UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Investigación en Didácticas Específicas

HABILIDADES DE DEMOSTRACIÓN DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA CON DIFERENTES GRADOS DE TALENTO MATEMÁTICO

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

JUAN ANTONIO MOYA PÉREZ

Tutorizada por:

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Dra. Adela Jaime Pastor

Departamento de Didáctica de la Matemática

Valencia, 4 de Julio de 2014

Ficha técnica:

Máster: Máster en Investigación en Didácticas Específicas por la Universitat de València

Especialidad: Didáctica de las Matemáticas

Autor: Apellidos: Moya Pérez
Nombre: Juan Antonio

Título de la memoria: Habilidades de demostración de estudiantes de Educación Secundaria con diferentes grados de talento matemático

Tutor 1: Apellidos: Gutiérrez Rodríguez
Nombre: Ángel
Departamento: Didáctica de la Matemática

Tutor 2: Apellidos: Jaime Pastor
Nombre: Adela
Departamento: Didáctica de la Matemática

Fecha de defensa:

Calificación :

Palabras clave: Demostración; Tipo empírico; Tipo deductivo; Descontextualización; Alumnos con talento matemático; Dificultades; Abstracción; Rigor matemático.

Keywords: Proof; Empirical class; Deductive class; Descontextualization; Mathematically gifted students; Difficulties; Abstraction; Mathematical rigor.

Códigos Unesco (hasta 4): 1299 (Didáctica de las Matemáticas), 1204.99 Otras (Didáctica de la Geometría), 6104.01 (Procesos Cognitivos)

Resumen: El presente trabajo Fin de Máster presenta los resultados obtenidos al analizar las resoluciones de una batería de 5 problemas por parte de alumnos de Educación Secundaria, entre los que se encuentran dos grupos de alumnos talentosos, y de 1º curso de Grado de Matemáticas, en el contexto de la enseñanza de la demostración. En particular, analizamos los distintos tipos de demostración que aparecen y las variaciones de estos atendiendo a diversos factores: el curso académico, el pertenecer o no a un grupo de altas capacidades y el tratarse de un enunciado más genérico y abstracto (parte A de los problemas) o en el que se guíe más al estudiante (parte B). Como complemento a la investigación realizamos 4 entrevistas a estudiantes en las que buscamos, además de obtener más detalles de lo plasmado en el papel, conocer qué diferencias de dificultad han experimentado entre una parte y otra de los enunciados y cuáles son sus creencias en relación con la necesidad de demostrar.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

La memoria aquí presentada corresponde al Trabajo Fin de Máster encuadrado dentro de la especialidad de Didáctica de las Matemáticas del Máster en Investigación en Didácticas Específicas de la Universidat de València.[1]

Esta memoria se sitúa en el contexto de la enseñanaza de la demostración, tanto en la Educación Secundaria como en niveles de enseñanaza superiores. A día de hoy, nadie duda de la importancia de la demostración en matemáticas y, en general, principalmente en la secundaria, los estudiantes muestran muchísimas carencias al respecto. Este déficit proviene de un cúmulo de factores: el currículum, los libros de texto, las dificultades de los alumnos en el aprendizaje y de los profesores a la hora de enseñar, etc.

Algunos matemáticos y didactas al utilizar el término demostración se refieren única y exclusivamente a las demostraciones deductivas formales (Knowles, 1998); otros, tienen una visión más amplia (Bell, 1976a; Balacheff, 1988 y Hanna, 1995). Demostrar, probar, justificar, argumentar, verificar son términos que se utilizan con frecuencia en relación con la demostración matemática, unas veces como sinónimos, otras con significados diferentes (De Villiers, 1993). Llamamos **demostración matemática** a cualquier argumento matemático elaborado para convencer a uno mismo o a un interlocutor de la veracidad de una afirmación matemática

[1] La investigación presentada en este Trabajo Fin de Máster es parte de las actividades del proyecto de investigación *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259), subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España en el Subprograma de Investigación Fundamental No Orientada del Programa Nacional de I+D+i

Nuestro objetivo principal es analizar las dificultades mostradas por los estudiantes a la hora de afrontar el proceso de demostración, observando como varía esta dificultad atendiendo a diversos factores y, como consecuencia, ser capaces de establecer conclusiones que aporten información sobre el estado actual del problema tanto en la Educación Secundaria como en los primeros años de educación universitaria.

Esta enseñanza y aprendizaje depende de muchos factores: matemático e histórico-epistemológicos, cognitivos y socio-culturales (Harel y Sowder, 2007), a partir de los cuales una gran cantidad de autores se han hecho diversas preguntas: ¿cuáles son las funciones de la demostración?, ¿qué visión tienen los estudiantes de la demostración?

A lo largo de la historia la noción de demostración ha sido cambiante y ha ido evolucionando en función, primero de las necesidades primarias y más tarde de las visiones de cada época. A día de hoy muchos didactas (Sfard, 1995) establecen un paralelismo entre la evolución natural del aprendizaje de la demostración en las aulas y la evolución histórica de ésta a lo largo de los años.

Algunos investigadores (Bell, 1976a y b; Blacheff, 1988; etc) han analizado los tipos de demostraciones realizadas por estudiantes de diferentes edades y han identidficado diversos tipos de demostración que nos permiten delimitar en qué punto se encuentra el aprendizaje del alumno y por tanto, saber dónde enfatizar nuestra enseñanza.

En esta memoria presentamos resultados de un estudio experimental que ha consistido en observar las resoluciones de un conjunto de problemas por distintos grupos de alumnos en el aula. Estos problemas tienen la característica común de pedir a los estudiantes una respuesta razonada, de manera que les permitan mostrarnos sus aptitudes en el campo de la demostración.

Nuestros objetivos específicos son:

1) Analizar las posibles diferencias entre cursos en lo referente a la corrección de las resoluciones presentadas por los alumnos.

2) Analizar las posibles diferencias entre cursos en lo referente a los tipos de demostración que aparezcan en las resoluciones de los alumnos.

3) Focalizar los objetivos 1) y 2) en estudiar las diferencias entre estudiantes de capacidades matemáticas medias y estudiantes de altas capacidades matemáticas del mismo nivel.

4) Analizar, a partir de la información proporcionada por el alumno en las entrevistas personales, las diferencias de dificultad encontradas entre las partes A y B de los enunciados y las creencias que tienen alrededor de la necesidad de demostrar.

5) A partir de los tipos de demostraciones hechas por los estudiantes, intentar refinar la clasificación de tipos de demostración de nuestro marco teórico de partida.

En el capítulo 2 de esta memoria realizaremos una breve revisión bibliográfica de los trabajos más significativos en relación con el campo de la demostración matemática. El capítulo 3 irá exclusivamente dedicado a desarrollar el marco teórico en el que basaremos nuestra experimentación, mientras que en los capítulos 4, 5 y 6 nos ocuparemos de todo lo relacionado con el experimento llevado a cabo en las aulas, tanto su diseño como los resultados obtenidos al realizar el análisis correspondiente.

Por último, en el capítulo 7 expondremos los conclusiones extraídas de los datos observados, partiendo de los objetivos establecidos al comienzo del trabajo.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

A lo largo de este capítulo realizamos una breve descripción de los trabajos que consideramos más significativos por su relación con la demostración matemática y, por lo tanto, con lo tratado en esta investigación. En ninguno de los apartados pretendemos realizar una lista exhaustiva de las investigaciones existentes, sino que presentamos las que más relevancia han tenido en el desarrollo de este trabajo. Dividiremos esta revisión en 2 apartados: clasificación de demostraciones y creencias de los estudiantes respecto de la actividad de demostrar y aprendizaje de la demostración en alumnos de altas capacidades.

Tanto Mariotti (2006) como Harel y Sowder (2007), contienen una visión global del panorama actual de la demostración matemática en el campo de la didáctica. La primera trata el estado actual de la demostración en las aulas, las dificultades que presentan los estudiantes en su aprendizaje y cual debe ser la actuación del profesor frente a estas dificultades. Harel y Sowder realizan un repaso de los distintos elementos influyentes en el aprendizaje y enseñanaza de la demostración, las funciones de la demostración, los distintos tipos de demostración y su relación con el desarrollo de ésta a lo largo de la historia y por último, hacen referencia a distintos estudios sobre la demostración realizados en distintos niveles educativos.

2.1 – Clasificación de demostraciones

Bell (1976a y b) identifica dos categorías de demostraciones: las **empíricas**, caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción y las **deductivas**, que usan cadenas de deducciones lógicas para conectar la hipótesis de la que se parte con lo que se quiere probar. Según el número de ejemplos y la complejidad de los mismos, Bell dividió el grupo empírico en varias subcategorías y lo mismo hizo con el caso de las demostraciones deductivas.

Balacheff (1988) distingue entre demostraciones **pragmáticas** (equivalentes a las denominadas empíricas por otros autores), basadas en el uso de ejemplos, y demostraciones **conceptuales** (equivalentes a las deductivas), basadas en la formulación abstracta de propiedades y las relaciones establecidas entre estas propiedades. Dentro de las demostraciones pragmáticas encontramos tres tipos: **empirismo naif**, **experimento crucial** y **ejemplo genérico**. Y dentro de las de tipo conceptual Balacheff distingue entre **experimento mental** y **cálculo simbólico**.

Harel y Sowder (1996), y Sowder y Harel (1998) distinguen entre tres tipos de demostraciones (llamados por ellos “proof schemes”): de **convicción externa** (la justificación por parte del alumno se basa en la autoridad de una fuente externa (profesor, un libro de texto…)), **empíricas** (basadas en ejemplos, que a su vez pueden ser de tipo perceptivo o inductivo) y **analíticas** (equivalentes a las denominadas deductivas o conceptuales por otros autores)**,** basadas en argumentos genéricos o procesos mentales que dan lugar a una demostración matemática formal; pueden ser de tipo transformativo o axiomático.

Basándose en los trabajos citados anteriormente, Marrades y Gutiérrez (2000) proponen un marco teórico que categoriza las demostraciones y lo usan en una investigación llevada a cabo con estudiantes de la ESO. Distinguen entre demostraciones **empíricas** (el elemento de convicción son los ejemplos) y **deductivas** (el elemento de convicción son argumentos abstractos basados en propiedades generales, operaciones abstractas y deducciones lógicas). Dentro del primer tipo, en función del tipo de ejemplo usado y su generalidad diferencian entre **empirismo naif**, **experimento crucial** y **ejemplo genérico,** distinguiendo a su vez varias subclases dependiendo del uso que se hace de los ejemplos. En el caso de las demostraciones de tipo deductivo, las dividen en **experimentos mentales** (el ejemplo forma parte de la demostración) y demostraciones **deductivas formales** (no aparecen ejemplos en la demostración), que a su vez pueden ser **transformativas** o **estructurales**.

Ibañes (2001) estudia el proceso de aprendizaje de la demostración en el bachillerato. Ibañes mantiene las tres grandes categorías de Harel y Sowder (1996), pero introduce nuevas subclases que tienen como finalidad adaptar el modelo a las características de sus datos.

Rodríguez (2006), en su trabajo de investigación, partiendo del estudio y la categorización realizada por Marrades y Gutiérrez (2000), estudia las diferencias entre los procesos de demostración utilizados por los alumnos de los últimos años de la Licenciatura en Matemáticas en un entorno de Software de Geometría Dinámica (concretamente con el Cabri) y en un entorno clásico de lápiz y papel.

2.2 – Creencias de los estudiantes a la hora de demostrar y aprendizaje de la demostración en alumnos con talento matemático

De Villiers (1991) estudia las creencias de los estudiantes relacionadas con la necesidad de demostrar y las formas de demostrar y cual es la mejor forma de introducirles el concepto de demostración teniendo en cuenta esas creencias. Concluye que una vez que la función de convicción no es suficiente para persuadir al alumno de la necesidad de demostrar (principalmente en las demostraciones geométricas), el profesor debe de hacer hincapié en otras funciones, tales como las de descubrimiento, sistematización o verificación.

En lo que se refiere al aprendizaje de la demostración en alumnos con talento matemático, Leung (1994) estudia el proceso de resolución de 9 problemas en alumnos de altas capacidades en comparación con alumnos de nivel medio, todos ellos estudiantes de 4º de Primaria. Mientras que en los problemas cortos y más directos las diferencias observadas son nimias, en los problemas cuya resolución requiere una mayor elaboración y organización, la mayor habilidad y cantidad de recursos de los alumnos con talento matemático no deja lugar a dudas.

Sriraman (2004) investiga los paralelismos a la hora de resolver un problema entre alumnos talentosos y matemáticos profesionales. En su estudio, cuatro estudiantes con talento matemático debían establecer la veracidad o falsedad de una conjetura geométrica dada. Una vez analizadas las soluciones el autor concluye que se pueden establecer "isomorfismos notables" entre las resoluciones de estos 4 estudiantes con las dadas por cualquier matemático profesional.

Heinze (2005) estudia las diferencias observadas en estrategias resolutoras entre alumnos talentosos y no talentosos de 6 a 10 años de edad. Los primeros son capaces de trabajar de una manera rápida y sistemática, introduciéndose de lleno en algún momento en la estructura matemática de los problemas. También destaca su alta capacidad para verbalizar y explicar correctamente lo plasmado en el papel.

3. MARCO TEÓRICO

El marco teórico sobre el que fundamentamos nuestra investigación es, principalmente, el estudio de Marrades y Gutiérrez (2000), en el que se describen distintos tipos de demostración (figura 3.1). Esta clasificación, a su vez, toma como punto de partida las clasificaciones realizadas por Balacheff (1988), Harel y Sowder (1996) y Sowder y Harel (1998).

Marrades y Gutiérrez, como ya mencionamos en el capítulo anterior, dividen las demostraciones en **empíricas** (los ejemplos son la demostración) y **deductivas** (descontextualización, el elemento de convicción son argumentos abstractos). Dentro de las "empíricas" aparecen el **empirismo naif** (la justificación consiste en ver que se cumple la conjetura en algún ejemplo seleccionado al azar), que puede ser de tipo **inductivo** (sólo se presta atención a los dibujos) o **deductivo** (se presta también atención a los elementos matemáticos); el **experimento crucial** (se demuestra la veracidad de la conjetura en un ejemplo específico seleccionado lo más general posible) y el **ejemplo genérico** (la conjetura se cumple en un ejemplo considerado representante de su clase e incluye todo tipo de transformaciones y razonamientos abstractos siempre basados en el ejemplo). Dentro de los "experimentos cruciales" y los "ejemplos genéricos" aparecen 4 subtipos: **basado en el ejemplo** (la justificación consiste en la existencia del ejemplo y ausencia de contraejemplos), **constructivo** (la justificación se centra en la forma en que se obtiene el ejemplo), **analítico** (la justificación se centra en propiedades empíricas del ejemplo) e **intelectual** (la justificación parte de observaciones empíricas del ejemplo, pero usa principalmente propiedades aceptadas o relaciones entre los elementos del ejemplo).

En el tipo "deductivo" podemos distinguir entre **experimento mental** (se usa un ejemplo específico en la organización de la prueba, pero ésta tiene sentido sin él) y tipo

deductivo formal (la justificación se basa en operaciones mentales sin que aparezca ningún ejemplo). Dentro de cada uno de estos dos tipos aparecen los subtipos **transformativo** (el problema inicial se transforma en uno nuevo) y **estructural** (la justificación consiste en una secuencia de deducciones lógicas que parten de las hipótesis y llegan a lo que queremos probar).

Además, dentro de cada tipo ("empírico" y "deductivo") los autores incluyen la categoría **fallido**, destinada a incluir aquellos intentos de demostración, que, o bien no elaboran una conjetura correcta de lo que se quiere probar o, en el caso de elaborarla, fallan en su justificación.

