PERFILES EN LA RESOLUCIÓN DE PAEV ADITIVOS DE CAMBIO Y DE COMBINACIÓN EN 1º DE PRIMARIA. ANÁLISIS COMPARATIVO CON ALUMNOS CON ALTAS CAPACIDADES

ESTEFANIA MOLINA ALCALÁ

TRABAJO DE FIN DE GRADO DE MAESTRA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

ESPECIALIDAD: CIENCIAS Y MATEMÁTICAS

CURSO 2014-2015

JULIO 2015

TUTOR DE UNIVERSIDAD:
Manuel Pedro Huerta Palau
(Departamento de Didáctica de las Matemáticas)

COTUTOR:
Enrique Hernández Sánchez

Resumen

En el estudio que aquí se presenta, realizamos un análisis comparativo entre alumnos con altas capacidades o talento matemático y el resto de alumnado, en 1º de Primaria, durante la resolución de problemas aritméticos de estructura aditiva a partir de la modelización matemática. Con la información cualitativa extraída pretendemos determinar si el maestro puede llegar a detectar posibles casos de estudiantes con altas capacidades o talento gracias a las características comunes observadas entre los miembros de este colectivo al resolver problemas.

Palabras clave: *resolución de problemas, altas capacidades, sobredotación, talento matemático, modelización matemática, Educación Primaria.*

Resum

En l'estudi que ací es presenta, realitzem un anàlisi comparatiu entre alumnes amb altes capacitats o talent matemàtic i la resta d'alumnat, en 1r de Primària, durant la resolució de problemes aritmètics d'estructura additiva a partir de la modelització matemàtica. Amb la informació qualitativa extreta pretenem determinar si el mestre pot arribar a detectar possibles casos d'estudiants amb altes capacitats o talent gràcies a les característiques comuns observades entre els membres d'aquest col·lectiu al resoldre problemes.

Paraules clau: *resolució de problemes, altes capacitats, sobredotació, talent matemàtic, modelització matemàtica, Educació Primària.*

Abstract

In the study presented here, we carry out a comparative analysis among students with high abilities or mathematical talent and the rest of students in elementary 1st, during the resolution of arithmetic problems of additive structure based on mathematical modelling. With the qualitative information extracted, we try to determine if the teacher can get to detect possible cases of students with high abilities or talent thanks to common characteristics observed among members of this group to solve problems.

Keywords: *problem solving, high abilities, gifted students, mathematic talent, mathematical modelling, primary education.*

Índice

Índice de objetos

Tablas

Figuras

Ilustraciones

1. Introducción

Los alumnos con altas capacidades (de aquí en adelante AACC) o talento, constituyen un colectivo que para muchos profesionales de la educación suele ser desconocido. Aunque en los últimos años se han realizado estudios y avances en este asunto, sobre todo en relación con su presencia en las leyes educativas, aún queda mucho camino por recorrer, principalmente en lo que se refiere a la formación que los maestros reciben al respecto, ya que los docentes tienen un papel muy importante durante la detección (primer paso para la identificación) y en el diseño de la intervención que se llevará a cabo con los alumnos ya identificados.

En el presente estudio nos centraremos en la fase de detección dentro del aula y, en concreto, en la identificación de las características que estos alumnos presentan a la hora de resolver problemas. Benavides (2008) realizó un estudio con el que pretendía caracterizar a los alumnos con talento matemático a partir de la resolución de problemas de estructura multiplicativa. Dado que pensamos que se debería detectar lo más pronto posible a los alumnos con AACC o talento, y que la multiplicación es una operación aritmética que comienza a trabajarse a partir de 2º de Primaria, optamos por trabajar a partir de problemas de estructura aditiva, que son los que comienzan a introducirse en 1º de Primaria. Para ello, aplicamos en este curso la Unidad Didáctica presentada en la asignatura *Practicum III*, en la que se trabajan problemas de cambio y de combinación con la modelización matemática como estrategia metodológica.

De esta manera, intentamos identificar y describir diferentes perfiles dentro de un aula ordinaria en relación con la resolución de problemas de estructura aditiva para determinar en qué perfil se encontrarían los estudiantes identificados como sobredotados o con AACC, al mismo tiempo que pretendemos realizar un estudio comparativo entre los alumnos con AACC y el resto de alumnos para poder identificar aquellas características que los diferencian y que los maestros pueden interpretar como indicadores de la presencia de AACC o talento. En relación con esto último, demostramos la validez y la fiabilidad de esta propuesta al haber detectado, gracias a ella, a un alumno que tras la evaluación psicopedagógica correspondiente fue identificado como alumno sobredotado.

2. Planteamiento del problema

El problema que nos ha empujado a llevar a cabo la siguiente investigación está relacionado con la necesidad de detectar lo más tempranamente posible a aquellos alumnos que presentan AACC o talento matemático en el contexto del aula para poder actuar cuanto antes y ayudarlos a desarrollar al máximo su gran potencial. De esta manera, pretendemos dar respuesta a diversos interrogantes que se nos plantean entorno este tema y que responden a los objetivos principales que se persiguen con el presente trabajo:

- ¿Qué perfiles de actuación se pueden identificar a través de la resolución de problemas de estructura aditiva mediante la modelización matemática en una clase de matemáticas con diferentes ritmos y estilos de aprendizaje?
- ¿En qué perfil se encontrarían los alumnos con AACC o talento matemático?
- ¿La resolución de problemas matemáticos de estructura aditiva permiten que los alumnos con AACC o talento matemático demuestren sus capacidades? ¿En qué medida?
- ¿Qué diferencias se pueden observar entre los alumnos con AACC o talento matemático y el resto de alumnos durante la resolución de problemas de estructura aditiva?
- En definitiva, ¿la resolución de problemas permite al maestro detectar aquellos alumnos que pueden presentar AACC o talento matemático en un aula ordinaria? ¿Por qué?

3. Marco teórico

3.1. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A la hora de producir un aprendizaje significativo en matemáticas, la resolución de problemas constituye una actividad con un gran valor y potencial didáctico y pedagógico, ya que permite contextualizar y dotar de sentido los procesos y los conceptos matemáticos implicados en ella (Godino, 2004a). De esto se deduce la necesidad de incorporar los problemas en la enseñanza de las matemáticas, pero no como una tarea con un papel secundario que se presenta después de haber introducido los conceptos que se pretende que los alumnos aprendan para después aplicarlos al resolver problemas, como es el caso de las operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división), sino como la herramienta que hará posible que los alumnos produzcan nuevo conocimiento construyendo los conceptos matemáticos a partir de la resolución de problemas. En otras palabras, de acuerdo con Puig y Cerdán (1988), lo que queremos decir es que las operaciones aritméticas adquieren significado para los alumnos cuando los problemas preceden a estas en la enseñanza, es decir, cuando las operaciones se introducen a partir de problemas formulados en diferentes contextos.

3.2. EL CONCEPTO DE SUMA Y DE RESTA

Dado que lo que pretendemos con la Unidad Didáctica que hemos puesto en práctica es que sean los propios alumnos los que construyan los conceptos de suma y de resta a partir de problemas contextualizados, comentaremos brevemente los significados de adición y sustracción que trabajaremos con dichos problemas, teniendo en cuenta que, en el contexto de esta investigación, la suma es una operación en el conjunto de los números naturales (N) mientras que la resta no lo es. Por ejemplo, cuando sumamos dos números naturales, como 8 + 2, obtenemos otro número natural, el 10. Sin embargo, si restamos dos números naturales cualesquiera, como pueden ser 2 – 12, el resultado es -10, un número negativo, el cual no pertenece al conjunto de los números naturales, sino de los enteros (Godino, 2004b).

Para proporcionar una explicación formal de los conceptos de suma y de resta partiremos de dos modelos matemáticos, cada uno de los cuales está asociado a uno de los diferentes significados del concepto de número natural: ordinal y cardinal. Siguiendo a Puig y Cerdán (1988), Godino (2004b) y Fernández (2011), el modelo matemático de Peano define la suma de manera inductiva por medio de dos axiomas:

a) $x + 1 = \text{sig}\ (x)$
b) Conocido $x + y$, entonces $x + \text{sig}\ (y) = \text{sig}\ (x + y)$

A modo de ejemplo, para sumar 3+2 según esta definición procederíamos de la siguiente manera: 3 + 2 = 3 + sig (1) = sig (3 + 1) = (3 + 1) + 1 = 3 + 1 + 1 = 5.

De esta manera, se deduce que sumar es seguir contando, la cual cosa podemos ver claramente utilizando el modelo de la recta numérica, ya que nos situamos en uno de los números que se corresponde con un sumando y continuamos contando de uno en uno tantas veces como indica el otro sumando. Por ejemplo, para sumar 6 + 3 marcamos el 6 y contamos de uno en uno tres veces hasta llegar al 9. Por lo que respecta a la resta, según este modelo, podríamos decir que restar es contar hacia atrás o, lo que es lo mismo, descontar.

El otro modelo al que hemos hecho referencia anteriormente es el de Cantor, el cual define la suma a partir de la unión de conjuntos, partiendo de la idea de número cardinal como el número que indica el número de elementos de un conjunto:

Sean a y b dos números naturales. Si A y B son dos conjuntos disjuntos tales que a = card (A) y b = card (B), entonces $a + b$ = card (A) + card (B) = card (A∪B).

Así, podemos identificar la operación de sumar como el cardinal que se obtiene de la unión de dos conjuntos que no tienen ningún elemento en común. En relación con la resta, esta se puede definir de la siguiente manera:

Sean a y b dos números naturales. Si A y B son dos conjuntos tales que a = card (A) y b = card (B) y B⊆A, entonces $a - b$ = card (A – B).

Con esto nos estamos refiriendo a que la resta se define como la intersección o el conjunto de elementos comunes de A y el complementario de B[1] ($A - B = A \cap \overline{B}$). Por

[1] El complementario de B es el conjunto de los elementos de A que no están en B. Por ejemplo, si el conjunto A está formado por los elementos [1, 2, 3 y 4], y el conjunto B por los elementos [1 y 2], el complementario de B es [3 y 4].

lo tanto, el caso de la resta, a diferencia de la suma, B tiene que ser un subconjunto propio de A, es decir, los elementos de B también deben pertenecer al conjunto A.

Asimismo, la resta la podemos definir considerándola como operación inversa a la suma, de manera que si a y b son dos números naturales, entonces $a - b = c$ si y solo si $a = b + c$. Así, el elemento c se conoce como sumando desconocido. Por ejemplo, si queremos restar 9 – 5 habrá que encontrar el número que, sumado a 5, da como resultado 9 (5 + … = 9).

Por último, también partiendo de la idea de conjunto, encontramos otra definición del concepto de resta, la definición por comparación, que tal como explica Godino (2004b, p. 55):

> No se requiere que uno de los conjuntos con los que se opera sea subconjunto propio del otro, basta con que pueda establecerse una correspondencia del primero con un subconjunto del segundo. Dados $a < b$, de modo que un conjunto A con a elementos se puede poner en correspondencia biyectiva con un subconjunto propio de A_1 de un conjunto B con b elementos, entonces $b - a = \text{Card}(A'_1)$[2].

3.3. Los problemas aritméticos elementales verbales

Los conceptos de suma y de resta que se derivan de estas definiciones pueden ser construidos por los propios alumnos a partir del trabajo con PAEV de estructura aditiva. Por eso, basándonos en el tipo de problemas que enunciaremos a continuación, diseñaremos los problemas que formarán parte de esta investigación. De acuerdo con Puig y Cerdán (1988), los PAEV se caracterizan por presentar un enunciado que proporciona información explícita o implícita necesaria para dar una respuesta a la pregunta que plantea el problema después de realizar las operaciones aritméticas pertinentes. Dentro del conjunto de los PAEV distinguimos los problemas de una etapa y los de más de una etapa. Los segundos requieren de la realización de diversas operaciones para resolverlos mientras que los primeros solo implican la realización de una operación. En concreto, los que aquí nos interesan son los problemas de una etapa de estructura aditiva, que son los que se resuelven mediante sumas y restas y que, según el significado global del enunciado, se pueden clasificar en cuatro grandes categorías

[2] Por ejemplo: En una clase hay 15 niñas y 10 niños, ¿cuántas niñas más que niños hay?

dentro de las que encontramos diferentes tipos de problemas dependiendo de las relaciones que se establecen entre las cantidades.

Siguiendo con Puig y Cerdán (ibid, p. 99), las cuatro categorías en las que podemos clasificar los PAEV aditivos de una etapa son: cambio, combinación, comparación e igualación. A continuación describimos las dos primeras por ser en ellas donde se ubican los problemas diseñados para la presente investigación:

- ***Cambio.***

María tiene 9 euros. Se ha gastado 4 euros en un libro. ¿Cuántos euros le quedan?

Los datos que se proporcionan son: la cantidad inicial (9 euros) y la cantidad de cambio (4 euros). Se pregunta por la cantidad final (los euros que le quedan a María), que es la incógnita del problema. En este caso, el verbo "gastar" indica la acción que tiene lugar, lo que implica que la cantidad inicial decrece, es decir, la cantidad final será menor que la cantidad inicial. Así, este problema se modeliza con una resta: 9 – 4 = 5. Por lo tanto, los problemas de cambio se caracterizan porque se produce una acción (indicada por el verbo) que modifica la cantidad inicial, en función de la cantidad de cambio, para dar lugar a una cantidad final. Según si la cantidad inicial crece o decrece con el cambio y según cuál de las tres cantidades sea la incógnita, se pueden clasificar seis tipos de problemas de cambio (ver tablas en Anexo 1).

- ***Combinación.***

Raúl compra 3 manzanas rojas y 2 verdes. ¿Cuántas manzanas ha comprado en total?

En este problema conocemos las partes (un conjunto de 3 manzanas rojas y otro de 2 manzanas verdes) y se nos pregunta por el total (número de manzanas resultante de la unión de los conjuntos). Así, en los problemas de cambio se establecen relaciones entre conjuntos y las cantidades que responden al esquema parte-parte-todo, de manera que se distinguen dos tipos de problemas, según si se pregunta por una de las partes (*Combinación 2*) o por el todo (*Combinación 1*).

