UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
DOCTORADO EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MODELIZACIÓN Y LAS FAMILIAS DE FUNCIONES CON EL USO DE GEOGEBRA EN UN PRIMER CURSO DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS Y ECONÓMICAS EN COLOMBIA

Tesis Doctoral

PRESENTADA POR:
Francisco Infante Mejía

DIRIGIDA POR:
Luis Puig Espinosa

Valencia, 2016

Para

MARCELA y HELEN

Quiero dar mis más sinceros agradecimientos:

En primera instancia a Nuestro Señor y a la Virgen que me han sostenido y enseñado tanto en este tiempo, y a quienes les debo el haber llegado hasta aquí.

A mi familia por todo el apoyo y confianza que me han brindado, y por haber soportado la distancia. A Helen, por todo su apoyo y amor, especialmente en las primeras etapas de este camino.

A las directivas de la Universidad Santo Tomás de Bogotá, Colombia, quienes confiaron en mí y me brindaron la enorme oportunidad de estudiar en la Universitat de València. Especialmente a la Dra. Mónica Rueda Decana de Ingeniería, quien con su apoyo y entusiasmo dio inicio a esta aventura, que hoy culmina.

Y finalmente a la persona de quien más he aprendido y que mayor influencia ha tenido para que yo logre presentar este trabajo al Dr. Luis Puig, mi tutor, quien ha logrado que yo plasme en el papel lo aprendido, gracias por su profesionalismo, su paciencia, y por su esfuerzo y dedicación.

A todos GRACIAS, MUCHAS GRACIAS.

Juan Francisco Infante M.

Índice

1. Planteamiento General

El desarrollo de la tecnología es una constante en nuestro diario vivir, la multitud de aplicaciones y su constante evolución permean todos los ámbitos incluyendo la manera en que se concibe la enseñanza y el aprendizaje en las aulas. Es por ello que la adaptación a estas nuevas formas de entender la enseñanza es un factor importante para poder lograr un aprendizaje eficaz por parte de los alumnos.

Ya desde los inicios mismos del desarrollo de los ordenadores en los años setenta, se comenzó a plantear el potencial que la tecnología podría tener en la enseñanza de las matemáticas, como nos lo deja ver Arnau (2010) por ejemplo en Alspaugh (1972, p. 89) podemos leer: "Muchos escritores actuales han percibido la influencia que los ordenadores han tenido o posiblemente tendrán en el futuro en la educación matemática." O en Hatfield y Kieren (1972, p. 99) encontramos: "Muchos educadores matemáticos han sugerido que las actividades de escribir, procesar y estudiar la salida de un algoritmo en una computadora promoverían el desarrollo de los conceptos y principios matemáticos, habilidades de cálculo y habilidades en la resolución de problemas en los estudiantes". (Arnau, 2010, p. 32).

En la perspectiva del álgebra, la importancia de las nuevas tecnologías también es palpable con la aparición de los CAS (Computer Algebra System) y las calculadoras graficadoras con paquetes de cálculo simbólico o sin él. Su incorporación a las aulas es un proceso que aún no culmina, como lo ponen de presente Drijvers y Weigand (2010), quienes revisando el ICMI 17 Study, *Mathematics Education and Technology. Rethinking the Terrain* (Hoyles y Lagrange, 2010), encuentran expresiones como "[...]La tecnología sigue desempeñando un papel marginal en los salones de clase de matemáticas" (p. 312) o "el impacto de esta tecnología (CAS) en la mayoría de los programas de hoy es débil" (p. 426). (Drijvers y Weigand, 2010, p. 666)

Sin embargo con el continuo desarrollo de la tecnología, actualmente los CAS brindan aún más posibilidades, como lo ponen de manifiesto Heid, Thomas, y Zbiek (2013)

> Con un acceso constante a CAS, la naturaleza de las tareas, las interacciones en el aula, y las visiones de las matemáticas podrían transformarse. […] Debido a la capacidad de los CAS para ejecutar procedimientos simbólicos con rapidez y precisión, el tiempo disponible para que los estudiantes participen regularmente en una gama más amplia de tipos de tareas. La capacidad de manipulación simbólica de los CAS permite la exploración de diferentes ideas matemáticas en formas que no eran posibles o factibles sin tal ayuda tecnológica. Estas nuevas oportunidades implican la exploración de invariantes matemáticos, la vinculación activa de las representaciones dinámicas, el

> enlace con datos reales y simulaciones realistas de las relaciones matemáticas. Con la bienvenida de los CAS en las aulas de la escuela, los cambios pueden ocurrir no sólo en las tareas, sino también en los modos de interacción entre profesores y estudiantes.
>
> (Heid, Thomas, y Zbiek, 2013, p. 600)

Estos aspectos que marcan Drijvers y Weigand (2010), y Heid, et al., (2013) proporcionan amplias posibilidades de investigación, así compartimos plenamente la posición de (Filloy, Puig y Rojano, 2008a), para quienes las TIC en la enseñanza del álgebra están lejos de ser un tema agotado en el campo de la investigación.

De otra parte, en la investigación sobre la enseñanza del álgebra varios enfoques se han desarrollado en las últimas décadas, entre ellos podemos destacar el álgebra como generalización de la aritmética, el álgebra como solución de problemas y ecuaciones y el álgebra a través del estudio y la modelización de funciones.

Puig y Monzó (2008) lo explican,

> […] el álgebra en el currículo de secundaria ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista: el álgebra como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración; el álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.
>
> (Puig y Monzó, 2008, p. 142.)

Desde la perspectiva de nuestro trabajo, son muy relevantes los dos últimos aspectos, el enfoque en resolución de problemas y el enfoque de la modelización de funciones. Estas ideas sobre el estudio del álgebra y el uso de la tecnología marcan las principales directrices de este trabajo. De esta manera entendemos los procesos de modelización como una extensión de la resolución de problemas en la línea que se ha venido trabajando en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, bajo la dirección de Luis Puig.

Así, debemos puntualizar que nuestro estudio se encuentra enmarcado dentro de un grupo de trabajos que pretenden presentar un modelo de enseñanza, con ayuda de la tecnología, que permita estudiar el proceso de modelización, los conceptos de familia de funciones y forma canónica de una familia de funciones y el significado de los parámetros de las formas canónicas respecto a la función y al fenómeno que se modeliza, así como analizar los resultados tras la aplicación del mismo.

Los trabajos de los que hablamos han partido de la tesis doctoral en elaboración de Onofre Monzó, de la que se han publicado algunos avances referentes a la fundamentación teórica y metodológica, así como resultados parciales, en Monzó y Puig (2007, 2008, 2010, 2011, 2012), Puig y Monzó (2008, 2013) y Puig (2015).

En este mismo sentido se cuentan los trabajos de fin de master de Juan (2012) y Ortega (2013). Así como el estudio exploratorio que realizan Monzó, Puig y Navarro (2015) en el entorno de las tabletas. Y el artículo preliminar de este estudio Infante, F. y Puig, L.

(2013). Sin embargo, cada uno de estos trabajos presenta unas características particulares en cuanto al contexto en que se han realizado, al uso de los diferentes soportes y paquetes informáticos y a la utilización (o no) de datos reales. Situaciones estas que los acercan o alejan del nuestro.

1.1 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación que proponemos pretende responder las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cómo puede el uso de GeoGebra integrarse en una secuencia de aprendizaje para promover competencias de modelización de las familias de funciones?

2. ¿Cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando modelizan situaciones mediante familias de funciones, estando siendo instruidos con una secuencia de enseñanza que incluye el uso de GeoGebra?

Para poder contestar a estas cuestiones, se ha elaborado una unidad de enseñanza sobre familias de funciones y modelización, utilizando tecnología, en particular el paquete informático GeoGebra.

De otra parte se ha llevado a cabo un estudio de casos y un estudio de grupo. El estudio de casos tenía una naturaleza exploratoria y su finalidad era la de proporcionar observaciones empíricas de las actuaciones, más o menos generalizadas, de los resolutores cuando resolvían, situaciones de modelización con ayuda de GeoGebra después de haber recibido enseñanza, estos tópicos se amplían en el apartado 1.3 de esta sección.

La articulación del estudio de grupo seguirá el esquema: primera toma de datos, intervención, segunda toma de datos. El estudio de grupo tendrá una perspectiva cualitativa, y la interpretación de los resultados que proporcione se apoyará en un análisis cualitativo de los datos, así como en las actuaciones observadas en el estudio de casos.

1.2 MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En la presente investigación hemos tomado como marco teórico y metodológico lo que Filloy llama Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999; Filloy, Rojano y Puig 2008a, Kieran y Filloy, 1989). Un Modelo Teórico Local (MTL) es un modelo teórico porque está constituido por un conjunto de afirmaciones que, al tomarlas como referencia, sirven para describir y explicar un fenómeno. Un MTL es local porque no pretende ser una teoría de carácter universal aplicable a un fenómeno en cualquier escenario, sino que sólo da cuenta de aquéllos que observamos en una situación concreta. Además cualquier MTL tendrá un carácter recursivo, pues se construye para estudiar una situación problemática cuya definición se verá precisada o modificada por los resultados de la investigación con el fin de poder explicar las nuevas evidencias.

Cuatro componentes conforman un MTL, esta división responde al hecho de que lo hemos utilizado para explicar un fenómeno incrustado en un contexto de enseñanza-aprendizaje, ya que:

> […] el hecho de que en toda situación de enseñanza y aprendizaje de matemáticas sea preciso tener presente, como sus tres personajes fundamentales, al profesor, el alumno y las matemáticas, conduce a considerar cuatro componentes de los MTL: un componente de competencia, un componente de actuación (o de los procesos cognitivos), un componente de enseñanza y un componente de comunicación.
>
> (Puig, 2006, p. 108)

El componente de actuación pretende dar cuenta de las acciones que realiza un estudiante cuando se enfrenta a una tarea matemática con la finalidad de caracterizar las estrategias que utiliza, los obstáculos que encuentra y los errores que comete. Durante el proceso de aprendizaje los estudiantes manifiestan unas tendencias cognitivas que podremos calificar de positivas o negativas según tiendan o no a las que llevaría a cabo un sujeto competente. El componente de competencia incluye tanto el conocimiento propio del domino matemático puesto en juego como la descripción de un sistema matemático de signos (SMS) lo suficientemente abstracto que permita descodificar todos los textos que se producen en las situaciones de enseñanza-aprendizaje asociadas. El componente de enseñanza tiene como fuente el conocimiento matemático, el currículo y los libros de textos y tiene por misión, dentro de un sistema escolar, lograr que las actuaciones de los estudiantes se aproximen a las de los sujetos competentes. El componente de comunicación pretende dar cuenta del intercambio de mensajes entre sujetos con diversos grados de competencia en el uso de los SMS. En este trabajo no estudiamos el componente de comunicación.

1.3 DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

El tipo de experimento que hemos realizado es uno de los más frecuentes en las investigaciones organizadas con el marco teórico y metodológico de los MTL. Sus características fundamentales son que, en primer lugar, el experimento se realiza con un grupo natural del sistema educativo, que constituye la población objeto de estudio. En segundo lugar, que se combina un estudio de las actuaciones del grupo natural de alumnos antes, durante y después de la enseñanza objeto de estudio, que pretende básicamente describir las características de esas actuaciones, clasificar a los alumnos con respecto a ellas y seleccionar alumnos de las distintas clases, con un estudio de casos.

Específicamente la estructura del experimento fue:

1. Prueba Inicial:

La prueba inicial tiene dos partes. La primera, el pretest propiamente dicho, consistía en un cuestionario sobre funciones y algunos conocimientos básicos de álgebra que se aplicó a toda la población del estudio. En la segunda parte se ha utilizado el instrumento diseñado por Presmeg (1985) para clasificar a los estudiantes según sus habilidades de visualización. Este instrumento está conformado a su vez por una prueba de 18 problemas verbales aritmético–algebraicos y por un cuestionario sobre los métodos empleados por el resolutor en cada uno de los problemas.

2. Enseñanza:

Para el proceso de enseñanza, que se realizó durante casi veinte horas de clase, se diseñó una unidad, con cinco actividades sobre familias de funciones y modelización. Comenzando con las funciones, sus transformaciones y parámetros, para continuar con los procesos de modelización. En la unidad se hace uso de herramientas tecnológicas en este caso el programa GeoGebra (GG). Además se realizaron algunas sesiones introductorias al paquete informático.

3. Prueba Final:

Se elaboró un cuestionario sobre gráficas de funciones y modelización. Aplicado a toda la población, con dos objetivos primordiales, de una parte poder clasificar los estudiantes en diferentes categorías con respecto a su desempeño en la prueba. En segunda instancia la prueba sirve como instrumento de evaluación del proceso de enseñanza realizado. La prueba también tiene dos partes, la primera un cuestionario escrito semejante al pretest aplicado y de otra parte, un ejercicio de modelización para realizar con ayuda del paquete informático GeoGebra.

4. Clasificación y Elección de los Casos:

A partir de los resultados en la prueba final se efectuó la organización de los estudiantes para la elección de los sujetos con los que se realizó el estudio de casos.

5. Entrevista

Se realizaron con los estudiantes elegidos entrevistas individuales con enseñanza, a partir de un guión elaborado previamente, en que se debía abordar un problema y modelizarlo con ayuda del GG. Se registró cada sesión en video y se grabó la sesión realizada en el ordenador con el paquete informático Hypercam y además, se contó con una grabadora externa de audio que registró cada sesión.

6. Análisis

Se realizó el análisis de cada una de las sesiones del estudio de casos, a partir del marco teórico del estudio. Como ya se mencionó, el estudio de casos tenía una naturaleza exploratoria y su finalidad era la de proporcionar observaciones empíricas de las actuaciones, más o menos generalizadas, de los resolutores cuando resolvían, situaciones de modelización con ayuda de GeoGebra después de haber recibido enseñanza.

El estudio de grupo tendrá una perspectiva cualitativa, y la interpretación de los resultados que proporcione se apoyará en un análisis cualitativo de los datos, así como en las actuaciones observadas en el estudio de casos.

Una representación de las diferentes etapas del trabajo de investigación se muestra en la figura 1.1 mediante un diagrama de flujo. Este es del mismo estilo que se ha utilizado en otros trabajos realizados con el marco teórico y metodológico de los MTL en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia como los de Arnau (2010) y González-Calero (2014). Este diagrama no sólo sintetiza la estructura de la investigación, sino que permite observar algunas de las características fundamentales de un MTL.

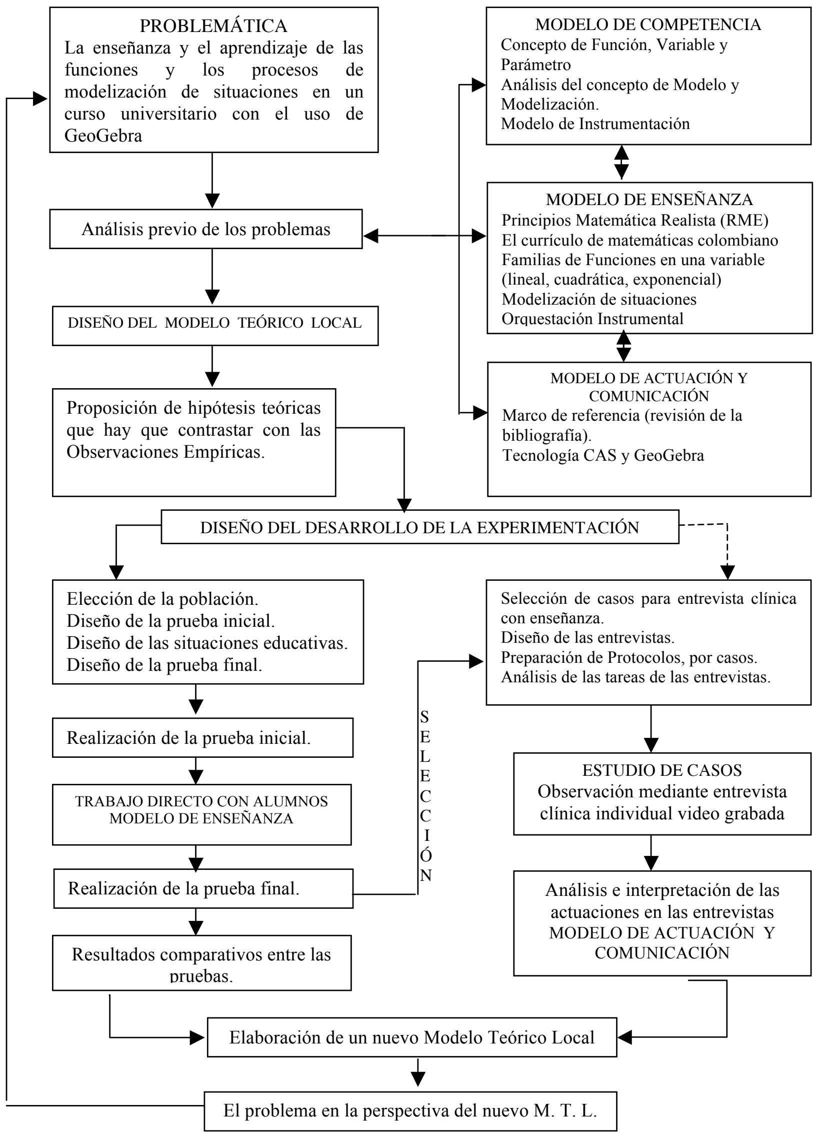


Figura 1.1 Esquema del diseño y desarrollo de la investigación.

1.4 DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS

A continuación se presenta una sinopsis de la estructura y contenido de los capítulos que integran este trabajo. De este modo, se facilita al lector la posibilidad de conocer, de manera fugaz, los asuntos que se abordan en cada uno de los capítulos.

En el primer capítulo se establecen los objetivos de la investigación y se presenta el marco teórico y metodológico empleado así como una breve descripción de las fases en que se desarrolla la experimentación.

En el segundo capítulo se abordan elementos del modelo de competencia y actuación, comenzando con algunos conceptos generales como función y parámetro, para luego pasar a elementos de la implementación de la tecnología en la enseñanza del álgebra, y en particular de las funciones y sus gráficas, y finalmente revisar los aspectos del proceso de modelización.

El capítulo tres versa sobre el Experimento de Enseñanza que se implementó para este estudio, y tiene dos grandes partes diferenciables, la primera de ellas se refiere a los tópicos del modelo de enseñanza que utilizamos en el estudio, las secciones 3.1 a 3.4 y la segunda parte, en que se aborda el experimento puntualmente, lo conforman las secciones 3.5 a 3.13.

En la parte sobre el modelo de enseñanza, se plasman las características generales de la Matemática Realista, para luego comentar sobre el modelo de enseñanza de la modelización y las familias de funciones. En cuanto al uso de ayudas informáticas hemos seguido algunas recomendaciones de la Teoría de la Génesis Instrumental de Trouche (2004).

En la segunda parte sobre el Experimento de Enseñanza, se contextualiza el currículo colombiano de matemáticas y el curso específico en que se enmarca el experimento, para luego pasar a la estructura propia del experimento y a la presentación de las unidades de enseñanza que se diseñaron para su desarrollo, especificando sus características.

En el capítulo cuatro sobre el estudio de grupo, se presentan las pruebas que se les aplicaron a los estudiantes con el análisis de sus resultados.

Para el capítulo cinco hemos dejado el estudio de casos a partir de las entrevistas clínicas con enseñanza que se realizaron, presentando los protocolos de las entrevistas así como su análisis.

En el capítulo seis se presentan las conclusiones de este estudio, tanto a partir del estudio de casos, como del estudio de grupo y algunos aspectos en cuanto a la proyección de este trabajo y futuras líneas de investigación.

En el capítulo siete se presentan las referencias. Finalmente en la versión digital de este estudio, se puede consultar el material complementario en los anexos.

2. Elementos de Competencia y Actuación

A fin de construir un marco teórico apropiado para nuestra tesis, que nos ayude a cumplir los objetivos propuestos y a darle sustento a la metodología investigativa que hemos elegido, en este capítulo presentamos, en primera instancia, elementos relacionados con la competencia matemática que debe poseer un resolutor "ideal", así como algunas observaciones que brinda la literatura sobre las actuaciones de alumnos "reales", que distan de la competencia ideal, pero que son fundamentales para una mejor comprensión de los procesos de aprendizaje que suceden en los alumnos y para el diseño del modelo de enseñanza que se quiera o se requiera implementar.

El presente capítulo lo hemos organizado en cuatro grandes secciones, a saber: la sección 2.1, Conceptos; la sección 2.2, Tecnología y Aprendizaje del Algebra; la sección 2.3, Representaciones de Funciones; y finalmente la sección 2.4, Resolución de Problemas y Modelización.

Dos de estas secciones están enfocadas en aclarar elementos de la competencia matemática que requiere tener un sujeto para lograr una mejor comprensión de los diversos temas abordados en el experimento de enseñanza. Desde esta perspectiva, damos espacio en la sección 2.1 de este capítulo a aclarar ciertos conceptos matemáticos tales como: Función, Variable y Parámetro, que son fundamentales para avanzar en la comprensión de los diferentes tipos de funciones con las que los estudiantes se enfrentarán en las actividades propuestas. Luego, también dentro del marco de las competencias, en la sección 2.4 ofrecemos conceptos sobre Resolución de Problemas y Modelización. Por otro lado, las secciones 2.2, Tecnología y Aprendizaje del Algebra, y 2.3, Representaciones de Funciones hacen referencia a elementos, ya registrados en la literatura, sobre las actuaciones de los alumnos en entornos de enseñanza y aprendizaje en varios niveles.

2.1 CONCEPTOS

En primera instancia, presentamos en este primer apartado algunos de los conceptos fundamentales que se manejan en la fase del experimento de enseñanza que planteamos en nuestra tesis. Como ya lo mencionamos antes, entre estos conceptos están: función, variable y parámetro, que los presentamos desde diferentes perspectivas, según la literatura.

2.1.1 CONCEPTO DE FUNCIÓN

Hans Freudenthal, en su estudio *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (1983) le dedica una parte de su tratado al análisis fenomenológico de las funciones.[1] Allí contempla dos definiciones del concepto de función: de una parte a partir del concepto de dependencia, y de otra, utilizando la teoría de conjuntos. En la primera definición, este autor subraya lo siguiente:

> La función es una dependencia especial, esto es, entre variables que se distinguen como dependientes e independientes, una terminología anticuada, que sin embargo remarca el fenómeno fenomenológicamente importante: las directrices de algo que varía libremente a algo que lo hace bajo control.
>
> Matematizado: la función de A a B como ley que asigna a cada elemento de A uno de B.
>
> (Freudenthal, 1983, p. 496)

En cuanto a la segunda definición, el mismo autor explica el concepto así:

> Las funciones se pueden considerar como relaciones especiales. Una relación de A a B en cualquier subconjunto del producto cartesiano $[A, B]$. Semejante relación f se llama función de A a B si
>
> para todo $a \in A$ hay exactamente un $b \in B$ tal que $a, b \in f$
>
> Esta definición es *lógicamente* (énfasis de Freudenthal) equivalente con la anterior, fenomenológicamente no lo es, y didácticamente fenomenológicamente tampoco. Oscurece la acción esencial de la asignación dirigida de A a B –que para repetir los términos del comienzo de la sección 17.1– es de un carácter de afirmación, postulado, producción, reproducción. Se pueden oponer estas definiciones entre sí como dinámico contra estático si a uno no le importa usar términos en desuso. Del hecho que toda la matemática pueda ser reducida a teoría de conjuntos, uno no concluye que deba hacerse y menos aún que es una necesidad y posibilidad didáctica.
>
> (Freudenthal, 1983, p. 497)

Esta misma diferenciación entre las dos definiciones de función también la plantean Leinhardt et al. (1990), a propósito de la discusión que se generó en su momento sobre las intuiciones en el concepto de función, y sobre la pregunta de ¿cómo es mejor introducir las funciones en el currículo? Sobre este particular Malik (1980) y otros han argumentado que estas dos definiciones (la antigua y la moderna) representan dos marcos muy diferentes de pensamiento y que no es obvio que el hecho de entender una definición, ayude a entender la otra.

2.1.2 CONCEPTO DE VARIABLE

Otro concepto relacionado con el anterior y relevante en el contexto de nuestro estudio, es el concepto de variable. Muchos autores han precisado aspectos diversos sobre las

---

[1] Freudenthal presenta su análisis fenomenológico de las funciones en el capítulo 17 de su obra, en donde aborda 75 entradas, en más de 100 páginas sobre el concepto de función.

variables, en particular sobre sus significados y los roles en que se expresa, tales como Bills, (1997, 2001); Kemme, (1990); Küchemann, (1981); MacGregor & Stacey, (1997); Malle, (1993); Phillip, (1992); Rosnick, (1981); Stacey & MacGregor, (1997); Usisikin, (1988); Wagner, (1981, 1983).

Freudenthal (1962, 1982, 1983), considera dos visiones diferentes sobre el término variable, de una parte su sentido original y fundamental como una cantidad en "variación" y de otra parte la tendencia –desde los ochenta– de utilizar el vocablo variable para designar las expresiones con nombres polivalentes, en este sentido la variable puede actuar como un número desconocido, y también como un número indeterminado, lo que le da un carácter ambiguo y de otra parte es polivalente ya que puede referirse a diferentes valores numéricos. Los nombres polivalentes son un medio para formular afirmaciones generales, esto es, afirmaciones que sirven como nombre para todos los objetos. Sobre este aspecto, Freudenthal puntualiza lo siguiente,

> El hábito matemático de llamar a los nombres polivalentes variables es de uso reciente [en la década de los ochenta]. Originariamente "variable" significaba algo que realmente varía, algo en el mundo físico, social, mental pero también en el mundo matemático que es percibido, imaginado, supuesto como variando [...]
>
> (Freudenthal, 1983, p 491)

Por otro lado, Drijvers (2003), retomando aspectos de Freudenthal, entiende el concepto de variable como un concepto de múltiples facetas, por su carácter ambiguo y polivalente, y debido a la diversidad de roles que las variables pueden jugar, y la diversidad de significados que las variables pueden tener. Además, este mismo autor, organiza una taxonomía de las variables de acuerdo a los significados y roles en su uso, y así establece cinco categorías.

- La variable como marcador de posición para valores numéricos,
- La variable como una cantidad cambiante en el álgebra funcional,
- La variable como un número generalizado en el reconocimiento de patrones y en la estructura algebraica,
- La variable como incógnita en la resolución de problemas, y
- La variable como símbolo en el lenguaje algebraico.

Estas diferentes funciones y significados de las variables dependen de la situación o problema que se aborde y sobre la pregunta que se plantee; además, los roles pueden cambiar durante el proceso de resolución de un problema determinado. Las funciones de las variables están relacionadas con los enfoques que se asumen en el álgebra, como son, según lo señala Drijvers (2003), los siguientes: a) la variable como número generalizado, que se ajusta al aspecto de generalización del álgebra; b) la variable como incógnita que se ajusta al enfoque de resolución de problemas; c) la variable como símbolo sin referencias, que es el papel que desempeña en el álgebra vista como un lenguaje; y por último, d) la variable como cantidad cambiante que refleja el aspecto dinámico, y se corresponde con el enfoque funcional. Esta última acepción, es decir, el aspecto dinámico del que habla Drijvers y que ya mencionaba Freudenthal en su visión de función, ha sido remarcado por Ferrara et al. (2006):

> De hecho, como Kaput (1992) enfatiza "un aspecto muy importante del pensamiento matemático es la abstracción de invariancia. Pero, por supuesto, para reconocer invariancia –para ver lo que se mantiene igual– uno debe tener variación. [Los] *Medios dinámicos hacen inherentemente más fácil de percibir* [la] *variación*" (énfasis en el original).
>
> (Ferrara, et al 2006, p. 242)

Estas mismas autoras, refiriéndose a las representaciones, citan nuevamente a Kaput en una explicación sobre funciones, que tiene puntos en común con la clasificación de Drijvers, pero aporta nuevos elementos. La cita a la que nos referimos dice así:

> […] los significados se desarrollan dentro de o en relación con representaciones particulares. Tome el término matemático "función" como ejemplo. No existe un significado absoluto para él; hay, sin embargo, toda una gama de significados dependiendo de las muchas representaciones de funciones disponibles y correspondencias. Piense en una función como un transformador de números (este es un ejemplo típico de significado de procedimiento), o como una relación entre los números (que en su lugar es un caso de significado relacional). Cada uno de estos significados se asocia luego a alguna representación específica, como por ejemplo: "*f (x)* = ..." para el primer ejemplo, y "*y* = ..." para el segundo ejemplo. Además, los individuos utilizan los sistemas de representación para estructurar la creación y elaboración de sus propias representaciones mentales. […] Por lo que se refiere explícitamente a la tecnología, los modelos basados en computadoras han hecho asequibles las múltiples representaciones, con la característica adicional de servir no sólo para mostrar representaciones pero especialmente para permitir *acciones* sobre ésas representaciones (Kaput, 1987). *He aquí una de las razones por las que la idea de variable ha sido tan difícil de aprender: La naturaleza estática de los medios en la que históricamente todo el mundo ha sido forzado a representarlo.*[2]
>
> (Ferrara, et al 2006, p. 242)

Hasta aquí hemos presentado las definiciones de función y variable de Freudenthal, y Drijvers, en las que resulta fundamental el componente dinámico, así como la clasificación de variables y parámetros que utiliza Drijvers. Sobre este punto nuestro estudio se enfoca principalmente en el uso de las variables como incógnita, desde la perspectiva de la resolución de problemas, y como cantidad cambiante según el enfoque funcional, que involucra el uso de parámetros.

2.1.3 CONCEPTO DE PARÁMETRO

Hasta ahora, no hemos mencionado el papel como parámetro que una variable puede tener, esto porque lo vamos a considerar de manera independiente, y porque tiene algunas características que merecen ser estudiadas con cierto detenimiento. Para Freudenthal (1983), el término parámetro se asocia con tres significados:

> Primero, una variable independiente secundaria –como si estuviera durmiendo–, que, si se necesita, puede ser explicada –como si estuviera despierta– por ejemplo para obtener un sistema f_t de funciones por la variabilidad del "parámetro" *t*.

[2] La cursiva es nuestra

> Segundo, una variable que de acuerdo con su origen es dependiente, pero de acuerdo con su apariencia es independiente, y la cual sirve para diferenciar figuras, estructuras, y demás, cada una de ellas desde dentro de las de su tipo, por ejemplo
>
> el radio de un círculo como función del círculo, por el cual los círculos son diferenciables por su tamaño,
>
> el parámetro p de la parábola (ecuación $y^2 = 2px$) por el cual parábolas no congruentes son diferenciables -este es el auténtico origen del término "parámetro", […]
>
> Como una tercera interpretación uno conoce la llamada representación paramétrica de curvas, superficies, y demás […]
>
> El círculo unidad en el plano $[x_1, x_2]$ (ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 1$) es parametrizado por medio de un arco de longitud s desde un punto fijo.
>
> $x_1 = \cos s$
> $x_2 = \operatorname{sen} s$
>
> (Freudenthal, 1983, p 509)

Para Drijvers (2003), el parámetro es esencialmente un tipo de variable de orden superior; desde este punto de vista, la clasificación presentada anteriormente en el concepto de variable puede aplicarse, parcialmente, al concepto de parámetro. Al igual que esta, el parámetro puede desempeñar varios papeles y tienen diferentes significados. Como en el caso de la variable, manejar adecuadamente estos roles puede ser complicado, aún más porque estos papeles a menudo permanecen implícitos y pueden cambiar durante el proceso de resolución de problemas.

Además de estas similitudes entre el concepto de variable y el de parámetro, también hay diferencias, específicamente en los siguientes tres aspectos: el primero, el nivel más alto en el que la variación y la generalización actúan; el segundo la posición jerárquica del parámetro en comparación con la variable; y finalmente la complejidad de los diferentes símbolos literales y sus roles.

En lo relacionado con el primer aspecto podemos señalar que la variación y la generalización del parámetro se llevan a cabo a un nivel más alto que la variación y la generalización de la variable. La variación de x en $3x + 5$ conduce a la variación en el valor numérico de la expresión. Gráficamente, esto significa 'trace' la gráfica de $x \rightarrow 3x + 5$. Sin embargo, la variación de a en $ax + 5$ resulta en la variación de la expresión como un todo, y gráficamente en el cambio de la gráfica completa de $x \rightarrow ax + 5$. En este sentido, el parámetro actúa como una “metavariable”. La variación y generalización utilizando variables “ordinarias” conlleva un cambio, o generalización sobre las relaciones aritméticas, en tanto que la variación y generalización de parámetros se refiere al cambio o generalización de las relaciones algebraicas. Con ello se espera completar la reificación de expresiones algebraicas con una variable y fórmulas que contienen dos variables (Drijvers, 2003).

En cuanto al segundo aspecto, relacionado con la posición jerárquica del parámetro en comparación con la variable, se pone en evidencia cuando se observa que una expresión paramétrica, o fórmula, es sinónimo de una clase o familia de expresiones o fórmulas. Desde esta perspectiva, una forma paramétrica se puede considerar como una función de segundo orden con el parámetro como argumento, y las correspondientes expresiones o fórmulas como valores de la función. Por ejemplo, cada valor de a determina una función lineal $x \rightarrow ax + 5$ en x, como se simboliza por la flecha larga en la figura [fig. 2.1] Los valores de esta función son funciones no paramétricas en x, en la que el parámetro a se sustituye por un valor numérico constante. Esta mezcla del parámetro como una constante en el primer nivel, y como una variable en el segundo nivel, es reflejada, en la expresión "variable constante". En ese sentido, el parámetro tiene una posición jerárquicamente superior a las variables (Bills, 1997, 2001; Bloedy-Vinner, 1994, 2001).

$$a \longrightarrow (x \rightarrow a \cdot x + 5)$$

Figura 2.1 El parámetro como argumento de una función de segundo orden.

2.2 TECNOLOGÍA Y EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA

En esta sección exponemos las posibles contribuciones del uso de la tecnología para el aprendizaje del álgebra, desde el punto de vista de varios autores. Así, en los siguientes apartados abordamos brevemente la cuestión del aprendizaje de las matemáticas, y en particular del álgebra, en un entorno tecnológico. Esto nos ofrece algunos conceptos claves que nos servirán de base para sustentar nuestro enfoque relacionado con el uso de los paquetes de cálculo simbólico (CAS por sus siglas en inglés) en el aprendizaje del álgebra, y a continuación presentamos algunas oportunidades y riesgos que el uso de entornos tecnológicos ofrece a la educación matemática en general y para nuestro estudio.

2.2.1 TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En primer lugar, presentamos aquí la visión de Pea (1985, 1987) en relación con el uso de la tecnología como amplificador y organizador. Luego, hablamos de dos conceptos didácticos importantes en el manejo de la tecnología en la educación matemática, como son: el concepto de resecuenciación, y el principio de la caja blanca / caja negra (white box / black box). Después de esto, presentamos los fenómenos de la pseudo-transparencia y la doble referencia.

2.2.1.1 Amplificador y organizador

Pea (1987, p. 91) considera la tecnología como un medio que ayuda a "trascender las limitaciones de la mente [...] en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas". Además, distingue dos funciones que las herramientas informáticas pueden desempeñar: la función de amplificador y la función de organizador.

La primera se refiere a la ampliación de posibilidades, por ejemplo de investigación de muchos casos de situaciones similares a alta velocidad. La complejidad de los ejemplos también se puede amplificar, lo que permite una vasta gama de ejemplos de variada dificultad.

En su segunda función, la herramienta informática se comporta como organizador o reorganizador del currículo. Por ejemplo, Hillel et al. (1992) describen cómo la posibilidad de visualizar simultáneamente ventanas gráficas y simbólicas cambió el método de enseñanza de las funciones. El estudio de Heid (1988) muestra efectos similares .

La distinción amplificador-organizador puede ser útil para explicar el papel de la tecnología en un entorno educativo específico. En el marco de esta tesis, la tecnología cumple ambos papeles: en primera instancia funciona principalmente como amplificador, ya que la herramienta tecnológica se utiliza para generar ejemplos que son una fuente para la generalización. Pero, de otra parte, esta misma herramienta actúa como organizador de las opciones disponibles, tal como sucede con la herramienta *deslizador*, que se utiliza para cambiar gráficos de forma dinámica. Estas opciones afectan la secuencia de instrucción tradicional para el aprendizaje de las familias de funciones y la modelización.

2.2.1.2 Resecuenciación

Durante 1985, Kathleen Heid presentó el estudio *Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool*, en el que aborda el concepto de resecuenciación, que retoma y aclara luego, en su disertación doctoral Heid (1988). En este estudio, que se considera como el inicio de la investigación sobre álgebra computacional en Educación Matemática, Heid mostró que la integración de la tecnología en un curso de cálculo permitió la resecuenciación del curso, lo que a su vez, proporcionó la oportunidad de seguir un enfoque con un énfasis conceptual. Este es un claro ejemplo de la tecnología en su función como reorganizador del currículo (Pea, 1985, 1987), que mencionamos anteriormente.

El notable resultado del estudio de Heid es que los estudiantes del grupo con CAS superaron al grupo de control en tareas conceptuales en la prueba final, pero, también lo hicieron en las tareas de computo que tuvieron que ser realizadas con lápiz y papel, y que, en el grupo experimental, fueron tratadas sólo brevemente al final del curso. Los sujetos de este grupo reportaron que el CAS se hizo cargo de los trabajos de cálculo, además les hizo sentir confianza en su trabajo y les ayudó a concentrarse en el proceso de resolución de problemas globales.

2.2.1.3 Principio Caja blanca / caja negra

En relación con el principio de caja blanca / caja negra (white box / black box), Buchberger (1990)[3], explica lo siguiente,

> Parece existir un desacuerdo insalvable entre los que creen que estos sistemas [CAS] no deben ser utilizados en la enseñanza a fin de no "echar a perder las habilidades de los estudiantes", y los que creen que, con la disponibilidad de estos sistemas, la enseñanza de las técnicas matemáticas cubiertas por estos sistemas ya no sería necesaria y, en vez deberíamos limitarnos a enseñar cómo utilizar estos sistemas.
>
> Para salvar este desacuerdo presenté, en 1989, el "Principio Caja blanca / Caja negra" para la didáctica de la utilización de los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de

[3] El texto citado a continuación fue tomado de:
http://www.risc.jku.at/people/buchberg/white_box.html Revisado 8/12/2015

> las matemáticas: Estoy proponiendo que, en la fase de "caja blanca" de la enseñanza de un particular tema matemático (es decir, la fase en la que el tema es nuevo para los estudiantes), no se debe utilizar las partes pertinentes de los sistemas de CS [cálculo simbólico CAS], mientras que en la fase de "caja negra" (en la que los estudiantes ya dominan por completo el nuevo tema), es esencial para la enseñanza moderna de las matemáticas el utilizar estos sistemas. El principio es recursivo, ya que, lo que era "caja blanca" en una fase particular de la enseñanza se convierte en "caja negra" en una etapa posterior y los nuevos temas se convierten en "caja blanca" que utilizan principios de "cajas negras", como bloques de construcción.

El debate que comenta Buchberger sobre la implementación de los CAS en las aulas, aún hoy, veinticinco años después, sigue vigente, como lo manifiestan Heid, Thomas, y Zbiek en su capítulo How Might Computer Algebra Systems Change the Role of Algebra in the School Curriculum? Heid et al., (2013) para el *Third International Handbook of Mathematics Education,* Clements, et al. (2013).

Para estas autoras la perspectiva de la incorporación de los CAS como un recurso constante en las experiencias de los estudiantes de álgebra se ha mirado con temor por los que imaginaron a los estudiantes sustituyendo las habilidades del trabajo a mano con papel y lápiz por la manipulación simbólica ofrecida por los CAS que resulta en una necesidad de depender de la tecnología para la transformación de expresiones simbólicas y ecuaciones. Pueden haber sospechado que lo que ha sido la esencia del álgebra escolar sería dejado de lado en aulas con calculadoras y ordenadores habilitadas para CAS. Por un lado, el debate sobre la naturaleza del cambio necesario hacia la integración de los CAS en los currículos de las matemáticas escolares es alimentada por la suposición de que un plan de estudios que no se centra principalmente en la manipulación simbólica realizada a mano con papel y lápiz privaría a los estudiantes de los insights que podrían ser obtenidos de la refinada manipulación simbólica realizada a mano (Heid, Thomas, y Zbiek, 2013). Por otra parte, Dick (1992, p. 2) señaló que "para llevar a cabo los ahorros en el tiempo y aprovechar el poder computacional que una calculadora simbólica puede proporcionar, los estudiantes tienen que prestar más, no menos, atención a la comprensión del significado de los símbolos y notación que utilizan".

Algunos investigadores (por ejemplo, Berry et al., 1993, 1994) partidarios de usar el CAS como un generador de ejemplos y como una herramienta de exploración que confronta al estudiante, han invertido la secuencia propuesta por Buchberger (1990) obteniendo así un enfoque de caja negra / caja blanca; en esta visión, la fase caja negra puede conducir a descubrimientos que sirven de base para la fase de explicación, en donde los resultados se clasifican y se demuestran; o, por otro lado, estos resultados pueden conducir al desarrollo de nuevos conceptos, que estarían en la fase de caja blanca. Este enfoque se puede considerar como ejemplo de la función de amplificador de la tecnología, de acuerdo con la distinción de Pea.

Macintyre y Forbes (2002), sugirieron además un tercer enfoque de caja gris, que consiste en un procedimiento paso a paso para resolver un problema en el que los estudiantes apenas tocan las operaciones de caja negra, pero realmente no intervienen en el dispositivo tecnológico. Los subprocesos se dejan al CAS, pero la estrategia general está determinada por el usuario.

El principio de caja blanca / caja negra distingue dos formas posibles de utilizar los CAS en la educación matemática. Es un concepto más relacionado con la enseñanza que con el aprendizaje y lo hemos contemplado en este estudio, entre los aspectos del modelo de enseñanza.

2.2.1.4 Pseudo-transparencia y doble referencia

En su estudio sobre la investigación francesa en cuanto al desarrollo de la enseñanza y aprendizaje del álgebra y el cálculo con tecnología, Artigue describe los fenómenos de la pseudo-transparencia y la doble referencia (Artigue, 1997; Guin y Trouche, 2002). *Pseudo-transparencia* significa que la técnica en el entorno de los CAS está cerca de la técnica de papel y lápiz, pero no es exactamente la misma pues a veces tiene diferencias muy sutiles. Esto es particularmente relevante para el álgebra. Por ejemplo, si se entra la expresión $(x + 3) / 2$, en muchos CAS se necesita utilizar paréntesis, pero en la pantalla aparece la fórmula sin paréntesis. De hecho, la barra horizontal de la fracción en $\frac{x+3}{2}$ puede ser considerada como una notación especial para el paréntesis que hay en el numerador, pero los estudiantes a menudo no son conscientes de ello. En una forma similar los paréntesis que se utilizan para entrar en el CAS la raíz cuadrada de una expresión desaparecen inmediatamente después de entrarla. Como consecuencia de esta pseudo-transparencia, los estudiantes que trabajan en un entorno tecnológico a veces no están "descubriendo" las matemáticas, como era de esperar, pero pueden estar descubriendo el software con todas sus peculiaridades. Esto es lo que se entiende por *doble referencia*, concepto relacionado con un efecto contradictorio que se presenta al usar los CAS, y que consiste en que los estudiantes llegan a enfocar su atención en las representaciones específicas de la herramienta tecnológica, más que en los conceptos matemáticos.

Los estudios y conceptos revisados hasta aquí muestran que *hacer álgebra* en un entorno tecnológico no es tan simple como parece. Los resultados indican que la forma idónea de uso de un CAS requiere conocimientos adecuados de los conceptos, pero también de cuestiones de notación, y sintaxis y no es sólo una cuestión de "dejar el trabajo para la maquina".

2.2.2 OPORTUNIDADES Y DIFICULTADES

En esta sección abordamos en primera instancia las oportunidades que ofrecen los CAS para el aprendizaje del álgebra y el cálculo, y a continuación se discuten algunas dificultades de la utilización de estos paquetes.

2.2.2.1 Oportunidades

Paul Drijvers (2003), en su disertación doctoral *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment*, ya había presentado algunas de las oportunidades de los CAS. A continuación enumeramos algunas de ellas: está la posibilidad de manejo y manipulación de expresiones, o el hecho de brindar posibilidades para la resolución de problemas al ofrecer diferentes estrategias, estas oportunidades colocan a los CAS como una herramienta exploratoria, en el sentido amplificador de Pea (1985, 1987). Por otra parte, las representaciones algebraicas y manipulaciones se pueden vincular con las representaciones y manipulaciones gráficas y numéricas, estimulando así una visión más integrada de los conceptos matemáticos.

Pero esto no es todo, ya que con el continuo desarrollo de la tecnología, actualmente los CAS brindan aún más posibilidades, como lo ponen de manifiesto Heid, Thomas, y Zbiek (2013). Según estas autoras, con un acceso constante a CAS en el aula, la naturaleza de las tareas, las interacciones en el aula, y las visiones de las matemáticas podrían transformarse radicalmente.

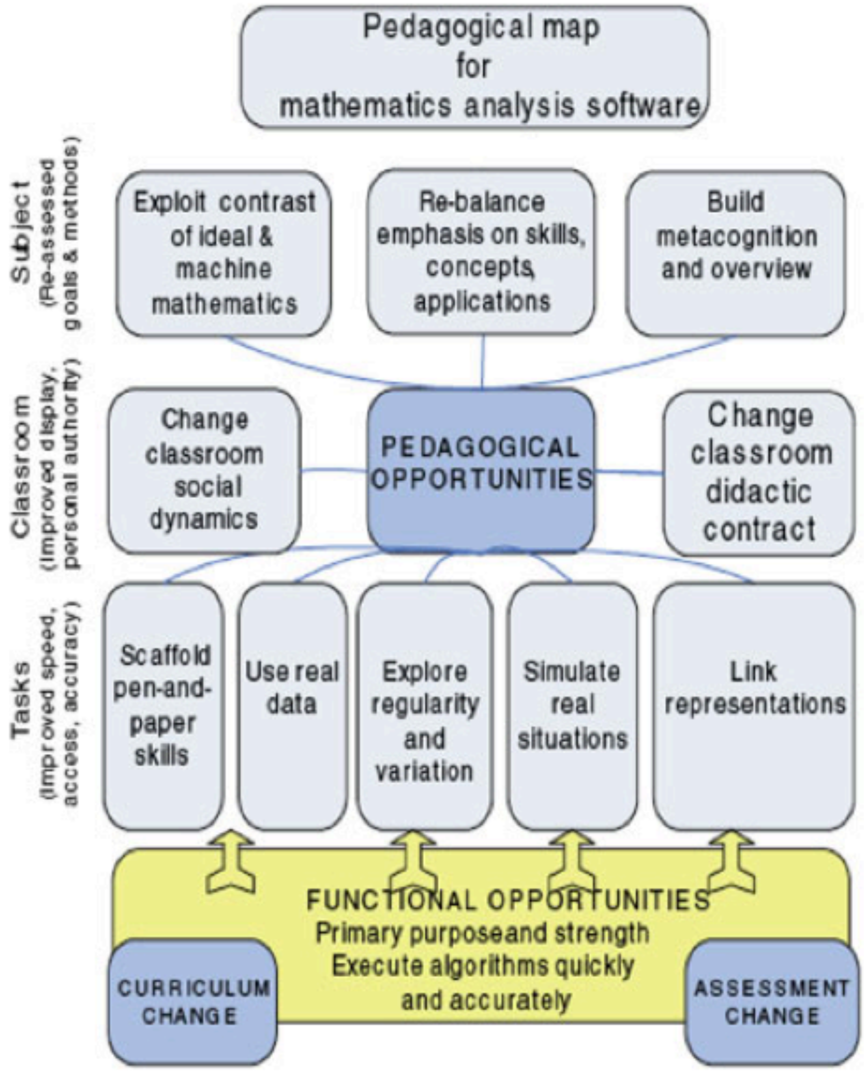


Figura 2.2 Oportunidades pedagógicas en aulas con acceso permanente a CAS (Pierce & Stacey, 2010).

Debido a la capacidad de los CAS para ejecutar procedimientos simbólicos con rapidez y precisión, se amplia el tiempo disponible para que los estudiantes participen regularmente en una gama más diversa de tipos de tareas. La capacidad de manipulación simbólica de los CAS permite la exploración de diferentes ideas matemáticas en formas que no eran posibles o factibles sin tal ayuda tecnológica. Estas nuevas oportunidades implican la exploración de invariantes matemáticos, la vinculación activa de las representaciones dinámicas, el enlace con datos reales y simulaciones realistas de las relaciones matemáticas. Con la bienvenida de los CAS en las aulas de la escuela, los cambios pueden ocurrir no sólo en las tareas, sino también en los modos de interacción entre profesores y estudiantes. (Heid, Thomas, y Zbiek, 2013)

En este mismo sentido Pierce & Stacey (2010) ilustran, ricamente las oportunidades pedagógicas que tienen las aulas con acceso permanente a CAS (véase la figura 2.2).

2.2.2.2 Dificultades

La principal dificultad es que aún no se ha podido llevar a cabo de manera satisfactoria la implementación de los CAS en las aulas, a pesar de que los primeros paquetes se desarrollaron desde los años 80, como ya lo ponen de manifiesto Paul Drijvers y Hans-Georg Weigand.

> Hoy en día, a pesar del uso de las tecnologías digitales en el mundo público y empresarial, a pesar de la enorme cantidad de trabajos de investigación y de estudios sobre la práctica de clase, el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y su impacto en los planes de estudio es aún limitada. Esto se nota con frecuencia en el actual *ICMI 17 Study, Mathematics Education and Technology Rethinking the Terrain* (Hoyles & Lagrange 2010) por ejemplo, " [...] La tecnología sigue desempeñando un papel marginal en las aulas de matemáticas " (p. 312) o " el impacto de esta tecnología (CAS) en la mayoría de los planes de estudio es débil hoy " (p. 426).
>
> (Drijvers y Weigand, 2010, p. 666)

Entre el abanico de razones que explican esta situación, Drijvers y Weigand, (2010) consideran que la principal es el factor tiempo, ya que un cambio educativo en el que se involucran tantos actores, necesita tiempo para poderse implementar adecuadamente. De otra parte Butler et al. (2010), citando a Hoyles y Noss (2003), ven este fenómeno como una “marginalización de la tecnología” lo que “en parte, muestra un fallo en la adecuada teorización del apoyo a los alumnos para desarrollar una fluida y efectiva relación con la tecnología en el aula”. Otros atribuyen la incompleta implementación de los CAS en las aulas a la dificultad de realizar un cambio radical en la naturaleza de las matemáticas escolares o a las dificultades relacionadas con la preparación de profesores idóneos para trabajar efectivamente con tales cambios. (Zbiek y Hollebrands, 2008).

Pero como mencionan Heid, Thomas, y Zbiek (2013, p. 599) “Las barreras a la incorporación de CAS en las matemáticas escolares, sin embargo, también podrían relacionarse con la naturaleza de la propia herramienta y sus usos potenciales en las matemáticas escolares”. Esto en torno al debate ya citado sobre la implementación de los CAS en los currículos escolares.

Sobre las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje vemos, puntualmente, las siguientes.

2.2.2.2.1 Carácter de Arriba hacia Abajo

En primer lugar, el entorno de álgebra computacional tiende a tener el carácter de una herramienta de arriba hacia abajo. Debido a que un CAS contiene tanta pericia matemática, un riesgo de usarlo para un propósito educativo es que los resultados se obtienen *de arriba hacia abajo*. Es decir, todo 'ya está ahí', ya está inventado. Además, el CAS es a menudo bastante rígido en lo que se refiere a la sintaxis, y no admite notaciones informales. En ese sentido, el CAS es más bien una herramienta de exploración que una herramienta expresiva (Doerr, 2001; Doerr y Zangor, 2000).

Relacionada también con el enfoque de arriba hacia abajo, consideramos con Drijvers (2003) una segunda dificultad, el carácter de caja negra de los CAS, (Buchberger,1990), ya mencionado. Al igual que muchas otras herramientas tecnológicas, el CAS no suele proporcionar mayor información sobre la forma en que obtiene sus resultados. El software es una caja negra que no muestra sus métodos, incluso en problemas sencillos los métodos que utiliza un CAS son, a menudo, mucho más sofisticados que los métodos propios que usarían los estudiantes.

Esto puede manifestarse en representaciones o resultados inesperados, que puede provocar en los estudiantes la percepción de una falta de transparencia; en dichas situaciones se sienten incapaces de "mirar" qué proceso usó el CAS para llegar a los resultados que lanza, y no pueden relacionarlos con su propia experiencia con las técnicas de papel y lápiz. Esto puede llevar a experimentar una falta de congruencia entre el entorno del álgebra computacional, y el ambiente de trabajo con papel y lápiz. Así el álgebra computacional y la técnica de papel y lápiz, son vistas como elementos ajenos, y no como diferentes implementaciones de la misma técnica (Drijvers, 2002).

2.2.2.2.2 Micromundo

Otra dificultad la han presentado Guin y Trouche (1999), quienes argumentan que un CAS es un micromundo cerrado, y que los estudiantes no vinculan automáticamente este micromundo con el mundo de las Matemáticas, o con el mundo de la vida real. Por supuesto, este inconveniente también es válido para otras herramientas tecnológicas, pero por lo general en menor medida. La percepción del CAS como un micromundo por sí solo puede dar lugar a los fenómenos de pseudo-transparencia y doble referencia, que se discutieron en un apartado anterior (Artigue, 1997). Brevemente, Pseudo-transparencia se refiere a las diferencias sutiles entre las técnicas en el entorno de los CAS y las técnicas de papel y lápiz. La Doble Referencia, alude al hecho de que los estudiantes están descubriendo el micromundo del CAS en lugar de desarrollar la comprensión matemática.

2.2.2.2.3 Uso aleatorio de los comandos

Una dificultad más que se da con el uso de la tecnología es lo que concierne al riesgo latente de que los estudiantes sólo tienen que pulsar botones, y en consecuencia ya no tienen que pensar; de hecho, a veces los estudiantes exhiben un comportamiento de "pesca", simplemente presionando teclas, o activando comandos al azar, con la esperanza de que uno de ellos dará lugar a la respuesta correcta.

Sin embargo, para muchas de las funcionalidades del CAS, esta táctica rara vez funciona. El trabajar en el entorno de los paquetes de cálculo simbólico requiere una expresión precisa y bien formulada de lo que hay que hacer, y por lo tanto requiere del pensamiento (Malle, 1993).

2.2.2.2.4 Inexperiencia

Existe otro riesgo latente que tiene que ver con el aumento de la eficiencia y la reducción en el tiempo dedicado a cálculos algebraicos, un beneficio proporcionado por el uso de los CAS, que se menciona con frecuencia. Sin embargo, desde la óptica de la praxis pedagógica, en el ámbito de la educación secundaria, o en los primeros cursos de universidad, donde los usuarios de las CAS suelen ser usuarios novatos, este beneficio puede ser cuestionado. En relación con esta situación, Artigue señala que los estudiantes carecen tanto de los conocimientos matemáticos como de la experiencia en el uso de los CAS para poder utilizarlos de manera eficiente (Artigue, 1997).

Desde nuestro punto de vista, creemos que es importante prestar atención a estas dificultades ya que, como lo expresa Artigue (1997) –y con lo que estamos de acuerdo–, un análisis de las limitaciones es relevante para comprender mejor las posibilidades que ofrece una herramienta tecnológica en la potenciación de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

2.3 REPRESENTACIONES DE FUNCIONES

En esta sección abordamos algunos aspectos y conceptos relacionados con la representación de gráficas y funciones. En un primer momento exponemos una breve reseña histórica; luego pasamos a la revisión de la literatura sobre la representación de gráficas sin el uso de ordenadores; y en tercera instancia, mostramos las oportunidades y dificultades que pueden darse en la representación de funciones con múltiples representaciones en ordenadores.

2.3.1 TIPOS DE REPRESENTACIÓN

El estudio del concepto de función y su representaciones han estado estrechamente relacionados, tanto así que la investigación de uno de estos aspectos en muchos estudios va de la mano con la del otro, como lo precisan Leinhardt, Zaslavsky y Stein. "Una de las razones para elaborar nuestro estudio sobre funciones y gráficas es que las representaciones gráficas y algebraicas son dos sistemas de símbolos muy diferentes que se articulan para construir de forma conjunta y definir el concepto matemático de la función. Ni las funciones ni los gráficos pueden ser tratados como conceptos aislados". (Leinhardt, Zaslavsky y Stein,1990, p. 3)

Incluso antes de que el uso de herramientas tecnológicas para apoyar el aprendizaje de las representaciones comenzara a ser estudiado por los investigadores, las dificultades experimentadas por los estudiantes con las representaciones gráficas habían sido un tema de interés (por ejemplo, Kerslake, 1977; Janvier, 1981a; Clement, 1985; Ponte, 1985).

Según Kieran (2006) la conexión entre las gráficas y las ecuaciones sin usar tecnología continúa siendo un tema fundamental de investigación como lo muestran los estudios sobre rectas de Knuth (2000), Zaslavsky, Sela y Leron (2002) y en el contexto español el más reciente de Pecharroman (2009) sobre funciones.

Nos parece relevante revisar algunas de las ideas de estos estudios pioneros, que pueden brindar luces sobre los temas de este trabajo. Así, por ejemplo, en la tesis doctoral de Claude Janvier *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations : Studies and teaching experiments*, Janvier, 1978, aunque él esta primordialmente interesado en el estudio de la interpretación de gráficas, aborda otros tipos de representaciones de situaciones como la tabular, la verbal y las formulas (ecuaciones). De otra parte menciona lo que él llama "el *proceso de traducción* que consiste en ir de un modo de representación a otro" (Janvier, 1978, p. 1.0).

TRANSLATION PROCESSES

To / From	Situations, Verbal Description	Tables	Graphs	Formulae
Situations, Verbal Description		Measuring	Sketching	Modelling
Tables	Reading		Plotting	Fitting
Graphs	Interpretation	Reading off		Curve fitting
Formulae	Parameter Recognition	Computing	Sketching	

Tabla 2.1 Procesos de traducción entre representaciones Janvier (1978)

La Tabla 2.1 resume los tipos de representación y cada uno de los procesos de traducción entre ellos. Janvier explica el proceso de la siguiente manera,

> Una traducción implica dos modos de representación. Por ejemplo para los modos ecuación y gráfico, tenemos las traducciones:
>
> "gráfico → ecuación" y "ecuación → gráfico".
>
> Para lograr una directa y (correcta) traducción, uno tiene que transformar la fuente con una mirada en el objetivo o, en otras palabras, verla desde una el punto de vista del objetivo y de ahí obtener los resultados. Por ejemplo, una gráfica tiene que ser examinada con una mirada de ecuación (con respecto a sus características ecuacionales). Este sencillo comentario sugiere estrategias de enseñanza, así como puntos de la importancia para el proceso inverso (que nosotros preferimos llamar complementario), que esta simétricamente situado, con respecto a la diagonal [en la tabla 2.1]. De hecho, nuestra investigación sugiere que los procesos se desarrollan mejor en pares (simétricos), en nuestro caso, "gráfica → descripción verbal" (interpretación) y "descripción verbal → grafica" (hacer bocetos). Este principio ya se aplica en los métodos de enseñanza de lenguas extranjeras que enfatizan "escuchar" y "hablar" en el laboratorio de idiomas.
>
> (Janvier, 1987, p. 29)

Otros autores han ampliado el concepto, por traducción nos referimos principalmente a tres acepciones, la primera al acto de reconocer la misma función en diferentes formas de representación; la segunda es una profundización de la anterior logrando identificar para una transformación específica de una función en una representación su correspondiente transformación en otra representación (Kaput 1987a, 1987b, Yerushalmy, 1989); y la tercera acepción consiste en construir una representación de una función dada otra (Leinhardt et al., 1990). Así las tareas de traducción son fundamentales para el concepto de función, el cual tiene marcados aspectos gráficos y no gráficos (Vinner y Dreyfus, 1989).

De otra parte, entre las conclusiones de Janvier sobre las gráficas está cómo los estudiantes tienden a confundir las representaciones graficas interpretándolas icónicamente, Janvier recomienda que las gráficas que se les propongan a los estudiantes para interpretar sean más de índole cualitativa donde se destaquen las características del fenómeno de manera global, más que aquellas de carácter cuantitativo.

Además de ello, aboga por desarrollar en los estudiantes técnicas de lectura de gráficas, así como pedirles que, a partir de gráficas complejas, discutan sobre características de la gráfica tales como su forma o la fluctuación de los valores de una variable.

2.3.2 INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

A continuación presentamos algunos aspectos importantes de la investigación sobre la interpretación de gráficas que tienen un papel relevante en nuestro estudio como son los procesos de interpretación cualitativa y de predicción para luego pasar a mencionar algunos conceptos erróneos, peligros y dificultades.

2.3.2.1 Interpretación Cualitativa

En esta misma línea otras conclusiones de estos trabajos iniciales se refieren también a la interpretación cualitativa de gráficas, que es un área insuficientemente representada en el plan de estudios de matemáticas –en su momento– (Leinhardt et al.,1990). A pesar de ello, una serie de estudios que investigan la interpretación cualitativa de gráficas en los estudiantes emergen de una orientación hacia los fenómenos físicos y de ciencia (Brasell y Rowe, 1989; McDermott, Rosenquist, y van Zee, 1987; McKenzie y Padilla, 1986; Mokros y Tinker, 1986) o desde un punto de vista en que las matemáticas podrían proporcionar herramientas para ayudar a explicar los fenómenos físicos y que los estudiantes deben ser capaces de utilizar las matemáticas para este fin (Janvier, 198l; Preece, 1983)

Como explican Leinhardt et al. (1990), una interpretación cualitativa de una gráfica en su sentido más completo requiere una mirada global de toda ella (o de una parte) y la obtención de significado sobre la relación entre las dos variables y, en particular, su patrón de covariación.

Aunque las características globales pueden ser interpretados de forma cuantitativa o cualitativa es menos común interpretar las características locales cualitativamente, a excepción de los cambios dramáticos de la forma, la tasa de cambio o la dirección.

2.3.2.2 Predicción

Un aspecto de la interpretación de gráficas también relevante para nuestro estudio es la predicción. Nos referimos a predicción como la acción de realizar conjeturas sobre una parte determinada de una gráfica donde algunos puntos de la gráfica (no son trazados o no se dan explícitamente) se deben colocar o bien se debe mirar cómo serían estas otras partes de la gráfica (Leinhardt et al.,1990). La predicción también puede ocurrir cuando se conjetura una regla dado un número de sus casos [por ejemplo, "guess my rule" (Davis, 1982; Swan, 1982;. Willoughby et al, 1981)].

Los estudios que incorporan tareas de predicción incluyen Bell y Janvier, (1981); Dreyfus y Eisenberg, (1982); Greeno, (1988a, 1988b); Karplus, (1979); Markovits et al, (1983, 1986); Stein y Leinhardt, (1989).

Una revisión de las tareas de predicción revela que no todas éstas se basan en el mismo conjunto de habilidades. Algunas se basan principalmente en la estimación y en cierta medida de las habilidades de medición, en tanto que otras dependen de la detección de un patrón.

2.3.3 PELIGROS, DIFICULTADES Y CONCEPTOS ERRÓNEOS

A continuación presentamos algunas dificultades y conceptos erróneos que se muestran en la literatura sobre la construcción e interpretación de gráficas en el entorno de lápiz y papel.

2.3.3.1 Linealidad

Varios estudios reportan la tendencia de algunos estudiantes a "gravitar" alrededor de la linealidad en diferentes situaciones. Lovell (1971) encontró que los estudiantes tenían una fuerte tendencia a definir una función como una relación que produce un patrón lineal cuando se grafica. Del mismo modo, Markovits et al. (1986) encontraron que, cuando se les pidió a un grupo de estudiantes, generar ejemplos de gráficas de funciones que podrían pasar a través de dos puntos dados, los estudiantes realizaron gráficos mayormente lineales. Esta tendencia a la linealidad también se ha mostrado en las tareas que se centran en más de dos puntos (Dreyfus y Eisenberg, 1983; Markovits et al., 1983).

Tendencias fuertes hacia la linealidad también se han reportado en las tareas de traducción. Por ejemplo, Zaslavsky (1987) pidió a los estudiantes que encontraran una ecuación para la gráfica de una parábola que contenía tres puntos marcados. Algunos estudiantes utilizaron sólo dos puntos para encontrar la ecuación. Pero además, los usaron de una manera que sugiere una mentalidad lineal, porque los utilizaron para calcular cuál sería la pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos. Luego insertaron este "valor de la pendiente" en la forma canónica de la ecuación de una parábola como el coeficiente principal.

2.3.3.2 Reconocer la Ecuación

De otra parte se ponen de presente las dificultades en la construcción de gráficas, y en el reconocimiento de la ecuación a partir de una gráfica

> "El trabajo empírico en esta área soporta la noción de que el movimiento de la gráfica a la ecuación es más difícil. Por ejemplo en la reciente National Assessment of Educational Progress los resultados indican que, cuando se entregó una regla y una hoja de papel con un sistema de coordenadas marcado, únicamente 18% de los estudiantes de 17 años produce una gráfica correcta correspondiente a una ecuación lineal. Sin embargo la translación en sentido opuesto fue aún más difícil. Dada una gráfica de una línea recta con los puntos de intercepción indicados (-3,0) y (0,5), únicamente el 5% de los estudiantes de 17 años pudo generar una ecuación" (Carpenter, Corbit, Kepner, Lindquist, & Reys, 1981). Otros estudios han confirmado estos hallazgos pero con diferentes grupos de edad Stein and Leinhardt (1989) con estudiantes de 10 y 11 años y Markovits et al. (1986) con estudiantes de 14 y 15 años.
>
> (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990, p. 35)

2.3.3.3 Escala

Las tareas de escala requieren una atención especial a los ejes, sus escalas y las unidades que se miden. En términos más simples, un estudiante debe ser capaz de decidir si el número de unidades que representa cada intervalo es uno, cinco o veinte y así sucesivamente, y además si los ejes deben utilizar la misma escala o diferentes.

Unos de los problemas que hemos notado en nuestra experiencia es la dificultad que encuentran algunos alumnos para poder marcar los intervalos sobre los ejes de idéntica magnitud y la dificultad de ubicar correctamente el cero y el uno en los ejes del sistema de coordenadas.

De otra parte, cuando se cambian las escalas para el trazado de una misma función la "imagen" resultante puede parecer muy diferente, este es el caso del estudio de Zaslavsky, Sela y Leron (2002) quienes han encontrado pruebas de mucha confusión con respecto a las conexiones entre aspectos geométricos y algebraicos de la pendiente, la escala y el ángulo. Las respuestas a una tarea sencilla, pero no estándar acerca del comportamiento de la pendiente en virtud de un cambio no homogéneo de escala revelaron dos enfoques principales - analítico y visual-, así como combinaciones de los dos. Los investigadores recomendaron que la instrucción sobre la pendiente distinga entre la concepción errónea de "pendiente visual" –la pendiente de una línea para la que el ángulo es un rasgo relevante– y la "pendiente analítica" –la razón de cambio de una función–.

Es interesante que la escala es un problema cuando se utilizan gráficos para el análisis de los datos científicos y en la instrucción basada en computadora, pero por lo general no es un problema en la introducción de gráficos en las clases de matemáticas. Esto puede ser, debido a que, a menudo en las clases de matemáticas la escala se asume o está dada (normalmente la escala es la misma en cada eje), esto hace que más tarde sea difícil usar escalas en las clases de ciencias.

Es de destacar la poca literatura directamente sobre este tópico, a pesar de su importancia de acuerdo con Leinhardt et al., (1990), "En contraste con el rol crítico que juega la escala en la construcción e interpretación de gráficas, las tareas sobre escalas raramente se abordan directamente en la literatura" (p. 19).

A continuación anotamos algunas confusiones que muestran los alumnos en la representación de graficas en entornos de lápiz y papel de acuerdo con la literatura.

2.3.3.4 Confusión entre Variables

Los alumnos no distinguen entre las variables. A menudo creen que las gráficas de estas variables deben ser idénticas; parecen cambiar fácilmente las etiquetas de los ejes de una variable a otra sin reconocer que la línea graficada también debe cambiar (Beichner, 1994).

2.3.3.5 Confusión Intervalo / Punto

En la interpretación de gráficos, los alumnos a menudo estrechan su enfoque a un solo punto, a pesar de que una serie de puntos (un intervalo) es más apropiado. Sin embargo, este enfoque en un solo punto parece ser parte de una tendencia más general a interpretar los gráficos con una mirada punto a punto (Leinhardt, Zaslavsky, y Stein, 1990).

2.3.3.6 Confusión Pendiente /Altura

Se han encontrado alumnos que confunden estas dos características gráficas en las tareas de interpretación y construcción (Leinhardt et al., 1990). A menudo confunden la pendiente con el valor máximo (o mínimo) – leyendo el valor desde el eje *y* y asignando directamente a la pendiente.

2.3.3.7 Interpretación Icónica

Los estudiantes, a veces, interpretan una gráfica de una situación como una imagen literal de esa situación. Un hallazgo frecuentemente citado en este sentido es la interpretación de los alumnos de los gráficos de viajes como los caminos de los viajes reales Janvier (1978). De otra parte Clement (1989) dividió este tipo de interpretación en dos categorías:

- *Correspondencia Global*: cuando la forma entera de la escena del problema se hace corresponder a la forma de todo el gráfico.

- *Correspondencia Local*: cuando una parte específica de la escena del problema se corresponde con una característica específica de la gráfica.

2.3.4 MÚLTIPLES REPRESENTACIONES

Desde un punto de vista histórico como mencionan Ferrara, Pratt y Robutti (2006, p. 239), "notamos un significativo cambio ocurriendo a finales de los ochentas, cuando la investigación empezó a poner atención a la relevancia de las múltiples representaciones para la enseñanza del álgebra". Esta misma idea la refuerza Kaput (1987c), enfatizando cómo la importancia de las múltiples representaciones y sus vínculos mutuos aumentó en esa misma época, cuando la investigación estaba empezando a identificar las razones específicas por las cuales el álgebra es tan difícil de aprender y cuáles podrían ser las respuestas curriculares y pedagógicas apropiadas

2.3.4.1 OPORTUNIDADES

De esta forma tan pronto como la tecnología se hizo disponible para la integración de las múltiples representaciones en la educación matemática, sus principales oportunidades fueron examinadas por muchos investigadores. A continuación presentamos la opinión acerca de las oportunidades de este tópico de dos reconocidos investigadores.

> Observamos, […] en cuanto a la enseñanza del Álgebra, que los recursos tecnológicos amplían la consideración habitual del Álgebra como un lenguaje. La facilidad de obtener diferentes formas de representación para expresar relaciones cuantitativas influirá tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del Álgebra.
>
> El potencial del ordenador y de las calculadoras de última generación para crear ambientes de aprendizaje que difícilmente podrían ser logrados sin disponer de estos recursos está fuera de duda. Estos ambientes requieren, unas veces, la elaboración de programas o códigos para establecer secuencias que permiten desarrollar aspectos operacionales del conocimiento algebraico, así como hacer predicciones, otras; estos

> ambientes se centran en las relaciones entre distintas representaciones de objetos matemáticos, poniendo énfasis en los aspectos estructurales, y a veces combinando ambos.
> Podemos decir, que, la investigación en ambientes computacionales es un dominio emergente de la investigación en pensamiento algebraico, pero que está aún en sus inicios al no disponer de información respecto a los efectos en el aprendizaje a largo plazo.
>
> (Socas, 1999, p. 4)

De acuerdo con Kaput citado por Carolyn Kieran,

> Kaput (1989) ha argumentado que el problema del aprendizaje de los estudiantes en álgebra se agrava por (a) las dificultades inherentes en el trato con la sintaxis muy concisa e implícita de los símbolos algebraicos formales y (b) la falta de vínculos con otras representaciones que podrían proporcionar retroalimentación sobre las medidas adecuadas adoptadas. Como consecuencia de ello, él ha promovido el tipo de construcción de significado matemático que tiene su fuente en *traducciones entre los sistemas de representaciones matemáticas*. Aunque tablas, gráficos y ecuaciones se pueden usar para mostrar las relaciones binarias, una diferencia fundamental, de acuerdo con Kaput, entre las tablas y gráficas es que, "una gráfica compromete nuestra habilidad productora gestalt, lo que nos permite consolidar una relación cuantitativa binaria (y especialmente una funcional) en una sola entidad gráfica –una curva o línea– "(Kaput, 1989, p. 172, paréntesis en el original).
>
> (Kieran, 2006 p. 33)

Este enorme potencial que, desde su inicio, se veía en el empleo de las múltiples representaciones para el manejo funcional, ha producido en estos años innumerables estudios, e incluso nuevos campos de investigación. No es nuestra intención presentar estos estudios, ya que una revisión de este tipo supera los límites de este trabajo. Donde si nos detendremos será en la revisión de las dificultades que la literatura relaciona con nuestro estudio.

De otra parte, a pesar del ingente volumen de investigaciones sobre múltiples representaciones, existe aún mucho por hacer en el ámbito de las representaciones vinculadas dinámicamente como lo mencionan Heid, Thomas & Zbiek (2013), para estas autoras los ambientes CAS cuentan no sólo con múltiples representaciones, sino también con representaciones vinculadas dinámicamente en formas que permiten a los usuarios progresar rápidamente a través de múltiples ejemplos haciendo clic o arrastrando un elemento de una representación y viendo los cambios correspondientes en otros registros.

Los estudiosos que trabajan fuera de los ambientes CAS (por ejemplo, Hegedus y Kaput, 2007) han enfatizado el potencial de las representaciones enlazadas dinámicamente para permitir a los estudiantes ver cómo un fenómeno en una representación podría no ser evidente en otra. Duncan (2010) indicó que los profesores creen que las representaciones dinámicas vinculadas proporcionan a los estudiantes con evidencia para soportar su razonamiento. Como señaló Kieran (2007), la investigación sobre los efectos del cambio controlado sobre las representaciones vinculadas dinámicamente es un dominio subdesarrollado de investigación.

2.3.4.2 DIFICULTADES O PELIGROS

Ya sobre las dificultades, la literatura muestra algunas, que nos parece que pueden ser relevantes en este estudio. Además de las mencionadas anteriormente con respecto a las graficas sin el uso de tecnología, podemos ahora mencionar algunas más, las primeras directamente relacionadas con la tecnología y su empleo y las siguientes atañen específicamente al manejo de las gráficas en entornos informáticos.

2.3.4.2.1 Paquete Informático

Cuando se va a realizar un trabajo con estudiantes sobre funciones utilizando varias representaciones en un entorno tecnológico, es importante decidir el tipo de paquete informático que se va a utilizar, y para ello hay que contestarse una serie de preguntas relevantes, algunas de carácter teórico y metodológico y otras simplemente de carácter práctico, como por ejemplo, ¿Qué posibilidades brinda?, ¿Qué tipo de representaciones puede soportar?, ¿Qué grado de fidelidad matemática tiene? ¿Cómo es su manejo? ¿Tiene licencia libre o hay que comprarlo? ¿En qué soportes trabaja? Por ejemplo calculadoras, tabletas, móviles, ordenadores –computadores personales o macintosh-Paul Goldenberg en su artículo *The Difference Between Graphing Software and Educational Graphing Software* (1991) da unas pautas de cómo debería ser un paquete informático adecuado para su uso en ambientes educativos, diferente de aquellos que podría utilizar un ingeniero o un matemático y como debería ser la enseñanza e incluso el currículo. Sobre el paquete puntualiza que en él debe ser,

- *Fácil modificar las funciones*, que las expresiones sean editables, sus gráficas sus ecuaciones al cambiar un parámetro. En este sentido por ejemplo la herramienta deslizador es un avance.

- *Fácil comparar las funciones,* de manera que es pertinente que admita diferentes formatos de la misma función para poderlos comparar por ejemplo $2(x+1)^2-32$ con $2(x-3)(x+5)$ y con $2x^2+4x-3$. Como mencionamos en el apartado 3.3, Cuando nos referimos a una familia de funciones esta puede expresarse con diferentes formas canónicas según el énfasis que pretendamos marcar y los aspectos que se quieran resaltar, esto implica por tanto, que sus parámetros tienen significados distintos y por tanto el paquete informático debe brindarle al estudiante la posibilidad de compararlos.

- *Posible reconocer la transformación de un punto específico,* para ello propone Goldenberg que el paquete permita "marcar" los puntos, que muestre el recorrido que realiza el punto durante su transformación y el punto que se obtiene por resultado.

- *Visible la información sobre la escala.* El tema de la escala es un asunto delicado para Goldenberg, además de lo comentado anteriormente, en su artículo hace varias recomendaciones, la primera de ellas, *presentar información visual sobre la escala,* se refiere a que el paquete le debe brindar al usuario una muestra visual de cómo sería el efecto de una determinada escala comparada con la imagen actual, una especie de ventana con un efecto zoom, como se muestra en la figura 2.3.

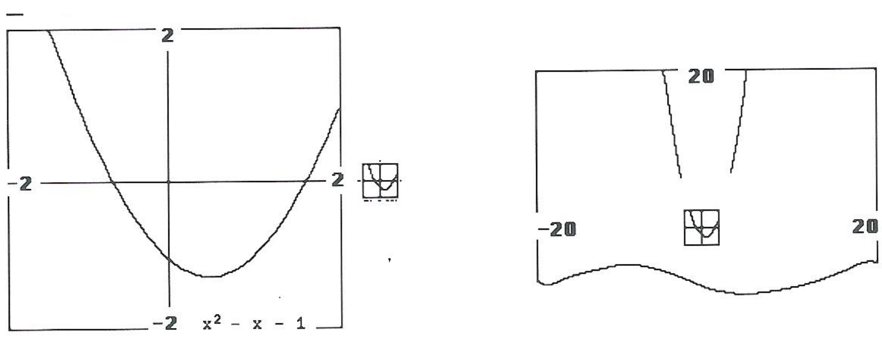


Figura 2.3 Información sobre la escala de forma visual Goldenberg (1991).

- *Proveer controles cuantitativos y cualitativos de la escala,* así el paquete debe poseer controles de escala con valores específicos, y los segundos a manera de zoom sobre la gráfica, esto con el fin de que el usuario del paquete realmente logre aprender el concepto de escala.

2.3.4.2.2 Fidelidad Matemática

Muy relacionado con el punto anterior, se encuentra el tema de la fidelidad matemática,

> Dentro del público en general, es un mito común que el computador siempre tiene la razón -una percepción de su "Fidelidad matemática." El mensaje principal de esta sección es que esta noción es simplemente errónea.
>
> (Sträßer, 2001)

Así comienzan Olive et al. (2010) toda una disertación sobre este tópico en donde a través de ejemplos puntuales de diferentes tecnologías van mostrando una realidad, los computadores se equivocan, así por ejemplo,

> El computador normalmente no comete errores en problemas aritméticos elementales. Sin embargo, el análisis numérico muestra algunas restricciones importantes de la aritmética basada en el ordenador:
>
> • Como cada máquina de computación tiene almacenamiento finito, es obvio que no puede representar correctamente los números irracionales o números racionales con más dígitos que los que el almacenamiento puede contener. Esta es una razón por la que es aconsejable permanecer en "modo algebraico" en [los] CAS (por ejemplo, *Derive*) el mayor tiempo posible.
>
> • La mayoría de las máquinas de computación trabajan internamente con "aritmética de punto flotante," a menudo no en un sistema de base diez, pero si en un sistema de base dos o de base 16. Por consiguiente, la máquina es simplemente incapaz de representar correctamente fracciones tan simples como $\frac{1}{3}$.
>
> (Olive et al., 2010, p.151)

De esta manera concluye Zbiek et al., (2007), es importante tomar una posición ante estas situaciones "porque uno puede demostrar que el computador NO siempre es correcto, que de hecho comete "errores" si se compara con las matemáticas teóricas. En otras palabras, existe un límite al nivel de "fidelidad matemática" (Zbiek et al., 2007) para cualquier tecnología digital" (citado por Olive et al., 2010, p.153, mayúsculas en el original).

2.3.4.2.3 Autoridad del Ordenador

Ya Tall en 1989 expresó su preocupación de que en el proceso de utilización de la tecnología, la "autoridad de la máquina" puede ser un impedimento para el aprendizaje, sobre todo en las primeras etapas, Este mismo fenómeno parece que lo notaron Leinhard et al., (1990) sobre las gráficas que produce el ordenador

> En la instrucción basada en computadora, la autoridad puede estar en manos de la computadora de maneras sutiles que no apoyan el aprendizaje. La gráfica que la máquina produce es incuestionable. Un profesor debe ser consciente del efecto "mágico" que esto puede tener en los estudiantes. Los estudiantes pueden desarrollar una dependencia demasiado fuerte de la máquina.
>
> (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990, p.7)

En los siguientes apartados nos referimos específicamente a las dificultades del manejo y comprensión de las gráficas en entornos informáticos

2.3.4.2.4 Escala

Un aspecto relevante sobre las representaciones gráficas realizadas con ayuda de tecnología, es el asunto de la escala, el cual contempla varios aspectos, en primer lugar la ventana donde se realiza la representación, de otra parte las características de los objetos que visualiza y finalmente la escala misma.

Respecto al primer aspecto, el estudiante debe ser capaz de percibir la pantalla del ordenador o de la calculadora graficadora como una "pequeña ventana" a través de la cual él puede "ver" un plano infinito –teóricamente hablando–, así la posición y las dimensiones de la ventana determinan que parte de la gráfica se incluye en la imagen representada por la calculadora o el ordenador (Goldenberg, 1988).

De otra parte los objetos que ve nuestro estudiante a través de esta ventana, o que podríamos ver nosotros, muchas veces también son infinitos en tamaño y relativamente pobres en características discretas identificables –por ejemplo una recta o una parábola– entonces nuestras estrategias cotidianas fallan: lo que experimentamos es una ilusión de nuestra percepción o de la atención (Goldenberg, 1987, 1988) Por ejemplo una parábola magnificada varias veces de manera que no observemos el vértice fácilmente se confunde con una línea recta.

Volviendo a nuestra ventana, ya en términos de la escala el estudiante debe poder reconocer varios tipos de situación, en primera instancia si se varían las dimensiones de los dos ejes simultáneamente en un factor proporcional, se percibe un efecto "zoom" de alejamiento o acercamiento de la grafica según sea el factor. Pero si se ajusta uno solo de los ejes (o los dos pero de manera diferenciada) este ajuste "deforma" la grafica.

Así por ejemplo si se comparan dos imágenes de la misma recta, una en la escala normal con los ejes en relación 1:1 y otra en que se haya variado la escala de uno de los ejes, se notará un cambio de posición entre las dos rectas, ya que la pendiente matemática (calculada) y la visual (la inclinación de la recta) son diferentes. O en una situación semejante comparando las imágenes de una misma parábola, se notará que un cambio en la escala produce un cambio en la "forma", haciendo una de las curvas más "ancha" o más "estrecha", respecto de la otra.

De esta manera las exploraciones realizadas a través de paquetes gráficos ciertamente pueden llevar a conclusiones "correctas" pero también pueden llevar a complejas conclusiones no esperadas si no tomamos las precauciones adecuadas.

2.3.4.2.5 Dificultad Relativa de las Funciones

Un aspecto importante en el diseño de la enseñanza, es distinguir que todas las familias de funciones *no* tienen el mismo grado de dificultad a la hora de poder reconocer sus parámetros desde la gráfica, así algunas funciones que por su manejo algebraico parecen relativamente sencillas como las funciones lineales, tienen un elevado grado de dificultad para poder reconocer sus parámetros desde la gráfica, en cambio algunas funciones de grado mayor y un mayor número de coeficientes pueden ser mas fácilmente reconocidas, en este sentido Goldenberg (1991) sugiere que el proceso de enseñanza debería comenzar por funciones con características discretas identificables, como curvas con varios puntos críticos. Luego es una pregunta importante en el momento del diseño decidir sobre ¿Cuáles familias de funciones se deben estudiar primero?

2.3.4.2.6 Forma Canónica

No todas las formas canónicas ayudan de la misma forma para realizar una representación grafica, en algunas se notan más las transformaciones que en otras (ver apartado 3.3), por ejemplo para una función cuadrática podemos utilizar diversas formas de la ecuación canónica, así la forma $y = ax^2 + bx + d$ es más difícil que la forma $y = a(x - c)^2 + d$ que utilizamos en nuestro estudio.

