UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Investigación en Didácticas Específicas

INFLUENCIA DEL CONTEXTO EN EL USO E INTERPRETACIÓN DE MEDIDAS CENTRALES Y VARIABILIDAD. UN ESTUDIO EXPLORATORIO CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA, MAESTROS EN FORMACIÓN Y MAESTROS EN ACTIVO

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

Mª LUISA MARTÍNEZ ROMERO

Tutor

Dr. Manuel Pedro Huerta Palau

Departament de Didàctica de les matemàtiques

Valencia, 7 de septiembre de 2015

Influencia del contexto en el uso e interpretación de medidas centrales y variabilidad. Un estudio exploratorio con estudiantes de secundaria, maestros en formación y maestros en activo

Ficha técnica:

Máster: Máster en Investigación en Didácticas Específicas por la Universitat de València

Especialidad: Matemáticas

Autor: Apellidos: Martínez Romero
Nombre: Mª Luisa

Título de la memoria: Influencia del contexto en el uso e interpretación de medidas centrales y variabilidad. Un estudio exploratorio con estudiantes de secundaria, maestros en formación y maestros en activo.

Tutor: Apellidos: Huerta Palau
Nombre: Manuel Pedro
Departamento: Didàctica de les matemàtiques

Fecha de defensa:

Calificación:

Palabras clave: Estadística, Educación Matemática, problemas de variabilidad, contextos, medidas centrales.

Códigos Unesco: 1299 (Didáctica de las Matemáticas), 1209.99 (Razonamiento Estadístico) y 5803.02

Resumen: En este trabajo desarrollamos un estudio exploratorio sobre la resolución de problemas de variabilidad con estudiantes de secundaria, maestros en formación y maestros en activo. Presentamos un cuestionario elaborado por los investigadores y, a partir de él, analizamos las respuestas de los estudiantes desde el punto de vista de la dificultad del problema y de la influencia que el contexto y el formato de los datos tiene sobre dicha resolución. En el análisis hacemos hincapié en la dificultad y los errores que supone para el alumnado el uso e interpretación de las medidas centrales, cuando comparan conjuntos de datos.

Contenido

1. INTRODUCCIÓN ... 7
2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN ... 8
3. REVISIÓN DE LA LITERATURA ... 8
4. ASPECTOS TEÓRICOS ... 11
5. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO EXPERIMENTAL ... 15
5.1. Muestra ... 15
5.2. Instrumento de recogida de datos ... 16
5.3. Análisis de los problemas ... 19
5.3.1. Problema 1 ... 19
5.3.2. Problema 2 ... 23
5.3.3. Problema 3 ... 29
5.3.4. Problema 4 ... 32
6. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES ... 36
6.1. Representatividad de la media aritmética ... 36
6.2. Niveles de dificultad de los problemas ... 56
6.3. Influencia del contexto y el formato de los datos sobre la resolución de los problemas 62
6.4. Observaciones atípicas y su influencia en el cálculo de la media aritmética ... 71
6.5. Influencia de los valores nulos en el cálculo de la media aritmética ... 73
7. CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES ... 74
8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS ... 76

1. INTRODUCCIÓN

Batanero (2001) enfatiza la importancia que, para las personas interesadas por la educación estadística, tiene identificar las dificultades y errores que continúan al finalizar la enseñanza; así como el interés por poder diseñar actividades didácticas adecuadas para superarlos e informar al profesorado sobre los mismos.

> Gran parte de la investigación en Didáctica de la Matemática, se interesa por explicar por qué el alumno se equivoca cuando se le pide realizar ciertas tareas. Los profesores y los mismos alumnos son conscientes de que a veces obtienen respuestas erróneas, o no son capaces de dar ninguna respuesta (Batanero, 2001: 66).

Cuando no se trata de una distracción u olvido, se dice que la tarea es demasiado difícil para el alumnado. Pero las dificultades no se presentan de un modo aleatorio e imprevisible. En muchas ocasiones, encontramos errores que se repiten, o que se producen con regularidad, asociados con variables que son propias de las tareas propuestas, de los individuos o de las circunstancias. Es por eso por lo que estamos interesados por el estudio de la resolución de problemas sobre variabilidad por estudiantes de diferentes niveles educativos y, en particular, sobre la influencia que el contexto y el formato de los datos puede tener sobre las resoluciones de los estudiantes. Pretendemos que nuestro trabajo complemente a los trabajos ya existentes en la literatura al abordar cuestiones de contexto, usando como método la resolución de problemas, a la vez que aporta nuevos conocimientos.

En el trabajo realizamos un análisis de las respuestas de 188 estudiantes de diferentes colectivos de Florida Centro de Formación: secundaria, maestros en formación y maestros en activo, a un cuestionario de elaboración propia formado por problemas de variabilidad enunciados en dos contextos (estadístico-social y estadístico-sanitario) y con diferentes formatos.

La memoria de trabajo que presentamos se ha organizado en 8 apartados, el primero de ellos es la introducción que finalizamos en este párrafo. A continuación, en el segundo apartado, definimos los objetivos de la investigación en curso. En el tercer aparado mostramos la revisión de la literatura realizada. En el cuarto apartado revisamos los aspectos teóricos a tener en cuenta de cara al análisis de la resolución de los problemas. En el quinto apartado describimos el diseño experimental para posteriormente, en el sexto, analizar los problemas. En el apartado siete exponemos las conclusiones que se derivan de los resultados de la experimentación y finalizamos el trabajo con las referencias bibliográficas de los trabajos citados a lo largo del mismo.

2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Estamos interesados en el estudio de la resolución de problemas sobre variabilidad por estudiantes de diferentes niveles educativos. En particular, estudiamos la influencia que el contexto y el formato de los datos tienen sobre las resoluciones de los estudiantes. Precisamente por eso, al igual que Huerta y Cerdán (2010), los problemas tienen una formulación determinada y las resoluciones tienen lugar en contextos diferente. Mooney, Langrall y Nisbet (2006: 1) entienden por contexto "el fenómeno del mundo real, marcos o condiciones de las cuales se extraen los datos o a los que los datos pertenecen". Partiendo de esta concepción, planteamos los problemas en dos contextos: estadístico-social y estadístico-salud. Su denominación responde al fenómeno que estudian; ingresos anuales y tiempo dedicado a internet para el contexto social, diferentes tratamientos aplicados a niños con dificultad para caminar y grado de miopía en el contexto salud.

Los objetivos en este trabajo son los siguientes:

a. Evaluar la representatividad de la media aritmética en las resolución de los problemas en estudiantes de secundaria, futuros maestros y maestros en formación.
b. Identificar y medir los niveles de dificultad de los problemas considerados en relación con el contexto en el que se ha situado dicha resolución.
c. Observar la influencia que el contexto y el formato de los datos pueden tener sobre la resolución de los problemas de los estudiantes.
d. Evaluar el reconocimiento de los valores atípicos y su influencia en el cálculo de la media aritmética.
e. Evaluar el conocimiento de la influencia de los valores nulos en el cálculo de la media aritmética.

Inicialmente se trata de un estudio exploratorio, por lo que no tenemos hipótesis previas que verificar salvo los indicios surgidos en trabajos previos relacionados con las medidas de tendencia central y la reducción de datos (Batanero, Godino y Navas, 1997; Estrada, 2007; García Cruz y Garret, 2008; Ortíz y Font, 2014). En el apartado siguiente describimos estos trabajos para, posteriormente, complementar los resultados obtenidos en sus investigaciones.

3. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Numerosas investigaciones comentadas a continuación muestran que las medidas centrales, también denominadas de posición central o tendencia central, a pesar de ser uno de los principales conceptos estadísticos y estar presentes en muchas aplicaciones de la vida diaria, presentan muchas dificultades para el alumnado. Aunque sus cálculos puedan parecer simples, estas dificultades se extienden incluso a los futuros maestros.

Los artículos que citamos en este apartado tienen en común el estudio de la dificultad que para el alumnado presentan las medidas de posición central y el estudio de la variabilidad en las diferentes etapas educativas. Hablan de la elección de la media como mejor representante de los datos aunque existan valores atípicos, el ignorar la dispersión de los datos cuando se realizan comparaciones entre colecciones de datos, la dificultad en el tratamiento de los ceros, los posibles efectos al trabajar con diferentes tipos de datos y cómo el conocimiento del contexto puede interferir o ayudar a la hora de tomar decisiones.

> "Como se sabe la media es un valor "típico" o "representativo" de los datos. Campbell (1974) observa que, debido a ello, se tiende a situar la media en el centro de la distribución, propiedad que es cierta para distribuciones simétricas. Pero cuando la distribución es muy asimétrica la media se desplaza hacia uno de los extremos y la moda o la mediana serían un valor más representativo del conjunto de datos. Eso no es siempre comprendido por algunos alumnos quienes invariablemente eligen la media como mejor representante de los datos sin tener en cuenta la simetría de la distribución o la existencia de valores atípicos, como hemos observado en nuestra propia experiencia" (Campbell, 1974, citado por Batanero, 2001).

Strauss y Bichler (1988) investigan el desarrollo evolutivo de la comprensión de las propiedades de la media en alumnado de 8 a 12 años. No encuentran efectos significativos respecto al tipo de datos (continuos, discretos) o medio de presentación empleado (verbal, numérico y concreto). Algunos niños no tienen en cuenta el cero para calcular la media, o bien suponen que la media puede estar fuera del rango de variación de la variable, o que debe coincidir con uno de los valores de los datos.

Mokros y Russell (1995: 29) concluyen diciendo que:

> El trabajo con estudiantes así como con adultos nos lleva a sospechar que la media aritmética es un objeto matemático de inapreciada complejidad (que se esconde tras un sencillo algoritmo de cálculo) y que debería introducirse relativamente tarde, después de que los estudiantes hayan desarrollado una buena base de la idea de representatividad.

Posteriormente, Batanero, Godino y Navas (1997) realizan un estudio sobre las dificultades de comprensión de los promedios con profesores de primaria en formación y observan que éstos presentan dificultades en el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de los promedios, posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas, elección de la medida de tendencia central más adecuada en una determinada situación y el uso de los promedios en la comparación de distribuciones.

García Alonso y García Cruz (2004: 25) realizan una revisión de los trabajos de Strauss y Bichler (1988), Mokros y Russell (1995) y Batanero, Godino y Navas (1997) llegando a las siguientes conclusiones:

- La media aritmética es un concepto de inapreciada complejidad. Por lo general los educadores sólo potencian su aspecto algorítmico.
- Se trabaja con la media aritmética en situaciones descontextualizadas, enfocadas únicamente al uso del algoritmo.
- No se potencia en los estudiantes el trabajo de los aspectos estadístico, abstracto o representativo. Con lo cual se están perdiendo muchas características que definen este concepto. Esto provoca que se tenga una idea sesgada de lo que es la media aritmética.

- Una de las características más importantes que presenta la media aritmética es su capacidad para representar a un conjunto de datos. Pero no se trabaja de manera adecuada. Actividades como buscar la distribución que cumpla tener una media dada, son importantes para poder entender qué significado tiene que la media sea representativa de un conjunto de datos, pues serán muchas las distribuciones que posean una misma medida.
- Una introducción prematura del algoritmo de la media hace que los estudiantes pierdan el significado de representatividad. El algoritmo de cálculo bloquea en los estudiantes la posibilidad de desarrollo correcto del concepto de representatividad inherente al de media aritmética.
- Los estudiantes desconocen cómo actuar en situaciones en las que aparecen valores atípicos. Estos valores son muy comunes en la recolección de datos, por ello es importante que sepan qué hacer y cómo influyen en la media.
- Los estudiantes no son capaces de discriminar qué promedio es el más adecuado en cada situación. Y en determinadas ocasiones interpretan la media confundiéndola con otro parámetro de centralización.
- Es importante que cuando comparemos distribuciones, la media aritmética vaya acompañada de algún parámetro de dispersión, pues una distribución no queda completamente descrita dando únicamente la media.

Estrada (2007) analiza la educación estadística de los profesores en formación y presenta un estudio de los conocimientos estadísticos elementales de diferentes especialidades de Magisterio. Concluye afirmando que los futuros maestros “tienen errores conceptuales en algunos de los conceptos estadísticos elementales, independientemente del número de años de estudio, y aunque no de su especialidad”. (p.10)

García Cruz y Garret (2008) caracterizan la comprensión de algunos aspectos de la media aritmética en alumnado de secundaria y universitaria. En su trabajo realizan un análisis sobre el desarrollo cognitivo del concepto de media aritmética observando cinco niveles de respuestas en el alumnado. Las respuestas que encuentran confirman diferentes tipos de dificultades sobre la conceptualización de la media aritmética en ambos grupos. Afirman que, en general, no evidencian diferencias significativas entre alumnos de secundaria y universitaria.

La desviación típica es la medida más popular de variación, pero al mismo tiempo, es un concepto muy difícil y bastante formal, cuyo estudio queda reservado para los niveles de secundaria y universitaria. Los conceptos de distribución, media y desviación de la media son fundamentales para construir la noción de desviación típica (del Mas y Liu 2005,2007, citados por Sánchez, da Silva y Coutinho, 2011). Si, tal y como hemos indicado en los párrafos anteriores, estos conceptos presentan gran dificultad a los estudiantes, difícilmente podrán entender el concepto de desviación típica necesario para analizar la dispersión cuando se efectúan comparaciones entre dos o más muestras poblacionales. Reading y Pegg (1996) ya observaron que los niños de grados de 7 a 12, al reducir un conjunto de datos, mostraban dificultad a la hora de dar un argumento o justificar su respuesta de por qué se elegía un promedio u otro. Únicamente un número pequeño de estudiantes de su investigación, fueron capaces de justificar la elección de las medidas de valor central y dispersión al relacionarlas con características del conjunto de datos.

Recientemente, Ortiz y Font (2014), en un estudio realizado con estudiantes de primer curso de Magisterio, han revelado en su investigación que siguen dándose importantes dificultades relacionadas con la comprensión de los estudiantes de la media aritmética y sus propiedades.

Generalmente, los trabajos que hemos presentado toman como fuente de datos las respuestas del alumnado a cuestionarios y, en particular, al "…elaborado por Konold y Garfield" (Konold y Garfield, 1993, citado por Batanero, Godino y Navas, 1997: 2) empleado en diversas investigaciones. Pero, dichas respuestas no siempre son analizadas teniendo en cuenta el contexto en el que se formulan y el formato de datos que es propio del contexto. Ben-Zvi y Garfield (2004: 4) nos advierten que "el contexto en muchos problemas estadísticos puede inducir a error al estudiante, haciendo que se base en sus experiencias y, a menudo intuiciones erróneas para producir una respuesta, en lugar de seleccionar un procedimiento estadístico apropiado". Mooney, Langrall y Nisbet (2006) examinan el rol que juega el conocimiento del contexto al interferir o ayudar a estudiantes de nivel medio en sus respuestas a problemas que plantean una comparación de conjuntos de datos. Demuestran que el uso del conocimiento del contexto varía y que se puede describir y clasificar.

El interés de nuestro trabajo radica en abordar cuestiones de contextos y usar como método la resolución de problemas y no cuestionarios ya utilizados en investigaciones anteriores. En consecuencia, pretendemos que nuestro trabajo complemente a los citados a lo largo del apartado a la vez que aporta nuevos conocimientos a un tema que, por otra parte, ha sido y es ampliamente investigado.

4. ASPECTOS TEÓRICOS

Moore (2000: XXVII) ya nos hacía ver la importancia de los contextos en referencia al razonamiento estadístico:

> La estadística trata sobre datos. Éstos son números, pero no son sólo eso. Los datos son números en un contexto…. El contexto nos permite sacar partido de nuestros conocimientos sobre el tema de estudio y emitir juicios. El contexto hace que el número aporte información.

En nuestro trabajo, planteamos problemas de variabilidad o variación al alumnado que involucran colecciones de datos en diferentes contextos. Además, formulamos preguntas con diferentes verbos con intención didáctica: por término medio, esperas,… Para responder a estas preguntas, el alumnado puede haber utilizado como herramienta gráficos o cálculos. En el caso de utilizar cálculos, éstos deberían incluir una medida (parámetro o estadístico) central o de centro, también denominada medida de tendencia central o posición central. La medida central más común es la media aritmética o media. El cálculo de la media es sencillo, ya que para hallar la media de un conjunto de datos u observaciones, sumamos sus valores y dividimos por el número de datos.

La media aritmética como medida central, es sensible a la influencia de valores extremos los cuales pueden ser observaciones atípicas o no. Entendemos por observación atípica al igual que Moore (2000: 13) "una observación individual que queda fuera de lo general". Esta sensibilidad ante la influencia de valores extremos hace que consideremos a la media como una medida central no robusta.

La mediana es otra medida de centralización. Para el cálculo de la mediana son necesarios pocos pasos por lo que es fácil hallarla a mano cuando se tiene un conjunto de datos pequeños. En nuestro caso, el número de datos no superaba a 15 en ninguno de los problemas planteados en el cuestionario, lo que implicaba que el alumnado pudo calcular la mediana, en caso de hacerlo, sin problemas, salvo el impuesto por la falta de conocimiento de la regla de cálculo. La mediana a diferencia de la media, sí es una medida robusta al no ser sensible a los valores extremos. Sin embargo, en general, la media es el mejor representante de los datos cuantitativos frente a la mediana porque esta última no tiene en cuenta todos los datos de la distribución.

Moore (2000: 37) nos muestra un ejemplo del uso de la media y la mediana en un contexto que nosotros hemos denominado estadístico-social:

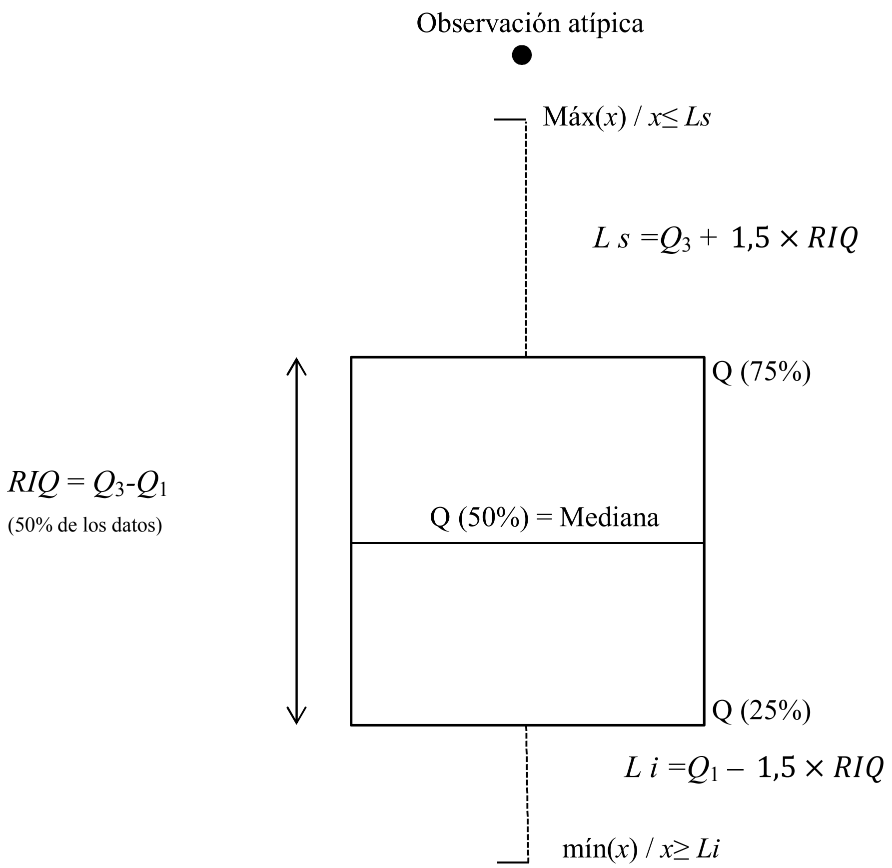
> En los informes sobre los precios de las viviendas, sobre los ingresos y sobre otras distribuciones muy asimétricas normalmente se calcula la mediana ("el valor central") en lugar de la media ("el valor promedio"). De todas formas, si fueras un inspector de Hacienda interesado en el valor total de tu zona, tendrás que utilizar la media. Aunque la media y la mediana miden el centro de maneras diferentes; las dos son útiles.

La media y la mediana nos proporcionan medidas centrales de una distribución, pero no bastan estas medidas para caracterizar una distribución. Necesitamos las denominadas medidas (parámetros o estadísticos) de dispersión o variabilidad. Moore (2000: 38) afirma que "la descripción numérica útil más simple de una distribución consiste en una medida de centro y una medida de dispersión". Una manera de medir la dispersión de una distribución, conocida como el rango de una distribución, es a partir de sus valores mínimo y máximo. Sin embargo, aunque esta medida es sencilla, no tiene en cuenta la presencia de observaciones atípicas. Podemos elaborar otras medidas que mejoren la descripción de la dispersión como, por ejemplo, los cuartiles. Estas medidas, además, nos van a permitir caracterizar las observaciones atípicas a través de la siguiente definición que involucra al recorrido intercuartílico (RIQ)[1]: "Entenderemos por observación atípica el dato que se encuentra a más de 1,5 veces el recorrido intercuartílico" (Serrano, 2011: 419).

En el siguiente gráfico se muestran los elementos que conforman un diagrama de cajas y bigotes. Este tipo de diagramas nos ayuda a determinar la presencia de una observación atípica sin necesidad de realizar cálculos, ya que aparece indicada con un punto situado fuera de los límites del intervalo.

[1] $RIQ = Q_3 - Q_1$, siendo Q_1, Q_3 los cuartiles 1 y 3, respectivamente.

Gráfico 1. Descripción del diagrama de cajas y bigotes



El alumnado no ha de basarse únicamente en los valores máximos y mínimos a la hora de analizar la dispersión, sino que tiene que buscar las observaciones atípicas y preguntarse el porqué de dichas observaciones y, después de identificar las observaciones atípicas, ha de buscar una explicación. En ocasiones, las observaciones atípicas pueden ser debido a errores; en otras, sus valores vendrán dados por la naturaleza de las variables objeto de estudio.

Anderson, Sweeney y Williams (2010 : 88) afirman que:

> Cuando el conjunto de datos contiene valores extremos, es preferible usar la mediana que la media como unidad de localización central. Otra medida que suele ser usada cuando hay valores extremos es la media recortada. La media recortada se obtiene eliminando del conjunto de datos un determinado porcentaje de los valores menores y mayores y calculando después la media de los valores restantes.

Somos conscientes que el alumnado no va a realizar este tipo de gráficos, entre otras cosa porque no los conoce y el contenido que involucran corresponde a un conocimiento especializado; sin embargo, sí que nos resulta útil a los investigadores de cara a justificar la presencia de observaciones atípicas que puedan condicionar la respuesta de un resolutor ideal. Hemos de ser objetivos a la hora de considerar una observación atípica o no y justificar por qué un valor es anormalmente extremo. Precisamente esta consideración ha supuesto un conflicto, en un problema de nuestro cuestionario, con la resolución de un resolutor experto.

Los números que hemos definido para confeccionar el diagrama de cajas y bigotes (Q_1, Q_2, Q_3, *mín* y *Máx*), no son la descripción más común de una distribución. En general, corresponde a la combinación de la media aritmética como medida de tendencia central acompañada de una medida de dispersión o variabilidad respecto a esta media que suele ser la desviación típica o estándar. En la práctica, se utiliza la calculadora o el ordenador para calcular la desviación típica cuando se usa la media como medida central. La desviación típica no es robusta, al igual que nos ocurría con la media aritmética, y la presencia de observaciones atípicas puede hacer que varíe su valor considerablemente.

