

Diseño e implementación de tareas de modelización con iPad[®]'s: un enfoque dual

Design and implementation of modelling tasks using iPad[®]'s: a dual perspective

Miriam Ortega Pons, Pascual D. Diago Nebot
Irene Ferrando Palomares, Luis Puig
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA.
Miriam.Ortega@uv.es, Pascual.Diago@uv.es
Irene.Ferrando@uv.es, Luis.Puig@uv.es

Abstract

En este trabajo presentamos el diseño de dos propuestas para introducir la modelización de fenómenos físicos a través de actividades de modelización asistidas mediante iPad[®]'s. Cada una de las propuestas que vamos a presentar tiene una visión de la modelización: en un caso se trata de utilizar la modelización como vehículo para introducir contenidos matemáticos concretos mientras que, en el otro, pretendemos desarrollar una actividad que ayude a los alumnos a poner en marcha la competencia en resolución de problemas a través de la modelización. El objetivo es proporcionar dos propuestas basadas en la modelización dando detalles suficientes para que éstas puedan ser implementadas en un aula de último curso de ESO o primer curso de Bachillerato.

This paper presents the design of two experiences to introduce modelling of physical phenomena through modelling tasks using iPad[®]'s. Each of the proposals is designed with a different vision about modelling. In one case modelling is used as a vehicle to introduce precise mathematical contents. While, on the other one, we intend to develop an activity that can help student to improve their modelling competence. Our aim is to present two proposals to introduce modelling in a ninth or tenth grade classroom.

Keywords: iPad[®], Modelling, secondary school, classroom experiences, physical phenomena, functions

Palabras clave: iPad[®], Modelización, educación secundaria, experiencias de aula, fenómenos físicos, funciones

1 Introducción

En el campo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas tiene una larga historia el uso de problemas reales, el primer referente de esta corriente es la Educación Matemática Realista (EMR, del inglés Realistic Mathematics Education) basada en la Fenomenología Didáctica de Freudenthal (1983). Esta corriente didáctica, entendida como una teoría específica de instrucción para la educación matemática centrada en contextos (Treffers, 1987 & Delange, 1987), surge en Holanda en los años 70 como respuesta a la necesidad de reformar la enseñanza de las Matemáticas. En esta línea, durante los últimos años se está desarrollando un movimiento cuya idea de base es llevar al aula actividades que muestren la relación entre las matemáticas y el mundo que nos rodea, este movimiento se describe en el estudio número 14 de la International Commission on Mathematical Instruction (Blum et al., 2002). En este sentido se ha incrementado el interés por introducir en las aulas diferentes tipos de tareas que involucren tareas de modelización matemática (Vorhölter, Kaiser, Borromeo Ferri, 2014). En efecto, es habitual que en clase de matemáticas se trabajen los contenidos de manera formal y desligada de la realidad, por lo que los estudiantes no acostumbran a relacionarlos con situaciones reales o de su vida cotidiana. Esto se pone de manifiesto en el estancamiento de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes españoles en las pruebas PISA de los últimos años (OCDE, 2012). Diferentes comunidades de investigadores en el campo de la Didáctica de la Matemática apuntan, como resultado de numerosos estudios (ver, por ejemplo, Almeida, da Silva, 2015 & Villa-Ochoa Berrío, 2015), que las tareas de modelización se revelan como un recurso útil para ayudar a los estudiantes a ver y trabajar la relación entre las matemáticas y la realidad.

Si consideramos una tarea de modelización como aquella en la que se relacionan matemáticas y realidad (Blum, 2011), podemos encontrar una relación clara con la resolución de problemas (más en concreto, de problemas reales). Bloom, Niss (1991, p. 37) definen el termino problema como:

“Una situación que lleva consigo ciertas preguntas abiertas que son un desafío intelectual para alguien que no está inmediatamente en posesión de los métodos, procedimientos y algoritmos directos suficientes para resolverlo”.

Verschaffel define los problemas reales como:

“Aquellos que reproducen situaciones problemáticas presentes en la vida cotidiana y en el trabajo y para cuya resolución es necesario saber cuándo y cómo debe aplicarse el conocimiento matemático, pero también el no matemático” (Verschaffel et al., 2008, p. 393).

Esta perspectiva se enmarca, por tanto, dentro de la EMR y la Fenomenología Didáctica de Freudenthal, en particular en la visión de que las Matemáticas son una actividad humana y que la realidad puede ser utilizada como fuente para la matematización.

Independientemente de la perspectiva epistemológica considerada, la modelización puede entenderse de dos formas distintas en función del uso que se haga de ésta en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Tal y como señalan Julie, Mudaly (2007), la modelización puede utilizarse como un contenido en sí mismo, a partir de problemas cuyo objetivo final es ayudar a los alumnos a desarrollar competencias en modelización (véase, por ejemplo, el trabajo de Gallart et al. (2015a) en el que se analizan las competencias matemáticas que se desarrollan a lo largo de la resolución de una tarea de modelización). Sin embargo, la modelización también se puede

introducir como vehículo para promover el aprendizaje de un contenido matemático concreto. En este caso se plantean a los estudiantes problemas en los que se hace uso de la modelización para alcanzar unos contenidos definidos (en esta línea se pueden destacar los trabajos de Ortega, Puig (2014). Es importante tener en cuenta que estas dos perspectivas no son excluyentes, el desarrollo de tareas de modelización conducirá necesariamente al desarrollo de competencia en modelización y, de forma simétrica, a través de una actividad de modelización propuesta para desarrollar esa competencia, se pueden introducir contenidos matemáticos concretos (un ejemplo de esto se puede observar en el trabajo de Diago (2015).

El estudio de fenómenos físicos desde el punto de vista de la obtención de modelos matemáticos que describan dichos fenómenos puede ser una vía para diseñar una actividad de modelización que se ajuste a uno de los dos puntos de vista de Julie, Mudaly (2007). En efecto, al enfrentarse a la obtención de un modelo matemático que se ajuste a un fenómeno físico el alumno debe, en primer lugar, entender correctamente dicho fenómeno, experimentar y, por último, hallar cuáles son los conceptos o procedimientos matemáticos que le ayudarán a modelizar el fenómeno. Por tanto, la correcta elección del fenómeno físico puede ser la oportunidad para plantear una actividad que ayude a los alumnos a comprender de forma significativa nociones matemáticas abstractas que pueden carecer de sentido para los alumnos. Una de las formas de obtener modelos matemáticos de fenómenos físicos es a través de diferentes dispositivos digitales que permitan al alumno tomar datos sobre el fenómeno y analizarlo. En esta línea conviene destacar los trabajos de Puig y Monzó (Monzó, Puig, 2007, 2008, 2010, 2011, 2012, & Puig, Monzó, 2008, 2013) en los que se estudian modelos de enseñanza basados en la resolución de problemas con la ayuda de calculadoras gráficas para introducir nociones relacionadas con las familias de funciones.

El objetivo de este trabajo es presentar el diseño completo de dos propuestas para introducir la modelización en el aula de secundaria con la finalidad de estudiar dos fenómenos físicos: la distribución de la intensidad del sonido en un aula y el enfriamiento de un líquido. La particularidad de éstas es que se desarrollan en entornos interactivos muy familiares para los alumnos ya que, en ambos casos, las actividades se realizarán mediante el uso de iPad®'s. En efecto, organizaciones Internacionales tales como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) proponen un principio tecnológico que destaca la importancia que tienen estas herramientas para el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, el uso de herramientas TIC en el aula, en particular el uso de tabletas o de teléfonos móviles inteligentes implica un cambio sustancial tanto en la metodología de enseñanza como en la actitud de los alumnos que descubren nuevos usos de un dispositivo que siempre tienen a sus disposición y que manejan con familiaridad y soltura (véase el trabajo de Plaza, Pérez (2012), en el que se aborda la repercusión de la introducción de las tabletas en la educación). Por ello, es importante, al presentar modelos de enseñanza basados en la resolución de problemas asistidos por herramientas TIC, detallar cuidadosamente el diseño de la tarea y, por otro lado, el diseño de la implementación.