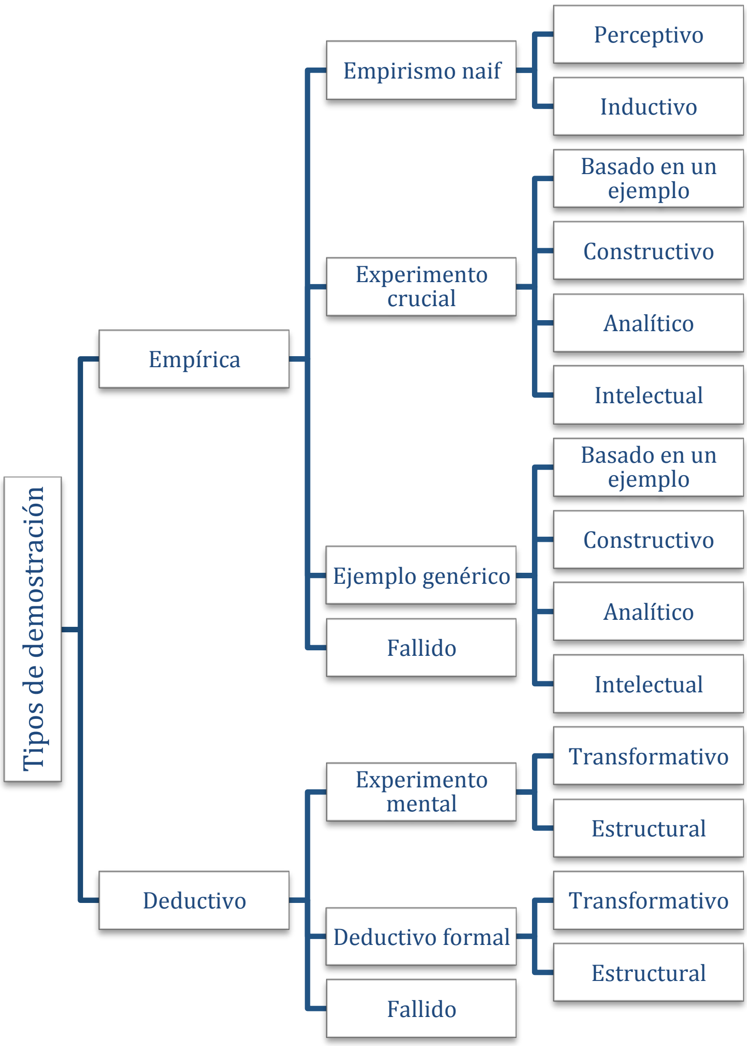


Figura 3.1: Tipos de demostración. Clasificación de Marrades y Gutiérrez (2000)

Como ya hemos mencionado en la introducción de este trabajo (capítulo 1), uno de nuestros objetivos es refinar esta clasificación e intentar adaptarla a lo que creemos que realmente sucede. Tras las resoluciones analizadas podemos concluir que ser de tipo "intelectual" es una condición necesaria y suficiente para tratarse de un "ejemplo genérico". Por un lado, el tipo "ejemplo genérico" implica una componente de abstracción y descontextualización que sólo aparece en el subtipo "intelectual"; por otro, si partimos de un subtipo "intelectual" y consideráramos que éste se encuadra dentro de los "experimentos cruciales", nos encontraríamos, por definición de este tipo de demostración, con un ejemplo concreto que no aporta más información que la que se obtiene de su mera existencia, su construcción o las propiedades empíricas explícitas que se deducen de él, con lo que llegaríamos a una contradicción con la definición de subtipo "intelectual".

Por tanto, dentro de las demostraciones catalogadas como "Experimento crucial" encontramos sólo los subtipos "basado en el ejemplo", "constructivo" y "analítico" y a continuación, ordenando por formalidad, aparecerían en esta clasificación los que podríamos denominar como "Ejemplos genéricos intelectuales" o simplemente "Ejemplos genéricos", como los hemos denotado en los capítulos 5 y 6. Por otro lado, incluimos dentro de las demostraciones deductivas, el tipo "Deductivo informal", que contiene todas aquellas demostraciones que, presentan las características de una demostración "Deductiva formal", pero carecen del orden y rigor matemático de éstas. La figura 3.2 muestra como quedaría la nueva clasificación, una vez introducidas las modificaciones mencionadas.

Sin más preámbulos pasamos a detallar en que consiste cada uno de los tipos de demostración de nuestra nueva clasificación de demostraciones:

- **Demostraciones empíricas**: los ejemplos son la demostración. Distinguimos tres tipos, dependiendo del modo en que los ejemplos son elegidos.
  - **Empirismo naif**: la justificación consiste en ver que la conjetura es cierta en algunos ejemplos, seleccionados sin ningún criterio específico. Podemos distinguir entre**:**
    - **Perceptivo**: sólo se presta atención a dibujos u otros elementos perceptivos.
    - **Inductivo**: se presta atención también a elementos matemáticos.

- **Experimento crucial**: se prueba la veracidad de la conjetura en un ejemplo seleccionado por el resolutor, intentando que sea lo más general posible. Según el uso que se haga del ejemplo podemos distinguir entre:
    - ♦ **Basado en el ejemplo**: sólo se muestra el ejemplo sin aportar nada más. La demostración se basa en la existencia del ejemplo.
    - ♦ **Constructivo**: la justificación se centra en explicar la manera en que se obtiene el ejemplo.
    - ♦ **Analítico**: se basa en las propiedades observadas empíricamente en el ejemplo.
- **Ejemplo genérico**: la justificación se basa en un ejemplo específico, visto como representante de su clase. La justificación utiliza argumentos abstractos, pero siempre basándose en el ejemplo.
- **Fallido**: se usan estrategias empíricas pero no se llega a establecer una conjetura correcta o bien se establece una conjetura correcta pero se falla en la justificación. No nos proporcionan suficiente información para incluirlas dentro de cualquiera de las otras categorías.

▪ **Demostraciones deductivas**: caracterizadas por la descontextualización de los argumentos usados, basadas en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Distinguimos tres tipos:

- **Experimento mental**: se hace uso de un ejemplo específico para ayudar en la organización de la prueba, pero sin él la prueba sigue teniendo sentido completo. Puede ser de dos tipos:
    - ♦ **Transformativo:** se transforma el problema inicial en uno nuevo
    - ♦ **Estructural**: basada en secuencias de deducciones lógicas derivadas de las hipótesis del problema, definiciones, teoremas, etc.
- **Deductivo informal**: se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ningún ejemplo específico, pero carece del orden y el rigor matemático para ser considerada una demostración formal. Al igual que sucede con los experimentos mentales, puede ser de tipo transformativo o estructural.

- **Deductivo formal**: se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ningún ejemplo específico. Como los dos tipos anteriores, puede ser de tipo transformativo o estructural.
- **Fallido**: se usan estrategias deductivas pero no se llega a establecer una conjetura correcta o bien se establece una conjetura correcta pero se falla en la justificación. No nos proporcionan suficiente información para incluirlas dentro de cualquiera de las otras categorías.

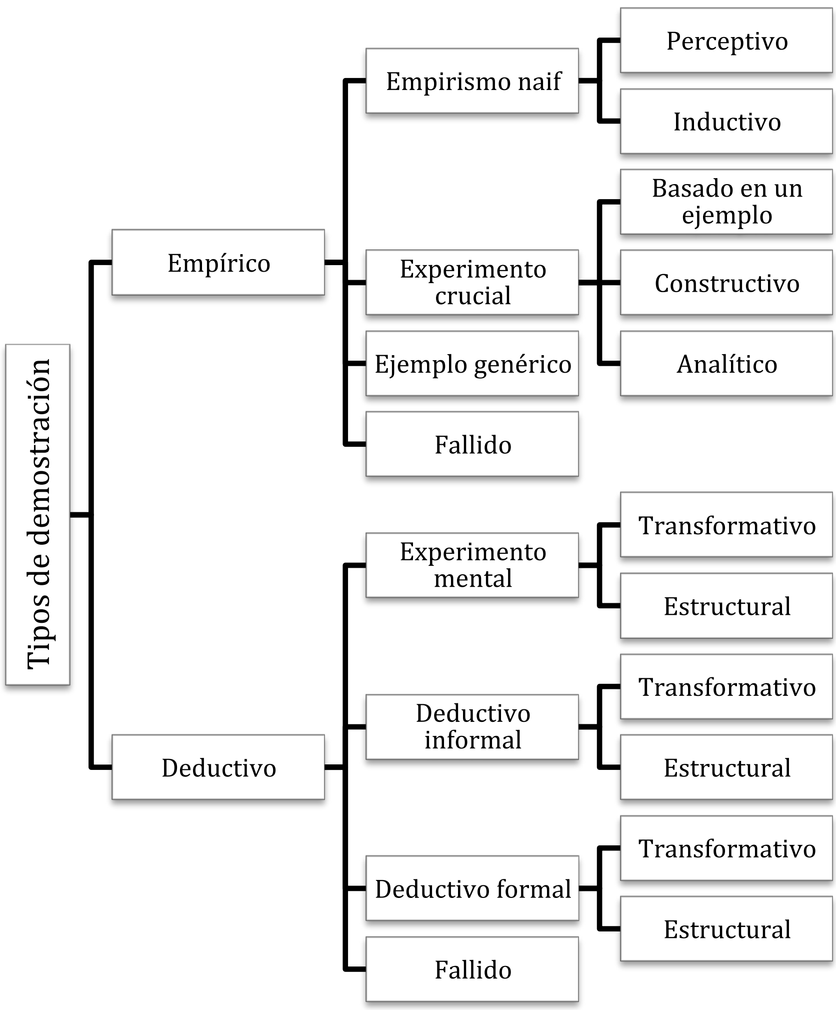


Figura 3.2: Tipos de demostración. Clasificación modificada.

En lo que se refiere al análisis de las creencias de los estudiantes relacionadas con la necesidad de demostrar y las formas de demostrar que hemos mencionado también en los objetivos de esta experimentación, tomaremos como marco de referencia el trabajo de Michael De Villiers (1991), ya explicado brevemente en el capítulo anterior.

Por último, con respecto a la diferencia de aptitudes en el ámbito de la demostración mostradas por los alumnos talentosos respecto a un grupo ordinario, los trabajos de A.Heinze (2005) y B.Sriraman (2004), que obtienen diferencias notables entre los procesos de demostración de los alumnos medios y los alumnos con talento matemático en el primer caso y grandes semejanzas entre estos últimos y los matemáticos profesionales en el segundo, nos proporcionan una fuente importante de información.

4. METODOLOGÍA

En este capítulo damos respuesta a todas las cuestiones relacionadas con el diseño del experimento: criterios utilizados, características del centro de enseñanza, qué procedimientos se siguieron para realizar el análisis, etc.

Centros de enseñanza:

Este experimento se ha realizado en un instituto de Educación Secundaria de Valencia y en la Facultad de Matemáticas de la Universitat de València.

En el instituto de Educación Secundaria los problemas se han pasado a un total de 65 alumnos, 13 de 1º de ESO, 41 de 4º de ESO, 5 correspondientes a un grupo integrado por alumnos de altas capacidades de 1º y 2º de ESO y 6 de un grupo de altas capacidades de 3º y 4º de ESO.

Por lo que se refiere a la Facultad de Matemáticas, el problema seleccionado en este caso se ha pasado a 19 alumnos de primer curso de Grado en Matemáticas.

Características del experimento:

Hemos seleccionado una batería de 5 problemas, todos ellos en el área de geometría, en los que se requiere que el resolutor no sólo dé una respuesta adecuada, sino que argumente los motivos de la misma, con el objetivo de poder analizar y clasificar los distintos tipos de justificaciones que se nos presenten. Además, los ejercicios se han seleccionado para que, en su gran mayoría, exijan para su entendimiento unos conocimientos matemáticos relativamente sencillos, y por tanto sean aptos para distintos cursos y niveles educativos.

Todos los problemas incluyen una parte A, con un enunciado más general, y una parte B, en la que se guia más al estudiante en cuáles son los pasos a seguir en el proceso de demostración. Con esta estructura buscamos estudiar hasta qué punto mejoran las respuestas cuando disminuye el nivel de abstracción y generalidad del problema.

Realización del experimento

En el instituto de Educación Secundaria los problemas se pasaron en una sesión de clase de aproximadamente 50 minutos de duración, en horario escolar en el caso de los grupos ordinarios de 1º y 4º ESO y en una de las sesiones ordinarias que realizan en horario extraescolar en el caso de los dos grupos de altas capacidades. En este último caso la semana siguiente a la realización de los problemas se volvió al instituto para realizar entrevistas personales a dos alumnos de cada grupo, previamente seleccionados en función del interés de sus argumentos y necesidad de profundización en los mismos. Se realizó la grabación del audio para su posterior análisis.

Los estudiantes de primer curso de Grado de Matemáticas realizaron el ejercicio planteado para el estudio dentro de una sesión de seminarios de 1 hora y media de duración de la asignatura de Matemática Discreta.

En todos los casos (salvo en el grupo de primero de Grado) se dividió el tiempo de la sesión en dos partes; en la primera de ellas se les entregó una hoja con dos problemas (parte A) y más o menos transcurrida la mitad de la sesión se recogió esta hoja y se les repartió otra hoja que contenía los mismos problemas pero con unos enunciados que guiaban más al alumno en su resolución (parte B).

Los estudiantes no contaban con instrumentos de dibujo y, sólo en el caso de los problemas 3 y 4, se les permitió el uso de calculadora.

Proceso de análisis

Una vez recogidos todos los datos (resoluciones de los estudiantes y audio de las entrevistas), en primer lugar, como detallaremos en el capítulo 6, analizamos y clasificamos las demostraciones en función de su corrección matemática; una vez hecho esto, pasamos a clasificarlas, en un primer momento, siguiendo el marco teórico de Marrades y Gutiérrez (2000). Al darnos cuenta que aparecen resoluciones que no encajan en ninguno de los tipos de demostración establecidos en este modelo por un lado y que, en el caso de las demostraciones empíricas, esta clasificación puede ser refinada, realizamos la modificación en la clasificación de tipos de demostración que aparece en el capítulo anterior.

Una vez extraida toda la información del conjunto de datos, pasamos a analizar las diferencias observadas entre los distintos niveles educativos, grupos de capacidades medias y alumnos talentosos y partes A y B de los enunciados y a extraer las conclusiones correspondientes.

Por lo que se refiere al audio recogido de las entrevistas, analizamos las respuestas de los 4 estudiantes entrevistados a qué diferencias de dificultad han encontrado entre las partes A y B de los enunciados y, tomando como referencia el trabajo de De Villeurs (1991), sus creencias sobre la necesidad y utilidad de demostrar.

5. DISEÑO DE LOS PROBLEMAS

El instrumento de recogida de información está formado por 5 problemas, todos ellos con dos partes, una parte A, más abstracta desde el punto de vista matemático, y una parte B, en cuyos enunciados se guiaba un poco más al estudiante.

A continuación, presentamos los enunciados de los problemas de una forma resumida. En el apartado de anexos aparecen tal como se entregaron a los estudiantes.

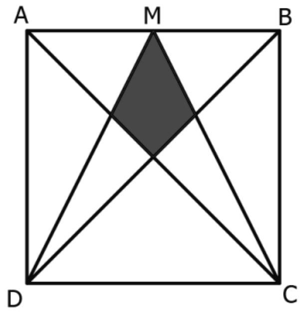
- **Problema 1A:** ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? Justifica tu respuesta.

- **Problema 1B:** ¿Cuántas diagonales parten del vértice de un pentágono? ¿Y del vértice de un polígono de n lados? ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? Justifica tus respuestas

- **Problema 2A:** ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un polígono de n lados? Justifica tu respuesta.

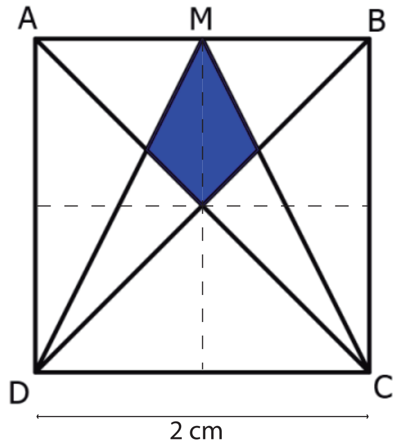
- **Problema 2B:** ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un cuadrilátero? ¿Y de un pentágono? En general, ¿cuánto vale la suma de los ángulos de un polígono de n lados? Justifica tus respuestas.

- **Problema 3A:** Consideremos el cuadrado $ABCD$ y sea M el punto medio del lado AB. Trazamos todas las diagonales posibles[2] entre los puntos y consideramos la parte sombreada que aparece en la figura:



¿Qué fracción del área total es el área sombreada? (Nota: puedes utilizar la calculadora).

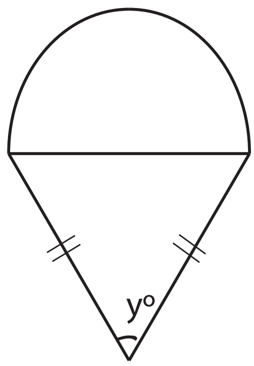
- **Problema 3B:** Consideremos el cuadrado $ABCD$ de lado 2 cm y sea M el punto medio del lado AB. Trazamos todas las diagonales posibles entre los puntos y consideramos la parte sombreada que aparece en la figura:



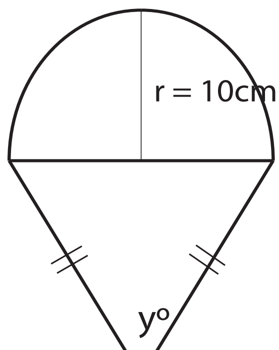
¿Qué fracción del área total es el área sombreada? (Nota: puedes utilizar la calculadora).