En ocasiones, se requiere hacer uso de otras medidas descriptivas que nos muestren la relación de la desviación típica con la media. Esta medida es conocida como el coeficiente de variación de Pearson. En general, este coeficiente es útil para comparar la variabilidad de variables que tienen desviaciones típicas distintas y medias distintas.

Aunque existen otras medidas de dispersión, no las consideramos relevantes para nuestro estudio. Sin embargo, sí consideramos que la moda, intuitiva y fácil de calcular, puede ser otra medida de tendencia central que utilice el alumnado de cara a reducir la información para dar respuesta al cuestionario. El uso de la moda como mejor representante de nuestros conjuntos de datos no es válido, ya que no posee la propiedad de ser el mejor estimador (propiedad requerida para dar una respuesta correcta).

Según se desprende del artículo de Batanero, Godino y Navas (1997), los valores atípicos deben considerarse o descartarse en función del contexto en el que surgen los datos y la pregunta que se realiza. En esta investigación diferencian tres casos en los que hay o no que incluir en el análisis de los datos las observaciones o valores atípicos. En el primer ítem, formulado en un contexto de medición, plantean determinar con la mayor precisión posible el peso real de un objeto a partir de la estimación de su peso con una muestra de los pesos realizados por nueve estudiantes. Batanero, Godino y Navas (2007: 6) consideran que "el valor atípico apunta a un valor de medición y perturba notablemente la estimación del valor verdadero del peso del objeto". En el ítem 2, plantean un problema similar al del ítem 1 en un contexto diferente. En este caso afirman que:

> …, se incluye un valor atípico, que en este caso no debe descartarse, porque el contexto es diferente. En lugar de pedirse la mejor estimación de un valor, se pide por un resumen de datos, que debe incluir el valor atípico. La distribución, además, tiene una gran variabilidad, mientras que en el ítem 1 es mucho más homogénea. (Batanero, Godino y Navas 1997: 3)

El ítem 3 se formula de manera gráfica y presenta las puntuaciones en un examen de dos grupos de 10 estudiantes. Se solicita que, a partir de los gráficos, el alumnado escoja entre las distintas conclusiones que listan. En sus resultados Batanero, Godino y Navas (1997: 6) comentan que "los valores atípicos…desvirtúan por completo las diferencias existentes entre los dos conjuntos de datos y es necesario suprimirlos del análisis".

La postura que toman Anderson, Sweeney y Williams (2010: 102) a este respeto es:

> Una observación extraña quizá sea el valor de un dato que se anotó de modo incorrecto. Si es así puede corregirse antes de continuar con el análisis. Una observación atípica tal vez provenga, también, de una observación que se incluyó indebidamente en el conjunto de datos; si es así se puede eliminar. Por último, una observación atípica quizá es un dato con un valor inusual, anotado correctamente y que sí pertenece al conjunto de datos. En tal caso debe conservarse.

Como podemos observar, a tenor de los párrafos expuestos anteriormente, el tratamiento de los valores atípicos no es fácil ni para los estudiantes ni para los investigadores, en consecuencia, reconocemos que otros investigadores pueden estar en desacuerdo con la resolución ideal que proponemos. En el apartado 5, al realizar el análisis de los problemas, exponemos y justificamos el tratamiento que hemos realizado de las observaciones atípicas.

Hemos tenido en cuenta las diferentes posturas sobre observaciones atípicas para situar el razonamiento estadístico del estudiante al analizar sus actuaciones, a partir de los aspectos teóricos considerados, ya que consideramos que el tipo de tareas involucradas en nuestro estudio así nos lo requería. Por último, hacer notar que hemos observado el uso del término promedio en investigaciones previas para hacer referencia a medidas centrales (Batanero, Godino y Navas, 1997) por lo que lo hemos utilizado con este significado al hacer referencia a estas investigaciones.

5. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO EXPERIMENTAL

5.1. Muestra

El estudio se ha realizado en Florida Centro de Formación, centro ubicado en Catarroja (Valencia). El centro es de carácter concertado en la Enseñanza Secundaria y está adscrito a la Universidad de Valencia en las titulaciones de Grado de Maestro/a en Educación Infantil y Primaria. El cuestionario fue cumplimentado por un total de 188 alumnos y alumnas durante el curso 2013-14. Todo el alumnado de Secundaria realizaba la opción B de 4º, Simultaneidad cursaba simultáneamente Educación Infantil y Primaria (cursando 4º de Infantil y 3º de Primaria durante el desarrollo de la prueba) y el alumnado de actualización lo integraba alumnado que poseía el título de Diplomado en Magisterio en Infantil o Primaria y quería actualizar su título al de Graduado en Magisterio en Infantil o Primaria.

La tabla siguiente recoge los datos de la muestra de estudio:

Formación	Tamaño	Edad
4º Enseñanza Secundaria. Opción B.	72	15-17
2º Grado en Educación Infantil	44	
2º Grado en Educación Primaria	35	19-60
4º Simultaneidad en Educación Infantil y Primaria	16	
Actualización a Grado	21	
Total	188	

Tabla 1. Muestra

El alumnado no recibió instrucción específica a lo largo del curso sobre medidas de centralización y dispersión. Sus conocimientos previos correspondían a la formación recibida anteriormente en función de su etapa educativa. La estadística constituía el bloque de Tratamiento de la información, azar y probabilidad de los contenidos obligatorios marcados por el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006), el cual se repetía a lo largo de los tres ciclos de la educación primaria, introduciendo al final de la etapa la media, moda y rango. El Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria (MEC, 2007) contenía un bloque de Estadística y probabilidad. En esta etapa se ampliaba el estudio de promedios, incluyendo la mediana y se introducía la dispersión e incluso los valores atípicos en la opción B del cuarto curso. Precisamente la opción del alumnado de secundaria que tomó parte en nuestro estudio. Previamente, en tercer curso, el contenido del Decreto contemplaba:

- Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones.
- Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.
- Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.

El alumnado universitario de 2º estaba cursando la asignatura Matemáticas para Maestros, pero sus conocimientos eran los correspondientes a la etapa de secundaria puesto que no habían dado el bloque de contenidos de Estadística. Por último, el alumnado de simultaneidad y de actualización sí que debía haber recibido, a lo largo de la carrera, los contenidos relativos a las medidas de centralización y de dispersión que forman parte de la asignatura de Matemáticas para Maestros.

5.2. Instrumento de recogida de datos

Los datos fueron recogidos mediante la administración de un cuestionario constituido por 4 problemas, cada uno de ellos con dos apartados, completando un total de 8 ítems. Se trata de problemas de respuesta abierta, creados por los investigadores. Versión adaptada y modificada de Reading y Pegg (1996).

De acuerdo con Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo (2009: 177) en su planteamiento de problemas de probabilidad condicional:

> Plantear un problema significa formularlo para los datos que han de ser conocidos y desconocidos como un ejemplo en una situación general o particular. Los datos se refieren tanto a los sucesos como a los números que miden dichos sucesos. Conocida una situación, por ejemplo estadística, formular un problema significa considerar primero una situación particular dentro de ella, lo que nosotros llamamos contexto, dar los datos conocidos e interesarse por un dato desconocido en dicho contexto. Esto obliga a formular el problema de acuerdo con lo que es propio del contexto y que implica tanto al lenguaje para referirse a los sucesos como a los números para referirse a la medida de dicho sucesos.

Hemos adaptado su planteamiento a los problemas de variabilidad. En nuestro caso, plantear un problema significa formularlo para los datos que han de ser conocidos como un ejemplo en una situación general o particular. Los datos se refieren tanto a la situación como a la recogida de los valores de una muestra de dicha situación. Formular nuestros problemas, a partir de una situación estadística, significa considerar un contexto, dar los datos conocidos para diferentes distribuciones e interesarse por el mejor representante, el término medio, la ordenación o el valor esperado de una distribución; todas ellas preguntas referidas al uso e interpretación de las medidas de posición central y variabilidad.

Consideramos en nuestra investigación dos contextos. Los contextos los denominamos estadístico-social (ESTSOCIAL) y estadístico-salud (ESTSALUD). En cada contexto se plantearon dos problemas con situaciones diferentes. Una en la que la variable objeto de estudio era cuantitativa discreta y otra cuantitativa continua. La representación de todos los enunciados fue de forma escrita por decisión de los investigadores, al ser el formato más usual en estadística (escolar). En todos los problemas se incluyó una observación atípica con el objetivo de analizar si el alumnado era capaz de reconocer su presencia y la influencia de este tipo de observaciones en la media aritmética.

En el ítem 1 del problema 1 se tuvieron que comparar distintas distribuciones de ingresos. Estos ingresos venían expresados en miles de euros para dos muestras y en euros para la tercera. El formato de los datos condicionaba a que una variable del tipo cuantitativa discreta, ingresos anuales, viniera expresada como número decimal. El hecho de plantear una pregunta en términos de buscar el mejor representante, obligaba al alumnado a comparar y elegir. Esta elección podía venir dada por una reducción de datos a partir de medidas o parámetros estadísticos (de posición y variabilidad), por la no utilización de medidas estadísticas o por una elección subjetiva a partir del conocimiento que el estudiante tuviera del contexto. Se complementaba la pregunta con un segundo ítem en el que se pedía explícitamente realizar una ordenación. Esta pregunta forzaba al alumnado a decidir si el criterio que utilizaba para elegir el mejor representante seguía siendo válido al realizar la ordenación. El tamaño y valores de los datos de las distintas muestras venían expresados explícitamente en el enunciado. Los valores estaban separados por punto y coma, y se utilizaba como separador decimal el punto.

En el problema 2, la información se proporcionaba en una tabla tal y como se formulan los problemas de estadística, de forma usual, en la etapa escolar. El tamaño de la muestra era el mismo en las tres distribuciones que se presentaban. La variable objeto de estudio era el tiempo, variable cuantitativa continua que aparecía expresada en minutos a partir de números naturales. La intencionalidad de los investigadores, al plantear este formato, era observar si estas variables de la tarea podían influir en el resolutor. En el primer ítem se solicitaba expresamente que se respondiera, a partir del término medio, en qué centro (de los tres centros que se presentaban) creía el estudiante que el alumnado estaba más tiempo conectado a internet. En el segundo ítem, se preguntaba por el tiempo esperado para cada centro. Las preguntas de este problema fueron formuladas en términos diferentes al problema 1, sin embargo, ambos problemas coincidían en el contexto en el que estaban formulados (contexto estadístico-social).

El problema 3 cuestionaba, en su primer ítem, la efectividad de tres tratamientos y, en el segundo, la ordenación en función de la efectividad. Se preguntaba por el tratamiento y la ordenación de forma similar al problema 1. Sin embargo, los problemas diferían en el contexto y el formato de los datos. La variable, metros caminados por cada niño/a, era una variable cuantitativa discreta expresada con números naturales. El tamaño de la muestra de cada grupo era diferente, pero no estaba expresado en el enunciado. Los datos se presentaban en una tabla rectangular 3 x 15, dejando huecos en las celdas finales para indicar la diferencia en el tamaño de los grupos sometidos a tratamiento. El contexto era estadístico-salud.

El problema 4 volvía a plantearse en un contexto estadístico social. La variable objeto de estudio, grado de miopía, era de tipo cuantitativo continuo. La muestra seleccionada era del mismo tamaño para cada uno de los colectivos analizados y su cantidad venía expresada en el enunciado. Los datos se presentaban en una tabla en la que sí aparecían valores nulos. Era el único problema en el que se daba este hecho con el objetivo de analizar si el alumnado era consciente de la influencia de los valores nulos en el cálculo de la media aritmética. El primer ítem planteaba la elección del colectivo con el grado de miopía más elevado, mientras que el segundo preguntaba por la cantidad de dioptrías esperada. De nuevo la pregunta relativa al valor esperado, pero en este caso en un contexto diferente.

A lo largo de los problemas del cuestionario se planteaba la comparación de tres distribuciones. Ésta era una de las tareas básicas en el enfoque exploratorio del análisis de datos que aparece recomendada en los diseños curriculares de primaria y secundaria. Se repetían las preguntas en contextos y formatos de datos diferentes; se podría decir que los problemas coincidían en el fondo, pero no en la forma. Este planteamiento respondía al diseño intencionado de los investigadores.

En la tabla siguiente se resumen las características de los problemas del cuestionario.

Problema	Variable	Contexto
P1	Cuantitativa Discreta	Estadístico-Social
P2	Cuantitativa Continua	Estadístico-Social
P3	Cuantitativa Discreta	Estadístico-Salud
P4	Cuantitativa Continua	Estadístico-Salud

Tabla 2. Características de los problemas del cuestionario

Para validar el cuestionario, previamente fue analizado por un equipo de expertos que propusieron modificaciones. Éstas respondieron, en su mayoría, al formato del cuestionario. El equipo lo conformaron los propios profesores de la asignatura de Matemáticas en Secundaria y de Estadística en Universitaria. Únicamente un profesor resolvió los problemas y planteó una propuesta de evaluación. El resto de profesorado manifestó no disponer de tiempo para resolverlo.

5.3. Análisis de los problemas

A continuación presentamos los enunciados de los problemas y la transcripción, en cursiva, de la resolución realizada por el profesor experto (SOLPROF). Dicha resolución es comparada, para cada problema, con la realizada por el equipo investigador que llevó a cabo el estudio exploratorio (SOLINVEST).

5.3.1. Problema 1

En un edificio A, de la periferia de Valencia, viven 10 familias cuyos ingresos anuales en miles de euros son:

220; 17.5; 22; 19; 16.5; 20.5; 21; 19.5; 24; 19

En otro edificio B, del centro de Valencia, viven 12 familias cuyos ingresos anuales en miles de euros son:

43; 44.5; 37; 39; 40; 43; 37; 33; 42; 37; 46; 37

En un tercer edificio C, de un pueblo del interior, viven 10 familias cuyos ingresos anuales en euros son:

22000, 19000, 18000, 21000, 21000, 20000, 24000, 24000, 25000, 18000

1. ¿Qué edificio crees que sería el mejor representante de las familias con mayor poder adquisitivo? ¿Por qué?

2. Si tuvieras que ordenar los edificios anteriores de mayor a menor poder adquisitivo, ¿cómo lo harías? ¿En qué orden quedarían? Justifica la ordenación.

SOLPROF:

El resolutor decidió utilizar la notación, para las cantidades enunciadas, en miles de euros.

1. *En el primer edificio elimino la observación 220 por ser un valor anormalmente extremo.*

   Para comparar utilizaré la media aritmética, utilizando para las tres distribuciones los datos en miles de euros.

$$\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{17{'}5 + \cdots + 19}{9} = 19{'}89$$

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{43 + \cdots + 37}{12} = 39{'}59$$

$$\bar{x}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = 10 = 21{'}2$$

   Por lo tanto, el edificio B es el mejor representante porque su media es la más alta.

2. *Con el criterio de la media sería: en primer lugar el edificio B, en segundo lugar el edificio A y en tercer lugar el edificio C.*

SOLINVEST:

De lo datos del problema, el alumnado puede obtener diferente medidas descriptivas. Si el alumnado utiliza la media aritmética como medida para resumir la información, ésta debería ir acompañada de una medida de dispersión. Además, tendría que tener en cuenta la presencia de observaciones atípicas que pudieran condicionar el resultado.

Puesto que en todos los problemas se ha introducido como mínimo una observación atípica que, como ya se indicó en la página 17 de esta memoria, tiene por objetivo observar el efecto que tiene sobre el resolutor la presencia de este tipo de observaciones; está en función de los datos del problema y del resolutor la necesidad o no de incluir este valor para el cálculo de la media aritmética.

A continuación analizamos la presencia de observaciones atípicas en el planteamiento del problema 1. Por facilidad de cálculo, consideraremos los datos en miles de euros a lo largo de todo nuestro análisis.

Las siguientes tablas representan el recorrido intercuartílico junto con 1,5 veces este recorrido. La última fila indica los valores que quedan fuera de los límites establecidos y, en base a la definición previa, las observaciones atípicas.

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 19{,}00$ $Q_1 - 1{,}5 \times RIQ = 14{,}87$	$Q_3 = 21{,}75$ $Q_3 + 1{,}5 \times RIQ = 25{,}88$
Observaciones atípicas	----	220 (>25,88)

Tabla 3. Observaciones atípicas problema 1 edificio A

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 37{,}00$ $Q_1 - 1{,}5 \times RIQ = 28$	$Q_3 = 43{,}00$ $Q_3 + 1{,}5 \times RIQ = 52$
Observaciones atípicas	----	----

Tabla 4. Observaciones atípicas problema 1 edificio B

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 19{,}25$ $Q_1 - 1{,}5 \times RIQ = 12{,}87$	$Q_3 = 23{,}50$ $Q_3 + 1{,}5 \times RIQ = 29{,}87$
Observaciones atípicas	----	----

Tabla 5. Observaciones atípicas problema 1 edificio C

Los datos de las tablas, nos muestran que el dato 220 corresponde a una observación atípica. Gráficamente, a través del diagrama de cajas y bigotes, también observamos cómo la observación con valor 220 (representada mediante un punto) es la única que queda fuera de los límites:

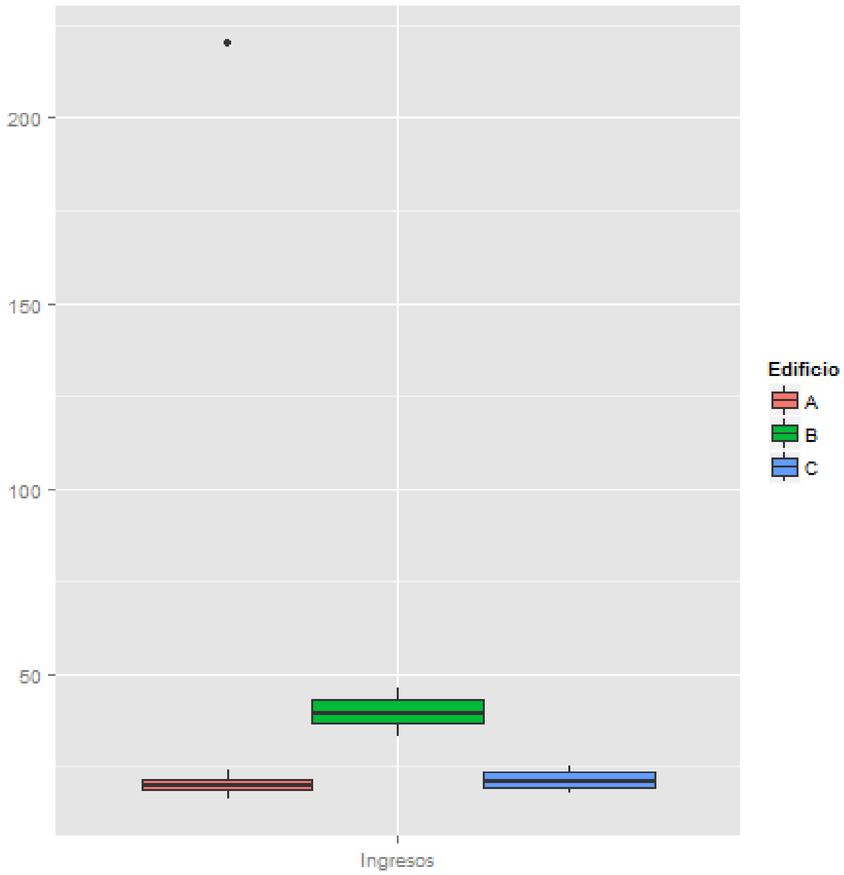


Gráfico 2. Diagrama de cajas y bigotes problema 1

En la tabla 4, se presentan los estadísticos descriptivos de la distribución de los ingresos en miles de euros por edificios:

Edificio	Media	Mediana	Moda	D. Típica	C. Variación	Rango	RIQ
Edif. A	39,90	20,00	19	60,07	1,50	203,50	2,75
Edif. A*	**19,89**	**19,50**	**19**	**2,16**	**0,11**	**7,50**	**2**
Edif. B	39,87	39,50	37	3,70	0,09	13,00	6
Edif. C	21,20	21,00	18	2,40	0,11	7,00	4,25

Tabla 6. Estadísticos descriptivos *ingresos* problema 1

La fila correspondiente al Edif. A* recoge los estadísticos descriptivos de la distribución de ingresos del edificio A sin la observación 220.

El rango de los ingresos para el edificio A, es significativamente superior al del resto de edificios. Este cálculo sencillo nos permite hacernos una idea de la dispersión de la distribución.

Observamos que la desviación típica de la distribución de ingresos del edificio A (60,07) es superior a la media aritmética (39,90). En consecuencia, el coeficiente de variación de Pearson es mayor que 1. El hecho de no considerar que exista una observación atípica para los ingresos de las familias del edificio A, conduce a obtener un valor de la media aritmética poco representativo (puesto que la desviación típica es superior a la media) y a un error en la respuesta del resolutor.

Si comparamos las filas Edif. A y Edif. A*, vemos una diferencia significativa en los ingresos medios pasando de 39,90 a 19,89. Si tomamos la mediana para reducir los datos, el edificio A se sitúa en último lugar.

1. Consideramos como respuesta válida que el edificio B es el mejor representante de las familias.

Esta respuesta viene dada únicamente si el resolutor elimina la observación 220 para el cálculo de la media aritmética o si considera como medida de posición central la mediana. En ambos casos el valor es el más alto.

2. Si ordenamos siguiendo el criterio de la media aritmética o el de la mediana, a partir de los cálculos del apartado 1, el orden sería: en primer lugar el edificio B, en segundo lugar el edifico C y en tercer lugar el edificio A.

Nuestro criterio no coincide con el del profesor resolutor. Creemos que hasta aquellos que se les supone expertos, estadísticamente hablando, confían en demasía en la media aritmética como representante de un conjunto de datos sin tener en cuenta la variabilidad de los mismos (esto confirma muchas investigaciones que hablan de ello). También observamos un error en el cálculo de la media para el edificio B que no condiciona la respuesta.

A lo largo de esta sección mantendremos la estructura del análisis realizado en el problema 1 para el resto de problemas del cuestionario.

5.3.2. Problema 2

Se ha realizado un estudio sobre el tiempo que los adolescentes de una localidad dedican a internet diariamente. Para ello, se ha seleccionado una muestra al azar, de 10 estudiantes, en cada uno de sus tres centros de enseñanza y se ha preguntado cuánto tiempo estuvieron conectados el último día a internet. Las respuestas se presentan en la siguiente tabla:

Centro	Tiempo en minutos
Público	135, 105, 95, 130, 145, 110, 105, 135, 150, 140
Privado	130, 70, 95, 110, 145, 90, 70, 410, 120, 100
Concertado	125, 160, 110, 100, 145, 130, 80, 130,110, 160

Tabla 7. Tiempo conexión a internet

1. ¿En cuál de los tres centros crees que el alumnado está, por término medio, más tiempo conectado a internet? Justifica tu elección.

2. A partir de los datos de la tabla, ¿qué tiempo esperas que un estudiante de cada uno de los centros dedique a internet? Justifica tu respuesta.