El diseño de los modelos de enseñanza que presentamos sigue algunas de las ideas que aparecen en el trabajo de Doerr (1997). En él, la autora describe el proceso de modelización cuando el problema real de partida es el estudio de un fenómeno físico y la obtención del modelo matemático de este fenómeno a través de alguna herramienta tecnológica. Por tanto, para el diseño de los modelos de enseñanza se partirá de un fenómeno físico real como el enfriamiento o calentamiento de un líquido o la distribución de la intensidad del sonido en un aula. Una vez planteado el fenómeno de interés, se usarán dos tipos distintos de aplicaciones que serán ejecutadas en el propio dispositivo (en nuestro caso, un iPad®): por un lado utilizarán aplicaciones para la recogida de datos y, a continuación, estos datos se procesarán y se analizarán

a través de otras aplicaciones para que los alumnos intenten obtener un modelo matemático que se ajuste al fenómeno que están estudiando. Tal y como mostraremos, las aplicaciones digitales de los iPad®'s serán claves para desarrollar y analizar los modelos matemáticos de los fenómenos físicos, pero además, consideramos que, en algunos casos, puede resultar interesante conjugar el uso de herramientas TIC con materiales estructurados clásicos. Es por ello que, en una de las dos propuestas que vamos a presentar, propondremos el uso de cubos Multilink®. El uso de los materiales manipulables está bastante extendido en la Educación Primaria, sin embargo, no lo está tanto en Secundaria, pese a que existen diversos estudios que recomiendan utilizarlos en los niveles superiores para introducir conceptos nuevos (Perry, Howard 1997 & Swan, Marshall, 2010).

A continuación pasamos a presentar, en primer lugar, el diseño de cada una de la dos tareas, y después, el diseño de la implementación las mismas. Esta presentación diferenciada permite detallar mejor, por un lado, los objetivos que se quieren conseguir y, por otro, la metodología de trabajo en el aula. La última sección se enfocará a dar una breve descripción de los resultados de la puesta en práctica de ambas actividades y extraer conclusiones que puedan ser de interés para programar estas mismas propuestas u otras similares.

2 Diseño de las tareas

En este apartado pretendemos explicar cuáles son los fenómenos físicos en que se basan las dos propuestas. Se detallarán asimismo los contenidos matemáticos directamente implicados en el desarrollo de las mismas y el uso que se realizará de los dispositivos iPad®'s.

2.1 Tarea de representación de funciones de dos variables mediante la modelización de la intensidad de sonido

En la primera tarea pretendemos que los alumnos elaboren conceptos personales vinculados con la que representación de funciones de dos variables a través de la modelización de un fenómeno real. Para ello, el material diseñado permitirá a los alumnos experimentar con la representación de variables y elaborar una representación con la que obtener un modelo matemático de la situación real de partida. En particular, nos centraremos en la representación cartesiana tridimensional de funciones de dos variables, contenido no perteneciente al currículo oficial para las etapas de ESO.

El fenómeno a modelizar es la determinación de las zonas del aula con mejor “calidad acústica”. Para llevar a cabo la interpretación de este fenómeno, los alumnos realizarán un experimento de medición de sonido utilizando el iPad® y una posterior representación gráfica de los datos en varios soportes (manipulativo y digital). Para poder realizar esta determinación los alumnos previamente deberán encontrar una forma idónea para dividir la clase reticulando el espacio a medir. Una vez delimitada la malla, los alumnos obtendrán datos reales, utilizando el iPad® como sonómetro. Los alumnos deberán tener en cuenta los posibles errores derivados de la medición y trabajar, por tanto, con el concepto de media de medidas como una estimación razonable de una magnitud física.

En la última parte de la tarea cada grupo tendrá que elaborar un sistema de representación propio de los datos medidos a lo largo de las distintas celdas del retículo, utilizando para ello el material manipulativo (cubos Multilink®). Es importante resaltar que los alumnos elaborarán solo algunas de las partes que entran en juego en una representación cartesiana tridimensional

formal, es decir, no pretendemos acercarnos a la definición teórica de función que a cada punto del plano le asigna un valor real dada por

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

En este sentido, no buscamos la elaboración de la terna de coordenadas propia de los sistemas cartesianos, (x, y, z) , sino un paso intermedio del tipo $[(x, y), z]$, en el que el primer elemento del par (x, y) indica una posición en el aula que no puede ser interpretada en términos de distancia o de medida. En este punto entrará en juego el concepto clásico de aplicada Euler (1797), tal y como está estudiado en Navarro (2012), que desarrollaremos en la descripción del material de enseñanza.

Los alumnos utilizarán el iPad[®] como herramienta digital interactiva para el estudio cuantitativo y cualitativo del fenómeno. Por un lado, se usará el micrófono interno del iPad[®] para poder transformar la intensidad de presión del aire en señal eléctrica, con el fin de poder cuantificarla. En la vida cotidiana esto suele hacerse con instrumentos profesionales de medida llamados sonómetros, pero en nuestra experiencia dado el carácter puramente didáctico, utilizaremos el iPad[®] a modo de sonómetro, dando por sentado que el micrófono y su respuesta espectral no son comparables a los de un aparato profesional. Para la medición de sonido se opta por la aplicación Decibel Ultra Pro[®] (2015). Por otro lado, se usará el iPad[®] para el tratamiento y análisis de los datos tomados por los alumnos, además de servir como instrumento de búsqueda y consulta mediante internet. Así, en lo referente a la representación digital gráfica de los datos tomados, los alumnos accederán desde el iPad[®] al site online de Plotly (2015) desde el navegador para introducir los datos de las distintas mediciones que se realicen, de forma colaborativa, en un solo documento, para posteriormente generar las gráficas digitales correspondientes.

2.2 Tarea de modelización del enfriamiento de un líquido a través de la función exponencial

La segunda tarea que presentamos consiste en estudiar la familia de funciones exponenciales a través de la modelización matemática de un fenómeno físico: el enfriamiento de un cuerpo. El objetivo es que los alumnos estudien las propiedades de esta familia de funciones centrándose en las características de su representación gráfica, de su expresión algebraica así como del fenómeno a partir del cual se presenta, relacionándolas entre sí. Se hace especial énfasis en el estudio del significado de los parámetros de dicha familia de funciones dada en una forma canónica determinada,

$$y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

que permite observar la relación entre los cambios producidos por los valores de los parámetros y el efecto en su gráfica.

Concretamente, los alumnos tienen que estudiar la relación entre la temperatura a la que se encuentra el agua en cada instante y el tiempo que transcurre mientras esta se enfría. Esto da lugar a una función exponencial debido a la ley de Newton de enfriamiento de cuerpos por la que se establece que si T_i es la temperatura inicial con que introducimos un cuerpo en un ambiente con una temperatura de T_a grados, al cabo de un tiempo t la temperatura del cuerpo es $T(t) = T_a + (T_i - T_a)e^{-at}$.