[2] Como se muestra en la figura, entendemos por diagonal cada uno de los segmentos que une los puntos no adyacentes del cuadrado inicial, incluyendo el punto M

- **Problema 4A:** La siguiente figura muestra un semicírculo y un triángulo isósceles que tienen la misma área. ¿Cuánto vale el ángulo y? Justifica tu respuesta.



- **Problema 4B:** La siguiente figura muestra un semicírculo de radio 10 cm y un triángulo isósceles que tienen la misma área. ¿Cuánto vale el ángulo y? Justifica tu respuesta.



- **Problema 5A:** ¿Se puede resolver un triángulo rectángulo conociendo sólo dos de sus elementos (lados y/o ángulos)? Razona tu respuesta.

- **Problema 5B:** ¿Se puede resolver un triángulo rectángulo conociendo sólo los valores de dos de sus lados? ¿Y conociendo sólo los valores de dos de sus ángulos? ¿Y conociendo sólo los valores de uno de sus lados y uno de sus ángulos? Justifica tus respuestas.

Los problemas asignados a cada grupo fueron los siguientes:

	1º de ESO	4º de ESO	A. CAPACIDADES (1º y 2º de ESO)	A. CAPACIDADES (3º Y 4º de ESO)	1º GRADO
Problema 1	13		5	6	19(*)
Problema 2	13		5		
Problema 3				6	
Problema 4		41			
Problema 5		41			

Tabla 5.1: Problemas asignados a cada grupo

(*) Sólo realizaron la parte A.

Pretendemos estudiar:

- Las diferencias observadas en cada uno de los alumnos entre las respuestas dadas a las partes A y B de los problemas, esperando encontrar un número mayor de resoluciones correctas en la parte B.

- Los diferentes tipos de demostraciones que previamente habíamos conjeturado que era probable que aparecieran en cada uno de los problemas debido a sus características particulares (tabla 5.2).

- Las diferencias de resolución entre cursos, esperando encontrar un nivel mayor de corrección y abstracción matemática conforme vamos subiendo de curso.

- Las diferencias de resolución entre los alumnos de un grupo ordinario y aquellos de su mismo curso pero encuadrados dentro de un grupo denominado de altas capacidades.

- Las creencias de los alumnos entrevistados sobre la necesidad de demostrar.

A continuación, realizamos un breve análisis de las características de cada uno de los problemas:

- **Problema 1**: nos preguntan por el número de diagonales que presenta un polígono de n lados. Esperamos encontrar en las resoluciones, dada la amplia gama de cursos en las que ha sido planteado, desde ejemplos concretos de polígonos de un número bajo de lados (sin ninguna explicación en unos casos y estableciendo conjeturas a partir de ellos de la fórmula general en otros) a demostraciones deductivas informales que sean capaces de generalizar los argumentos sin el apoyo de los ejemplos, e incluso (ya que se ha pasado también en el primer curso de Grado en Matemáticas), alguna demostración de tipo deductivo formal.

- **Problema 2**: al igual que ocurre con el problema 1, el enunciado admite un abanico enorme de tipos de demostración. En este caso, al no haberse pasado a alumnos de cursos superiores, no esperamos encontrar demostraciones de tipo deductivo; en el mejor de los casos, alguna de tipo ejemplo genérico (una descontextualización, pero siempre apoyándose en los ejemplos).

- **Problema 3:** nos preguntan por el área de la parte sombreada de la figura. Este problema se puede resolver de varias formas (desde usando procedimientos más sencillos como la semejanza de triángulos o el teorema de pitágoras hasta haciendo uso de técnicas de geometría analítica más potentes), pero en todas las variantes, en la parte A, la resolución exige, partiendo de los datos iniciales, una combinación, transformación y manipulación adecuada de los mismos para llegar al resultado buscado (estamos, por tanto, haciendo referencia a los tipos deductivos transformativos (formales o informales)); en la parte B, la mecánica será la misma, pero trabajando con datos concretos, es decir, esperamos encontrar demostraciones empíricas de tipo constructivo (experimento crucial-constructivo).

- **Problema 4:** la resolución de este problema exige el conocimiento de las fórmulas de las áreas del triángulo y del círculo, así como el manejo de las razones trigonométricas. A partir de aquí, esta información hay que ordenarla y combinarla adecuadamente para obtener el resultado buscado. En el caso de la parte A, donde se trabaja con cantidades genéricas, los únicos tipos de demostración que se prestan a aparecer son los deductivos transformativos, ya sea en su variante formal o informal (dependiendo de cómo se estructure la información y del rigor matemático de la prueba). En la parte B, donde se pide lo mismo pero con datos concretos, la demostración esperada encaja perfectamente en el tipo empírico – experimento crucial constructivo.

- **Problema 5**: este problema se diferencia de los problemas 1 y 2 en su exigencia de unos conocimientos matemáticos de partida mayores para su correcta comprensión (trigonometría), pero se asemeja mucho a estos dos en que, al igual que sucedía con ellos, su resolución admite, en función de la interpretación del enunicado, creencias sobre la demostración y habilidades del alumnado, desde ejemplos concretos en cada uno de los casos preguntados, a demostraciones en las que se razone como se obtendría la información desconocida en cada uno de los casos, sin hacer uso de ejemplos. La resolución de este problema es bastante lineal, por tanto, no esperamos, dentro de las demostraciones de tipo deductivo, la irrupción de su variante transformativa.

Luego, de cada uno de los problemas planteados esperamos encontrar, en concordancia con el análisis realizado, los tipos de demostración que se muestran en las siguientes tablas:

	Demostraciones Empíricas					
	Empirismo naif		Experimento crucial			Ejemplo genérico
	Perceptiva	Inductiva	Basada en un ejemplo	Constructiva	Analítica	
Problema 1A	x	x	x	x	x	x
Problema 1B	x	x	x	x	x	x
Problema 2A	x	x	x	x	x	x
Problema 2B	x	x	x	x	x	x
Problema 3A				x		
Problema 3B				x		
Problema 4A				x		
Problema 4B				x		
Problema 5A			x	x	x	x
Problema 5B			x	x	x	x

Tabla 5.2: Demostraciones Empíricas esperadas en cada problema

	Demostraciones Deductivas					
	Experimento mental		Deductivo informal		Deductiva formal	
	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.
Problema 1A	x	x	x	x	x	x
Problema 1B	x	x	x	x		
Problema 2A	x	x				
Problema 2B	x	x				
Problema 3A				x		x
Problema 3B				x		x
Problema 4A				x		x
Problema 4B				x		x
Problema 5A	x		x			
Problema 5B	x		x			

Tabla 5.3: Demostraciones deductivas esperadas en cada problema

De los datos de la tabla se deduce claramente que los problemas 1, 2 y 5, los dos primeros de geometría plana y el tercero más orientado al campo de la trigonometría, permiten una mayor variedad de tipos de demostración.

Por otro lado, los problemas 3 y 4 aparecen como complemento de los otros tres; son problemas de los que se espera, en su versión más abstracta, que los alumnos realicen cálculos algebraicos manipulativos, mientras que en la parte B de los enunciados, ya trabajando con números, una demostración empírica constructiva. No obstante, no cerramos el abanico a un cruce entre estas posibilidades, como se indica en la tabla.

Como quedará reflejado en las tablas resumen del capítulo de resultados, añadimos a cada tipo de demostración (empíricas y deductivas) una categoría más, denominada como "fallidos", en concordancia directa con la clasificación realizada por Marrades y Gutiérrez (2003), destinada a encuadrar aquellas resoluciones realizadas por los alumnos que pese a contener información suficiente para poder realizar la distinción entre los enfoques empírico y deductivo, no muestran una consistencia mínima exigible para ser considerada como resoluciones, al menos, parcialmente correctas. Los resoluciones o bien en blanco o bien con una cantidad tan escasa de información que no nos permitan distinguir ni tan siquiera entre lo deductivo y lo empírico irán a parar a la categoría de fallidos, que aparecerá en una tabla al margen

6. RESULTADOS

En este capítulo pasamos a detallar los resultados obtenidos en nuestra experimentación.

En primer lugar daremos ejemplos y analizaremos, para cada uno de los problemas, el tipo o tipos de demostraciones más repetidos por el alumnado participante en esta experimentación.

Seguidamente mostraremos dos resúmenes:

- Un primer resumen en el que podremos observar, a nivel global, la corrección de cada uno de los ejercicios realizados, matemáticamente hablando. Las distintas soluciones quedarán categorizadas en los grupos bien completo, bien incompleto, regular y mal.
- Un segundo resumen de los distintos tipos de demostración que han aparecido en cada uno de los problemas planteados, en primer lugar en global y más tarde centrándonos en cada uno de los grupos.

Por último, analizaremos, a partir de las impresiones de los 4 alumnos entrevistados de distintos grupos, la diferencia de dificultad que experimentaron entre los enunciados A y B de los problemas y qué creencias tienen de partida sobre la necesidad de demostrar.

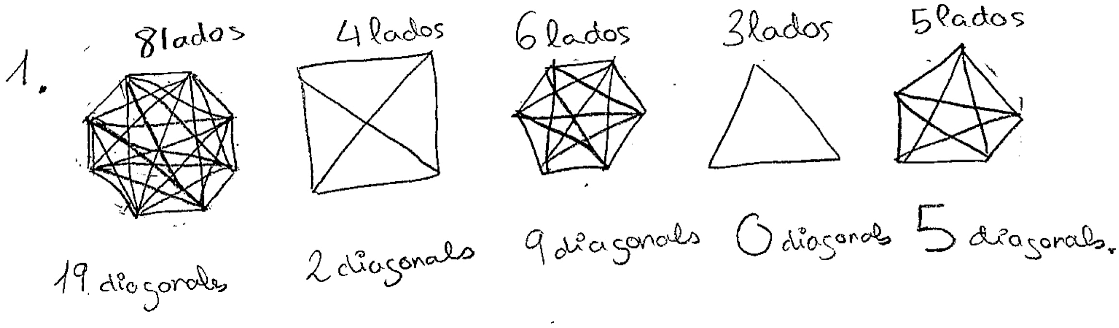
Para referirnos a los estudiantes en las secciones 1 y 3 utilizamos los códigos 1 (1º de ESO), 4 (4º de ESO), AC12 (alumnos de altas capacidades de 1º y 2º de ESO), AC34 (alumnos de altas capacidades de 3º y 4º de ESO) y 1G (1º de Grado), seguidos de la numeración asignada a cada alumno dentro de cada grupo (por ejemplo AC342, hará referencia al alumno 2 del grupo de altas capacidades de 3º y 4º de ESO).

6.1 - Análisis Cualitativo

En esta sección damos ejemplos de los tipos de demostración más representativos que han aparecido en cada uno de los problemas, justificando el porqué pertenecen a una clase determinada.

Problema 1A:

- **Ejemplo 1: 13. Empírica - Experimento crucial - Basado en el ejemplo**



El alumno proporciona una lista de ejemplos, sin aportar nada más.

- **Ejemplo 2: 1G1. Deductiva – Deductiva formal - transformativa**

Un polígono de n lados tiene n vértices. Si los combinamos sin repetición de 2 en 2 tendremos todas las diagonales más los lados de dicho polígono, luego el nº de diagonales será:

$$|D| = C_{n,2} - n = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-3n}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{n(n-3)}{2}} \checkmark$$

La prueba está basada en operaciones mentales, sin la ayuda de ningún ejemplo. Es deductiva formal por el orden y rigor matemático utilizado y transformativa porque se pasa del problema inicial a uno nuevo (de combinatoria).

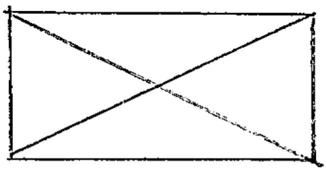
- **Ejemplo 3: 1G5. Deductiva – Deductiva informal – Estructural**

Un polígono de n lados tendrá n vértices; teniendo en cuenta que un vértice no puede hacer una diagonal con sus dos lados contiguos ni consigo mismo, cada vértice hace n-3 diagonales. Como una diagonal se corresponde con 2 vértices si calculásemos $n\cdot(n-3)$ estaríamos contando cada diagonal 2 veces por tanto para que el nº de diagonales sea el correcto la formula general será:

$$\boxed{\frac{(n-3)\cdot n}{2}}$$

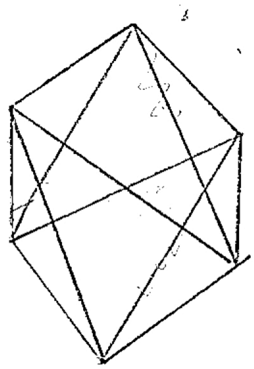
La prueba está formada por una secuencia de deducciones lógicas, sin la aparición de ejemplos. Es informal, ya que el alumno intenta explicar con sus propias palabras lo que observa que está ocurriendo.

- **Ejemplo 4: 12. Empírica – Fallido**



Este tiene dos diagonales

Depende de cual utilices.
Los diagonales van de un vertice a otro distinto.

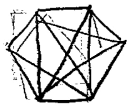


Este tiene 6 diagonales

Intenta dar una serie de ejemplos, pero como se observa en el segundo dibujo, ni siquiera tiene claro el concepto de diagonal de un polígono.

Problema 1B:

- **Ejemplo 1: AC343. Deductiva - Experimento mental - Estructural**

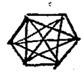
1) b)  n lados → nº ...

nº lados − 3

Ej = 5 − 3 = 2

8 − 3 = 5

4 − 3 = 1

c)  $(\text{nº lados} - 3) \cdot \left(\frac{\text{n·lados}}{2}\right)$

nº lados − 3 → si tienes un polígono de n lados.

y lo que quieres saber primero es el nº de diagonales que parte un vértice que es igual al nº de lados − 3 porque las diagonales de los vértices de al lado son lados no diagonales − el lado mismo

nº lados − 3.

2 vértices + el vértice que partes

$\frac{\text{nº lados}}{2}$ → porque hay nº lados pero las diagonales se de la mitad de los lados se repite

$\frac{4}{2}$ = 2 diagonales.

$(\text{nº lados} - 3) \cdot \left(\frac{\text{nº lados}}{2}\right)$

Ej = 4 − 3 = 1 · 2 = 2

5 − 3 = 2 · 2'5 = 5

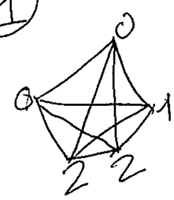
6 − 3 = 3 · 3 = 9

8 − 3 = 5 · 4 = 20

Basada en una secuencia de deducciones lógicas. El alumno hace uso de ejemplos para ayudar a la organización de la prueba, pero si los excluimos ésta sigue teniendo sentido y formando un todo.

- **Ejemplo 2: AC123. Empírica - Ejemplo genérico**

1

a)  = 5 diagonals

b) Pentagono → cada vertice dos diagonales aunque dos vertices puedan estar compartiendo el mismo diagonal

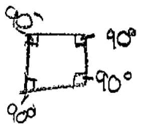
c)
4 lados - 2 diagonals 5 lados - 5 diagonals 6 lados - 12 diagono
Puedes sumar los diagonals pero sin contar dos veces la diagonal que une dos vertices

Se utilizan argumentos abstractos (generalización), pero siempre basándose en los ejemplos. Si excluimos éstos, la prueba carece de sentido

Problema 2A:

- **Ejemplo 1: 113. Empírica - Empirismo naif - Inductivo**

② Vale 360° porque por ejemplo el cuadrado mide 90° cada ~~todo~~ ángulo, y 90°+90°+90°+90 = 360°



El alumno se limita a proporcionar un ejemplo, seleccionado por su simplicidad y sin ningún criterio en particular.

Problema 2B:

- **Ejemplo 1: AC121. Empírica - Experimento crucial - Analítico**

360°
porque en los cuadriláteros son angulos rectos

540° porque se pueden hacer 3 triangulos que son 180° cada uno
180°·3= 540

El alumno proporciona dos ejemplos (cuadrilátero y pentágono) y realiza un análisis de las propiedades observadas en ellos, sin generalizar ni ir más allá de de lo observado.

- **Ejemplo 2: AC124. Deductiva - Experimento mental - Estructural**

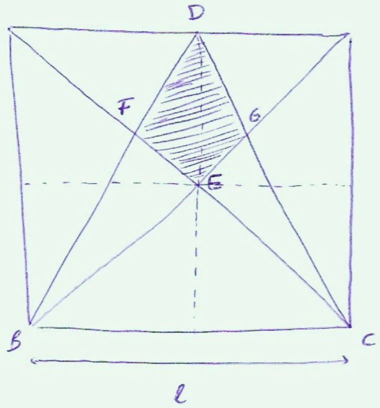
2 - 360
- 540
- Se les va sumando 180° sucesivamente; hay que dividir el polígono en triángulos sacándole las diagonales desde un vértice y sumando 1: por ejemplo si un exágono tiene 3 diagonales desde un vértice se le suma 1 y dan cuatro triángulos

Una vez dados dos ejemplos y observado lo que ocurre en ellos, el alumno es capaz de dar un argumento general, que por sí mismo tiene sentido y no depende de los ejemplos.