SOLPROF:

1. *Calcularé la media para cada grupo y seleccionaré la mayor.*

$$\bar{x}_{Pu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{135 + \cdots + 140}{10} = 125$$
$$\bar{x}_{Pr} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{130 + \cdots + 100}{10} = 134$$
$$\bar{x}_{Co} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{125 + \cdots + 160}{10} = 125$$

Por tanto será el del privado.

2. *Utilizando el criterio de la media, sería para el público 125 minutos, para el privado 134 minutos y para el concertado 125 minutos.*

SOLINVEST:

En este problema se pregunta explícitamente por el tiempo medio que el alumnado está conectado a internet.

A continuación analizamos la presencia de observaciones atípicas en el planteamiento del problema 2.

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 106{,}25$	$Q_3 = 138{,}75$
	$Q_1 - 1{,}5 \times RIQ = 57{,}5$	$Q_3 + 1{,}5 \times RIQ = 187{,}5$
Observaciones atípicas	----	----

Tabla 8. Observaciones atípicas problema 2 centro público

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 91{,}25$	$Q_3 = 127{,}50$
	$Q_1 - 1{,}5 \times RIQ = 36{,}87$	$Q_3 + 1{,}5 \times RIQ = 181{,}87$
Observaciones atípicas	----	410 (>181,87)

Tabla 9. Observaciones atípicas problema 2 centro privado

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 110{,}00$	$Q_3 = 141{,}25$
	$Q_1 - 1{,}5 \times RIQ = 63{,}12$	$Q_3 + 1{,}5 \times RIQ = 188{,}12$
Observaciones atípicas	----	----

Tabla 10. Observaciones atípicas problema 2 centro concertado

Los datos de las tablas, nos muestran que el dato 410 corresponde a una observación atípica Gráficamente observamos cómo la observación con valor 410 es la única que queda fuera de los límites. Incluimos en la representación, con un punto rojo, el tiempo medio de conexión a internet por parte del alumnado en cada centro.

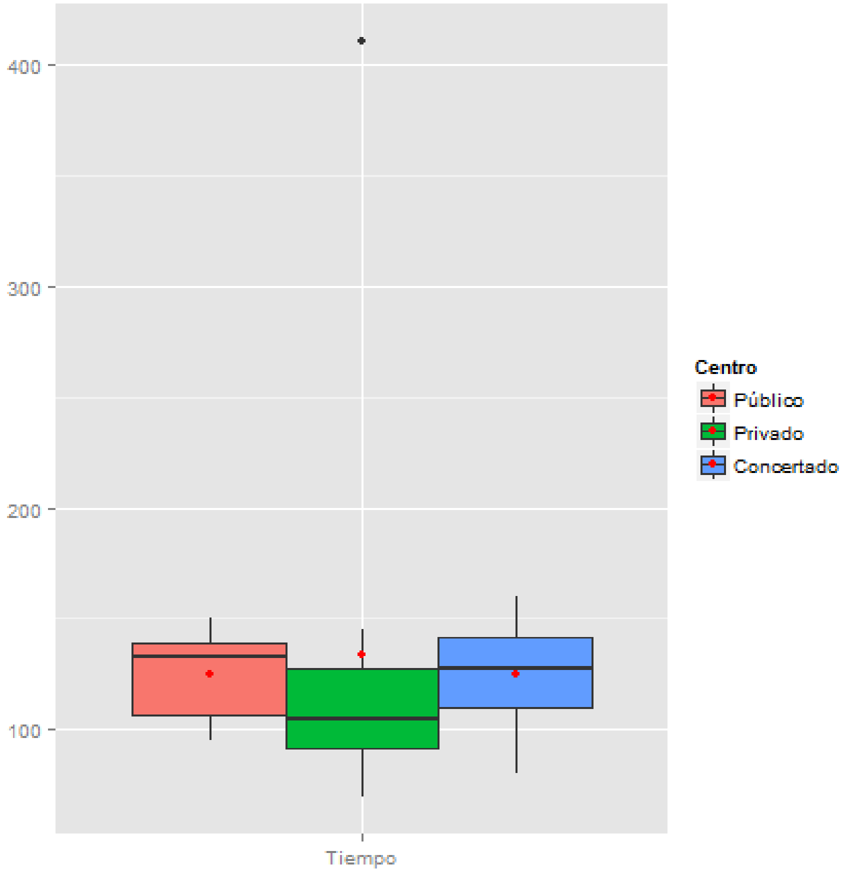


Gráfico 3. Diagrama de cajas y bigotes problema 2

Se observa que el tiempo medio dedicado a conectarse a internet en el centro privado es superior al de los otros centros para el caso de considerar todas las observaciones del problema.

En la tabla 9, se presentan los estadísticos descriptivos de la distribución del tiempo en minutos de conexión a internet del alumnado de los distintos centros:

Centro	Media	Mediana	Moda	D. Típica	C. Variación	Rango	RIQ
Público	125,00	132,50	135	18,44	0,15	55	32,50
Privado	134,00	105,00	70	94,81	0,71	340	36,25
Privado*	**103,33**	**100,00**	**70**	**24,15**	**0,23**	**75**	**30,00**
Concertado	125,00	127,50	160	24,49	0,20	80	31,25

Tabla 11. Estadísticos descriptivos *tiempo de conexión* problema 2

La fila correspondiente al Privado*, recoge los estadísticos descriptivos de la distribución del tiempo de conexión a internet del centro privado sin la observación 410.

En este caso, la desviación típica del tiempo de conexión en el centro privado (94,81) no es superior a la media aritmética (134). En consecuencia, el coeficiente de variación de Pearson no es mayor que 1. El hecho de no considerar que exista una observación atípica para el tiempo en la muestra de los 10 alumnos del centro privado, conduce a obtener un valor de la media aritmética cercano a la falta de representatividad. Tanto la mediana como la moda, están por debajo del resto de centros en el caso del privado; frente a los valores de las medidas de dispersión: desviación típica, rango y rango intercuartílico, superiores en el centro privado al público y al concertado.

Si comparamos las filas Privado y Privado*, vemos una diferencia significativa en el tiempo medio pasando de 134,00 a 103,33 minutos. Si tomamos la mediana para reducir los datos, el centro privado se sitúa en último lugar.

1. Consideramos como respuesta válida que en el centro público el alumnado está por término medio más tiempo conectado a internet. Nuestra respuesta está fundamentada en los datos aportados en la tabla 9. Podemos observar que, en el centro público, el tiempo medio es el mismo que en el concertado, pero con un valor de la mediana más elevado y con menos dispersión en los datos. No obstante, aceptaremos también la respuesta que haga referencia a que en los centros público y concertado el tiempo medio dedicado es el mismo.

   Siguiendo el criterio de eliminar del cálculo las observaciones atípicas y/o considerar la mediana como medida de posición central, en nuestro análisis, no consideramos válida la respuesta que toma al centro privado como aquel en el que el alumnado está por término medio más tiempo conectado a internet. Ni siquiera la consideración del contexto nos hace tener en cuenta la observación atípica para responder a la pregunta.

2. Con este apartado pretendemos analizar qué entiende el alumnado por valor esperado. Tomaremos como válida la respuesta que asigne como valor esperado la media aritmética despreciando el valor atípico en el caso del centro privado.

De nuevo, nuestro criterio no coincide con el del profesor. Este hecho afianza la creencia de una excesiva dependencia de la media aritmética en las soluciones a problemas que involucran reducción de datos. Pensamos que la formulación de la pregunta, a partir del término tiempo medio, puede haber condicionado la respuesta. También hemos de ser conscientes que el hecho de haber planteado un problema en el que la muestra haya sido de 10 observaciones, lo que se considera una muestra “pequeña” por ser menor que 30, puede haber dado lugar a que el resolutor haya creído necesario considerar todos los datos del problema.

Se debatió con el resolutor la necesidad o no de incluir el valor 410 y manifestó que para él no era un valor atípico. No valoró la posibilidad de analizar si el contexto podía condicionar el uso de la observación atípica en la respuesta. Siendo coherentes con la definición de observación atípica que hemos enunciado al comienzo de la sección y con la representación gráfica, obtenida con el programa R, nosotros consideramos necesario reducir los datos sin considerar este valor y/o utilizar la mediana como medida de posición central.

El gráfico siguiente muestra cómo se ve modificada la media aritmética cuando se calcula con los 9 valores restantes, pasando a ser el centro en el que el alumnado está por término medio menos tiempo conectado a internet.

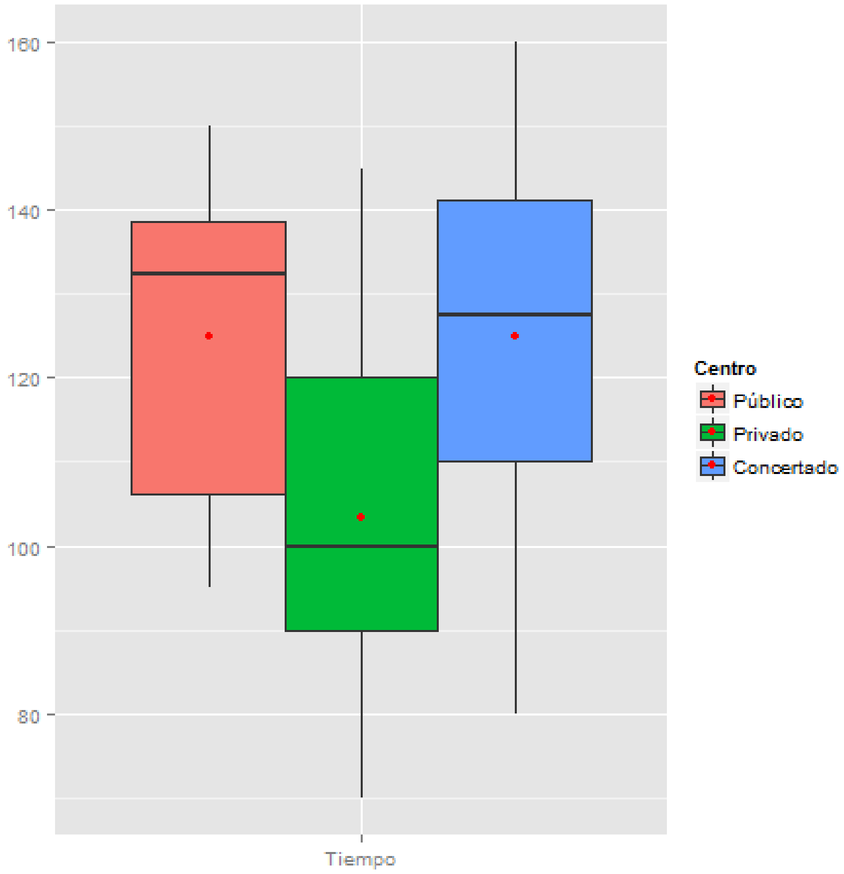


Gráfico 4. Diagrama de cajas y bigotes problema 2 sin observación 410 en centro privado

Este problema tiene como característica adicional que en el centro público y el concertado la media aritmética es la misma, lo que obliga al estudiante a tener en cuenta la dispersión para realizar la comparación. Se pretende observar si se utiliza un razonamiento inferencial de modo intuitivo, es decir, la media aritmética para calcular el tiempo esperado.

5.3.3. Problema 3

En una clínica infantil para niños y niñas con problemas para caminar, se ha creado tres grupos. A cada grupo se le ha aplicado una técnica diferente de aprendizaje. Al final del tratamiento, se ha realizado una prueba consistente en el número de metros que cada niño anda, seguido y sin caerse. Los resultados para los tres grupos han sido los siguientes.

Grupo	Metros caminados por cada niño/a														
1	1	2	1	2	2	4	1	1	3	2	1	4	2		
2	1	1	2	1	3	2	15	4	1	2	3	4	1	1	
3	2	2	3	1	4	5	2	2	3	3	1	3	5	4	5

Tabla 12

1. ¿En qué grupo consideras que el tratamiento ha sido más efectivo? ¿Por qué?

2. Si tuvieras que ordenar los tratamientos de mayor a menor efectividad, ¿cómo lo harías? ¿En qué orden quedarían? Argumenta tu respuesta.

SOLPROF:

1. *Seleccionaré el criterio de la media. En el grupo 2 eliminaré el valor 15 por ser anormalmente extremo.*

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{1+2+\cdots+2}{13} = 2$$
$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{1+\cdots+1}{13} = 2$$
$$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{2+\cdots+5}{15} = 3$$

Por tanto, el del grupo 3 es el más efectivo.

2. *Utilizando el criterio de la media sería primero el 3, y luego, empatados, el 1 y el 2.*

SOLINVEST:

A continuación analizamos la presencia de observaciones atípicas en el planteamiento del problema 3.

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 1$ $Q_1 - 1,5 \times RIQ = -0,5$	$Q_3 = 2$ $Q_3 + 1,5 \times RIQ = 3,5$
Observaciones atípicas	----	4 (>3,5)

Tabla 13. Observaciones atípicas problema 3 grupo 1

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 1$ $Q_1 - 1,5 \times RIQ = -2$	$Q_3 = 3$ $Q_3 + 1,5 \times RIQ = 6$
Observaciones atípicas	----	15 (>6)

Tabla 14. Observaciones atípicas problema 3 grupo 2

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 2$ $Q_1 - 1,5 \times RIQ = -1$	$Q_3 = 4$ $Q_3 + 1,5 \times RIQ = 7$
Observaciones atípicas	----	----

Tabla 15. Observaciones atípicas problema 3 grupo 3

Gráficamente venos cómo la observación con valor 4 para el grupo 1 y 15 para el grupo 2, quedan fuera de los límites. El análisis de las tablas anteriores nos lleva a la misma conclusión.

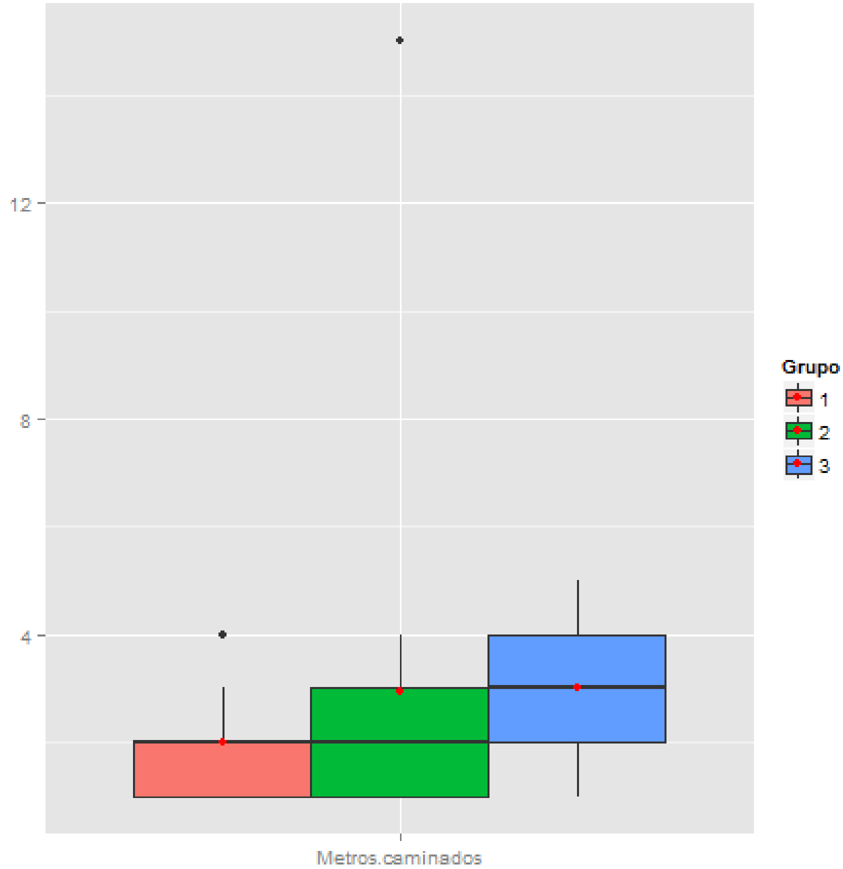


Gráfico 4. Diagrama de cajas y bigotes problema 3

Se observa que el número medio de metros caminados, en los grupos 2 y 3, es el mismo si consideramos todos los datos del problema. Claramente, con estos datos, la efectividad en el grupo 1 es inferior al resto de grupos. Veamos cómo afectan las observaciones atípicas a los tratamientos.

En la tabla 16 se presentan los estadísticos descriptivos de la distribución del número de metros caminados por los niños y niñas de cada grupo.

Centro	Media	Mediana	Moda	D. Típica	C. Variación	Rango	RIQ
Grupo 1	2,00	2	1	1,04	0,52	3	1
Grupo 1*	**1,64**	**2**	**1**	**0,64**	**0,39**	**2**	**1**
Grupo 2	2,93	2	1	3,51	1,20	14	2
Grupo 2*	**2,00**	**2**	**1**	**1,11**	**0,55**	**3**	**2**
Grupo 3	3,00	3	2	1,32	0,44	4	2

Tabla 16. Estadísticos descriptivos *metros caminados* problema 3

Las filas correspondientes a Grupo 1* y Grupo 2*, recogen los estadísticos descriptivos de la distribución del número de metros caminados por los niños y niñas de cada grupo en la clínica infantil sin las observaciones 4 y 15 presentadas en la tabla 12.

Los resultados presentados en la tabla 16, muestran que en el grupo 3 las diferentes medidas de posición central (media, mediana y moda), son superiores al resto de los grupos. Aunque los datos del problema tienen incorporados observaciones atípicas, estas no influyen en la decisión referente a la efectividad. Podríamos añadir que en el grupo 2, la desviación típica es superior a la media aritmética lo que se traduce en falta de representatividad de la media al ser el coeficiente de variación superior a 1.

1. Consideramos como respuesta correcta que el tratamiento más efectivo ha sido el recibido por el grupo 3. La justificación ha sido expuesta en los párrafos anteriores.

2. En primer lugar pondríamos como tratamiento más efectivo el 3. Esta decisión es coherente con el apartado 1. Las diferencias entre los tratamientos en los grupos 2 y 3 vienen dadas por cálculos que, a priori, no son sencillos para el alumnado. Es difícil detectar que el valor 4 se corresponde con una observación atípica si no se calculan los cuartiles. Además, para el grupo 1 la media es representativa. Ni siquiera el rango en este tratamiento nos muestra evidencias de la presencia de observaciones atípicas.

Nuestra respuesta y la del resolutor coinciden en este problema. Analizaremos posteriormente cómo el hecho de modificar el contexto y la presentación de los datos puede haber modificado la respuesta del alumnado.

5.3.4. Problema 4

Se pretende estudiar el grado de miopía de tres colectivos diferentes en una empresa de investigación: doctorados, graduados y sin estudios superiores. Para ello, seleccionamos una muestra de 10 personas de cada colectivo. Los resultados han sido:

Colectivo	Dioptrías									
Doctores	3	0	0	2	1.75	0.5	0	2	2.25	0.5
Graduados	0	2	0	0	0	1.5	16	1.25	2.25	0.75
Sin estudios superiores	2	2	0	1	0.5	0.25	1.5	1	2.75	3.5

Tabla 17

1. ¿En qué colectivo consideras que el grado de miopía es más elevado? ¿Por qué?

2. A partir de los datos de la tabla, ¿qué cantidad de dioptrías esperas que tenga un miembro de cada colectivo? Justifica tu respuesta.

SOLPROF:

1. *Utilizaré el criterio de la media de los graduados eliminando el valor 16.*

$$\bar{x}_D = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{3 + \cdots + 0´5}{10} = 1'2$$
$$\bar{x}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{0 + \cdots + 0´75}{9} = 0´86$$
$$\bar{x}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{2 + \cdots + 3'5}{10} = 1'45$$

Por tanto, el más elevado es el del grupo sin estudios superiores.

2. *Bajo el criterio de la media en el grupo D sería 1'2, en el G 0'86 y en el S 1'45 dioptrías.*

SOLINVEST:

A continuación analizamos la presencia de observaciones atípicas en el planteamiento del problema 4.

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 0{,}125$ $Q_1 - 1{,}5 \times RIQ = -2{,}69$	$Q_3 = 2$ $Q_3 + 1{,}5 \times RIQ = 4{,}81$
Observaciones atípicas	----	----

Tabla 18. Observaciones atípicas problema 4 colectivo doctores

	Límite inferior	Límite superior
	$Q_1 = 0$ $Q_1 - 1{,}5 \times RIQ = -2{,}81$	$Q_3 = 1{,}87$ $Q_3 + 1{,}5 \times RIQ = 4{,}67$
Observaciones atípicas	----	16 (> 4,67)

Tabla 19. Observaciones atípicas problema 4 colectivo graduados

Límite inferior	Límite superior
$Q_1 = 0{,}62$	$Q_3 = 2$

	$Q_1 - 1{,}5 \times RIQ$ = -1,44	$Q_3 + 1{,}5 \times RIQ$ = 4,06
Observaciones atípicas	----	----

Tabla 20. Observaciones atípicas problema 4 colectivo sin estudios superiores

La tabla 19 nos indica la presencia de una observación atípica. También gráficamente vemos cómo la observación con valor 16, para el colectivo de graduados, queda fuera de los límites.

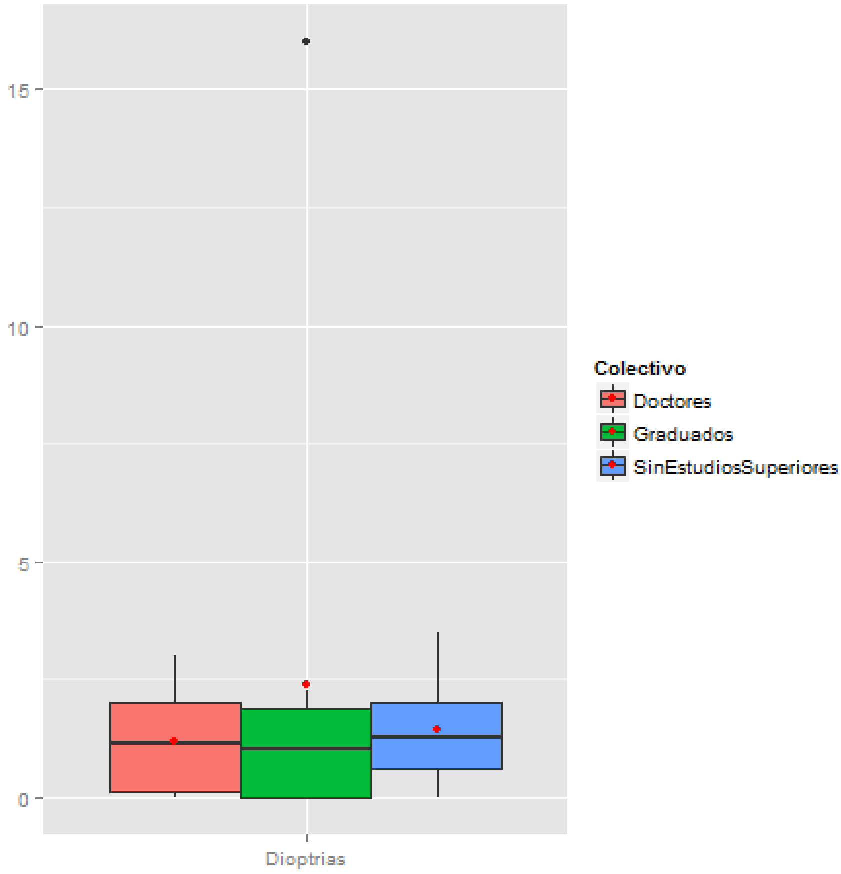


Gráfico 6. Diagrama de cajas y bigotes problema 4

Se observa que el número medio de dioptrías en el colectivo de graduados es superior al del resto de colectivos. Sin embargo, este colectivo presenta una observación atípica que modifica el valor de la media aritmética al ser sensible a los valores extremos.