Cabe destacar que, por cómo se redacta el enunciado de la tarea o experimento, y a diferencia de lo que pasaba en la tarea de la intensidad del sonido, las magnitudes concretas que deben estudiar, es decir la relación entre el tiempo y la temperatura del agua al enfriarse, aparecen

explicitadas en éste, por lo que, con la terminología utilizada por Blum, Leiss (2007), la situación real de partida está ya simplificada. Podríamos hablar, por tanto, de que la situación de partida es un modelo real.

En este caso, el contenido a estudiar sí aparece en el currículo oficial del primer curso de bachillerato, en concreto dentro de la parte de matemáticas y del núcleo de análisis: “Funciones reales de variable real. Clasificación y características básicas de las funciones elementales: Funciones lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, valor absoluto, parte entera, exponenciales, logarítmicas, circulares y circulares inversas. [...] Representación gráfica de funciones sencillas expresadas de manera analítica o gráfica, a partir del análisis de sus características globales y locales, que describan en algún caso situaciones reales” (Generalitat Valenciana, 2008). Sin embargo, el estudio del significado de los parámetros no se incluye de forma explícita en el currículo pero es importante para poder dotar de sentido la relación entre la expresión algebraica de una función concreta y su respectiva gráfica.

Además, el contenido abordado es interdisciplinar ya que el comportamiento del fenómeno que se pretende modelizar puede ser descrito mediante un modelo de la física.

La tarea propuesta se divide en tres partes: la primera de ellas consiste en una ficha inicial con preguntas que los alumnos deban responder antes de representar el fenómeno y tomar los datos, una segunda ficha con las instrucciones de cómo realizar el experimento y pasar los datos a la app para poder encontrar el modelo y, por último, una ficha final con preguntas para interpretar el modelo en relación con el fenómeno y analizar su validez con la ayuda de otras apps.

3 Diseño de la implementación de las tareas

En este apartado nos centraremos en describir, para cada una de las dos propuestas presentadas, aquellos aspectos relacionados con metodologías de trabajo en el aula necesarios para poder implementar las dos tareas. Observaremos que, en ambos casos, se distinguirán diferentes tipos de actividades que se trabajaran en distintas sesiones: sesiones teóricas de introducción de conceptos, sesiones de experimentación y sesiones de discusión. También daremos algunos detalles relativos a la organización del trabajo en clase, en particular, explicaremos cómo articular en el aula el trabajo a través de distintos recursos didácticos (algunos manipulativos y otros basado en el uso de las TIC).

Las dos propuestas presentadas pueden dirigirse a alumnos de último curso de ESO o de primer curso de Bachillerato. En la primera los contenidos matemáticos necesarios se limitan a conocer el concepto de función, entender los problemas derivados de los errores de medición en un experimento y saber algunas técnicas para superarlos (como hacer una media de varias mediciones). En la segunda propuesta es conveniente que los alumnos conozcan, además, la función exponencial, al menos de forma teórica. Si los estudiantes no están acostumbrados al uso de tabletas y, en particular, al uso de las aplicaciones que se van a introducir, conviene considerar que será necesario dedicarle más tiempo al manejo de las mismas o, al menos, que necesitarán más ayuda por parte del profesor.

3.1 Tarea de representación de funciones de dos variables mediante la modelización de la intensidad de sonido

Metodología de trabajo

Tal y como indican Martín et al. (2002), la necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento. Siguiendo esta indicación hemos considerado idóneo que, durante la implementación de esta tarea los alumnos trabajen en grupos de 5 o 6 personas y, cada uno de ellos, dispone de un iPad® que utilizarán durante las cuatro sesiones de trabajo. De esta forma se fomenta el trabajo colaborativo y puede resultar más fácil que los alumnos lleguen a elaborar una imagen conceptual asociada al concepto de representación de una función de dos variables. Sin embargo, aunque la metodología de trabajo en grupos es predominante, durante el desarrollo de la propuesta se trabajará en gran grupos: tanto en las explicaciones teóricas como en las discusiones de puesta en común.

El propio diseño de las preguntas, cuestiones y actividades de la tarea tiene un claro objetivo: proporcionar al alumno oportunidades de aprendizaje Gallart et al. (2015b), para ello, el tipo de intervención del docente irá cambiando a lo largo de la tarea e incluso dentro de cada sesión. Aparecerán varios tipos de intervenciones, desde la clase magistral hasta planteamientos más innovadores en los que el alumno o el grupo de alumnos, asuman un rol más activo y el profesor trabaje de forma colaborativa junto con ellos en tareas de indagación para conseguir la consecución de la tarea de investigación planteada. En este último caso, el profesor ejerce de guía hacia la elaboración de conceptos y procedimientos relacionados con la representación de funciones de dos variables, modificando, para ello, las concepciones e ideas erróneas en el alumnado.

Material

Para la realización del experimento será necesario utilizar el siguiente material:

- 1 iPad® para cada grupo de trabajo con la app Decibel Ultra Pro®
- Una cuenta en la herramienta online colaborativa Plotly (hoja de cálculo) en la que los alumnos irán introduciendo los datos tomados y generando las gráficas necesarias para la interpretación del fenómeno
- Documentos para los alumnos para cada sesión (disponibles en <http://uv.es/pasdadia/ipad>)
- 1 fuente de sonido (se recomienda un ordenador emitiendo una señal del tipo ruido rosa generada, por ejemplo con Audacity, 2015)
- Cubos Multilink®
- Mapa del aula
- Materiales usuales de medida: cinta métrica o metro
- Cinta de carrocero o cinta de papel y rotuladores para poder delimitar las zonas en las que será dividida el aula. Será también necesario tener conexión a Internet para poder registrar los datos y poder computarlos con la hoja de cálculo online Plotly.

Organización de las sesiones

A continuación describimos el desarrollo y la puesta en práctica de la propuesta. Es importante resaltar que ésta se presenta a los alumnos como una investigación en la que, utilizando recursos tanto manipulativos como digitales, han de responder a las siguientes cuestiones de investigación:

- ¿Cómo se distribuye el sonido a lo largo del aula?
- ¿Cambia mucho la percepción sonora en un punto o en otro del aula?
- ¿De qué variables depende nuestra percepción sonora en la clase?

Para llevar a cabo esta tarea de investigación se requieren un mínimo de cuatro sesiones, pero se recomienda que la última de las sesiones se divida en dos, con lo que serían necesarias 5 sesiones completas de una hora como mínimo para llevar a cabo la tarea.

A. Sesión 1: conceptos básicos. La primera sesión corresponde a una sesión de presentación de contenido e instrucción, en la que se introduce el problema de investigación al cual deberá darse respuesta a lo largo de las distintas sesiones de las que consta la tarea. Además, se explican los conceptos necesarios sobre la física del sonido y se presenta el iPad® como herramienta que nos permitirá medir la intensidad de sonido en un punto de la clase, a modo de sonómetro.

Así, a lo largo de esta sesión, se realizarán actividades enfocadas a que el alumno se familiarice con la medida de referencia de las magnitudes acústicas, el decibelio. Seguidamente se explicará el funcionamiento de la aplicación Decibel Ultra Pro® y se darán las pautas a seguir para la realización de mediciones acústicas. Este punto es de suma importancia, pues todos los grupos deben seguir las instrucciones descritas por el docente para que las futuras medidas sean coherentes, con sentido y sobre todo, comparables.