Tal y como se deduce de diversos estudios realizados con estudiantes de 1º a 3º de Primaria, dentro de la clasificación anterior se pueden establecer diferentes niveles de complejidad en función de la estructura matemática que presentan los problemas (Carpenter y Moser, 1983, p. 10, citado en Puig y Cerdán, 1988). A continuación enunciaremos los que resultan relevantes para esta investigación, ya que en función de esto secuenciaremos los problemas, es decir, determinaremos el orden en el que se trabajarán para ir de la estructura más simple a la más compleja:

- ✓ $a + b = ?$ y $a - b = ?$ son menos complejas que $a + ? = c$ y $a - ? = c$.
- ✓ No se han encontrado diferencias entre $a + ? = c$, $? + b = c$ y $a - ? = c$.
- ✓ La proposición $? - b = c$ es significativamente más difícil que el resto de proposiciones sustractivas.

Asimismo, hay aspectos sintácticos y semánticos que hacen que un mismo problema resulte más fácil o más difícil a alumnos diferentes. En Puig y Cerdán (1988) se identifican como aspectos sintácticos: la manera en que se presenta el problema (con dibujos o material concreto suelen resultar más sencillos), la longitud del enunciado, la posición de la pregunta y la magnitud de las cantidades, así como la relación que hay entre el orden en el que van apareciendo los datos en el enunciado y el orden en el que tienen que ser colocadas para realizar la operación aritmética necesaria para resolver el problema. Respecto a los aspectos semánticos, considerando las categorías generales, los problemas de cambio suelen ser más fáciles que los de combinación. Sin embargo, según Riley et al. (1983) citado en Puig y Cerdán (1988), si se analiza cada uno de los tipos que se pueden encontrar dentro de una misma categoría se observan cambios considerables en el nivel de dificultad (ver tabla en Anexo 2).

3.4. Modelización en matemáticas

La importancia de la resolución de problemas, las definiciones de los conceptos de suma y de resta, y la caracterización de los PAEV, son aspectos que se tendrían que tener en cuenta a la hora de diseñar los problemas a partir de los cuales se pretende que el alumnado progrese en el aprendizaje de los conocimientos escolares al mismo tiempo que comprende cómo las matemáticas satisfacen ciertas necesidades. De esta manera, la enseñanza de las matemáticas debería huir de metodologías tradicionales que enseñan directamente los modelos que los alumnos deberán aplicar (sin haberlos dotado de sentido previamente) y que llevan a una visión cerrada, rígida y mecánica de las matemáticas. Así, la educación matemática debería entenderse bajo una visión constructiva, ya que se busca que sean los propios alumnos los que deduzcan y construyan los modelos matemáticos a partir de la resolución de problemas, entendiendo como modelo matemático "un fragmento de matemáticas aplicado a un fragmento de la realidad" (Israël, 1996, citado en Girard 1999, p. 8). Evidentemente, para que esta definición sea coherente con la concepción constructivista del aprendizaje, el modelo en cuestión debería haber sido construido por el propio alumnado a partir de problemas de la realidad a la que hacen referencia, en lo cual la modelización asume un papel fundamental.

De acuerdo con Biembengut (2007), en el día a día, los niños perciben hechos de su entorno y tratan de comprenderlos a partir de los conocimientos que ya tienen acerca del mundo que les rodea, es decir, se produce una interacción entre los fenómenos que perciben y las ideas mentales que ya poseen. Así, los niños dotan de significado lo que les rodea y "crean o recrean modelos mentales que les permiten establecer maneras de ser y de actuar" (Ibid, p. 452). Este proceso que tiene lugar cuando interactuamos con la realidad que nos envuelve es similar al proceso de modelización matemática. Blum y Niss (1991) entienden la modelización matemática como el proceso de construcción de un modelo matemático que permite interpretar, dotar de sentido y resolver una situación o problema del mundo real. Según Biembengut (2007, p. 453), dicho proceso, cuando tiene lugar en la educación Primaria, consta de tres fases: "percepción, comprensión y explicación, y significación y modelización".

Durante la fase de percepción, el maestro presenta materiales que permitan recrear en el aula situaciones del entorno real del niño, al mismo tiempo que estimulan el interés y la percepción de los fenómenos o problemas involucrados, de manera que el alumno analiza y trata de describir el contexto que le rodea mientras se promueve no solo la identificación de aquello que ya conocía previamente, sino también de los elementos o hechos que aún no se han percibido. *Por ejemplo: se convierte el aula en una tienda donde los alumnos deben ir a comprar con el material que se les proporciona (dinero), de manera que los estudiantes exploran la situación que se recrea y se dan* *cuenta de que cuando compran, se gastan dinero y, por lo tanto, les queda menos dinero que al principio.*

En la segunda fase, la de comprensión y explicitación, lo que se pretende es "estimular la asociación de ideas y la comprensión" (Ibid, p. 453), se busca que los alumnos sean capaces de representar mediante símbolos matemáticos aquellos fenómenos o problemas que han percibido durante la fase anterior. En este momento tiene lugar lo que se conoce como "matematización horizontal", es decir, el hecho transitar entre las situaciones del mundo real y el mundo de los símbolos y las estructuras matemáticas implícitas (Bonotto, 2007). Algunos de los conceptos o símbolos implicados serán aún desconocidos por los estudiantes, por lo que surge una gran oportunidad para enseñarlos sin dejar de lado su conocimiento sobre el mundo real, lo que evita que se produzca una disociación entre la realidad que experimentan los alumnos fuera de la escuela y las matemáticas que tiene lugar dentro de ella. *Siguiendo con el ejemplo anterior, pediremos a los alumnos que cuenten y anoten los euros que tenían antes de comprar, los que se gastan y los que les quedan, así como que comprendan que se pueden calcular los euros que les quedan con una resta. De esta manera, también podremos introducir los signos de resta (–) e igual (=).*

Por último, es en la tercera fase en la que los estudiantes reorganizan las situaciones, ideas y conceptos tratados en la fase anterior para construir representaciones o modelos a partir de los cuales puedan interpretar, predecir y comprender mejor el mundo real que se encuentran fuera de la escuela, así como para poder hacer frente a los problemas que surgen en situaciones propias de la vida real (Biembengut, 2007, p. 454). *Por ejemplo, en esta fase es en la que los alumnos son capaces de construir un modelo matemático de la resta que pueden aplicar para saber cuántos euros les quedarán después de comprar sin tener que contarlos uno por uno, así como en otras situaciones que también se resuelven mediante una resta, como saber los caramelos que quedan después de regalar algunos o las canicas que quedan después de perder algunas, entre otras situaciones.*

De esta manera, vemos como la modelización matemática se convierte en un punto clave a la hora de alcanzar uno de los objetivos que se persigue al enseñar matemáticas como es el de "ayudar a los estudiantes a adquirir la habilidad de desarrollar y usar modelos matemáticos como un medio para dotar de sentido las situaciones del día a día" (Ibid, p. 452).

3.5. La resolución de problemas aditivos en el currículum

A continuación examinaremos qué se establece sobre el aprendizaje de la suma y la resta en el currículum vigente según la LOMCE, es decir, en el DECRETO 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el cual se establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunidad Valenciana, DOGV n. 7311, de 7 de julio de 2014.

En la introducción al área de Matemáticas se parte de la importancia de estas para entender el mundo y se determina que "el alumnado ha de aprender matemáticas utilizándolas en contextos relacionados con las situaciones de la vida diaria", así como que las actitudes hacia las matemáticas y la resolución de problemas constituyen los elementos que deben vertebrar el aprendizaje de los conceptos de cada uno de los bloques (números, medida, geometría y estadística y probabilidad).

De acuerdo con esto, podemos pensar que se manifiesta una visión del aprendizaje basada en la perspectiva constructivista y coherente con lo que se acaba de exponer en los apartados anteriores. No obstante, si observamos los contenidos y los criterios de evaluación concretados en cada bloque y en cada curso, parece que todavía prevalece la automatización de los algoritmos, dejando en un segundo plano la resolución de problemas (pertenecientes a las cuatro categorías descritas anteriormente), ya que en todos los cursos se incluyen al final del bloque en el que se trabajan los números y las operaciones (excepto en sexto, donde no aparece ninguna referencia a la resolución de problemas en dicho bloque), como si primero se tuvieran que enseñar los conceptos y después utilizarlos para resolver problemas. Además, aunque continuamente se hace referencia a la presentación de situaciones reales y cotidianas, casi siempre el objetivo principal es que el alumnado sepa identificar en ellas los conceptos que previamente han aprendido por medio de la instrucción directa. Sin embargo, debemos decir que, concretamente en primer curso, sí que se hace referencia a que los alumnos doten de significado la suma y la resta en contextos de unir o separar (de acuerdo con la definición conjuntista de Cantor) y en situaciones de añadir o quitar (que responde a la definición basada en los axiomas de Peano).

Por último, cabe señalar que, aunque los contenidos y criterios de evaluación no suelen reflejar, como acabamos de decir, un uso de los problemas para construir y dotar de significado los conceptos matemáticos por medio de la modelización (partiendo de problemas para llegar a modelos y a conceptos), sí que se otorga importancia al proceso de resolución, es decir, a la justificación del proceso seguido y a la comunicación de los resultados obtenidos.

3.6. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS EN EL LIBRO DE TEXTO

Una vez visto qué dice el currículum de los conceptos de suma y de resta, así como del papel de los problemas y la modelización, veremos cómo se concreta esto en el libro de texto de la editorial Vicens Vives que utilizan los alumnos que forman parte de esta investigación.

En cuanto a la adición, primero se introduce como unión de conjuntos y, posteriormente, entra en juego la definición aportada por Peano. El caso de la sustracción es similar al de la adición. Primero se presenta según la definición que se deduce de la teoría de conjuntos y después de acuerdo con la definición que se deriva de los axiomas de Peano (Fraile, 2014). Cabe aclarar que operar según la teoría de conjuntos es un proceso dinámico, ya que, en el caso de la suma, primero es necesario reunir los objetos físicos y después contarlos. Por lo tanto, este dinamismo solo será posible si el maestro o la maestra lo hace posible proporcionando material tangible que los alumnos puedan unir o separar según si se trate de la suma o de la resta.

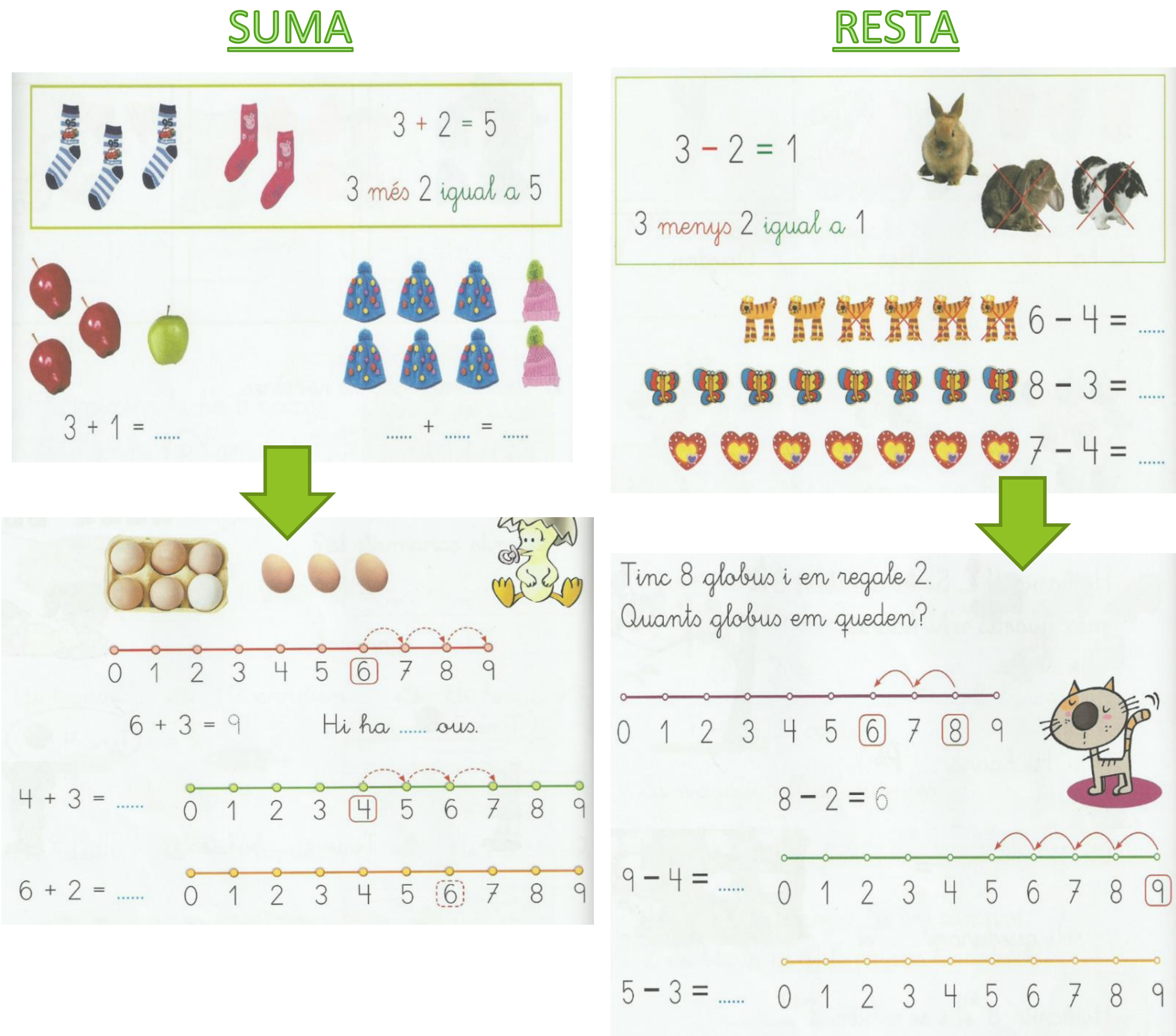


Ilustración 1. Extractos de la aproximación a la suma y la resta en el libro de texto.