En la tabla 21 se presentan los estadísticos descriptivos de la distribución del número de dioptrías de los distintos colectivos.

Colectivo	Media	Mediana	Moda	D. Típica	C. Variación	Rango	RIQ
Doctores	1,20	1,12	0	1,06	0,88	3	1,87
Graduados	2,37	1,00	0	4,61	1,94	16	1,87
Graduado*	**0,86**	**0,75**	**0**	**0,87**	**1,01**	**2,25**	**1,5**
Sin estudios superiores	1,45	1,25	2	1,06	0,73	3,5	1,37

Tabla 21. Estadísticos descriptivos *dioptrías* problema 4

La fila correspondiente al colectivo Graduado*, recoge los estadísticos descriptivos de la distribución del número de dioptrías en el colectivo de graduados sin la observación atípica 16 recogida en la tabla 17.

Los resultados presentados en la tabla 21, muestran que la media aritmética no es representativa del colectivo de graduados por tener un coeficiente de variación superior a 1. El valor del rango (16) describe una dispersión elevada de los datos respecto al resto de colectivos. Si consideramos la mediana y/o eliminamos la observación atípica, el colectivo graduados presenta un nivel de dioptrías inferior al del resto de los colectivos. Los valores de la mediana y la moda para la variable número de dioptrías son más elevados en el colectivo sin estudios superiores. Además, este último colectivo, es el que menor coeficiente de variación y rango intercuartílico presenta.

1. A tenor de lo expuesto en el párrafo anterior, consideramos que el colectivo sin estudios superiores presenta un grado de dioptrías más elevado que el resto de colectivos.

2. Al igual que en el problema 2, daremos como válida la respuesta que asigne como valor esperado la media aritmética despreciando el valor atípico en el caso del centro privado.

De nuevo, nuestra respuesta y la del resolutor coinciden en este problema. Además del valor atípico, se incorporan valores nulos a los datos para tener en cuenta la creencia de algunos estudiantes en que el cero no cambia el valor de la media.

Para finalizar el apartado, queremos resaltar que las tareas evalúan el uso de la media aritmética como mejor representante de un conjunto de datos, la influencia de los valores atípicos y/o de los valores nulos en el cálculo de la media aritmética, la no consideración del tamaño de la muestra, la posible confusión en el alumnado entre la media y otras medidas de promedios, así como la influencia en la respuesta del formato de los datos y del contexto. Además, fuerzan a no reducir las respuestas a simple cálculo de medidas centrales, ya que hay distribuciones con medias iguales. En consecuencia, el alumnado se ve abocado a considerar la dispersión de los datos. Como se puede observar, las tareas están asociadas con los cinco objetivos de nuestra investigación.

Este cuestionario fue aplicado mientras los estudiantes asistían a clases de matemáticas y administrado por los miembros del equipo de investigación con la colaboración del profesorado de matemáticas del centro. Se resolvió durante las clases y con una duración aproximada a la de éstas. El número de problemas resultó ser adecuado para el tiempo dedicado al cuestionario.

6. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Hemos realizado un análisis cuantitativo de las resoluciones de los problemas efectuadas por los estudiantes. Los investigadores hemos recogido en una hoja de cálculo estas resoluciones para, posteriormente, realizar un tratamiento descriptivo de los datos. En este apartado describimos dicho análisis; en él se distinguen las respuestas entre los distintos colectivos teniendo en cuenta los objetivos de nuestro estudio. El código SECUNDARIA se refiere a estudiantes de secundaria, INFANTIL a maestros en formación en la especialidad de infantil, PRIMARIA a maestros en formación en la especialidad de primaria, SIMULTANEIDAD a maestros en formación que cursan simultáneamente las especialidades de infantil y primaria. Por último, ACTUALIZACIÓN son maestros en activo que desean actualizar su grado de diplomado al de graduado.

Clasificaremos el conjunto de respuestas que el alumnado ofrece a una misma pregunta empleando un código para identificar si la respuesta verifica el criterio o no. De esta forma podremos analizar los resultados en cada pregunta por separado y comprobar si se cumplen nuestros objetivos.

Recogemos en el análisis, junto a cada objetivo y/o pregunta, algunas de las respuestas del alumnado añadiendo comentarios. El motivo es mostrar el criterio de análisis seguido a la hora de codificar sus respuestas.

6.1. Representatividad de la media aritmética

Los cálculos al dar respuesta a los problemas, en el caso de haber sido realizados, pueden estar basados en la utilización o no de parámetros o medidas estadísticas. Para que la respuesta del problema se considere correcta, es necesario acompañar el razonamiento de una medida de dispersión que permita asegurar que la reducción de los datos es la adecuada.

- Las respuestas que no usen un razonamiento basado en parámetros estadísticos se codificarán como NRE (No Razonamiento Estadístico).
- Las respuestas que usen un razonamiento basado en parámetros estadísticos que no sean centrales se codificarán como RENC (Razonamiento Estadístico No Central).
- Las respuestas que usen un razonamiento basado en medidas centrales con análisis de la dispersión de los datos se codificarán como RECC (Razonamiento Estadístico Central Completo). Como consecuencia de la experimentación, se ha observado que el único análisis de la dispersión que

realiza el alumnado es el cálculo del rango que, en ocasiones, puede estar o no acompañado del reconocimiento de valores atípicos. En consecuencia, contemplaremos dentro de este tipo de respuestas aquellas que calculen la media aritmética con y sin el valor atípico para valorar la representatividad de la media. Daremos por correcta la respuesta en la que el alumnado haga referencia a la variabilidad, sin realizar cálculos de la dispersión de los datos, y acompañe la reflexión con el cálculo de la mediana o de la media aritmética (sin considerar la observación atípica para el caso de la media). Si no se realiza este análisis, se codificarán como RECI (Razonamiento Estadístico Central Incompleto)

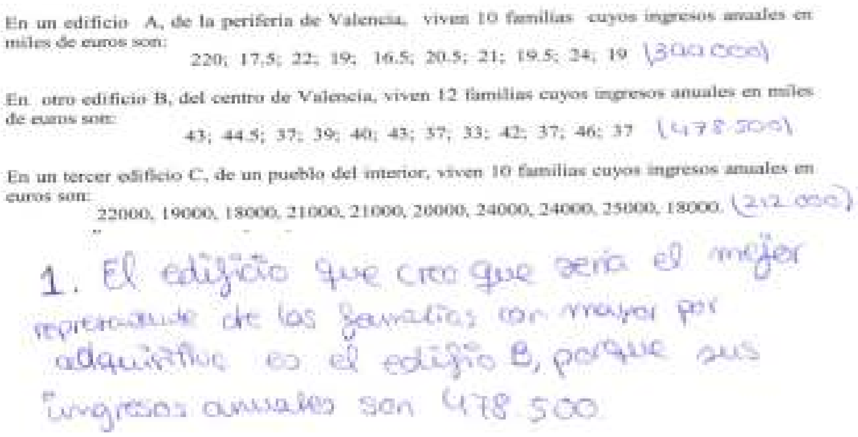
Los datos se presentan en términos relativos con respecto al alumnado que ha respondido el problema. Las tablas registran los resultados en porcentaje.

Problema 1

¿Qué edificio crees que sería el mejor representante de las familias con mayor poder adquisitivo?

Clasificamos las respuestas como:

NRE. No uso de parámetros estadísticos.


En un edificio A, de la periferia de Valencia, viven 10 familias cuyos ingresos anuales en miles de euros son:
220; 17,5; 22; 19; 16,5; 20,5; 21; 19,5; 24; 19 (300 000)

En otro edificio B, del centro de Valencia, viven 12 familias cuyos ingresos anuales en miles de euros son:
43; 44,5; 37; 39; 40; 43; 37; 33; 42; 37; 46; 37 (478 500)

En un tercer edificio C, de un pueblo del interior, viven 10 familias cuyos ingresos anuales en euros son:
22000, 19000, 18000, 21000, 21000, 20000, 24000, 24000, 25000, 18000. (212 000)

1. El edificio que creo que sería el mejor representante de las familias con mayor por adquisitivo es el edificio B, porque sus ingresos anuales son 478 500

Figura 1. Respuesta al problema 1.1 del alumno 63

El alumno utiliza la suma de los ingresos de las diferentes familias para seleccionar el edificio que mejor representa el poder adquisitivo. No tiene en cuenta que el número de familias es diferente y tampoco la existencia de una familia con unos ingresos atípicos. Esta decisión le lleva acertar con el edificio con mayor poder adquisitivo, pero sin usar métodos estadísticos, lo que no deja de ser casual.

1) el edificio B, porque no és ni el mas rico ni el màs pobre.

Figura 2. Respuesta al problema 1.1 del alumno 14

Al igual que la respuesta proporcionada por el alumno 63, la respuesta es acertada sin utilizar métodos estadísticos. Sin embargo, difiere en el razonamiento al realizar una estimación subjetiva.

RENC. Uso de parámetros estadísticos no centrales.

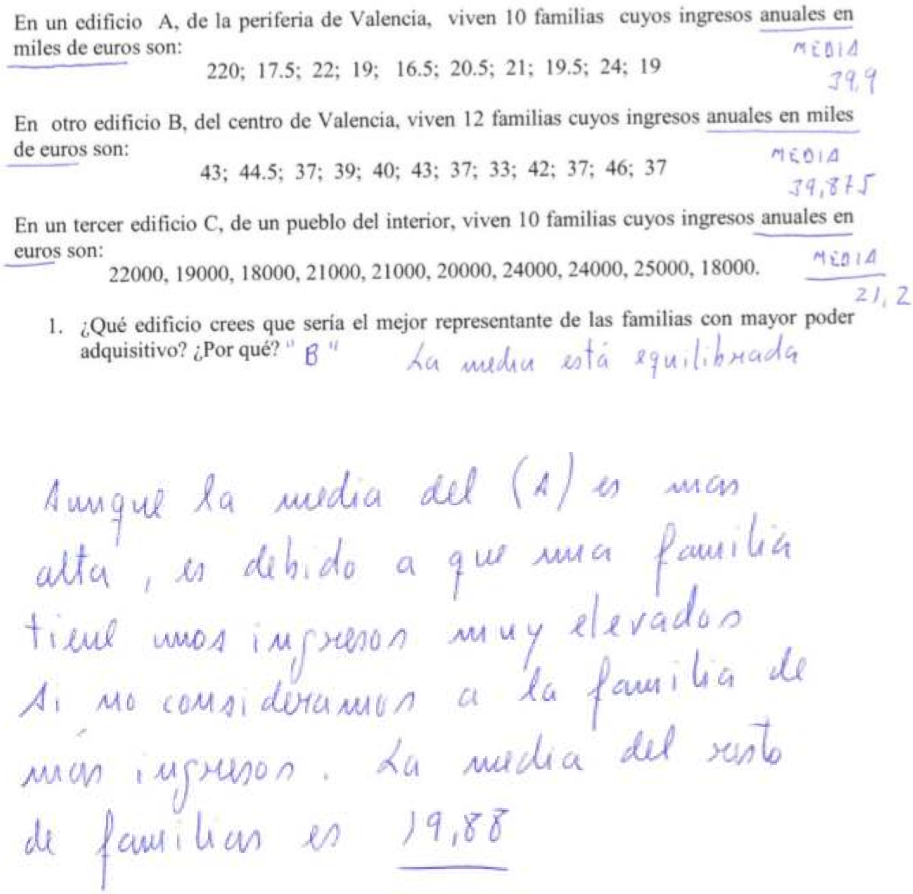
1: Creo que el edificio B representa las familias con mayor poder adquisitivo ya que todos los participantes en la investigación se encuentran entre. 46 - 37
En el edificio A se da una familia que sobres sale excesivamente xo ~~no~~ el resto de familias se encuentran 24 - 16'5 por debajo que el edificio B.
y el edificio C seria en segundo en cuanto a orden de poder adquisitivo, ya que la mayoria de las familias se encuentran entre 25.000 - 18.000 superando al edificio A.

Figura 3. Respuesta al problema 1.1 del alumno 106

Pese a que acierta con la respuesta, utiliza el rango en cada distribución para responder a la pregunta. El alumno valora el mejor representante basándose sólo en los mínimos y máximos de las distribuciones

RECC. Uso de medidas de tendencia central con análisis de la variabilidad de los datos.

No ha habido ninguna respuesta en todos los cuestionarios en la que explícitamente se haya calculado la desviación típica. Daremos por válida la respuesta en la que el alumnado haga referencia a la variabilidad y a la presencia de observaciones atípicas, sin necesidad de realizar cálculos de la dispersión de los datos, acompañando la reflexión con el cálculo de la mediana o de la media aritmética sin considerar la observación atípica.



En un edificio A, de la periferia de Valencia, viven 10 familias cuyos ingresos anuales en miles de euros son:

220; 17.5; 22; 19; 16.5; 20.5; 21; 19.5; 24; 19 MEDIA 39,9

En otro edificio B, del centro de Valencia, viven 12 familias cuyos ingresos anuales en miles de euros son:

43; 44.5; 37; 39; 40; 43; 37; 33; 42; 37; 46; 37 MEDIA 39,875

En un tercer edificio C, de un pueblo del interior, viven 10 familias cuyos ingresos anuales en euros son:

22000, 19000, 18000, 21000, 21000, 20000, 24000, 24000, 25000, 18000. MEDIA 21,2

1. ¿Qué edificio crees que sería el mejor representante de las familias con mayor poder adquisitivo? ¿Por qué? " B " La media está equilibrada

Aunque la media del (A) es mas alta, es debido a que una familia tiene unos ingresos muy elevados. Si no consideramos a la familia de mas ingresos. La media del resto de familias es 19,88

Figura 4. Respuesta al problema 1.1 del alumno 117

En este caso el alumno describe que no considera para el cálculo de la media a la familia del edificio A que tiene unos ingresos muy elevados. Calcula la media sin este valor y proporciona como respuesta el edificio B argumentando que la media está equilibrada.

RECI. Uso de medidas de tendencia central sin análisis de la variabilidad de los datos.

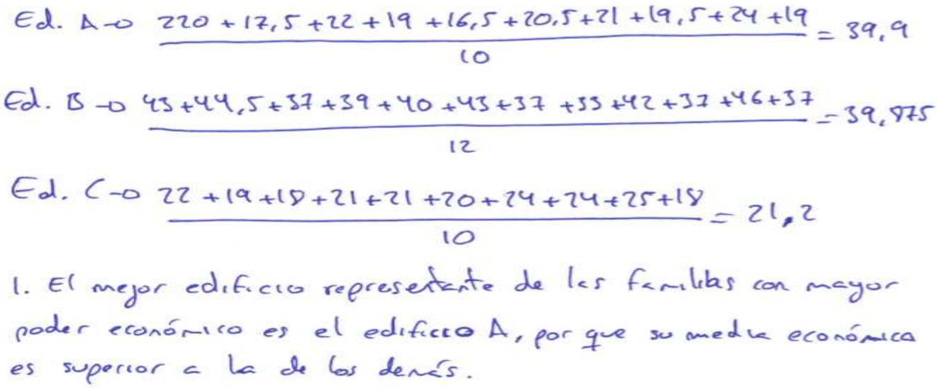


Figura 5. Respuesta al problema 1.1 del alumno 75

Pese a que el alumno utiliza la media aritmética, no tiene en cuenta la dispersión de las distribuciones. Decide que el edificio A es el mejor representante, pero no es correcto si tenemos en cuenta que la distribución de los datos presenta una observación atípica. En este caso la respuesta está basada en métodos estadísticos incompletos, ya que le permite dar una respuesta estadísticamente razonable pero incorrecta al no prestar atención a la variabilidad de los datos.

Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

	NRE	RENC	RECC	RECI
SECUNDARIA	78,46	0,00	1,54	20,00
INFANTIL	48,83	4,65	0,00	46,52
PRIMARIA	28,57	0,00	2,86	68,57
SIMULTANEIDAD	87,50	0,00	0,00	12,50
ACTUALIZACIÓN	42,86	9,52	14,29	33,33

Tabla 22. Uso de parámetros estadísticos problema 1

Observamos en la tabla 22 que el colectivo de actualización es el que proporciona una mayor respuesta basada en un razonamiento estadístico central completo (14,29), seguido de primaria y secundaria. El alumnado que ha realizado este tipo de razonamiento conoce que es preciso descartar la observación atípica antes de proceder al cálculo de la media aritmética, ya que ésta es muy sensible a los valores extremos. Tal como afirma Batanero, Godino y Navas (1997:3), “se trata de discriminar entre el simple conocimiento algorítmico de la fórmula de cálculo,…, de la comprensión relacional del concepto”. Los porcentajes de respuestas correctas son muy bajos, 5 alumnos de un total de 188 han sido capaces de dar esta respuesta entre todos los colectivos (2,66%). Los colectivos de infantil y simultaneidad no proporcionan ninguna respuesta correcta. A la vez, es el colectivo de simultaneidad quien encabeza los razonamientos no estadísticos seguido de infantil y secundaria. Consideramos necesario puntualizar que el alumnado de simultaneidad tiene sus orígenes en el grado de infantil.

A excepción de un alumno de actualización, que ha utilizado la mediana como medida central; el resto de alumnado ha utilizado la media aritmética cuando su respuesta estaba basada en razonamientos estadísticos centrales. Esto indica que consideran que la media es preferible a la mediana o moda como mejor representante de un conjunto de datos, aunque no han sabido desechar el valor atípico en todos los casos tal y como refleja la columna RECI. Por ello, más del 68% del alumnado de primaria se ha quedado con el conocimiento algorítmico de la fórmula de cálculo, siendo este el grupo más numeroso en el que se había elegido la media como mejor representante de los datos. En el resto de colectivos no llega al 50% el alumnado que elige la media, su respuesta está basada más en resultados no estadísticos y medidas no centrales que en la media aritmética.

Si tuvieras que ordenar los edificios de mayor a menor poder adquisitivo, ¿cómo lo harías?

El alumnado utiliza diferentes criterios para ordenar los edificios por poder adquisitivo. No siempre estos criterios coinciden con los establecidos en el apartado 1, en el que se elegía el mejor representante. Distinguimos entre las respuestas que utilizan el mismo criterio en ambos apartados y las que utilizan diferentes criterios.

Clasificamos las respuestas como:

Igual criterio

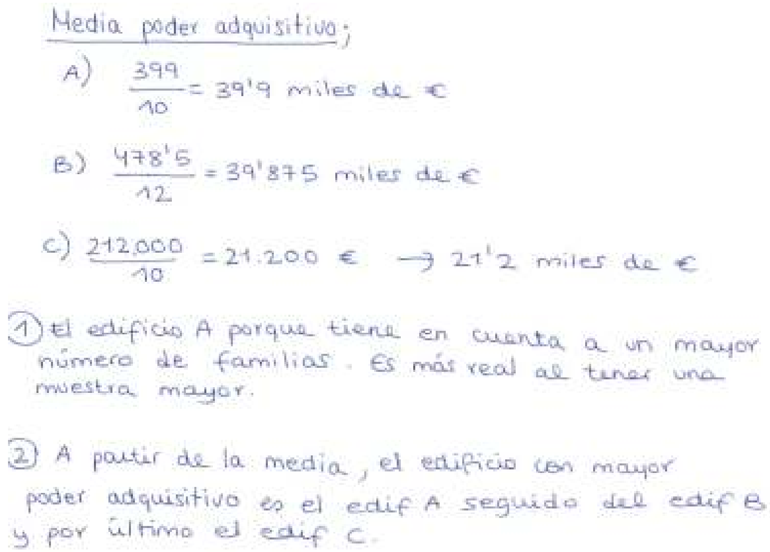
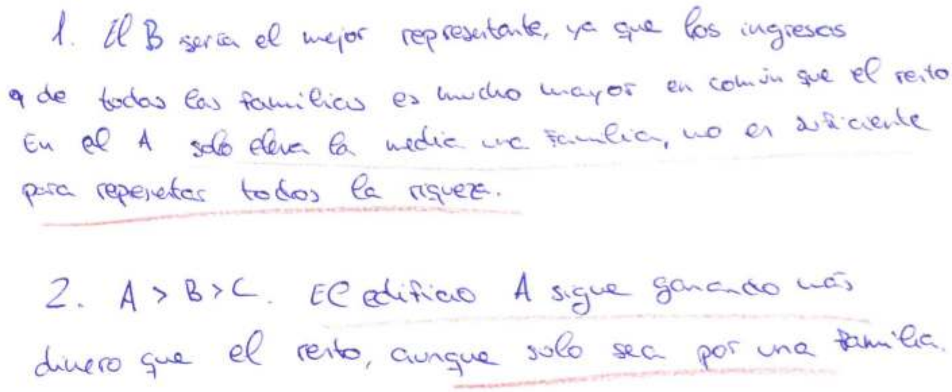


Figura 6. Respuesta al problema 1 del alumno 107

Ordena siguiendo el criterio de la media. Coincide el criterio de ordenación con el edificio elegido como mejor representante de las familias con mayor poder adquisitivo.

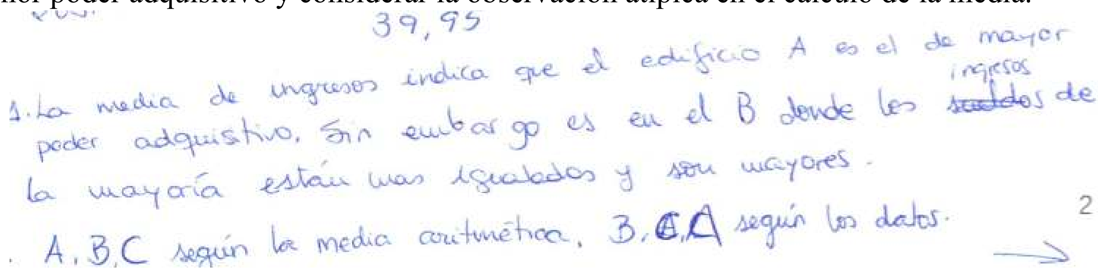
Diferente criterio


1. El B sería el mejor representante, ya que los ingresos de todas las familias es mucho mayor en común que el resto. En el A sólo eleva la media una familia, no es suficiente para repesentar todos la riqueza.

2. A > B > C. El edificio A sigue ganando más dinero que el resto, aunque solo sea por una familia.

Figura 7. Respuesta al problema 1 del alumno 1

El alumno elige como mejor representante al edificio B porque considera que en el edificio A eleva la media una familia y no es suficiente para representar toda la riqueza. En cambio, al responder al apartado 2, cambia el criterio al ordenar los edificios de mayor a menor poder adquisitivo y considerar la observación atípica en el cálculo de la media.


39,95

1. La media de ingresos indica que el edificio A es el de mayor poder adquisitivo. Sin embargo es en el B donde los ~~sueldos~~ ingresos de la mayoría están mas igualados y son mayores.

. A, B, C según la media aritmética, B, C, A según los datos.