B. Sesión 2: Mapa de intensidad de sonido. La segunda sesión se plantea como una experimentación de los diferentes grupos para que busquen estrategias iniciales de resolución para dar respuesta a las preguntas de investigación. La intención es que los alumnos descubran que, para poder realizar un mapa de la intensidad acústica recibida en cada punto del aula, necesitan dividir la clase en zonas y realizar diferentes mediciones. Así pretendemos desarrollar el concepto de retículo o malla como herramienta para explorar el espacio del aula por zonas. También pretendemos reforzar el concepto de medición experimental. Para ello, en el proceso de medida de la intensidad sonora en un punto será necesario tomar una media aritmética de varios valores con el fin de eliminar la dispersión debida tanto al error del instrumento de medida como a la inexactitud de la propia medida de la magnitud.

Para poder realizar las mediciones de intensidad de sonido en cada zona del aula se utilizará una fuente puntual de sonido (en nuestro caso se ha optado por una señal de ruido rosa generada con Audacity y emitido por un ordenador portátil situado en la mesa del profesor). En este punto cabe esperar que los alumnos se planteen la necesidad de tomar medidas de intensidad sonora, al menos, en cada una de las mesas de cada grupo, es decir, debe surgir la necesidad de dividir el aula en parcelas más pequeñas y obtener la intensidad de sonido que llega a cada una de estas parcelas. De este modo podremos obtener un “mapa” con la distribución de la intensidad de sonido. Para ello se facilitará un mapa de la clase para que los alumnos puedan

valorar y argumentar cuáles, según su criterio, son las divisiones idóneas para conseguir lograr su cometido.

Después de realizar y debatir las posibles divisiones en una puesta en común el profesor intervendrá para dejar claro que la división más efectiva consiste en cuadrricular o reticular el espacio del aula y obtener una medida en cada sector. Así, el docente entregará a cada grupo, al finalizar esta sesión, un mapa con la división del aula que se utilizará para la toma de datos que se realizará en la próxima sesión (ver Figura 1). Para realizar este mapa se recomienda optar por divisiones cuadradas en base los siguientes criterios:

1. Utilizar una medida en la que las baldosas de la clase puedan ser utilizadas para realizar las subdivisiones
2. Se recomiendan divisiones de uno 120 cm de lado, ya que se ha visto que la aplicación Decibel Ultra Pro[®] es capaz de detectar variaciones en celdas correlativas de este tamaño. Una división más fina puede que no muestre diferencias significativas entre las medidas de puntos contiguos.
3. El número de puntos en los que tomar medidas debe ser asequible para que puedan ser realizadas en la próxima sesión
4. Hay que establecer una única división como referencia

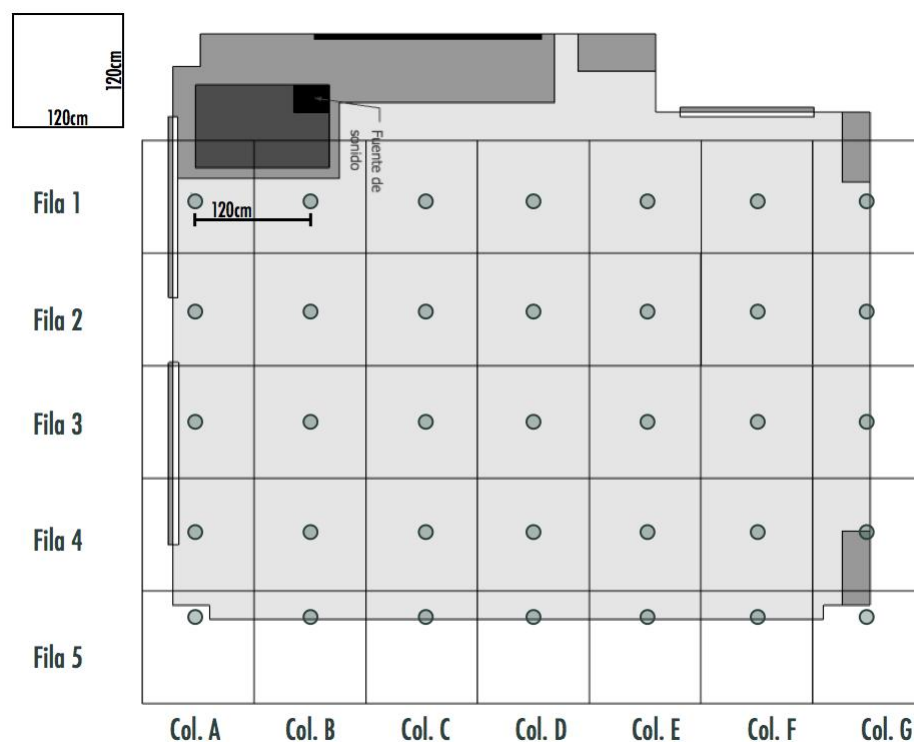


Figura 1 – Retícula sobre el mapa del aula.

Una vez decidida la forma de proceder con la división del aula, dado que se trata de una medición experimental, se abordará el tema de la precisión en las medidas tomadas. Para ello, se realizará actividad en la que se pedirá que cada grupo realice cuatro medidas de un mismo sonido en un mismo punto. A partir de los resultados quedará claro que no todas las medidas

son iguales, pese a corresponder a la misma fuente sonora y a estar tomadas en la misma posición del aula. Con ello, se introducirá la necesidad de realizar una media aritmética de las medidas realizadas para poder tener un valor representativo de la medida de la magnitud que tenga en cuenta todos los valores obtenidos en las distintas mediciones.

C. Sesión 3: La toma de medidas en el aula. El objetivo a lo largo de esta sesión de experimentación es tomar medidas precisas de la intensidad del sonido en los puntos que se determinan en la sesión anterior. Por tanto es importante intentar minimizar los errores relativos a la posición del micrófono del iPad® en el procedimiento estandarizado de medida. Para ello se realizará el cálculo de cuatro medidas para cada celda de la división del aula propuesta, con el objetivo de discretizar el retículo definido. Cada una de estas medidas se obtendrá con una orientación del micrófono del iPad®:

- Orientado hacia la fuente sonora (hacia delante)
- Orientado contra la fuente sonora (hacia detrás)
- Orientado hacia la derecha de la fuente sonora (hacia la izquierda)
- Orientado hacia la izquierda de la fuente sonora (hacia la derecha)

De este modo, se seguirá el procedimiento estandarizado de medida para cada orientación descrito en la sesión inicial. Es decir, para cada punto de la cuadrícula del aula se tomarán cuatro valores correspondientes a las cuatro direcciones, y se calculará la media aritmética de ellos para obtener un valor único y representativo del punto seleccionado.

Durante la primera parte de la sesión los alumnos trabajarán juntos para, a través de mediciones precisas en el suelo, preparar los puntos de toma de medida sobre el terreno, en la propia aula basándose en la retícula elaborada sobre el papel. Para facilitar el proceso de toma de datos se recomienda quitar las mesas del aula. Se marcarán los puntos identificativos de cada celda en el suelo con rotulador y/o cinta de carroceros o cinta de papel, utilizando una cinta métrica y la distribución de baldosas para que cada división esté exactamente como se indica en el mapa facilitado por el docente (en la Figura 2 se muestra un ejemplo realizado durante una experimentación).



Figura 2 – Preparación del aula para la toma de medidas.