En cada uno de los casos, llama la atención que los problemas aparecen después de haber introducido los algoritmos. En ningún momento se da libertad al alumno para resolver problemas en los que ellos mismos tengan la oportunidad de descubrir y modelizar la suma y la resta.

Respecto al tipo de problemas que se presentan, cabe decir que la mayoría pertenecen a las categorías de cambio y de combinación (ver gráfica 1 del Anexo 3). Después de realizar un análisis exhaustivo de los 196 problemas de una etapa pertenecientes a estas dos categorías (que son los que interesan en esta investigación) presentes en el libro del alumno, el cuaderno de actividades y la guía docente, y poniendo especial énfasis en el tipo al que pertenecen, el contexto en el que se plantean y los aspectos sintácticos y semánticos, llegamos a las siguientes conclusiones:

- ✓ La gran mayoría de los problemas pertenecen al tipo *Cambio 2* (45%) por delante de los de *Combinación 1* (28%) y de *Cambio 1* (17%). El resto se reparten entre *Cambio 3* (3%), *Cambio 4* (2%) y *Combinación 2* (5%). Ver gráfica 2 del Anexo 3.
- ✓ Los problemas de cambio se trabajan en contextos muy variados pero predominan, con diferencia, los de comprar o regalar, entre otros. Respecto a los de combinación, destacan los contextos de comprar (en relación con la suma de varios precios para calcular el precio total).
- ✓ En los primeros problemas los datos se presentan mediante dibujos y después siempre mediante cantidades.
- ✓ En todos los problemas la pregunta aparece al final del enunciado y separada de la parte informativa. Además, los datos siempre aparecen en el mismo orden en el que deben ser colocados para realizar la operación correspondiente.
- ✓ Prácticamente todos los problemas del primer trimestre incluyen cantidades hasta el 10, los del segundo hasta el 70 y los del tercero hasta el 90. Esto se debe a que en cada trimestre se van introduciendo los números progresivamente hasta el 99 y en los problemas solo se incluyen las cantidades trabajadas.
- ✓ En los problemas de cambio se hace referencia a la suma y a la resta mediante verbos que indican la acción de unir/añadir, como añadir, recibir, ganar, etc., o separar/quitar, como coger, irse, regalar, gastar, dar, etc. (ver lista de verbos en Anexo 4). Además, en los problemas analizados se utiliza la palabra clave "más" para referirse a la suma o "quedarán" para referirse a la resta. En el caso de los problemas de combinar hay una referencia a los conjuntos implicados mediante palabras que se refieren al color de los objetos de cada conjunto (por ejemplo: 3 manzanas rojas y 2 manzanas verdes) o a los agentes a los que pertenecen (por ejemplo: María tiene 8 lápices y Juan 2 lápices).

3.7. ALTAS CAPACIDADES Y TALENTO MATEMÁTICO

A día de hoy, en España, se reconoce el derecho de los alumnos con AACC de recibir la atención que se merecen, tal y como señala la actual Ley de Educación (LOMCE):

> Corresponde a las Administraciones educativas asegurar los recursos necesarios para que los alumnos y alumnas que requieran una atención educativa diferente a la ordinaria [...] por sus altas capacidades intelectuales [...] puedan alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales [...]. (Artículo 71)
>
> Corresponde a las Administraciones educativas adoptar las medidas necesarias para identificar al alumnado con altas capacidades intelectuales y valorar de forma temprana sus necesidades. Asimismo, les corresponde adoptar planes de actuación, así como programas de enriquecimiento curricular adecuados a dichas necesidades, que permitan al alumnado desarrollar al máximo sus capacidades. (Artículo 76)

Asimismo, la necesidad de atender a este grupo de alumnos también se contempla en el DECRETO 108/2014 en el que se establece el currículum de Educación Primaria en la Comunidad Valenciana. En el artículo 22 de este documento se regula la identificación de este alumnado y las actuaciones o medidas educativas que se llevarán a cabo para promover su inclusión educativa, así como el papel que les corresponde a los centros educativos.

Hágase notar que en la legislación solo se incluyen a los alumnos con AACC pero no se hace referencia explícita a que los alumnos que presentan un talento especial en un área concreta también precisan de atención educativa. Sin embargo, deducimos que lo que se establece para el alumnado con AACC también es aplicable a los alumnos talentosos. Sobre este tema haremos referencia más adelante.

3.7.1. Conceptualización y distinción entre términos

Es evidente que para poder diseñar un plan de actuación adecuado primero es requisito indispensable identificar a este alumnado y, por ende, para identificarlo primero es imprescindible saber de qué estamos hablando cuando nos referimos a los alumnos con AACC o con talento matemático.

Hasta 1950, para identificar a los alumnos con AACC era suficiente con que obtuvieran altas puntuaciones en los test de inteligencia, es decir, que tuvieran un alto coeficiente intelectual, y que sobresalieran en todas las áreas educativas (Greenes, 1981; Stepanek, 1999). De un tiempo a esta parte, estudios cognitivos, avances en psicología y cambios en la comprensión sobre cómo aprenden los alumnos nos llevan a definir las AACC y el talento de una manera más concreta (Stepanek, 1999).

Actualmente existe una gran variedad de enfoques que intentan aclarar estos términos. Todos consideran que un coeficiente intelectual elevado, por sí solo, no es un indicador de AACC, por lo que incluyen otras condiciones que consideran importantes. En función de los aspectos a los que se otorga importancia se han ido construyendo modelos explicativos basados en el rendimiento, modelos cognitivos y modelos socioculturales, además de nuevos modelos que han visto la luz en los últimos años (Miguel y Moya, 2011).

Para no extendernos demasiado, describiremos el modelo basado en el rendimiento más destacado (un resumen sobre este y otros modelos puede verse en Miguel y Moya (2011)). Se trata de la teoría de los tres anillos de Renzulli, director del Centro Nacional de Investigación sobre Superdotados y Talentosos, quien considera que un CI elevado es una condición necesaria pero no suficiente, por lo que define las AACC como una confluencia de tres factores representados mediante tres anillos (Figura 1): inteligencia elevada, alta creatividad y elevada motivación intrínseca o compromiso con la tarea (Arocas, Martinez, Martinez y Regadera, 2002). Sin embargo, alta capacidad y talento no hacen referencia al mismo concepto, no son sinónimos, ya que, de tal y como explica Ramírez (2012, p. 22), “el superdotado tiene éxito en cualquier tarea mientras que la especificidad es propia del talento”.

Figura 1. Teoría de los tres anillos de Renzulli.

3.7.2. Detección e identificación

Como hemos comentado anteriormente, para poder atender adecuadamente al alumnado con AACC y talento matemático es necesario detectarlos lo antes posible. Además de la familia, otro de los contextos en el que podemos observar el comportamiento de los alumnos en el día a día, y mientras aprenden, es la escuela, por lo que el maestro adquiere un papel importante en este proceso. Sin embargo, la falta de formación acerca de este tema constituye uno de los obstáculos que dificultan el reconocimiento de este colectivo de alumnos (Jaime y Gutiérrez, 2014). Por una parte, el hecho de desconocer las características y las necesidades de estos alumnos lleva a muchos maestros a mostrarse indiferentes ante la posible presencia de alumnado con estas características y contrarios a proporcionarles la ayuda que necesitan (Plunkett, 2002, citado en Diezmann y Watters, 2002).

Por otra parte, existen mitos y falsas creencias que aquellos maestros que no hayan recibido la formación necesaria pueden considerar ciertas, por lo que también dificultará su identificación y atención. Quizá el más extendido sea pensar que este colectivo constituye un grupo homogéneo cuando la realidad es totalmente la contraria. Cada alumno tiene su propia personalidad y carácter, así como sus propios intereses, motivaciones y habilidades (Parke, 1989, citado en Stepanek, 1999). Betts y Neihart (2004) citado en Castro (2005), distinguen seis perfiles distintos. Tres de ellos responden a características o comportamientos que se consideran “comunes” en estos alumnos: excelente rendimiento, creatividad y aprendizaje autónomo. Sin embargo, bajo los tres perfiles restantes se agrupa alumnado muy diverso: aquel que pasa desapercibido porque tiende a ocultar el talento para no destacar y evitar rechazo (especialmente las niñas), alumnado que suele pasar desapercibido por su bajo rendimiento escolar como consecuencia del aburrimiento y las rutinas repetitivas, y alumnado con AACC pero con déficits específicos asociados como problemas de aprendizaje, deficiencias visuales o auditivas, TDAH o Síndrome de Asperger, entre otros. Para obtener información más detallada de cada uno de estos perfiles acudir a Castro (2005).

Aunque ya hemos dicho que estos alumnos forman un grupo muy heterogéneo, algunas de las características en cuanto a estilos de aprendizaje y motivaciones que podrían denotar AACC serían las siguientes (Albes et al. 2013) (Para un listado más amplio consultar Albes et al. (2013)):

- Gran curiosidad y ganas por aprender (motivación intrínseca).
- Aprenden más rápido y con más facilidad que sus iguales. Aprendizaje inductivo.
- Gran capacidad de atención, observación, concentración y persistencia.
- Capacidad de razonar de manera compleja. Pensamiento abstracto.
- Dominio de un vocabulario amplio y preciso.

Centrándonos específicamente en las características que presentan los alumnos especialmente dotados para las matemáticas encontramos las enumeradas por Krutetskii (1969, 1976) citado en Benavides (2008) o las descritas por Greenes (1981):

Según Krutetskii:	Según Greenes:
• Percibir y emplear información matemática. • Captar la estructura interna de los problemas. • Pensar con claridad y economía al resolver un problema. • Emplear símbolos con facilidad y flexibilidad. • Invertir fácilmente su proceso de pensamiento matemático. • Recordar información matemática general y métodos de resolución de problemas.	• Formulación espontánea de problemas. • Flexibilidad en el uso de datos. • Habilidad para organizar datos. • Fluidez de ideas. • Originalidad de interpretación. • Habilidad para transferir ideas. • Habilidad para generalizar.

Aunque las nominaciones de maestros, compañeros y padres son importantes y constituyen la primera fase de la identificación, se debe llevar a cabo un proceso de evaluación psicopedagógica realizadas por psicólogos mediante pruebas estandarizadas y cuestionarios específicos (Arocas et al., 2002). Para información más detallada sobre el proceso de detección e identificación y las pruebas que se suelen llevar a cabo consultar Arocas et al. (2002).

Sin embargo, la mayoría de estudios realizados con estos alumnos concluyen que la observación durante la resolución de problemas constituye un mecanismo de identificación mucho más fiable y que aporta mucha más información cualitativa acerca del pensamiento matemático (Castro, 2008). A modo de ejemplo, Heinze (2005), tras realizar un estudio en el que comparaba alumnos con talento matemático y alumnos sin talento, detectó que los alumnos con talento son capaces de verbalizar el proceso seguido en la resolución de problemas mucho mejor que los alumnos sin talento, así como que los talentosos ofrecían respuesta de “mayor calidad”.

3.7.3. Intervención

Una vez identificados los alumnos con AACC o talento se debe proceder a diseñar una respuesta educativa que le permita desarrollar todo su potencial. Sin embargo, al igual que ocurre con la detección, a la hora de actuar también encontramos barreras que obstaculizan la atención a las necesidades de estos alumnos. Por ejemplo, además de la escasa formación de los maestros, una de los más frecuentes es la de considerar que este alumnado no necesita ayuda y que progresan solos (Albes et al., 2013).

Siguiendo a Jaime y Gutiérrez (2014), entre las medidas que se pueden adoptar encontramos las extraescolares y las que se ofrecen dentro del entorno escolar. Las primeras son las que ofrecen instituciones o asociaciones de padres o profesores fuera del horario escolar para que los alumnos puedan seguir desarrollando sus capacidades. Las segundas están contempladas en la legislación educativa y consisten en la aceleración a un curso superior en una o algunas asignaturas o en todas las áreas, el agrupamiento, el enriquecimiento curricular o la profundización. Para más información sobre las respuestas educativas de las que disponen o deberían disponer los alumnos con AACC o talento visitar Albes (2013).

En definitiva, es evidente que al igual que los alumnos que presentan déficits o dificultades derivadas de diversos factores necesitan ayuda para poder alcanzar los objetivos educativos mínimos y progresar en su aprendizaje, los que se encuentran a la derecha de la campana de Gauss también requieren de medidas educativas que les permitan avanzar y desarrollar todo lo posible sus capacidades.

4. Metodología

En el proceso experimental que llevamos a cabo para dar respuesta a los interrogantes que nos planteamos podríamos distinguir dos fases. La primera de ellas consiste en la realización de una prueba diagnóstica o pre-test que nos orientará durante la segunda fase, que consiste en el diseño y la puesta en práctica de una Unidad Didáctica basada en la resolución de problemas de estructura aditiva, en concreto de cambio y de combinación, a través de la modelización matemática. A continuación explicaremos con más detalle cuáles son los dos grupos de alumnos que han participado en la investigación, la prueba diagnóstica, y el diseño y puesta en práctica de la Unidad Didáctica.

4.1. Sujetos

En la presente investigación han participado dos grupos de estudiantes.

GRUPO A: integrado por 26 alumnos de 1º de Primaria de un centro escolar situado en Valencia. La mayoría presenta un rendimiento medio, bueno o muy bueno. Consideramos relevante destacar que ningún estudiante estaba identificado como alumno con altas capacidades o con talento antes de la aplicación de los instrumentos de investigación empleados. Sin embargo, también cabe remarcar la existencia de tres alumnos que presentan un bajo rendimiento escolar a causa de dificultades relacionadas con factores cognitivos o problemas derivados de la situación familiar.

GRUPO B: este grupo está formado por dos estudiantes que también cursan 1º de Primaria. Ambos han sido oficialmente identificados como alumnos con altas capacidades y asisten al programa extraescolar que ofrece la Asociación Valenciana de Ayuda al Superdotado y Talentoso (de ahora en adelante AVAST). Los problemas planteados en el grupo B se realizaron durante dos de los talleres de matemáticas que impartimos en AVAST y fueron idénticos a los propuestos en el grupo A, con el fin de realizar una comparación entre la manera de resolver los mismos problemas de los estudiantes de ambos grupos.