2

Figura 8. Respuesta problema 1 del alumno 113

Este alumno diferencia dos criterios de ordenación basándose en la media o en los datos. La media de ingresos le indica que el edificio A es el de mayor poder adquisitivo. Sin embargo, observa que es en el B donde los ingresos de la mayoría están más igualados y son mayores.

	Igual criterio	Diferente criterio
SECUNDARIA	90,32	9,68
INFANTIL	95,23	4,77
PRIMARIA	91,42	8,58
SIMULTANEIDAD	87,50	12,50
ACTUALIZACIÓN	85,71	14,29

Tabla 23. Criterios ordenación problema 1

Llama la atención el hecho de observar dos posturas que razonan de manera inversa en el caso de solicitar la ordenación de los edificios de mayor a menor poder adquisitivo. Una postura es considerar que el edificio A es el mejor representante de las familias porque la media de sus ingresos es mayor y dar como respuesta al ítem 2 que el edificio B es el que mayor poder adquisitivo tiene porque el A tiene una familia con unos ingresos atípicos; la otra es afirmar que el hecho de poseer una familia que tiene mayores ingresos condiciona al mejor representante dando el edificio B como respuesta y que, por el contrario, el mayor poder adquisitivo lo tiene el edificio A.

Entendemos que la formulación de la pregunta influye en la respuesta dada por el alumnado, ya que hasta el 14% llega a considerar diferente el edificio mejor representante de las familias con mayores ingresos y el edificio con mayores ingresos. No tienen el mismo significado tener mayor poder adquisitivo y ser representante de las familias con mayor poder adquisitivo. Los términos en que se formulan las preguntas actúan como una variable de la tarea.

Problema 2

¿En cuál de los tres centros crees que el alumnado está, por término medio, más tiempo conectado a internet?

Clasificamos las respuestas como:

NRE. No uso de parámetros estadísticos.

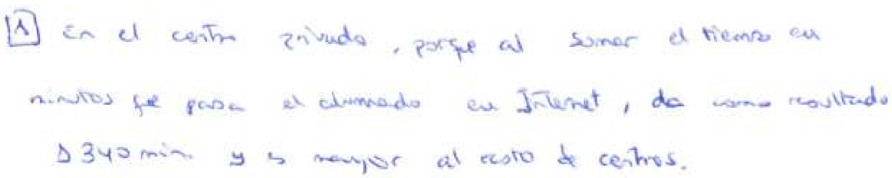

A En el centro privado, porque al sumar el tiempo en minutos que pasa el alumnado en Internet, da como resultado 2340 min. y es mayor al resto de centros.

Figura 9. Respuesta al problema 2.1 del alumno 174

El alumno utiliza la suma de los minutos que los 10 estudiantes de cada centro pasan conectados a internet. En este problema el tamaño de la muestra es el mismo en cada centro, por lo que si no existiera la observación atípica correspondiente al valor 410 (en el centro privado) el alumnado podría haber acertado la respuesta al realizar este cálculo. Llama la atención el hecho del planteamiento de la pregunta "por término medio" y que, pese a enunciarse de forma explícita, el alumnado no calcule el término medio.

Figura 10. Respuesta al problema 2.1 del alumno 50

El alumno responde de forma subjetiva. Es un alumno de un centro concertado al pertenecer al colectivo de secundaria. El razonamiento es diferente al alumno 174, aunque ninguno utiliza razonamientos basados en parámetros estadísticos.

RENC. Uso de parámetros estadísticos no centrales.

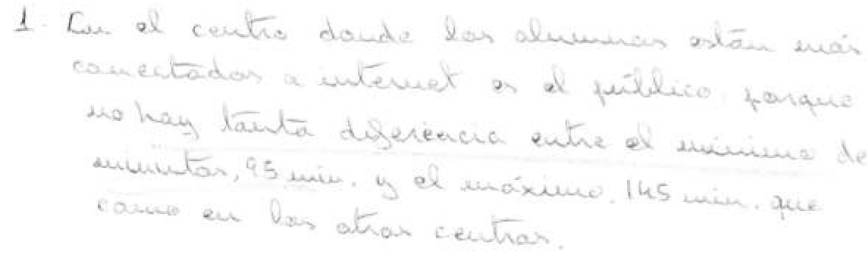
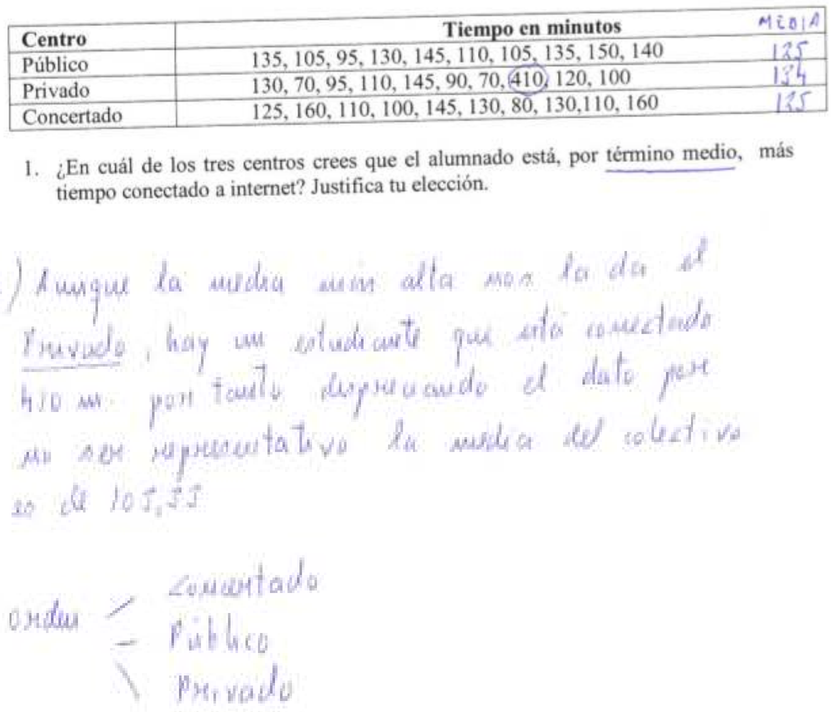

1. En el centro donde los alumnos están más conectados a internet es el público porque no hay tanta diferencia entre el mínimo de minutos, 95 min. y el máximo, 145 min. que como en los otros centros.

Figura 11. Respuesta al problema 2.1 del alumno 4

Utiliza el mínimo y el máximo de la distribución, es decir, el rango.

RECC. Uso de medidas de tendencia central con análisis de la variabilidad de los datos.



Centro	Tiempo en minutos	MEDIA
Público	135, 105, 95, 130, 145, 110, 105, 135, 150, 140	135
Privado	130, 70, 95, 110, 145, 90, 70, 410, 120, 100	134
Concertado	125, 160, 110, 100, 145, 130, 80, 130,110, 160	135

1. ¿En cuál de los tres centros crees que el alumnado está, por término medio, más tiempo conectado a internet? Justifica tu elección.

1) Aunque la media más alta nos la da el Privado, hay un estudiante que está conectado 410 m. por tanto despreciando el dato por no ser representativo la media del colectivo es de 105,55

orden
Concertado
Público
Privado

Figura 12. Respuesta al problema 2.1 del alumno 117

Acompaña la tabla con el cálculo de la media en cada centro. Redondea la observación atípica y describe que no considera para el cálculo de la media el valor 410 para el centro privado por no ser representativo. Calcula la media sin este valor y proporciona como respuesta el orden de los centros en cuanto al tiempo conectados a internet. No responde a este apartado del problema pese a haber realizado el cálculo de la media y tenido en cuenta la presencia de la observación atípica.

RECI. Uso de medidas de tendencia central sin análisis de la variabilidad de los datos.

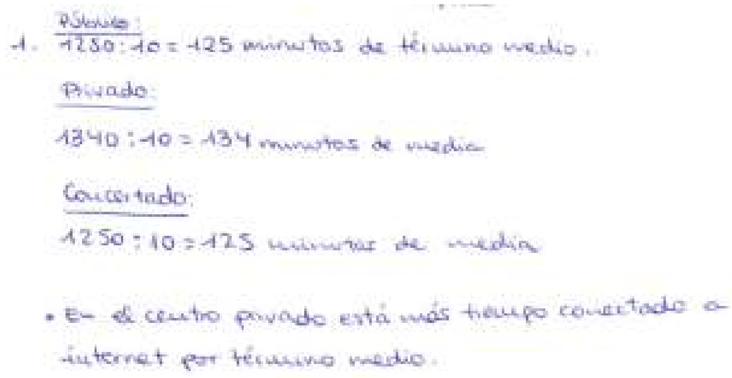

Público:
1. 1250:10 = 125 minutos de término medio.
Privado:
1340:10 = 134 minutos de media
Concertado:
1250:10 = 125 minutos de media
• En el centro privado está más tiempo conectado a internet por término medio.

Figura 13. Respuesta al problema 2.1 del alumno 183

Pese a que el alumno utiliza la media aritmética, no tiene en cuenta la dispersión de las distribuciones. Decide que en el centro privado el alumnado está más tiempo, por término medio, conectado a internet. No es correcto si tenemos en cuenta que la distribución de los datos presenta una observación atípica. En este caso la respuesta está basada en métodos estadísticos incompletos, ya que le permite dar una respuesta estadísticamente razonable pero incorrecta al no prestar atención a la variabilidad de los datos.

Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

	NRE	RENC	RECC	RECI
SECUNDARIA	70,31	3,12	0,00	26,57
INFANTIL	30,23	0,00	0,00	69,77
PRIMARIA	14,28	0,00	2,86	82,86
SIMULTANEIDAD	73,33	0,00	0,00	26,67
ACTUALIZACIÓN	42,86	0,00	9,52	47,62

Tabla 24. Uso de parámetros estadísticos problema 2

Respecto al problema 1, ha disminuido el porcentaje de alumnado que daba una respuesta correcta, incrementándose el número de alumnado que ofrece una respuesta basada en cálculos estadísticos centrales incompletos y disminuyendo el alumnado que no basaba su respuesta en razonamientos estadísticos. En este problema, se pedía de forma explícita el tiempo medio por lo que era de esperar que se dieran estos resultados. De nuevo el planteamiento de la pregunta influye en la resolución y se manifiesta como una variable de la tarea.

¿Qué tiempo esperas que un estudiante de cada uno de los centros dedique a internet?

En este apartado se formula la pregunta introduciendo el término "tiempo que esperas". Pretendemos analizar si el alumnado utiliza la media aritmética en cada centro para calcular el valor esperado. No valoramos si la respuesta es correcta o no. Pretendemos cuantificar si se utiliza un razonamiento estadístico correcto de modo intuitivo aunque no sea completo.

Clasificamos las respuestas como:

Uso de la media aritmética

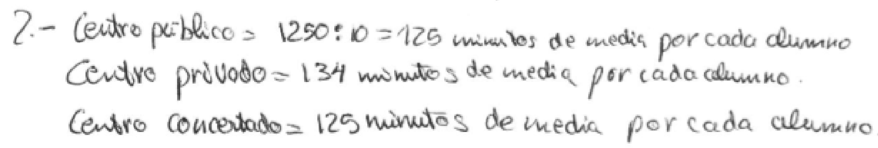

2.- Centro público = 1250 : 10 = 125 minutos de media por cada alumno
Centro privado = 134 minutos de media por cada alumno.
Centro concertado = 125 minutos de media por cada alumno.

Figura 14. Respuesta al problema 2.2 del alumno 17

El alumno responde a la pregunta a partir del cálculo del tiempo medio. No realiza un análisis posterior de la representatividad del tiempo medio. Incluiremos en este apartado todas las respuestas que utilicen la media aritmética independientemente de un análisis posterior de la variabilidad de los datos (razonamiento estadístico correcto pero incompleto), esta postura ha sido debida a la falta de respuestas correctas en el ítem 1 por parte del alumnado.

Uso de otros valores

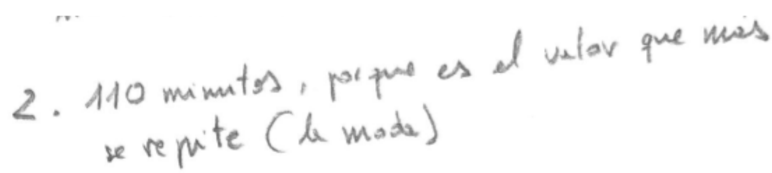

2. 110 minutos, porque es el valor que más se repite (la moda)

Figura 15. Respuesta al problema 2.2 del alumno 118

Se elige como tiempo esperado el valor 110 porque es el valor que más se repite. Está considerando la moda, pero a partir del conjunto de las tres distribuciones de los centros. No tiene en cuenta que cada distribución corresponde a un centro y asigna un valor único al tiempo que espera que un estudiante de cada uno de los centros dedique a internet. El razonamiento estadístico es incorrecto.

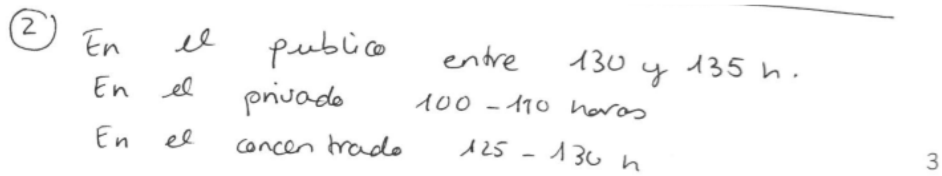

2 En el publico entre 130 y 135 h.
En el privado 100 - 110 horas
En el concentrado 125 - 130 h
3

Figura 16. Respuesta al problema 2.2 del alumno 123

El tamaño de la muestra de cada centro es un número par. El alumno ha considerado como intervalo los dos valores medianos. El razonamiento estadístico es incorrecto.

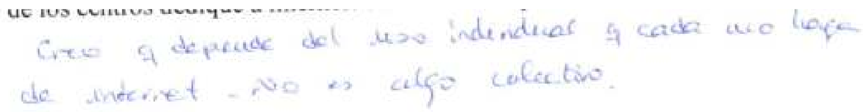


Figura 17. Respuesta al problema 2.2 del alumno 124

Se realiza un razonamiento no estadístico intuitivo. No se responde a la pregunta asignando un valor al tiempo esperado.

Figura 18. Respuesta al problema 2.2 del alumno 56

El alumno calcula la media de las tres distribuciones y asigna el mismo valor al tiempo esperado en cada centro. El razonamiento realizado es estadístico incorrecto.

	Media aritmética	Otros valores
SECUNDARIA	61,70	38,30
INFANTIL	76,31	26,39
PRIMARIA	85,71	14,29
SIMULTANEIDAD	46,67	53,33
ACTUALIZACIÓN	66,67	33,33

Tabla 25. Tiempo esperado problema 2

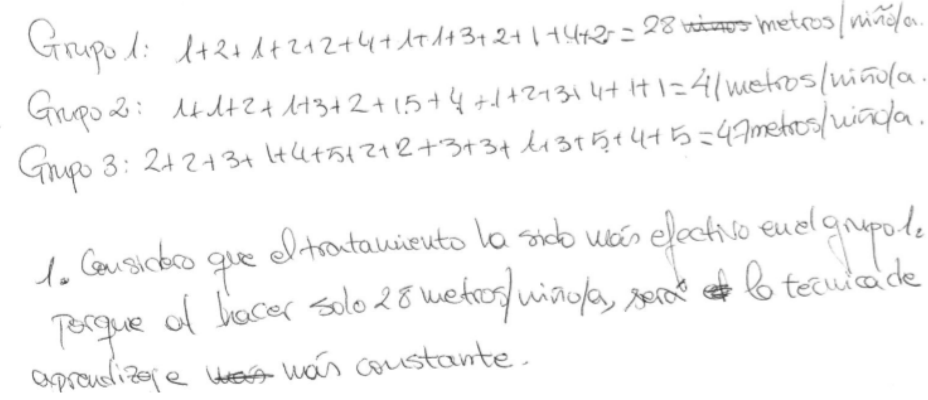
El alumnado asigna el valor de la media aritmética al valor esperado en más del 50% de las respuestas de todos los colectivos a excepción de simultaneidad, llegando a alcanzar el 85% en el caso de primaria. Es curioso el hecho de la utilización, por parte del alumnado, de la media de los tiempos en más ocasiones para realizar una estimación del tiempo esperado que para calcular el tiempo medio.

Problema 3

¿En qué grupo considera que el tratamiento ha sido más efectivo?

Clasificamos las respuestas como:

NRE. No uso de parámetros estadísticos.


Grupo 1: 1+2+1+2+2+4+1+1+3+2+1+1+4+2 = 28 ~~niños~~ metros/niño/a.
Grupo 2: 1+1+2+1+3+2+1.5+4+1+2+3+4+1+1 = 41 metros/niño/a.
Grupo 3: 2+2+3+1+4+5+2+2+3+3+1+3+5+4+5 = 47 metros/niño/a.

1. Considero que el tratamiento ha sido más efectivo en el grupo 1, porque al hacer solo 28 metros/niño/a, será ~~el~~ la técnica de aprendizaje ~~mas~~ más constante.

Figura 19. Respuesta al problema 3.1 del alumno 76

El alumno utiliza la suma de los metros caminados por cada niño para dar respuesta al tratamiento más efectivo. No tiene en cuenta que el número de niños en cada grupo es diferente y tampoco la existencia de un niño que ha andado un número de metros muy por encima del resto. No utiliza métodos estadísticos y da una respuesta incorrecta.

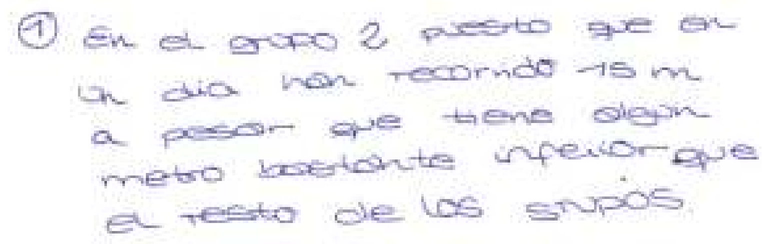

1 En el grupo 2 puesto que en un día han recorrido 15 m a pesar que tiene algún metro bastante inferior que el resto de los grupos.

Figura 20. Respuesta al problema 3.1 del alumno 115

El alumno asume que el tratamiento ha sido más efectivo porque en un día han recorrido 15 m a pesar que tiene algún metro bastante inferior que el resto de los grupos. Confunde el enunciado del problema porque los valores no indican los metros que anda el grupo cada día, sino los metros que anda uno niño seguido y sin caerse después de realizar una prueba a todo el grupo. Su razonamiento no utiliza parámetros estadísticos, pero difiere del razonamiento anterior porque no suma los metros sino que elige el grupo en el que más se ha andado de forma puntual.

RENC. Uso de parámetros estadísticos no centrales.

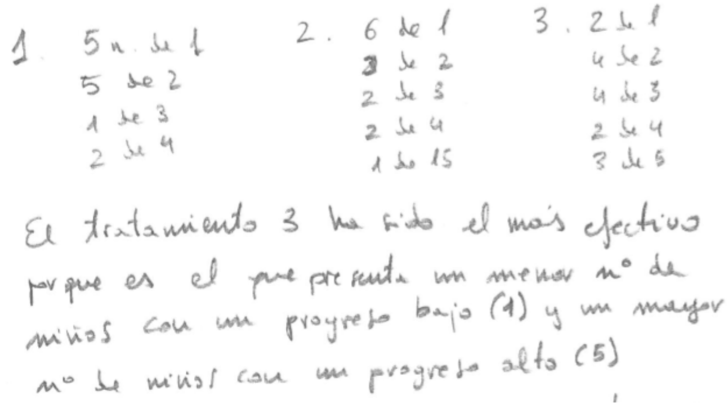


Figura 21. Respuesta al problema 3.1 del alumno 118

El alumno acierta con la respuesta de forma casual, ya que se basa en la construcción de la tabla de la distribución de frecuencias. Esta tabla resume la información, pero no proporciona una medida de posición central ni tampoco una medida de la dispersión de los datos.

RECC. Uso de medidas de tendencia central con análisis de la variabilidad de los datos.

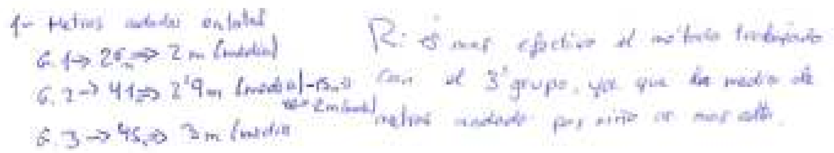


Figura 22. Respuesta al problema 3.1 del alumno 82

En este caso el alumno calcula la media con la observación atípica y sin la observación atípica. Su respuesta es que el más efectivo es el método trabajado con el tercer grupo, ya que la media de metros andado por niño es más alta. La respuesta es correcta.

RECI. Uso de medidas de tendencia central sin análisis de la variabilidad de los datos.

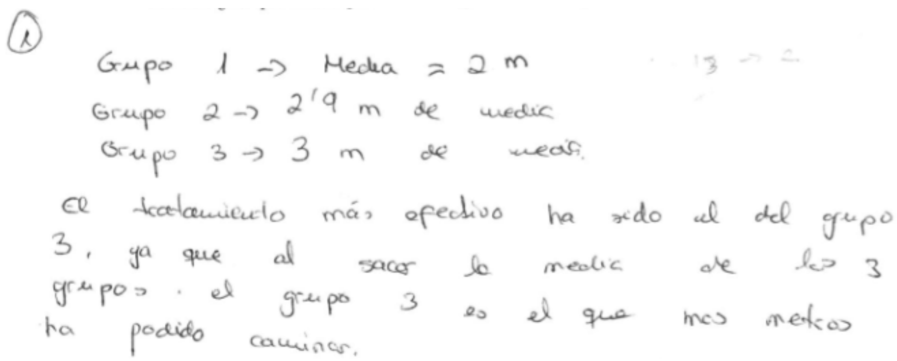

1
Grupo 1 -> Media = 2 m
Grupo 2 -> 2'9 m de media
Grupo 3 -> 3 m de media.
El tratamiento más efectivo ha sido el del grupo 3, ya que al sacar la media de los 3 grupos, el grupo 3 es el que mas metros ha podido caminar.

Figura 23. Respuesta al problema 3.1 del alumno 114

Pese a que el alumno utiliza la media aritmética, no tiene en cuenta la dispersión de las distribuciones. Decide que el tratamiento en el grupo 3 es el más efectivo porque es el que más metros ha podido caminar. Acierta en la respuesta porque la observación atípica se presenta en el grupo 2 y la media de este grupo es inferior a la del grupo 3. En este caso la respuesta está basada en métodos estadísticos incompletos, ya que le permite dar una respuesta estadísticamente razonable pero incorrecta al no prestar atención a la variabilidad de los datos.

Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

	NRE	RENC	RECC	RECI
SECUNDARIA	60,35	8,62	1,72	29,31
INFANTIL	33,33	5,13	0,00	61,54
PRIMARIA	14,71	0,00	5,88	79,41
SIMULTANEIDAD	68,75	0,00	0,00	31,25
ACTUALIZACIÓN	28,57	28,57	4,76	38,10

Tabla 26. Uso de parámetros estadísticos problema 3

Siguen siendo contados los casos en los que se realiza una resolución basándose en cálculos estadísticos correctos y siguen perteneciendo al colectivo de primaria, actualización y en un caso a secundaria. Destaca primaria por el uso de las medidas centrales para dar respuesta al problema frente a secundaria y simultaneidad.

