad para contextualizar y trasladar las relaciones abstractas y la información no figurativa en términos visuales.

Los significados de visualización dados por los autores de otros ámbitos, especialmente el psicológico, no son compartidos por los matemáticos, profesores o educadores matemáticos que buscan un significado más simple y general ya que consideran que las imágenes mentales y las representaciones externas ayudan a conseguir una mejor comprensión y resolver problemas.

Para contextualizar nuestra investigación seguiremos el marco teórico definido por Gutiérrez (1996) y, entenderemos por visualización como *el tipo de actividad de razonamiento basado en el uso de elementos visuales o espaciales, ya sea física o mental, que se realizan para resolver problemas o demostrar propiedades.*

Por tanto, consideramos la visualización integrada por cuatro elementos principales (Gutiérrez, 1996):

- **Imagen mental**: tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales.

- **Representación externa**: cualquier tipo de representación gráfica o verbal de conceptos o propiedades que incluye dibujos, esbozos, diagramas, etc., que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y hacer razonamiento visual.

- **Procesos de visualización**: acciones mentales o físicas en que están involucradas las imágenes.

- **Habilidades de visualización** para realizar los procesos necesarios con imágenes mentales específicas para un problema dado. Dependen del problema matemático a resolver y de las imágenes creadas.

La combinación de estos cuatro elementos permite explicar los pasos a seguir cuando se usa la visualización en la resolución de una tarea: la primera imagen inicia un proceso de razonamiento visual en el que, dependiendo de la tarea y de las habilidades del estudiante, le obliga a usar algunas de sus habilidades visuales para realizar diferentes procesos, pero además puede generar otras imágenes mentales y/o representaciones externas antes de llegar a la respuesta.

2.2.4- TIPOS DE PENSAMIENTOS SEGÚN SU CAPACIDAD DE VISUALIZACIÓN

Krutetskii (1976) manifestó que, atendiendo a las características de sus resoluciones, los estudiantes se podían clasificar en tres grandes grupos:

- **El tipo geométrico**, se caracteriza por el predominio de una componente pictórico-visual muy bien desarrollada, frente a una componente lógico-verbal bien desarrollada pero menos que la anterior. Estos estudiantes sienten la necesidad de interpretar visualmente una expresión o relación matemática abstracta y, cuando no lo logran, tienen dificultades para operar con esquemas abstractos. Un inconveniente de esta forma de actuación es que en ocasiones la representación figurativa sustituye a la lógica.

- **El tipo analítico**, se caracteriza por el predominio de una componente lógico-verbal muy bien desarrollada, frente a una componente pictórico-visual débil. Estos estudiantes operan fácilmente con esquemas abstractos y no necesitan el apoyo visual para interpretar y usar objetos o patrones durante la resolución de problemas.

- **El tipo armónico**, se caracteriza por un equilibrio entre las componentes lógico-verbal y pictórico-visual, ambas bien desarrolladas pero siendo la primera componente la dominante.

Dicho de otro modo, hay alumnos que tienen una marcada inclinación hacia los aspectos visuales de las matemáticas, otros que se sienten fuertemente atraídos por su componente analítica, y otros en los que estas dos preferencias se conjugan armoniosamente.

2.3.- REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En los apartados anteriores se ha manifestado la importancia de diseñar unas prácticas docentes adecuadas para atender a los alumnos con talento atendiendo a sus necesidades especiales. El enriquecimiento curricular, además de trabajar en mayor profundidad determinados conceptos, debería desarrollar las habilidades específicas que caracterizan a los alumnos con talento y así afrontar con mayor éxito las tareas matemáticas. Las habilidades de visualización ocupan un lugar importante en el proceso de resolución de determinadas tareas matemáticas, especialmente en el campo de la geometría, por lo que su estudio nos lleva a conocer mejor el papel que estas habilidades desempeñan en el talento matemático.

Para comprender la relación entre talento matemático y habilidades de visualización, hemos realizado una revisión general, destacando estudios de la literatura de investigación.

Estudios clásicos sobre talento matemático y visualización: Krutetskii, Lean y Clements, Bishop y Presmeg.

Las primeras investigaciones destacadas sobre talento y visualización fueron los estudios de Krutetskii (1976). Para su investigación, Krutetskii recopila las componentes de las habilidades matemáticas que caracterizan el pensamiento matemático a través de varias fuentes.

Elabora 79 test (22 aritméticos, 17 algebraicos, 25 geométricos y 15 de otro tipo) de problemas matemáticos clasificados en 26 series que recogen una interesante selección de los problemas experimentales. Destacamos las series relacionadas con los conceptos espaciales y visuales que se usaron para determinar la tipología de los estudiantes: la serie XXIII está compuesta por problemas con grados variables de visualización en sus soluciones, la XXIV incluye problemas con formulaciones verbales y visuales y la XXV los problemas relacionados con conceptos espaciales.

Tras pasar los test a los sujetos seleccionados, clasifica a los alumnos en aritméticos, geométricos o armónicos, según el procedimiento utilizado en la resolución de las tareas. Estas tres categorías son las mismas que habían señalado otros autores como Hadamard, Menchinskaya, Poincaré, Richardson y Walter (Lean y Clements, 1981).

Tras el estudio, elabora un esquema de las habilidades matemáticas de los niños con talento, señalando componentes de las inicialmente conjeturadas que no forman parte obligatoriamente de la estructura del talento matemático. Entre las habilidades matemáticas de los niños con talento, destacamos la *habilidad para abreviar los procesos de razonamiento matemático y el sistema de las operaciones correspondientes*; *el interés por clarificar, simplificar, economizar y racionalizar las soluciones; la memoria matemática* (para retener las relaciones matemáticas, las características, las estrategias de los argumentos y las demostraciones, los métodos de resolución de problemas y los principios de planteamientos). Mientras que destacamos que no es una componente obligatoria *la rapidez de los procesos mentales.*

En la revisión de Lean y Clements (1981), sugieren utilizar no sólo pruebas escritas, evitando las cuestiones que tengan en el enunciado diagramas o indiquen algo para dibujarlo y puntuar también los intentos incorrectos de resolución de los problemas. En los estudios previos a su investigación encuentran resultados diferentes según sea significativa la relación entre habilidad espacial y rendimiento.

Su revisión bibliográfica sobre las relaciones entre Imaginería Visual-Rendimiento Matemático y sobre Habilidad Espacial-Rendimiento Matemático, les lleva a afirmar que aunque ha habido muchas investigaciones sobre la relación entre habilidad espacial, el uso de imaginería visual y el rendimiento matemático, muy pocas investigaciones dan resultados definitivos.

Alan Bishop ha estudiado desde 1980 la visualización, resumiendo sus aporte en 2008 (Bishop, 2008). Desde sus primeros trabajos (Bishop, 1980), hace una exhaustiva revisión sobre las habilidades espaciales desde una perspectiva más psicológica.

Del estudio de Bishop, destacaremos su visión del estudio de Krutetskii y recogemos la dificultad que expone sobre los instrumentos de medición empleados en la relación entre visualización e inteligencia.

Bishop (1980) considera importante la contribución de Krutetskii por tres motivos: por desarrollar un conjunto de tareas que incluían un alto grado de pensamiento espacial, estableciendo conexiones entre las habilidades espaciales y las matemáticas; por documentar varios casos de alumnos, con buen rendimiento en matemáticas, que usaron predominantemente las ideas espaciales en la resolución de problemas y por mostrar un método de investigación y un estilo muy diferente de los métodos psicométricos tradicionales. Esta revisión de Bishop sobre habilidades espaciales y visualización en educación matemática es considerada después de tres décadas como uno de los cimientos para la investigación en el campo (Presmeg, 2008b).

Para comprender la relación existente entre visualización e inteligencia es necesario especificar qué elementos del talento matemático y de la visualización son los que se estudian, ya que si bien el talento matemático está, de manera generalizada, caracterizado por el rendimiento en tareas de resolución de problemas, la medición de la visualización se obtiene a partir de diferentes instrumentos y registros: puntuaciones en test visuales, tipos de imágenes utilizadas, estrategias de resolución visuales utilizadas, habilidades de visualización manifestadas, etc. Por esto, la utilización de diferentes definiciones de talento (habilidad matemática, rendimiento, etc.) y visualización (habilidad espacial, imaginería visual, etc.) y de instrumentos de medida puede conducir a resultados aparentemente contradictorios.

La creación de un instrumento de medición de la visualización refleja uno de los principales problemas en estas investigaciones: la dificultad de registrar la actividad visual. Bishop (1989, 1992) en varias revisiones de investigaciones, señala la dificultad para investigar la forma en la que los alumnos procesan las ideas y destaca el estudio de Presmeg (1986b). En relación con las habilidades, Bishop (1983) realiza un estudio significativo de los procesos IFI y VP que había definido en artículos anteriores y propone estudios para caracterizar mejor estas habilidades, realzando la importancia de caracterizarlas mejor y de diseñar entrenamientos óptimos para desarrollarlas. Concluye que, en este momento, somos relativamente ignorantes acerca del aprendizaje de ideas espaciales y geométricas.

Las síntesis que realiza Norma Presmeg nos llevan a presentar las investigaciones que abordan tres aspectos: los métodos visuales, el papel de las imágenes y el interés de la formación para el desarrollo de habilidades de visualización.

Para Presmeg (1986ª) un *método visual* de resolución es el que involucra como parte esencial imágenes visuales, con o sin diagramas, aunque también involucre razonamiento o métodos algebraicos. De sus estudios determina que casi ninguno de los alumnos considerados como excelentes son “visualizadores”.

El estudio de los distintos *tipos de imágenes* que los estudiantes utilizan en la resolución de tareas (Presemg, 1992), sugiere que la imaginería de patrones y otro tipo de imágenes forma una componente central en el modelo de razonamiento matemático y puede utilizarse para la abstraer y generalizar.

Presmeg (2006) afirma que quizás el asunto más apremiante de investigación en este periodo es estudiar una *enseñanza* eficaz *para* aumentar el uso y poder de *la visualización* en la educación matemática. La autora subraya la escasez de estudios sobre enseñanza de la visualización, apunta que los estudiantes apenas usan el razonamiento visual y que se trabaja poco en clase, a pesar de su gran poder para argumentar. Comenta las dificultades que tienen los alumnos para utilizar las imágenes en su razonamiento analítico, encontrando pocos artículos que hayan mostrado evidencias empíricas para sugerir qué aspectos de la instrucción pueden ayudar a los profesores a usar la visualización y qué aspectos podrían ayudar a superar las dificultades y hacer un uso óptimo de la potencia del proceso visual.

Van Garderen y Montague (2003ª) investigan el uso de la imaginería visual cuando los estudiantes resuelven problemas matemáticos. Los resultados indican que los alumnos con talento usan significativamente más representaciones visuales esquemáticas (el tipo más sofisticado de imaginería, para representar las relaciones espaciales entre las partes del problema, incluyendo transformaciones espaciales) que el resto de los grupos y que los estudiantes con dificultades de aprendizaje usan más representaciones pictóricas.

De esta revisión, destacamos dos líneas en las investigaciones que relacionan talento matemático y visualización. En la primera situamos los estudios que analizan el uso de la visualización en la realización de determinadas tareas y las dificultades que manifiestan los alumnos con talento al resolverlas. La segunda la determinan los estudios que relacionan diferentes aspectos de la visualización con el rendimiento o habilidad matemática que poseen los alumnos con talento.

Hemos resumido en este apartado las investigaciones que tratan la visualización y el talento matemático, bien de una manera relacionada, bien de manera independiente, pero aludiendo a ambos. Del recorrido por las investigaciones anteriores, resaltamos los diferentes criterios utilizados para la medición del talento matemático (rendimiento, habilidad matemática, etc.) y de la visualización (imágenes, resultados en test, habilidades espaciales, etc.). Recogeremos esta variedad en la Tabla 1 donde plasmamos los estudios en los que se relacionan aspectos del talento matemático y la visualización.

Autor	Medición del talento matemático	Medición de la visualización	Sujetos	Resultados
Krutetskii, 1976	34 alumnos talentosos (éxito en tareas matemáticas)	✓ Utilización de imágenes visuales. ✓ Visualización de relaciones matemáticas. ✓ Interpretación visual. ✓ Ver mentalmente (visualizar la posición de un sólido en el espacio la relación entre sus partes). ✓ Imaginación geométrica (interrelación de sólidos, figuras, planos y líneas)	192 sujetos de 6 a 16 años	**La habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas y conceptos espaciales geométricos no es necesariamente una componente en la estructura de las habilidades matemáticas**
Presmeg, 1986[a]	Nominaciones de los profesores (7 talentosos, 27 muy buenos)	✓ Puntuación en un instrumento propio y entrevistas	277 estudiantes de 16 y 17 años	**Los alumnos consideramos como más brillantes eran casi siempre no visualizadores**
Van Garderen y Montague , 2003[a])	Test WISC-R (22 alumnos talentosos)	✓ Número de representaciones pictóricas o esquemáticas utilizadas.	66 alumnos de sexto grado	**Los alumnos con talento usaban significativamente más representaciones visuales esquemáticas, el tipo más sofisticado. El éxito en la resolución de problemas correlaciona positivamente con el uso de este tipo de imágenes**
Van Garderen, 2006	Test WISC-R (22 alumnos talentosos)	✓ Número de representaciones pictóricas o esquemáticas. ✓ Número de representaciones visuales utilizadas. ✓ Test de habilidad espacial	66 alumnos de sexto grado	**Los alumnos con talento puntúan mejor que los demás en las dos medidas espaciales de visualización. El uso de imágenes esquemáticas correlaciona significativamente y positivamente con el alto rendimiento en cada medida de visualización espacial**

Tabla 1.- Recopilación de investigaciones que relacionan el talento matemático y la visualización

La diversidad de criterios de medición del talento matemático y de la visualización puede ser uno de los factores que explican la diferencia de los resultados obtenidos por las investigaciones. Así puede comprenderse que haya estudios que no detectan conexión entre talento y visualización junto con otros que si la establecen. Entre los primeros, Lean y Clements (1981) señalan que la capacidad visual no influye especialmente en el rendimiento matemático, Krutetskii (1976) concluye que la visualización no constituye una componente necesaria de las habilidades matemáticas y Presmeg (1986ª) que los alumnos con talento prefieren métodos no visuales en la resolución de problemas. Los segundos relacionan positivamente la visualización y el mayor rendimiento, como Van Garderen y Montague (2003ª).

Hemos de notar que existen estudios sobre visualización pero no están contextualizados en el ámbito del talento matemático (Bishop1983). Es por ello que consideramos necesario hacer una investigación sobre el papel de la enseñanza la visualización en un contexto de alumnos con talento matemático.

Capítulo 3.- METODOLOGÍA

En este capítulo comenzaremos por plasmar las fases de la investigación. Recordaremos el problema de investigación y los objetivos y, seguidamente, exponemos la metodología empleada en la investigación, presentando en primer lugar el tipo de investigación en el cual se enmarca nuestro estudio.

Posteriormente se expone el diseño de la investigación que aborda la selección de los estudiantes, el diseño, descripción y procedimiento de aplicación del instrumento utilizado para recolectar información y el proceso de transcripción y codificación de las producciones de los estudiantes.

Para empezar mostramos las fases y las acciones que se han seguido para llevar a cabo la investigación.

FASES	ACCIONES
PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO	• Definir el problema y los objetivos de investigación. • Identificar los objetivos. • Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos. • Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y de los conocimientos previos de los alumnos. • Diseñar la recogida de datos.

FASES	ACCIONES
EXPERIMENTACIÓN	**Antes de cada intervención:** • Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos. • Identificar los objetivos de la intervención. • Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible. • Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados que se esperan alcanzar en la intervención. **Durante la intervención:** • Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención. **Después de la intervención:** • Analizar los datos recogidos en la intervención. • Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.
ANÁLISIS DE LOS DATOS	• Recopilar y organizar toda la información recogida. • Analizar el conjunto de los datos, lo que implica: o Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje. o Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno.

Tabla 2.- Fases de la enseñanza y acciones llevadas a cabo en cada fase

Tal y como hemos mencionado anteriormente, los alumnos con talento matemático emplean escasamente sus habilidades visualizadoras. Según lo estudiado, los alumnos con talento tienen capacidad visualizadora, que además puede desarrollarse (Gardner, 2001; Gutiérrez, 2006; entre otros). Por tanto surge el problema de cómo favorecer el desarrollo de la visualización de los estudiantes con talento matemático.

Por ello, concretamos nuestras inquietudes en: ***Explorar procesos y posibilidades de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría con alumnado de último ciclo de Educación Secundaria Obligatoria.***

Siguiendo esta línea, nuestra investigación tiene por fin diseñar una colección de actividades para, con ellas, estudiar cómo se manifiestan las habilidades de visualización de los alumnos. Así podremos identificar y analizar las dificultades que los alumnos encuentran durante el proceso de visualización

3.1.- TIPO DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación la consideraremos de tipo exploratorio ya que se lleva a cabo con el fin de examinar un problema desconocido o poco estudiado; es este caso el análisis de las respuestas de los alumnos a una tarea dada. Además, es un estudio descriptivo ya que pretende describir, caracterizar y clasificar, en términos cualitativos y cuantitativos, las respuestas dadas por los alumnos a ciertos problemas planteados.

Dankhe (1986) menciona que los estudios exploratorios generalmente determinan tendencias y relaciones potenciales entre variables, estableciendo una guía de ideas para una posterior investigación más rigurosas. De esta forma, la información recolectada en este primer estudio permitirá tomar decisiones sobre la dirección y acercamiento del trabajo de tesis doctoral en aspectos como la construcción del instrumento de recolección de información, categorías de análisis e hipótesis de investigación, entre otros.

3.2.- SELECCIÓN DE LOS ESTUDIANTES

Dadas las características de la investigación se requerían grupos de estudiantes con características diferentes en cuanto a su capacidad matemática. Así, se escogieron dos cursos del *IES Juanelo Turriano (Toledo)*, un curso de 3º E.S.O. y otro de 4º E.S.O. Dentro de cada uno de ellos había alumnos considerados con talento matemático (gracias no solo a su expediente académico en relación a dicha asignatura, sino también a la nominación por parte de los profesores y a la predisposición de realizar actividades novedosas llevándolas a cabo con éxito y con métodos de resolución poco comunes), alumnos con una dificultad media hacia las matemáticas y, alumnos con una dificultad pronunciada.

El curso de 4º E.S.O. está formado por 29 alumnos, de los cuales 7 están considerados con talento matemático, 12 son alumnos estándar y el resto son alumnos que muestran dificultades en el ámbito de las matemáticas.

En el caso del curso de 3º E.S.O. disponemos de 34 alumnos. Entre ellos están 5 considerados con talento matemático, 7 alumnos estándar y el resto tienen dificultades en esta área.

La selección de estos grupos se debió a que cumplían con las características de ser un grupo estándar. Además, no podemos olvidar la disponibilidad y facilidad ofrecida tanto por el propio centro, como por la profesora de matemáticas de dichos cursos.

3.3.- VARIABLES

Es sabido que existe multitud de variables que pueden influir a la hora de resolver un problema. Entre otras tenemos: los conceptos implicados, las estrategias de resolución, capacidad visual, etc.

Para afrontar el problema de investigación, responder a las preguntas planteadas y alcanzar los objetivos previstos, vamos a analizar los siguientes aspectos:

- Variables cuantitativas:
  - ✓ Corrección de la respuesta a cada tarea, considerada como una variable dicotómica (correcta- incorrecta)
  - ✓ Nivel de éxito en la resolución
- Variables cualitativas:
  - ✓ Curso académico
  - ✓ Género
  - ✓ Tipo de error puesto de manifiesto en las respuestas (conceptual, procedimental o combinado)
  - ✓ Tipo de razonamiento manifestado en las respuesta a cada tarea
  - ✓ Tipos de imágenes utilizadas en la resolución de las tareas (siguiendo la clasificación de Presmeg.)

Si nos centramos en la clasificación de las habilidades de visualización, creemos conveniente establecer unas categorías de estudio para obtener información más precisa de cada una de ellas:

HABILIDAD	**CATEGORÍAS**
Reconocimiento de las relaciones espaciales (relación interna)	RI1: Utilización de elementos de posición relativa entre dos objetos (dirección, orientación, paralelismo, secantes, coincidentes, perpendiculares, simétricos).
Reconocimiento de posiciones en el espacio (relación externa)	PR1: Identificación de movimientos (traslaciones, giros, volteos) de dos objetos respecto a un tercero.
Identificación visual	IV1: Utilización del proceso de formación de una estructura a partir de una menor. IV2: Identificación de elementos (círculos, segmentos, vértices, lados, caras, ángulos) dentro de una estructura mayor.
Conservación de la percepción	CP1: Utilización de criterios de igualdad: haciendo referencia a la forma o al tamaño, a los movimientos (giros, traslaciones, volteos) o a las distintas perspectivas. CP2: Identificación de elementos ocultos (círculos superpuestos, segmentos solapados, caras, vértices y lados que no se ven…).
Discriminación visual	DV1: Utilización de criterios de clasificación mediante semejanzas o diferencias. DV2: Identificación de semejanzas o diferencias entre figuras.

Tabla 3.- Categorías correspondientes a las habilidades de visualización

Para las variables cualitativas se han elaborado tablas de frecuencia con el fin de describir la incidencia de los tipos de razonamientos y los tipos de conflictos.

3.4.- DISEÑO DEL INSTRUMENTO PARA RECOLECTAR INFORMACIÓN

En este estudio elaboramos una colección de 7 problemas, agrupados en 5 tareas, con dificultad relativamente diferente que permitieran a los alumnos poner en práctica sus habilidades, conocimientos y creatividad.

Para el diseño de este cuestionario tomamos en cuenta aspectos como la clase de información que proporciona el problema, el tipo de información que permanece desconocida y que el contexto sea muy familiar para los estudiantes. De igual forma consideramos el tipo de información; es decir, la riqueza de ideas que podrían surgir de la situación presentada a los estudiantes.

