UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Màster en Professor/a d'Educació Secundària

LA SIMULACIÓ I LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES DE PROBABILITAT. ESTUDI SOBRE LA INFLUÈNCIA EN LA PROBABILITAT SUBJECTIVA EN ALUMNES DE 13 I 14 ANYS

Memòria de Treball de Fi de Màster presentada per:

Josep Capella Sanchis

Tutoritzada per:

Dr. Manuel Pedro Huerta Palau

Departament de Didàctica de les matemàtiques

València, 5 de setembre de 2014

Fitxa tècnica:

Màster: Màster en Professor/a d'Educació Secundària per la Universitat de València

Especialitat: Matemàtiques

Autor: Cognoms: Capella Sanchis
Nom: Josep

Títol de la memòria: La simulació i la resolució de problemes de probabilitat. Estudi sobre la influència en la probabilitat subjectiva en alumnes de 13 i 14 anys

Tutor: Cognoms: Huerta Palau
Nom: Manuel Pedro
Departament: Didàctica de les matemàtiques

Data de defensa:

Qualificació:

Paraules clau: Probabilitat, estadística, mètode de resolució de problemes, simulació, didàctica de les matemàtiques, educació secundària.

Palabras clave: Probabilidad, estadística, método de resolución de problemas, simulación, didáctica de las matemáticas, educación secundaria.

Keywords: Probability, statistics, problem solving method, simulation, mathematics education, secondary education.

Codis Unesco 5803.02 (Formació de professors), 12 (Matemàtiques) i 1299 (Didàctica de les Matemàtiques)

Resum: A aquest treball es desenvolupa una investigació sobre el potencial de la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat amb contingut heurístic i les implicacions que té per a l'ensenyament. Al mateix temps s'elabora una unitat didàctica basada en la resolució de problemes de probabilitat per experimentar el mètode amb alumnes de 13 i 14 anys i es mostra com pot contribuir a la formació de l'alumne, en concret amb el judici subjectiu front a situacions d'incertesa i a fer ús d'eines estadístiques per a analitzar un conjunt de dades provinents de la simulació d'un problema.

Resumen: En este trabajo llevamos a cabo una investigación sobre el potencial de la simulación como método de resolución de problemas de probabilidad con contenido heurístico y las implicaciones que tiene para la enseñanza. Al mismo tiempo se elabora una unidad didáctica basada en la resolución de problemas de probabilidad para experimentar el método con alumnos de 13 y 14 años y se muestra cómo puede contribuir a la formación del alumno, en concreto con el juicio subjetivo frente a situaciones de incertidumbre y el uso de herramientas estadísticas para analizar un conjunto de datos provenientes de la simulación de un problema.

Abstract: In this paper we are developing an investigation on the potential of simulation as a solving probability problems method with heuristic content and the implications for teaching. At the same time a teaching unit based probability problem solving it's made to experience the method with children between 13 and 14 years old and shows how it can contribute to the learning of the students, in particular with the subjective judgment in situations of uncertainty and the use of statistical tools to analyze a set of data from the problem simulation.

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

L'estudi de la probabilitat i l'estadística en els cursos d'educació secundària ha estat des de la seua introducció al currículum una de les branques amb menys canvis tot i que s'han fet avanços en l'estudi del què i del com s'ha d'ensenyar. En el present treball es pretén mostrar com unir el món de la resolució de problemes al de la probabilitat i l'estadística a través del que entenem per simulació, que mostrarem al llarg del treball. A més es pretén observar com pot contribuir a millorar les intuïcions dels alumnes sobre la probabilitat, o la seua probabilitat subjectiva, que estudis com els de Kahneman, Slovic i Tversky (1982), Fischbein i Gazit (1984), Fischbein, Nello i Marino (1991) i Shaughnessy (1992) demostren que són insuficients per a enfrontar-se al món de la incertesa al que tota persona s'hi enfronta al llarg de la seua vida, des de coses que poden ser simples com els jocs d'atzar fins a la presa de decisions en situacions de incertesa on la informació pot fer inclinar la balança afavorint unes situacions front a d'altres.

Amb aquest nou estudi es vol donar continuació al que fou el meu Treball de Fi de Grau en Mestre d'Educació Primària (Capella, 2013) en el que ja vaig fer un estudi exploratori sobre l'ús de la simulació com a mètode de resolució de problemes amb estudiants de 6é de primària d'entre 11 i 12 anys. Havent vist que fer ús d'aquesta a l'etapa d'educació primària és possible i, a més, que se'n pot fer ús per ensenyar tot el que apareix al currículum sobre probabilitat i estadística en propostes contextualitzades en la resolució de problemes, sembla coherent provar ara la seua aplicació a l'etapa d'educació secundària. En aquesta ja hi han estudis que posen de manifest la importància de la simulació, tant en publicacions sobre didàctica de l'estadística i la probabilitat com en les directrius curriculars (Ortiz, Batanero i Serrano, 2006), per tant mostrarem que és la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat i provarem que pot ser considerada com a mètode de resolució de problemes de probabilitat amb potencial heurístic.

Al treball mostrarem una proposta d'ensenyament de probabilitat i estadística que emprarem per a obtenir dades, de les quals en farem un posterior anàlisi, sobre la influència de la simulació com a mètode de resolució de problemes sobre la probabilitat subjectiva que presenta l'alumnat de 13 i 14 anys, del segon nivell d'educació secundària. També recollirem informació sobre la importància de l'ús d'ordinadors al procés de simulació per tal d'augmentar-ne ràpidament el nombre d'experiments i que els alumnes puguen aconseguir una panoràmica global del fenomen que s'estudia.

Al treball que ací volem desenvolupar prenem com a àmbit d'estudi 15 alumnes d'entre 13 i 14 anys d'un grup de segon nivell d'educació secundària al centre *Florida Secundària* de Catarroja (València). La elecció del grup atén únicament als motius de distribució del centre en el que he realitzat les pràctiques del màster. Com que no hi ha hagut cap criteri de selecció no es pretén, llavors, que la mostra siga representativa d'una major població.

La memòria del treball que ací es presenta s'ha organitzat en 7 apartats, el primer d'ells és la introducció que ací està arribant al seu fi. Segueix definint quins són els objectius de la investigació present, a l'apartat segon. Al tercer apartat es mostra el marc teòric que dona peu al desenvolupament del present treball. El quart apartat recull les discussions sobre l'elaboració de la unitat didàctica i els resultats de la seua posada en pràctica a l'aula. El cinqué apartat exposa les conclusions que se'n deriven dels resultats de l'experimentació. Hem afegit un sisé apartat amb les consideracions oportunes sobre les implicacions per a l'ensenyament. El treball acaba amb un recull de les referències bibliogràfiques que s'hi ha emprat al llarg del mateix.

2. OBJECTIUS D'INVESTIGACIÓ

Definim els objectius d'investigació del present treball de la següent manera:

1. En primer lloc provar el potencial de la simulació com a mètode de resolució de problemes amb contingut heurístic i formular possibles implicacions que açò pot tenir per a l'ensenyament de la probabilitat i l'estadística a l'educació secundària.
2. D'altra banda es vol veure si l'ús de la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat a les aules de secundària pot contribuir a modificar de cap manera els judicis subjectius dels estudiants en situacions d'incertesa i, a més, a que els alumnes facen un bon ús, estadísticament parlant, d'un conjunt de dades relatives a la simulació d'un problema per tal de donar una solució al mateix (que probablement d'altra manera no podrien haver-ho fet).

Definits els objectius d'aquest treball, es procedeix a mostrar la manera en la que hem tractat d'assolir-los. Així, en primer lloc mostrarem en què ens hem fonamentat per tal de tindre en compte tant les consideracions teòriques sobre la problemàtica formulada (apartat 3) com el disseny experimental en les que basarem els nostres resultats.

3. MARC TEÒRIC

3.1 La simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat

Abans de començar a parlar-ne sobre la simulació, primer caldrà que definim el que entenem com a tal per al desenvolupament d'aquest treball. Huerta (2003) hi fa una classificació dels problemes de probabilitat escolars on mostra tres categories: els problemes d'assignació de probabilitats, els problemes de càlcul de probabilitats i els problemes de simulació. Seguint aquest patró entenem que la simulació d'un problema de probabilitat consisteix en transformar el problema original en un problema que probabilísticament és equivalent al problema original i que, fent servir qualsevol generador d'atzar que simule la situació problemàtica original, la solució del problema simulat siga considerada solució del problema original a través de la Llei dels Grans Nombres (Huerta, 2003).

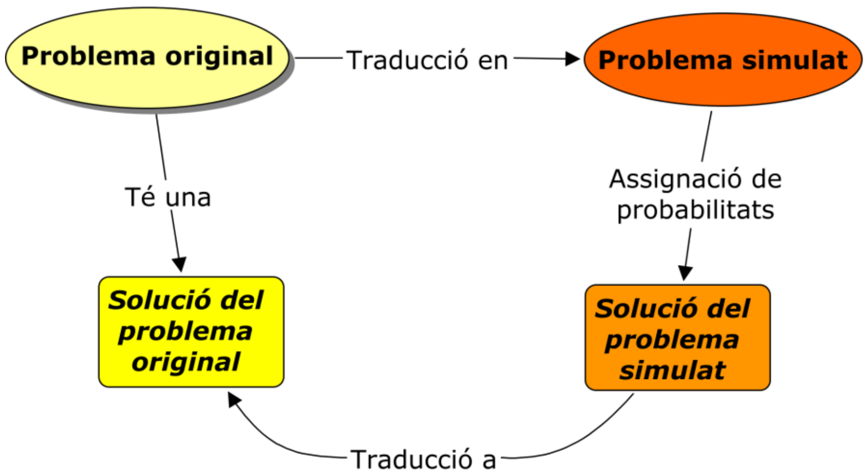


Figura 1. Esquema que representa el procés de simulació d'un problema de probabilitat (Huerta, 2003)

La classe de problemes a que s'aplica aquest mètode és una classe particular de problemes de probabilitat que s'han de portar a l'àmbit escolar. Tenint en compte la definició que dona Puig (1996) del que és un problema escolar de matemàtiques, Huerta i Lonjedo (2004) defineixen un problema escolar de probabilitat com un *problema que situat en un context d'atzar o situació aleatòria o d'incertesa pregunta [...] per la probabilitat d'un succés o esdeveniment subjecte a incertesa*. Els problemes que considerem adequats en aquesta experiència per a explorar el potencial de la simulació com a mètode de resolució són problemes que mostren un procés estocàstic[1], finit o infinit, que es pot matematitzar per una cadena de Markov[2] absorbent (Gordon, 1997) i a més ho fan en un context de matemàtica realista herència de Freudenthal (1977, citat en Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Problemes que no són de l'abast dels estudiants de secundària des d'un punt de vista teòric però que poden tractar-se des d'un punt de vista de la simulació del problema com hem pogut comprovar en treballs anteriors (Capella, 2013).

3.1.1 La simulació com a mètode de resolució amb contingut heurístic

La heurística, en el sentit de Puig (1996), es centra en l'estudi dels modes de comportament al resoldre problemes i els mitjans que s'hi empren en el procés. Al mateix llibre de Puig (1996) es fa una distinció entre eines heurístiques, suggerències heurístiques, destreses amb potencial heurístic i mètodes amb contingut heurístic. Volem veure que la simulació, tal i com l'entenem en aquest treball, pot ser considerada un mètode amb contingut heurístic atenent a la classificació anterior, donat que sent així podrem considerar la simulació com un mètode de resolució de problemes de probabilitat apte per a l'ensenyament a l'educació secundària, degut al contingut heurístic.

Siñeriz y Puig (2006, p. 324) defineixen mètode amb contingut heurístic com un conjunt de regles per a generar problemes a partir del problema que es pretén resoldre fins que s'hi arriba a un o diversos problemes que es consideren elementals, coneguts o ja resolts. Tenint en compte açò, i la definició que hem donat abans de simulació de Huerta (2003), cal assenyalar que la simulació pot ser considerada un mètode amb contingut heurístic donat que s'encarrega de transformar el problema original en altre, una vegada tenim el problema transformat el resolutor ha de disposar dels mitjans necessaris, acudint a eines estadístiques, per tal de obtenir una solució del problema simulat, per tant serà un problema diferent que ja es sap resoldre o que és conegut.

[1] Entenem com a procés estocàstic aquell procés que varia en el temps de forma aleatòria.

[2] Una cadena de Markov és un procés estocàstic discret en que la probabilitat de que ocórrega un fet esta lligada al fet immediatament anterior.

3.1.2 El mètode de simulació d'un problema

En el procés de simulació d'un problema cal començar per tenir un problema que ha de ser resolt, òbviament. Per tal de fer més comprensible aquest apartat empraré el problema de la cova (Huerta, 2002) i mostraré pas a pas el procés de simulació i el paper de cadascú en ella.

L'enunciat d'aquest problema tal i com apareix al document de Huerta (2002) és:

> *Vint-i-set exploradors es troben perduts en una cova de la què en surten 3 camins. Un d'aquests camins porta a l'exterior de la cova en una hora. Els altres dos no tenen eixida, si entren per un d'ells tornaran a la cova en 2 dies i si ho fan per l'altre tornaran en 3 dies.*
>
> *Com que els exploradors no porten cap llum i la cova està obscura i plena d'obstacles, cada vegada que fan un intent per eixir trien a l'atzar un dels tres camins.*
>
> *Si cada explorador sols té menjar per sobreviure durant menys de 6 dies, quants dels 27 exploradors creus que aconseguiran eixir de la cova?*

Tal i com està plantejat el problema ens mostra una situació d'incertesa que no té una solució evident. Front a un problema com aquest el primer que cal fer és transformar-lo en altre equivalent en termes probabilístics, per a aconseguir aquesta equivalència l'espai de probabilitats del problema simulat s'ha de correspondre amb el del problema original (Huerta,2002). En aquest cas, la probabilitat d'escollir qualsevol dels tres camins és idèntica, gràcies a la informació que ens dona el segon paràgraf, i per tant l'espai mostral té tres successos elementals equiprobables. Emprant una notació més comú en termes de probabilitat, siguen:

$E_o := Espai\ mostral\ del\ problema\ original$

$C1 := Camí\ que\ tarda\ 1\ hora\ en\ portar\ a\ l'explorador\ fora\ de\ la\ cova$

$C2 := Camí\ que\ tarda\ 2\ dies\ en\ tornar\ a\ l'explorador\ a\ l'interior\ de\ la\ cova$

$C3 := Camí\ que\ tarda\ 3\ dies\ en\ tornar\ a\ l'explorador\ a\ l'interior\ de\ la\ cova$

Llavors:

$$E_o = \{C1, C2, C3\}\ on\ P(Ci) = \frac{1}{3}, amb\ i = 1, 2, 3$$

Si escollim un dau cúbic com a generador d'atzar per tal de fer la simulació haurem assignar un parell de nombres per a cada camí, de forma que el parell (1,2) els fem correspondre amb el succés C1, el parell (3,4) amb el succés C2 i el parell (5,6) amb el succés C3. D'aquesta forma podem establir una correspondència entre ambdós espais mostrals i les probabilitats dels esdeveniments. Entenem doncs que amb un generador d'atzar, com és el dau cúbic en aquest cas, es pot simular l'elecció a l'atzar de cada camí que en fa un explorador.