4.2. PRUEBA DIAGNÓSTICA

4.2.1. Objetivo

El objetivo de realizar una prueba diagnóstica previa a la Unidad Didáctica es el de poder construirnos una primera idea de cómo resuelven determinados problemas de estructura aditiva y en cuáles encuentran más dificultades. Esto nos servirá para adecuar los objetivos de la Unidad Didáctica y diseñar lo mejor posible las actividades que nos ayuden a dar respuesta a los interrogantes que nos hemos planteado. Tal y como hemos comentado en el apartado anterior, tras realizar un análisis del libro de texto y los materiales complementarios que emplean los estudiantes del Grupo A llegamos a la conclusión de que los que más se trabajan son los problemas pertenecientes a las categorías de cambio y de combinación por resultar más adecuados a la edad de los alumnos a los que van dirigidos. Sin embargo, aunque los de *Cambio* 1, *Cambio 2* y *Combinación 1* son los que predominan, decidimos introducir, además, problemas pertenecientes a algunos de los tipos restantes. Asimismo, cabe destacar que los problemas se han planteado dentro de dos contextos: el manejo o intercambio de cromos y la compra-venta, con el fin de observar el grado de comprensión de los problemas en cada uno de ellos.

La prueba en el formato original en el que fue presentada a los alumnos se puede encontrar en el Anexo 5. Esta prueba la realizaron de manera individual y sin recibir ningún tipo de ayuda por parte nuestra.

A la hora de analizar los resultados obtenidos en dicho pre-test no solo se tuvo en cuenta la resolución por escrito, sino también las entrevistas individuales que se realizaron *a posteriori* para escuchar las explicaciones de los estudiantes acerca de cómo resolvieron los problemas. Dichas entrevistas fueron registradas mediante una grabadora de voz para poder analizarlas posteriormente con mayor detenimiento, ya que resulta interesante comprobar cómo cambia la comprensión del problema tras a las ayudas que se les proporcionan en aquellos problemas donde han tenido dificultades.

4.2.2. Problemas planteados y heurísticas empleadas

Todos los problemas coinciden en la manera de ser presentados. En primer lugar aparece un enunciado verbal en el que se indican las cantidades mediante números. En 4 de los 5 problemas la pregunta se encuentra al final del enunciado y separada de la parte informativa. En el problema restante, todo el enunciado constituye la pregunta e incluye los datos que se proporcionan. También cabe destacar que parte del enunciado de los problemas es pictórico, ya que van acompañados de imágenes que pretenden ilustrar los datos o la acción expresada en cada uno de los problemas.

Problema 1:

En un álbum tengo 30 cromos de animales y en otro 10 cromos de dibujos animados. ¿Cuántos cromos tengo en total?

Este es un problema de *Combinación 1*, ya que se pregunta por el total conociendo las partes pertenecientes a cada clase, por lo que se resuelve mediante una suma.

Problema 2:

Mi amiga tiene cromos de películas y de fútbol. Tiene 17 cromos en total. Si tiene 12 cromos de películas, ¿cuántos cromos de fútbol tiene?

Este problema pertenece al tipo de *Combinación 2*, ya que, en este caso, se conoce el total y una de las partes y se pregunta por la otra parte. A diferencia del anterior, este problema presenta mayor complejidad por la estructura aditiva implícita (12 + ? = 17) que implica la realización de una resta. Por este motivo, durante las entrevistas, a aquellos alumnos que presentan dificultades para comprender el problema se les proporcionan ayudas heurísticas[3] como transformaciones sintácticas:

[3] Con ayudas heurísticas nos referimos a las orientaciones que aportamos a los alumnos para facilitar la comprensión del problema que se plantea y que se necesita para su resolución.

Tu amiga tiene 12 cromos de películas y otros tantos que no sabemos de fútbol. Pero sí que sabemos que en total, contando los cromos de películas y los de fútbol, tiene 17. Entonces, ¿cuántos tendrá de fútbol?, o representaciones gráficas como esta:

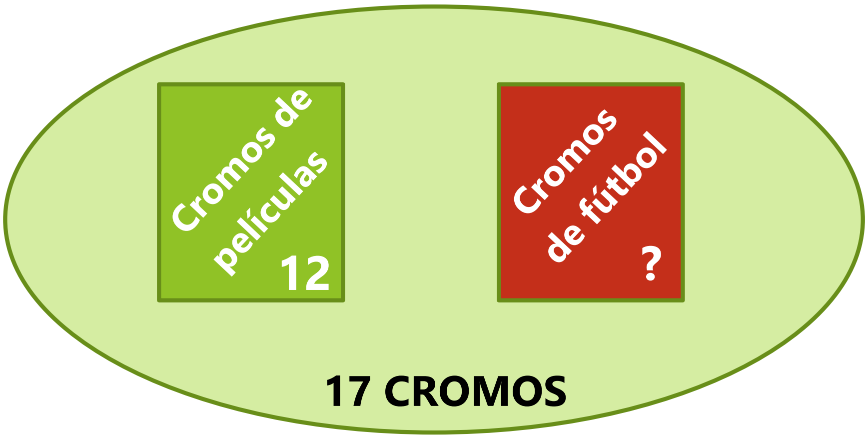


Figura 2. Representación gráfica de un problema de *Combinación 2*.

Problema 3:

¿Cuántos cromos tenía Teresa si le da 5 a Vicente y le quedan 23?

Este es un problema de *Cambio 6*, dado que se conocen la cantidad de cambio y el resultado y se pregunta por la cantidad de cromos inicial. En este caso, la estructura aditiva sería: a – 5 = 23. En este caso, también recurrimos a herramientas heurísticas con el fin de facilitar la comprensión durante las entrevistas, como transformaciones sintácticas: *Teresa tenía cromos. Le da 5 a Vicente. Después de dárselos le quedan 23. ¿Cuántos tenía antes de darle los cromos?* Y representaciones gráficas:

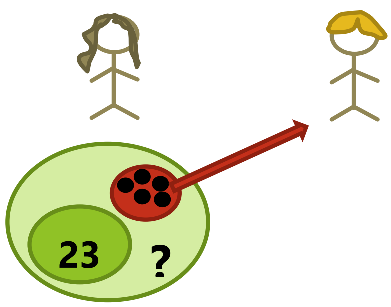


Figura 3. Representación gráfica de un problema de *Cambio 6*.

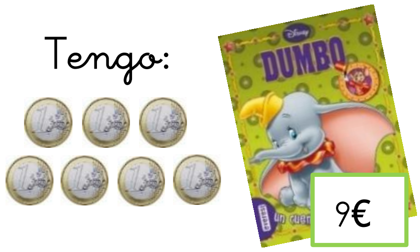
Problema 4:

Tengo 5 euros. Voy a la papelería y compro una libreta que vale 2 euros. ¿Cuántos euros me quedan?

Este problema es de *Cambio 2*, ya que se nos dice la cantidad inicial y la cantidad de cambio, preguntándonos por la cantidad final.

Problema 5:

Quiero comprar un libro que vale 9 euros pero solo tengo 7 euros. Mi abuelo me da el dinero que me falta. ¿Cuántos euros me ha dado?



En este caso, se trata de un problema de *Cambio 3* en el que conocemos la cantidad inicial y la final y se nos pregunta por la cantidad de cambio. Aquí también se han empleado herramientas heurísticas de transformación sintáctica: *Tienes 7 euros. Quieres comprar el libro que vale 9 euros. Como no tienes suficiente, tu abuelo te da lo que te falta. ¿Cuántos euros te tiene que dar tu abuelo para poder comprar el libro?*

En la Tabla 1 mostramos una comparación entre las respuestas correctas aportadas por los estudiantes antes y después de la entrevista, teniendo en cuenta que el total de respuestas en cada problema es de 26. Estos datos han sido decisivos a la hora de diseñar los problemas incluidos en la Unidad Didáctica, tal y como explicaremos a continuación.

	Antes de la entrevista	**Después de la entrevista**
Combinación 1	23 (88,5%)	23 (88,5%)
Combinación 2	2 (7,7%)	8 (30,8%)
Cambio 2	19 (73%)	24 (92,3%)
Cambio 3	16 (61,5%)	23 (88,5%)
Cambio 6	13 (50%)	20 (77%)

Tabla 1. Frecuencia (%) de respuestas correctas en el pre-test según el tipo de problema.

4.3. Unidad Didáctica

Para recoger información acerca de la resolución de problemas y el proceso de modelización dentro de cada uno de los dos grupos de alumnos que forman parte de este trabajo, se ha elaborado una Unidad Didáctica en torno a problemas de estructura aditiva diseñados en función de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica. De esta manera, evitamos introducir dentro del contexto de intercambios de cromos problemas de *Combinación 1* y de *Cambio 6* por el alto porcentaje de respuestas correctas obtenidas. Sin embargo, sí que consideramos conveniente volver a plantear un problema de *Combinación 2*, ya que se detectaron muy pocas respuestas correctas y escasa comprensión del problema.

Respecto a los problemas pertenecientes al contexto de compra-venta, también evitamos el de *Cambio 3*, por el hecho de no observar grandes dificultades en su resolución, aunque pensamos que podría resultar interesante observar qué ocurría cuando se planteaba en el otro contexto. En cuanto al problema de *Cambio 2*, aunque también se obtuvieron buenos resultados, sí que se trabajó en la Unidad Didáctica (junto con el de *Cambio 1*) pero como problema derivado de la situación que se recrea, tal y como se explicará en el apartado en el que se desarrollan con más detalle las actividades.

En resumen, en el contexto de intercambio de cromos se propusieron problemas de *Cambio 3*, *Cambio 4* y *Combinación 2*. En el contexto de compra-venta se plantearon problemas de *Cambio 1*, *Cambio 2*, *Cambio 4*, *Cambio 5* y *Cambio 6*.

Como mencionamos anteriormente, se presentaron los mismos problemas tanto al Grupo A como al Grupo B y ambos dispusieron del material manipulativo que elaboramos con el fin de facilitar los procesos de modelización y resolución de los problemas. Además, dado que esta Unidad Didáctica ha sido elaborada con el fin de extraer la información necesaria para este TFG, en el caso del Grupo A se utilizó una grabadora de voz para registrar las conversiones con el alumnado durante el proceso de resolución y las entrevistas individuales que se realizaron tras cada sesión. Las sesiones que se llevaron a cabo con el Grupo B se grabaron con una cámara de vídeo.

Cabe recalcar que con el Grupo A, dado el elevado número de alumnos, se realizaron cuatro sesiones de 60 minutos y una sesión de 90 minutos, mientras que con el Grupo B fueron suficientes dos sesiones de 90 minutos, ya que al estar formado por dos alumnos el ritmo era mucho más rápido.

4.3.1. Objetivos del currículum

En el DECRETO 108/2014, dentro del área de Matemáticas, no se explicitan objetivos, por lo que hemos decidido extraerlos de los criterios de evaluación que se especifican en cada curso y bloque de contenidos:

BLOQUE 1. PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS
- Analizar enunciados de problemas orales relacionados con objetos, hechos y situaciones del entorno inmediato utilizando estrategias como: la identificación de los datos y de la pregunta, la selección de las operaciones necesarias y el porqué. - En la resolución de problemas, utilizar diferentes estrategias, como la manipulación y la experimentación con materiales relacionados con el problema y la representación por medio de dibujos, y comunicar con claridad el proceso seguido. - Reconocer y utilizar el vocabulario del área del nivel educativo respondiendo a preguntas sobre los conocimientos adquiridos y cuando explica en voz alta lo que ha aprendido. - Esforzarse y mantener la atención mientras realiza una actividad sin abandonar cuando le cuesta realizarla. - Participar en el proceso de planificación del desarrollo de un producto o una tarea, ordenar con ayuda los pasos que hay que seguir y expresar sus opiniones sobre el proceso y el resultado.
BLOQUE 2. NÚMEROS
- Sumar y restar números naturales de dos cifras con cualquier estrategia de cálculo (monedas, dedos, objetos, etc. para investigar pequeñas situaciones numéricas), y explicar el proceso seguido con sus propias palabras, dibujos y algoritmos escritos. Identificar las operaciones en situaciones que requieren unir o añadir, quitar o separar.