En la primera se ha puesto el énfasis en su expresión algebraica, como polinomio y los parámetros se refieren a los coeficientes del polinomio, por tanto si tenemos la intensión de graficar la función solamente dos de los parámetros de esta expresión, a y d corresponden con transformaciones respecto de la función patrón $y = x^2$.

En cambio en la segunda forma canónica el acento se pone precisamente sobre las transformaciones que permiten obtener la gráfica, buscada a partir de la gráfica de una función de la familia, una función patrón, en este caso $y = x^2$, y los parámetros a, c y d se refieren a esas transformaciones.

2.3.4.2.7 Visión Global

Es importante que los estudiantes puedan tener una visión global de la función que están estudiando, aspecto este que ya mencionaba Janvier (1978) y que nuevamente Goldenberg (1991) ve importante y critica que los paquetes informáticos no les facilitan esta situación a los estudiantes, al graficar siempre los puntos de manera continua y de izquierda a derecha, él en cambio propone que la gráfica en el ordenador fuera generada de forma aleatoria y de manera discreta, hasta que poco a poco se fuera completando de esta manera el estudiante poco a poco va descubriendo la forma general de la función, y en el proceso ira generando hipótesis que le irán acercando al modelo que mejor se ajuste a la gráfica, una segunda sugerencia que hace Goldenberg (1991) y que es la que utilizamos en este estudio, es la de utilizar una tabla de datos para ir graficando los puntos de manera discreta.

2.3.4.2.8 Ajustar el Currículo

A partir de estas dificultades, pero especialmente de la dificultad relativa de las funciones y de la importancia de la forma canónica utilizada, es claro que se hace necesario realizar ajustes al currículo, en el sentido de Pea (1985) de usar la tecnología como un organizador del currículo. De manera que si nuestra intensión es utilizar un paquete informático para la enseñanza es fundamental contemplar muchos de los aspectos hasta aquí mencionados, que con toda seguridad provocaran cambios y ajustes en el currículo. En este sentido Goldenberg (1991) propone por ejemplo antes de empezar el tratamiento de funciones, realizar una introducción a las transformaciones en el plano desde una perspectiva geométrica; así como realizar una aproximación intuitiva y visual a algunos de los temas de análisis, antes de entrar en los aspectos del álgebra. Así como el cambio propuesto en la secuencia de estudio de las funciones, comenzando por funciones no lineales para pasar luego a las lineales.

2.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y MODELIZACIÓN.

En esta sección presentamos los enfoques de resolución de problemas y modelización que guían este estudio y a partir de los cuales se desarrollan ideas relevantes que sustentan nuestro modelo de enseñanza y el experimento.

En la investigación sobre la enseñanza del álgebra varios enfoques se han desarrollado en las últimas décadas, entre ellos podemos destacar el álgebra como generalización de la aritmética, el álgebra como solución de problemas y ecuaciones y el álgebra a través del estudio y la modelización de funciones.

A este respecto, Puig y Monzó afirman que:

> […] el álgebra en el currículo de secundaria ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista: el álgebra como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración; el álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.
>
> (Puig y Monzó, 2008, p. 142).

Desde la perspectiva de nuestro trabajo, son muy relevantes los dos últimos aspectos, el enfoque en resolución de problemas y el enfoque de la modelización de funciones, comencemos por el primero.

2.4.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Polya (1945), en su *Breve diccionario de Heurística,* presenta dos voces para el término *heurística*, en la primera lo define como una rama del saber cuya "intención es estudiar los métodos y las reglas del descubrimiento y la invención" y en la segunda voz *heurística moderna*, limita el objeto de la heurística a comprender el proceso de resolución de problemas, especialmente las operaciones mentales típicamente útiles en ese proceso.

Para Puig (1996) lo que es propio de la heurística, es "el estudio de los distintos modos de comportamiento al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos, que son independientes del contenido y que no suponen garantía de que se obtenga la solución" (Puig, 1996, p.38) .

Centrándonos en la heurística moderna, no podemos dejar de mencionar algunos de sus máximos exponentes como Polya y Schoenfeld que, pese a declararse el uno predecesor del otro, los modelos que proponen son de tipos distintos ya que provienen de metodologías de análisis distintas.

De una parte, Polya (1945) elabora el que Puig (1996) llama un modelo de competencia dividido en cuatro fases basándose en la introspección examina el comportamiento de un resolutor de problemas que podríamos llamar 'ideal', de manera que éstas fases se suceden una tras otra, pasando por cada una de ellas sólo cuando la anterior ha concluido. Las fases que describe son: comprensión, elaboración del plan, ejecución del plan y mirada retrospectiva.

El trabajo de Schoenfeld (1985) es por otro lado, la búsqueda de explicaciones para la conducta de los resolutores reales de problemas, de manera que el análisis reiterado de los comportamientos que éstos desarrollan en el proceso de la resolución de problemas, le permite una categorización de las conductas y una descripción del proceso como conjunto de episodios o grupos de conductas que se englobarían bajo la misma conducta de actuación, elaborando lo que Puig (1996), califica como un modelo de actuación, y no de competencia como sería el caso de Polya. De esta manera Schoenfeld, no centra su estudio en la actuación del resolutor ideal como lo hace Polya, sino que enfoca su análisis en el estudio de las razones que conducen a la persistencia en el fracaso de los resolutores. Así propone un marco con cuatro componentes: heurísticas, gestión, recursos y sistemas de creencias (Schoenfeld, 1985).

En este sentido Puig (1996) puntualiza:

> Cuando, pese a conocer las herramientas heurísticas, no se ha sabido cuál había que usar, cuándo o cómo había que hacerlo, o no se ha evaluado los efectos de su uso para el desarrollo de la resolución, se habla de que es preciso un buen *control* de lo que se hace, un *gestor* del proceso. Cuando, pese a conocer las herramientas heurísticas y gestionar bien lo que se ha estado haciendo, ha faltado un conocimiento de algún hecho, algoritmo o esquema propio del dominio del problema en cuestión, o no se han usado las destrezas que hubieran allanado el camino, se desciende a considerar que ha habido una carencia de *recursos*. Y cuando, pese a disponer de todo lo anterior, la concepción de la naturaleza de las matemáticas o de la tarea de resolver problemas ha hecho que no les cupiera en la cabeza que eso que sabían podía usarse para resolver el problema, lo único que permite ya explicar el fracaso es el *sistema de creencias* de los resolutores. (Las cursivas son del original).
>
> (Puig, 1996, p.43)

Así pues, tal y como apunta Puig, en trabajos más recientes de Schoenfeld, se puede observar un cambio en la denominación de los componentes citados ya que ahora los llama aspectos cognitivos y la secuencia —heurísticas, gestión, recursos y sistemas de creencias— pasa a ser —conocimiento de base, estrategias de resolución de problemas, gestión y control, creencias y afectos— con uno nuevo que bajo el nombre de prácticas, (pretende servir como fuente de explicación de las creencias).

De otra parte es importante decir que Puig (1996) también hace su propia interpretación y elabora un modelo de competencia teniendo en cuenta las ideas de Polya y Schoenfeld pero desde el punto de vista de la semiótica de las matemáticas, por lo que, propone una lista abierta de elementos sujeta a posibles ampliaciones y modificaciones. Algunos de estos elementos son los siguientes: destrezas con potencial heurístico, sugerencias heurísticas, métodos de resolución con contenido heurístico, patrones plausibles, el gestor instruido, etc...

En el contexto de nuestro trabajo es importante subrayar que varios de los aspectos destacados por Puig (1996) del trabajo de Schoenfeld (1985), en particular el aspecto de la gestión y el control del proceso que serán retomados más adelante y se convertirán en una parte relevante de nuestro modelo de enseñanza y del experimento.

2.4.2 MODELIZACIÓN

Como mencionan Juan (2012), y Ortega (2013) según la definición que consideremos de problema (y consecuentemente de proceso de resolución de problemas), entre otros factores, el proceso de modelización puede considerarse como un proceso distinto al de resolución de problemas o puede verse como un caso particular de éste.

En este sentido Blum y Niss (1991) ya señalaban que los problemas verbales representaban ya un modelo real y por lo tanto, eran aproximadamente un proceso reducido del desarrollo de un modelo. O como menciona Borromeo (2006) “el modelo de situación visto como parte de la solución de problemas verbales pone de manifiesto un tipo de ciclo de modelización, en el que la fase de construcción de un modelo de situación coincide con la fase de construcción de un modelo real”. (Borromeo, 2006, p. 88).

En esta misma línea se pueden revisar las clasificaciones que han elaborado Borromeo (2006) y Kaiser, Sriraman y Blomhøj (2007) en donde categorizan los estudios en modelización en varios aspectos, entre otros contemplando esta relación con la resolución problemas.

Nuestro enfoque concibe los procesos de modelización como una extensión del proceso de resolución de problemas, en donde entendemos la modelización a través de funciones, como el proceso que organiza algún fenómeno mediante algún concepto matemático. En este proceso las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales y su significado está ligado a los procesos de traducción entre las propias expresiones algebraicas, las tablas de datos numéricos y las representaciones gráficas cartesianas. Las transformaciones algebraicas llevarán cualquier expresión algebraica a una forma canónica, en donde los coeficientes (o parámetros) de dicha forma canónica indican directamente propiedades de los fenómenos modelados con esas expresiones. (Puig y Monzó, 2008).

En este sentido siguiendo a Puig y Monzó (2008, 2013) y a Puig (2015) podemos considerar lo que estos autores llaman los elementos del proceso de modelización, que de forma esquemática se pueden enunciar así:

1. Un fenómeno que se describe mediante algunas medidas de algunas magnitudes.
2. Una regresión entre las medidas.
3. Un tipo de función que se ajusta mediante esa regresión.
4. Una decisión sobre el tipo de función que se va a ajustar de entre un catálogo de funciones disponibles, basado en:
   4.1. Un conocimiento de propiedades cualitativas del fenómeno.
   4.2. Un conocimiento de propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.
5. La determinación de la función concreta de ese tipo, que describe los datos obtenidos de ese fenómeno concreto observado.
6. La expresión de la función en una forma canónica, elegida de manera que los parámetros expresen propiedades del fenómeno que interesa resaltar.

(Puig y Monzó 2013, p. 7).

Estos tópicos los retomaremos en el capítulo siguiente cuando hablemos del modelo de enseñanza que se implementó para el experimento de este trabajo, en donde varios de los lineamientos hasta aquí citados se expresan en acciones concretas sobre el material de enseñanza

Nuestro enfoque como ya se ha mencionado, entiende los procesos de modelización como una extensión de la resolución de problemas en la línea que se ha venido trabajando en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia. Así, debemos puntualizar que nuestro estudio se encuentra enmarcado dentro de un grupo de trabajos que pretenden presentar un modelo de enseñanza que permita estudiar el proceso de modelización, los conceptos de familia de funciones y forma canónica de una familia de funciones y el significado de los parámetros de las formas canónicas respecto a la función y al fenómeno que se modeliza, así como analizar los resultados tras la aplicación del mismo.

Los trabajos de los que hablamos han partido de la tesis doctoral en elaboración de Onofre Monzó, de la que se han publicado algunos avances referentes a la fundamentación teórica y metodológica, así como resultados parciales, en Monzó y Puig (2007, 2008, 2010, 2011, 2012), Puig y Monzó (2008, 2013) y Puig (2015).

En este mismo sentido se cuentan los trabajos de fin de máster de Aránzazu Juan Blanco, *Modelo plausible vs. Modelo esperable. Un estudio exploratorio de aspectos del Proceso de modelización*, Juan (2012), y el de Míriam Ortega Pons, *Un estudi exploratori sobre el procés de modelització amb dades reals en l'entorn informàtic dels iPads,* Ortega (2013).

Como también el estudio exploratorio que realizan Monzó, Puig y Navarro (2015) en el entorno de las tabletas.

Sin embargo, cada uno de estos trabajos presenta unas características particulares en cuanto al contexto en que se han realizado, al uso de los diferentes soportes y paquetes informáticos y a la utilización (o no) de datos reales. Por eso, mientras los trabajos de Puig y Monzó (2013), Ortega (2013) y Monzó, Puig y Navarro (2015) se realizaron en un curso de bachillerato, el trabajo de Juan (2012) se realizó en un contexto universitario, en particular en alumnos de la facultad de matemáticas de la Universidad de Valencia. Además, los soportes utilizados también son diferentes: se utilizaron calculadoras gráficas (con CAS), ordenadores (con el programa Matlab) y iPads (con las aplicaciones Video Physics, Fecha Analysis y Free GraCalc). Además, cabe destacar que en los experimentos realizados con calculadoras gráficas y iPads se hace una recogida de los datos con los que se trabaja posteriormente. Por el contrario, en el experimento de Juan se trabaja con datos que se proporcionan a partir del enunciado de un problema.

2.4.3 MODELOS EN LA MATEMÁTICA REALISTA

Además de este enfoque de modelización, es importante anotar otro que también esta muy relacionado con este trabajo, es el enfoque de modelización desde la concepción de la Matemática Realista (RME) de la que se hablará con mayor detalle en el apartado 3.1 del siguiente capítulo sobre el Experimento de Enseñanza, pero que en este momento daremos un breve adelanto.

La Matemática Realista se basa en la Fenomenología Didáctica de Freudenthal (1983) y en su visión de que las matemáticas son una actividad humana y que la realidad puede ser utilizada como fuente para la matematización.

El núcleo de la actividad matemática en la RME es la matematización. Treffers (1987) la define como la actividad de organizar y estructurar, en la que el conocimiento y las habilidades adquiridas son llamadas a ordenar y descubrir regularidades, conexiones y estructuras hasta ahora desconocidas.

De otra parte, entre los varios principios que sustentan la Matemática Realista se encuentra el principio de niveles, según este principio en el proceso de matematización se van sucediendo una irrestricta progresión de microniveles, como ya Freudenthal (1983) y luego Treffers (1987), habían indicado.

Más recientemente Van den Heuvel-Panhuizen (2001, 2003, 2010). y Gravemeijer (1994, 1999, 2007) han visto una gama de niveles desde lo situacional hasta lo formal (Fig. 2.4), que indican una progresión en el desarrollo, aunque no estrictamente una jerarquía. Los cambios entre ellos se expresan en la progresiva matematización horizontal y vertical y en la construcción de modelos.

Una de las herramientas del proceso de matematización es la creación de modelos a distintos niveles y con diferentes características, como lo explica Gravemeijer (2007), los estudiantes comienzan modelando su propia actividad matemática informal. Y en el proceso, el carácter del modelo va cambiando gradualmente para el estudiante, convirtiéndose en un modelo más formal de su razonamiento matemático, pero enraizado en el conocimiento experiencial del estudiante.

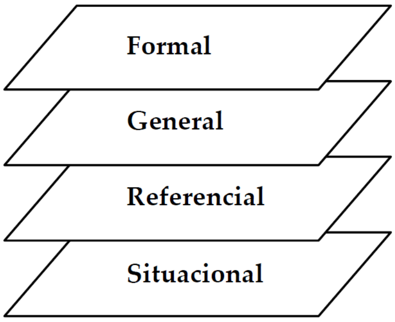


Figura 2.4 Niveles en el proceso de actividad en la matematización (Gravemeijer, 1994)

Según Gravemeijer:

> La denominación emergente se refiere tanto al carácter del proceso por el cual los modelos emergen dentro de la RME, como al proceso por el cual estos modelos soportan la emergencia de las formas de conocimiento matemático formal. De acuerdo con el diseño heurístico del modelamiento emergente, el modelo primero se manifiesta como un modelo de las estrategias informales de un estudiante específico situado. Luego con el tiempo el modelo gradualmente va tomando vida por sí mismo, hasta convertirse en una entidad por propio derecho y comienza a servir como modelo para un razonamiento matemático más formal, todavía personalmente significativo.
>
> (Gravemeijer, 2007 p. 139).

El progreso de la situación, pasando por el *modelo de* y el *modelo para*, hasta el conocimiento formal, se puede relacionar, según Santamaría (2006), con los cuatro niveles de actividad que establece Gravemeijer (1994, 1999): situacional, referencial, general y de pensamiento matemático formal (Fig. 2.5).

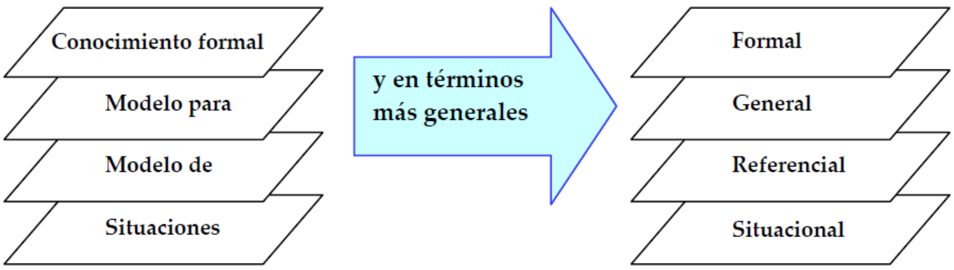


Figura 2.5 Relación Niveles de Actividad y Modelización (Santamaría, 2006).

Una breve descripción de los niveles de comprensión (Gravemeijer, 1999) se presenta a continuación.

El nivel de la situación es en donde el dominio específico, el conocimiento situacional y las estrategias son usadas dentro del contexto de la situación.

El nivel referencial es en donde los modelos y estrategias se refieren a la situación esquematizada en el problema. Este nivel incluye los modelos, descripciones, conceptos, procedimientos y estrategias que se refieren a situaciones concretas o paradigmáticas.

En el nivel general lo que domina la referencia al contexto es un enfoque matemático sobre las estrategias.

Finalmente el nivel formal es en donde el estudiante trabaja con procedimientos estándares y notación convencional. El nivel general funciona como el nivel referencial para el nivel formal, donde el nivel formal puede ser visto como una formalización del nivel general.

3. Experimento de Enseñanza

En este capítulo precisaremos las características del experimento de enseñanza que se implementó en el estudio, en un primer momento puntualizaremos algunos aspectos teóricos del modelo de enseñanza que lo sustenta para luego pasar al experimento propiamente dicho, la secuencia de enseñanza que se utilizó y el material que se desarrolló.

En cuanto a las características del Modelo de Enseñanza que respalda el experimento, señalaremos su relación con la Educación Matemática Realista (RME), los principios de modelización que utilizamos para la Enseñanza, la relación con el manejo instrumental de los ordenadores y del GeoGebra y finalmente como se implementa en la enseñanza el tema de las familias de funciones y formas canónicas.

En lo referente a las características del experimento de enseñanza precisaremos, la población y el contexto curricular en que se enmarca el estudio, para luego pasar a describir la estructura general del experimento y la estructura del proceso de enseñanza, en donde presentaremos en detalle las cinco actividades diseñadas para el experimento con sus tareas respectivas.

3.1 ENSEÑANZA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

La Educación Matemática Realista (RME por sus siglas en inglés *Realistic Mathematics Education*) es una teoría de instrucción que tiene sus orígenes en los Países Bajos como una reacción a la corriente conocida como Matemática Moderna. Esta teoría se basa en la Fenomenología Didáctica de Freudenthal (1983) y en su visión de que las matemáticas son una actividad humana y que la realidad puede ser utilizada como fuente para la matematización.

> La diferencia entre la instrucción matemática de acuerdo con un enfoque realista versus un enfoque de procesamiento de la información [EPI] es más palpable en la forma en que se tratan las aplicaciones. El EPI ve las matemáticas como un sistema ya hecho con aplicabilidad general y la instrucción matemática como un disgregar el conocimiento matemático formal en aprendizajes de procedimientos y luego aprendizajes de cómo aplicarlos. Dentro del enfoque realista, el énfasis es en [la] matematización. [Las] Matemáticas son vistas como una actividad, una forma de trabajo. Aprender matemáticas significa hacer matemáticas, de lo cual resolver problemas de la vida diaria es una parte esencial.
>
> (Gravemeijer, 1994 p. 91)

La RME sustenta en gran medida la estructura de las actividades de Enseñanza que proponemos, ya que, en el diseño de las actividades hemos tenido en cuenta algunas de sus características, en particular las siguientes:

Fenomenología Didáctica
Matematización Horizontal y Vertical
Modelamiento Emergente

3.1.1. Fenomenología Didáctica

La visión de Freudenthal (1971, 1973) de que las matemáticas son una actividad humana y que la realidad puede ser utilizada como fuente para la matematización, sustenta la RME. La fenomenología didáctica, entre otros aspectos se refiere a esta particular concepción realista, en la enseñanza.

Para Treffers (1987) lo novedoso en la concepción realista de la fenomenología es que la función de la realidad no se limita únicamente a las aplicaciones, como en otros enfoques, también sirve como una fuente de formación de conceptos, esto es, para que se desarrollen las primeras nociones intuitivas, o en palabras de Freudenthal, para constituir objetos mentales.

La palabra "realidad" se puede interpretar de dos maneras: en primer lugar, puede referirse a contextos de la vida real que ofrecen oportunidades para la construcción de conceptos, la elaboración de modelos, la aplicación y el ejercicio (De Lange, 1987). En segundo lugar, puede referirse a situaciones matemáticas que los estudiantes experimentan como realistas[1]. Así, Gravemeijer (1999) y Drijvers (2003) hablan de situaciones "experiencialmente reales" las cuales pueden hacer referencia tanto a la vida real como a las matemáticas.

Dice Drijvers:

> Por ejemplo, si los estudiantes han desarrollado una realidad matemática en la que las funciones lineales son objetos significativos, una tarea que comienza con 'Una función lineal f tiene la propiedad...' puede ser percibido como realista. Esencial en la palabra realista, por lo tanto, es que las actividades y conceptos involucrados sean significativos y naturales a los estudiantes, sin importar si el significado se deriva de una situación real, de [las] matemáticas o de otro tema.
>
> (Drijvers, 2003, p. 53).

Siguiendo esta línea se han estructurado las actividades del material de enseñanza atendiendo a estas dos concepciones de realidad, en las Actividades 2 y 3 (Regresión y Correlación; y Préstamos Ingresos y Costos) se usan situaciones realistas, en el sentido de situaciones de contextos reales, tomados de noticias o informes de instituciones.

---

[1] Van den Heuvel-Panhuizen (2002), explica: la confusión que existe con la palabra "realista" se origina en la traducción del verbo "imaginar" que en holandés es "zich REALISEren". El énfasis puesto en hacer algo real en la mente es lo que le da el nombre a la RME. El mundo fantástico de los cuentos de hadas y el mundo formal de las matemáticas pueden ser contextos convenientes para un problema, mientras sean reales en la mente del alumno.

En cambio en las tres partes de la Actividad 1 Familias de Funciones, se usa la otra concepción de realidad que puntualizaba Drijvers, en donde las funciones y sus parámetros se vuelven más significativos y naturales para los estudiantes a medida que avanzan en la actividad.

3.1.2. Matematización Horizontal y Vertical

El núcleo de la actividad matemática en la RME es la matematización, que Treffers (1987) define como la actividad de organizar y estructurar, en la que el conocimiento y las habilidades adquiridas son llamadas a ordenar y descubrir regularidades, conexiones y estructuras hasta ahora desconocidas.

Podemos distinguir dos tipos de matematización la horizontal y la vertical. La primera implica convertir un problema contextual en un problema matemático, para Treffers (1987), es aquí donde los alumnos generalizan herramientas matemáticas, las cuales los ayudan a organizar y a solucionar una situación problemática presentada dentro de un contexto real. Identificar o describir las matemáticas relevantes dentro de un contexto; esquematizar, formular y visualizar un problema de diversas maneras; descubrir relaciones y regularidades, etc.

La matematización vertical, por otra parte, es el proceso de reorganización dentro del mismo sistema matemático. Representar una relación como fórmula, probar regularidades, mejorar, ajustar, combinar e integrar modelos, formular un modelo matemático y generalizar son ejemplos de las actividades de matematización vertical. Por esta razón se dice que la matematización vertical es tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción (Freudenthal, 1991, Gravemeijer y Terwel, 2000). Para Freudenthal (1991) la matematización horizontal implica ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa moverse dentro del mundo de los símbolos matemáticos.

De Lange (1987) afirma que el aspecto horizontal no necesariamente precede a la componente vertical. Como consecuencia, la matematización puede seguir diferentes rutas, y explica cómo el proceso de matematización podría compararse con una escalera de escalones irregulares que representan la alternancia entre los procesos de matematización horizontal y vertical que se necesitan para pasar de un problema del mundo real (que denota por A) a su solución, esto es, la generación de conceptos matemáticos (que denota por B). Este aspecto se puede apreciar en la Fig. 3.1.

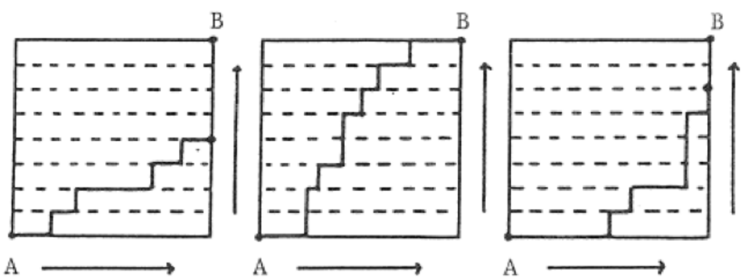


Figura 3.1 Gráfica de ejemplos de procesos de matematización horizontal y vertical (De Lange 1987)

3.1.3. Los Modelos Emergentes

Como ya comentamos en el capítulo anterior (ver apartado 2.4.3), una de las herramientas del proceso de matematización es la creación de modelos, a distintos niveles y con diferentes características, como lo explica Gravemeijer (2007). Esto, en el contexto de la enseñanza, se traduce en que los estudiantes comienzan modelando su propia actividad matemática informal. Y en el proceso, el carácter del modelo va cambiando gradualmente para el estudiante, convirtiéndose en un modelo más formal de su razonamiento matemático, pero enraizado en el conocimiento experiencial del estudiante. Según Gravemeijer:

> La denominación *emergente* se refiere tanto al carácter del proceso por el cual los modelos emergen dentro de la RME, como al proceso por el cual estos modelos soportan la emergencia de las formas de conocimiento matemático formal. De acuerdo con el diseño heurístico del modelamiento emergente, el modelo primero se manifiesta como un *modelo de* las estrategias informales de un estudiante específico situado. Luego con el tiempo el modelo gradualmente va tomando vida por sí mismo, hasta convertirse en una entidad por propio derecho y comienza a servir como *modelo para* un razonamiento matemático más formal, todavía personalmente significativo.
>
> (Gravemeijer, 2007 p. 139).

El progreso de la situación, pasando por el *modelo de* y el *modelo para*, hasta el conocimiento formal, se puede relacionar, según Santamaría (2006), con los cuatro niveles de actividad que establece Gravemeijer (1994, 1999), a saber: situacional, referencial, general y de pensamiento matemático formal (Fig. 2.5).

3.2. ENSEÑANZA Y MODELIZACIÓN

Otro aspecto vinculado al componente de enseñanza, y también estrechamente relacionado con la RME tiene que ver con la Modelización, como ya se mencionó en el capítulo anterior entendemos la Modelización como un caso especial del proceso de resolución de problemas.

En este sentido siguiendo a Puig y Monzó (2008, 2013) y Puig (2015) podemos considerar lo que estos autores llaman los elementos del proceso de modelización, que de forma esquemática se pueden enunciar así:

1. Un fenómeno que se describe mediante algunas medidas de algunas magnitudes.
2. Una regresión entre las medidas.
3. Un tipo de función que se ajusta mediante esa regresión.
4. Una decisión sobre el tipo de función que se va a ajustar de entre un catálogo de funciones disponibles, basado en:

   4.1. Un conocimiento de propiedades cualitativas del fenómeno.
   4.2. Un conocimiento de propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.

5. La determinación de la función concreta de ese tipo, que describe los datos obtenidos de ese fenómeno concreto observado.
6. La expresión de la función en una forma canónica, elegida de manera que los parámetros expresen propiedades del fenómeno que interesa resaltar.

(Puig y Monzó 2013, p. 7).

Por otra parte a partir de estos elementos, estos autores también plantean una relación de las competencias que se derivan de ellos en el ámbito de la modelización. En este sentido, son necesarias las siguientes competencias en:

1. Propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.

2. Análisis cualitativo del fenómeno que se va a observar, con respecto al mismo tipo de propiedades.

3. Formas canónicas de los tipos de funciones.

4. Significado de los parámetros en las formas canónicas.

5. Efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas.

6. Transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma canónica.

7. Análisis cualitativo de las limitaciones del modelo.

(Puig y Monzó 2013, p. 7).

Como se puede notar en esta organización de las competencias del proceso de modelización dos elementos son fundamentales, el primero, el análisis cualitativo tanto del fenómeno en cuestión como de los tipos de funciones disponibles, (puntos 1 y 2) además el análisis cualitativo luego se utilizará como elemento de control de las limitaciones del modelo. En palabras de Puig (2015) "los análisis cualitativos, del fenómeno y del comportamiento de las familias de funciones, se revelan como el mecanismo de guía y control del conjunto del proceso de modelización".

Y el segundo elemento es el conocimiento del comportamiento de las familias de funciones a partir de sus ecuaciones canónicas y parámetros (puntos 3, 4 y 5). Ampliaremos este aspecto en el siguiente apartado.

3.3. FAMILIAS DE FUNCIONES Y FORMAS CANÓNICAS

Cuando nos referimos a una familia de funciones esta puede expresarse con diferentes formas canónicas según el énfasis que pretendamos marcar y los aspectos que se quieran resaltar, esto implica por tanto, que sus parámetros tienen significados distintos.

Así por ejemplo si tomamos la familia de funciones cuadráticas tenemos varias opciones de formas canónicas que podríamos usar:

a. Forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
b. Forma $4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$

c. Forma $y = a\left(\frac{x-c}{b}\right)^2 + d$
d. Forma $y = ax^2 + bx + c$

a. Forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
En esta primera forma canónica se hace énfasis en las raíces de la función.

b. Forma $4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$

En el segundo caso el relieve esta puesto en las características geométricas de la función como una sección cónica y los parámetros permiten ubicar el vértice, la directriz y el foco de la parábola.

c. Forma $y = a\left(\frac{x-c}{b}\right)^2 + d$

En esta forma canónica el acento se pone sobre las transformaciones que permiten obtener la gráfica, buscada a partir de la gráfica de una función de la familia que se toma como la más simple, una función patrón, en este caso $y = x^2$, y los parámetros se refieren a esas transformaciones.

d. Forma $y = ax^2 + bx + c$

En esta cuarta opción el énfasis se ha puesto en su expresión algebraica, como polinomio en este caso y los parámetros se refieren a los coeficientes del polinomio.

Sin embargo, cualquiera de estos acentos en las formas canónicas, no elimina la estrecha relación que existe entre una función, su gráfica y su expresión algebraica, de tal manera que en cada una de estas formas canónicas se involucran estos tres aspectos.

Siguiendo la recomendación de Puig (2015), la forma canónica que hemos elegido para la enseñanza es del tercer tipo, es decir,

> una forma canónica que lo que pone de relieve son propiedades de la gráfica, a partir de transformaciones. Además, esta forma canónica tiene la peculiaridad de que no es exclusiva de una familia de funciones (precisamente porque lo que pone de relieve no son las propiedades de una función) sino que es una forma general que puede usarse con familias de funciones diferentes.
>
> De esta manera, si *f* es una función cualquiera, la forma canónica que hemos adoptado es
>
> $$y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$$
>
> con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ cuyos parámetros siempre tienen el mismo significado, sea *f* la función que sea. En concreto,
>
> • *a* dilata la gráfica de la función *f* en la dirección del eje OY, respecto de la recta $y = d$;

• b dilata la gráfica de la función f en la dirección del eje OX, respecto de la recta $x = c$;

• c traslada la gráfica de la función f en la dirección del eje OX hacia la derecha, si $c > 0$, o hacia la izquierda, si $c < 0$;

• d traslada la gráfica de la función f en la dirección del eje OY hacia arriba, si $d > 0$, o hacia abajo, si $d < 0$.

Si hemos elegido esta forma canónica para la enseñanza es precisamente por estas dos características: por poner de relieve propiedades de la gráfica y por ser una forma general para todas las familias de funciones que vamos a estudiar, lo que hace que los parámetros de la forma canónica tengan siempre el mismo significado, sea cual sea la función de que se trate.

(Puig 2015, p. 6)

Es importante tener en cuenta que el uso de la forma canónica $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ para algunas familias de funciones permite anotar expresiones diferentes para la misma función. Esta situación tiene su explicación en el hecho de que esas expresiones diferentes son equivalentes desde el punto de vista algebraico. El que las expresiones sean diferentes se debe a que, en esos casos, la gráfica de una misma función se puede obtener mediante transformaciones diferentes (y no equivalentes) a partir de otra función de la familia. Así por ejemplo si la recta $y = 3x$ se traslada verticalmente 6 unidades hacia arriba o se traslada horizontalmente 2 unidades hacia la izquierda se obtiene la misma gráfica (y por tanto la misma función), pero, en el primer caso, el parámetro que se ha modificado es d y la expresión algebraica es $y = 3x + 6$, mientras que, en el segundo, el parámetro que se ha modificado es c y la expresión algebraica es $y = 3(x + 2)$, siendo esas dos expresiones algebraicas equivalentes: $3x + 6 = 3(x + 2)$.

Esto es posible porque las transformaciones (traslaciones y dilataciones) de la gráfica expresadas en la forma canónica son transformaciones punto a punto, pero las gráficas son conjuntos de puntos cuya imagen es la misma por esas transformaciones que punto a punto son distintas.[2]

Esta elección de Puig, coincide con la evidencia de algunas investigaciones realizadas al respecto, de acuerdo con las cuales dentro de los diferentes roles del parámetro, la concepción más asequible para los estudiantes suele ser el enfoque que lo entiende como una cantidad cambiante, en particular como un “posicionador” de las gráficas (Furinghetti & Paola, 1994).

Para las familias de funciones en las que sucede este hecho, hemos decidido combinar el uso de la forma canónica con cuatro parámetros con versiones simplificadas de la forma canónica colapsando los parámetros que expresan transformaciones indistinguibles globalmente. Así, adoptamos una versión simplificada con dos parámetros para las funciones lineales, $y = ax + d$; y una versión con tres parámetros para las funciones cuadráticas $y = a(x - c)^2 + d$. Nos parece que con estas versiones simplificadas se gana en sencillez y claridad, ya que los estudiantes a lo largo de su vida escolar han utilizado expresiones semejantes.

[2] En Puig 2015 pp. 6-9 se estudia en detalle esta situación para diversas familias de funciones.

3.4. ENSEÑANZA Y TECNOLOGÍA

Uno de los aspectos importantes de este trabajo es la utilización de Tecnología en el contexto de la enseñanza del álgebra, en este apartado nos referiremos básicamente a dos aspectos, en primera instancia a la Teoría de la Instrumentación que nació en la escuela francesa y en un segundo momento a las razones que nos han llevado a escoger el tipo de dispositivos y el paquete informático GeoGebra (GG) que utilizamos en el estudio.

La inclusión de tecnología en el aula hace que debamos contemplar aspectos de lo que Trouche (2004) llama la Teoría de la Instrumentación, la cual se apoya en las ideas de Vigotsky y de Vergnaud.

Un primer elemento de la Teoría de la Instrumentación es la visión de Vigotsky (1978) de que las herramientas median la relación entre la actividad humana y el medio ambiente. Estos artefactos histórico-culturales pueden ser herramientas materiales, pero también herramientas cognitivas como el lenguaje, o como en nuestro caso símbolos matemáticos. Más recientemente en esta misma línea Noss & Hoyles (1996) proponen que las herramientas tecnológicas también pueden mediar entre el aprendiz y el conocimiento que se supone debe aprender.

El segundo elemento fundamental de la Teoría de la Instrumentación es la noción de *esquemas* desarrollada por Vergnaud a partir de la de Jean Piaget (1936) para quien un esquema es una organización invariante del comportamiento para una clase dada de situaciones Vergnaud (1987).

Nos parece importante precisar, aunque sea brevemente, tres aspectos relevantes de la Teoría de la Instrumentación, a saber:

La dualidad Artefacto - Instrumento
La Génesis Instrumental
La Orquestación Instrumental

3.4.1. Dualidad Artefacto – Instrumento

Verillon y Rabardel (1995) continúan las ideas de Vigotsky y construyen a partir de ellas, así en su ergonomía cognitiva nos brindan elementos para comprender uno de los puntos fundamentales de la Teoría de la instrumentación, la idea de que un artefacto no es inmediatamente un instrumento mediador, o lo que se ha dado en llamar la *dualidad artefacto – instrumento.*

Así si tomamos por ejemplo un martillo, este inicialmente parecerá un objeto sin significado para un potencial usuario, a menos que él lo haya usado anteriormente o haya visto como lo usa alguien. Únicamente después de que el nuevo usuario sienta la necesidad de tener un martillo y haya adquirido cierta experiencia en su uso, es que el martillo gradualmente se convertirá en un instrumento útil y valioso para mediar la actividad.

Una dualidad similar a la artefacto – instrumento se puede plantear entre otros objetos más cercanos como calculadoras, ordenadores, paquetes informáticos o partes de ellos.

3.4.2. Génesis Instrumental

El proceso de desarrollar los medios de usar el instrumento en una forma apropiada y sensible es lo que se ha llamado la Génesis Instrumental. Los resultados de la génesis instrumental son condensados en forma de esquemas de utilización. El instrumento según esta visión no es solo el objeto, sino además el conjunto de los esquemas mentales que el usuario desarrolla.

De esta manera podemos distinguir dos tipos de esquemas, los esquemas de utilidad y los esquemas de acción instrumentada.

Los primeros, los esquemas de utilidad también conocidos como *esquemas de instrumentalización* se refieren a los medios por los cuales el usuario adapta la herramienta para su uso. Por ejemplo un paquete informático se puede actualizar a una nueva versión, se pueden descargar nuevas funcionalidades y programas a una calculadora, o a un móvil.

En cuanto al otro tipo de esquemas, los de acción instrumental, también llamados *esquemas de instrumentación*, han sido explicados por Drijvers de la siguiente manera:

> […] [los] definimos como esquemas mentales coherentes y significativos para el uso de la herramienta tecnológica, para resolver un determinado tipo de problemas.
>
> Por ejemplo, el "problema" de mover un bloque de texto mientras se escribe en un procesador de palabras puede ser resuelto por medio del esquema de cortar y pegar. Un usuario experimentado aplica este esquema de cortar y pegar rápidamente y con precisión por medio de una secuencia de pulsaciones de teclas y/o clics del ratón.
>
> Un usuario principiante, sin embargo, tiene que lidiar con los aspectos técnicos y conceptuales, como el hecho de que el bloque de texto que él/ella quiere trasladar a otro lugar es invisible por un momento después de que ha sido cortado. El proceso de instrumentación conduce a la construcción de esquemas de acción instrumentada que son útiles para el cumplimiento de un determinado tipo de tarea.
>
> (Drijvers, 2003, p. 97).

En nuestro estudio es claro como los estudiantes van desarrollando tanto esquemas de instrumentación como de instrumentalización en la actuación con el paquete informático, lo que hace que afronten las tareas de maneras diferentes.

3.4.3. Orquestación Instrumental

Para favorecer que se dé la Génesis Instrumental en un entorno educativo Trouche (2004) considera que es necesario tener en cuenta lo que llama la "orquestación instrumental", que define como la intencional y sistemática organización y uso de los artefactos disponibles en un ambiente tecnológico por el maestro en una situación matemática dada, para guiar la génesis instrumental.

En este sentido se tuvo el cuidado de desarrollar varias sesiones en la sala de ordenadores, dirigidas por el maestro en donde se daban instrucciones sobre el manejo del GG, (ver apartado 3.10 sesiones tipo A), seguidas de prácticas por parte de los estudiantes tanto en el aula como luego después de clase. Así mismo se pusieron a disposición de los estudiantes varios instructivos que resumían los pasos de construcción de gráficas y tablas en el entorno del GG.

Dos aspectos más están relacionados con la orquestación, el primero, la estructura general del experimento, en cuanto que se abordan solo algunas características del GG y se practican durante un periodo relativamente largo (10h) y solo después de este periodo se integran otras características nuevas.

El segundo aspecto es la organización de la mayor parte del trabajo en parejas, situación que ayudó en el desarrollo de la génesis instrumental de cada uno de los individuos, en la medida que tenían un compañero que apoyaba y corregía el proceso.

Sobre los tipos de dispositivos que se emplearon en el estudio, para el experimento se utilizaron como soporte ordenadores de escritorio Pentium II3, con sistema operativo Windows 7 y con la suite Microsoft Office 2013 la cual incluía los paquetes Microsoft Access, Microsoft Excel, Microsoft InfoPath, Microsoft Lync, Microsoft OneNote Microsoft Outlook, Microsoft PowerPoint, Microsoft Publisher, Microsoft SkyDrive Pro, Microsoft Visio Viewer, Microsoft Word Office Shared Features y Office Tools, además específicamente para el estudio se les instaló el paquete informático GeoGebra (GG), en su versión 4.5. Y para poder hacer el registro de las entrevistas se les instaló el programa Hypercam 2.1 que permite grabar en audio y video todo aquello que vaya sucediendo en la pantalla del ordenador.

Nos parece importante explicar brevemente las razones de estas elecciones y las características específicas del paquete informático. Dado que los estudiantes con los que se realizó el experimento de enseñanza eran en su gran mayoría nuevos en la Universidad, no podíamos asegurar la disponibilidad de ordenadores o tabletas en sus casas, razón por la cual optamos por usar los que nos brindaban las salas de la universidad, con la ventaja de que eran todos del mismo tipo, y de modelo reciente, pues las salas que utilizamos para el experimento tenían en su momento solo un año en servicio. Esto además nos brindó dos ventajas extra, la primera, la posibilidad de utilizar monitores grandes (23 pulgadas) en donde la visualización de los fenómenos y gráficas sería mucho mejor que en otros aparatos –aspecto importante en nuestro estudio–. Sobre este aspecto ya Drijvers (2003) mencionaba algunas ventajas de los ordenadores sobre otros dispositivos. “Sin embargo, las dimensiones de pantalla, resolución de pantalla y la capacidad de memoria de los dispositivos de mano se limitan, en comparación con las computadoras de escritorio” (Drijvers, 2003, p 82).

Y la segunda ventaja, estas pantallas (Dell P2314T) eran realmente monitores táctiles, por lo tanto se comportaban como tabletas, aunque debemos anotar que esta ventaja fue algo que solo descubrimos ya entrados en el experimento; sobre este particular comentaremos en los apartados dedicados al estudio de grupo y al estudio de casos.

Pero además el paquete informático GeoGebra (GG), al ser un programa de licencia libre, y múltiples formatos (PC, Mac, Linux, tabletas…) permitía que los estudiantes lo pudieran descargar en sus ordenadores o tabletas personales, para continuar la tareas asignadas o simplemente para ser usado en clase, como luego muchos de ellos lo hicieron, con lo que se reforzaba la génesis instrumental.

Los conocimientos y disponibilidad de tecnología entre los estudiantes también eran inciertos, por ello, hemos elegido este paquete informático GG que según Hohenwarter y Preiner (2007) parece ser un paquete de fácil manejo, es intuitivo y no requiere habilidades avanzadas para empezar.

GeoGebra posee características combinadas entre los DGS (Dynamic Geometry System) y los CAS (Computer Algebra System), lo que le brinda múltiples herramientas. Entre las ventajas de este paquete está su posibilidad de enlazar las construcciones de geometría sintética a las ecuaciones analíticas y la coordinación entre varios tipos de representaciones funcionales: simbólica, gráfica y tabular. En particular, la versión que utilizamos, la 4.5 incorpora además una hoja de cálculo y un menú de herramientas estadísticas, que se utilizaron en las actividades elaboradas para el experimento.

En este sentido el comentario de Marmolejo (2014) en su memoria sobre su uso en situaciones de modelización, nos pareció relevante.

> GeoGebra es un excelente programa; en particular, permite que se hagan simulaciones en el aula. Al usarlo en la actividad Elevador […] por ejemplo, los alumnos experimentaron con los diferentes modelos de regresión que ofrece el programa. Evaluaron qué tan bien se ajustaba el modelo a los datos y analizaron el significado del modelo en un contexto extra–matemático. Por ejemplo, tomaron en cuenta si el elevador llegaba hasta arriba o no; si se detenía para que las personas pudieran subir o bajar; o si aceleraba o iba a velocidad constante. La actividad matemática en el aula no debe prescindir de la simulación, aunque esta represente un reto tanto para el docente, como para el investigador en matemática educativa.
>
> (Marmolejo, 2014, p. 108)

Específicamente las cinco actividades de enseñanza, están propuestas para ser realizadas con ayuda de GG y siguiendo la estructura propuesta por Puig y Monzó (2013) y Puig (2015) en cuanto a elaborar un Análisis Cualitativo del fenómeno para poder modelizarlo. En este orden de ideas, los estudiantes hacen primero un análisis de las características del fenómeno y en la guía de papel construyen bosquejos de cómo suponen que serán las funciones que podrían modelizarlo, para luego comprobar estas suposiciones en el entorno del GG, donde se desenvuelven manipulando los parámetros de las funciones y las herramientas del paquete necesarias.

En los siguientes apartados precisaremos las características de la población y el contexto curricular en que se enmarca el experimento, para luego pasar a describir la estructura general del experimento y con más detalle la estructura del proceso de enseñanza, en donde presentaremos las cinco actividades diseñadas con sus tareas respectivas.

3.5. EL CONTEXTO CURRICULAR

El Experimento de enseñanza se enmarca en un curso de Matemáticas I para las carreras de Ciencias Económico-Administrativas en una universidad privada en Bogotá, Colombia, dicho curso es el primer curso de matemáticas que toman los estudiantes de carreras como Administración, Economía o Contaduría en la Universidad. Estas carreras tienen una duración de cinco años en Colombia.

Nos parece relevante ubicar los tópicos matemáticos de éste trabajo en el currículo colombiano así como en los temas que se estudian en los primeros cursos de matemáticas en la Universidad en Colombia.

Los temas puntuales de matemáticas que se abordan en este estudio son las funciones básicas en una variable, específicamente, las funciones lineales, cuadráticas, y exponenciales $y = a^x$, teniendo en cuenta sus representaciones, en particular la tabular, la gráfica y la analítica, así como los parámetros que se relacionan con ellas; y además los procesos de modelación que involucran estos tipos de funciones.

En cuanto al currículo tomamos como fundamento los documentos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) y para el segundo aspecto, los programas de los primeros cursos de matemáticas de las carreras de Ciencias Económico-Administrativas en la Universidad Santo Tomás en donde se realizó el experimento.

3.5.1. El Currículo Colombiano

El currículo colombiano de matemáticas se organiza en cuatro bloques, según momentos del desarrollo: preescolar, tres cursos; primaria 1°- 5° grado; educación secundaria 6°- 9° grado; y media vocacional 10°- 11° grado. A su vez, todo el currículo está organizado en cinco ejes transversales siguiendo una clasificación de los tipos de pensamiento en matemáticas, a saber: Pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

En este último eje, el del pensamiento variacional se estudian:

> Los procesos de cambio. El concepto de variable. El álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio y las relaciones y funciones con sus correspondientes propiedades y representaciones gráficas. Modelos matemáticos
>
> (Ministerio de Educación Nacional República de Colombia, 2003, p. 5).

Una primera aproximación a los temas que incluimos en este estudio, en el contexto colombiano, tiene lugar entre los grados 9° y 11° (15-17 años)[3]. En estos niveles los estudiantes reciben enseñanza sobre las funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, de proporcionalidad inversa, las funciones logarítmica y exponencial $y = a^x$.

De acuerdo con los parámetros que dicta el currículo colombiano, se espera que al terminar el último grado de la media vocacional (undécimo grado), en lo que respecta al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, el alumno haya desarrollado las siguientes competencias:

- Identifica relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

- Construye expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

---

3 En el ANEXO L se puede ver el cuadro resumen del Currículo Colombiano para los grados 9° - 11°.

• Usa procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

• Modela situaciones de variación con funciones polinómicas.

• Identifica diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

• Analiza los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.

• Identifica y utiliza diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

• Identifica la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

• Analiza en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

(Ministerio de Educación Nacional República de Colombia, 2003, p. 87).

3.5.2. El Curso de Matemáticas I

En la Universidad Santo Tomás, para las carreras universitarias de índole económica, en el primer curso de matemáticas, se retoman y estudian varios de los temas del álgebra, entre ellos las funciones, pero con un enfoque económico, para luego hacer una revisión de los conceptos fundamentales de Análisis, específicamente del Cálculo Diferencial.[4]

Específicamente los temas de este curso son:

Presentación del programa, metodologías y reglas de la clase.	Presentación del programa
Definiciones de funciones y Generalidades	Definiciones sobre funciones, dominio, rango, gráficas de funciones elementales. Funciones uno a uno, sobre y biyectiva.
Operaciones entre funciones. Función Inversa. Función compuesta.	Suma, resta, producto, cociente, compuesta. Paridad de funciones. Inversa de funciones.
Función Lineal. Generalidades	Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Ecuación punto – pendiente. Gráficas. Intersecciones con los ejes. Pendiente. Rectas horizontales y verticales
Funciones Económicas.	Demanda y oferta. Ingreso, costo y beneficio. Sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. Punto de equilibrio de empresa y de mercado.
Función cuadrática y generalidades. Aplicaciones a temas económicos.	Función cuadrática. Ecuaciones de segundo orden. Cortes con los

[4] En el ANEXO M se puede ver el Syllabus completo del curso de Matemáticas I para el periodo 2014-II, en que se realizó el experimento.

	ejes. Vértice (máximo / mínimo) Intervalos de crecimiento/decrecimiento. Funciones de ingreso (con demanda), costo y beneficio.
Funciones en general	Función polinómica, racional y algebraicas. Funciones a trozos.
Función Exponencial, Generalidades. Funciones Logarítmica, Generalidades	Definición de función exponencial. Repaso de propiedades de exponentes. Gráficas. Definición de logaritmo. Función logaritmo. Propiedades de los logaritmos. Relación con la función exponencial.
Aplicaciones con logaritmos y exponenciales	Ecuaciones con exponenciales y logaritmos. Interés compuesto
Límites y continuidad	Definición de límite. Propiedades. Cálculo de límites por factorización y racionalización. Definición de continuidad.
Derivada	Definición de derivada. Propiedades. Interpretación geométrica de la derivada. Derivadas de funciones elementales.
Técnicas de derivación	Reglas de producto, cociente
Regla de la cadena. Derivadas de orden superior.	Cálculo de derivadas de orden superior.
Análisis marginal y problemas de aplicación.	Funciones marginales. Aplicaciones
Optimización de funciones económicas.	Valores y puntos críticos. Criterio de segunda derivada para clasificación de puntos críticos.
Optimización de funciones económicas.	Ejercicios de aplicación

Cuadro 3.1 Temas del curso de Matemáticas I

Este curso tiene una duración de 60 horas, organizadas en dos bloques semanales de 2 horas cada uno. Normalmente los textos que se utilizan para el curso son manuales de matemáticas aplicadas a la administración y de cursos de Cálculo, originalmente en inglés que se han vertido en ediciones al castellano. Para el experimento de enseñanza se desarrolló una cartilla con el material de estudio propuesto.

3.6. LA POBLACIÓN

La experiencia de enseñanza se realizó en las aulas de la Universidad Santo Tomás, una institución privada, como ya se mencionó, en su sede de la ciudad de Bogotá, Colombia. Esta institución universitaria, es de carácter privado, de orientación católica y tamaño medio, con aproximadamente 20.000 estudiantes, sedes en 5 ciudades colombianas y alrededor de 18 programas de grado, 34 postgrados y 3 doctorados.

En cuanto a la muestra debemos subrayar que los alumnos con los que se desarrolló el experimento de enseñanza pertenecen a un grupo natural de primer cuatrimestre en un curso de Matemáticas I, con edades entre 18-20 años. El Grupo estaba conformado por 24 estudiantes de las carreras de Administración, Contaduría y Negocios Internacionales, de los cuales 12 eran hombres y 12 mujeres. Sin embargo por diversas circunstancias –que se explican en el estudio de grupo– el experimento solo pudo realizarse con 20 alumnos, 11 hombres y 9 mujeres.

Los estudiantes de esta institución son en general de clase media y desempeño académico promedio. Para iniciar los estudios universitarios en Colombia, un estudiante debe haber cursado los cuatro años de educación básica secundaria y los dos años de educación media vocacional, en un colegio aprobado por la entidad gubernamental correspondiente.

3.7. EL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

El tipo de experimento realizado es uno de los más frecuentes en las investigaciones organizadas con el marco teórico y metodológico de los Marcos Teóricos Locales (MTL). Las características fundamentales son que, en primer lugar, el experimento se realiza con un grupo natural del sistema educativo, que constituye la población objeto de estudio. En segundo lugar, que se combina un estudio de las actuaciones del grupo natural de alumnos antes, durante y después de la enseñanza objeto de estudio, que pretende básicamente describir las características de esas actuaciones, clasificar a los alumnos con respecto a ellas y seleccionar alumnos de las distintas clases, con un estudio de casos.

La estructura del Experimento fue:

1. Prueba Inicial:

Un cuestionario sobre funciones y algunos conocimientos básicos de álgebra que se aplicó a toda la población del estudio. Además se ha utilizado el instrumento diseñado por Presmeg (1985) para clasificar a los estudiantes con habilidades de visualización.

2. Enseñanza:

Para la parte de enseñanza se diseñó una unidad, con cinco actividades sobre familias de funciones y modelización. Comenzando con las funciones, sus transformaciones y parámetros, para continuar con los procesos de modelización. En la unidad se hace uso de herramientas tecnológicas en este caso el programa GeoGebra (GG). Además se realizaron algunas sesiones introductorias al paquete informático.

3. Prueba Final:

Se elaboró un cuestionario sobre gráficas de funciones y modelización. Aplicado a toda la población, con dos objetivos primordiales, de una parte poder clasificar los estudiantes en diferentes categorías con respecto a su desempeño en la prueba, de acuerdo a los criterios del mayor o menor uso de estrategias visuales y/o analíticas. En segunda instancia la prueba sirve como instrumento de evaluación del proceso de enseñanza realizado.

4. Clasificación y Elección de los Casos:

A partir de los resultados en la prueba final se efectuó la organización de los estudiantes en varias clases para la elección de los sujetos con los que se realizó el estudio de casos.

5. Entrevista

Se realizaron con los estudiantes elegidos entrevistas individuales con enseñanza, a partir de un guión elaborado previamente, en que se debía abordar un problema y modelizarlo con ayuda del GG. Se registró cada sesión en video y se grabó la sesión realizada en el ordenador con el paquete informático Hypercam 2.1 y además se contó con una grabadora externa de audio que registró cada sesión.

6. Análisis

Se realizó el análisis de cada una de las sesiones del estudio de casos, a partir del marco teórico del estudio.

3.8. ESTRUCTURA DE LA ENSEÑANZA

En esta sección y sus apartados correspondientes nos referiremos al esquema de enseñanza, al material que se elaboró para realizarla y a la forma en que se implementó a lo largo del experimento.

Se elaboraron especialmente para el proceso de enseñanza cinco actividades, a manera de guías de trabajo para ser desarrolladas en GG e ir tomando alguna información con papel y lápiz. Estas son las Actividades 1A, 1B, 1C, 2 y 3. Cada una de ellas esta conformada por un grupo de tareas para ser realizadas entre 2 y 3 horas. Después de cada una de estas actividades se realizó una sesión de cierre, a manera de puesta en común. Para estas actividades los estudiantes se organizaron en parejas.

Ya que los estudiantes eran nuevos en la Universidad y no habían tenido contacto con el paquete informático GeoGebra, se realizaron específicamente tres sesiones enfocadas en desarrollar destrezas en el manejo del GG, la sesión Introducción al GeoGebra (GG), Manejo de GG Tablas y Gráficas discretas y la sesión Introducción a la Modelización de Funciones. Estas sesiones fueron dirigidas por el maestro. Un comentario más detallado de la secuencia de enseñanza realizada y de los tipos de sesiones empleadas se puede se puede consultar en los apartados 3.10 y 3.11 al final de este capítulo.

Toda la enseñanza se realizó en las aulas de informática, de la Universidad, contando cada estudiante con un ordenador para su uso.

El esquema de enseñanza que se siguió se puede se puede apreciar en el cuadro 3.2, allí hemos resaltado en mayúsculas las cinco actividades que se diseñaron especialmente para el experimento y que constituyen el centro del material de enseñanza, y que presentaremos con mayor detalle en los siguientes apartados.

3.9. MATERIAL DE ENSEÑANZA

A continuación, siguiendo el orden establecido, presentaremos cada una de las actividades ampliando los objetivos que se buscaban, la estructura y su contenido. Además se presenta el material desarrollado especialmente para el trabajo con los estudiantes, estas son las actividades 1 Familias de Funciones (con sus tres secciones 1A Funciones Lineales, 1B Funciones Cuadráticas y 1C Funciones Exponenciales); la actividad 2 Regresión y Correlación y la actividad 3 Préstamos, Ingresos y Costos. En la descripción que ofrecemos a continuación, para cada actividad se anota entre paréntesis la duración en horas de cada sesión.

Actividad	*Horas*
Cuestionario Presmeg 1ª y 2ª partes	1.5
Pre test	0.5
Introducción al GeoGebra (GG) Generalidades y funciones.	1
Actividad 1A FAMILIAS DE FUNCIONES (F. Lineales)	3
Sesión de cierre Funciones Lineales	0.5
Actividad 1B FAMILIAS DE FUNCIONES (F. Cuadráticas)	3
Sesión de cierre Funciones Cuadráticas	0.5
Actividad 1C FAMILIAS DE FUNCIONES (F. Exponenciales)	3
Sesión de cierre Funciones Exponenciales	0.5
Manejo de GG Tablas y gráficas discretas	1
Introducción a la Modelización de Funciones	1
Actividad 2 REGRESIÓN Y CORRELACIÓN	2
Actividad 3 PRÉSTAMOS, INGRESOS Y COSTOS	2
Post Test	1
Total	20.5

Cuadro 3.2 Estructura del proceso de Enseñanza

3.9.1. Introducción al GeoGebra Generalidades y Funciones.

La primera actividad de enseñanza fue la sesión de introducción y presentación (1h) del paquete informático GeoGebra (GG) esta actividad tenia como objetivo principal familiarizar a los estudiantes con el entorno del GG, sus menús y comandos y de otra parte pretendía brindar a los estudiantes una instrucción sobre algunos de los comandos del programa que se emplearían en las primeras etapas del experimento.

Así después de una breve historia del paquete, y de comentar sus potencialidades se realizó un recorrido por las seis diferentes zonas en que se divide la interfaz del GeoGebra (Fig. 3.2)

- En la parte superior se encuentran los *Menús* y las *Herramientas* los cuales se comentaron brevemente.

- En la parte central, la *Vista Algebraica* a la izquierda, la gran *Vista Gráfica* al centro y la *Hoja de Cálculo* (HdC) a la derecha, que se utilizará con frecuencia en el experimento. La parte central, con sus tres vistas, permite la visualización de tres diferentes representaciones de un objeto, la representación algebraica, la gráfica, y la tabular. Estas tres representaciones responden al unísono y dinámicamente a cualquier cambio de valor en el objeto, sin importar cómo se haya creado.

- En la parte inferior, la *Barra de Entrada* de teclado (comandos y operaciones de ingreso directo), compuesta, de izquierda a derecha, por el botón de Ayuda a la Entrada, el campo de Entrada y tres listas desplegables con operadores y funciones, letras griegas y comandos. .

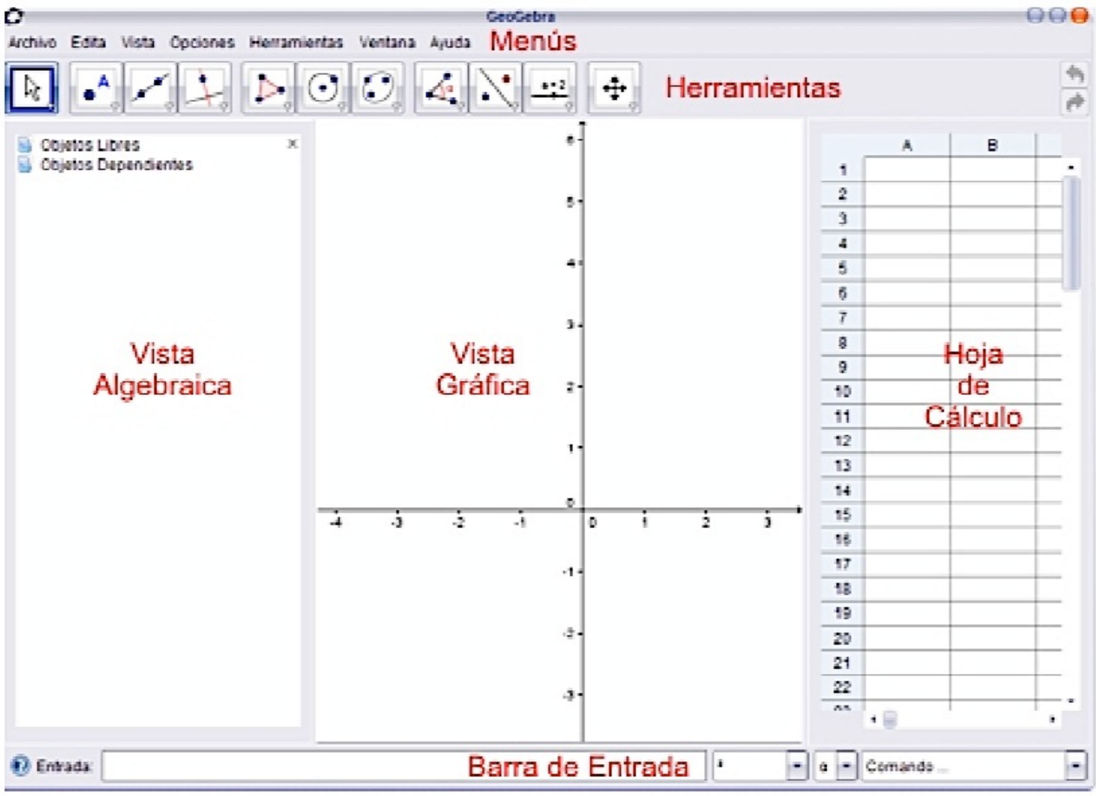


Figura 3.2 Interfaz de GeoGebra con sus diferentes zonas

Luego con más detalle hicimos un nuevo recorrido por las herramientas y menús del programa, pero esta vez hicimos énfasis en aquellos más pertinentes para nuestra investigación, tales como las herramientas puntero, deslizador, o zoom, por citar algunas. De otra parte practicamos el proceso para realizar gráficas de funciones, ensayando cambios de apariencia y magnitud con las diferentes herramientas de control de la escala, aspecto importante a tener en cuenta según la literatura. La sesión fue dirigida por el Investigador.

3.9.2. Actividad 1 Familias de Funciones

El objetivo de esta actividad tenía dos partes: en primer lugar, lograr una mayor familiarización, por parte de los estudiantes, con el paquete informático GeoGebra (GG), y en segundo lugar, introducir a los estudiantes en los conceptos de familias de funciones y de forma canónica de una función y además estudiar los efectos de los cambios de los parámetros de las formas canónicas en las gráficas de las funciones.

Esta primera Actividad tiene tres grandes secciones, que corresponden a un tema específico, según las familias de funciones que se estudien. Las secciones que componen esta actividad, entonces, son las siguientes: 1A Funciones Lineales, 1B Funciones Cuadráticas y 1C Funciones Exponenciales; y para cada una de ellas se emplearon tres horas (3h) en el aula de computadores.

Cada sección tiene un itinerario de tareas, en las que variando un solo parámetro de la forma canónica y dejando los demás sin alterar –en cero o uno según corresponda– se pueda apreciar el efecto que este parámetro produce en la gráfica. Hemos utilizado la forma canónica general $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ con las modificaciones anotadas según cada familia de funciones (ver apartado 3.3) para poder identificar con claridad la correspondencia entre las transformaciones en la gráfica y los parámetros de la forma canónica.

La exploración del efecto que causa en la gráfica los cambios en los parámetros de la ecuación canónica se realiza recurriendo a dos de los procedimientos que permite realizar el GG, de una parte, la inclusión manual de las funciones a través de la barra de entrada con su representación conjunta en la vista gráfica y de otra parte la modificación dinámica de los parámetros a través de la herramienta deslizador del GG.[5]

El recorrido que hacen los estudiantes en la guía tiene la estructura del análisis cualitativo que hemos anotado (ver apartado 3.2) siguiendo la recomendación de Puig (2015). Después de precisar la ecuación canónica de la familia de funciones comenzamos su estudio, con un grupo de ejemplos de una primera subfamilia en donde solamente se ha alterado un parámetro. En seguida se pide a los estudiantes que anoten los cambios que perciben en las gráficas que han realizado con GG, para luego pedirles que predigan realizando bosquejos, cómo podrían ser las gráficas de otras funciones de esta misma subfamilia, finalmente los estudiantes ponen a prueba sus predicciones dibujando las funciones con la ayuda del GG. Luego de terminada la secuencia, se reinicia todo el proceso con una nueva subfamilia, en donde se estudia el efecto en la gráfica de la variación de otro parámetro.

Esta secuencia de pasos, va a ser muy importante a todo lo largo de este estudio, en especial durante el proceso de modelización, en donde se aplicará con frecuencia, es por esta razón que se ha introducido y se practica en esta primera actividad

---

[5] Existe otra herramienta que posee el GG pero que decidimos no utilizar, es la herramienta de arrastre, que se comporta como en otros paquetes de Geometría Dinámica, al señalar una figura y mantenerla señalada con el "ratón" -en nuestro caso la función- se puede desplazar esta figura por la vista grafica, realizando traslaciones, que simultáneamente se manifiestan en la expresión de la ecuación en la Vista algebraica. Algunos estudiantes descubrieron esta herramienta en sus exploraciones y la utilizan en algunos casos. Lo cual se comenta en los capítulos 4 y 5 dedicados al estudio de grupo y al estudio de casos respectivamente.

En los siguientes recuadros presentamos el material que elaboramos para que los estudiantes lo desarrollasen en cada una de las tres secciones de esta primera actividad, incluyendo dos versiones que se realizaron para la sección Funciones Lineales.

Las guías que los estudiantes diligenciaron durante las tres secciones de esta actividad se pueden consultar en los Anexos B Funciones Lineales, C Funciones Cuadráticas y D Funciones Exponenciales.

3.9.2.1 Funciones Lineales

A continuación comentamos algunos aspectos más específicos de cada una de las secciones, así la actividad 1A Funciones Lineales, esta enfocada en el manejo de la forma canónica, de las líneas rectas, que hemos reducido a $y = ax + d$, la expresión de los parámetros de esta forma, diferente de los acostumbrados $y = mx + b$, se debe a que nos interesa mantener una nomenclatura común en términos de una forma canónica más general $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ (ver apartado 3.3). La actividad esta conformada por cuatro tareas dos en las que los parámetros se ajustan de manera manual a través de la barra de entrada o editando las expresiones en la Vista Algebraica de GeoGebra y las dos últimas en que se utiliza la herramienta deslizador para realizar los cambios en los parámetros, precisamente en la Tarea 3 se dan las instrucciones para construir un deslizador en GG.

En la primera tarea se comienza el estudio de la familia de funciones lineales iniciando la secuencia de pasos mencionada, así a partir un grupo de ejemplos de la subfamilia $y = ax$ en donde solamente se varía el parámetro a, la pendiente de la recta, manteniendo los demás parámetros en cero. Después de esto se pide a los estudiantes que anoten los cambios que ven en las gráficas que han realizado con GG, para luego pedirles que predigan cómo podrían ser las gráficas de otras dos funciones de esta subfamilia haciendo bosquejos, finalmente ponen a prueba sus predicciones dibujando las funciones con la ayuda del GG. Como ya habíamos mencionado esta rutina de pasos, va a ser muy importante a todo lo largo de este estudio, en especial durante el proceso de modelización, por eso era relevante introducirla desde las primeras tareas.

En la Tarea 2, siguiendo la misma rutina de pasos, se estudia el efecto de variar el parámetro d manteniendo los demás parámetros inalterados, para poder notar el desplazamiento vertical de la gráfica, finalmente las Tareas 3 y 4 retoman estas mismas situaciones pero con el uso de deslizadores.

[ESCRIBIR EL NOMBRE DE LA COMPAÑÍA]

FAMILIAS DE FUNCIONES

ACTIVIDAD No. 1

FRANCISCO INFANTE

Recuadro 3.1 Actividad 1 Familias de Funciones portada

ACTIVIDAD 1 FAMILIAS DE FUNCIONES

Esta primera actividad se organiza en varias secciones, que usted realizará con ayuda del programa GeoGebra (GG). En ella estudiaremos varios tipos de funciones y en cada uno de ellos revisaremos que efectos ocurren sobre la gráfica al cambiar los parámetros de la función.

Esta es una actividad para realizar en parejas. Uno de los miembros de la pareja debe hacer las veces de secretario, para ir elaborando el *Protocolo*, en donde irán contestando las preguntas, pero paralelamente van escribiendo notas comentando *su actividad*, los procesos meta-cognitivos de toma de decisiones, ideas, acciones, motivo por el cual han decidido actuar así, etc.

Por favor marquen las hojas con sus nombres y grupo y numeren cada comentario en el Protocolo.

FUNCIONES POLINÓMICAS
Vamos a estudiar algunas funciones polinómicas, comenzando con las funciones lineales.

1a FUNCIONES LINEALES

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para cada una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

Tarea 1
Comencemos graficando en GG la función $y = x$
En la misma pantalla grafique las funciones:

$$y = 2x$$
$$y = -2x$$
$$y = 4x$$
$$y = \frac{1}{2}x$$
$$y = -0.33x$$

1.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas? Sea lo más claro y específico posible.

1.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $y=3x$ $y=-4x$ *o* $y=-0.5\,x$ realice un bosquejo con papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG.

Tarea 2
Ahora grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

1

Recuadro 3.2 Actividad 1 Familias de Funciones p. 1 (primera versión)

$y = 2x + 0$

$y = 2x + 1$

$y = 2x - 3$

$y = 2x - 4$

$y = 2x + \frac{1}{2}$

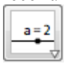
2.1 De nuevo, escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas? Sea lo más claro y específico posible.

2.2 Intente predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo y=2x-1 o y=2x+5 realice un bosquejo con papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG.

Uso de Deslizadores

Una herramienta muy útil que tiene GG son los deslizadores, vamos a utilizarlo para graficar una función de la forma $y=ax$. En una nueva ventana.

Tarea 3
0. Abra una Nueva Ventana.

1.Para establecer un deslizador, en la barra de herramientas escogemos el segundo menú de derecha a izquierda 

y al abrirse el menú lo volvemos a seleccionar.

2.Luego con el ratón hacemos click en cualquier parte de la Vista Grafica. En ese sitio quedará ubicado el deslizador.

3. En este momento se abre una ventana en la que definen algunas características del deslizador.
- Debemos ponerle nombre al deslizador, lo llamaremos *a,*
- Se deben definir los límites del intervalo que utilizará, en nuestro caso -10 y 10.
- Se puede cambiar el valor del incremento, lo dejaremos en 0.1
- Hacemos click en aplicar.

4. Ahora nos aparece el deslizador en la Vista Gráfica,

5. Ahora escribimos en la Barra de Entrada la expresión $y=ax$

6. Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Tarea 4
Es MUY IMPORTANTE cuando se estudia el efecto de los parámetros de una función en su gráfica, Tomar un SOLO PARAMETRO a la vez, dejando los otros fijos para poder, notar el cambio.

En una nueva ventana construya un deslizador para la expresión y=0.5x+d
Siga los pasos de la tarea 3

Revise sus conclusiones de las Tareas 1 y 2, se mantienen? ¿Hay otras nuevas?

2

Recuadro 3.3 Actividad 1 Familias de Funciones p. 2 (primera versión)

Los recuadros anteriores muestran la primera versión que desarrollamos para la actividad 1A Funciones Lineales, donde se le entregaba a cada pareja esta guía de trabajo y simultáneamente se les entregaban hojas en blanco y cuadriculadas para que fueran desarrollando la actividad y respondiendo las preguntas, sin embargo luego de testearlo observamos que el darles las hojas en blanco generaba diferentes estilos de trabajo, a veces llevaba a que se olvidaran de alguna pregunta o a que la respondieran de una manera muy breve o incompleta, y además se tomaban mucho tiempo construyendo los sistemas de coordenadas para realizar las gráficas, lo que entorpecía el desarrollo de la actividad. Por todo lo anterior, decidimos generar otra versión de la misma lección, pero esta vez más estructurada, siguiendo el mismo cuestionario pero dejándoles en la guía los espacios para responder cada una de las preguntas y dándoles ya construidos los sistemas de coordenadas. Este es el modelo que se muestra a continuación.

ACTIVIDAD 1 FAMILIAS DE FUNCIONES

Esta primera actividad se organiza en varias secciones, que usted realizará con ayuda del programa GeoGebra (GG). En ella estudiaremos varios tipos de funciones y en cada uno de ellos revisaremos que efectos ocurren sobre la gráfica al cambiar los parámetros de la función.

Esta es una actividad para realizar en parejas. Uno de los miembros de la pareja debe hacer las veces de secretario, para ir elaborando el *Protocolo*, en donde irán contestando las preguntas, pero paralelamente van escribiendo notas comentando *su actividad*, los procesos meta-cognitivos de toma de decisiones, ideas, acciones, motivo por el cual han decidido actuar así, etc.

Por favor marquen las hojas con sus nombres y grupo y numeren cada comentario en el Protocolo.

FUNCIONES POLINÓMICAS
Vamos a estudiar algunas funciones polinómicas, comenzando con las funciones lineales.

1a FUNCIONES LINEALES

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para cada una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

Tarea 1
Comencemos graficando en GG la función $y = x$
En la misma pantalla grafique las funciones:

$$y = 2x$$
$$y = -2x$$
$$y = 4x$$
$$y = \frac{1}{2}x$$
$$y = -0.33x$$

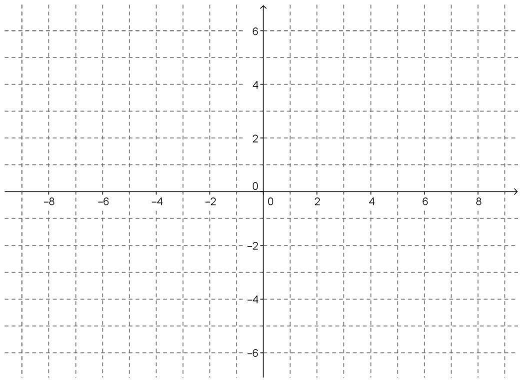
1.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas? Sea lo más claro y específico posible, anotando los cambios para cada una de las funciones.

1.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo y=3x y=-4x *o* y=-0.5 x Descríbalas en palabras.

1

Recuadro 3.4 Actividad 1 Familias de Funciones p. 1

1.3 Ahora realice un bosquejo con papel y lápiz de estas 3 funciones ANTES de hacerlo en GG.



Tarea 2

Ahora grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$y = 2x + 0$

$y = 2x + 1$

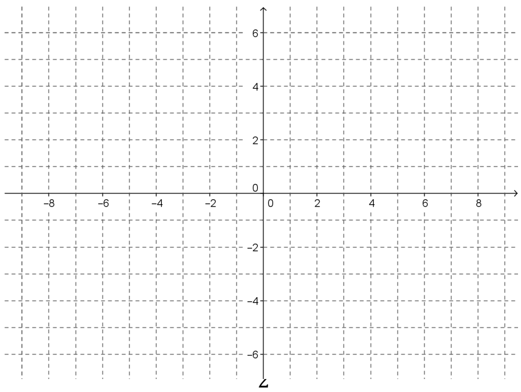
$y = 2x - 3$

$y = 2x - 4$

$y = 2x + \frac{1}{2}$

2.1 De nuevo, escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas? Sea lo más claro y específico posible.

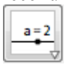
2.2 Intente predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo y=2x-1 o y=2x+5 realice un bosquejo con papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG.



Recuadro 3.5 Actividad 1 Familias de Funciones p. 2

Uso de Deslizadores

Una herramienta muy útil que tiene GG son los deslizadores, vamos a utilizarlo para graficar una función de la forma *y=ax*. En una nueva ventana.
Tarea 3
0. Abra una Nueva Ventana.

1.Para establecer un deslizador, en la barra de herramientas escogemos el segundo menú de derecha a izquierda  y al abrirse el menú lo volvemos a seleccionar.

2.Luego con el ratón hacemos click en cualquier parte de la Vista Grafica. En ese sitio quedará ubicado el deslizador.

3. En este momento se abre una ventana en la que definen algunas características del deslizador.
- Debemos ponerle nombre al deslizador, lo llamaremos *a,*
- Se deben definir los límites del intervalo que utilizará, en nuestro caso -10 y 10.
- Se puede cambiar el valor del incremento, lo dejaremos en 0.1
- Hacemos click en aplicar.

4. Ahora nos aparece el deslizador en la Vista Gráfica,

5. Ahora escribimos en la Barra de Entrada la expresión *y=ax*

6. Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Tarea 4
Es MUY IMPORTANTE cuando se estudia el efecto de los parámetros de una función en su gráfica, Tomar un SOLO PARAMETRO a la vez, dejando los otros fijos para poder, notar el cambio.

En una nueva ventana construya un deslizador para la expresión $y=0.5x+d$
Siga los pasos de la tarea 3

Revise sus conclusiones de las Tareas 1 y 2, se mantienen? ¿Hay otras nuevas? Anótelas.

3

Recuadro 3.6 Actividad 1 Familias de Funciones p. 3

3.9.2.2 Funciones Cuadráticas

Para el estudio de las funciones cuadráticas en esta sección hemos elegido la ecuación canónica $y = a(x - c)^2 + d$ en la que cada uno de los parámetros produce una transformación en la gráfica de la función "patrón" $y = x^2$ de tal manera que el parámetro a varía el grado de concavidad de la curva, el parámetro c marca un desplazamiento en sentido horizontal y d conlleva una traslación de la gráfica en sentido vertical.

Nuestra ecuación canónica tiene un pequeño inconveniente en términos de la sintaxis y semántica de los CAS (Artigue, 1997) y en particular del paquete informático que utilizamos y es que en tanto el GG combina herramientas de geometría con otras del ámbito del álgebra, entiende de manera diferente las dos expresiones $y = a(x - c)^2 + d$ y $f(x) = a(x - c)^2 + d,$ esta última la asume como una función cuadrática y como tal solo considera las representaciones gráficas que son parábolas con eje vertical, en cambio la primera expresión en el entorno del GG se entiende como una parábola en general, indistintamente de la dirección de su eje, desde un punto de vista mucho más geométrico. Esta primera situación se contempla en la guía y se hace la aclaración.

Luego de este cambio, en la Tarea 5 se comienza el estudio de la familia de funciones, iniciando con un grupo de ejemplos de una primera subfamilia $f(x) = (x - c)^2$ en donde solamente se altera el parámetro c que produce una translación en sentido horizontal. Después de esto se pide a los estudiantes que anoten los cambios que ven en las gráficas que han realizado con GG, para luego pedirles que predigan cómo podrían ser las gráficas de otras dos funciones de esta subfamilia haciendo bosquejos, finalmente ponen a prueba sus predicciones dibujando las funciones con la ayuda del GG. Como ya habíamos mencionado esta rutina de pasos, va a ser muy importante a todo lo largo de este estudio, en especial durante el proceso de modelización, es por esto que se ha introducido y se practica a lo largo de toda esta actividad.

A continuación en la Tarea 6 nuevamente desde un grupo de ejemplos se realiza el estudio de otra subfamilia de funciones en este caso $f(x) = x^2 + d$ donde el parámetro d produce una translación en sentido vertical. Aquí de nuevo utilizamos la rutina de pasos descrita de análisis de los ejemplos, anotar las diferencias que se perciben en las gráficas, predecir las gráficas de otras funciones de la subfamilia con bosquejos y revisión de las predicciones con el GG. Aquí además se pide comparar el efecto de el parámetro d en las parábolas, con el efecto de este mismo parámetro en las líneas rectas, esto con el fin de ir estableciendo una ecuación canónica general.

Luego en la Tarea 7 siguiendo la misma rutina de pasos y a partir de un grupo de ejemplos se estudia la subfamilia $f(x) = ax^2$ en donde se altera el parámetro a que como habíamos mencionado, varía el grado de concavidad de la curva.

Las tareas 8, 9 y 10 utilizan deslizadores para estudiar las mismas tres subfamilias, con el fin de revisar y completar las conclusiones de las tareas 5, 6 y 7 pero en este caso los estudiantes tienen la ventaja de conocer ya el manejo dinámico de esta herramienta, lo que potencializa el aprendizaje y el dominio tanto del tema como del programa. Para concluir esta actividad, se le pide a los estudiantes que combinen en una misma situación el uso de dos deslizadores en este caso para los parámetros c y d.

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para cada una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

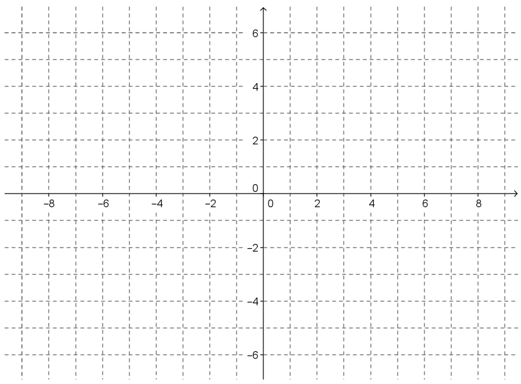
Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

$g(x) = (x-1)^2$ $m(x) = (x+3)^2$

$h(x) = (x-2)^2$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c ? Sea lo más claro y específico posible.

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ *o* $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



4

Recuadro 3.7 Actividad 1 Familias de Funciones p. 4

Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro *d,* para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$

$g(x)=x^2+1$

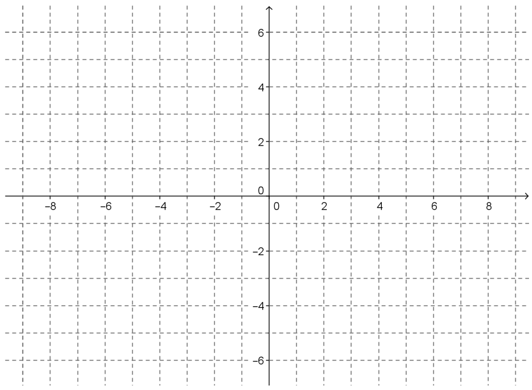
$h(x)=x^2-2$

$k(x)=x^2+3$

$p(x)=x^2-4$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x)=x^2+2$ *o* $k(x)=x^2-\frac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

5

Recuadro 3.8 Actividad 1 Familias de Funciones p. 5

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a,* pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$

$g(x) = 2x^2$

$h(x) = 3x^2$

$k(x) = -x^2$

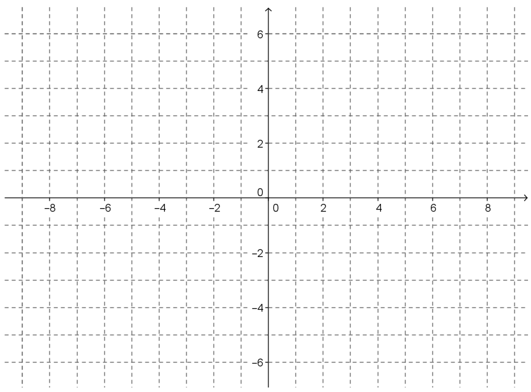
$p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$q(x) = -0.33x^2$

7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a ? Sea lo más claro y específico posible.

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro *a* en la gráfica?

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



6

Recuadro 3.9 Actividad 1 Familias de Funciones p. 6

Uso de Deslizadores

Tarea 8
Hasta aquí hemos revisado los parámetros *a, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro *c* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=(x+c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Tarea 9
Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo *d* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Recuadro 3.10 Actividad 1 Familias de Funciones p. 7

Tarea 10
Ahora revisemos el parámetro *a*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo *a* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros *c* y *d.* ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

8

Recuadro 3.11 Actividad 1 Familias de Funciones p. 8

3.9.2.3 Funciones Exponenciales

En la actividad 1C sobre funciones exponenciales seguimos una estructura semejante a la empleada en el estudio de otras familias de funciones, recorriendo la rutina de pasos mencionada en las anteriores secciones de esta actividad.