Así, consideramos que el instrumento utilizado debía cumplir al menos las siguientes condiciones:

- El contexto debe ser de interés y familiar para los estudiantes.
- Estimular la creatividad.
- Permitir el empleo de diferentes tácticas de resolución.

Con respecto a esta última condición, creemos importante permitir a los estudiantes trabajar siguiendo su propio método de resolución, ya que nos interesa ver en qué medida ponen en juego sus conocimientos, habilidades y creatividad. Además, consideramos que esto puede hacer que el estudiante ponga su mayor esfuerzo y sienta un reto y compromiso hacia la actividad propuesta.

Luego de identificar dichos parámetros, decidimos elaborar diferentes tipos de actividades y analizarlas de acuerdo con la riqueza de los elementos antes mencionados, con el fin de escoger las que mejor se adecuaran a los intereses del estudio. En total se tuvieron nueve propuestas, si bien por cuestiones de disponibilidad de tiempo en la aplicación del cuestionario y la posible dificultad que pudieran tener los estudiantes en responder a las actividades, decidimos utilizar solamente siete.

Para la recogida de datos, disponemos de los siguientes registros: respuestas entregadas en las actividades escritas y observaciones que pude hacer mientras los alumnos resolvían las tareas. Hemos de notar que en un principio pretendimos tener entrevistas personales con los alumnos caracterizados con talento matemático después de haber resuelto la tarea, pero esto no pudimos llevarlo a cabo por la falta de tiempo y, además, por la insistencia del centro de preservar el anonimato de dichos estudiantes.

Este último punto, el anonimato de los participantes, lo tuvimos muy presente desde el comienzo de nuestra investigación. Por ello les pedí que, en la primera página del cuestionario, escribieran tanto las iniciales del nombre y apellidos como el sexo y el nivel que cursaba.

Al disponer de datos escritos que suministran información sobre elementos no apreciables directamente (imágenes, razonamientos, etc.), debemos utilizar procedimientos metodológicos que nos permitan obtener la información deseada. Los datos obtenidos son cualitativos, cuyo análisis requiere una descripción interpretativa detallada, para lo que se utiliza el análisis de contenido, que es un proceso que involucra un esfuerzo de observación y reflexión sobre nuestro fenómeno de estudio (Fox, 1981).

En la siguiente sección describimos las tareas que aparecen en el instrumento de investigación. Junto con las tareas mostramos tanto los objetivos que pretendemos alcanzar como las categorías utilizadas de las variables antes mencionadas.

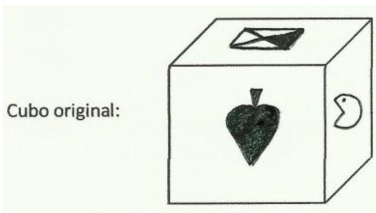
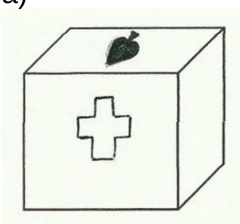
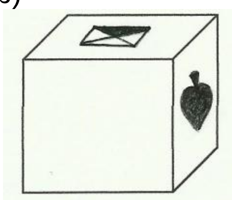
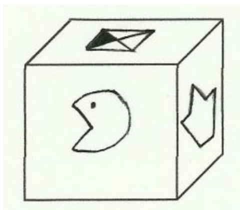
3.5.- DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO

El cuestionario, adjunto en el anexo II, fue dado a los sujetos en varias hojas y en cada una de éstas se muestra una tarea a realizar.

A continuación pasamos a describir las actividades a resolver por los estudiantes con los objetivos que pretendemos alcanzar.

El esquema que seguiremos en este punto es: primero, plasmaremos la tarea a realizar; segundo describiremos tanto los objetivos como las habilidades e imágenes que esperamos que utilicen; y por último, daremos una primera idea de cómo esperamos que lleven a cabo la resolución de dicha tarea.

PRIMERA TAREA: Cubo decorado.

<table>
<tr><td colspan="3">El siguiente cubo tiene decoradas sus caras, DIBUJA cómo quedaría la cara blanca. ESCRIBE TODO LO QUE HAS PENSADO O IMAGINADO PARA LLEGAR A TU RESPUESTA
</td></tr>
<tr><td>a)
</td><td>b)
</td><td>c)¿Es posible esta combinación de caras?
</td></tr>
</table>

Objetivos:

- ✓ Descubrir y emplear características visuales de los giros: cambio de posición, no inversión de la figura…
- ✓ Visualizar un objeto en tres dimensiones a partir de un modelo bidimensional e imaginar cómo se vería este objeto si sufriera una rotación espacial.

Habilidades que pueden entrar en juego:

- ✓ Reconocimiento de las relaciones espaciales (relación interna).
- ✓ Reconocimiento de posiciones en el espacio (relación externa).
- ✓ Identificación visual.

Tipo de imágenes:

- ✓ Dinámica

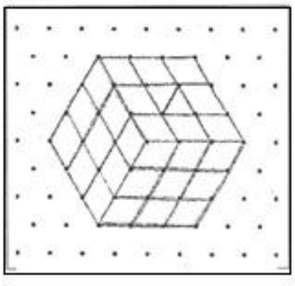
Con el planteamiento de esta actividad pretendemos trabajar la visualización ayudados por giros, es decir, que los participantes utilicen sus habilidades para descubrir cómo quedaría la cara del dado que se les plantea, teniendo ellos que averiguar qué modificación ha sufrido el cubo original. Y, en el último apartado les planteamos un cubo con todas las caras decoradas y les preguntamos si es posible o no esa combinación.

Argumento ideal: establecer una relación externa; es decir, ver cómo se mueven las caras del cubo.

Concluimos diciendo que los estudiantes, al no poder mover el cubo, se veían obligados a imaginar las posiciones de las figuras en las diferentes caras, siendo su **trabajo doble**: decidir **qué figura aparecía** en cada cara y **en qué posición**. Este trabajo va unido a las características de conservación del tamaño y forma de las figuras y, cambio de posición y no inversión de la figura, objetivos 1 y 2 respectivamente.

SEGUNDA TAREA: Representaciones. Contando cubos.

¿De CUÁNTOS CUBOS está hecho el dibujo? ¿Cómo los has contado? **ESCRIBE TODO LO QUE HAS PENSADO O IMAGINADO PARA LLEGAR A TU RESPUESTA.**



Objetivos:

- ✓ Desarrollar la capacidad de inspección de una determinada figura.
- ✓ Descubrir un sencillo método para el conteo de figuras.
- ✓ Desarrollar la capacidad de abstracción y análisis con modelos de figuras concretas para su aplicación posterior en la vida diaria.

Habilidades que pueden entrar en juego:

- ✓ Identificación visual.
- ✓ Conservación de la percepción.

Tipo de imágenes:

- ✓ Pictórica.

Con esta tarea lo que pretendemos es trabajar con los volúmenes de figuras geométricas. En el primer apartado, referido al conteo de cubos, pueden entrar en juego conceptos y definiciones previas como son: cubo, arista, vértice, cuadrado, volumen, unidad de medida de volumen y perspectiva para que emerja el volumen de un sólido perforado y representación por niveles. Si nos centramos ahora en las propiedades que tendrían que tener en cuenta, estas son: el volumen de un cubo se determina elevando al cubo la longitud de su arista, el volumen como producto de tres dimensiones, el volumen es una magnitud sumativa, los cubitos unidad se unen por caras completas y propiedades de las operaciones aritméticas elementales (suma, resta y multiplicación). El segundo apartado, pretende hacer ver a los estudiantes que el túnel puede tener distintas longitudes lo que hace variar el volumen final del cubo perforado entre tres posibilidades.

Argumento ideal: Teniendo en cuenta que el cubo de 3 × 3 × 3 = 27 unidades (cubito unidad) está perforado y que el volumen tiene la propiedad de ser aditivo, se tendía que averiguar el volumen del túnel perforado para calcular el volumen del cubo propuesto. De ahí se deduce que el volumen del cubo perforado es el volumen del cubo entero menos el volumen del túnel.

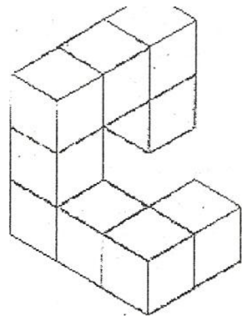
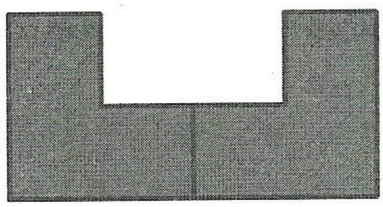
Las nociones de cubo, ortoedro (túnel), así como las fórmulas de cálculo de los volúmenes tienen un carácter unitario; son nociones previas que deben estar disponibles para el sujeto. En cambio el cubo perforado puede ser descompuesto en partes (forman un sistema).

Esta representación del cubo perforado permite ver sólo tres de las caras con la entrada del túnel correspondiente y no su salida por lo que se quiere hacer ver a los estudiantes que la profundidad del túnel puede variar dependiendo del sujeto que analice la tarea.

El enunciado de la tarea pone en juego un icono del cuerpo geométrico cuyo volumen se pide calcular. El cubo perforado es una entidad mental (si se considera desde el punto de vista de un sujeto individual) e ideal (si se considera desde el punto de vista institucional matemático).

La tarea requiere poner en juego las nociones de cubo, volumen de un cuerpo y unidad de medida de volumen, entre otras. En el caso de la noción de cubo pensar en este objeto en términos de los elementos que lo constituyen puede ser un obstáculo para la resolución de la tarea.

TERCERA TAREA: Dibujando Representaciones.

a) DIBUJA esta figura en el papel isométrico.	
b) DIBUJA, en el papel isométrico, una figura que tenga esta sombra.	

Objetivos:

- ✓ Realizar con relativa facilidad perspectivas isométricas.
- ✓ Hacerles ver que el hecho de que las líneas no converjan significa que las cosas lejanas no se hacen más pequeñas.

Habilidades que pueden entrar en juego:

- ✓ Reconocimiento de las relaciones espaciales.
- ✓ Reconocimiento de posiciones en el espacio.
- ✓ Identificación visual.
- ✓ Discriminación visual.
- ✓ Conservación de la percepción.

Tipo de imágenes:

- ✓ Pictórica (apartado (a))
- ✓ Pictórica construida (apartado (b). Se tienen que imaginar un objeto inexistente.)

Con esta tarea lo que pretendemos es trabajar con perspectivas y la acción que los estudiantes de la muestra han de realizar, dibujar la misma figura, debe estar clara por todos.

En el caso del primer apartado, el hecho de que la trama esté girada respecto a la figura original, no es casual. Lo que pretendemos es crear un bloqueo en el estudiante para ver cómo reacciona ante tal problema y cómo lo resuelve.

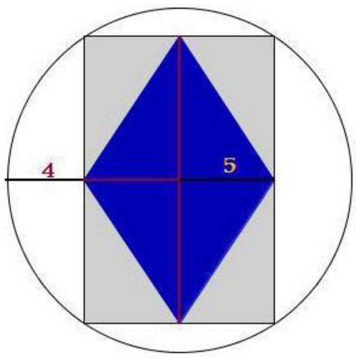
En el segundo apartado, pretendemos que, al igual que en apartado anterior, para dibujar en la trama que les presentamos, tienen que seguir unos criterios para mantener las proporciones de la figura.

Argumento ideal: establecer una relación interna; es decir, relacionar los lados de la figura dejando a un lado la posición (sin centrarse en ella) en la que aparece dibujada.

La tarea requiere utilizar la noción de cubo, elegir una medida para los lados y establecer una relación entre la trama y la figura dada.

CUARTA TAREA: Lado del Rombo.

¿Cuál es la MEDIDA del LADO DEL ROMBO sabiendo las medidas marcadas?
ESCRIBE TODO LO QUE HAS PENSADO PARA LLEGAR A TU RESPUESTA



Objetivos:

- ✓ Observar y reconocer las diferentes figuras existentes dentro de un mismo conjunto.
- ✓ Identificar la figura necesaria para resolver el problema.

Habilidades que pueden entrar en juego:

- ✓ Conservación de la percepción.
- ✓ Reconocimiento de las relaciones espaciales.
- ✓ Discriminación visual.

Tipos de imágenes:

- ✓ Patrón
- ✓ Fórmulas

En esta tarea lo que pretendemos es que el alumno deseche la posibilidad de resolver el problema utilizando el teorema de Pitágoras y busque un razonamiento distinto basado en la identificación de elementos ocultos en una figura mayor y utilice las propiedades de fichas figuras ocultas.

Argumento ideal: identificar un rectángulo de los cuatro ocultos formados por las semidiagonales del rombo y las mitades del lado del rectángulo que contiene al rombo. Una vez identificado dicho rectángulo, caer en la cuenta que en lado del rombo es una de las dos diagonales que posee el rectángulo y que también es el radio de la circunferencia.

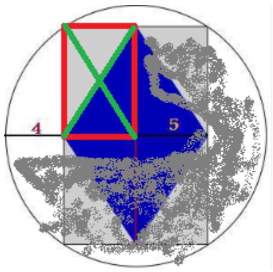
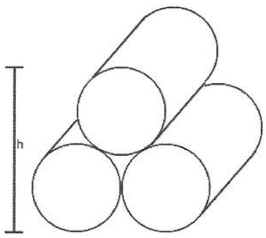


Figura 2.- Argumentación ideal para la tarea 4

La tarea requiere poner en juego las nociones de radio y diámetro de una circunferencia, y las diagonales de un rectángulo son iguales.

QUINTA TAREA: Cálculo de altura.

¿Cuál es la ALTURA de la siguiente figura sabiendo que está formada por 3 cilindros iguales, de un metro de diámetro cada uno? **ESCRIBE TODO LO QUE HAS PENSADO O IMAGINADO PARA LLEGAR A TU RESPUESTA.**



Objetivos:

- ✓ Observar y reconocer las diferentes figuras existentes dentro de un mismo conjunto.

- ✓ Identificar la figura necesaria para resolver el problema.

Habilidades que pueden entrar en juego:

- ✓ Conservación de la percepción.
- ✓ Reconocimiento de las relaciones espaciales.
- ✓ Discriminación visual.

Tipos de imágenes:

- ✓ Patrón
- ✓ Fórmulas

En esta tarea, lo que tiene por objetivo es que los alumnos caigan en la cuenta de que al tratarse de figuras curvas, cilindros en posición horizontal, la altura total no es la suma de los diámetros de las bases del cilindro puesto que no está, exactamente, uno encima de los otros dos.

En esta tarea, el concepto de altura de una figura es considerado como propio del alumno. Pretendemos que el alumno sea capaz de descubrir y formar figuras ocultas que le ayuden a sintetizar el problema.

Argumento ideal: puesto que la altura no es exactamente dos metros, como ya hemos explicado anteriormente, se tendría que descubrir que uniendo, adecuadamente, los centros de las bases de los cilindros se formaría un triángulo equilátero de lado un metro del cual podemos hallar su altura. Una vez averiguado esta, bastaría con sumar un metro más, 50 cm de cada una de las líneas rojas señaladas.

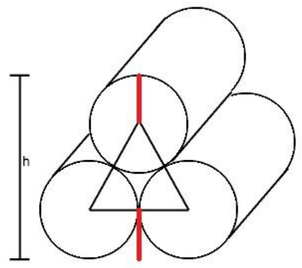


Figura 3.- Argumentación ideal para la tarea 5

3.6.- PROCEDIMIENTO

El instrumento principal para recolectar información, el cuadernillo de tareas, fue aplicado por separado a cada grupo de estudiantes en una sesión de clase, de una hora de duración.

El procedimiento de aplicación fue el mismo en ambos cursos. A los estudiantes participantes en este estudio les informamos previamente de que la prueba iba a ser calificada, y la puntuación obtenida en las tareas sería tenida en cuenta en la evaluación de la asignatura; esto solo fue para evitar en abandono precipitado en su realización y motivar su realización. De igual modo, para potenciar el trabajo individual, se pidió a los alumnos que se sentaran individualmente y trabajaran en su tarea, y solo en la suya.

Tras estas directrices, se distribuyeron los cuadernillos de tareas y dispusieron de un tiempo máximo de 50 minutos.

Durante la ejecución, en ambos cursos, de las tareas, tomé notas de las actuaciones de los estudiantes mientras resolvían los problemas. Esto nos ayudó a saber de qué manera iban razonando para llegar a la solución de las tareas, teniendo así otra fuente de información para la mejor elaboración de nuestra investigación.

Después de haber pasado el cuadernillo de tareas en ambos cursos, pasamos a su corrección/clasificación. Para ellos se confeccionó un protocolo de corrección elaborado por la autora de este trabajo con el visto bueno del director del mismo. Éste consistía en la corrección de la misma tarea a todos los estudiantes para evitar cambios de parecer con el paso del tiempo con su posterior clasificación para, así, poder analizar más detalladamente éstos y dar respuesta a nuestras preguntas.

Capítulo 4.- ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo realizaremos un análisis global de los resultados obtenidos en la aplicación de la prueba, detallando tanto la frecuencia de cada opción de respuesta como el porcentaje de aciertos para cada una de las tareas planteadas. Así mismo se considerarán los resultados globales atendiendo al curso y género.

El núcleo central del capítulo está dedicado a un estudio exhaustivo de las respuestas dadas a cada una de las tareas. El estudio de las respuestas de los alumnos desde esta perspectiva de los razonamientos supone una herramienta que rompe con la estructura proporcionada por el análisis independiente de argumentos y errores.

Tal y como señalan Gutiérrez y Jaime (1996), el estudio de los errores es fundamental para que los profesores conozcan cuáles son las dificultades y reacciones de los estudiantes sobre un tema, y como éstos interpretan los objetos matemáticos; sin considerar, no obstante, la enseñanza de las matemáticas como una actividad encaminada a detectar y perseguir errores y dificultades de los estudiantes (errores debidos a debilidades de conocimiento o a falta de cuidado, o bien a ideas erróneas que provienen de distractores visuales, consecuencia de la tendencia de los alumnos a dejarse llevar por su percepción visual).

Siguiendo un orden guiado por los objetivos planteados en la investigación, primero plasmaremos el análisis exhaustivo de las respuestas dadas para terminar dando los resultados globales obtenidos.

4.1.- RESULTADOS POR TAREAS Y ANÁLISIS DE RESPUESTAS

Antes de empezar con el análisis propiamente dicho, es necesario describir los códigos que hemos utilizado para poder llevar a cabo nuestro trabajo.

Para cada tarea elaboraremos una tabla reflejando la frecuencia y porcentaje de las respuestas teniendo en cuenta solo si esta está bien resuelta o no. Consideraremos que una respuesta es correcta si el resultado es correcto y ha justificado su respuesta, de lo contrario se considerará incorrecta. Dentro del grupo de las respuestas incorrectas señalaremos dos grupos; el primero será para aquellas respuestas que pese a estar justificadas, son incorrectas, y el segundo para aquellas que no están abordadas (Ns/Nc) o están sin justificar. Describiremos las configuraciones cognitivas asociadas, el análisis cuantitativo de las mismas y analizaremos los errores.

Mostremos a continuación la codificación de las familias de errores. En el análisis de cada uno de las tareas, la codificación nos proporcionará una descripción explícita del error que han cometido los alumnos.

Conceptual	Errores debidos al uso o formulación de incorrecta de una definición-regla, concepto, propiedad (no a su aplicación)
Procedimental	Aquellos errores que se producen al aplicar incorrectamente un procedimiento o una propiedad.
Combinados	Cuando se combinan los errores anteriores.

Tabla 4.- Clasificación de los errores

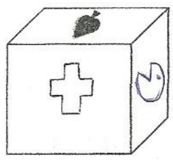
PRIMERA TAREA: Cubo decorado

Como esta tarea consta de varios apartados, primero detallamos los razonamientos utilizados por los participantes en su resolución. Tras ello, analizaremos minuciosamente cada apartado.

Distintos razonamientos asociados a la tarea 1

Describiremos los distintos razonamientos plasmados por los participantes de nuestra investigación:

- ***Utilización de elementos de posición relativa entre dos objetos (Raz1):*** este razonamiento se basa en tomar como referencia algún objeto del cubo para poder averiguar la cara blanca. Al poner en práctica este razonamiento, el alumno no necesita mover el cubo, basta con relacionar los objetos para resolver la tarea.

	Aquí, el comecocos tiene que estar con la boca hacia arriba porque en el cubo original la boca está hacia la pica, que está hacia abajo.

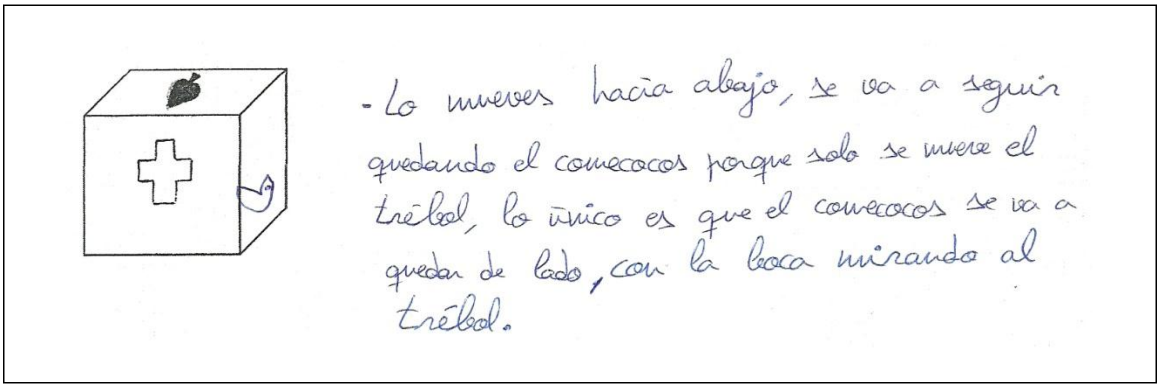
Ejemplo de respuesta 1.- Razonamiento 1 asociado a la tarea 1

- ***Identificación de movimientos (Raz2):*** este razonamiento, al contrario que en primero, deja a un lado la relación que pueda existir entre los objetos y pasa a centrar su atención en el cubo como un conjunto sólido e indivisible. Se basa en la utilización de movimientos, notemos que los movimientos son mentales porque los alumnos no disponen de objetos físicos. En este caso, los participantes, una vez averiguado el movimiento que se ha realizado, lo plasman en un solo objeto.