Es muy recomendable utilizar un único iPad® para la toma de datos durante el experimento, de esta forma se consigue minimizar los errores relativos al instrumento, pues como se avisa en

la aplicación, las mediciones pueden fluctuar entre 1 y 3 dB en distintos dispositivos. Como se dispone de tiempo limitado, es recomendable que cada grupo tome la medida de la intensidad de una zona concreta, de modo que entre todos los grupos se cubran todos los puntos seleccionados en la cuadrícula elegida. Se puede proponer pues que cada grupo realice, por ejemplo, la medición de una fila de la cuadrícula y dentro de cada grupo que cada miembro obtenga todos los valores relativos a una posición (hacia delante, hacia detrás, hacia la izquierda o hacia la derecha de la fuente sonora). La idea es que realizamos un reparto lo más equitativo posible para que todos los alumnos participen. Una vez recogidos todos los datos, cada grupo completará una tabla en la que anota los valores que obtiene. Finalmente, se calculará el valor medio (media aritmética) de las 4 medidas correspondientes a las 4 orientaciones del instrumento para obtener un único valor representativo de la posición elegida. Los grupos utilizarán la herramienta online Plotly mediante el iPad® para el registro de datos y el cálculo de la media. Se adjunta un ejemplo de la tabla a completar por los alumnos en la Tabla 1.

Tabla 1 – Tabla de toma de datos.

Posición	De frente	De espaldas	Hacia la izquierda	Hacia la derecha	Valor medio
(1, A)					
(1, B)					
⋮					

D. Sesiones 4 y 5: La representación gráfica de los datos. Las dos últimas sesiones se emplearán para dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas inicialmente a partir de todos los datos que se habrán ido obteniendo. El objetivo final es que los alumnos representen gráficamente los datos de intensidad de sonido medidos en el aula, es decir que lleguen a obtener una representación gráfica de una función de dos variables. Los datos recogidos en la fase de experimentación se han anotado en forma de tabla, asociando valores a cada una de las celdas de la malla en la que se ha dividido la clase. Al comenzar la primera sesión se presenta a los alumnos la tabla con los datos obtenidos.

Durante la primera parte, los alumnos trabajarán con el material manipulable (cubos Multilink®) con el fin de que cada grupo elabore una representación tridimensional de esos datos. Esperamos que los alumnos utilicen la malla en la que se ha dividido la clase como plano sobre el que alzar alturas con los cubos, asociando mayor altura a aquellas celdas en las que la intensidad de sonido ha resultado ser mayor. En la Figura 3 se muestran dos representaciones tridimensionales obtenidas usando el material manipulativo.

En este punto es muy interesante observar cuáles son las estrategias utilizadas por los estudiantes para dar un valor concreto a cada uno de los bloques. Si el valor de los bloques no se escoge correctamente puede ocurrir que la representación obtenida no permita ver diferencias entre las medidas tomadas en cada retículo o, en otro caso extremo, que no se dispongan de suficientes bloques para realizar la representación. También puede ocurrir que los alumnos opten por escoger criterios de asignación no lineales, como asociar un valor distinto a cada pieza según su color.

Se pretende recrear, para funciones de dos variables, la forma en que Euler organiza la representación de funciones de una variable real. Para ello, Euler (1797, t. II, p. 5) traza únicamente un eje, el de abscisas, sobre el que levanta lo que él llama las aplicadas (ver Figura 4). De



Figura 3 – Ejemplos de dos representaciones 3D ideadas por los alumnos.

este modo, el alumno puede llegar a una comprensión más profunda del fenómeno modelizado y puede obtener su propia representación de una función de dos variables a partir de material manipulativo.

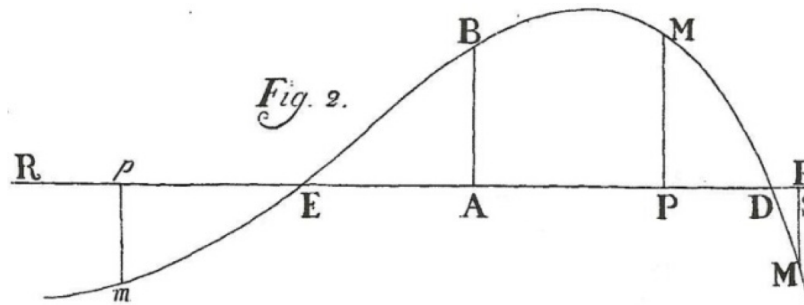


Figura 4 – La perpendicular PM, tirada sobre la abscisa a la curva recibe el nombre de aplicada.

Posteriormente utilizaremos estas representaciones tridimensionales elaboradas por los grupos como punto de partida de representaciones bidimensionales más estandarizadas como son los mapas de códigos de color y curvas de nivel. Utilizando Plotly, a partir de la tabla de datos los alumnos elaboraran mapas bidimensionales con códigos de colores (en inglés *heat maps*), en los que representarán con colores más cálidos los valores más altos en dB y colores más fríos para valores más bajos en dB. Un ejemplo de mapa de color se muestra en la Figura 5.

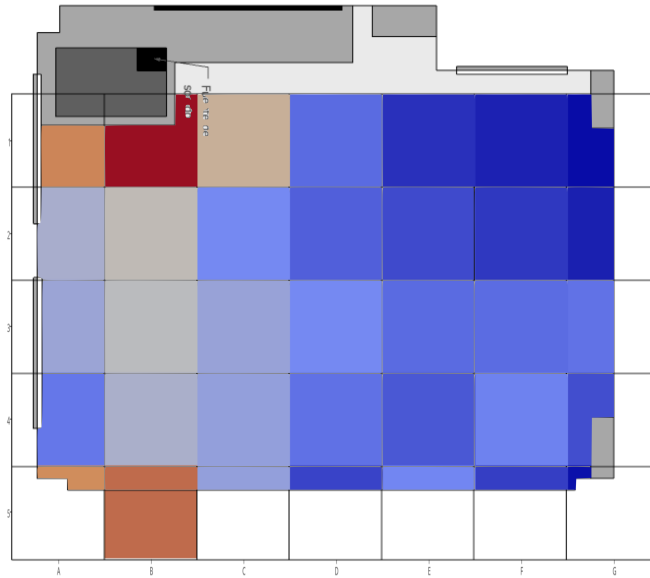


Figura 5 – Mapa de colores (*heat map*) generado con Plotly y superpuesto a la división del aula.

La interpretación y lectura de este tipo de mapas debe también trabajarse en la sesión, así, través del mapa de código de colores se pueden observar fenómenos físicos cotidianos, como la mayor intensidad sonora en las filas más cercanas a la fuente (celdas rojas) y menor intensidad a medida que nos alejamos de la fuente (celdas más azules). También, dependiendo del tipo de aula, se puede observar el fenómeno de reverberación (en la imagen mostrada se observa como la intensidad en la última fila aumenta en las celdas situadas exactamente delante de la fuente, debido a la reflexión del sonido en la pared).

Aprovechando las capacidades de Plotly también se puede elaborar el mapa de curvas de nivel o mapa de contorno (en inglés *contour maps*) para los datos obtenidos, cuya representación gráfica hace que la interpretación visual quizá sea más sencilla de descifrar que en el mapa de código de colores, ver Figura 6.

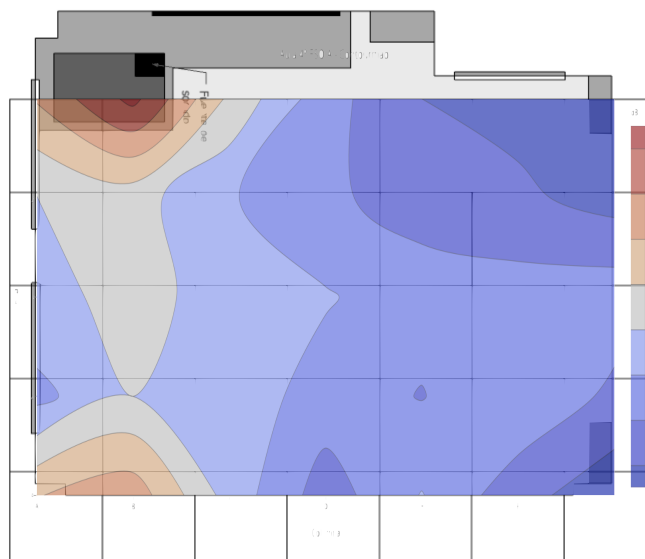


Figura 6 – Mapa de contorno (*contour map*) superpuesto a la división del aula.