Aquí también hemos utilizado una ecuación canónica reducida en favor de la claridad, la que hemos usado es $f(x) = 2^{bx-c} + d$ en donde de nuevo cada uno de los parámetros produce una transformación sobre la función patrón $f(x) = 2^x$, así el parámetro d produce una traslación de la gráfica en sentido vertical, el parámetro *c* marca un desplazamiento en sentido horizontal y el parámetro b produce un "estiramiento" de la curva en sentido vertical.

En la Tarea 11 se estudia a partir de un grupo de ejemplos, el efecto de la variación del parámetro b en la subfamilia de funciones $f(x) = 2^{bx}$, en donde los estudiantes en el recorrido por la secuencia de pasos notan el estiramiento mencionado.

La Tarea 12 se refiere al parámetro *d,* para lo que se propone un grupos de ejemplos de la subfamilia $f(x) = 2^x + d$ donde poder apreciar traslación de la gráfica en sentido vertical. En el ítem 11.4 se pregunta a los estudiantes si reconocen alguna Asíntota en la gráfica, pues en la tarea 12 se toman como referencia las asíntotas para precisar la traslación realizada. De otra parte se retoma la relación del parámetro *d* en los otros tipos de familias estudiadas.

El estudio del parámetro *c,* en la Tarea 13 se realiza sobre un grupo de ejemplos de la subfamilia $f(x) = 2^{x-c}$ en los cuales se nota con claridad la translación en sentido horizontal, siempre a través de la rutina de pasos comentada.

En las tareas 14, 15 y 16 se utilizan deslizadores para estudiar las mismas tres subfamilias mencionadas, con el fin de revisar y completar las conclusiones de las tareas 11, 12 y 13 pero de una manera mucho más dinámica como lo posibilita esta herramienta.

Para finalizar la actividad, en los ítems 16.3 y 16.4 se les pide a los estudiantes que combinen en una misma situación el uso de dos deslizadores en este caso para los parámetros *c* y *d.* Realizando primero una predicción y luego escribiendo sus comentarios.

1c FUNCIONES EXPONENCIALES

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones exponenciales, para ello tomaremos la función patrón $f(x) = 2^x$ y revisaremos los parámetros *b, c* y *d* de la familia funcional

$$f(x) = 2^{bx-c} + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $f(x) = 2^x$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para cada una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

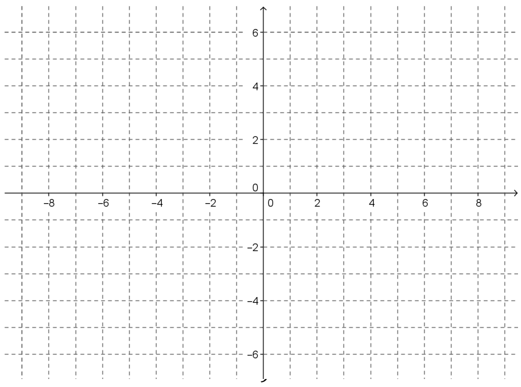
Tarea 11
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = 2^x$ y solo cambiemos el parámetro *b* dejando los demás inalterados. En la misma pantalla grafique las funciones, recuerde escribir el exponente entre paréntesis en GG

$g(x) = 2^{4x}$ $\quad$ $m(x) = 2^{0.4x}$

$n(x) = 2^{2x}$ $\quad$ $h(x) = 2^{0.5x}$

11.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro *b* ? Sea lo más claro y específico posible.

11.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $k(x) = 2^{5x}$ *o* $g(x) = 2^{0.3x}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



Recuadro 3.12 Actividad 1 Familias de Funciones p. 9

11.3 De las funciones que ha dibujado ¿cuál crece más rápido? ¿cuál crece más lento?

11.4 ¿Recuerda lo que es una *Asíntota?* ¿ve alguna en las gráficas que ha realizado?

Tarea 12
Ahora revisemos el parámetro *d,* para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = 2^x$

$g(x) = 2^x + 1$

$h(x) = 2^x - 3$

$m(x) = 2^x + 2$

$n(x) = 2^x - 4$

12.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

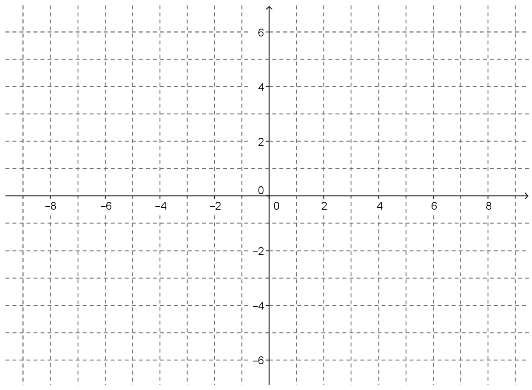
12.2 ¿Dónde quedan las asíntotas de estas funciones? ¿podría escribir las ecuaciones de estas asíntotas?

12.3 ¿Ve alguna relación entre la ECUACIÓN de la función exponencial y la ECUACIÓN de la asíntota? Explique.

10

Recuadro 3.13 Actividad 1 Familias de Funciones p. 10

12.4 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $h(x) = 2^x + 3$ *o* $m(x) = 2^x - 2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana. Dibuje también las asíntotas.



12.5 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales, el parámetro d que utilizamos en las funciones cuadráticas y este parámetro d de las funciones exponenciales? Explique.

Tarea 13

13.1 Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *c*, pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

Ahora sí revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones. Recuerde escribir el exponente entre paréntesis en GG.

$g(x) = 2^x$

$k(x) = 2^{x+2}$

$p(x) = 2^{x-1}$

$q(x) = 2^{x-2}$

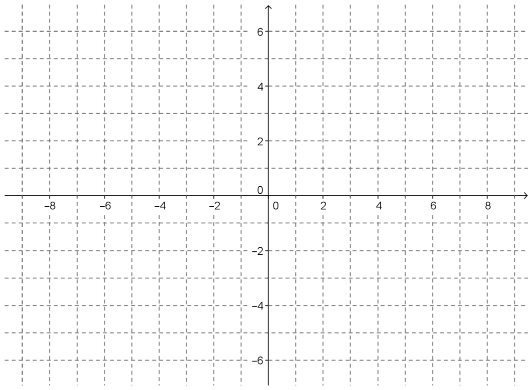
$r(x) = 2^{x-3}$

11

Recuadro 3.14 Actividad 1 Familias de Funciones p. 11

13.2 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c ? Sea lo más claro y específico posible.

13.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $m(x)=2^{x+1}$ o $n(x)=2^{x-5}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



12

Recuadro 3.15 Actividad 1 Familias de Funciones p. 12

Uso de Deslizadores

Tarea 14
Hasta aquí hemos revisado los parámetros *b, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *b*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro *b* , con límites 0.1 y 5 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=2^{(bx)}$ (paso 5 Tarea 3)

14.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

14.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 11.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Tarea 15
Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo *d* , con límites -5 y 5 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=2^x+d$ (paso 5 Tarea 3)

15.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

15.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 12.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

13

Recuadro 3.16 Actividad 1 Familias de Funciones p. 13

Tarea 16
Ahora revisemos el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo *c* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = 2^{(x-c)}$ (paso 5 Tarea 3)

16.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

16.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 13.2? en caso de ser diferente anote las diferencias.

16.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros *c* y *d.* ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = 2^x$

16.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

14

Recuadro 3.17 Actividad 1 Familias de Funciones p. 14

3.9.3 Sesión de cierre Funciones Lineales

Después de cada una de las secciones de la primera actividad, Familias de Funciones, se efectuó una puesta en común sobre el trabajo realizado por los estudiantes, esta sesión (0.5h) buscaba puntualizar el efecto que produce cada uno de los parámetros sobre la grafica de la función y reconocer el comportamiento de él mismo parámetro en la ecuación canónica al variar las familias funcionales estudiadas.

3.9.4 Manejo de Tablas y Gráficas Discretas en GeoGebra

Después del estudio de las familias funcionales se efectuó una sesión dirigida por el Investigador (1h) sobre el manejo de la Hoja de Calculo (HdC) de GG. Su objetivo era reconocer las características y herramientas de esta sección del programa, y desarrollar destrezas para la elaboración de tablas en este paquete y la construcción de graficas discretas a partir de datos en tablas. Para ello además se elaboraron dos protocolos como ayuda a los estudiante, uno para la construcción de tablas y otro para la construcción de gráficas a partir de los datos dados en una tabla, situaciones estas que eran a necesarias para poder desarrollar las actividades 2 y 3.

3.9.5 Introducción a la Modelización de Funciones

Luego realizamos una sesión (1h) en donde se comenzaba a introducir el concepto de modelización. El objetivo de esta sesión era doble: de una parte, se trataba de familiarizar a los estudiantes con las herramientas estadísticas de GG usando datos expresados en tablas; y de otra parte, se comenzaba a estudiar la idea de mejor ajuste de una nube de puntos.

Así se brindaban a los estudiantes datos presentados en tablas que ellos debían pasar a la Hoja de Calculo de GG y posteriormente graficar la nube de puntos respectiva y a partir de ella intentar hallar la función que diera el mejor ajuste, para ello utilizamos dos métodos, de una parte las herramientas estadísticas de la HdC de GG con sus menús de regresión y de otra parte lo que hemos llamado el “ajuste manual” que consistía en que a partir de las características que se observaban en la nube de puntos, tanto en la tabla como en su gráfica –su análisis cualitativo– los estudiantes trataban de encontrar una función que se ajustara a la nube de puntos, para ello utilizaban este análisis cualitativo y el conocimiento de las familias de funciones estudiadas, de forma que manipulando los parámetros de la ecuación canónica correspondiente los estudiantes intentaban encontrar una función que se ajustara a la nube de puntos.

3.9.6 Actividad 2 Regresión y Correlación

El objetivo de esta actividad era estudiar la idea de mejor ajuste de una nube de puntos, y discutir la diferencia entre ajuste estadístico y modelización. Para ello se presentaban cuatro situaciones problemáticas desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista, con datos tomados de fuentes de información pública (revistas, informes oficiales publicados e internet). Además estas situaciones problemáticas concernían al contexto de las ciencias económico-administrativas, área a la que pertenecen nuestros estudiantes, con lo cual esperábamos que se interesarán e involucrarán aún más. Para cada una de estas situaciones problemáticas a su vez se contemplaban varias tareas que los estudiantes debían realizar. Las situaciones que se estudiaban son:

- Depreciación
- Préstamos

- Desnutrición
- Salario mínimo

De otra parte se discutía qué ajuste es conveniente y qué precauciones hay que tomar y para qué es válido el modelo de regresión o correlación elaborado.

Como en la primera actividad, el uso de el paquete informático es una pieza clave del proceso, en cuanto brinda elementos sobre el comportamiento del fenómeno, al organizarlos en una tabla y/o visualizarlos en la gráfica de la nube de puntos, además de que brinda las herramientas para posibilitar el ajuste.

Las tareas en esta segunda actividad están enfocadas en su mayoría a las funciones lineales, solo en la última situación (salario mínimo) se han incluido otros tipos de funciones y la noción de funciones definidas a trozos.

La guía que se diseño para el desarrollo de la actividad, esta estructurada de forma que a parir de la situación problemática realista, el estudiante se involucre en el problema y consulte otra información que se le suministra y a partir de ello vaya completando la guía y respondiendo las preguntas que allí se le presentan. Para esta actividad se destinaron dos horas de trabajo en el aula con los ordenadores lo que permitía el desarrollo de una parte de la actividad, la parte restante se dejo para ser terminada trabajando con las mismas parejas en casa.

3.9.6.1 Depreciación

A continuación comentamos los aspectos más relevantes de cada una de las situaciones problemáticas estudiadas y presentamos el material diseñado para esta actividad. La Guía comienza con una breve introducción para el estudiante y recordándole algunos aspectos importantes a tener en cuenta, para pasar luego a introducir la primera situación, “Depreciación” (ver recuadro 3.20 y ss) definiéndola en términos contables y exponiendo la reglamentación vigente en Colombia. Luego se presenta la situación puntual:

> Usted es el contador del colegio Carlos III este plantel de 940 estudiantes después de llevar varios años contratando los servicios de empresas de transporte ha decidido que debe adquirir un bus propio para llevar a sus estudiantes a diferentes actividades deportivas y culturales. Le piden a usted que presente 3 opciones de bus para la compra y la posible depreciación de cada uno de ellos.

Para una de las opciones de bus, se muestra en la guía el proceso para el cálculo de la depreciación y la forma de elaborar una tabla de depreciación. La Tarea 1 a partir de estos datos, le pide al estudiante que prediga el tipo de gráfica que representaría el valor neto del vehículo con el correr de los años, (una recta decreciente) y que elabore un bosquejo de esta gráfica, estos dos aspectos son elementos de análisis cualitativo del fenómeno. Luego se le pide que realice la tabla y la gráfica de la nube de puntos en GG, con lo que se confronta su análisis previo, para finalmente solicitarle que halle la ecuación de la línea. Después de terminado este proceso se le pide al estudiante que lo repita para los otros dos buses, para lo que se le brindan las tablas y diagramas de coordenadas donde desarrollar su trabajo (ver recuadros 3.23 - 3.26).

11

REGRESIÓN Y CORRELACIÓN

ACTIVIDAD No. 2

Francisco Infante

[Seleccionar fecha]

[Escriba aquí una descripción breve del documento. Una descripción breve es un resumen corto del contenido del documento. Escriba aquí una descripción breve del documento. Una descripción breve es un resumen corto del contenido del documento.]

Recuadro 3.18 Actividad 2 Regresión y Correlación portada

ACTIVIDAD No. 2 REGRESIÓN Y CORRELACIÓN

INTRODUCCIÓN

A continuación usted encontrará cuatro actividades sobre Regresión y Correlación, a partir de situaciones realistas, en cada una de ellas deberá tomar algunos datos, responder ciertas preguntas y realizar varias tareas con lápiz y papel y otras en el computador.

En las tareas se emplearán algunas de las herramientas estadísticas de GeoGebra (GG) que nos facilitarán el trabajo.

Algunos aspectos a recordar:

Es muy importante que usted vaya recogiendo la información del proceso que va llevando adelante, dibujos, bosquejos, gráficas y tablas deberán ser recopilados para su posterior entrega. En este sentido va a ser necesario que en algunos momentos usted realice capturas de pantalla del trabajo que está realizando en su computador y las almacene en un archivo Word. También es oportuno que guarde los archivos de las actividades que desarrolle en GG.

Esta recopilación se realizará en archivos de computador, y en algunas ocasiones de manera física (guarde sus soportes, copias y originales, luego se podrán necesitar).

1

Recuadro 3.19 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 1

ACTIVIDAD No. 2 REGRESIÓN Y CORRELACIÓN

1 DEPRECIACIÓN

La depreciación en términos contables es la pérdida de valor anual de un activo en la medida que pasa el tiempo, que en teoría llega a ser cero cuando caduca la vida útil del bien. Sin embargo, éste tiene un valor comercial subjetivo. Puede ser por desgaste, por el tiempo u obsolescencia.

El método más sencillo y utilizado por las empresas, consiste en dividir el valor del activo entre la vida útil del mismo. Para utilizar este método primero se determina la vida útil de los diferentes activos.

Según el decreto 3019 de 1989, que reglamenta parcialmente el Estatuto Tributario en Colombia, los inmuebles tienen una vida útil de 20 años, los bienes muebles, maquinaria y equipo, trenes aviones y barcos, tienen una vida útil de 10 años, y los vehículos y computadores tienen una vida útil de 5 años.

Además de la vida útil, se maneja otro concepto conocido como valor de salvamento o valor residual, y es aquel valor por el que la empresa calcula que se podrá vender el activo una vez finalizada la vida útil del mismo. El valor de salvamento no es obligatorio. Una vez determinada la vida útil y el valor de salvamento de cada activo, se procede a realizar el cálculo de la depreciación.

Usted es el contador del colegio Carlos III este plantel de 940 estudiantes después de llevar varios años contratando los servicios de empresas de transporte ha decidido que debe adquirir un bus propio para llevar a sus estudiantes a diferentes actividades deportivas y culturales. Le piden a usted que presente 3 opciones de bus para la compra y la posible depreciación de cada uno de ellos.

Puede consultar la página http://www.carroya.com/web/buscar/vehiculos/ultimabusqueda.do para comenzar su búsqueda.

La primera de las opciones es el bus:

Opción 1

Marca: Chevrolet	Línea: NPR	Modelo: 2002
Cilindraje: 4500cc	Capacidad: 28 pnas.	Valor: $60.000.000

Para realizar el cálculo de la depreciación tenemos entonces (60.000.000 /5) = 12.000.000.
(Valor del activo/Vida útil).

Ese procedimiento se hace para cada periodo hasta depreciar totalmente el activo.

Valor del activo	$ 60.000.000
Valor de salvamento	0
Vida útil (Años)	5
Cuota	$ 12.000.000

2

Recuadro 3.20 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 2

PLAN DE DEPRECIACIÓN

AÑO	CUOTA DEPRECIACIÓN	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR NETO EN LIBROS
1	12.000.000	12.000.000	48.000.000
2	12.000.000	24.000.000	36.000.000
3	12.000.000	36.000.000	24.000.000
4	12.000.000	48.000.000	12.000.000
5	12.000.000	60.000.000	-

Tabla 1 Datos del plan de depreciación con cuotas constantes (datos en pesos colombianos)

Tarea 1
A continuación es importante que usted responda por escrito las siguientes preguntas y que realice los pasos que se presentan en la secuencia en que aparecen:

1. Sí representara en un sistema de coordenadas el valor neto del vehículo al correr de los años, ¿Qué tipo de gráfica cree que resultaría? ¡Piénselo antes de dibujar! Anótelo

2. Ahora realice un bosquejo[1] rápido de cómo cree que será la gráfica.

[1] NOTA IMPORTANTE
Cuando nos referimos a un *bosquejo*, lo entendemos como un diagrama intuitivo de cómo es el comportamiento de las variables a partir de lo que se observa en los datos, o de lo que usted conoce de ellos. NO se trata de realizar un diagrama detallado y preciso llevando los datos exactos a un sistema de coordenadas, esto se realizará, pero en otro momento del estudio.

3

Recuadro 3.21 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 3

3. Ahora en Geogebra (GG). Reconstruya la tabla anterior en GG. (Ver Anexo 1: Protocolo de Tablas y Gráficas).
4. Represente en un sistema de coordenadas usando GG el valor neto del vehículo al correr de los años. (Ver Anexo 1: Protocolo de Tablas y Gráficas).
5. Por la ubicación de los puntos ¿Qué tipo de gráfica le resulta?

6. Halle la ecuación de la función que representa la gráfica, ¿cómo podría hacerlo?

7. ¿Se le ocurren varios métodos para hallar la ecuación? ¿Cuáles? Explique…

Después de haber efectuado este análisis para la primera opción de bus, realice esta misma secuencia de pasos para las otras dos propuestas, (se anexa el material para que usted lo complete) y elabore un informe en Word. Este informe debería contener:

- **Una tabla** presentando los datos de las tres propuestas (marca, modelo, capacidad…) y
- **Los materiales** en donde se realizaron los pasos anteriores en los tres casos, así: **Bosquejos, Tablas en GG, Gráficas en GG, comentarios, y los apuntes o cálculos para hallar la ecuación en cada caso.**

Guarde en este archivo Word los comentarios y las capturas de pantalla de las gráficas y tablas que realice, así como los demás materiales. Nombre este archivo con sus apellidos, nombres, grupo y luego BUS (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-BUS.doc) así mismo guarde el archivo de GG donde realizó las gráficas y nómbrelo con sus apellidos y luego BUS (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-BUS.ggb).

4

Recuadro 3.22 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 4

Material para el SEGUNDO VEHÍCULO

1. Complete: Valor del Vehículo:
   Marca:
   Modelo:
   Capacidad:

2. Llene la tabla con los datos de la depreciación del vehículo.

AÑO	CUOTA DEPRECIACIÓN	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR NETO EN LIBROS
1			
2			
3			
4			
5			-

3. Muestre los cálculos realizados.

4. Sí representara en un sistema de coordenadas el valor neto del vehículo al correr de los años, ¿Qué tipo de gráfica cree que resultaría? ¡Piénselo antes de dibujar! Anótelo

5. Ahora realice un bosquejo rápido de cómo cree que será la gráfica.

5

Recuadro 3.23 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 5

6. Ahora en Gegebra (GG). Construya la tabla de la depreciación en GG. (Ver Anexo 1: Protocolo de Tablas y Gráficas).
7. Represente en un sistema de coordenadas usando GG el valor neto del vehículo al correr de los años. (Ver Anexo 1: Protocolo de Tablas y Gráficas).

8. Por la ubicación de los puntos ¿Qué tipo de gráfica le resulta?

9. Halle la ecuación de la función que representa la gráfica, ¿cómo podría hacerlo?

6

Recuadro 3.24 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 6

Material para el TERCER VEHÍCULO

1. Complete: Valor del Vehículo:
   Marca:
   Modelo:
   Capacidad:

2. Llene la tabla con los datos de la depreciación del vehículo.

AÑO	CUOTA DEPRECIACIÓN	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR NETO EN LIBROS
1			
2			
3			
4			
5			-

3. Muestre los cálculos realizados.

4. Sí representara en un sistema de coordenadas el valor neto del vehículo al correr de los años, ¿Qué tipo de gráfica cree que resultaría? ¡Piénselo antes de dibujar! Anótelo

5. Ahora realice un bosquejo rápido de cómo cree que será la gráfica.

Recuadro 3.25 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 7

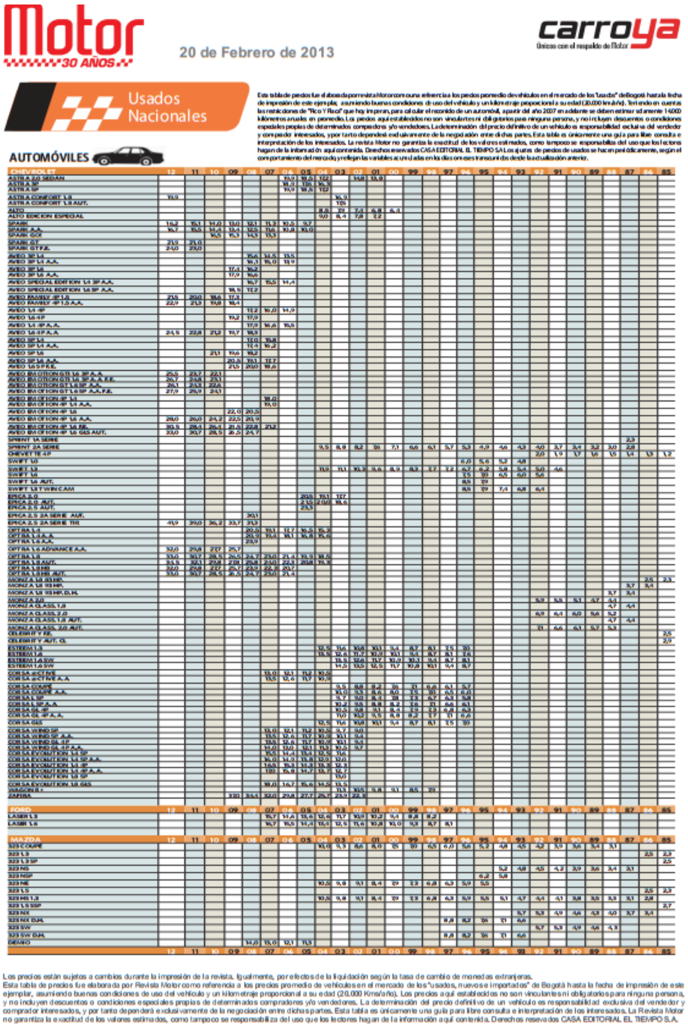
6. Ahora en Geogebra (GG). Construya la tabla de la depreciación en GG. (Ver Anexo 1: Protocolo de Tablas y Gráficas).
7. Represente en un sistema de coordenadas usando GG el valor neto del vehículo al correr de los años. (Ver Anexo 1: Protocolo de Tablas y Gráficas).

8. Por la ubicación de los puntos ¿Qué tipo de gráfica le resulta?

9. Halle la ecuación de la función que representa la gráfica, ¿cómo podría hacerlo?

8

Recuadro 3.26 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 8



Motor
30 AÑOS

20 de Febrero de 2013

carroya
Únicos con el respaldo de Motor

Usados Nacionales

Esta tabla de precios fue elaborada por revista Motor como una referencia a los precios promedio de vehículos en el mercado de los "usados" de Bogotá hasta la fecha de impresión de este ejemplar, asumiendo buenas condiciones de uso del vehículo y un kilometraje proporcional a su edad (20.000 km/año). Teniendo en cuenta las restricciones de "Pico Y Placa" que hoy imperan, para calcular el recorrido de un automóvil, a partir del año 2007 en adelante se deben estimar solamente 14.000 kilómetros anuales en promedio. Los precios aquí establecidos no son vinculantes ni obligatorios para ninguna persona, y no incluyen descuentos o condiciones especiales propias de determinados compradores y/o vendedores. La determinación del precio definitivo de un vehículo es responsabilidad exclusiva del vendedor y comprador interesados, y por tanto dependerá exclusivamente de la negociación entre dichas partes. Esta tabla es únicamente una guía para libre consulta e interpretación de los interesados. La revista Motor no garantiza la exactitud de los valores estimados, como tampoco se responsabiliza del uso que los lectores hagan de la información aquí contenida. Derechos reservados CASA EDITORIAL EL TIEMPO S.A. Los ajustes de precios de usados se hacen periódicamente, según el comportamiento del mercado y reflejan las variables acumuladas en los días o meses transcurridos desde la actualización anterior.

AUTOMÓVILES

Los precios están sujetos a cambios durante la impresión de la revista. Igualmente, por efectos de la liquidación según la tasa de cambio de monedas extranjeras.
Esta tabla de precios fue elaborada por Revista Motor como referencia a los precios promedio de vehículos en el mercado de los "usados, nuevos e importados" de Bogotá hasta la fecha de impresión de este ejemplar, asumiendo buenas condiciones de uso del vehículo y un kilometraje proporcional a su edad (20.000 Kms/año). Los precios aquí establecidos no son vinculantes ni obligatorios para ninguna persona, y no incluyen descuentos o condiciones especiales propias de determinados compradores y/o vendedores. La determinación del precio definitivo de un vehículo es responsabilidad exclusiva del vendedor y comprador interesados, y por tanto dependerá exclusivamente de la negociación entre dichas partes. Esta tabla es únicamente una guía para libre consulta e interpretación de los interesados. La Revista Motor no garantiza la exactitud de los valores estimados, como tampoco se responsabiliza del uso que los lectores hagan de la información aquí contenida. Derechos reservados CASA EDITORIAL EL TIEMPO S.A.

Fig. 1 Datos de la revista *Motor*

9

Recuadro 3.27 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 9

3.9.6.2 Préstamos

La segunda situación problemática realista de esta actividad se refiere a la solicitud de un préstamo bancario y su costo en el tiempo (ver recuadro 3.28 y ss), específicamente un préstamo con cuotas decrecientes y tasa fija anual del 15% y plazo máximo de financiación de 10 años. Dice el problema:

> El Señor Carlos Zambrano es propietario de una pequeña bodega en la zona industrial de Bogotá y está pensando en ampliarla comprando el local vecino, que están avaluado en 712.000.000 pesos según el aviso publicado por la inmobiliaria. Para hacerlo necesitaría hacer un préstamo.
>
> Al consultar en el Banco de Bogotá le ofrecen 4 tipos de planes de amortización, que además pueden tener tasa fija anual del 15% o variable de acuerdo con las tasas futuras, y le confirman que el plazo máximo de financiación es de 10 años.
>
> Dada la condición de su empresa el Sr. Zambrano está interesado en un préstamo de cuotas decrecientes con tasa fija [...]

Además del enunciado del problema se presentan en sendas tablas otras informaciones sobre el tipo de crédito de una parte (tabla 2) y de otra los valores puntuales del préstamo solicitado (tabla 3), en términos del interés anual que cobra el banco, el valor de la amortización anual y el total a pagar anualmente o en otras palabras el valor de la cuota a pagar. Esta última tabla es la que va brindar los valores para construir la nube de puntos.

Luego de presentar la situación la Tarea 2 le pide a los estudiantes que estudien en detalle la tabla 3 con los valores mencionados, para a partir de ella dibujar los bosquejos correspondientes a las tres funciones relacionadas con el interés anual, la amortización y el valor de la cuota. Seguidamente se les pide que expliquen los bosquejos que han realizado. Esta parte de la tarea corresponde al análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones involucradas, en este caso las funciones lineales. Con el interés particular de que una de ellas es una función constante, lo cual según la literatura le presenta una mayor dificultad a los estudiantes.

Después se les pide que trabajen en GG donde deben reconstruir la tabla y a partir de ella dibujar las gráficas de las nubes de puntos de las tres funciones, confrontando de esta manera sus análisis, de esta forma el análisis cualitativo ejerce un papel de control del proceso. Finalmente se les solicita realizar los cálculos pertinentes para hallar las respectivas ecuaciones.

Como en la primera situación hemos dejado a disposición de los estudiantes en la guía los sistemas de coordenadas y otros espacios para desarrollar la tarea.

2. PRÉSTAMOS

De los diversos tipos de préstamos que ofrece el sistema financiero uno de los que podemos contemplar es el de las llamadas cuotas decrecientes. Veamos una situación

El Señor Carlos Zambrano es propietario de una pequeña bodega en la zona industrial de Bogotá y está pensando en ampliarla comprando el local vecino, que están avaluado en 712.000.000 pesos según el aviso publicado por la inmobiliaria. Para hacerlo necesitaría hacer un préstamo.

Al consultar en el Banco de Bogotá le ofrecen 4 tipos de planes de amortización, que además pueden tener tasa fija anual del 15% o variable de acuerdo con las tasas futuras, y le confirman que el plazo máximo de financiación es de 10 años.

Dada la condición de su empresa el Sr. Zambrano está interesado en un préstamo de cuotas decrecientes con tasa fija, en el banco le han explicado que tiene las siguientes características:

TIPO DE PLAN	DESCRIPCIÓN	AMORTIZACIÓN	INTERESES	CUOTA
CUOTAS DECRECIENTES	El total a pagar disminuye en cada periodo.	Es igual en cada periodo y se obtiene dividiendo el monto inicial de la deuda entre el plazo.	Se pagan sobre saldos insolutos (el monto de intereses de cada periodo se obtiene multiplicando la tasa de interés periódica por el monto de la deuda del mismo periodo), por lo que disminuye en cada periodo.	Disminuye conforme se acerca el vencimiento de la deuda.

Tabla 2 Información del plan de amortización con cuotas decrecientes (Alemán & González, 2003 p. 202)

CUOTAS DECRECIENTES TASA FIJA

AÑOS	DEUDA	AMORTIZ	INTERÉS	SALDO	TOTAL A PAGAR
1	712,00	71,20	106,80	640,80	178,00
2	640,80	71,20	96,12	569,60	167,32
3	569,60	71,20	85,44	498,40	156,64
4	498,40	71,20	74,76	427,20	145,96
5	427,20	71,20	64,08	356,00	135,28
6	356,00	71,20	53,40	284,80	124,60
7	284,80	71,20	42,72	213,60	113,92
8	213,60	71,20	32,04	142,40	103,24
9	142,40	71,20	21,36	71,20	92,56
10	71,20	71,20	10,68	-	81,88
TOTALES		712,00	587,40		1.299,40

Tabla 3 Datos del plan de amortización con cuotas decrecientes y tasa fija (datos en millones de pesos colombianos).

10

Recuadro 3.28 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 10

Tarea 2
A continuación estudie los datos en la Tabla 3
Para esta tarea como para la anterior se anexa el material para que trabaje en el (ver pag siguiente).

- Luego a partir de los datos realice un bosquejo[2] rápido de cómo cree que serán las gráficas:

a. De los intereses año a año
b. De la variación anual de la amortización, y
c. Del total a pagar anualmente.

- Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados
- Luego utilizando GeoGebra (GG) transcriba la tabla y construya las gráficas de las tres situaciones.
- Haga un comentario sobre las gráficas que ha obtenido con GG.
- Encuentre las ecuaciones de las gráficas realizadas, justifique sus procedimientos.

Recuerde que debe conservar los soportes de su trabajo, tanto físicos (bosquejos, anotaciones, cálculos…) como elementos que ilustren su proceso en el computador (capturas de pantalla, archivos Word, archivos de GG, imágenes escaneadas…) pues luego deberá organizarlos y entregarlos.

Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego PRESL (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-PRESL.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego PRESL (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-PRESL.ggb)

[2] Recuerde que entendemos el término *bosquejo*, como un diagrama intuitivo de cómo es el comportamiento de las variables a partir de lo que se observa en los datos, o de lo que usted conoce de ellos. NO se trata de realizar un diagrama detallado y preciso llevando los datos exactos a un sistema de coordenadas, esto se realizará, pero en otro momento del estudio.

11

Recuadro 3.29 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 11

Material para la tarea 2 PRÉSTAMOS
A continuación estudie los datos en la Tabla 3

1. Luego a partir de los datos realice un bosquejo rápido de cómo cree que serán las gráficas:

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

12

Recuadro 3.30 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 12

2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados

3. Luego utilizando GeoGebra (GG) transcriba la tabla y construya las gráficas de las tres situaciones.
4. Haga un comentario sobre las gráficas que ha obtenido con GG.

5. Encuentre las ecuaciones de las gráficas realizadas, justifique sus procedimientos.

13

Recuadro 3.31 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 13

3.9.6.3 *Desnutrición*

Para esta tercera situación realista relacionada con la problemática del hambre en el mundo y en especial en Latinoamérica y Colombia, nos apoyamos en informes de organismos internacionales, y a través de ellos buscamos desarrollar la comprensión del concepto de regresión lineal, así como presentar el coeficiente de correlación lineal, (r) y el coeficiente de determinación (r^2).

Luego de presentar la situación se remite al estudiante a un documento de la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO, de sus siglas en inglés: Food and Agriculture Organization of the United Nations), en donde se le pide que revise el documento y estudie dos gráficas (la fig. 3.4 muestra una de ellas), a partir de las cuales con la ayuda del análisis cualitativo se va estructurando el concepto de regresión lineal por medio de preguntas.

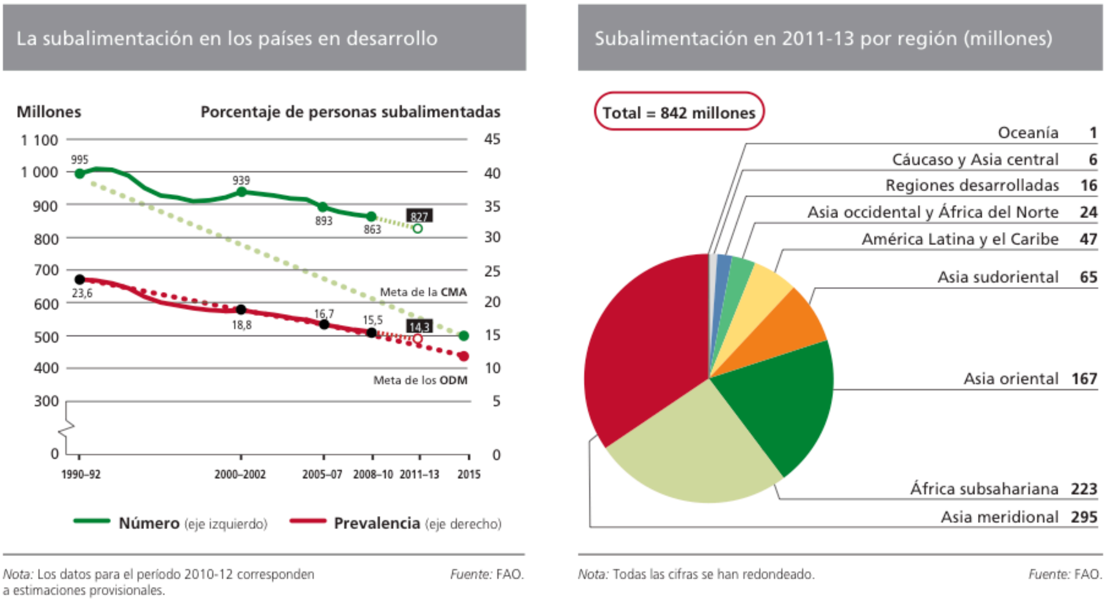


Figura 3.4 Subalimentación en los países en desarrollo 2013 (fig. 1 de la guía)

Esta situación es diferente a las dos anteriores en diversos aspectos, pero particularmente en que los datos de la nube de puntos no siguen un comportamiento perfectamente definido, sino que tenemos que buscar la "tendencia" que mantienen, para lo cual es necesario realizar el análisis cualitativo de los datos y de sus representaciones en tablas y gráficas y de otra parte utilizar herramientas que nos ayuden a expresar matemáticamente esta tendencia, en este caso la regresión lineal. Una ayuda en este proceso es el manejo de indicadores como los coeficientes de correlación lineal, (r) y de determinación (r^2) que se presentan en esta tarea o los estadígrafos que utiliza el GG.

Después de estudiados los datos y elaboradas estas primeras regresiones, se le pide al estudiante que realice el mismo proceso para algunos países y regiones como Latinoamérica y Colombia entre otros. Puntualmente es necesario que construya las tablas y gráficas, luego estudie sus tendencias, y vea si las nubes de puntos tienen un comportamiento aproximadamente lineal para luego revisar si es así con la regresión lineal y los coeficientes.

3. DESNUTRICIÓN

En el reciente informe de la FAO[3] *The State of Food Insecurity in the World 2013*[4] se estima que cerca de 842 millones de personas (alrededor del 12% de la población, una de cada 8 personas) en el mundo sufren de desnutrición crónica, sin embargo, a pesar de esta cifra "los resultados revisados implican que la meta de desarrollo del milenio enfocada en reducir a la mitad la prevalencia de la desnutrición en el mundo en desarrollo para el 2015 es alcanzable" (FAO, WFP & IFAD 2012, p. 8). Esta situación es particularmente importante en Latinoamérica y en Colombia.

Entre en la página de la FAO http://www.fao.org/publications/sofi/en/ y descargue la publicación, el resumen y los datos del estudio.

Del documento lea el prólogo (foreword pp. 6-7) y el primer apartado titulado: *Undernourishment*[5] *around the world in 2013*, pp 10-15.

Tarea 3
Responda las siguientes preguntas, luego de la lectura y de revisar las gráficas, en especial las figuras 1 y 2. En la Fig. 1 observe la gráfica que representa la variación de los porcentajes (gráfica roja), note la línea continua y las que son a trazos ¿Qué cree que representan?

Observe detenidamente la gráfica a trazos
¿Los puntos parecen mantener una dirección?
¿Parece que la mayoría de los puntos están cerca de una recta?

Ahora concentrémonos en la Figura 2 y en ella en la gráfica de Latinoamérica y el Caribe, veamos la variación de los porcentajes (gráfica roja), las líneas a trazos y la que es continua, nuevamente
¿Los puntos parecen mantener una dirección?
¿Parece que la mayoría de los puntos están cerca de una recta?

---

[3] La Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO, de sus siglas en inglés: Food and Agriculture Organization of the United Nations).
[4] El documento y su resumen se pueden descargar de la página oficial de la FAO http://www.fao.org/publications/sofi/en/
[5] ***Undernourishment***, según la FAO, se refiere al estado de las personas cuya ingestión de energía alimentaria es inferior a la necesaria para mantener una vida saludable y activa. Esta situación se suele dar en la población pobre con pocos recursos para adquirir alimentos. En español se traduce como "subnutrición" y el adjetivo correspondiente es "subnutrido". ***Undernutrition*** es, según la FAO, el resultado de la subnutrición, y en español se traduce por "desnutrición". El adjetivo correspondiente es "desnutrido". Tomado de The Geek translator en: http://thegeektranslator.net/2012/03/06/traducir-malnutrition-undernourishment-y-undernutrition/ rev 7/03/2013. En Word reference aparece como desnutrición / mala alimentación Tomado de http://www.wordreference.com/es/translation.asp?tranword=undernourishment rev 7/03/2013.

14

Recuadro 3.32 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 14

Esta tendencia va a ser primordial para la actividad que realizaremos luego.

Con la ayuda de algunas herramientas estadísticas de GG revisaremos sí los puntos están en una línea recta, o qué tan cerca están de ella. Para esto utilizaremos el menú de regresiones (ver Protocolo Menú Regresión)

Pero antes organicemos la información del libro en Excel con los datos:

- Abra la Hoja de Cálculo (HdC) V7.1 Prevalence of undernourishment.
- Tome los datos del Mundo y de la Región Latinoamérica y el Caribe.
- Abra una nueva HdC de Excel a la que lleve los datos que transfiere de la HdC V7.1, transponga las filas a columnas. Asegúrese que el formato con el que queden sea: **General**.
- Construya una tabla en GG con los datos, como en ocasiones anteriores.
- Grafique los dos grupos de datos en un sistema de coordenadas en GG.

¿Se ven las gráficas de GG como las del informe de la FAO?

¿Los puntos parecen mantener una dirección?

¿Parece que la mayoría de los puntos están cerca de una recta?

Cuando esto ocurre decimos que existe una tendencia lineal, esta observación luego nos ayudara a escoger un modelo adecuado que represente la situación.

La tendencia lineal además puede ser positiva o negativa. La primera, si en la medida en que aumenta la variable en x también aumenta de manera casi proporcional la variable en y. Y es negativa si en la medida en que aumenta la variable en x también disminuye de manera casi proporcional la variable en y, como en nuestro caso, en la medida en que pasan los años (x) va disminuyendo de manera proporcional la tasa de desnutrición (y).

Confirmemos estas suposiciones con las herramientas estadísticas del GG para ello tomemos los datos del Mundo… (ver Protocolo Menú Regresión).

De este grupo de estadígrafos son muy relevantes para nosotros: **el coeficiente de correlación lineal, (r) y el coeficiente de determinación (r^2)** . El primero mide el grado en que dos variables se ajustan a un modelo lineal. Su valor absoluto no puede ser mayor de 1. Así existe una correlación alta entre las variables cuando los valores se acercan a 1, (o -1) y una pobre correlación (o ninguna) sí los valores se aproximan a 0. Su signo indica sí la relación entre las dos variables es negativa o positiva.

El coeficiente de determinación (r^2) es la fracción de la variación de los valores de y que se explica por la regresión de y sobre x. Sus valores están en una escala entre cero y uno.

Para nuestra situación sobre la tasa de desnutrición en el Mundo, el coeficiente de correlación lineal es $r =$ -0.985. Revisemos los dos aspectos, su valor y su signo. El hecho de que su valor absoluto esté muy cerca a 1 representa una alta correlación lineal. El signo negativo nos dice que existe una correlación negativa o en términos de la situación: en la medida en que aumentan los años, disminuye la tasa de desnutrición casi proporcionalmente.

15

Recuadro 3.33 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 15

El coeficiente de determinación (r^2) en nuestro caso r^2= 0.9703, significa que el 97.03% de la variación se explica por la relación lineal entre las dos variables. Así el 97.03% del cambio en la tasa de desnutrición se podría explicar por el cambio en el tiempo. Es importante mencionar que existen dos rectas de regresión lineal, una de la tasa de desnutrición con respecto al tiempo y otra del tiempo con respecto a la tasa de desnutrición. Pero en las dos el coeficiente de determinación es el mismo.

Para el registro de la actividad que está realizando vaya haciendo capturas de pantalla de las tablas y graficas generadas así como de la ventana de *Análisis De Datos*.

Continuemos con nuestra Tarea, para ello:

- Realice el proceso de regresión lineal para los datos de la Región Latinoamérica y el Caribe.
- Complete la tabla en GG con los datos de Nicaragua, Honduras, Colombia y otros dos países que usted escoja de la región.
- Construya en GG las gráficas para cada país y después de una exploración de las características de las gráficas, realice las regresiones lineales que sean convenientes a los datos.
- Escriba un breve comentario describiendo y analizando los resultados de cada país y compárelos.

Guarde en un archivo Word el comentario y las capturas de pantalla de las gráficas y tablas que realice, así como de los análisis de regresión. (Contando los realizados para el Mundo y Latinoamérica). Nombre este archivo con sus apellidos, nombres, grupo y luego FAO (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-FAO.doc).

Salve el archivo de GG donde realizó las gráficas y las regresiones, nómbrelo con sus apellidos, nombres, grupo y luego FAO (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-FAO.ggb).

16

Recuadro 3.34 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 16

3.9.6.4 Salario Mínimo

La última situación problemática realista de esta actividad se refiere al Salario Mínimo legal colombiano, en ella se buscaba que los estudiantes ampliaran su manejo de las regresiones a otros tipos y utilizaran en el manejo de GG los coeficientes presentados en la situación anterior. De otra parte se discutía qué ajuste es conveniente y qué precauciones hay que tomar y para qué sea válido el modelo de regresión o correlación elaborado. Además se presenta otro tipo de funciones, las funciones definidas a trozos.

A partir del artículo de la revista *Dinero* en que se hace un breve recorrido histórico por el valor del salario mínimo en Colombia desde 1920 hasta el 2012, en donde el autor divide los cambios ocurridos en periodos (ver la información gráfica presentada en la guía, Recuadro 3.35), utilizando esta división se le pide al estudiante que para los últimos dos intervalos realice regresiones lineales, para lo cual utilizando GG, debe construir la tabla de datos, luego dibujar la nube de puntos y realizar la regresión revisando los estadígrafos pertinentes.

Aquí se introduce la noción de "interpolación" (y extrapolación) con la que se revisa si realmente la función que se ha obtenido produce respuestas razonables para valores extremos o muy alejados de la nube de puntos que se estudia, dónde por ejemplo, se revisa cuál sería el valor del salario mínimo para los años 2020 o 2100. De esta manera la herramienta interpolación se utiliza como mecanismo de control del proceso de modelización.

Más adelante se le pide al sujeto que estudie los otros dos intervalos y que trate de hallar en el menú de GG alguna regresión, en este caso ya no lineal, que se ajuste a la nube de puntos, esto se logra para el intervalo (1980-1989), no así para el intervalo inicial (1920-1980) en donde los estadígrafos proporcionados por el GG muestran un pobre ajuste.

Finalmente se presentan las llamadas funciones definidas a trozos, así para la función del salario $s(x)$ podemos definir tres intervalos, y para cada uno de ellos tenemos una expresión diferente. De esta manera la expresión para $s(x)$ es:

Intervalo	Inter notación matemática	Expresión para el Intervalo
x entre 1980 y 1989	$1980 \leq x < 1990$	$y = (1{,}5651 \times 10^{-181})\ e^{0{,}21453x}$
x entre 1990 y 1999	$1990 \leq x < 2000$	$y = 21.678{,}58x - 43.116.493{,}36$
x entre 2000 y 2013	$2000 \leq x \leq 2013$	$y = 25.572{,}1x - 50.886.347{,}96$

$$s(x) = \begin{cases} (1{,}5651 \times 10^{-181})\ e^{0{,}21453x} & si\ \ 1980 \leq x < 1990 \\ 21.678{,}58x - 43.116.493{,}36 & si\ \ 1990 \leq x < 2000 \\ 25.572{,}1x - 50.886.347{,}96 & si\ \ 2000 \leq x \leq 2013 \end{cases}$$

4. SALARIO MÍNIMO

La Reglamentación del nuevo salario mínimo es una tarea que le interesa a todo el país, por sus implicaciones en gran parte de la población Colombiana. El ministro de trabajo hasta mediados del 2014, Rafael Pardo, publicó en la revista *Dinero* un corto artículo en que recopiló los datos del salario mínimo colombiano desde 1920.[6]
(http://www.dinero.com/actualidad/nacion/articulo/salario-minimo-volver-pasado/167023)

Foto: Alejandro Acosta / Guillermo Torres
Rafael Pardo, ministro de Trabajo.

Hace 92 años los empleados que recibían un salario mínimo devengaban $60. Para los años 90 los trabajadores vivían con un sueldo de $41.025, creciendo más de 500% hasta el año 2.000. De ese año hasta el 2012 ha subido 117%.

Fig. 2 Valores salario mínimo Colombiano 1920-2012 (datos en pesos colombianos) Tomado de *Dinero*

[6] Según el informe de Fedesarrollo, Parra (2010) *Análisis y perspectiva del desempleo en los últimos 12 años* "El salario mínimo legal fue constituido en Colombia en el año 1945 y ha sido utilizado de forma continua hasta hoy. Durante los primeros 40 años el salario mínimo fue fijado de acuerdo con el tipo de trabajador, sector o zona. No obstante, desde 1984 se optó por su unificación eliminando cualquier tipo de diferenciación salarial". Parra (2010, p. 6)

17

Recuadro 3.35 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 17

Estudie con cuidado los datos del artículo, ¿qué nota?, escriba varias de sus observaciones.

Construya en GG una tabla con los datos del artículo y realice una gráfica de los valores del salario mínimo

Observe que el autor marca cuatro períodos
¿Están los valores del salario para todos los años?

Estudiemos cada periodo por separado, ¿nota alguna tendencia o algunas tendencias?

Algunos investigadores como Parra (2010) en el informe de Fedesarrollo: *Análisis y perspectiva del desempleo en los últimos 12 años,* han hecho notar que solo desde 1984[7] se puede considerar un salario mínimo unificado, centrémonos entonces en los periodos desde 1990 hasta 2012. Complete la tabla con los valores para el 2013 y 2014.

Realice las regresiones lineales para los dos periodos (intervalos) y obtenga las ecuaciones de regresión.

Parece que algún tipo de problema ocurrió durante la impresión del artículo y hay algunas cifras que no se pueden ver con claridad, pero utilizando las rectas de regresión podemos predecir qué valores podrían ser los faltantes, siempre que estas rectas den un buen "ajuste" de los datos. Este proceso es llamado **interpolación**.

Revise nuevamente los datos del artículo, y haga predicciones sobre los valores que no conoce. Anótelas.

Ahora, vayamos al GG, en la ventana de *Análisis de Datos*, bajo la ecuación aparecen: la palabra *Evalúa*, un recuadro y las variables x e y a los lados. Coloque el valor de la variable que conoce

[7] Según Decreto 3506 de diciembre 27/83 se unifica el salario mínimo legal.

18

Recuadro 3.36 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 18

en el recuadro, por ej. x = 2003 y vea que valor predice GG para la variable y, realice este procedimiento para los otros valores. Tenga en cuenta la ecuación que está utilizando.

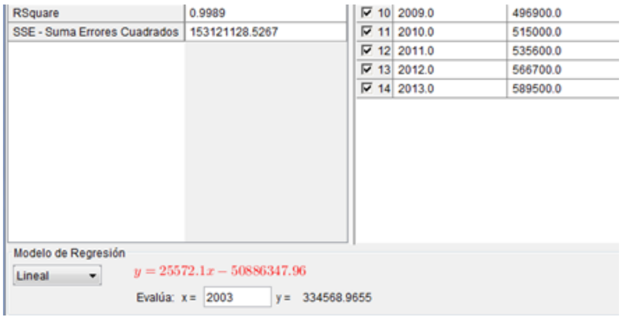


Fig. 3 Interpolando valores en GeoGebra

A esta altura usted debe haber encontrado los datos que no se podían ver de los últimos años, gracias a las ecuaciones de regresión lineal obtenidas.

Ahora hallemos otros valores, más allá de los conocidos, por ejemplo podría predecir el salario mínimo para el año 2015? Para el 2020? Para el 2100?

Comente sus resultados

A continuación vamos a estudiar un poco el intervalo de 1980-1989,

- En la gráfica con todos los datos identifique este intervalo.
- ¿Nota alguna tendencia? Piense en los tipos de funciones que hemos estudiado con anterioridad y Escriba un poco sobre lo que observa.

Recuadro 3.37 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 19

- ¿Qué cree que ocurrirá si realizamos una regresión lineal para los datos de este intervalo?

- Anote sus suposiciones antes de realizar la regresión.

- Ahora realice con ayuda de GG la regresión. Observe los estadígrafos y Consigne sus impresiones.

- ¿Le parece que la ecuación de regresión lineal es una buena regresión para este intervalo de datos? Justifique su respuesta.

Observe que en la caja de la ventana de *Análisis de Datos* donde seleccionamos el tipo de regresión hay otras opciones, por los nombres ¿reconoce algunas de las funciones que estudiamos?

Antes de elegir alguna, ¿cuál cree que se adaptaría mejor a este intervalo de datos? Anótelo y escriba sus razones.

Realice la regresión que considera más adecuada para este intervalo. Justifique su elección

Ahora haga una captura de pantalla de la ventana de *Análisis de Datos* con la gráfica, la ecuación y los estadígrafos respectivos.

Finalmente hagamos el análisis del primer intervalo entre 1920 y 1979

20

Recuadro 3.38 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 20

- Nuevamente, en la gráfica con todos los datos identifique este intervalo.
- ¿Nota alguna tendencia? Piense en los tipos de funciones que hemos estudiado con anterioridad y Escriba un poco sobre lo que observa.
- ¿Qué cree que ocurrirá si realizamos una regresión lineal para los datos de este intervalo? Anote sus suposiciones antes de realizar la regresión.
- Ahora realice con ayuda de GG la regresión. Observe los estadígrafos y Consigne sus impresiones.

A partir de estos resultados, revise nuevamente las opciones de regresiones. Antes de elegir alguna, recuerde los tipos de funciones estudiadas, ¿cuál cree que se adaptaría mejor a este intervalo de datos? Anótelo.

Como ha podido observar en el último ejemplo, no siempre podemos encontrar una regresión adecuada a los datos (a la nube de puntos). En el intervalo 1920-1979 las regresiones que brinda el GG nos muestran valores en sus estadígrafos relativamente bajos, indicando correlaciones regulares o pobres, lo que nos impide elegir una ecuación que modelice adecuadamente este intervalo.

Resumiendo nuestro proceso, hemos encontrado tres ecuaciones de regresión diferentes que modelizan tres intervalos del comportamiento de la función del salario mínimo en Colombia entre 1980 y 2013.

Reunir estas tres expresiones en una sola función nos lleva a un nuevo tipo de función cuyo comportamiento es diferente según sea el intervalo que estudiemos. Este tipo de funciones son las llamadas **funciones definidas a trozos**. Para la situación del salario digamos que nuestra función se llama *s(x),* para ella podemos definir tres intervalos, y para cada uno de ellos tenemos una expresión diferente. De esta manera la expresión para *s(x)* es:

Intervalo	Inter notación matemática	Expresión para el Intervalo
x entre 1980 y 1989	$1980 \leq x < 1990$	$y = (1{,}5651 \times 10^{-181})\ e^{0{,}21453x}$
x entre 1990 y 1999	$1990 \leq x < 2000$	$y = 21.678{,}58x - 43.116.493{,}36$
x entre 2000 y 2013	$2000 \leq x \leq 2013$	$y = 25.572{,}1x - 50.886.347{,}96$

$$s(x) = \begin{cases} (1{,}5651 \times 10^{-181})\ e^{0{,}21453x} & si\ \ 1980 \leq x < 1990 \\ 21.678{,}58x - 43.116.493{,}36 & si\ \ 1990 \leq x < 2000 \\ 25.572{,}1x - 50.886.347{,}96 & si\ \ 2000 \leq x \leq 2013 \end{cases}$$

Recuerde guardar en un archivo Word los comentarios y las capturas de pantalla de las gráficas y tablas que realice, así como de los análisis de regresión. Nombre este archivo con sus apellidos, nombres, grupo y luego SALM (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-SALM.doc), y el archivo de GG donde realizó las gráficas y las regresiones, nómbrelo con sus apellidos, nombres, grupo y luego SALM (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-SALM.ggb).

21

Recuadro 3.39 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 21

A manera de Conclusión:

Hemos revisado varios aspectos de la Regresión y la Correlación y de su manejo en GG, pero puntualicemos las Características para que se dé un buen "ajuste":

- Se debe notar una "tendencia" en la forma de la nube de puntos que analizamos
- Esta tendencia debe ser muy parecida al "patrón" de alguna función.
- Es muy importante revisar los extremos de la nube de puntos y ver como continuaría la función en ambas direcciones. Este es un aspecto muy iumportante a la hora de buscar la función que mejor se ajuste.
- Luego se puede hallar la ecuación de la regresión y revisar los estadígrafos, estos son un indicador pero no son definitivos.
- Lo que aseguraría el adecuado ajuste es realizar pruebas estadísticas de análisis de varianza, el cual prueba el significado del cuadrado medio de la regresión. Se valora la intensidad de la relación entre dos variables bajo el modelo de correlación probando la hipótesis nula de que no existe correlación en la población. Si puede rechazarse esta hipótesis, puede concluirse al nivel de significación elegido que las dos variables están correlacionadas.
- Otra forma es poder realizar una demostración algebraica de que el modelo de regresión si coincide con los datos de la función que modela el fenómeno.

De otra parte hemos conocido las funciones definidas a trozos y como es su notación.

PRESENTACIÓN Y ENTREGA:

Los documentos anteriores deben ser entregados en un informe escrito (físico o electrónico) y además se enviarán los archivos correspondientes de GG al correo clasejfi@gmail.com ellos serán aceptados hasta las 24:00 horas del 25 de noviembre

REFERENCIAS

Alemán, M. C., & González, E. (2003). *Modelos financieros en Excel*. México: Compañía Editorial Continental.

Food and Agriculture Organization of the United Nations FAO (2012) *The State on Food Insecurity in the World 2013* En: http://www.fao.org/publications/sofi/en/ Revisado: 12/12/2014.

GeoGebra Ayuda en línea

Parra, M. (2010) *Análisis y perspectiva del desempleo en los últimos 12 años.* Informe Fedesarrollo. Bogotá: Fedesarrollo.

Presidencia de la República de Colombia. *Decreto 3019 de 1989*, Bogotá: Diario oficial.

23

Recuadro 3.40 Actividad 2 Regresión y Correlación p. 23 (la página 22 esta en blanco).

3.9.7 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos

En esta actividad el objetivo era modelizar situaciones problemáticas realistas que involucraran funciones cuadráticas y exponenciales, y estudiar regresiones que las modelizaran, así se han incluido nueve situaciones realistas que las involucran, uniéndolas con funciones lineales en el contexto de las ciencias económico-administrativas al que pertenecen los estudiantes de nuestro estudio.

Así se han incluido en esta actividad, las tareas:

- Préstamos cuotas constantes
- Préstamos cuotas crecientes
- Préstamos cuotas decrecientes
- Préstamos con amortización directa
- Tabla comparativa
- Ingresos
- Utilidad
- Deuda pública
- Correo electrónico

Las primeras cuatro tareas parten de la misma situación realista, la solicitud de un préstamo bancario y las diferentes opciones que ofrece el sistema financiero, esta situación guarda relación con la situación *Préstamos* que se trabajó en la actividad dos solo que aquí se estudian de manera mucho más amplia la diversidad de variantes que ofrece el sistema bancario, lo que conlleva el uso de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales. Dice puntualmente, el problema:

> El Señor José Fernández es propietario de un taller automotriz en el barrio Rionegro y está pensando en ampliarlo comprando alguno de los locales vecinos, que están avaluados en 300,000,000.00 pesos. Para hacerlo necesitaría hacer un préstamo.
>
> Al consultar en el Banco de Colombia le ofrecen 4 tipos de planes de amortización, que además pueden tener tasa fija anual del 15% o variable de acuerdo con las tasas futuras, y le confirman que el plazo máximo de financiación es de 10 años.

En la guía además se les brinda a los estudiantes otra información sobre los cuatro diferentes tipos de créditos que se pueden solicitar (ver recuadro 3.42) esta información será muy importante para algunas de las tareas.

3.9.7.1 Préstamos Cuotas Constantes

En la primera tarea de esta actividad se estudia la situación, si la cuotas a pagar fueran constantes durante los diez años del tiempo de financiación, para ayudar a los estudiantes en la comprensión de la tarea se les ha facilitado una tabla (ver recuadro 3.43) con los datos específicos del crédito, en donde aparecen el interés anual que cobra el banco, el valor de la amortización anual y el valor de la cuota a pagar anualmente. De esta tabla los estudiantes tomaran los valores para construir la nube de puntos.

Luego de presentar la situación, la Tarea 1 le pide a los estudiantes que estudien en detalle la tabla con los valores mencionados, para a partir de ella dibujar los bosquejos correspondientes a las tres funciones relacionadas con el interés anual, la amortización y el valor de la cuota. Seguidamente se les pide que expliquen los bosquejos que han realizado. Esta parte de la tarea corresponde al análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones involucradas, en este caso las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales.

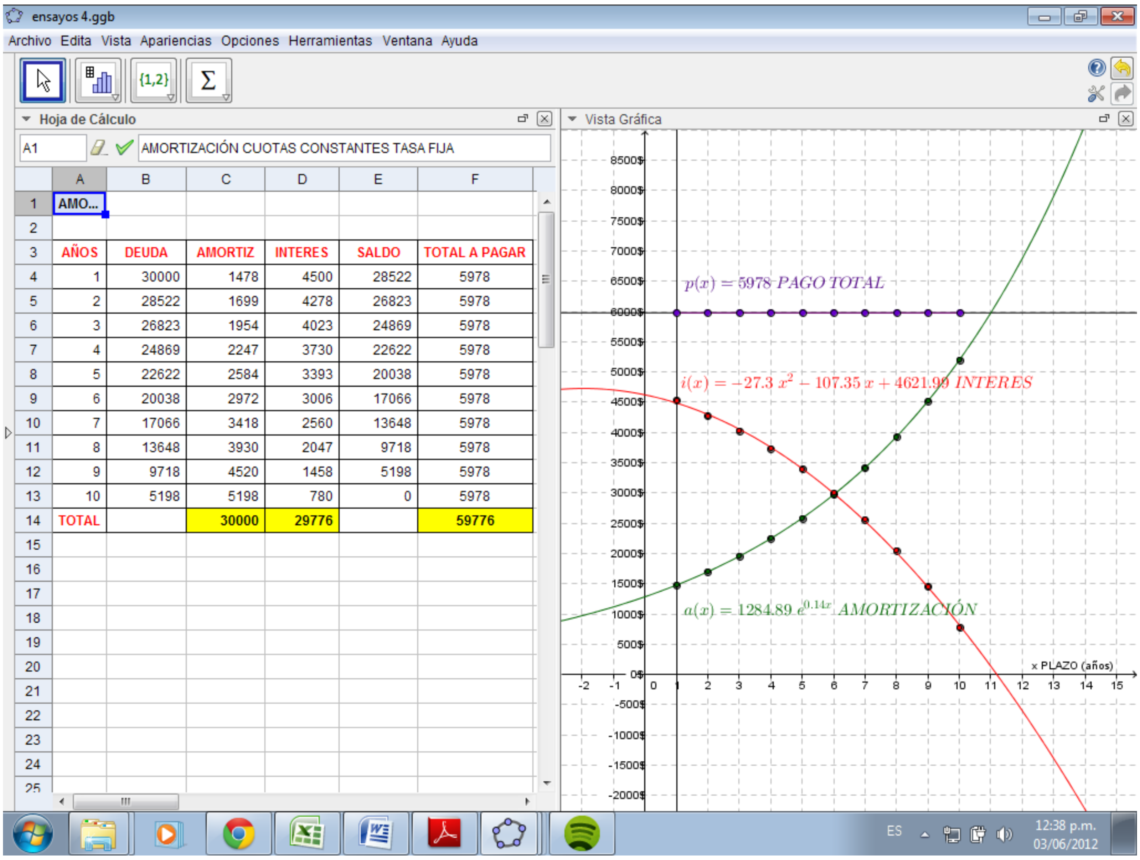


Figura 3.3 Pantalla de GG con la tabla y las nubes de puntos de las funciones.

Siguiendo la estructura ya conocida, se les pide a los estudiantes que trabajen en GG donde deben reconstruir la tabla y a partir de ella dibujar las gráficas de las nubes de puntos de las tres funciones, confrontando de esta manera sus análisis, de esta forma el análisis cualitativo ejerce un papel de control del proceso. Finalmente se les solicita que encuentren la función que dé el mejor ajuste para cada nube de puntos. Aquí esperábamos que los alumnos realizarán en primera instancia intentos de “ajuste manual” a través del uso de las ecuaciones canónicas de las familias de funciones y la manipulación de sus a parámetros hasta llegar a una función de ajuste a la nube de puntos y después de realizado este proceso utilizarán otras herramientas del GG como las utilidades del menú de regresiones en la HdC de GG. Este doble acercamiento al ajuste pensamos que les aporta elementos de comprensión del proceso de modelización y de las familias de funciones.

En esta última actividad se destinaron dos horas de trabajo en el aula con los ordenadores lo que permitía el desarrollo de una parte de la actividad, la parte restante y se dejó para ser terminada en casa. De esta misma manera se trabajó en la actividad 2.

[ESCRIBIR EL NOMBRE DE LA COMPAÑÍA]

PRÉSTAMOS, INGRESOS Y COSTOS

ACTIVIDAD No. 3

FRANCISCO INFANTE

[Seleccionar fecha]

0

Recuadro 3.41 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos portada.

En esta tercera actividad continuaremos nuestro trabajo en la modelización de funciones que habíamos iniciado en la actividad anterior ampliándolo a nuevos tipos de funciones y situaciones económicas y administrativas.

PRÉSTAMOS

El Señor José Fernández es propietario de un taller automotriz en el barrio Rionegro y está pensando en ampliarlo comprando alguno de los locales vecinos, que están avaluados en 300,000,000.00 pesos. Para hacerlo necesitaría hacer un préstamo.

Al consultar en el Banco de Colombia le ofrecen 4 tipos de planes de amortización, que además pueden tener tasa fija anual del 15% o variable de acuerdo con las tasas futuras, y le confirman que el plazo máximo de financiación es de 10 años.

Estas son las opciones de plan de amortización del banco organizadas en un cuadro

Concepto/ plan	Plan de cuotas decrecientes	Plan de cuotas constantes	Plan de cuotas crecientes	Plan de amortización directa o "*flat*"
Descripción	El total a pagar disminuye en cada periodo.	El total a pagar permanece constante en todos los periodos.	El total a pagar aumenta en cada periodo.	La amortización de cada periodo no se descuenta del total de la deuda, por lo que el pago total es constante independientemente de lo que se haya amortizado.
Amortización	Es igual en cada periodo y se obtiene dividiendo el monto inicial de la deuda entre el plazo.	Aumenta en cada periodo y se obtiene de la diferencia entre el total a pagar y los intereses de cada periodo.	Aumenta en cada periodo y se basa en la suma de los dígitos correspondientes al número de periodos que integran el plazo. La amortización de cada periodo es igual a una fracción del resultado total de la suma de dígitos multiplicada por el número de periodo y por el monto inicial de la deuda.[71]	Es igual en cada periodo y se obtiene dividiendo el monto inicial de la deuda entre el plazo.
Intereses	Se pagan sobre saldos insolutos (el monto de intereses de cada periodo se obtiene multiplicando la tasa de interés periódica por el monto de la deuda del mismo periodo), por lo que disminuyen en cada periodo.	Se pagan sobre saldos insolutos, por lo que disminuyen en cada periodo.	Se pagan sobre saldos insolutos, por lo que disminuyen en cada periodo.	Se pagan sobre el monto inicial de la deuda; es decir, el pago de intereses es constante en cada periodo y se obtiene multiplicando la tasa de interés periódica por el monto inicial de la deuda.
Total a pagar	Disminuye conforme se acerca el vencimiento de la deuda, debido a la disminución de los intereses en cada periodo.	Es igual en cada periodo, por lo que se considera una anualidad.[72]	Aumenta en cada periodo. Para plazos largos el aumento es menos significativo que para plazos cortos.	Es igual en cada periodo.

Cuadro 1 Características de los Tipos de Planes de Amortización (Alemán y González, 2003 p. 202)[i]

1

Recuadro 3.42 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p.1

De acuerdo con la información suministrada en el banco, el Señor Fernández ha decidido tomar el préstamo pero quiere comparar cada uno de los planes que le ofrecen. Para ello le ha pedido a usted, su contador, que le ayude con algunas tablas y graficas para poder comprender mejor la situación y tomar una mejor decisión.

Específicamente el Sr Fernández quiere que de cada plan se elabore una tabla en que se muestre la amortización anual que se deberá hacer al capital, los intereses anuales y el monto total que se deberá pagar en cada período de acuerdo con las características de cada tipo de plan.

Usted ya ha comenzado su trabajo y ha elaborado la tabla para el plan de amortización en cuotas constantes y además tiene adelantada otra parte de su trabajo.

CUOTAS CONSTANTES TASA FIJA

AÑOS	DEUDA	AMORTIZ	INTERÉS	SALDO	TOTAL A PAGAR
1	300.00	14.78	45.00	285.22	59.78
2	285.22	16.99	42.78	268.23	59.78
3	268.23	19.54	40.23	248.69	59.78
4	248.69	22.47	37.30	226.22	59.78
5	226.22	25.84	33.93	200.38	59.78
6	200.38	29.72	30.06	170.66	59.78
7	170.66	34.18	25.60	136.48	59.78
8	136.48	39.30	20.47	97.18	59.78
9	97.18	45.20	14.58	51.98	59.78
10	51.98	51.98	7.80	0	59.78
TOTALES		300.00	297.76		597.76

Tabla 1 Datos del plan de amortización con cuotas constantes y tasa fija (datos en millones de pesos colombianos) [1]

A continuación estudie los datos en la tabla y luego realice un bosquejo[2] de cómo cree que serán las gráficas:

a. De los intereses año a año
b. De la variación anual de la amortización, y
c. Del total a pagar anualmente

[1] Para realizar esta tabla se ha utilizado la fórmula del cálculo de la anualidad para hallar el valor de la cuota de amortización del préstamo que se pagará cada año. Ésta fórmula se puede ver en la nota (i) parte (72) al final de este documento.

[2] NOTA IMPORTANTE
Cuando nos referimos a un *bosquejo*, lo entendemos como un diagrama intuitivo de cómo es el comportamiento de las variables a partir de lo que se observa en los datos, o de lo que usted conoce de ellos. NO se trata de realizar un diagrama detallado y preciso llevando los datos exactos a un sistema de coordenadas, esto se realizará, pero en otro momento del estudio.

2

Recuadro 3.43 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 2

Tarea 1 PRÉSTAMOS CUOTAS CONSTANTES
Material para la tarea 1
A continuación estudie los datos en la tabla 1

1. Luego a partir de los datos realice un bosquejo de cómo cree que serán las gráficas:

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

3

Recuadro 3.44 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 3

2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados, Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

3. Luego utilizando GeoGebra (GG) transcriba la tabla y
4. Construya en GG las gráficas de las tres situaciones. Utilice colores diferentes para cada una de ellas.
5. Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido con GG. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

4

Recuadro 3.45 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 4

6. Para CADA UNA de las gráficas que ha realizado, Encuentre una función que de el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

7. Ahora para cada una de las situaciones utilice las herramientas estadísticas del GG para tratar de hallar una función que de el mejor ajuste a la situación. Compare diferentes modelos; revisando los estadígrafos que obtiene, pero siempre tenga en cuenta el Análisis Cualitativo de la situación. Anote sus observaciones para CADA UNA de las situaciones y

a. De los intereses año a año

5

Recuadro 3.46 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 5

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

8. Justifique las elecciones de los modelos que escoja.
a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

Recuerde que debe conservar los soportes de su trabajo, tanto físicos (bosquejos, anotaciones, cálculos…) como elementos que ilustren su proceso en el computador (capturas de pantalla, archivos Word, archivos de GG, imágenes escaneadas…) pues luego deberá organizarlos y entregarlos.

Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego CCTES (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-CCTES.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego PRESL (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N- CCTES.ggb).

6

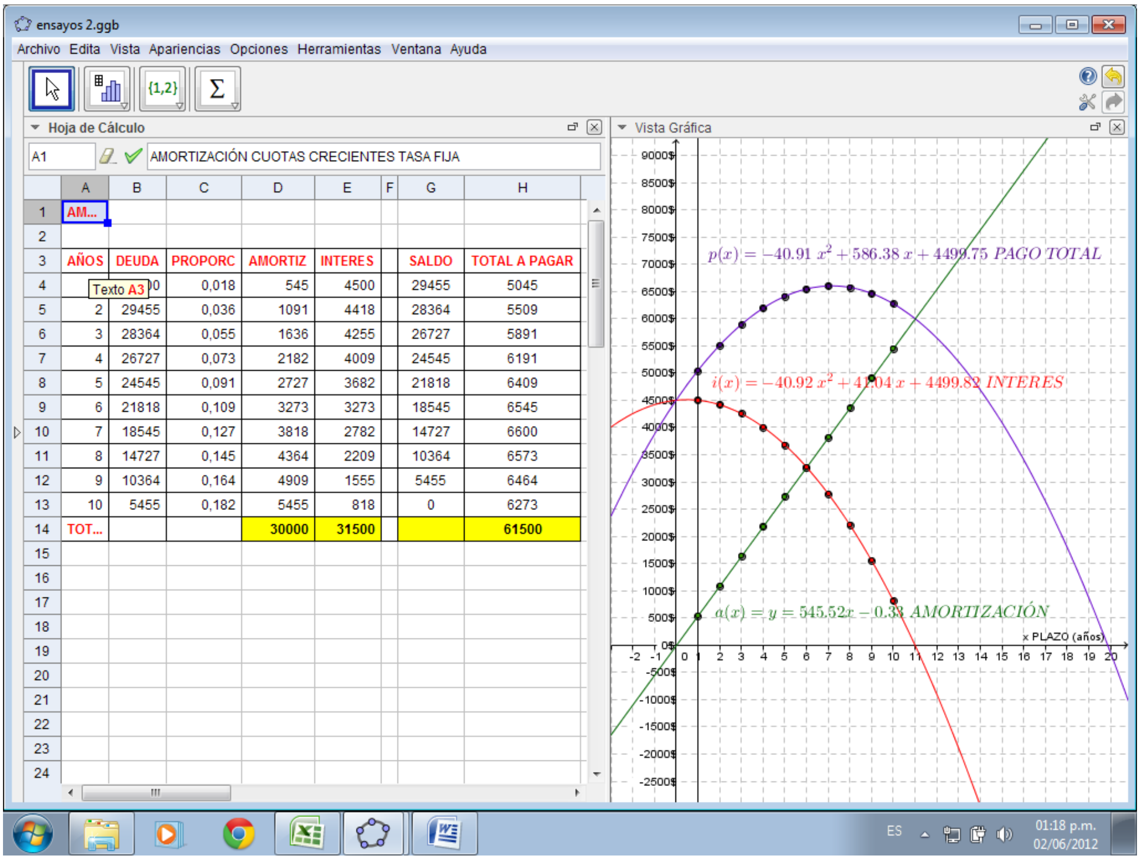
Recuadro 3.47 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 6

3.9.7.2 Préstamos Cuotas Crecientes

Para esta segunda situación se sigue una estructura muy semejante a la empleada en la anterior tarea, así se les ha facilitado a los estudiantes una tabla (ver recuadro 3.48) con los valores pertinentes donde ya aparecen calculados el interés anual que cobra el banco, el valor de la amortización anual y el total a pagar anualmente.

La Tarea 2 comienza con el estudio de la tabla por parte de los estudiantes, luego se les pide que realicen un bosquejo de como creen que serán las nubes de puntos de los intereses, de la amortización y del valor de la cuota.

Inmediatamente después los estudiantes deben transcribir la tabla al GG y realizar las gráficas de las nubes de puntos.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	AM...							
2								
3	AÑOS	DEUDA	PROPORC	AMORTIZ	INTERES		SALDO	TOTAL A PAGAR
4	[illegible]	[illegible]	0,018	545	4500		29455	5045
5	2	29455	0,036	1091	4418		28364	5509
6	3	28364	0,055	1636	4255		26727	5891
7	4	26727	0,073	2182	4009		24545	6191
8	5	24545	0,091	2727	3682		21818	6409
9	6	21818	0,109	3273	3273		18545	6545
10	7	18545	0,127	3818	2782		14727	6600
11	8	14727	0,145	4364	2209		10364	6573
12	9	10364	0,164	4909	1555		5455	6464
13	10	5455	0,182	5455	818		0	6273
14	TOT...			30000	31500			61500

Figura 3.4 Pantalla de GG con la tabla y las nubes de puntos de las funciones Tarea 2.

Después se les solicita a los estudiantes que busquen la curva del mejor ajuste para cada una de las nubes de puntos, aquí esperábamos que los estudiantes intentaran en primera instancia con el ajuste manual, y dependiendo de sus resultados, si pasaran luego a las herramientas estadísticas del GG. En la fig 3.5 se muestra el tipo de funciones que representan las nubes de puntos de esta situación, con la modelización propuesta por el GG.

Tarea 2 PRÉSTAMOS CUOTAS CRECIENTES
Esta es la otra tabla que usted había adelantado, para el trabajo del Sr. Fernandez,

CUOTAS CRECIENTES TASA FIJA

AÑOS	DEUDA	PROP	AMORTIZ	INTERÉS	SALDO	TOTAL A PAGAR
1	300.00	0,018182	5.45	45.00	294.55	50.45
2	294.55	0,036364	10.91	44.18	283.64	55.09
3	283.64	0,054545	16.36	42.55	267.27	58.91
4	267.27	0,072727	21.82	40.09	245.45	61.91
5	245.45	0,090909	27.27	36.82	218.18	64.09
6	218.18	0,109091	32.73	32.73	185.45	65.45
7	185.45	0,127273	38.18	27.82	147.27	66.00
8	147.27	0,145455	43.64	22.09	103.64	65.73
9	103.64	0,163636	49.09	15.55	54.55	64.64
10	54.55	0,181818	54.55	8.18	-	62.73
TOTALES			300.00	315.00		615.00

Tabla 2 Datos del plan de amortización con cuotas crecientes y tasa fija (datos en millones de pesos colombianos) [3]

Para este nuevo plan, realice el mismo proceso que hemos seguido con el plan de Cuotas Fijas así:

0. Estudie la tabla anterior.
1. Realice un bosquejo de cómo cree que serán las 3 gráficas de los intereses, la amortización y el total a pagar para este plan.
2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados, Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?
3. Construya en GG la tabla con los datos.
4. Elabore con ayuda de GG las 3 gráficas.
5. Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?
6. Para CADA UNA de las gráficas que ha realizado, Encuentre una función que dé el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.
7. Utilizando las herramientas estadísticas trate de hallar funciones que modelicen cada una de las situaciones.
8. Justifique las elecciones de los modelos que escoja.
9. Guarde su trabajo en los archivos en Word y GG que ha realizado. Nombre el archivo Word y el de GG con sus apellidos, nombres, grupo y luego CRECIENTES

[3] Para realizar esta tabla se ha utilizado la fórmula de la suma de los dígitos para calcular el valor de la proporción de amortización del préstamo que se pagará cada año. Ésta fórmula se puede ver en la nota (i) parte (71) al final de este documento.

7

Recuadro 3.48 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 7

Tarea 2 PRÉSTAMOS CUOTAS CRECIENTES
Material para la tarea 2
A continuación estudie los datos en la tabla 2

1. Luego a partir de los datos realice un bosquejo de cómo cree que serán las gráficas:

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

Recuadro 3.49 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 8

2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados, Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

3. Luego utilizando GeoGebra (GG) transcriba la tabla y
4. Construya en GG las gráficas de las tres situaciones. Utilice colores diferentes para cada una de ellas.
5. Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido con GG. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

9

Recuadro 3.50 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 9

6. Para CADA UNA de las gráficas que ha realizado, Encuentre una función que de el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

7. Ahora para cada una de las situaciones utilice las herramientas estadísticas del GG para tratar de hallar una función que de el mejor ajuste a la situación. Compare diferentes modelos; revisando los estadígrafos que obtiene, pero siempre tenga en cuenta el Análisis Cualitativo de la situación. Anote sus observaciones para CADA UNA de las situaciones.

a. De los intereses año a año

10

Recuadro 3.51 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 10

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

8. Justifique las elecciones de los modelos que escoja.
a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

Recuerde que debe conservar los soportes de su trabajo, tanto físicos (bosquejos, anotaciones, cálculos…) como elementos que ilustren su proceso en el computador (capturas de pantalla, archivos Word, archivos de GG, imágenes escaneadas…) pues luego deberá organizarlos y entregarlos.

Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego CRECIENTES (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-CRECIENTES.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego PRESL (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N- CRECIENTES.ggb).

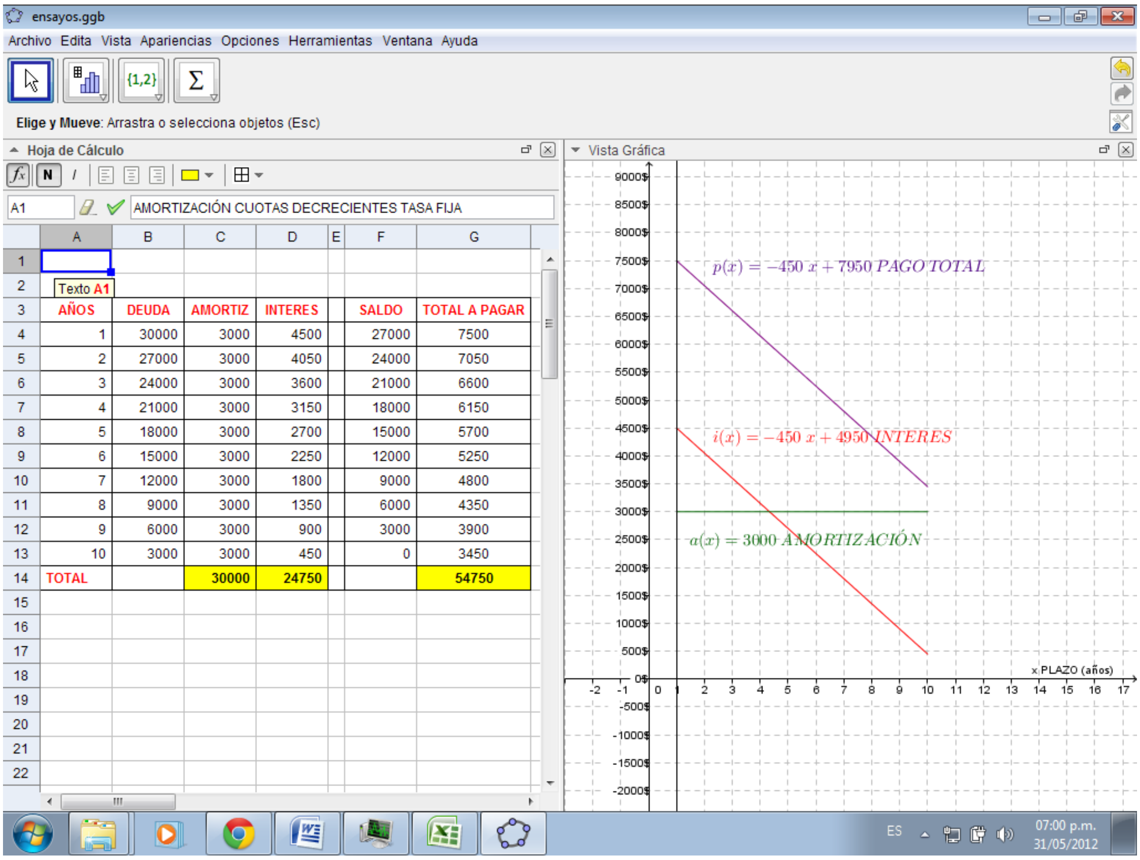
11

Recuadro 3.52 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 11

3.9.7.3 *Préstamos Cuotas Decrecientes*

Para esta parte enfocada en un crédito con cuotas decrecientes, hemos mantenido la misma estructura empleada en tareas anteriores (ver recuadro 3.53), con una pequeña modificación, para este caso y el siguiente no les hemos facilitado a los estudiantes la tabla con los valores para las nubes de puntos sino que son ellos quienes deben construirla a partir de las condiciones del crédito, y de la información presentada en el cuadro al inicio de esta actividad (ver recuadro 3.42), esta es la Tarea 3.

Este tipo de préstamo también presenta diferencias con las tareas anteriores en cuanto al tipo de funciones que intervienen en el proceso, en este caso son funciones lineales, como se puede apreciar en la figura 3.5.