4.3.2. Objetivos, contenidos y criterios de evaluación propios

OBJETIVOS	**CONTENIDOS**	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN**	**SESIÓN**
CONCEPTUALES			
- Reconocer el intercambio de cromos como un contexto real en el que interviene la resta.	- Intercambio de cromos como un contexto real en el que interviene la resta.	- Reconoce el intercambio de cromos como un contexto real en el que interviene la resta.	1 y 2
- Reconocer la compra-venta como un contexto real en el que interviene la suma y la resta.	- La compra-venta como un contexto real en el que interviene la suma y la resta.	- Reconoce la compra-venta como un contexto real en el que interviene la suma y la resta.	3, 4 y 5
- Comprender el concepto de resta en la resolución de problemas en el contexto de intercambio de cromos.	- Concepto de resta en el contexto de intercambio de cromos.	- Comprende el concepto de resta en la resolución de problemas en el contexto de intercambio de cromos.	1 y 2
- Comprender el concepto de suma y de resta en la resolución de problemas en el contexto de compra-venta.	- Concepto de suma y de resta en el contexto de compra-venta.	- Comprende el concepto de suma y de resta en la resolución de problemas en el contexto de compra-venta.	3, 4 y 5
- Comprender la estructura matemática que se modeliza y que permite dar respuesta a la situación problemática expresada por el problema.	- Estructura matemática que permite dar respuesta a la situación problemática expresada por el problema.	- Comprende la estructura matemática que permite dar respuesta a la situación problemática expresada por el problema.	Todas
PROCEDIMENTALES			
- Utilizar estrategias propias para llegar a una solución.	- Uso de estrategias propias para llegar a una solución.	- Utiliza estrategias propias para llegar a una solución.	Todas
- Explicar oralmente y por escrito el proceso seguido en la resolución de los problemas.	- Explicación oral y escrita del proceso seguido en la resolución de los problemas.	- Explica oralmente y por escrito el proceso seguido para resolver los problemas.	Todas
ACTITUDINALES			
- Presentar de manera clara y ordenada las conclusiones y los resultados.	- Presentación clara y ordenada de las conclusiones y los resultados.	- Presenta de manera clara y ordenada las conclusiones y los resultados.	Todas
- Participar en la dinámica del aula con interés, respeto y cooperación con los compañeros.	- Participación en la dinámica del aula con interés, respeto y cooperación con los compañeros.	- Participa en la dinámica del aula con interés, respeto y cooperación con los compañeros.	Todas

4.3.3. Relación con las competencias básicas

A continuación se especifica de qué manera esta Unidad Didáctica contribuye al desarrollo de las siguientes competencias básicas. Cada una de las habilidades o destrezas en las que hemos determinado que se concreta cada competencia son de redacción propia:

COMPETENCIA MATEMÁTICA	- Resolución de problemas. - Comprensión de dos de las operaciones aritméticas básicas (suma y resta). - Modelización de la estructura matemática que expresan los problemas pertenecientes a una situación del mundo real.
COMPETENCIA EN COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA	- Comprensión del enunciado verbal (escrito y oral) de los problemas. - Expresión oral del proceso y el razonamiento seguido en la resolución de los problemas. - Uso del vocabulario propio de las matemáticas adaptado a la edad del alumno.
COMPETENCIA APRENDER A APRENDER	- Comprensión de las situaciones problemáticas y autonomía en la toma de decisiones a la hora de resolverlas. - Construcción de un modelo propio para aportar una solución a las situaciones problemáticas que se presentan. - Perseverancia y esfuerzo en la resolución de los problemas. - Habilidad para comunicar los resultados del trabajo realizado. - Transferencia de los aprendizajes a situaciones y contextos diferentes. - Valorar críticamente los resultados obtenidos. - Autoconfianza en la resolución de problemas relacionados con el mundo real.
SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR	- Resolución autónoma de problemas y construcción de modelos. - Uso de estrategias propias. - Inquietud e interés por participar en la resolución de problemas.
COMPETENCIA SOCIAL Y CÍVICA	- Trabajo en grupo y colaboración con los compañeros. - Respeto ante los puntos de vista diferentes al propio.

4.3.4. Metodología de enseñanza

4.3.4.1. Modelo de enseñanza-aprendizaje

Los principios metodológicos que sustentan esta Unidad Didáctica se basan en la construcción constructivista del aprendizaje. Así, en todas las actividades que se proponen, el alumnado participará activamente y se convertirá en el protagonista de su propio proceso de aprendizaje, mientras que el maestro asumirá el papel de guía y orientador de dicho proceso, diseñando actividades que permitan a los alumnos construir esquemas conceptuales cada vez más complejos. Por este motivo, es conveniente plantear actividades que supongan un reto, y para ello es imprescindible conocer los conocimientos previos del alumnado, tanto a nivel individual como grupal, en relación con los conceptos que se trabajarán. Asimismo, además de los contenidos conceptuales, los procedimientos y las actitudes adquieren una gran importancia.

Concretando aún más, en la Unidad Didáctica empleada para esta investigación se pretende posibilitar el aprendizaje significativo de los conceptos de suma y de resta a través de la modelización matemática en la resolución de problemas contextualizados como estrategia metodológica con la que se busca que el alumnado sienta la necesidad de utilizar estas dos operaciones en contextos próximos a la vida real. Por este motivo, a la hora de diseñar los problemas, se ha partido del conocimiento matemático al que se pretende que lleguen los alumnos y se han buscado aquellos problemas que pensamos que lo posibilitarán, teniendo en cuenta que sean interesantes y motivadores.

4.3.4.2. Materiales y recursos didácticos

Para facilitar a los estudiantes la resolución de problemas se les proporciona material estructurado de elaboración propia (Anexo 6). Durante las sesiones en las que se trabaja a partir del intercambio de cromos se le entregará una cantidad diferente de cromos a cada alumno. Para los problemas en los que interviene la compra-venta se les ha facilitado monedas de euro, de dos euros, billetes de cinco euros y tarjetas con los productos para vender y comprar.

4.3.4.3. Indicaciones generales a las actividades

A lo largo de las diferentes sesiones se van trabajando dos contextos diferentes con el fin de que los alumnos puedan dotar de significado los conceptos de suma y de resta, así como para que sean capaces de comprender de qué manera las matemáticas se encuentran presentes en la vida real y son útiles y necesarias a la hora de resolver problemas con los que se pueden encontrar día a día.

Asimismo, en todo momento los alumnos se situarán junto con compañeros para poder recrear las situaciones que se plantean en cada sesión. Las agrupaciones conviene que las realice el maestro para poder emparejar a aquellos alumnos que muestran dificultades con aquellos que trabajan a un ritmo más rápido y muestran una buena comprensión, de manera que estos últimos puedan ayudar a los otros en caso de bloqueo.

El orden con el que se presentan los problemas no es aleatorio, sino que están organizadas en función de varios factores: el contexto que se trabaja y la complejidad de los problemas que se proponen. En lo que se refiere al contexto, primero se trabajará el intercambio de cromos y, posteriormente, la compra-venta. En relación con el segundo factor, se presentarán problemas en orden creciente de complejidad, dentro de cada contexto, de acuerdo con lo establecido en la tabla incluida en el Anexo 2. En concreto, el orden que se seguirá será el siguiente:

- ✓ *Sesión 1*: cambio 3 y cambio 4 (cromos)
- ✓ *Sesión 2*: combinación 2 (cromos)
- ✓ *Sesiones 3 y 4*: cambio 5 y cambio 6 (compra-venta)
- ✓ *Sesión 5*: el problema de esta sesión no responde a dicho orden, ya que está pensado para trabajar problemas de Cambio 4 también en este contexto (ya se trabajaron en la primera sesión pero con el intercambio de cromos) y, además, el planteamiento del problema implica la realización de problemas de Cambio 1 y 2.

La manera de proceder en cada sesión es similar. A continuación enunciamos los pasos seguidos en cada una de ellas, teniendo en cuenta que dada la edad del alumnado sería conveniente dar instrucciones cortas, sencillas y poco a poco:

1. Se explica *grosso modo* lo que se trabajará en la sesión.
2. Se reparten la ficha y el material.
3. Se van explicando oralmente los pasos a seguir uno a uno y se deja un tiempo prudencial entre cada paso para que los alumnos realicen la acción necesaria (en unos casos será intercambio de cromos y en otros compra-venta).
4. Se plantea la pregunta a resolver, asegurándonos de que lo han comprendido.
5. Se deja un tiempo para que anoten los datos necesarios y encuentren relaciones entre estos y la operación matemática que resuelve el problema.
6. Mientras los alumnos están trabajando, el maestro visita a cada alumno para observar la manera en la que va resolviendo la actividad y realizarle las preguntas que considere oportunas acerca del proceso de resolución.
7. Una vez resuelto el primer problema y después de hacerles reflexionar para ver en qué grado han modelizado la suma o la resta (según corresponda), se les planteará otro problema con cantidades mayores, de manera que no podrán utilizar el material para resolverlo, sino que deberán aplicar el modelo construido.

De acuerdo con nuestros principios metodológicos, es muy importante que cuando haya equivocaciones y se cometan errores, el maestro no los corrija directamente, sino que permita que cada uno se dé cuenta por sí mismo y sea capaz de tomar decisiones al respecto, ya que el error constituye una fuente de aprendizaje a partir del cual el alumno puede ir progresando y construyendo su propio aprendizaje.

En el caso de que haya alumnos que terminen con rapidez, el maestro les plantearán problemas complementarios que aumenten la dificultad o la complejidad del problema inicial para que puedan seguir avanzando en el proceso de modelización al mismo tiempo que el maestro observa cómo razonan. En el apartado siguiente se especifican los problemas complementarios planteados en cada momento.

4.3.5. Propuesta de actividades

A continuación presentamos los problemas que forman parte de la Unidad Didáctica junto con la metodología específica para cada uno. Las fichas, tal y como fueron presentadas a los alumnos, se pueden encontrar en los anexos correspondientes.

Los problemas complementarios que incluimos han sido escritos a mano a los que muestran predisposición y acaban rápidamente. Asimismo, como el enunciado se expone oralmente, en las fichas solo aparece la pregunta de cada problema.

Cabe destacar que los problemas que surgen de las situaciones que se recrean en el aula no son cerrados, ya que cada alumno trabaja con cantidades diferentes y adopta un rol determinado en función de cómo se van desarrollando dichas situaciones.

PROBLEMA 1. ¿ME HAN DADO O ME HAN QUITADO CROMOS? ¿CUÁNTOS? (ANEXO 7)

Si tenía … cromos y ahora tengo …, ¿me han dado o me han quitado cromos? ¿Cuántos?

- ✓ *Tipo de problemas que se trabajan:* Cambio 3 y Cambio 4
- ✓ *Estructura aditiva:* a + ? = c / a – ? = c
- ✓ *Contexto:* Intercambio de cromos
- ✓ *Duración:* una sesión de 90 min.

Los problemas implicados son aquellos en los que conocemos la cantidad inicial y la final y se nos pregunta por la cantidad de cambio. Los alumnos se encontraran con la necesidad de restar para averiguar los cromos que han recibido o que les han quitado. Para ello, se forman parejas y se le pide a cada alumno que cuente los cromos que se les ha entregado (no superan los 10). Una vez hecho esto, se les pide que acudan a intercambiar los cromos entre los miembros de otra pareja (será indicado por el maestro). Después, vuelven a su sitio y calculan cuántos cromos les han dado o les han quitado. Dado que unos alumnos realizarán problemas de Cambio 3 (aquellos que han recibido cromos) y otros de Cambio 4 (aquellos a los que les han quitado cromos), la actividad tendrá una segunda parte en la que se procederá de la misma manera, pero en esta ocasión los cromos se intercambiarán a favor de aquellos a los que antes les han quitado. Así, obtendremos información de todos los alumnos en la resolución de ambos tipos de problemas.

Problema complementario:
Si tenía 43 cromos y ahora tengo 68 cromos, ¿me han dado o me han quitado cromos? ¿Cuántos?

La estructura del enunciado es la misma que en el problema principal. La diferencia recae en la magnitud de las cantidades, ya que lo que se pretende es observar si son capaces de resolver el problema sin la ayuda de material alguno y si llegan a identificar que se trata del mismo problema pero con cantidades mayores.

PROBLEMA 2. ¿CUÁNTOS CROMOS TIENES DE…? (ANEXO 8)

a	*Si mi compañero tiene … cromos en total y … cromos de animales, ¿cuántos cromos de deportes tiene?*
b	*Si mi compañero tiene … cromos en total y … cromos de deportes, ¿cuántos cromos de animales tiene?*

- ✓ *Tipo de problemas que se trabajan:* Combinación 2
- ✓ *Estructura aditiva:* a + ? = c
- ✓ *Contexto:* Intercambio de cromos
- ✓ *Duración:* una sesión de 60 min.

En este caso se formarán parejas y a cada alumno se le repartirá una cantidad diferente de cromos (incluyendo cromos de animales y de deportes). El objetivo es que al final uno de los miembros de cada pareja tenga solo cromos de animales y el otro solo de deportes. Para conseguirlo, sabiendo el total y una de las partes, cada alumno deberá averiguar la otra parte, dándose cuenta de que si al total le restamos la parte conocida, averiguaremos la cantidad que buscamos.

Problema complementario:
En total tengo 29 cromos. Si tengo 15 cromos de deportes, ¿cuántos cromos de animales tengo?

Al igual que antes, este problema también se ha planteado con cantidades mayores pero sin alterar la estructura matemática implícita, por lo pretendemos que los alumnos apliquen su modelo para resolverlo sin necesidad de hacer uso de material concreto.

PROBLEMA 3. ¿CUÁNTO DINERO TENÍA? (ANEXO 9)

a	Si me dan … euros y ahora tengo … euros, ¿cuántos euros tenía antes de vender?
b	Si me gasto … euros y ahora tengo … euros, ¿cuántos euros tenía antes de comprar?

- ✓ *Tipo de problemas que se trabajan:* Cambio 5 y Cambio 6
- ✓ *Estructura aditiva:* ? + b = c / ? – b = c
- ✓ *Contexto:* Compra-venta
- ✓ *Duración:* dos sesiones de 60 min. cada una

En estas dos sesiones se trabajarán los problemas en los que la incógnita es la cantidad inicial de euros que se tenía antes de realizar una compra. Debemos remarcar que, aunque "me dan" en algunos casos indica "sumar" y "me gasto" puede indicar "restar", en este caso sucede lo contrario. Al igual que en los problemas anteriores, se formarán parejas (uno hará de vendedor y otro de comprador). Acto seguido, repartiremos a cada alumno dinero en un paquete cerrado que no podrán contar y tarjetas con productos para poner a la venta (cada vendedor indicará el precio de cada uno, recalcando que deberán ser precios razonables y poniendo un tope en función del dinero repartido). De esta manera, cada alumno trabajará con cantidades diferentes y variadas (no superiores a 20). Después de realizar la compra-venta, deberán calcular cuánto dinero tenían antes de comprar o de vender. Para que todos asuman tanto el rol de comprador como de vendedor y trabajen con problemas de cambio 5 y de cambio 6, en la segunda de las sesiones se intercambiarán los papeles.

Problemas complementarios:
Si pago 43 euros y me quedan 32 euros, ¿cuántos euros tenía al principio?
Si gano 43 euros y ahora tengo 68 euros, ¿cuántos euros tenía al principio?
Gano 135 euros. Ahora tengo 168 euros. ¿Cuántos euros tenía al principio?

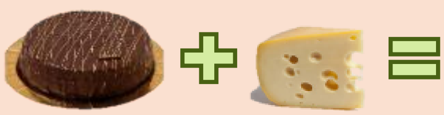
El primer problema pertenece al tipo de Cambio 6 mientras que los otros dos son de Cambio 5. En todos se han aumentado las cantidades, pero en el tercero se han incluido números mayores que 100 para observar si esto supone una dificultad añadida.