He hecho que el dado original rote hacia arriba.

Ejemplo de respuesta 2.- Razonamiento 2 asociado a la tarea 1

- ***Combinación de los razonamientos anteriores (Raz3):*** este razonamiento mezcla los dos anteriores para una mejor resolución de la tarea. Identifican el movimiento sufrido por el cubo, relación externa, y, para dibujar la figura de la cara blanca buscan una relación entre esta cara y otra del cubo movido, relaciones internas.



Ejemplo de respuesta 3.- Razonamiento 3 asociado a la tarea 1

Análisis por apartados

Como hemos mencionado, comenzaremos agrupando conjuntamente los datos de ambos grupos participantes en una tabla que nos muestra tanto la frecuencia como el porcentaje de las respuestas correctas e incorrectas de cada apartado, dejando constancia de si las respuestas han sido justificadas o no. Las respuestas no justificadas, aun siendo matemáticamente correctas serán consideradas como incorrectas ya que lo que nos interesa es analizar el razonamiento utilizado.

Para el primer apartado tenemos los siguientes datos:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Respuestas</th><th colspan="8">Frecuencia/ Porcentaje</th></tr>
<tr><th colspan="4">3ºESO</th><th colspan="4">4ºESO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Correctas</td><td colspan="2">14</td><td colspan="2">41.18</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">24.14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Incorrectas</td><td>Justificadas</td><td>16</td><td rowspan="2">20</td><td>47.06</td><td rowspan="2">58.82</td><td>15</td><td rowspan="2">22</td><td>51.73</td><td rowspan="2">75.86</td></tr>
<tr><td>Sin razonar
Ns/Nc</td><td>3
1</td><td>8.82
2.94</td><td>5
2</td><td>17.23
6.9</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total</td><td colspan="2">34</td><td colspan="2">100</td><td colspan="2">29</td><td colspan="2">100</td></tr>
</table>

Tabla 4.- Frecuencias y porcentajes del primer apartado de la tarea 1

Lo primero que nos ha de llamar la atención es que la mayor parte de las respuestas de esta tarea han sido justificadas, pero pese a ello tenemos un alto porcentaje de fracasos, 75.86% y 58.82% para 4º y 3º E.S.O. respectivamente. Como se nos muestra en la tabla, hay más participantes del curso de 3ºE.S.O. que responden correctamente que en el curso de 4ºE.S.O. cuando lo esperado sería lo contrario si se cayera en el error de creer que los alumnos con mayor edad son mejores resolutores de este tipo de actividad. Más adelante analizaremos los errores que cometen los participantes habiendo justificado su respuesta creyendo que era correcta.

Centrándonos en el segundo apartado, contamos con estos datos:

Respuestas		Frecuencia/ Porcentaje							
		3ºESO				4ºESO			
Correctas		15		44.12		7		24.14	
Incorrectas	Justificadas	15	19	44.12	55.88	14	22	48.28	75.86
	Sin razonar	2		5.88		5		17.24	
	Ns/Nc	2		5.88		3		10.34	
Total		**34**		**100**		**29**		**100**	

Tabla 5.- Frecuencias y porcentajes del segundo apartado de la tarea 1

Antes de analizar la tabla, hemos de mencionar que puesto que cualquier dibujo es correcto ya que esa cara del cubo no se muestra en el original, se considerará correcta aquella respuesta que vaya acompañada con un razonamiento lógico y correcto.

Lo que más nos llama la atención es el alto porcentaje de alumnos que no han resuelto correctamente la tarea en el grupo de 4ºE.S.O., un 75.86%, frente al poco más de la mitad de los alumnos de 3ºE.S.O., 55.88%.

Hemos de notar que en ambos cursos la mayoría de las respuestas incorrectas que han sido justificadas se han basado en varios cubos, no solo en el original como se les pedía. En el análisis que haremos a continuación detallaremos los distintos errores cometidos por los alumnos.

Por último, haciendo lo mismo para el tercer apartado, tenemos los siguientes resultados:

Respuestas		Frecuencia/ Porcentaje							
		3ºESO				4ºESO			
Correctas		20		58.83		7		24.14	
Incorrectas	Justificadas	9	14	26.47	41.17	11	22	37.94	75.86
	Sin razonar	4		11.76		8		27.58	
	Ns/Nc	1		2.94		3		10.34	
Total		**34**		**100**		**29**		**100**	

Tabla 6.- Frecuencias y porcentajes del tercer apartado de la tarea 1

Lo que más nos llama la atención es la gran diferencia de resultados correctos, mientras que casi el 60% de los alumnos de 3ºE.S.O. lo resuelven correctamente, tan solo cerca del 25% lo hacen los alumnos de 4ºE.S.O. Veremos a qué es debido ese gran número de errores.

Lo que nos sorprende de esta tarea en conjunto, fijándonos en los tres apartados, es el alto número de personas que dejan sin justificar o no abordan la tarea. Aún más, el hecho de que son mayoritariamente los alumnos de 4ªESO los que dejan incompleta la tarea.

El hecho de que esta tarea sea la primera a la que se tiene que enfrentar los alumnos no es casual, sino que fue considerada como la de menor dificultad. La disposición de las tareas van en aumento en cuanto al grado de dificultad, por lo que no nos esperábamos estos resultados.

Pasemos ahora a hacer un análisis más detallado de los alumnos que han participado en nuestra investigación:

Análisis cuantitativo de los distintos razonamientos asociados al primer apartado de la tarea 1

Agrupamos los datos de los participantes según el tipo de razonamiento puesto en práctica:

Tipo de Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje (%)
Posición relativa entre dos objetos(Raz1)	11	17.46
Identificación de movimientos (Raz2)	16	25.40
Combinación de los razonamientos anteriores (Raz3)	21	33.33
Otras	4	6.35
Ns/Nc - No razonan la solución	11	17.46
Total	**63**	**100**

Tabla 7.- Frecuencia y porcentaje de los razonamientos (primer apartado de la tarea 1)

Los datos que nos muestra la tabla nos hace partícipes del alto número de alumnos que se decantan por el uso de un razonamiento visual, Raz2 y Raz3. Pero sigue habiendo casi una octava parte de la muestra que no es capaz de razonar su solución.

En el primer razonamiento, uso de posición relativa entre objetos, ponen en práctica un razonamiento analítico puesto que no necesitan hacer uso de los movimientos que pueda sufrir el cubo. En él, fijan su atención en algún objeto del cubo que toman como sistema de referencia para colocar el objeto oculto en la posición correcta.

Para el resto de razonamientos, Raz2 y Raz3, los alumnos basan su resolución en un planteamiento más visual. En ambos utilizan los movimientos del cubo como el mejor camino para resolver y justificar la tarea.

Observamos que casi la mitad de los alumnos de 3ºE.S.O. se decantaban por el Raz2, mientras que los alumnos de 4ºE.S.O. preferían identificar los movimientos para resolver la tarea.

Es importante destacar el hecho de que nos hemos visto obligados a añadir un grupo en el que los alumnos responden a la pregunta utilizando un razonamiento distinto a los tres mayoritarios. Este hecho solo ocurrió en los alumnos de 4ºE.S.O., ya que los del otro curso o bien razonaron usando uno de los tres razonamientos expuestos, o bien no abordaron la tarea.

Para esta actividad, podemos resumir diciendo que la mayoría de los participantes están clasificados como alumnos visuales.

Análisis de errores

En la tabla siguiente hemos agrupado los datos siguiendo una clasificación más detallada de los errores. Mostramos, más detallados, los motivos por los que los alumnos no son capaces de resolver correctamente la tarea, analizando y clasificando los tipos de errores con los que nos hemos encontrado.

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje (%)
Sin errores		21	33.33
Incorrectas	Sin argumentación con resultado incorrecto	5	7.46
	Sin argumentación con resultado correcto	3	4.76
	Error procedimental	31	49.69
	Ns/Nc	3	4.76
Total		**63**	**100**

Tabla 8.- Frecuencia y porcentaje de errores por tipos (primer apartado de la tarea1)

El hecho de que en este caso solo nos hayamos encontrado con errores procedimentales surge del hecho de que los alumnos tienen claro el concepto de cubo y de movimiento pero los problemas aparecen a la hora de aplicar los movimientos o las relaciones.

Lo más sorprendente es el hecho de que, en 3ºE.S.O., 6 alumnos usan mal el razonamiento analítico, teniendo en cuenta que son 8 los alumnos que han plasmado ese razonamiento. En el caso de 4ºE.S.O. el error más común ha surgido en el uso del Raz2, identificación de movimientos.

El hecho de que no pocos alumnos justifiquen su respuesta diciendo que cuando se mueven las caras frontales, las lateras permanecen inmóviles, nos demuestra un déficit en la habilidad visual.

Análisis cuantitativo de los distintos razonamientos asociados al segundo apartado de la tarea 1

Al igual que en el primer apartado, agrupamos los datos

Tipo de Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje (%)
Posición relativa entre dos objetos(Raz1)	10	15.84
Identificación de movimientos (Raz2)	15	23.83
Combinación de los dos anteriores(Raz3)	10	15.84
Se fijan en otro cubo y no en el original(Raz4)	13	20.64
Otras	3	4.80
Ns/Nc - No razonan la solución	12	19.05
Total	**63**	**100**

Tabla 9.- Frecuencia y porcentaje de los razonamientos (segundo apartado de la tarea 1)

En este caso, lo que más nos tiene que llamar la atención es el hecho de que un 20.63% de los participantes, es decir 13 de los 63 alumnos, se fijan en varios cubos para resolver la tarea pese a que al principio de la tarea les explicamos que solo debían fijarse en el cubo original. La necesidad de apoyarse en otro cubo, generalmente en el del último apartado, viene dada por el hecho de tener que dibujar algo concreto sin poder verlo en el cubo original, esto es porque no son capaces de entender que puede aparecer cualquier cosa.

Dejando a un lado ese particular caso, casi la cuarta parte de los alumnos optan por identificar los movimientos que sufre el cubo.

En el caso de 3ºE.S.O. hay el mismo número de alumnos que se decantan por establecer una relación entre los objetos y establecer posiciones entre los objetos, 5, y, destaca notablemente el razonamiento clasificado como Raz3. Mientras que los alumnos de mayor edad fijan su atención en el movimiento de las caras del cubo en lugar de establecer una relación entre las figuras del cubo.

Al igual que en apartado anterior podemos asegurar que hay más alumnos visuales que analíticos.

<table>
<tr><th>Razonamiento 1</th><th>Razonamiento 2</th></tr>
<tr><td>Nos fijamos en la figura superior e imaginamos la forma que cojería. Para sacar la figura en blanco nos fijamos en el dibujo de abajo y vemos la "corona" entonces suponemos que si giramos a la izquierda el cubo tendremos de cara principal la ~~f~~ figura anteriormente dicho</td><td>Si giras el cubo original una vez a la derecha, se obtiene esta posición pero como en el original no sale el dibujo de esta cara, no se cuál hay.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Razonamiento 4</th></tr>
<tr><td colspan="2">Para esta figura he mirado la original, en los triangulos del ~~a~~ rectangulo de arriba. Podría haber puesto cualquier otra figura, ya que ~~con~~ en los dibujos anteriores no nos lo enseña, pero luego he mirado el dibujo de abajo en el que el vertice central del triangulo ~~del cu~~ dentro del cuadrado está apuntando la corona</td></tr>
</table>

Ejemplo de respuesta 4.- Razonamientos asociados al segundo apartado de la tarea 1

Análisis de errores

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje (%)
Sin errores		22	34.92
Incorrectas	Sin argumentación (resultado incorrecto)	7	11.11
	Error procedimental	16	25.40
	Se fijan en otro cubo y no en el original	13	20.63
	Ns/Nc	5	7.94
Total		**63**	**100**

Tabla 10.- Frecuencia y porcentaje de errores por tipos (segundo apartado de la tarea 1)

Lo primero que hemos de notar es que para este apartado, cualquier respuesta sería correcta al no mostrarse la cara pedida en el cubo original. Pese a ello, se ha considerado incorrecta cualquier razonamiento que se apoyara en el resto de cubos para su resolución ya que debían ayudarse únicamente del cubo original.

La tabla anterior nos muestra la necesidad que ha tenido gran parte del alumnado, un 35.29%, de analizar no solo el cubo original, sino también los otros apartados para ser capaces de resolver la tarea.

Como ya hemos mencionado antes, hay alumnos que solo dibujan sin justificar su respuesta. Hemos de decir que en la mayoría de estos casos plasman la corona como su respuesta por lo que nos hace pensar que se han apoyado en el último cubo, pero al no justificarlo, no podemos asegurarlo totalmente.

Análisis cuantitativo de los distintos razonamientos asociados al tercer apartado de la tarea 1

Siguiendo los mismos pasos que en los apartados anteriores, agrupamos los datos según los razonamientos utilizados:

Tipo de Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje (%)
Posición relativa entre dos objetos(Raz1)	**34**	**53.97**
Identificación de movimientos (Raz2)	**8**	**12.69**
Combinación de los dos anteriores (Raz3)	**5**	**7.94**
No razonan la solución	**12**	**19.05**
Ns/Nc	**4**	**6.35**
Total	**63**	**100**

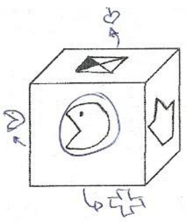
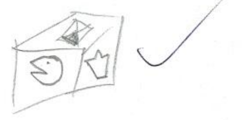
Tabla 11.- Frecuencia y porcentaje de los razonamientos (tercer apartado de la tarea 1)

En este apartado, la mayor parte del alumnado ha optado por un razonamiento analítico, un 53.97%, relacionando el sobre o cuadrado pintado, como ellos lo han llamado, con el come-cocos para poder descartar la posibilidad de que la respuesta sea correcta. Para este razonamiento los alumnos usan la habilidad del reconocimiento de las relaciones espaciales, es decir utilizan una relación interna. Hemos de notar que este grupo está principalmente formado por alumnos de 3ºE.S.O., 23 de los 33 pertenecen a este curso.

Son los menos los que han optado por girar, mentalmente, el cubo y darse cuenta que todos los objetos que se visualizan ahora no están colocados como correspondiera. Por ello, desechan la posibilidad de que exista esa combinación de caras.

Mientras que algún otro piensa que la combinación planteada es posible si el cubo tiene alguna de sus caras repetida, razonamiento que a priori no se nos había ocurrido. Al igual que en el caso anterior mueven el cubo para razonar su respuesta y llegan a la conclusión que las caras que se ven en el cubo original, son las que están ocultas ahora por lo que no existe ninguna razón para que esa combinación no sea posible.

En los dos últimos razonamientos los alumnos se basan en un razonamiento totalmente visual y es necesario el uso de la habilidad del reconocimiento de posiciones en el espacio; es decir, ponen en práctica una relación externa.

Razonamiento1: POSICIÓN RELATIVA ENTRE DOS OBJETOS	Razonamiento2: IDENTIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS
No, porque en la figura original, el triángulo que está coloreado dentro del cuadrado, está en dirección a la cara con el come-cocos, y aquí está hacia otra dirección.	No, porque al ~~girar~~ girar el dado dos veces a la izquierda no quedaría el comecocos delante, quedaría a un lado.
	Si : si hay dos comecocos No : no si no ha dos come cocos es imposible 

Ejemplo de respuesta 5.- Razonamientos asociados al tercer apartado de la tarea 1

Análisis de errores

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje (%)
Sin errores		27	42.86
Incorrectas	Sin argumentación (resultado incorrecto)	12	19.05
	Error procedimental	20	31.75
	Ns/Nc	4	6.34
Total		**63**	**100**

Tabla 12.- Frecuencia y porcentaje de errores por tipos (tercer apartado de la tarea 1)

Tenemos que notar que, como en el apartado anterior, cualquier respuesta es correcta si viene de la mano de un razonamiento coherente. Es por ello que dentro del error procedimental nos encontramos con varios tipos: el hecho de confundir el movimiento sufrido en el cubo, aplicar mal la relación interna y el hecho de dar una argumentación incoherente.

Centrándonos en los distintos cursos, decir que en este apartado los errores están repartido casi al 50% ya que en el curso de 3ºESO, fueron 8 alumnos los que razonaron incorrectamente, mientras que 11 fueron para el otro curso. Decir también que fueron los de mayor edad los que plasmaron un mayor número de justificaciones incoherentes mientras que los alumnos del otro curso confundieron el movimiento sufrido por el cubo.

En este caso, el número de errores con una justificación basada en el razonamiento que pone en práctica el reconocimiento de las relaciones espaciales es mucho menor que en el resto de apartados. Este hecho puede ser debido a que simplemente relacionan objetos que ven y no han de imaginar qué movimiento ha sufrido el cubo.

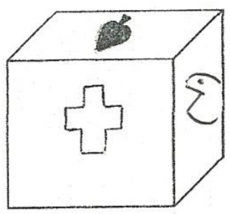
Para concluir con el análisis de esta primera tarea, notamos que los errores encontrados en ésta, teniendo en cuenta los tres apartados, están unidos al razonamiento que los alumnos han utilizado para resolverla. Es por ello que se ha decidido clasificar estos errores en tres grandes grupos atendiendo a las justificaciones de los participantes:

- **Error analítico**: este error surge de la relación que muestran entre los objetos. Hacen referencia a que si en el cubo original el come-cocos está al lado de la pica, en este caso sigue estando a su derecha. El problema surge cuando son incapaces de ver que ha sufrido un giro.
- **Error Visual**: este tipo de error está asociado al razonamiento propiamente visual; es decir, al mover el cubo como un conjunto. Los errores surgen con el hecho de que mueven las caras del frente pero dejan inmóviles los laterales.
- **Error de movimiento**: Confunden el movimiento que ha sufrido el cubo.

El análisis de los datos nos muestra que la mayor parte de los errores encontrados en el primer apartado son de tipo visual, lo cual es predecible ya que la mayoría de los alumnos utilizan ese razonamiento para justificar sus respuestas. Centrándonos en el segundo apartado, el problema, como hemos mencionado anteriormente surge al tener que plasmar algo que no ven, por lo que necesitan apoyarse en otro cubo para responder. Y, por último, en el tercer apartado pese a que la mayoría de los alumnos justificaron su respuesta mediante un razonamiento analítico, los errores más frecuentes surgen a la hora de confundir el movimiento sufrido por el cubo; es decir, un error visual.

Veamos algunos ejemplos asociados a los distintos apartados de la tarea 1:

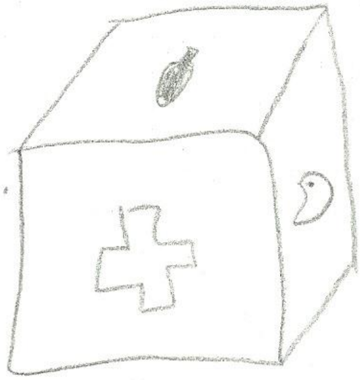
Razonamiento analítico:



- me he imaginado que es ese dibujo por la direccion de la pica y la orientacion que tiene hacia los demas signos

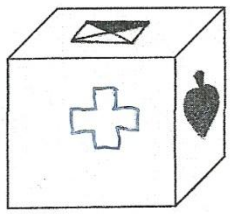
Razonamiento visual:

El dado se mueve para delante, entonces, la hoja se mueve arriba y el pac-man se queda en el mismo sitio porque no influye en el movimiento



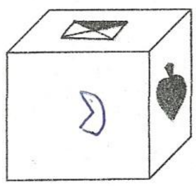
Ejemplo de respuesta 6.- Errores asociados al primer apartado de la tarea 1

Razonamiento analítico:



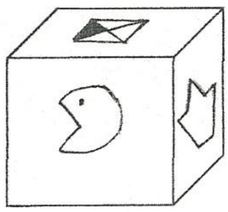
El cubo original está la pica debajo del cuadrado y la cruz a la izquierda del comecocos en el 1er cuadrado

Razonamiento visual:



Creo qe qedaría así porqe el cuadrado de arriba la parte coloreada esta al fondo y el cubo se ha movido hacia la derecha

Ejemplo de respuesta 7.- Errores asociados al segundo apartado de la tarea 1



No porque en la última de arriba al lado del come cocos va la pera. La corona estaría en el otro lado

Ejemplo de respuesta 8.- Razonamientos asociados al segundo apartado de la tarea 1

SEGUNDA TAREA: Representaciones. Contando cubos

Hemos organizado los datos en una tabla en la que se describen las frecuencias obtenidas teniendo en cuenta solo si la tarea está bien resuelto o no y comentamos los resultamos más llamativos.

Respuestas		Frecuencia/ Porcentaje							
		3ºESO				4ºESO			
Correctas		21		61.77		16		55.17	
Incorrectas	Justificadas	8	13	23.53	38.23	5	13	17.24	44.87
	Sin razonar	5		14.7		6		20.69	
	Ns/Nc	0		0		2		6.9	
Total		**34**		**100**		**29**		**100**	

Tabla 13.- Frecuencias y porcentajes de la tarea 2.

Lo primero que nos ha llamado la atención es el hecho de que en ambos cursos las respuestas incorrectas han sido 13, pero el hecho de tener más participantes en el curso de 3ºE.S.O. implica que haya sido mayor el número de respuestas correctas en dicho curso. En 4ºE.S.O. cerca de un 7% de los estudiantes dejan sin responder esta tarea, lo que nos indica que para ellos no se trata de una tarea sencilla, mientras que todos los alumnos de 3ºE.S.O. han intentado su resolución. A pesar de que la opción correcta es la que obtiene el mayor porcentaje de respuestas, este dato no debe implicar una interpretación equivocadamente optimista si atendemos al hecho de que el 20,69 %, es capaz (o al menos lo hace ostensivo) de justificar la validez de su respuesta siendo esta incorrecta.