Problema 3A:

- **Ejemplo 1: Respuesta del autor. Deductiva – Deductiva formal – Transformativa.**

Aportamos un ejemplo del autor, al quedar desierta esta respuesta por parte de los estudiantes (todas fueran catalogadas como intentos fallidos). Utilizando la información proporcionada, se realiza una serie de manipulaciones con expresiones algebraicas, de una manera rigurosa y formal desde el punto de vista matemático, para obtener el resultado buscado

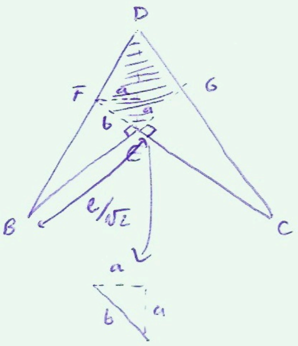


$A_{TOTAL} = l^2$

Área triángulo BDC $= \frac{l \cdot l}{2} = \frac{l^2}{2} = \frac{1}{2} A_{TOTAL}$

Área triángulo BEC $= \frac{l \cdot l/2}{2} = \frac{l^2}{4} = \frac{1}{4} A_{TOTAL}$

Área cuadrilátero BDCE = Área triángulo BDC − Área triángulo BEC $= \frac{1}{4} A_{TOTAL}$



Área triángulo BFE $= \frac{b \cdot l/\sqrt{2}}{2} = \frac{bl}{2\sqrt{2}} =$

$= \frac{\sqrt{2}\, bl}{4} =$ Área triángulo CGE

Por otro lado, $b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \longrightarrow$

$\longrightarrow b = \sqrt{2}\, a \;—\; a = \frac{b}{\sqrt{2}}$

Área cuadrilátero FDGE $= 2 \cdot \frac{l/2 \cdot a}{2} = \frac{l \cdot a}{2} = \frac{lb}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\, bl}{4} =$

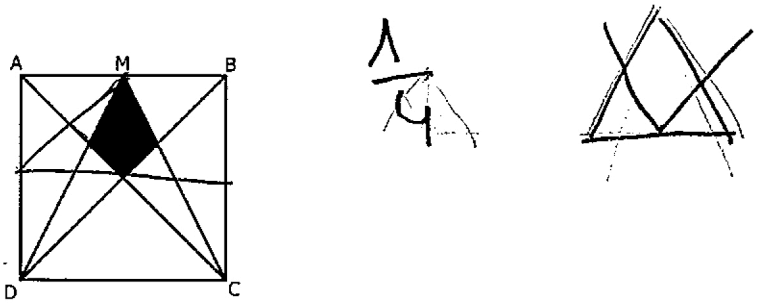
= Área ~~cuadrilátero~~ triángulo BFE

Luego, Área triángulo BFE = Área triángulo CGE = Área cuadrilátero FDGE

$\longrightarrow$ Área cuadrilátero FDGE $= \frac{1}{3}$ Área cuadrilátero BDCE $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} A_{TOTAL} =$

$= \boxed{\frac{1}{12} A_{TOTAL}}$

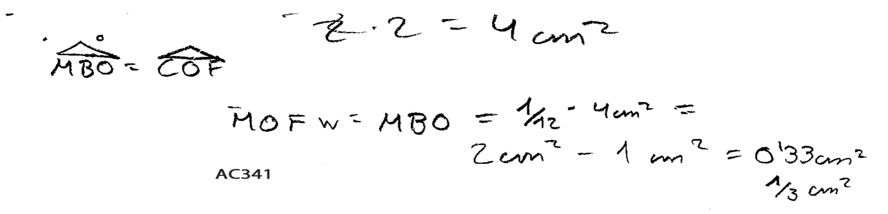
- **Ejemplo 2: AC343. Fallido**

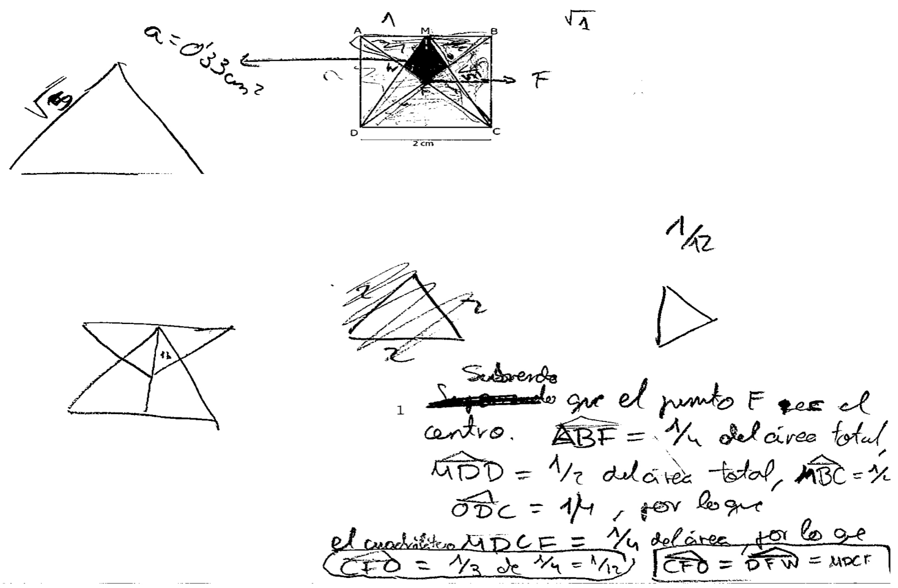


La poca información proporcionada nos impide catalogarla como empírica o deductiva

<u>Problema 3B:</u>

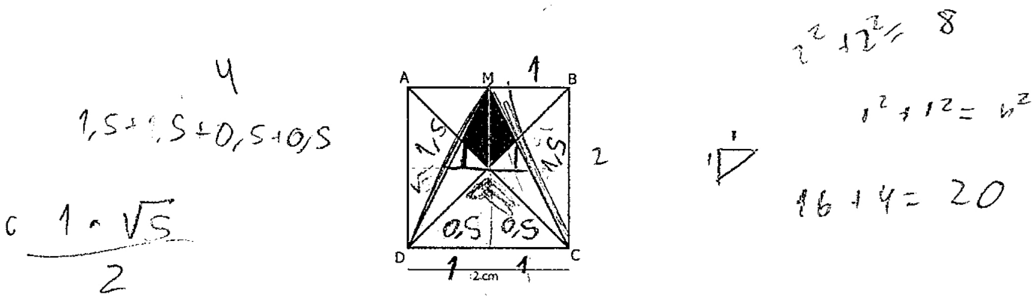
- **Ejemplo 1: AC341. Deductiva – Deductiva informal - transformativa**





Pese a poseer datos concretos para facilitar la resolución del problema, el alumno en ningún momento hace uso de ellos, por tanto, se vuelve a tratar de una demostración deductiva transformativa, en este caso informal, por el desorden en que aparecen los datos y la falta de rigor en algunos pasos.

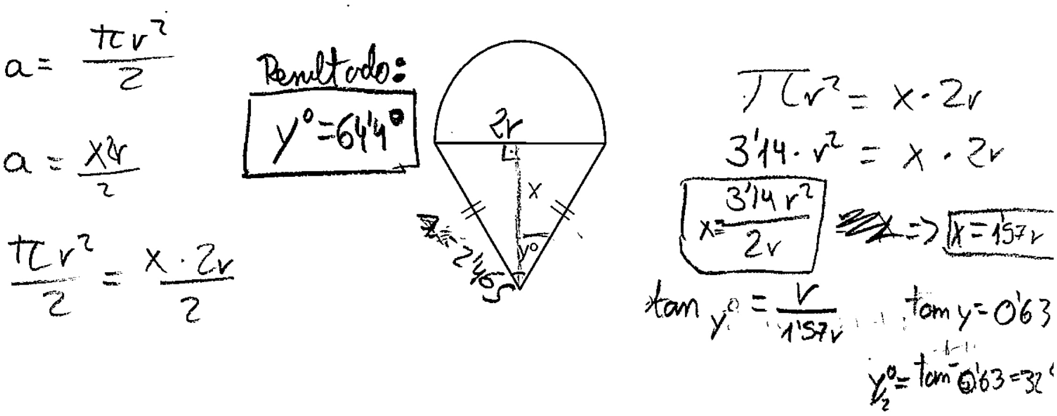
- **Ejemplo 2: AC342. Empírica - Experimento crucial - Constructivo**



Aunque el alumno no llega a concluir la prueba, con la información proporcionada podemos ver que, a partir del dato del lado del cuadrado, intenta llegar al resultado final, obteniendo información relativa a las áreas de los distintos triángulos.

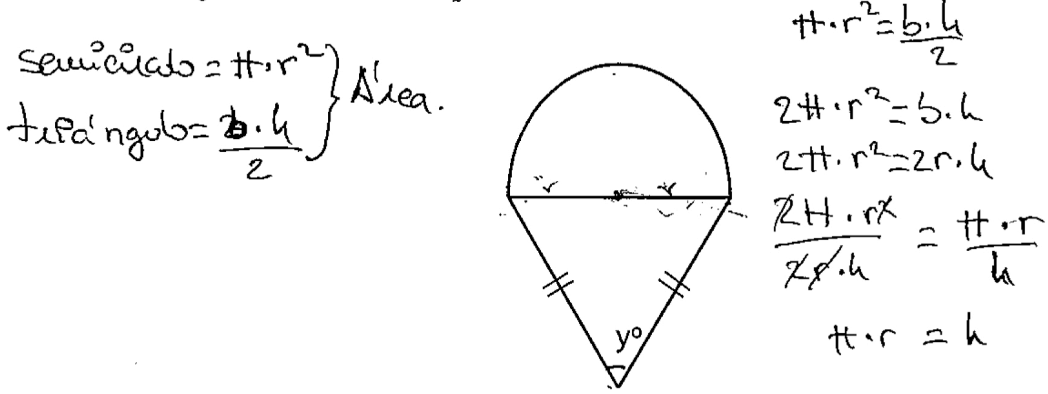
Problema 4A:

- **Ejemplo 1: 441, Deductiva – Deductiva formal – Transformativa**



Utilizando la información proporcionada, se realiza una serie de manipulaciones con expresiones algebraicas para obtener el resultado buscado, realizando los pasos de una forma ordenada y coherente.

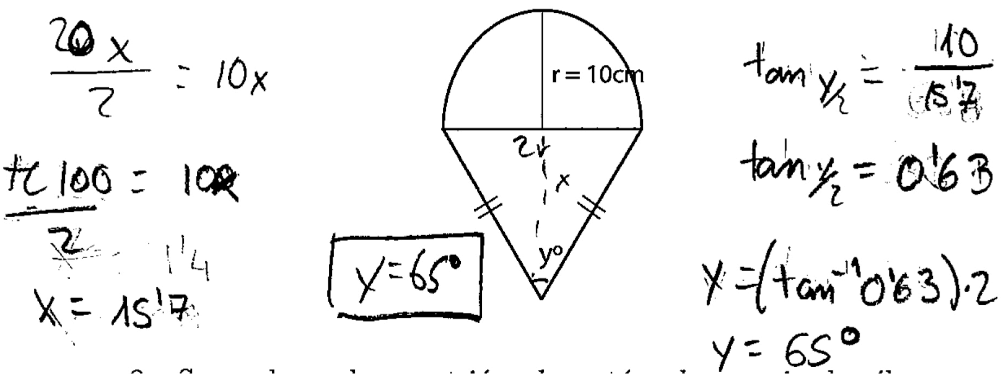
- **Ejemplo 2: 43. Deductiva - Fallido**



Si hubiera desarrollado los cálculos correctamente se habría tratado de una demostración deductiva transformativa, pero, por un lado la deja incompleta y por otro (que es la razón principal para etiquetarla como fallida) tiene un error de partida al comparar las áreas de las dos figuras.

<u>Problema 4B:</u>

- **Ejemplo 1: 441. Empírica - Experimento crucial - Constructiva**



Realiza los mismos pasos que en la parte A, pero ahora trabajando con un ejemplo.

Problema 5A:

- **Ejemplo 1: 441. Deductiva – Deductiva informal - Estructural**

1 lado y 1 ángulo – Sí, porque al saber un lado y un ángulo, a partir de ahí puedes sacar el cos, sin o tan, debido a que si es rectángulo, estás seguro de que además de los datos que conoces, otro ángulo valdrá 90°

2 ángulos - No, porque aunque sepas los ángulos hay infinitas posibilidades semejantes.

2 lados - Sí porque a partir de dos lados puedes sacar el 3° por pitágoras o sacar un ángulo y después a partir de cos, sin, tan, puede sacar el lado restante.

Secuencia de deducciones lógicas sin el uso de ejemplos y explicado de una forma general, sin entrar en detalles.

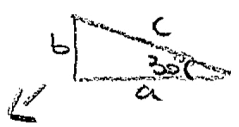
- **Ejemplo 2: 45. Empírica - Experimento mental - Estructural**

para resolver un triángulo rectángulo basta con estar en una de estas situaciones:

$\tan 30° = \frac{b}{a}$

$\cos 30° = \frac{a}{c}$

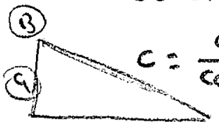
$\sin = \frac{b}{c}$



sabiendo el valor de una de las letras ya podríamos resolverlo por completo.

2 → podemos Resolverlo tambien conociendo dos lados porque el tercer lado lo podemos obtener con pitagoras y cada uno de los ángulos agudos podemos descubrir los apartir de la razón trigonometrica que lo relaciona con los lados.

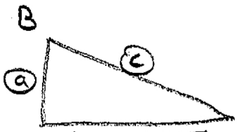
o conociendo un lado y un ángulo



$c = \frac{a}{\cos \hat{B}}$

$b = a \cdot tg \hat{B}$ $\quad \hat{A} = 90^\circ - \hat{B}$

en el segundo caso



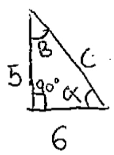
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $\quad sen\ \hat{A} = \frac{a}{c}$

El alumno en algún momento hace uso de ejemplos, pero la prueba, sin ellos, sigue teniendo sentido completo.

Problema 5B:

- **Ejemplo 1: 421. Empírica - Experimento crucial - Analítico**

-Sí



$c^2 = 5^2 + 6^2 = 61$

$c = \sqrt{61} = \boxed{7'8}$

$\tan \alpha = \frac{5}{6}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = \boxed{39'8^\circ}$

1

$B = 90^\circ - 39'8^\circ$

$\boxed{B = 50'2^\circ}$

-No

- Sí

$\tan 20^\circ = \frac{10}{a}$

$\tan 20^\circ \cdot a = 10$

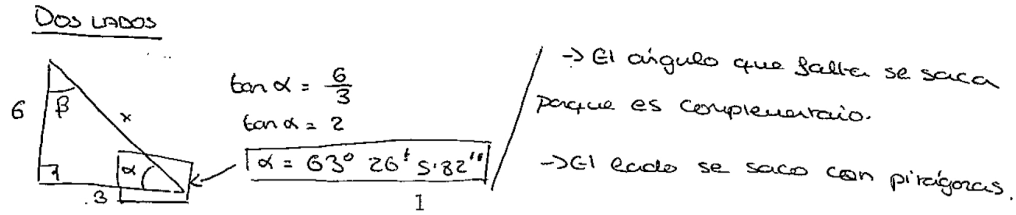
$a = \frac{10}{\tan 20^\circ} = \boxed{27'7}$

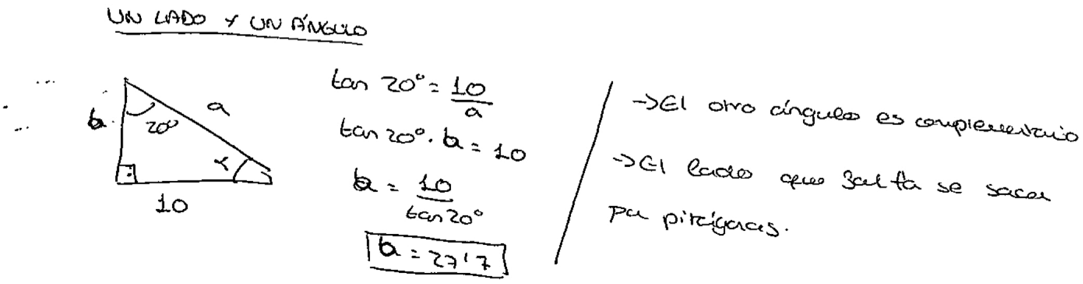
$\sin 20^\circ = \frac{10}{c}$

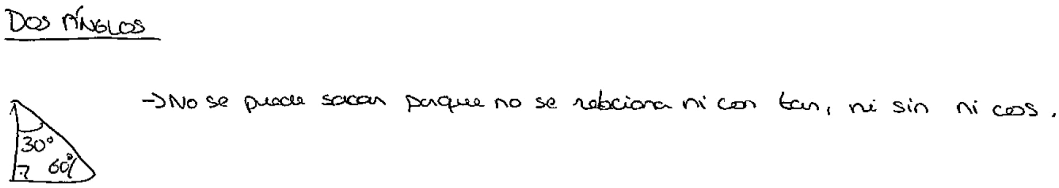
$c = \frac{10}{\sin 20^\circ} = \frac{10}{0'34} = \boxed{29'4}$

Se resuelven los apartados mediante la información extraída de dos ejemplos concretos, sin generalizar en ningún momento.