PROBLEMA 4. ¿CUÁNTO TE HABRÁS GASTADO? (ANEXO 10)

a	Si has dado … euros y te ha devuelto … euros, ¿cuántos euros se ha gastado?
b	Si te ha dado … euros y te has gastado … euros, ¿cuántos euros te quedan?
c	Si tenías … euros y te han dado … euros, ¿cuántos euros tienes ahora?

- ✓ *Tipo de problemas que se trabajan:* Cambio 4, Cambio 2 y Cambio 1
- ✓ *Estructura aditiva:* a – ? = c / a – b = ? / a + b = ?
- ✓ *Contexto:* Compra-venta
- ✓ *Duración:* una sesión de 60 min.

En la última sesión se formarán grupos de tres alumnos. Uno de ellos adoptará el rol de padre/madre, el otro de hijo/a y el último de vendedor/a. El maestro decidirá qué rol adopta cada alumno, y repartirá un sobre con dinero a los que hagan de padres y a los que hagan de vendedores (cada uno contará el dinero inicial). Después, explicará detenidamente la función de cada uno mostrándolo con un ejemplo. Los alumnos que hacen de vendedores deberán decidir el precio de sus productos. El alumno que haga de padre/madre, deberá darle todo el dinero al que hace de hijo/a y éste comprará un producto. Acto seguido le devolverá el dinero que le ha quedado al que hace de padre pero no le dirá lo que le ha costado el producto. Así, éste deberá calcular cuánto dinero se ha gastado el hijo en función del dinero que tenía al principio y el que le queda. El que hace de hijo deberá calcular (sin contarlo directamente) el dinero que le queda después de realizar la compra sabiendo el dinero que tenía al principio y lo que ha pagado. Por su parte, el vendedor, también sin contarlo directamente, deberá calcular el dinero que tiene después de la venta a partir del dinero que tenía y el precio del producto vendido.

Problemas complementarios:
Tienes 94 euros. Te devuelven 32 euros. ¿Cuántos euros se ha gastado el hijo?
Tienes 369 euros. Te devuelven 243 euros. ¿Cuántos euros se ha gastado el hijo?
Tu hijo compra una tarta de chocolate y un trozo de queso. Tú le das … euros y te devuelve … euros. ¿Cuánto ha pagado? ¿Cuánto le ha costado cada cosa?  …

Las cantidades que se incluyen en el primer problema se alejan bastante de las cantidades con las que los alumnos están acostumbrados a trabajar (no superan el 99), ya que en este caso también queremos ver si son capaces de darse cuenta de que es el mismo problema pero con otras cantidades y de aplicar un modelo para resolverlo. En cuanto al segundo, la diferencia recae en la segunda pregunta, ya se pide que indiquen el valor de los dos sumandos desconocidos sabiendo solo el resultado. Así, veremos si son capaces de darse cuenta de que hay más de una solución posible y si pueden encontrar varias.

5. Resultados

Tras revisar y analizar los datos recopilados a lo largo de la aplicación de la Unidad Didáctica en el grupo A y en el grupo B, podemos extraer resultados en cuanto a los perfiles que se han detectado en lo que se refiere al proceso de modelización y a las diferencias observadas entre los alumnos con AACC y el resto de estudiantes.

Antes de nada, queremos puntualizar que tras la puesta en práctica de la Unidad Didáctica en el grupo A hemos detectado a un alumno que, después de realizar las pruebas psicopedagógicas correspondientes, ha sido identificado como alumno con AACC, por lo que a partir de ahora también nos referiremos a él cuando hagamos referencia a estos alumnos en cuanto a características y comportamiento.

5.1. Perfiles detectados en la resolución de problemas

Después de las observaciones realizadas y las respuestas aportadas por los estudiantes, podemos identificar y describir cinco perfiles relacionados con el proceso de modelización de las operaciones de suma y de resta en la resolución de PAEV aditivos de cambio y de combinación.

PERFIL 1

Los alumnos que se ubican en este perfil no demuestran una evolución favorable en el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos trabajados. Se trata de estudiantes que no han llegado a construir un modelo matemático que les permita resolver los problemas planteados y que muestran una escasa comprensión del enunciado y del concepto matemático implicado en cada problema. Estos alumnos no son capaces de dar una solución válida que resuelva el problema, sus respuestas son aleatorias e incoherentes, llegando incluso a ser contradictorias.

Por ejemplo, un alumno dejó la hoja en blanco porque decía que no sabía hacerlo y otro hizo la primera operación que le vino a la mente sin comprender el concepto matemático implicado.

PERFIL 2

Bajo este perfil encontramos a aquellos alumnos que han mostrado dificultades para comprender la estructura matemática que se modeliza y que permite dar respuesta a la situación problemática que expresa el problema pero que poco a poco van demostrando cierta comprensión, aunque todavía bastante limitada. Por lo tanto, se trata de estudiantes que se encuentran en los primeros niveles de modelización y que encuentran dificultades en la construcción de un modelo matemático. Así, aunque a veces aportan una solución a los problemas, esta no siempre refleja comprensión de los conceptos matemáticos implicados, por lo que solo a veces utilizan estrategias efectivas y casi nunca son capaces de expresar verbalmente el proceso seguido en la resolución.

Por ejemplo, un alumno dice que no lo ha entendido y se muestra bloqueado. Después de volver a recrear la situación paso a paso lo entiende enseguida, aunque esto no ocurre con todos los problemas.

PERFIL 3

En este perfil se incluyen los alumnos que muestran una buena comprensión de la estructura matemática que expresa cada problema y de los conceptos matemáticos que se trabajan. Han sido capaces de construir un modelo matemático que les permite resolver el problema. Estos estudiantes utilizan estrategias que resultan efectivas a la hora de resolver los problemas de manera coherente. Asimismo, son capaces de expresar verbalmente el proceso que han seguido.

Por ejemplo, encontramos al alumno que a la primera da una solución y cuando expresa verbalmente aquello que ha hecho, relaciona la operación que ha realizado con la situación, la acción de comprar y el hecho de gastar dinero, demostrando así que ha construido un modelo para la resta.

PERFIL 4

En este perfil podemos ubicar a aquellos alumnos que van más allá que los alumnos del perfil anterior, ya que se trata de estudiantes que han dado saltos en el modelo y se encuentran en un nivel en la modelización superior al de sus compañeros. A la hora de resolver el problema, no solo utilizan estrategias efectivas, sino también eficaces e, incluso, originales. Además, saben explicar bastante detalladamente el razonamiento que llevan a cabo al resolver los problemas. Bajo este perfil podríamos situar a los alumnos con AACC.

Por ejemplo, bajo este perfil encontramos al alumno que no solo entiende la estructura muy rápidamente (nada más plantear la pregunta sabe perfectamente qué tiene que hacer y porqué), sino que pide, voluntariamente e insistentemente, nuevas tareas más complejas. Este alumno, al presentarle el mismo problema pero con cantidades mayores verbaliza que "es el mismo problema pero con números más grandes" y, por lo tanto, lo resuelve sin ninguna dificultad porque ha modelizado la resta o la suma (según corresponda).

Estos perfiles los podemos relacionar con cada una de las fases de modelización de Biembengut (2007) que describimos en las páginas 8 y 9 de este trabajo. En primer lugar, podríamos decir que los alumnos del primer perfil todavía se encuentran en la primera fase, la de percepción, ya que no han llegado a entender la situación que se recrea en el aula. En segundo lugar, los estudiantes que se agrupan en el perfil 2 se encontrarían en la segunda fase de modelización, la de comprensión y explicitación, puesto sí que entienden la situación pero todavía muestran dificultades a la hora de trabajar en torno a ella mediante el lenguaje matemático. En tercer lugar, en el perfil 3 se ubican a los alumnos sí que han progresado hasta la última fase, la de significación y modelización, y han llegado a construir un modelo matemático. Por último, los alumnos que se agrupan bajo el cuarto perfil, aunque también se encontrarían en la tercera fase, son capaces de ir más allá que los estudiantes del tercer perfil y muestran una progresión mucho más rápida.

5.2. Análisis comparativo con alumnos con AACC

A continuación expondremos las diferencias encontradas entre los alumnos con AACC que han participado en este estudio y el resto de alumnos[4]. Para comenzar, realizaremos una primera diferenciación en relación con los datos obtenidos según el tipo de problema resuelto. Acto seguido, enunciaremos una serie de características que se han observado de modo general a lo largo del desarrollo de la Unidad Didáctica.

5.2.1. Diferencias según el tipo de problema

5.2.1.1. Problemas de Cambio 3 y Cambio 4

A la hora de resolver el problema de Cambio 3, algunos estudiantes lo hacían a través del material manipulativo proporcionado, ya que reunían los cromos que tenían al principio y contaban el resto de cromos para averiguar los que les habían dado. Asimismo, otros alumnos lo calculaban contando a partir del número de cromos que tenían hasta llegar al número de cromos que tenían al final. De esta manera, vemos como algunos alumnos emplean estrategias derivadas de la definición de la resta aportada por Peano mientras que otros lo hacen según la definición conjuntista.

En el caso del problema de Cambio 4, los alumnos que lo resolvieron correctamente lo hicieron contando hacia atrás empezando por el número que indica la cantidad de cromos que tenían al final hasta llegar al número de cromos que tenían al principio.

En cuanto al problema de Cambio 4 planteado en el contexto de compra-venta, se ha observado esta misma estrategia, es decir, contando hacia atrás desde el número mayor al número menor. Destaca el hecho de que, al plantear el mismo problema pero con números mayores (hasta 100) a aquellos alumnos que habían resuelto con éxito el problema inicial, algunos realizaban totalmente lo contrario, demostrando así que esto aumenta la dificultad y que no eran capaces de percibir que se trata de la misma estructura matemática independientemente de las cantidades.

En el caso de los alumnos con AACC y uno de los alumnos del Grupo A, no encontraron ninguna dificultad a la hora de resolver los problemas con cantidades hasta

[4] Cuando nos referimos a la manera de proceder de los alumnos con AACC también mencionaremos a un alumno del Grupo A que destaca notablemente con respecto a sus compañeros.

el 100 e incluso con números de tres cifras. Además, llama la atención que, aunque todos ellos han resuelto el problema rápida y mentalmente con números pequeños, al plantear el problema con cantidades mayores, cada uno de los tres ha empleado estrategias diferentes (independientemente del tipo de problema). Concretamente esto se observó con el problema siguiente:

> *Si tenía 43 cromos y ahora tengo 68 cromos, ¿me han dado o me han quitado cromos? ¿Cuántos?*

- <u>Alumno 1 (Grupo A):</u> aunque implícitamente ha realizado una resta, lo que ha plasmado en el papel ha sido: 43 + 25 = 68. En primer lugar escribió el 43, luego el signo de suma, después dejó un espacio y continuó con el signo de igual y el 68. Para resolverlo, buscó el número que, sumado a 43, da como resultado 68 (empezando por la cifra de las unidades y continuando por las decenas).

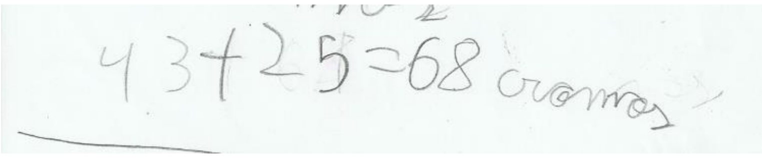


Ilustración 2. Resolución del Alumno 1 (Grupo A) en un problema de Cambio 3.

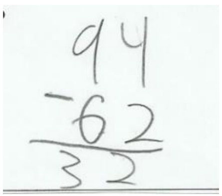


Ilustración 3. Resolución del Alumno 1 (Grupo A) en el problema: *Tienes 94 euros. Te devuelven 32 euros. ¿Cuántos euros se ha gastado el hijo?*

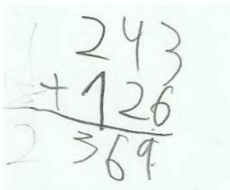


Ilustración 4. Resolución del Alumno 1 (Grupo A) en el problema: Tienes 369 euros. Te devuelven 243 euros. ¿Cuántos euros se ha gastado el hijo?

- <u>Alumno 2 (Grupo B):</u> aun con cantidades mayores, ha resuelto el problema empleando la estrategia de contar empezando por el 43 hasta llegar al 68. Para ello, fue escribiendo números (empezando por el 1) cada vez que contaba el número siguiente. Al llegar al 68 se detuvo y dio como solución el último número escrito (24). Al pedirle que intentara escribir lo que había hecho mediante una operación matemática, también escribió 43 + 25 = 68, dado que, al igual que en el caso del Alumno 1, comprende que como le han dado cromos, a la cantidad inicial (43) se le ha sumado otra cantidad (desconocida) que él debe averiguar (43 + ? = 68). En este caso, al escribir el algoritmo, se dio cuenta de que 24 no era la solución correcta y rectificó para dar como respuesta 25.

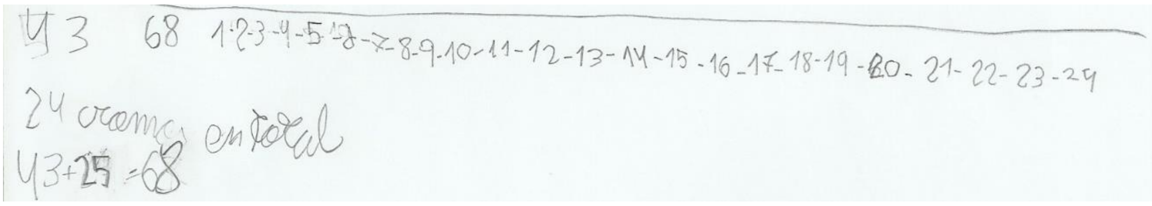
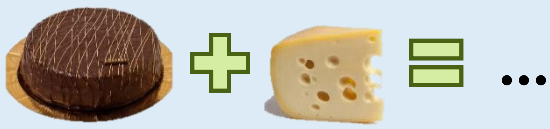


Ilustración 5. Resolución escrita de un problema de Cambio 3 por el Alumno 2 (Grupo B).