Por último, se realizará una actividad de síntesis en la que se pedirá a los alumnos que elaboren sus propias conclusiones de la experiencia realizada, intentado dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas inicialmente. Pretendemos con ello que reflexionen sobre el proceso realizado a lo largo de toda la tarea. En particular se resaltarán la capacidad de los alumnos para modelizar matemáticamente una situación problemática real y resolverla utilizando una herramienta digital e interactiva, como es el iPad®. Además, se resaltarán la importancia de la representación de funciones de dos variables elaborada por ellos mismos, pues, contiene muchos elementos precursores de la definición formal que se estudia en cursos superiores.

3.2 Tarea de modelización del enfriamiento de un líquido a través de la función exponencial

La metodología general de trabajo será por parejas ya que de este modo los estudiantes deberán expresar, discutir y ponerse de acuerdo para dar sus respuestas, cosa que enriquece el aprendizaje. En cuanto al papel del profesor en el aula, cabe destacar que las tareas están pensadas para que los estudiantes trabajen sin la intervención del profesor ya que en las propias tareas se incluyen instrucciones de qué deberán hacer en cada momento, es decir, son a la vez tareas y guías. Sin embargo, se prepararán unas fichas con pistas que el profesor facilitará a los estudiantes en caso de que estos se queden estancados en alguna pregunta.

Material

Para la realización del experimento será necesario utilizar el siguiente material:

- 1 iPad® para cada pareja con las apps Graphical Analysis™ (2015) de Vernier, Desmos (2015) y Free Graphing Calculator (2015)
- Fichas y pistas (disponibles en <http://disco.uv.es/pub/orponsmi/disco/Material%20iPads>)
- 1 sensor de temperatura Go Wireless® Temp de Vernier
- 1 fuente de calor
- 1 encendedor
- 100 ml de agua
- 2 recipientes de cristal para calentar el agua

Cabe destacar que también será necesario tener conexión a internet para enviar los datos por correo electrónico.

Organización de las sesiones

A. Sesión 1: preguntas previas y simulación del fenómeno. En la primera sesión el profesor repartirá la primera ficha que contiene el enunciado de la tarea junto con tres preguntas. Uno de los estudiantes leerá el enunciado en voz alta y entre todos comentarán en qué consistirá el experimento y las posibles dudas respecto a cómo se deberá llevar a cabo. Después de esto, trabajarán por parejas para responder las preguntas.

Esta primera ficha contiene preguntas para trabajar la relación entre el tiempo y la temperatura del agua con la intención de que los estudiantes matematicen el fenómeno sin el uso de los iPad®'s y sin datos concretos. Por este motivo, las preguntas que se plantean se hacen de más generales y enunciadas con términos reales a más específicas y con terminología matemática.

Concretamente, en la pregunta 1 se les pide que describan y dibujen cómo creen que será la relación entre el tiempo y la temperatura del agua desde que se separa de la fuente de calor. Después se incluye una pregunta en la que se les pide que hagan un esbozo de la gráfica de la función que describe dicha relación y expliquen por qué tiene esa forma y lo han hecho en esa posición respecto a los ejes. Finalmente, en la pregunta 3 se les muestra una tabla con diferentes expresiones algebraicas de familias de funciones y se les pide que indiquen cuál creen que mejor ajustaría a la gráfica de la función que han dibujado, que justifiquen por qué y que traten de explicar cómo variaría la gráfica de la función al variar el valor de cada parámetro (ver Tabla 2).

Tabla 2 – Tabla con las familias de funciones de la pregunta 3.

Familia de funciones	Ajusta	Familia de funciones	Ajusta
a. $y = ax$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	f. $y = \frac{a}{x}$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>
b. $y = ax + b$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	g. $y = \frac{a}{x^2}$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>
c. $y = ax^2 + bx + c$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	h. $y = \frac{a}{x^2} + b$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>
d. $y = a(x - b)^2 + c$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	i. $y = a \cdot \ln bx$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>
e. $y = ax^b$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	j. $y = a \cdot e^{-cx} + b$	Sí <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>

Después de responder todas las preguntas, se entregará a los alumnos la ficha de instrucciones para guiarles en la realización del experimento y en la toma de datos. Un alumno las leerá en voz alta y se preparará el experimento entre todos para realizar con toda la clase. Para ello, se llenará un vaso de precipitados con unos 100 ml de agua y se empezará a calentar con una fuente de calor, por ejemplo con un mechero Bunsen de laboratorio. Mientras el agua se calienta, se introducirá el sensor de temperatura Go Wireless® Temp en el recipiente y se conectará a la app Graphical Analysis™ para conocer la temperatura en cada instante. Esta app permite ver gráficamente la relación entre el tiempo y la temperatura, expresados en segundos y grados centígrados respectivamente, a la vez que se están tomando los datos. Además, permite ver las coordenadas de los puntos expresadas en forma de tabla. Cuando el sensor indique una temperatura un poco mayor de 60°C, se pasará el agua a otro vaso de precipitados y se empezarán a tomar datos con un iPad® durante un tiempo de unos 10 minutos aproximadamente. Cabe destacar que el hecho de utilizar poca agua y cambiarla de recipiente una vez haya alcanzado una temperatura determinada se hace con la intención de que ésta se enfríe más rápido.

Al terminar, se enviarán los datos por correo electrónico a los alumnos para continuar trabajando por parejas y éstos podrán descargarlos en cada uno de los iPad®'s para ver las coordenadas de los puntos que muestran la relación entre el tiempo y la temperatura del agua en cada instante. Siguiendo las instrucciones, los alumnos elegirán 10 puntos para introducirlos en la app Desmos en la siguiente sesión.

B. Sesión 2: obtención y comparación de modelos. En la segunda sesión, los alumnos continuarán trabajando por parejas en la ficha final. Esta contiene una serie de preguntas donde se pide a los estudiantes que obtengan un modelo que describa el fenómeno estudiado y lo

interpreten y validen en relación con éste.

En la primera de ellas (pregunta 6) se les pide que introduzcan los 10 puntos seleccionados en la app Desmos y que traten de encontrar una función que ajuste a ellos. Esta app permite introducir las expresiones algebraicas de puntos y funciones y verlas gráficamente (ver Figura 7, izquierda), así como crear deslizadores para observar en la gráfica los cambios que provocan los diferentes valores que toman los parámetros. Además, en la misma pregunta se les pide que expliquen si son capaces de dar sentido a los parámetros de la función en relación a la gráfica. El objetivo es que utilicen la forma canónica $y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$ de la función exponencial para ajustar a los puntos y, así, comprueben que existe una relación entre los parámetros de la función y sus movimientos en la gráfica. Sin embargo, prepararemos una ficha con pistas para tratar de guiar a los alumnos a través de preguntas hacia la obtención del modelo partiendo de $y = e^x$ para facilitársela en caso de que no sean capaces de hacerlo sin ayuda. Dichas preguntas serán del tipo:

La función $y = e^x$ es creciente, ¿qué tienes que hacer para que sea decreciente? Mueve la gráfica a lo largo del eje de OY. ¿Cuál es el efecto en la fórmula? ¿Cómo puedes mover la gráfica hacia arriba? ¿Y hacia abajo? ¿Qué números hacen que se mueva en cada uno de esos sentidos?