AMORTIZACIÓN CUOTAS DECRECIENTES TASA FIJA

AÑOS	DEUDA	AMORTIZ	INTERES	SALDO	TOTAL A PAGAR
1	30000	3000	4500	27000	7500
2	27000	3000	4050	24000	7050
3	24000	3000	3600	21000	6600
4	21000	3000	3150	18000	6150
5	18000	3000	2700	15000	5700
6	15000	3000	2250	12000	5250
7	12000	3000	1800	9000	4800
8	9000	3000	1350	6000	4350
9	6000	3000	900	3000	3900
10	3000	3000	450	0	3450
TOTAL		30000	24750		54750

Figura 3.5 Pantalla de GG con la tabla y las nubes de puntos de las funciones Tarea 4

3.9.7.4 *Préstamos con Amortización Directa*

La Tarea 5 (ver recuadro 3.58) aborda le tipo de créditos con amortización directa, de manera semejante a como se han tratado otros tipos de préstamos en las tareas precedentes, siguiendo la misma estructura que emplea el Análisis Cualitativo, ayudándonos luego con la elaboración de bosquejos, para después ser confrontados con las tablas y gráficas realizadas con el GG, para posteriormente buscar la ecuación del mejor ajuste. El tipo de funciones que intervienen en esta tarea también son funciones lineales.

Finalmente la Tarea 6 (ver recuadro 3.63) pretende hacer una síntesis de toda la situación problemática de Préstamos, comparando los valores totales a pagar de los cuatro tipos de crédito.

Tarea 3 TABLAS

1. ¿Podría usted construir las tablas de los otros dos planes de amortización (Cuotas Decrecientes y Amortización Directa)? para ello le serán útiles la información del cuadro 1 y los datos del préstamo.
2. Construya estas dos tablas en GG, las utilizará en las tareas siguientes.

Tarea 4 PRÉSTAMOS CUOTAS DECRECIENTES

Para el plan de Cuotas Decrecientes, realice un proceso semejante al que hemos seguido con los dos planes anteriores así:

0. Estudie la tabla para el plan de Cuotas Decrecientes que construyó con GG en la tarea anterior.
1. Realice un bosquejo de cómo cree que serán las 3 gráficas de los intereses, la amortización y el total a pagar para este plan.
2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados, Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?
3. Con la ayuda de la tabla para el plan de Cuotas Decrecientes que construyó con GG en la tarea anterior. Elabore con GG las 3 gráficas. Utilice colores diferentes.
4. Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?
5. Para CADA UNA de las gráficas que ha realizado, Encuentre una función que dé el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.
6. Utilizando las herramientas estadísticas trate de hallar funciones que modelicen cada una de las situaciones.
7. Justifique las elecciones de los modelos que escoja.
8. Guarde su trabajo en los archivos en Word y GG que ha realizado.

Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego DECRE (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-DECRE.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego PRESL (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N- DECRE.ggb).

12

Recuadro 3.53 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 12

Tarea 4 PRÉSTAMOS CUOTAS DECRECIENTES
Material para la tarea 4

0. A continuación estudie los datos en la tabla para el plan de Cuotas Decrecientes que construyó con GG en la tarea anterior.

1. Luego a partir de los datos realice un bosquejo de cómo cree que serán las gráficas:

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

13

Recuadro 3.54 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 13

2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados, Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

3. Luego utilizando la tabla para el plan de Cuotas Decrecientes que construyó con GG en la tarea anterior. Construya en GG las gráficas de las tres situaciones. Utilice colores diferentes para cada una de ellas.

4. Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido con GG. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

14

Recuadro 3.55 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 14

5. Para CADA UNA de las gráficas que ha realizado, Encuentre una función que de el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

6. Ahora para cada una de las situaciones utilice las herramientas estadísticas del GG para tratar de hallar una función que de el mejor ajuste a la situación. Compare diferentes modelos; revisando los estadígrafos que obtiene, pero siempre tenga en cuenta el Análisis Cualitativo de la situación. Anote sus observaciones para CADA UNA de las situaciones y

a. De los intereses año a año

15

Recuadro 3.56 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 15

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

7. Justifique las elecciones de los modelos que escoja.
a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

Recuerde que debe conservar los soportes de su trabajo, tanto físicos (bosquejos, anotaciones, cálculos…) como elementos que ilustren su proceso en el computador (capturas de pantalla, archivos Word, archivos de GG, imágenes escaneadas…) pues luego deberá organizarlos y entregarlos.

Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego DECRE (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-DECRE.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego DECRE (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-DECRE.ggb).

16

Recuadro 3.57 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 16

Tarea 5 PRÉSTAMOS CON AMORTIZACIÓN DIRECTA

Para el plan de cuotas con Amortización Directa, realizaremos un proceso semejante al que hemos seguido con los dos planes anteriores así:

0. Estudie la tabla para el plan con Amortización Directa que construyó con GG en la tarea 3.
1. Realice un bosquejo de cómo cree que serán las 3 gráficas de los intereses, la amortización y el total a pagar para este plan.
2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados, Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?
3. Con la ayuda de la tabla para el plan con Amortización Directa que construyó con GG en la tarea 3. Elabore las 3 gráficas en GG. Utilice colores diferentes.
4. Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?
5. Para CADA UNA de las gráficas que ha realizado, Encuentre una función que dé el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.
6. Utilizando las herramientas estadísticas trate de hallar funciones que modelicen cada una de las situaciones.
7. Justifique las elecciones de los modelos que escoja.
8. Guarde su trabajo en los archivos en Word y GG que ha realizado.

Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego DIREC (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-DIREC.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego DIREC (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-DIREC.ggb).

17

Recuadro 3.58 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 17

Tarea 5 PRÉSTAMOS CON AMORTIZACIÓN DIRECTA
Material para la tarea 5
0. A continuación estudie los datos en la tabla con Amortización Directa que construyó con GG en la tarea 3

1. Luego a partir de los datos realice un bosquejo de cómo cree que serán las gráficas:

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

18

Recuadro 3.59 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 18

2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados, Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

3. Con ayuda de la tabla para el plan con Amortización Directa que construyó con GG en la tarea 3. Elabore las 3 gráficas en GG. Utilice colores diferentes para cada una de ellas.

4. Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido con GG. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

19

Recuadro 3.60 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 19

5. Para CADA UNA de las gráficas que ha realizado, Encuentre una función que de el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

6. Ahora para cada una de las situaciones utilice las herramientas estadísticas del GG para tratar de hallar una función que de el mejor ajuste a la situación. Compare diferentes modelos; revisando los estadígrafos que obtiene, pero siempre tenga en cuenta el Análisis Cualitativo de la situación. Anote sus observaciones para CADA UNA de las situaciones.

a. De los intereses año a año

20

Recuadro 3.61 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 20

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

7. Justifique las elecciones de los modelos que escoja.
a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

Recuerde que debe conservar los soportes de su trabajo, tanto físicos (bosquejos, anotaciones, cálculos…) como elementos que ilustren su proceso en el computador (capturas de pantalla, archivos Word, archivos de GG, imágenes escaneadas…) pues luego deberá organizarlos y entregarlos.

Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego DIREC (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-DIREC.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego DIREC (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-DIREC.ggb).

21

Recuadro 3.62 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 21

3.9.7.5 Ingresos y Costos

En las siguientes dos tareas (7 y 8), se abordan tres aspectos fundamentales de la teoría económica, las funciones de costos, ingresos y utilidad, sobre ellas aplicamos la misma estructura que hemos venido utilizando, Así a partir de una tabla de valores que entregamos a los estudiantes, ellos deben realizar el análisis cualitativo del fenómeno, examinando la tabla y posteriormente proponer un bosquejo de cómo creen que será la nube de puntos, y simultáneamente realizan el análisis cualitativo de las posibles familias de funciones que mantienen algún parecido con la nube de puntos.

Luego de ello se les pide que con el uso de GG reconstruyan la tabla y la gráfica de la nube de puntos para inmediatamente después buscar la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos.

En la Tarea 7 (ver recuadro 3.63) se realiza este proceso para la situación de los ingresos de una compañía de televisión y en la Tarea 8 para la utilidad de una empresa minera, para esta última tarea los estudiantes deben calcular primero las utilidades anuales dados los costos e ingresos de la compañía (ver recuadro 3.65).

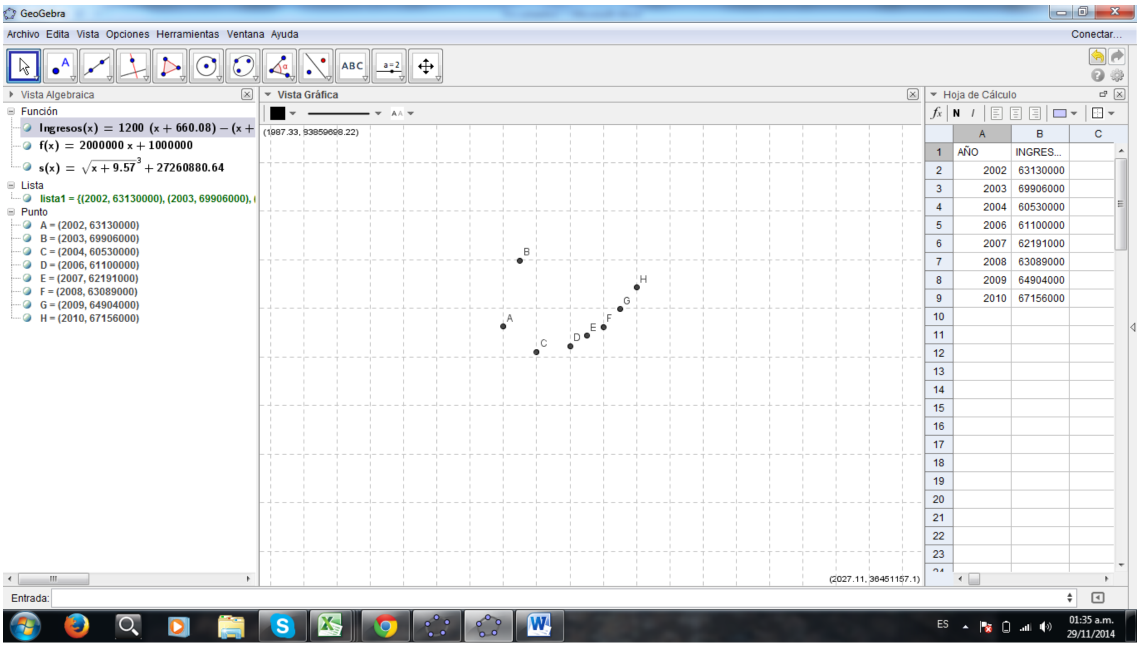


Figura 3.6 Pantalla de GG con la tabla y las nubes de puntos de las funciones Tarea 7

Tarea 6 TABLA COMPARATIVA

1. Realice una tabla comparativa de los cuatro planes de amortización donde se muestren los valores totales a pagar año a año.
2. Construya en GG las gráficas correspondientes a la tabla comparativa. Utilice colores diferentes para cada uno de los planes de amortización estudiados.
3. Guarde su trabajo en los archivos en word y GG que ha realizado.

Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego COMPARA (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N- COMPARA.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego COMPARA (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N- COMPARA.ggb).

INGRESOS Y COSTOS

Otra situación económica donde es necesario encontrar modelos apropiados se presenta con el manejo de costos, ingresos y utilidad. La tabla siguiente muestra los datos de los ingresos de la empresa de televisión por cable Cablenet para algunos años seleccionados entre el 2002 y el 2010

AÑO	INGRESOS
2002	63.13
2003	69.906
2004	60.53
2006	61.1
2007	62.191
2008	63.089
2009	64.904
2010	67.156

Tabla 3 Datos de los ingresos en millones de pesos colombianos de la empresa de televisión por cable Cablenet.

Tarea 7 INGRESOS
Siguiendo un proceso semejante a los realizados, busque un modelo que se ajuste a la función de ingreso de la compañía.

1. Construya una tabla en GG con los datos
2. Realice un bosquejo de cómo cree que será la gráfica de la función de ingreso de la compañía

22

Recuadro 3.63 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 22

3. Escriba un corto texto explicando el bosquejo, ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

4. Elabore con ayuda de GG la gráfica.
5. Haga un comentario sobre la gráfica que ha obtenido con GG. ¿Se parece a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

6. Para la gráfica que ha realizado, Encuentre una función que de el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.

7. Ahora utilice las herramientas estadísticas del GG para tratar de hallar una función que de el mejor ajuste a la situación. Compare diferentes modelos; revisando los estadígrafos que obtiene, pero siempre tenga en cuenta el Análisis Cualitativo de la situación. Anote sus observaciones.

8. Justifique las elecciones de los modelos que escoja.

9. De acuerdo al modelo que escogió, ¿Cuál debería ser el valor del ingreso para el año 2005?

23

Recuadro 3.64 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 23

10. Guarde su información. Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego INGRE (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N- INGRE.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego INGRE (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N- INGRE.ggb).

A continuación se muestran los datos de los ingresos y costos en millones de pesos de la Compañía Minera Global.

Año	*Ingresos por ventas (millones)*	*Costos y gastos (millones)*
1990	$2.6155	$2.4105
1991	2.7474	2.4412
1992	2.934	2.6378
1993	3.3131	2.9447
1994	3.9769	3.5344
1995	4.5494	3.8171
1996	4.8949	4.2587
1997	5.1686	4.8769
1998	4.9593	4.9088
1999	5.0913	4.6771
2000	4.7489	4.9025

Tabla 4 Datos de los ingresos y costos en millones de pesos colombianos de la Compañía Minera Global.

Tarea 8 UTILIDAD
Siguiendo un proceso semejante a los realizados, busque un modelo que se ajuste a la función de utilidad de la compañía

1. Construya una tabla en GG con los datos.
2. Complete su tabla calculando la utilidad de la Compañía para los años estudiados.
3. Realice un bosquejo de cómo cree que será la gráfica de la función de utilidad de la compañía.

24

Recuadro 3.65 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 24

4. Escriba un corto texto explicando el bosquejo. ¿Se parece a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

5. Elabore con ayuda de GG la gráfica.
6. Haga un comentario sobre la gráfica que ha obtenido con GG. ¿Se parece a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

7. Para la gráfica que ha realizado, Encuentre una función que de el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.

8. Ahora utilice las herramientas estadísticas del GG para tratar de hallar una función que de el mejor ajuste a la situación. Compare diferentes modelos; revisando los estadígrafos que obtiene, pero siempre tenga en cuenta el Análisis Cualitativo de la situación. Anote sus observaciones.

9. Justifique las elecciones de los modelos que escoja.

10. Guarde su información. Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego UTILID (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N- UTILID.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego UTILID (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N- UTILID.ggb).

25

Recuadro 3.66 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 25

3.9.7.6 Deuda Pública

La novena tarea versa sobre otro aspecto importante en Economía, el valor de la deuda pública, (ver recuadro 3.67) en esta tarea iniciamos nuevamente con una tabla de datos propuesta, para luego seguir con la rutina de pasos que hemos estado empleando en esta guía, sin embargo le hemos hecho algunos pequeños cambios, proponiendo más preguntas, y pidiéndole a los estudiantes que realicen interpolaciones de valores, algunos conocidos y otros no (por ej. 1995, 2001) esto con el fin de que se note con mayor claridad la diferencia entre el ajuste y el modelo. Además hacia el final de la tarea, se les presenta otra tabla con los datos reales para estas fechas, para poder revisar la fidelidad del modelo.

En este caso las funciones a las que se acerca la nube de puntos son funciones exponenciales, lo cual además se los hemos puesto de presente a los estudiantes, pidiéndoles que las escriban en términos de *e*.

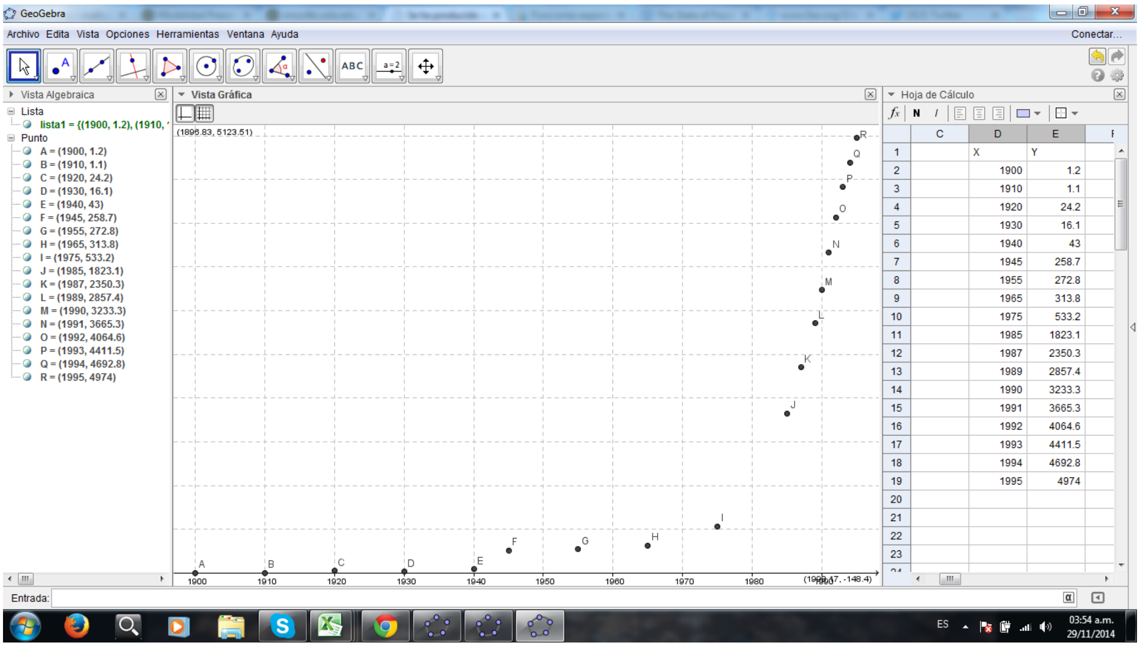


Figura 3.7 Pantalla de GG con la tabla y las nubes de puntos de las funciones.

DEUDA PÚBLICA[4]

Otra situación de interés en economía, es estudiar los presupuestos nacionales y en ellos el tema de la deuda pública, la siguiente tabla muestra la deuda nacional de Estados Unidos desde 1900 hasta 1995, para ciertos años escogidos.

Año	Deuda de Estados Unidos ($ miles de millones)	Año	Deuda de Estados Unidos ($ miles de millones)
1900	1.2	1985	1 823.1
1910	1.1	1987	2 350.3
1920	24.2	1989	2 857.4
1930	16.1	1990	3 233.3
1940	43.0	1991	3 665.3
1945	2 58.7	1992	4 064.6
1955	2 72.8	1993	4 411.5
1965	3 13.8	1994	4 692.8
1975	5 33.2	1995	4 974.0

Fuente: Bureau of Public Debt, U.S.Treasury.

Fuente: Bureau of Public Debt, U.S.Treasury.

Tarea 9 DEUDA

Para investigar este tema, haga lo siguiente.

1. Estudie la tabla anterior
2. Realice un bosquejo de cómo cree que será la gráfica de la función de la deuda nacional de Estados Unidos con respecto al tiempo.

3. Realice un comentario sobre el tipo de gráfica, ¿se le parece a alguna función conocida?

4. Reconstruya la tabla anterior en GG.

[4] Adaptado de: Harshbarger, R. J. y Reynolds, J. J. (2005) Matemáticas aplicadas a la administración, economía y ciencias sociales, McGraw-Hill, Séptima edición, 2005. pp. 383-385

26

Recuadro 3.67 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 26

5. Construya la gráfica en GG con los datos y
determine el mejor tipo de función para modelar estos datos. (Suponga que x = 0 en 1900).

6. Halle una ecuación para los datos, un Modelo de los datos. Reformule la ecuación con base e.

7. ¿Con qué exactitud pronostica el modelo la deuda para 1995? ¿Qué pronostica para
y 2001? Muestre sus cálculos.

8. Utilice este modelo para pronosticar cuándo ascenderá la deuda a $15 miles de millones, y

9. Compare los resultados de las preguntas 3 y 4 con los resultados reales de la siguiente tabla, la cual presenta la deuda nacional hasta 2001. ¿El modelo que creó pronostica relativamente bien la deuda para estos años?

10. Construya en GG una gráfica que incluya los datos de la siguiente tabla.

11. Haga la gráfica del modelo desarrollado en la pregunta 2 sobre el mismo sistema de coordenadas de la gráfica para los datos nuevos. ¿Este último modelo representa aún los datos?

12. Desarrolle una ecuación que modele los datos de la siguiente tabla. Reformule la ecuación con base e.

13. Observe las ecuaciones de los dos modelos y haga la gráfica de ambos modelos sobre el mismo sistema de coordenadas en GG para determinar si los pronósticos generados por el nuevo modelo difieren en gran medida de los del primer modelo.

14. Guarde su información. Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego DEUDA (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-DEUDA.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego DEUDA (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-DEUDA.ggb).

27

Recuadro 3.68 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 27

3.9.7.7 Correo Electrónico

La última tarea de la guía se ha pensado a partir de un artículo de la revista Newsweek del 26 de enero de 1998. En ella se presenta una situación realista sobre le correo electrónico.

Esta tarea tiene un formato ligeramente diferente, pues esta vez les hemos propuesto a los estudiantes una gráfica, que se complementa con la tabla (ver recuadro 3.70), como se puede observar se han dibujado dos curvas, una para el número de mensajes de correo electrónico y la otra para el número de personas con acceso al correo electrónico. Ambas curvas tienen la peculiaridad de que al ser curvas "suaves" por su grado de concavidad, brindan la posibilidad de que los estudiantes se aproximen a ellas con modelos tanto de tipo exponencial como cuadrático.

La tarea tiene dos partes, la primera donde a partir de la información en las gráficas y en la tabla se va realizando el análisis cualitativo de los fenómenos con la ayuda de preguntas, luego de lo cual, utilizando el paquete informático los estudiantes deben proponer modelos para los fenómenos presentados, y para cerrar esta parte se les pide que estudien el ajuste, para ayudarles en esta labor se les solicita que realicen interpolaciones para algunos valores propuestos.

En la segunda parte de la tarea se estudia la relación entre el número de personas con acceso al correo electrónico y el número de mensajes de correo electrónico, para lo cual los estudiantes deben construir una nueva gráfica, sobre la que nuevamente se realiza el análisis cualitativo, con miras a crear un modelo de esta relación, para ello los alumnos utilizan las herramientas que les brinda el GG, proponiendo diversas funciones, para las que es necesario revisar que tan buena es la fidelidad de su ajuste y que también se adaptan a la nube de puntos y a la situación propuesta.

Finalmente se les solicita a los estudiantes que consulten por internet, datos más actualizados de los fenómenos contemplados en la situación para de esta manera poder refinar el modelo propuesto, lo cual se les solicita.

Año	Deuda de Estados Unidos ($ miles de millones)	Año	Deuda de Estados Unidos ($ miles de millones)
1900	1.2	1990	3 233.3
1910	1.1	1991	3 665.3
1920	24.2	1992	4 064.6
1930	16.1	1993	4 411.5
1940	43.0	1994	4 692.8
1945	258.7	1995	4 974.0
1955	272.8	1996	5 224.8
1965	313.8	1997	5 413.1
1975	533.2	1998	5 526.2
1985	1 823.1	1999	5 656.3
1987	2 350.3	2000	5 674.2
1989	2 857.4	2001	5 807.5

Fuente: Bureau of Public Debt, U.S. Treasury.

CORREO ELECTRÓNICO[5]

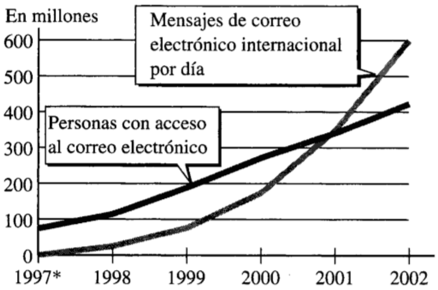
La naturaleza instantánea de la comunicación por teléfono siempre ha sido importante para las empresas. Sin embargo, las diferencias de horarios en las zonas han dado dolores de cabeza a quienes operan las empresas intemacionalmente. En fechas recientes, los faxes y el correo electrónico han ayudado a solucionar parte de este problema porque los mensajes se transfieren y están disponibles de inmediato, aun cuando el receptor no se encuentre físicamente para recibirlos. Uno de éstos, el correo electrónico, es más rápido, más eficiente con documentos grandes y es más eficiente en costo. Como resultado de esto, la creciente economía internacional estimula el uso del correo electrónico.

La siguiente figura, publicada en Newsweek el 26 de enero de 1998, muestra algunas proyecciones para el uso del correo electrónico internacional. (Los datos que se presentan son estimaciones basadas en la figura.)

No es necesario usar el teléfono
Son las 5:00 de la mañana en la oficina de Tokio
y las 8 PM en Londres. La economía intemacional
crea un auge del correo electrónico.

[5] Adaptado de Harshbarger, R. J. y Reynolds, J. J. (2005) Matemáticas aplicadas a la administración, economía y ciencias sociales, McGraw-Hill, Séptima edición, 2005. pp.192-193

Recuadro 3.69 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 28



* 1997[6] Estimación. Proyecciones de 1998-2002.

Año	Personas con acceso al correo electrónico (millones)	Mensajes de correo electrónico internacional por día (millones)
1997	70	10
1998	130	30
1999	190	80
2000	270	190
2001	350	360
2002	430	600

Tarea 10 CORREO ELECTRÓNICO
Parte A
l. A partir de la gráfica decida qué tipo de función sería la más apropiada para modelar lo siguiente.
a) Los mensajes de correo electrónico internacional como una función del tiempo en años I = (t).
b) Las personas con acceso al correo electrónico como una función del tiempo, P =P(t).
¿tiene varias opciones? ¿cuáles?

2. Construya en GG la tabla con los datos que se brindan.
3. Halle la ecuación del mejor ajuste (un modelo) para I(t) y P(t) usando los puntos que se dan para cada una.

4. Analice el significado de las intersecciones de cada modelo (de las gráficas de sus ecuaciones)

6 * 1997 Estimación. Proyecciones de 1998-2002. Fuente: Pioneer Consulting. 26 de enero de 1998, Newsweek.

29

Recuadro 3.70 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 29

5. Considere el punto de intersección de la figura.
a) Analice su significado.

b) Haga una estimación de sus coordenadas a partir de la figura.

c) Calcule sus coordenadas utilizando las ecuaciones de sus modelos.

6. Use sus modelos para encontrar proyecciones para 2005 y 2010 y analice las implicaciones de sus descubrimientos.

7. Comente acerca de las limitaciones de su modelo.

Parte B
A continuación, analice los mensajes de correo electrónico internacional como una función del número de personas que tienen acceso al correo electrónico. Los modelos anteriores estaban en función del TIEMPO

l. Construya una tabla en GG con los datos, utilice el número de personas como la variable independiente (x).

2.¿Cómo cree que sera la nueva gráfica? ¿Se parece a alguna función que conoza? ¿O que hallamos estudiado?

3. Realice en GG una gráfica de los puntos de los datos con el número de personas como la variable independiente (x). Luego decida qué tipo de función modela mejor los datos.

Recuadro 3.71 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 30

4. Halle la ecuación del mejor ajuste que modela estos datos.

5. ¿Qué pronostica este nuevo modelo para el número de mensajes de correo electrónico internacional cuando el número de personas con acceso al correo electrónico es

a) 190 000 000 (en 1999); b) 650 000 000?

6. Busque en internet datos más recientes por ejemplo para 2005, 2010, 2014 del numero de personas con acceso al correo electrónico y del número de mensajes de correo internacionales que se envían. Incluya estos datos en su tabla.

7. Analice las implicaciones y limitaciones de este modelo.

8. Piense en otra forma de analizar estos datos. Trace sus puntos de los datos y desarrolle un modelo. Comente sobre las implicaciones y limitaciones de este modelo.

9. Guarde su información. Nombre el archivo Word con sus apellidos, nombres, grupo y luego CORREO (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-CORREO.doc) y el archivo de GG donde realizó las gráficas nómbrelo con sus apellidos y luego CORREO (por ej. MEJIA-JUAN-DAO1N-CORREO.ggb).

31

Recuadro 3.72 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 31

PRESENTACIÓN Y ENTREGA:

Se debe entregar:
Un informe escrito que incluya esta guía completamente desarrollada, así como los documentos de soporte que se han utilizado tanto físicos (bosquejos, anotaciones, cálculos…) como elementos que ilustren su proceso en el computador (capturas de pantalla, archivos Word, archivos de GG, imágenes escaneadas…)

Además se enviarán los archivos correspondientes de GG al correo clasejfi@gmail.com ellos serán aceptados hasta las 24:00 horas del JUEVES 27 DE NOVIEMBRE.

En caso de realizar un informe escrito físico en que se incluya esta guía completamente desarrollada, este informe deberá incluir además de los bosquejos y sus explicaciones, la **impresión en color** de las graficas y tablas realizadas en GG. Este informe se entregará el día MIERCOLES 26 DE NOVIEMBRE (lo cual no excluye el envío de los archivos en GG correspondientes el día jueves).

Quienes prefieran entregar un informe escrito electrónico en que se incluya esta guía completamente desarrollada, este deberá llevar las gráficas de los bosquejos realizados (en la misma guía o escaneados) con sus justificaciones, así como copias de las tablas y gráficas realizadas en GG. Este informe se podrá enviar al correo antes mencionado hasta las 24:00 horas del JUEVES 27 DE NOVIEMBRE.

REFERENCIAS

Alemán, M. C., & González, E. (2003). *Modelos financieros en Excel*. México: Compañía Editorial Continental.

GeoGebra Ayuda en línea

Harshbarger, R. J. y Reynolds, J. J. (2005) Matemáticas aplicadas a la administración, economía y ciencias sociales, McGraw-Hill, Séptima edición, 2005.

---

[i] Las notas que aparecen en el texto del cuadro se refieren a:
(71) La fórmula utilizada para calcular la suma de los dígitos correspondientes al número de períodos de un préstamo es la siguiente $\frac{n(n+1)}{2}$; donde n = número de períodos o plazo del préstamo.
(72) La fórmula utilizada para calcular una anualidad, en este caso el pago total periódico, es la siguiente:

$$D = P \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \;;$$

donde D = monto inicial de la deuda; P = pago total periódico; i = tasa de interés periódica y n = número de períodos o plazo del préstamo.

Recuadro 3.73 Actividad 3 Préstamos Ingresos y Costos p. 32

3.10 TIPOS DE SESIONES

Para el Experimento de Enseñanza se utilizaron diferentes tipos de sesiones, la mayoría de ellas en la sala de ordenadores, así:

Sesión Tipo A (SA)
Este primer tipo de sesiones estaban enfocadas en el manejo del GG, seguidas de cortas prácticas por parte de los estudiantes. En ellas básicamente se daban instrucciones y recomendaciones sobre las herramientas del paquete informático. Cada una de las tres sesiones de este tipo tuvieron una duración de una hora y fueron dirigidas por el maestro-investigador en la sala de ordenadores

Sesión Tipo B (SB)
El segundo tipo eran sesiones de trabajo con los estudiantes en la sala de ordenadores, en donde se les había organizado en parejas, (cada estudiante tenia un ordenador) y en las que siguiendo la guía de la actividad suministrada en papel, los alumnos realizaban diferentes tareas en el GG y en la misma guía, donde debían dibujar bosquejos y anotar conclusiones. Algunas de las tareas de estas sesiones implicaban continuar el trabajo en casa. En este segundo tipo se pueden catalogar la gran mayoría de sesiones realizadas con los estudiantes, en ellas el maestro después de una breve presentación de la actividad se comportaba apenas como un orientador del trabajo. La duración de cada una de estas sesiones fue de dos horas.

Sesión Tipo C (SC)
Sesiones individuales de trabajo en donde los estudiantes respondían determinadas pruebas (Pre test, post test). En ellas el maestro se limitaba a dar algunas instrucciones iniciales y a supervisar le proceso.

Sesión Tipo D (SD)
Sesiones de puesta en común del trabajo realizado y de cierre de los conceptos estudiados, realizadas al final de cada una de las actividades. Estas sesiones las dirigía el maestro, con la participación de los estudiantes, la duración de cada una de ellas fue de aproximadamente media hora.

3.11 SOBRE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

La secuencia de enseñanza se desarrolló en 20.5 sesiones de 60 minutos a lo largo del segundo cuatrimestre del 2014, aproximadamente un par cada dos semanas. A continuación, comentaremos brevemente la secuencia de enseñanza realizada en el grupo de estudio.

Después de realizada la prueba inicial (Pre Test) y la prueba de visualización de Presmeg en las primeras clases (SC, 2 horas), Se realizó un primer acercamiento al programa GeoGebra (GG) con una sesión en la sala de ordenadores en donde se conocieron las características y los comandos básicos del programa para poder graficar funciones (SA, 1 hora).

Unas dos semanas después en la sala de ordenadores, se comenzó con los estudiantes propiamente el Experimento de Enseñanza, iniciando con la Actividad 1: Familias de Funciones, esta estudiaba tres tipos de funciones diferentes, sus transformaciones y parámetros. Así la sección 1A se enfocaba en las funciones lineales, la 1B en las funciones cuadráticas y la sección 1C en las funciones exponenciales. A cada uno de estos tipos de funciones dedicamos tres horas.

Para cada una de las tres partes de la Actividad 1 se realizaron con los estudiantes sesiones tipo B (SB, 3 horas en cada parte) en donde se les entregaba una guía de trabajo que deberían ir diligenciando, primero en el papel, y de ahí extraer algunas conclusiones para luego realizar algunas tareas en el GG y compararlas con sus primeras conclusiones.

Después de cada una de las secciones de la actividad 1, se realizó una corta actividad de cierre con el grupo en general (SD, 0.5 hora), en donde retomamos los tipos de transformaciones realizadas y los parámetros involucrados, en el contexto de la ecuación canónica correspondiente que se había estudiado en la actividad.

Luego de la actividad de cierre de las funciones exponenciales (SD, 0.5h.) realizamos una sesión, dirigida por el maestro, presentando nuevas herramientas del GG que eran necesarias para las actividades siguientes (SA, 1h.), en particular trabajamos sobre el manejo de la Hoja de Cálculo (HdC) del GG y la forma de graficar datos organizados en ella.

Luego, en la siguiente sesión también tipo A (1 hora), se desarrollaron actividades desde la hoja de cálculo para hacer la introducción a la modelización de funciones.

El paso siguiente fue trabajar en la actividad dos Regresión y Correlación (SB, 2 horas) como en el caso de la Actividad 1, a los estudiantes se les entregó el material para ser diligenciado, en él se incluyeron varias tareas tanto para hacer en la misma guía (papel), como en el GG, en las dos horas que duró esta sesión los estudiantes lograron realizar aproximadamente la mitad de la guía, la parte correspondiente para finalizar se asignó como trabajo complementario en casa, para ser realizado con las mismas parejas.

En la sesión siguiente se abordó actividad tres Préstamos, Ingresos y Costos (SB, 2h) de una manera semejante a la Actividad 2, con algunas tareas para realizar en casa. Hacia los últimos días del curso realizamos un Post Test (SC), que tenía dos partes una para realizar en papel y otra en que se debía modelizar un fenómeno con la ayuda de GG a partir de los datos suministrados.

Unos días después de aplicada la prueba final (Post Test), se escogió a los sujetos para el estudio de caso y realizamos con ellos las entrevistas de manera individual. La entrevista se estructuró a partir de un guión en donde se pedía a los estudiantes modelizar un fenómeno con la ayuda de GG a partir de los datos suministrados.

3.12 PAPEL DEL MAESTRO

El rol que desempeñó el maestro durante el experimento esta mediado por el tipo se sesión al que nos estemos refiriendo (ver apartado 3.10) pasando desde un mínimo de instrucciones iniciales y una actitud de observador en las sesiones tipo C (como el pre test y post test), hasta ser un elemento relevante del proceso, enseñando y dando explicaciones y sugerencias claves del manejo del paquete informático en los ordenadores en las sesiones de tipo A. Sin embargo el papel principal del maestro en este estudio y que se mostraba en las sesiones tipo B donde los estudiantes realizaban las cinco actividades centrales del experimento (la gran mayoría de sesiones), se limitaba al de ser un orientador del trabajo. Después de realizar una breve introducción a la guía, el maestro por lo general daba la vuelta al aula, observando las parejas en su trabajo. En algunas ocasiones los estudiantes le hacían consultas sobre la actividad o la forma de resolverla a lo que el maestro reaccionaba tratando de abstenerse de intervenir en las actividades de los alumnos, evitando darles instrucciones, consejos o respuestas a las preguntas con demasiada facilidad, más bien se les proponían nuevas preguntas que les pudieran servir de guía.

3.13 RECOLECCIÓN DE DATOS

Se recolectó información de las cinco diferentes actividades del material de enseñanza, básicamente través de las guías diligenciadas por los estudiantes y en algunos casos hemos logrado recuperar los archivos de las construcciones en GG, estos materiales se pueden consultar en los siguientes anexos.

Actividad	*Anexo*
Actividad 1A Familias de Funciones (F. Lineales)	B
Actividad 1B Familias de Funciones (F. Cuadráticas)	C
Actividad 1C Familias de Funciones (F. Exponenciales)	D
Actividad 2 Regresión y Correlación	E
Actividad 3 Préstamos, Ingresos y Costos	F

Cuadro 3.3 Anexos relacionados con el material de enseñanza.

Los elementos observados los hemos incluido en un apartado específico en el capítulo 4 dedicado al estudio de grupo, en donde profundizamos en las características de las respuestas de los estudiantes y en su relación con otros aspectos de este estudio.

4. Estudio de Grupo

En este capítulo presentamos el estudio de grupo desarrollado para esta investigación, de forma que se muestran las pruebas realizadas al grupo de estudiantes, con el análisis de sus respuestas y resultados, así como algunas observaciones puntuales que hemos registrado sobre las actuaciones de los alumnos a lo largo del proceso de enseñanza.

La intención del estudio de grupo tenía una doble finalidad, de una parte analizar el efecto de la enseñanza y de otra obtener algunas características de los sujetos frente a los conceptos de familias de funciones, parámetros, manejo algebraico y a lo que Drijvers (2003) llama sentido dinámico de las variables.

Para ello se estructuró una batería de cuatro pruebas, unas pruebas iniciales y unas pruebas post test. Las primeras consistían de una parte en un cuestionario sobre álgebra y familias de funciones, y por otra parte en un Test de Visualización (Presmeg 85).

En el post test la primera parte correspondía nuevamente a ítems sobre álgebra y familias de funciones, similares con el pretest, y la segunda parte era un ejercicio de modelización que se realizaba en dos soportes simultáneos, una guía en papel que el estudiante debía ir completando y el paquete informático GeoGebra, en donde debía ir elaborando el proceso de modelización. Exceptuando la tarea en GeoGebra que se realizó en una de las salas de ordenadores de la Universidad, las demás pruebas se realizaron en aulas normales con los estudiantes en disposición para examen. Así, con el fin de prevenir que los estudiantes copiasen, se evitó que los alumnos estuvieran próximos y la realización de las pruebas estuvo supervisada por el investigador.

A los estudiantes se les informó qué estaban participando en una investigación aunque no se les dieron más detalles. Adicionalmente, el investigador les informó que las pruebas (pre y post), no serían consideradas para la evaluación de la materia.

La forma de presentación de los cuestionarios fue en hojas de papel en donde se habían dejado espacios en blanco para contestar las preguntas y mostrar los procesos matemáticos realizados

El Estudio se realizó sobre un grupo natural en el sistema universitario colombiano, particularmente un grupo de primer semestre del curso de Matemáticas I (17-22 años), ofrecido a los estudiantes de las carreras de Ciencias Económicas y Administrativas, (Contaduría, Administración, Negocios Internacionales y Economía) en una universidad privada en Bogotá, Colombia.

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: ___________________________________ Grupo:____ Fecha: _____________

IMPORTANTE:

- En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

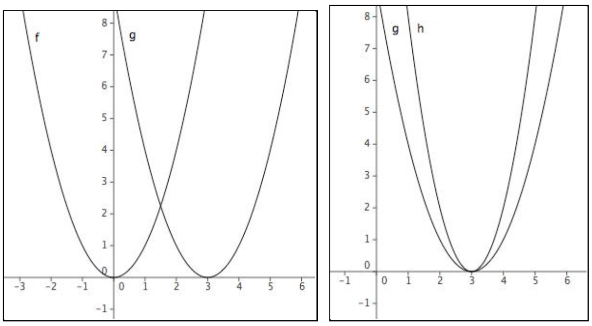
Resuelva:

1. Considere la ecuación $a \cdot x + b = c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = ...$

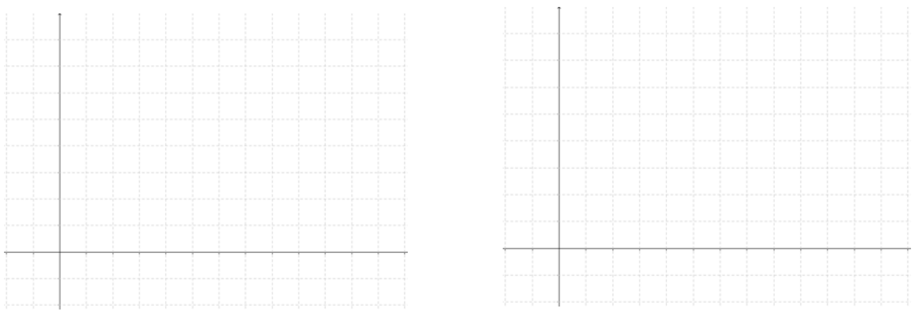
   b. Exprese b en x, a, c

2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

3. A partir de la parábola f(x) = x^2, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.



4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y=2x+1$



5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$ 25?

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

Recuadro 4.1 Cuestionario pretest

La población la conformaban 24 sujetos originalmente 12 mujeres y 12 hombres, sin embargo el día del pretest no asistieron las alumnas 1 y 6 y para el post test faltaron los alumnos 8 y 14, esta última estudiante se había retirado del curso hacia la mitad del cuatrimestre. Estas circunstancias nos obligaron a reducir el grupo de estudio a 20 sujetos, 9 mujeres y 11 hombres.

4.1 PRUEBAS INICIALES

Como ya mencionamos las pruebas iniciales consistían de una parte en un cuestionario de nueve ítems sobre álgebra y familias de funciones, y de otra parte se aplicaba el Test de Visualización de Norma Presmeg (Presmeg 85) en que se resuelven 18 problemas aritmético–algebraicos, con la intención de medir lo que Presmeg llama el coeficiente de visualización de los resolutores.

4.1.1 CUESTIONARIO PRETEST

El cuestionario del pretest se les presentó a los estudiantes como aparece en el recuadro 4.1 En las nueve preguntas que conforman la prueba se abordan puntualmente los temas: familias de funciones, parámetros, manejo algebraico y el sentido dinámico de las variables, de esta manera corresponden a cada aspecto los ítems:

Manejo algebraico	1a, 1b, 5c
Sentido dinámico de las variables	2, 5b
Parámetros y transformaciones	3a, 3b
Familias de funciones	4, 5a

El origen de las preguntas de la prueba es el siguiente, los ítems 1a, 1b, 2, 5a, 5b y 5c se tomaron de Drijvers (2003). Los ítems 3a y 3b se tomaron de un material de enseñanza de Gutiérrez (2005), la pregunta 4 es del investigador.

4.1.2 ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Los resultados de la prueba pretest aplicada al grupo de estudio se presentan en la tabla 4.1. Como se puede observar se han descartado los valores de los alumnos 1, 6, 8 y 14 que no asistieron a alguna de las pruebas, como se ha mencionado anteriormente. La forma como se evaluaron las pruebas fue la siguiente se asignó un punto (1) a las respuestas correctas y cero (0) a las incorrectas. Se hizo una anotación de intermedio (inter) a aquellas respuestas que a juicio del investigador, estaban incompletas, pero iban enfocadas de manera correcta, a estas respuestas no se les asignó valor. Se anotaron en otra categoría los ítems no abordados (na), a estos tampoco se les asignó valor.

Alumnos	**Ítems**								
	1a	**1b**	**2**	**3a**	**3b**	**4**	**5a**	**5b**	**5c**
Alumno 1									
Alumno 2	1	0	1	0	0	1	1	1	0
Alumno 3	1	1	1	na	na	na	1	1	0
Alumno 4	0	0	1	0	0	inter	0	na	0
Alumno 5	0	0	1	0	0	1	1	0	0
Alumno 6									
Alumno 7	0	0	1	na	na	0	1	1	0
Alumno 8									
Alumno 9	0	0	1	na	na	1	inter	1	1
Alumno 10	1	0	1	na	na	1	1	1	1
Alumno 11	1	1	0	inter	inter	na	inter	1	1
Alumno 12	1	0	1	na	na	1	0	na	1
Alumno 13	0	0	inter	0	0	1	na	na	na
Alumno 14									
Alumno 15	1	0	0	na	na	0	0	na	0
Alumno 16	1	0	0	0	0	na	0	0	1
Alumno 17	1	1	1	1	0	inter	na	na	na
Alumno 18	1	1	1	0	inter	0	1	1	0
Alumno 19	1	0	1	na	na	inter	na	0	na
Alumno 20	1	0	1	na	na	0	inter	inter	1
Alumno 21	0	0	0	na	na	0	0	0	1
Alumno 22	1	1	1	na	na	1	na	na	na
Alumno 23	1	0	1	na	na	1	na	na	na
Alumno 24	0	0	0	na	na	0	0	0	1

Tabla 4.1 Resultados de la prueba pretest.

A continuación presentamos el análisis de las respuestas al cuestionario, enfatizando en las respuestas incorrectas de los estudiantes. Por regla general al describir las actuaciones de los resolutores los nombraremos como “alumno” seguido de un número como aparecen en la tabla 4.1 .

Las primeras dos preguntas se refieren al manejo algebraico, en particular a la ecuación $ax + b = c$ primero despejando x y luego b.

Pregunta 1a y 1b

Considere la ecuación $a{\cdot}x{+}b{=}c$

a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma x = ...
b. Exprese b en x, a, c

Pregunta 1a .
Para este primer ítem un número significativo de estudiantes (13pnas. 65%) responden correctamente, nuestros resultados son marcadamente diferentes a los del estudio de Drijvers (2003) donde en esta pregunta solo el 12.9% de los estudiantes responde de manera correcta y el 11.1% la responde de manera incompleta.

Entre las soluciones incorrectas mencionaremos dos, la de los tres alumnos 5, 7 y 9 y la del alumno 4 quien parece que asumió la expresión “Exprese x en a, b, c” como la pregunta por una sustitución de x por a, de esta forma para la expresión $a \cdot x + b = c$ anota

$$a \cdot a + b = c \qquad a^2 + b = c.$$

Los alumnos 5, 7 y 9, confunden las trasformaciones al despejar la variable anotando

$$x = c - b - a.$$

Pregunta 1b
En este segundo ítem solo responden correctamente 5 personas de las 20 del grupo, un 25 % y de manera incorrecta las demás. Nuevamente nuestros resultados son diferentes a los obtenidos en la aplicación de Drijvers (2003) donde en esta pregunta los estudiantes alcanzaban mejores resultados que en la anterior con un 42.5 % de respuestas correctas.

La gran mayoría de las respuestas incorrectas fueron, lo que parece una confusión con las operaciones que involucran a x a la hora de despejar b en donde los estudiantes cambian las transformaciones que deberían realizar. En la tabla 4.2 se pueden ver una variedad de ellas.

Expresión	Respuestas
$b = \frac{c}{ax}$	(5pnas. 25%).

$b = c + x - a$	(3pnas. 15%).
$b = \dfrac{c-a}{x}$	(3pnas. 15%).
$b = \dfrac{c \cdot a}{x}$	(1pna. 5%).
$b = c - \dfrac{a}{x}$	(1pna. 5%).
$b = \dfrac{c}{a} - x$	(1pna. 5%).

Tabla 4.2 Respuestas incorrectas en la pregunta 1b.

Finalmente el alumno 4, parece que asumió nuevamente, la expresión "Exprese b en x,a,c" como la pregunta por una sustitución de b por a, anotando:

$$a \cdot x + x = \quad ax + x = c$$

Pregunta 2
En la relación $y = 5 - 2x$ *¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?*
Esta es una de las preguntas que Drijvers (2003) considera para notar si los estudiantes tienen el sentido dinámico de las variables, esto es, si pueden "ver" como se comportará la variable al cambiar. La gran mayoría de los sujetos (14pnas. 70%) parecen poder predecir como variará la función $y = 5 - 2x$ al aumentar x.

Entre las respuestas incorrectas, es interesante la del alumno 21, quien parece que también tiene una concepción dinámica de la situación, pero de una manera diferente a la planteada por Drijvers (2003), pues pareciera que relaciona esta expresión con algún tipo de transformación de la recta, ya que escribe "la gráfica se desplaza más a la derecha" (fig. 4.1). Da la impresión que él entendió la pregunta sobre la variación de la variable x, como la variación del parámetro que acompaña a la x, confundiendo la expresión propuesta $y = 5 - 2x$, con un ejemplo de la ecuación canónica donde se expresara un desplazamiento horizontal, tal vez $y = 5 + (x - 2)$.

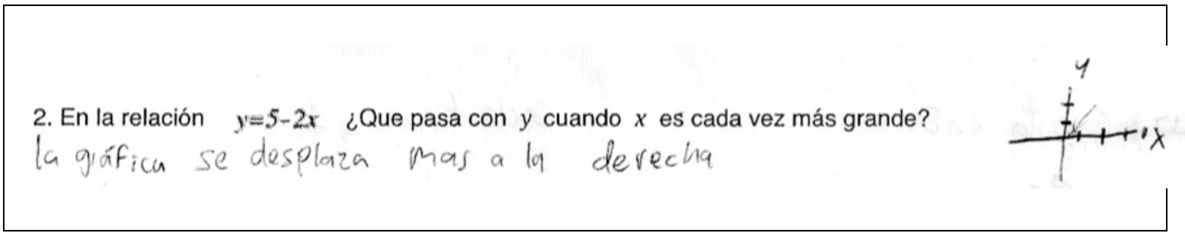

2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?
la gráfica se desplaza mas a la derecha

Figura 4.1 Respuesta del alumno 21 a la pregunta 2

Pregunta 3a y 3b
A partir de la parábola f(x) = x^2 *, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.*
Estas dos preguntas están enfocadas en la comprensión de los parámetros y su efecto en la gráfica de la función en términos de transformaciones.

Pregunta 3a .
El alumno 17 fue el único estudiante que respondió correctamente la pregunta 3a, por las anotaciones que realiza parece recordar el uso de los parámetros para representar transformaciones de gráficas de funciones, sin embargo también muestra alguna duda al anotar las dos ecuaciones $g(x) = x^2 + 3$ e $y = (x-3)^2$

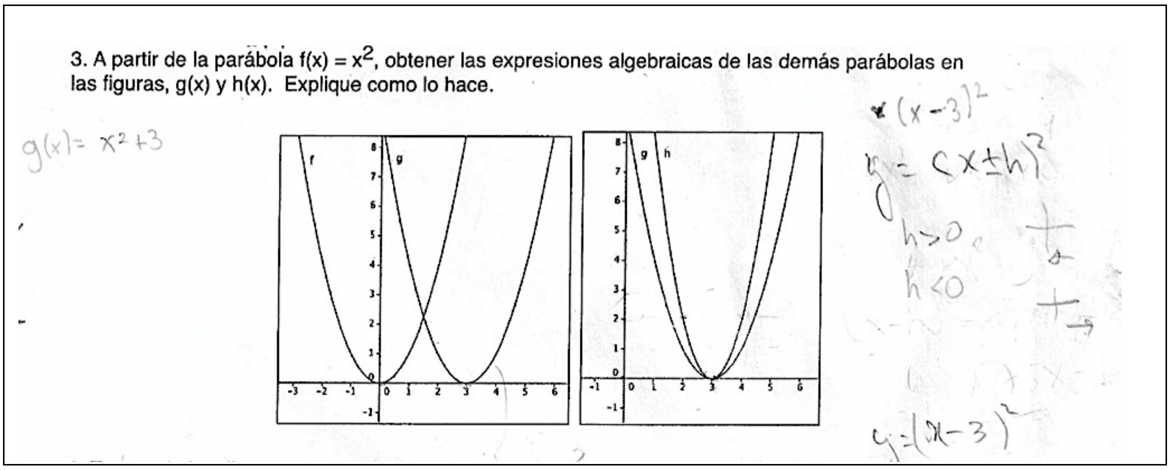


Figura 4.2 Respuesta del alumno 17 a la pregunta 3a

Existen un gran número de estudiantes que no abordan el problema (12pnas. 60%) Entre las expresiones erróneas es interesante la de la alumna 18 que parece relacionar las transformaciones sobre la función $f(x) = x^2$ con la composición de funciones. Pareciera que la alumna, combinó las dos trasformaciones que se le aplican a la función $f(x) = x^2$, el desplazamiento horizontal a la derecha y el estiramiento vertical hacia arriba; pues si asumimos que la x junto al 3 en la expresión que anota $h(x) = 3x(g(x))$ es una multiplicación, realmente la estudiante estaría realizando una composición entre el 3 y $g(x)$ lo cual no esta tan lejos de la respuesta correcta para $h(x)$ que sería $h(x) = 2(g(x))$.

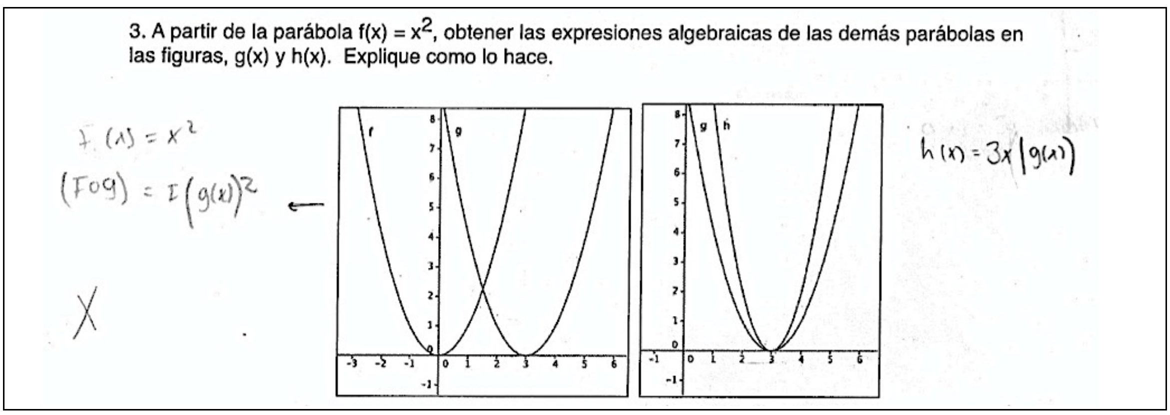


Figura 4.3 Respuesta de la alumna 18 a la pregunta 3a

Pregunta 3b

Este ítem al ser continuación del 3a tiene el mismo número de estudiantes que no abordan el problema (12pnas. 60%), además ningún estudiante lo resuelve. Entre las soluciones erróneas es interesante rescatar la del alumno 11, quien a partir de las graficas de las funciones $g(x)$ y $h(x)$ y revisando las coordenadas de los puntos en ellas logra construir una tabla comparando valores de x e y, para las funciones $g(x)$ y $h(x)$ (las columnas más próximas a las curvas corresponden a la función $h(x)$). Lamentablemente comete dos errores en la tabla de $h(x)$ pues el primer punto no es (1,1) sino (1,8) y el último punto no es (5,7) sino (5,8); tal vez si hubiese tenido los valores correctos habría notado que los valores de y en $h(x)$ corresponden al doble de los de $g(x)$, con lo que la función buscada era $h(x) = 2(x^2 - 3)$.

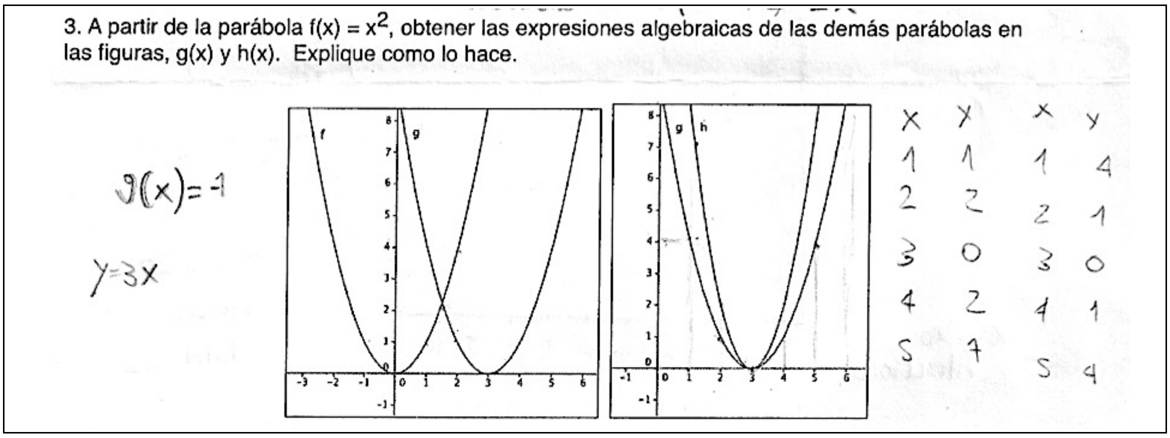


Figura 4.4 Respuesta del alumno 11 a la pregunta 3b

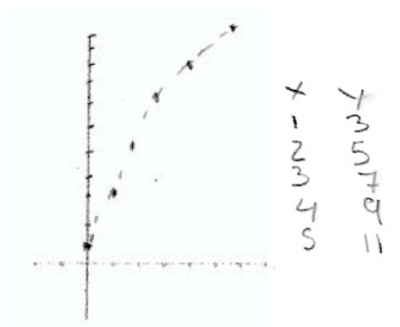
Pregunta 4

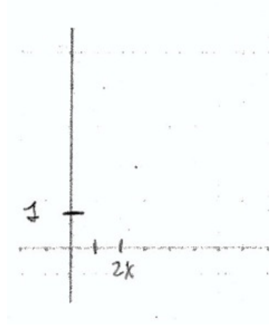
En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y = 2x + 1$

Esta pregunta busca indagar sobre las familias de funciones, la función lineal y un manejo mínimo para graficar. Tan solo ocho personas (40%) responden correctamente, la mayoría realizando una tabla de valores. Estos resultados aunque no son buenos, guardan cierta relación con lo comentado por Leinhardt et. al, (1990, p. 35) sobre los resultados de la *National Assessment of Educational Progress* en Estados Unidos, en donde "cuando se entregó una regla y una hoja de papel con un sistema de coordenadas marcado, únicamente 18% de los estudiantes de 17 años produce una gráfica correcta correspondiente a una ecuación lineal".

De otra parte varios estudiantes construyen graficas incorrectas como el alumno 11 que dibuja una parábola, la alumna 18 que realiza una semiparábola o el alumno 4 que construye la grafica de la función $y = 2x + 1$ utilizando una tabla de datos, sin embargo su gráfica no es una recta, lo que parece indicar su falta de comprensión del tipo de gráfica de una función lineal además de algunos problemas prácticos de escala a pesar de que la guía proveía una cuadrícula para la gráfica (fig. 4.5).

Otra situación errónea que apareció tres veces en el grupo (15%), es tomar los parámetros de la ecuación canónica de la función lineal, en nuestro caso $y = ax + c$, como coordenadas de un punto (a,c) de esta forma la función $y = 2x + 1$ se transforma en el punto (2,1), es claro como los estudiantes identifican el $2x$ con la abscisa del punto y probablemente el valor de c por exclusión, se convierte en la ordenada del punto. Este tipo de representación realizada por el alumno 21 se puede observar en la figura 4.6 .





Figuras 4.5 y 4.6 Respuestas a la pregunta 4 del alumno 4 (izq.) y del alumno 21.

Preguntas 5a, 5b y 5c

Esta grupo de preguntas se refiere al siguiente enunciado:

Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

a. *Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.*

b. *¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$ 25?*

c. *Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?*

Pregunta 5a
En este ítem el 40% de los estudiantes (8pnas.) responde correctamente, realizando una gráfica adecuada, como ejemplo la del alumno 10 (fig. 4.7). El error más común fue dibujar la gráfica de una función lineal pero partiendo del origen del sistema de coordenadas.

Pregunta 5b
En este segundo ítem sobre el sentido dinámico de las variables, varios estudiantes responden correctamente (7pnas. 35%), por ejemplo la alumna 18, cuya solución aparece en el Recuadro 4.2 . Un caso interesante es el de la alumna 3 que aunque no contestó en palabras, el diagrama en que representa las dos situaciones con entradas de U$20 y U$25 es muy diciente (ver fig. 4.8).

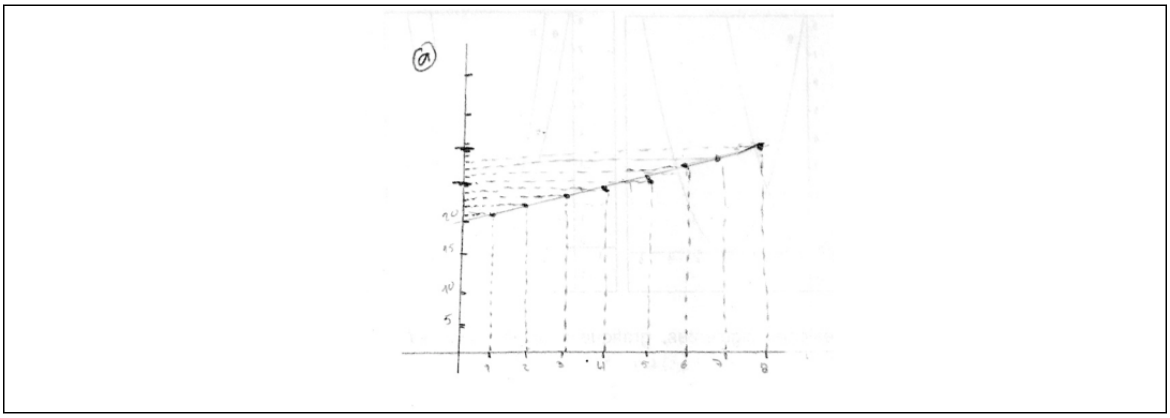


Figura 4.7 Respuesta del alumno 10 a la pregunta 5a

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

Se seguiría aumentando 1 a 1 el precio de las atracciones, ya que el único cambio que hubo es en el precio de la entrada, la cual lógicamente se pagaría una vez.

Recuadro 4.2 Respuesta de la alumna 18 a la pregunta 5b

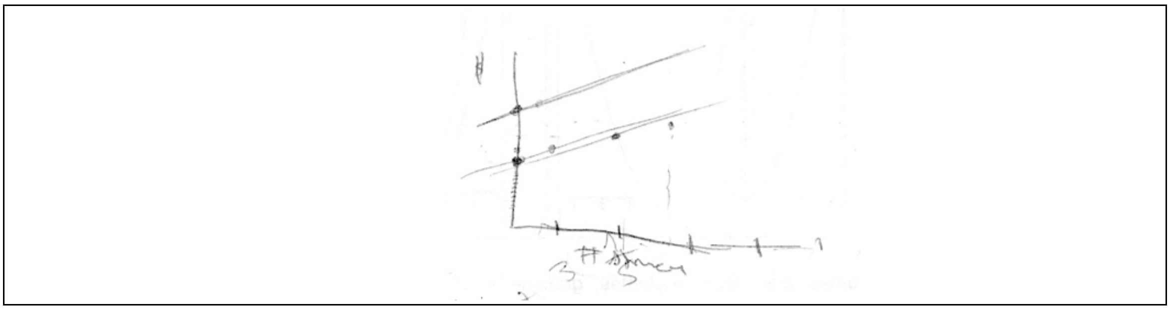


Figura 4.8 Respuesta de la alumna 3 a la pregunta 5b

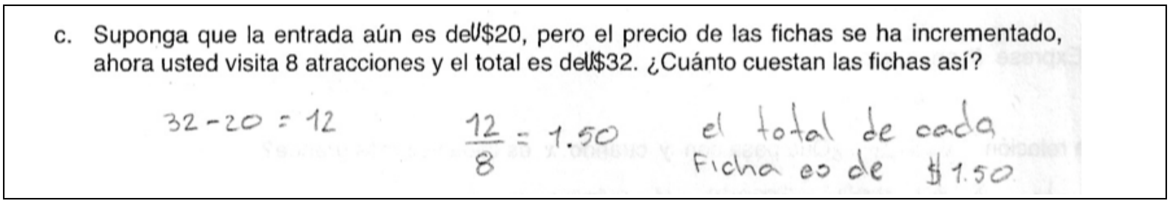
Pregunta 5c

Esta última pregunta la responde de manera correcta el 40% del grupo (8 pnas.) frente a siete estudiantes que responden de manera incorrecta (35%) y cinco alumnos que no la abordaron (25%).

La solución correcta sigue la lectura, el Costo Total (*CT*) es de 32 U$ y simultáneamente el Costo Total es igual al valor de la entrada (*E*) más el uso de 8 atracciones (*A*), si el valor de la entrada es de 20 U$, tenemos:

$$CT = E + 8A$$
$$32 = 20 + 8A$$
$$12 = 8A$$
$$1.5 = A$$

Así parece que la realizaron el alumno 10 (ver recuadro 4.3) y alumno 9, este último escribe “cada ficha costaría $\$ 1\frac{1}{2}$ ”, el alumno 11 además de obtener la solución correcta, hace una representación en el sistema de coordenadas.



c. Suponga que la entrada aún es deU$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es deU$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

$32 - 20 = 12$ $\frac{12}{8} = 1.50$ el total de cada Ficha es de \$1.50

Recuadro 4.3 Respuesta del alumno 10 a la pregunta 5c.

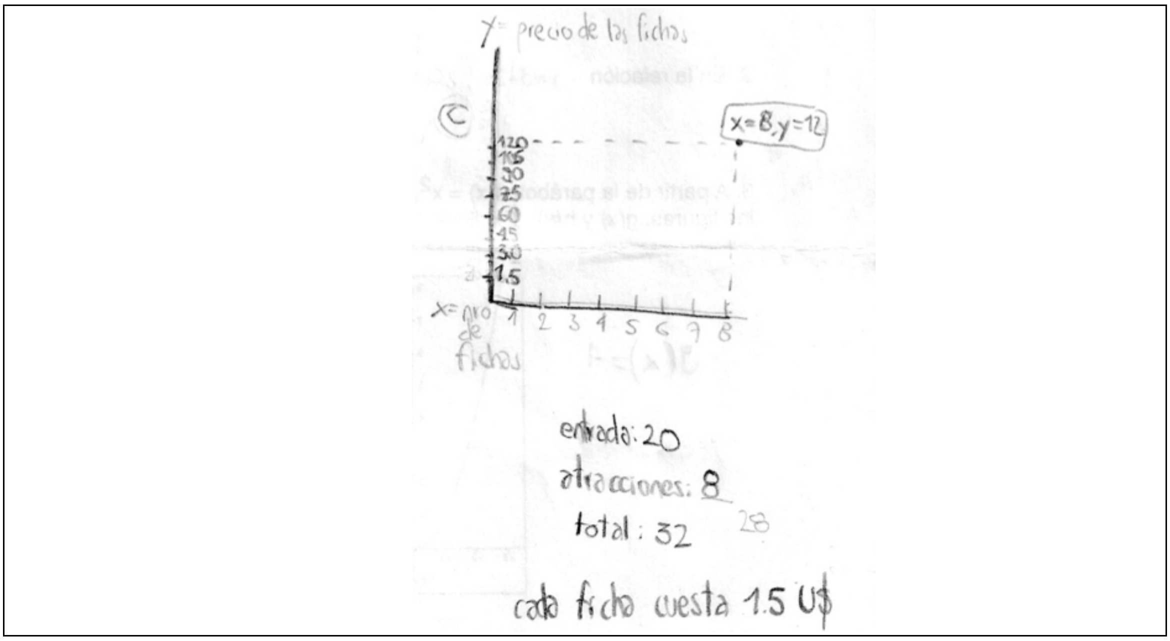
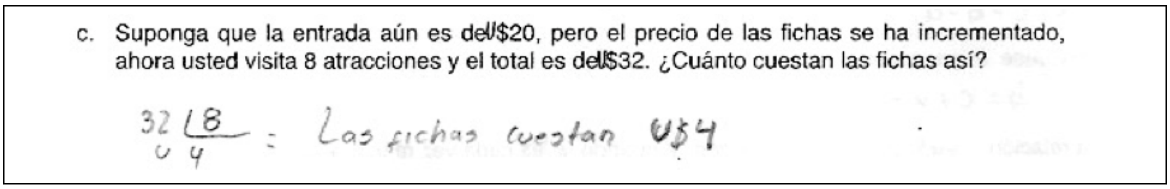


Figura 4.9 Respuesta del alumno 11 a la pregunta 5c.

Entre las soluciones incorrectas esta una lectura alternativa al problema que realizan casi todos los estudiantes que se equivocaron 6 personas (30%). En esta lectura las fichas acaban costando \$4, parece ser que realizan la división de \$32 entre las 8 atracciones lo que daría otra lectura del problema donde el precio de la entrada y el precio pagado por las 8 atracciones son diferentes y no se incluyen. En el recuadro 4.4 se puede observar un ejemplo de esta solución realizado por la alumna 5.



c. Suponga que la entrada aún es deU$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es deU$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

32 |8 0 4 : Las fichas cuestan U$4

Recuadro 4.4 Respuesta de la alumna 5 a la pregunta 5c.

La alumna 5 parece haber razonado de esta manera pero además haberse equivocado en la redacción de su respuesta anotando “Cuestan 4 fichas más de lo inicial”

Una variación de esta lectura del problema es pensar la relación inversa, las fichas cuestan $4 porque al visitar ocho atracciones cada una a $4 son $32, esto parecen haber pensado las alumnas 7 y 18 esta última escribe, “32 = 8 x 4 cada ficha cuesta $4”, en cambio la alumna 7 anota algo semejante pero agregando un error al final “8 x 4 = 32 es decir cada ficha costaría U$ 8”.

4.1.3 PRUEBA DE VISUALIZACIÓN

Como comentamos al inicio de esta sección entre las pruebas de entrada que aplicamos al grupo de estudio estaba el instrumento diseñado por Norma Presmeg para su Tesis Doctoral *The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation* (1985).

Nuestra intención al aplicar esta prueba era poder catalogar a los alumnos en el estudio de acuerdo a sus características de visualización y ver si existía alguna relación entre estas características y su desempeño en el aprendizaje de las familias de funciones y los procesos de modelización de funciones en tanto que las unidades de enseñanza se habían diseñado contemplando una proporción significativa de trabajo en el entorno visual propuesto por el paquete informático GeoGebra.

En términos prácticos, queríamos clasificar a nuestros alumnos del grupo de estudio en una de tres categorías, en primera instancia los grupos que Presmeg (1985) llama “visualizadores” y “no visualizadores” y un tercer grupo entre estos dos extremos de los sujetos que tienen características combinadas de ambos grupos.[1]

El instrumento esta formado por un conjunto de documentos el Test, el Cuestionario y las hojas de respuestas para cada uno de ellos. El Test consta de 18 problemas aritmético- algebraicos en su versión para estudiantes y de 24 problemas en su versión para maestros. Nosotros utilizamos la versión para estudiantes en la que se diferencian claramente dos grupos de problemas por su dificultad, el grupo A integrado por 8 problemas y el grupo B constituido por 12 problemas, de mayor exigencia. El facsímil del test que se les entregó a los estudiantes se puede ver en los recuadros 4.5 y 4.6 .

Los problemas del test se debían resolver en la hoja de respuestas que se entrega para tal fin (ver recuadro 4.7), para desarrollar los 18 problemas del test cada estudiante tenía 90 minutos.

Además del test el instrumento lo conforma el cuestionario de procesos matemáticos (ver recuadros 4.8 - 4.17), este documento es sobre él que realmente se analiza la habilidad de visualización del estudiante, esta elaborado de manera tal que para cada uno de los 18 problemas del test se presentan varias opciones del método que se empleó en su solución, como por ejemplo realizar un gráfico, hacer una representación mental de la situación, construir una tabla, etc, las opciones varían entre tres y seis dependiendo del problema en cuestión. De esta forma el resolutor después de haber completado los 18 problemas del test, comenzaba a examinar cada uno de los problemas realizados pero en términos de los procesos empleados en cada tarea, sin importar si la respuesta

---

[1] No es nuestra intención entrar aquí en los detalles de la investigación de Presmeg, los cuales se pueden revisar con más detalle en su trabajo (Presmeg, 1985).

obtenida es correcta o no. A partir del análisis que hace el resolutor, él debe marcar en la hoja de respuestas del cuestionario la opción u opciones que correspondan con los métodos empleados por él en la solución de la pregunta.

Es en la hoja de respuestas del cuestionario (ver recuadro 4.18), en donde el estudiante selecciona el o los métodos que utilizó en la respuestas del test, si fuere necesario puede agregar un método que no se haya contemplado o explicar como combinó los existentes.

Antes de iniciar el Test, se les informó a los estudiantes que los resultados de esta prueba no tendrían ninguna repercusión en sus valoración académica, incluso se les explicó que este Test lo que pretendía era examinar el tipo de procesos que se utilizaban al resolver problemas aritmético–algebraicos, de tal forma que las respuestas no eran lo importante sino el proceso desarrollado.

A medida que los estudiantes iban terminando el test, el investigador les explicaba la forma de abordar el cuestionario y el manejo de la hoja de respuestas del cuestionario. El tiempo disponible para desarrollar el cuestionario era de 45 minutos.

Se han realizado pequeños cambios en algunos problemas del test y en sus correspondientes respuestas en el cuestionario, para poderlos adaptar mejor al contexto colombiano, con respecto a la edición del original inglés. La traducción de los documentos del instrumento es nuestra.

La disposición de los estudiantes tanto para el test, como para el desarrollo del cuestionario fue la de un examen, y estos se realizaron en una de las aulas de la Universidad bajo la supervisión del investigador.

A continuación se muestran los recuadros con las cuatro partes del instrumento mencionadas.

PRIMERA PARTE: INSTRUMENTO DE PROCESOS MATEMÁTICOS

IMPORTANTE:

- NO escriba sobre este cuestionario. Escriba sus soluciones en la hoja de respuestas.
- Para cada problema, es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

SECCIÓN A

A1 Un día John y Peter visitan la biblioteca juntos. Después de esto, John va a la biblioteca a medio día, regularmente cada dos días. Peter va a la biblioteca cada tres días, también a medio día. Si la biblioteca abre todos los días, ¿Cuántos días después de la primera visita se volverán a encontrar ellos en la biblioteca?

A2 En una casa hay en total ocho mesas. Algunas tienen cuatro patas y otras tienen tres. En total tienen 27 patas. ¿Cuántas mesas tienen 4 patas?

A3 Un corredor recto está dividido en dos partes desiguales. La longitud de la segunda sección es la mitad de la longitud de la primera. ¿Qué fracción del corredor total es la primera sección?

A4 Solamente cuatro equipos de football toman parte en un campeonato. Cada equipo juega contra cada uno de los demás equipos una vez. ¿Cuántos partidos se juegan en el torneo?

A5 En los dos extremos de un sendero recto un hombre ha plantado un árbol y luego cada 5m a lo largo del sendero ha continuado plantando otro árbol. La longitud del sendero es de 25m. ¿Cuántos árboles se plantaron en total en el sendero?

A6 En un día se vendieron un tercio de las papas en un supermercado. Si 80 Kg de papas quedaron en el supermercado, ¿Cuántos Kg de papas había en el supermercado al comienzo del día?

SECCIÓN B

B1 Una de las pistas para una carrera atlética se ha dividido en tres secciones desiguales. la longitud de la pista completa es de 450m. La longitud de la primera y segunda secciones combinadas es de 350m. La longitud de la segunda y tercera secciones combinadas es de 250m. ¿Cuál es la longitud de cada sección?

B2 Un globo se eleva hasta 200m sobre el suelo, entonces se mueve 100m hacia el oriente, luego cae 100m . Entonces viaja 50m hacia el oriente y finalmente cae recto a tierra. ¿Qué tan lejos cayó el globo del punto de lanzamiento?

B3 La edad de una madre es siete veces la de su hija. La diferencia entre sus edades es de 24 años. ¿Cuales son sus edades?

B4 En una carrera atlética John está 10m adelante de Peter, Tom está 4m adelante de Jim y Jim está 3m adelante de Peter. ¿Cuántos metros está John adelante de Tom?

Instrumento de Procesos Matemáticos 1

Recuadro 4.5 Test de Procesos Matemáticos p.1

B5 En un comienzo, el precio de un kilo de azúcar era tres veces el precio de un kilo de sal. Entonces el precio de 1 kg de sal se incrementó en la mitad de su precio anterior, mientras el precio del azúcar no cambio. Si el precio de la sal es ahora de $3000 por kilo, ¿Cuánto es el precio del azúcar por kg?

B6 Algunos gorriones se han posado sobre dos árboles, en cada árbol hay el mismo número de gorriones. Si dos gorriones vuelan del primero al segundo árbol, ¿Cuántos gorriones de más hay en el segundo árbol que en el primero?

B7 Una sierra en un aserradero corta maderos largos, cada uno de 16m de longitud, en maderos cortos de 2m cada uno. Si cada corte toma 2 minutos, ¿Cuánto tiempo le podría tomar a la sierra producir ocho maderos cortos de un madero largo?

B8 Un tarro de pintura pesa 8 kg. Se saca la mitad de la pintura, después de lo cual el tarro y y su contenido pesan $4\frac{1}{2}$ kg. Determine el peso del tarro

B9 Un pasajero que ha viajado la mitad de su trayecto se queda dormido. Cuando despierta, aún tiene que viajar la mitad de la distancia que había recorrido mientras dormía. ¿Qué fracción del viaje completo estuvo durmiendo?

B10 Si usted coloca un bloque de queso en un extremo de una balanza y en el otro extremo tres cuartos de bloque de queso y además un peso de $\frac{3}{4}$ kg la balanza se mantiene en equilibrio. ¿Cuánto pesa el queso?

B11 Hay el doble de leche en una cantina que en otra. Cuando se saquen 20 litros de leche de ambas cantinas, entonces habrá el triple de le leche en la primera cantina que en la segunda. ¿Cuánta leche había originalmente en cada cantina?

B12 Diez ciruelas pesan tanto como tres duraznos y un mango. Seis ciruelas y un durazno pesan igual que un mango. ¿Cuántas ciruelas pesan lo mismo que un mango?

Instrumento de Procesos Matemáticos 2

Recuadro 4.6 Test de Procesos Matemáticos p.2

La siguiente es una muestra de la hoja de respuestas para el test.

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA HOJA DE RESPUESTAS 1

Nombre: ______________________________ Grupo:____ Fecha: ____________

IMPORTANTE:

- NO escriba sobre el cuestionario. Escriba sus soluciones en esta hoja de respuestas.
- Para cada problema, es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

Recuadro 4.7 Hoja de respuestas

En el recuadro a continuación se presenta el Cuestionario sobre los Procesos Matemáticos.

SEGUNDA PARTE: CUESTIONARIO DE PROCESOS MATEMÁTICOS

IMPORTANTE:

NO escriba sobre este cuestionario. Escriba sus soluciones en la hoja de respuestas.

En este cuestionario usted será consultado sobre los procesos matemáticos que realizó en los problemas de la última parte. Cada problema tiene tres o más posibles soluciones.

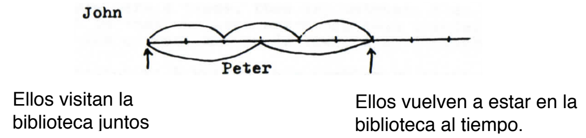
1. Para cada problema, es necesario que en la hoja de respuestas, usted marque con una X el espacio correspondiente a la solución que usted usó, o que es muy similar a aquella que usted usó en su primer intento de resolver el problema, sin importar si usted completo la solución o no o si su respuesta es correcta o no, esto no es relevante.

2. Si para alguno de los problemas usted piensa que ningunas de las soluciones presentadas es la que usted usó, o no hay ninguna que sea muy similar a la que usted usó, entonces marque con una X en el espacio "NINGUNA DE LAS ANTERIORES". En ese caso escriba el número del problema en el espacio al lado derecho de su hoja, y explique su solución lo más claramente posible.

SOLUCIONES

SECCIÓN A:

A1 **Solución 1:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando los días después de la primera visita a la biblioteca.



De el diagrama se puede ver que, que ellos vuelven a encontrarse en la biblioteca seis días después de la primera visita.

A1 **Solución 2:** Yo usé el mismo método como en la solución 1, pero dibujé el diagrama "en mi mente" (y no en papel).

A1 **Solución 3:** Yo resolví este problema usando ejemplos. Supuse que ellos visitaron la biblioteca por primera vez juntos el lunes. Entonces después de esto John debería visitar la biblioteca el miércoles, viernes, domingo, martes, etc… y Peter debería visitar la biblioteca el jueves, domingo , miércoles, etc. Esto significa que el domingo podrían estar en la biblioteca al mismo tiempo de nuevo, esto es seis días después de la primera visita.

A1 **Solución 4:** Yo resolví este problema diciendo que después del primer día John podría visitar la biblioteca en el tercer día, el quinto día, el séptimo día, etc., y Peter podría visitarla de nuevo el cuarto día, el séptimo día, etc. Entonces en el séptimo día ellos podrían estar en la biblioteca al mismo tiempo, es decir, seis días después de la primera visita.

Cuestionario de Procesos Matemáticos 1

Recuadro 4.8 Cuestionario de Procesos Matemáticos p.1

A2 **<u>Solución 1</u>:** Yo resolví este problema por ensayo y error:

Si el número de mesas con 4 patas era…	Entonces el número de mesas con 3 patas era…	Por lo tanto el número total de patas debería ser…
1	7	25 (no)
2	6	26 (no)
3	5	27 (SI)

Así hay 3 mesas con 4 patas (y 5 mesas con tres patas)

A2 **<u>Solución 2:</u>** Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones por ejemplo:

Sea x el número de mesas con 4 patas

Entonces el número de mesas con 3 patas es $8-x$

El número total de patas es $4x+3(8-x)$

Por lo tanto $4x+3(8-x)=27$

Resolviendo x: $x=3$

Así hay 3 mesas con 4 patas (y 5 mesas con tres patas).

A2 **<u>Solución 3</u>:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando las patas de las mesas, y las agrupé en grupos de cuatro y grupos de tres:

Por el diagrama se puede ver que hay tres grupos de 4 patas. Así hay 3 mesas con 4 patas (y 5 mesas con tres patas).

A2 **<u>Solución 4</u>:** Yo resolví este problema dibujando las mesas:
Primero las dibujé como si todas tuvieran 3 patas solamente, luego fui añadiendo una pata hasta que el número total de patas fuera 27.

Yo encontré que hay 3 mesas con 4 patas (y 5 mesas con tres patas).

A2 **<u>Solución 5</u>:** Yo resolví este problema por razonamiento:
Si todas las mesas tienen 3 patas, entonces 9 mesas deberían dar 27 patas. Hay 8 mesas, por lo tanto las patas de una mesa están distribuidas en tres diferentes mesas. Así hay 3 mesas con 4 patas (y 5 mesas con tres patas).

A2 **<u>Solución 6</u>:**

1 2 3 4 5 6 7 8
4 4 4 4 4 4 4 4 = 32
4 4 4 3 3 3 3 3 = 27

Escribí los números del 1 al 8 y luego escribí 4 debajo de cada número y sumé esto. Esto fue mucho, entonces busque el número correcto de cuatros y coloque varios tres hasta que los números sumaran 27. Así hay 3 mesas con 4 patas.

Cuestionario de Procesos Matemáticos 2

Recuadro 4.9 Cuestionario de Procesos Matemáticos p. 2

A3 **Solución 1:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando el corredor:

De el diagrama se puede ver que la primera sección son dos tercios del corredor completo

A3 **Solución 2:** Yo usé el mismo método como en la solución 1, pero dibujé el diagrama “en mi mente” (y no en papel).

A3 **Solución 3:** Como la longitud de la segunda sección es la mitad de la longitud de la primera sección, el corredor puede ser dividido en tres partes iguales. La primera sección contiene dos partes, la segunda sección una. Así la primera sección son dos tercios del corredor completo. (NO dibujé ni imaginé ningún tipo de imagen).

A3 **Solución 4:** Yo resolví este problema usando ejemplos.
Supuse que la longitud de la primera sección es 50m, entonces la longitud de la segunda sección es 25m, pues la longitud de la segunda sección es la mitad de la longitud de la primera sección. La longitud del corredor completo entonces podría ser de 75m. Esto significa que la primera sección son dos tercios del corredor completo.

A4 **Solución 1:** Yo resolví este problema por razonamiento:
Cada equipo jugaba contra cada uno de los otros tres equipos una vez. Eran 4 equipos, entonces 4x3 partidos, por lo tanto 12 partidos. Pero en esta forma cada partido se ha contado dos veces. Por lo tanto la respuesta correcta es 12/2 , 6 partidos.