- Alumno 3 (Grupo B): a diferencia de los alumnos anteriores, este alumno ha restado, directamente, 68 – 43, por lo que la estructura matemática que ha resuelto ha sido: a – b = ?, donde "a" es la cantidad final, "b" es la cantidad inicial y el resultado es la cantidad de diferencia.

Asimismo, debemos destacar los resultados obtenidos de la resolución de uno de los problemas complementarios de Cambio 4 en relación con la parte de los sumandos desconocidos:

Tu hijo compra una tarta de chocolate y un trozo de queso. Tú le das … euros y te devuelve … euros. ¿Cuánto ha pagado? ¿Cuánto le ha costado cada cosa?



Lo que se quería comprobar era si los alumnos eran capaces de darse cuenta de que hay varias soluciones posibles para este problema sin que les diéramos ninguna ayuda al respecto. De esta manera, procedimos así:

Investigadora: *La tarta de chocolate y el trozo de queso cuestan x euros (dependiendo del resultado del problema). ¿Cuánto cuesta cada cosa?*

Alumno: *(Algunos dicen que no lo saben, otros asignan el precio total al precio de cada uno de los productos y otros dan una respuesta correcta).*

Investigadora: *¿Puedes escribirlo en el papel? (a los que dan alguna respuesta)*

Alumno: *(el alumno lo escribe)*

Investigadora: *¿Ya está? ¿Ya has acabado?*

Como podemos ver, en ningún momento se les pregunta si puede haber otra solución posible, por lo que los que aportaron una respuesta correcta solo encontraron una solución, a excepción de los alumnos con AACC y el alumno del Grupo A, quienes supieron encontrar por sí solos todas las soluciones posibles. En concreto, consideramos interesante destacar el proceso de resolución del Alumno 1 (Grupo A), ya que lo hizo de manera organizada, empezando por el 1, luego el 2, después el 3 y así sucesivamente para asegurarse de que encontraba todas las posibilidades. Además, al preguntarle sobre lo que había hecho, verbalizó que podía asignar los valores al revés, es decir, que puede escribir 1 + 10 o 10 + 1, demostrando así que percibe la propiedad conmutativa de la suma.

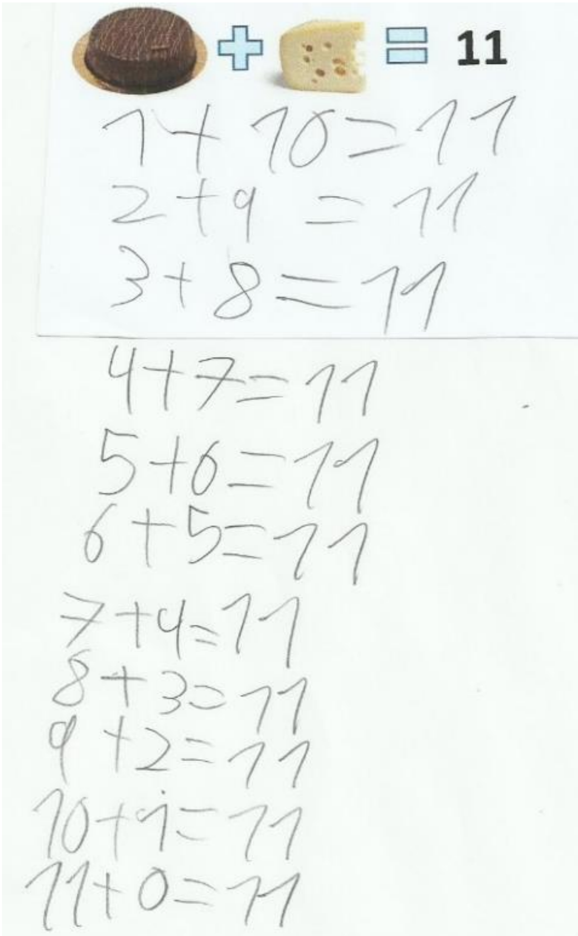


Ilustración 6. Resolución del problema de sumandos desconocidos por el Alumno 1 (Grupo A).

5.2.1.2. Problemas de Combinación 2

En este problema se han observado bastantes dificultades para resolverlo, ya que muchos no entendían el problema que se planteaba. Sin embargo, ante dichas dificultades se les propuso que intentaran resolverlo mediante un dibujo, de manera que dibujaron el total de cromos, marcaron la cantidad de cromos de una de las categorías (animales/deportes) y contaron el resto para averiguar la cantidad de cromos de la otra categoría (deportes/animales). Aun así, muchos estudiantes continuaron mostrando dificultades en la comprensión del problema y no fueron capaces de resolverlo.

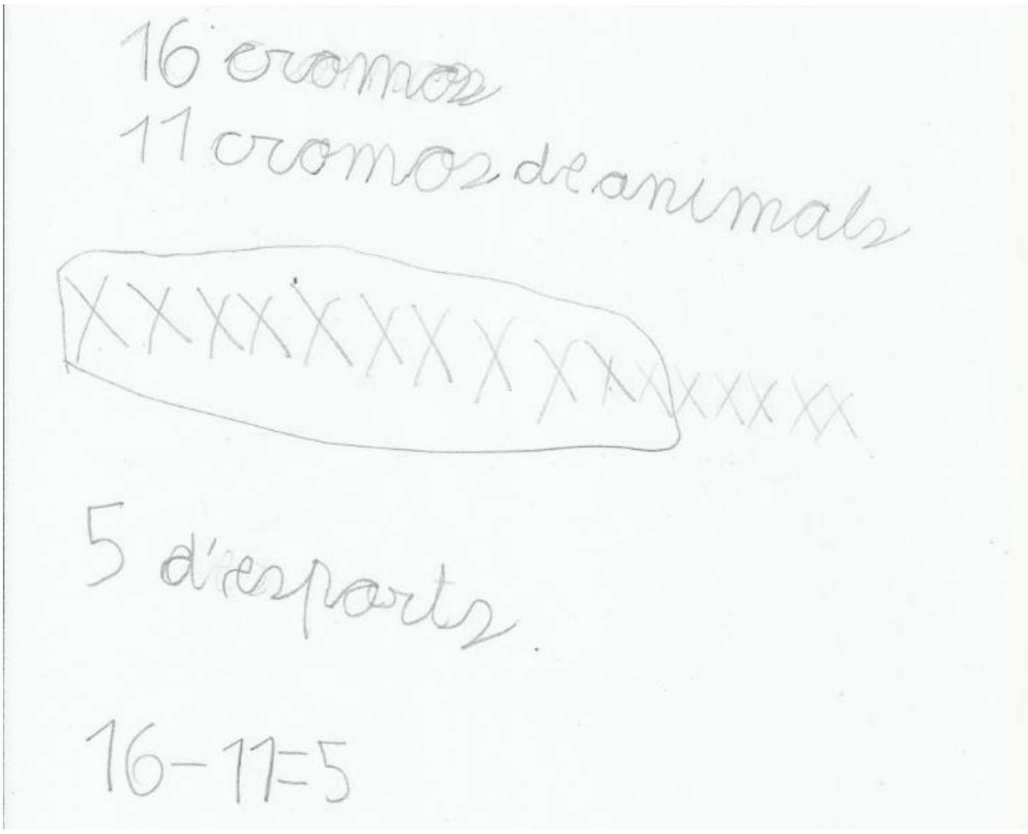


Ilustración 7. Ejemplo de resolución gráfica del problema de Combinación 2.

Respecto a los alumnos con AACC y el alumno del Grupo A, todos resolvieron el problema enseguida y sin dudar lo más mínimo. Los tres lo resolvieron mentalmente inmediatamente y supieron expresar el razonamiento seguido y el porqué de la operación realizada, demostrando una muy buena comprensión de la estructura matemática que se modeliza. Además, viendo la facilidad con la que resolvieron el problema con cantidades menores que 20, se decidió plantearles el mismo problema con cantidades mayores y observamos que esto no les supuso ninguna dificultad, es más, el alumno del Grupo A verbalizó que “es el mismo problema que antes pero con números más grandes”.

5.2.1.3. Problemas de Cambio 5 y Cambio 6

De un total de 28 alumnos, 19 (en Cambio 5) y 21 (en Cambio 6) aportaron una respuesta correcta con números menores que 20 y demostraron que comprendían la estructura matemática que permite resolver el problema en cuestión. Sin embargo, cuando se aumentan las cantidades, muchos de los que anteriormente habían resuelto con éxito el problema no llegan a darse cuenta de que se trata de la misma estructura y se muestran incapaces para resolverlo.

En cuanto a los alumnos con AACC y al alumno del Grupo A, todos coinciden en la manera de resolver el problema de Cambio 5 empleando el material proporcionado. Para averiguar el dinero que tenían al principio, sabiendo la cantidad de cambio y la cantidad final, separan la cantidad de cambio y cuentan el dinero que queda. Por ejemplo, cuentan que tienen 16 euros después de ganar 9 euros. Para saber los euros que tenían antes, separan los 9 que han ganado y cuentan el resto, que son 7 euros. Además, verbalizan que para resolver el problema realizan una resta porque si quitan los euros que les han dado, obtienen la cantidad de euros que tenían antes. Asimismo, estos alumnos no muestran ninguna dificultad a la hora de resolver el mismo problema pero con cantidades hasta el 100. Concretamente, destacamos que el Alumno 1 (Grupo A), en el problema de Cambio 5, lo resuelve de la misma manera que los problemas de Cambio 3 y Cambio 4 que comentamos anteriormente.

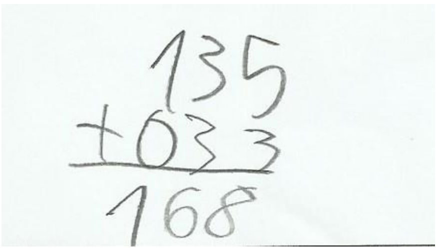


Ilustración 8. Resolución del Alumno 1 (Grupo A) en el problema: *Gano 135 euros. Ahora tengo 168 euros. ¿Cuántos euros tenía al principio?*

5.2.2. *Características generales de los alumnos con AACC*

A continuación enunciamos una serie de características generales observadas en los alumnos con AACC (y el alumno que destaca en el Grupo A) durante la resolución de los problemas planteados que no hemos detectado en los alumnos no identificados como tal:

- Muy buena comprensión de la estructura matemática que se modeliza y que permite dar respuesta a la situación problemática expresada por el problema.
- Excelente comprensión de los conceptos matemáticos implicados en los diferentes problemas.
- Rapidez en la resolución. Necesitan poco tiempo para dar una respuesta que, además, es correcta.
- Primero suelen resolver los problemas mentalmente y después plasmarlo por escrito. Rapidez en el cálculo mental cuando las cantidades no superan el 100.
- Uso de estrategias inusuales entre compañeros de la misma edad.
- Facilidad para resolver los problemas independientemente de la magnitud de las cantidades implicadas.
- Transferencia de las estrategias de resolución entre problemas similares pero con cantidades de creciente magnitud.
- Rápido procesamiento de la información.
- Gran capacidad para expresar verbalmente el razonamiento seguido en la resolución de los problemas. Fluidez y explicaciones ricas y detalladas.
- Seguridad y confianza durante la resolución y la explicación del proceso seguido.
- Pensamiento deductivo.
- Gran implicación, esfuerzo y perseverancia.
- Gran interés e impaciencia en resolver problemas cada vez más difíciles. Búsqueda de problemas que le supongan nuevos retos.
- Capacidad de darse cuenta por si mismos de que hay problemas que tienen más de una solución posible y de encontrar varias.

Por lo tanto, si comparamos las características observadas con las características generales descritas en Jaime y Gutiérrez (2014, p. 154) que surgen de las investigaciones de otros autores, podemos comprobar que algunas de las características que anteriormente hemos enumerado coinciden con las citadas por estos autores, como por ejemplo:

- Producción de ideas originales, valiosas y extensas.
- Localización de la clave de los problemas.
- Construcción de nexos y estructuras matemáticas.
- Mantenimiento de los problemas y su resolución bajo control.
- Desarrollo de estrategias eficientes.
- Pensamiento crítico y persistente en la consecución de los objetivos que se propone.
- Mostrar abreviación de los procesos al resolver problemas de tipo similar.
- Rapidez de aprendizaje.
- Capacidad de generalización y transferencia.
- Rapidez en la resolución.

Asimismo, si relacionamos las características observadas con las fases descritas en Biembengut (2007), podemos ver que este alumnado muestra un rápido avance hacia fases superiores en la modelización, así como una gran capacidad para trabajar con símbolos matemáticos, para entender estructuras matemáticas, para relacionar con asombrosa facilidad las situaciones recreadas con las ideas y los conceptos matemáticos implícitos a la hora de construir las representaciones o modelos que le permiten comprender mejor la realidad y para trasferir estos modelos a otras situaciones que perciben como similares.

De esta manera, en este subapartado hemos enumerado algunas de las características que nos podrían dar una idea de aquellos alumnos que destacan con respecto a sus compañeros y que podrían presentar AACC.

6. Conclusiones

Retomando los interrogantes que nos impulsaron a realizar esta investigación, y de acuerdo con los resultados expuestos en el apartado anterior, concluimos que hemos podido identificar cuatro perfiles bajo los que se pueden agrupar a los alumnos en la resolución de problemas de estructura aditiva, concretamente de las categorías de cambio y de combinación, utilizando como estrategia metodológica la modelización matemática.

Para un maestro, detectar estos perfiles en el aula cuando los alumnos resuelven problemas de la vida real, podría resultar útil a la hora de darse cuenta de qué alumnos necesitan ayuda (y qué tipo de ayuda precisan) para poder progresar por sí mismos hacia los perfiles siguientes y, por lo tanto, para avanzar en las fases del proceso de modelización, pudiendo, de esta manera, evolucionar en la construcción del conocimiento matemático. Así, al mismo tiempo que progresan en la construcción de representaciones para comprender la realidad que les rodea, los alumnos van siendo cada vez más capaces de hacer frente y resolver los nuevos problemas con los que se pueden encontrar en el mundo real.