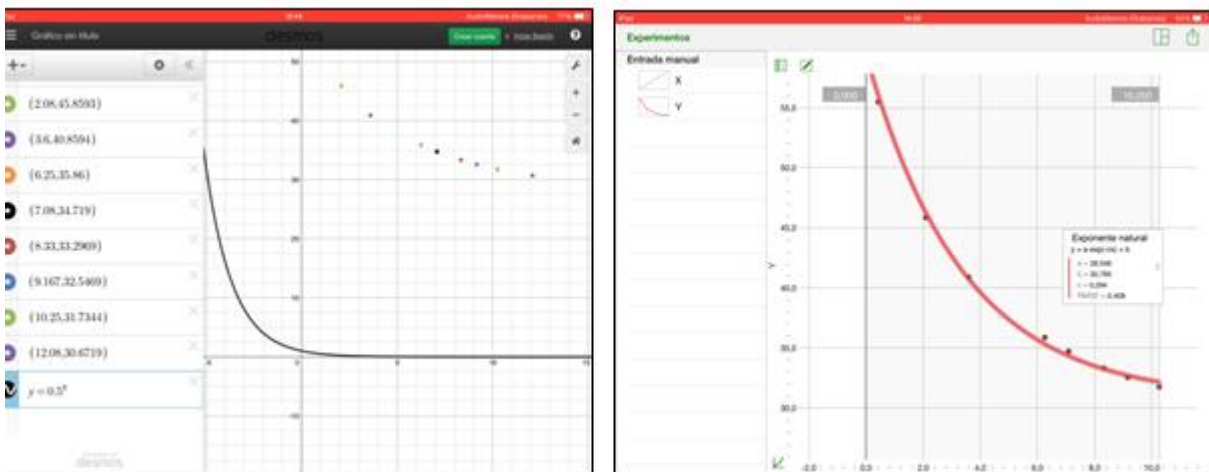


Figura 7 – Capturas de pantalla de las apps Desmos (izquierda) y Graphical Analysis™ (derecha).

En la pregunta siguiente, pregunta 7, se les pide que calculen la función usando la app Graphical Analysis™. Esta app permite seleccionar los puntos obtenidos de forma gráfica previamente y escoger una de las familias de funciones que aparecen en una lista dada por la propia app (ver Figura 7, derecha) para obtener así la función que ajusta a estos en forma de expresión algebraica, con unos valores concretos para los parámetros. Después de esto, se les pedirá que comparen esta función con la obtenida anteriormente con Desmos” y que expliquen si, a pesar de ser diferentes, piensan que las dos permiten describir el fenómeno y, en caso afirmativo, cuál de ellas piensan que ajusta mejor a los puntos. El motivo de pedir a los estudiantes que encuentren la función que describe el fenómeno de dos formas distintas tiene su origen en el hecho de que, como hemos podido observar en estudios anteriores (Ortega, Puig 2015), si usan una app que proporciona directamente el modelo, los estudiantes no necesariamente reflexionan sobre el significado de los parámetros de la familia de funciones en relación a la gráfica.

C. Sesión 3: interpretación del modelo y reflexiones finales. En la última sesión, los alumnos tendrán que responder las preguntas 8 y 9 de la ficha final donde deberán interpretar el modelo en términos del fenómeno, por lo que previamente deberán elegir uno de los dos modelos que han obtenido: aquel que piensan que describe mejor el fenómeno o ajusta mejor a los puntos. Concretamente, en la pregunta 8 se les pedirá que calculen algunas imágenes de la función y que expliquen si creen que los resultados obtenidos muestran lo que verdaderamente ocurre en relación con el fenómeno. También se les preguntará si piensan que la función puede predecir lo que pasará en el infinito. Esto se propone para ver si son capaces de darse cuenta de que la función solo describe el fenómeno que modeliza en el intervalo que se ha considerado y no fuera de este. En la segunda pregunta, se les preguntará cuál es la máxima temperatura y la mínima, así como cuánto tiempo tardará en pasar de la máxima a la mínima con el objetivo de que interpreten y den significado a los cálculos realizados al mismo tiempo que validan el proceso. Para responder ambas preguntas, los estudiantes usaron las apps Desmos y/o Free Graphing Calculator, como podemos observar en la Figura 7, cuyo software es similar al de una calculadora gráfica.

4 Resultados de las experiencias y conclusiones

Desde una concepción de la naturaleza de las matemáticas en la que los conceptos se consideran como medios de organización de fenómenos de la experiencia, siguiendo la línea marcada por Puig, Monzó (2013), el resultado más destacable con respecto a las tareas de modelización propuestas es que los estudiantes muestren a lo largo de la puesta en práctica de la tarea actuaciones que contengan elementos clave relacionados con diferentes elementos que los alumnos han ido elaborando a partir de la organización del fenómeno. Sin embargo, el enfoque de ambas propuestas difiere en el sentido que se da al uso de la modelización. En efecto, en la primera propuesta presentada, la modelización es el vehículo para ayudar a los alumnos a organizar o poner en marcha algunos conceptos matemáticos conocidos (como el concepto de variable, la media como valor para aproximar un dato experimental...) y, además, puede generar actuaciones muy ricas en elementos precursores de los contenidos matemáticos relacionados con los elementos de la representación cartesiana de funciones de dos variables. En el caso de la propuesta del enfriamiento de un cuerpo, el objetivo es usar la modelización para introducir nuevos conceptos matemáticos relacionados con la función exponencial.

Las dos tareas presentadas han sido implementadas en un aula de cuarto curso de ESO (la primera de ellas) y en una de primer curso de bachillerato (la segunda). A partir de estas dos experiencias extraemos algunos resultados que pueden ser de utilidad para poner en marcha este tipo de actividades en un futuro. La principal diferencia entre ambas actividades radica en los conocimientos previos requeridos para realizarlas en clase. Para la propuestas de la modelización de la distribución de la intensidad del sonido no es necesario que los alumnos tengan conocimientos concretos de contenidos matemáticos complejos, sin embargo, dado que, entre otras cosas, se pretende que generen una imagen mental del concepto de función de dos variables, es imprescindible que los alumnos tengan cierta capacidad de abstracción. Es por ello que enfocamos la propuesta a alumnos de cuarto curso de ESO o mayores. En el caso de la modelización del enfriamiento de un cuerpo, sí que es preciso que los alumnos conozcan la función exponencial.

En cuanto al tipo de metodología utilizada, cabe destacar que, a pesar de que la segunda tarea estaba pensada para la realización por parejas con la mínima intervención del profesor, durante

la puesta en marcha de la experiencia, ésta fue necesaria en algunos momentos cruciales, sobre todo durante la obtención del modelo con la app Desmos. En efecto, en este punto, algunos estudiantes tuvieron dificultades para reconocer la función y encontrar la forma de desplazarla en la dirección del eje de abscisas. En la propuesta de la intensidad del sonido también es muy importante la gestión de la clase por parte del profesor, es fundamental su papel a la hora de moderar las discusiones en gran grupo que se generan al poner en común las ideas obtenidas. En este caso, el rol del profesor se ajusta al de un moderador que debe orientar la discusión y ayudar a los alumnos a obtener conclusiones.











Por otro lado, como resultado de la observación directa en clase y las puestas en común al finalizar cada una de las tareas, hemos podido observar que los estudiantes destacan como positivo el hecho de resolver tareas de modelización de fenómenos físicos a través de las cuales pueden ver la relación entre las matemáticas y la realidad. Curiosamente, se sorprenden al encontrar funciones en fenómenos físicos y de poder usar las matemáticas como herramienta para enfrentarse y resolver estas tareas. También valoran positivamente el experimentar en el aula de matemáticas para, a partir de la experimentación, obtener datos reales que luego utilizan para sacar conclusiones a través de conceptos matemáticos (algunos conocidos y otros nuevos).