A4 **Solución 2:** Yo resolví este problema listando todas las parejas de partidos y luego contándolas. Si los equipos eran A,B,C,D, entonces las parejas de partidos AB, AC, AD, BC, BD y CD. Entonces eran 6 partidos.

A4 **Solución 3:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando los partidos y luego conté los partidos como se ve en el diagrama. Entonces eran 6 partidos.

A4 **Solución 4:** Yo usé el mismo método como en la solución 3, pero dibujé el diagrama “en mi mente” (y no en papel).

A4 **Solución 5:** Yo resolví este problema con el siguiente razonamiento: Como eran 4 equipos, en cada ronda solo pueden jugar dos partidos. En total deberán ser 3 rondas, así cada equipo tiene que jugar con cada uno de los demás equipos una sola vez. Entonces serán 3x2 partidos, por lo tanto 6 partidos en total.

A4 **Solución 6:** Yo dibujé una matriz o tabla representando los partidos. Entonces serán 6 partidos.

	1	2	3	4
1		√	√	√
2			√	√
3				√
4				

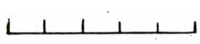
Cuestionario de Procesos Matemáticos 3

Recuadro 4.10 Cuestionario de Procesos Matemáticos p. 3

A5 **Solución 1:** Yo resolví este problema en esta forma:
A lo largo del sendero, cada 5m un árbol fue plantado. Esto significa que el sendero estaba dividido en 5 porciones iguales (25/5). Cada porción corresponde a un árbol, pero en uno de los dos extremos del sendero, la porción corresponde a dos árboles. Por lo tanto el número de árboles era (4x1)+(1x2) = 6.

A5 **Solución 2:** Yo resolví este problema imaginando el sendero y los árboles, y luego conté los árboles en mi mente. Yo encontré que eran 6 los árboles en el sendero.

A5 **Solución 3:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando el sendero y los árboles y luego conté los árboles. Encontré que eran 6 los árboles.



A6 **Solución 1:** Yo resolví este problema de esta forma:
Un tercio de las papas se vendieron, luego dos tercios de las papas quedaron en el supermercado. Esto significa que la cantidad de papas que quedaron era el doble de la cantidad que vendieron. Si nos dicen que la cantidad que quedó era 80 kg. entonces la cantidad que vendieron era 40 kg. Luego la cantidad de papas en el supermercado al comienzo era 80 kg + 40 kg = 120 kg.

A6 **Solución 2:** Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones, como por ejemplo:

Sea <u>x</u> la cantidad de papas al comienzo

Entonces la cantidad vendida $\frac{1}{3}x$

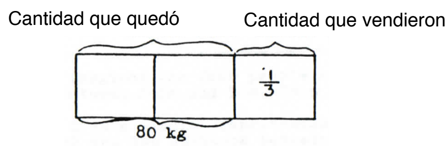
La cantidad que quedó $\frac{2}{3}x$

Luego $\frac{2}{3}x=80$

$x=120$

Así la cantidad de papas en el supermercado al comienzo era 120 kg.

A6 **Solución 3:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando las papas:



De el diagrama se puede ver que la cantidad de papas en el supermercado al comienzo era 80 kg + 40 kg = 120 kg.

A6 **Solución 4:** Yo usé el mismo método como en la solución 3, pero dibujé el diagrama “en mi mente” (y <u>no en papel</u>).

Cuestionario de Procesos Matemáticos 4

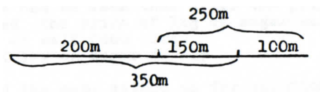
Recuadro 4.11 Cuestionario de Procesos Matemáticos p. 4

SECCIÓN B:

B1 **Solución 1:** Yo resolví este problema imaginando la pista para la carrera y luego calculando la longitud de cada sección.

Longitud de la tercera sección 450 - 350 = 100m
Longitud de la primera sección 450 - 250 = 200m
Así la longitud de la segunda sección 150m

B1 **Solución 2:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando las pista y luego calculé la longitud de cada sección.



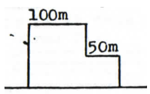
La Longitud de la tercera sección es 200m, la segunda sección 150m y la tercera sección 100m.

B1 **Solución 3:** Yo resolví este problema sacando conclusiones (con o sin álgebra) de la información dada y no imaginé o dibujé ninguna imagen.

Longitud de la pista completa es	450m	$x+y+z=450$
Longitud de la primera y segunda secciones combinadas es 350m		$x+y=350$
Conclusión la longitud de la tercera sección	450 - 350 = 100m	$\therefore\ z=100$
Longitud de la segunda y tercera secciones combinadas	250m	$y+z=250$
Conclusión la longitud de la primera sección	450 - 250 = 200m	$\therefore\ x=200$
Así la longitud de la segunda sección	450-200-100 = 150m	$y=150$

B2 **Solución 1:** Yo imaginé el recorrido tomado por el globo y luego calculé la distancia entre los puntos de inicio y aterrizaje. Encontré que la distancia debe ser 100 + 50 = 150m

B2 **Solución 2:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando el recorrido tomado por el globo y luego calculé la distancia entre los puntos de inicio y aterrizaje.
Distancia 100 + 50 = 150m



B2 **Solución 3:** Para resolver este problema, me fijé únicamente en la información que era importante para la solución (sin imaginar el recorrido del globo). Así la distancia entre los puntos de inicio y aterrizaje fue 100 + 50 = 150m

Cuestionario de Procesos Matemáticos 5

Recuadro 4.12 Cuestionario de Procesos Matemáticos p. 5

B3 **Solución 1:** Yo resolví este problema por ensayo y error:

Edad de la Hija	Edad de la Madre	
2 años	26 años	no
3 años	27 años	no
4 años	28 años	SI

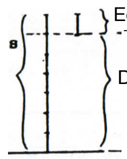
Así la edad de la hija es 4 años y la de la madre 28 años.

B3 **Solución 2:** Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones, como por ejemplo:
Sea la edad de la hija x años
Luego la edad de la madre es 7x años
La diferencia entre sus edades es 6x años

$$6x=24$$

Luego $x=4$
Así la edad de la hija es 4 años y la de la madre 28 años.

B3 **Solución 3:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando las edades:

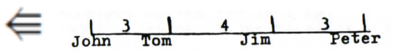


Por el diagrama se puede ver que la diferencia entre sus edades es igual a 6 partes; esta diferencia es de 24 años. Así cada parte representa 4 años, luego la edad de la hija es 4 años y la de la madre 28 años.

B3 **Solución 4:** Yo imaginé un diagrama como en la solución 3, y luego razoné que 6 partes representan 24 años, entonces un a parte representa 4 años (con o sin uso de símbolos). Así la edad de la hija es 4 años y la de la madre 28 años.

B4 **Solución 1:** Yo imaginé las cuatro personas y calculé la distancia entre John y Tom. John está 3 m adelante de Tom.

B4 **Solución 2:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando las cuatro personas y calculé la distancia entre John y Tom. John está 3 m adelante de Tom.

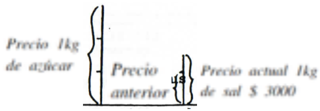


B4 **Solución 3:** Yo resolví este problema sacando simplemente sacando conclusiones de las afirmaciones del problema:
Tom está 4m adelante de Jim y Jim está 3m adelante de Peter.
Conclusión: Tom esta 7m adelante de Peter.
John esta 10m adelante de Peter.
Conclusión: John esta 3m adelante de Tom.

Cuestionario de Procesos Matemáticos 6

Recuadro 4.13 Cuestionario de Procesos Matemáticos p. 6

B5 **Solución 1:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando los precios del azúcar y al sal.



En el diagrama se puede ver que después de que el precio de la sal se incremento, el precio de un 1kg de azúcar era el doble del precio del 1 kg de sal (ahora $3000).
Así el precio de 1 kg de azúcar es $6000

B5 **Solución 2:** Yo usé el mismo método como en la solución 1, pero dibujé el diagrama “en m i mente” (y <u>no en papel</u>).

B5 **Solución 3:** Yo resolví este problema por razonamiento:
El precio de 1 kg de de sal es ahora $3000. Esto es veces el precio anterior; así el precio anterior era $2000 por kg. Luego el precio de 1 k $1\frac{1}{2}$ de azúcar es 3x $2000= $6000 por kg.

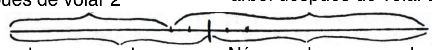
B5 **Solución 4:** Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones, como por ejemplo:
Suponga que el precio anterior de la sal era x por kg.
Luego el precio del azúcar era 3x por kg.

Después del incremento el precio de la sal es de $1\frac{1}{2}$ por kg.
Así el precio del azúcar es el doble del precio actual de la sal, es decir el precio de 1 kg de azúcar es $6000.

B6 **Solución 1:** Yo resolví este problema por razonamiento:
Después de que dos gorriones vuelen del primer al segundo árbol, el primer árbol tendrá <u>2 menos</u> que antes, mientras el segundo árbol tendrá dos gorriones <u>más</u>. Así el segundo árbol tiene 4 gorriones más que el primero.

B6 **Solución 2:** Yo dibujé un diagrama:

Número de aves en el primer árbol después de volar 2 — Número de aves en el segundo árbol después de volar 2



Número de aves en el primer árbol al comienzo — Número de aves en el segundo árbol al comienzo

Así el segundo árbol tiene 4 gorriones más que el primero.

B6 **Solución 3:** Yo usé el mismo método como en la solución 2, pero dibujé el diagrama “en m i mente” (y <u>no en papel</u>).

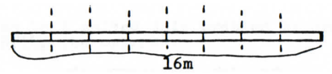
B6 **Solución 4:** Yo resolví este problema usando un ejemplo:
Suponga que al comienzo hay 8 gorriones en cada árbol. Después dos gorriones vuelan del primer al segundo árbol, el primer árbol tiene 6 gorriones y el segundo 10. Así el segundo árbol tiene 4 gorriones más que el primero.

B6 **Solución 5:** Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones, como por ejemplo:
Sea x el número de gorriones en cada árbol al comienzo. Después dos gorriones vuelan del primer al segundo árbol, el primer árbol tiene $x-2$ gorriones y el segundo $x+2$. Diferencia en el número de gorriones $(x+2) - (x-2) = 4$

Cuestionario de Procesos Matemáticos 7

Recuadro 4.14 Cuestionario de Procesos Matemáticos p. 7

B7 **Solución 1:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando el madero largo siendo cortado en pequeños maderos.



De el diagrama se ve que son necesarios 7 cortes para producir 8 pequeños maderos, Así el tiempo requerido es 7 x 2 = 14 minutos.

B7 **Solución 2:** Yo usé el mismo método como en la solución 1, pero dibujé el diagrama “en m i mente” (y no en papel).

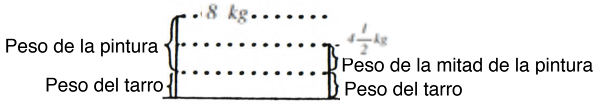
B7 **Solución 3:** Yo resolví este problema razonando:
Si el madero largo fuera mas largo de 16m, se necesitarían 8 cortes para producir 8 pequeños maderos. Pero el último corte no es necesario, luego se requieren 7 cortes. Tiempo necesario 7 x 2 = 14 minutos.

B8 **Solución 1:** Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones, como por ejemplo:
Sea el peso del tarro de pintura x
Luego el peso de la pintura es $(8-x)$
Entonces el peso de la mitad del la pintura es… $\frac{1}{2}(8-x)$

Luego $x+\frac{1}{2}(8-x) = 4\frac{1}{2}$

Así el peso del tarro es *1* kg. $x = 1$

B8 **Solución 2:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando los respectivos pesos.



Por el diagrama sabemos, que el peso de la mitad de la pintura es $8 - 4\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ kg
Luego el peso de la pintura es *7* kg.
Y el peso del tarro *1* kg.
(o directamente: Peso del tarro es $4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 1$)

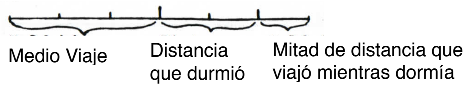
B8 **Solución 3:** Yo usé el mismo método como en la solución 2, pero dibujé el diagrama “en m i mente” (y no en papel).

B8 **Solución 4:** Yo usé el mismo método como en la solución 2, pero sin diagrama ni ninguna imagen.

Cuestionario de Procesos Matemáticos 8

Recuadro 4.15 Cuestionario de Procesos Matemáticos p. 8

B9 **Solución 1:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando la distancia recorrida.

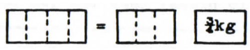


Por el diagrama: si la distancia completa son 6 partes, él durmió 2 partes, es decir un tercio del viaje completo.

B9 **Solución 2:** Yo usé el mismo método como en la solución 1, pero dibujé el diagrama "en mi mente" (y no en papel).

B9 **Solución 3:** Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones, como por ejemplo:
Sea la distancia que él durmió x unidades.
Luego cuando despertó, la distancia restante era $\frac{1}{2}x$ unidades.
Entonces $(x-\frac{1}{2}x)$ unidades es la mitad del viaje.
De donde el viaje completo es $2(x-\frac{1}{2}x) = 3x$ unidades.
Luego él durmió por un tercio del viaje.

B10 **Solución 1:** Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando los objetos.



Quitando tres cuartos de queso de ambas bandejas de la balanza, nos queda que un cuarto de queso balancea $\frac{3}{4}$ kg de peso.
Luego un queso completo pesa $4 \times \frac{3}{4} = 3$ kg.

B10 **Solución 2:** Yo usé el mismo método como en la solución 1, pero dibujé el diagrama "en mi mente" (y no en papel).

B10 **Solución 3:** Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones, como por ejemplo:
Sea el peso de un queso completo x kg.

Entonces $x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$
Luego un queso completo pesa 3kg. $x = 3$

B10 **Solución 4:** Un cuarto de queso pesa $\frac{3}{4}$ kg . Luego el queso completo pesa 3 kg. (sin diagramas ni imágenes).

Cuestionario de Procesos Matemáticos 9

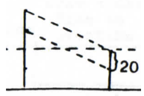
Recuadro 4.16 Cuestionario de Procesos Matemáticos p. 9

B11 Solución 1: Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones, como por ejemplo:
Sean las cantidades originales de leche *x* litros y *2x* litros.
Las cantidades en las cantinas después de sacar son *x- 20* litros y *2x - 20* litros.

Entonces
$$3(x-20) = 2x-20$$
$$x = 40$$

Luego las cantidades originales de leche eran 40 litros y 80 litros.

B11 Solución 2: Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando las cantidades de leche.



litros (la misma cantidad que se extrajo de ambas cantinas)

A partir del diagrama se puede ver que después de sacar leche de las cantinas, la primera cantina contiene 3 veces la cantidad de leche en la segunda, la cantidad de leche restante en la segunda cantina es 20 litros. Luego las cantidades originales de leche eran 40 litros y 80 litros.

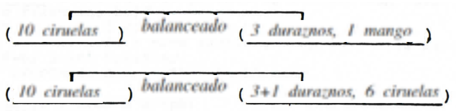
B11 Solución 3: Yo usé el mismo método como en la solución 2, pero dibujé el diagrama "en m i mente" (y no en papel).

B12 Solución 1: Yo resolví este problema usando símbolos y ecuaciones, como por ejemplo:
Sea el peso de una ciruela x unidades y el de un durazno y unidades. Luego el peso de un mango es 6x + y unidades.

Luego
$$10x = 3y + (6x + y)$$
$$x = y$$

Entonces el peso de un mango es 6x + x = 7x unidades.
Luego un mango equilibra la balanza contra 7 ciruelas.

B12 Solución 2: Yo resolví este problema dibujando un diagrama representando los pesos:



De cada bandeja de la balanza removamos 6 ciruelas. Entonces 4 ciruelas se balancean con 4 duraznos. Luego una ciruela se balancea con un durazno. Un mango se balancea con un durazno y 6 ciruelas, lo que es equivalente en peso a 7 ciruelas.

B12 Solución 3: Yo usé el mismo método como en la solución 2, pero dibujé el diagrama "en m i mente" (y no en papel).

B12 Solución 4: Yo resolví este problema por razonamiento (sin imaginar o realizar ningún dibujo):

Un mango se balancea con un durazno y 6 ciruelas.
Entonces 10 ciruelas se balancean con 3 duraznos, 3 ciruelas y 1 durazno.
Entonces 4 ciruelas se balancean con 4 duraznos.
Luego (de la primera línea) un mango se balancea con un 7 ciruelas.

Cuestionario de Procesos Matemáticos 10

Recuadro 4.17 Cuestionario de Procesos Matemáticos p. 10

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA HOJA DE RESPUESTAS 2

Nombre: ______________________________ Grupo:____ Fecha: ____________

Tarea	Soluc 1	Soluc 2	Soluc 3	Soluc 4	Soluc 5	Soluc 6	Ninguna de las Anteriores
SECCIÓN A							
A1							
A2							
A3							
A4							
A5							
A6							
SECCIÓN B							
B1							
B2							
B3							
B4							
B5							
B6							
B7							
B8							
B9							
B10							
B11							
B12							

Recuadro 4.18 Hoja de respuestas para el Cuestionario de Procesos Matemáticos

4.1.4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En la Tabla 4.3 se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes del grupo en la prueba de Visualización de Presmeg (Presmeg, 1985). Estos valores se obtienen, al revisar las respuestas del cuestionario de procesos matemáticos y darles una calificación a las respuestas suministradas por los alumnos a partir de una guía, según la cual las respuestas que muestran características de visualización se puntúan con 2, y a las que no, se les da una calificación de cero. De esta manera al responder a los 18 problemas un estudiante con altas capacidades de visualización obtendría una calificación de 36, mientras un estudiante con muy bajas características de visualización obtendría una calificación cercana a cero, aquellos estudiantes que se acercan a la media no se pueden considerar como “visualizadores” pero tampoco como “no visualizadores”.

Nuestra intención al aplicar esta prueba era poder catalogar a los alumnos en el estudio de acuerdo a sus características de visualización y ver si existía alguna relación entre estas características y su desempeño en el aprendizaje de las familias de funciones y los procesos de modelización de funciones en tanto que las unidades de enseñanza se habían diseñado contemplando una proporción significativa de trabajo en el entorno visual propuesto por el paquete informático GeoGebra.

Sin embargo como se puede observar en la tabla 4.3 los resultados de nuestro grupo de estudio se hallan muy cerca de la media, con apenas algunas pequeñas fluctuaciones, lo cual no nos permitió clasificar los estudiantes para el estudio de casos de acuerdo a este criterio y estudiar su desempeño con respecto a sus capacidades de visualización.

De otra parte, había una estudiante con unas características muy interesantes para el estudio, la alumna 14 pues de una parte era una estudiante muy capaz en matemáticas y además había obtenido un puntaje alto en el test de visualización 32/36 lamentablemente esta estudiante no participó en el estudio de grupo pues se retiró del curso hacia la mitad del cuatrimestre.

Alumnos	**Coeficiente Visual**	**Alumnos**	**Coeficiente Visual**
Alumno 1		Alumno 13	**18**
Alumno 2	**20**	Alumno 14	**32**
Alumno 3	**20**	Alumno 15	**22**
Alumno 4	**24**	Alumno 16	**20**
Alumno 5	**18**	Alumno 17	**18**
Alumno 6		Alumno 18	**24**
Alumno 7	**24**	Alumno 19	**28**
Alumno 8	**20**	Alumno 20	**24**
Alumno 9	**22**	Alumno 21	**20**
Alumno 10	**20**	Alumno 22	**22**
Alumno 11	**24**	Alumno 23	**23**
Alumno 12	**20**	Alumno 24	**22**

Tabla 4.3 Resultados de la prueba de Visualización de Presmeg.

4.2 PRUEBA POST TEST

Como ya se mencionó el post test tenía dos partes, una primera muy semejante al pretest, con problemas similares, aunque con menos ítems. Y una segunda parte enfocada directamente en una situación de modelización para ser resuelta con la ayuda de GeoGebra. La prueba se aplicó en las dos últimas sesiones del curso, al final del cuatrimestre.

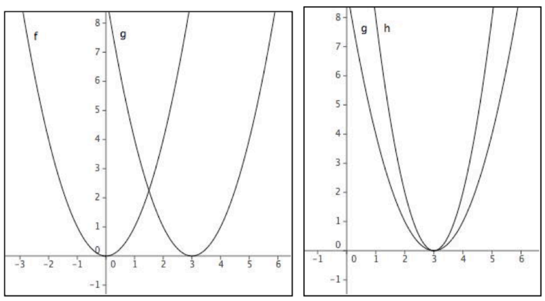
POST TEST

Nombre: ______________________________ Grupo:________Fecha: ____________

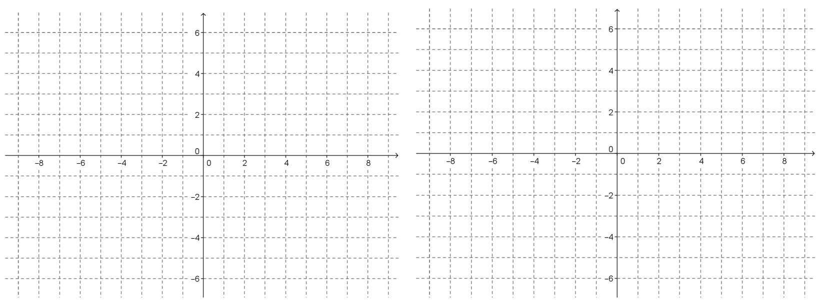
IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva
1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.



3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,



Recuadro 4.19 Cuestionario post test primera parte

4.2.1 CUESTIONARIO POST TEST PRIMERA PARTE

Esta primera parte del post test estaba conformada por cinco preguntas, para ser diligenciadas por escrito. Las preguntas del cuestionario correspondían con las preguntas 2, 3, 4, del pretest. Y se agregó otra pregunta que ampliaba el conocimiento de las familias de funciones. La prueba se realizó a manera de examen en un aula de la Universidad, bajo la supervisión del investigador y con los estudiantes separados de manera razonable. A los estudiantes se les hizo entrega del cuestionario en papel que se muestra en el recuadro 4.19 .

4.2.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

Los resultados de la prueba post test aplicada al grupo de estudio se presentan en la tabla 4.4 a continuación.

Alumnos	**Ítems**				
	1	**2a**	**2b**	**3a**	**3b**
Alumno 1					
Alumno 2	1	1	inter	1	1
Alumno 3	1	1	inter	1	1
Alumno 4	1	1	inter	1	1
Alumno 5	1	1	inter	1	inter
Alumno 6					
Alumno 7	1	1	inter	1	inter
Alumno 8					
Alumno 9	1	1	inter	1	1
Alumno 10	1	1	inter	1	inter
Alumno 11	1	1	inter	1	1
Alumno 12	1	1	inter	1	inter
Alumno 13	1	1	inter	1	inter
Alumno 14					
Alumno 15	0	1	inter	inter	inter
Alumno 16	1	1	inter	1	1
Alumno 17	1	1	inter	1	1
Alumno 18	1	1	inter	1	inter
Alumno 19	1	1	inter	1	1
Alumno 20	1	inter	inter	1	inter
Alumno 21	1	na	na	0	na
Alumno 22	1	inter	inter	1	0
Alumno 23	1	inter	0	1	0
Alumno 24	0	inter	0	1	0

Tabla 4.4 Resultados de la prueba post test primera parte

Siguiendo los mismos criterios utilizados en la prueba pre se han descartado los valores de los alumnos 1, 6, 8 y 14 que no asistieron a alguna de las aplicaciones. Se han evaluado las pruebas asignando un punto (1) a las respuestas correctas y cero (0) a las incorrectas. Se hizo una anotación de intermedio (inter) a aquellas respuestas que a juicio del investigador, estaban incompletas, pero iban enfocadas de manera correcta, a estas respuestas no se les asignó valor, y se anotaron en otra categoría los ítems no abordados (na), a estos tampoco se les asignó valor.

Los resultados obtenidos por los estudiantes en esta prueba son mejores a los de las preguntas correspondientes en el pretest, como era de esperarse después de realizado un proceso de enseñanza. A continuación presentamos el análisis de los resultados.

Pregunta 1
En la relación $y = 10 - 4x$ *¿Qué pasa con y cuando x es cada vez más grande?*
La gran mayoría responde correctamente este ítem (18pnas. 90%) mejorando con respecto al ítem correspondiente en el pretest, donde las respuestas acertadas fueron (14pnas. 70%).

Pregunta 2a y 2b
A partir de la parábola f(x) = x^2 *, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.*
Este par de preguntas enfocadas en la comprensión de los parámetros y su efecto en la gráfica de la función decidimos repetirlas en este cuestionario dados los bajos resultados que presentaron en su primera aplicación.

Pregunta 2a
En esta primera pregunta en que se indaga por como expresar las translaciones con un parámetro en la función, el cambio fue radical en la aplicación inicial solamente una persona respondió correctamente (1pna. 5%) frente a 15 personas en esta segunda aplicación (15pnas. 75%). Los errores que continúan apareciendo son expresiones como $g(x) = 3x^2$, $g(x) = x^2 + 3$ en que se reconoce que el 3 debe ir en la función pero no esta muy claro cual parámetro de la ecuación canónica produce esta trasformación.

Pregunta 2b
En esta pregunta sobre el parámetro utilizado para expresar dilataciones, también se mejora pues en el pretest ningún estudiante lo resolvió correctamente y solo ocho personas lo intentaron (8pnas. 40%), en esta ocasión 19 de los estudiantes intentan resolverlo, aunque se equivocan en diferentes momentos, entre estos es interesante la solución que da el alumno 13.

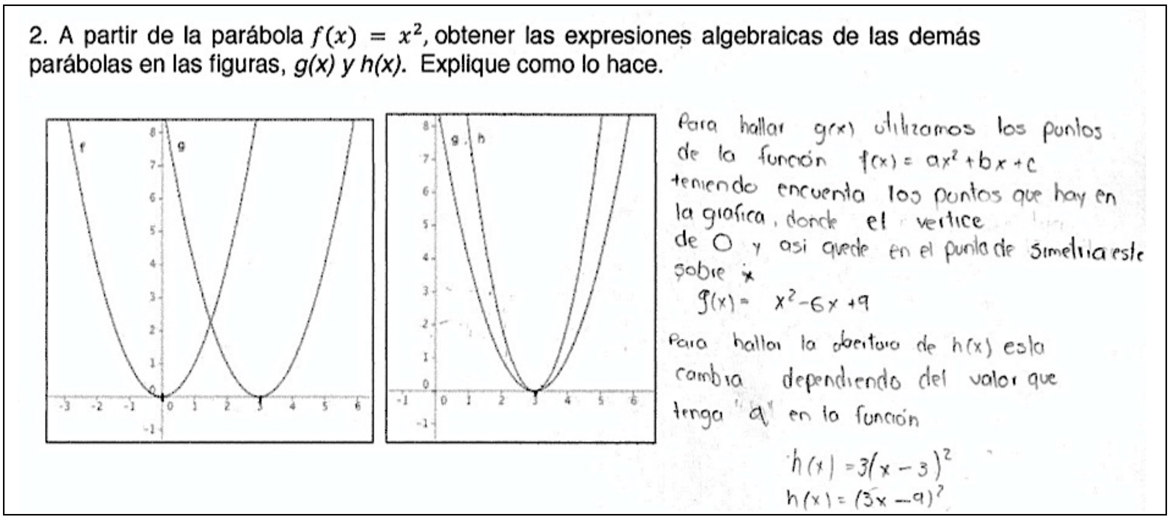
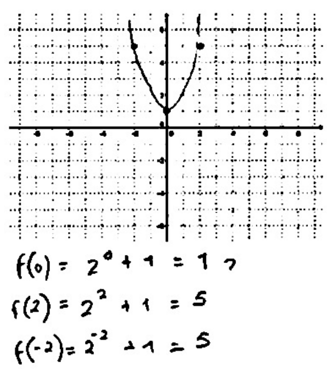


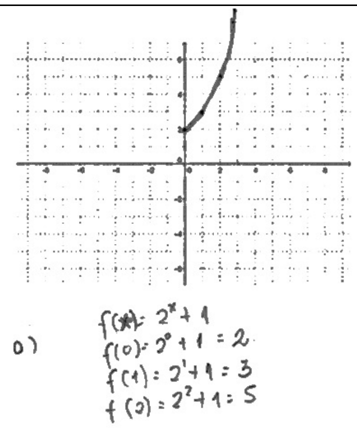
Figura 4.10 Respuesta del alumno 13 a la pregunta 2b

Pregunta 3a y 3b
Grafique las funciones $y = 2x + 1$ *y* $f(x) = 2^x + 1$ *en los diagramas cartesianos*
Estas preguntas se enfocaban en las habilidades de análisis funcional, en particular en reconocer las diferencias entre estas dos familias de funciones.

Pregunta 3a
En el pretest habíamos preguntado por una recta y se pedía construir su gráfica, allí solo ocho personas lo lograron (8pnas. 40%) y tres más lo intentaron con errores, en la nueva aplicación 18 personas el 90% lo hacen correctamente.

Pregunta 3b
En este ítem sobre las funciones exponenciales aparecen más dificultades, ocho personas la responden correctamente (8pnas. 40%) y otras ocho lo abordan pero tienen problemas y cuatro definitivamente se equivocan graficando parábolas, o rectas. Sin embargo es interesante la forma en que se equivocan los alumnos 7 y 23, que aunque tabulan, luego no tienen claridad de cómo debería ser la gráfica.





Figuras 4.11 y 4.12 Respuestas de los alumnos 23 (izq.) y 7 a la pregunta 3b

4.2.3 CUESTIONARIO POST TEST SEGUNDA PARTE

Esta segunda parte consiste en una situación realista para ser modelizada, sobre el costo del sistema de salud de los Estados Unidos de América, a partir de datos del U.S. Department of Health and Human Servicies.

La tarea se ha estructurado en una guía, siguiendo los lineamientos del análisis cualitativo tanto del fenómeno como de las funciones involucradas, como se desarrolló durante el proceso de enseñanza.

La guía se presenta simultáneamente en dos soportes uno físico (en papel) y otro virtual, en el ordenador, para ser realizada con ayuda del paquete GeoGebra, de esta manera existen tareas para ser desarrolladas en el papel y otras en el ordenador que luego se plasman en la guía.

El Instrumento lo elaboró cada estudiante de manera individual, en una de las salas de ordenadores de la Universidad, entregando la guía en papel al final de la sesión y enviando en las horas siguientes el archivo Word con la guía virtual diligenciada.

A los estudiantes se les hizo entrega de la guía en papel como se muestra en los recuadros 4.20 y 4.21, la misma se encontraba en formato digital en el aula virtual de la Universidad, para su envío posterior con las imágenes de la tarea realizadas en el paquete informático GeoGebra.

4.2.4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

El análisis de esta última parte por sus características singulares lo realizaremos de manera más descriptiva y cualitativa que en las secciones anteriores.

Ítem 1
Para el primer ítem *Revise la tabla*, los estudiantes no tenían que presentar ningún resultado.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: ____ Grupo: ________ Fecha: __________

IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda****.*

SALUD
Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

Recuadro 4.20 Cuestionario post test segunda parte

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.

3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
   (PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

Recuadro 4.21 Cuestionario Post Test segunda parte

Ítem 2
Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo
Para el segundo ítem la totalidad de los estudiantes realiza gráficas crecientes, sin embargo ellas varían en sus características, la gran mayoría (17pnas. 85%) trazan curvas, solo tres personas grafican rectas (3pnas. 15%). Entre quienes grafican las curvas existen tres grupos, el primero quienes representan curvas cóncavas hacia arriba a modo de funciones exponenciales, estos son la mayoría (12pnas. 60%) el segundo quienes presentan curvas cóncavas hacia abajo semejantes a la función raíz cuadrada (2pnas. 10%) y el tercero quienes muestran curvas con varios cambios de concavidad (3pnas. 15%).

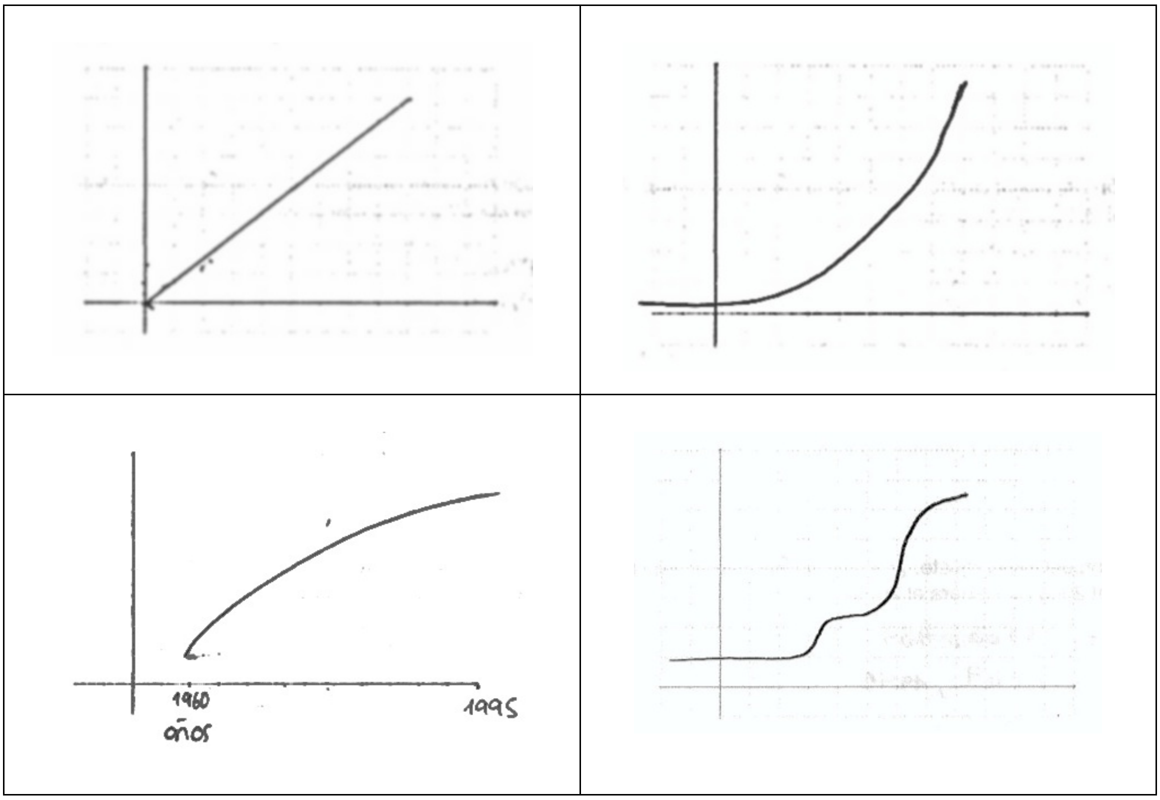


Figura 4.13 Gráficas de los tipos de bosquejo de la función de costo.

Es relevante, como todos los estudiantes leen en la tabla que el fenómeno se comporta de manera creciente. De otra parte, la interpretación y el detalle o cuidado con que estudian las variaciones en los intervalos para los valores de la tabla pareciera que son las que generan las diferencias en los tipos de curva. (fig. 4.13).

Ítem 3
¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
Para esta pregunta las respuestas también son variadas, la mayoría ve la función parecida a la función exponencial (16pnas. 80%); tres personas, como en las gráficas, la ven como una función lineal (3pnas. 15%) y una persona ve la curva como una función cuadrática.

Es particular como todos excepto una persona de las que dibujaron curvas (16pnas. 80%); ven la gráfica como una función exponencial, aún con los cambios de concavidad, y no se inclinan por otro tipo de función, como podría ser una función polinómica por ejemplo; así mismo es llamativo que solo una persona vea la curva como una función cuadrática, pues para la región de la curva que representan los datos, podría serlo.

Esta pregunta hacía referencia al análisis cualitativo de la función que buscamos modelizar, y aunque no aparecen errores, si se nota cierta pobreza en los tipos de función.

Ítem 4

Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

En este ítem se pide la utilización del GG, los estudiantes muestran dominio de las herramientas del paquete informático, pues debían construir la tabla en la HdC, convertir la tabla en una lista de puntos, luego graficar esta nube de puntos en la Vista Gráfica y finalmente realizar una captura de pantalla con la tabla y la gráfica para pegarla en la guía virtual (fig. 4.14).

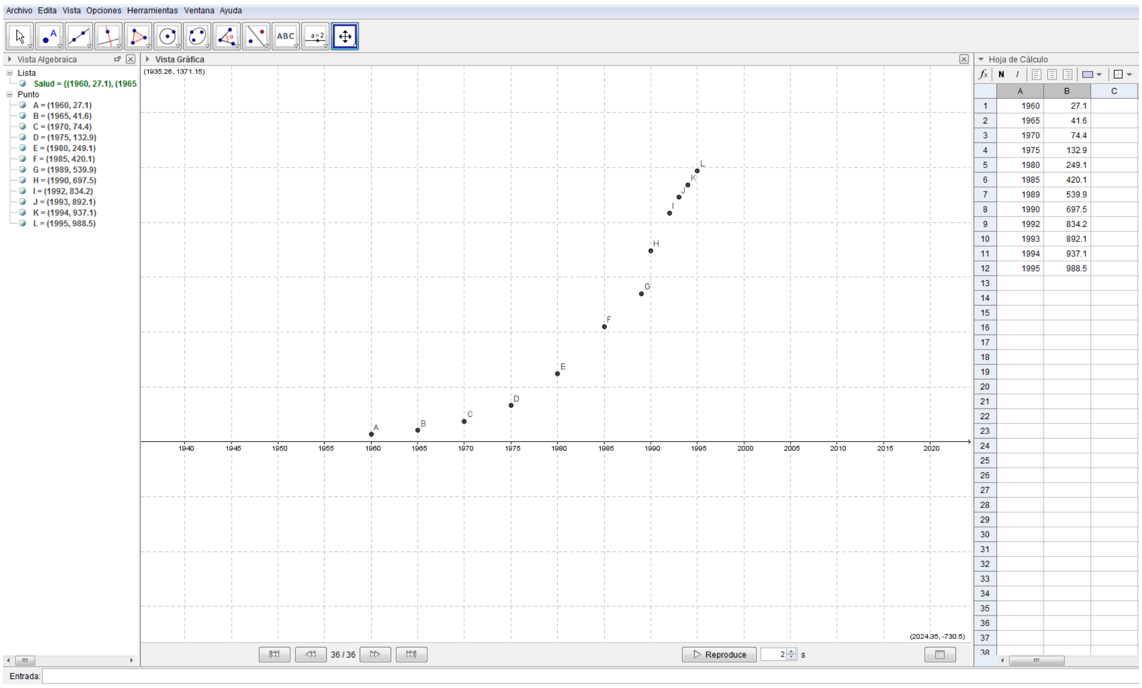


Figura 4.14 Gráfica de la nube de puntos, con la tabla de datos en la HdC de GG (alumno 20)

Ítem 5

¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Esta pregunta, como el ítem tres, hace referencia al análisis cualitativo de la función que buscamos modelizar, pero desde la nube de puntos que se observa en la Vista Gráfica, las respuestas aquí son mas variadas,

- Función Exponencial (6pnas. 30%)
- Función Polinómica (4pnas. 20%)
- Función Exponencial o F. Polinómica (2pnas. 10%)
- Función Cúbica (2pnas. 10%)
- Función Cúbica o F. Polinómica (2pnas. 10%)
- Función Cuadrática (3pnas. 15%)
- Función Raíz Cúbica (1pna. 5%)

Desde la perspectiva del análisis cualitativo de las funciones estas respuestas muestran un mayor bagaje de opciones en el grupo y en los individuos, pues hay cuatro personas que encuentran parecida la nube de puntos a dos funciones diferentes.

En búsqueda de la claridad, combinamos en el siguiente apartado los ítems seis y ocho, que se refieren a la función del mejor ajuste, en primera instancia se pedía la ecuación y luego la gráfica.

Ítems 6 y 8
Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación.
Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

En este punto hay básicamente tres respuestas diferentes, y dos métodos de solución dependiendo del método de ajuste empleado por el estudiante, de esta forma algunos alumnos optan por lo que hemos llamado el método de "ajuste manual", el cual consiste en encontrar la función de mejor ajuste desplazando una función original o patrón, la cual se va trasladando o transformando según se van haciendo variar los diferentes parámetros la función canónica, hasta lograr ajustarla a la nube de puntos. Algunos estudiantes han utilizado como función patrón una función cúbica y algunos otros una función cuadrática.

El segundo método consistió en utilizar las herramientas estadísticas del paquete informático GeoGebra y buscar con ellas la regresión que brindara el mejor ajuste.

En cuanto a los tipos de respuestas la primera, es un función cúbica que encuentran los estudiantes utilizando el método de "ajuste manual" que hemos mencionado. Este tipo de respuesta la presentan 3 estudiantes (15%) y se puede observar en los siguientes recuadros y figuras, con las variaciones que cada alumno realiza.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$f(x) = 0.03\,(x - 1962.73)^3 + 31.51$

Empezando a combinar las formulas de las funciones hasta que se vaya acercando

Recuadro 4.22 Respuesta de el alumno 10 al ítem 6.

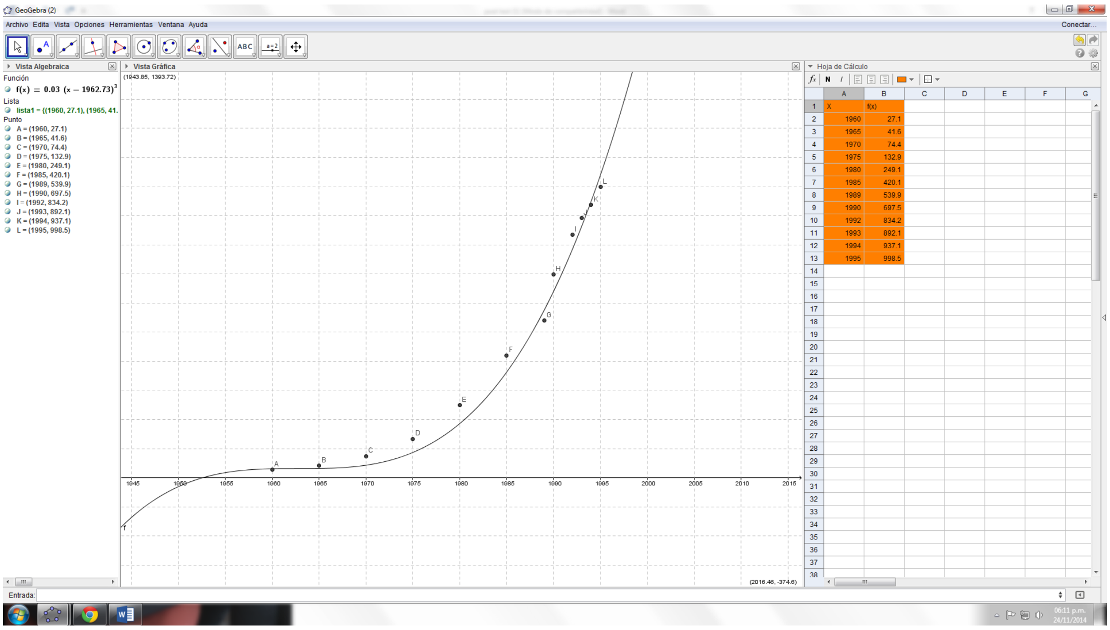


Figura 4.15 Gráfica de la nube de puntos y de la función del mejor Ajuste (alumno 10).

Utilizando el mismo método y también la función cúbica trabajan el alumno 9 (Recuadro 4.23) y el alumno 12 (Recuadro 4.24 y fig. 4.16), sus aproximaciones, aunque tienen valores cercanos son diferentes.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$F(x) = 0{,}03\,(x - 1962{,}24)^3 + 48{,}08$

Probando con una serie de Funciones que habíamos visto y editando la grafica.

Recuadro 4.23 Respuesta del alumno 9 al ítem 6.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

la funcion que se le acerca es

$f(x) = 0.03\,(x - 1962.07)^3$.

Probando cada uno de los puntos, aumentando y disminuyendo hasta encontrar una que tocara algunos ~~en~~ puntos.

Recuadro 4.24 Respuesta del alumno 12 al ítem 6.

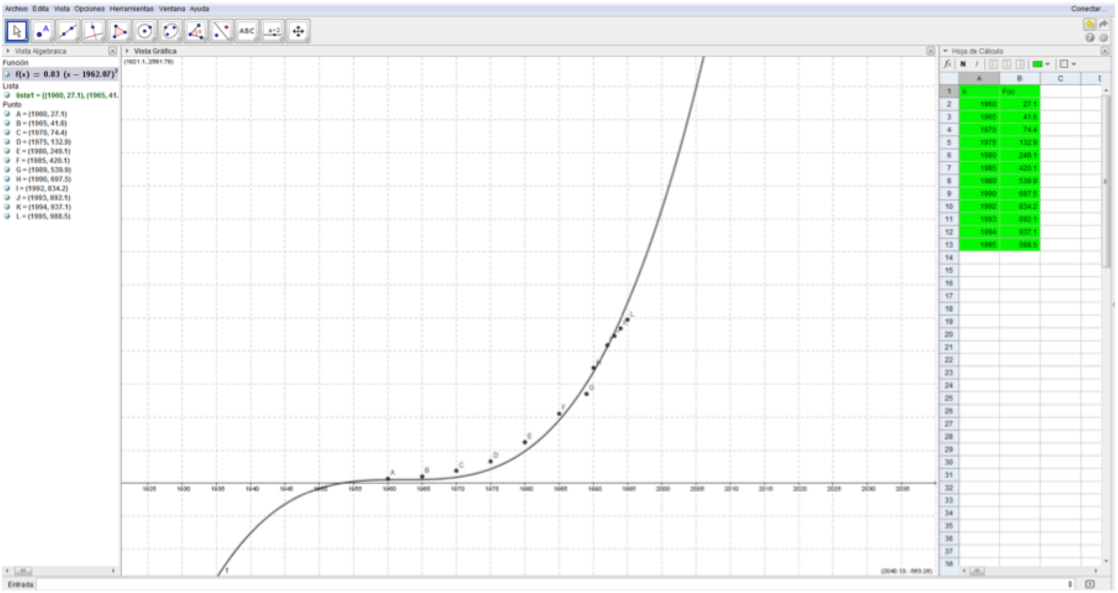


Figura 4.16 Gráfica de la nube de puntos y de la función del mejor Ajuste (alumno 12).

El segundo tipo de respuesta, a la curva del mejor ajuste, la obtiene la alumna 18, de una manera semejante a las anteriores pero para ello utiliza la función cuadrática. Ella no explica su método, pero se reconoce por la estructura de la ecuación canónica, que ha utilizado el método de ajuste manual.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$f(x) = (x - 1963.58)^2 + 12{,}53$.

Recuadro 4.25 Respuesta de la alumna 18 al ítem 6.

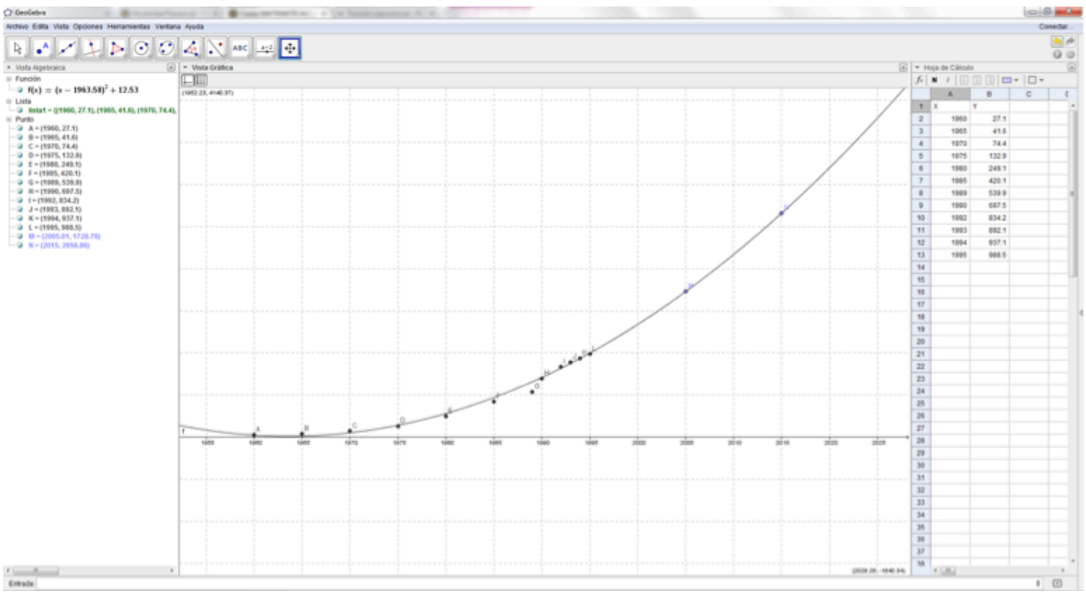


Figura 4.17 Gráfica de la nube de puntos y de la función del mejor Ajuste (alumna 18)

La tercera opción, por la cual optó la mayoría (16pnas. 80%), consistió en utilizar las herramientas estadísticas del paquete informático GeoGebra y buscar la regresión que brindara el mejor ajuste, de esta manera la función que modeliza el fenómeno es $y = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374869.94$.

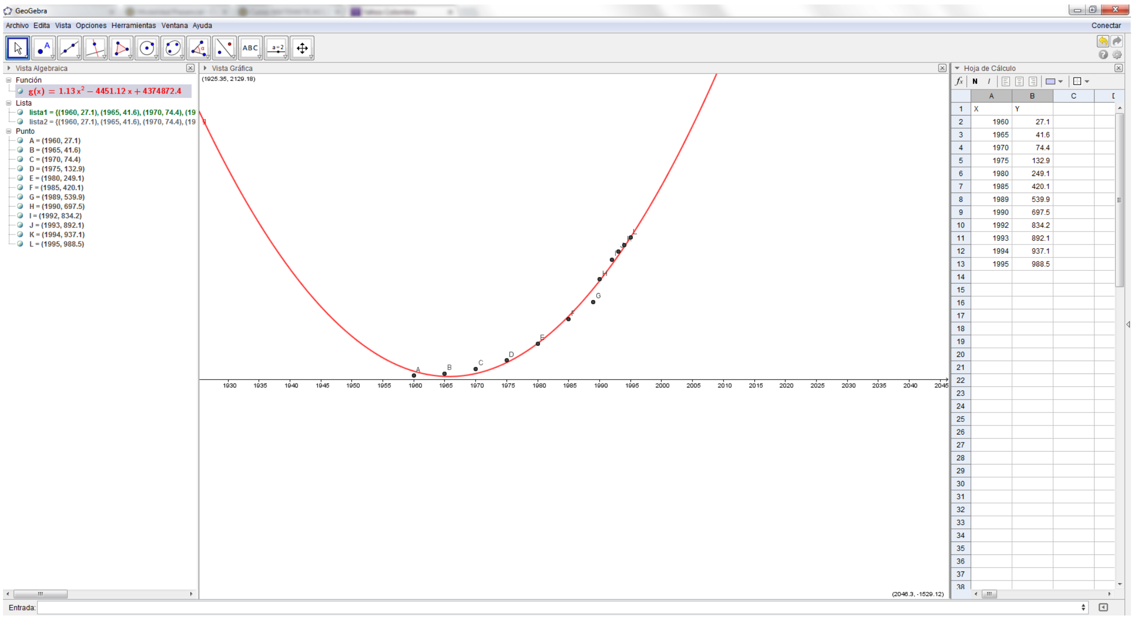
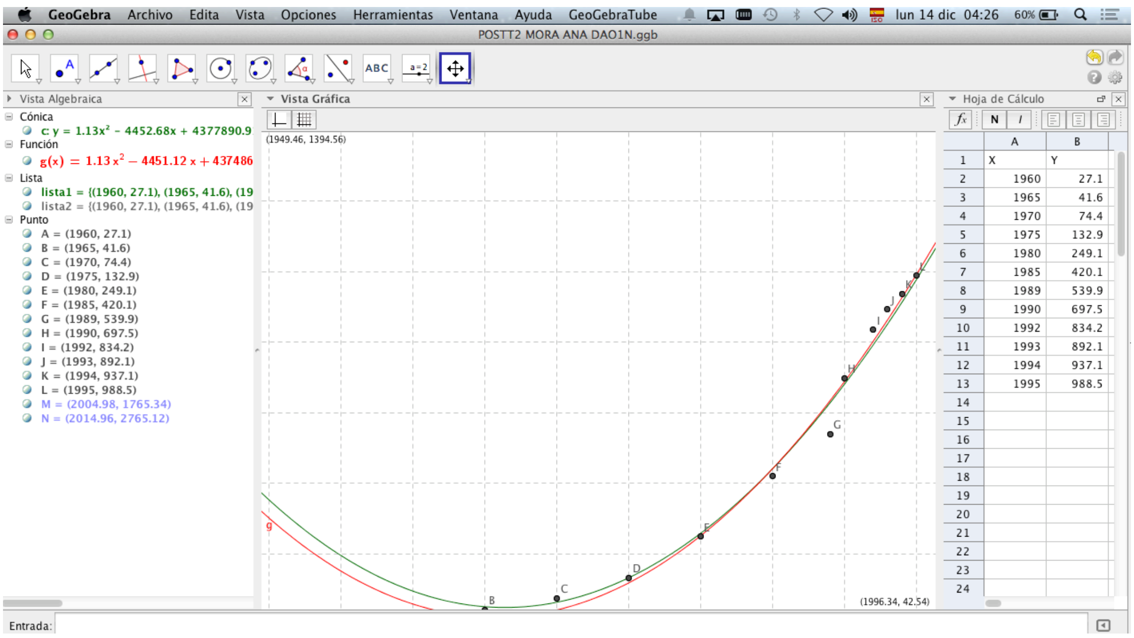


Figura 4.18 Gráfica de la nube de puntos y de la función de regresión (alumna 3)

Una situación interesante es la que realizan las alumnas 13 y 16, quienes dibujan en la misma vista gráfica dos funciones cuadráticas buscando la que tenga el mejor ajuste, De una parte plasman una función cuadrática que han ajustado manualmente y de otra parte la función de regresión propuesta por el paquete informático. Cada una de las estudiantes utiliza funciones cuadráticas diferentes.



	A	B
1	X	Y
2	1960	27.1
3	1965	41.6
4	1970	74.4
5	1975	132.9
6	1980	249.1
7	1985	420.1
8	1989	539.9
9	1990	697.5
10	1992	834.2
11	1993	892.1
12	1994	937.1
13	1995	988.5

Figura 4.19 Gráfica de la nube de puntos y de la función de regresión y además otra función Alumna 13.

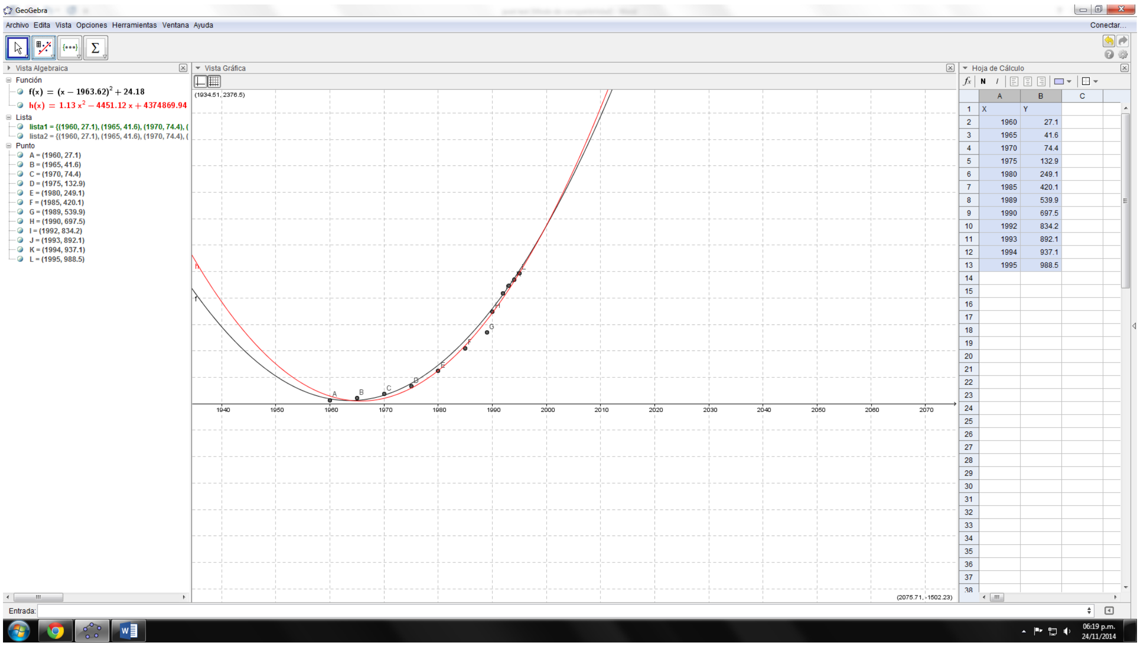


Figura 4.20 Gráfica de la nube de puntos y de la función de regresión y además otra función Alumna 16.

El alumno 12, uno de los estudiantes que habíamos mencionado por hacer el ajuste con una función cúbica, también realizó la comparación con la función de regresión cuadrática que propone el programa, pero parece no darle importancia a la tendencia de los últimos valores de la nube de puntos y por eso prefiere la función cúbica.

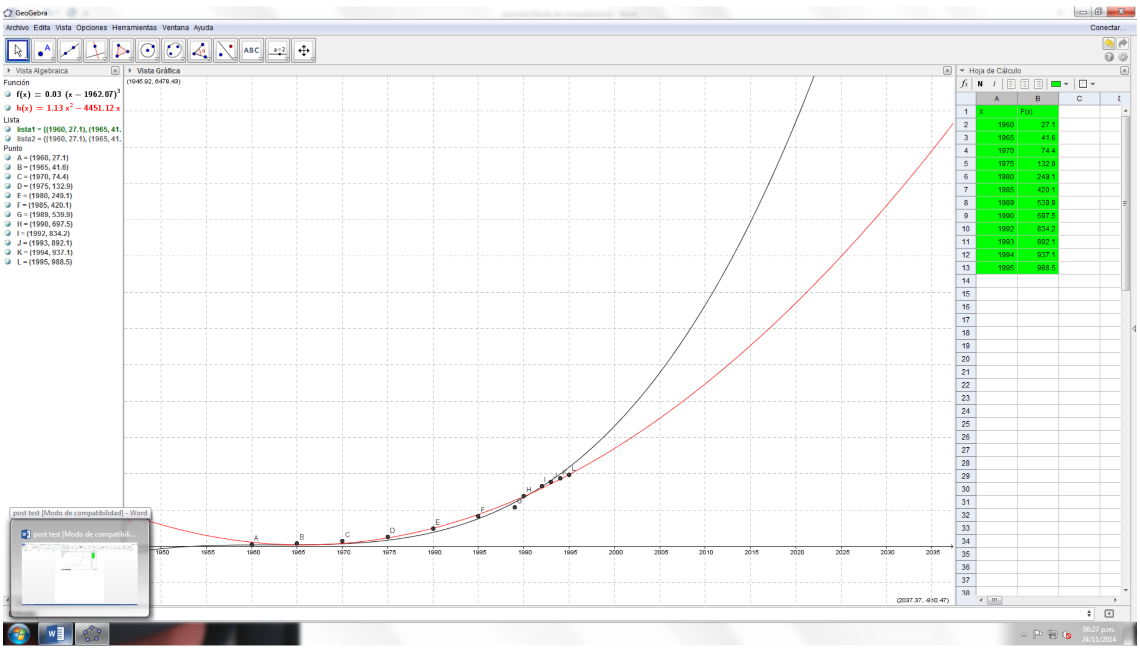


Figura 4.21 Gráfica de la nube de puntos, de la función de regresión y además otra función cúbica en negro. (Alumno 12)

Ítem 7
Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y para el 2015?

Este punto pretendía ejercer una función de control sobre el proceso de ajuste ya que marcaría si la tendencia que sigue la función de ajuste es la misma que mantenía la nube de puntos, de otra parte, como cálculo es una sustitución aritmética, o un pequeño esquema en el manejo de GG.

Como cálculo todos los estudiantes pudieron extrapolar los valores, la gran mayoría utilizando las herramientas de GG. Como instrumento de control, se nota que es significativo y útil en algunos de los otros casos, por ejemplo en la gráfica de la función cuadrática hallada por la alumna 18 –presentada anteriormente en la fig. 4.17– los dos puntos a la derecha, son precisamente los valores que se pedía extrapolar, y como se puede ver quedan justo sobre la curva. No ocurre lo mismo con las funciones cúbicas (figs. 4.15, 4.16 y 4.21) donde los puntos nuevos no mantienen la tendencia de la nube de puntos y parece que los estudiantes no los asumieron.

4.3 ALGUNAS OBSERVACIONES PUNTUALES SOBRE ACTUACIONES DE LOS ALUMNOS

A lo largo del desarrollo de las actividades de enseñanza, hemos notado algunas situaciones en el trabajo de los estudiantes que nos parece relevante incluir dentro de nuestro análisis del grupo, sobre esos aspectos versa este apartado.

La primera situación que queremos presentar la realizan las alumnas 7 y 19 en la Actividad 3 Préstamos, Ingresos y Costos. En ella, las estudiantes efectuaron gran parte de las tareas propuestas en la actividad con el método de ajuste manual utilizando las ecuaciones canónicas y la manipulación de los parámetros, nos parece importante mencionar esta situación pues solamente esta pareja, abordo la actividad con este método. A continuación presentamos fragmentos de la guía de trabajo de la actividad 3, en particular de la Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes (ver apartado 3.9.7.1) y algunas capturas de pantalla del trabajo en el paquete informático, en dicha tarea.

La tarea se apoya en la situación realista de un préstamo a partir de la cual se les solicita a las alumnas que encuentren las funciones que den el mejor ajuste a tres nubes de puntos, la de los intereses, la de la amortización y la del total a pagar cada año. Los datos se han suministrado en una tabla.

Las alumnas realizan un primer análisis cualitativo del fenómeno que plasman en los bosquejos de las funciones que representan los intereses, la amortización y el total a pagar anualmente (recuadro 4.26 ítem 1) en donde han utilizado funciones lineales, con diferentes pendientes según la situación, luego pasan a explicar por que eligieron este tipo de funciones (recuadro 4.27 ítem 2) para pasar luego a construir las gráficas de las nubes de puntos de las tres situaciones en GG de acuerdo a la tabla de datos y anotar si estas funciones se les parecen a alguna que conozcan, así las estudiantes notan que los intereses se comportan como "una función cuadrática de la forma $f(x) = -ax^2 + b$ con la variable $-ax^2$ negativo (sic)", la amortización como una función exponencial y el total de la deuda a pagar se comporta como una función constante $f(x) = c$ (recuadro 4.27 ítem 5).

Luego en el ítem 6 de esta tarea se les solicita que encuentren la función que brinde el mejor ajuste para cada una de las tres situaciones y que expliquen su proceso. Aquí es donde las estudiantes expresan que han realizado un ajuste manual para poder encontrar estas funciones del mejor ajuste a las nubes de puntos. Así por ejemplo para responder a cuál es la función del mejor ajuste para la amortización, las alumnas explican como a partir de la función " $f(x) = 15e^{(0.14x)} + 20$ despues (sic) de muchos intentos tratando de hallar una función exponencial que se ajustara a los puntos, encontramos esta, y ajustándola a los puntos nos dio : $f(x) = 15e^{0.14(x-1.07)} - 0.24$ " (recuadro 4.28 ítem 6).

En la figura 4.21 Se muestra como las estudiantes han ajustado las nubes de puntos de las situaciones de los intereses y de la amortización. A continuación presentamos los recuadros que documentan el trabajo de las estudiantes, sea esta la ocasión de pedir disculpas por la calidad de las imágenes en los recuadros 4.26 – 4.28, pero lamentablemente no hemos podido mejorar más la pobre calidad de los originales.

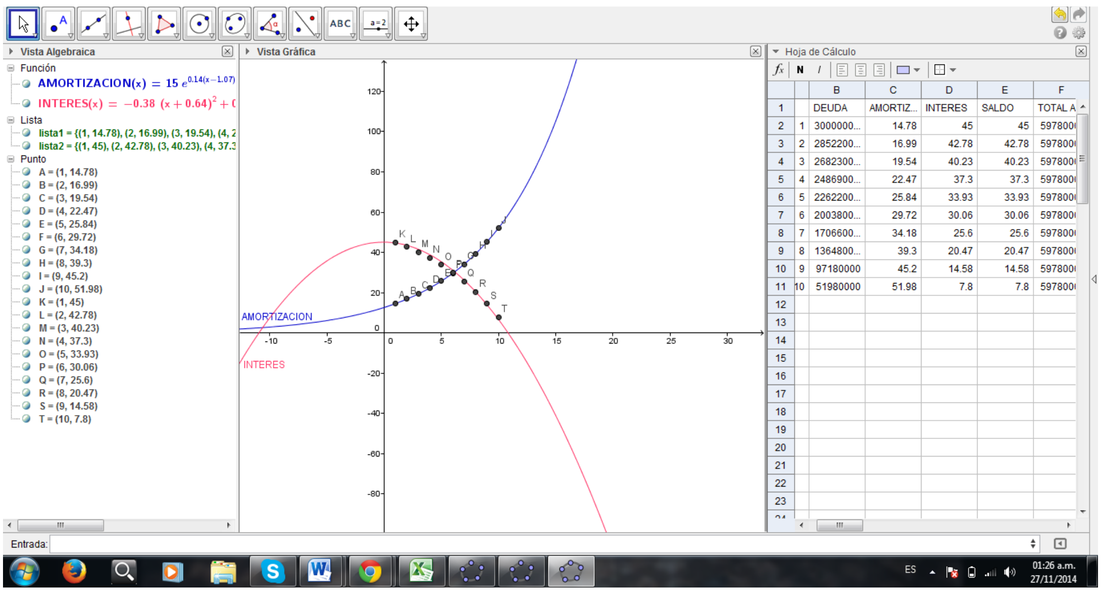
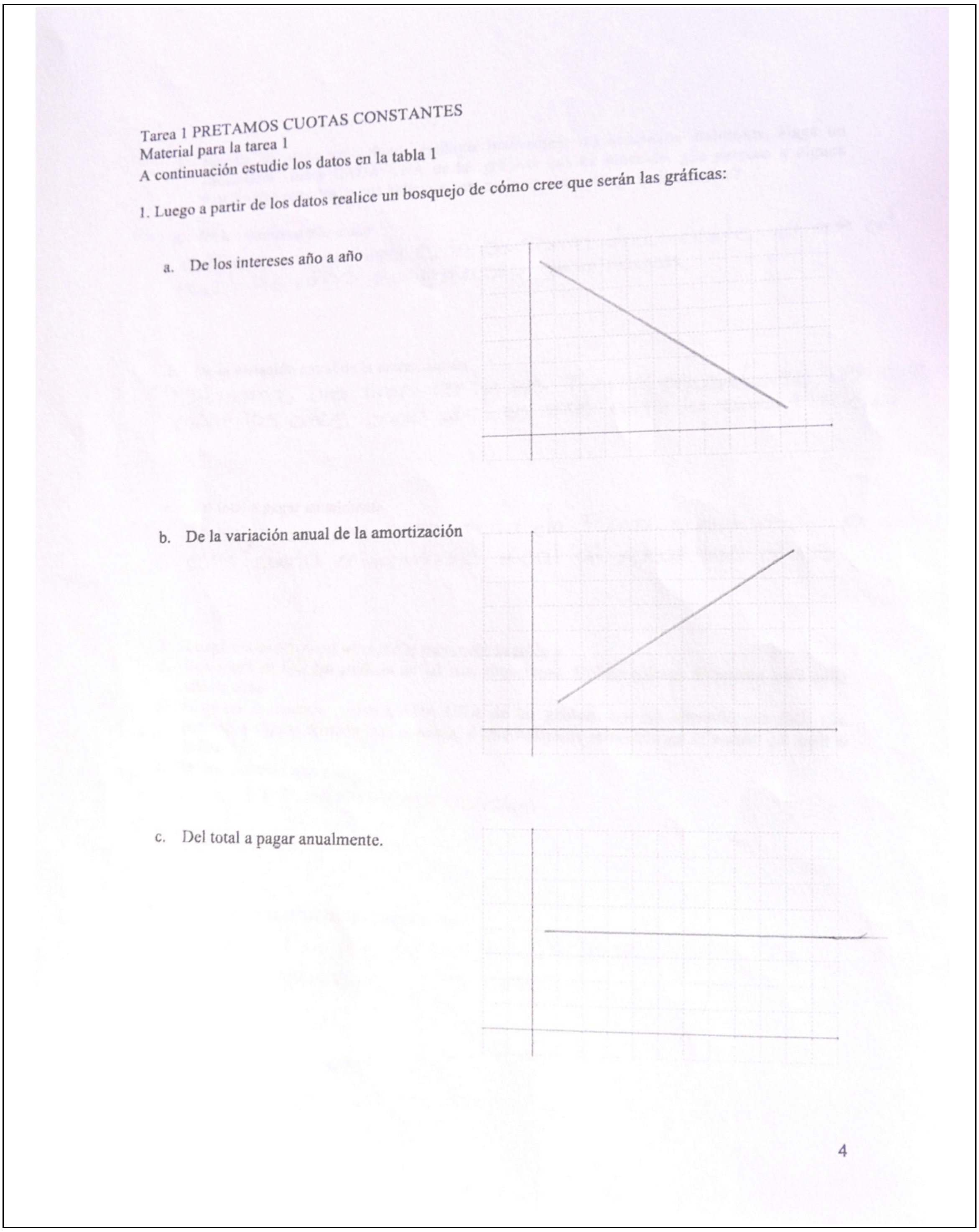


Figura 4.21 Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 (alumnas 7 y 19).


Tarea 1 PRETAMOS CUOTAS CONSTANTES
Material para la tarea 1
A continuación estudie los datos en la tabla 1

1. Luego a partir de los datos realice un bosquejo de cómo cree que serán las gráficas:

a. De los intereses año a año

b. De la variación anual de la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

4

Recuadro 4.26 Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 p.4 (alumnas 7 y 19)

2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados, Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

Dibujamos una linea recta de Forma descendente, ya que al pasar los años los intereses disminuyen.

b. De la variación anual de la amortización

Dibujamos una linea recta de Forma ascendente, ya que a pasar los años cada vez es más alta la amortización

c. Del total a pagar anualmente.

Dibujamos una linea recta de Forma constante, ya que esta cuota se mantiene igual al pasar los años.

3. Luego utilizando GeoGebra (GG) transcriba la tabla y
4. Construya en GG las gráficas de las tres situaciones. Utilice colores diferentes para cada una de ellas.
5. Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido con GG. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

Sí, a la Función exponencial

b. De la variación anual de la amortización

Sí, a la Función cuadrática, de la Forma $f(x)=-ax^2+b$. con la variable $-ax^2$ negativo.

c. Del total a pagar anualmente.

Sí, a la Función constante, es decir $f(x)=c$.

5

Recuadro 4.27 Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 p.5 (alumnas 7 y 19)

6. Para CADA UNA de las gráficas que ha realizado, Encuentre una función que de el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.

a. De los intereses año a año

$f(x) = -0.38x^2 + 0.45x + 45$, Después de varios intentos, poniendo como negativo a, encontramos esta función que luego de acomodarla a los puntos nos quedo:

$f(x) = -0.38(x+0.78)^2 + 0.45(x+0.78) + 45.31$

b. De la variación anual de la amortización

$f(x) = 15e^{(0.14x)} + 20$

despues de muchos intentos tratando de hallar una función exponencial que se ajustara a los puntos, encontramos esta, y ajustandola a los puntos nos dio: $f(x) = 15e^{0.14(x-1.07)} - 0.24$

c. Del total a pagar anualmente.

$y = 59780000$, ya que siempre se mantiene igual, por lo tanto, lo tomamos como una función constante.

7. Ahora para cada una de las situaciones utilice las herramientas estadísticas del GG para tratar de hallar una función que de el mejor ajuste a la situación. Compare diferentes modelos; revisando los estadígrafos que obtiene, pero siempre tenga en cuenta el Análisis Cualitativo de la situación. Anote sus observaciones para CADA UNA de las situaciones y

a. De los intereses año a año

$\text{Intereses}(x) = -0.28(x+3.61)^2 + 0.98(x+3.61) + 46.4$

modelo de regresión = Polinomio

Se parece mucho a la funcion que en el anterior punto habiamos encontrado, pues ambas son cuadraticas y llevan el negativo, lo que hace que la parabola abra hacia abajo

6

Recuadro 4.28 Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 p.6 (alumnas 7 y 19)

Otra situación que nos parece relevante presentar es la de las alumnas 6 y 15 cuando se enfrentaban a esta misma tarea. Estas alumnas realizan un primer análisis cualitativo del fenómeno que plasman en los bosquejos de las nubes de puntos que representan los intereses, la amortización y el total a pagar anualmente (recuadro 4.29 ítem 1) en donde han utilizado funciones lineales discretas, con diferentes pendientes según la situación, luego explican simplemente que las gráficas son líneas rectas (recuadro 4.30 ítem 2) para pasar luego a construir las gráficas de las nubes de puntos de las tres situaciones en GG de acuerdo a la tabla de datos. En las gráficas de las dos primeras situaciones se nota la curvatura en las nubes de puntos (figs. 4.22 - 4.23).

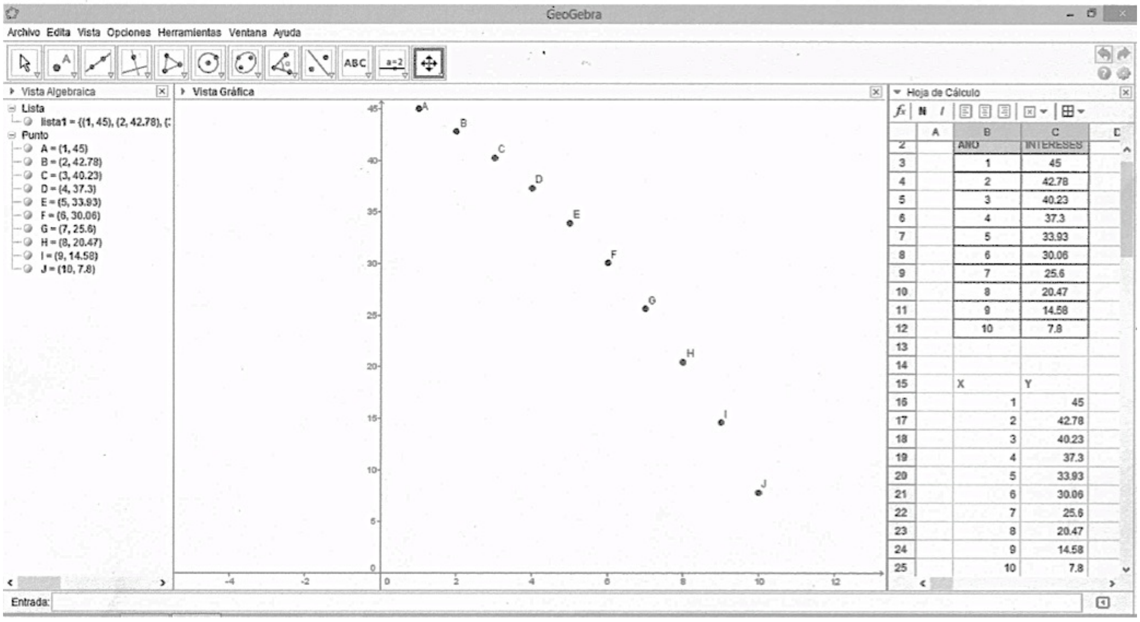


Figura 4.22 Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 (alumnas 6 y 15)

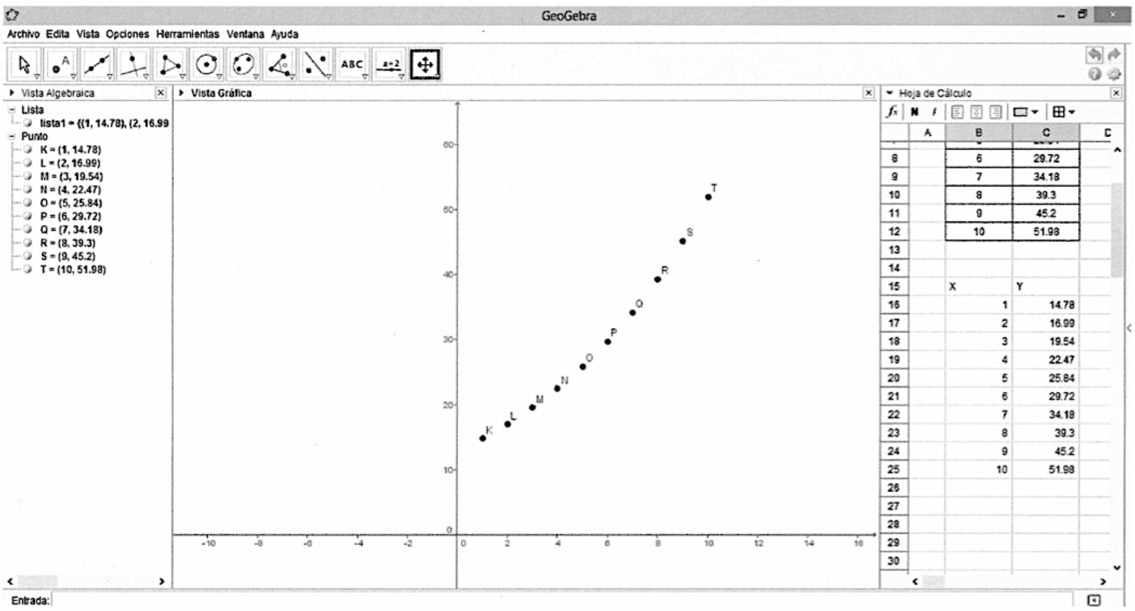


Figura 4.23 Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 (alumnas 6 y 15)

Sin embargo luego en el ítem 6 de la tarea se les solicita que encuentren la función que brinde el mejor ajuste para cada una de las tres situaciones y que expliquen su proceso. Ante lo cual las estudiantes retoman las funciones lineales del análisis cualitativo y proponen funciones de ajuste lineales, realizando los cálculos de la pendiente de cada una de las rectas utilizando los dos primeros puntos de cada una de las situaciones (recuadro 4.31 ítem 6).

Este comportamiento nos llamo mucho la atención pues en la literatura al referirse a la “Tendencia a la linealidad” de algunos estudiantes (ver apartado 2.3.3.1), Zaslavsky (1987) menciona un caso con rasgos muy parecidos.

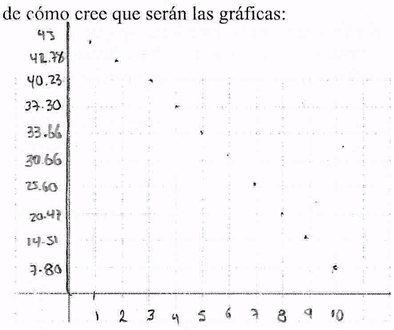
Zaslavsky (1987) pidió a los estudiantes que encontraran una ecuación para la gráfica de una parábola que contenía tres puntos marcados. Algunos estudiantes utilizaron sólo dos puntos para encontrar la ecuación. Pero además, los usaron de una manera que sugiere una mentalidad lineal, porque los utilizaron para calcular cuál sería la pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos. Luego insertaron este "valor de la pendiente" en la forma canónica de la ecuación de una parábola como el coeficiente principal.

En el caso que presentamos de las alumnas 6 y 15 no se llega hasta la ecuación de la parábola, pero por lo demás nos parece que la situación coincide. A continuación presentamos los recuadros 4.29 - 4.31 que muestran el trabajo de las estudiantes.

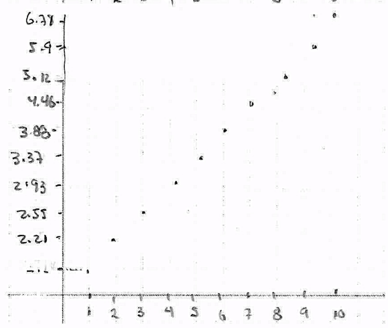
Tarea 1 PRETAMOS CUOTAS CONSTANTES
Material para la tarea 1
A continuación estudie los datos en la tabla 1

1. Luego a partir de los datos realice un bosquejo de cómo cree que serán las gráficas:

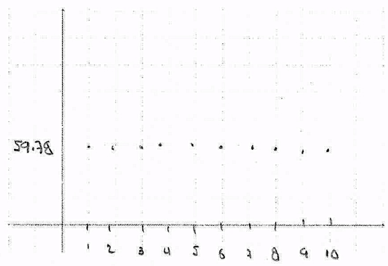
a. De los intereses año a año



b. De la variación anual de la amortización



c. Del total a pagar anualmente.



4

Recuadro 4.29 Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 p.4 (alumnas 6 y 15).

2. Escriba un corto texto donde explique brevemente los bosquejos realizados, Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

Observamos que es una gráfica recta.

b. De la variación anual de la amortización

Observamos en la gráfica que la línea es una paralela. paralela.

c. Del total a pagar anualmente.

Observamos en la gráfica que la línea, es una línea recta.

3. Luego utilizando GeoGebra (GG) transcriba la tabla y
4. Construya en GG las gráficas de las tres situaciones. Utilice colores diferentes para cada una de ellas.
5. Haga un comentario sobre CADA UNA de las gráficas que ha obtenido con GG. ¿Se parecen a alguna función que conozca, o que hallamos estudiado en el curso? ¿A cuál o cuáles?

a. De los intereses año a año

El módelo de regresión es similar a un polinomio.

b. De la variación anual de la amortización

El módelo de regresión es un polinomio.

c. Del total a pagar anualmente.

El modelo de regresión es una línea recta.

5

Recuadro 4.30 Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 p.5 (alumnas 6 y 15).

6. Para CADA UNA de las gráficas que ha realizado, Encuentre una función que de el MEJOR AJUSTE a los puntos de la situación, (a la nube de puntos). Explique como encuentra la función que propone.

a. De los intereses año a año

	x	y	
x_1	1	45	y_1
x_2	2	42.78	y_2

$m = \frac{42.78-45}{2-1} = -2.22 = m$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 45 = -2.22\,(x-1)$

$y - 45 = -2.22x + 2.22$

$y = -2.22x + 2.22 + 45$

$y = -2.22x + 47.22$

b. De la variación anual de la amortización

x	y
1	14.78
2	16.99

$m = \frac{16.99-14.78}{2-1}$

$m = \frac{2.21}{1}$

$m = 2.21$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 14.78 = 2.21\,(x-1)$

$y - 14.78 = 2.21x - 2.21$

$y = 2.21x - 2.21 + 14.78$

$y = 2.21x + 12.57$

c. Del total a pagar anualmente.

x	y
1	59.78
2	59.78

$m = \frac{59.78-59.78}{2-1}$

$m = \frac{0}{1}$

$m = 0$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 59.78 = 0\,(x-1)$

$y - 59.78 = 0$

$y = 59.78$

7. Ahora para cada una de las situaciones utilice las herramientas estadísticas del GG para tratar de hallar una función que de el mejor ajuste a la situación. Compare diferentes modelos; revisando los estadígrafos que obtiene, pero siempre tenga en cuenta el Análisis Cualitativo de la situación. Anote sus observaciones para CADA UNA de las situaciones y

a. De los intereses año a año

$g(x) = -0.28x^2 - 0.98x + 45.95$

6

Recuadro 4.31 Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 p.6 (alumnas 6 y 15).

4.4 CONSIDERACIONES GENERALES

A manera de resumen y conclusión del análisis de grupo, podemos ver algunas tendencias y situaciones relevantes.

En la primera parte del post test, se muestran mejores resultados que en el prestest en las preguntas correspondientes, como podría esperarse después de un proceso de enseñanza. En particular en el manejo dinámico de la variación y en reconocer y usar los parámetros relacionados con los desplazamientos.

Sin embargo en algunos estudiantes aún persisten dificultades en el manejo de los parámetros de la ecuación canónica y sus efectos en las gráficas de las funciones, así como en el reconocer las características de algunas familias de funciones.

En la segunda parte del post test, la realizada en GG es claro que todos los estudiantes pudieron resolver la situación que se les planteó, de manera que efectúan el análisis cualitativo del fenómeno y de la función y logran llegar a una modelizar una función que represente el comportamiento del fenómeno.

Sin embargo en la forma en que resuelven la tarea se notan dos tendencias claras que definen sendos grupos y podríamos considerar un tercer grupo que parece combinarlas, o estar en un momento intermedio.