- **Ejemplo 2: 416. Empírica - Ejemplo genérico**







El alumno abstrae ideas generales a partir de la información de los ejemplos, pero la prueba, sin éstos, carece de sentido.

6.2 – <u>Análisis Cuantitativo</u>

El experimento, como mencionamos anteriormente, se realizó con un colectivo de 65 alumnos, de distintos niveles, a los que se les asignaron diferentes subconjuntos de problemas.

Como no estamos, en ningún caso, imponiendo la condición necesaria de la corrección total del problema para incluir las resoluciones en algunas de las categorías de la tabla de clasificación de demostraciones, vamos a considerar por un lado, la corrección de la resolución y por otro el tipo de demostración utilizado, aunque, evidentemente, las categorías de “mal” en el primer caso y “fallido” en el segundo caso estarán estrechamente relacionadas.

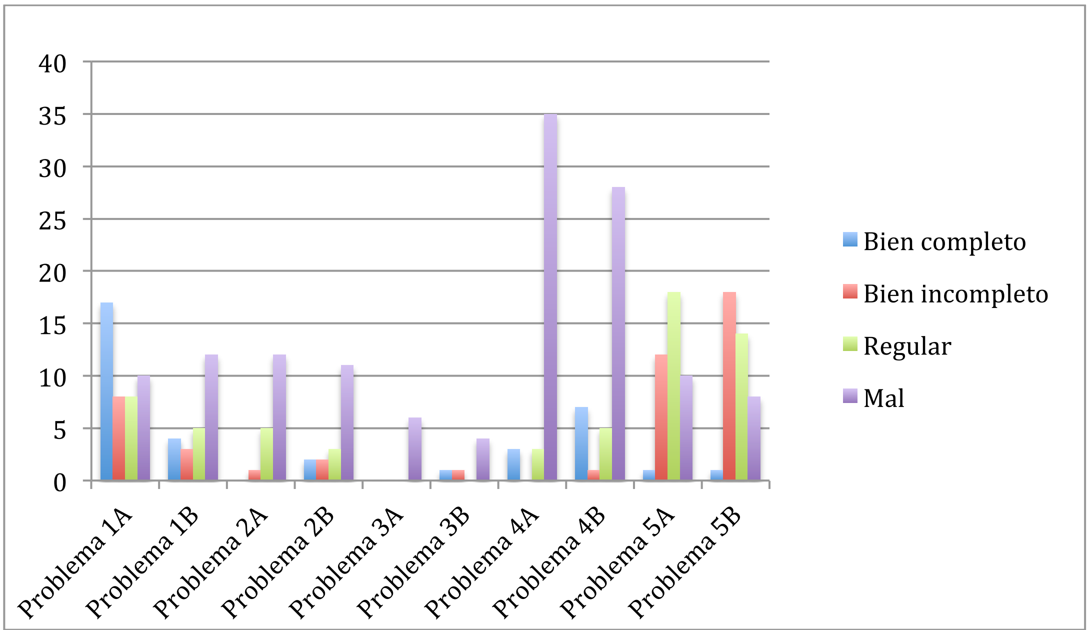
A) CORRECCIÓN MATEMÁTICA

Una demostración quedará encuadrada en la categoría de “bien completo” si el resolutor ha concluido la prueba satisfactoriamente (por ejemplo, la resolución del alumno 441 del problema 4A), “bien incompleto” si la prueba está muy avanzada pero le queda o bien algún caso o bien pequeños detalles por demostrar (por ejemplo, la resolución del alumno 45 del problema 5A, donde se deja un caso por probar), “regular” si el resolutor ha empezado la prueba pero se ha quedado a mitad (la resolución del alumno AC123 del problema 1B sería un buen ejemplo) y “mal”, que como hemos comentado anteriormente coinicidirá en gran medida con las demostraciones etiquetadas como fallidas (del tipo general o de cualquiera de los dos tipos), cuando el resolutor ni siquiera ha llegado a plantear nada, o si lo ha hecho, sus hipótesis de partida ya son erróneas (por ejemplo, las resoluciones del alumno 43 del problema 4A o del alumno AC343 del problema 3A).

CASO GENERAL (consideramos todas las soluciones en global)

	Bien completo	Bien incompleto	Regular	Mal	
Problema 1A	17	8	8	10	43
Problema 1B	4	3	5	12	24
Problema 2A	0	1	5	12	18
Problema 2B	2	2	3	11	18
Problema 3A	0	0	0	6	6
Problema 3B	1	1	0	4	6
Problema 4A	3	0	3	35	41
Problema 4B	7	1	5	28	41
Problema 5A	1	12	18	10	41
Problema 5B	1	18	14	8	41
	36	46	61	136	279

Tabla A.1: Corrección matemática, caso general



Gráfica A.1: Corrección matemática, caso general

1ºESO

	Bien completo	Bien incompleto	Regular	Mal
Problema 1A	0	0	7	6
Problema 1B	0	0	5	8
Problema 2A	0	0	4	9
Problema 2B	0	0	3	10
	0	0	19	32

4º ESO

	Bien completo	Bien incompleto	Regular	Mal
Problema 4A	3	0	3	35
Problema 4B	7	1	5	28
Problema 5A	1	12	18	10
Problema 5B	1	18	14	8
	12	31	40	81

ALTAS CAPACIDADES 1º Y 2º ESO

	Bien completo	Bien incompleto	Regular	Mal
Problema 1A	1	2	0	2
Problema 1B	1	2	0	2
Problema 2A	0	1	1	3
Problema 2B	2	2	0	1
	4	7	1	8

ALTAS CAPACIDADES 3º Y 4º ESO

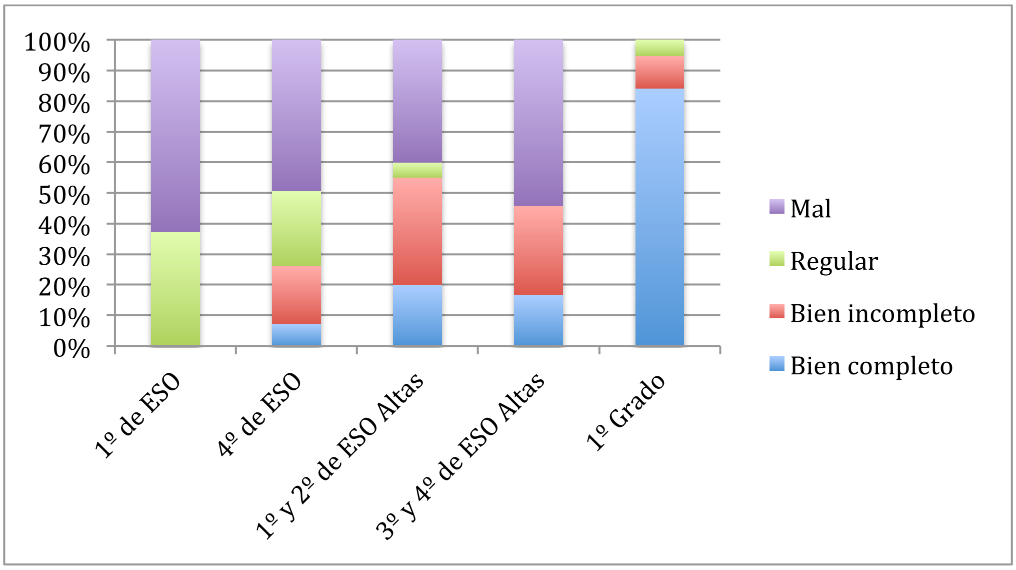
	Bien completo	Bien incompleto	Regular	Mal
Problema 1A	0	4	0	2
Problema 1B	3	1	0	2
Problema 3A	0	1	0	5
Problema 3B	1	1	0	4
	4	7	0	13

1º GRADO MATEMÁTICAS

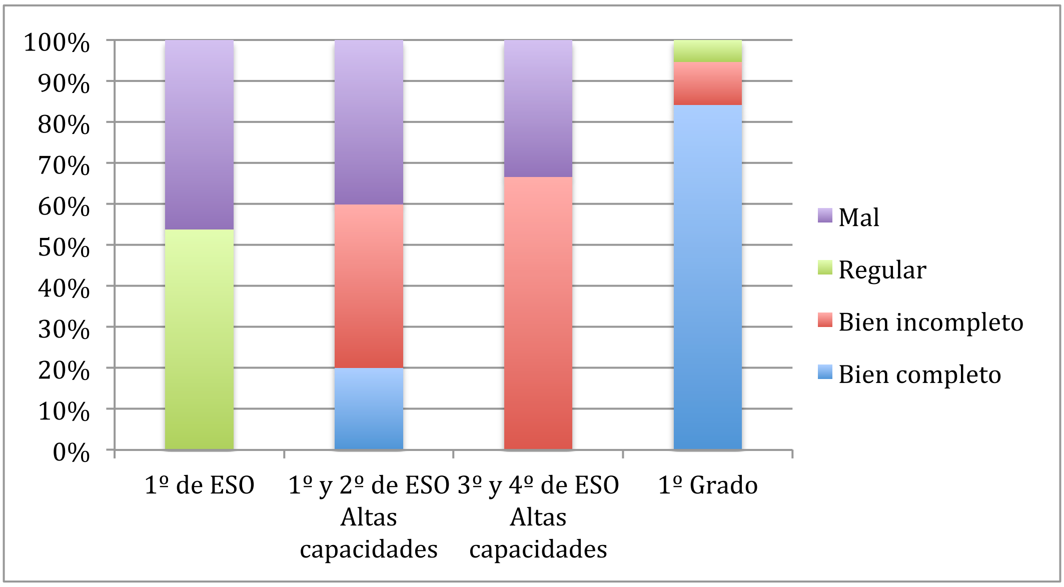
	Bien completo	Bien incompleto	Regular	Mal
Problema 1A	16	2	1	0

En los datos recogidos en tablas y gráficas observamos:

- como va subiendo la habilidad de los alumnos y el grado de corrección matemática conforme vamos subiendo de curso (gráfica A.2) y si nos centramos en el problema 1A, que, salvo a los de 4ºESO, ha sido planteado a todos los niveles, esta diferencia se incrementa aún más (gráfica A.3).

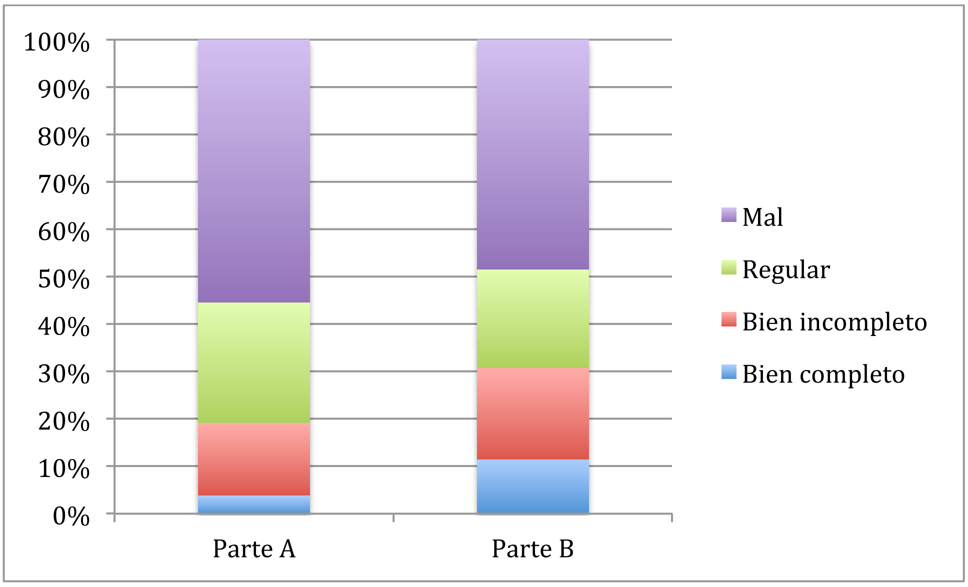


Gráfica A.2: Corrección matemática por cursos



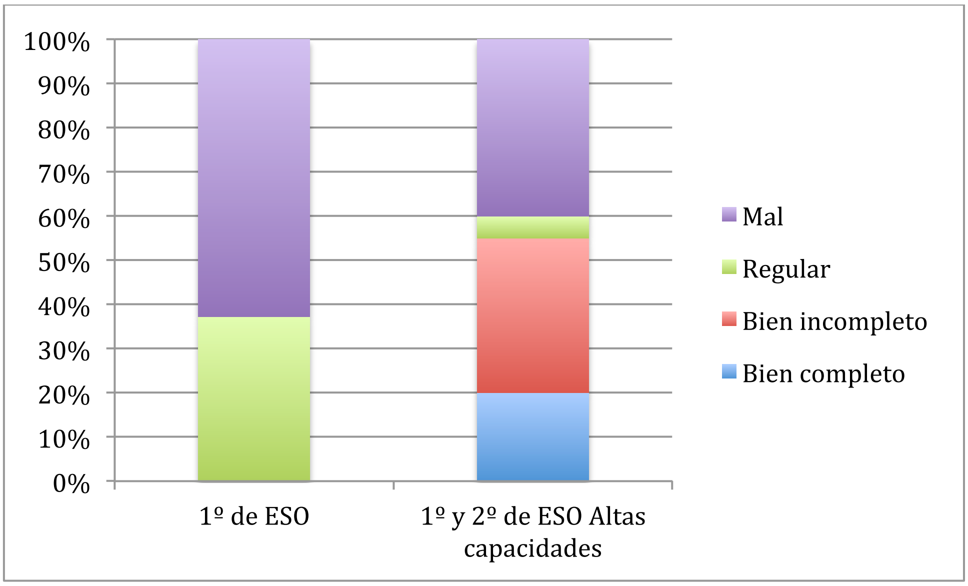
Gráfica A.3: Corrección matemática problema 1A por cursos

- la mejora significativa (excluyendo del estudio los resultados de 1º de Grado, que sólo hicieron la parte A) de las partes A a las partes B de los problemas, salvo en contadas excepciones (gráfica A.4)



Gráfica A.4: Comparación corrección matemática partes A y B de todos los niveles, salvo 1º de Grado

- las diferencias observadas entre el grupo ordinario de 1º de ESO y el grupo de altas capacidades de 1º y 2º de ESO (gráfica A.5).