Por otra parte, ante la pregunta *¿la resolución de problemas permite al maestro detectar aquellos alumnos que pueden presentar AACC o talento matemático en un aula ordinaria?*, podemos decir que en el caso concreto de esta investigación sí, ya que, al observar a los alumnos y al escucharlos cuando expresan el proceso seguido en la resolución, nos damos cuenta de aspectos cualitativos de comportamiento y de razonamiento que destacan por no ser comunes en la gran mayoría de alumnos y que, por lo tanto, pueden constituir indicadores que nos lleven a pensar que se trata de alumnos con AACC y a seguir el procedimiento necesario para que se le realicen las pruebas pertinentes que lo determinen.

Concretamente, podemos confirmar que los maestros pueden detectar a los alumnos con AACC a través de la resolución de problemas porque en nuestro caso concreto, durante la aplicación de la Unidad Didáctica que ha formado parte de esta investigación, ha habido un alumno del Grupo A (el alumno 1 al que nos hemos referido en el apartado anterior) que nos ha llamado la atención debido a la manera de comportarse y de resolver los problemas y que, después de pedir las pruebas pertinentes y de que el Servicio Psicopedagógico Escolar las realizara y las valorara, se ha identificado como alumno sobredotado o con AACC (el informe psicopedagógico que lo confirma está disponible para consultarlo). Además, el hecho de haberlo detectado tempranamente, con 6 años, da la oportunidad de comenzar a actuar cuánto antes para permitir que pueda desarrollar todo su potencial.

De esto se deriva la necesidad de una mayor y mejor formación de los docentes en relación con el tema de las AACC y del talento, ya que son los que, junto con los padres, juegan un papel muy importante en la detección de estos alumnos, dado que pasan gran parte del tiempo con ellos y los observan mientras aprenden, piensan y actúan día a día.

Sin embargo, también debemos decir que en esta investigación solo se han trabajado los problemas de cambio y de combinación, por lo que sería oportuno seguir realizando estudios más amplios en los que se incluyan el resto de categorías (comparación e igualación), problemas de varias etapas e incluso otras operaciones aritméticas, por lo que resultaría interesante investigar en torno a la resolución de problemas con alumnos de diferentes rangos de edad y observar qué diferencias se pueden encontrar a medida que los alumnos van creciendo.

Asimismo, también queremos remarcar que en este estudio ha participado una muestra pequeña de alumnos con AACC (solo tres), por lo que se abre una puerta a la realización de trabajos similares en los que se incluya una muestra mayor y más significativa de estos alumnos.

En definitiva, hemos podido demostrar que la resolución de problemas aporta a los maestros información cualitativa que les resulta realmente valiosa a la hora de detectar al alumnado que puede presentar AACC desde edades tempranas y, en el caso de confirmarse, poder llevar a cabo las actuaciones pertinentes que les permitan seguir progresando de acuerdo a su nivel y ritmo de aprendizaje.

7. Referencias bibliográficas

Albes, C., Aretxaga, L., Etxebarria, I., Galende, I., Santamaría, A., Uriarte, B., y Vigo, P. (2013). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales.* Vitoria-Gasteiz: Gobierno Vasco.

Arocas, E., Martínez, P., Martínez, M. D., y Regadera, A. (2002). *Orientaciones para la Evaluación Psicopedagógica del Alumnado con Altas Capacidades.* Valencia: Generalitat Valenciana. Conselleria de Cultura i Educació.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura aditiva.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Biembengut, M. S. (2007). Modelling and Applications in Primary Education. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, y M. Niss, *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Vol. 10, págs. 451-456). New York: Springer.

Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematical instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Bonotto, C. (2007). How to Replace Word Problems with Activities of Realistic Mathematical Modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, y M. Niss, *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Vol. 10, págs. 185-192). New York: Springer.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. *Actas del 12º Simposio de la SEIEM*, (sin paginación).

Castro, M. L. (2005). *Conocimientos y actitudes de maestros de Educación Infantil, Educación Primaria y estudiantes de Magisterio sobre los niños superdotados intelectualmente.* Tesis doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

DECRETO 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana, DOCV núm. 7311, de 7 de julio de 2014.

Diezmann, C. M., y Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. En *Proceedings 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (págs. 219-226). Auckland.

Fernández, A. (2011). *Apuntes de la asignatura de Matemáticas para Maestros.* Documento inédito. Valencia: Universitat de València, Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Fraile, J. (2014). *Matemàtiques*, primer, segundo y tercer trimestre, 1º de Primaria. Valencia: Vicens Vives [Edición C. Valenciana].

Girard, J. C. (1999). Le professeur de mathématiques doit-il enseigner la modélisation? *Reperes - IREM*(36), 7-14.

Godino, J. D. (2004a). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, J. D. (2004b). *Matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Greenes, C. (1981). Identifiying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal, 6*(2), 175-183.

Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de E. Primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez, y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán.* Valencia: PUV.

LEY ORGÁNICA 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, BOE núm. 295, de 10 de diciembre de 2013.

Miguel, A., y Moya, A. (2011). Conceptos generales del alumno con altas capacidades. En J. C. Torrego (Coord.), *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa.* Madrid: Fundación SM.

Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Stepanek, J. (1999). *The Inclusive Classroom. Meeting the Needs of Gifted Students: Differentiating Mathematics and Science Instruction. It's just good teaching.* Portland: Nothwest Regional Educational Laboratory.

ANEXOS

Anexo 1

TIPOS DE PROBLEMAS DE CAMBIO

	INICIAL	CAMBIO	FINAL	CRECER	DECRECER
CAMBIO 1	d	d	i	*	
CAMBIO 2	d	d	i		*
CAMBIO 3	d	i	d	*	
CAMBIO 4	d	i	d		*
CAMBIO 5	i	d	D	*	
CAMBIO 6	i	d	d		*

Tabla 1. Tipos de problemas de cambio. Extraído de Puig y Cerdán (1988).

Cambio 1	Juan tenía *a*. Le dan *b*. ¿Cuántos tiene ahora?
Cambio 2	Juan tiene *a*. Da *b*. ¿Cuántos le quedan?
Cambio 3	Juan tenía *a*. Pedro le da algunos. Ahora tiene *c*. ¿Cuántos le dio Pedro?
Cambio 4	Juan tenía *a*. Le da algunos a Pedro. Ahora tiene *c*. ¿Cuántos dio a Pedro?
Cambio 5	Juan tenía algunos. Pedro le da *b*. Ahora tiene *c*. ¿Cuántos tenía?
Cambio 6	Juan tenía algunos. Da *b* a Pedro. Ahora tiene *c*. ¿Cuántos tenía?

Tabla 2. Ejemplos de cada tipo de problema de cambio. Extraído de Puig y Cerdán (1988).

Anexo 2

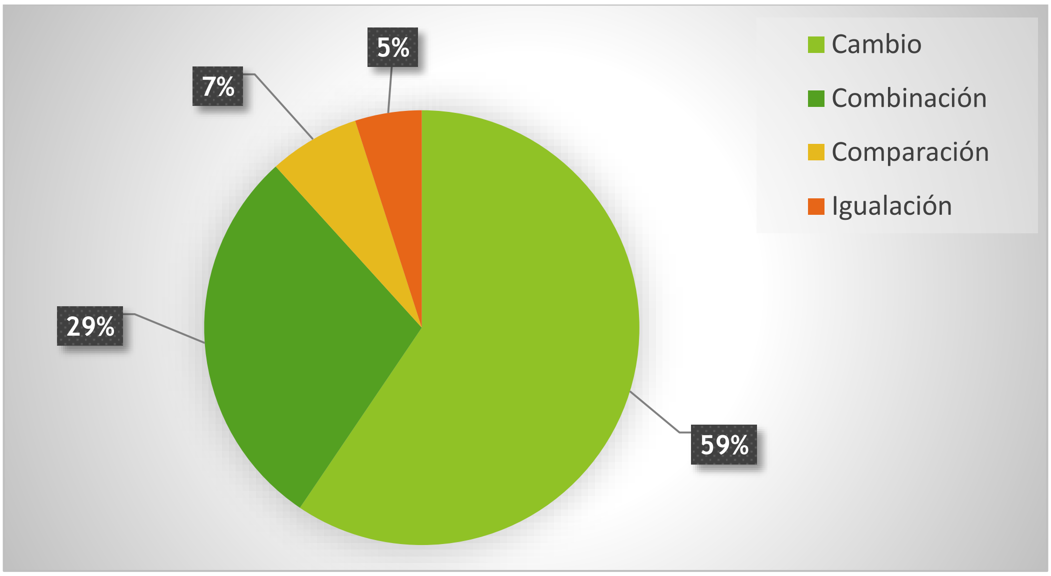
NIVELES DE DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS DE CAMBIO Y COMBINACIÓN

Tipo de problema	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Combinar 1	x			
Combinar 2			x	
Cambio 1	x			
Cambio 2	x			
Cambio 3		x		
Cambio 4		x		
Cambio 5			x	
Cambio 6			x	

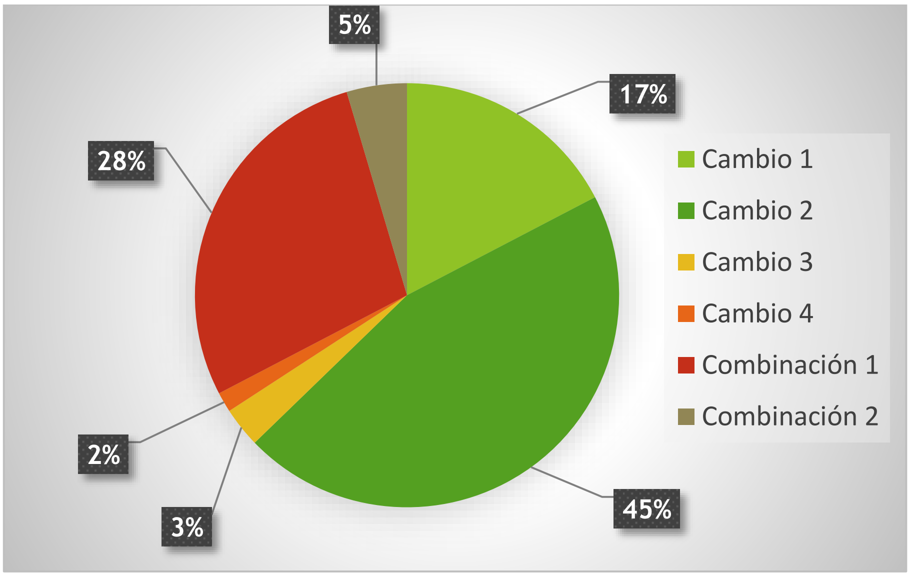
Tabla 3. Niveles de dificultad de cada tipo de problemas de cambio y de combinación. Extraído de Puig y Cerdán (1988).

Anexo 3

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA EN EL MATERIAL DE MATEMÁTICAS



Gráfica 1. Presencia (%) de las distintas categorías de problemas en el libro de texto, cuadernos de actividades y guía docente de 1º de Primaria de la editorial Vicens Vives (Total: 222 problemas).



Gráfica 2. Presencia (%) de cada tipo de problema de las categorías de cambio y de combinación del libro de texto, cuaderno de actividades y guía docente de 1º de Primaria de la editorial Vicens Vives (Total: 196 problemas).

Anexo 5

PRUEBA DIAGNÓSTICA

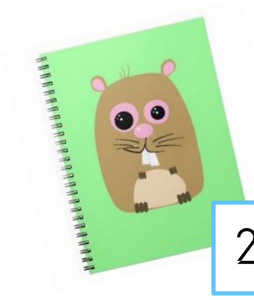
1. En un álbum tengo 30 cromos de animales y en otro 10 cromos de dibujos animados. ¿Cuántos cromos tengo en total?

2. Mi amiga tiene cromos de películas y de fútbol. Tiene 17 cromos en total. Si tiene 12 cromos de películas, ¿cuántos cromos de fútbol tiene?

3. ¿Cuántos cromos tenía Teresa si le da 5 a Vicente y le quedan 23?

4. Tengo 5 euros. Voy a la papelería y compro una libreta que vale 2 euros. ¿Cuántos euros me quedan?

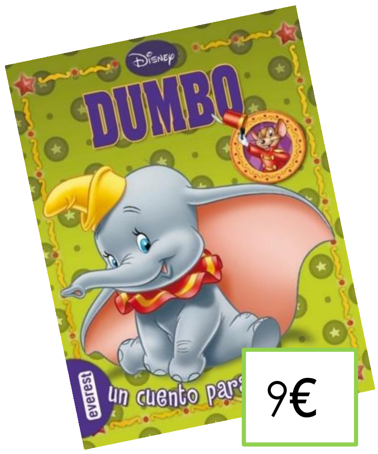
Tengo:



2€

5. Quiero comprar un libro que vale 9 euros pero solo tengo 7 euros. Mi abuelo me da el dinero que me falta. ¿Cuántos euros me ha dado?

Tengo:



9€

Anexo 6

MATERIAL DIDÁCTICO EMPLEADO

Intercambio de cromos

Compra-venta

Anexo 7

FICHA PROBLEMA 1

Alumno:... Fecha:.....................................

- ¿Me han dado o me han quitado cromos? ¿Cuántos?

Anexo 8

FICHA PROBLEMA 2 (A Y B)

Alumno:.. Fecha:....................................

- ¿Cuántos cromos de animales tiene tu compañero?

Alumno:.. Fecha:....................................

- ¿Cuántos cromos de deportes tiene tu compañero?

Anexo 9

FICHA PROBLEMA 3 (A Y B)

Alumno:.. Fecha:....................................

- ¿Cuántos euros tenía antes de vender?

Alumno:.. Fecha:....................................

- ¿Cuántos euros tenía antes de comprar?

Anexo 10

FICHA PROBLEMA 4 (A, B Y C)

Alumno:.. Fecha:....................................

- ¿Cuánto dinero se ha gastado el hijo?

Alumno:.. Fecha:....................................

- ¿Cuántos euros te quedan?

Alumno:…………………………………………… Fecha:………………………………

- ¿Cuántos euros tienes ahora?