Establir aquesta correspondència és tasca del professor, aquest sols ha de fer que els alumnes hi entenguen el procés de simulació, el que passa cada vegada que llancen un dau. Açò no significa que a l'alumne se li done el problema ja transformat, açò no tindria cap sentit ja que es perdria la part essencial del mètode heurístic, la transformació del problema. L'alumne a mesura que observe més traduccions i hi domine millor els diferents generadors d'atzar que puga tindre al seu abast, augmentant les seues destreses heurístiques (Puig, 1996), podrà arribar a dominar el mètode.

Una vegada establerta la correspondència entre el problema original i el problema simulat, l'alumne haurà d'emprar el generador d'atzar per tal de simular l'experiència i anar recollint les dades. La dificultat que es presenta en aquest punt és esbrinar quan s'ha de detindre el procés de simulació, és a dir, quantes simulacions son necessàries per donar la solució del problema. Tal i com es troba plantejat el problema sols s'ha de repetir l'experiència per a 27 exploradors, però si el problema no ho limita de cap manera i volem respondre al problema en termes de probabilitat, tal i com diu la llei dels grans nombres, a mesura que n'augmentem el nombre de simulacions augmenta la probabilitat d'obtenir una major precisió en la probabilitat preguntada. Més endavant entrarem a aquesta qüestió amb més detall i veurem quines implicacions té en l'educació.

Quan s'han recollit les dades que es consideren oportunes el problema s'ha convertit en un problema estadístic de tractament de dades, és el moment d'emprar l'estadística, i si es vol calcular la probabilitat d'un esdeveniment serà necessari emprar el significat de la probabilitat a posteriori o experimental i obtenir-la amb les dades disponibles, sols caldrà doncs posar en relació el nombre d'experiments favorables amb el nombre total d'experiments, el que anomenem freqüència relativa. Açò permet a l'alumne l'accés al concepte de la probabilitat experimental, cosa que també discutirem més endavant. No obstant, també es poden emprar mesures de centralització per tal de donar resposta a preguntes com la del problema, en aquest cas el que es demana és un valor esperat, en el sentit matemàtic de l'esperança matemàtica.

3.2 La simulació com a context per a l'ensenyament dels conceptes relacionats amb la probabilitat i l'estadística. Els diferents rols del professor, l'estudiant i el contingut

Tal i com s'ha explicat a l'apartat anterior, es pot observar el caràcter epistèmic de la simulació donat que el mètode en si mateix pretén que l'alumne aprenga a resoldre problemes de probabilitat al temps que contribueix al desenvolupament de destreses i coneixements relacionats amb les matemàtiques, més concretament amb la probabilitat i l'estadística. Anem llavors a analitzar quins son els conceptes que entren en joc.

3.2.1 Significats de la probabilitat

La probabilitat d'un esdeveniment és una mesura del nivell de certesa que té d'ocórrer o no el mateix, però aquesta mesura es pot donar de tres formes diferents, atenent a qui mesura i com, parlem llavors de les tres concepcions de la probabilitat: subjectiva, teòrica i experimental.

La probabilitat subjectiva és la que una persona tracta d'oferir quan se li pregunta com de fàcil o difícil és que ocórrega un cert esdeveniment. Aquesta concepció té un caràcter ingenu, tothom pot donar una resposta subjectiva d'aquest tipus, del grau de certesa d'un esdeveniment. En segon lloc podem dir que no ofereix una precisió molt elevada emprant, però a la fi, aquesta és la concepció que l'home empra dia a dia, normalment no ens detenim a fer càlculs per esbrinar aquesta mesura emprant altres concepcions, o inclús no se'n poden fer de càlculs. Però aquesta concepció de la probabilitat, ingènua a priori, pot ser entrenada mitjançant l'ús de les altres concepcions.

Si parlem de la concepció teòrica o laplaciana, s'interpreta la probabilitat com una mesura exacta, resultat de dividir els casos favorables entre tots els casos possibles quan ens trobem en un espai amb un nombre determinat de successos elementals equiprobables. Aquesta és la concepció que tradicionalment s'explica als manuals escolars, on generalment s'usa l'aproximació freqüentista per a justificar-la. Malgrat la simplicitat del seu funcionament però, te un inconvenient, hi ha situacions en les que aquest càlcul no es pot dur a terme o fins i tot l'equiprobabilitat dels resultats elementals sobre la que es sustenta pot ser discutida.

Pensem en quina és la probabilitat de ser atacat per un tauró en entrar a nadar a la platja, ací al Mediterrani. Difícilment, si no impossible, podrem establir un espai mostral format per esdeveniments equiprobables i òbviament no podrem fer ningun càlcul. Algú poc instruït en probabilitat diria que hi ha dos esdeveniments, ser atacat o no ser atacat, donat que no tenim cap informació hem de pensar que aquests són equiprobables, però la experiència ens diu que aquesta idea no pot ser correcta o pel contrari ningú no aniria a nadar a la platja. Per rebatre-la ens hem de fixar llavors en la concepció freqüentista o experimental de la probabilitat.

3.2.2 La probabilitat experimental. Llei dels grans nombres

Des que Bernoulli va demostrar la coneguda Llei dels grans nombres que explica la convergència d'un seguit de freqüències cap a la seua probabilitat (Henry, 1999) han començat a aparèixer definicions de la probabilitat experimental que fan veure que aquesta s'ha d'entendre com un límit, Renyi (1966, p. 26, citat en Henry, 1999, p. 18) així ho mostra en dir "si la freqüència relativa d'un esdeveniment aleatori oscil·la al voltant d'un nombre concret, aquest nombre serà la probabilitat de l'esdeveniment considerat". És llavors gràcies al teorema de Bernoulli que podem parlar d'una concepció experimental o freqüentista de la probabilitat, sent aquesta com he dit abans el límit de les freqüències relatives a mesura que n'augmentem el nombre d'experiments.

Aquesta concepció de la probabilitat, per contra a l'anterior, la teòrica, ens permet donar resposta a la pregunta de quina és la probabilitat de ser atacat per un tauró a la platja, sols cal trobar algun registre on tingam la informació del nombre total d'atacs de tauró a les platges del mediterrani i posar-lo en relació amb el total de banyistes que deuen haver entrat a l'aigua des que es té aquest registre. No tinc aquestes dades ara mateixa, i supose que el nombre total de banyistes s'hauria d'estimar, però en qualsevol cas n'estic segur que la probabilitat que resultaria de fer aquest quocient seria molt més menuda que l'equiprobabilitat que donàvem emprant la concepció teòrica.

Aquest tipus de concepció de la probabilitat s'aplica al càlcul de probabilitats d'esdeveniments com aquest dels quals podem dir que no hi ha una solució teòrica o bé és impossible calcular-la. Avui en dia hi ha moltes universitats i empreses privades que dediquen grans recursos a la investigació emprant la simulació a través de superordinadors, des de calcular llocs més probables de ruptura d'una estructura com un edifici o un pont fins a calcular el preu de cost esperat de l'assegurança d'un vehicle. L'ús dels superordinadors es fa imprescindible perquè el nombre de simulacions que cal fer, així com el nombre de càlculs de cada simulació, pot arribar a ser descomunal donat la precisió i la fiabilitat que s'exigeix al resultat.

3.2.3 Nombre de simulacions per a una mesura fiable.

Per tal d'ampliar la informació de l'apartat anterior i donar-li un caràcter més matemàtic a aquest assumpte s'ha consultat el llibre de De Groot (1975, p. 185) on es pot trobar la següent informació.

En la seua versió feble, la llei dels grans nombres diu que *probablement, l'error que comentem quan assignem la freqüència relativa a un esdeveniment, en lloc de la seua probabilitat teòrica, és cada vegada menor si el nombre de simulacions és cada vegada major*. El teorema fa referència a un experiment amb dos resultats possibles, 0 i 1, establint que:

Si p és la probabilitat d'obtenir un 1, amb $0 < p < 1$, i $\frac{H_n}{n}$ és la freqüència relativa teòrica del 1, en n assajos independents, tenim que:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists n_0 : P\left(\left|\frac{H_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \eta, \forall n \geq n_0$$

Allò que s'afirma en el teorema de Bernoulli és que hi ha una probabilitat molt alta que les freqüències relatives en un experiment estocàstic arribaran a ser tan pròximes a la probabilitat com es desitge, sempre i quan el nombre d'assajos augmente.

Al mateix temps, tenim tres quantitats variables al teorema:

1. La precisió amb la que s'assegura la proposició, mesurada per ε.
2. La certesa amb la que es sosté la proposició, mesurada per η.
3. El nombre d'assajos necessaris, donat per n_0.

Aquestos tres paràmetres són mútuament dependents l'un de l'altre, de tal manera que és possible fixar-ne dos i després calcular el tercer. La relació que ens permet aquest càlcul ve donada per:

$$n_0 = \frac{p(1-p)}{(1-\eta)\varepsilon^2}$$

Demostració:

Siga A un esdeveniment amb probabilitat $P(A) = p$. Suposem n assajos independents de l'experiment que només té dos resultats possibles: es verifica A o no es verifica A. Siga n_A la freqüència absoluta amb la que ocorre l'esdeveniment A i $f_A = \frac{n_A}{n}$ la freqüència relativa associada. La variable aleatòria nombre de vegades que ocorre A en les n repeticions es distribueix segons una binomial $Bi(n, p)$. Llavors sabem que $E(n_A) = np$ i que $Var(n_A) = np(1-p)$. Tenim que:

$$E(f_A) = \frac{1}{n}E(n_A) = \frac{1}{n}np = p$$

$$Var\ (f_A) = \frac{1}{n^2}Var(n_A) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Agafem la desigualtat de Chebyschev en la versió:

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

on substituint $X = f_A$, obtenim que:

$$P(|f_A - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = \eta$$

Aleshores, fent les manipulacions algebraiques pertinents:

$$1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = \eta \Rightarrow 1 - \eta = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \Rightarrow n(1-\eta) = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \Rightarrow n = \frac{p(1-p)}{(1-\eta)\varepsilon^2}$$

Per tant, aplicant la llei dels grans nombres, fixats un η i un ε podem determinar un n_0 a partir del qual es compleix:

$$P\left(\left|\frac{H_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \eta, \forall n \geq n_0$$

3.2.4 Implicacions didàctiques. Ús d'ordinadors a l'aula

Si analitzem la funció que hem presentat a l'apartat anterior, una vegada fixats l'error i la fiabilitat el nombre de simulacions dependrà únicament de la probabilitat de l'esdeveniment. En els problemes en que aquesta es puga calcular de manera teòrica podrem emprar-la per a calcular aquest nombre de simulacions, però hi haurà d'altres en que la probabilitat teòrica no es podrà calcular o el seu càlcul pot ser massa complicat. En aquestos casos, si analitzem la funció vegem que es tracta d'una funció quadràtica que presenta un màxim per a $p = \frac{1}{2}$, això vol dir que, sent desconeguda la probabilitat el nombre màxim de simulacions que caldran depenent dels paràmetres escollits sempre es donarà per al valor de $p = \frac{1}{2}$. Si fixem els paràmetres de l'error $\varepsilon = 0{,}01$ i la certesa $\eta = 0{,}95$ trobem que 50.000 simulacions seran suficients.

Pareix que aquest valor és massa alt per a reproduir-lo a classe amb un dau, llapis i paper, llavors hem de plantejar l'ús de ordinadors per tal de fer créixer ràpidament el nombre de simulacions que es poden fer a l'aula. Segons destaca Yáñez (2002), la simulació per ordenador té característiques importants per a la seua aplicació a l'aula com són:

- Permet superar la falta d'experiència que els estudiants tenen sobre experiments aleatoris, proporcionant representacions de fenòmens reals i augmentant el nombre de repeticions en un curt període de temps. (Biehler, 1991, p. 170, citat en Yáñez, 2002, p. 1)

- Resoldre problemes emprant simulació per ordinador augmenta el nombre de problemes i situacions realistes que són accessibles per a les activitats dels estudiants superant l'espai entre el concepte i l'eina. (Yáñez, 2002, p. 1)

Tot i que hi ha molts avantatges documentats sobre l'ús de la simulació per ordinador a l'aula, les característiques del grup classe objecte d'estudi i del propi centre no m'han permés dissenyar cap activitat en la que els alumnes tinguen contacte amb l'ordinador. Per poder apropar-me d'alguna manera als avantatges que proporciona la resolució mitjançant l'ordinador vaig haver de fer jo mateix la simulació de la proposta principal, tal i com mostraré més endavant, i proporciona-li a l'alumnat gràfics i taules que resumeixen la informació obtesa amb 50.000 simulacions.

4. LA SIMULACIÓ EN L'AULA. UNA EXPERIÈNCIA DIDÀCTICA AMB ALUMNES DE 13 A 14 ANYS, 2N NIVELL D'EDUCACIÓ SECUNDÀRIA.

Per tal de dur a terme l'estudi ha sigut necessari desenvolupar una unitat didàctica que s'ha dut a l'aula de secundaria, amb l'objectiu de recollir informació sobre els coneixements previs dels estudiants i els resultats posteriors a la intervenció a l'aula. Aquesta unitat s'estructura en un total de tres propostes, cadascuna d'elles naix de la lectura i desenvolupament d'un problema de probabilitat amb una resolució teòrica fora de l'abast dels alumnes i que porta per títol el nom del problema que l'origina. Partint d'aquestos problemes farem la resta de la proposta emprant les idees de Polya (1973) sobre la resolució de problemes i les eines de probabilitat i estadística adequades al nivell tal i com diu el currículum d'educació secundària.

4.1 Descripció del grup d'estudi

El grup d'estudiants que ha sigut objecte d'estudi és un grup natural que forma part d'un dels quatre grups de 2n nivell d'educació secundària del centre Florida Educació Secundària de Catarroja. A l'aula hi ha un total de 23 alumnes, 4 d'aquests no pogueren formar part de la mostra perquè eren alumnes amb alguna necessitat educativa especial que havien d'acudir a algunes sessions d'atenció especial en l'horari de classe. Del total d'alumnes que començaren a participar a l'estudi (19 alumnes) altres 4 van perdre alguna o diverses classes i van ser eliminats de la mostra deixant al final 15 estudiants. D'aquests 15 alumnes que formen el grup d'estudi, 2 formaven part d'un grup de preparació per a l'olimpíada matemàtica, altres 2 es trobaven en situació d'observació perquè estaven proposats per a repetir curs, la resta d'alumnes podem dir que pertany a una mostra normal de l'edat.

El professorat del centre està una mica preocupat pel comportament de tots els estudiants d'aquest nivell, es troben en una edat en que comencen a eixir de festa i relacionar-se i perden molt de temps a l'aula parlant de temes no pertinents a la seua educació. Com a solució el professorat ha decidit separar tots els alumnes i seure-los de manera individual a l'aula.

Altre inconvenient del grup d'estudi és la data en la que es va dur a terme l'experimentació. Durant els primers dies de març les festes de les falles estaven pròximes i tenien a l'alumnat encara més desficiós, perdien temps a l'aula parlant del cap de setmana.