Distintos razonamientos asociados a la tarea 2

Primeramente detallaremos las características de la notación empleada para describir los razonamientos asociadas a esta tarea. Pasamos a detallar la notación que usaremos para clasificar las respuestas:

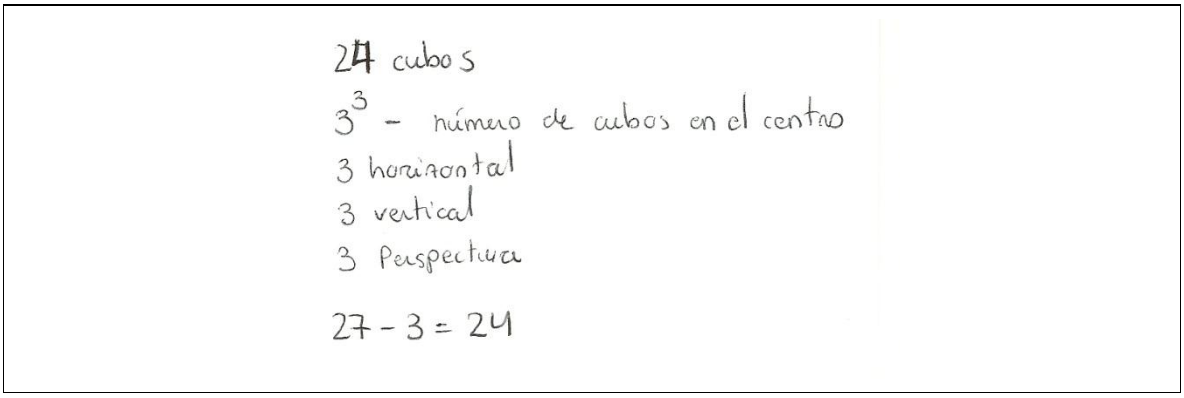
C: cubo completo (3u × 3u × 3u)
med(*C*): medida del cubo sin perforar
T: túnel
***C*$_p$**: cubo perforado
med(*C*$_p$): medida del cubo perforado
med(T): medida del túnel

A continuación se describen los distintos razonamientos asociados a esta tarea que se pueden encontrar en las respuestas de los individuos participantes en la actividad:

- ***Uso de procedimientos extractivos (Raz1)*:** Se basa en el uso de la fórmula tradicional para el cálculo del volumen como producto de tres dimensiones (largo × ancho × alto). Cálculo del volumen del cubo completo al que se le sustrae la medida del volumen del túnel.

Este razonamiento se basa en utilizar, de manera informal, la propiedad:

$$\mathbf{med}(C) = \mathbf{med}(C_p) + \mathbf{med}(T)$$

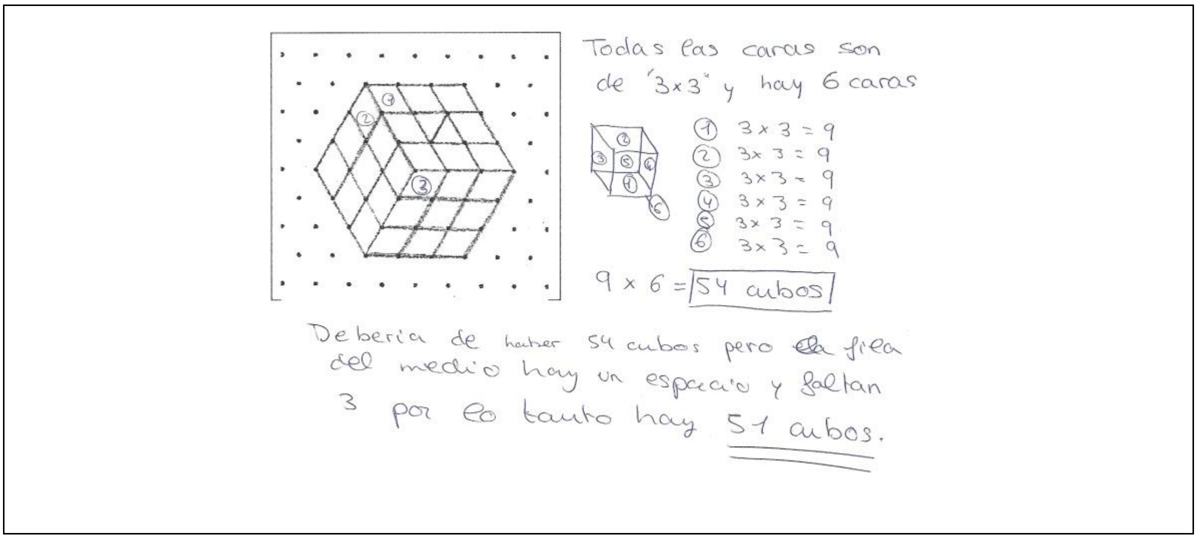

24 cubos
3^3 - número de cubos en el centro
3 horizontal
3 vertical
3 Perspectiva

27 - 3 = 24

Ejemplo de respuesta 9.- Razonamiento 1 asociado a la tarea 2

- ***Volumen como espacio vacío (Raz2):*** Se considera que el cubo está formado sólo por sus capas exteriores. En esta categoría los cálculos se realizan teniendo en cuenta sólo la parte exterior de la figura, es decir, las caras. Para la descripción de esta configuración se considera N como el número de caras, N = 3, 4 ó 6.

  Argumento: Cada cubo está formado por 6 caras. En nuestro caso, 4 caras están completas y éstas están compuestas por 9 "cubitos", así tendrá 9x4=36 cubitos. Por otro lado, se da cuenta que hay 2 caras con un "agujero" por lo que tendrá 8 cubitos en cada cara.

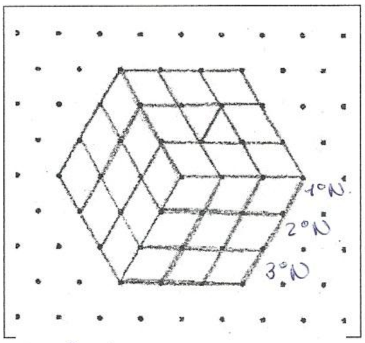


Ejemplo de respuesta 10.- Razonamiento 2 asociado a la tarea 2

- ***Descomposición ortogonal por capas (Raz3)*:** Se descompone el cubo perforado en 3 capas (cap1, cap2, cap3) siguiendo un esquema ortogonal (horizontal o vertical) por niveles, para a continuación contar las unidades de volumen de cada capa y sumarlas.

Este procedimiento refleja la capacidad para la descomposición ortogonal de un objeto tridimensional y para visualizar las diferentes capas del cubo original, identificando las unidades de volumen ocupadas por los túneles en cada capa. Las diferentes posibilidades de la descomposición en capas dan lugar a distintas combinaciones de operaciones aritméticas, cualquiera de las cuales, si no se cometen errores, lleva a la respuesta correcta.

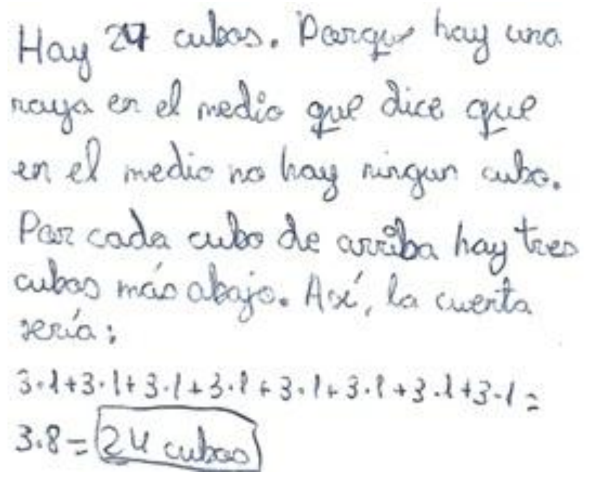
Argumento: Justificando la descomposición en capas como procedimiento adecuado para alcanzar la solución a la tarea propuesta. Como el cubo se puede descomponer en tres capas (horizontales o verticales), el número de cubitos unidad que quedan en cada capa es el resultado de descontar (restar) del número de unidades total de cada ortoedro (capa) 3× 3 × 1 los cubitos correspondientes al túnel en esa capa. Utilizando la propiedad aditiva de la medida sabemos que el número total de cubitos unidad es la suma de los cubitos de cada una de las 3 capas en que se descompone el cubo grande.

VERTICAL	**HORIZONTAL**
Sumamos 9 + 9 de dos caras laterales y después de las otras dos caras restantes Sumamos 3+3 de las columnas que están en el medio de estas caras. 9+9 +3+3 = 24 cubos	 3·3 = 9 9−1 = 8 (~~cuadro~~ cubo que no está). ① 1°N = 8 2°N = 9 3°N 9 26 cubos. ② 1°N = 8. 2°N = 8. 3°N = 8. 24. cubos. ① En este primer apartado, como el el N°1. falta un ~~cuad~~ cubo. lo he contado como si faltase. ~~so lo~~ solo en el. ② Aquí lo he calculado como si faltase en todos, por lo tanto la diferencia es de 2.

Ejemplo de respuesta 11.- Razonamiento 3 asociado a la tarea 2

- ***Descomposición ortogonal por columnas (Raz4):*** Se descompone el cubo perforado en columnas para, a continuación, contar las unidades de volumen de cada columna y sumarlas.

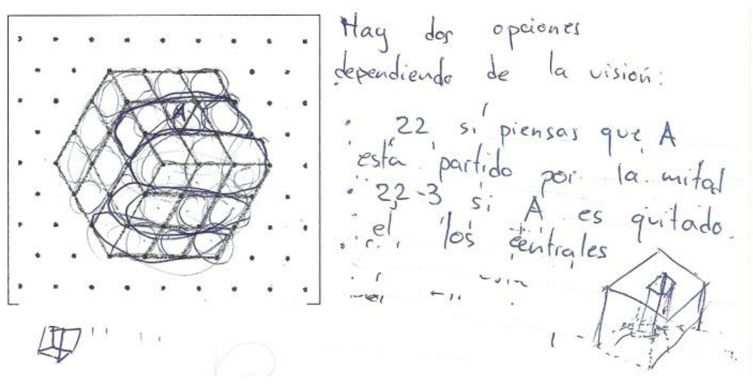
  Al igual que en el caso anterior, este procedimiento refleja la capacidad para la descomposición de un objeto tridimensional y para visualizar las diferentes columnas del cubo original.



Hay 27 cubos. Porque hay una raya en el medio que dice que en el medio no hay ningun cubo. Por cada cubo de arriba hay tres cubos más abajo. Así, la cuenta sería:

3·1+3·1+3·1+3·1+3·1+3·1+3·1+3·1 =

3·8 = 24 cubos



Ejemplo de respuesta 12.- Razonamiento 4 asociado a la tarea 2

En el Raz1 el centro de atención está puesto en la medida del túnel para poder conocer el número de cubitos del cubo perforado, el interés por la medida del túnel es fundamental para poder alcanzar la solución correcta. En este razonamiento se pone en juego la habilidad de identificación visual al ser necesario aislar el túnel de su contexto para poder cuantificar su volumen.

En el caso del razonamiento Raz2, los estudiantes, para realizar la enumeración de la disposición 3D, se centran en las disposiciones de cuadrados que aparecen en las caras exteriores de la disposición 3D pero no hay mantenimiento de las caras como concepción de composiciones.

Para el razonamiento Raz3, es necesario tener desarrollada la habilidad de reconocimiento de las posiciones espaciales para ser capaz de situar en cada una de las capas la posición de los cubitos y los lugares correspondientes al túnel, relacionando la situación de unos cubitos con los demás tanto en el plano horizontal como en el plano vertical. Es decir, se sigue una disposición de representaciones por niveles, manteniendo un orden y continuidad en colocación y posición de cada capa (abajo-arriba, arriba-abajo, izquierda-derecha o derecha-izquierda).

Análisis cuantitativo de los distintos razonamientos asociados a la tarea 2

Para entender mejor el análisis de esta tarea, mostramos los datos en la siguiente tabla agrupándolos según el razonamiento utilizado.

Tipo de Razonamientos	Unidad básica	Frecuencia	Porcentaje (%)
Uso de procedimientos extractivos (Raz1)	**1x1x1**	**7**	**11.11**
Volumen como espacio vacío (Raz2)	**3x3x1**	**13**	**20.63**

Descomposición ortogonal por capas (Raz3)	**3x3x1**	**18**	**28.57**
Descomposición ortogonal por columnas (Raz4)	**3x1x1**	**4**	**6.35**
Descomposición en cubos unidad (Raz5)	**1x1x1**	**3**	**4.76**
Otras	**-**	**5**	**7.95**
Ns/Nc - No razonan la solución	**-**	**13**	**20.63**
Total		**63**	**100**

Tabla 14.- Frecuencia y porcentaje de los razonamientos asociadas a la tarea 2 (3º y 4º E.S.O.)

Los datos de la tabla nos hace ver que destacan dos razonamientos por encima del resto; estos son el Raz2 y Raz3. Los alumnos se decantan por el razonamiento en el que se pone en juego la capacidad para descomponer el cubo en capas ya sea de manera horizontal o vertical. Sin embargo, ligeramente suprior a la quinta parte del alumnado (20.63%) trabajan con el cubo centrando su atención en el número de caras que lo forman. Como se puede observar en la tabla, el predecible (por eficiente) razonamiento Raz1, sólo fue utilizado por un 11.11% de los estudiantes.

En la misma tabla podemos observar que cada tipo de configuración tiene asociada una unidad básica que son las que se iteran. Estas unidades básicas están formadas por disposiciones bidimensionales de cubitos, salvo en los casos de los razonamientos Raz1 y Raz5 en los que la unidad básica es el cubito unidad.

Podemos resumir diciendo que los razonamientos detallados se pueden agrupar en cuanto a su visión del nuevo cuerpo (cubo perforado) como el resultado de aplicar una determinada acción sobre un cuerpo inicial (cubo).

Análisis de errores

Vamos a hacer una clasificación detallada de los errores que nos encontramos en las respuestas estudiadas:

- Error conceptual
  - Atribuir 4 caras al cubo
  - Contar varias veces un cubo unidad

- Error procedimental: Cálculos incorrectos

Dentro del error conceptual, el hecho de atribuir 4 caras al cubo surge de la dificultad de diferenciar el concepto de cubo y cuadrado, mientras que el fenómeno del doble conteo es debido a una falta de coordinación de las distintas vistas del objeto y tiene una presencia importante en los resultados obtenidos.

En la tabla que mostramos a continuación, se han agrupado los datos siguiendo la clasificación anterior.

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje (%)
Sin errores		37	58.74
Incorrectas	Sin argumentación con resultado incorrecto	4	6.34
	Sin argumentación con resultado correcto	7	11.11
	Error conceptual	11	17.47
	Error procedimental	2	3.17
	Ns/Nc	2	3.17
Total		**63**	**100**

Tabla 15.- Frecuencia y porcentaje de errores por tipos asociados a la tarea 2.

Debido a los datos obtenidos, podemos decir que esta tarea no les ha resultado muy compleja. Aunque no debemos dejar pasar por alto el elevado porcentaje de alumnos que cometen un error conceptual. Como hemos descrito anteriormente, éste puede venir dado por dos concepciones, pero el hecho de contar varias veces el mismo cubo unidad es notablemente mayor en número que el atribuir menos caras al cubo.

Los procedimentales encontrados son debidos a errores de cálculo por lo que no nos son muy útiles en nuestro estudio y hemos de notar que ambos han surgido el curso de 4ºE.S.O.

Notemos también que una gran parte de los alumnos, el 11.11%, son capaces de resolver el problema correctamente pero son incapaces de dar una argumentación para ello, por lo que se han considerado como respuestas incorrectas. Esto pone de manifiesto las carencias cognitivas, así como las dificultades para plasmar razonamientos mentales; es decir existe una carencia argumentativa.

TERCERA TAREA: Dibujando representaciones

Antes de empezar con el análisis, hemos de decir que en esta tarea el hecho de que no hayan justificado su respuesta no se ha considerado como incorrecta puesto que en el enunciado no se les pedía que lo hicieran explícitamente, aunque algunos de ellos trataron de explicar cómo lo habían hecho.

Como ya hicimos en el caso del análisis de la primera tarea, estudiaremos los resultados distinguiendo cada apartado.

Tras un análisis en el que solo nos fijamos en si la respuesta es correcta o incorrecta, obtenemos los siguientes datos que agrupamos en la esta tabla:

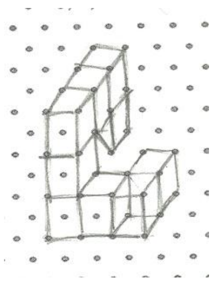
<table>
<tr><th rowspan="3">Respuestas</th><th colspan="16">Frecuencia/ Porcentaje</th></tr>
<tr><th colspan="8">3ºESO</th><th colspan="8">4ºESO</th></tr>
<tr><th colspan="4">primer apartado</th><th colspan="4">segundo apartado</th><th colspan="4">primer apartado</th><th colspan="4">segundo apartado</th></tr>
<tr><td>Correctas</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">29.4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">11.8</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">37.9</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">17.3</td></tr>
<tr><td>Incorrectas
Ns/Nc</td><td>21
3</td><td>24</td><td>61.8
8.8</td><td>70.6</td><td>25
5</td><td>30</td><td>73.5
14.7</td><td>88.2</td><td>16
2</td><td>18</td><td>55.2
6.9</td><td>62.1</td><td>21
3</td><td>24</td><td>72.4
10.3</td><td>82.7</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="2">34</td><td colspan="2">100</td><td colspan="2">34</td><td colspan="2">100</td><td colspan="2">29</td><td colspan="2">100</td><td colspan="2">29</td><td colspan="2">100</td></tr>
</table>

Tabla 16.- Frecuencias y porcentajes de la tarea 3

Lo primero que nos llama la atención es el fracaso de la mayoría de los estudiantes en la resolución de la segunda parte de la tarea por parte de ambos cursos. El hecho de que ya hubieran practicado con la trama isométrica en el primer apartado, nos hacía esperar una mayor eficacia en el segundo apartado pero los datos muestran todo lo contrario.

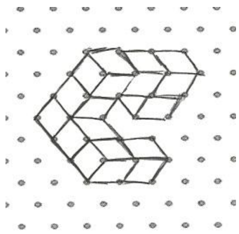
Distintos razonamientos asociados a la tarea 3

- ***Utilización de la línea vertical como referencia (Raz1):*** los alumnos relacionan la vertical de la figura con el lado del folio en lugar de relacionar las direcciones de los lados de la figura. Esta relación es externa y lo que los alumnos intentan reproducir al aplicar este razonamiento es la posición y no la figura.



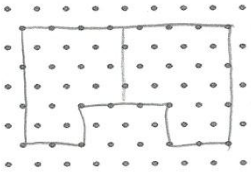
Ejemplo de respuesta 13.- Razonamiento 1 asociado a la tarea 3

- ***Relación de las direcciones de los lados de la figura (Raz2)*:** los alumnos son capaces de relacionar elementos internos de la figura sin la necesidad de apoyarse en elementos externos, como por ejemplo el lado del folio.



Ejemplo de respuesta 14.- Razonamiento 2 asociado a la tarea 3

- ***Utilización de la trama para dibujar en 2D (Raz3):*** los alumnos son incapaces de dar profundidad a las figuras y solo trabajan en dos dimensiones.



Ejemplo de respuesta 15.- Razonamiento 3 asociado a la tarea 3

El uso del primer razonamiento les lleva a un conflicto a la hora de dibujar el resto de lados ya que la distancia entre los puntos no es la misma. Por esta razón, cabe esperar que los alumnos que utilizan este razonamiento resuelvan incorrectamente la tarea.

Análisis cuantitativo de los distintos razonamientos asociados al primer apartado de la tarea 3

Tipo de Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje (%)
Utilización de la línea vertical como referencia	44	69.84
Relación de las direcciones de los lados de la figura	14	22.22
En blanco	5	7.94
Total	**63**	**100**

Tabla 17.- Frecuencias y porcentajes de los razonamientos asociados al primer apartado de la tarea 3

El hecho de que en este aparatado, no tengamos ningún caso del uso del Raz3, es previsible ya que los alumnos disponen de la figura concreta que han de dibujar y ésta está en perspectiva eliminando la posibilidad de dibujarla en 2D.

Como podemos observar en los datos obtenidos, la gran mayoría ha optado por tomar la línea vertical como referencia, 69.84%. La utilización de este razonamiento pone de manifiesto la deficiencia en la habilidad de la conservación de la percepción ya que los alumnos tratan de dibujar la figura basándose en la posición de ésta y, la mayoría, no caen en la cuenta de que, trabajando así, los lados sufren una deformación.

Hemos de decir que este razonamiento ha sido utilizado en ambos cursos en, casi, la misma medida; 21 alumnos lo utilizaron en 3ºE.S.O., mientras que 23 alumnos de 4ºE.S.O. El hecho de que en este último curso haya una muestra de 29 alumnos hace aún más llamativo el resultado.

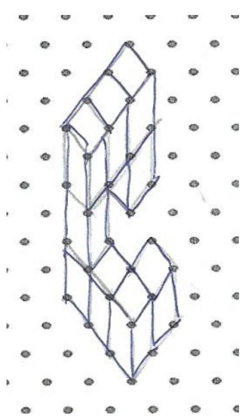
Por otro lado, casi la quinta parte de los alumnos optan por olvidarse de la línea vertical centrando su atención en las direcciones de la figura y no en establecer una relación externa entre la figura y la trama. Para la utilización de este razonamiento es necesaria la habilidad de la conservación de la percepción en el sentido de usar criterios de igualdad haciendo referencia a la forma o al tamaño y a las distintas posiciones, olvidándose de la posición.

Hemos de notar que la mayoría de los alumnos, antes de decantarse por el Raz2 trataron de dibujar la figura partiendo de la línea vertical, Raz1, pero eso les llevó a un conflicto que lograron superar cambiando su razonamiento.

Terminamos destacando que algunos de los alumnos que usaron el Raz1 caen en la cuenta de que su figura no tiene la misma forma que la original, pero son incapaces de solventar dicho problema.