Gráfica A.5: Comparación corrección matemática entre 1º de ESO y el grupo de Altas capacidades de 1º y 2º de ESO

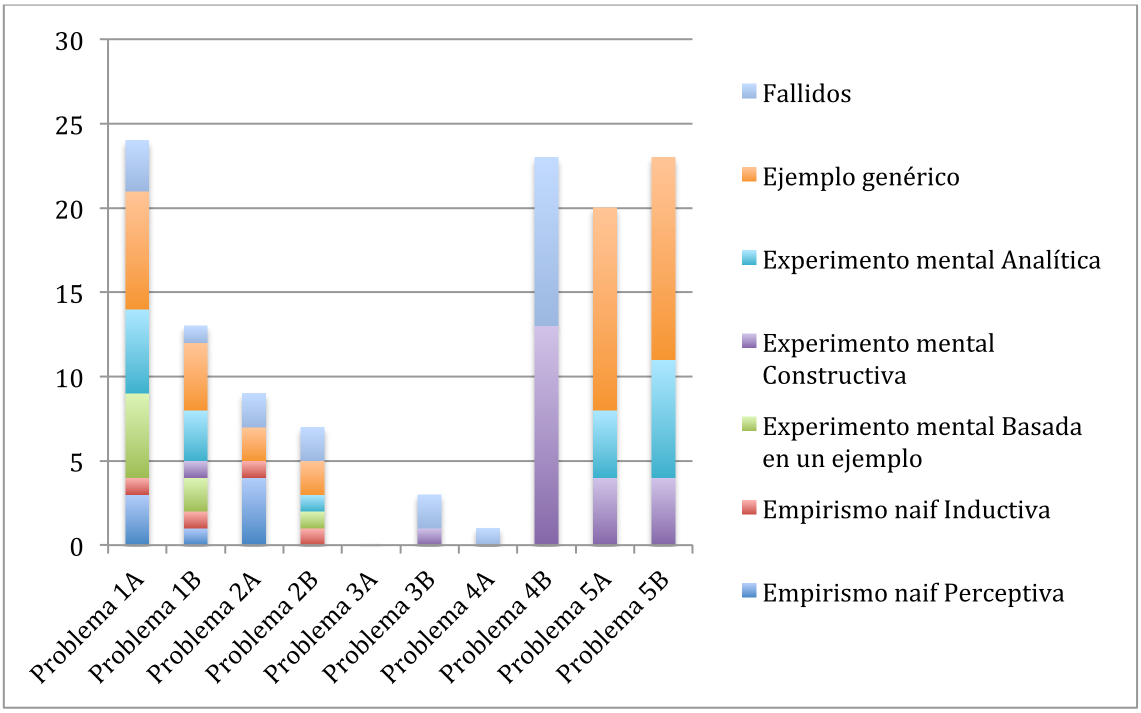
B) TIPOS DE DEMOSTRACIÓN

Pasamos ahora a centrarnos en el objetivo principal de esta investigación, es decir, analizar los distintos tipos de demostraciones usados por los estudiantes:

CASO GENERAL

	Demostraciones Empíricas							
	Empirismo naif		Experimento crucial			Ejemplo genérico	Fallidos	
	Perceptiva	Inductiva	Basada en un ejemplo	Constructiva	Analítica			
Problema 1A	3	1	5	0	5	7	3	24
Problema 1B	1	1	2	1	3	4	1	13
Problema 2A	4	1	0	0	0	2	2	9
Problema 2B	0	1	1	0	1	2	2	7
Problema 3A	0	0	0	0	0	0	0	0
Problema 3B	0	0	0	1	0	0	2	3
Problema 4A	0	0	0	0	0	0	1	1
Problema 4B	0	0	0	13	0	0	10	23
Problema 5A	0	0	0	4	4	12	0	20
Problema 5B	0	0	0	4	7	12	0	23
	8	4	8	23	20	39	21	123

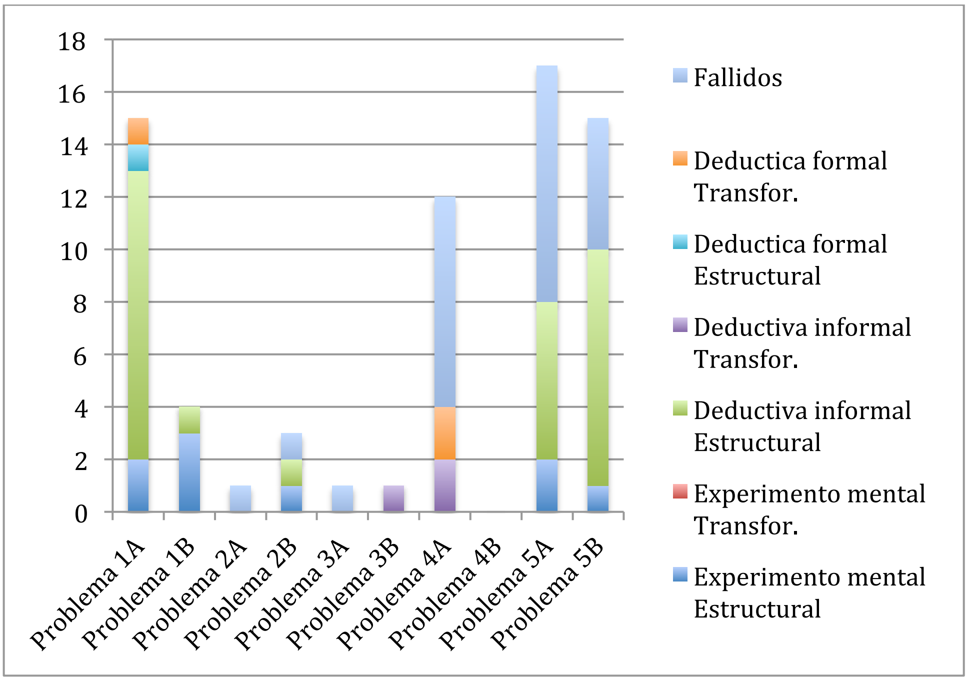
Tabla B.1: Demostraciones empíricas, caso general



Gráfica B.1: Demostraciones empíricas, caso general

	Demostraciones Deductivas							
	Experimento mental		Deductiva informal		Deductiva formal		Fallidos	
	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.		
Problema 1A	2	0	11	0	1	1	0	15
Problema 1B	3	0	1	0	0	0	0	4
Problema 2A	0	0	0	0	0	0	1	1
Problema 2B	1	0	1	0	0	0	1	3
Problema 3A	0	0	0	0	0	0	1	1
Problema 3B	0	0	0	1	0	0	0	1
Problema 4A	0	0	0	2	0	2	8	12
Problema 4B	0	0	0	0	0	0	0	0
Problema 5A	2	0	6	0	0	0	9	17
Problema 5B	1	0	9	0	0	0	5	15
	9	0	28	3	1	3	25	69

Tabla B.2: Demostraciones deductivas, caso general



Gráfica B.2: Demostraciones deductivas, caso general

	Fallidos
Problema 1A	4
Problema 1B	7
Problema 2A	8
Problema 2B	8
Problema 3A	5
Problema 3B	2
Problema 4A	28
Problema 4B	18
Problema 5A	4
Problema 5B	3
	87

1º ESO

	Demostraciones Empíricas						
	Empirismo naif		Experimento crucial			Ejemplo genérico	Fallidos
	Perceptiva	Inductiva	Basada en un ejemplo	Constructiva	Analítica		
Problema 1A	1	1	4	0	0	1	3
Problema 1B	0	1	2	1	1	1	1
Problema 2A	1	2	0	0	0	1	2
Problema 2B	0	1	1	0	0	1	2
	2	5	7	1	1	4	8

	Demostraciones Deductivas						
	Experimento mental		Deductiva informal		Deductiva formal		Fallidos
	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	
Problema 1A	0	0	0	0	0	0	0
Problema 1B	0	0	0	0	0	0	0
Problema 2A	0	0	0	0	0	0	1
Problema 2B	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	2

	Fallidos
Problema 1A	3
Problema 1B	6
Problema 2A	6
Problema 2B	7
	22

4º ESO

	Demostraciones Empíricas						
	Empirismo naif		Experimento crucial			Ejemplo genérico	Fallidos
	Perceptiva	Inductiva	Basada en un ejemplo	Constructiva	Analítica		
Problema 4A	0	0	0	0	0	0	1
Problema 4B	0	0	0	13	0	0	10
Problema 5A	0	0	0	4	4	12	0
Problema 5B	0	0	0	4	7	12	0
	0	0	0	21	11	24	11

	Demostraciones Deductivas						
	Experimento mental		Deductiva informal		Deductiva formal		Fallidos
	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	
Problema 4A	0	0	0	2	0	2	8
Problema 4B	0	0	0	0	0	0	0
Problema 5A	2	0	6	0	0	0	9
Problema 5B	1	0	9	0	0	0	5
	3	0	15	2	0	2	22

	Fallidos
Problema 4A	28
Problema 4B	18
Problema 5A	4
Problema 5B	3
	53

ALTAS CAPACIDADES 1º Y 2º ESO

	Empírica						
	Empirismo naif		Experimento crucial			Ejemplo genérico	Fallidos
	Perceptiva	Inductiva	Basada en un ejemplo	Constructiva	Analítica		
Problema 1A	2	0	0	0	2	1	0
Problema 1B	1	0	0	0	1	2	0
Problema 2A	2	0	0	0	0	1	0
Problema 2B	0	0	0	0	1	1	0
	5	0	0	0	4	5	0

	Demostraciones Deductivas						
	Experimento mental		Deductiva informal		Deductiva formal		Fallidos
	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	
Problema 1A	0	0	0	0	0	0	0
Problema 1B	1	0	0	0	0	0	0
Problema 2A	0	0	0	0	0	0	0
Problema 2B	1	0	1	0	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0

	Fallidos
Problema 1A	0
Problema 1B	0
Problema 2A	2
Problema 2B	1
	3

ALTAS CAPACIDADES 3º Y 4º ESO

	Demostraciones Empíricas						
	Empirismo naif		Experimento crucial			Ejemplo genérico	Fallidos
	Perceptiva	Inductiva	Basada en un ejemplo	Constructiva	Analítica		
Problema 1A	0	0	1	0	1	2	0
Problema 1B	0	0	0	0	1	1	0
Problema 3A	1	2	0	0	0	1	2
Problema 3B	0	0	0	1	0	0	2
	1	2	1	1	2	4	4

	Demostraciones Deductivas						
	Experimento mental		Deductiva informal		Deductiva formal		Fallidos
	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	
Problema 1A	1	0	0	0	0	0	0
Problema 1B	2	0	1	0	0	0	0
Problema 3A	0	0	0	0	0	0	1
Problema 3B	0	0	0	1	0	0	0
	3	0	1	1	0	0	1

	Fallidos
Problema 1A	1
Problema 1B	1
Problema 2A	5
Problema 2B	2
	9

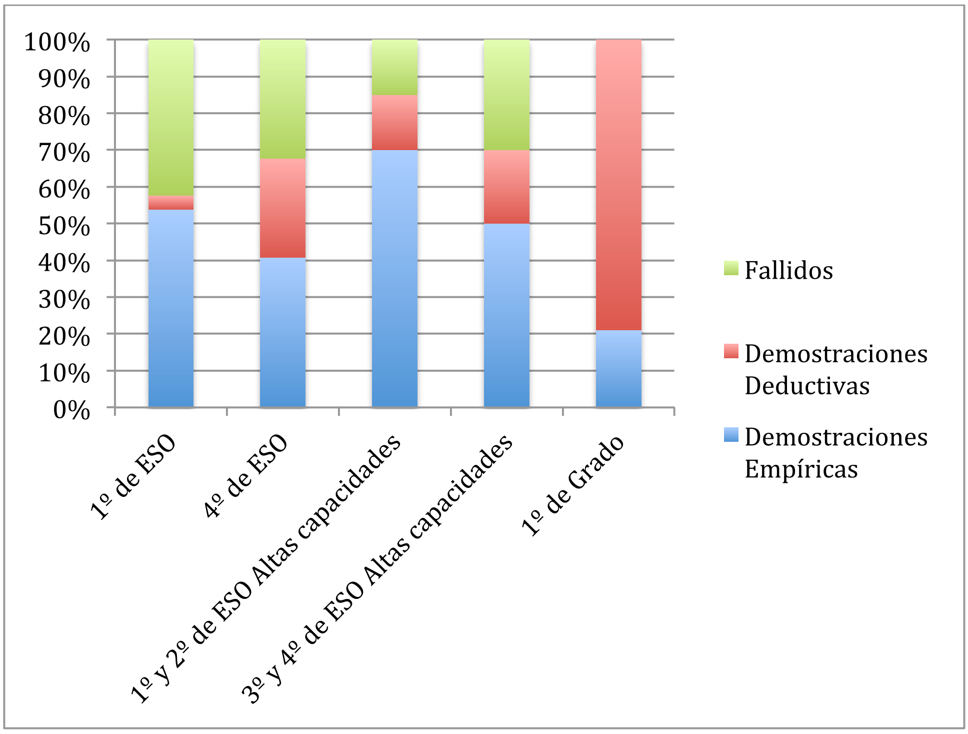
1º GRADO MATEMÁTICAS

	Demostraciones Empíricas						
	Empirismo naif		Experimento crucial			Ejemplo genérico	Fallidos
	Perceptiva	Inductiva	Basada en un ejemplo	Constructiva	Analítica		
Problema 1A	0	0	0	0	2	2	0

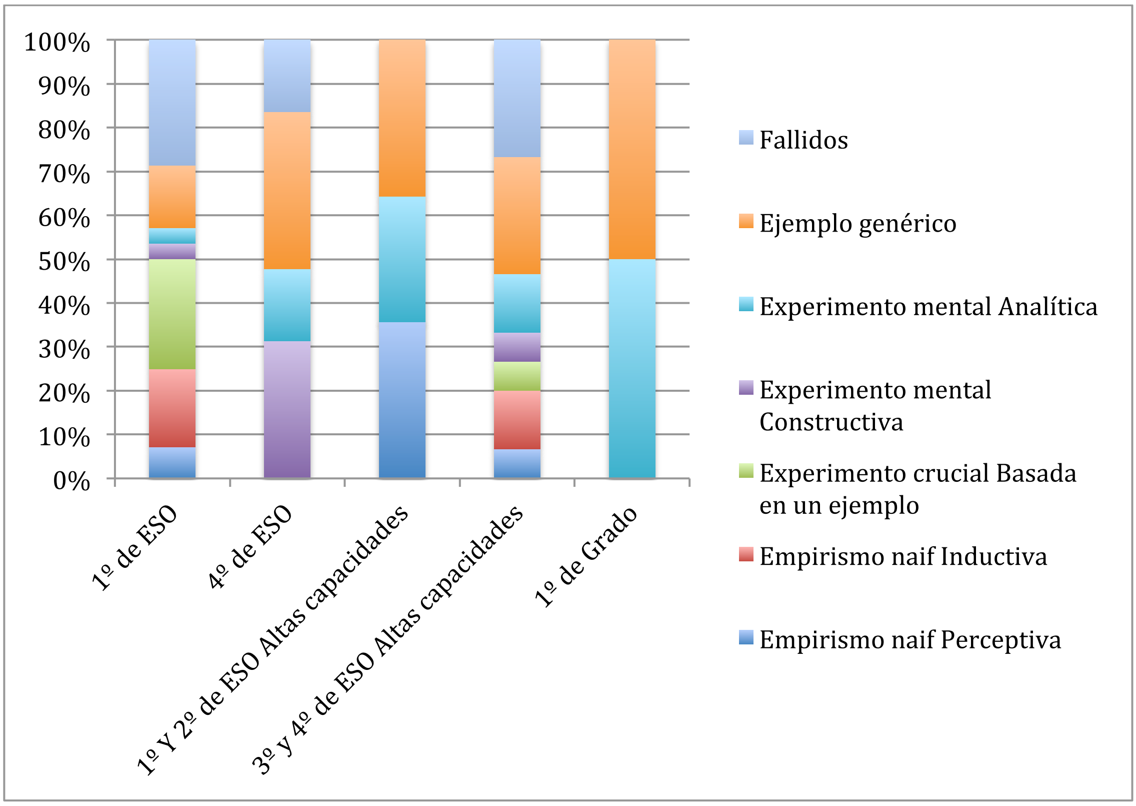
	Demostraciones Deductivas						
	Experimento mental		Deductiva informal		Deductiva formal		Fallidos
	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	
Problema 1A	2	0	11	0	1	1	0

En los datos recogidos en tablas y gráficas observamos:

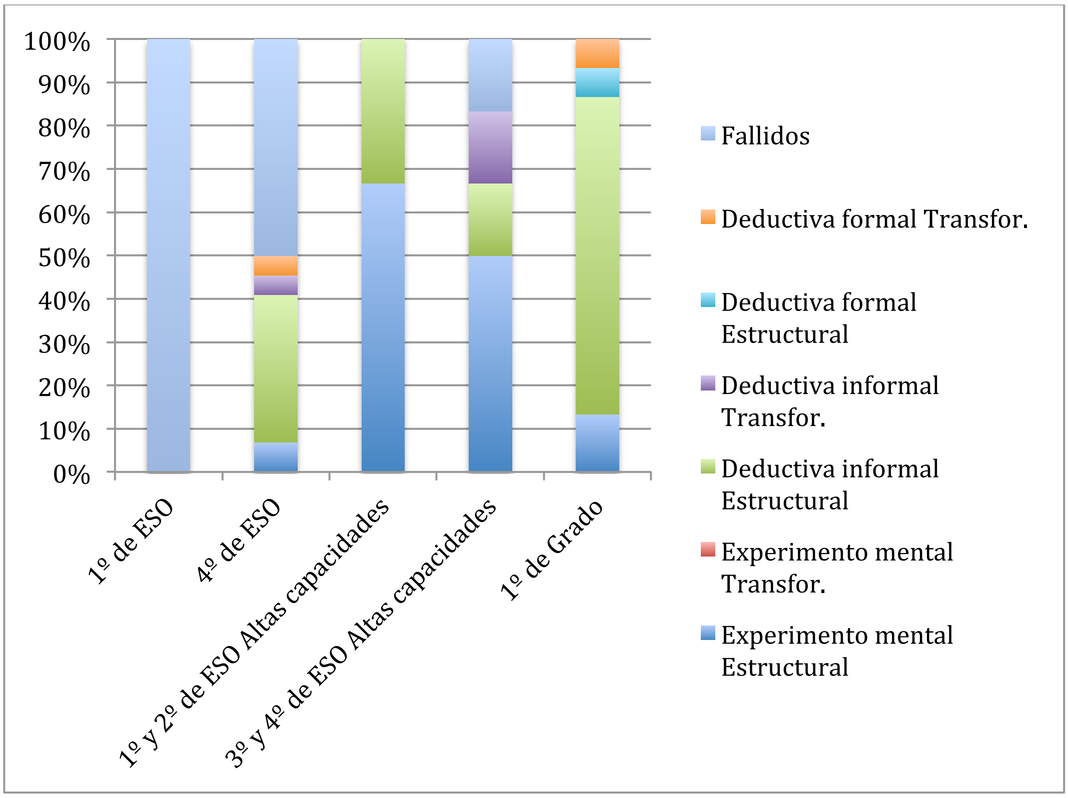
- como va subiendo el tipo de complejidad de la demostración utilizada conforme vamos subiendo de curso. Al llegar a 1º de Grado la mayor parte de las demostraciones son deductivas formales.