4.2 Objectius didàctics

Per a establir els objectius de la unitat cal recordar quins eren els objectius del treball, la unitat ha de servir per observar com pot el mètode de la simulació contribuir d'alguna manera a millorar la probabilitat subjectiva dels alumnes, però d'altra banda ha de cobrir altres objectius corresponents a l'aprenentatge de l'alumnat sobre probabilitat i estadística.

L'objectiu de la unitat és mostrar als alumnes una nova eina per a treballar la resolució de problemes de probabilitat que empra, en el procés de resolució, els continguts d'estadística que han estat treballant els alumnes amb anterioritat. D'aquesta manera es pretén que els alumnes afiancen el que ja saben d'estadística al haver d'utilitzar els seus coneixements en un context de resolució de problemes i haver de fer-ho sobre conjunts de dades que ells mateixos han produït i que, per tant, són més significatius.

En el desenvolupament de la unitat es persegueix intervenir en els conceptes d'esperança matemàtica i de la Llei dels Grans Nombres per tal d'aconseguir una millora en les concepcions subjectives prèvies dels alumnes al enfrontar-se a situacions d'incertesa, com ara bé els problemes de probabilitat que es proposen.

4.3 Plantejaments metodològics

La proposta de l'estudi l'hem estructurat en tres parts diferenciades que s'han repartit convenientment entre les 5 sessions en que es va fer l'experimentació, entre el 6 i el 14 de març.

La primera sessió es va separar en dues parts, es va passar el pretest, el problema de la cova, durant els primers 30 minuts de la classe, en forma de prova individual, amb la intenció de recollir la informació prèvia dels estudiants i fer-los posar de manifest tot allò que ja saben per l'aplicació en el futur de la proposta. Durant la realització de la prova els alumnes han de sentir com que estan seguent avaluats d'aquells coneixements que han estat adquirint durant tota la seua etapa formativa prèvia. El temps restant es dedicà a organitzar els grups en que s'han de seure les properes classes i a introduir el problema de la proposta principal. Per al desenvolupament d'aquesta part es dividirà la classe en grups de 4 o 5 alumnes que treballaran cooperativament durant totes les sessions de la segon proposta, assignant dins de cada grup un paper a dos alumnes que són el portaveu, que serà qui s'encarregue de dirigir el debat del propi grup, i el secretari, que serà qui decideix què anotar de tot el que es va dient a la taula. Aquests dos càrrecs han estat pensats per mantenir l'organització interna del grup, donant responsabilitat a alguns membres s'espera que no hi hagen moltes distraccions i es centren més amb la tasca proposada.

A la segona sessió començà la segona proposta, la més extensa, el problema dels pastissets, on els alumnes hagueren de treballar en grup. Tot i els inconvenients del comportament dels estudiants he decidit emprar metodologia grupal perquè pense que d'esta manera l'alumne pot produir un aprenentatge més significatiu a través de la discussió entre iguals. Aquesta proposta començà en repartir a cada grup un full amb el guió de la proposta principal i se'ls va demanar que durant les 3 properes sessions entregaren un document que responga en grup a tot el que es planteja. Les respostes han de ser debatudes i consensuades pel grup ja que tracten de donar solució a un problema que ha estat estructurat amb una sèrie d'interrogants que faran a l'alumne evolucionar en la seua reflexió sobre els conceptes que s'hi treballen. A l'aula estàvem la tutora i jo per anar passant pels grups amb l'objectiu d'orientar i corregir els estudiants per guiar-los adequadament.

Abans d'acabar la quarta sessió, quan ja tots han entregat el treball, es va fer una correcció en gran grup de la tasca plantejada per deixar que surten les idees de cada grup al grup gran i veure de nou interacció en un debat, esta vegada, moderat per el professor.

L'última sessió la dedicaran a completar la prova final, la trampa del Doofenshmirtz, amb una estructura matemàtica isomorfa a la del pretest per tal de poder avaluar els resultats dels alumnes i de la pròpia unitat per als objectius que es perseguien. Es tracta d'un problema inspirat en una sèrie de dibuixos de la que tots els alumnes han sentit parlar que oculta un procés estocàstic infinit que es matematitza mitjançant una cadena de Markov absorbent idèntica a la del problema del pretest. Aquest també serà de manera individual i ocuparan la primera mitja hora de la classe. El final de la classe el va aprofitar la tutora per a altres propòsits.

4.4 Solució dels problemes i presa de decisions en la proposta

4.4.1 El problema de la cova

El problema de la cova[3] que hem portat a l'aula per tal de fer el pretest ha sofert una transformació per tal de fer-lo apte per a l'experimentació. Cal tenir en compte que aquest problema va a ser presentat a un grup d'estudiants que mai no ha tingut cap contacte amb el mètode de simulació i volem veure com es desenvolupen en tractar d'interpretar el problema que se'ls hi planteja així com en interpretar les dades referents a diverses simulacions del mateix. Per aquest motiu cal que l'enunciat del problema que se'ls hi presenta facilite la comprensió del problema a l'alumnat tant com siga possible.

S'ha eliminat de l'enunciat original la proposta dels 27 exploradors i ha sigut substituït fent al propi alumne protagonista del problema, per tal d'afavorir el seu nivell d'implicació, també se'ls hi ha proporcionat un dibuix que pretén mostrar l'estructura de la cova amb la finalitat que l'alumne comprenga on es troba. Al final de l'enunciat s'ha modificat la informació que se'ls hi proporciona sobre el temps que poden sobreviure passant de ser menys de 6 dies a 5 dies i 1 hora, aquest canvi s'ha fet per evitar que l'alumne puga cometre un error en la interpretació del temps, però no implica ningun canvi en el problema donat que és impossible aconseguir eixir de la cova en més de 5 dies i 1 hora però en menys de 6, no hi ha cap combinació que ho permeta.

En limitar el temps que hom té per tractar d'aconseguir eixir de la cova s'aconsegueix que sols es puga fer un màxim de 3 intents, donat que en el cas de no haver aconseguit eixir al tercer intent has d'haver emprat un mínim de 2 dies a cadascun i ja s'hauria esgotat el menjar. Sabent que son 3 el nombre màxim d'intents

[3] L'enunciat original es pot trobar a l'apartat 3.1.2 d'aquest treball

es fa possible resoldre aquest problema estudiant totes les combinacions possibles. Podem trobar diverses formes de resoldre aquest problema de forma teòrica al document de Huerta (2002) o al de Capella (2013).

Per calcular quina és la probabilitat d'eixir de la cova abans no s'esgote el temps establert ho podem fer de la següent manera, de tots els intents que fem per eixir de la cova en un terç s'espera eixir al primer intent triant el camí 1, els altres $\frac{2}{3}$ estarem a l'interior de la cova havent triat els camins 2 i 3 respectivament. Quan fem el segon intent eixirem en $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ i per tant quedarem a dintre en $\frac{4}{9}$, però cap la possibilitat d'haver agafat dues vegades el camí de 3 dies havent esgotat tot el temps per tant sols en $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ de les vegades farem un tercer intent per eixir. Al tercer intent eixirem en $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Si fem un recompte, haurem aconseguit eixir de la cova en $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$ dels intents, és a dir, la probabilitat d'eixir de la cova abans no s'esgote el menjar és de $\frac{2}{3}$. Caldrà tindre en compte aquest resultat al analitzar les respostes dels alumnes.

En quant al disseny del pretest, una vegada es mostra l'enunciat del problema es van formulant preguntes amb l'objectiu de recollir informació de l'alumne. Primer li preguntem com de fàcil pensa que és eixir de la cova, concepció de la probabilitat subjectiva. Cal recordar que l'objectiu principal de la proposta és la recollida d'informació i per tant es fa imprescindible demanar a l'alumne les explicacions que considere oportunes, per això demanem un per què al final de cada pregunta. La segon pregunta és per a que l'alumne reflexione sobre la possibilitat de que s'esgote el menjar sense haver aconseguit eixir de la cova contribuint a la comprensió de l'enunciat. La tercera pregunta obliga a l'alumne a considerar les probabilitats de triar cada camí, aquesta també serveix per a que l'alumne comprenga millor la situació de l'enunciat en termes de probabilitat. Després d'haver introduït una mica millor a l'alumne en termes de probabilitat amb la situació del problema es planteja una quarta pregunta que demana una esperança, una vegada més emprant termes de probabilitat subjectiva.

Després d'esta pregunta s'introdueix una nova situació que serà pretext per a poder preguntar a l'alumne com l'anàlisi de la informació pot influir en la presa de decisions.

A l'enunciat modificat s'hi indica que el protagonista ha entrat a la cova raptat per uns bandolers, en aquest punt es diu que els bandolers han recollit informació de 15 víctimes i d'aquesta forma es pot presentar organitzada en una taula la informació de 15 simulacions i a continuació una taula de freqüències que resumeix aquesta mateixa informació. Les simulacions s'han obtés de la solució emprant el mètode de simulació amb programari informàtic.

Per poder fer la simulació hem programat un full de càlcul en el que, per a cada simulació, es genera un nombre aleatori entre 1 i 3, que representarà respectivament els camins d'1 hora, 2 dies i 3 dies, per al primer intent d'eixir de la cova, als posteriors es fa el mateix sempre que el camí triat a l'intent anterior no fora l'1, en aquest cas el full torna el valor 0. Així doncs, es verifica la correspondència entre el problema original i el simulat donat que ambdós tenen el mateix espai mostral i els successos elementals són equiprobables.

Victima	Camí triat al 1r intent	Camí triat al 2n intent	Camí triat al 3r intent
1	=ALEATORIO.ENTRE(1;3)	=SI($B2=1;0;ALEATORIO.ENTRE(1;3))	=SI($B2=1;0;SI($C2=1;0;ALEATORIO.ENTRE(1;3)))

Figura 2. Mostra de la programació del full de càlcul per a simular el problema de la cova

A continuació fa un recompte del total de temps emprat per fer el camí que servirà per calcular el temps mitjà emprat per eixir de la cova. També hi indica ens quins casos s'aconsegueix eixir de la cova i en quins no que servirà per a calcular la probabilitat experimental d'eixir de la cova.

El nombre de simulacions necessaris, seguint allò que hem comentat a l'apartat 3.2.3 i sabent que la probabilitat $p = \frac{2}{3}$, la precisió mesurada per $\varepsilon = 0{,}01$ i la certesa mesurada per $\eta = 0{,}95$, respon a aquesta fórmula:

$$n \geq \frac{p(1-p)}{(1-\eta)\varepsilon^2} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{0{,}05 \cdot 0{,}01^2} = 44.444{,}44$$

És a dir, ens valdria amb 44.445 simulacions. A continuació es mostra una xicoteta captura de les 15 primeres simulacions a la fulla de càlcul emprada amb els resultats. La probabilitat experimental d'eixir de la cova abans no s'esgote el menjar obtinguda a la simulació és $\frac{29701}{44445}$, un valor molt pròxim al resultat teòric. Si calculem l'error relatiu comes en el càlcul vegem que efectivament és menor del que exigíem en triar el nombre de simulacions:

$$\frac{\left|\frac{2}{3}-\frac{29701}{44445}\right|}{\frac{2}{3}} \cong 0{,}00239 < 0{,}01$$

Victima	Camí triat al 1r intent	Camí triat al 2n intent	Camí triat al 3r intent	**Han eixit**	**29701**	44445	67%
1	2	3	2	Després de 7 dies no ha aconseguit eixir de la cova			
2	2	2	1	Ha eixit de la cova en 4 dies i 1 hora			
3	2	2	2	Després de 6 dies no ha aconseguit eixir de la cova			
4	2	3	2	Després de 7 dies no ha aconseguit eixir de la cova			
5	2	2	1	Ha eixit de la cova en 4 dies i 1 hora			
6	2	3	1	Ha eixit de la cova en 5 dies i 1 hora			
7	1	0	0	Ha eixit de la cova en 1 hora			
8	3	2	1	Ha eixit de la cova en 5 dies i 1 hora			
9	2	1	0	Ha eixit de la cova en 2 dies i 1 hora			
10	1	0	0	Ha eixit de la cova en 1 hora			
11	1	0	0	Ha eixit de la cova en 1 hora			
12	3	2	1	Ha eixit de la cova en 5 dies i 1 hora			
13	2	3	1	Ha eixit de la cova en 5 dies i 1 hora			
14	1	0	0	Ha eixit de la cova en 1 hora			
15	3	1	0	Ha eixit de la cova en 3 dies i 1 hora			

Figura 3. Mostra d'una simulació del problema de la cova emprant un full de càlcul

Anem a veure ara la evolució de la probabilitat experimental a mesura que augmenta el nombre de simulacions.

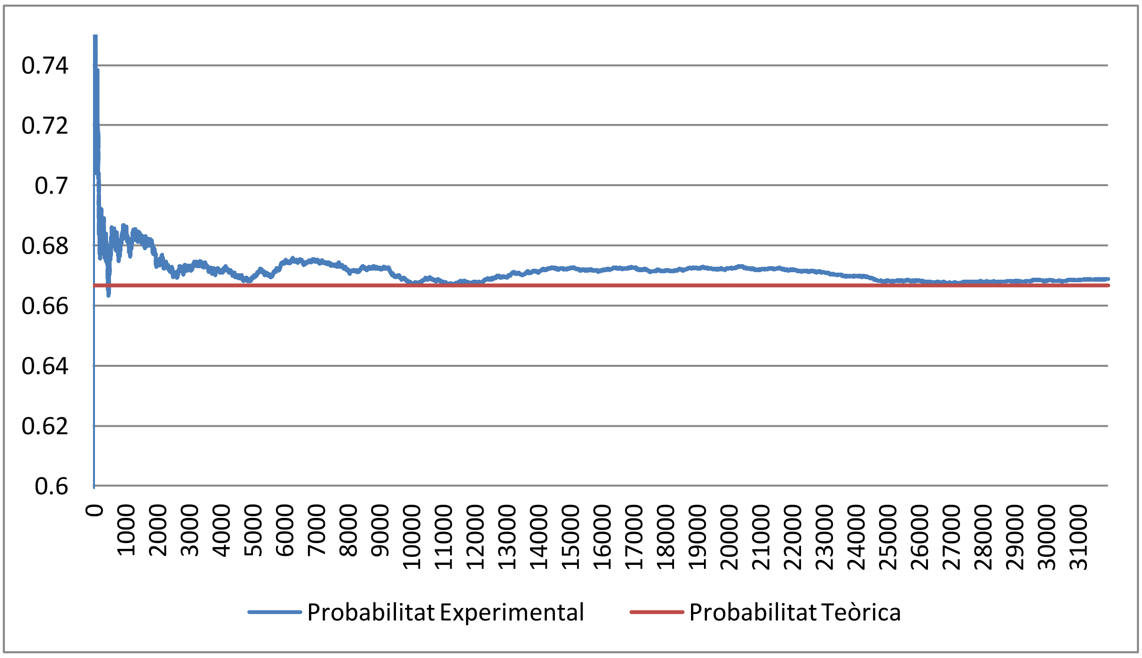


Figura 4. Gràfic que mostra l'evolució de la probabilitat experimental front a la teòrica a mesura que augmenta el nombre de simulacions en el problema de la cova

A aquest últim gràfic es pot veure com a mesura que augmenta el nombre de simulacions la probabilitat experimental s'apropa més a la teòrica, una forma molt gràfica d'observar la llei dels grans nombres.