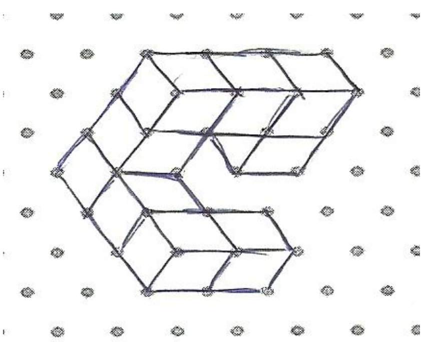
También es importante destacar que son los alumnos de 3ºE.S.O. los que más justifican su respuesta, veamos algún ejemplo de ello.

Raz1



En mi dibujo, me sale la figura de una forma alargada, ya que pienso que la distancia entre los puntos no es la correcta.

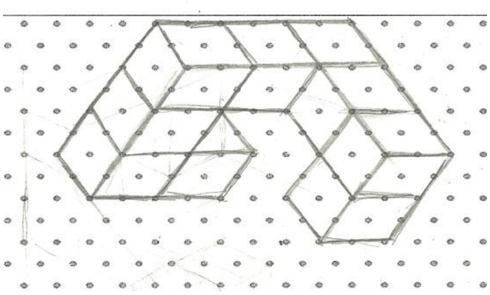
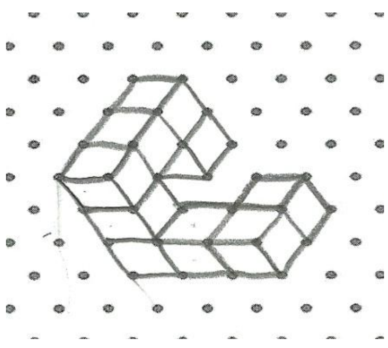
Ejemplo de respuesta 16.- Representación y justificación utilizando el razonamiento 1

Raz2 	No se podía hacer en la misma posición, porque no había puntos en vertical que estuviesen a la misma distancia que los que están en horizontal y diagonal, y entonces no se formarían cubos porque unas aristas serían más largas que otras, entonces he tenido que torcer la figura para que los cubos pudieran estar bien y formaran la figura exacta, vista desde otra perspectiva.

Ejemplo de respuesta 17.- Representación y justificación utilizando el razonamiento 2

El hecho de que se den cuenta de que la figura está alargada es debido a que pasan a centrar su atención únicamente en la figura dejando de lado la trama. Es ahí cuando empiezan a hacer uso de la habilidad de la conservación de la percepción ya que caen en la cuenta de que el tamaño no es el mismo que tiene la figura original. La medida de sus lados no es la misma, pero son incapaces de solucionar el problema.

Si ahora analizamos las justificaciones de los participantes que optaron por el Raz2, vemos como, al fijarse en las direcciones de los lados y en que estos tienen las medidas, al trasladarse a la trama y ver que las medidas de los puntos no son las mismas, la manera más sencilla de dibujarlo es girando la figura. Hemos de notar, que no todos los alumnos han dibujado la figura de la misma manera, como vemos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo de respuesta 18.- Distintas representaciones utilizando el razonamiento 2

Como vemos en estos ejemplos, no todos los alumnos optan por dibujar la figura con el tamaño mínimo, es decir, utilizando como unidad de medida la distancia entre dos puntos teniendo en cuenta que la distancia entre los puntos verticales es distinta, sino que algunos optan por dibujar la figura con un tamaño mayor tomando como medida la distancia entre varios puntos. Este hecho lo único que ocasiona es que se duplique el tamaño de la figura, pero las proporciones entre los lados se siguen manteniendo.

Podemos resumir diciendo que los razonamientos se clasifican como aquel que establece una relación interna, es decir, únicamente analiza la figura inicial y la plasma en la trama teniendo en cuenta su análisis previo y, aquel que intenta establecer una relación entre la figura y la trama, es decir, pone de manifiesto una relación externa.

Análisis de errores

Antes plasmar los resultados en la tabla, vamos a describir los errores que nos hemos encontrado.

- Error conceptual: surge de considerar que la distancia entre los puntos de la trama son iguales p equivalentes.

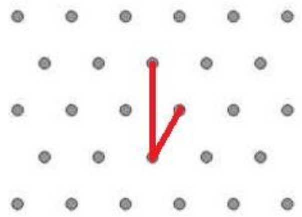
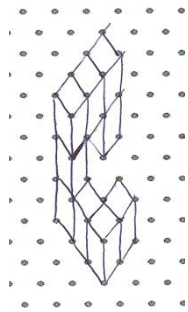
- Error procedimental
  - Dibujar más o menos cubos de los que tiene la figura original.
  - Las líneas que forman la figura no confluyen en el mismo lugar que en la figura original.

- Error combinado: combina los errores anteriores.

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje (%)
Sin errores		21	33.33
Incorrectas	Error conceptual	11	17.46
	Error procedimental	6	9.52
	Error combinado	20	31.75
	Ns/Nc	5	9.94
Total		**63**	**100**

Tabla 18.- Frecuencias y porcentajes de los errores asociados al primer apartado de la tarea 3

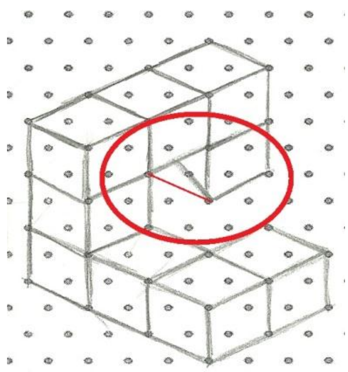
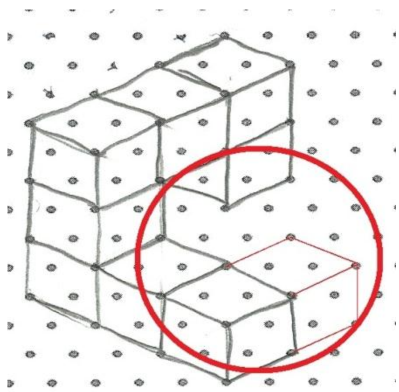
Notemos, antes de ver algún ejemplo de los errores cometido por los alumnos, que en el caso del curso de 3ªE.S.O. los errores son mayoritariamente combinados y los alumnos tienen verdaderas dificultades al dibujar en la trama isométrica.

ERROR CONCEPTUAL	
	

Ejemplo de respuesta 19.- Ejemplo de error conceptual asociado a la tarea 3

El papel isométrico es una teselación del plano con triángulos equiláteros congruentes. Al hacer uso de esta trama has de tener en cuenta que las distancias marcadas en el dibujo anterior no son iguales.

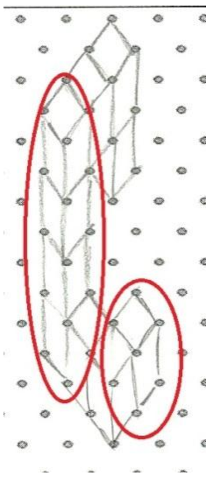
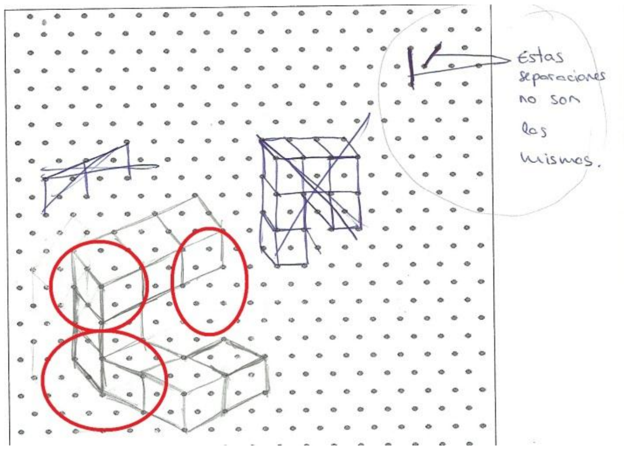
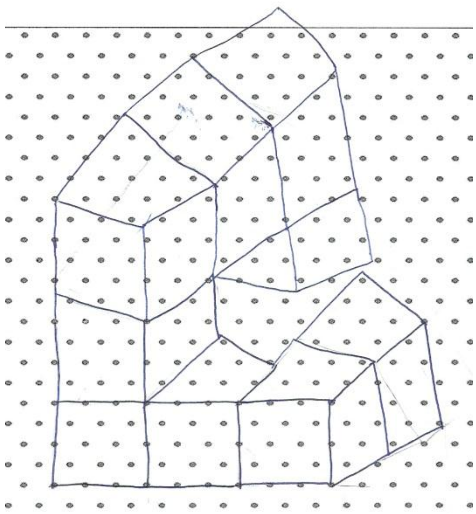
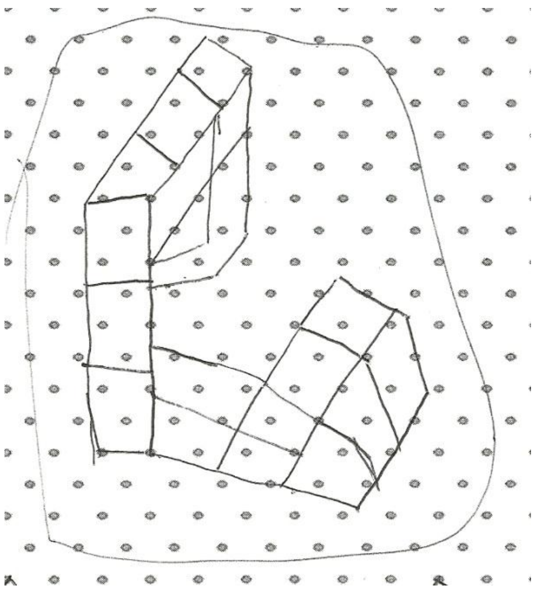
Los alumnos que no son capaces de tener en cuenta esta información a la hora de realizar sus representaciones, obtienen una representación como la que se muestra en el ejemplo.

ERROR PROCEDIMENTAL	
	

Ejemplo de respuesta 20.- Ejemplos de errores procedimentales asociado a la tarea 3

En este tipo de errores, los alumnos son conscientes de la dificultad de la trama y dibujan sobre ella teniendo en cuenta la peculiaridad de ésta.

Ambos ejemplos muestran una representación incompleta ya que, en el primer caso dibujó mal la arista señalada, y en el otro dejó de dibujar un cubo. No obstante, la representación es adecuada de acuerdo a lo que se les pidió.

<table>
<tr><th colspan="2">ERROR COMBINADO</th></tr>
<tr><td></td><td>Este es un caso muy llamativo ya que pese a que el alumno se da cuenta de que las distancias no son las mismas, no es capaz de solventar su problema

</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Ejemplo de respuesta 21.- Ejemplos de errores combinados asociados a la tarea 3

Hubo algunos ejemplos donde los participantes hicieron representaciones que son incongruentes con lo que se les pidió. Es debido a que no pudieron coordinar la representación de las tres caras del objeto a dibujar.

Análisis cuantitativo de los distintos razonamientos asociados al segundo apartado de la tarea 3

Tipo de Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje (%)
Utilización de la línea vertical como referencia	26	41.23
Relación de las direcciones de los lados de la figura	12	19.09
Utilización de la trama para dibujar en 2D	17	26.98
En blanco	8	12.70
Total	**63**	**100**

Tabla 19.- Frecuencias y porcentajes de los errores asociados al segundo apartado de la tarea 3

Como ya hemos mencionado antes, cabría esperar que los alumnos, tras haber tenido ya un pequeño contacto con la trama isométrica, razonaran del mismo modo; es decir, si en el primer apartado tomaban la línea vertical como referencia, en este también. El alto porcentaje de este razonamiento, Raz1, en ambos casos, nos sugiere que ocurre esto. Pero en esta parte de la tarea, al no disponer de la figura en 3D y tener ellos que imaginarla, les crea un nuevo conflicto que muchos de ellos no son capaces de resolver y dibujan en 2D, Raz3.

Análisis de errores

En este apartado, al igual que en el anterior encontramos errores de los tres tipos. Lo único que tenemos que añadir es, que en el error conceptual ahora tenemos dos posibilidades: la primera, el considerar que las distancias entre los puntos verticales y horizontales de la trama son iguales y, la segunda, el dibujar en 2D ya que no entienden para qué sirve la trama.

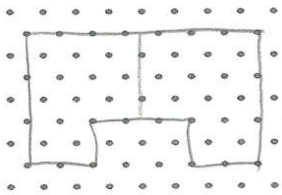
Respuestas		Frecuencia	Porcentaje (%)
Sin errores		9	14.29
Incorrectas	Error conceptual	33	52.37
	Error procedimental	4	6.35
	Error combinado	9	14.29
	Ns/Nc	8	12.70
Total		**63**	**100**

Tabla 20.- Frecuencias y porcentajes de los errores asociados al segundo apartado de la tarea 3

En este caso aumenta notablemente el error conceptual por el hecho de no dibujar en 3D, sino en dos dimensiones.

En este tipo de errores los alumnos dibujan la perspectiva adecuada pero son incapaces de coordinar las tres caras de la representación y solo trazan la cara lateral de la figura.

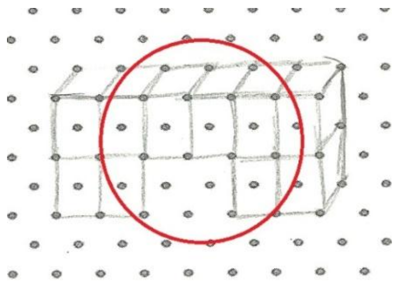
ERROR CONCEPTUAL

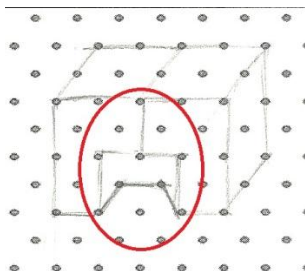


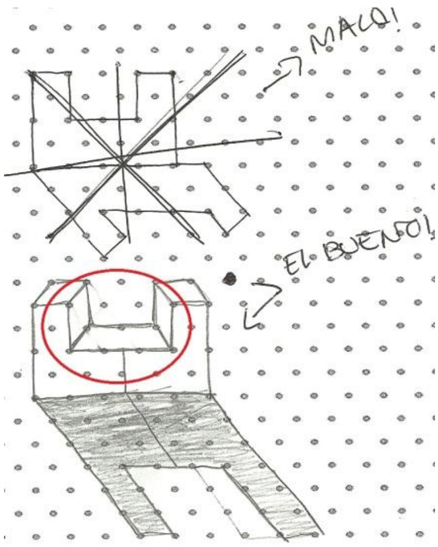
Ejemplo de respuesta 22.- Ejemplo de error conceptual asociado al segundo apartado de la tarea 3

Al igual que ocurría en el apartado anterior, los errores procedimentales vienen dados por el exceso o la falta de cubos a la hora de dibujar, o bien, porque las líneas dibujadas para dar forma a la figura no corresponden con la sombra dada.

ERROR COMBINADO







Ejemplo de respuesta 23.- Ejemplos de errores procedimentales asociado al segundo apartado de la tarea 3

En el primer ejemplo de error combinado, además de hacer un mal uso de la trama al considerar que la distancia vertical entre los puntos es la misma que la horizontal, no guarda las proporciones de la sombra puesto que el hueco debe ser de doble medida que las patas. También utiliza como medida un rectángulo en lugar de un cuadrado.

En este caso, al cometer un error conceptual al considerar que la distancia entre dos puntos verticales es la misma que entre dos horizontales, le lleva a tener como unidad de referencia un rectángulo y no un cuadrado como en la figura original. Además, al tratar de dar profundidad a la figura, las líneas no confluyen como debieran por lo que es imposible que esta figura tenga la misma sombra que la figura dada.

Como vemos en el último ejemplo, el alumno comienza sin dar profundidad a la figura y se da cuenta de que la trama le ayudará a dibujar en 3D. Al igual que el resto de ejemplos, comete el mismo error conceptual y, como procedimental, las líneas no confluyen como debieran por lo que la sombra que originaría no sería como la dada.

CUARTA TAREA: Lado del Rombo

Veamos cómo queda la tabla de frecuencias y porcentajes asociada a esta tarea:

Respuestas		Frecuencia/ Porcentaje							
		3ºESO				4ºESO			
Correctas		0		0		2		6.89	
Incorrectas	Justificadas	24	34	70.59	100	16	27	55.18	93.11
	Sin razonar	2		5.88		0		0	
	Ns/Nc	8		23.53		11		37.93	
Total		**34**		**100**		**29**		**100**	

Tabla 21.- Frecuencias y porcentajes de la tarea 4

No esperábamos que la tarea les resultase tan difícil de resolver, pero los datos nos demuestran lo contrario. Lo más llamativo de esta tarea es el gran número de alumnos que son incapaces de, ni siquiera, intentarlo.

Lo primero que nos ha de llamar la atención es el hecho de que ningún alumno de 3ºE.S.O. haya sido capaz de resolver esta tarea. Bien es verdad, que hay ciertos alumnos que dan un resultado correcto pero la argumentación es totalmente incorrecta. Este hecho será estudiado con más detalle en el apartado designado al análisis de errores.

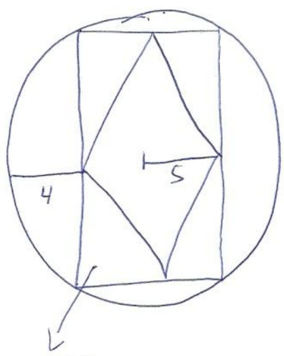
En el caso de 4ºE.S.O., tenemos que únicamente 2 personas que han sido capaces de resolver correctamente la tarea siguiendo, cada uno de ellos, caminos totalmente distintos. Lo veremos en el análisis del grupo en concreto.

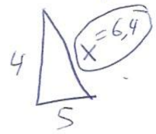
Para poder analizar con mayor profundidad los razonamientos usados por los estudiantes en este ítem tendremos en cuenta dónde centran su atención y si son capaces o no de resolverlo utilizando un camino alternativo al teorema de Pitágoras.

Distintos razonamientos asociados a la tarea 4

- ***Utilización del Teorema de Pitágoras (Raz1):*** los alumnos son capaces de discriminar un triángulo rectángulo formado por las semidiagonales del rombo y el lado de éste. Una vez plasmado utilizan el teorema de Pitágoras para averiguar la hipotenusa (lado del rombo).

Para sacar el lado, se formaba un triángulo rectángulo, en el lado que habría que averiguar se pone "x", en el cateto de la base se pone lo del radio 5 porque es lo mismo, y 4 es lo mismo que el cateto que falta |





$x^2 = 4^2 + 5^2$
$x^2 = 16 + 25$
$x = \sqrt{41} = 6,4$

Ejemplo de respuesta 24.- Razonamiento 1 asociado a la tarea 4

- ***Utilización de criterios de congruencias (Raz2):*** optan por un razonamiento sin cálculos, puramente visual. Dentro de este grupo diferenciaremos dos caminos: los que creen que el triángulo formado por la diagonal menor y dos lados del rombo es un triángulo equilátero y, aquellos que centran su atención en el rectángulo y trabajan con sus diagonales.

Como hacemos la diagonal del rectángulo, sale un triángulo equilátero, que su medida, 5, equivale con todos sus lados y la diagonal del rombo

El lado del rombo mide 10

Ejemplo de respuesta 25.- Razonamiento 2 asociado a la tarea 4

- ***Falta de datos:*** en este caso, los alumnos hacen cálculos pero llega un momento que plasman explícitamente que les falta algún dato para poder continuar con la resolución.

La diagonal del círculo es 4+5+5+4 =
= 18
El lado del ~~cuadrado~~ rectángulo es 5+5 = 10
Necesito la altura del rombo (o del
rectángulo)

Ejemplo de respuesta 26.- Razonamiento asociado a la tarea 4

El uso del razonamiento asociado al teorema de Pitágoras se ha de desarrollar la habilidad d discriminación visual y se le asocia las imágenes patrón y las imágenes de fórmulas ya que en cuanto visualizan un triángulo aplican dicho teorema.

En el caso del segundo razonamiento aparte de aplicar la discriminación visual, se ha de tener desarrollada la habilidad de las relaciones espaciales para establecer una relación entre los distintos elementos.

Análisis cuantitativo de los distintos razonamientos asociados al tarea 4

Una vez expuestos los distintos razonamientos, veamos la clasificación por grupos y analizaremos los resultados:

Tipo de Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje (%)
Utilización del Teorema de Pitágoras	18	28.57
Utilización de criterios de congruencias	11	17.47
Falta de datos	9	14.29
Otros	4	6.34
No razonan	2	3.17
En blanco	19	30.16
Total	**63**	**100**

Tabla 22.- Frecuencia y porcentaje de los razonamientos asociadas a la tarea 4

Lo que más nos ha llamado la atención a medida que íbamos analizando las respuestas de los alumnos es que la gran mayoría, al encontrarse con rombo, intentan buscar el triángulo rectángulo oculto para aplicar Pitágoras directamente. Esto nos hace pensar en el hecho de que los alumnos, en cuanto se encuentran una tarea en la que aparece un triángulo, tienen asumido que van a tener que aplicar dicho proceso. Esto es un error ya que no ayuda a los alumnos a buscar un razonamiento alternativo y actúan por repetición. Este problema debe ser tratado desde otro punto de vista y hacerles ver a los alumnos que no siempre el uso del teorema de Pitágoras es el apropiado a la hora de resolver problemas en los que aparezcan triángulos.

Otro hecho llamativo es el encontrado en las respuestas que utilizan los criterios de congruencia. Estos alumnos asumen que los triángulos formados por la diagonal menos y dos lados del rombo son iguales y, además, equiláteros por lo que no tienen que realizar ningún cálculo para saber el lado de éste salvo averiguar la diagonal menor del rombo; proceso para el cual no han tenido ningún problema.