Gráfica B.3: Tipos de demostraciones. Comparación por cursos.

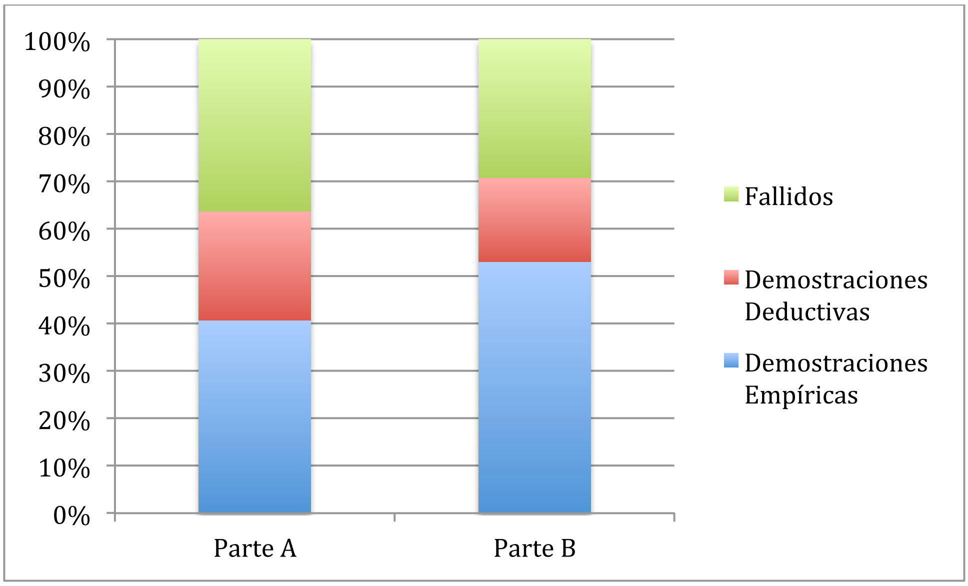


Gráfica B.4: Demostraciones Empíricas. Comparación por cursos.

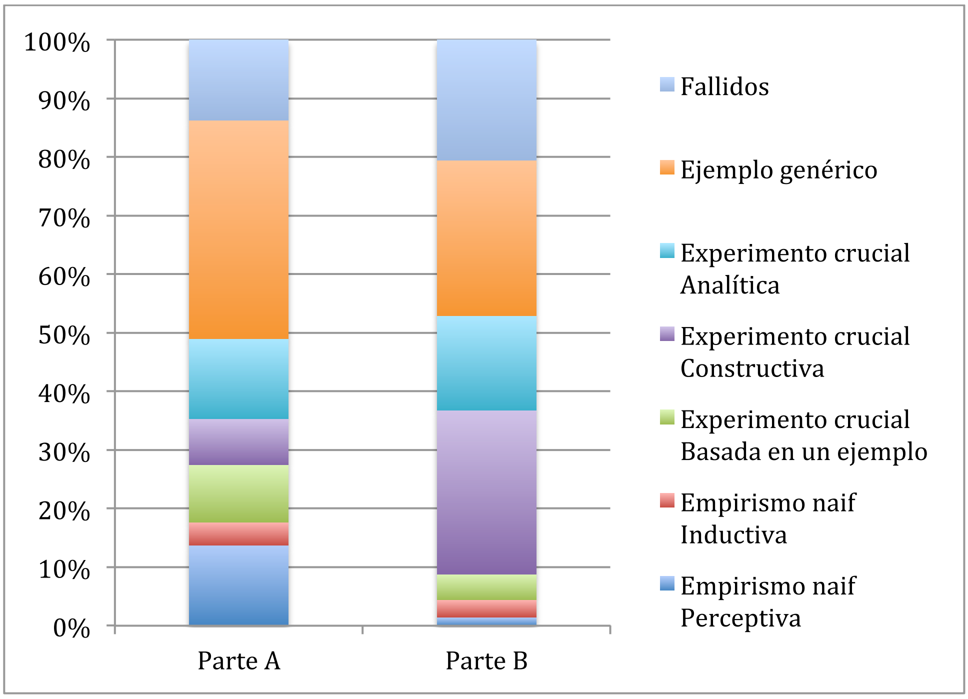


Gráfica B.5: Demostraciones Deductivas. Comparación por cursos.

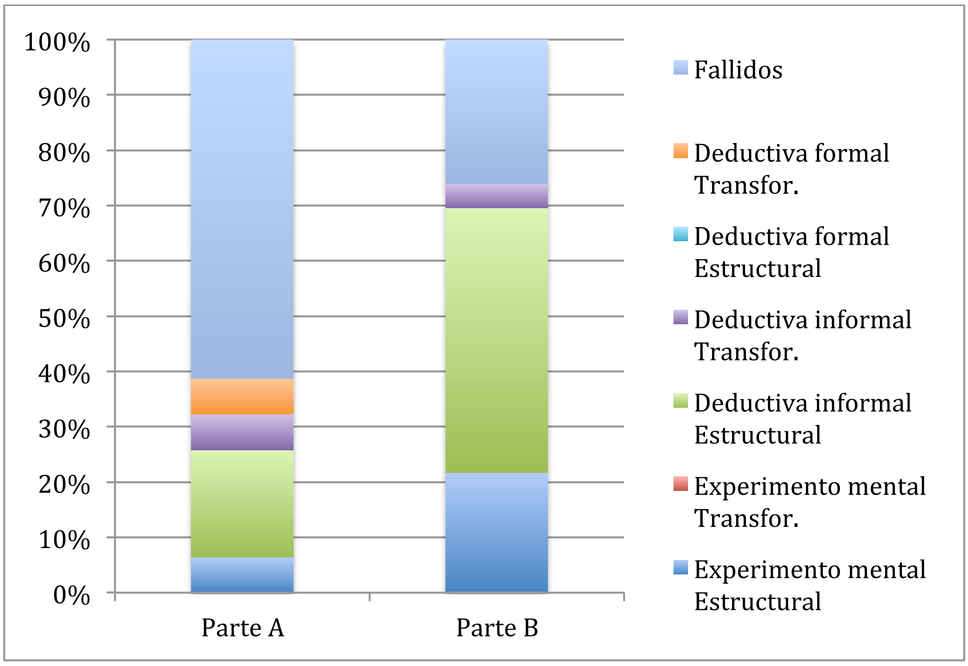
- la mejora significativa de las partes A a las partes B de los problemas, salvo en contadas excepciones (gráficas B.6, B.7 y B.8), principalmente en el porcentaje de demostraciones totalmente fallidas. Respecto a la aparición de mayor porcentaje de demostraciones de tipo deductivo en la parte A, debemos tener en cuenta que el tipo de enunciados de esta parte empujaban al estudiante, principalmente en cursos superiores, a intentar un tipo de demostración deductivo, pero, como se puede comprobar al observar la gráfica B.8, en la mayoría de los casos resultaba fallido.



Gráfica B.6: Tipos de demostraciones. Comparación entre partes A y partes B.

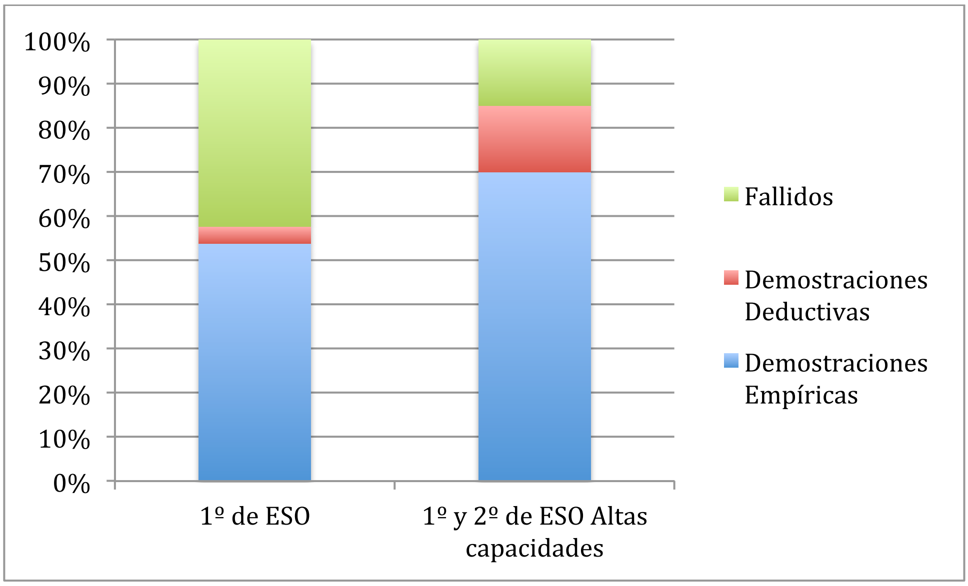


Gráfica B.7: Demostraciones Empíricas. Comparación entre partes A y partes B.

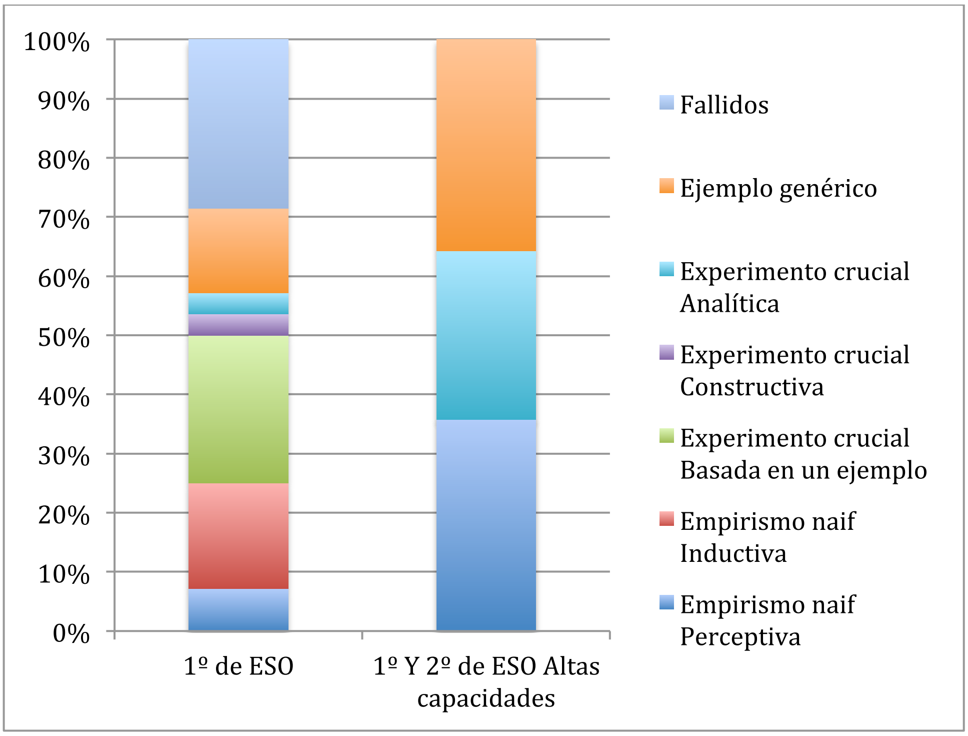


Gráfica B.8: Demostraciones Deductivas. Comparación entre partes A y partes B.

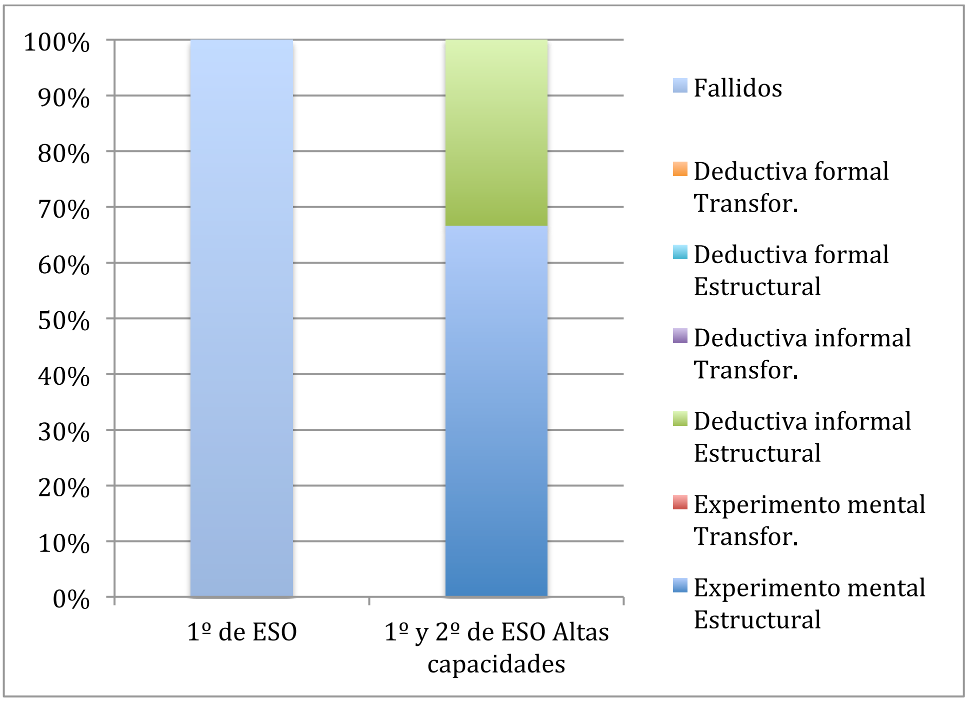
- las diferencias observadas entre el grupo ordinario de 1º ESO y el grupo de altas capacidades de 1º y 2º ESO.



Gráfica B.9: Tipos de demostraciones. Comparación entre 1º de ESO y el grupo de 1º y 2º de ESO de Altas capacidades.



Gráfica B.10: Demostraciones Empíricas. Comparación entre 1º de ESO y el grupo de 1º y 2º de ESO de Altas capacidades.



Gráfica B.11: Demostraciones Deductivas. Comparación entre 1º de ESO y el grupo de 1º y 2º de ESO de Altas capacidades.

Antes de pasar a la parte del análisis de las 4 entrevistas realizadas, mostramos una comparación entre nuestra previsión inicial de tipos de demostración que podrían aparecer en cada uno de los problemas planteados y los aparecidos realmente en nuestra experimentación (celdas sombreadas).

	Demostraciones Empíricas					
	Empirismo naif		Experimento crucial			Ejemplo genérico
	Perceptiva	Inductiva	Basada en un ejemplo	Constructiva	Analítica	
Problema 1A	x	x	x	x	x	x
Problema 1B	x	x	x	x	x	x
Problema 2A	x	x	x	x	x	x
Problema 2B	x	x	x	x	x	x
Problema 3A				x		
Problema 3B				x		
Problema 4A				x		
Problema 4B				x		
Problema 5A			x	x	x	x
Problema 5B			x	x	x	x

	Demostraciones Deductivas					
	Experimento mental		Deductivo informal		Deductiva formal	
	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.	Estructural	Transfor.
Problema 1A	x	x	x	x	x	x
Problema 1B	x	x	x	x		
Problema 2A	x	x				
Problema 2B	x	x				
Problema 3A				x		x
Problema 3B				x		x
Problema 4A				x		x
Problema 4B				x		x
Problema 5A	x		x			
Problema 5B	x		x			

6.3 - Entrevistas

Recogemos la transcripción de los fragmentos más interesantes de las 4 entrevistas realizadas a estudiantes, con las que, además de una aclaración de sus argumentos plasmados en la hoja cuando fuera necesario, buscábamos su respuesta a dos cuestiones:

1 – Si habían encontrado diferencias de dificultad entre la versión A y B de los problemas.

2 – Cuales eran sus creencias sobre la necesidad y utilidad de la demostración.