Ara que l'alumne té al davant nova informació sobre el problema s'hi formulen noves preguntes. Es demana ara la probabilitat d'eixir de la cova a la vista dels resultats, a més es demana mesurar-ho i s'espera que ho facen emprant la freqüència relativa, concepció freqüentista o experimental de la probabilitat. A la sisena pregunta es demana de nou una esperança matemàtica, aquesta vegada sobre la variable aleatòria temps emprat en sortir de la cova, s'espera ací que els alumnes empren la mitjana aritmètica. La última pregunta pretén recollir informació sobre com la informació sobre un determinat fet pot afectar a la presa de decisions de l'alumne, es demana que es pose en el lloc d'un bandoler i que decideixca com actuaria aquest després d'analitzar els resultats.

4.4.2 El problema dels pastissets

Per a la proposta principal s'ha emprat una versió d'un problema que apareix a un document de Huerta (2013), el problema dels ganxets, tal i com apareix al document el problema diu:

> *Dins de cada paquet de "gusanitos" ens trobem amb una tortuga Ninja de regal. La col·lecció completa la formen 7 tortugues Ninja. Quants paquets de "gusanitos" esperes que hauràs de comprar per tal d'aconseguir la col·lecció completa?*

Aquest problema ha sigut modificat i adaptat per presentar-lo a l'aula, primerament s'ha canviat el terme "gusanitos" per pastisset, per això ha passat a dir-se el problema dels pastissets, també han sigut eliminades les tortugues ninja i canviades per cromos. Aquestes decisions no tenen a veure amb les matemàtiques, són més be de caràcter semàntic i són oportunes per a facilitar la comprensió donat que el terme "gusanitos" no és adequat en un context escolar i el nombre de tortugues ninja era 4, per tant demanar una col·lecció amb un nombre superior a 4 de segur que alçaria aldarull a l'aula.

S'ha introduït com a protagonista del problema de nou a l'alumne, i com a pretext és un empresari qui llança la promoció i en un futur ens valdrà per a formular una pregunta on farem a l'alumne ocupar el lloc d'aquest.

S'ha limitat el nombre de pastissets que es poden comprar a 12, per tal que el procés de la simulació que faran els alumnes a l'aula no es perllongue massa, i s'ha reduït el nombre d'elements de la col·lecció a 6 per dos motius, el primer és que d'aquesta manera podem emprar un dau cúbic com a generador d'atzar per a que els alumnes facen la simulació a l'aula, el dau és un recurs fàcil de trobar i d'emprar pels alumnes, el segon motiu és que en reduir la grandària de la col·lecció aconseguim baixar el nombre de pastissets esperat per tal de completar-la fent molt més fàcil que aquesta puga ser completada en els 12 pastissets de que es disposa. Amb els canvis el problema queda així:

> *Un empresari, directiu d'una coneguda marca de pastissets, pensa una manera de promocionar la seua marca. Decideix regalar junt a cada paquet un cromo d'una col·lecció de 6 diferents.*
>
> *Cada paquet porta de segur un dels 6 cromos possibles però no hi ha cap manera de saber quin és el que porta i, a més, cap persona que coneixes s'ha interessat per la col·lecció ni compra aquesta marca de pastissets.*
>
> *A tu t'encanta la col·lecció que ofereix i vols completar-la tota. La promoció sols va a durar 4 setmanes i els teus pares sols et deixen menjar 3 pastissets a la setmana.*

Aquest problema pot ser representat per una cadena de Markov, que serà absorbent si no ens fixem en la limitació del nombre de pastissets que es poden comprar. Podem dibuixar el graf associat a la cadena si definim els estats de transició[4]. Podem distingir que en aquest problema hi ha 7 estats diferents que definirem de la següent forma:

E_0 = Tindre 0 cromos.	E_2 = Tindre 2 cromos.	E_4 = Tindre 4 cromos.	E_6 = Tindre 6 cromos.
E_1 = Tindre 1 cromo.	E_3 = Tindre 3 cromos.	E_5 = Tindre 5 cromos.	

[4] Estat que pot donar-se en algun moment degut al procés estocàstic

Emprant aquesta informació podem crear el següent graf associat al procés estocàstic que amaga el problema:

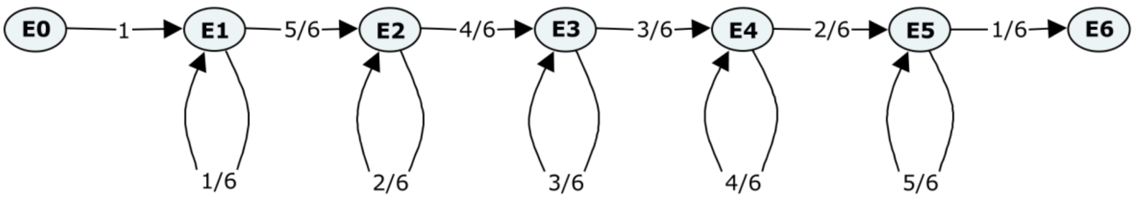


Figura 5. Graf associat al problema dels pastissets

Tal i com està dissenyat el problema, al ser representat per una cadena de Markov absorbent, la probabilitat d'arribar a l'E_6 és 1, sempre que puguen comprar-se suficients paquets. Però si volem calcular el nombre de paquets que caldran per completar-la això és altra cosa, podem emprar les regles del valor mitjà (Engel, 1975). Aquestes regles es poden resumir interpretant que el nombre esperat de moviments que calen per a arribar d'un estat fins a l'absorbent sempre serà 1 més el producte de la probabilitat de moure'ns a cadascun dels estats contigus pel nombre de moviments esperat que calen des de cadascun d'aquests estats. Així doncs, anomenem m_i al nombre de moviments esperat que calen per arribar des de l'E_i fins a l'E_6, convenim llavors que el nombre de moviments que calen per anar de l'E_6 al final és 0 donat que ja s'ha arribat i per tant $m_6=0$ i les equacions que determinen el nombre de moviments esperat (m_0) amb l'adaptació corresponent quedaran així:

$$m_5 = 1 + \frac{1}{6}m_6 + \frac{5}{6}m_5 \rightarrow m_5 = 6$$

$$m_4 = 1 + \frac{2}{6}m_5 + \frac{4}{6}m_4 \rightarrow m_4 = 9$$

$$m_3 = 1 + \frac{3}{6}m_4 + \frac{3}{6}m_3 \rightarrow m_3 = 11$$

$$m_2 = 1 + \frac{4}{6}m_3 + \frac{2}{6}m_2 \rightarrow m_2 = \frac{25}{2}$$

$$m_1 = 1 + \frac{5}{6}m_2 + \frac{1}{6}m_1 \rightarrow m_1 = \frac{137}{10}$$

$$m_0 = 1 + m_1 \rightarrow m_0 = \frac{147}{10} = 14{,}7$$

Així doncs, cada vegada que es fa un intent per completar la col·lecció s'espera que siguen necessaris 14,7 pastissets, 15 donat que no es pot comprar una fracció de pastís. Això implica que, en limitar a 12 el nombre de pastissets que es poden comprar, estem dificultant una mica que es puga completar la col·lecció. Fer els càlculs exactes amb la limitació de 12 paquets implica considerar un procés estocàstic finit i escapa als coneixements de que dispose a l'hora de redactar aquest treball, però gràcies a la simulació puc donar una resposta tant precisa com vulga al problema.

Per poder fer la simulació emprant un full de càlcul cal establir la correspondència entre el problema original i el simulat. Al full demanarem que done nombres aleatoris de l'1 al 6 de forma que cadascun d'aquests nombres representarà un cromo, cada simulació continuarà fins que s'arribe a donar 12 nombres aleatoris, que simulen els 12 cromos corresponents als 12 pastissets.

	1	2	3	4	5	6
0	=CONCATENAR("Paquet nº"; B1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; C1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; D1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; E1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; F1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; G1)
1	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)

7	8	9	10	11	12
=CONCATENAR("Paquet nº"; H1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; I1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; J1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; K1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; L1)	=CONCATENAR("Paquet nº"; M1)
=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)	=ALEATORIO.ENTRE(1;6)

Figura 6. Formules del full de càlcul emprades per a simular el problema dels pastissets. L'obtenció dels nombres aleatoris

Per obtenir els nombres aleatoris empraren la funció *aleatorio.entre(1;6)* que dona aleatòriament un nombre entre 1 i 6 i cadascun d'estos té la mateixa probabilitat d'eixir que d'altre, al igual que les probabilitats d'obtenir un cromo o d'altre en el problema original.

Nombre de	Nombre de	Nombre de	Nombre de
1	2	3	4
=CONTAR.SI.CONJUNTO($B3:$M3;N$2)	=CONTAR.SI.CONJUNTO($B3:$M3;O$2)	=CONTAR.SI.CONJUNTO($B3:$M3;P$2)	=CONTAR.SI.CONJUNTO($B3:$M3;Q$2)

Figura 7. Fórmules del full de càlcul emprades per a simular el problema dels pastissets. Recompte de nombres que han aparegut a la simulació

Després es fa un recompte de les vegades que ha aparegut cada nombre emprant les funcions condicionals de la següent manera:

La funció *contar.si.conjunto(B3;M3;N2)* compta el nombre de cel·les entre la B3 i la M3 que tenen la mateixa informació que la N2. Els signes $ que hi apareixen ho fan per poder arrastrar les fórmules ràpidament per tot el full fent els càlculs amb les cel·les adequades.

Ara ja sols cal comprovar si falta algun nombre per eixir i per tant determinar si la col·lecció esta completa en la simulació o no.

Nombre de cromos que falten	Col·lecció completa
=CONTAR.SI.CONJUNTO(N3:S3;0)	=SI(T3=0;VERDADERO;FALSO)

Figura 8. Formules del full de càlcul emprades per a simular el problema dels pastissets. Recompte de nombres que han aparegut a la simulació

Amb aquestes fórmules es comprova primer si el nombre de vegades que ha aparegut algun dels nombres aleatoris és 0 i les compta. Després dirà que la col·lecció està completa si el valor que torna la primera funció és 0, donat que no hi mancarà cap nombre aleatori.

Donat que no coneguem la solució teòrica d'aquest problema havent limitat el nombre de pastissets a 12, segons el resultat de l'apartat 3.2.3, caldrà que fem 50.000 simulacions per estar segurs que tenim la precisió que havíem demanat al problema anterior. Mostrem ara una captura de les primeres 15 simulacions per tal d'entendre el funcionament del full:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	Paquet nº1	Paquet nº2	Paquet nº3	Paquet nº4	Paquet nº5	Paquet nº6	Paquet nº7	Paquet nº8	Paquet nº9	Paquet nº10	Paquet nº11	Paquet nº12
1	1	2	3	3	3	1	5	5	1	1	6	4
2	1	2	1	4	1	1	1	5	2	3	1	2
3	1	6	2	1	2	1	4	6	3	3	6	5
4	4	1	5	6	1	5	1	2	2	5	1	4
5	5	6	1	5	3	1	3	1	1	3	4	5
6	1	2	6	4	4	6	6	3	4	1	3	4
7	6	2	6	2	3	5	2	2	2	3	5	1
8	3	4	2	1	5	5	1	1	6	2	5	6
9	2	4	1	2	4	5	5	5	4	3	1	6
10	2	6	3	3	6	5	1	3	2	2	4	5
11	4	1	4	4	2	3	5	5	5	4	2	3
12	5	1	2	3	2	1	4	2	6	5	4	6
13	5	4	5	1	6	3	2	1	4	6	1	5
14	6	2	5	6	5	5	3	3	6	3	6	6
15	2	6	5	1	4	3	3	6	5	2	2	2

Nombre de 1	Nombre de 2	Nombre de 3	Nombre de 4	Nombre de 5	Nombre de 6	Nombre de cromos que falten	Col·lecció completa
4	1	3	1	2	1	0	VERDADERO
6	3	1	1	1	0	1	FALSO
3	2	2	1	1	3	0	VERDADERO
4	2	0	2	3	1	1	FALSO
4	0	3	1	3	1	1	FALSO
2	1	2	4	0	3	1	FALSO
1	5	2	0	2	2	1	FALSO
3	2	1	1	3	2	0	VERDADERO
2	2	1	3	3	1	0	VERDADERO
1	3	3	1	2	2	0	VERDADERO
1	2	2	4	3	0	1	FALSO
2	3	1	2	2	2	0	VERDADERO
3	1	1	2	3	2	0	VERDADERO
0	1	3	0	3	5	2	FALSO
1	4	2	1	2	2	0	VERDADERO

Figura 9. Mostra d'una simulació del problema dels pastissets emprant un full de càlcul

Aquest full continua fins a les 50.000 simulacions i torna una probabilitat experimental de completar la col·lecció de $\frac{21935}{50000} = 0{,}4387$, per tant, gràcies al resultat de l'apartat 3.2.3 podem afirmar amb un 95% de certesa que la probabilitat teòrica deu ser un valor p tal que $0{,}4287 < p < 0{,}4487$.

A continuació mostrem els resultats de la tendència de la probabilitat experimental cap a la que ha de ser considerada la probabilitat de l'experiment. Com deia Renyi (1966, p. 26, citat en Henry, 1999, p. 18) *si la freqüència relativa d'un esdeveniment aleatori oscil·la al voltant d'un nombre concret, aquest nombre serà la probabilitat de l'esdeveniment considerat*. No trobe cap forma millor de mostrar-ho que aquest gràfic:

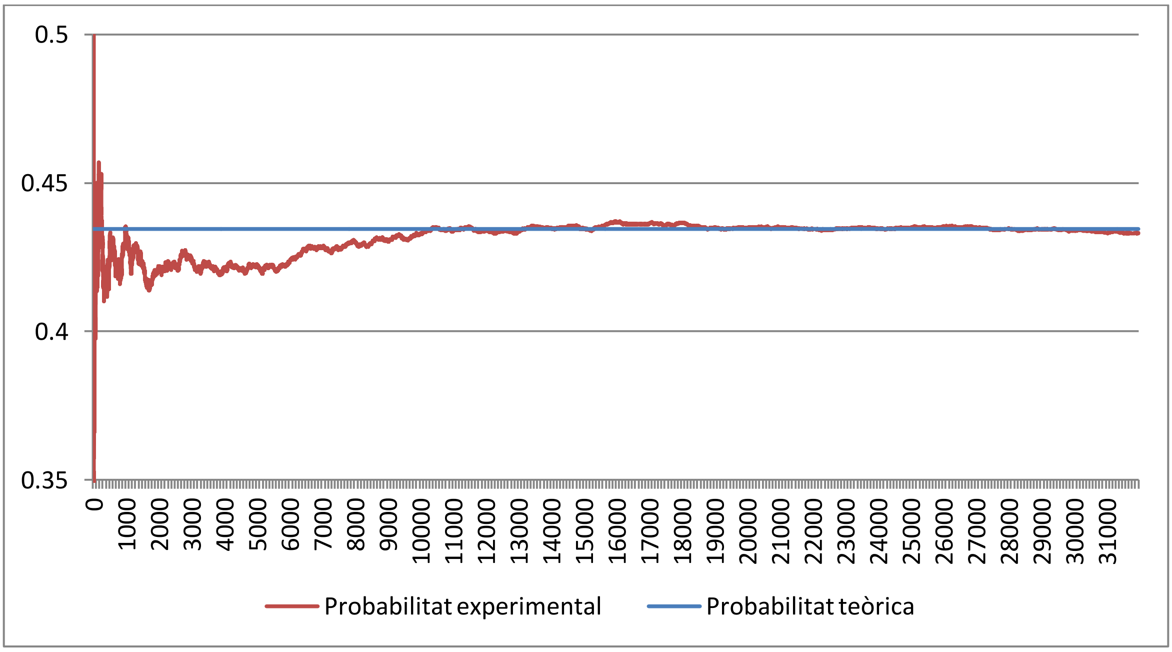


Figura 10. Gràfic que mostra l'evolució de la probabilitat experimental front a la teòrica a mesura que augmenta el nombre de simulacions en el problema dels pastissets

Ara que ja hem resolt el problema que és motor de la proposta, cal veure com l'hem desenvolupat. Les preguntes de la proposta s'estructuren en 4 blocs. Les tres primeres pertanyen al bloc d'anàlisi del problema, tenen la funció de fer que l'alumne comprenga millor l'enunciat del problema. Primer es pregunta per la probabilitat subjectiva de completar la col·lecció, després es fa reflexionar sobre el nombre mínim de pastissets que calen per a completar-la, i per últim es pregunta si pensen que és possible no completar la col·lecció amb els 12 pastissets de que disposen.