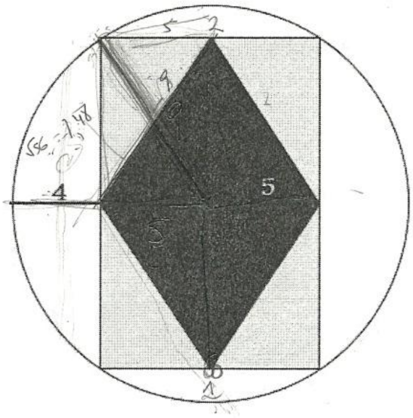
Un 14.29% de los alumnos son incapaces de llegar a una solución puesto que el camino que han elegido para su resolución les lleva a encontrarse con el obstáculo de la falta de datos.

En la tabla anterior hemos clasificado cierta información bajo el nombre de Otros. En estos razonamientos lo que los alumnos nos dejan plasmado es el camino a seguir en el cálculo del lado del rombo usando, para ello, diversos caminos y utilizando varias fórmulas. Todo lo que plasman es correcto pero son incapaces de dar una respuesta final. Podemos pensar que quizá no hayan dispuesto del tiempo necesario para llevar a cabo su resolución.

Hemos de terminar diciendo que, como hemos apuntado en la tabla resumen de respuesta, en el curso de 3ºE.S.O. no hemos encontrado ningún alumno que resuelva la tarea correctamente. Esto nos hace asegurar que la tarea les ha resultado de gran dificultad. Pero, en el curso de 4ºE.S.O., encontramos, exactamente, 2 respuestas correctas usando razonamientos totalmente diferentes. Uno de ellos ha utilizado el razonamiento por el que, nosotros, pretendíamos que lo hicieran. Hemos de notar que comenzó usando el teorema de Pitágoras pero analizó más profundamente el ejercicio y cambió de razonamiento. Este hecho, como ya hemos mencionado antes puede ser debido a que, desde siempre y cualquiera que sea el curso, los alumnos tienen asociado el hecho de aplicar el teorema de Pitágoras a un problema en el que aparezca algún triángulo rectángulo.

Por último, mostraremos las dos respuestas correctas:

Razonamiento ANALÍTICO



$c = \sqrt{h^2 - c^2}$

$c = \sqrt{9^2 - 5^2}$

$c = \sqrt{56}$

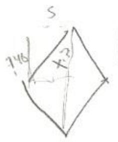
$c \approx 7,48$

$h = \sqrt{7,48^2 + 5^2}$

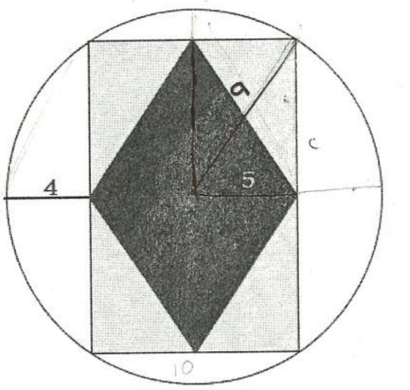
$h = \sqrt{81}$

$\boxed{h = 9.}$

El lado del triángulo mide 9.

Primero hayo el cateto  , cuando ya lo he hallado averiguo la hipotenusa del rombo  $\boxed{x = 9.}$

Razonamiento VISUAL



$R = 9$

$9^2 = 5^2 + c^2$

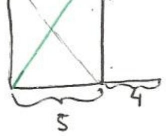
$9^2 - 5^2 = c^2$

$\sqrt{56} = c$

$c \simeq 7,48$

El lado del rombo mide 9, ya que es lado del rombo es igual al radio

He sacado el rectángulo:



en vez de coger la diagonal del rombo he cogido la otra diagonal (verde) que equivale al radio

Ejemplo de respuesta 27.- Respuestas correctas asociadas a la tarea 4

Como vemos en el caso del razonamiento analítico el alumno es capaz de discriminar un triángulo rectángulo del que se desconoce únicamente un cateto, el cual halla usando el teorema de Pitágoras. Una vez hallado dicho cateto, cae en la cuenta de que ese cateto es de igual valor que el que necesita para obtener el valor del lado del rombo.

Por otro lado, vemos que el alumno que optó por un razonamiento visual comenzó, al igual que la mayoría de sus compañeros, por la aplicación del teorema de Pitágoras pero vio que podía responder la tarea usando un razonamiento mucho más rápido sin necesidad de hacer cálculos únicamente utilizando criterios visuales.

Análisis de errores

Al igual que hemos hecho con el resto de tareas, analizaremos los errores cometidos por los estudiantes agrupándolos en errores conceptuales y errores procedimentales ya que no se han cometido errores combinados.

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje (%)
Sin errores		2	3.17
Incorrectas	Incompletos	4	6.34
	Sin argumentación con resultado incorrecto	2	3.17
	Error conceptual	14	22.22
	Error procedimental	20	31.76
	Error combinado	2	3.17
	Ns/Nc	19	30.17
Total		**63**	**100**

Tabla 23.- Frecuencia y porcentaje de errores por tipo asociados a la tarea 4

Como nos muestra la tabla, tenemos que una gran mayoría de los alumnos han cometido errores conceptuales, un 22.22%. Pero tenemos que dejar claro que dentro de este grupo, los alumnos cometen errores distintos. Los más destacados son:

- Error conceptual
  - Triángulo equilátero
  - Igualar el diámetro con la altura del rectángulo
  - Confundir elementos básicos de las figuras planas

En esta tarea lo más sonado es el error que someten los alumnos al interpretar que el triángulo formado por los lados del rombo y la diagonal menor es equilátero. Este error es propio de la utilización de habilidades visuales ya que no realizan ningún cálculo para desechar esta opción.

Salvando el caso del alumno que aplica correctamente en teorema de Pitágoras sin asignar valores sin justificación, el resto de los alumnos tienen claro el concepto del teorema de Pitágoras pero su aplicación es incorrecta por lo que lo consideramos como un error procedimental. Expliquemos el porqué de su incorrecta aplicación:

En el caso de la utilización del teorema de Pitágoras, los alumnos atribuyen valores a los lados desconocidos, generalmente un cateto, sin especificar cómo los han hallado. Este hecho hace que sea muy difícil analizar dichos resultados. La asignación del valor 7 a uno de los catetos la hemos querido entender como la resta del diámetro y las 4 unidades señaladas en dibujo, dividiendo dicha diferencia entre 2. La asignación del valor 8 al cateto viene de considerar que la mitad de la distancia señalada con el valor 4, es la misma que la distancia entre la circunferencia y el rectángulo. Pasamos a plasmarlo en imágenes:

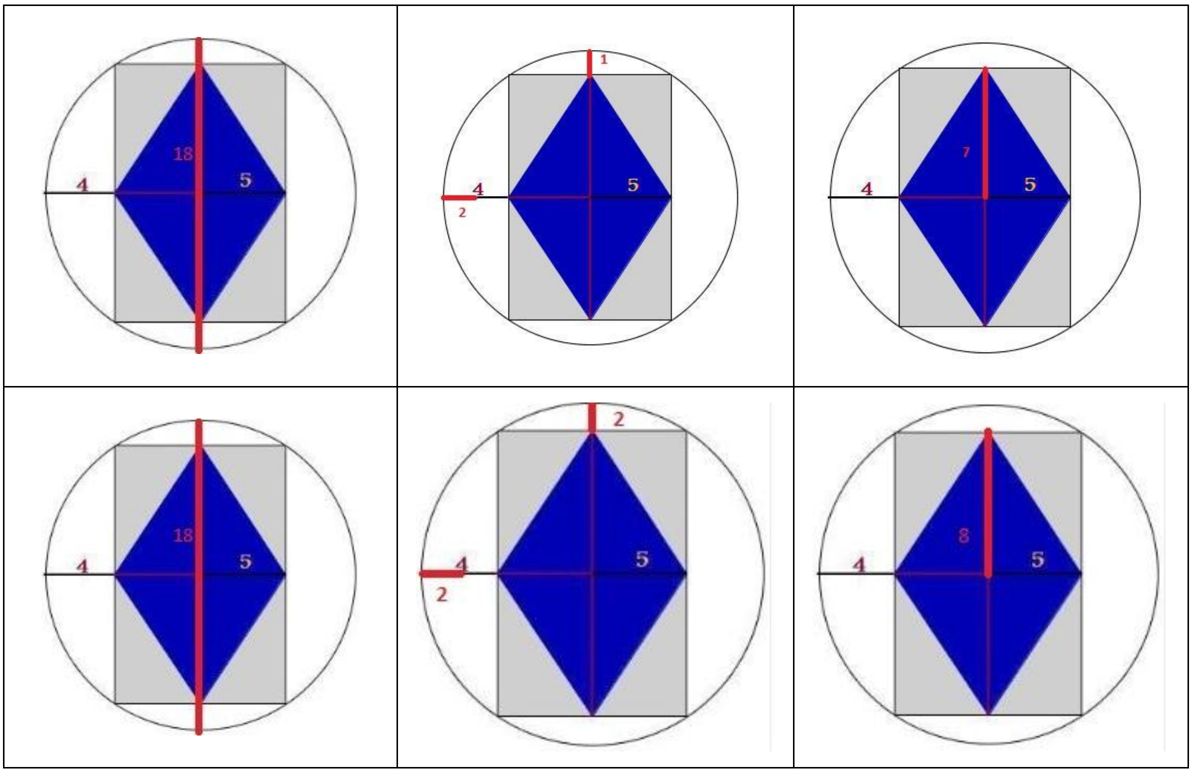
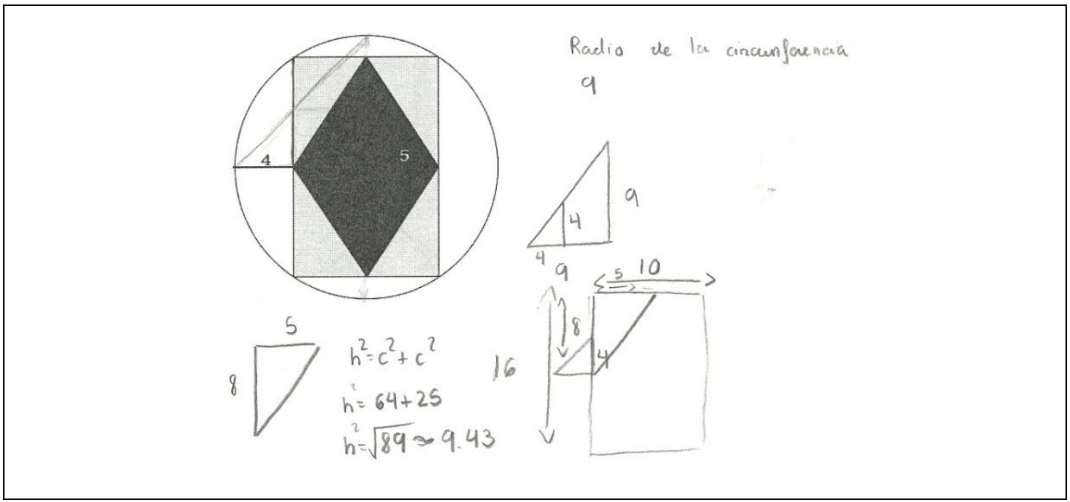


Figura 4 .- Esquema de los pasos seguidos en el razonamiento 1 asociado a la tarea 4

También nos hemos encontrado con un alumno que utiliza criterios de semejanza entre triángulos, aunque para ello atribuye valores incorrectos:



Ejemplo de respuesta 28.- Error asociado al razonamiento 2 de la tarea 4

Otros alumnos utilizan vocabulario específico de la circunferencia para referirse al rombo y al contrario. Hablan de diámetro del rombo y lado de la circunferencia, entre otros. Este hecho nos muestra una debilidad en el conocimiento de elementos básico de las figuras planas, las cuales son utilizadas desde cursos muy primarios.

QUINTA TAREA: Cálculo de la Altura

Como venimos haciendo con todos los ítems, primero, agrupemos los datos de ambos cursos atendiendo solo a si la respuesta es correcta o incorrecta. Este ítem será considerado como un caso especial ya que debido a la falta de tiempo, recordemos que sólo disponían de una clase ordinaria para la resolución de todas las tareas, muchos de los alumnos no llegaron a tener tiempo de pensar en él. Por ello, consideraremos como respuestas correctas aquellas dadas por los alumnos que son capaces de darse cuenta de que la altura pedida no son dos metros, como muchos aseguran, siempre y cuando nos den una justificación por ello.

Respuestas		**Frecuencia/ Porcentaje**							
		3ºESO				**4ºESO**			
Correctas		7		20.59		6		20.69	
Incorrectas	Justificadas	19	27	55.88	79.41	18	23	62.07	79.31
	Sin razonar	0		0		0		0	
	Ns/Nc	8		23.53		5		17.24	
Total		**34**		**100**		**29**		**100**	

Tabla 24.- Frecuencias y porcentajes del tercer apartado de la tarea 5

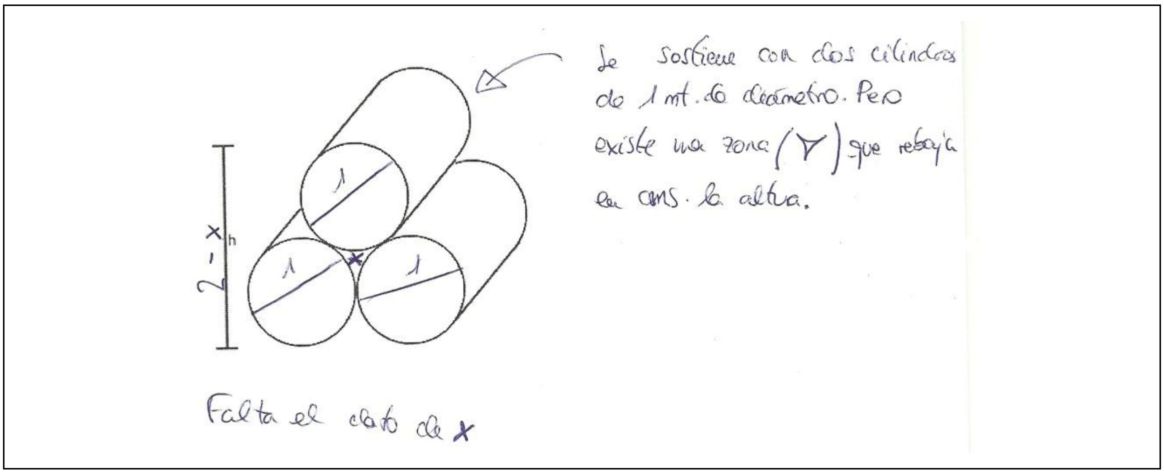
Esta tarea, pese a tener el hándicap de ser la última, ha intentado ser resuelta por la gran mayoría de los alumnos en ambos cursos y, lo que es aún más importante, todos los alumnos han razonado su respuesta. En ninguno de los dos cursos nos hemos encontrado con respuestas sin justificación, lo que nos ayuda notablemente en el análisis ya que no tenemos que hacer conjeturas de los que ha pensado, sino que lo plasman.

Como nos muestran los resultados de la tabla, los resultados son muy parejos a diferencia de otras tareas. Como ya hemos dejado notar con anterioridad, consideraremos como respuesta correcta el hecho de que **justifiquen,** y únicamente si lo hacen, que la medida de la altura sería menos de 2 menos sin llegar a resolver con totalidad la tarea.

Distintos razonamientos asociados al tarea 5

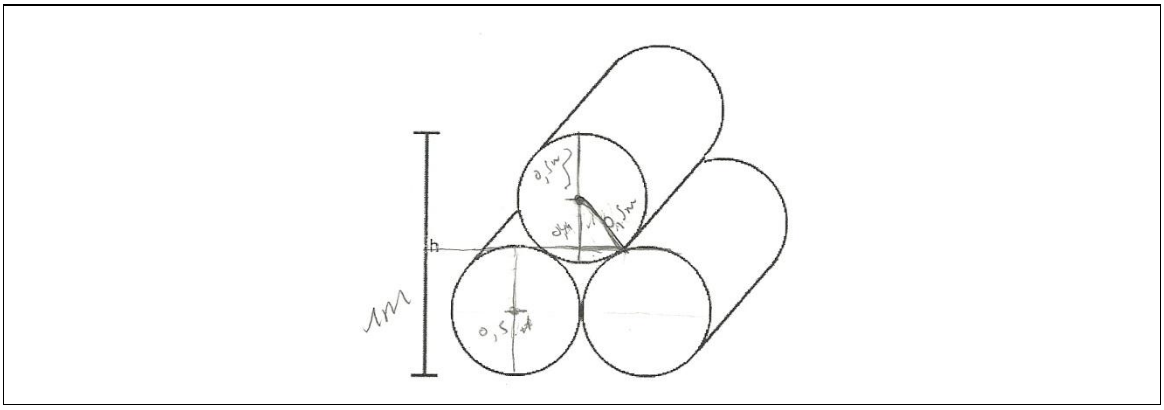
Teniendo en cuenta lo antes mencionado, los alumnos intentan resolver la tarea con ayuda de los siguientes razonamientos:

- ***Utilización de la discriminación visual para centran su atención en la unión de los tres cilindros (Raz1):*** con este razonamiento los alumnos caen en la cuenta de que la colocación de los cilindros que se les muestra tiene una peculiaridad, el cilindro superior está ligeramente introducido entre los otros dos.



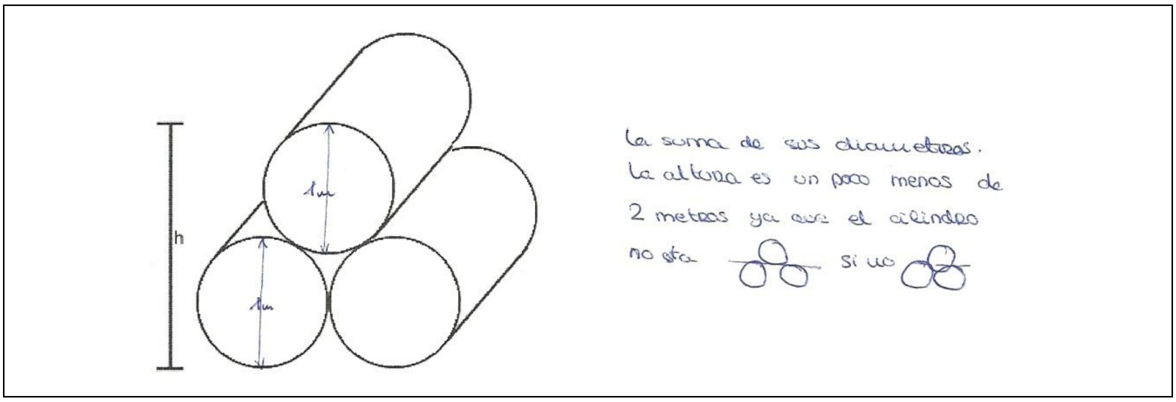
Ejemplo de respuesta 29.- Razonamiento 1 asociado a la tarea 5

- ***Utilización de la conservación de la percepción para encontrar elementos ocultos (*Raz2**)**:** los alumnos que usan este razonamiento van un paso más allá, se dan cuenta de que las bases de los tres cilindros juegan un papel muy importante e intentan encontrar un triángulo resoluble con los datos que tienen.



Ejemplo de respuesta 30.- Razonamiento 2 asociado a la tarea 5

- ***Altura de la figura es la suma de las alturas de los cilindros (Raz3):*** centran su atención en la figura completa y no indagan en las peculiaridades de ésta.



Ejemplo de respuesta 31.- Razonamiento 3 asociado a la tarea 5

Para el uso de los Raz1 y Raz2, es necesario tener desarrollada la habilidad del reconocimiento de las relaciones espaciales ya que se necesita establecer una relación entre las bases de los cilindros y posteriormente utilizar los centros de dichas bases para construir el elemento oculto.

Análisis cuantitativo de los distintos razonamientos asociados a la tarea 5

Para el análisis de los razonamientos usados por los estudiantes en este ítem tendremos en cuenta dónde centran su atención y si son capaces de encontrar el elemento oculto. Pasemos a agrupar los datos de los participantes según el tipo de razonamiento puesto en práctica:

Tipo de Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje (%)
Únicamente* centran su atención *en la unión de los tres cilindros 	11	17.46
Buscan el elemento oculto	5	7.94
No centran su atención en la unión de los tres cilindros 	34	53.97
Ns/Nc	13	20.63
Total	**63**	**100**

Tabla 25.- Frecuencia y porcentaje de los razonamientos asociadas a la tarea 5

El hecho de que más de la mitad de los alumnos no centren su atención en la parte clave, nos hace pensar que la habilidad de discriminación visual es deficiente en este tipo de tareas.

Como especificamos al principio de la tarea, aquellos que centran su atención en la unión de los tres cilindros hemos considerado que responden correctamente a la tarea, y son casi el 20% de los alumnos. Hay algunos de ellos, exactamente 5, que van un paso más allá e intentan buscar un triángulo centrando su atención en las bases de los cilindros. Empiezan por plasmar un triángulo que nos les ayuda en la resolución por lo que siguen buscando hasta dar con el que les ayudará. Pese a ello, ninguno es capaz de dar un resultado final. Hemos llegado a la conclusión que esto es debido a la falta de tiempo puesto que ya tienen todo lo necesario para resolver correctamente la tarea y han llegado a analizarla con el sentido que queríamos; encontrar el triángulo oculto. Sin embargo, teniendo en cuenta que los alumnos no habían sido enseñados a enfrentarse a este tipo de tareas y que 4 de los 5 que tienen claro que el elemento oculto que les ayudará a resolver el problema es el triángulo son considerados como talentosos nos hace ver que este tipo de alumnos son capaces de desarrollar sus habilidades sea cual sea la tarea.

Como hemos mencionado antes, se consideró que esta tarea era la que tenía mayor grado de dificultad y el hecho de que todos los alumnos razonen su respuesta les adjudica un alto grado de seguridad, aunque al final vemos que son los menos los que la resuelven correctamente.

Análisis de errores

Al igual que hemos hecho con el resto de tareas analizaremos los errores cometidos por los estudiantes agrupándolos en errores conceptuales, errores procedimentales y errores combinados.