La primera tendencia es la de aquellos estudiantes que realizan el análisis cualitativo del fenómeno y de la función en sus líneas generales y que prefieren utilizar directamente las herramientas estadísticas de GG para hallar la función de regresión.

Algunos de estos estudiantes presentan dudas en los tipos de funciones o en el papel que juegan los parámetros en la gráfica de la función o en el manejo de determinadas herramientas como los deslizadores. De esta manera el proceso de modelizar la función del mejor ajuste de manera "manual" utilizando la función canónica y ajustes en los parámetros no es la opción que utilizan.

La segunda tendencia clara, es la de aquellos estudiantes que realizan el análisis cualitativo del fenómeno y de la función con un amplio surtido de opciones que les permiten abordar de manera exitosa el proceso de modelizar la función del mejor ajuste de manera "manual" utilizando la función canónica y los ajustes en los parámetros.

Como mencionábamos, existe un grupo de estudiantes que parece combinar estas dos tendencias, o estar en un momento intermedio. Así algunos estudiantes solucionan el problema por ambos métodos, mostrando un buen desempeño en ambas situaciones. Algunos otros muestran haberlo intentado por ambos métodos y presentan avances en el ajuste "manual" pero parecen preferir utilizar las herramientas estadísticas de GG.

La mayoría de los estudiantes están en la primera de las tendencias mencionadas (14pnas 70%), en la segunda identificamos tres Estudiantes (15%) y en la tercera tendencia otros tres estudiantes (15%).

Durante la sesión de la segunda parte del post test con ayuda del GG sucedió algo que no había ocurrido en las prácticas anteriores con el paquete durante el proceso de enseñanza, esto fue el uso por parte de los estudiantes de la herramienta *Arrastre* del GG. Una de las herramientas más poderosas que posee GG como la gran mayoría de programas de Geometría Dinámica (SGG) es la herramienta *Arrastre*, esta se utiliza con frecuencia en situaciones geométricas y sabíamos que se podía utilizar en GG para realizar transformaciones de funciones (esta herramienta se activa al señalar con el cursor la gráfica de una $f(x)$ en la vista grafica y manteniendo oprimido el botón izquierdo del "ratón" es posible desplazar la $f(x)$ a otra ubicación, en el proceso se van ajustando los parámetros de la ecuación de la $f(x)$ a la nueva ubicación), sin embargo estábamos reacios a utilizar esta herramienta, por razones didácticas y por ello no se les presentó a los estudiantes cuando estudiamos las trasformaciones, solamente utilizamos los parámetros y los deslizadores.

Sin embargo en la sesión del post test con GG, los estudiantes la descubrieron por sí mismos, lo cual fue muy interesante, pues dado que varios de ellos estaban intentando hallar la función del mejor ajuste con los parámetros, empezaron utilizando los parámetros pero luego de tener la estructura de la ecuación canónica que les ayudaba, empezaron a utilizar el arrastre para ajustar la función, lo que hizo este proceso mucho más fácil.

Incluso fueron un paso más allá, como los monitores de los ordenadores con los que trabajábamos en la sala estaban provistos de pantallas sensibles al tacto (se comportan como tabletas, pero son monitores de 23 pulgadas), algunos de los estudiantes se dieron cuenta que podían realizar el arrastre de las funciones con tan solo tocar el monitor con su dedo y desplazar la función a la ubicación en la pantalla que quisieran.

5. Estudio de Casos

En este capítulo abordamos el estudio de casos realizado durante el experimento, así en esta sección presentamos el propósito del estudio y sus características, luego se explica el instrumento diseñado para la entrevista y sus elementos más relevantes para después presentar uno a uno los protocolos de los casos con el análisis elaborado.

5.1 EL PROPÓSITO DEL ESTUDIO

El estudio de casos que en este capítulo se presenta fue realizado una vez finalizada la secuencia de enseñanza y tras la administración del post test. El estudio de casos tenía como propósito describir y documentar las actuaciones de los estudiantes cuando resolvían situaciones realistas de modelización con ayuda del paquete informático GeoGebra y desarrollaban comprensión sobre las familias de funciones. En última instancia se pretendía, a través del análisis de las diferentes actuaciones protagonizadas por los estudiantes, poder mejorar el modelo de enseñanza construido en este trabajo y poder ampliar el conocimiento en relación con el modelo de actuación.

5.2 LA TÉCNICA DE OBTENCIÓN DE DATOS

Nuestro estudio de casos se realiza a través de entrevistas clínicas. Este método de investigación ha experimentado un importante desarrollo desde finales del siglo pasado aplicándose en campos tan diversos de la investigación educativa como el juico moral, la lectura, la comprensión de mapas o la comprensión de la física (Ginsburg, 1997). En nuestro campo de interés la investigación en didáctica de las matemáticas también se ha notado ese desarrollo con propuestas como la de Ginsburg, Jacobs y López (1993) o la del National Council of Teachers of Mathematics (1989, 1995) en donde esta reconocida institución norteamericana incentiva a los investigadores y maestros para que realicen entrevistas clínicas en el aula.

Jean Piaget desarrolló originalmente la entrevista clínica como instrumento para su investigación psicológica después se dio cuenta de que los niños daban respuestas imprevistas a las preguntas o tareas que se les formulaban, estas respuestas eran realmente fascinantes, y sus errores daban importantes pistas sobre la naturaleza de su pensamiento (Ginsburg, 1981).

Una entrevista clínica es bastante diferente a simplemente observar un estudiante, lo que puede dar una idea pero no proporciona los detalles necesarios para entender realmente el nivel de conocimiento de un estudiante. Los investigadores y profesores han encontrado que las entrevistas clínicas a menudo proporcionan una evaluación más precisa que otras medidas de evaluación, ya que ofrecen una perspectiva más profunda sobre el pensamiento de los estudiantes y sus concepciones erróneas. Además Ginsburg (1997, p. 58) presenta estas otras razones para utilizar las entrevistas clínicas:

- Ellas ayudan a examinar la naturaleza fluida del pensamiento.
- Ellas nos ayudan a investigar sobre el potencial de aprendizaje.
- Ellas son útiles para entender el pensamiento en un contexto personal.
- Ellas nos permiten manejar tanto lo individual como lo general.

El método de la entrevista clínica presenta diferentes variaciones en la actualidad, sin embargo el modelo más practicado se lleva a cabo de uno-a-uno, y comienza con una pregunta común, pero entonces el investigador personaliza el sondeo de una manera flexible en reacción a lo que dice el estudiante para descubrir una visión más profunda. De esta manera, las entrevistas clínicas son "deliberadamente no estandarizadas", porque las entrevistas se desarrollan de forma diferente para cada estudiante (Ginsburg, 1997, p. 2).

Schoenfeld (1985) en la comparación que presenta de los pros y contras de grabar a los estudiantes por parejas o individualmente al realizar entrevistas clínicas, indica que en las resoluciones individuales se manifiestan las cogniciones propias de los alumnos de manera más fiel, registrando así las cogniciones puras del resolutor, nosotros hemos elegido esta opción para nuestro estudio, de esta manera realizamos entrevistas individuales con enseñanza, en donde se proponía una situación de modelización para ser desarrollada con la ayuda del paquete informático GeoGebra®.

Otra variable a tener en consideración durante el proceso de grabación es el papel a desempeñar por el investigador. Schoenfeld (1985) es contundente en relación con este aspecto y aboga por la nula intervención del investigador durante todo el estudio de casos. Sin embargo siguiendo la postura de Puig (1996), adoptamos una posición más flexible en cuanto a la posibilidad de que el investigador realice puntualmente alguna intervención a lo largo del proceso de resolución.

5.2.1 La Obtención de los Protocolos Audiovisuales

El estudio de casos tuvo lugar en una de las aulas de informática de la Universidad, (la misma que habíamos utilizado pare el proceso de enseñanza, en donde se contaba con 30 ordenadores de escritorio con su respectiva pantalla táctil de 22 pulgadas y su ratón, El ordenador dispuesto para las entrevistas del estudio de casos tenía la misma versión 4.4 de GeoGebra que habíamos utilizado. De esta manera, se pretendía que la situación fuese totalmente análoga a la dada durante la secuencia de enseñanza, con la salvedad del trabajo individual, de forma que el ambiente les produjera la menor presión posible.

Durante la sesión de entrevista únicamente estuvo presente el investigador para minimizar el efecto que podía producir una actuación en público que, evidentemente, ya estaba afectada por el hecho de resolver la situación de modelización mientras eran grabados.

Para la obtención de los protocolos audiovisuales los datos de cada entrevista se han recopilado a través de diferentes medios, en primera instancia se realizaron grabaciones de video de los resolutores en el desarrollo de la entrevista. El resolutor se hallaba ubicado en frente al ordenador y la cámara en una posición posterior y lateral a él en un ángulo de 45 grados, de forma que lo tomaba y simultáneamente grababa también la pantalla del ordenador. Para conseguir mayor nitidez en la imagen se utilizó un zoom de 400% en la Vista Gráfica de GG y un tamaño de letra 24. De otra parte se empleó el paquete informático Hipercam 2.1 Para registrar todo lo que sucedía en la pantalla del ordenador, además simultáneamente, se realizaron grabaciones de audio del desarrollo de la entrevista y se recopilaron las guías diligenciadas en papel por cada uno de los estudiantes durante la entrevista.

El estudio de casos fue planificado de tal manera que cada sujeto dispusiera un tiempo máximo en torno a los 40 minutos.

5.2.2 La Obtención de los Protocolos Escritos

Para la reconstrucción racional de las actuaciones de las parejas resulta prácticamente imprescindible transformar los datos audiovisuales grabados a un protocolo escrito. Puig (1996) explica que este proceso implica segmentar el continuo del protocolo oral y traducirlo al lenguaje escrito. Además como el autor señala, esta primera acción no es meramente procedimental sino que implica una toma de decisiones dentro del análisis, es necesario especificar un criterio para fragmentar el protocolo oral. En nuestro caso, seguimos el criterio establecido por Puig (1996), que consiste considerar como fragmentos independientes aquellas verbalizaciones que se producen sin interrupción e identificar cada uno de ellos con un ítem. Aplicando sucesivamente este procedimiento el conjunto del protocolo queda traducido (en cierta manera, reducido) a una colección ordenada de ítems.

En la construcción de los protocolos escritos seguimos el criterio de Puig, empleado en otras investigaciones en la Universidad de Valencia (por ej. Arnau, 2010 o González-Calero, 2014), quien aboga por la mayor fidelidad posible a la hora de reflejar el discurso de los estudiantes. Este hecho supone, a veces, registrar proposiciones gramaticalmente incorrectas o expresiones vulgares en el protocolo escrito. Cuando esta situación se dé, emplearemos el término *sic* entre paréntesis para indicar que una palabra o frase recogida en un ítem, que pudiera ser incorrecta, es textual.

En esta línea es importante aclarar los significados asociados al uso de ciertos símbolos que empleamos con frecuencia en los protocolos, así:

- El uso de puntos suspensivos "..." indican pausa en las frases o duda.

- El uso de comillas en un texto "texto" hacen referencia a una determinada instrucción de la guía de entrevista o en el caso del manejo de GeoGebra® a un control, comando o casilla específica.

- El uso de paréntesis con texto entre ellos "(texto)" recogen indicaciones en gráficos, o en el uso del ordenador o describen momentos de lectura o reflexión.

- El uso de corchetes con texto entre ellos "[texto]" se refieren a omisiones en el discurso que nos parece importante aclarar o complementar. De otra parte también los hemos utilizado en la entrada de valores en las casillas de la hoja de cálculo de GeoGebra.

- Además hemos utilizado la sugerencia de Arzarello et al., (2009) sobre marcar los gestos en *cursiva*, y aunque en algunos momentos comentaremos sobre ellos su estudio y explicación en cada caso, desborda los objetivos de este estudio.

- Para no hacer farragoso el texto, después de dos o tres intervenciones del sujeto resolutor en cada caso, hemos cambiado su nombre completo por la letra inicial en mayúscula de su nombre.

- Finalmente hemos utilizado las siglas "GG" para el paquete informático GeoGebra, "HdC" para la hoja de cálculo del mismo paquete y "SMS" para sistema matemático de signos.

5.3 ELECCIÓN DE LOS SUJETOS PARA EL ESTUDIO DE CASOS

Un aspecto más que contempla Schoenfeld (1985) como una de las variables que afectan el proceso de la toma de datos de las producciones verbales es lo confortable que se sientan los sujetos durante la entrevista, en este sentido para favorecer la disposición de los estudiantes para las entrevistas el criterio que se tuvo en cuenta en la escogencia de los casos fue quienes estaban dispuestos a trabajar en la actividad fuera del tiempo académico, de esta forma se constituyó un grupo de cinco sujetos (Daniela, Erika, Jan, Álvaro y Felipe).

En el grupo de participantes en el estudio de casos contamos con tres estudiantes con un alto desempeño en matemáticas y a lo largo del curso y 2 estudiantes con un desempeño apenas aceptable en matemáticas, tanto a lo largo del curso como en los resultados de las pruebas aplicadas.

En cuanto al aspecto de la visualización de acuerdo al test de Presmeg (1985) la mayoría de los participantes del estudio de casos (cuatro) se encuentran en el grupo intermedio en donde no se inclinan por ser visualizadores o no visualizadores, solamente uno de los participantes tiene según el resultado del test una cierta inclinación hacia la visualización.

5.4 EL INSTRUMENTO

Se construyo un instrumento con el fin de guiar la estructura de la entrevista y proponer unas etapas claras en el proceso de modelización donde se expresara el análisis cualitativo de la situación a modelizar y de las posibles familias de funciones a emplear en su ajuste, en donde además se proporcionan elementos de control del proceso siguiendo las ideas planteadas por Puig y Monzó (2013), Puig (2015) y Schoenfeld (1985).

En los recuadros 5.1 y 5.2 se muestra el instrumento diseñado para acompañar la entrevista, como se puede notar, en los incisos de la guía se formulaban diversas preguntas que los estudiantes debían responder por escrito, en algunos casos con la ayuda del paquete informático GeoGebra.

ENTREVISTA

Nombre: _______________________________ Grupo:________Fecha: ____________

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)
Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.

3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

Recuadro 5.1 Guía de Entrevista p. 1

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.

6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

Recuadro 5.2 Guía de Entrevista p. 2

En primera instancia comentemos algunos aspectos de la tarea, el problema que se propuso a los estudiantes, para ser modelizado, es una situación realista, en el sentido de la RME (Educación Matemática Realista) Freudenthal (1971, 1973, 1983) Treffers (1987) De Lange (1987) ya que se han tomado unos datos de una situación real que consideramos significativa para los estudiantes en este caso del Producto Interno Bruto (PIB) de los Estados Unidos de América a través de datos estadísticos suministrados por la oficina gubernamental norteamericana correspondiente, –el US Bureau of Economic Analysis–.

Para el manejo de los datos se ha empleado una tabla de datos sobre el PIB para unos determinados años desde 1955 hasta el 2010, a partir de ella buscamos encontrar la función que de el mejor ajuste.

Al analizar la tabla suministrada se puede notar, como en el segundo punto, el valor del PIB para el año 1960 es un valor anómalo en el sentido de que el punto (1960, 1559) no mantiene la tendencia de los demás valores de la nube de puntos. El manejo que hacen los estudiantes de este valor y las decisiones que toman con respecto al él es uno de los aspectos que nos interesa revisar.

De otra parte la disposición de la nube de puntos genera una curva creciente, cóncava hacia arriba, (ver fig. 5.1) pero es una curva muy suave, lo que permite –dependiendo del análisis cualitativo que realice el resolutor– acercarse al ajuste de la función desde diferentes perspectivas, pues puede buscar el ajuste a una función lineal, a una función cuadrática, o a una función exponencial entre otras.

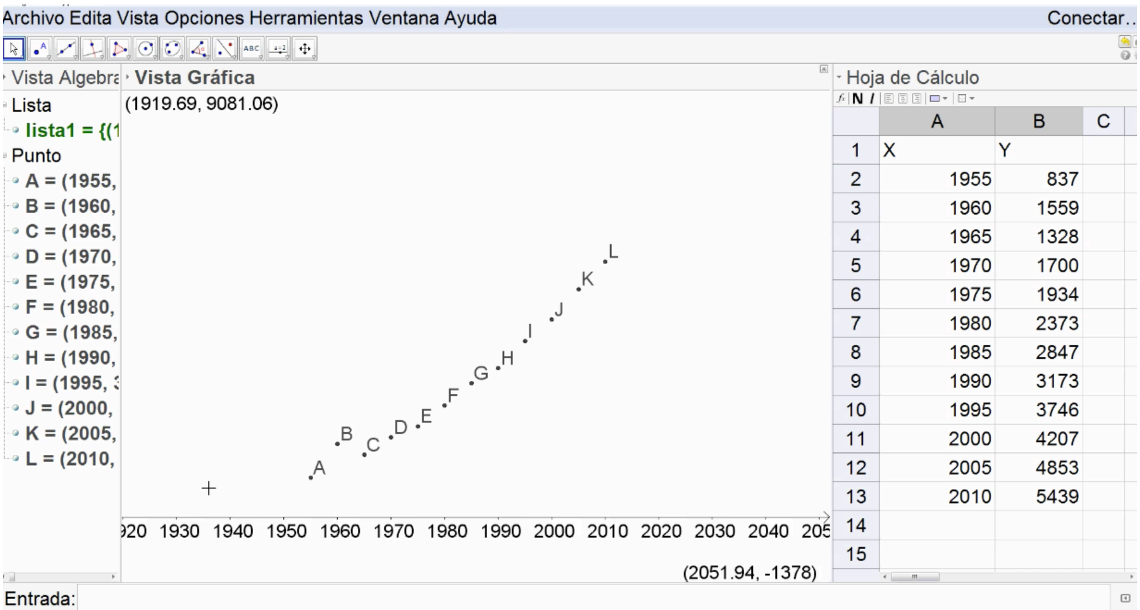


Figura 5.1 Gráfica de la nube de puntos

La secuencia que sigue la guía de la entrevista, es la misma que se utilizó en las actividades de enseñanza, haciendo énfasis, en el análisis cualitativo del fenómeno en primera instancia y de las familias de funciones que se podrían utilizar para su ajuste, así, luego de presentar los datos del fenómeno en una tabla, que el estudiante debería estudiar, y a partir de allí reconocer las características del fenómeno (inciso 1) se le propone que realice un bosquejo de cómo creería que se vería la nube de puntos (inciso 2) para lo cual se presenta un sistema de coordenadas en la guía.

Este análisis de las características del fenómeno como hemos anotado en el apartado sobre la predicción del capítulo 2, podría mirarse desde dos perspectivas, en primera instancia el poder predecir el comportamiento general del fenómeno, por ejemplo como creciente o posiblemente lineal, y de otra parte el análisis puntual como por ejemplo en la región en que se encuentra el punto anómalo. Según la literatura es frecuente la confusión en los resolutores entre estas dos perspectivas.

En el inciso 3 se le pregunta al resolutor si el bosquejo que ha realizado se parece a alguna función que conozca, para responder esta cuestión él debe realizar un análisis cualitativo de las familias de funciones que conoce, y de sus características relevantes para poder hallar aquella que le de el mejor ajuste.

Luego pasamos a la confrontación entre el bosquejo y los análisis cualitativos desarrollados de una parte, con la representación que realiza el paquete informático de la nube de puntos de otra, (incisos 4 y 5), de nuevo se le pregunta si la gráfica dibujada por GG se parece a una función que conozca (inciso 6) nuevamente el resolutor debe realizar un análisis cualitativo de las familias de funciones que conoce, y de sus características relevantes para poder hallar aquella que le de el mejor ajuste. Aquí además se le abren dos caminos, el utilizar las herramientas estadísticas del GG y hallar la curva de regresión que le de el mejor ajuste o lo que hemos llamado realizar un *ajuste manual* de la función a partir de la manipulación de las ecuaciones canónicas y de sus parámetros, para lograr la función que le de el mejor ajuste (inciso 7). Luego se le presentan al resolutor dos valores extra alejados de la nube de puntos original, estos valores se han pensado para que le sirvan como un elemento de control del tipo de ajuste que realiza (inciso 8). Finalmente se le pregunta si se le ocurren otros métodos para la solución.

5.5 EL ANÁLISIS DE LOS CASOS

Para el análisis de los casos reconstruimos el proceso de resolución a partir de los protocolos escritos originados en las actuaciones de cada alumno. Para dar sentido a las actuaciones de los estudiantes tomamos en consideración tanto el modelo de competencia como las actuaciones o tendencias cognitivas documentadas en anteriores investigaciones. La reconstrucción se plasma en dos columnas con el objeto de hacer más inteligible el análisis. Así, en la columna de la izquierda se recoge el protocolo escrito agrupado en fragmentos, mientras que en la columna derecha se describe la parte del proceso de resolución de la que da cuenta el fragmento correspondiente. A su vez, la descripción del proceso es complementada con posibles interpretaciones de las actuaciones de los estudiantes. Además, la reconstrucción de las resoluciones se acompaña de las representaciones que se sucedían en el entorno del GG durante el proceso, plasmando las capturas de pantalla de los diferentes momentos e incluyendo las representaciones recogidas en la guía diligenciada por cada estudiante.

Para cada uno de los casos estudiados se hace una breve descripción del alumno en cuestión, en términos de los resultados que obtuvo en las pruebas pre y post y un comentario del maestro con el que estuvo durante el curso sobre sus habilidades y resultados, además se presenta la guía en papel que desarrolló cada estudiante durante la entrevista y la trascripción del protocolo de la entrevista, a partir de las grabaciones realizadas en video y audio.

En el material complementario de este estudio se pueden revisar respectivamente, las guías de entrevista diligenciadas (anexo G); los protocolos de entrevista (anexo H); los archivos de audio (anexo K) y video de las entrevistas (anexo I) y los videos de las capturas de pantalla del ordenador (anexo J).

A continuación presentamos cada uno de los casos estudiados, siguiendo el orden comentado anteriormente.

5.6 DANIELA

Es una niña, con buenas capacidades matemáticas, responsable y dedicada en su trabajo durante el curso del cuatrimestre obtuvo un resultado de 4.1 sobre cinco. Al comienzo del curso tuvo un percance que le impidió asistir a algunas clases lo que repercutió en su calificación final. Sus notas parciales del cuatrimestre fueron 3.1, 4.6 y 4.7 .

Daniela corresponde al alumno 16 del estudio de grupo, sus resultados en las pruebas realizadas al grupo en general fueron: en el Pre Test contestó de manera correcta las preguntas 1a, y 5c; no abordó la pregunta 4 y las demás preguntas no las respondió adecuadamente. Las preguntas en que se equivoca Daniela muestran que ella tiene algunas dificultades con el manejo algebraico de las expresiones al despejar alguna variable, que se confunde con la traducción de las transformaciones en una función desde su gráfica a su expresión analítica y que no reconoce algunas de las familias de funciones.

En la primera parte del Post test respondió cuatro de las cinco preguntas de manera correcta y la pregunta 2b de manera incompleta. Esta pregunta buscaba identificar las trasformaciones aplicadas a la parábola $f(x) = x^2$ a partir de la gráfica. Estos resultados muestran la mejoría en el desempeño de Daniela, pero también que aún presenta dificultades con algunas de las transformaciones.

En el problema de modelización de la segunda parte del post test, en los ítems sobre el análisis cualitativo del fenómeno Daniela responde que el fenómeno se comporta como una función exponencial y realiza un bosquejo de una curva creciente y cóncava hacia arriba, que coincide con esta apreciación.

Luego realiza un ajuste de manera “manual” de la función, pero esta vez no es la función exponencial, que tenía como hipótesis sino que utiliza la función cuadrática $f(x) = (x - 1963.62)^2 + 24.18,$ inmediatamente después realiza nuevamente el ajuste con ayuda de las herramientas estadísticas del GG obteniendo otra función cuadrática, en este caso $h(x) = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374869.94$ luego de lo cual las compara en la misma vista gráfica.

Daniela obtuvo un resultado de 20 sobre 36 en el Test de visualización lo que no la define ni como visualizador ni como no visualizador, según el estudio de Presmeg.

5.6.1 Guía de Entrevista

En el recuadro a continuación presentamos la guía de la entrevista, realizada por Daniela.

(2) clip 0002.
Voz 010 min. 18/19, ...
Video. MVI 4443 mov.

ENTREVISTA

Nombre: Laura Daniela Ortiz Grupo: DAO IN Fecha: 28/11/2014

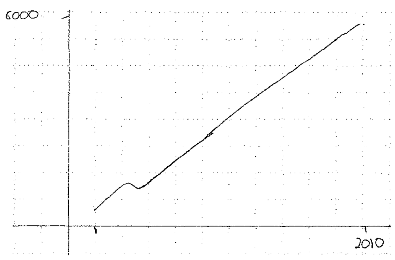
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.

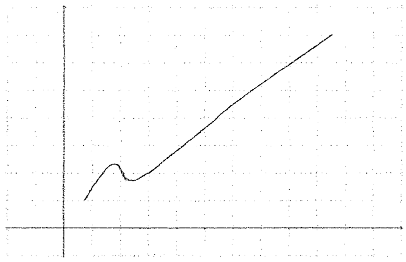


3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
   Se asemeja a la Función lineal, pero podría ser Exponencial ó cero.
4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

Recuadro 5.3 Guía de Entrevista Daniela p.1

Daniela.
Voz 10 → 18 seg ...
Clip 2

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
No, se asemeja a la lineal pero no lo es y no hay una Funcion que conosca que se le ajuste.

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

Polinomio: $y = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$.

La Ecuación se hallo mediante el. Analisis de Regresión lineal.

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

PIB 2008: 5189.6092.

Remplazando el valor de x en la ecuación, o en analisís de datos, en evalúa x= se pone el año del cual se quiere hayar el PIB.

Recuadro 5.4 Guía de Entrevista Daniela p.2

5.6.2 Análisis del Protocolo de Daniela

Datos: Video MVI 4443 Audio voz 010 min18 Pantalla Clip 0002.avi

Las preguntas de la entrevista se han organizado en una Guía de Trabajo, para darles respuesta el estudiante utiliza tanto la guía como el paquete informático GeoGebra (GG).

La guía propone la siguiente situación para ser modelizada:

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. (Daniela estudia la tabla presentada en la guía y a partir de la información dada en la tabla construye un bosquejo de cómo cree que podría ser la función que representa el PIB)
2. Maestro: ¿Cómo crees que es esa función?
3. Daniela: No se, porque bueno, uno así a simple vista uno podría decir que es lineal…
4. D: … pero si uno mira, no se también tiene unas variaciones …
5. D: … porque acá sube … (*señala con el dedo hacia arriba,* refiriéndose a una pareja de coordenadas en la tabla)
6. D: … y luego baja … (*hace un gesto hacia abajo con la mano*)

Es llamativo como Daniela con la sola inspección de los datos desde la tabla reconoce una serie de características del fenómeno en su mente, lo cual le permite realizar un proceso de traducción de un Sistema Matemático de Signos (SMS) a otro SMS, en particular, el paso del SMS de la tabla al SMS gráfico que luego plasmará en el bosquejo (Fig. 5.2).

Por ejemplo, reconoce que el fenómeno se comporta de manera creciente, y le parece además que puede ser lineal (ítem 3), lo que podría deberse a creer que la razón de cambio entre los puntos es constante.

Desde el primer momento, en la revisión de la tabla, D reconoce que el segundo punto (1960, 1559) (ítem 4), tiene un comportamiento anómalo con respecto a la

7. D: … y ahí ya hay una curva … (*con la mano hace el gesto de una variación ascendente y descendente*) …

8. D: … entonces eso cambia totalmente todo, ya no es una función lineal…

9. D: … más sin embargo de ahí sigue, pero entonces no se si pueda ser exponencial…

10. D: … pero entonces por la curva, según tengo entendido las únicas que dan como curvas así son las de seno…

11. D: … pero no se. (Silencio)

nube de puntos y que su ubicación produce una particular variación (ítems 4 - 7), lo que la lleva a "ver" una curva en esa fluctuación (ítem 7), que pone en duda su hipótesis de que la nube de puntos sea una función lineal, (ítem 8), y le abre el horizonte a nuevas hipótesis (ítems 9 y 10), en particular piensa en la función exponencial y en la función seno.

Esta última posibilidad parece evidente que la considera por la curva que forma el punto anómalo del que ya hemos hablado, pues dice "las únicas que dan como curvas así son las de seno" (ítem 10), aunque los demás puntos no parecerían encajar lo que le genera dudas (ítem 11).

Sobre la posibilidad de la función exponencial puede que contemplara la condición creciente de la nube de puntos, sin embargo si así fuera es extraño por que no incluye entre sus hipótesis otra función también estudiada durante el experimento de enseñanza, la función cuadrática.

Daniela ha estado realizando el análisis cualitativo del fenómeno, reconociendo desde la tabla presentada, variaciones y características, (ítems 3-12) que primero la llevan a pensar que es una función lineal pero luego la hacen dudar, finalmente construye un bosquejo de la gráfica del fenómeno.

Este análisis de las características del fenómeno en términos de lo que hemos anotado en el Cap. 2 sobre la predicción podría mirarse desde dos aspectos, en primera instancia el poder predecir el comportamiento general del fenómeno como creciente y posiblemente lineal, y de otra parte el análisis puntual en la región en que se encuentra el punto anómalo. Según la literatura es frecuente la confusión entre estas dos perspectivas, que en este caso D realiza de manera correcta.

Otro aspecto muy llamativo en D es la

fuerte relación que tienen los gestos en su comprensión de la situación, pues para explicar la situación de la nube de puntos y en particular el punto anómalo (1960, 1559) realiza todo un abanico de gestos, en primera instancia (ítem 5), indica que "sube", y *señala con el dedo hacia arriba,* refiriéndose a como cambia entre los dos primeros puntos; luego anota que "baja" entre el segundo y el tercer punto (ítem 6), y *hace un gesto hacia abajo con la mano,* para finalmente (ítem 7), concluir que "ahí ya hay una curva" y *con la mano hace el gesto de una variación ascendente y descendente.* Este tipo de gestos han notado varios autores como Radford (2009) y Arzarello et al., (2009) ser un apoyo en la comprensión.

12. D: Suponiendo que es así (realiza un bosquejo de la función en la guía).

El bosquejo que realiza D (ítem 12, fig. 5.2) además tiene una característica adicional, a pesar de tener la referencia directa a los puntos expresados en la tabla, lo cual debería producirle una gráfica discreta, a cambio de ello, D realiza un bosquejo en que gráfica la nube de puntos de manera continua, esto puede deberse a una falta de familiaridad con este tipo de gráficas, aunque ya se habían tratado en la enseñanza, o a que realmente asuma que el fenómeno se comporta de una manera continua.

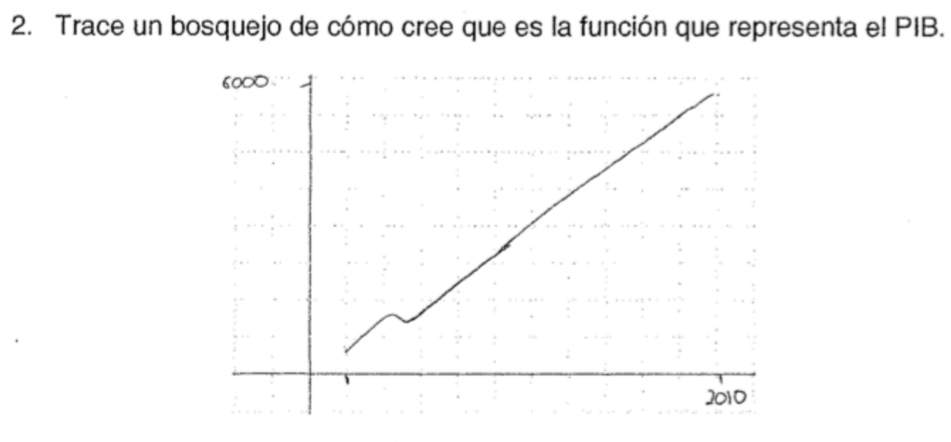


Figura 5.2 Bosquejo de la gráfica de la función (ítem 12 pregunta 2 de la guía).

3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Se asemeja a la Función lineal, pero podria ser Exponencial ó seno.

Recuadro 5.5 Respuesta al punto 3 de la guía.

13. (D Retoma el trabajo en la guía completando el punto 3. "¿La función se parece a alguna que conozca o que hallamos estudiado?").

D responde el punto 3 de la guía (ítem 13, recuadro 5.5) donde se le pregunta "¿La función se parece a alguna que conozca o que hallamos estudiado?" A lo que ella contesta "se asemeja a la función lineal, pero podría ser exponencial o seno" (ítem 13, recuadro 5.5), plasmando así sus reflexiones.

14. (D comienza a utilizar la Hoja de Cálculo (HdC) de GG en el ordenador e introduce [A1; años])
15. (D Introduce [B1; PIB])
16. (D Introduce [A2; 19950] corrige [A2; 1955])
17. (D Introduce [A3; 1960])
18. (D Introduce [A4; 1965])
19. (D Introduce [A5; 1970])
20. (D Introduce [A6; 1975])
21. (D Introduce [A7; 1])
22. (D Introduce [A8; 98])
23. (D corrige A7 e introduce [A7; 1980])
24. (D corrige A8 e introduce [A8; 1985])
25. (D Introduce [A9; 1990])
26. (D Introduce [A10; 1995])
27. (D Introduce [A11; 2000])
28. (D Introduce [A12; 2005])
29. (D Introduce [A13; 2010])
30. (D Introduce [B2; 837])
31. (D Introduce [B3; 1559])
32. (D Introduce [B4; 1328])
33. (D Introduce [B5; 1700])
34. (D Introduce [B6; 1934])
35. (D Introduce [B7; 2373])
36. (D Introduce [B8; 2847])
37. (D Introduce [B9; 3173])
38. (D Introduce [B10; 3746])
39. (D Introduce [B11; 4207])
40. (D Introduce [B12; 4853])
41. (D Introduce [B13; 5439])

Luego de esto, D empieza a usar el ordenador, para responder a la pregunta 4 de la guía, "Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos" comenzando a construir la tabla con los datos en la Hoja de Cálculo (HdC) del GG (ítems 14-41).

Este uso de la HdC es parte de la apropiación de la herramienta ordenador para convertirla en un instrumento. Para lo cual D ha ido construyendo poco a poco diferentes esquemas.

42. (D selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)
43. (D crea la lista de puntos con el menú de la HdC de GG)

Luego de haber construido la tabla, grafica la nube de puntos en GG (ítems 42-44). De nuevo los diferentes pasos que realiza D para poder construir la gráfica de la nube de puntos en GG son parte de la apropiación de la herramienta ordenador para convertirla en un instrumento.

44. (D va a la ventana en la vista gráfica y hace click en la opción “Encuadre de todos los objetos”, con lo que se visualiza completamente la nube de puntos)

45. (D ajusta el zoom de la vista grafica)

La opción del paquete informático *“Encuadre de todos los objetos*” que utiliza D y el ajuste del zoom de la vista grafica (ítems 44 y 45) muestra la constitución de esquemas para evitar las dificultades de la ubicación de la gráfica en el plano y el ajuste adecuado de la escala, dificultades documentadas que se presentan al graficar en los entornos de CAS (Goldenberg, 1987, 1988, 1991).

46. (D *recorre con el cursor los puntos de la función comenzando en A*(1955, 837) *y terminando en L*(2010, 5439), *pasando específicamente por B*(1960, 1559) y C(1965, 1328).

Es particular este gesto (ítem 46) en que recorre los puntos de la gráfica con el cursor, especialmente marcando la variación en la dirección entre A(1955, 837), B(1960, 1559) y C(1965, 1328), da la impresión de que D esta haciendo una revisión de la gráfica con respecto a sus hipótesis.

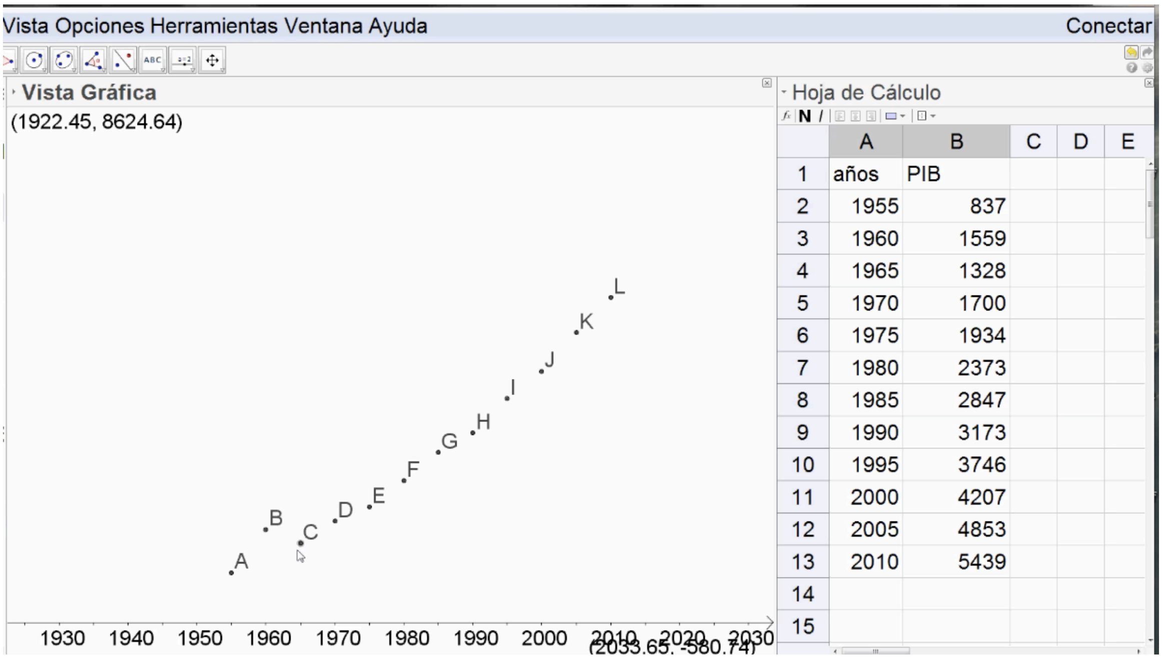


Figura 5.3 Vista Gráfica y de la Hoja de Cálculo en la pantalla del ordenador hasta ítem 45.

47. Maestro: ¿Si parece lineal?

48. D: No. Lo que yo te decía, la curva acá (D *señala en la pantalla del ordenador como cambia la gráfica entre los puntos* A(1955, 837), B(1960, 1559) y C(1965, 1328), *hace el gesto de dibujar la*

Al confrontar el análisis cualitativo previo del fenómeno y de la familia de funciones con los resultados que muestra la vista gráfica de GG, (ítems 48-50), D comprueba varias de las conclusiones de su análisis, la primera es como la variación *gráfica*)

en la nube de puntos alrededor del punto anómalo B (1960, 1559) produce en la gráfica una curva, “Lo que yo te decía, la curva acá.” (ítem 48),

En este sentido el análisis cualitativo se convierte en un mecanismo para la buena gestión del proceso, confirmando las suposiciones y guiando los pasos posteriores como lo mencionan Puig y Monzó (2013).

49. D: de resto sigue así, así, así (D *hace el gesto con la mano de cómo los demás puntos a partir de C*(1965, 1328) *mantienen la misma dirección*)

D Reconoce como los demás puntos de la nube, desde el punto C(1965, 1328) hasta L(2010, 5439), mantienen una tendencia, conservando una dirección y sentido (ítem 49), lo que ya acerca a D a una primera aproximación a la idea de ajuste.

De otra parte, el reconocer esta tendencia, pero sobre todo el gesto con la mano, de los puntos que mantienen la misma dirección, pareciera confirmar otra de las hipótesis de D, el que la nube de puntos se comporta como una función lineal (ítem 49).

50. D: porque tiene una alza y luego una caída (D *hace el gesto con el lápiz en la mano de subir y bajar*)

Nuevamente impresiona en las actuaciones de D el gran número de gestos que realiza, en esta última secuencia (ítems 48-51), confirma la curva al rededor del punto B (1960, 1559), dos veces (ítems 48 y 50); hace el gesto de la tendencia de los puntos y además señala un punto en la HdC.
(ítem 51).

51. D: que es esto (D *señala tocando con el lápiz en la pantalla del ordenador las casillas* B3; 1559 y B4;1328 de la HdC)

Al reconocer D la variación en las casillas B3;1559 y B4;1328, (ítem 51) realmente lo que esta haciendo es realizando un proceso de traducción entre dos SMS, de una parte el SMS de la gráfica y de otra parte el SMS de la HdC, así las casillas que señala en la tabla corresponden a las coordenadas de los puntos B(1960, 1559) y C(1965, 1328) de la nube de puntos en la gráfica.

52. D retoma la guía en papel para trabajar en el punto “5. Haga un bosquejo de la

gráfica que le resultó en GG”

53. (D dice algo, pero no se entiende)

54. (D realiza el bosquejo en la guía de acuerdo a la nube de puntos que aparece en GG).

D realiza el bosquejo de la nube de puntos, que aparece en la vista gráfica de GG, aquí hay varios aspectos interesantes, el primero es nuevamente el aspecto de la gráfica continua, pues a pesar de que en la vista gráfica de GG se ve la nube de puntos, como una gráfica discreta, D realiza un bosquejo en que la gráfica es continua (ver figs. 5.2 y 5.3).

De otra parte esta el asunto de la linealidad, D en los dos bosquejos que ha realizado dibuja la función con un énfasis muy claro en la línea recta –exceptuando el punto anómalo– (ver figs. 5.2 y 5.4) que además es la tendencia que le parece que tiene la nube de puntos, esto parece ocurrir por lo que hemos llamado en el primer capítulo la “tendencia a la linealidad” que tienen algunos estudiantes, pues es llamativo como D percibe esta tendencia, o la sospecha, desde la tabla y por eso realiza un primer bosquejo casi lineal y con la grafica que construye en GG lo que hace es confirmar su hipótesis, sin notar que la nube de puntos no sigue estrictamente una tendencia lineal, esta confirmación se nota en su segundo bosquejo nuevamente con una marcada trayectoria lineal.

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.

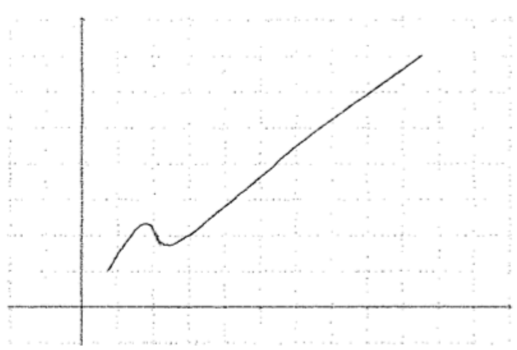


Figura 5.4 Bosquejo de la gráfica de la función según GG (ítem 54 pregunta 5 de la guía).

55. M: ¿Y como a qué función se te parecen esos puntos?

El maestro interviene para facilitar la

comunicación.

56. D: Es que si lo veo así, o sea (*D esta recorriendo los puntos de la nube de un extremo a otro moviéndose con el cursor*)

Nuevamente D realiza un gesto, en este caso el manejo dinámico del cursor para remarcar el sentido lineal de la nube de puntos.

57. D: esta parte seria más bien como una línea [recta] (*D recorre los puntos de la nube desde C*(1965, 1328) *hasta L*(2010, 5439) *de un punto a otro moviéndose con el cursor, hacia arriba y hacia abajo, y de nuevo hacia arriba, aunque cuando baja llega hasta el punto A sin pasar por B*) ...

Es significativo que cuando D hace el gesto de recorrer la nube de puntos, (ítems 56 y 57) lo hace desde el punto C hasta el punto L, marcando la tendencia lineal, pero cuando lo hace de regreso, continúa esta vez, hasta el punto A, pero excluyendo el punto anómalo B.

58. D: … pero no se

Parece que D mira la tendencia general de la gráfica y a pesar del valor anómalo en la nube de puntos se inclina porque la función que más se parece es una función lineal (ítem 57) descartando el punto que no encaja. Pareciera que D esta ha punto de tomar una decisión respecto al ajuste, que debería ser una función lineal la que mejor se ajusta, pero aún no esta segura, duda (ítem 58).

59. (D selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)

60. (D comienza a utilizar el menú estadístico de la HdC de GG para hacer un análisis de dos variables buscando algún tipo de regresión)

D comienza a seleccionar las columnas de la tabla como preparándose para utilizar las herramientas estadísticas del GG, como manera de encontrar la función de mejor ajuste (ítems 59-60).

61 M: Pero antes de hacer eso (se refiere al uso de las herramientas estadísticas de la HdC) ¿No hay otra forma de hacerlo?

62. D: ¿Qué cosa? ¿calcularlo?

63. M: Si para encontrar la curva.

64. (silencio)

65 D: Pues yo no se o pues no recuerdo en el momento

El maestro interviene para recordar a D otro método estudiado (ítems 61-64) en el que se utilizan las formas canónicas de las funciones y sus parámetros, de manera que las transformaciones de la forma canónica van llevando poco a poco a una función de ajuste.

66. D: ¡Ah! Pues unir puntos (D dice algo que no se entiende)

67. D: ¡Ah! Practicar con ecuaciones, con funciones

68. M: Ujumm (el maestro asiente)

69. D: Pero es que, bueno yo no se

Parece que D recuerda algo de otro método estudiado, (ítem 67) aunque lo hace con cierta duda (ítem 69) es particular esta situación, pues buena parte de la enseñanza se refirió a estos aspectos y además D respondió la segunda parte del post test utilizando este método alternativo, luego, suena por lo menos extraño que D no los recuerde, (ítem 65) de otra parte podría ser que este método alternativo no sea el método que prefiera, lo que marcaría cierto rechazo, y explicaría la renuencia a utilizarlo.

70. M: Ensaya

71. D: *f (x)* pero es que siendo una lineal (En la barra de entrada de GG D introduce *f (x)=* pero no completa la expresión y se queda pensativa)

72 (silencio)

73. D: no, no se me ocurre…

74. D: así como … (D introduce $f(x) = x2$)

75. (D corrige $f(x) = x^2$ y da enter)

D empieza a tratar de buscar el tipo de ecuación canónica que le serviría, de acuerdo a las características que ha observado anteriormente, pero parece que no reconoce las formas canónicas, pues habla de funciones lineales, (ítem 71) pero no encuentra la ecuación canónica, escribe $f(x) = x2$ (ítem 74), que sería una función lineal pero no esta claro si es esa la función que busca, o si es un error, porque luego, sin graficarla, la cambia a $f(x) = x^2$ una función cuadrática (ítem 75).

D ha realizado una parte del análisis cualitativo, el revisar el tipo de funciones que le podrían servir para realizar el ajuste a la nube de puntos (ítems 74-75).

76. D: Pero no la grafica

77. M: Si la debe graficar pero debe estar muy lejos

El Maestro hace un comentario (ítem 77) dándole pistas a D con la intención de que ella recuerde que hay transformaciones involucradas y utilice los parámetros adecuados.

78. D: Si (D se ha ubicado en la vista algebraica con el cursor sobre $f(x) = x^2$ parece que con la intención de editar la expresión)

79. D: … Suponiendo que… (silencio y luego D edita la expresión a $f(x) = 2x^2$ y da enter)

80 (D vuelve a la expresión $f(x) = x^2$ dice algo inaudible y la edita escribiendo $f(x) = 8x^2$ y da enter)

81. (D vuelve a la expresión $f(x) = 8x^2$ y la edita escribiendo $f(x) = 8x^2 +$ y se queda en silencio)

Parece que D reconoce que existen transformaciones que pueden afectar la función y que la gráfica esta ubicada en otra parte lejos de la nube de puntos lo que la lleva a empezar a ensayar funciones ajustando las expresiones para que puedan modelizar el fenómeno, (ítems 78-81).

Pero pareciera que D no reconoce, o no recuerda, el significado de los parámetros, (ítems 79-81) ni la forma como afectan la gráfica de la función, pues a la función cuadrática $f(x) = x^2$ ejemplo de la forma canónica $f(x) = a(x-b)^2 + c$, D le ha variado el parámetro *a,* y lo ha cambiado hacia unos valores que no favorecen el ajuste; y por otra parte, pareciera que D estaba a punto de agregar el parámetro c pues escribe la expresión $f(x) = 8x^2 +$ pero se detiene (ítem 81).

82. M: ¿Recuerdas cómo se movía para que… (refiriéndose a la gráfica de la función) por ejemplo para moverlo a la derecha o la izquierda?

83 D: Los deslizadores

84. M: Eh sí, o en la misma ecuación ¿Qué cambiaba para que se moviera a la izquierda o a la derecha?

El maestro intenta darle algunas pistas a D haciéndole preguntas para que utilice parámetros en las expresiones, (ítems 82 y 84), ante lo cual parece que D recuerda algunos aspectos, entre ellos, el asunto de que se empleaba la herramienta "deslizador" como ayuda para manejar los parámetros (ítem 83).

85. D: Umm x, no mentiras (D hace un gesto con *la mano moviéndola de derecha a izquierda y de vuelta*)

86. D: o sea para … (D vuelve a hacer el gesto con *la mano moviéndola de derecha a izquierda y de vuelta*) …

Pareciera que D tratara de recordar el significado y manejo de los parámetros por el gesto de la mano con su movimiento de derecha a izquierda (ítems 85 y 86).

D parece mostrar una duda entre las variables x y y – o entre los ejes – (ítems 85 y 87).

87. D: o será y (lo dice dudando)

88. M: No, es x, es x, pero ¿Qué haces?

Esta duda podría referirse a decidir en cual de los ejes se debería implementar la transformación que desplaza la nube de puntos a derecha e izquierda como parecía que estaba pensando D, lo que querría decir que en ese eje se incluiría el parámetro.

De otra parte esta duda entre las variables (o los ejes), especulando un poco, también podría tener que ver con la dificultad inherente de las gráficas de las funciones lineales sobre otras familias de funciones en cuanto que algunas transformaciones en particular los desplazamientos horizontales y verticales, presentan "expresiones equivalentes" en el SMS del álgebra, que dan la impresión de producir la misma gráfica, aunque en rigor no lo son, pero en la práctica son indistinguibles como ya lo habíamos mencionado en los capítulos 2 y 3.

89. D: No se, es que no me acuerdo

90. (D borrando la expresión anterior escribe en la ventana algebraica $f(x)=$ pero no la completa)

Parece que D va a hacer un nuevo intento (ítem 90), con lo que recuerda de los parámetros, para ello empieza una nueva

91. D: O sea es negativo (*señala la parte izquierda de la pantalla*) positivo … (*señala la parte derecha de la pantalla*)

92. D: pero bueno ahí está positivo … (se queda pensativa, *señalando la nube de puntos*)

93 D: ahí la cosa sería … suponiendo que … esa se escribe como… entonces…

94. (D de nuevo en la ventana algebraica escribe $f(x) = 837x + 1995$ pero no le da enter para ver la posible gráfica y borra la entrada)

95. D: La verdad es que se me olvidó profe, no se me viene a la mente una ecuación en el momento.

expresión y pareciera que confirma los valores en el eje *x* (cuando es negativo o positivo) o como varían los parámetros para desplazar la gráfica a derecha e izquierda (ítems 91-92).

D realiza un nuevo gesto, en este caso señala la nube de puntos para confirmar, el sentido (ítem 92).

D utiliza la forma canónica de la función lineal, (ítem 94) aunque lamentablemente no realiza la gráfica, lo que tal vez le habría podido dar algunas luces.

Además utiliza los dos valores de las coordenadas de los puntos, 1995 y 837 para establecer una expresión, lo cual podría mostrar la noción de que la función que buscamos se ha desplazado en torno a estos valores, en la medida en que son coordenadas en *(x,y)*.

Estos dos valores parecen extraños, por cuanto ni siquiera son uno de los puntos dados, pues el punto A es (1955, 837) y el punto I es (1995, 3746). Sin embargo podríamos especular que los valores que D quería utilizar eran los del punto A (1955, 837) como si el uso de estas coordenadas sirviera como referencia de los movimientos que realizaría la grafica desde el origen o en otras palabras, como si estas coordenadas fueran los parámetros buscados, lo cual tiene bastante lógica pues la coordenada *x* del punto correspondería al desplazamiento horizontal y la coordenada *y* estaría relacionada con el desplazamiento vertical. Este manejo pudo ser un aprendizaje generado por el uso de los parámetros en otras familias de funciones, donde la relación que hemos explicado es más clara, y pareciera que D se lo ha trasladado a la función lineal.

Este manejo de un punto, o más específicamente de las coordenadas del punto, como *indicador paramétrico* es una situación que aparece en varios de los casos estudiados.

96. M: Entonces hazlo como lo estabas haciendo antes con la otra ventana.
97. (D selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13).
98. (D comienza a utilizar las herramientas estadísticas de la HdC del GG para hacer el análisis de regresión entre dos variables)

D comienza a utilizar las herramientas estadísticas del GG, para obtener la ecuación del mejor ajuste a la nube de puntos del fenómeno (ítems 96-103). Por la fluidez y seguridad con que lo hace se nota que D ha estructurado esquemas para la herramientas de manejo estadístico de GG.

99. D: Esta (Aparece en la pantalla del ordenador una primera gráfica y su ecuación de regresión utilizando una función cuadrática)

Es interesante como ante la primera opción que brinda el paquete informático –la función cuadrática– D inmediatamente la acepta (ítem 99), pues recordemos, esta no fue ninguna de las opciones que contempló inicialmente. Esta situación podría tener varias razones posibles, de una parte que si bien la nube de puntos se puede modelizar con una función cuadrática, su representación no corresponde exactamente con la Gestalt con que normalmente se identifica y enseña una función cuadrática, (Goldenberg, 1991) esto es, una parábola de eje vertical, pues lo que se ve de esta parábola en la nube de puntos es apenas una parte, aproximadamente media parábola.

De otra parte, esta aceptación de una función cuadrática podría deberse a lo que algunos investigadores han llamado un fenómeno de "autoridad del ordenador", en donde el estudiante sucumbe ante las respuestas del ordenador, sin plantearse la validez de las respuestas ni contemplar otras alternativas posibles.

100. (D cambia en el menú el tipo de regresión utilizando ahora una función lineal, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

Sin embargo este no parece ser el caso de D, quien después de esta primera elección reflexiona y retoma su hipótesis inicial de una función lineal (ítem 100), pero parece que esta no le satisface completamente.

101. (D cambia en el menú el tipo de regresión utilizando en este caso una función logarítmica, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

D vuelve al menú estadístico de GG y cambia el tipo de regresión, usando ahora una función logarítmica, la cual parece que tampoco le satisface (ítem 101) y regresa a su elección original de la

102. (D cambia en el menú el tipo de

regresión utilizando en esta ocasión una función polinómica, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación, ésta coincide con la regresión cuadrática)

función cuadrática (ítem 102 y fig. 5.5), de la cual dice "es la que más se le parece" (ítem 103).

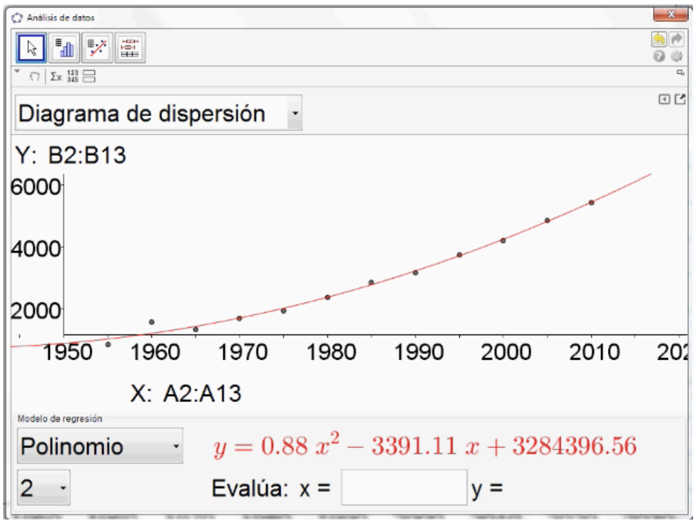


Figura 5.5 Regresión polinómica ítem 102

103. D: La polinomio [de segundo grado] es la que más se le parece

104. M: ¿Por qué crees que es mejor esa?

105. D: Porque toca la mayoría de los puntos y la cercanía que tiene de ellos es … (D *mueve el cursor sobre los puntos de izquierda a derecha*)

106. D: o sea, por decir éste está muy cerca (señala con el cursor el punto C)

107. D: éste también (señala con el cursor el punto G)

108. D: y éste también (señala con el cursor el punto F)

109. D: y el resto los toca (D *mueve el cursor sobre los puntos de izquierda a derecha*)

110 D: el único que está lejitos es éste (señala con el cursor el punto B) pero [para] la gran mayoría [la función] pasa por ellos.

Es clara la idea que tiene D sobre la función del mejor ajuste, como aquella función que se acerca más a los puntos y al mayor número de ellos (ítems 105 – 110), pues cuestionada por qué eligió esta regresión, D responde "Porque toca la mayoría de los puntos y la cercanía que tiene de ellos" (ítem 105) para luego mostrarlo con los diferentes puntos como C, G y F "y el resto los toca" (ítems 106 – 109) para finalmente concluir diciendo "el único que está lejitos es éste (señala con el cursor el punto B) pero [para] la gran mayoría [la función] pasa por ellos" (ítem 110).

Esta idea de ajuste de D es correcta en líneas generales, en cuanto es muy semejante a lo que analíticamente se realiza en el proceso de ajuste, por ejemplo por mínimos cuadrados.

Sin embargo hay que contemplar una dificultad del manejo que realiza D con el GG, o mejor una limitación que presenta el paquete informático y se refiere a un problema con la escala, en particular en la ventana de análisis de datos en que se muestran las gráficas de las regresiones (fig. 5.5). Allí el programa genera una escala automática, en una ventana relativamente pequeña, en donde los intervalos en los ejes (en especial en *y*) resultan normalmente muy amplios –por lo menos para las situaciones que hemos utilizado en nuestro experimento– esto unido al "tamaño" de los puntos en la gráfica y a la "anchura" con que el paquete dibuja la línea de regresión puede dar una información falsa, o por lo menos ambigua, sobre la relativa proximidad de los puntos con la función.

111. (D cambia en el menú el tipo de regresión utilizando una función sinusoidal, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

Aunque D ya ha encontrado una función que considera da un buen ajuste a la nube de puntos, continúa probando con el menú de regresiones que le brinda el GG, revisando algunas de las otras hipótesis que había contemplado originalmente, como la función seno y la función exponencial. En el ítem 111 retoma su hipótesis inicial de la función seno para la curva del punto anómalo B, el resultado parece que no le satisface, pues continúa probando, esta vez con una función de crecimiento exponencial (ítem 112), la cual sí contempla como una posibilidad de función del mejor ajuste, pues dice "De crecimiento [exponencial] también podría ser" (ítem 113).

112. (D nuevamente cambia el tipo de regresión señalando esta vez en el menú una función de crecimiento [exponencial], aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

113. D: De crecimiento también podría ser

Delimitado el rango de posibilidades a estas dos funciones, a continuación D se dedica a compararlas, tratando de encontrar la que brinde el mejor ajuste.

Así escoge en primera instancia la función de crecimiento exponencial y en la ventana de análisis da datos, revisa los estadígrafos de la regresión y su gráfica (ítems 114 -118).

114. (D abre la ventana de los estadígrafos para la regresión de crecimiento [exponencial])

115 D: ¿Aquí qué pasó? (La ventana de los estadígrafos no es legible por la configuración de zoom que se le ha dado al ordenador para realizar la grabación de video)

116. M: Toca ese, si eso… (El maestro señala uno de los iconos para

normalizar la visualización en la pantalla)

117. D: Pero ¿Por qué se ve tan chiquito [pequeño]? (Se muestra la ventana con los estadígrafos)

118. D: Este también podría ser… (D habla sobre la regresión de crecimiento exponencial)

119 D: … pero me parece que se ve mejor el polinomio [de grado 2, cuadrática]…
(D cambia de nuevo en el menú el tipo de regresión a una función polinomial, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

120. (D cambia en el menú el tipo de regresión volviendo a la de crecimiento exponencial, aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

121. (Nuevamente D cambia en el menú el tipo de regresión utilizando una función polinomial, [de grado 2, cuadrática] aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

122. D: … si…

Luego vuelve a observar la función cuadrática, que le sugiere un mejor ajuste (ítem 119), pero parece que aún no esta completamente segura, pues sigue revisando las dos funciones varias veces más (ítems 120 - 121), para finalmente decantarse por la función cuadrática (ítem 122).

123. (D retoma la guía en papel para responder la pregunta 7 "Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace" y comienza a contestar)

124. D: Aquí, explique cómo lo hace ¿Cómo lo halle?

125. M: Umjum (El maestro asiente)

Después de esta secuencia, se le pide a D que explique el proceso realizado, primero por escrito en la guía (ítems 123 - 125, y recuadro 5.6) y seguidamente de manera oral (ítems 126 - 133).

La explicación escrita como se puede notar es bastante sucinta (Recuadro 5.6).

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

Polinomio: $y = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$.

la Ecuación se hallo mediante el Analisis de Regresión lineal.

Recuadro 5.6 Respuesta en la guía de entrevista de la pregunta 7

126. M: Cuéntame ¿Cómo la hallaste?

127. D: O sea cómo…

128. D: se seleccionan estos dos que serían x y y ... (D señala las columnas A y B de la HdC)

129. D: éste sería x porque no es variable [dependiente] (D señala la columna A) y éste y

Inmediatamente después D explica como halla la función de mejor ajuste, con la ayuda de GG. Primeramente se deben ingresar los datos de la nube de puntos, cuidando de diferenciar las variables dependiente e independiente (ítem 129), este aspecto muestra que D tiene claridad sobre la relación de dependencia entre las variables al interior de la función.

130. D: luego se va uno a análisis de regresión lineal (D indica los iconos del menú estadístico de la HdC)

131. D: y él [el paquete informático GG], le arroja como la que más se asemeje, [a la nube de puntos] o sea, la que cubra como la mayoría de puntos

132. D: pero entonces da también otras opciones de función, entonces de todas por decir la lineal y todo eso

133. D: pero la que más se asemeja es la polinomio [de grado 2, cuadrática] por lo que yo te decía, por los puntos; pasa por la mayoría de ellos y los que no los toca están muy cerca

Luego D comenta sobre el uso de las herramientas estadísticas del GG, y aunque pareciera que le otorga toda la autoridad al paquete informático sobre el tipo de regresión que éste genera (ítem 131), D tiene claridad de cómo debe ser la función que dé el mejor ajuste, aquella "que más se asemeje, [a la nube de puntos] o sea, la que cubra como la mayoría de puntos", lo cual confirma precisamente para la función cuadrática (ítem 133) "por lo que yo te decía, por los puntos; pasa por la mayoría de ellos y los que no los toca están muy cerca" retomando el análisis que ya había realizado anteriormente (ver ítems 105 - 110).

Es significativo como D sabe que el GG genera otros tipos de regresiones (ítem 132) y que las debe tener en cuenta, de esta manera la obtención de la función del mejor ajuste ha estado mediada de una parte por el análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones y de otra parte por las herramientas del paquete informático.

134. (D retoma la guía en papel para responder la pregunta 8 "Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?)

135. (D lee en voz baja la pregunta 8 de la guía: Según su función… […])

136. (D introduce 2008 en la casilla "evalúa" que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5189.6092)

137 M: ¿Y cómo haces para encontrar ese PIB para el 2008?

138. D: Se reemplaza en la *x,* por el, por el año, por decir en éste caso en análisis de datos uno remplaza en "evalúa", entonces él [el paquete informático GG] calcula o sea, él hace la operación matemática, o sea, reemplaza *x* en eso (D se refiere a la ecuación de regresión)

Finalmente se le solicita a D que interpole algunos valores del Producto Interno Bruto (PIB) de los Estados Unidos, dados los años correspondientes (ítems 134 - 139).

Para lo cual D utiliza las herramientas del GG, e interpola los datos remplazando en la casilla que brinda la HdC.

139. (D continúa contestando la pregunta 8 de la guía hasta terminar).
140. M: Bueno muchas gracias.
141. D: Con gusto profe.

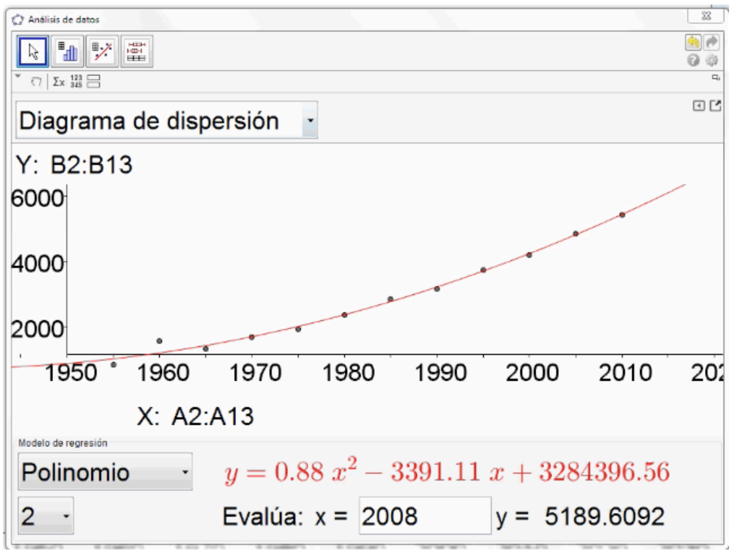


Figura 5.6 Regresión Polinómica de segundo grado e Interpolación (ítems 134-138)

5.7 ERIKA

Es una niña, con buenas capacidades matemáticas, responsable y dedicada en su trabajo durante el curso del cuatrimestre obtuvo un resultado de 4.3 sobre cinco como nota final. Sus notas parciales del cuatrimestre fueron 4.2, 4.0 y 4.8 .

Erika corresponde al alumno 3 del estudio de grupo, sus resultados en las pruebas realizadas al grupo en general fueron: en el Pre Test contestó de manera correcta las preguntas 1a, 1b, 2, 5a y 5b; no abordó las preguntas 3a, 3b y 4 y la pregunta 5c no las respondió adecuadamente. Los resultados de Erika parecen indicar que ella tiene un buen manejo algebraico, al manipular y despejar variables, pero las preguntas que no responde y en las que se equivoca muestran que se confunde con la traducción de las transformaciones en una función desde su gráfica a su expresión analítica y que no reconoce algunas de las familias de funciones.

Erika en la primera parte del Post test respondió cuatro de las cinco preguntas de manera correcta y la pregunta 2b de manera incompleta. Esta pregunta buscaba identificar las trasformaciones aplicadas a la parábola $y = x^2$ a partir de la gráfica. Estos resultados muestran la mejoría en su comprensión de las transformaciones, pero también que aún presenta dificultades con algunas de ellas.

En cuanto al problema de modelización, en la segunda parte del post test, al responder los ítems sobre el análisis cualitativo del fenómeno Erika contesta que el fenómeno se comporta como una función exponencial y realiza un bosquejo de una curva creciente y cóncava hacia abajo.

Erika luego realiza el ajuste con ayuda de las herramientas estadísticas del GG, sin embargo esta vez no opta por la función exponencial, que tenía como hipótesis sino que utiliza la función polinómica obteniendo en este caso la función cuadrática, $h(x) = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374869.94$.

Erika obtuvo un puntaje de 20 sobre 36 en el Test de visualización lo que no la define ni como visualizador ni como no visualizador, según el estudio de Norma Presmeg.

5.7.1 Guía de Entrevista

En los recuadros 5.7 y 5.8 a continuación presentamos la guía de la entrevista, realizada por Erika, para luego inmediatamente después iniciar el análisis del protocolo.

3 Clip 0003
Voz 011.
Video 28/11/2014 MVI_4445

ENTREVISTA

Nombre: Erika Milena barriga Grupo: DAO1N Fecha: 28/11/2014

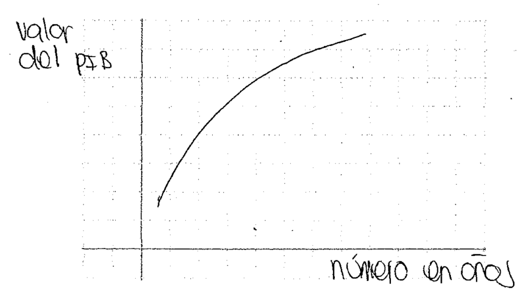
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.



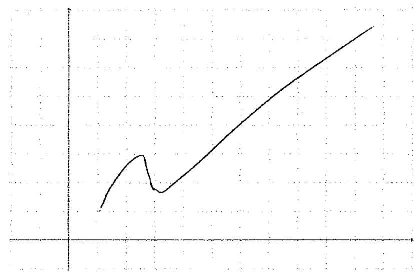
3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

   Sí, una funcion exponencial.

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

Recuadro 5.7 Guía de Entrevista Erika p. 1

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

no,

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$g(x) = 0{,}88x^2 - 3391{,}11x + 3284396.56.$

usando los metodos de regresión en geogebra y analizando cada una de las graficas opcionales escogí la de polinomio puesto que es la que se acomoda mejor a la mayoría de puntos.

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

2008. = 51.89

2013 = 58.36

¿comó ?

* con el metodo de regresión que más se ajusta y teniendo la formula reemplazo el valor que necesitamos en x para así hallar la y.

* otros métodos.
mirando la grafica se podrian denotar los demas valores.

Recuadro 5.8 Guía de Entrevista Erika p. 2

5.7.2 Análisis del Protocolo de Erika

Datos: Video MVI_Erika Audio 011 Pantalla Clip 0003

Las preguntas de la entrevista se han organizado en una Guía de Trabajo, para darles respuesta el estudiante utiliza tanto la guía como el paquete informático GeoGebra (GG).

La guía propone la siguiente situación para ser modelizada:

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)
Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

Se le entrega a Erika la Guía de Trabajo, y ella comienza a responder por escrito en la guía.

1. (Se le entrega a Erika la guía de trabajo, y después de estudiar los datos en la tabla, ella comienza a responder por escrito en la guía la pregunta 2 "Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB")

Erika estudia la tabla presentada en la guía y a partir de la información dada en la tabla construye un bosquejo de cómo cree que podría ser la función que representa el PIB (Fig. 5.7).

2. Maestro: ¿Por qué crees que te da así? [el Maestro se refiere al bosquejo]

El maestro interviene para facilitar la comunicación.

3. Erika: Porque hay unos valores, o sea empieza de chiquito [pequeño] a grande (E *Mueve la mano de derecha a izquierda*), pero también hay unos valores que van disminuyendo un tanto y cosas así (E *mueve la mano de arriba a bajo*).

Erika comienza a explicar las razones de su bosquejo, marcando en primera instancia el carácter creciente de los datos (ítems 3 - 4) del fenómeno, pero de otra parte cuando dice "hay unos valores que van disminuyendo un tanto" (ítem 3) parece que puntualiza cómo la razón de cambio entre puntos consecutivos no

4. E: O sea, entonces no puede ser recta, porque no tienen como, no siempre van aumentando [lo mismo], entonces no siempre va ser así (E *mueve la mano describiendo una diagonal, como una función creciente*).

parece constante, lo cual confirma con su afirmación "no puede ser recta, porque no tienen como, no siempre van aumentando [lo mismo], entonces no siempre va ser así" (ítem 4). Este comentario de E muestra su comprensión del significado de la pendiente-tasa de cambio y su efecto en la gráfica de una función.

Esta claridad que muestra E en cuanto a la variación en la pendiente-tasa de cambio entre dos puntos consecutivos, parece ser la razón que la lleva a proponer de una parte una curva y más exactamente una función cóncava hacia abajo (Fig. 5.7).

De otra parte es importante anotar sobre el bosquejo de E, como no ha contemplado la ubicación del punto anómalo B, lo que se notaría como un "salto" en su bosquejo.

La relación entre los gestos que utiliza E y sus explicaciones parece relevante, pues en ítem 4, E mueve la mano describiendo una diagonal, como una función creciente y en el ítem 3 realiza dos gestos con la mano, uno el movimiento de derecha a izquierda, parece, mostrando los valores del dominio de la función en x, y otro de arriba abajo, probablemente indicando los valores del rango en y.

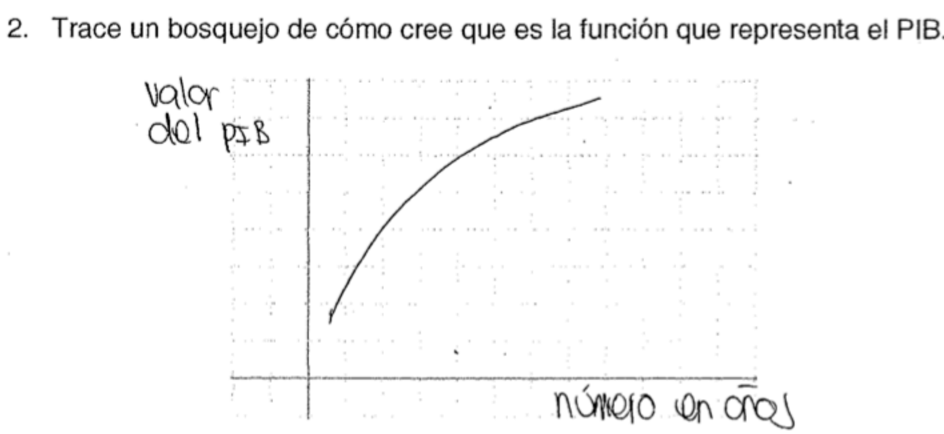


Figura 5.7 Bosquejo de la gráfica de la función (ítems 1-4, pregunta 2 de la guía).

> 3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
>
> Sí, una funcion exponencial.

Recuadro 5.9 Respuesta al punto 3 de la guía.

5. (E responde la pregunta 3 de la guía "¿La función se parece a alguna función que conozca o que hallamos estudiado?")

La respuesta de E a la pregunta 3 "¿La función se parece a alguna función que conozca o que hallamos estudiado?, Sí, una función exponencial" (Recuadro 5.9), es una opción, pero podrían contemplarse otras como la función cuadrática, la función raíz cuadrada o la función logarítmica, las cuales E no menciona, aunque se estudiaron en el curso. Esto puede deberse a lo que Goldenberg (1991) ha mencionado como diferencia entre la Gestalt de algunas de las funciones y su representación a través de determinadas aplicaciones, así por ejemplo la Gestalt de la función cuadrática, una parábola como se enseña normalmente, correspondería con una especie de "u" o "u invertida" lo cual no es exactamente el tipo de gráfica en el bosquejo de E, pero si podría corresponder a una parte de esta parábola.

6. (E amplia la ventana de la HdC de GG y comienza a introducir datos en la HdC, introduce [A1; años], comenzando así a contestar la pregunta 4 de la guía "Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos")

E reconstruye la tabla en GG (ítems 6 - 31) mostrando el manejo de esquemas propios de la Hoja de Cálculo.

7. (E Introduce [B1; PIB])
8. (E Introduce [A2; 1960] corrige [A2; 1955])
9. (E Introduce [A3; 1960])
10. (E Introduce [A4; 1965])
11. (E Introduce [A5; 1970])
12. (E Introduce [A6; 1975])
13. (E introduce [A7; 1980])
14. (E introduce [A8; 1985])
15. (E Introduce [A9; 1990])
16. (E Introduce [A10; 1995])
17. (E Introduce [A11; 2000])
18. (E Introduce [A12; 2005])
19. (E Introduce [A13; 2010])
20. (E Introduce [B2; 837])

21. (E Introduce [B3; 1559])

E no nota que la coordenada en *y* del punto B (1960, 1559), tiene un comportamiento anómalo, respecto a los demás puntos de la nube (ítem 21).

22. (E Introduce [B4; 1328])
23. (E Introduce [B5; 1700])
24. (E Introduce [B6; 1934])
25. (E Introduce [B7; 2373])
26. (E Introduce [B8; 2847])
27. (E Introduce [B9; 3173])
28. (E Introduce [B10; 3746])
29. (E Introduce [B11; 4207])
30. (E Introduce [B12; 4853])
31. (E Introduce [B13; 5439])

32. (E cambia el encabezado de la tabla, cambiando el contenido de la celda A1, introduce [A1; x], con lo que GG grafica la recta $y = x$)

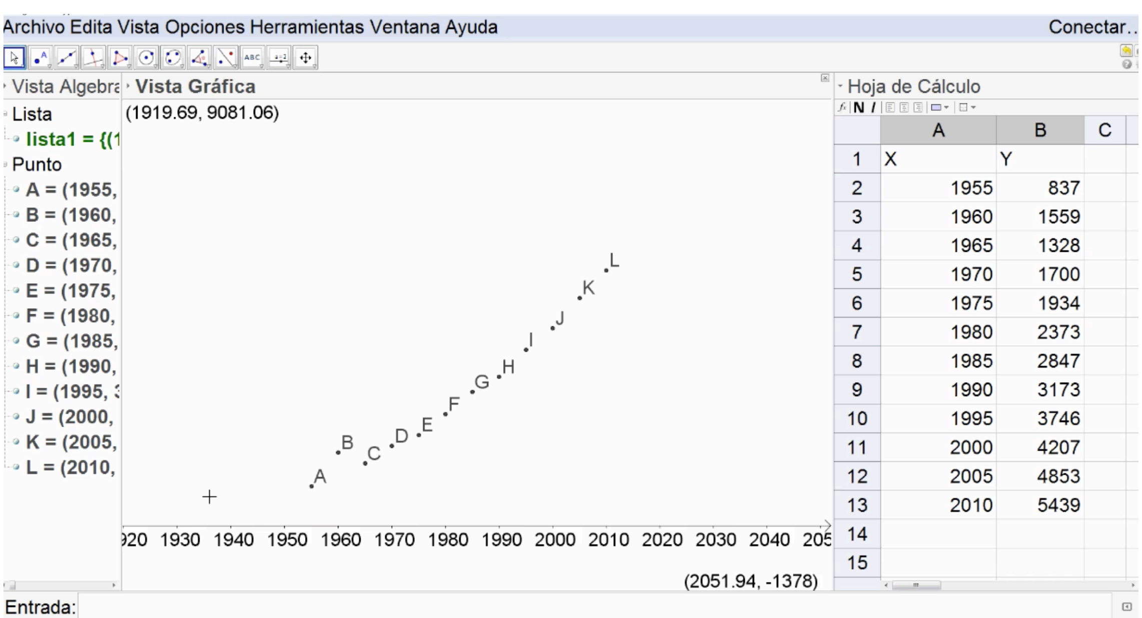
33. (E corrige e introduce [A1; X])

E muestra haberse apropiado de esquemas particulares de la HdC de GG (ítems 32 y 33), lo que muestra su trabajo previo y familiarización con la herramienta, como consecuencia de la génesis instrumental.

34. (E cambia el encabezado de la tabla, cambiando el contenido de la celda B1, introduce [B1; Y])

35. (E selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)

E Luego de haber construido la tabla, grafica la nube de puntos en GG (ítems 35-38).



	A	B	C
1	X	Y	
2	1955	837	
3	1960	1559	
4	1965	1328	
5	1970	1700	
6	1975	1934	
7	1980	2373	
8	1985	2847	
9	1990	3173	
10	1995	3746	
11	2000	4207	
12	2005	4853	
13	2010	5439	
14			
15			

Figura 5.8 Vista Gráfica y de la Hoja de Cálculo en la pantalla del ordenador (ítem 38).

36. (E crea la lista de puntos con el menú de la HdC de GG)

37. (E va a la ventana en la vista gráfica y selecciona la opción *"*Encuadre de todos los objetos", con lo que se visualiza completamente la nube de puntos).

38. (E ajusta el zoom de la vista grafica a un 66%).

Con lo que E muestra conocimiento de esquemas sobre el paquete informático GG, en particular en la construcción de gráficas a partir de tablas y en el manejo de las herramientas de escala como la opción "Encuadre de todos los objetos" y el zoom (ítems 37 y 38).

39. E: ¿Trazo una línea o dibujo los punticos? (E le consulta a M, se refiriere a la pregunta 5 de la guía: "Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG").

40. (Simultáneamente, mientras pregunta E *señala con el dedo la trayectoria de la nube de puntos desde A (1955, 837) hasta L (2010, 5439)*).

E nuevamente hace un gesto, con el dedo recorre la trayectoria de la nube de puntos desde su inicio en el punto A (1955, 837) hasta el final en el punto L (2010, 5439). Lo hace de una manera muy espontánea, y no marca la variación en el punto anómalo B (1960, 1559), puede ser porque nuevamente no lo nota, o porque no le da importancia a que este punto se salga de la "tendencia" que siguen los demás puntos en la nube.

41. M: Pues mas o menos, como la forma, es un bosquejo no tiene que ser así estrictamente cada punto, no.

42. (E hace un nuevo zoom de acercamiento de la nube de puntos)

43. (E realiza un bosquejo a partir de la gráfica de la nube de puntos en GG)

Este segundo bosquejo que realiza E, (ítem 43, fig. 5.9) a partir de la nube de puntos que se muestra en la Vista Gráfica del GG, (fig. 5.8) tiene algunas características llamativas, de una parte, aquí sí se nota claramente la ubicación del punto anómalo B (1960, 1559), que antes no se había contemplado; de otra parte E ha dibujado el intervalo de la nube de puntos entre los puntos C (1965, 1328) hasta L (2010, 5439) casi como una línea recta, o aún más como una curva suave cóncava hacia abajo, a pesar de que la nube de puntos que muestra el GG, tiende a ser una curva suave pero cóncava hacia arriba.

Pareciera que la figura que realiza E, trata de combinar lo que se ve en la pantalla del ordenador (fig. 5.8) con sus ideas a partir del análisis cualitativo del fenómeno y plasmadas en su primer bosquejo (fig. 5.7), lo que explicaría la curva suave cóncava hacia abajo.

Un aspecto más que se observa en la gráfica de E es el hecho de que se ha graficado una función continua a pesar de que la representación de la nube de puntos de GG (fig. 5.8), es una gráfica discreta.

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.

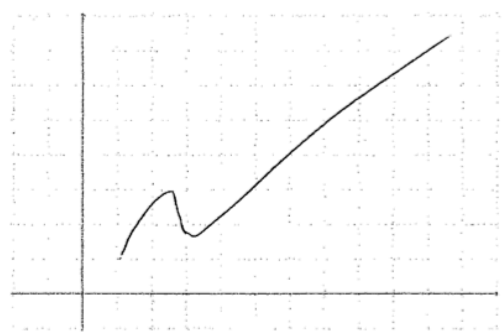


Figura 5.9 Bosquejo de la gráfica de la nube de puntos en GG (ítem 42).

44. E: No me acuerdo, no. (E se refiriere a la pregunta 6 de la guía: "¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?")

Es particular que consultada E en la pregunta 6 "¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?" su respuesta en la guía es *no* (ver recuadro 5.8), esto puede ser debido a que, como menciona la literatura, E realmente examina la nube de puntos como un todo, de una manera general y desde ese punto de vista reconocer una función con esta forma estricta no es una tarea sencilla. Tal vez si E contemplara intervalos o regiones de la nube de puntos, notaría parecidos con algunas funciones.

De otra parte puede ser que realmente E no recuerde las representaciones de las familias de funciones estudiadas, lo cual le daría pistas.

45.	M: ¿Y qué forma tienen esos puntos? ¿Es una recta?	M insiste sobre la forma de la función (ítem 45), y en particular si es una recta, dada la gráfica que realiza E.
46.	(E *recorre poco a poco la nube de puntos con el cursor desde L(2010, 5439) hasta C(1965, 1328) y luego regresa hasta E(1975, 1934) y se aleja un poco de la nube de puntos*).	Ante el cuestionamiento E hace un nuevo gesto en que revisa la nube de puntos con el cursor desde el punto L(2010, 5439) hasta C(1965, 1328) y luego regresa hasta E(1975, 1934), como estudiando este intervalo de la nube de puntos (ítem 46).
47.	E: Ummm No, pues no o si.	Luego del gesto, E responde dudosa "Ummm No, pues no o si" (ítem 47), esta duda puede deberse al contraste entre la gráfica realizada y su claridad en el análisis cualitativo ya comentado, sobre la pendiente-tasa de cambio (ítem 3). O también al resultado de su revisión del intervalo entre los puntos C y L en donde puede que contemplara la posibilidad de que este intervalo fuera una función lineal.
48.	E: ¿Cómo era? (E se pregunta a sí misma, en voz baja)	
49.	(E selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)	E comienza a utilizar el menú estadístico de GG para buscar la función que dé el mejor ajuste (ítems 49 – 50).
50.	(E comienza a utilizar el menú estadístico de la HdC de GG para hacer un análisis de dos variables buscando algún tipo de regresión)	
51.	M: Pero, fuera de esa forma, (M se refiere al uso de las herramientas estadísticas de la HdC) ¿No hay otra manera en que puedas averiguarlo?	Ante el intento de E de utilizar las herramientas estadísticas del GG, M trata de proponerle que utilice otro método estudiado en el proceso de enseñanza (ítems 51 - 55). Ante lo cual E se muestra dudosa, parece que no recordara otros métodos, o los recordara vagamente.
52.	M: eso lo vamos a usar luego, pero…	
53.	E: Pues no se… con…	
54.	E: No pues para hallar una ecuación, ¿sería con la pendiente y esas cosas?	Es interesante que E mencione la pendiente, como un método para hallar la ecuación, el cual fue uno de los métodos alternativos para las líneas rectas, que se utilizaron durante el proceso de enseñanza, sin embargo luego no lo retoma para poder hallar una función adecuada de ajuste (ítem 54), tal vez por la
55.	M: O algo así, si, por ejemplo	

duda mencionada entre la gráfica y el análisis cualitativo realizado.