Si tuvieras que ordenar los tratamientos de mayor a menor efectividad, ¿cómo lo harías?

El alumnado utiliza diferentes criterios para ordenar los tratamientos por efectividad. No siempre estos criterios coinciden con los establecidos en el apartado 1, en el que se elegía el tratamiento más efectivo. Distinguimos entre las respuestas que utilizan el mismo criterio en ambos apartados y las que utilizan diferentes criterios.

Clasificamos las respuestas como:

Igual criterio

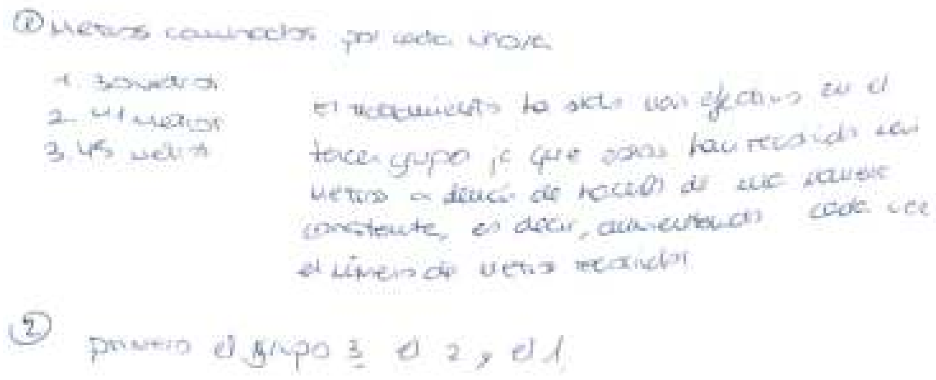
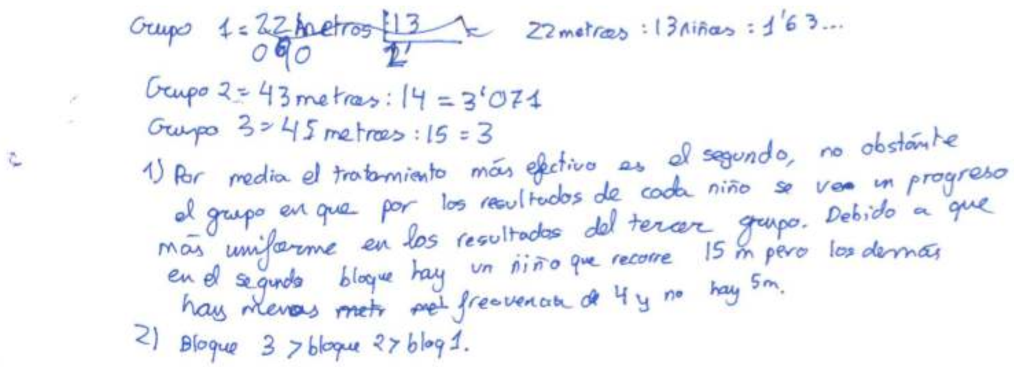


Figura 24. Respuesta al problema 3 del alumno 143

Ordena siguiendo el criterio de la suma. Coincide el criterio de ordenación con el tratamiento elegido como más efectivo. No utiliza razonamiento estadístico. Acierta la respuesta de casualidad.

Diferente criterio



Grupo 1 = 22 metros : 13 = 1'63...
Grupo 2 = 43 metros : 14 = 3'071
Grupo 3 = 45 metros : 15 = 3
1) Por media el tratamiento más efectivo es el segundo, no obstante el grupo en que por los resultados de cada niño se ve un progreso más uniforme en los resultados del tercer grupo. Debido a que en el segundo bloque hay un niño que recorre 15 m pero los demás hay menos frecuencia de 4 y no hay 5m.
2) Bloque 3 > bloque 2 > bloq 1.

Figura 25. Respuesta al problema 3 del alumno 177

El alumno da como respuesta que por media el tratamiento más efectivo es el segundo. No obstante, el grupo en que por los resultados de cada niño ve un progreso más uniforme es en los resultados del tercer grupo. Argumenta que es debido a que en el segundo bloque hay un niño que recorre 15 m pero los demás hay menos frecuencia de 4 y no hay de 5m. Al responder al apartado 2, cambia el criterio al ordenar los tratamientos de mayor a menor efectividad y considera que el bloque 3 (grupo 3) es el más efectivo seguido del 2 y por último el 1. El cálculo de la media es incorrecto y le lleva a no acertar la respuesta en el primer apartado. Sin embargo, en el segundo apartado ofrece una respuesta acertada al no considerar la media calculada anteriormente y razonar en términos de frecuencia y observaciones atípicas.

	Igual criterio	Diferente criterio
SECUNDARIA	91,23	8,77
PRIMARIA	91,67	8,33
INFANTIL	97,06	2,94
ACTUALIZACIÓN	87,50	12,50
SIMULTANEIDAD	95,24	4,76

Tabla 27. Criterios ordenación problema 3

Alrededor del 90% del alumnado mantiene, al considerar una ordenación en el ítem 2, el criterio utilizado para seleccionar el tratamiento más efectivo en el ítem 1.

Problema 4

¿En qué colectivo consideras que el grado de miopía es más elevado?

Clasificamos las respuestas como:

NRE. No uso de parámetros estadísticos.

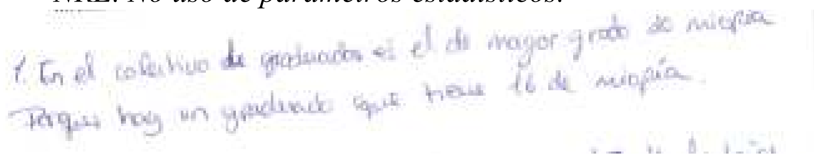


Figura 26. Respuesta al problema 4.1 del alumno 37

El alumno responde que en el colectivo de graduados porque es el de mayor grado de miopía al haber un graduado que tiene 16 de miopía. La respuesta es incorrecta y responde utilizando como argumento la presencia de una observación atípica que, en este caso, es el máximo de los valores.

Colectivo	Dioptrías										
Doctores	3	0	0	2	1.75	0.5	0	2	2.25	0.5	12
Graduados	0	2	0	0	0	1.5	16	1.25	2.25	0.75	23,75
Sin estudios superiores	2	2	0	1	0.5	0.25	1.5	1	2.75	3.5	14,5

1. ¿En qué colectivo consideras que el grado de miopía es más elevado? ¿Por qué?
2. A partir de los datos de la tabla, ¿qué cantidad de dioptrías esperas que tenga un miembro de cada colectivo? Justifica tu respuesta.

(1) mas elevado és el de graduados perquè tienen mas ~~más~~ dioptrías.

Figura 27. Respuesta al problema 4.1 del alumno 52

Representa en el margen de la tabla la suma de las dioptrías de todo el colectivo. Responde de forma incorrecta no utilizando parámetros estadísticos.

RENC. Uso de parámetros estadísticos no centrales.

1- Doctores → 70%
Graduados → 60%
SES → 90%

En el grupo de sin estudios superiores, ya que el 90% tienen dioptrías, mientras en los doctores es el 70% y en los graduados el 60%

Figura 28 . Respuesta al problema 4.1 del alumno 82

Ha realizado una comparación de la frecuencia relativa del valor 0 en cada colectivo. Acierta la respuesta de forma casual.

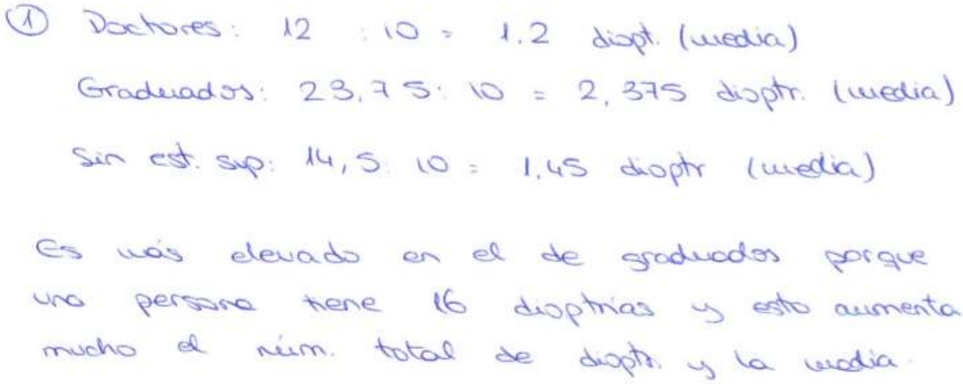
RECC. Uso de medidas de tendencia central con análisis de la variabilidad de los datos.

(1) Segons els resultats de la mitjana en cada grup (Doctors: 1'2 ; Graduats : 2'375 ; Sense E.S. 1'45) el col·lectiu dels graduats té el grau de miopia més elevat. Eliminant un resultat que se n'ix de la mitjana (16), el resultat disminueix. Per tant, el col·lectiu de Sense E.S., és el què té major grau de miopia.

Figura 29. Respuesta al problema 4.1 del alumno 81

En este caso el alumno calcula la media con la observación atípica y sin la observación atípica al argumentar que elimina el resultado que se sale de la media (16). Su respuesta es que el colectivo de sin estudios superiores es el que tiene mayor grado de miopía. La respuesta es correcta.

RECI. Uso de medidas de tendencia central sin análisis de la variabilidad de los datos.


① Doctores: 12 : 10 = 1.2 diopt. (media)
Graduados: 23,75 : 10 = 2,375 dioptr. (media)
Sin est. sup: 14,5 : 10 = 1,45 dioptr (media)

Es más elevado en el de graduados porque una persona tiene 16 dioptrías y esto aumenta mucho el núm. total de dioptr. y la media.

Figura 30. Respuesta al problema 4.1 del alumno 70

Pese a que el alumno utiliza la media aritmética, no tiene en cuenta la dispersión en las distribuciones. Responde que es más elevado el grado de dioptrías en el de graduados porque una persona tiene 16 dioptrías y esto aumenta el número total de dioptrías y la media. Es consciente que la media es sensible a los valores extremos, pero no modifica su respuesta y considera que la media representa la reducción de datos proporcionando una respuesta incorrecta.

Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

	NRE	RENC	RECC	RECI
SECUNDARIA	70,69	13,79	1,72	13,79
INFANTIL	33,33	10,26	0,00	56,41
PRIMARIA	17,65	5,88	2,94	73,53
SIMULTANEIDAD	62,5	12,50	6,25	18,75
ACTUALIZACIÓN	15,79	21,05	5,26	57,89

Tabla 28. Uso de parámetros estadísticos problema 4

El único colectivo que no ha ofrecido ninguna respuesta correcta al problema es el de infantil; sin embargo, aventaja a varios colectivos en cuanto a respuesta basadas en medidas centrales incompletas. Secundaria y simultaneidad, ofrecen un porcentaje más elevado de respuestas basadas en cálculos no estadísticos.

¿Qué cantidad de dioptrías esperas que tenga un miembro de cada colectivo?

En este apartado se formula la pregunta introduciendo el término "dioptrías esperas". Al igual que en el problema 2, pretendemos analizar si el alumnado utiliza la media aritmética en cada centro para calcular el valor esperado. No valoramos si la respuesta es correcta o no. Pretendemos cuantificar si se utiliza un razonamiento estadístico correcto de modo intuitivo aunque no sea completo.

Clasificamos las respuestas como:

Uso de la media aritmética

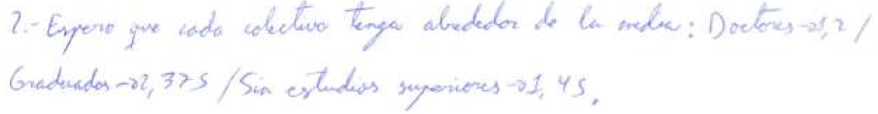

2.- Espero que cada colectivo tenga alrededor de la media: Doctores→2,2 / Graduados→2,375 / Sin estudios superiores→1,45.

Figura 31. Respuesta al problema 4.2 del alumno 31

El alumno espera que cada colectivo tenga alrededor de la media. Acompaña la respuesta con la media de dioptrías en cada colectivo. No realiza una reflexión sobre su representatividad.

Uso de otros valores

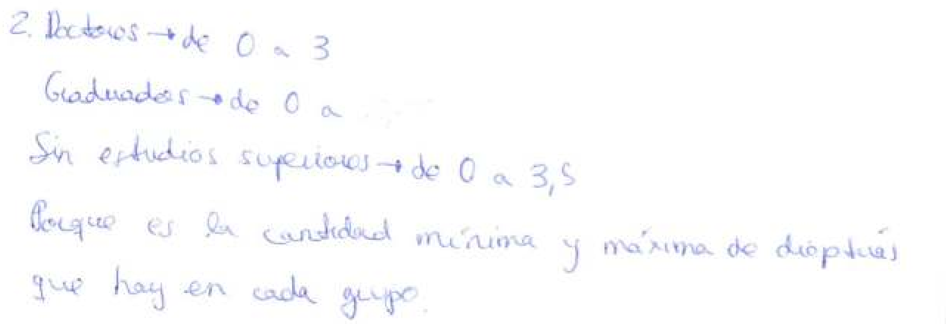

2. Doctores → de 0 a 3
Graduados → de 0 a
Sin estudios superiores → de 0 a 3,5
Porque es la cantidad mínima y máxima de dioptrías que hay en cada grupo.

Figura 32. Respuesta al problema 4.2 del alumno 25

Ofrece un intervalo como respuesta a la cantidad de dioptrías esperadas. Argumenta que es la cantidad mínima y máxima de dioptrías que hay en cada grupo. En el colectivo de graduados deja el intervalo abierto.

	Media aritmética	Otros valores
SECUNDARIA	82,05	17,95
INFANTIL	71,43	28,57
PRIMARIA	75,86	24,14
SIMULTANEIDAD	57,14	42,86
ACTUALIZACIÓN	68,42	31,58

Tabla 29. Dioptrías esperadas problema 4

Todos los colectivos superan el 50% de respuestas basadas en el cálculo de la media aritmética, siendo en el colectivo de secundaria el porcentaje más elevado.

6.2. Niveles de dificultad de los problemas

Hemos realizado una adaptación al cuestionario de la metodología de Carles et al. (2009). Hemos registrado para cada problema: número de estudiantes a los que se le presenta (la variable ESTUDIANTES), número de estudiantes que lo abordan (ABORDADOS), número de estudiantes que realizan cálculos (CÁLCULOS), que se han distinguido en cálculos correctos e incorrectos, número de estudiantes que emiten una respuesta (RESULTADO), número de estudiantes que dan una respuesta acertada (NÚMERO), número de estudiantes que dan una descripción de la respuesta(DRES), que se han distinguido en descripción correcta e incorrecta. Estas variables han permitido medir las dificultades de los problemas como sigue:

Dificultad apreciada del problema (DAP)

$$DAP = 100 - \left(\frac{abordados}{estudiantes}\right) \times 100$$

Dificultad (global) del problema (DP)

$$DP = 100 - \left(\frac{resultado}{estudiantes}\right) \times 100$$

Dificultad del problema (DPR)

$$DPR = 100 - \left(\frac{resultado}{abordado}\right) \times 100$$

Dificultad de la solución del problema (DSP)

$$DSP = 100 - \left(\frac{número}{abordado}\right) \times 100$$

Dificultad en los cálculos de la solución del problema (DCSP)

$$DCSP = 100 - \left(\frac{cálculos}{abordado}\right) \times 100$$

Dificultad en los cálculos correctos de la solución del problema (DCCSP)

$$DCCSP = 100 - \left(\frac{calccorrecto}{cálculos}\right) \times 100$$

Dificultad de la descripción de la respuesta (DDRES)

$$DDRES = 100 - \left(\frac{descripción}{resultado} \right) \times 100$$

Dificultad en la descripción correcta de la respuesta (DDRESC)

$$DDRESC = 100 - \left(\frac{desccorrecta}{descripciones} \right) \times 100$$

En todos los casos, la dificultad máxima está medida por 100 y la dificultad mínima por 0.

Las tablas siguientes muestran los datos obtenidos en cada colectivo para las dificultades, sin considerar contextos ni formato de los datos, de los problemas del cuestionario.

DIFICULT.	DAP	DP	DPR	DSP	DCSP	DCCSP	DDRES	DDRESC
Problema 1.1	1,44	5,80	4,41	30,41	57,35	96,55	21,53	98,04
Problema 1.2	11,11	13,89	3,13	85,94	59,38	100,00	45,16	100,00
Problema 2.1	9,72	11,11	1,53	90,77	40,00	100,00	31,25	100,00
Problema 2.3	33,33	34,72	2,08	95,83	33,33	96,67	46,81	96,00
Problema 3.1	18,06	19,44	1,69	25,42	37,29	97,30	22,41	97,78
Problema 3.2	18,06	18,06	0,00	27,12	37,29	100,00	45,76	100,00
Problema 4.1	16,67	19,44	3,33	73,33	48,33	96,77	25,86	97,67
Problema 4.2	38,89	45,83	11,36	65,91	27,27	97,14	61,54	100,00

Tabla 30. Dificultad de los problemas para el alumnado de Secundaria

DIFICULT.	DAP	DP	DPR	DSP	DCSP	DCCSP	DDRES	DDRESC
Problema 1.1	2,27	2,27	0,00	48,84	30,23	100,00	9,30	100,00
Problema 1.2	2,27	4,55	2,33	93,02	27,91	100,00	28,57	100,00
Problema 2.1	2,27	2,27	0,00	95,35	2,33	100,00	16,28	100,00
Problema 2.2	13,63	13,63	0,00	100,00	13,16	100,00	50,00	100,00
Problema 3.1	4,54	11,36	7,14	30,95	14,29	100,00	7,69	100,00
Problema 3.2	15,91	18,18	2,70	35,13	13,51	100,00	16,67	100,00
Problema 4.1	9,09	11,36	2,50	80,00	12,50	100,00	30,77	100,00
Problema 4.2	36,36	36,36	0,00	100,00	14,29	100,00	53,57	100,00

Tabla 31. Dificultad de los problemas para el alumnado de Infantil

DIFICULT.	DAP	DP	DPR	DSP	DCSP	DCCSP	DDRES	DDRESC
Problema 1.1	0,00	0,00	0,00	60,00	22,86	96,29	2,86	100,00
Problema 1.2	0,00	0,00	0,00	91,43	17,14	96,55	25,71	100,00
Problema 2.1	0,00	0,00	0,00	94,28	2,86	97,06	22,86	96,30
Problema 2.2	20,00	20,00	0,00	100,00	3,57	100,00	46,43	100,00
Problema 3.1	2,86	2,86	0,00	11,76	11,76	93,33	0,00	94,11
Problema 3.2	2,86	2,86	0,00	11,76	11,76	94,12	29,41	91,67
Problema 4.1	2,86	2,86	0,00	88,24	5,88	96,86	14,71	96,55
Problema 4.2	17,14	17,14	0,00	96,55	79,31	95,65	37,93	94,44

Tabla 32. Dificultad de los problemas para el alumnado de Primaria

DIFICULT.	DAP	DP	DPR	DSP	DCSP	DCCSP	DDRES	DDRESC
Problema 1.1	0,00	0,00	0,00	50,00	43,75	100,00	0,00	100,00
Problema 1.2	0,00	0,00	0,00	100,00	43,75	100,00	18,75	100,00
Problema 2.1	0,00	6,25	6,25	100,00	0,00	100,00	12,50	100,00
Problema 2.2	6,25	6,25	0,00	100,00	40,00	100,00	26,67	100,00
Problema 3.1	0,00	0,00	0,00	25,00	18,75	100,00	0,00	100,00
Problema 3.2	0,00	0,00	0,00	12,50	18,75	100,00	18,75	100,00
Problema 4.1	0,00	0,00	0,00	81,25	25,00	100,00	6,25	100,00
Problema 4.2	6,25	12,50	6,67	86,67	46,67	100,00	20,00	100,00

Tabla 33. Dificultad de los problemas para el alumnado de Simultaneidad

DIFICULT.	DAP	DP	DPR	DSP	DCSP	DCCSP	DDRES	DDRESC
Problema 1.1	0,00	0,00	0,00	42,86	38,10	76,92	9,52	84,21
Problema 1.2	0,00	0,00	0,00	71,43	23,81	81,25	19,05	82,35
Problema 2.1	0,00	0,00	0,00	76,19	9,52	89,47	9,52	94,74
Problema 2.2	0,00	0,00	0,00	100,00	23,81	100,00	38,10	100,00
Problema 3.1	0,00	0,00	0,00	9,52	4,76	95,00	0,00	95,00
Problema 3.2	0,00	0,00	0,00	0,00	4,76	95,00	4,76	95,00
Problema 4.1	9,52	9,52	0,00	52,63	5,26	94,44	10,53	94,12
Problema 4.2	9,52	9,52	0,00	94,74	21,05	93,33	15,79	100,00

Tabla 34. Dificultad de los problemas para el alumnado de Actualización

Las dificultades apreciada (DAP) y del problema (DP) indican hasta qué punto los problemas han sido abordados y se ha emitido una respuesta a la pregunta del problema. Se han medido tanto la dificultad de los problemas para la muestra de estudiantes (DP) como para aquellos que abordaron los problemas (DPR) en cada colectivo. Se observa que prácticamente todo el alumnado aborda los problemas y que generalmente llegan a dar una respuesta al problema. Por otra parte, la dificultad de la solución del problema (DSP) es bastante alta dependiendo del problema y del apartado. Los problemas: 1.1, 3.1 y 3.2, tienen una dificultad de la solución igual o inferior al 60% (excepto para el alumnado de actualización), lo que significa que más de un 40% consigue acertar con la respuesta. En cambio, en el resto de problemas la dificultad supera el 70%. Esto significa que no más de un 30% consigue dar una respuesta acertada a la pregunta del problema.

Se ha considerado necesario añadir una variable que nos permitiera analizar si el alumnado responde a las preguntas a través de cálculos o basa sus respuestas en argumentos no numéricos. De esta forma se puede medir la dificultad en los cálculos de la solución del problema y analizar si son correctos o no. El tipo de preguntas que se realizan pueden proporcionar respuestas acertadas aunque no correctas. Por ejemplo, el alumnado puede seleccionar el edificio correcto por casualidad. Igual que realizar las ordenaciones. Sin embargo, no ocurre lo mismo a la hora de asignar un valor esperado. Debido a ello, la dificultad de la solución del problema no viene definida propiamente dicha por DSP, sino que ha de ir acompañada de los cálculos correctos en cada apartado. Además, la respuesta correcta exige que la respuesta a la pregunta incluya su descripción. Esta descripción la realiza, en más del 50% de las ocasiones, el alumnado de forma correcta o incorrecta (a excepción del problema 4.2 en el colectivo de secundaria e infantil). Llegando a alcanzar el 100% en el problema 3.1. Sin embargo, sus descripciones no son correctas en prácticamente ninguna ocasión. Los valores referidos a la respuesta a través de un cálculo correcto, DCCSP, y la descripción correcta de la respuesta, DDRESC, son similares. Como máximo han respondido correctamente 3 estudiantes, del colectivo de actualización, al problema 1.1. Estos datos se traducen en 3 respuestas correctas de 19 descripciones, 15,79%, que representa una dificultad del 84,21%. Por otra parte, el alumnado de infantil y el de simultaneidad no ha dado una respuesta correcta a ninguno de los problemas ni ha realizado ningún cálculo correcto.