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje (%)
Sin errores		13	20.63
Incorrectas	Incompletos	5	7.95
	Error conceptual	6	9.52
	Error procedimental	23	36.51
	Error combinado	3	4.76
	Ns/Nc	13	20.63
Total		**63**	**100**

Tabla 26.- Frecuencia y porcentaje de errores por tipo asociados a la tarea 5

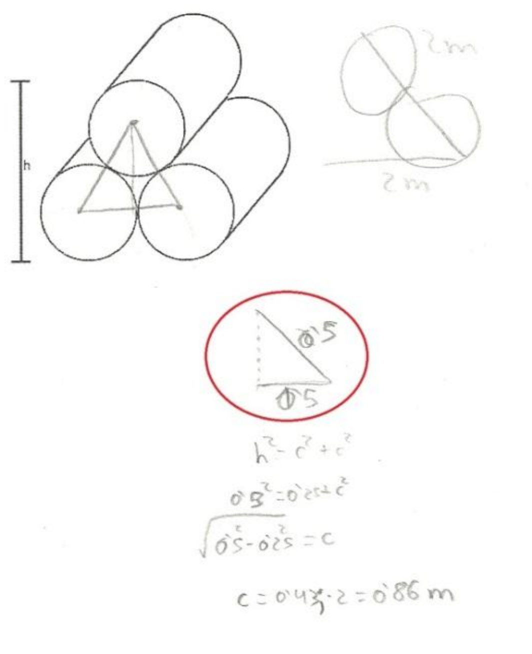
En esta tarea, como se puede observar en la tabla, nos hemos visto en la necesidad de añadir un nuevo caso, el denotado como Incompletos. En estos casos los alumnos han plasmado razonamientos correctos pero han desistido y no han dado una respuesta final.

El error conceptual se atribuye a considerar que la altura de la figura no es la que se les señala, sino que consideran cualquier la altura a averiguar como la altura del cilindro. Este error es el que más nos ha llamado la atención puesto que el problema tenía claramente señalada dicha altura. También nos hemos encontrado con el caso de considerar el diámetro del cilindro en vez del diámetro de la base del cilindro.

En el caso del error procedimental, los alumnos tienen claro que la altura de la figura es la que se les muestra pero no aplican bien este razonamiento al no tener en cuenta que el cilindro superior se adentra en el hueco formado por los otros dos.

Como nos muestra la tabla el hecho de que la mayor parte de los errores hayan sido procedimentales era de esperar puesto la mayor parte de los alumnos optaron por un razonamiento en el que no prestaban su atención en la unión de los tres cilindros.

En el caso del error procedimental, como explicamos al codificar los errores, son los que ocurren al aplicar mal un concepto o propiedad. Aquí, tienen claro el concepto de altura de la figura, pero lo aplican mal al no tener en cuenta el hueco que se forma con la unión de los tres cilindros. También tenemos el caso de, pese a descubrir el elemento oculto, tienen dificultades en plasmar correctamente los datos que les ayudará a resolverla.

<table>
<tr><th colspan="2">ERROR PROCEDIMENTAL</th></tr>
<tr><td>
</td><td>En este caso, el alumno tiene claro que el elemento oculto que le ayudará a resolver el problema es un triángulo donde las bases de los cilindros juegan un papel muy importante. Es por ello que empieza a tratar de obtener el triángulo adecuado, pero hasta llegar a él se observa que trató de crear otros.
El error que comete este alumno está en la puesta de los datos en el triángulo obtenido</td></tr>
</table>

Ejemplo de respuesta 32.- Ejemplo de error procedimental asociado a la tarea 5

Esta tarea fue diseñada con el objetivo de descubrir el triángulo oculto, poniendo en práctica las habilidades de discriminación y conservación de la percepción. Para ello tienen que tener en cuenta los centros de las bases y unirlos adecuadamente, como es un procedimiento al cual los alumnos no están acostumbrados se consideró oportuno tratar la tarea como la más compleja de todas. Lo que no se esperaba es que la mayoría de los alumnos no fueran capaces de justificar que el cilindro superior estaba apoyado en el hueco de los otros dos, por lo que la altura no sería 2 metros.

4.2.- *PERFILES. ANÁLISIS DE LOS ALUMNOS CON TALENTO MATEMÁTICO.*

En este apartado analizaremos exclusivamente a los alumnos considerados como talentosos en matemáticas y los clasificaremos como pensadores analíticos, visuales o armónicos, siguiendo la clasificación de Krutetskii, basándonos en los razonamientos utilizados para justificar sus respuestas.

Recordemos ligeramente lo que consideramos para cada tipo. Sabemos que hay alumnos que tienen una marcada inclinación hacia los aspectos visuales de las matemáticas para trabajar con esquemas abstractos (visuales), otros que se sienten fuertemente atraídos por su componente analítica (analíticos), y otros en los que estas dos preferencias se conjugan armoniosamente (armónicos).

A continuación justificaremos nuestro análisis atendiendo a los razonamientos plasmados por los alumnos.

- Tarea 1:
  - ***Analítico. Utilización de elementos de posición relativa entre dos objetos:*** la referencia de una figura del cubo es otra figura por lo que no es necesario mover el cubo.
  - ***Visual. Identificación de movimientos:*** mueve el cubo olvidándose de cómo están las figuras de dicho cubo.
  - ***Armónico. Combinación de los razonamientos anteriores:*** Identifican el movimiento sufrido por el cubo, relación externa, y, para dibujar la figura de la cara blanca buscan una relación entre esta cara y otra del cubo movido, relaciones internas.

- Tarea 2:

  Antes de comenzar con el análisis, hemos de mencionar que esta tarea tiene una fuerte tendencia analítica por el hecho de tener que contar. Aun así, dependerá del razonamiento utilizado.
  - ***Analítico. Uso de procedimientos extractivos:*** uso de la fórmula tradicional (largo × ancho × alto).
  - ***Analítico. Volumen como espacio vacío:*** el cubo está formado sólo por sus capas exteriores. En esta categoría los cálculos se realizan teniendo en cuenta sólo la parte exterior de la figura, es decir, las caras.
  - ***Visual. Descomposición ortogonal por capas/columnas/cubos unidad:*** este procedimiento refleja la capacidad para la descomposición ortogonal de un objeto tridimensional y para visualizar las diferentes capas/columnas/cubos unidad del cubo original.

- Tarea 3:

  De manera similar a la tarea anterior, esta tarea tiene una tendencia visual ya que únicamente tienen que dibujar diferentes representaciones. Es por ello que diferenciaremos los razonamientos visuales y analíticos teniendo en cuenta si han sido capaces de analizar la trama y ver que la distancia entre un punto vertical y uno horizontal no es la misma.

- ***Analítico. Utilización de la línea vertical como referencia:*** relacionan la vertical de la figura con el lado del folio.
- ***Analítico. Utilización de la trama para dibujar en 2D:*** muestran su incapacidad para dar profundidad a las figuras.
- ***Visual. Relación de las direcciones de los lados de la figura*:** relacionan elementos internos de la figura.

➢ Tarea 4:

- ***Analítico. Utilización del Teorema de Pitágoras:*** no analizan la figura, por lo que dejan a un lado el razonamiento visual y pasan a hacer cálculos, los cuales en la mayoría de los casos son incorrectos.
- ***Visual. Utilización de criterios de congruencias:*** analizan las posibles figuras ocultas tratando de resolver la tarea sin necesidad de adentrarse en el razonamiento analítico.

➢ Tarea 5:

- ***Analítico. Altura de la figura como la suma de las alturas de los cilindros:*** realizan un cálculo simple sin pararse a analizar la figura en profundidad.
- ***Visual. Utilización de la discriminación visual para centran su atención en la unión de los tres cilindros:*** analizan la figura plasmando el conflicto de la figura ,  .
- ***Visual. Utilización de la conservación de la percepción para encontrar elementos ocultos:*** van un paso más allá en el análisis de la figura, tratando de encontrar el elemento que les ayude a resolver la tarea correctamente.

Para esta clasificación nos hemos ayudado de una tabla en la que la cabecera horizontal tenemos a los alumnos talentosos codificados con sus iniciales, para preservar el anonimato; y en la cabecera vertical, los distintos razonamientos. Hemos marcado con una "X" el razonamiento utilizado por los alumnos talentosos en cada tarea, llegando a clasificarlos según Krutetskii.

		ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO											
		STU	CBI	IMG	LSD	ACA	JAS	ARP	PA	JAM	MUG	MBI	ADH
Tarea1	Utilización de elementos de posición relativa entre dos objetos	--X	XXX			--X		XXX	-XX		--X		
	Identificación de movimientos	XX-		XXX		XX-	XX-			XXX	XX-	XX-	XXX
	Combinación de los razonamientos anteriores						--X						
Tarea2	Uso de procedimientos extractivos	X	X	X	X						X		
	Volumen como espacio vacío												
	Descomposición ortogonal por capas/columnas/cubos unidad					X	X	X	X	X		X	X
Tarea3	Utilización de la línea vertical como referencia	XX				XX	XX		XX		XX		XX
	Utilización de la trama para dibujar en 2D											-X	
	Relación de las direcciones de los lados de la figura		XX	XX	XX			XX		XX			
Tarea4	Utilización del Teorema de Pitágoras					X				X	X		
	Utilización de criterios de congruencias	X			X			X					
	Falta de datos		X	X					X				
Tarea5	Altura de la figura como la suma de las alturas de los cilindros	X						X					
	Utilización de la discriminación visual para centran su atención en la unión de los tres cilindros					X	X		X	X	X	X	X
	Utilización de la conservación de la percepción para encontrar elementos ocultos			X	X								
		ARMÓNICO	ANALÍTICO	VISUAL	VISUAL	ARMÓNICO	VISUAL	VISUAL	ANALÍTICO	VISUAL	ANALÍTICO	VISUAL	VISUAL

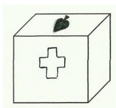
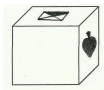
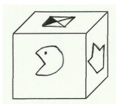
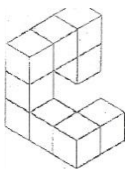
Tabla 27.- Estilos predominantes del razonamiento de los estudiantes con talento matemático.

El hecho de que la mayoría de los alumnos los hayamos considerado como visuales va muy unido a que las tareas a resolver tenían una fuerte tendencia visual. También hemos de mencionar que aunque son varios los alumnos que utilizan un razonamiento analítico para unas tareas y uno visual para otras, los razonamientos visuales son los elegidos en las tareas de mayor dificultad por lo que son clasificados como visuales.

4.3.- RESULTADOS GLOBALES

En un primer acercamiento a los resultados de la prueba, en la tabla siguiente se muestra el número de respuestas correctas a cada tarea, lo que nos proporciona una idea del nivel de dificultad de cada uno de ellas.

Tal y como nos muestra la tabla, las tareas 4 y 5 han sido los de mayor dificultad para los estudiantes como se puede deducir del bajo porcentaje de acierto. La tarea 2 es la única que supera el 50% de aciertos por lo que es la que menos dificultad ha reportado a los alumnos.

Tarea	Distintivo gráfico	Frecuencia de éxito	Porcentaje (%)
1		21	33.33
		22	34.92
		27	42.85
2		37	58.73
3		21	33.33
		9	14.28

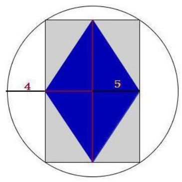
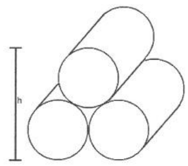
Tarea	Distintivo gráfico	Frecuencia de éxito	Porcentaje (%)
4		2	3.17
5		13	20.63

Tabla 28. Distribución del número de respuestas correctas por tareas

Las tareas siguen este orden por la necesidad de ir aumentando en grado de dificultad, pero atendiendo a los datos recogidos deberíamos haber establecido un orden distinto proponiendo la segunda tarea como la primera a realizar.

Globalmente podemos señalar que el cuestionario ha resultado bastante difícil para los estudiantes. Teniendo en cuenta el bajo porcentaje de respuestas correctas asociadas a cada uno de las tareas, esta situación debería motivar la realización de un análisis que nos muestre los conflictos que se han producido en la resolución de las diferentes tareas propuestas.

Asignando un punto a cada respuesta correcta, la variable “puntuación total” varía en un rango de 0 a 8 puntos para el cuestionario definido. La tabla siguiente muestra la frecuencia y el porcentaje para las diferentes puntuaciones obtenidas para nuestra muestra, 63 sujetos.

Puntuación	Frecuencia	Porcentaje (%)
0	10	15.84
1	9	14.29
2	15	23.82
3	13	20.64
4	9	14.29
5	2	3.18
6	4	6.35
7	1	1.59
8	0	0
Total	**63**	**100**

Tabla 29.- Frecuencias y porcentajes de la puntuación total obtenida.

Basándonos en los datos que nos ofrece la tabla, vemos como existe un gran déficit, por parte de estos participantes, en la resolución de las tareas y como estas son tareas particularmente diseñadas para estudiar la visualización, tenemos que los alumnos de nuestra muestra, en general, son poco visualizadores. Hemos de notar que los alumnos con un alto porcentaje de aciertos son, en gran mayoría, considerados con talento matemático.

En relación al análisis diferenciado de las respuestas atendiendo al género, los resultados se muestran a continuación.

	Hombre		**Mujer**	
Puntuación	**Frecuencia**	**Porcentaje (%)**	**Frecuencia**	**Porcentaje (%)**
0	2	8	8	21.05
1	5	20	4	10.53
2	6	24	9	23.68
3	5	20	8	21.05
4	5	20	4	10.53
5	2	8	0	0
6	0	0	4	10.53
7	0	0	1	2.63
8	0	0	0	0
Total	**25**	**100**	**38**	**100**

Tabla 30.- Frecuencias y porcentajes de la puntuación total obtenida, por sexo.

La diferencia entre hombres y mujeres no es ninguna evidencia de superioridad o inferioridad, sino de especialización. Numerosos estudios demuestran que los hombres tienen una habilidad altamente superior a la de las mujeres para visualizar un objeto tridimensional. Esto otorga al hombre habilidades superiores en matemáticas y razonamiento geométrico. Pero en nuestro estudio, pese a que en las puntuaciones bajas también predominan las mujeres, lo que nos demostraría la certeza de los otros estudios, también son estas las que obtienen la puntuación más alta. Por ello, no podemos estar en total acuerdo con los estudios que aseguran que los hombres tienen una mejor habilidad de visualización que las mujeres.

La variable curso nos ayuda a observar si existe alguna relación entra la puntuación total obtenida y el curso en el que están los participantes

	3ºE.S.O.		4ºE.S.O.	
Puntuación	**Frecuencia**	**Porcentaje (%)**	**Frecuencia**	**Porcentaje (%)**
0	5	14.70	5	17.24
1	3	8.82	6	20.69
2	9	26.48	6	20.69
3	9	26.48	4	13.79
4	4	11.76	5	17.24
5	1	2.94	1	3.45
6	3	8.82	1	3.45
7	0	0	1	3.45
8	0	0	0	0
Total	**34**	**100**	**29**	**100**

Tabla 31.- Frecuencias y porcentajes de la puntuación total obtenida, por curso.

Lo primero que tenemos que mencionar es que no por estar en un curso superior se tiene una mejor adecuación a la hora de resolver este cuestionario ya que los alumnos, en ninguno de los cursos, están acostumbrados a enfrentarse a tareas de este tipo. Los alumnos que carecen de esta habilidad recurren a otros procedimientos para la resolución de la tarea y, en muchos casos, al no tratarse de tareas a las que se enfrentan a diario en clase, optan por abandonarla. En nuestra investigación, aunque las puntuaciones totales más bajas son las que predominan en ambos cursos, es el curso de 3ºE.S.O. el que destaca, ligeramente, por tener más alumnos que resuelven un mayor número de tareas correctamente.

Capítulo 5.- DISCUSIÓN

Hemos llevado a cabo un intento de ver cómo es la relación existente entre talento matemático y visualización desde el diseño de unas tareas adecuadas para la atención a la diversidad de estos alumnos. Para ello hemos analizado algunas variables que pueden incidir en los procesos de resolución.

La evaluación de la visualización de estudiantes se ha abordado desde una perspectiva teórica que considera la visualización como un conjunto de habilidades que pueden ser manifestadas por los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que deben realizar en un contexto determinado. Desde el punto de vista de la educación matemática nos parece la más apropiada para producir y predecir cambios en los estudiantes; pero esta afirmación necesita ser estudiada mediante la práctica. Esto es lo que hemos hecho empleando estudiantes con talento matemático y tareas de contenido geométrico.

En esta sesión hemos registrado las habilidades puestas en juego en tanto en las observaciones realizadas por los investigadores como las manifestaciones de las habilidades plasmadas en las tareas, distinguiendo las que son correctas de las que se realiza de manera incorrecta o incompleta. Para ello hemos determinando el rendimiento de los alumnos en las tareas y hemos registrado los errores y dificultades que se han apreciado cuando usan la visualización.

A partir de los resultados del análisis, extraeremos las conclusiones principales respondiendo a cada una de las preguntas que motivaron los objetivos de investigación y, determinarán el estado de la conjetura que guio nuestro experimento de enseñanza y las aportaciones de nuestra investigación.

En este capítulo se van a examinar las respuestas a las preguntas y objetivos planteados, se señalan las posibles aportaciones de nuestra investigación y se plasman las limitaciones de este trabajo y algunas de las cuestiones abiertas o perspectivas de investigaciones que pueden derivarse.

5.1.- Respuesta a los objetivos y conclusiones sobre las hipótesis

Es en esta sección del capítulo donde trataremos con más detalle tanto a los objetivos de la investigación como a las hipótesis de partida. En una primera parte, analizaremos los resultados y conclusiones alcanzados respecto a los objetivos expuestos en el primer capítulo. Y es en la segunda parte de esta sección donde veremos si se han cumplido las hipótesis con las que partíamos esta investigación basándonos en los resultados obtenidos del análisis.

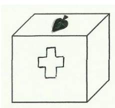
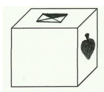
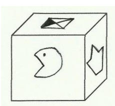
5.1.1.- Respuesta a los Objetivos

A continuación recordaremos los objetivos específicos y les daremos respuesta teniendo en cuenta los datos obtenidos del análisis.

Objetivo específico 1

Objetivo específico 1: *Determinar las configuraciones de objetos y procesos que ponen en juego los sujetos cuando realizan las prácticas requeridas en la solución de tareas. En particular, analizar los razonamientos de los alumnos con talento matemático.*

Hablar de los objetos y procesos que ponen en juego los sujetos al realizar las prácticas requeridas en la solución de tareas es hablar de los tipos de razonamientos utilizados. En el capítulo 4 se han descrito de forma más detallada los distintos razonamientos detectados para cada una de las tareas, describiendo los objetos y procesos puestos en juego en cada una de ellas. En la Tabla se muestra una síntesis de dichos razonamientos:

Distintivo Gráfico		Tipo de Razonamiento
Tarea 1		➢ ***Posición relativa entre dos objetos*** ➢ ***Identificación de movimientos*** ➢ ***Combinación de los razonamientos anteriores***
		➢ ***Posición relativa entre dos objetos*** ➢ ***Identificación de movimientos*** ➢ ***Combinación de los razonamientos anteriores*** ➢ ***Se fijan en otro cubo y no en el original***
		➢ ***Posición relativa entre dos objetos*** ➢ ***Identificación de movimientos*** ➢ ***Combinación de los razonamientos anteriores***

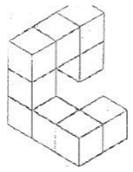
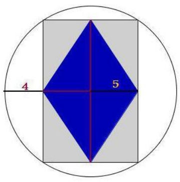
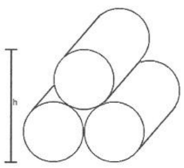
Distintivo Gráfico	Tipo de Razonamiento
Tarea 2 	➢ ***Uso de procedimientos extractivos.*** ➢ ***Volumen como espacio vacío.*** ➢ ***Descomposición ortogonal por capas.*** ➢ ***Descomposición ortogonal por columnas.*** ➢ ***Descomposición en cubos unidad***
Tarea 3 	➢ ***Utilización de la línea vertical como referencia.*** ➢ ***Relación de las direcciones de los lados de la figura.***
	➢ ***Utilización de la línea vertical como referencia.*** ➢ ***Relación de las direcciones de los lados de la figura.*** ➢ ***Utilización de la trama para dibujar en 2D.***
Tarea 4 	➢ ***Utilización del Teorema de Pitágoras*** ➢ ***Utilización de criterios de congruencias*** ➢ ***Falta de datos***
Tarea 5 	➢ ***Centran su atención en la unión de los tres cilindros*** ➢ ***Búsqueda de elementos ocultos*** ➢ ***Altura de la figura como la suma de las alturas***

Tabla 32.- Razonamientos asociados a cada una de las tareas

Objetivo específico 2

Objetivo específico 2: *Estudiar los tipos, usos, errores y dificultades que presentan los alumnos implicados en los procesos de visualización en la resolución de problemas geométricos propuestos.*

La resolución de las tareas y su posterior análisis nos permitió categorizar las respuestas de los estudiantes y, por tanto, también sus errores, dificultades y conflictos. Como se muestra en el Capítulo 4, dichos conflictos dependen directamente de la tarea, se encuentran en numerosas ocasiones asociados a determinadas configuraciones cognitivas y se ven reflejados en los errores más frecuentes.

El tipo de categorización utilizada para la clasificación de los errores en conceptuales, situacionales, procedimentales y combinados nos ha permitido organizarlos globalmente en la tabla siguiente y poder concluir que la mitad de los errores observados en la prueba se enmarcarían dentro de la categoría de errores procedimentales. Si relacionamos esta tabla con el índice de dificultad de la tarea, vemos que a medida que incrementamos la dificultad de la tarea, los errores conceptuales van en aumento. Si atendemos a la columna del error procedimental, los valores más elevados se obtienen para la tarea 1, en la cual el procedimiento está relacionado con la rotación/giro de un objeto.