El bloc dos comprén la part elemental de la simulació per a l'alumne, la recollida de dades. Ací primer fem que l'alumne comprenga quin és el problema simulat que va a resoldre i quina és la correspondència amb el problema original. Es suggereix emprar un dau cúbic com a generador d'atzar i se li demana al grup que determinen com van a emprar el dau per simular l'experiència, per tal d'ajudar-los a que responguen ells sols es deixen quatre subapartats que poden ajudar a respondre a aquesta, què simbolitza un llançament, què simbolitza una simulació, quantes vegades s'ha de llançar el dau i com es determina si una simulació ha acabat. Després es pregunta que van a anotar quan facen cada simulació i quantes simulacions hi calen. La pregunta 6 demana explícitament la recollida de dades tal i com ho han determinat a les dues preguntes anteriors. La pregunta 7 demana, a la vista de les dades, donar una mesura de la probabilitat de completar la col·lecció.

El tercer bloc correspon a l'anàlisi estadístic de les dades que han generat. Es demanen els tres estadístics de centralització per ordre i després es pregunta quin significat li atorguen a la mitjana aritmètica. Després es demana construir una taula de freqüències amb aquestes dades.

L'últim bloc és per a treballar la interpretació dels resultats, comença fent raonar a l'alumnat si la informació que ells tenen és suficient i que aconseguirien amb més simulacions. A continuació se'ls hi mostren un gràfic de sectors on es representen les dades de 50.000 simulacions obtingudes amb el full de càlcul anterior referents al nombre de col·leccions completes i incompletes, i per últim, de les completes, es mostra un diagrama de barres que representa les diferents freqüències. Amb aquesta informació es demana una nova comparació amb els resultats que havien aconseguit amb les simulacions fetes amb el dau, per tal que se n'adonen que hi ha diferències significatives entre els dos resultats, i se'ls fa discutir sobre quins resultats els semblen més significatius. Per últim es demana posar-se al lloc de l'empresari que ha llençat la promoció i veure quines decisions podria prendre aquest amb eixos resultats.

4.4.3 La trampa del Doofenshmirtz

Aquest problema ha sigut generat a partir del problema de la cova que hem modificat per a l'experiència a l'aula. S'ha creat un problema idèntic en termes probabilístics canviant el context i els nombres que apareixien a l'altre problema. He triat el context dels coneguts dibuixos animats perquè són propers als alumnes d'aquesta edat i s'espera doncs que açò faça augmentar l'interés pel problema i facilitar la seua comprensió, donat que per aquell que està familiaritzat amb els dibuixos li serà més fàcil imaginar-se la situació. El problema ha quedat de la següent manera:

L'agent P, Perry l'ornitorinc, ha eixit a detindre els plans malèfics del professor Heinz Doofenshmirtz. Aquest ha construït un nou Inator capaç de fer oblidar a tota l'àrea dels tres estats els seus coneixements matemàtics, l'Antimathinator, d'aquesta manera no li costaria fer-se amb el control donat que ell és un científic amb amplis coneixements matemàtics.

Perry ha caigut en una nova trampa del professor, es troba atrapat a una gàbia de la que no pot eixir amb cap dels seus utensilis. Pot veure 3 botons al seu abast, aquests botons tenen una d'aquestes 3 funcions diferents:

- *Connectar el mecanisme d'autodestrucció de l'Antimathinator que farà miquetes l'aparell en 1 minut.*
- *Activar una mà mecànica gegant que agafa la gàbia i la sacseja durant 4 minuts.*
- *Fer eixir un guant de boxa que noqueja al nostre heroi durant 5 minuts.*

Com que al professor Doofenshmirtz li agrada posar-li les coses difícils a Perry l'ornitorinc, ha programat els controls perquè aquestes funcions es distribueixquen de manera aleatòria entre els 3 botons, d'aquesta forma cada vegada que Perry fa un intent per desactivar l'Inator no sap el que passarà.

Donat que el professor Heinz Doofenshmirtz ha programat l'Antimathinator per activar-se en 10 minuts i tarda 10 segons en disparar-se:

Com s'ha dit abans l'estructura del problema és la mateixa i com a conseqüència d'açò, la solució és idèntica a la del problema de la cova i el conjunt de preguntes de la proposta també guarda una correspondència amb aquest.

Si ens fixem en la programació del full de càlcul he hagut de modificar les duracions dels camins per les duracions dels botons i al full això ha suposat una complicació, he hagut d'emprar nombres aleatoris de l'1 al 3 (apareixen a la tercera i cinquena columnes) i assignar el 2 a l'opció de 4 minuts i el 3 a l'opció de 5 minuts.

Simulació	Funció escollida		Funció escollida		Funció escollida	Ha sigut desactivat	29662	44445	67%
1	4	2	5	3	1	Ha desactivat l'Antimathinator en 10 minuts			
2	1	1	0	0	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 1 minut			
3	4	2	1	1	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 5 minuts			
4	4	2	4	2	1	Ha desactivat l'Antimathinator en 9 minuts			
5	5	3	1	1	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 6 minuts			
6	1	1	0	0	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 1 minut			
7	5	3	1	1	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 6 minuts			
8	4	2	4	2	1	Ha desactivat l'Antimathinator en 9 minuts			
9	5	3	4	2	4	Després de 13 minuts no ha aconseguit desactivar l'Antimathinator			
10	4	2	1	1	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 5 minuts			
11	1	1	0	0	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 1 minut			
12	1	1	0	0	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 1 minut			
13	1	1	0	0	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 1 minut			
14	1	1	0	0	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 1 minut			
15	5	3	1	1	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 6 minuts			

Figura 11. Mostra de la simulació amb el full de càlcul del problema de la trampa de Doofenshmirtz

La probabilitat experimental d'eixir de desactivar l'Antimathinator abans no entre en funcionament obtinguda a la simulació és $\frac{29662}{44445}$, un valor molt pròxim al resultat teòric (casualment més pròxim encara que a la simulació del problema de la cova). Si calculem l'error relatiu comes en el càlcul vegem que efectivament és menor del que exigíem en triar el nombre de simulacions:

$$\frac{\left|\frac{2}{3}-\frac{29662}{44445}\right|}{\frac{2}{3}} \cong 0{,}00108 < 0{,}01$$

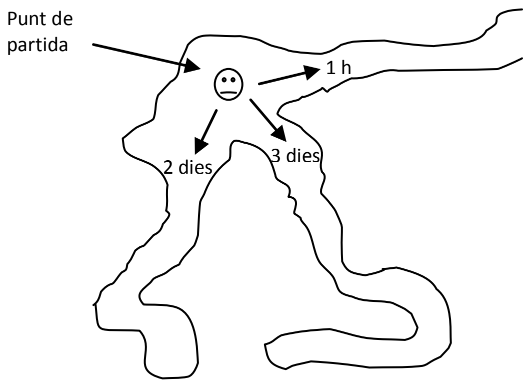
4.5 Activitats d'ensenyament-aprenentatge a desenvolupar en l'aula

A continuació apareixen ordenades el conjunt d'activitats que componen la unitat didàctica atenent a tot allò que venim comentat als apartats anteriors.

4.5.1 PRETEST: El problema de la cova

Un dia pel matí et rapten uns bandolers, et deixen inconscient i et tanquen dins d'una cova. Al despertar la situació és la següent, la cova esta completament obscura, no saps absolutament res del lloc on estàs i comences a moure't a les palpentes per tal de buscar una eixida del lloc on et trobes.

La cova presenta 3 camins d'eixida des del lloc on et trobes, per un d'ells aconseguiries eixir fora de la cova en 1 hora, per altre, després de 2 dies tornaries al lloc de partida, i per el tercer tardaries 3 dies en tornar al mateix lloc (mira el dibuix de la cova).



Com que no tens ninguna informació de la cova i et mous completament a obscures, cada vegada que tries un camí ho fas completament a l'atzar.

Donat que no tens ni menjar ni beguda sols podràs sobreviure 5 dies i 1 hora.

1. Penses que serà fàcil eixir de la cova? Per què?
2. És possible que després de 5 dies i 1 hora encara no hagueres aconseguit eixir de la cova? Per què?
3. Creus que la probabilitat de prendre un camí o d'altre és diferent? En què et fixes per a dir-ho?
4. I si et fixes ara en la probabilitat d'eixir, penses que és més fàcil eixir al primer intent, al segon o al tercer? Què et fa pensar això?

Els bandolers volen comprovar si la cova que empren per a les seues malifetes fa el paper com cal. Gràcies a les càmeres de seguretat que hi tenen instal·lades els bandolers a la cova, que poden gravar fins i tot en total obscuritat, han recollit la següent informació del que han fet les altres 15 víctimes que han atrapat anteriorment, i aquestos són els resultats tenint en compte que el camí 1 és el que et porta fora de la cova en 1 hora i el 2 i el 3 el que et tornen a l'interior en 2 i 3 dies respectivament.

Víctima	**Camí recorregut al 1r intent**	**Camí recorregut al 2n intent**	**Camí recorregut al 3r intent**	**Resultat**
1	2	1	0	Ha eixit de la cova en 2 dies i 1 hora
2	1	0	0	Ha eixit de la cova en 1 hora
3	3	2	2	Després de 7 dies no ha aconseguit eixir de la cova
4	3	3	3	Després de 9 dies no ha aconseguit eixir de la cova
5	2	1	0	Ha eixit de la cova en 2 dies i 1 hora
6	3	1	0	Ha eixit de la cova en 3 dies i 1 hora
7	3	1	0	Ha eixit de la cova en 3 dies i 1 hora
8	2	3	1	Ha eixit de la cova en 5 dies i 1 hora
9	3	3	3	Després de 9 dies no ha aconseguit eixir de la cova
10	1	0	0	Ha eixit de la cova en 1 hora
11	1	0	0	Ha eixit de la cova en 1 hora
12	2	2	2	Després de 6 dies no ha aconseguit eixir de la cova
13	2	3	2	Després de 7 dies no ha aconseguit eixir de la cova
14	1	0	0	Ha eixit de la cova en 1 hora
15	1	0	0	Ha eixit de la cova en 1 hora

Aconsegueixen eixir	**Temps invertit**	**Nombre de víctimes**	**Freqüència relativa**
Si	1 hora	5	5/15
	2 dies i 1 hora	2	2/15
	3 dies i 1 hora	2	2/15
	5 dies i 1 hora	1	1/15
No		5	5/15
Total		**15**	**15/15**

5. A la vista del resultats, penses que és fàcil eixir de la cova? Pots mesurar-ho d'alguna manera? Explica el que fas.
6. Podries estimar d'alguna forma el temps que s'espera que una nova víctima tarde en eixir de la cova? Explica el que caldria fer.
7. Si fores cap dels bandolers, quina decisió hi prendries?

4.5.2 PROPOSTA PRINCIPAL: El problema dels pastissets

Un empresari, directiu d'una coneguda marca de pastissets, pensa una manera de promocionar la seua marca. Decideix regalar junt a cada paquet un cromo d'una col·lecció de 6 diferents.

Cada paquet porta de segur un dels 6 cromos possibles però no hi ha cap manera de saber quin és el que porta i, a més, cap persona que coneixes s'ha interessat per la col·lecció ni compra aquesta marca de pastissets.

A tu t'encanta la col·lecció que ofereix i vols completar-la tota. La promoció sols va a durar 4 setmanes i els teus pares sols et deixen menjar 3 pastissets a la setmana.

Anàlisi del problema

1. Penses que serà fàcil completar la col·lecció? Per què?
2. Estima quants pastissets hauràs de comprar, com a mínim, per completar la col·lecció i explica com arribes a aquesta conclusió.
3. Es possible que no hages completat la col·lecció passades les 4 setmanes?

Procés de recollida de dades: La simulació

Per tal de poder resoldre el problema anem a tractar de simular l'experiència. Per aconseguir-ho emprarem un dau corrent de sis cares

4. Determina com vas a utilitzar el dau per simular l'experiència del problema. Pots ajudar-te de les següents preguntes explicant les teues respostes.
    a) Què simbolitza cada llançament?
    b) Què simbolitza cada simulació?
    c) Quantes vegades caldrà llançar el dau per completar una simulació?
    d) Com determines que una simulació ha acabat?
5. Què caldrà enregistrar cada vegada que fem una simulació? Quantes simulacions caldria fer? Per què?
6. Fes un registre de les diferents simulacions per tal de comprovar quants paquets serà necessari comprar en cada cas.
7. Després d'haver fet les simulacions, podries mesurar com de fàcil o difícil és completar la col·lecció en aquestes condicions? Per què?

Anàlisi estadístic

8. Quina és la moda, és a dir, el valor que més vegades s'ha repetit?

9. Si ordeneu els valors de menor a major, digueu quin és el que ocupa el lloc central. Aquest valor diguem que és la mediana.

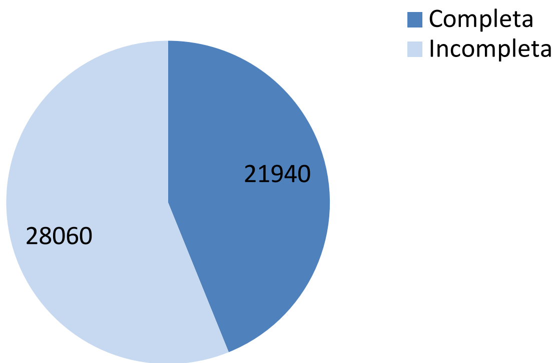
10. Obté la mitjana aritmètica del total de pastissets que hauries de comprar per completar la col·lecció. Quin significat té aquest valor?.