Del análisis de las tablas se desprende que el alumnado de secundaria, infantil y simultaneidad, presenta más dificultades que el alumnado de primaria y el de actualización. Es el alumnado de actualización quien responde correctamente un número superior de veces. Pese a todo, estas respuestas correctas se obtienen en contadas ocasiones.

La tabla 35 muestra las dificultades asociadas a los problemas leídas globalmente. No incluimos DCSP y DCCSP por facilitar la lectura de la tabla y la interpretación gráfica. La información que nos aportan estas medidas de las dificultades, es similar a la que podemos encontrar en las tablas con los valores de las variables registradas.

Participantes 188	Abordados	Resultados		Respuest Acertada	Descripciones	Descripciones Correctas
Problema 1a	183	180		104	159	4
Problema 1b	179	176		21	119	3
Problema 2a	180	178		15	142	3
Problema 2b	150	149		1	83	1
Problema 3a	172	168		134	152	3
Problema 3b	167	166		132	119	3
Problema 4a	169	166		40	131	3
Problema 4b	135	129		4	74	1
DIFICULT.	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
Problema 1a	2,66	4,26	1,64	43,17	11,67	97,48
Problema 1b	4,79	6,38	1,68	88,27	32,39	97,48
Problema 2a	4,26	5,32	1,11	91,67	20,22	97,89
Problema 2b	20,21	20,74	0,67	99,33	44,30	98,80
Problema 3a	8,51	10,64	2,33	22,09	9,52	98,03
Problema 3b	11,17	11,70	0,60	20,96	28,31	97,48
Problema 4a	10,11	11,70	1,78	76,33	21,08	97,71
Problema 4b	28,19	31,38	4,44	97,04	42,64	98,65

Tabla 35. Resultados globales y dificultades globales de los problemas, sin considerar contextos y formatos

Acompañamos nuestro análisis de gráficos que nos facilitarán la descripción de las dificultades asociadas a los problemas.

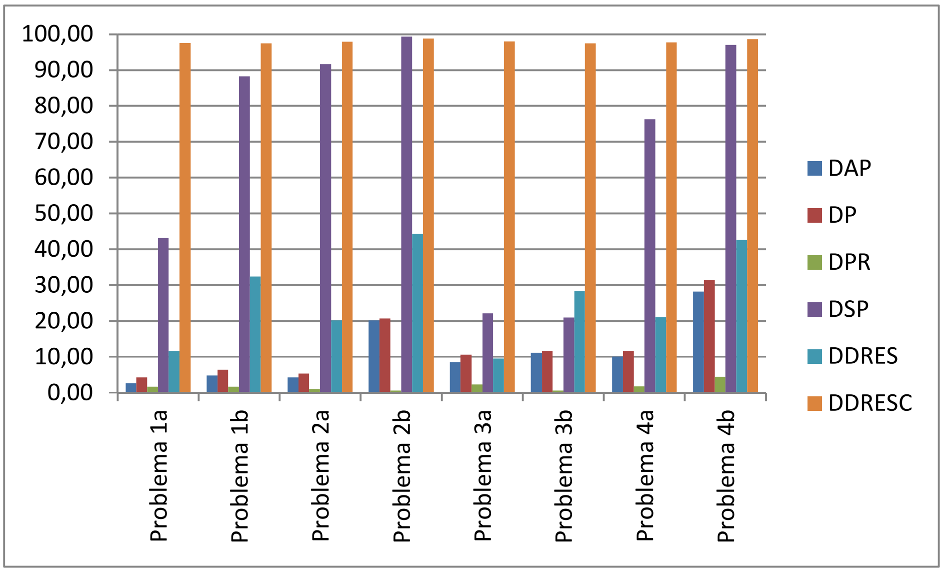


Gráfico 7. Dificultades globales de los problemas por problemas

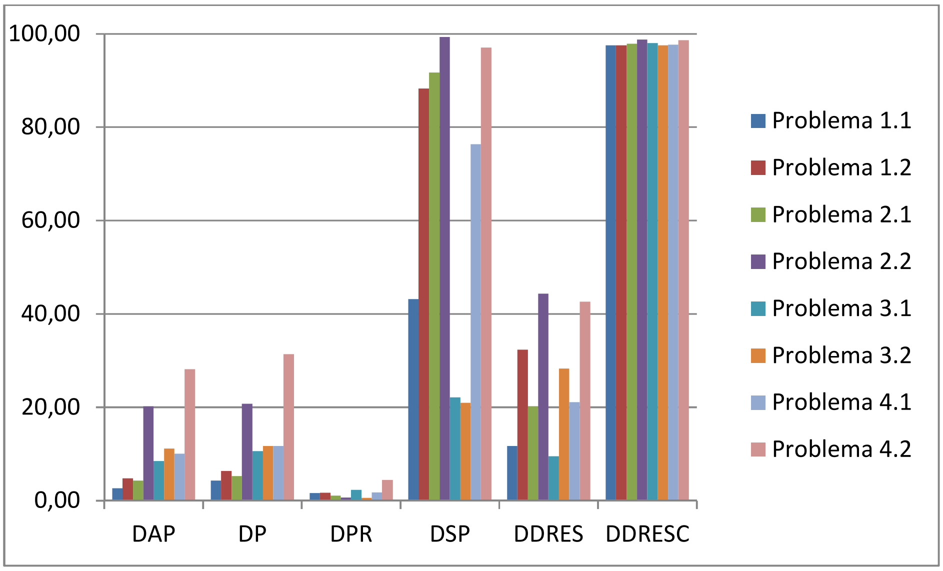


Gráfico 8. Dificultades globales de los problemas por tipo de dificultad

Del análisis gráfico se desprende que no hay una diferencia significativa en cuanto a la dificultad global que representa para el alumnado la descripción correcta del problema. Prácticamente es igual de difícil en todos los problemas y supera el 97% en todos los apartados. En cambio, sí se aprecia que es más difícil describir una respuesta en el apartado 2 de cada problema. En cuanto a la dificultad apreciada del problema, se observa en el gráfico que en todos los problemas, el apartado 2 siempre supera al 1 en la dificultad apreciada del problema, destacando considerablemente el problema 2.2 y 4.2, cuyas preguntas hacen referencia al valor esperado. Tanto si analizamos la dificultad asociada del problema como su dificultad, a medida que vamos aumentando el número de problema éste va aumentando de dificultad. Si observamos aisladamente la dificultad de la solución de los problemas podemos llegar a deducir, erróneamente, que el problema 3 es el más sencillo para los estudiantes. Sin embargo, si comparamos con la descripción de las respuestas, la percepción cambia. Esto es debido a que en el problema 3 el alumnado puede acertar el tratamiento más efectivo con diferentes cálculos erróneos como, por ejemplo, sumar los metros caminados por los niños y niñas. Es cierto que, en este problema, la media aritmética en el grupo 3 es superior a la media de los grupos 1 y 2. La media de este grupo es representativa y no posee observaciones atípicas. En consecuencia, el alumnado que ha respondido a partir del cálculo de la media aritmética ha acertado con la respuesta. No obstante, no se da por correcta la respuesta si no está acompañada de una medida de dispersión o de una reflexión respecto a la presencia de observaciones atípicas. Prácticamente todo el alumnado que aborda un problema lo resuelve. Si analizamos conjuntamente todas las dificultades globales de los problemas y teniendo en cuenta el comentario realizado sobre el problema 3, el problema 1 es el menos difícil para el alumnado.

6.3. Influencia del contexto y el formato de los datos sobre la resolución de los problemas

En las siguientes respuestas de los estudiantes, se observa claramente la influencia del contexto en la resolución de los problemas del cuestionario. En todas ellas, el alumnado manifiesta estimaciones subjetivas basadas en el conocimiento del contexto en el que se desarrolla el problema.

Contexto estadístico-social

1. El B tiene mayor poder adquisitivo, porque se ve a simple vista

Figura 33. Respuesta al problema 1.1 del alumno 33

1- El edificio que sería mejor representante de las familias con mayor poder adquisitivo es el B, ya que es en el centro de Valencia y tiene los mayores ingresos anuales, con un total de 478.500.

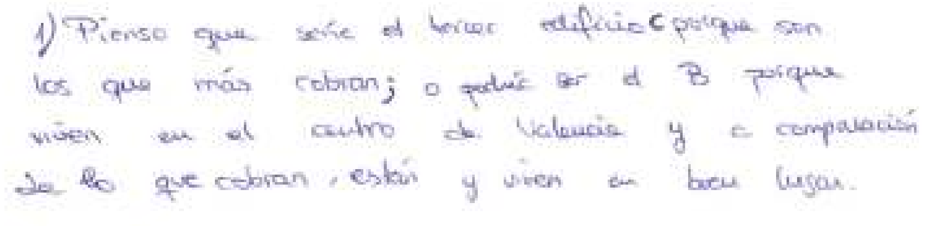
Figura 34. Respuesta al problema 1.1 del alumno 64

1. El edificio C. Porque no es más rico el que más tiene sino el que menos necesita. Además el poder adquisitivo puede estar en tierras.

Figura 35. Respuesta al problema 1.1 del alumno 99

1. ¿Qué edificio crees que sería el mejor representante de las familias con mayor poder adquisitivo? ¿Por qué? El Edificio B pq en el centro los edificios y la vida en general es más cara y los habitantes tienen q tener poder adquisitivo.

Figura 36. Respuesta al problema 1.1 del alumno 124



1) Pienso que sería el tercer edificio C porque son los que más cobran; o podría ser el B porque viven en el centro de Valencia y a comparación de lo que cobran, están y viven en buen lugar.

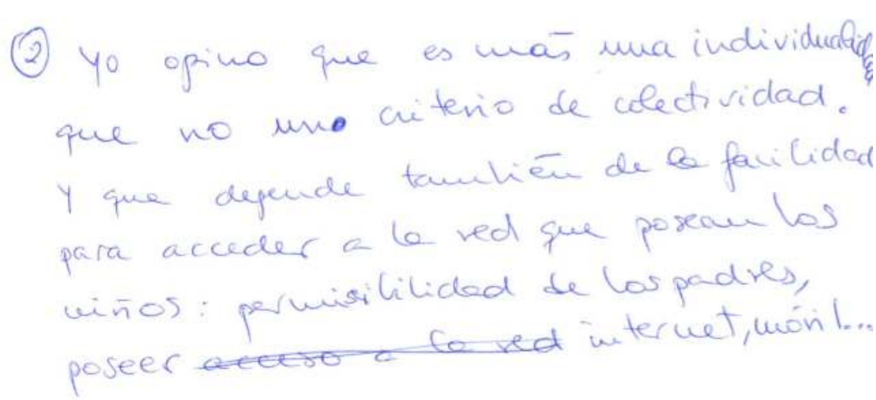
Figura 37. Respuesta al problema 1.1 del alumno 175

1. Los del centro privado porque tienen más tiempo libre

Figura 38. Respuesta al problema 2.1 del alumno 22

2- 90 minutos. A mí me gusta el twitter.

Figura 39. Respuesta al problema 2.2 del alumno 49



(2) Yo opino que es más una individualidad que no uno criterio de colectividad. Y que depende también de la facilidad para acceder a la red que posean los niños: permisibilidad de los padres, poseer ~~acceso a la red~~ internet, móvil...

Figura 40. Respuesta al problema 2.2 del alumno 125

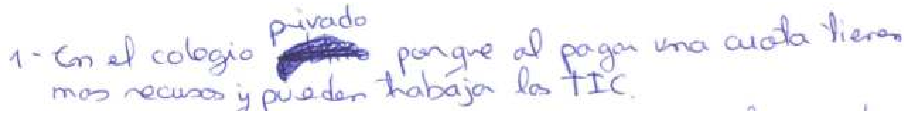

1- En el colegio privado porque al pagar una cuota tieren
mas recusos y pueden trabajar las TIC.

Figura 41. Respuesta al problema 2.1 del alumno 163

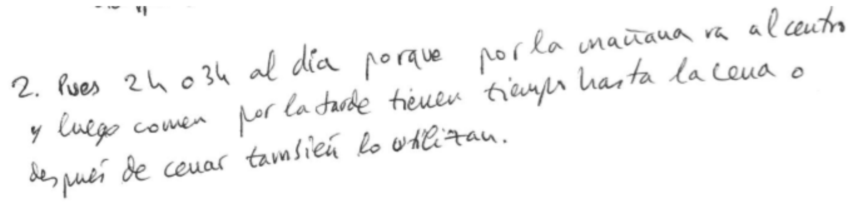
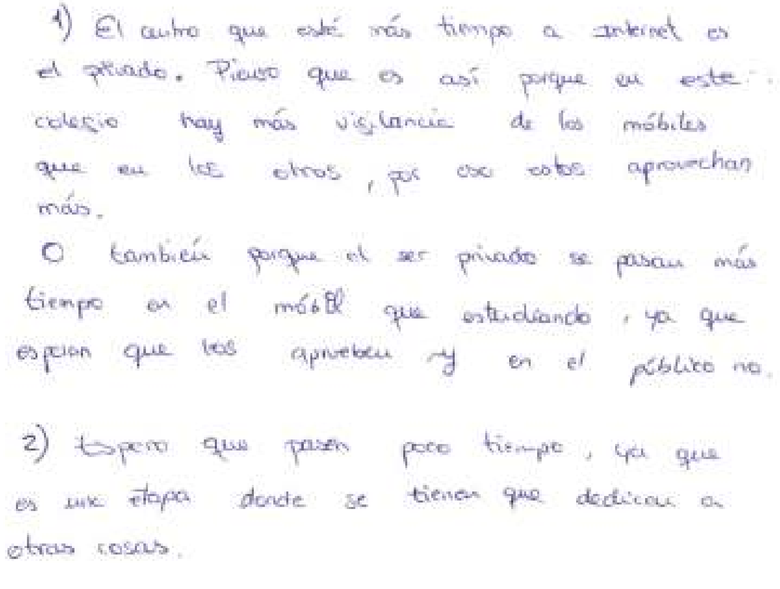

2. Pues 2h o 3h al día porque por la mañana va al centro
y luego comen por la tarde tienen tiempo hasta la cena o
después de cenar también lo utilizan.

Figura 42. Respuesta al problema 2.2 del alumno 165


1) El centro que esté más tiempo a internet es
el privado. Pienso que es así porque en este
colegio hay más vigilancia de los móbiles
que en los otros, por eso estos aprovechan
más.
O también porque al ser privado se pasan más
tiempo en el móbil que estudiando, ya que
esperan que los aprueben y en el público no.

2) Espero que pasen poco tiempo, ya que
es una etapa donde se tienen que dedicar a
otras cosas.

Figura 43. Respuesta al problema 2.2 del alumno 175

1: Según una visión cualitativa, el tratamiento más efectivo ha sido el 3 dado que se ha conseguido que un total de 15 niños/as hayan caminado en más ocasiones más metros que en el resto.
Pero si atendemos a una visión cuantitativa, el grupo más efectivo creo que sería el 2 dado que uno de sus participantes ha alcanzado caminar 15 metros sin caerse

Figura 44. Respuesta al problema 3.1 del alumno 106

2 — La cantidad de dioptrías de cada miembro irá en función de la persona misma. Desde mi criterio, no tiene mucho que ver el tipo de estudios que se realizan, sino que cada persona es diferente y ~~tendrá~~ tendrá más o menos un grado de dioptrías distintas.

Figura 45. Respuesta al problema 4.2 del alumno 152

Como imaginaba ~~el~~ los graduados son los que más diotrías tienen ya que si estudian fuerzan más los ojos

Figura 46. Respuesta al problema 4.1 del alumno 35

doctores porque es una carrera que para conseguirla ha dedicado mucho tiempo

Figura 47. Respuesta al problema 4.1 del alumno 47

② Espero que un miembro de cada colectivo tenga entre 0, 2 dioptrías, porque la miopía suele detectarse muy tempranamente llegando a no aumentar tan rápidamente si se busca una solución temprana. Lo que nunca esperaría es que un miembro tuviera mas de 5 dioptrías, ya que eso sería un caso especial y poco común.

Figura 48. Respuesta al problema 4.2 del alumno 98

2. Yo considero que es más genético.

Figura 49. Respuesta al problema 4.2 del alumno 125

Pues no lo se, no hay porque relacionar las dioptrías con el nivel de estudios de las personas
Si que creo q las personas con estudios han forzado más la vista pero no creo q sea el factor determinante.

Figura 50. Respuesta al problema 4.2 del alumno 124

Hemos analizado en el apartado anterior las dificultades asociadas a los problemas y hemos concluido que el problema 1 era más fácil para el alumnado. Este problema está definido en un contexto estadístico-social y consideramos que el conocimiento del contexto ha influido en las respuestas del alumnado permitiendo que éste abordara y respondiera al problema con más facilidad que en el resto de situaciones. El segundo problema en ser abordado ha sido el 2.1 que también pertenece al mismo contexto. Sin embargo, la dificultad ha aumentado cuando hemos utilizado el término verbal “esperas”. Este hecho se ha repetido cuando se ha vuelto a formular en el problema 4.2. Los problemas 3 y 4 pertenecen al contexto estadístico-salud. Ya hemos mencionado que en apariencia el problema 3 parecía más fácil, pero que si se realizaba un análisis exhaustivo de las dificultades del problema no era cierto.

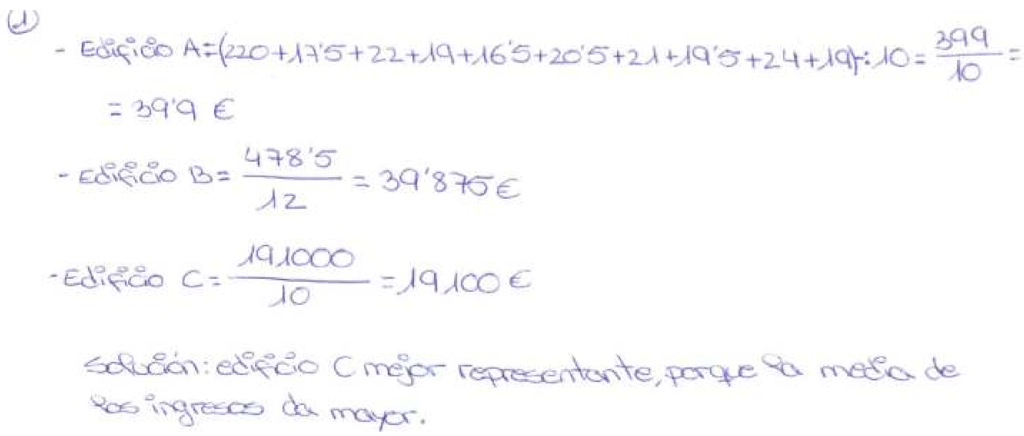
Formato de los datos

Problema 1

Como ya mencionamos en la descripción de los problemas que conforman el cuestionario, en este problema, los ingresos vienen expresados en miles de euros para dos distribuciones y en euros para la tercera; además, las distribuciones presentan diferente número de datos.

A continuación presentamos los resultados extraídos del cuestionario referentes a las unidades de medida y al tamaño de las muestras junto con algunas respuestas del alumnado.

Unidades de medida



(1)

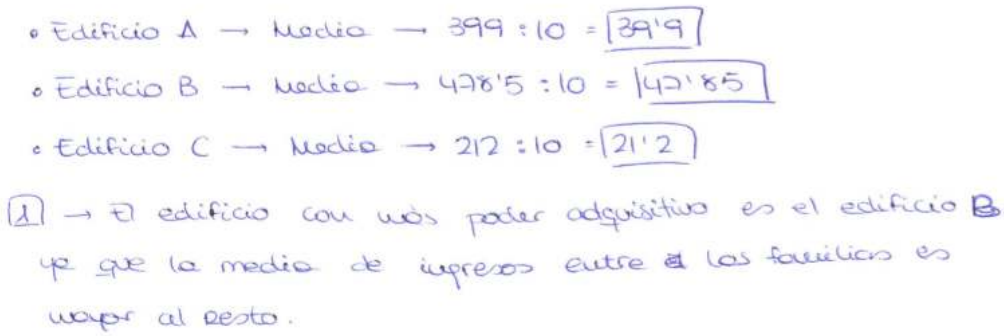
- Edificio A = (220+17'5+22+19+16'5+20'5+21+19'5+24+19) : 10 = $\frac{399}{10}$ =
= 39'9 €
- Edificio B = $\frac{478'5}{12}$ = 39'875 €
- Edificio C = $\frac{191000}{10}$ = 19100 €

Solución: edificio C mejor representante, porque la media de los ingresos da mayor.

Figura 51. Respuesta al problema 1.1 del alumno 171

El alumnado comete un error al expresar las cantidades y afirma que el mejor representante es el edificio C porque la media de los ingresos da mayor.

Tamaño de la muestra



- Edificio A → Media → 399 : 10 = $\boxed{39'9}$
- Edificio B → Media → 478'5 : 10 = $\boxed{47'85}$
- Edificio C → Media → 212 : 10 = $\boxed{21'2}$

1 → El edificio con más poder adquisitivo es el edificio B. ya que la media de ingresos entre las familias es mayor al resto.

Figura 52. Respuesta al problema 1.1 del alumno 152

El alumno da por hecho que el número de familias es el mismo en cada edificio y realiza los cálculos sin tener en cuenta la información que proporciona el problema.

La siguiente tabla recoge el porcentaje de alumnado que ha cometido errores al verse influido en sus cálculos por las unidades de medida y el número de datos de las distribuciones:

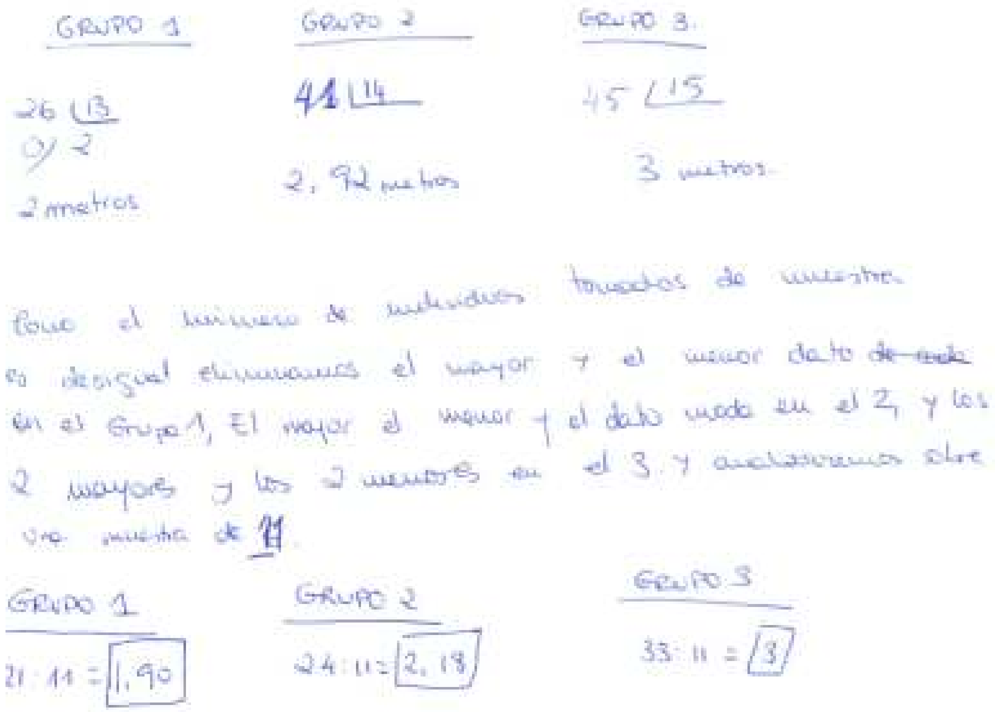
	Unidades de medida	Nº datos distribución
SECUNDARIA	7,69	4,61
INFANTIL	32,56	6,98
PRIMARIA	12,90	1,61
SIMULTANEIDAD	18,75	6,25
ACTUALIZACIÓN	19,05	4,76

Tabla 36. Influencia formato y tamaño problema 1

Se observa que en todos los colectivos las unidades de medida en que viene expresada la variable ingresos y el número de datos influyen en las respuestas del alumnado en mayor o menor grado, llegando a alcanzar el 32,56% las respuestas afectadas por las unidades de medida en infantil.