	TIPO DE ERROR			
	CONCEPTUAL	**PROCEDIMENTAL**	**COMBINADO**	**TOTAL**
Tarea 1	0	21	0	**21**
	0	16	0	**16**
	0	20	0	**20**
Tarea 2	11	2	0	**13**
Tarea 3	11	6	20	**37**
	33	4	9	**46**
Tarea 4	14	20	2	**36**
Tarea 5	6	23	3	**32**
TOTAL	**75**	**112**	**34**	**221**
%	**33.94**	**50.68**	**15.38**	**100**

Tabla 33.- Distribución global del tipo de error

En la siguiente tabla, recogemos los errores que tienen una aparición significativa en cada una de las tareas analizadas.

	Tipo de error	Descripción
Tarea 1	Procedimental	➢ Mueven las caras frontales dejando inmóviles las laterales ➢ Confunden el movimiento sufrido por el cubo
Tarea 2	Conceptual	➢ Atribuir 4 caras al cubo ➢ Contar varias veces un cubo unidad
Tarea 3	Conceptual	➢ Considerar que la distancia entre un punto vertical y uno horizontal de la trama es la misma
	Procedimental	➢ Las líneas que forman la figura no confluyen en el mismo lugar que en la figura original
	Conceptual	➢ Utilización de la trama para dibujar en 2D
Tarea 4	Procedimental	➢ Atribuir valores a los lados desconocidos para aplicar el Teorema de Pitágoras
	Conceptual	➢ Igualar el diámetro con la altura del rectángulo
Tarea 5	Procedimental	➢ No tener en cuenta que el cilindro superior se adentra en el hueco formado por los otros dos

Tabla 34.- Error más significativos encontrados en las tareas

Los principales conflictos que se han detectado están directamente asociados con la interpretación de la representación plana de los objetos tridimensionales y la de los diagramas presentados, siendo dichas cuestiones fundamentales de la visualización.

También aparecen conflictos entre la definición verbal de una figura y la imagen que se presenta de la misma. Por ejemplo, en la tarea 2, es probable que, si se solicita de forma explícita, todos los estudiantes sean capaces de dar una definición correcta del cubo (nº de caras, aristas y vértices). Sin embargo, al contar las unidades de volumen que tiene el cubo perforado, un porcentaje elevado de estudiantes multiplica el número de unidades de una cara por cuatro (identificación con un cuadrado) o bien por tres (que son las caras que se muestran en la representación plana dada).

Existe un porcentaje alto de estudiantes que tienen una estructura espacial de las figuras basada en un conjunto de caras no coordinadas, como se recoge en el análisis de los errores de dicha tarea. En ese caso, realizan doble conteo sobre determinados elementos de las figuras (unidades).

También se detectaron dificultades en los estudiantes en el momento de argumentar la respuesta dada. Se produce un conflicto a la hora de expresar verbalmente o gráficamente el proceso por el cual se llega a una solución concreta.

Objetivo específico 3

Objetivo específico 3: *Analizar posibles diferencias, en cuanto a la puntuación total obtenida, centrándonos en el curso académico y en el género.*

Centrándonos en el curso académico, recordemos que estamos analizando un curso de 3º E.S.O. frente a uno de 4ºE.S.O., en ambos cursos la mayor puntuación total obtenida está en la resolución de 2 y 3 tareas de forma correcta. Es por ello que no podemos asegurar que exista una diferencia significativa teniendo en cuenta el curso. Esto desecha el pensamiento de que los alumnos mayores deben de obtener una puntuación mayor, puesto que estamos ante tareas nuevas y poco usuales.

Como mostraba la tabla de aciertos en relación al género, pese a que ciertos estudios terminan afirmando que las mujeres tienen una menor visualización frente a los hombres, en nuestro estudio se demuestra que son ellas las que obtienen una mayor puntuación pero también son las que más puntuación negativa obtienen. Por ello, lo único que podemos afirmar es que los hombres son menos variables en cuanto a la puntuación obtenida.

5.1.2.- Conclusiones sobre las Hipótesis

A continuación analizaremos cada una de las hipótesis de este trabajo, entendidas estas en el sentido de expectativas sobre los resultados obtenidos.

Hipótesis 1

Hipótesis 1: *El estudio del conocimiento matemático, en particular los tipos de objetos y procesos propuestos, permitirá trabajar con nociones cognitivas usadas (habilidades, imágenes, esquemas, etc.) y aportará explicaciones complementarias de los conflictos de los sujetos al resolver tareas de visualización.*

El análisis a priori de las tareas nos permitió obtener ciertas ideas sobre conflictos de significado que potencialmente podrían manifestar los estudiantes. En el Capítulo 4 se describen todas las configuraciones cognitivas que se encontraron para cada una de dichas tareas, y es ahí donde se ponen de manifiesto todos los conflictos de los sujetos, permitiéndonos apoyar las hipótesis formuladas con los resultados obtenidos.

Hipótesis 2

Hipótesis 2: *El enriquecimiento curricular centrado tanto en contenidos como en elementos de razonamiento visual favorecerá la mejor utilización y el desarrollo de sus habilidades de visualización.*

Tanto los contenidos como los elementos de razonamiento visual que hemos seleccionado en las sesiones parecen adecuados para este enriquecimiento puesto que no están cubiertos en el currículo oficial o se han trabajado en el curso con un nivel de mayor profundidad. Además, el carácter docente de la investigación ha supuesto una diversidad en cuanto a la temática, actividades propuestas y participación de los alumnos, rompiendo así con la monotonía.

La distinción entre indicadores de visualización incompleta y correcta, así como la detección de errores y dificultades nos ha permitido dejar una nueva vía de investigación para tratar de corregir dichos errores.

Hipótesis 3

Hipótesis 3: *Conjeturamos que los alumnos con talento matemático no presentan deficiencias respecto a las capacidades visuales.*

Hemos de mencionar que los criterios que hemos seguido para la selección de actividades han podido favorecer el uso de la visualización ya que los alumnos con talento matemático han puesto de manifiesto habilidades de visualización para resolver las tareas. Aun así, no todos los alumnos con talento matemático han utilizado las habilidades de visualización de forma correcta; por lo que no es posible asegurar que los alumnos con dicho talento no tengan deficiencias puesto que nos las muestran.

5.2.- Aportaciones

Dada la distribución de respuestas correctas por tarea, con porcentajes por debajo del 45% menos en la tarea 2, se hace evidente que, salvo en el caso de esta tarea, los problemas presentados no forman parte de la práctica habitual de estos estudiantes.

Además, en vista de que la mayoría de las modificaciones de las tareas y cualquier generalización de las mismas es más complicada que las presentadas, en general, pueden suponer un esfuerzo bastante elevado para los alumnos.

Estos estudiantes tienen ideas muy vagas y limitadas sobre conceptos básicos como giro, cubo, ortoedro, etc. y frecuentemente el significado que atribuyen a los mismos está basado en ejemplos prototípicos. No están acostumbrados a desarrollar cuerpos truncados. Así mismo, la representación plana de objetos tridimensionales no forma parte de su formación y se producen numerosos conflictos a la hora de realizarla o bien de interpretarla.

Capítulo 6.- Síntesis Final. Problemas Abiertos y Limitaciones

En esta memoria hemos presentado varias contribuciones relacionadas con el campo de la visualización. Estas aportaciones las consideramos con dos aspectos distintos, y es por ello que las dividimos en dos grupos: uno de carácter práctico y otro con carácter teórico.

Como *aportaciones prácticas,* hemos dedicado gran parte del Capítulo 2 a desarrollar una propuesta concreta de actividades que nos ayuden a trabajar la visualización de todos los alumnos, y en particular la de los alumnos con talento matemático, evaluando las capacidades y perfiles de visualización de los estudiantes.

Es en el Capítulo 1 donde hemos expuesto nuestra visión de la relación existente entre la visualización y el talento matemático. Hemos traducido a la realidad de los centros escolares las ideas expuestas del tema a tratar, puestas en práctica mediante la presentación detallada de una colección de tareas, las cuales se centra en un aspecto diferente de la Geometría.

Cada una de estas actividades está organizada de acuerdo con la secuencia de dificultad que previamente acordamos; es decir, las colocamos en orden creciente de dificultad. El resultado final es una colección de tareas en las que se dejan claros tanto las posibles habilidades y las imágenes que van a usar en su resolución como el argumento que nosotros consideramos como el ideal para dar respuesta a nuestra propósito de investigación.

Como *aportaciones más teóricas,* en el Capítulo 4 hemos presentado algunas reflexiones sobre la visualización.

En lo que respecta a la evaluación del razonamiento, la propuesta que formulamos permite traducir las actuaciones de los estudiantes en distintos caminos visuales. A través de las respuestas de los alumnos, al ser un cuestionario de respuesta libre, podemos analizar los razonamientos utilizados teniendo una gran variedad de estos, lo cual incrementa la objetividad y la precisión de la evaluación respecto a los métodos en los que solo tienen como objetivo estudiar los razonamientos predominantes por los estudiantes.

La forma de diseñar el cuestionario, pidiendo a los alumnos no solo que resolvieran la tarea sino que también escribieran todo los que han pensado o imaginado mientras trataban de llegar a una solución, consigue incrementar la información que se puede obtener sobre el razonamiento de los estudiantes a partir de sus respuestas.

Finalmente, hemos aplicado todas las ideas resumidas que hemos recogido en estos párrafos en dos situaciones en las que se muestras dichas ideas de forma práctica: un curso de 3ºE.S.O. y un curso de 4ºE.S.O. Los datos obtenidos nos han mostrado tanto los razonamientos que utilizan como los errores que cometen y, nos ha mostrado que, son pocos los alumnos con talento matemático que no tienen deficiencias en las habilidades de visualización. No obstante, no hemos pretendido generalizar los resultados obtenidos a los niveles educativos correspondientes, puesto que no era nuestra finalidad.

Resumiendo lo anterior, pensamos que en este trabajo se contemplan ideas originales que pueden afectar positivamente a la comprensión de la visualización desde un punto de geométrico y a su aplicación, las cuales suponen un avance en las herramientas de que se disponen como material para mejorar este aspecto de las matemáticas.

6.1.- Limitaciones

Las limitaciones de este proyecto están relacionadas con los siguientes aspectos: los sujetos, las características del instrumento de recolección de información, el tiempo del que dispusieron los estudiantes y el contenido matemático utilizado.

La principal limitación de la presente investigación puede derivarse de la naturaleza y el tamaño de la muestra. Los resultados y conclusiones que hemos obtenido sólo pueden ser válidos en sentido estricto para los sujetos que han intervenido en ella, sin poder generalizar los resultados.

Con respecto a los instrumentos de recolección de información, la elaboración de nuevos o diferentes instrumentos de diagnóstico, mucho más profundos, como por ejemplo entrevistas personales, grabación de imágenes y sonido de la sesión, etc. nos ayudaría a conocer mejor las actuaciones de los estudiantes frente a las tareas planteadas. Las decisiones para considerar si en una intervención se manifestaba una determinada habilidad pueden tener una interpretación subjetiva. Además un alumno ha podido utilizar distintas habilidades pero no manifestarlas en sus respuestas.

Los resultados obtenidos a partir del experimento de enseñanza están condicionados por el tipo de actividades propuestas y el diseño de las sesiones. Por lo tanto, son relativos a los contenidos y elementos de razonamiento concretos que se han trabajado en las sesiones.

También creemos que el tiempo que tuvieron los estudiantes para resolver las tareas fue un limitante, ya que sólo se dispuso de 50 minutos para tal actividad. De igual forma, las características particulares de cada una de las tareas propuestas limitan la amplitud de la investigación. Debido a las dos últimas limitaciones, recomendamos que en estudios posteriores se amplíen los contenidos y se asigne más tiempo para que los estudiantes puedan replantear el problema hasta llegar al que cumpla sus expectativas.

Además, somos conscientes de que han podido influir variables ajenas al experimento. Entre otras, las actitudes de alumnos con poca predisposición a manifestar sus argumentaciones o el efecto de estar condicionados por el hecho de ser investigados, así como la influencia de los investigadores en las actuaciones de los alumnos cuando hacían algún tipo de pregunta.

6.2.- Perspectivas

Para concluir este estudio exploratorio, consideramos que quedan algunos aspectos abiertos en relación con el tema central de nuestra investigación y que es de interés en el ámbito de la Didáctica de la Matemática.

En nuestro estudio hemos investigado a unos sujetos, un proceso de enseñanza y el análisis de las manifestaciones de las habilidades, en concreto. ¿Cómo variarían los resultados si se modifica algún elemento de los anteriores? Esta cuestión nos lleva a plantearnos otras más concretas centrando nuestra atención en los dos campos que motivaron nuestros interés: el talento matemático y la visualización.

Si nos centramos en la atención de alumnos con talento matemático:

- ¿Cuál es el comportamiento de otros sujetos con talento matemático ante este mismo proceso?
- ¿Cómo manifestarán las habilidades de visualización, errores y dificultades al enfrentarse a unos contenidos de enriquecimiento diferentes?
- ¿Qué otras habilidades, distintas a la de la visualización, han manifestado en el proceso de enseñanza y son factibles de desarrollar?
- ¿Para qué otros ámbitos es adecuado este proceso de enseñanza para enriquecer elementos de otros campos de las matemáticas?

En relación al desarrollo de las habilidades de visualización:

- ¿Qué elementos visuales son los más apropiados en el enriquecimiento según la edad o teniendo en cuenta su conexión con el currículo?
- ¿Qué metodologías específicas favorecen la superación de los errores y las dificultades de comunicación encontradas?

Esta investigación se ha centrado, principalmente, en la faceta cognitiva por lo que las tareas seleccionadas tienen en cuenta principalmente algunos componentes del conocimiento común. Queda abierto el problema de elaborar nuevos instrumentos que contemplen las componentes del conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes y la enseñanza.

Desde una perspectiva formativa nuestra investigación ha revelado las importantes carencias de los estudiantes de estos cursos en cuanto a conocimiento común y avanzado del contenido de visualización y razonamiento espacial. Se deriva por tanto la necesidad de diseñar, implementar y evaluar acciones formativas específicas para promover la mejora de dichos conocimientos.

REFERENCIAS

Benavides, M. (2008). Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. Tesis doctoral sin publicar. Universidad de Granada, España.

Bishop, A.J. (1980) Spatial and Mathematical Abilities- a Reconciliation. Paper presented at a conference on mathematical abilities, Athens, Georgia, June, 1980.

Bishop, A.J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Bishop, A.J. (1989): Review of research on visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics* vol. 11.1, pp. 7-16.

Bishop, A.J. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre la visualización. En R. C. Núñez, E. A. Sánchez, y G. Z. Badillo (Eds.), *Antología en educación matemática*. México: CINVESTAV-IPN.

Bishop, A. J. (2008). Visualising and mathematics in a pre-technological culture. En P. Clarkson y N. Presmeg, (Eds.), *Critical Issues in Mathematics Education*. Springer, USA (pp. 109-119).

Dankhe, G.L. (1986). Investigación y comunicación. En C. Fernández-Collado y G.L. Dankhe (eds), *La comunicación humana ciencia social* (pp. 385-454). México: McGraw-Hill.

Del Grande, J. (1990): Spatial sense, *Arithmetic Teacher* vol. 37.6, pp. 14-20.

Fox, D. (1981). El proceso de investigación en educación. Pamplona: Eunsa.

Gardner, H. (1995). Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica. Barcelona, Paidós.

Gardner, H. (2001). La inteligencia reformulada. Barcelona: Paidós.

Giménez, A. (2008). *Talento matemático*. Matematicalia. Revista digital de divulgación matemática, *4* (3). Recuperado el 9 de Mayo de 2012, desde http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_wrapper&Itemid=413

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference*, *1* (pp. 3-19). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Gutiérrez. A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P., Ruíz, F. y De la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp.13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.

Lean, G. y Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, *12* (3), 267-299.

Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. Washington, DC: ERIC.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares para la educación matemática.* Cádiz: SAEM THALES.

Neider, K. e Irwin, K. (2001). Using problems solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceeding of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp.431-438). Utrech, The Netherlands.

Passow, A. (1993). National/State policies regarding education of the gifted. En K. Séller, F. Mönks y A. Passow (Eds.), *Internacional Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.

Presmeg, N.C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation. Unpublished Ph.D. dissertation, University of Cambridge

Presmeg, N. (1986a). Visualisation and mathematical giftened*. Educational Studies in Mathematics, 17* (3), 297-311.

Presmeg, N. (1986b). Visualization in High School Mathematics. *For Learning of Mathematics 6* (3), 42-46.

Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23* (6), 595-610*.* Kluwer Academic Publishers.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205–235). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Granada: Universidad de Granada.

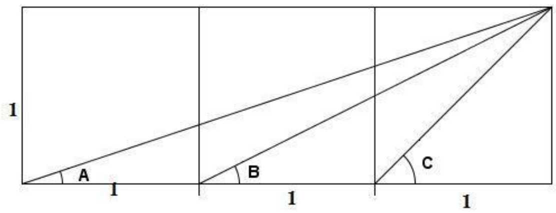
Van Garderen, D. y Montague, M. (2003a). Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities*. Learning Disabilities Research & Practice*, *18* (4), 246–254.

I.- TAREAS DESCARTADAS

Como ya comentamos en el Capítulo 3 (apartado 3.4.- diseño del instrumento para recolectar información) diseñamos un conjunto de 9 problemas agrupados en 7 tareas, pero solo fueron entregadas 5 de éstas que son las que hemos analizado en esta investigación. En este apartado mostramos las 2 tareas que descartamos:

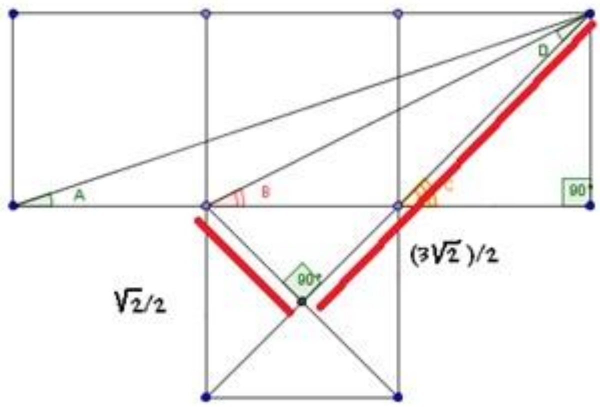
SEXTA TAREA: ÁNGULOS

Tenemos la siguiente figura formada por cuadrados iguales. ¿Puedes demostrar que la SUMA de los ángulos A y B ES IGUAL a la medida del ÁNGULO C? **ESCRIBE TODO LO QUE HAS PENSADO O IMAGINADO PARA LLEGAR A TU RESPUESTA.**



Aunque la tarea original es la que se muestra, pensamos, en un principio, en ayudar a los alumnos colocando un cuadrado igual al resto justo debajo del cuadrado central. Tras atender a las características de nuestra investigación en cuanto al tiempo del que disponíamos para la resolución de las tareas y que esta tarea solo podría ser abordada por los alumnos de 4ºE.S.O. ya que los alumnos de 3ºE.S.O. no disponen de conocimientos trigonométricos por lo que, para evitar tareas distintas en los grupos, se decidió eliminarla de la colección final.

Solución:

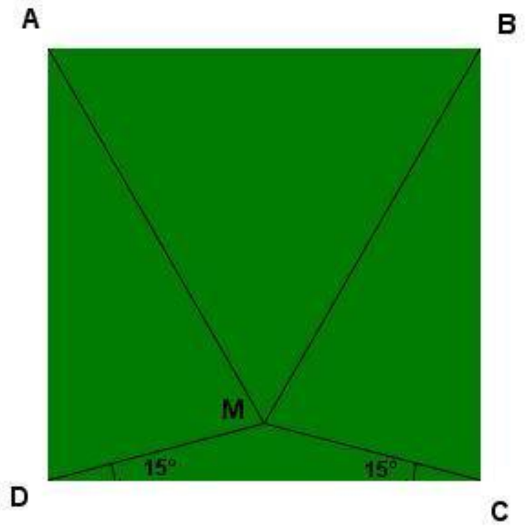


$A = D$

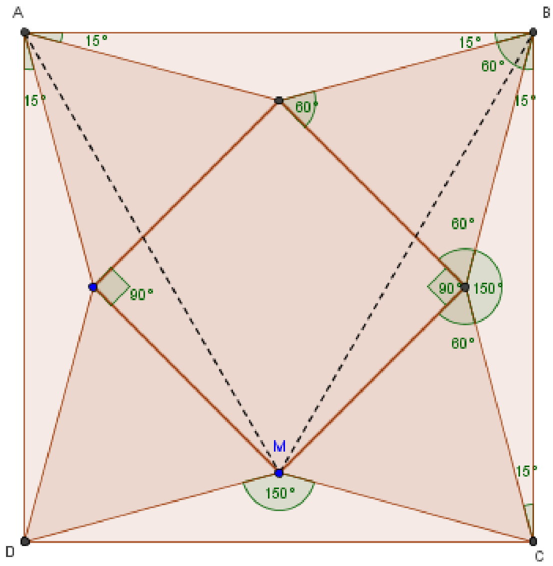
$C = B + D = B + A$

SÉPTIMA TAREA: TRIÁNGULO EQUILÁTERO

¿Es el triángulo AMB equilátero? **ESCRIBE TODO LO QUE HAS PENSADO O IMAGINADO PARA LLEGAR A TU RESPUESTA.**



Solución:



En el caso de esta tarea pese a que solo implica conocimientos básicos como la noción de cuadrado o triángulo equilátero, juntos con el valor de la suma de los ángulos de un triángulo, se decidió prescindir de ella por la posible falta de tiempo para realizarla y el alto grado de imaginación que hay que poner en ella.

II.- TAREAS A REALIZAR POR LOS PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN.

En este apartado mostramos las tareas tal y como fueron presentadas a los alumnos.

III.- RESPUESTAS DE TODOS LOS PARTICIPANTES A LAS TAREAS

En este apartado adjuntamos, en la versión digital, todas las respuestas que dieron los participantes de nuestra investigación a las tareas que les propusimos.