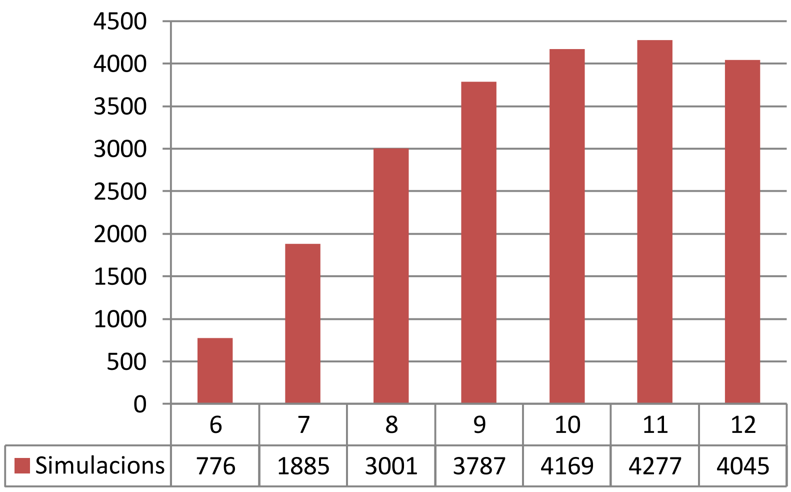
11. Construïu la taula de freqüències associada a les dades que heu obtés.

Interpretació dels resultats

12. Creus que la informació recollida és suficient per a respondre al problema? Què creus que passaria si pogueres fer més simulacions?

Amb l'ajuda d'un ordinador podem obtenir ràpidament moltes simulacions i contrastar-ho amb les dades que heu obtés. A continuació pots veure dos gràfics, un que posa de manifest quantes vegades s'ha aconseguit completar la col·lecció amb 50000 simulacions i altre que diu quants pastissets han segut necessaris en aquelles simulacions en les que s'ha completat la col·lecció.





13. Compara la informació dels gràfics amb el que has obtés amb les teues simulacions. Es semblen molt els resultats o hi trobes molta diferència? Quins resultats són més significatius per a tu?

14. Imagina ara que eres l'empresari que ha llençat la promoció. Quines decisions prendries a la vista dels resultats?

4.5.3 POSTTEST: La trampa de Doofenshmirtz

L'agent P, Perry l'ornitorinc, ha eixit a detindre els plans malèfics del professor Heinz Doofenshmirtz. Aquest ha construït un nou Inator capaç de fer oblidar a tota l'àrea dels tres estats els seus coneixements matemàtics, l'Antimathinator, d'aquesta manera no li costaria fer-se amb el control donat que ell és un científic amb amplis coneixements matemàtics.

Perry ha caigut en una nova trampa del professor, es troba atrapat a una gàbia de la que no pot eixir amb cap dels seus utensilis. Pot veure 3 botons al seu abast, aquests botons tenen una d'aquestes 3 funcions diferents:

- Connectar el mecanisme d'autodestrucció de l'Antimathinator que farà miquetes l'aparell en 1 minut.
- Activar una mà mecànica gegant que agafa la gàbia i la sacseja durant 4 minuts.
- Fer eixir un guant de boxa que noqueja al nostre heroi durant 5 minuts.

Com que al professor Doofenshmirtz li agrada posar-li les coses difícils a Perry l'ornitorinc, ha programat els controls perquè aquestes funcions es distribueixquen de manera aleatòria entre els 3 botons, d'aquesta forma cada vegada que Perry fa un intent per desactivar l'Inator no sap el que passarà.

Donat que el professor Heinz Doofenshmirtz ha programat l'Antimathinator per activar-se en 10 minuts i tarda 10 segons en disparar-se:

1. Penses que serà fàcil que Perry aconsegueixca destruir l'Antimathinator? Per què?
2. És possible que passats els 10 minuts i 10 segons s'haja activat l'Antimathinator? Per què?
3. Creus que la probabilitat de que s'active cadascuna de les 3 funcions en prémer un botó és diferent? En què et fixes per a dir-ho?
4. I si et fixes ara en la probabilitat de desactivar l'Antimathinator, penses que és més fàcil aconseguir-ho al primer intent, al segon o al tercer? Què et fa pensar això?

El professor s'havia pres la molèstia d'emprar el seu superordinador per tal que aquest generara una sèrie de simulacions tal com si el mateix Perry hagués caigut a la trampa i intentara desactivar l'Antimathinator. L'1 fa referència a l'opció de desactivar l'Antimathinator, el 4 a la mà mecànica gegant que sacseja la gàbia i el 5 al guant de boxa.

Simulació	**Funció escollida**	**Funció escollida**	**Funció escollida**	**Resultat**
1	4	4	4	Després de 12 minuts no ha aconseguit desactivar l'Antimathinator
2	5	1	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 6 minuts
3	4	5	5	Després de 14 minuts no ha aconseguit desactivar l'Antimathinator
4	4	4	5	Després de 13 minuts no ha aconseguit desactivar l'Antimathinator
5	1	0	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 1 minut
6	5	4	4	Després de 13 minuts no ha aconseguit desactivar l'Antimathinator
7	4	4	1	Ha desactivat l'Antimathinator en 9 minuts
8	4	1	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 5 minuts
9	1	0	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 1 minut
10	5	1	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 6 minuts
11	1	0	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 1 minut
12	4	1	0	Ha desactivat l'Antimathinator en 5 minuts
13	5	5	4	Després de 14 minuts no ha aconseguit desactivar l'Antimathinator
14	5	5	5	Després de 15 minuts no ha aconseguit desactivar l'Antimathinator
15	4	5	4	Després de 13 minuts no ha aconseguit desactivar l'Antimathinator

Aconsegueix desactivar-lo	**Temps invertit**	**Freqüència**	**Freqüència relativa**
Si	1 minut	3	3/15
	5 minuts	2	2/15
	6 minuts	2	2/15
	9 minuts	1	1/15
No		7	7/15
Total		**15**	**15/15**

5. A la vista del resultats, penses que és fàcil desactivar l'Antimathinator? Pots mesurar-ho d'alguna manera? Explica el que fas.
6. Podries estimar d'alguna forma el temps que s'espera que Perry tarde a desactivar l'Antimathinator cada vegada que és atrapat? Explica el que caldria fer.
7. Si fores el professor Doofenshmirtz, quina mesura prendries?

4.6 Resultats de l'experimentació

Per tal d'observar adequadament els resultats de l'experimentació a l'aula farem una comparació entre les respostes que els alumnes han donat al pretest i al posttest, avaluant cada ítem per separat. Tindrem en compte que a cada proposta hi apareixen set preguntes que es corresponen una a una amb les de l'altra proposta, per tant considerem un ítem a cada parell de preguntes corresponents. Del conjunt de respostes que els alumnes donen a un mateix ítem en farem una classificació i emprarem un codi per identificar si la resposta és correcta o incorrecta, d'aquesta manera podrem analitzar els resultats que s'observa a cada ítem per separat i comprovar si es compleixen els objectius. Així doncs cal tenir en compte la següent codificació:

- Les respostes que siguen considerades correctes rebran un codi numèric del tipus 1. o 1.x.
- Les respostes que siguen considerades incorrectes per algun motiu rebran un codi numèric del tipus 2. o 2.x.
- Si l'alumne no dona resposta o la resposta és que no sap com respondre rebrà un codi numèric del tipus 3.

He volgut mostrar junt a cada tipus de pregunta algunes de les respostes afegint comentaris i perquè han sigut classificades d'aquesta manera per tal de donar a comprendre el patró d'anàlisi de respostes que he seguit.

4.6.1 Primer ítem

El primer ítem és la pregunta sobre la probabilitat subjectiva de l'esdeveniment del problema en qüestió. Recordem que la probabilitat que hem calculat d'eixir de la cova o de que Perry destrueixca l'Antimathinator és de $\frac{2}{3}$, això implica que és el doble de fàcil que aquest ocorrega front a que no ocorrega. Tenint en compte això donarem per correctes aquelles respostes que indiquen d'alguna manera que és més fàcil que no difícil ja que al tractar-se de probabilitat subjectiva no podem analitzar la resposta amb precisió. Tal i com es troba formulada la pregunta els alumnes responen amb un si per a indicar que pensen que és fàcil i un no per a indicar que pensen que serà difícil, així que ens fixarem també en el raonament que empren per justificar la resposta.

Classifiquem les respostes en:

1.- Afirmativa amb raonament correcte:

1. Penses que serà fàcil que Perry aconsegueixca destruir l'Antimathinator? Per què?
Si, perquè. si fa ea primera funció el destruix.

Figura 12. Resposta al posttest de l'alumne A06

Ací interpretem que l'alumne respon afirmativament pensant que Perry té tres oportunitats per polsar la primera funció i aquest raonament és del tot correcte.

2.1.- Afirmativa amb raonament incorrecte:

1. Penses que serà fàcil eixir de la cova? Per què?
Sí, perque si prova tots els camins tardaries com a molt 5 dies i 1h

Figura 13. Resposta al pretest de l'alumne A10

Tot i que respon afirmativament, ho fa perquè pensa que sap quin camí es prova cada vegada, ha eliminat el concepte de l'aleatorietat de l'experiència, però òbviament pot ser que es recorrega el camí 3 indefinidament.

2.2.- Negativa amb raonament correcte

1. Penses que serà fàcil eixir de la cova? Per què?
No perqué hi han 3 camins i dos són incorrectes.

Figura 14. Resposta al pretest de l'alumne A03

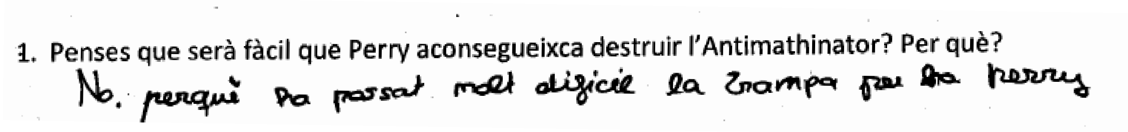
Ací l'alumne es fixa en que a cada intent que fa per eixir hi ha dos camins que et tornen a l'interior, això li fa pensar que és més fàcil quedar-se dins que eixir de la cova.

2.3.- Negativa amb raonament incorrecte

1. Penses que serà fàcil eixir de la cova? Per què?
No perque hi han 3 camins i els 3 camins son molt llargs.

Figura 15. Resposta al pretest de l'alumne A02

El raonament d'aquesta resposta el fa en funció de la longitud del camí afirmant que els tres són molt llargs quan hi ha un que és molt més curt. Aquesta resposta sembla una mica precipitada, tal vegada no s'havia entés bé l'enunciat del problema.



1. Penses que serà fàcil que Perry aconsegueixca destruir l'Antimathinator? Per què?
No. perquè ha passat molt dificil la trampa per la perry

Figura 16. Resposta al posttest de l'alumne A03

Aquesta pregunta considerem que té un raonament incorrecte donat que en realitat no hi ha raonament, és difícil perquè és difícil.

3.- Sense resposta

Els resultats es recullen en la següent taula:

Taula 1. Relació del tipus de resposta que han donat els estudiants al pretest i al posttest de l'ítem 1

	1.	2.1.	2.2.	2.3.	3.
Pretest	0	1	7	5	2
Posttest	1	5	3	5	0

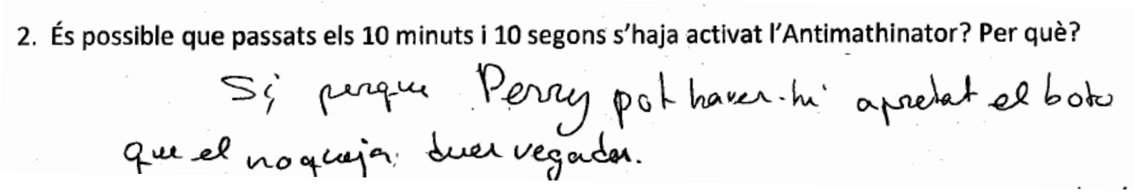
Pot observar-se que, com ja avançàvem a la introducció, la intuïció dels alumnes al enfrontar-se a situacions d'incertesa no és suficient, ja que sols un alumne ha respost correctament a una de les dues preguntes. A més també s'observa que la majoria dels raonaments són incorrectes.

4.6.2 Segon ítem

Aquest ítem pregunta si l'alumne pensa que passat el temps estimat és possible que ocórrega el fet corresponent a cada problema, no eixir de la cova al pretest o que s'hi active l'Antimathinator al posttest. L'objectiu d'aquesta pregunta és fer que l'alumne reflexione sobre el problema per millorar la comprensió de l'enunciat. En ambdós casos la resposta esperada és simplement que sí que és possible, sols s'han de fixar en la possibilitat d'escollir aleatòriament un camí o botó que no detinga el procés suficients vegades com per a esgotar el temps.

En aquest sentit classificarem les respostes com:

1.- Correcta



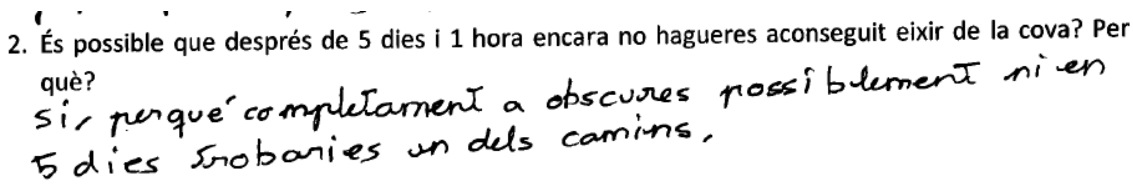
2. És possible que passats els 10 minuts i 10 segons s'haja activat l'Antimathinator? Per què?

Sí perquè Perry pot haver-hi apretat el botó que el noqueja dues vegades.

Figura 17. Resposta al posttest de l'alumne A10

L'alumne ha tingut en compte que si Perry tria dues vegades l'opció que el noqueja durant 5 minuts ja no te temps per triar altra vegada abans de que s'active l'Antimathinator, per tant és possible.

2.1.- Afirmativa incorrecta



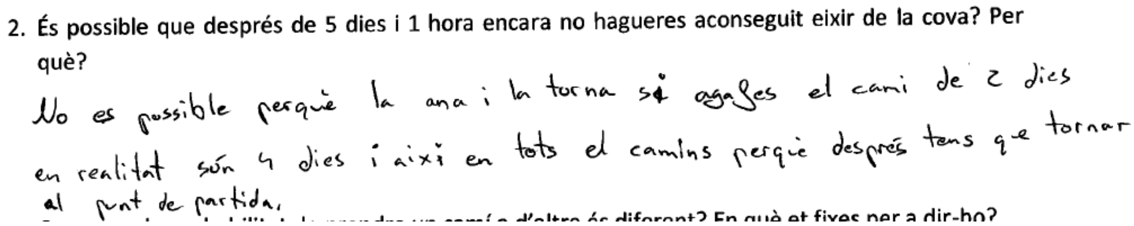
2. És possible que després de 5 dies i 1 hora encara no hagueres aconseguit eixir de la cova? Per què?

si, perqué completament a obscures possiblement ni en 5 dies trobaries un dels camins,

Figura 18. Resposta al pretest de l'alumne A05

L'alumne recorre a l'obscuritat per assegurar que es possible inclús no trobar cap camí en 5 dies, en pensar així viola les instruccions del problema i per tant no l'interpreta adequadament.

2.2.- Negativa incorrecta



2. És possible que després de 5 dies i 1 hora encara no hagueres aconseguit eixir de la cova? Per què?