56. E: ¿pero igual la busco acá? (E se refiere al uso de las herramientas estadísticas de la HdC)

Pareciera que E lo que quisiera hacer es utilizar las herramientas estadísticas del GG, sin tener en cuenta otras herramientas del paquete informático u otros métodos como hallar la ecuación de una recta con el uso de la pendiente con papel y lápiz (ítem 56).

57. M: Pues si puedes hacer algo distinto de esa herramienta del GG, prueba con eso antes y luego sí de último hacemos lo de esa ventanita (M se refiere al uso de las herramientas estadísticas de la HdC)

M trata de dar pistas a E para que recuerde otros métodos para modelizar la nube de puntos, antes de usar las herramientas estadísticas de la HdC de GG (ítems 57-64).

58 (E revisa lo que ha respondido en la guía)

59. E: No se profe, no se que …más hacer (E dice algo que no se entiende)

60. M: No, si el otro día hiciste una así distinta, ¡sí!

61. E: No

62. M: Sí

63. E: Ah pues intentando funciones ¿no?

64. M: Por ejemplo

65. (E desplaza la ventana de las herramientas estadísticas, e intenta escribir en la barra de entrada, pero GG no responde)

66. M: Cierra la ventana y luego si vuelves

67. E: Es que no es eso

Finalmente parece que E, recuerda el método de ajuste manual, con el uso de las ecuaciones canónicas y los parámetros (ítem 63).

68. E: no se, empiezo con 1955 (E dice algo en voz baja que no se entiende)

69. (E escribe en la ventana de entrada 19955 y luego corrige a 1955)

70. E: no eso es en x... (E dice algo en voz baja que no se entiende)

71. (E borra la entrada de 1955)

72. (E escribe en la barra de entrada $837x$ y lo introduce, con lo que el GG genera la función $f(x) = 837x$)

Parece que E intenta escribir una ecuación canónica para la nube de puntos y esta pensando en el o los parámetros que debe llevar (ítems 68 - 69) para ello ha escogido 1955, la coordenada en x del punto A (1955, 837), pero no tiene claridad si incluirlo o no, a lo que dice "no eso es en x" (ítem 70) y cambia a la coordenada en y del mismo punto 837, anotando $837x$ en la barra de entrada, con lo que el GG genera la función $f(x) = 837x$ (ítem 72).

Pareciera que E asume que por ser la coordenada en el eje y, esta debe ir en la expresión de la función $y = 837x$.

Este asunto de utilizar como referencia un punto de la nube para definir los parámetros de la ecuación canónica, parece una actuación que emplean varios de los resolutores, en el uso del método de ajuste manual.

De otra parte la dificultad que experimenta E en reconocer la magnitud del parámetro que se debería utilizar y su ubicación en la ecuación canónica, también la han experimentado otros sujetos en el estudio.

73. E: ¿Aquí cómo hago para verla? (E señala con el cursor la expresión $f(x) = 837x$ en la Vista Algebraica que se encuentra un poco oculta)
74. M: ¿Qué la veas?
75. E: Sí
76. M: Corre un poco la ventana, desde el borde, ahí
77. E: ¿Acá? (E realiza la acción ampliando la Vista Algebraica del GG, con lo que ya se puede ver la expresión completa de la función $f(x) = 837x$)
78. M: Eso, (asiente)
79. E: Pero igual la [gráfica de la] línea no sale en la pantalla, no es que… (E dice algo en voz baja que no se entiende)
80. M: Ah, ¿Qué la veas en la Vista Gráfica?

El interés por ver la gráfica de la función (ítems 73 y 79), pareciera indicar que E realmente ha iniciado el proceso de ajuste manual, viendo que tan cerca se encuentra esta primera función que propone, para luego irla ajustando poco a poco con el uso de las ecuaciones canónicas y los parámetros, lo cual parece que se confirma con el gesto que realiza en el ítem 81.

81. (E *señala y recorre con el dedo los puntos A, C, D, E y F*)

E hace un gesto con el dedo señalando el punto A y avanzando en línea recta en la dirección de la nube, sobre los puntos C, D, E y F donde se detiene (ítem 81). Pareciera que E esperaba ver la gráfica de la función $f(x) = 837x$ sobre la nube de puntos y con una pendiente que coincidiera con la ubicación de los puntos.

82. E: ujum
83. M: A no ahí si te toca correrte, o haciendo zoom, o algo así (M se refiere a desplazarse por la Vista Gráfica, o hacer una traslación de la función)
84. E: No se (E dice algo en voz baja que no se entiende) que…
85. E: No se que hacer
86. E: No se que intentar

Pero da la impresión que ante la dificultad de ver la función (ítem 79), –o de lograr ajustarla para que se vea cerca a la nube de puntos– (ítem 83) parece que E se desanima y se bloquea (ítems 84 – 86).

87. M: Con otro tipo de función o algo, otra que te sirva más

Buscando reanimar el proceso, y que E pueda proponer y estudiar una función de ajuste, M trata de que E utilice otra familia

88. E: ¿Una exponencial?

89. M: ummmm

de funciones, a lo que ella responde pensando en la función exponencial, su hipótesis inicial a partir del análisis cualitativo (ítems 87 - 88), pero E no escribe ninguna expresión para esta función, parece que no recordara su ecuación canónica, o que no quisiera intentarlo.

90. E: (E dice algo en voz baja que no entiende) … habría que sacar la grafiquita de allá (E se refiere a la ventana del menú estadístico de la HdC de GG).

91. (E *señala con el dedo la nube de puntos*)

En cambio nuevamente E vuelve a su necesidad de utilizar las herramientas estadísticas de la HdC (ítem 90), pareciera que le es imposible escribir las ecuaciones canónicas de los tipos de funciones que piensa que le podrían servir para el ajuste.

O de otra parte podría ser que E ha creado un cierto tipo de dependencia de esta herramienta de la HdC, de tal forma que si no realiza el proceso con ella, no lo puede hacer, si esta fuera la situación sería un claro ejemplo de la dificultad que hemos llamado "Autoridad del Ordenador", la cual como mencionan Leinhard et al., (1990) puede llevar a los estudiantes a desarrollar una dependencia demasiado fuerte de la máquina.

Ambas situaciones parecen mostrar que aunque E tiene cierta comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de ajuste hay otros aspectos en los que presenta vacíos o dudas, y para solventarlos recurre a las herramientas estadísticas de la HdC, que acaban brindándole el apoyo para encontrar la respuesta que esta buscando, sin embargo esta forma de resolver sus dudas podría a la postre, generar dificultades en el Aprendizaje.

92. M: Bueno hazlo pues y luego volvemos a mirar a ver

93. (E sombrea en la HdC el bloque de celdas [A1: B13])

94. (E comienza a usar el análisis de regresión del menú estadístico de la HdC de GG y aparece una nueva ventana con la nube de puntos)

Finalmente M desiste y permite que E utilice las herramientas estadísticas de la HdC para hallar la función que dé el mejor ajuste (ítems 92 – 140).

E comienza a probar sistemáticamente todos los tipos de regresión que le ofrece el paquete informático, en el orden estricto

95. (E escoge la regresión lineal y observa su resultado en la nube de puntos)
96. (E cambia de regresión y escoge la regresión logarítmica y observa su resultado en la nube de puntos)
97. (Luego E cambia nuevamente de regresión y escoge la regresión polinómica y observa su resultado en la nube de puntos)
98. (De nuevo E cambia de regresión y escoge la regresión de potencia y observa su resultado en la nube de puntos)
99. (Nuevamente E cambia de regresión y escoge la regresión exponencial y observa su resultado en la nube de puntos)
100. (E cambia de regresión y escoge la regresión de crecimiento y observa su resultado en la nube de puntos)
101. (E de nuevo cambia de regresión y escoge la regresión sinusoidal y observa su resultado en la nube de puntos)
102. (E cambia de regresión y escoge nuevamente la regresión de crecimiento y observa su resultado en la nube de puntos)

en que aparecen en el menú de la ventana de análisis de datos revisando las gráficas de las funciones de regresión en la pequeña ventana que se despliega (ítems 94 - 101).

Su revisión es relativamente rápida y aunque si se notan diferencias entre las funciones, en general todas se acercan a la nube de puntos como era de esperarse.

103. E: todas funcionan

Cuando llega al final de la lista empieza a regresarse, pero se percata que realmente todas las funciones de regresión ajustan, dice E "todas funcionan" con cierta sorpresa (ítem 103).

104. (E cambia nuevamente de regresión y escoge por segunda vez la regresión exponencial y observa su resultado en la nube de puntos)
105. (De nuevo E cambia de regresión y escoge nuevamente la regresión de potencia y observa su resultado en la nube de puntos)
106. (E cambia una vez más de regresión y escoge de nuevo la regresión polinómica y observa su resultado en la nube de puntos)
107. M: ¿Cuál te sirve?
108. E: la de polinomio

Entonces E refina su estrategia, seleccionando nuevamente regresiones que ya había probado (ítems 104 - 106), pero tomándose un poco más de tiempo revisándolas, comparándolas, esperando encontrar diferencias significativas, así de las 7 regresiones originales, las reduce a cuatro, excluyendo las regresiones lineal, logarítmica y sinusoidal, de entre las restantes elige en primera instancia la regresión polinómica, como la función de mejor ajuste (ítem 108).

109. (E copia la gráfica de la regresión polinómica de la ventana estadística a la Vista Gráfica)
110. E: Si
111. E: No mentira

Pero luego E realiza un procedimiento que pone en duda su decisión (ítem 109), E traslada la pequeña gráfica de la regresión polinómica, como aparecía en la ventana de análisis de datos a la Vista Gráfica (Fig. 5.10) una ventana mayor, en donde

112. (E de nuevo cambia de regresión y escoge la regresión exponencial y observa su resultado en la nube de puntos)
113. (E vuelve a cambiar de regresión y escoge la regresión de potencia y observa su resultado en la nube de puntos)

le parece que ya no ajusta tan bien y duda, con lo que vuelve a revisar varias de las regresiones estudiadas, incluso la regresión logarítmica que había descartado (ítems 112-118).

114. M: Acuérdate que luego tienes que predecir más valores, ¿no?
115. (E de nuevo cambia de regresión y escoge la regresión de crecimiento [exponencial] y observa su resultado en la nube de puntos)
116. (Una vez más E cambia de regresión y escoge la regresión logarítmica y observa su resultado en la nube de puntos)
117. (E vuelve a cambiar de regresión y escoge la regresión polinómica y observa su resultado en la nube de puntos)
118. (Nuevamente E cambia de regresión y una vez más escoge la regresión exponencial y observa su resultado en la nube de puntos)

M tratando de brindar pistas que refinen el proceso de ajuste con miras al concepto de modelización, le hace el comentario “Acuérdate que luego tienes que predecir más valores, ¿no?” (ítem 114).

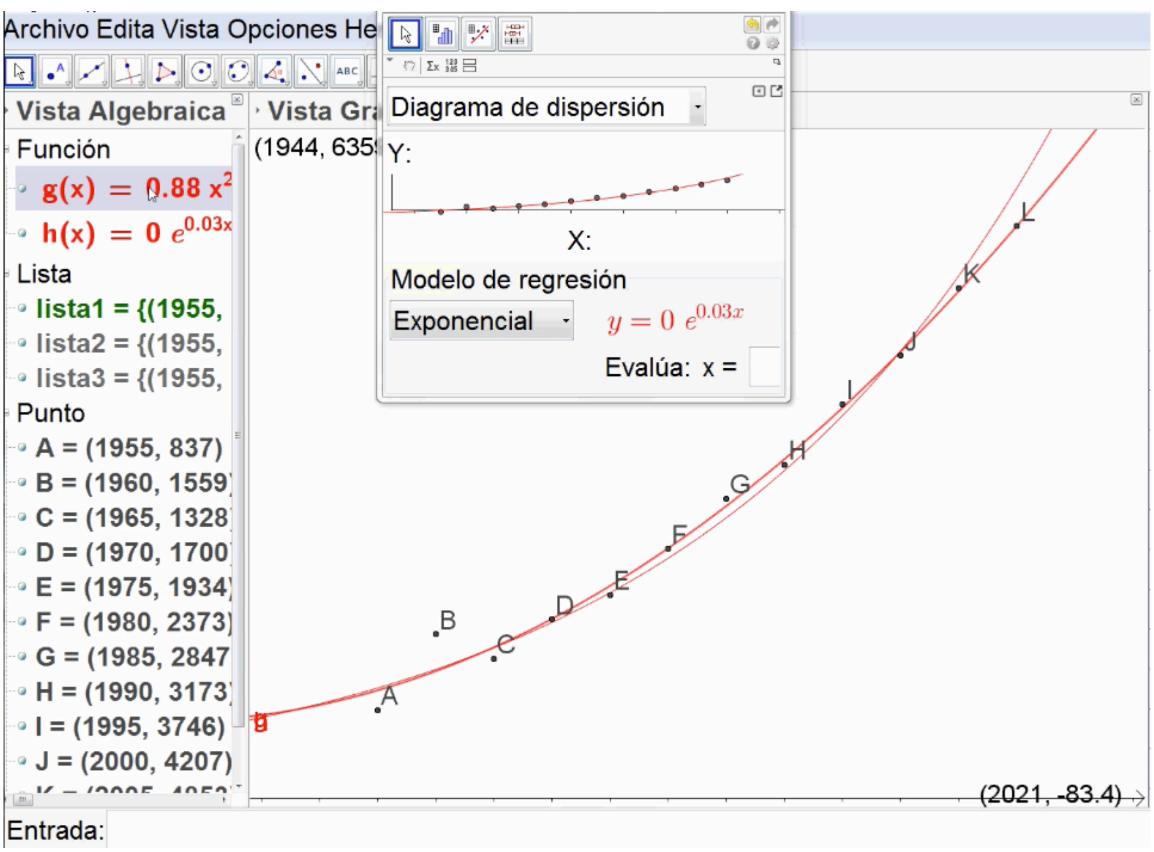


Figura 5.10 Captura de pantalla después del ítem 119, con las regresiones Exponencial y Polinómica (la más intensa).

119. (E copia la gráfica de la regresión exponencial de la ventana estadística a la vista gráfica)

120. M: Si quieres cámbiale el color o algo para [poderlas diferenciar] (M se refiere a las gráficas de las dos regresiones polinómica g y exponencial h)

121. (E borra la ecuación de la regresión polinómica dejando solo la exponencial)

122. E: Ahí ya no cuadra (se refiere a que el ajuste a la nube de puntos con esta función no es preciso)

123. E: Pero acá parece que cuadrara (se refiere a la representación gráfica en otra escala que se ve en la pequeña ventana de análisis de datos de la HdC)

124. E: no se

Después de haber vuelto a revisar los tipos de regresiones de GG y analizarlas con mayor detalle E escoge dos funciones de regresión para verlas en la vista gráfica (ítems 109 y 119), la exponencial y la polinómica, que ya habíamos mencionado, como se pueden apreciar en la fig. 5.10 .

Esta estrategia de comparar las dos funciones en una ventana mayor, puede ser muestra de la búsqueda del mejor ajuste a la nube de puntos y/o de una mayor comprensión del proceso de modelización.

Con esta nueva estrategia de ver las gráficas de las regresiones con una mayor escala en la ventana mayor de la Vista Grafica, E experimenta una dificultad, generada por una limitación del paquete informático (ítems 122 – 124) pues este presenta un problema con la escala, en particular en la ventana de análisis de datos en que se muestran las gráficas de las regresiones (fig. 5.10 ventana pequeña). Allí el programa genera una escala automática, en una ventana relativamente pequeña, en donde los intervalos en los ejes (en especial en *y*) resultan normalmente muy amplios –por lo menos para las situaciones que hemos utilizado en nuestro experimento– esto unido al "tamaño" de los puntos en la gráfica y a la "anchura" con que el paquete dibuja la línea de regresión puede dar una información falsa, o por lo menos ambigua, sobre la relativa proximidad de los puntos con la función, como lo experimenta E quien ve en la ventana de análisis de datos (ventana pequeña) como la función brinda un buen ajuste a la nube de puntos (ítems 118, 123 y fig. 5.10), dice E "Pero acá parece que cuadrara", pero cuando traslada la función a la vista gráfica en donde la escala es mayor (ventana grande) ya la función no da tan buen ajuste, sobre este cambio dice E "Ahí ya no cuadra" (ítem 122) y esta situación la confunde (ítem 124).

Sin embargo cabe destacar el buen manejo que ha realizado E, en cuanto a revisar el ajuste que brindan las regresiones en las dos escalas (la de la ventana pequeña y la de la Vista Gráfica, grande y variable) tratando así de minimizar la ambigüedad que presentaba la gráfica en la ventana de análisis de datos.

125. (E vuelve a la ventana estadística y cambia el tipo de regresión a una de crecimiento y copia la gráfica en la vista gráfica)

126. E: la lineal

127. (E borra la gráfica de la regresión de crecimiento en la vista gráfica.)

128. (E vuelve a la ventana estadística y cambia el tipo de regresión a una lineal y copia la gráfica en la vista gráfica.)

129. (E vuelve a la ventana estadística y cambia el tipo de regresión de nuevo a una función de crecimiento y copia la gráfica en la vista gráfica, quedando las dos regresiones.)

130. E: No se puede

131. (E borra las gráficas de las regresiones de crecimiento y lineal en la vista gráfica.)

El darse cuenta de esta ambigüedad que presentan las gráficas, lleva a E a refinar nuevamente su estrategia (ítems 125–132), de manera que esta vez revisa las regresiones ya no en la ventana pequeña de análisis de datos, sino directamente en la Vista Gráfica, analizando nuevamente las diferencias en el ajuste en los diversos tipos de regresiones.

132. (E vuelve a la ventana estadística y cambia el tipo de regresión a una función polinómica y copia la gráfica en la vista gráfica)

Después de esta nueva revisión de las funciones de regresión, y de descartar algunas, que parece que no le brindan el nivel de ajuste que busca, E vuelve a la función polinómica (ítem 132), que ya había elegido anteriormente (ítem 109), pero de la que había tenido dudas.

133. E: Yo creo que esta es la que más da [la que mejor se ajusta a la nube de puntos] (se refiere a la regresión polinómica)

134. (E ajusta la vista gráfica haciendo zoom, alejando ligeramente la nube de puntos y la curva de regresión)

135. E: Yo creo que esta es la que más da [la que mejor se ajusta a la nube de puntos] (se refiere a la regresión polinómica)

Ahora en cambio se muestra segura de que esta es la función que brinda el mejor ajuste a la nube de puntos (ítems 133, 135 y fig. 5.11). Pero además E ha desarrollado un esquema que le brinda seguridad, una técnica de revisión del ajuste desde la Vista Grafica, el hacer continuamente zoom alejando y acercando la nube de puntos y la curva de regresión (ítem 134).

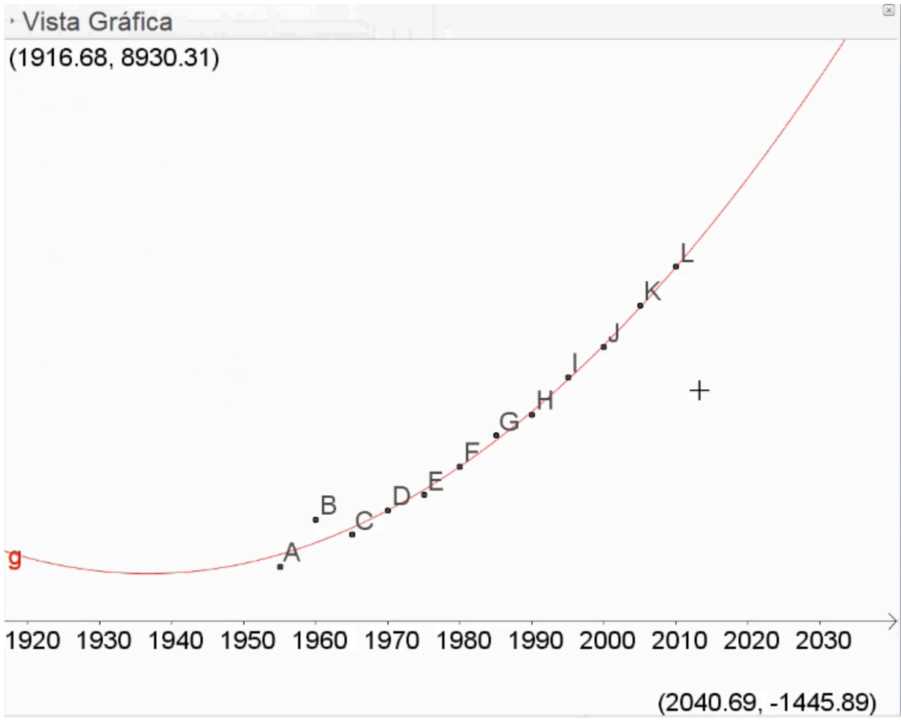


Figura 5.11 Vista Gráfica con la regresión polinómica y la nube de puntos después de ítem 134.

136. M: Bueno, y ¿Por qué crees que esa es la que mejor le va?

137. E: Pues es como la que a más puntos se acerca, porque las tres son muy distantes (se refiere a las regresiones lineal, exponencial y de crecimiento).

138. E: Digamos, toca como estos tres (E señala los puntos I, K y L) y las otras si no tocan. Digamos toca más puntos que las demás, entonces pues es la que más se acomoda.

Ya cuestionada E sobre las razones para elegir la función polinómica como la curva de mejor ajuste, E responde “es como la que a más puntos se acerca, porque las tres son muy distantes” –refiriéndose a las regresiones lineal, exponencial y de crecimiento– (ítem 137) lo que confirma al continuar su explicación (ítem 138) “toca como estos tres (los puntos I, K y L) y las otras si no tocan. Digamos toca más puntos que las demás, entonces pues es la que más se acomoda”.

Esta idea de ajuste de E es esencialmente correcta, ya que es el principio que rige los métodos de ajuste formal como el de regresión por mínimos cuadrados.

De otra parte es importante comentar como E no solo hace uso del concepto de ajuste sino también del de modelización, ya que esta mirando la tendencia sobre todo en los últimos puntos de la nube, en este caso los puntos I, J, K y L (ítem 138), dándoles una enorme importancia.

139. (Mientras explica, E aleja y acerca

E de nuevo aplica el esquema de la técnica ligeramente la nube de puntos haciendo zoom en la vista gráfica).

de revisión del ajuste con el uso del zoom que habíamos comentado anteriormente (ítem 139).

140. (E retoma la guía en papel para responder la pregunta 7 “Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace” y comienza a contestar)

141. (E amplia la vista algebraica para ver toda la expresión de la función de regresión polinómica $g(x) = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$)

142. (E dice algo que no se entiende)

143. E: Y ¿Cómo explico cómo lo hago?

144. M: Escribe lo que hiciste

145. E: ¿Te escribo todo el proceso?

146. M: Ujumm (M asiente)

E responde la pregunta 7 de la guía, “Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace”, anotando la expresión de la regresión polinómica, que considera brinda el mejor ajuste $g(x) = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$ y explica de manera sucinta el proceso que ha realizado (ítems 140 – 145 y recuadro 5.10), sin embargo es llamativa la justificación “es la que se acomoda mejor a la mayoría de los puntos”, en la que subyace la idea de modelización.

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$g(x) = 0{,}88x^2 - 3391{,}11x + 3284396.56.$

usando los metodos de regresión en geogebra y analizando cada una de las gráficas opcionales escogí la de polinomio puesto que es la que se acomoda mejor a la mayoría de puntos.

Recuadro 5.10 Respuesta a la pregunta 7 de la guía.

147. M: ¿Qué hiciste?

148. E: Pues ya teniendo los punticos, pues con el método de regresión de GG, pues mire todas las posibilidades que habían de gráficas [de regresión] y pues [observe] la que más se acercaba y pues la escogí, en este caso es la de polinomio, y ya.

149. M: Ujumm (M asiente)

150. (E reajusta la vista algebraica a su dimensión original).

Cuestionada, por el proceso realizado, E responde, de manera muy semejante a su texto en el recuadro 5.10 (ítem 148).

151. (E retoma la guía en papel para responder la pregunta 8 “Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?”).

152. E: Tengo que volver a sacar todo.

153. (E sombrea en la HdC el bloque de celdas [A1: B13]).

E retoma la guía para responder la última pregunta de la guía, para ello debe volver a realizar el proceso para obtener la función de regresión y con las utilidades del GG realizar la interpolación (ítems 151-160).

154. (E comienza a usar el análisis de regresión del menú estadístico de la HdC de GG y aparece una nueva ventana con la nube de puntos).
155. (E escoge la regresión polinómica y GG muestra la función $g(x) = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$)

156. (E introduce 2008 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5189.6092).
157. M: ¿Ahí qué hiciste?
158. E: Pues como esa es la función que más se acomoda a los puntos, entonces remplace la *x* en esta función para hallar *y*.
159. (E introduce 2013 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5836.3477).
160. (E contesta la pregunta 8 en la guía).

En el ítem 156 utilizando las herramientas estadísticas del GG E realiza la interpolación del valor del PIB para el año 2008, y luego para el 2013 (ítem 159).

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

2008. = 51.89
2013 = 5836

¿como?
* con el metodo de regresión que más se ajusta y teniendo la formula reemplazo el valor que necesitamos en x para así hallar la y.

* otros métodos.
mirando la grafica se podrian denotar los demas valores.

Recuadro 5.11 Respuesta al punto 8 de la guía. (ítem 159)

161. (E aleja y acerca ligeramente la nube de puntos haciendo zoom en la vista gráfica).

162. E: Pues de pronto si uno mira la gráfica puede hallar los otros valores ¿No? (E se refiere a la última parte de la pregunta 8 "¿Podría usar otro método para hallar esos valores?").
163. M: Ujumm (M asiente) por ejemplo.
164. E: Yo creo que si.

E propone en los métodos alternativos para obtener el PIB de los años propuestos utilizar la gráfica de la función de regresión, lo que muestra su comprensión de las posibilidades del ámbito gráfico.

165. M: ¿Podrías hallar otra función ahora si? Que no fuera con la herramienta del GG.

M hace un intento final de que E utilice el método de ajuste manual con el uso de las

166. E: A ver yo pienso.
167. (E amplia la vista algebraica, como revisando la ecuación).
168. (E devuelve a su tamaño la vista algebraica y amplia la vista gráfica).
169. (E borra la curva polinómica de regresión que había encontrado, dejando solo la nube de puntos en la vista gráfica).
170. E: Pues es que, ni idea como hacerlo, no, o sea es que los valores varían mucho, no tienen como un patrón para decir es esto menos tal.
171. M: De pronto de otro estilo funcione ¿No?
172. E: ¿Cómo otras funciones?
173. M: Con otro tipo de funciones.
174. E: No profe no se.
175. M: Bueno listo, muchas gracias.

ecuaciones canónicas de las funciones y sus parámetros, pero parece que definitivamente E no las recuerda o no las quiere utilizar (ítems 165-174).

5.8 JAN

Es un estudiante, muy capaz y con un buen desempeño en matemáticas. En su trabajo durante el curso del cuatrimestre obtuvo un resultado de 4.5 sobre cinco. Sus notas parciales del cuatrimestre fueron 4.5, 4.3 y 4.8 .

Jan corresponde al alumno 9 del estudio de grupo, sus resultados en las pruebas realizadas al grupo en general fueron: en el Pre Test contestó de manera correcta las preguntas 2, 4, 5b y 5c; contestó de manera incompleta la pregunta 4; no abordó las preguntas 3a y 3b y las demás preguntas las respondió de forma incorrecta. Las preguntas en que se equivoca Jan o aquellas que no aborda, muestran que él tiene se confunde con la traducción de las transformaciones en una función desde su gráfica a su expresión analítica y que no reconoce algunas de las familias de funciones.

En la primera parte del Post test respondió cuatro de las cinco preguntas de manera correcta y la pregunta 2b de manera incompleta. Esta pregunta buscaba identificar las trasformaciones aplicadas a la parábola $f(x) = x^2$ a partir de la gráfica. Estos resultados muestran la mejoría en el desempeño de Jan, pero también que aún presenta dificultades con algunas de las transformaciones.

En la segunda parte del post test en donde se resuelve el problema de modelización, al momento de realizar el análisis cualitativo del fenómeno, allí Jan realiza el bosquejo de una curva creciente, con varios cambios de concavidad, tal vez tratando de aproximarla a la nube de puntos y parece reconocer que el fenómeno se comporta como una función exponencial.

Luego realiza un ajuste de manera "manual" de la función, pero esta vez no es con la función exponencial, que tenía como hipótesis sino que utiliza la función cúbica $f(x) = 0.03(x - 1962.24)^3 + 48.08$.

Jan obtuvo un resultado de 22 sobre 36 en el Test de visualización de Presmeg. Este puntaje no logra ubicarlo claramente en los grupos de visualizadores ni de no visualizadores, sin embargo si muestra una tendencia en él hacia la visualización.

5.8.1 Guía de Entrevista

En los recuadro 5.12 y 5.13 se aprecia la guía en papel que desarrolló Jan durante la entrevista

(4) Clip 0004
Voz 012.
Jean.

ENTREVISTA

Nombre: Jan Carlos Gutierrez Grupo:________ Fecha: 28 /11/2014.

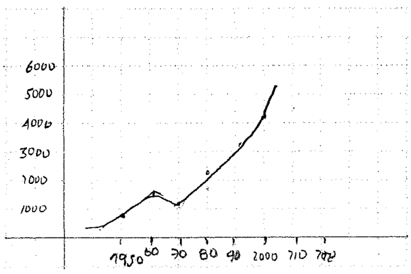
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.



$F(x) = (x - 1911{,}3)^2 - 176$

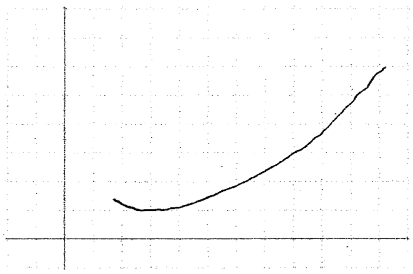
3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, se parece a una Función cuadratica, esta es conocida por nosotros

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

Recuadro 5.12 Guía de Entrevista Jan p.1

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



$y = 0{,}88x^2 - 3391{,}11x + 3284396{,}56$

6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, es una función polinomica, estas han sido estudiadas en clase

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$y = 0{,}88x^2 - 3391{,}11x + 3284396{,}56$.

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

2008 = 5189,6092.
2013 = 5836,347.

Recuadro 5.13 Guía de Entrevista Jan p. 2

5.8.2 Análisis del Protocolo de Jan

Datos: Video MVI_Jan Audio voz 012 Pantalla clip 0004

Las preguntas de la entrevista se han organizado en una Guía de Trabajo, para darles respuesta el estudiante utiliza tanto la guía como el paquete informático GeoGebra (GG).

La guía propone la siguiente situación para ser modelizada:

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analys

Se le entrega a Jan la Guía de la entrevista.

1. Maestro: Lo que vamos a hacer es algo muy parecido a lo del otro día, [se refiere a una actividad de modelización de funciones realizada la semana anterior en clase]

El Maestro introduce la actividad, le entrega a Jan la guía de entrevista y le da algunas instrucciones pertinentes sobre el manejo del paquete informático
(ítems 1 – 8).

2. Jan: Ummm. Entonces vamos..
3. M: Eso
4. (J Toma la guía y comienza a estudiarla)
5. M: pero cuando vaya a encontrar las funciones, trate de usar otros métodos antes de usar la herramienta esa grande que tiene el GeoGebra para calcularlo [se refiere al uso de las herramientas estadísticas de GG].
6. M: ¿Sí?
7. J: Sí
8. M: pues al final vamos a usar esa [herramienta], pero si puede utilizar otros métodos antes buenísimo…
9. J: Listo pues

10.	(J comienza a introducir los datos de la guía en la Hoja de Cálculo (HdC) de GG en el ordenador e introduce [A1; años])	J comienza directamente en el ordenador, sin trabajar en la guía de papel, pareciera que no realiza el análisis cualitativo previo del fenómeno a partir de los datos suministrados.
11	(J Introduce [B1; PIB])	Empieza a usar el ordenador, para responder a la pregunta 4 de la guía, "Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos" comenzando a construir la tabla con los datos en la Hoja de Cálculo (HdC) del GG (ítems 10-43).
12	(J Introduce [A2; 1995]	
13	J: ¿Cómo es que se hace esto? [se pregunta a sí mismo, refiriéndose a una de las herramientas de las hojas de cálculo que permite la construcción de series con un intervalo definido y autorrellenar, simultáneamente J Introduce [A3; 1960])]	J comienza a reconstruir la tabla de datos y en el proceso reconoce un esquema ya adquirido del proceso de instrumentación en el manejo de las HdC que le puede ser útil: la herramienta de construcción de series y autorrellenado (ítem 13-21).
14	J: ¿Cómo es que hago? ¿Esto permite hacer automáticamente como Excel también? [J pregunta a M refiriéndose a la herramienta de la HdC de construcción de series]	Ante algunas dudas iniciales y consultas a M, la emplea para construir la primera parte de la tabla de datos.
15	(simultáneamente con las preguntas J sombrea las casillas [A2; 1955] y [A3; 1960] en un solo bloque, para ejecutar la construcción de la serie de años)	
16	M: si ujummm [M asiente, confirmando que la herramienta construcción de series también se encuentra en GG]	
17	J: acá no [J señala con el ratón la esquina inferior derecha y trata de halar el bloque sombreado, para construir la serie]	J Duda en cuanto al esquema adquirido (ítem 17), aunque lo pone a prueba inmediatamente y lo usa.
18	M: si	
19	J: si lo halo acá no, no me da [J señala con el ratón la esquina inferior derecha del bloque e intenta halar el bloque marcado y no le funciona y luego si hala el bloque sombreado, pero duda al no aparecer los datos inmediatamente, así construye una parte de la serie años, hasta [A8; 1985]]	Impresiona el manejo informático de J. En primera instancia como aborda el problema directamente desde el ordenador y luego la propiedad con que usa esquemas de instrumentalización ya adquiridos.
20	M: si mire que sí, que sí	
21	(J vuelve a sombrear esta vez el bloque de celdas conformadas desde [A2; 1955] hasta [A8; 1985], luego señala con el ratón la esquina inferior derecha del bloque y hala el bloque marcado ampliándolo hasta [A15; 2020] con lo que completa la serie de años de la	

tabla)

22 J: uich (sic) me pase…

23 (J borra las celdas [A15; 2020] y [A14; 2015])

24 (J Introduce [B2; 837])

25 (J Introduce [B3; 1559])

26 (J Introduce [B4; 1328])

27 (J Introduce [B5; 1700])

28 (J Introduce [B6; 1934])

29 (J Introduce [B7; 2373])

30 (J Introduce [B8; 2847])

31 (J Introduce [B9; 3173])

32 (J Introduce [B10; 3746])

33 (J Introduce [B11; 4207])

34 (J Introduce [B12; 4853])

35 (J Introduce [B13; 5439])

36 (J selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)

37 J: Le ponemos colorcito y todo?

38 M: Si quiere si

39 (J cambia el color de las columnas A y B desde A1 a B13 a verde)

40 J: pongámosle un colorcito para resaltarlo

41 J: vamos a ponerle de todo

42 J: amarillito acá [J sombrea las celdas del encabezado [A1; años] y [B1; PIB cambiándoles el color a amarillo]

43 (J selecciona desde A2 a B13 y con el menú del botón derecho del ratón crea la lista de puntos en la HdC de GG)

44 (J cambia a la vista gráfica de GG, y selecciona las preferencias de la vista gráfica)

Es interesante el proceso que desarrolla J en los ítems 44 y 45 pues muestra dos aspectos importantes, de una parte J tiene la capacidad de visualizar el rango y dominio de la nube de puntos antes de graficarla, a partir de los datos suministrados en la tabla.

45 (En la ventana de preferencias de la vista gráfica, J cambia las dimensiones automáticas de la ventana en x e y a:
x Mín: 1950, x Máx: 2010,
y Mín: -10, y Máx: 5500)

Y de otra parte muestra haber desarrollado un esquema de instrumentalización para poder ajustar las dimensiones de los ejes y lograr visualizar adecuadamente en la ventana de la Vista Gráfica la nube de puntos, justo en donde prevé las ubicaciones donde quedarían los puntos de la gráfica (ítem 45, figs. 5.12 y 5.13).

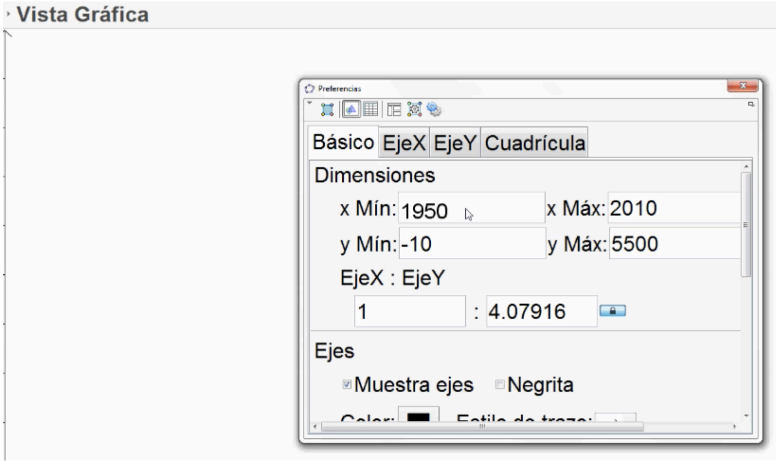


Figura 5. 12 Captura de pantalla de la ventana de preferencias de la Vista Gráfica cambiando las dimensiones de la ventana (ítem 45).

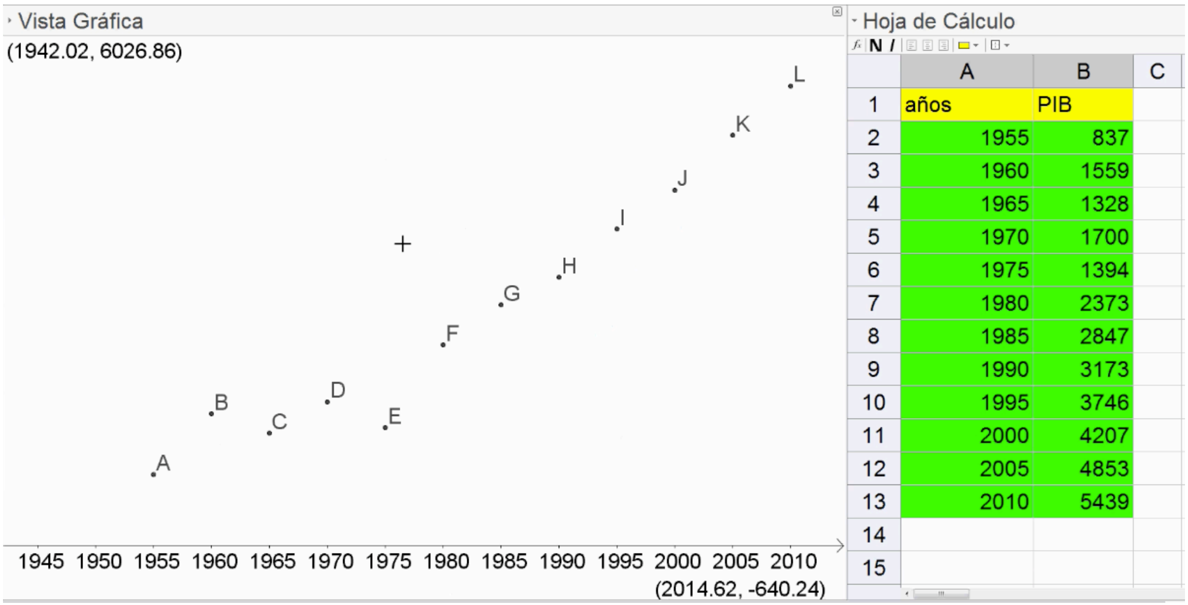


Figura 5.13 Captura de pantalla de la nube de puntos hasta el ítem 45.

46 (Ya con los puntos visibles, J ajusta ligeramente el zoom de la vista gráfica, para que se visualice el eje *x*)

47 J: Bueno

Se confirma la predicción de J y en la ventana de la Vista Grafica se ve completamente la nube de puntos (fig.5.13).

48 J: uich (sic)

49 M: [risas]

50 J: esta si da super rara pero bueno podemos iniciar

J se detiene a ver la nube de puntos y muestra sorpresa por su disposición (ítems 48 y 50), en donde además del punto anómalo B (1960, 1559) previsto en la actividad, aparece el punto E en una ubicación equivocada.

51 M: Ahí pareciera que hay un punto corrido, el quinto punto pareciera que

M advierte del error en el punto E, con lo tiene un error.

52 (J revisa los datos en la tabla de la guía)

53 J: Uy (sic) si, diecinueve treinta y cuatro (J cambia el contenido de la casilla B6 de [B6;1394] a [B6;1934]).

54 J: ahora si…

que J corrige los datos cambiando el contenido de la casilla B6 de [B6;1394] a [B6;1934], con lo que se ajusta la gráfica de la nube de puntos (ítem 53 y Fig. 5.14).

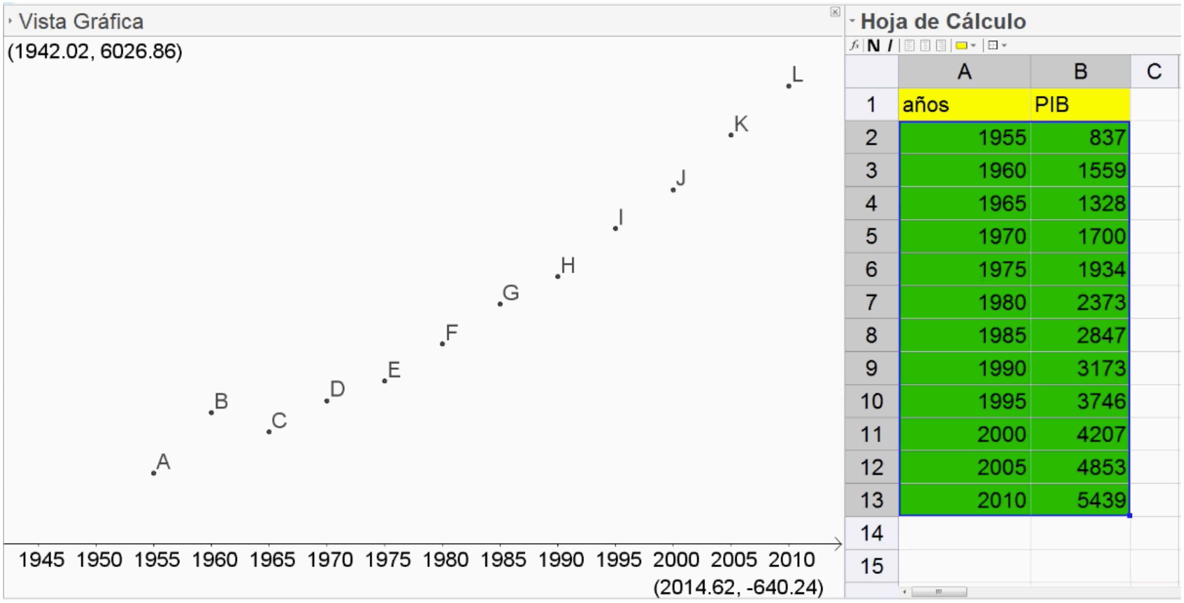


Figura 5.14 Captura de pantalla de la nube de puntos (ítem 54).

56 (*J se desplaza con el cursor sobre la nube de puntos siguiendo su rastro desde el punto F(1980, 2373) y terminando en A(1955, 837) pasando específicamente por C(1965, 1328), y B(1960, 1559), cuando llega a A, reinicia el recorrido pasando por B y termina en C*).

J realiza un gesto como reconociendo la ubicación de los puntos en la nube, se desplaza con el cursor sobre la nube de puntos siguiendo su rastro desde el punto F(1980, 2373) y terminando en A(1955, 837) pasando específicamente por C(1965, 1328), y B(1960, 1559), cuando llega a A, reinicia el camino pasando por B y termina en C. Este recorrido pareciera que le ayudará a entender las características del fenómeno, o a reflexionar sobre él.

Esta misma manifestación dinámica del recurrido de la nube de puntos pasando por el punto B(1960, 1559), que se sale del patrón de la función, pareciera ser relevante, pues la han presentado otros estudiantes.

57 J: bueno ahora entonces …

58 (J selecciona las dos columnas A y B desde A2 a B13) [parece que con la intención de utilizar las herramientas estadísticas de GG y realizar una regresión].

59 J: ah pero entonces no hacemos esto [se refiere al uso de las herramientas estadísticas de GG].

60 M: Pero antes de [hacerlo con las herramientas estadísticas], luego vamos a hacerlo allá con esa herramienta, pero entonces trate de hacerlo de otra manera

61 J: pues, ¿cómo es que era?

62 (J *empieza a pasar el cursor sobre los íconos del menú, como buscando algo, parece intentar recordar otro método*).

63 J: acá hay un trabajo

64 (J sombrea las dos columnas A y B y abre el menú del botón derecho del ratón, y continúa buscando en las opciones).

65 J: acá

66 J: ya no recuerdo como se hacia acá

67 (J continúa explorando los íconos del menú principal, buscando)

68 (J señala el punto A con el cursor y abre el menú del botón derecho del ratón, y continúa buscando en las opciones).

69 (J acerca un poco el zoom de la vista gráfica para ver mejor la nube de puntos).

70 M: ¿Cómo a qué función se le parece eso? [se refiere a la nube de puntos].

71 J: Eso puede ser una logarítmica tal vez, [lo dice en voz baja, dudando] o una exponencial, [en voz baja], pues una exponencial, pero la B no o de pronto, tal vez… [se refiere al punto anómalo B (1960, 1559), que se sale del patrón de la función].

M insiste en que se use un método alternativo a las herramientas estadísticas del GG (ítem 60).

J parece intentar recordar otro método y empieza a pasar el cursor sobre los íconos del menú, como buscando algo, pareciera que buscara otra herramienta del GG, que le fuera útil, tal vez la herramienta deslizador, utilizada durante la enseñanza, esta se halla ubicada en el segundo menú de derecha a izquierda.

Después de probar por diferentes caminos y de hacer varios intentos, (ítems 61-68) parece que J no ha logrado encontrar la herramienta que busca.

O tal vez lo que buscaba J era otra forma de acceder al menú estadístico del paquete informático.

Ante esta situación M trata de recuperar la estructura didáctica de la guía, haciendo preguntas para realizar el análisis cualitativo de la nube de puntos (ítems 70 y 71). Así M cuestiona a J "¿Cómo a que función se le parece la nube de puntos?, a lo que J responde "puede ser una logarítmica tal vez, o una exponencial, […], pero la B [el punto anómalo B (1960, 1559)] no o de pronto, tal vez" (ítem 71).

Es interesante las opciones que contempla J, opta por dos familias de funciones no precisamente obvias, cuyas gráficas son curvas con cierto parecido con la nube de puntos, lo cual puede ser la razón de haberlas elegido.

Sin embargo habría podido contemplar otras familias de funciones como las funciones lineales, algunas funciones de potencia o las funciones cuadráticas, con las que la nube también guarda relación, tal vez la omisión de las funciones cuadráticas, puede ser por el tema de la Gestalt ya mencionado en casos anteriores.

Otro aspecto relevante es la claridad con que J nota que el punto anómalo B, no va a encajar en los modelos de funciones que conoce (ítem 71), lo cual parece mostrar que J ve la nube de puntos en dos sentidos simultáneamente de manera global y también de manera puntual.

72 J: pero es que, no me acuerdo cómo es que se empiezan a sacar ahí las gráficas

73 M: Pues ensaye. Ensaye con una ecuación a ver que tan cerca le da o que tan lejos

74 J: [en voz baja] ummm digamos que seria, digamos una que vaya así, digamos…

75 J: digamos, x menos, [pausa], menos 3 [J dice una expresión en voz baja que no se entiende], a la 0.3, tal vez.

76 (Simultáneamente J escribe poco a poco en la barra de entrada: $f(x) = (x\text{-}3)\text{^}(0.3)$).

J comienza el proceso de ajuste utilizando el que hemos llamado método de ajuste manual (ítems 74-76), para ello hace un intento con la función de potencia $f(x) = (x-3)^{0.3}$.

Es particular que J comience utilizando esta familia de funciones, pues no es una de las dos que mencionó como parecidas a la nube de puntos (funciones logarítmica o exponencial, ítem 71), sin embargo las gráficas de esta familia son curvas que guardan cierta relación con la nube de puntos y también con las gráficas de la función logarítmica, mencionada por J.

De otra parte es posible que simplemente J haya confundido las ecuaciones canónicas de la función exponencial con la de la función de potencia, error relativamente frecuente en los estudiantes, al tener ambas expresiones exponentes.

77 J : (sic) uich ¿qué se hizo?...

78 (J aleja el zoom para hallar la ubicación de la función propuesta)

Sin embargo este primer intento, parece más un ejercicio de calentamiento, pues la gráfica de la función no es visible en la Vista Gráfica en la proximidad de la nube de puntos (ítem 77), ni siquiera alejándose un poco con el zoom (ítem 78). Esto porque los parámetros de la función no son los adecuados, lo cual nota J y lo asume

79	J: mejor esa no… [la gráfica de la función propuesta no aparece en la vista gráfica, la escala es de: *x* Mín: 1498.7, *x* Máx: 2433.39, *y* Mín: -33562.75, *y* Máx: 52272.9).	con buen humor (ítems 79-81).
80	J: esa fijo no es…	
81	M: [risas]	
82	(J vuelve a acercar el zoom de la vista gráfica, a la disposición anterior).	
83	J: ¡Ah no! Es *x* [pausa], menos 1950, 1955, esto elevémoslo por ahí a la 0.5 tal vez	J parece recordar algún aspecto clave y hace un segundo intento de ajuste, donde muestra mayor claridad en el significado de algunos de los parámetros, en particular del correspondiente al desplazamiento horizontal pues J escoge un valor para él de 1955 en la dirección correcta y muy cerca del valor adecuado (ítems 83 y 84).
84	(Simultáneamente J escribe en la barra de entrada: $f(x) = (x\text{-}1955)\text{^}(0.5)$).	
85	J: ¿Donde esta? No tampoco…	Sin embargo la gráfica de la función de potencia en este intento esta muy cerca del eje *x* y por la escala de la Vista Grafica apenas si es perceptible (ítems 85 y 86) lo que no permite una retroalimentación clara, para ajustar la función.
86	M: salió un pedacito.	
87	J: si pero tiene que acercarse mucho más.	J comprende claramente la situación y el sentido del ajuste, al mencionar en el ítem 87 “si pero tiene que acercarse mucho más” y luego en el ítem 89 “entonces no funcionó”.
88	M: ujummm	
89	J: entonces no funcionó…	
90	J: entonces vamos 1950 elevado a la 0.5 tal vez	J propone un nuevo intento esta vez con la expresión $f(x) = (1950)^{0.5}$ que guarda cierta semejanza con las anteriores, pero adolece de la ausencia de la variable *x,* (ítems 90-92).
91	(Simultáneamente J escribe en la barra de entrada: $f(x) = (1950)\text{^}(0.5)$).	
92	(J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de alejamiento)	
93	M: Pero tiene que ponerle *x* en alguna parte, ¿o no?	Esta omisión fortuita y el comentario de M (ítems 93-96), haciéndole caer en cuenta de la falta de variable, parece que iluminan a J sobre un nuevo camino para el ajuste, ¡Era la *x*! (ítem 96).
94	J: Sí	
95	M: y si no, no le va a salir.	
96	J: ¡Era la *x*!	
97	(J escribe en la barra de entrada $f(x) = 1955\text{^}x$)	Así J propone una nueva función (ítem 97), esta vez exponencial $f(x) = 1955^x$ cuya gráfica no se ve cerca de la nube de puntos por los valores de los parámetros (ítems 97-99).
98	(J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de alejamiento)	
99	J: No tampoco, se pierde la gráfica…	

Sin embargo pareciera, que J no recuerda claramente la ecuación canónica de la familia de funciones exponenciales, ni la ubicación de los parámetros en ella.

De otra parte en estos dos últimos intentos J ha perdido lo que había logrado con el manejo del parámetro de desplazamiento horizontal, tal vez asumiendo que el solo valor 1950 o 1955 es suficiente, sin contemplar su signo y su ubicación precisa en uno de los parámetros de la ecuación canónica.

100 J: ya casi de aquí a una media hora lo tenemos…

101 M: [risas]

102 J: $f(x)$ bueno qué le pongo a esto

103 (J escribe en la barra de entrada $f(x) =$)

104 M: …pues ensaye con otra función a ver si le sirve…

105 J: [en voz baja] 1950 [inaudible]

106 J: bueno una polinómica, digamos que 1950 x más cinco

107 (J escribe en la barra de entrada $f(x) = 1950x + 5$)

Después de estos intentos poco exitosos, J duda sobre que familia de funciones utilizar (ítems 102 y 103), y se decanta por las funciones polinómicas, o así lo menciona “bueno una polinómica, digamos que 1950 x más cinco” (ítems 106 y 107).

Sin embargo el manejo que realiza J de la función lineal $f(x) = 1950x + 5$ es particular, de una parte no había contemplado esta familia de funciones entre sus opciones, de otra parte, el manejo de los parámetros no es el apropiado para ajustarla a la nube de puntos, pues a pesar de utilizar el valor 1950, que J sabe que tiene relación con la nube, el ubicarlo como pendiente de la recta no favorece el ajuste. Lo que provoca que la gráfica no se acerque a la nube de puntos (ítems 108 y 109).

108 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de alejamiento)

109 J: Se pierde

Pareciera que J pensara que como ya descubrió un elemento de la función este debe estar presente en las demás funciones que brinden cierto grado de ajuste, pero parece que pierde el sentido crítico, para saber “donde” incluir en la ecuación este elemento que ya conoce.

110 J: Así es muy difícil, es más fácil cuando uno pone… o tal vez…

J manifiesta la dificultad del método de ajuste manual en que se utilizan las ecuaciones canónicas de las familias de funciones y sus parámetros.

111 (J escribe en la barra de entrada $f(x) =$)

112 J: no pero qué más le pongo…

113 M: ¿una cuadrática no podrá ser?

114 J: ummm podría ser pero, [pausa], bueno si

J comienza un nuevo intento, pero duda que familia de funciones utilizar (ítems 111 y 112). Y se decide por una función cuadrática, pero antes de proponer una función de ajuste parece que revisa sus conceptos comparándolos con la nube de puntos (ítems 113 y 114).

115 J: podríamos poner una, entre más abierta, entonces podría ser como 1955 y eso elevémoslo al cuadrado

116 (J escribe en la barra de entrada $f(x) = 1955x^2$)

J reconoce en la nube de puntos dos características de la función cuadrática, de una parte lo que él llama “abertura” y de otra parte asume que debe llevar el valor 1955 (ítem 115), pero no tiene clara la ubicación de los parámetros como se puede ver al anotar la expresión $f(x) = 1955x^2$ (ítem 116).

117 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de alejamiento y desplazándose sobre el eje x)

118 J: no esta … ummm

119 J: entonces pongamos x menos 1955

120 (J escribe en la barra de entrada $f(x) = (x - 1955)^2$)

121 M: ummm ¡Mire, que bien!

122 J: Al fin salió una más o menos…

J conoce como corregir el desplazamiento horizontal en la grafica de la función, así al escoger la función $f(x) = (x - 1955)^2$ logra una gráfica en la proximidad de la nube de puntos (ítems 119-122 y fig. 5.15)

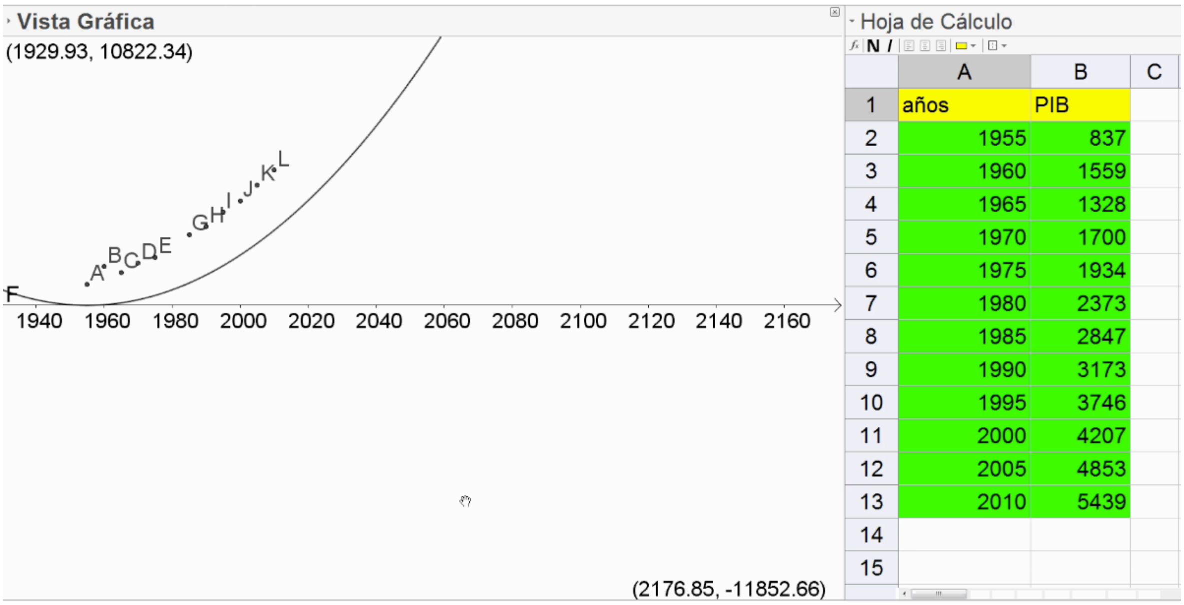


Figura 5.15 Captura de pantalla de la Gráfica de $f(x) = (x - 1955)^2$ (ítems 119-122).

123 J: bueno ahora la agrandamos para ver bien los puntos

124 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de acercamiento)

J revisa la gráfica y su situación con respecto a la nube de puntos, haciendo zoom (ítems 123 y 124).

125 (J señala la gráfica de la función con el cursor y la sujeta, de esta forma mueve la función ajustándola a la nube de puntos)

126 J: esa podría ser ¿no?

J hace un "ajuste" de la función a la nube de puntos, utilizando la herramienta *arrastre* del paquete informático (ítem 125), para ello señala la gráfica de la función con el cursor y haciendo click en el "ratón" la sujeta, de esta forma mueve la gráfica de la función acercándola a la nube de puntos de manera que logra el ajuste de la gráfica. Por la interactividad de las múltiples representaciones en el paquete informático al desplazar la gráfica se actualiza la expresión algebraica de la función a su nueva ubicación en la Vista Gráfica. De esta manera mediante el arrastre J ha ajustado la función $f(x) = (x - 1955)^2$ (ítems 119-122 y fig. 5.15) y la ha cambiado a la nueva función $f(x) = (x - 1941.48)^2 + 609.35$ (fig. 5.16 ítems 126 y 136).

127 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de acercamiento sobre algunos puntos)

128 J: a ver miremos cuales faltan [se refiere a los puntos mas distantes de la función en la nube de puntos]

129 J: los puedo acomodar mejor…[se refiere a ajustar mejor la función a estos puntos distantes]

J revisa detalladamente la gráfica de la función de ajuste que ha encontrado (ítems 127 – 132), en el proceso se nota claramente como además de revisar la gráfica esta tratando de depurar el ajuste, buscando llevar la grafica de la función tan cerca como pueda al mayor número de puntos (ítems 128 – 129), tarea que continuará.

130 J: pero la curvita de acá (J señala en la pantalla la curva que hace la nube de puntos entre A, B y C) es la que (sic) jummm…

131 J: no esa curvita queda por fuera, en esta gráfica

Así mismo es claro para él la limitación en el ajuste para la zona alrededor del punto anómalo B, dice J en el ítem 130, "pero la curvita de acá (señala en la pantalla la curva que hace la nube de puntos entre A, B y C) es la que (sic) jummm…" para continuar luego en el 131 "no esa curvita queda por fuera, en esta gráfica"

132 (J estudia en detalle cada punto de la nube y observa como se ajusta la función a ellos)

133 J: a es que hay una que va…

134 M: de pronto cerrándola más…

135 J: si de pronto, ¿a ver cuál es la función?

136 (J amplia la vista algebraica para poder

J continua con su revisión detallada, para pasar a buscar la expresión algebraica de la función de ajuste que a logrado establecer por medio de la herramienta de arrastre, esta es $f(x) = (x - 1941.48)^2 + 609.35$ (Fig. 5.16, ítem 136).

ver la función que esta ajustando
$f(x) = (x - 1941.48)^2 + 609.35$)

137 J: es x menos 1941 [J dice algo que no se entiende]

138 J: Ahí esta tocando uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis puntos y pues digamos que mantiene la tendencia [*señala la trayectoria de la función después del punto L*]

139 (J ajusta ligeramente la función a la nube de puntos)

140 J: Y acá [*señala la función antes del punto A*] pues tal vez, dejémoslo en que puede mantener la tendencia

Tanto en el proceso anterior (ítems 128 - 129), pero especialmente en el ítem 138 se nota claramente la idea de J del mejor ajuste, como aquella función que se acerque más y al mayor número de puntos, manteniendo la tendencia, así dice “Ahí esta tocando uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis puntos y pues digamos que mantiene la tendencia [señala la trayectoria de la función después del punto L]”. Este asunto de la tendencia lo retoma J en el ítem 140, refiriéndose al otro extremo de la nube de puntos.

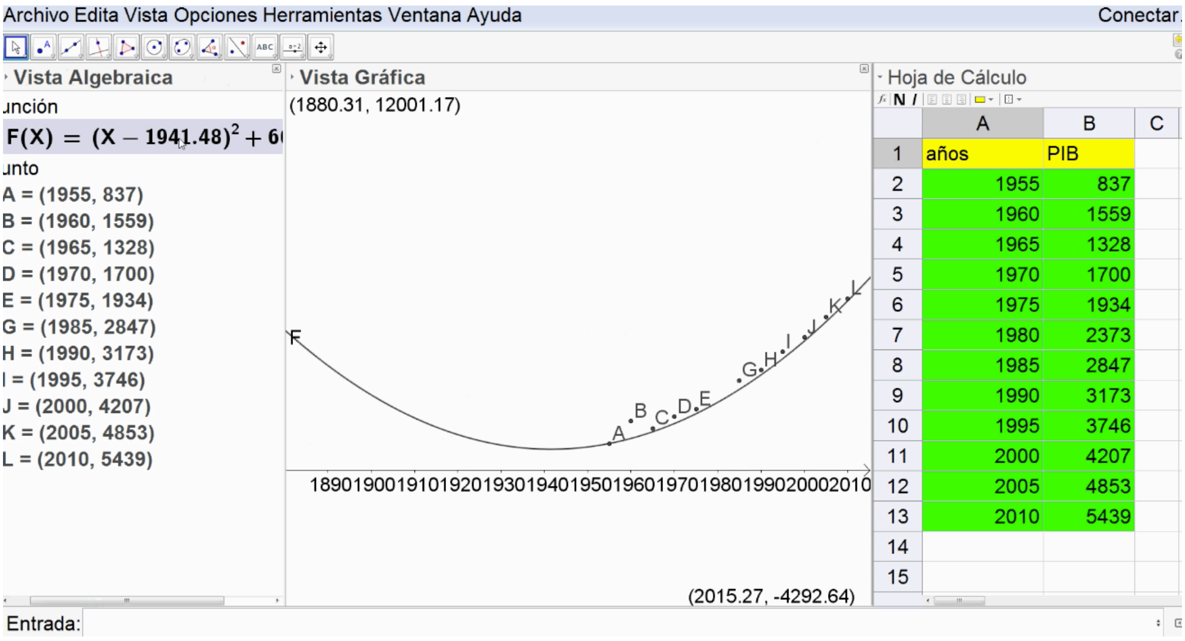


Figura 5.16 Captura de pantalla en el ítem 136.

141 J: esa podría ser una que se asemeja

142 J: digamos que no coge la curvita de la B, pero pues ahí más o menos se ve para donde puede seguir la gráfica

143 J: ¿Y la función de esa entonces sería como?

144 M: Anote esa función por si acaso

La preocupación de J por lograr una función con un mejor ajuste continúa, y el comentario del ítem 129, “los puedo acomodar mejor” se retoma en los ítems 139 y 141 y los siguientes (ítems 139 – 146) en donde J ha ajustado la función que había hallado a una nueva ligeramente

145 (J amplia la vista algebraica para poder ver la función que esta ajustando $f(x) = (x - 1941.32)^2 + 769.71$)

146 J: anotemos por acá esto (J anota en la guía la función que ajustó a la nube de puntos)

147 (J completa en la guía las primeras preguntas que no había respondido por escrito).

diferente en sus parámetros y en su gráfica (ítem 145, fig. 5.17), la nueva función $f(x) = (x - 1941.32)^2 + 769.71$

J completa en la guía de entrevista los puntos que no había realizado inicialmente, así como los bosquejos de las gráficas de las funciones de ajuste (ítems 146 - 160). Estas respuestas se pueden observar en los recuadros 5.12 y 5.13.

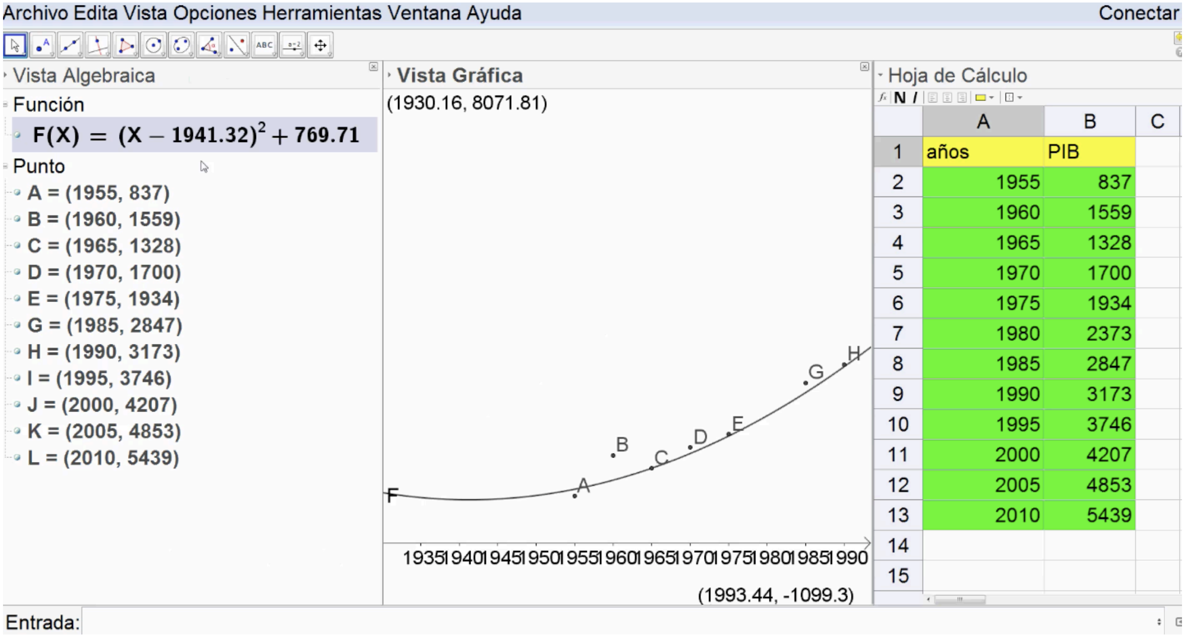


Figura 5.17 Captura de pantalla en el ítem 145.

148 J: bueno el bosquejo a ver lo pintamos

149 (J amplia la ventana de la vista gráfica para ver mejor la nube de puntos)

150 así como por acá digamos que 1950… [no se entiende]

151 M: igual es un bosquejo no tiene que ser exacta pues

152 J: si como para no irse uno a perder, acá, acá (J ubica puntos en el bosquejo de la nube de puntos)

153 J: el bosquejo vendría como así

154 J: ¡uy no! pero yo para graficar si

155 M: [risas]

156 J: más o menos algo así

157 J: digamos

158 (J hace un bosquejo de la nube de puntos semejante a la fig. 5.17)

159 J: ¿La función se parece a alguna función que conozca? [J lee en voz alta la pregunta 3 de la guía y la contesta en silencio].

160 J: Pues esa ya sería una de las que "podría" tocar mas o menos los puntos …[se refiere a la función de ajuste que obtuvo a través del arrastre]

161 M: ujummm [asiente]

Como ya mencionamos anteriormente, aquí nuevamente se plasma la idea de ajuste de J.

162 J: a entonces dejémosla ahí y busquemos la que es

Es muy diciente el comentario de J en el ítem 162 refiriéndose a la función de ajuste que ha obtenido y con respecto al proceso que va a iniciar utilizando las herramientas estadísticas del paquete informático, dice J "a entonces dejémosla ahí y busquemos la que es". Es muy llamativa la enorme autoridad que le da al Ordenador, como si la maquina tuviera la respuesta correcta y única y de otra parte, todo el proceso que él ha desarrollado, no tuviera validez.

163 M: bueno…

164 (J selecciona las dos columnas A y B desde A2 a B13).

165 (J comienza a utilizar las herramientas estadísticas de la HdC del GG para hacer el análisis de regresión entre dos variables).

J comienza a utilizar las herramientas estadísticas del GG, para hallar la función que le dé el mejor ajuste (ítems 164-200).

166 (Aparece en la pantalla del ordenador una primera gráfica y su ecuación de regresión utilizando una función cuadrática).

La primera función que le muestra el paquete informático de manera automática es una regresión cuadrática (ítem166).

Ante la imagen de esta función J se queda pensando y revisa los tipos de regresión en el menú pero sin seleccionar ninguno, pareciera que J esta buscando algún tipo de regresión que le sirva, posiblemente haciendo un análisis cualitativo de los tipos de regresión y sus características frente a las características de la nube de puntos. Con recelo menciona las funciones "exponencial, [duda] polinómica yo creo" (ítem 167), la cual selecciona y grafica en el ítem 168.

167 J : exponencial, [duda] polinómica yo creo (J se desplaza con el ratón por el menú de tipos de regresión).

168 (J cambia en el menú el tipo de regresión a una función polinómica, no cambian la gráfica ni su correspondiente ecuación, pues coinciden con la regresión cuadrática).

Es particular esta opción de la función polinómica porque, la respuesta es nuevamente la misma función cuadrática que el paquete había propuesto inicialmente, lo que nos podría indicar que J no había considerado la función cuadrática entre la familia de las funciones polinómicas, o de otra parte que

169 J: ujumm

simplemente estaba distraído.

170 (J cambia en el menú el tipo de regresión utilizando en este caso una función logarítmica, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación).

171 (De nuevo J cambia en el menú el tipo de regresión utilizando en este caso una función de crecimiento, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación).

El segundo tipo de regresión que elige J utiliza una función logarítmica (ítem 170), una de sus hipótesis cuando fue cuestionado a que función se parecía la nube de puntos (funciones logarítmica o exponencial, ítem 71) pero parece que esta opción no le satisface pues de nuevo cambia de regresión esta vez a una función de crecimiento (ítem 171), es posible que haya seleccionado esta regresión por su nombre y su relación con la disposición de la nube de puntos, pero nuevamente esta función tampoco le satisface.

172 J: exponencial…

173 (J cambia nuevamente en el menú el tipo de regresión utilizando en este caso una función exponencial, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación).

Para este cuarto intento (ítems 172 y 173) elige la función exponencial con cierta resignación, pues ya la ha descartado al comienzo de la revisión cuando optó por la función polinómica (ítem 167), tal vez la renuencia es por sus intentos poco exitosos realizados durante el proceso de ajuste manual con las funciones exponenciales, pues originalmente si la consideraba una opción de ajuste a la nube de puntos.

174 J: no

175 M: ¿no? ¿Esa no?

176 J: ¿la exponencial?

177 J: pues si podría ser, pero a ver…

178 M: ¿o hay alguna mejor?

Sin embargo es llamativa la respuesta de J ante la gráfica de la función exponencial, J dice *no*, (ítem 174) a lo que M replica, y lo hace reflexionar, "pues si podría ser, pero a ver" (ítem 177), esta expresión final pareciera indicar que J aún no ha encontrado la función que le brinde el mejor ajuste y que va seguir buscándola.

179 (J revisa nuevamente la lista de tipos de regresión y cambia a una regresión logística, luego aparece la gráfica con su correspondiente ecuación).

180 (J vuelve y cambia en el menú el tipo de regresión utilizando una función sinusoidal, en este caso no grafica la regresión y aparece el mensaje:
No disponible).

181 J: no esta si no

Así J continúa su revisión de los tipos de regresiones que le brinda el GG. Es interesante que entre las regresiones que le quedan por revisar hay dos que no se estudiaron durante el proceso de enseñanza, aunque puede que él las conociera con anterioridad al curso, son las regresiones logística y sinusoidal, y son precisamente estas dos las regresiones que selecciona J, tal vez precisamente por que las desconoce (ítems 179 y 181).

Aunque en otros apartes parece que J realiza un análisis cualitativo, aquí (ítems

179-181) parece que esta simplemente buscando por ensayo y error, lo que en la literatura se menciona como “pescar”. Sin embargo tampoco se podría asegurar que esta es la situación, pues J *no* prueba todas las regresiones del menú, la lineal y la de potencia no las utiliza.

182 (J cambia en el menú el tipo de regresión volviendo a utilizar una función polinómica, aparece la gráfica con su correspondiente ecuación).

183 J: mira, esta podría estar mejor, [se refiere a la función polinómica] toca casi todos los puntos, excepto la curvita en 1960… (simultáneamente *J mueve el cursor sobre la nube de puntos de un extremo a otro desde el punto L (2010, 5439) hasta el punto A (1955, 837), luego de llegar a A, se regresa a B (1960, 1559) y deja el cursor en B*).

Finalmente J retoma la función polinómica (ítem 182 y Fig. 5.18) y opta por ella, como la función que brinda el mejor ajuste, que J justifica así en el ítem 183 “mira, esta podría estar mejor, [se refiere a la función polinómica] toca casi todos los puntos, excepto la curvita en 1960 […]” que además confirma en el ítem 185 “[…] yo creo que la polinómica, además mantiene la tendencia […]”.

De otra parte también en el ítem 183, J nuevamente realiza este gesto del recorrido dinámico por la nube de puntos que ya había realizado en el ítem 56, en que pasa como sobrevolando los puntos en la nube, haciendo énfasis en aquellos que no coinciden con la función exactamente.

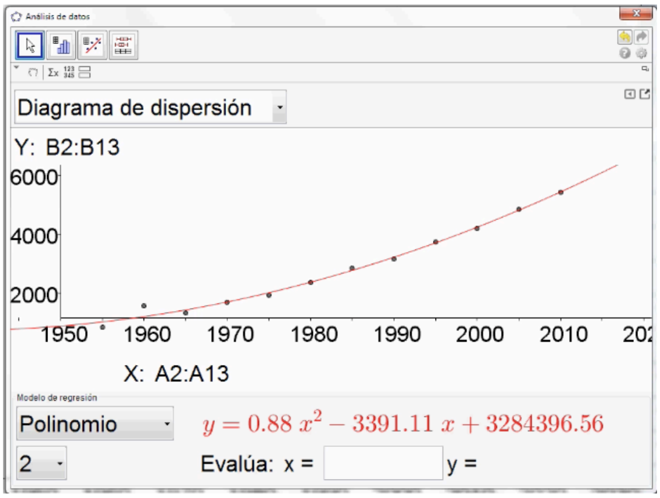


Figura 5.18 Regresión polinómica (ítems 182-185).

184 M: Fíjese que luego va a tener que predecir unos puntos después de los valores que tiene

185 J: no, yo creo que la polinómica, además mantiene la tendencia, y acá también… (J señala con la mano los extremos de la nube de puntos sobre la pantalla del ordenador)

M insiste para lograr un mejor ajuste.

186 J: pues eso creo, ¿no? una polinómica

187 (J retoma la guía para escribir la ecuación de la regresión)
188 M: pues anote entonces esa también si quiere
189 J: si entonces acá la anoto
190 (J escribe la función: $y = 0.88\,x^2 - 3391.11x + 3284396.56$
191 J: ¿se la aplicamos ahí?
192 M: sí, si quiere

J retoma la guía y anota la nueva función de ajuste que acaba de obtener (ítems 187-190).

193 (J pasa la gráfica de la regresión de la ventana estadística a la Vista Gráfica del GG)

194 M: ¿Que tanta es la diferencia?

195 J: pues más o menos

196 J: espere le ponemos más color a eso, que se vea

197 M: [risas]
198 J: pongámosle un azul … [J le cambia el color a la función de ajuste polinómico $g\,(x)$ que halló con el GG, dejándola azul]

J pasa la gráfica de la función de ajuste $g(x) = 0.88\,x^2 - 3391.11x + 3284396.56$ de la pequeña ventana de análisis de datos (fig. 5.18) a la Vista Gráfica, en donde ya tenía la gráfica de la función de ajuste $f(x) = (x - 1941.32)^2 + 769.71$ que había obtenido por medio de la herramienta de arrastre, para poderlas comparar (ítem 193 y fig. 5.19).

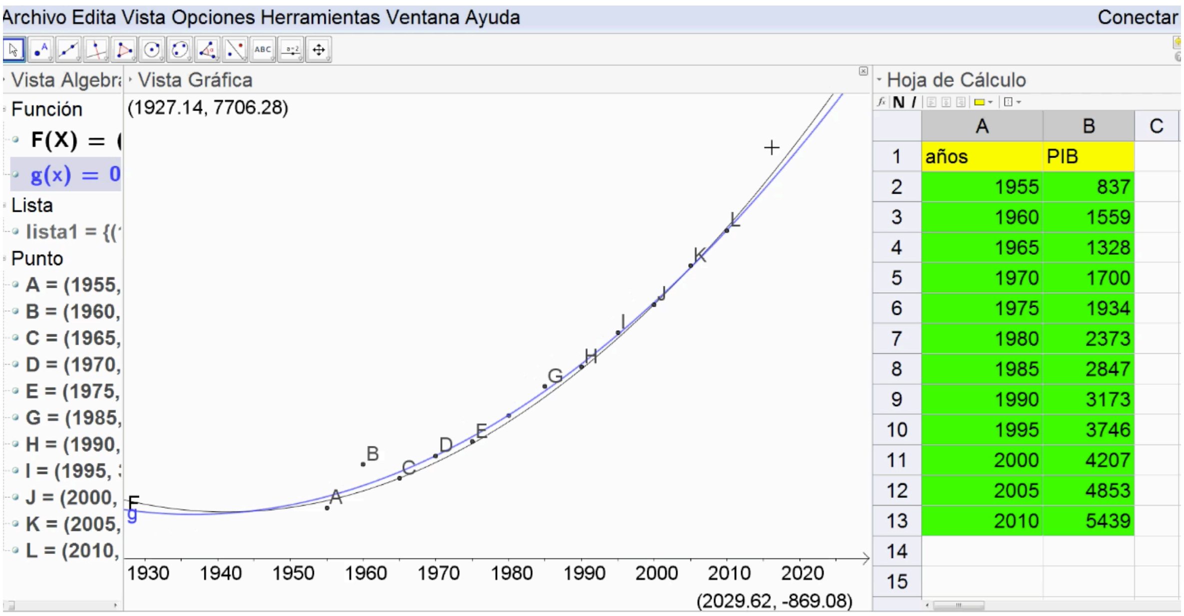


Figura 5.19 Captura de pantalla con las dos funciones, $f(x) = (x - 1941.32)^2 + 769.71$ y la regresión polinómica $g\,(x) = 0.88\,x^2 - 3391.11x + 3284396.56$ en azul (ítem 198).

199 J: pues digamos que esta [se refiere a la función de color negro $f(x) = (x - 1941.32)^2 + 769.71$] es un poco mas cerrada, la negrita mantiene los puntos de acá… (*J señala con el cursor los puntos C, E y H por*

J compara el comportamiento de las dos funciones de ajuste que ha obtenido, de tal manera que la función negra $f(x)$ se acerca más a los puntos C, E y H, en el extremo inferior de la gráfica.

los que pasa la función $f(x)$).

200 J: y mantiene más la tendencia la azul

Se refiere a que la función azul $g(x)$ trata de tocar los puntos del extremo superior, para valores mayores de x e y.

La diferencia que anota J sobre a que puntos se acercan más cada una de las funciones es exactamente lo que define que una sea la regresión generada por el computador y la otra no, pues la que genera el GG, si esta calculando las diferencias entre los puntos de la nube y los puntos correspondientes de la gráfica y hallando sus cuadrados, por esta razón el paquete prefiere que para valores “elevados” tanto de x como de y, estas diferencias sean relativamente menores en cambio para los valores “pequeños” de x e y, los valores de las diferencias pueden ser un poco mayores. Así en los valores “pequeños” de las variables se puede alejar un poco la curva de los puntos y en los valores “elevados” se debe acercar a ellos, como se ve en el comportamiento de la función azul $g(x)$ (Fig. 5.19).

201 J: ahora…

202 (J retoma la guía).

203 (J lee en voz baja la pregunta 5 de la guía).
J: Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG

204 M: no pero si usted ya pintó la otra…

205 J: si ya…

206 (J lee en voz baja la pregunta 6 de la guía)
J: ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

207 (J responde en la guía)

J de nuevo retoma la guía y responde las preguntas 5 y 6, sobre el análisis cualitativo (ítems 202 – 207).

208 (J lee en voz baja la pregunta 7 de la guía)
J: Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación.

209 (J responde en la guía escribiendo la función polinómica:
$y = 0.88\,x^2 - 3391.11x + 3284396.56$)

Así mismo J responde la pregunta 7 de la guía sobre la función que brinda el mejor ajuste (ítems 208 y 209), anotando su ecuación
$y = 0.88\,x^2 - 3391.11x + 3284396.56$.

210 (J lee en voz baja la pregunta 8 de la guía)
J: Según su función del mejor ajuste,

¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013?

211 (J señala con el cursor la gráfica azul $g(x)$ en la Vista Gráfica y abre la ventana de propiedades con el botón derecho del ratón)

212 J: Uy acá, no acá toco … [no se entiende]

213 (J selecciona las dos columnas A y B desde A2 a B13)

214 (J vuelve a utilizar el menú estadístico de la HdC de GG para hacer el análisis de regresión de nuevo le aparece la misma la regresión polinómica)

215 J: era esta… [se refiere a la regresión polinómica]

Para responder la pregunta 8 de la guía J señala la gráfica de la función del mejor ajuste, como intentando que el paquete lo lleve a la ventana estadística (ítem 211), lo que no le resulta, por lo tanto J debe reconstruir el proceso para hallar la función de regresión (ítems 212 – 215).

216 J: entonces 2008, 2008 (En la ventana estadística con la regresión polinómica J coloca el valor 2008 para interpolar)

217 M: ¿Y ahí que hizo?

218 J: Acá evalué la x en 2008 con la función que según el análisis que hizo [GG] se acerca más a los puntos, a los datos que nos dieron.

219 J: 2008 daría como 5189.6092 [el valor de la interpolación es (2008, 5189.6092)]

Ya en la ventana estadística J realiza la interpolación en su función del mejor ajuste $g(x)$ para el año 2008 (ítems 216 – 220, Fig. 5.20).