En definitiva, en nuestra opinión, debería producirse un cambio hacia un modelo de educación en el que tuvieran cabida propuestas basadas en modelización de fenómenos como las que aquí presentamos ya que, a pesar de existir diferencias entre ellas, proporcionan a los estudiantes una visión de las matemáticas conectada con la realidad, aspecto que habitualmente suele quedar relegado a un segundo plano en la enseñanza de esta materia.










Agradecimientos








Esta investigación ha sido financiada por los Proyectos de Investigación EDU2012-35638 y AYA2013-48623-C2-2-P y por la ayuda para contratos predoctorales BES-2013-063826 del Ministerio de Economía y Competitividad.

Referencias

-  Almeida, L. M. W., da Silva, K.A.P. (2015).
The meaning of the problem in a mathematical modelling activity.
In G. Stillman, W. Blum, M. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences.* Cham Springer (45–54).
-  Audacity (2015).
<http://audacity.es>
-  Blum, W. (2011).
Can modelling be taught and learnt? Some Answers from Empirical Research.
In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri, G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* New York: Springer (15–30).
-  Blum, W., Leiss, D. (2007).
How do students' and teachers deal with modelling problems?
In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics.* Chichester: Horwood Publishing (222–231).
-  Blum, W., Niss, M. (1991).
Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, applications, and links to other subjects.
State, trends and issues in mathematics instruction. In *Educational Studies in Mathematics.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers (22, 37–68).
-  Blum, W. et al. (2002).
ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education-Discussion document.
Educational Studies in Mathematics 51(1-2), 149–171.
-  Decibel Ultra Pro® (2015).
<http://www.dev-apps.de/app-decibelultra.html>
-  De Lange, J. (1987).
Mathematics, insight and meaning.
Utrecht: OW & OC.
-  Desmos (2015).
<https://www.desmos.com/>
-  Diago, P. D. (2015).
Representación de funciones de dos variables mediante la modelización de la intensidad de sonido utilizando iPads. Un estudio exploratorio.
Trabajo Fin de Máster. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València. <http://roderic.uv.es/handle/10550/48067>.

-  Doerr, H. (1997).
Experiment, simulation and analysis: an integrated instructional approach to the concept of force.
International Journal of Science Education 19(3), 265–282.
-  Leonard, E. (1797).
Introduction à l'analyse infinitésimale (Vol. 2).
Traducción al francés de J.B. Labey. París: Chez Barrois.
-  Free Graphing Calculator (2015).
<https://itunes.apple.com/es/app/free-graphing-calculator/id378009553?mt=8>
-  Freudenthal, H. (1983).
Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.
Dordrecht: Reidel.
-  Gallart, C. , Ferrando, I., García-Raffi, L. M. (2015a).
Análisis competencial de una tarea de modelización abierta.
Números 88, 93–103.
-  Gallart, C., Ferrando, I. , García-Raffi, L. M. (2015b).
El profesor ante la actividad modelizadora en el aula de secundaria.
SUMA 79, 9–16.
-  Generalitat Valenciana (2008).
DOGV.
Decreto 102/2008, de 11 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo del Bachillerato en la Comunitat Valenciana. DOGV (5806).
-  Graphical Analysis™ (2015).
<http://www.vernier.com/products/software/ga-app/>
-  Julie, C., Mudaly, V. (2007).
Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa.
In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study.* New York: Springer (503–510).
-  Martín, J. F., Murillo, J., Fortuny, J. M. (2002).
El aprendizaje colaborativo y la demostración matemática.
In J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín, L. Blanco (Eds.), *Actas VI Simposio de la SEIEM.*
-  Monzó, O., Puig, L. (2007).
Modelización con la ClassPad 300, 1a parte.
Veintidós Séptimos 24, 26–29.
-  Monzó, O., Puig, L. (2008).
Modelización con calculadoras gráficas.
In *Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas.*
Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas CD3–T0501.

-  Monzó, O., Puig, L. (2010).
Modelización con la ClassPad 300, 2a parte.
Veintidós Séptimos 26, 4–6.
-  Monzó, O., Puig, L. (2011).
Materials per a l'estudi de famílies de funcions I.
In M. Contreras, O. Monzó, L. Puig (Eds.), Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana. València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana “Al-Khwārizmī” (167–185).
-  Monzó, O., Puig, L. (2012).
Famílies de funciones.
In M. Torralbo, A. Carrillo (Eds.), Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas. Sevilla: SAEM Thales y División didáctica CASIO-Flamagas (103–133).
-  Navarro, M. T. (2012).
Del Álgebra a la Geometría, La sistematización de las coordenadas cartesianas y la representación gráfica de funciones en la Introductio in Analysin Infinitorum de Euler y en el Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral y en el Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'Application de l'Algèbre a la Géométrie de Lacroix.
Trabajo Fin de Máster Universitario en Investigación en Didácticas Específicas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València.
<http://roderic.uv.es/handle/10550/29123>.
-  OECD (2012).
Education at a Glance 2012.
http://www.oecd.org/edu/EAG%202012_e-book_EN_200912.pdf.
-  Ortega, M., Puig, L. (2014).
El proceso de modelización en el aula con datos reales. Un estudio exploratorio en el entorno informático de las tabletas.
In J. L. González et al. (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014. Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.
-  Ortega, M., Puig, L. (2015).
Modelización de una situación real con tabletas: el experimento de la pelota.
Modelling in Science Education and Learning 8(2), 67–78.
-  Perry, B., Howard, P. (1997).
Manipulatives in primary mathematics: Implications for teaching and learning.
Australian Primary Mathematics Classroom 2(2), 25–30.
-  Plaza, B., Pérez, M. (2012).
Las tabletas en la educación: ¿Implica un cambio en la metodología la introducción de un nuevo dispositivo?
Revista Didáctica, Innovación y Multimedia 22.

-  Plotly (2015).
<https://plot.ly/>
-  Puig, L., Monzó, O. (2008).
Competencias algebraicas en el proceso de modelización.
El discret encant de les matemàtiques.
In F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo, M. J. Peris (Eds.), Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana.
J Castelló: SEMCV (142–158).
-  Puig, L., Monzó, O. (2013).
Fenòmens y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones
In T. Rojano (Ed.), Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.
México: Trillas (9–35).
-  Swan, P., Marshall, L. (2010).
Revisiting Mathematics Manipulative Materials.
Australian Primary Mathematics Classroom 15(2), 13–19.
-  Treffers, A. (1987).
Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education, the Wiskobas Project.
Dordrecht: Reidel Publishing Company.
-  Verschaffel, L., Vicente, S., Van Dooren, W. (2008).
Usar las matemáticas para resolver problemas reales.
Cultura y Educación 20(4), 391–406.
-  Villa-Ochoa, J. A., Berrío, M.J. (2015).
Mathematical modelling and culture: An empirical study.
In G. Stillman, W. Blum, M. Biembengut (Eds.), Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences.
Cham Springer (241–250).
-  Vorhölter, K., Kaiser, G., Borromeo Ferri, R. (2014).
Modelling in Mathematics Classroom Instruction: An Innovative Approach for Transforming Mathematics Education.
In Y. Li, E. A. Silver, S. Li (Eds.), Transforming Mathematics Instruction.
Cham, Switzerland: Springer (21–36).