No es possible perquè la ana i la torna si agafes el camí de 2 dies en realitat són 4 dies i així en tots el camins perquè després tens que tornar al punt de partida,

Figura 19. Resposta al pretest de l'alumne A07

Ací és mostra com l'alumne malinterpreta una informació essencial del problema on es diu clarament que si agafes el camí dos tardes 2 dies a tornar al punt de partida, ell interpreta que tardes dos dies per recórrer-lo en un sentit i dos dies per recórrer-lo en l'altre. Possiblement el propi dibuix que mostra els camins 2 i 3 com un cul de sac haja contribuït a entendre l'enunciat d'aquesta forma.

Els resultats es recullen en la següent taula:

Taula 2.Relació del tipus de resposta que han donat els estudiants al pretest i al posttest de l'ítem 2

	1.	2.1.	2.2.
Pretest	5	4	6
Posttest	6	3	6

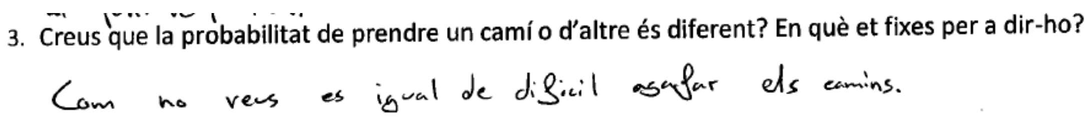
Es pot veure que en ambdós casos la interpretació de l'enunciat manca bastant, hi ha una majoria d'alumnes que no han comprés bé l'enunciat i açò de segur que afecta a la resta de respostes que hi donen.

4.6.3 Tercer ítem

A aquesta pregunta es demana que l'alumne atorgue a cada opció una probabilitat, es tracta d'una senzilla assignació de probabilitats[5] que es pot fer tal i com ens diu Laplace, un camí o botó entre 3 possibles. S'espera que l'alumne responga que les 3 probabilitats són iguals, encara que també es donarà per valida la resposta en forma de raó.

Trobem aleshores els següents tipus de resposta:

1.1.- Correcta emprant igualació

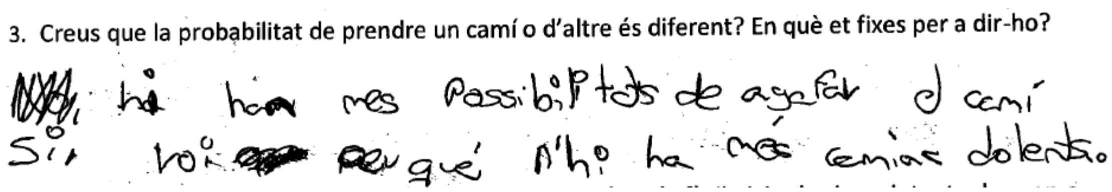

3. Creus que la probabilitat de prendre un camí o d'altre és diferent? En què et fixes per a dir-ho?

Com no veus es igual de dificil agafar els camins.

Figura 20. Resposta al pretest de l'alumne A07

En la seua afirmació l'alumne mostra com sense cap informació que apunte cap a un camí o d'altre les probabilitats són equivalents.

1.2.- Correcta emprant raó


3. Creus que la probabilitat de prendre un camí o d'altre és diferent? En què et fixes per a dir-ho?

hi han mes Possibilitats de agafar el camí Si, roí perqué n'hi ha més camins dolents.

[Si, hi ha més possibilitat d'agafar el camí roí perquè hi ha més camins dolents.]

Figura 21. Resposta al pretest de l'alumne A09

[5] L'assignació de probabilitats en el sentit de Huerta (2003)

Ací l'alumne agrupa els dos camins que et tornen a la cova com una classe i per tant tenim dues classes de camins i la seua resposta és del tot correcta ja que hi ha el doble de la classe que torna que de la classe que ix.

2.- Incorrecta

3. Creus que la probabilitat de que s'active cadascuna de les 3 funcions en prémer un botó és diferent? En què et fixes per a dir-ho?

Sí perque esta per a que u fatxes aleatzer.

Figura 22. Resposta al posttest de l'alumne A08

Pareix que l'alumne, front a la situació d'incertesa, no és capaç d'assignar les mateixes probabilitats a les tres funcions, l'aleatorietat per a ell és imprevisible.

3.- Resposta incompleta

Aquestos són els resultats:

Taula 3. Relació del tipus de resposta que han donat els estudiants al pretest i al posttest de l'ítem 3

	1.1.	1.2.	2.	3.
Pretest	3	3	9	0
Posttest	10	0	2	2

Es pot observar una millora notable en els resultats dels alumnes cap a una resposta correcta emprant igualació.

4.6.4 Quart ítem

Aquesta pregunta fa referència a una esperança, una esperança que s'hauria d'obtenir fent una moda, però sense tenir cap dada al davant ni fer cap càlcul les respostes que mostren tenen un caràcter intuïtiu com el de la probabilitat subjectiva.

La classificació de les respostes serà:

1.- Correcta

4. I si et fixes ara en la probabilitat d'eixir, penses que és més fàcil eixir al primer intent, al segon o al tercer? Què et fa pensar això?

El 1r, perqué es més curt i si que ni ha eixida.

Figura 23. Resposta al pretest de l'alumne A13

Aquesta resposta és encertada donat que en cas d'eixir el succés més probable és eixir al primer intent, i el raonament acaba sent que és aquest precisament perquè és el que te eixida. No obstant això, no pense que l'alumne haja volgut raonar-ho pensant en el ventall de possibilitats, però a la vista del que hi ha escrit he de classificar-la com a correcta.

2.1.- Incorrecta amb un raonament on intervé el concepte de sort

4. I si et fixes ara en la probabilitat de desactivar l'Antimathinator, penses que és més fàcil aconseguir-ho al primer intent, al segon o al tercer? Què et fa pensar això?

És més fàcil al segon intent perquè si el aconsegueixes al primer tens que tindre molta sort i si els acosegueixes al tercer molta mala sort.

1

Figura 24. Resposta al pretest de l'alumne A07

Dona una resposta basant-se en justificacions on la sort és la protagonista, pareix que aquest alumne creu que donat que pots disposar d'un màxim de 3 intents la resposta lògica es troba al mig.

2.2.- Incorrecta amb un raonament derivat de la disposició del dibuix (sols al pretest)

4. I si et fixes ara en la probabilitat d'eixir, penses que és més fàcil eixir al primer intent, al segon o al tercer? Què et fa pensar això?

Jo pense que al primer o tercer intent. Perquè al anar a les palpantes pots anar cap a la dreta o a l'esquerra.

Figura 25. Resposta al pretest de l'alumne A12

Aquest alumne mostra haver-se fixat en el dibuix de la cova per a donar la seua resposta, no es fixa en el caràcter aleatori de l'experiència.

2.3.- Incorrecte amb raonament d'esgotar possibilitats

4. I si et fixes ara en la probabilitat de desactivar l'Antimathinator, penses que és més fàcil aconseguir-ho al primer intent, al segon o al tercer? Què et fa pensar això?

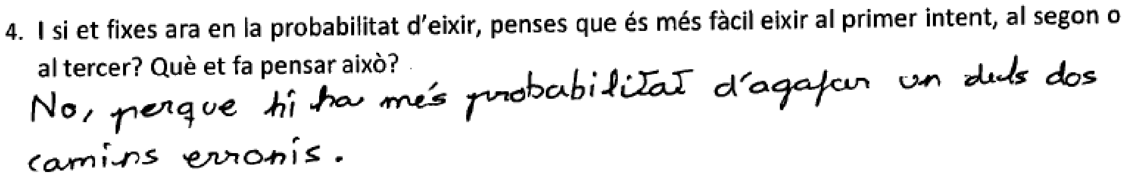
Jo pense que serà al segon o al tercer, perquè si alteren els botons, una de totes les voltes que li dones al mateix botó, fara una acció diferent.

1

Figura 26. Resposta al posttest de l'alumne A12

El raonament que mostra l'alumne en la seua resposta porta a pensar que considera que un botó ha de cobrir sempre les 3 funcions, per tant en algun moment donat el mateix botó detindrà el procés.

2.4.- Incorrecte per altres motius

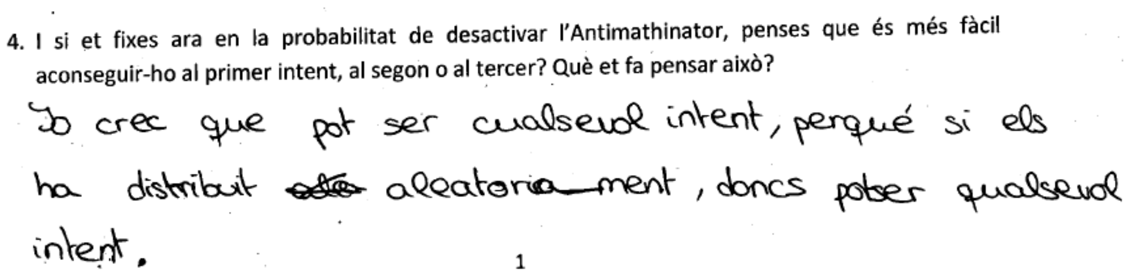

4. I si et fixes ara en la probabilitat d'eixir, penses que és més fàcil eixir al primer intent, al segon o al tercer? Què et fa pensar això?

No, perque hi ha més probabilitat d'agafar un dels dos camins erronis.

Figura 27. Resposta al pretest de l'alumne A05

La resposta negativa que dona l'alumne pareix que fa referència a la primera part de la pregunta, sobre eixir al primer intent. La intuïció de l'alumne li diu que donat que la probabilitat inicial de triar un dels camins que et tornen a la cova és més alta serà menys probable acabar al primer intent.

3.- No dona una resposta concreta o diu que totes les opcions són equiprobables


4. I si et fixes ara en la probabilitat de desactivar l'Antimathinator, penses que és més fàcil aconseguir-ho al primer intent, al segon o al tercer? Què et fa pensar això?

Jo crec que pot ser cualsevol intent, perqué si els ha distribuit ~~els~~ aleatoria_ment, doncs pober qualsevol intent.

1

Figura 28. Resposta al posttest de l'alumne A13

Aquest es basa en l'aleatorietat per no mostrar preferència per cap opció, per a ell totes tenen una probabilitat equivalent.

Els resultats d'aquest ítem són:

Taula 4. Relació del tipus de resposta que han donat els estudiants al pretest i al posttest de l'ítem 4

	1.	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	3.
Pretest	1	2	2	3	4	3
Posttest	0	3	0	3	6	3

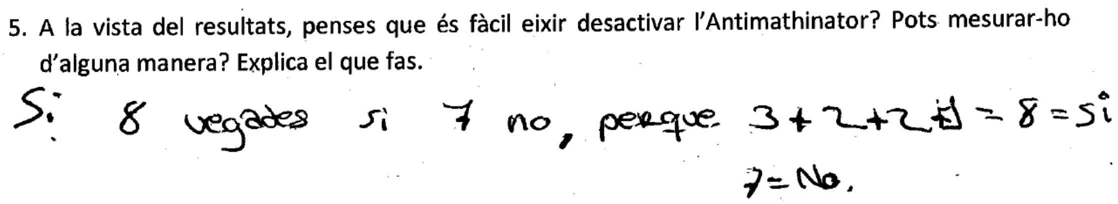
Es pot observar que els resultats dels alumnes fan pensar que efectivament la intuïció sobre la esperança és del tot insuficient.

4.6.5 Cinqué ítem

Aquesta pregunta pretén veure si els alumnes són capaços d'aplicar cap eina estadística per interpretar els resultats d'un conjunt de dades sobre el problema. S'esperen respostes del tipus afirmatiu indicant que és fàcil acompanyant-ho amb una justificació emprant una probabilitat freqüentista. Cal tenir en compte que, tot i que els dos problemes són equivalents en termes matemàtics, les dades que s'hi ha proporcionat provenen de simulacions diferents i per tant les respostes s'han d'adequar a les dades. En el problema de la cova hi ha un total de 10 dels 15 resultats en que s'aconsegueix eixir de la cova, en el de la trampa sols hi ha 8 de 15 resultats favorables per a Perry.

Amb aquesta informació fem la següent classificació de les respostes:

1.- Afirmativa amb raonament correcte


5. A la vista del resultats, penses que és fàcil eixir desactivar l'Antimathinator? Pots mesurar-ho d'alguna manera? Explica el que fas.

Sí 8 vegades sí 7 no, perque 3+2+2+1 = 8 = sí
7 = No.

Figura 29. Resposta al posttest de l'alumne A04

L'alumne ha fet una comparació entre el nombre de simulacions en què s'aconsegueix destruir l'Antimathinator i el que no i ha donat la resposta basant-se amb aquest resultat.

2.1.- Afirmativa amb raonament incorrecte

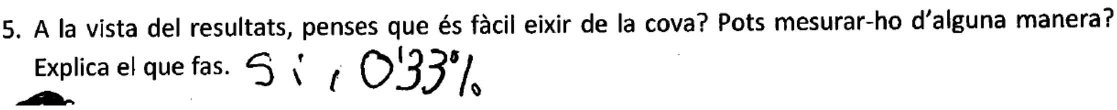
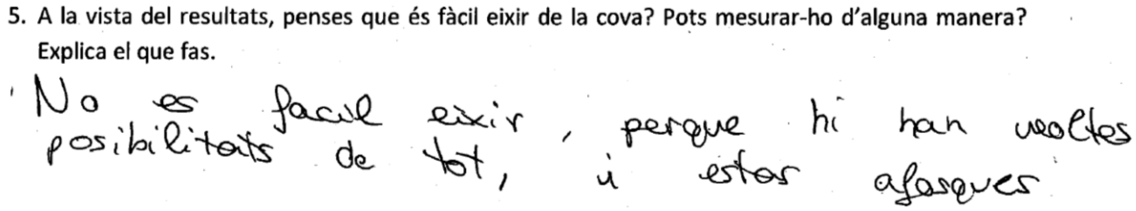

5. A la vista del resultats, penses que és fàcil eixir de la cova? Pots mesurar-ho d'alguna manera? Explica el que fas. Sí, 0'33%

Figura 30. Resposta al pretest de l'alumne A01

L'alumne dona una resposta afirmativa però no la justifica de cap forma, sols hi afegeix un nombre on pareix que l'alumne veu d'alguna forma que el 33% té un paper especial en la resposta. Aquest és el tant per cent de gent que no aconsegueix eixir de la cova a la simulació, però també s'equivoca al escriure el percentatge i col·loca l'índex resultant de la divisió seguit del símbol %.

2.2.- Negativa amb raonament incorrecte

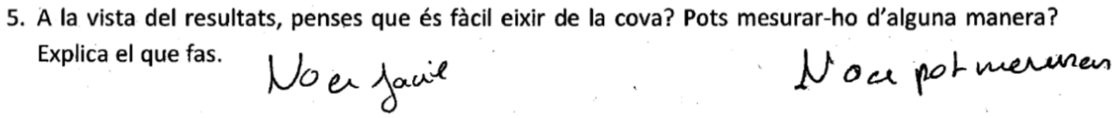

5. A la vista del resultats, penses que és fàcil eixir de la cova? Pots mesurar-ho d'alguna manera? Explica el que fas.

No es facil eixir, perque hi han moltes posibilitats de tot, i estar afosques

Figura 31. Resposta al pretest de l'alumne A14

En aquesta resposta no s'observa cap tipus de reflexió o anàlisi de les dades proporcionades, torna a donar una resposta subjectiva.