Problema 3

Recordemos que el número de niños y niñas con problemas para caminar difiere en cada grupo. Además, los datos se presentan en una tabla rectangular sin valores en algunas celdas debido al tamaño de los grupos. Presentamos, a continuación, respuestas y resultados extraídos del cuestionario en relación a esta situación.


GRUPO 1 | GRUPO 2 | GRUPO 3.

26 | 13 — 0/2 — 2 metros | 41 | 14 — 2,92 metros | 45 | 15 — 3 metros.

Como el número de individuos tomados de muestra es desigual eliminamos el mayor y el menor dato ~~de cada~~ en el Grupo 1, El mayor el menor y el dato modo en el 2, y los 2 mayores y los 2 menores en el 3. y analizaremos sobre una muestra de 11.

GRUPO 1: 21 : 11 = 1,90 | GRUPO 2: 24 : 11 = 2,18 | GRUPO 3: 33 : 11 = 3

Figura 53. Respuesta al problema 3.1 del alumno 113

El alumno observa que el número de niños en cada grupo es diferente. Considera que para responder qué tratamiento es más efectivo, ha de considerar el mismo número de niños. Intenta calcular una media recortada eliminando el mayor y el menor dato en el grupo 1, el mayor y menor dato en el grupo 2 y los dos mayores y menores datos en el 3, analizando sobre una muestra de 11. El razonamiento estadístico no es correcto. Da una respuesta acertada de forma casual.

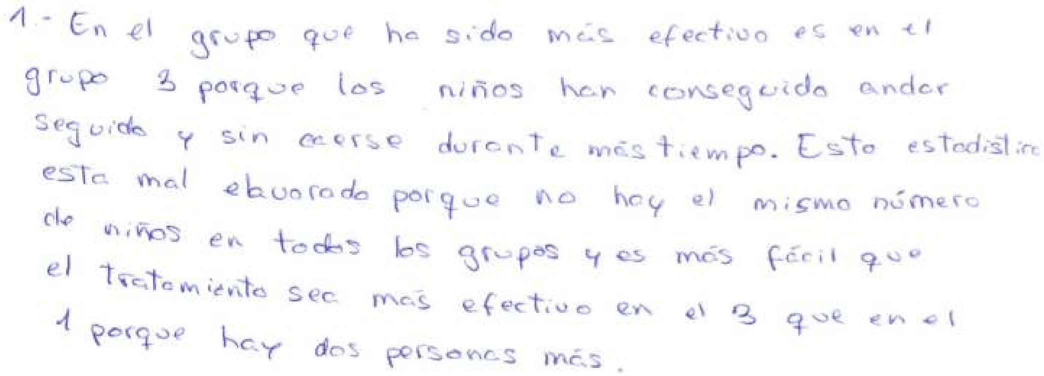

1.- En el grupo que ha sido más efectivo es en el grupo 3 porque los niños han conseguido andar seguido y sin caerse durante más tiempo. Esto estadístico esta mal elaborado porque no hay el mismo número de niños en todos los grupos y es más fácil que el tratamiento sea más efectivo en el 3 que en el 1 porque hay dos personas más.

Figura 54. Respuesta al problema 3.1 del alumno 68

El alumno cuestiona la validez de los datos presentados. Afirma que la estadística está mal elaborada porque no hay el mismo número de niños en todos los grupos y es más fácil que el tratamiento sea más efectivo en el 3 que en el 1 porque hay dos personas más.

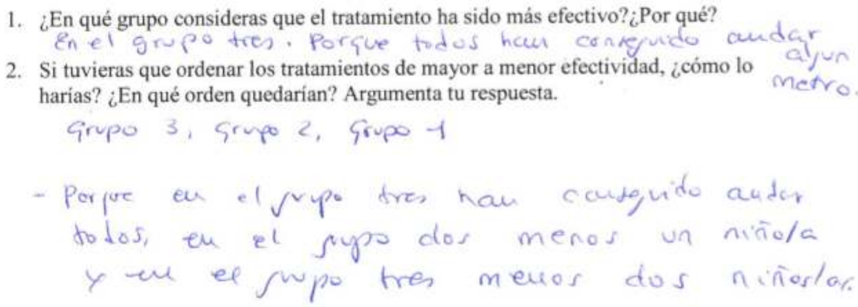

1. ¿En qué grupo consideras que el tratamiento ha sido más efectivo?¿Por qué?
En el grupo tres. Porque todos han conseguido andar algún metro.
2. Si tuvieras que ordenar los tratamientos de mayor a menor efectividad, ¿cómo lo harías? ¿En qué orden quedarían? Argumenta tu respuesta.
Grupo 3, Grupo 2, Grupo 1
- Porque en el grupo tres han conseguido andar todos, en el grupo dos menos un niño/a y en el grupo tres menos dos niños/as.

Figura 55. Respuesta al problema 3 del alumno 112

Este alumno da por hecho que el tamaño de la muestra es el mismo y que los valores que faltan son nulos y por eso no aparecen en la tabla. El formato de la tabla le lleva a confusión.

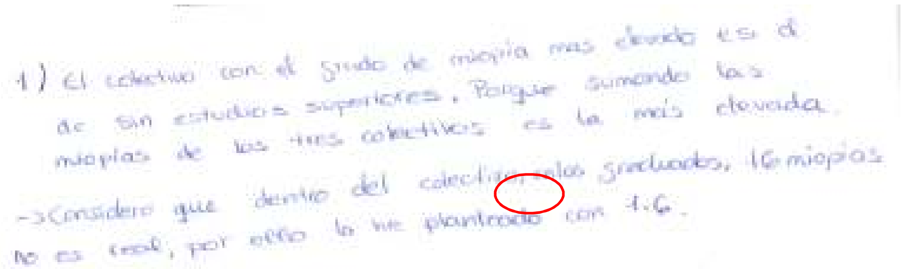
Los resultados se recogen en la siguiente tabla donde comparamos los resultados de los problemas 1 y 3:

	Nº datos en la distribución	
	Problema 1	Problema 3
SECUNDARIA	4,61	5,17
INFANTIL	6,98	17,94
PRIMARIA	1,61	2,94
SIMULTANEIDAD	6,25	31,25
ACTUALIZACIÓN	4,76	4,76

Tabla 37. Influencia tamaño de la muestra problemas 1 y 3

El alumnado de infantil presenta una mayor influencia que el resto de colectivos al considerar cantidades diferentes de datos en las distribuciones. Se acrecenta en el problema 3 debido a la disposición de los datos en forma de tabla frente a la enumeración separada por comas de los datos del problema 1. Supone, para el alumnado de simultaneidad, más de un 30% de errores en su respuesta al problema 3.

En los problemas 2 y 4 la cantidad de datos en las distribuciones es el mismo; en este caso, es el tipo de variable la que influye en la respuesta del alumnado tal y como muestra la siguiente figura.



1) El colectivo con el grado de miopía mas elevado es el de sin estudios superiores. Porque sumando las miopías de los tres colectivos es la más elevada.
-> Considero que dentro del colectivo de los graduados, 16 miopías no es real, por ello lo he planteado con 1.6.

Figura 56. Respuesta al problema 4.1 del alumno 162

Se afirma que como considera que una miopía de 16 dioptrías no es real, plantea el problema con 1,6. Si la variable no hubiera sido continua, tal vez el alumno no se hubiera planteado modificarlo y transformarlo en un número decimal.

6.4. Observaciones atípicas y su influencia en el cálculo de la media aritmética

El reconocimiento de observaciones atípicas por parte del alumnado es una condición necesaria para que se conciencie de su influencia en el cálculo de la media aritmética, sin embargo, no es una condición suficiente de cara a la búsqueda de medidas alternativas que representen la reducción de datos de forma correcta. En apartados anteriores hemos registrado respuestas del alumnado que respondía correctamente a las preguntas del cuestionario al presentar una respuesta basada en razonamientos estadísticos centrales completos (RECC). De igual forma, hemos recogido imágenes de respuestas basadas en razonamientos estadísticos centrales incompletos (RECI). A continuación mostramos nuevas respuestas que involucran la presencia de observaciones atípicas y comentamos cómo el alumnado evalúa estas observaciones.

Colectivo	Dioptrías										
Doctores	3	0	0	2	1.75	0.5	0	2	2.25	0.5	12
Graduados	0	2	0	0	0	1.5	1,6	1.25	2.25	0.75	9'35
Sin estudios superiores	2	2	0	1	0.5	0.25	1.5	1	2.75	3.5	14'5

Figura 56. Modificación de datos problema 4 del alumno 151

El alumno observa en la tabla el valor 16 y considera que es un error de transcripción del cuestionario. No plantea la existencia de observaciones atípicas, directamente modifica el valor y lo convierte en 1,6.

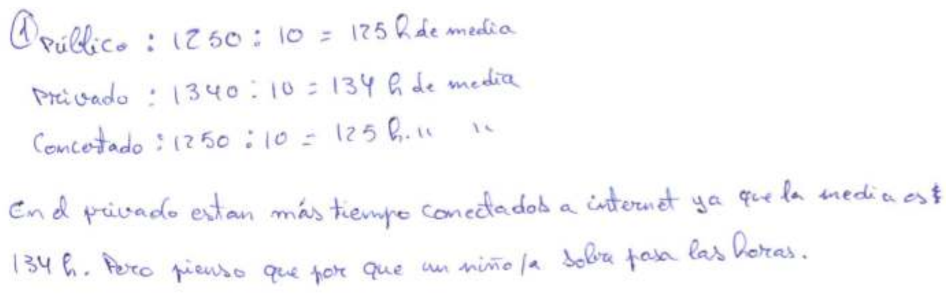


Figura 57. Respuesta al problema 2.1 del alumno 160

La respuesta refleja que el alumno reconoce que la media se ve afectada por la observación atípica, ya que afirma que la media es 134 h porque un niño/a sobrepasa las horas. Sin embargo, no modifica los cálculos ni su respuesta.

Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

	Reconoce observación atípica				Descarta en el cálculo de la media			
	Problema				Problema			
	1	2	3	4	1	2	3	4
SECUNDARIA	4,61	1,53	3,44	0,00	7,14	0,00	5,55	11,11
INFANTIL	11,62	4,65	5,12	2,56	0,00	0,00	0,00	0,00
PRIMARIA	22,86	8,57	17,64	14,70	4,00	3,33	6,90	3,85
SIMULTANEIDAD	0,00	0,00	6,25	12,50	0,00	0,00	0,00	25,00
ACTUALIZACIÓN	14,28	14,28	9,52	5,26	30,00	16,66	11,11	8,33

Tabla 38. Reconocimiento observación atípica

Las columnas 1 a 4, recogen en porcentaje la cantidad de alumnado que ha reconocido la observación atípica en cada problema y en cada colectivo, respecto al alumnado que ha respondido. Las columnas 5 a 8, recogen en porcentaje la cantidad de alumnado que ha descartado la observación atípica en el cálculo de la media aritmética respecto al alumnado que ha dado una respuesta a partir del cálculo de la media aritmética en cada problema y en cada colectivo.

De la tabla se deduce que no siempre se reconocen las observaciones atípicas y que, pese a ser reconocidas, no se tiene en cuenta cómo afecta su consideración al cálculo de la media aritmética en todas las ocasiones. Es más, infantil no las ha descartado en ningún problema y simultaneidad únicamente en el problema 4. Destaca actualización por llegar a un 30% en el problema 1 y descartar la observación atípica en todos los problemas aunque en pequeños porcentajes. En particular, ha habido un alumno de actualización que ha utilizado la mediana y otro medias recortadas para responder a los problemas ante la presencia de observaciones atípicas.

6.5. Influencia de los valores nulos en el cálculo de la media aritmética

Se han incorporado valores nulos a los datos para analizar la creencia de algunos estudiantes en que el cero no cambia el valor de la media. Presentamos los resultados extraídos del cuestionario referentes al alumnado que no tiene en cuenta este valor al calcular la media aritmética en el problema 4. Este problema es el único que presenta el valor cero en sus datos.

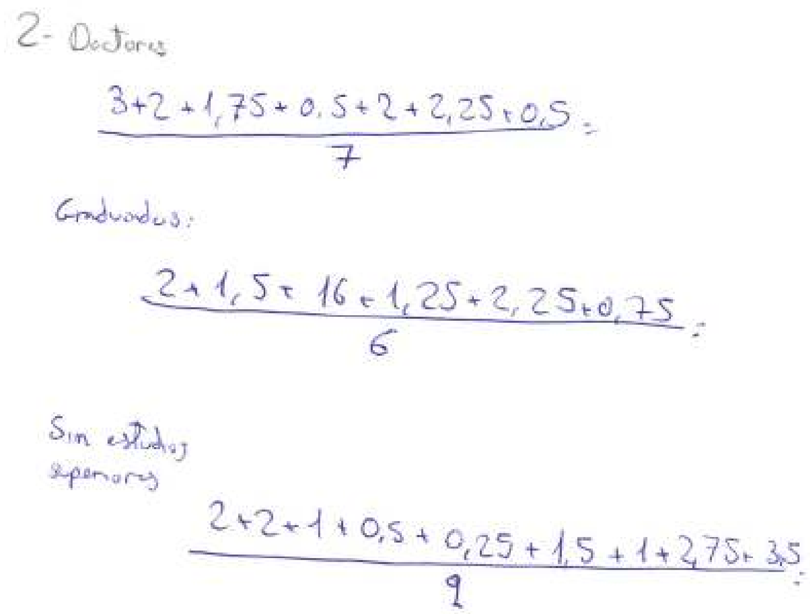


Figura 58. Respuesta al problema 4.1 del alumno 127

Observamos que calcula la media como el cociente entre una suma y diferentes denominadores. En cada colectivo, el denominador coincide con el número de sumandos. Para el caso de los doctores aparece 7 sumandos, en los graduados 6 y en el colectivo de sin estudios superiores, 9. Esta disparidad responde a la no consideración de los valores nulos a la hora de calcular la media aritmética, ya que en todos los colectivos la muestra seleccionada era de 10 individuos.

La siguiente tabla recoge el porcentaje de alumnado que, haciendo uso de la media aritmética para responder al problema, no considera el valor cero.

	Descarta valores nulos en el cálculo de la media
SECUNDARIA	33,33
INFANTIL	0,00
PRIMARIA	0,00
SIMULTANEIDAD	11,11
ACTUALIZACIÓN	0,00

Tabla 39. Conocimiento influencia valores nulos problema 4

Observamos que únicamente se ha cometido este tipo de error en dos colectivos. En términos absolutos, 3 de 9 alumnos han descartado los valores nulos en el cálculo de la media en secundaria (33,33%) y 1 de 9 en simultaneidad (11,11%).

7. CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES

Cuando los problemas se formulan en la manera en la que se han formulado en nuestro cuestionario, conteniendo valores atípicos y tablas con tamaño de colecciones de datos diferentes, la influencia, tanto del formato de los datos como del contexto en el que se formulan, se muestra como un factor que condiciona las dificultades de los problemas. Hemos visto que los problemas que se enunciaban en un contexto estadístico-social presentaban menos dificultad para el alumnado a la hora de abordarlos y dar una respuesta que los enunciados en un contexto estadístico-salud a pesar de que los problemas planteados presentaban la misma complejidad en sus cálculos. Además, los términos en que se planteaba la pregunta también influían en la dificultad asociada al problema y, en particular, en el hecho de tener que proporcionar un valor esperado. El reconocimiento de una observación atípica era necesario para que el alumnado diera una respuesta al problema en los términos planteados en este trabajo, ya que los resultados de los problemas podían variar según se considerasen o no esos datos. En esta investigación se ha tomado la postura de no dar por válida una respuesta que no fuera acompañada la media aritmética de una medida de dispersión y de un análisis de la representatividad de la media en cada problema. Este análisis forzaba a preferir la mediana o media recortada como medida de localización central. El reconocimiento de observaciones atípicas se basaba en el conocimiento del contexto por parte del estudiante ya que, al no calcular los cuartiles ni realizar gráficos de cajas y bigotes, no tenía herramientas para caracterizar las observaciones atípicas.

Creemos que es muy significativo que los estudiantes hayan abordado un problema (DAP) y dado una respuesta al mismo (DP) basándose en su conocimiento del contexto, puesto que el proceso de resolución implicaba la identificación de una observación atípica y su influencia en la solución (DSP) ha sido determinante. En cuanto al tipo de datos (continuos, discretos), coincidiendo con Strauss y Bichler (1988), no hemos encontrado efectos significativos en las dificultades de los problemas.

Aunque el cálculo de las medidas centrales no presentaba dificultad, la mayoría de los estudiantes se limitaron a calcular la media aritmética sin tener en cuenta si era representativa o no. Salvo contadas excepciones, no calcularon otras medidas centrales y, en caso de hacerlo, correspondió a la moda. Únicamente un alumno calculó la mediana tras observar la presencia de una observación atípica que determinó a través del contexto. Además, hemos encontrado las mismas dificultades en la comprensión de las medidas centrales que Batanero, Godino y Navas (1997) en relación con el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de medidas centrales y el uso de promedios en la comparación de distribuciones. Al igual que García Cruz y Garret (2008), no hemos encontrado diferencias significativas entre el alumnado de secundaria y universitaria en cuanto a la conceptualización de la media aritmética; aunque se aprecia un conocimiento más especializado en casos particulares de alumnos de primaria y actualización. El alumnado, en general, demostró no conocer que la media aritmética debe ir acompañada de la desviación típica para valorar si es adecuada o no a la hora de dar respuesta a la comparación de distribuciones ni tampoco se planteó el uso de medidas de tendencia central más allá de la media aritmética. Esto es debido a la falta de uso de la idea de dispersión, ya que aunque algunos calcularon el rango de forma correcta, no llegaron a captar el significado de variabilidad ni su utilidad en la comparación de dos distribuciones. En consonancia con la investigación realizada con futuros maestros de primaria de Ruiz, Arteaga y Batanero (2009), nuestros resultados sugieren que, para el alumnado, las medidas centrales resultan más intuitivas que las medidas de dispersión y no las considera necesarias para comparar distribuciones. Hemos de mencionar que únicamente 14 alumnos de nuestra investigación, de un total de 188, afirmaron conocer el uso del modo estadístico en la calculadora avalando nuestra conclusión.

Resumiendo, si la esencia del razonamiento estadístico es para Wild y Pfannkuch (1999) el concepto de distribución, y un requisito para comprender la distribución es la variabilidad, los resultados de nuestra investigación indican que ni tan siquiera los maestros en activo poseen este razonamiento. Concluimos que el contexto y el formato de los datos deberían tenerse en cuenta a la hora de diseñar secuencias de enseñanza o trabajos de investigación relacionados con la comparación de conjuntos de datos a tenor de lo expuesto en este trabajo y sugerimos que la formación de los maestros pase por una atención a estos problemas. El alumnado, en sus primeros años de escolaridad, apenas adquiere una perspectiva algorítmica de las principales medidas estadísticas, manifestando grandes dificultades en interpretar los resultados obtenidos. El recurso excesivo de fórmulas estadísticas y la utilización de problemas descontextualizados tiene como resultado “alumnos mal preparados para el estudio de la estadística, a nivel superior, y adultos estadísticamente analfabetos” (Batanero y Díaz, 2010: 6).

Por último, a corto plazo, queremos que nuestra investigación se centre en analizar la concepción de las observaciones atípicas en profesores de secundaria. A este análisis debemos sumar el del currículum y los libros de texto en referencia a este concepto. Consideramos necesario abrir una línea de investigación en ese campo basándonos en las evidencias recogidas en los cuestionarios y en las diferentes posturas analizadas en la bibliografía referida anteriormente.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, D.E., Sweeney, D.J. y Williams, T. A. (2010). *Estadística para Administración y Economía* (10ª ed.). México: Thomson.

Batanero, C**.** (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de investigación en Educación Estadística. Recuperado el 18 de agosto de 2015, de http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5C118didacticaestadistica.pdf

Batanero, C. y Díaz, C. (2010). Training teachers to teach statistics: what can we learn from research? *Statistique et enseignement*, *1*(1), 5-20. Recuperado el 11 de junio, de http://statistique-etenseignement.fr/ojs/

Batanero, C., Godino, J. D., y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. Recuperado el 10 de junio de 2014, de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Logse.pdf

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. In D. Ben-Zvi, y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht: Kluwer.

Carles, M., Cerdán, F., Huerta, M. P., Lonjedo, M.A. y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y del contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 173-185). Santander: SEIEM.

Estrada, A. (2007). Evaluación del conocimiento estadístico en la formación inicial del profesorado. Recuperado el 12 de julio de 2014, de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2285032

García Alonso, I. y García Cruz, J.A. (2004). La media aritmética. Recuperado el 26 de mayo de 2014, de http://jagcruz.webs.ull.es/Articulos/FPIEM_2004.pdf

García Cruz, J.A. y Garrett, A.J. (2008). Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, *12* (1), 49-66.

Huerta, M. P. y Cerdán, F. (2010). El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. Recuperado el 3 de septiembre de 2015, de http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3629461.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). "Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria". Madrid: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). "Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria". Madrid: Autor.

Mokros, J., y Russell, S.J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26* (1), 20-39.

Mooney, E. Langrall, C. y Nisbet, S. (2006). Developing a model to describe the use of context knowledge in data explorations. Recuperado el 12 de julio de 2015, de http://www.researchgate.net/publication/29462444_Developing_a_Model_to_Describe_the_Use_of_Context_Knowledge_in_Data_Explorations

Moore, D.S. (2005). *Estadística aplicada básica* (2ª ed.). Barcelona: Antoni Bosch.

Ortiz, J.J. y Font, V. (2014). Pre-service teachers' common content knowledge regarding the arithmetic mean. *REDIMAT, 3* (3), 192-219. Recuperado el 10 de junio de 2015, de http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2014.51

Reading, C. y Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 187-194). Universidad de Valencia, España.

Ruiz, B., Arteaga, P. y Batanero, C. (2009). Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 57-74). Málaga: Gráficas San Pancracio.

Sánchez, E., da Silva, C.B. y Coutinho, C. (2011). Teachers' Understanding of Variation. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 211-221). New York: Springer.

Serrano, L. (2011). Estadística. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemática para Maestros de Educación Primaria*, (pp. 401-426). Madrid: Pirámide.

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19* (1), 64-80.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review,* 67(3), 223-265.