Alumno AC121:

Invest: … *la segunda* [en referencia a la parte B] *la encontraste más fácil, ¿no?*

AC121: *Sí.*

Invest: *Tal vez porque el nivel de abstracción era menor, es decir, que te estaba explicando un poco más lo que tenías que hacer, ¿no?*

AC121: *Sí.*

………………

Invest: *…en el caso general, ¿también se cumpliría?*

AC121: *Sí.*

Invest: *¿Tú estás convencido de ello o necesitarías digamos ahí…? ¿Tú realmente te lo crees? O sea, que con esos dos ejemplos… ¿o te haría falta una prueba un poco más fuerte?*

AC121: *Sí.*

Alumno AC122:

Invest: *… Y veo aquí que ya, cuando has hecho 3 o 4 casos particulares, ¿no? Ya te haces una idea de cómo puede comportarse el caso general, ¿no? Y, ¿tú estás seguro realmente, por lo que has explicado aquí, que en el caso general va a pasar eso?*

AC122: A lo mejor no pasa en todos, pero yo creo que sí.

Invest: *O sea, ¿tú realmente estás convencido, tú mismo, de que eso es verdad o necesitarías igual ver una demostración más seria, más elaborada, para convencerte?*

AC122: *No, o sea, yo creo que sí, sí que es… o sea, sí que es así siempre. Más o menos.*

…………..

Invest: *….Pues lo último que te quería preguntar ya es si habías encontrado alguna diferencia de dificultad entre la primera hoja y la segunda. ¿Te ha resultado más fácil la… los enunciados de la segunda que los de la primera?*

AC122: *Sí.*

Invest: *¿Sí?*

AC122: *Porque en los de la segunda te lo explica… como… mejor y es más fácil.*

Invest: *Bueno, pero tú en el caso del primer problema, en el de contar diagonales de un polígono, has sido capaz de hacerlo en el primer enunciado. O sea, que ya lo has visto claro, ¿no?*

AC122: *Sí.*

Invest: *O sea, que no te ha hecho falta… Con ese enunciado ya has sabido tú mismo, ¿no? Que tenías que empezar considerando casos particulares y el proceso que tenías que seguir.*

AC122: *Uhum.*

Alumno AC343:

Invest: *…Veo que aquí en la primera hoja…simplemente intentaste hacer algunos ejemplos, ¿no?*

AC343: *Sí.*

Invest: *El caso del cuadrado, el pentágono…*

AC343: *Sí.*

Invest: *Yyy, sin embargo, en la segunda hoja, ya te vino, ¿no? La idea feliz.*

AC343: *Sí.*

Invest: *De cual podría ser la fórmula en general. Y esooo, ¿por qué fue? ¿Tuvo algo que ver con los enunciados de una hoja y de otra?*

AC343: *Hombre, en el… como en la segunda ya te va ayudando, pues ya te vas haciendo una idea y yaaa, como tenías más tiempo y ya habías pensado anteriormente…*

Invest: *Ya. O sea que fue una mezcla de las dos cosas.*

AC343: *Sí.*

Invest: *El tener los enunciados más claros y también haber estado pensando en el problema anteriormente, ¿no?*

AC343: *Sí, sí.*

Invest: *O sea, tú piensas que igual, con la primera hoja, si te hubiera dejado más tiempo, hubieras sido capaz de sacarlo, ¿o cómo lo ves?*

AC343: *Pues si me hubieras dejado más tiempo, a lo mejor.*

……….

Invest: *…si vieras esta prueba, imagínate, que te dan a ti la prueba que tú has hecho.*

AC343: *Sí.*

Invest: *¿Tú te la creerías la fórmula, que es verdad, o necesitarías algún tipo de justificación más fuerte? O sea, tú imagínate que ves esto, que no sabes de que… ves estas… te dicen que esto…te, te preguntan el número de diagonales de un polígono de n lados y tienes esta demostración, la que has dado tú.*

AC343: *Sí.*

Invest: *¿Tú eso te lo creerías ya vienda esa prueba o…?*

AC343: *Hombre, tendría que comprobarlo. O sea, a mí me dan esto así, y… pues no sé, lo pondría en duda.*

Invest: *Lo pondrías en duda, ¿no?*

AC343: *Sí*

Alumno AC341:

AC341: *Yyy el segundo (el segundo enunciado) fue como mucho más fácil porque como es paso a paso…*

Invest: *O sea, que el enunciado deee la parte B, digamos, resultó de mucha ayuda, el que te estuviera preguntando por cada vértice, ¿no?*

AC341: *Eeehhh, sí, o sea, no. Más que nada, la segunda pregunta.*

…….

Invest: *O sea, que realmente te fue de utilidad, ¿no?*

AC341: *Claro.*

Invest: *…¿tú piensas que con ese primer enunciado, si te hubiera dejado un poco más de tiempo, lo habrías sacado?*

AC341: *Sí, porque… Yo creo que sí. Me habría costado mucho pero sí. Porque saqué los dos primeros pasos y me faltó el último sólo.*

…….

Invest: *…Tú imagínate que te dan el ejercicio 1, el enunciado, y esta demostración, la que tú me has puesto aquí. Tú, viendo esta demostración, ¿te creerías ya que se cumple eso? O sea, que eso es verdad o ¿te haría falta, digamos… piensas que haría falta justificarlo un poco más?*

AC341: *A mí me…*

Invest: *O sea, ¿si hubieras tenido más tiempo lo habrías justificado más?*

AC341: *Claro. Lo que pasa es que… Como el tiempo… Pues eso. …*

Invest: *Uhum.*

AC341: *Yyy intenté justificarlo bien y eso… Pero yo es que me justifico muy mal, o sea, por escrito. Me cuesta.*

Invest: *O sea que tú piensas que incluso haría falta para que eso estuviera bien probado igual una justificación un poco más formal, ¿no?*

AC341: *Sí, o sea mejor escrita y eso.*

De las cuatro entrevistas realizadas concluimos que:

1 – Todos los alumnos han encontrado mucho más fáciles los enunciados de la parte B que los de la parte A, si bien es verdad que AC122 fue capaz de resolver correctamente uno de los problemas en la parte A y AC341 y AC343 argumentan que el hecho de que resolvieran el problema en la parte B y no en la parte A fue una cuestión de falta de tiempo.

2 – Los dos alumnos pertenecientes al grupo de altas capacidades de 1º y 2º ESO consideran suficientes los argumentos dados para demostrar la veracidad de sus hipótesis. Sin embargo, los dos alumnos del grupo AC34 necesitarían una prueba más formal dada por ellos mismos para convencerse de que los resultados son ciertos.

7. CONCLUSIONES

7.1 - Conclusiones de los datos obtenidos

Recordemos que los objetivos marcados al inicio de la investigación eran:

- Analizar las diferencias mostradas en las resoluciones por los alumnos de diferentes niveles, tanto en lo que se refiere a la corrección matemática como en cuanto al tipo de demostraciones empleados, prestando especial atención a las diferencias entre las partes A y B de los enunciados propuestos y entre los alumnos de un grupo de capacidades medias y uno de altas capacidades de un mismo curso.

- Poder concluir a partir de las entrevistas realizadas si los alumnos experimentaron diferencias de dificultad entre las partes A y B y averiguar cuáles son sus creencias en relación con la necesidad de demostrar.

- Refinar la clasificación de tipos de demostración de nuestro marco teórico de partida.

Una vez realizado el experimento podemos extraer las siguientes conclusiones referentes a cada uno de los objetivos de investigación planteados:

- La habilidad de los alumnos y el grado de corrección matemática de sus resoluciones aumenta conforme vamos subiendo de curso.

- Se observa una evolución en el tipo de demostración utilizado, desde el predominio del empirismo naif en los alumnos de 1º de ESO a la casi totalidad de demostraciones deductivas en los alumnos de 1º de Grado.

- Si comparamos las resoluciones de un mismo problema (el caso del 1A) de un grupo ordinario (1º de ESO) y un grupo de altas capacidades del mismo nivel, observamos que tanto el nivel de corrección como el formalismo en el tipo de demostración utilizada es mayor en el segundo caso.

- Tanto los resultados como la información obtenida en las entrevistas nos muestran la dificultad de la parte A de los enunciados respecto a la parte B, debido principalmente a su mayor grado de abstracción, si bien es cierto que algunos alumnos atribuyeron esta diferencia a una falta de tiempo en el caso de la parte A y a "haber pensado ya antes el mismo problema" en el caso de la parte B. Sería interesante, de cara a una futura investigación, invertir el orden de los enunciados a la hora de realizar el experimento.

- Tras la cantidad de ejemplos de resoluciones obtenidas, hemos podido refinar la clasificación, restringiendo el número de subclases dentro de las demostraciones de tipo "Experimento crucial", limitando los "Ejemplos genéricos a los de tipo "intelectual" y agregando el tipo "Deductivo informal" dentro de la categoría de demostraciones de tipo deductivo.

7.2 - Limitaciones

En el proceso de realización de esta experimentación han influido los siguientes factores:

- **Tiempo**: el experimento se ha tenido que llevar a cabo en unos pocos meses, por lo que ha sido imposible ampliar el trabajo de campo,repetirlo o profundizar en él, con el objetivo de obtener un mayor número de datos relevantes.

- **Centro educativo**: hemos tenido que adaptarnos a la disponibilidad de cursos académicos con la que contábamos, tanto en el Instituto de Educación Secundaria, como en la Facultad de Matemáticas.

- **Contenido de los problemas**: aunque lo ideal hubiera sido pasar exactamente los mismos problemas a todos los cursos, en el caso de los grupos ordinarios (1º y 4º de ESO y 1º Grado en Matemáticas) hemos tenido que adaptarnos al contenido del curso en ese momento (a los de 4º de ESO se les propuso dos problemas de trigonometría porque era lo que estaban viendo en el momento en que se les pasaron los problemas).

- **Entrevistas**: sólo fue posible realizar un total de 4 entrevistas, todas ellas a alumnos de los grupos de altas capacidades, al realizarse dicha actividad en horario extraescolar.

- **Experiencia del investigador:** el autor de este trabajo era la primera investigación en didáctica que realizaba. Por tanto, pese a la gran ayuda y colaboración de los tutores, carecía de experiencia, principalmente a la hora de realizar entrevistas personales a los alumnos.

7.3 – Proyectos futuros

Podemos pensar en un gran número de posibles investigaciones que surgen de manera natural a partir de la realizada en este trabajo. Entre ellas estarían:

- Realizar una investigación con los mismos objetivos, usando exactamente la misma metodología, pero ampliando la batería de problemas, la diversidad de cursos académicos y el número de alumnos entrevistados. De esta forma obtendríamos unos resultados mucho más contrastados.

- Un estudio similar, pero centrándonos únicamente en alumnos de altas capacidades y alumnos de capacidades medias de un mismo curso, ejecutando el experimento con un gran número de alumnos, para que los resultados nos permitan sacar conclusiones explícitas y comprobar que se cumplen las hipótesis teóricas realizadas previamente.

- Partiendo nuevamente de la misma base, refinar el contenido de los problemas y utilizar algún tipo de dispositivo (bolígrafos “grabadores”) que nos permita conocer exactamente las fases por las que ha pasado cada alumno en el período de resolución de los problemas, para así poder analizarlas haciendo uso del marco teórico de las fases de Arzarello (Arzarello, 1998) usado, entre otros, por Marrades y Gutiérrez (2000).

8. BIBLIOGRAFÍA

Arzarello, F. (1998) A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. En A. Olivier y K. Newstead (Eds). *Proceedings of the 22nd PME International Conference,* 2, 24-31.

Balacheff, N. (1988) Aspects of proof in pupils practice of school mathematics. En D. Pim (Ed). *Mathematics, teachers and children,* (pp. 216-235). Londres: Hodder & Stoughton.

Bell, A.W. (1976a) *The Learning of General Mathematical Strategies* (Tesis doctoral). Nottingham (UK): Shell Center for Mathematical Education.

Bell, A.W. (1976b) A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics,* 7(1), 23-40.

De Villiers, M. (1991). Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagora*s, 26, 18-27.

De Villiers, M. (1993) El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon,* 26, 15-29.

Hanna, G. (1995), Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics,* 15(3), 42-49.

Harel, G. y Sowder, L. (1996) Classifying processes of proving. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds). *Proceedings of the 20th PME International Conference* Vol 3, , pp. 59-66,Valencia (España)

Harel, G. y Sowder, L. (2007) Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F.K. Lester (Ed), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842) Reston, VA, EEUU: NCTM.

Heinze, A. (2005) Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal*, 6(2), 175-183

Ibañes, M.J. *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato.* Tesis doctoral. Valladolid, España. Universidad de Valladolid.

Knowles, M.H. (1998) What is "Proof"?!-in mathematics. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* URL: http://www.cabri.net/Preuve.

Leung, N. S. (1994). *The problem solving process of mathematically gifted students: Three cases in Hong Kong.* Tesis de máster no publicada. Hong Kong (China): Univ. of Hong Kong.

Mariotti, M.A. (2006) Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P.Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, M. y Gutiérrez, A. (2000) Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics,* 4, 87-125.

Rodríguez, F. (2006) *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.* Trabajo de investigación. Valencia, España: Universitat de València.

Sfard, A. (1995) The development of algebra – Confronting historial and psychological perspectives. In C. Kieran (Ed.), New perspectives on school algebra: Papers and discussions of the ICME-7 algebra working group (special issue). *Journal of Mathematical Behavior,* 14, 15-39.

Sowder, L. y Harel, G. (1998) Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher,* 91(8), 670-675.

Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders' notions of proof: investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted*, 27(4), 267-292.

ANEXOS

Nombre:

1. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? Justifica tu respuesta.

2. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un polígono de n lados? Justifica tu respuesta.

Nombre:

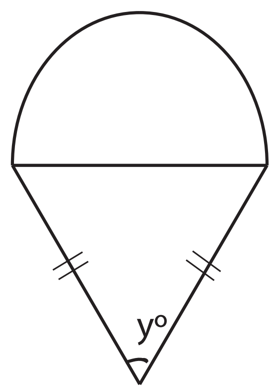
1. ¿Cuántas diagonales parten del vértice de un pentágono? ¿Y del vértice de un polígono de n lados? ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? Justifica tus respuestas

2. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un cuadrilátero?¿Y de un pentágono? En general, ¿cuánto vale la suma de los ángulos de un polígono de n lados? Justifica tus respuestas

Nombre:

Problemas de trigonometría

1. La siguiente figura muestra un semicírculo y un triángulo isósceles que tienen la misma área. ¿Cuanto vale el ángulo y? Justifica tu respuesta.

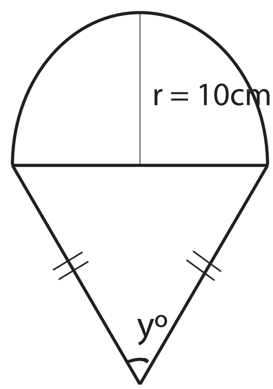


2. ¿Se puede resolver un triángulo rectángulo conociendo sólo dos de sus elementos (lados y/o ángulos)? Razona tu respuesta.

Nombre:

Problemas de trigonometría

1. La siguiente figura muestra un semicírculo de radio 10 cm y un triángulo isósceles que tienen la misma área. ¿Cuánto vale el ángulo y? Justifica tu respuesta.

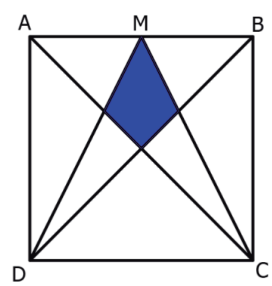


2. ¿Se puede resolver un triángulo rectángulo conociendo sólo los valores de dos de sus lados? ¿Y conociendo sólo los valores de dos de sus ángulos? ¿Y conociendo sólo los valores de uno de sus lados y uno de sus ángulos? Puedes poner valores numéricos concretos. Justifica tus respuestas.

Nombre:

1. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? Justifica tu respuesta.

2. Consideremos el cuadrado $ABCD$ y sea M el punto medio del lado AB. Trazamos todas las diagonales posibles entre los puntos y consideremos la parte sombreada que aparece en la figura:

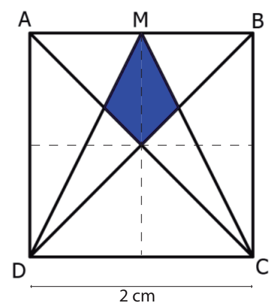


¿Qué fracción del área total es el área sombreada? (Nota: puedes utilizar la calculadora)

Nombre:

1. ¿Cuántas diagonales parten del vértice de un pentágono? ¿Y del vértice de un polígono de n lados? ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? Justifica tus respuestas

2. Consideremos el cuadrado $ABCD$ de lado 2 cm y sea M el punto medio del lado AB. Trazamos todas las diagonales posibles entre los puntos y consideremos la parte sombreada que aparece en la figura:



   ¿Qué fracción del área total es el área sombreada? (Nota: puedes utilizar la calculadora)

¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?