2.3.- Consideren que no es pot mesurar


5. A la vista del resultats, penses que és fàcil eixir de la cova? Pots mesurar-ho d'alguna manera? Explica el que fas. No es facil

No es pot mesurar

Figura 32. Resposta al pretest de l'alumne A10

Tot i tindre les dades davant no sap que fer per calcular-ho i això li porta a donar una resposta de caràcter subjectiu.

3.- No respon

Els resultats es recullen en la següent taula:

Taula 5. Relació del tipus de resposta que han donat els estudiants al pretest i al posttest de l'ítem 5

	1.	2.1.	2.2.	2.3.	3.
Pretest	5	4	2	4	0
Posttest	10	1	1	2	1

Pot observar-se per les dades de la taula que el nombre de respostes encertades s'ha doblat, pareix indicar que la unitat ha influït positivament en la interpretació que donen els alumnes d'un conjunt de dades.

4.6.6 Sisé ítem

Al igual que en l'ítem anterior, aquesta pregunta pretén veure si els alumnes són capaços d'aplicar cap eina estadística per interpretar els resultats d'un conjunt de dades sobre el problema, però en aquest cas per al càlcul d'una esperança matemàtica. Tal i com esta formulada la pregunta no cal que l'alumne hi responga emprant nombres, sols es vol saber si sap com fer-ho. S'esperen respostes del tipus afirmatiu indicant que cal fer el càlcul d'una mitjana o l'estadístic de centralització que l'alumne considere oportú. No obstant això, molts alumnes hi ofereixen respostes numèriques.

Classifiquem les respostes de la següent manera:

1.1.- Resposta subjectiva amb un raonament correcte

6. Podries estimar d'alguna forma el temps que s'espera que Perry tarde a desactivar l'Antimathinator cada vegada que és atrapat? Explica el que caldria fer.

Se ~~tendria~~ que fer la mitjana aritmetica, per ~~que~~ a que te done la mitja dels minuts que te donaria.

Figura 33. Resposta al posttest de l'alumne A08

Ací l'alumne no es deté en el càlcul, però tampoc s'havia demanat, sols explica que amb la mitjana aritmètica podria obtenir l'esperança en qüestió.

1.2.- Resposta numèrica emprant la moda

6. Podries estimar d'alguna forma el temps que s'espera que Perry tarde a desactivar l'Antimathinator cada vegada que és atrapat? Explica el que caldria fer.

Si, tardaría 1 minut. Perque es el que més es repeteix.

Figura 34. Resposta al posttest de l'alumne A05

L'alumne empra la moda per donar resposta i ho fa fixant-se sols en aquelles simulacions en que Perry ha aconseguit detindre el procés.

2.1.- Resposta numèrica amb raonament incorrecte

6. Podries estimar d'alguna forma el temps que s'espera que Perry tarde a desactivar l'Antimathinator cada vegada que és atrapat? Explica el que caldria fer.

Si, 34 min ~~tardaria~~ seria ~~en apagar~~ ~~tarder~~ tot el que tardaria en total en totes les vegades que s'atrapat

Figura 35. Resposta al posttest de l'alumne A03

Aquest alumne ha començat a fer el càlcul de la mitjana aritmètica, ja que 34 minuts és el resultat de sumar els temps invertits en totes aquelles simulacions en que Perry ha detingut la màquina, però no ha dividit pel nombre de simulacions i per tant la resposta s'ha de considerar incorrecta.

2.2.- Resposta numèrica sense explicació

3.- No saben com estimar la resposta

Resumim els resultats a la següent taula:

Taula 6. Relació del tipus de resposta que han donat els estudiants al pretest i al posttest de l'ítem 6

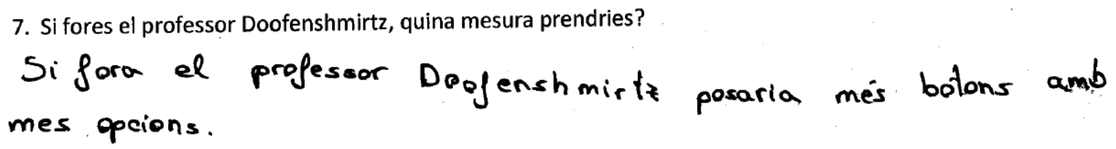
	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.
Pretest	0	0	1	6	8
Posttest	4	3	4	3	1

Com a l'apartat anterior es mostra una notòria milloria dels resultats, hem passat de tenir un gran nombre d'alumnes que no sabien com respondre i cap resposta correcta a tindre set respostes correctes.

4.6.7 Seté ítem

Aquest últim ítem té la intenció d'avaluar l'ús que l'alumne en fa de la informació a l'hora de prendre decisions. Són respostes de caràcter molt obert i per tant son difícils de classificar. Considerarem correcta qualsevol resposta que done una proposta que modifique l'aleatorietat de l'experiència en benefici dels bandolers al pretest o en benefici del professor al posttest. Classifiquem les respostes en:

1.- Correcta

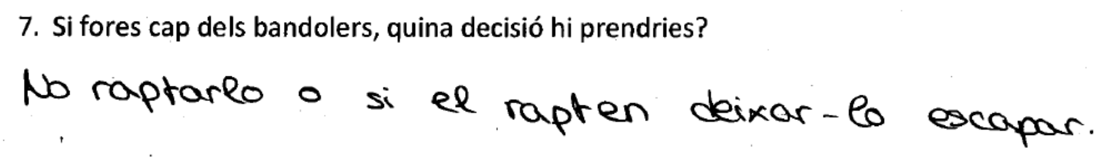

7. Si fores el professor Doofenshmirtz, quina mesura prendries?

Si fora el professor Doofenshmirtz posaria més botons amb mes opcions.

Figura 36. Resposta al posttest de l'alumne A15

En posar més botons amb més opcions, sempre que aquestes no siguen desconectar la màquina, suposarà un canvi de problema que posaria les coses més difícils a Perry.

2.- Incorrecta


7. Si fores cap dels bandolers, quina decisió hi prendries?

No raptarlo o si el rapten deixar-lo escapar.

Figura 37. Resposta al pretest de l'alumne A13

Aquest alumne no ha interpretat la informació per a benefici dels bandolers que era el que es demanava, per tant aquesta resposta és incorrecta.

3.- Sense resposta

Resumim els resultats al següent quadre:

Taula 7. Relació del tipus de resposta que han donat els estudiants al pretest i al posttest de l'ítem 7

	1.	2.	3.
Prestes	3	12	
Posttest	12	2	1

L'avaluació d'aquest ítem mostra una millora molt significativa en l'ús que els alumnes fan de la informació referent a un problema de probabilitat.

4.6.8 Relació de les respostes de tots els alumnes de l'estudi

Per tal de veure l'evolució individual de l'alumnat es mostra a continuació una taula on venen les respostes de tots els alumnes a cadascun dels ítems avaluats. Incloem la categoria millores on es mostra per a cada alumne el nombre d'ítems on passa de donar una resposta errònia a una correcta.

Taula 8. Respostes dels alumnes a cada ítem atenent a les classificacions corresponents

	Prova	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Ítem 7	Millores
A01	Pretest	2.3	2.1	1.2	2.1	2.1	2.2	2	2
	Posttest	2.3	2.2	2	2.1	2.1	1.2	1	
A02	Pretest	2.3	2.1	2	2.3	2.2	3	2	2
	Posttest	2.3	2.1	1.1	2.4	2.2	2.1	1	
A03	Pretest	2.2	1	2	2.2	2.3	3	2	2
	Posttest	2.3	2.2	1.1	2.4	2.3	2.1	1	
A04	Pretest	2.3	2.1	2	2.4	2.1	2.2	2	2
	Posttest	2.1	2.2	3	2.4	1	2.1	1	
A05	Pretest	2.3	2.1	2	2.4	1	3	2	3
	Posttest	2.1	2.1	1.1	2.4	1	1.2	1	
A06	Pretest	3	2.2	1.1	2.3	2.3	3	2	3
	Posttest	1	2.2	1.1	2.3	1	2.1	1	
A07	Pretest	2.3	2.2	1.1	2.1	2.1	2.2	2	2
	Posttest	2.1	2.2	1.1	2.1	1	1.1	3	
A08	Pretest	2.2	2.2	2	3	1	2.2	2	4
	Posttest	2.3	1	1.1	2.1	1	1.1	1	
A09	Pretest	2.2	1	1.2	2.4	2.1	2.2	2	2
	Posttest	2.1	2.1	1.1	2.4	1	2.2	1	
A10	Pretest	2.1	2.2	2	2.3	2.3	3	2	2
	Posttest	2.1	1	2	3	2.3	3	1	
A11	Pretest	3	2.2	1.2	2.4	1	3	1	2

	Posttest	2.3	1	1.1	2.3	1	1.1	1	
A12	Pretest	2.2	1	1.1	2.2	1	3	1	1
	Posttest	2.2	1	1.1	2.3	1	1.2	1	
A13	Pretest	2.2	1	2	1	2.3	2.2	2	1
	Posttest	2.1	2.2	3	3	1	2.2	2	
A14	Pretest	2.2	2.2	2	3	2.2	3	2	2
	Posttest	2.2	1	1.1	2.4	3	2.2	2	
A15	Pretest	2.2	1	2	3	1	2.1	1	2
	Posttest	2.2	1	1.1	3	1	1.1	1	

S'observa a la taula que tots els alumnes han aconseguit al menys una millora. Dels que n'han aconseguit sols una (2 alumnes) un d'ells ha donat 5 respostes correctes al posttest i per tant podia millorar ja poc. De la resta d'alumnes, 10 han millorat en les respostes de 2 ítems, 2 e n les de 3 ítems i un alumne ha aconseguit millorar en 4 de les seues respostes.

5. CONCLUSIONS

Després de l'anàlisi fet al marc teòric i de l'aplicació a l'aula hem observat que la simulació com a mètode de resolució de problemes amb contingut heurístic té un gran potencial, donat que permet a l'alumne resoldre problemes que d'altra forma no estarien al seu abast en transformar-lo en un problema en el que pot aplicar eines i destreses que ja té l'alumne al seu abast en el moment de fer la simulació.

A la vista dels resultats de l'estudi podem concloure que treballar amb el mètode de simulació per a resoldre problemes de probabilitat a les aules de secundària no sols és viable si no que a més és recomanable. Els motius són:

- Pot contribuir a desenvolupar la intuïció en situacions d'incertesa o inclús a perdre la por a respondre en aquestes situacions.
- Pot contribuir a elaborar raonaments adequats o com a mínim a estimular-lo a través de la comprensió dels problemes plantejats.
- Pot contribuir a millorar els conceptes de la probabilitat i l'assignació de probabilitats a experiències simples.
- Pot contribuir a desenvolupar un millor sentit de la intuïció en el càlcul d'esperances.

- Pot ser útil per a que els alumnes aprenguen a recollir dades en situacions d'incertesa que després són capaços de processar i millora la capacitat de processar correctament aquestes.
- Dona un context ric per al càlcul de probabilitats i esperances i contribueix a millorar aquests càlculs.
- Contribueix a fer un bon ús de la informació per a la presa de decisions davant de situacions d'incertesa.

Podem observar llavors que l'ús de la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat a les aules de secundària pot contribuir a modificar els judicis subjectius dels estudiants en situacions d'incertesa i, a més, a que els alumnes facen un bon ús, estadísticament parlant, d'un conjunt de dades relatives a la simulació d'un problema per tal de donar una solució al mateix, tal i com es plantejava a l'inici d'aquest estudi. Aleshores és del tot oportú proposar l'ús de la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat a les aules de secundària.

6. IMPLICACIONS PER A L'ENSENYAMENT

Ja que considerem que l'ús de la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat és adequat i recomanable per a l'ensenyament a l'etapa d'educació secundaria, cal tenir en compte les implicacions d'açò.

Per tal d'emprar aquest mètode el professorat ha de tenir una bona formació, no sols en el mètode de simulació sinó en tots el conceptes de probabilitat i estadística als que hem fet referència.

Cal saber resoldre els problemes de manera teòrica i per simulació, fent la traducció adequada per a l'ús de programari informàtic.

Caldrà també saber fer ús d'ordinadors i programari informàtic, com fulls de càlcul o llenguatge de programació, per tal de millorar l'eficàcia del mètode a l'aula.

En una línia futura d'investigació podria treballar-se sobre la formació del professorat en els aspectes que el mètode demana per a la seua aplicació a les aules d'educació secundària.

7. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. En Kapadia, R. i Borovcnik, M. (eds.). *Chance Encounters: Probability in Education*, 6, pp. 169-211. Kluwer Academic Publishers.

Capella, J. (2013). *La simulació en l'aprenentatge de la probabilitat en primària*. Treball de fi de grau en mestre. València: Universitat de València.

De Groot, M.H. (1975). Probability and statistics. Menlo Park: Addison-Wesley Publishing Company.

Engel, A. (1975). The probabilístic abacus. *Educational studies in mathematics*, 6, pp. 1-22.

Fischbein, E. i Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. *Educational Studies in Mathematics*, 15, pp. 1-24.

Fischbein, E., Nello, M.S. i Marino, M.S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 523-549.

Freudenthal, H. (1977). Antwoord door Prof. Dr H. Freudenthal na het verlenen van heteredoctoraat [Answer by Prof. Dr H. Freudenthal upon being granted an honorary doctorate]. *Euclides* 52, pp. 336–338.

Gordon, H. (1997). Markov Chains. En Gordon, H. *Discrete Probability* (pp. 209-249). New York: Springer.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée: Un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Reperes - Irem*, 36, pp. 15-34.

Huerta, M.P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un anàlisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las ciencias*, 20 (1), pp. 75-86.

Huerta, M.P. (2003). *Didàctica de la probabilitat i l'estadística.* Curs de Doctorat. València: Universitat de València.

Huerta, M.P. i Lonjedo, M.A. (2004). *Una clasificación de los problemes escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el anàlisis de textos*. Comunicació presentada en VIII simposi de la SEIEM (pp. 229-238). A Coruña.

Huerta, M.P. (2013). *La resolució de problemes escolars de probabilitat*. Document de treball per al màster de professorat. València: Universitat de València.

Kahneman, D., Slovic, P. i Tversky, A. (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. New York: Cambridge University Press.

Ortiz, J.J., Batanero, C. i Serrano, L. (2006). *Modelización y simulación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto de educación secundària*. Comunicació presentada en X simposi de la SEIEM (pp. 115-129). Huesca.

Polya, G. (1973). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. New Jersey: Princeton University Press.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Renyi, A. (1966). *Calcul des probabilités*. Paris: Dunod

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En Grouws, D. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Siñeriz, L. i Puig, L. (2006). Un modelo de competència para la resolución de problemes de construcción con regla y compàs. En Aymerich, J.V. i Macario, S. (eds.). *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 323-324). Castelló de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, pp. 9-35.

Yáñez, G. (2002). *Students' difficulties and strategies in solving conditional probability problems with computational simulation*. ICOTS 6. Descargado en marzo de 2014 de: http://iase-web.org/documents/papers/icots6/10_86_ya.pdf