220 J: es como la que mejor mantiene la tendencia

Es interesante como J se mantiene pensando en el contexto de la gráfica, no solo responde un valor que le da la maquina, pues anota “es como la que mejor mantiene la tendencia” (ítem 220). Lo que muestra que sigue pensando en la gráfica, esto lo lleva más allá del ajuste de la función a la modelización del fenómeno.

221 J: Ahora evaluemos, la x es 2013…

222 (En la ventana estadística con la regresión polinómica J coloca el valor 2013 para interpolar)

223 J: 2013 es 5836.3477 [el valor de la interpolación es (2013, 5836.3477)]

De una manera semejante a como realizó la interpolación para el año 2008, realiza la correspondiente al 2013 (ítems 221 - 223).

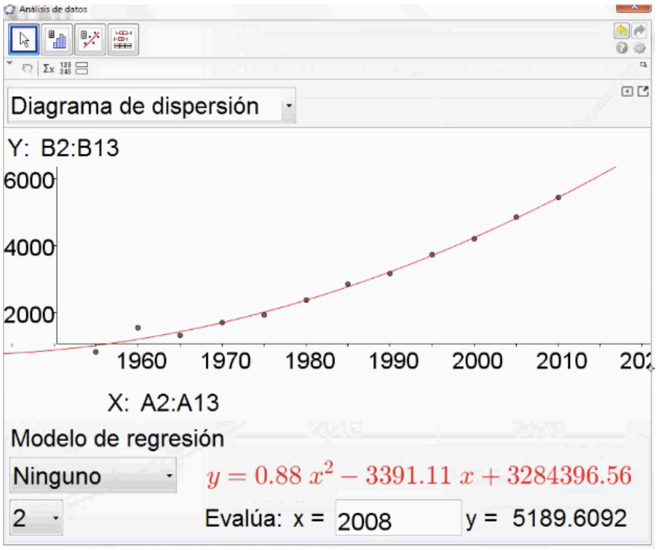


Figura 5.20 Interpolación para x = 2008 (ítems 216 – 219).

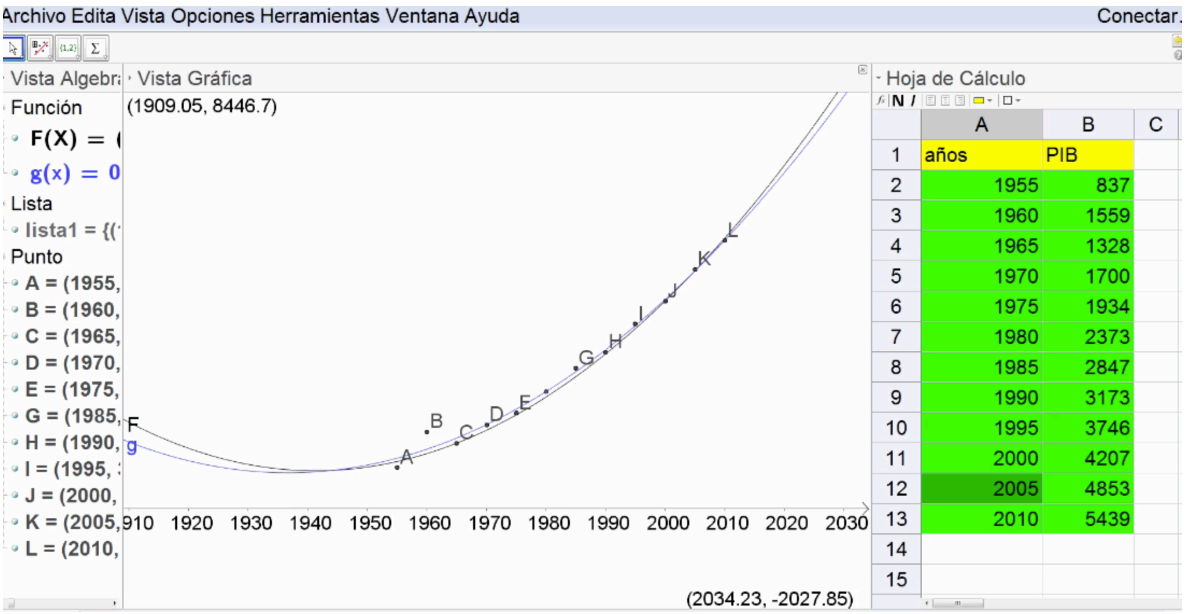
224 M: ¿Y esos valores si son razonables, con la tabla y todo lo que le esta dando?

225 J: Si pues podría ser, digamos que en el 2008 el valor que me da se mantiene entre los dos [puntos K y L] …

226 (J selecciona en la tabla de la HdC la casilla [A12 ; 2005] que corresponde a la coordenada x del punto K (2005, 4853)).

227 J: Digamos que es mayor que 4207, a no es mayor que 4853, pero es menor que 5439 [J mira en la tabla las coordenadas de K (2005, 4853) y L (2010, 5439)] esta más o menos intermedio entonces podría seguir la tendencia…

En este aparte se nota la importancia de tener diferentes sistemas de representación para la misma situación, en particular la relación entre la gráfica y la representación tabular y la facilidad con que J se mueve de uno al otro (ítems 225 – 228 y fig. 5.21). Sin embargo hay que destacar que la idea de tendencia es aquí la clave que guía a J en su proceso.



	A	B	C
1	años	PIB	
2	1955	837	
3	1960	1559	
4	1965	1328	
5	1970	1700	
6	1975	1934	
7	1980	2373	
8	1985	2847	
9	1990	3173	
10	1995	3746	
11	2000	4207	
12	2005	4853	
13	2010	5439	
14			
15			

Figura 5.21 Captura de pantalla con la tabla y el 2005 señalado (ítem 226).

228 J: y en el 2013, es un poco mayor que en el 2010, puede mantener las tendencias.

229 J: A ver ahora (J lee la última pregunta de la guía) ¿Podría usar otro método para hallar estos valores?

230 J: Para hallarlos sí, podría remplazar en la fórmula, lo que hacemos acá [se refiere a la interpolación en GG], pero hacerlo nosotros, remplazar la *x* por el 2013, o 2008.

231 J: ¿y ya se acabo?

232 J: ¿eso es todo?

233 M: Eso era.

5.9 ÁLVARO

Es un estudiante, con un desempeño apenas aceptable en matemáticas y con algunos vacíos. En su trabajo durante el curso del cuatrimestre obtuvo un resultado de 3.6 sobre cinco, la nota aprobatoria del curso es 3.0. Sus notas parciales del cuatrimestre calificadas sobre 5 (cinco) fueron 3.1, 3.6 y 4.1 para una nota final de 3.6.

Álvaro corresponde al alumno 4 del estudio de grupo, sus resultados en las pruebas realizadas al grupo en general fueron: en el Pre Test contestó de manera correcta la pregunta 2; de manera incompleta la pregunta 4; no abordó la pregunta 5b y las demás preguntas las respondió de forma incorrecta. Las preguntas en que se equivoca Álvaro muestran que el tiene algunas dificultades con el manejo algebraico de las expresiones al despejar alguna variable, que se confunde con la traducción de las transformaciones en una función desde su gráfica a su expresión analítica y que no reconoce algunas de las familias de funciones.

En la primera parte del Post test respondió cuatro de las cinco preguntas de manera correcta y la pregunta 2b de manera incompleta. Esta pregunta buscaba identificar las trasformaciones aplicadas a la parábola $f(x) = x^2$ a partir de la gráfica. Estos resultados muestran la mejoría en el desempeño de Álvaro, pero también que aún presenta dificultades con algunas de las transformaciones.

En la segunda parte del post test en donde se resuelve el problema de modelización, al momento de realizar el análisis cualitativo del fenómeno, allí Álvaro parece reconocer que el fenómeno se comporta como una función exponencial y realiza un bosquejo de una curva creciente y cóncava hacia arriba, que se identifica con esta apreciación.

Álvaro luego realiza el ajuste con ayuda de las herramientas estadísticas del GG, sin embargo esta vez no opta por la función exponencial, en la que había pensado inicialmente sino que utiliza la función polinómica obteniendo en este caso la función cuadrática, $h(x) = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374869.94$.

Finalmente, Álvaro obtuvo un resultado de 24 sobre 36 en el Test de visualización de Presmeg, este puntaje no logra ubicarlo claramente en los grupos de visualizadores ni de no visualizadores, sin embargo si muestra una cierta tendencia en el estudiante hacia el grupo de visualizadores.

5.9.1 Guía de Entrevista

En los recuadros 5.14 y 5.15 se aprecia la guía en papel que desarrollo Álvaro durante la entrevista.

① clip.0001
Voz 010 min 0. (1º Parte).
Video. MVI4442. MOV.

ENTREVISTA

Nombre: Alvaro David Benitez Salamanca Grupo: DAO 1N Fecha: 28/11/14

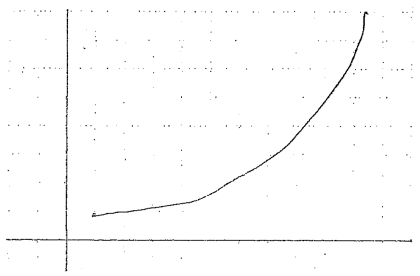
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.



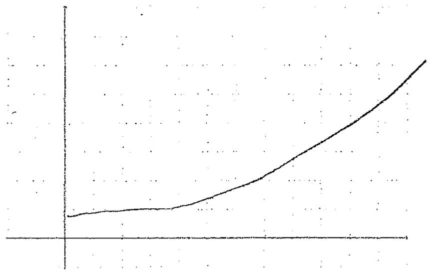
3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si puede ser exponencial o lineal

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

Recuadro 5.14 Guía de Entrevista Alvaro p.1

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si funcioh exponencial o funcion lineal

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$Y = 0.9755x^2 - 3391.1125x + 3284396.564$

tomo la nube de puntos en geogebra luego cologo la opción regresion lineal para que me estudie que grafica es la mas adecuada. luego coloco el modelo de regresion donde busco la funcion

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

2008: 5184.6092

2013 = 5836.3477

En el modelo de regresion ya teniendo la ecuación calculada. busco en la opcion evalua para que me prediga como va a crecer en esos años.

Recuadro 5.15 Guía de Entrevista Alvaro p.2

5.9.2 Análisis del Protocolo de Álvaro

Datos: Video MVI_4442.MOV Audio Voz 010 (1parte) Pantalla Clip 0001.avi

Las preguntas de la entrevista se han organizado en una Guía de Trabajo, para darles respuesta el estudiante utiliza tanto la guía como el paquete informático GeoGebra (GG).

La guía propone la siguiente situación para ser modelizada:

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)
Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

Se le entrega a Álvaro la Guía de Trabajo, y el comienza a responder por escrito en la guía.

1. (Álvaro recibe la guía de trabajo)
2. Álvaro: ¿La marco?
3. Maestro: Sí, sí márquela, llene ahí las cositas que hay que llenar.
4. A: ¿DA1 sí es? (A pregunta por el nombre del grupo al que pertenece, uno de los datos iniciales que pide la guía)
5. M: A el de ustedes sí es DAO1N
6. A: ¿Estamos a 27, 28? (la fecha de la entrevista)
7. M: Uppps.
8. A: ¿Qué paso?
9. M: A ya, me asustó (ajustes previos para la grabación de la entrevista).
10. M: Empecemos.
11. (A estudia la tabla presentada en la guía y a partir de la información dada en la tabla construye un bosquejo de cómo cree que podría ser la función que representa el PIB)

2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.

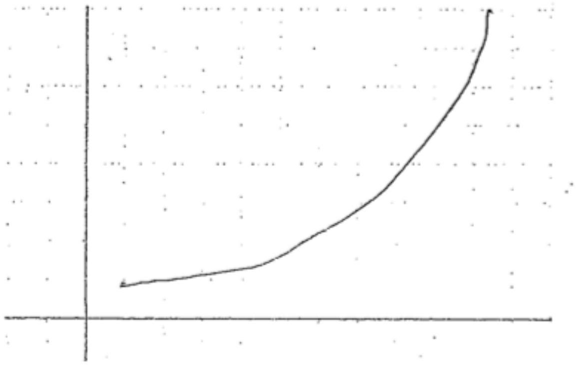


Figura 5.22 Bosquejo de la gráfica de la función (ítem 11 pregunta 2 de la guía).

12. A: ¿Empiezo a pasar la tabla de una vez? ¿la voy pasando? ¿O quiere que empiece a grabar?
13. M: Si comience, comience. Ah espere, póngalo a grabar ahí por favor, ahí *stop rec,* listo. (M se refiere a que active en la ventana del ordenador uno de los programas que grabará la entrevista).
14. (A comienza a introducir datos en la HdC de GG, introduce [A1; años])
15. (A Introduce [B1; PIB])
16. (A Introduce [A2; 1955])
17. (A Introduce [A3; 1960])
18. (A Introduce [A4; 1965])
19. (A Introduce [A5; 1970])
20. (A Introduce [A6; 1975])
21. (A introduce [A7; 1980])
22. (A introduce [A8; 1985])
23. (A Introduce [A9; 1990])
24. (A Introduce [A10; 1995])
25. (A Introduce [A11; 2000])
26. (A Introduce [A12; 2005])
27. (A Introduce [A13; 2010])
28. (A Introduce [B2; 837])
29. (A Introduce [B3; 1559])
30. (A Introduce [B4; 1328])
31. (A Introduce [B5; 1700])
32. (A Introduce [B6; 1934])
33. (A Introduce [B7; 2373])
34. (A Introduce [B8; 2847])
35 (A Introduce [B9; 3173])
36 (A Introduce [B10; 3746])
37 (A Introduce [B11; 4207])
38 (A Introduce [B12; 4853])
39 (A Introduce [B13; 5439])

40 M: Cuénteme una cosita antes de que

A estudia los valores de los puntos en la tabla y reconoce como en ambas variables se va dando un crecimiento, (incluso se lo muestra a M ítem 44 - 46), que plasma en el bosquejo dibujando una función creciente (ver Fig. 5.22). Sin embargo parece que nota que la tasa de cambio en ambas variables no es constante, lo que explicaría por que no dibuja una recta. Así su bosquejo muestra una *curva* creciente, pero no es solo creciente, es cóncava hacia arriba lo que podría pensarse que hace porque ha reconocido que la tasa de cambio cada vez es mayor, lo que hace que la concavidad en la curva sea mayor.

De otra parte, en la revisión de la tabla parece que A no nota que el segundo punto, B (1960, 1559) (ítems 17 y 29), tiene un comportamiento anómalo con respecto a la nube de puntos.

El estudio de la situación, y de la tabla con los datos, constituye la primera parte del *Análisis Cualitativo del Fenómeno*,

que luego continúa con la propuesta de una función que modelice el fenómeno propuesta a partir del *Análisis Cualitativo de las familias de funciones* conocidas y que se expresa en el bosquejo empiece a graficar allá eso (M se refiere a graficar la nube de puntos con GG).

41 M : ¿Esa gráfica que usted hace ahí en la hoja por que cree que es así? (M se refiere al bosquejo realizado en la guía, ver ítem 11, Fig. 5.22).

42 A: ¿Exponencial?

43 M: No se, esa forma en que la puso ahí.

Otro asunto es que al preguntarle a A por la forma de su gráfica (ítems 41 - 42) el responde que es una función exponencial, aunque con la forma que ha trazado en el bosquejo también podría ser una función cuadrática, el no contemplar esta opción puede ser debido a la dificultad para ver un "trozo" de una curva como la curva en si misma, en este caso una parte de la parábola como la parábola en sí. Otra explicación podría tener que ver con una deformación en la imagen y el concepto de ciertas funciones por el estilo como se han presentado sus gráficas a los estudiantes como lo plantea Goldenberg (1991).

44 A: Va en crecimiento,

45 M: Ya.

46 A: Esto por ejemplo que va subiendo la gráfica (A señala valores del PIB en la tabla)

Un aspecto interesante a tener en cuenta es el significado de los gestos (Radford, 2009) que utiliza A, en este caso (ítem 46) señala los valores de la tabla para mostrar que están creciendo y que de esta misma forma se comportará la función.

47 M: Bueno listo

48 M: ¿Pero no es una recta? ¿o si es una recta?

M pregunta puntualmente sí es una recta o no, pues a pesar de la curva que se observa en la Fig. 5.22, en el texto del punto 3 de la guía "¿La función se parece a alguna que conozca o que hayamos estudiado?" A contesta: "Si puede ser exponencial o *lineal*" (ver Recuadro 5.16), lo cual parece desconcertante dada la gráfica que ha realizado en el bosquejo. Sobre esta situación tenemos tres hipótesis: primera esto podría deberse a que A considere las dos opciones como posibles; segunda se podría deber a que realmente tenga una confusión en la representación y no las diferencie y la tercera se refiere a lo que algunos investigadores como Leinhardt et al (1990) han marcado como una tendencia a la linealidad en la construcción de funciones dada una nube de puntos.

49 A: No.

El *no* parece confirmar que A ve como viables cualquiera de las dos funciones para representar el fenómeno, ya que las diferencia.

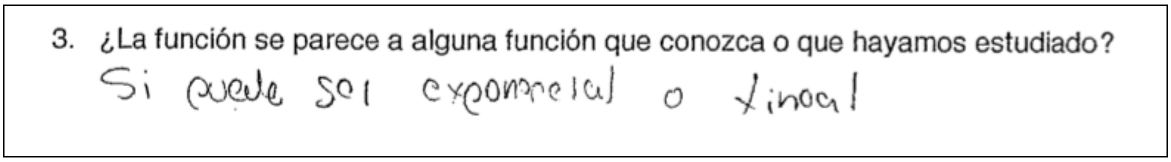
50 A: Creo que es en forma exponencial, pero todavía no se, hay que graficarla.

A quiere confirmar su hipótesis de que la función que brinda el mejor ajuste es una función exponencial, y para ello ve necesario realizar una grafica con el paquete informático.

Sin embargo no es claro, a que se refiere A, ¿Qué es lo que quiere graficar? La nube de puntos ¿para ver claramente allí como están ubicados los puntos y qué tendencia siguen? O la regresión exponencial ¿para confirmar que es la regresión que da el mejor ajuste?

Suponiendo que A sigue la guía debería ser graficar la nube de puntos.

51 M: Vale.


3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
Si puede ser exponencial o lineal

Recuadro 5.16 Respuesta a la pregunta 3 de la guía.

Transcripción: Si puede ser exponencial o lineal

52 (A amplia la vista de la HdC).

53 (A selecciona el bloque de celdas [A2; B13] y con ellas crea una lista de puntos).

A parece que esta haciendo los pasos para graficar la nube de puntos en GG.

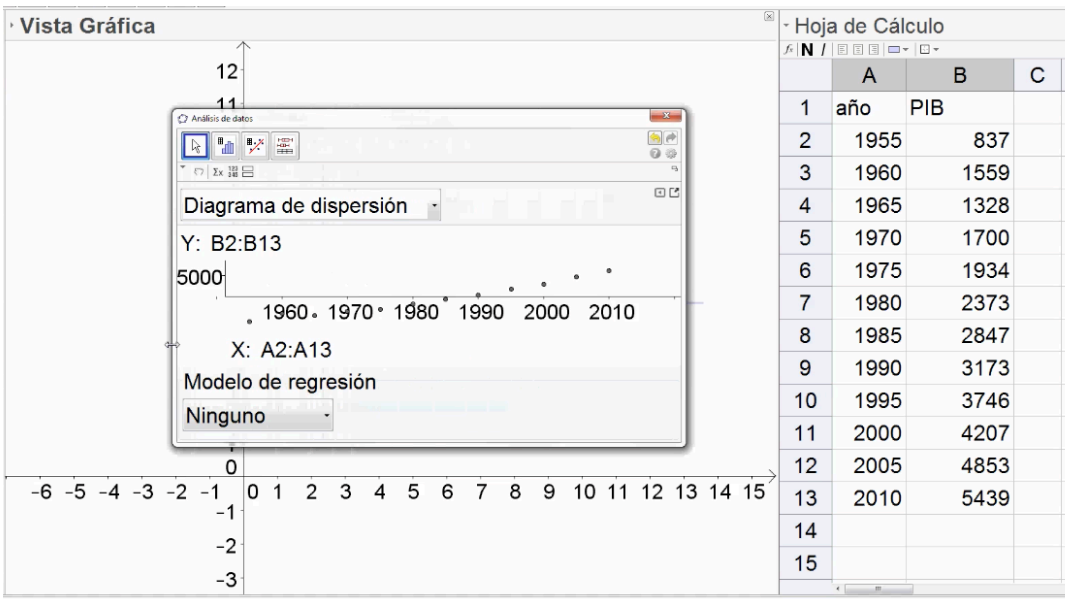


Figura 5.23 Gráfica de la nube de puntos sin ampliar (ítem 54 pregunta 4 de la guía).

54 (A abre la ventana estadística y

A desde la tabla reconstruye la gráfica de comienza a realizar el análisis de regresión en GG).

la nube de puntos (pregunta 4 de la guía), sin embargo lo hace de una manera diferente a lo que esperábamos y a los métodos empleados por otros de los resolutores, pues realiza la gráfica de la nube de puntos en la pequeña ventana de análisis de datos y no en la amplia ventana de la Vista Grafica de GG.

Este manejo tiene varias consecuencias, de una parte la ubicación de los puntos en la nube no es clara debido a la reducida escala, a la estrechez de la pantalla y a que los puntos se confunden con los valores del eje x como se puede notar en la Fig. 5.23. De otra parte, no hay permanencia de la nube de puntos para comparar, pues se grafican las regresiones y con cada intento, después de la gráfica, desaparece la imagen presentada.

Además hace que el resolutor no tenga en cuenta el punto anómalo B, pues en la ventana de análisis de datos en que GG grafica las regresiones la escala no favorece ver la diferencia entre el punto B y los demás puntos de la nube

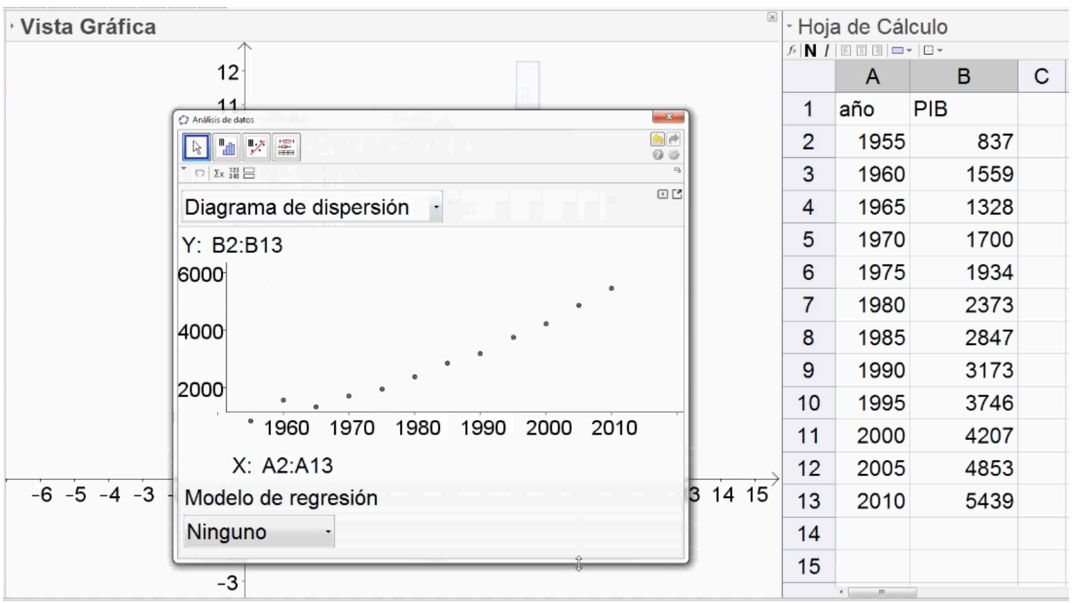


Figura 5.24 Gráfica de la nube de puntos ampliada (ítem 55).

55 A: ¿Se puede agrandar? (A se refiere a ampliar la ventana estadística de GG).

Sin embargo A nota como la ventana es muy pequeña y busca como ampliarla, lo que luego realiza, (ítems 55-58), esta nueva ventana (Fig. 5.24) mejora algunas de las condiciones anotadas. Sin embargo A sigue sin percibir el punto anómalo B, pareciera que no lo ve, o que no le da suficiente importancia, mirando más el comportamiento global de la función, que la situación local.

56 M: Si se puede, cogiéndolo del bordito.

57 (A amplia la ventana).

58 M: Eso.

De otra parte, es importante anotar como en esta nueva pantalla (Fig. 5.24) la nube de puntos se ve con una tendencia más lineal, que como se vería en la Vista Gráfica.

59 (A escoge una regresión exponencial en la ventana estadística).

A comienza a utilizar las herramientas estadísticas del paquete para buscar la función que brinde el mejor ajuste, inicialmente elige una regresión exponencial, una de las dos que menciono en el análisis cualitativo, pero parece que esta no le satisface del todo.

60 (A cambia el modelo de regresión a uno lineal).

61 (A nuevamente cambia, esta vez a un modelo de potencia).

Así que elige una regresión lineal, su segunda opción en el análisis cualitativo, sin embargo parece que esta tampoco llena sus expectativas, pues luego de ella nuevamente cambia de regresión, esta vez a un modelo de potencia.

62 A: Yo creo que esa (A cambia a la regresión exponencial y recorre con el cursor los puntos).

Luego de únicamente estos tres intentos, y sin revisar otras posibilidades A opta por la regresión exponencial que había elegido inicialmente. Este comportamiento es llamativo, pues es diferente a lo que hemos observado en otros de los casos estudiados, donde al contrario se realiza una gran revisión sobre las diferentes posibilidades que brinda el paquete informático.

63 M: ¿Esa será la mejor?

64 A: Pues, tal vez la que toca más puntos es esa, la que coge más puntos y va siguiendo

Cuestionado si esta es la función que brinda el mejor ajuste, A responde “Pues, tal vez la que toca más puntos es esa, la que coge más puntos y va siguiendo” (ítems 63 y 64). Este parece ser el criterio que utiliza A para escoger la mejor regresión lo cual en principio es correcto, pues es la misma idea que sustenta como se calcula la regresión por el principio de mínimos cuadrados. (ítems 64 y 74).

65 M: ¿Pero luego para poder predecir? Como luego le preguntan ahí que va a pasar con el Producto Interno Bruto (PIB) después, ¿Qué pasará?

M lo cuestiona, tratando de que piense en la idea de tendencia con miras al concepto de modelización.

66 A: De pronto mejor lineal, porque esta empieza a subir. [Mejor] Un poco más recto, así, no se (A cambia a la regresión lineal).

A realmente esta pensando en la tendencia, pues la respuesta que brinda (ítem 66) precisamente se dirige a esto, cuando menciona "[…] porque esta empieza a subir" se refiere justo a la tendencia de la regresión exponencial, pues la curva no toca el ultimo punto, L (2010 , 5439) sino que para el valor correspondiente en *x,* 2010 el valor en y es mayor, lo que hace que la curva tenga una mayor concavidad y "suba" como lo ve A. De otra parte el comentario "De pronto mejor [una función] lineal, porque esta empieza a subir. [Mejor] Un poco más recto, así, no se", esta dirigido justo a la nube de puntos pensando en la tendencia lineal que se puede observar en la Fig. 5.24 que mencionamos.

Sin embargo esta insistencia en las funciones lineales tanto en las comentarios a las gráficas en la guía, como aquí, podría estar relacionado con el fenómeno que hemos anotado como tendencia a la linealidad (Leinhardt et al, 1990).

67 (A cambia a la regresión polinómica).

68 A: Entonces esta.

A cambia nuevamente de regresión, esta vez a una función polinómica y opta por ella inmediatamente (ítems 67-68).

69 M: No se. Usted tranquilo escoja la que le parezca.

70 (A retoma la guía en papel lee las preguntas 7 y 8 e inmediatamente comienza a contestar la pregunta 7 "Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace").

71 (A amplia la ventana estadística y anota la expresión de la función de regresión polinómica $g(x) = 0.8755x^2 - 3391.1125x + 3284396.564$).

A responde la pregunta 7 de la guía "Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace" anotando la función de regresión polinómica $g(x) = 0.8755x^2 - 3391.1125x + 3284396.564$ y el proceso que llevó a cabo.

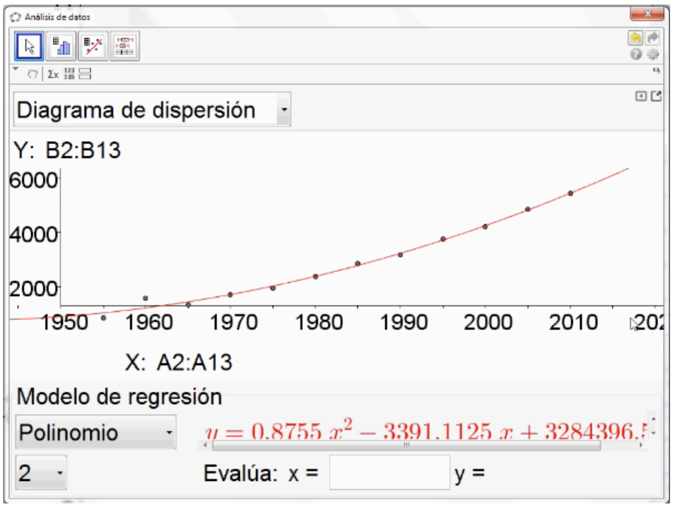
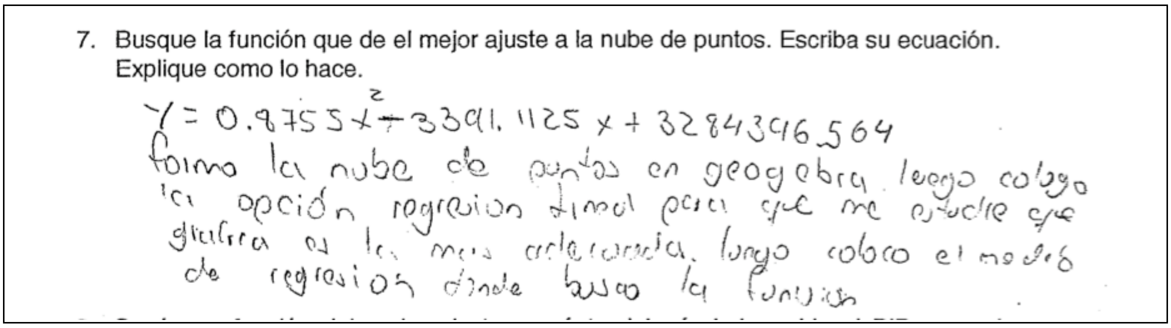


Figura 5. 25 Imagen de la ventana estadística en el ítem 71

72. M: Cuénteme ¿Por qué escogió esa gráfica y no otra función?

73. M: o si quiere lea eso que usted escribió ahí de cómo la encuentra.


7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

Y = 0.8755x² − 3391.1125 x + 3284396.564
formo la nube de puntos en geogebra luego coloco la opción regresion lineal para que me estudie que grafica es la mas adecuada, luego coloco el modelo de regresion donde busco la funcion

Recuadro 5.17 Respuesta a la pregunta 7 de la guía.

Transcripción: $y = 0.8755x^2 - 3391.1125x + 3284396.564$
Formo la nube de puntos en geogebra luego coloco la opción regresión lineal para que me estudie que gráfica es la más adecuada, luego coloco el modelo de regresión donde busco la función.

74 A: Yo la escogí porque es la gráfica que coge todos los puntos de la tabla, es la que más se adecúa a todos los datos de la tabla.

Aquí nuevamente A menciona su criterio del mejor ajuste, diciendo “es la gráfica que coge todos los puntos de la tabla, es la que más se adecúa a todos los datos de la tabla” (ítem 74).

Sin embargo su afirmación *no* es cierta, lo que dice frente a la gráfica que escoge es inexacto, pues no toca *todos* los puntos, por lo menos se ven dos que no toca (Fig. 5.25). ¿Sera qué no los ve? Esta situación unida al hecho de que A tampoco notó el punto anómalo B, parece confirmarnos que A ve las situaciones gráficas de manera global, sin tomar en cuenta las situaciones locales en puntos específicos.

75 M: Ummm.

76 (A introduce 2008 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de estadística y el programa le da como salida 5189.6092).

77 M: ¿Y ahí que esta haciendo?

78 A: Predecir el Producto Interno Bruto en el 2008.

79 (A introduce 2013 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana estadística y el programa le da como salida 5836.3477)

80 (A retoma la guía en papel para responder la pregunta 8 “Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?”).

En los ítems 76 a 80 A comienza a realizar el proceso para responder la pregunta 8 de la guía “Según su función del mejor ajuste, ¿Cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013?” para ello realiza la interpolación para los valores desconocidos usando las herramientas del paquete informático.

81 M: ¿Cree qué habría encontrado o habría podido encontrar una función que diera un muy buen ajuste, sin usar las ayudas del GG? O sea ¿Sin utilizar esa ventana en particular? (M se refiere a la ventana estadística del GG).

82 A: Sí pero pues ya tocaría identificar más o menos que función es y colocar pues no se como en un deslizador tratando de cuadrar una función que más o menos se ajuste

M trata de que A utilice otro método para hallar la función de mejor ajuste, diferente al que empleó con las herramientas estadísticas del paquete informático (ítem 81), a lo que A responde recordando parte del método de ajuste manual con la ayuda de la herramienta deslizador (ítems 82-97). A lo presenta de la siguiente manera “pues ya tocaría identificar más o menos que función es y colocar pues no se como en un deslizador tratando de cuadrar una función que más o menos se ajuste” (ítem 82).

83 M: Ensaye, ensaye ¿Cómo haría eso?

M le insiste a A, para que intente este método alternativo.

84 A: No se, es que eso si es…

85 M: Yo se que eso es un poquito más largo, pero ensaye, ensaye a ver si le funciona.

86 A: A ver.

87 (A borra la ventana estadística y queda la Vista Gráfica de GG).

88 (A escribe en la barra de entrada y =).

89 (A escribe en la barra de entrada *y = 2^x*)

90 (En la Vista Gráfica de GG aparece la gráfica de la función $f(x) = 2^x$).

A comienza el proceso con la función exponencial $f(x) = 2^x$ pero A no recuerda el manejo de la herramienta deslizador, ni su ubicación en el menú del GG.

91 A: Pero no me acuerdo como hacer un deslizador, no me acuerdo como se hace.

92 (A se desplaza por la barra de herramientas buscando el deslizador).

93	M: Ummm, aquí esta (M señala entre los iconos de la barra de herramientas el que corresponde a los deslizadores).	M ayuda a A para que ubique en el menú la herramienta deslizador.
94	(A activa la herramienta deslizador).	
95	M: Ahí.	
96	A: No me acuerdo como se colocan las [los parámetros]	Pero el problema de A con los deslizadores va más allá, pues A no reconoce los parámetros que debe utilizar en la expresión del deslizador, ni tampoco la magnitud que deben tener de acuerdo a la nube de puntos (ítems 96-97).
97	A: Además no veo cuánto necesito para correrlo	
98	A: Puedo hacer esto, pero pues hasta que llegue allá (se refiere a desplazar la función manualmente, con la herramienta de arrastre de GG).	Ante esta dificultad A propone un método alternativo (ítem 98 y 101), el cual consiste en utilizar la herramienta de arrastre del paquete informático para desplazar la función $f(x) = 2^x$ hasta llegar a la nube de puntos y ajustarla.
99	(A desplaza la función $f(x) = 2^x$ de manera manual aproximadamente 12 unidades a la derecha en el eje *x* y 1.3 unidades hacia arriba en el eje *y*, con la herramienta de arrastre de GG, la función es ahora $f(x) = 2^{(x-12.2)} + 1.3$).	Así A comienza la tarea de ajuste con la herramienta de arrastre de GG de tal manera que desplaza horizontalmente la función $f(x) = 2^x$ un poco más de 12 unidades en sentido positivo y 1.3 unidades en dirección vertical y también sentido positivo, de esta forma la función es ahora $f(x) = 2^{(x-12.2)} + 1.3$. En la fig. 5.26 se registra el momento final de este

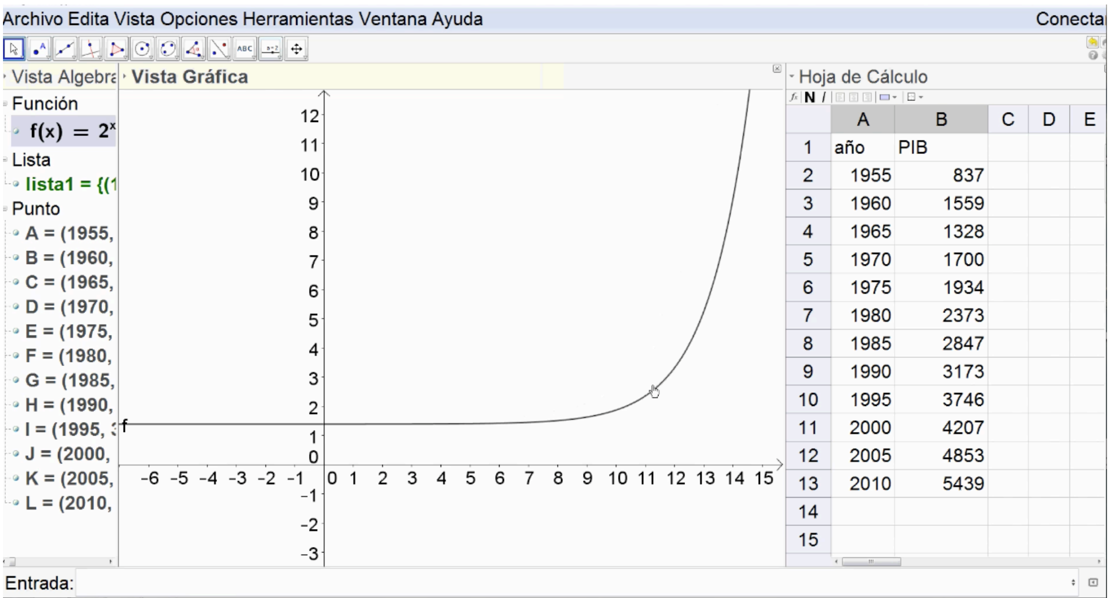


Figura 5.26 Uso del arrastre en GG $f(x) = 2^x$ desplazada a $f(x) = 2^{(x-12.2)} + 1.3$ (ítem 99)

movimiento. Es importante destacar dos aspectos, en primera instancia gracias al manejo interactivo entre las múltiples representaciones del paquete informático cuando la función se desplaza por medio de la herramienta de arrastre, el programa actualiza la expresión de la función según su nueva ubicación.

100 A: No me acuerdo como se hacia para el deslizador.

De otra parte, el paquete registra el cambio al modo de arrastre, indicando un cambio en la imagen del cursor sobre la pantalla, así se nota el cambio de una flecha a una *mano* representando precisamente el cambio al Modo de Arrastre del GG, como se puede observar en la Fig. 5.26.

Después de esta breve demostración, A nos confirma sus dificultades para poder utilizar el deslizador.

101 A: Yo movería esto (*señala la función que ha desplazado) hasta allá y trataría de cuadrarlo* (se refiere a la ubicación de la nube de puntos).

Y vuelve a explicarnos el proceso que utilizaría con el método por arrastre

102 M: ¿Y así a mano no lo podría mover?

103 A: ¿A Mano?¿Así?

M insiste para que A aplique el método que esta proponiendo.

104 (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-14.5)} + 1.3$).

105 (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a la derecha 17 unidades)

106 (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-30.2)} + 1.3$).

107 (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a la derecha 22 unidades)

108 (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-45.1)} + 1.62$).

A acepta y comienza a desplazar la función con la herramienta de arrastre, de manera reiterada (ítems 104-108)

109 A: No puedo, ¿Cómo se puede ampliar esto? ¿Se puede?

110 M: Sí.

111 (A hace un zoom continuado sobre la función alejándose)

A encuentra problemas con la escala de la ventana de la Vista Grafica, para poder continuar sus desplazamientos de la función con el arrastre (ítem 109), de manera que realiza un zoom de alejamiento para ampliar el área de la Vista Grafica, con lo que logra un cambio en la escala de los ejes del sistema de coordenadas (ítem 111 y Fig. 5.27).

Sin embargo este cambio en la escala del sistema, también afecta la representación de la función, ahora el cambio de dirección en la gráfica es más brusco, tanto que pareciera que la gráfica esta formada por dos segmentos de recta perpendiculares (Fig. 5.27).

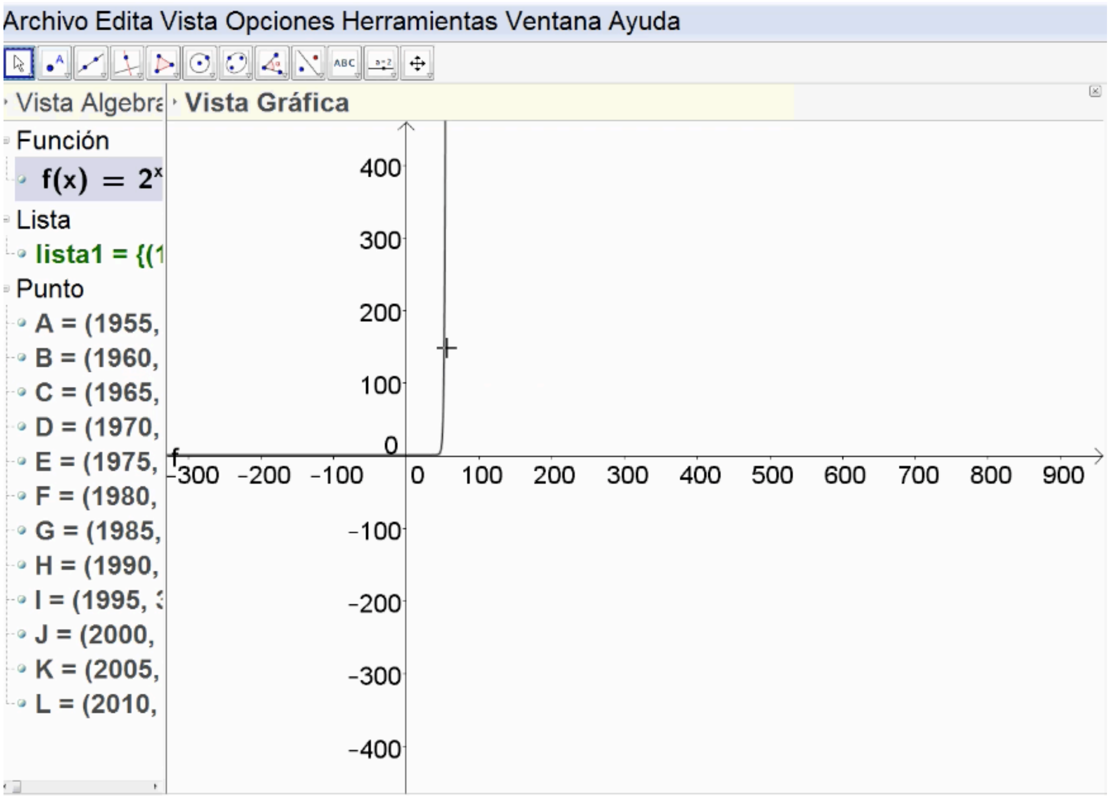


Figura 5.27 La función después del ítem 111.

112 (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-915.23)} + 46.7$).

113 (A hace un zoom continuado sobre la función alejándose)

114 (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-1290)} + 57$).

A retoma los desplazamientos de la función sobre la Vista Grafica, ahora combinándolos con los zoom de alejamiento (ítems 112-115).

115 (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, la nueva función ahora es $f(x) = 2^{(x-1400)} + 96$. En esta vista se ve parte de la nube de puntos).

En este punto de los desplazamientos A ha trasladado la función original $f(x) = 2^x$ 1400 unidades en el eje x en sentido positivo y 96 unidades sobre el eje y también en sentido positivo, de esta forma la función es ahora $f(x) = 2^{(x-1400)} + 96$. Esta nueva función ya se encuentra en la vecindad de la nube de puntos, como se observa en la Fig. 5.28. De nuevo la escala empleada también altera la imagen de la nube de puntos que aquí se muestra como una sucesión de puntos casi en una recta vertical.

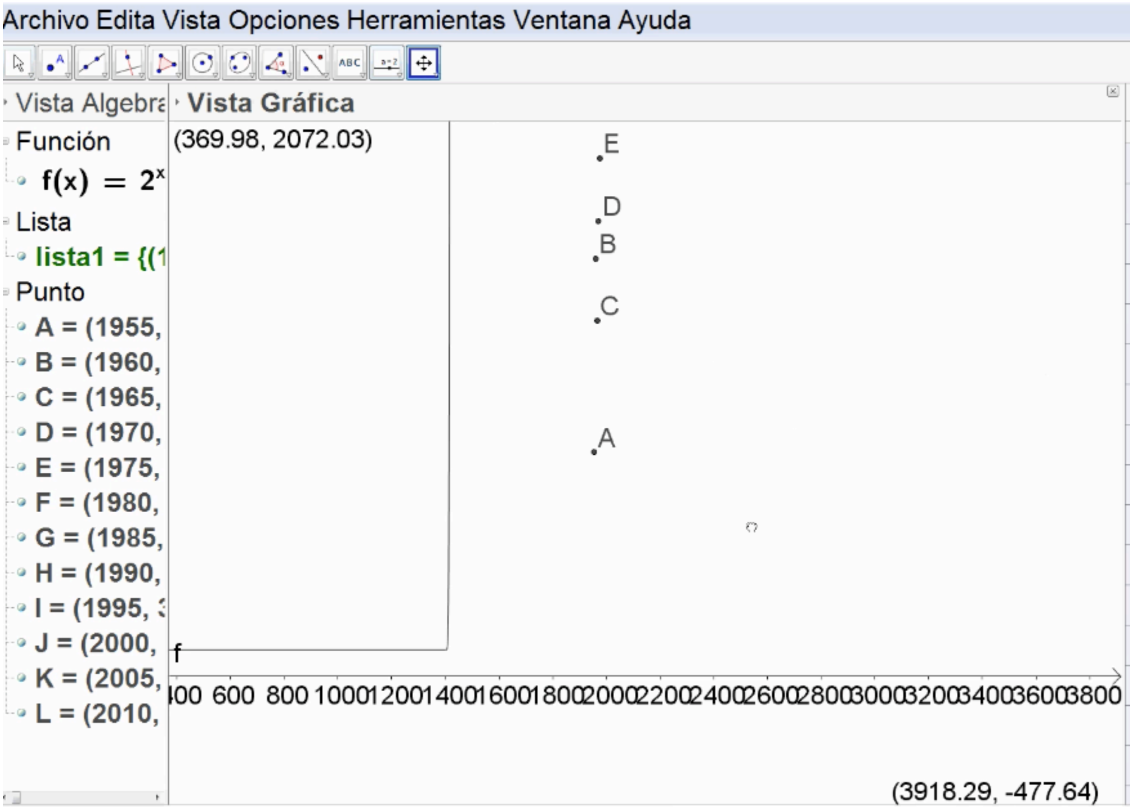


Figura 5.28 La función después del ítem 115.

116 (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a la derecha 1900 unidades y 700 unidades hacia abajo, en esta vista también se ve parte de la nube de puntos).

117 (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-2280)} + 800$).

118 (A hace un zoom sobre la función acercándose).

119 (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a la derecha 120 unidades y 590 hacia arriba, en esta vista se observan los puntos A, B, C y D).

120 (A hace un zoom sobre la función alejándose, se ven los puntos A, B, C, D, E y F).

121 (A desplaza la función mediante el arrastre y la acerca a la nube de puntos).

A continúa acercando la función a la nube de puntos, con la intención de ajustarla, revisando continuamente la ubicación de los puntos y de la función (ítems 116-131)

122 (A hace un zoom sobre la función acercándose se observan los puntos B, C, D, E, F y G).

123 (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a izquierda y derecha y arriba y abajo alrededor de la función)

A trata de observar la vecindad de la función moviéndose a izquierda y derecha y arriba y abajo alrededor de ella, parece que estuviera revisando el ajuste entre la función y la nube de puntos (ítem 123).

124 (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica hasta una posición en que se ven los ejes de coordenadas, ahí se puede apreciar que la función corresponde a la expresión $f(x) = 2^{(x-2150)} + 900$).

125 (A desplaza nuevamente la función manualmente con la herramienta de arrastre acercándola a la nube de puntos, ahora es $f(x) = 2^{(x-2000)} + 700$).

126 (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose hacia arriba y abajo alrededor de la nube de puntos).

127 (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre, acercándola un poco más a la nube de puntos ahora es $f(x) = 2^{(x-1970)} + 700$).

128 (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose continuamente hacia arriba por la nube de puntos hasta llegar al punto I y luego baja nuevamente hasta el punto A).

129 (Una vez más A desplaza la función de manera manual con la herramienta de arrastre, acercándola a la nube de puntos ahora es $f(x) = 2^{(x-1972)} + 827$).

130 (A hace un zoom continuado sobre la función acercándose).

En este punto A hace un ajuste más “fino” arrastrando sutilmente la función para finalmente optar por la función de ajuste $f(x) = 2^{(x-1972)} + 827$), la cual revisa con respecto a la nube de puntos moviéndose alrededor y desplazándose hacia arriba y hacia abajo.

131 (Nuevamente A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose sobre la nube de puntos hacia arriba y hacia abajo).

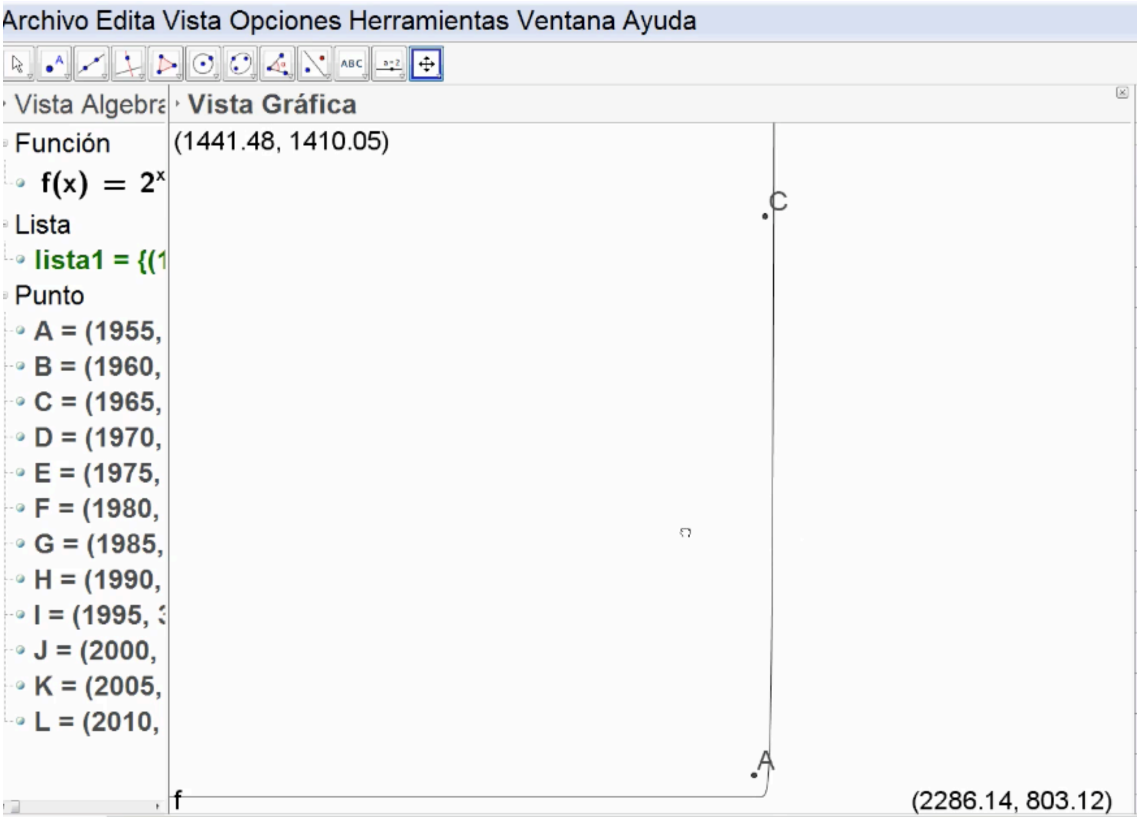


Figura 5.29 La función después del ítem 131.

5.10 FELIPE

Es un estudiante, con un desempeño apenas aceptable en matemáticas que presenta algunos vacíos. En su trabajo durante el curso del cuatrimestre obtuvo un resultado de 3.5 sobre cinco, se aprueba el curso con 3.0. Sus notas parciales del cuatrimestre calificadas sobre 5 (cinco) fueron 3.0, 3.7 y 4.0 para una nota final de 3.5.

Felipe es el alumno 12 del estudio de grupo, sus resultados en las pruebas realizadas al grupo en general fueron: en el Pre Test contestó de manera correcta las preguntas 1a, 2, 4, y 5c; no abordó las preguntas 3a, 3b y 5b y las demás preguntas las respondió de forma incorrecta. Las preguntas en que se equivoca Felipe muestran que él tiene algunas dificultades con el manejo algebraico de las expresiones al despejar alguna variable; además que se confunde con la traducción de las transformaciones en una función desde su gráfica a su expresión analítica y que no reconoce algunas de las familias de funciones.

En la primera parte del Post test respondió tres de las cinco preguntas de manera correcta y las preguntas 2b y 3b de manera incompleta. Las preguntas 2a y 2b buscaban identificar las trasformaciones aplicadas a la parábola $f(x) = x^2$ a partir de la gráfica. Y la pregunta 3b se refería a graficar una función exponencial. Estos resultados muestran la mejoría en el desempeño de Felipe, pero también que aún presenta dificultades con algunas de las transformaciones y en la representación de ciertas familias de funciones.

En la segunda parte del post test en donde se resuelve el problema de modelización, al momento de realizar el análisis cualitativo del fenómeno, Felipe realiza el bosquejo de una curva creciente, con varios cambios de concavidad, tal vez tratando de aproximarla a la nube de puntos y parece reconocer que el fenómeno se comporta como una función exponencial. Al graficar la nube de puntos en el paquete informático, la curva se le parece a una "función cúbica o polinomio" como lo menciona.

Luego realiza un ajuste de manera "manual" de la función, a la nube de puntos precisamente utilizando la función cúbica $f(x) = 0.03(x - 1962.07)^3$.

El estudiante obtuvo un puntaje de 20 sobre 36 en el Test de visualización lo que no lo define ni como visualizador ni como no visualizador, según el estudio de Norma Presmeg.

5.10.1 Guía de Entrevista

En los recuadros 5.18 y 5.19 se aprecia la guía en papel que desarrollo Felipe durante la entrevista.

5 Clip 0005
Voz 013

ENTREVISTA

Nombre: David Felipe Marta Grupo: DA01N Fecha: 28/11/14

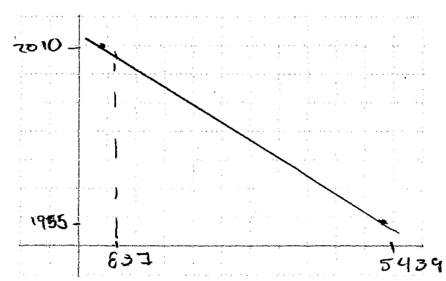
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.



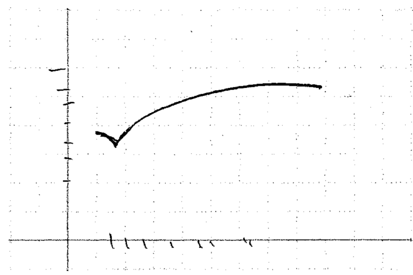
3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Puede ser una función constante, o tambien una función lineal teniendo en cuenta los valores de la grafica

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

Recuadro 5.18 Guía de Entrevista Felipe p.1

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Segun lo que hemos visto se podria decir que es una grafica cubica o exponencial.

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

La funcion que mejor se ajusta a los datos de la tabla seria la funcion cuadratica

$f(x) = 0.03\,(x - 2897)^2$.

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

Para el 2008 ~~lo~~ el PBI seria de 5189.6097.

Y para el 2013 seria de 5836.3177.

Estos valores los hallo evaluando en GG, pero tambien se podrian hallar tomando una referencia de año tras año.

Recuadro 5.19 Guía de Entrevista Felipe p. 2

5.10.2 Análisis del Protocolo de Felipe

Datos: Video MVI_FELI Audio 013 Pantalla Clip 0005

Las preguntas de la entrevista se han organizado en una Guía de Trabajo, para darles respuesta el estudiante utiliza tanto la guía como el paquete informático GeoGebra (GG).

La guía propone la siguiente situación para ser modelizada:

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)
Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

Se le entrega a Felipe la Guía de Trabajo, y el comienza a responder por escrito en la guía.

1. (Felipe lee la guía y estudia la tabla presentada y a partir de la información dada en la tabla construye un bosquejo de cómo cree que podría ser la función que representa el PIB)

Se le entrega a Felipe la Guía de Trabajo, y el comienza a responder por escrito en la guía, haciendo el bosquejo de la función, dibuja una recta con pendiente negativa (Fig. 5.30).

Es llamativo que F construya un bosquejo con la función lineal, pero el que sea una función decreciente sí es muy extraño. Por la ubicación de los puntos que localiza en el sistema de coordenadas, pareciera que F no tomó los puntos de la tabla sino solo los extremos de cada variable y con ellos formó unos nuevos puntos, de esta forma no escoge los puntos A(1955, 837) y L(2010, 5439), sino que forma los nuevos puntos (837, 2010) y

(5439, 1955).

Además de estos nuevos puntos, se nota en el bosquejo que F, no reconoce, o no le interesa, la convención sobre la ubicación de las variables en los ejes, pues los valores de la primera columna de la tabla (los años) deberían ubicarse en el eje x y los valores del PIB deberían quedar en el eje y, sin embargo no aparecen de esta forma en el bosquejo, donde F ha intercambiado los ejes. Este tipo de confusión al graficar ya se ha anotado en la literatura.

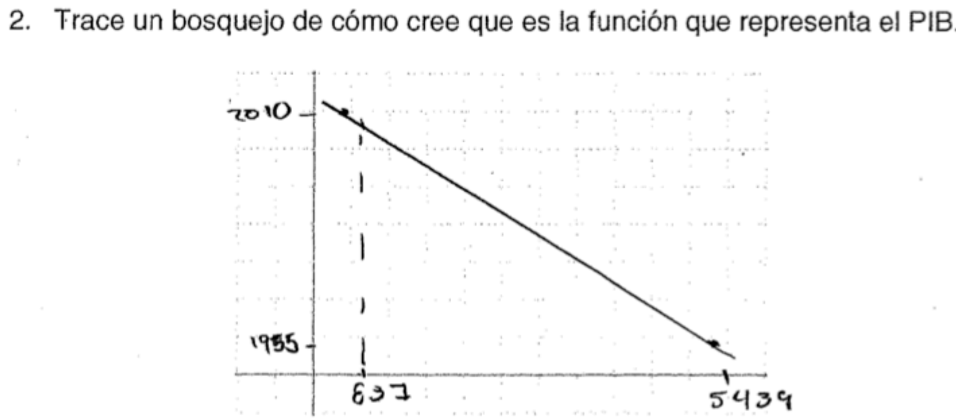
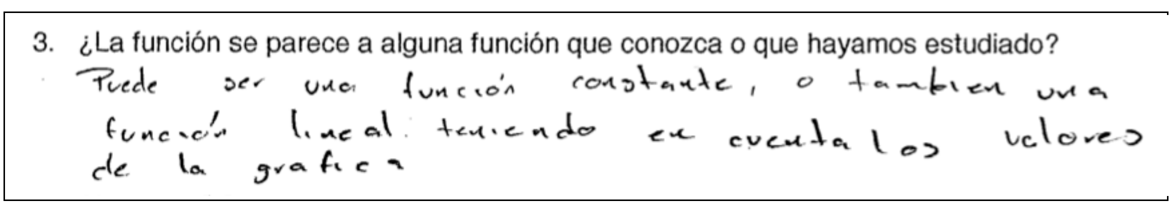


Figura 5.30 Bosquejo de la nube de puntos (ítem 1 pregunta 2 de la guía).


3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
Puede ser una función constante, o tambien una función lineal teniendo en cuenta los valores de la grafica

Recuadro 5.20 Respuesta al punto 3 de la guía.

Transcripción: Puede ser una función constante, o tambien (sic) una función lineal teniendo en cuenta los valores de la grafica (sic)

Otro aspecto interesante, relacionado con el bosquejo, es que al ser cuestionado en la pregunta 3 de la guía ¿La función se le parece a alguna que conozca o que hayamos estudiado? F responde: "Puede ser una función constante, o tambien (sic) una función lineal teniendo en cuenta los valores de la grafica (sic)".

El que responda que puede ser una función constante, no parece muy razonable, pues no se parece a la gráfica que ha realizado, ni a los valores registrados en la tabla. Puede ser que F se encuentre confundido, con algún otro tipo de función lineal, o que realmente no reconoce la representación de una función constante, estas situaciones ya se mencionan en la literatura, pues según Leinhard et. al, (1990) reconocer las funciones constates es una de las mayores dificultades que tienen los estudiantes al graficar las rectas.

2. (Felipe amplia la ventana de la HdC de GG y comienza a introducir datos en la HdC, introduce [A1; años]).

F construye la tabla en GG (ítems 2-31).

3. (F Introduce [B1; PIB]).
4. (F Introduce [A2; 1955]).
5. (F Introduce [A3; 1960]).
6. (F Introduce [A4; 1965]).
7. (F Introduce [A5; 1970]).
8. (F Introduce [A6; 1975]).
9. (F introduce [A7; 1980]).
10. (F introduce [A8; 1985]).
11. (F Introduce [A9; 1990]).
12. (F Introduce [A10; 1995]).
13. (F Introduce [A11; 2000]).
14. (F Introduce [A12; 2005]).
15. (F Introduce [A13; 2010]).
16. (F Introduce [B2; 837]).
17. (F Introduce [B3; 1559]).

F no nota el punto anómalo B (1960, 1559).

18. (F Introduce [B4; 1328]).
19. (F Introduce [B5; 1700]).
20. F: 1934 uy mentiras creo que el bosquejo lo hice mal
21. (F se refiere al punto E (1975, 1934) en donde se da cuenta que se ha equivocado).
22. Maestro: No importa, es su primer bosquejo, ahora tiene el chance de hacer otro.

F se da cuenta que se ha equivocado en el bosquejo (ítems 20-23), parece que F no había estudiado en detalle los valores de la tabla, pues solo al ir reconstruyéndola en la HdC de GG se ha dado cuenta de cómo se comporta el fenómeno.

23. F: Sí porque como solo vi los dos primeros, o sea el primero y el último lo analicé así. Pero ahora sí.

F confirma nuestra apreciación de que solo había tomado los extremos de cada una de las variables y con ellos formó los puntos que graficó (ítem 23).

24. (F Introduce [B6; 1934]).
25. (F Introduce [B7; 2373]).
26. (F Introduce [B8; 2847]).
27. (F Introduce [B9; 3173]).
28. (F Introduce [B10; 3746]).
29. (F Introduce [B11; 4207]).
30. (F Introduce [B12; 4853]).
31. (F Introduce [B13; 5439]).

32. (F selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)
.

33. (F abre la ventana para crear la lista de puntos en GG para visualizar la nube de puntos).

34. (F abre la ventana de preferencias de la Vista Gráfica y ajusta los extremos de los ejes coordenados, cambiando los extremos originales
x mín: -9.696, *x* máx: 15.406,
y mín: -6.254, *y* máx: 11.72,

por los nuevos extremos
x mín: -2010, *x* máx: 2010,
y mín: -5500, *y* máx: 5500).

F muestra haber desarrollado varios esquemas de instrumentalización para poder ajustar las dimensiones de los ejes y así visualizar adecuadamente en la ventana de la Vista Gráfica la nube de puntos (ítems 32-34), para ello redondea los valores de las coordenadas del último punto de la tabla L (2010, 5439) a (2010, 5500), y emplea estos nuevos valores y sus opuestos como los nuevos extremos (ítem 34).

35. (F cierra la ventana y se ve la nube de puntos).

Aparece la nube de puntos en la Vista Gráfica, como preveía F sin embargo su disposición no es muy adecuada pues están unos puntos sobre otros en el extremo derecho de la vista.

36. (F nuevamente abre la ventana de preferencias de la Vista Gráfica y activa la opción *Encuadre de todos los objetos,* con lo que se ve mejor la nube de puntos).

Para obtener una mejor disposición de la nube de puntos, F utiliza otro esquema, en este caso la herramienta *Encuadre de todos los objetos* del GG (ítem 34 y fig. 5.31).

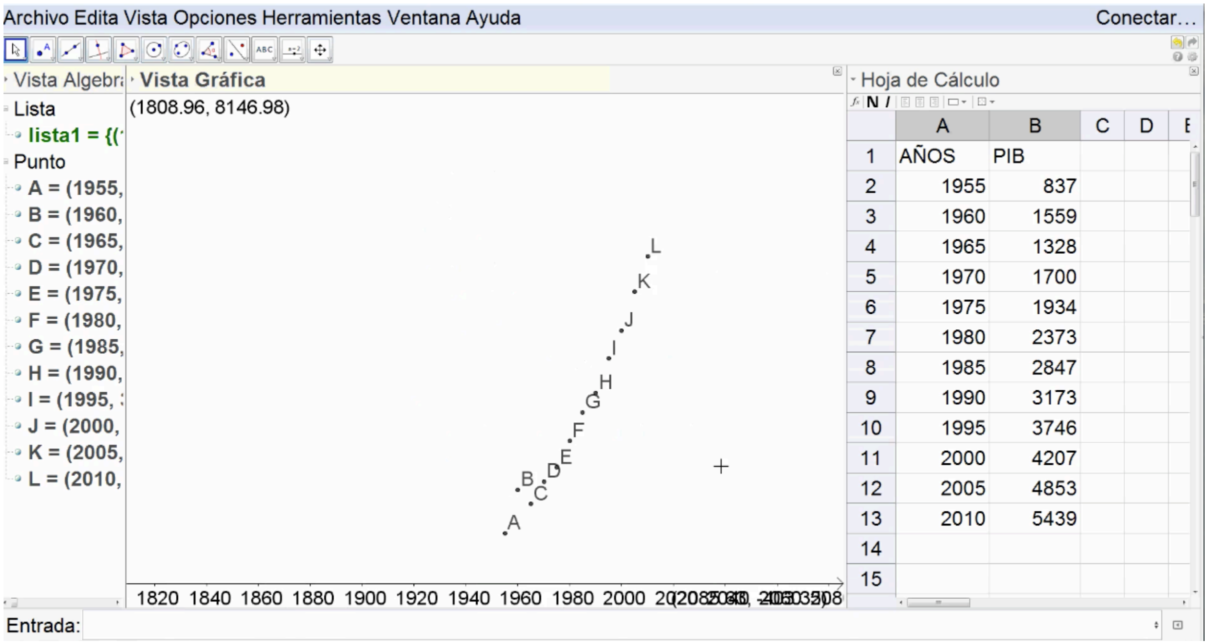


Figura 5. 31 Nube de puntos original (ítem 36)

37. (F vuelve a la HdC y en el encabezado de la columna D introduce [D1; x], con lo que GG grafica la recta $y = x$).

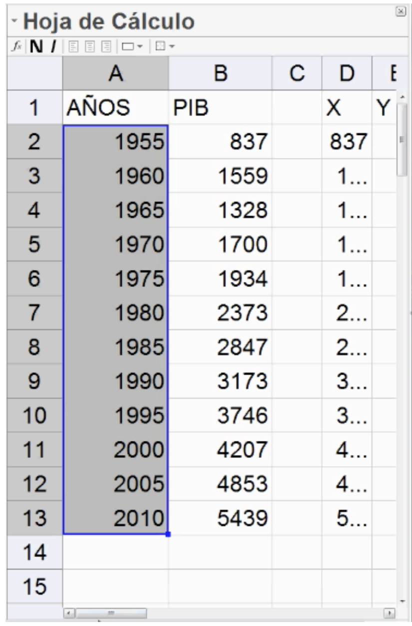
38. (F nombra el encabezado de la columna E, introduce [E1; *y*]).

39. (F corrige e introduce [D1; X]).

40. (F corrige e introduce [E1; Y]).

41. (F copia la columna B de los valores del PIB en D y los valores de los años en la columna E, con lo que ha invertido las coordenadas de los puntos).

Antes de intentar cualquier tipo de ajuste de la nube de puntos, F copia la columna B de los valores del PIB en la columna D y los valores de los años en la columna E, con lo que ha invertido las coordenadas de los puntos, parece que F esta tratando de formar otra nube de puntos alternativa (ítems 37 - 41 y fig. 5.32).



Hoja de Cálculo

	A	B	C	D	E
1	AÑOS	PIB		X	Y
2	1955	837		837	
3	1960	1559		1...	
4	1965	1328		1...	
5	1970	1700		1...	
6	1975	1934		1...	
7	1980	2373		2...	
8	1985	2847		2...	
9	1990	3173		3...	
10	1995	3746		3...	
11	2000	4207		4...	
12	2005	4853		4...	
13	2010	5439		5...	
14					
15					

Figura 5.32 Hoja de Calculo de GG con las columnas originales y la construcción de las nuevas (ítems 37-41)

42. (F borra uno a uno los puntos de la nube en la vista gráfica).
43. (F vuelve a la HdC y selecciona las dos columnas D y E desde D1 a E13).
44. (F nuevamente abre la ventana de preferencias de la Vista Gráfica y ajusta los extremos de los ejes coordenados).
45. (F vuelve a la HdC y selecciona de nuevo las dos columnas D y E desde D1 a E13).
46. (F abre la ventana para crear una nueva lista de puntos en GG).
47. (La nueva nube de puntos aparece en la vista gráfica).

Definitivamente F esta construyendo una nueva lista de puntos para graficar otra nube de puntos (ítems 43-47). Pareciera que F busca alternativas a la nube de puntos original.

F de nuevo ajusta los extremos de los ejes utilizando el mismo esquema comentado (ítem 44).

48. M: ¿Por qué hizo ese cambio? (M se refiere a la creación de una nueva nube de puntos donde cada punto tiene ahora coordenadas (y,x)).
49. F: Lo pruebo de dos puntos a ver si la gráfica puede tomar otro rumbo
50. M: Ummm

M cuestiona a F sobre el cambio que ha realizado en la nube de puntos, a lo que F responde “Lo pruebo de dos puntos [de vista, de dos formas] a ver si la gráfica puede tomar otro rumbo” (ítem 49).

51. (F vuelve a utilizar la herramienta “Encuadre de todos los objetos”, con lo que se ve mejor la nueva nube de puntos en la Vista gráfica)

Aparece en la Vista Gráfica la nueva nube de puntos (fig. 5.33), que por el comentario de F en el ítem 52 “ Si ve, así quedó mejor que la anterior”, parece que le parece mucho más adecuada, tal vez lo que busca F es que la nube de puntos se pareciera más al bosquejo que había hecho, pues aunque no coincide en la forma si lo hace en la disposición de los ejes que había utilizado allí donde los años se ubican en el eje y (ver fig. 5.30).

O tal vez esta nueva nube de puntos se le parece más a algunas de las familias de funciones que hemos estudiado .

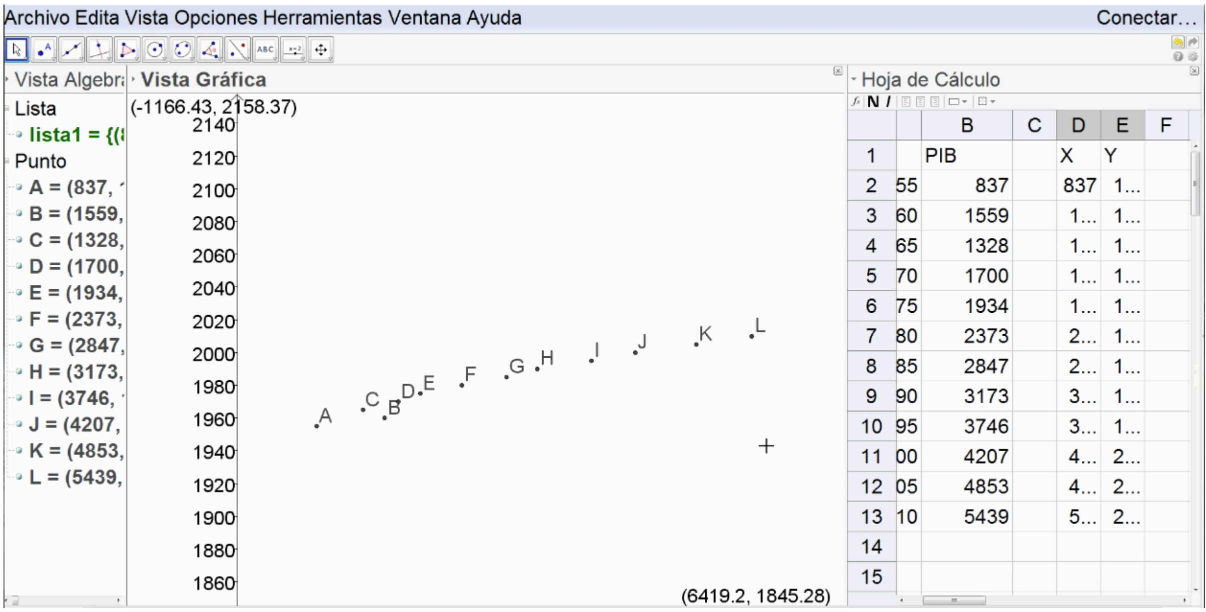


Figura 5.33 Nueva nube de puntos después del ítem 51

52. F: Si ve, así quedó mejor que la anterior (F se refiere a la nube de puntos original).
53. (F hace un pequeño zoom para alejar la nube de puntos).
54. M: ¿Pero no importa cuál sea x y cuál sea y ?
55. F: No, no ¿importa?
56. M: No, pregunto.
57. F: Pues para mi, por eso yo hago este cambio, si veo que los precios en y no me “cuadran” entonces hago el cambio de los precios en x y los años en y.

M continúa cuestionando a F sobre el cambio, esta vez puntualmente sobre los valores de las variables.

Por las respuestas en los ítems 55 y 57 pareciera que F no tiene claridad de la relación de dependencia entre las variables involucradas en una función.

58. M: Ummm
59. (F Continúa contestando en la guía las preguntas 5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resulto en GG y 6.¿La función se parece a alguna que conozca o hayamos estudiado?, hace el nuevo bosquejo)

F responde a la pregunta 5 de la guía construyendo el bosquejo de la nueva nube de puntos, en donde se nota con claridad el punto anómalo B (fig. 5.34).

Es interesante el comentario que plasma F en la respuesta a la pregunta 6 ¿La función se parece a alguna que conozca o hayamos estudiado? "Según lo que hemos visto se podria (sic) decir que, es una grafica (sic) cubica (sic) o exponencial" (ver Recuadro 5.21).

La forma exponencial parece ser por considerar la gráfica de una manera global, en cambio la función cúbica pareciera estar relacionada con el análisis local alrededor del punto anómalo B, probablemente también tenga que ver en esta escogencia el hecho de que F ya ha realizado ajustes con funciones cúbicas como en la prueba del post test, ya mencionada.

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.

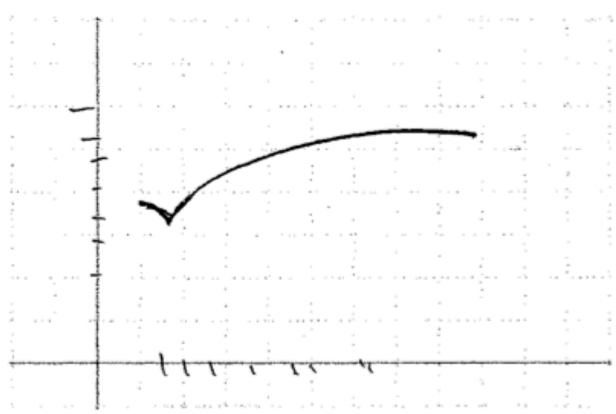


Figura 5.34 Bosquejo de la gráfica de la función (ítem 59 pregunta 5 de la guía).

6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
Segun lo que hemos visto se podria decir que, es una grafica cubica o exponencial.

Recuadro 5.21 Respuesta al punto 6 de la guía.

Transcripción: Según lo que hemos visto se podria (sic) decir que, es una grafica (sic) cubica (sic) o exponencial.

60. (F Continúa en la guía, ahora leyendo la pregunta 7 "Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace").

61. F: Bueno, aquí es donde viene lo difícil.

Este comentario pone de presente la dificultad que nota F para llevar adelante el proceso de ajuste, sobre todo en términos del "ajuste manual" que parece ser el que va a emplear.

Se percibe claramente que F es consciente de la dificultad que implica para él este método, dadas sus fortalezas y debilidades. Precisamente por esto es más llamativo aún que F emplee espontáneamente este método como su primera opción a diferencia de todos los otros estudiantes en el estudio de casos.

62. (F hace zoom acercando y alejando la nube de puntos).
63. (F comienza a escribir una función, en la barra de entrada anota *f* (*x*), pero no continúa).
64. (F dice en voz baja: "la exponencial").

65. (F señala con el cursor el punto A).
66. (F amplia la vista algebraica, para ver las coordenadas del punto A (837, 1955)).
67. (F vuelve a la barra de entrada y anota *f* (*x*)= 1 (837,1955)).
68. (En la pantalla de la Vista gráfica se abre una ventana que advierte que la función no es permitida).

Parece que F esta muy interesado en el punto A (837, 1955), pareciera que lo ve relevante para el proceso de ajuste (ítems 65-67).

De otra parte aunque F mencionó la función exponencial parece no recordar la ecuación canónica, ni siquiera la ubicación de la variable *x*, pues la expresión que escribe no la tiene *f* (*x*)= 1 (837,1955) (ítem 67).

69. (F edita la expresión y escribe $f\ (x) = 1\ (837)^3$).

F cambia la expresión que había anotado a una en que aparece un cubo, pero nuevamente parece no recordar la ecuación canónica de la función cúbica, y comete el mismo error con la ubicación de la variable *x*. De otra parte parece que F no nota que la expresión que escribió es realmente una función constante.

70. (F aplica repetidamente la herramienta *Encuadre de todos los objetos*)

71. (F hace varios zoom para acercar y alejar la nube de puntos)

F hace varios intentos con diferentes herramientas para ver la nube de puntos y la función que ha anotado, pero no logra visualizarla (ítems 70-72)

72. (F pasa el cursor sobre los iconos de los menús como si buscara algo)

73. F: No se profe como hallarla

74. M: ¿Qué tipo de función cree que le sirva?

75. F: Creo que puede ser una función exponencial o también puede ser una función –¿Cómo es que se llama esa?– Exponencial o Cúbica.

Cuestionado por el tipo de función que podría servirle para el ajuste F responde con las dos alternativas que había planteado en la construcción del bosquejo en el análisis cualitativo del fenómeno (ver pregunta 6 de la guía, recuadro 5.21) las funciones exponencial y cúbica (ítems 74-75).

76. (Simultáneamente mientras responde, F vuelve a hacer zoom acercando y alejando la nube de puntos).

77. F: No pero ¿por qué están así? (F se refiere a la nube de puntos).

78. F dice en voz baja: No espere

79. (F escribe en la barra de entrada $f(x) =$).

80. F dice en voz baja: el exponente de

81. F le pregunta a M: ¿Si fuera exponencial entonces se tomarían los puntos, primero se … [suspende la pregunta, y sigue su reflexión personal].

82. F: Si fuera cúbica se tomarían los primeros puntos que se sitúan a …. [en voz baja, consigo mismo].

F parece reflexionar sobre las expresiones que ha utilizado y las gráficas que le aparecen en la Vista gráfica, logrando modificar la expresión hacia una función cúbica.

83. (F escribe en la barra de entrada $f(x) = (x + 837)^3$).

84. M: [la gráfica] le quedó del otro lado (se refiere a la gráfica de la función que quedo en el cuarto cuadrante) .

85. F: Sí.

La expresión $f(x) = (x + 837)^3$ parece que se asemeja a lo que estaba buscando F, ya que esta sí corresponde a una función cúbica con un desplazamiento horizontal, aunque no en el sentido correcto.

De otra parte parece que F asumiera la coordenada x del punto A (837, 1955) como un desplazamiento necesario de la función, pues insiste mucho en este valor, 837.

Parece que F utiliza el punto A (837, 1955) como lo que hemos llamado un “indicador paramétrico”, en el sentido en que las coordenadas del punto, las utiliza el resolutor como el indicador del parámetro que marca el desplazamiento horizontal o vertical –según corresponda– de la función para que se ajuste a la nube de puntos.

86. (F desplaza la Vista gráfica).

87. (F edita en la Vista algebraica la función,

Parece que F reconoce como varían

escribe
$f(x) = -1(x+837)^3$).

88. (No se nota mayor cambio en la Vista gráfica).

algunas características de las gráficas de las funciones al cambiar los parámetros en la ecuación, aquí ha agregado un menos a la expresión parece que recuerda que este signo influye en los parámetros de la función. Sin embargo no esta claro si lo que busca F es reflejar la función cúbica respecto al eje y, lo que acercaría la función a la nube de puntos, o desplazarla hacia la derecha (ítems 87-93).

89. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f(x) = -(x+837)^3$) .

90. F: Quedó del otro lado.

F Hace un nuevo intento realizando una variación a la expresión quitando el "uno" y dejando solo el signo menos, parece que no tiene claridad que las dos expresiones son equivalentes.

91. M: ¿Entonces qué habrá que cambiar?

92. F: el mas

93. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f(x) = (x-837)^3$).

94. M: Ummm.

95. F: Sí, sí.

F realiza otro intento, de ajustar la ecuación a la nube de puntos, manteniendo la idea del "menos" como parte fundamental de la expresión $f(x) = (x-837)^3$, aquí desplaza la función cúbica horizontalmente hacia la derecha, lo que acerca la función a la nube de puntos. (ítem 92-93).

96. F: Ahora para que tome forma ¿cómo?

Esta reflexión de F "Ahora para que tome forma ¿cómo?" (ítem 96), nos parece particular, pues parece que F no reconociera el papel que juega la selección de la familia de funciones indicada en el ajuste.

97. F: Allá tomé el punto A [837,1955].

Aquí en el ítem 97 F confirma lo que habíamos pensado, ha tomado como referencia el punto A (837,1955) como un "indicador paramétrico", para determinar la magnitud, dirección y sentido de los desplazamientos de la función y así ubicarla en la proximidad de la nube de puntos.

98. F: a la tres

99. (F señala con el cursor la ecuación de la función en la vista algebraica y comienza a

F parece intentar ajustar la función

editarla, escribe
$f\,(x) = \ (x-837)^3 + \ )$.

cúbica que ha logrado acercar a la nube de puntos, manipulando otros de los parámetros, pero no culmina la acción.

100. F: si se le suma p…(lo dice en voz baja).
101. (F dice algo en voz baja pero no se entiende).

102. F: ¿Profe si f fuera exponencial que llevaría allá arriba? (le pregunta a M)
103. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f\,(x) = \ (x-837)\ \ )$
104. M: ¿Arriba?

Parece que F contempla la posibilidad de utilizar otra familia de funciones, la función exponencial, pero parece que no reconoce su forma canónica, de ahí que pregunte que debería llevar “arriba” [en el exponente] (ítems 102-103)

105. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f\,(x) = \ (x-837)^{837})$
106. F: ¡Ah! Ahora se perdió (se refiere a que la gráfica no es visible en la Vista gráfica)
107. (F vuelve a la función cúbica que tenía)

F hace un nuevo intento, con una nueva expresión que conserva varios de los parámetros que ha utilizado, pero de nuevo su desconocimiento de las ecuaciones canónicas le dificulta el proceso.

108. M: ¿Y no podría ser una parábola, una cuadrática?
109. F: ¿Una cuadrática? Pues… (se queda en silencio pensando)

M trata de darle algunas pistas para que F halle una función de ajuste.

110. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f\,(x) = \ (x-837)^2$ y hace zoom acercando y alejando la gráfica)
111. (En la vista gráfica aparece la representación de la función, pero solo se ven dos segmentos verticales en esta escala)

F prueba con la función cuadrática $f\,(x) = \ (x-837)^2$ utilizando los parámetros que sabe que acercan la función a la nube de puntos, sin embargo esto no es suficiente y la grafica que muestra el paquete de la función son solo dos líneas verticales (ítems 110-111).

La imagen del ítem 111 es una de las situaciones que se presentan con el error de escala en las funciones, en que se distorsiona la gráfica de la función y se pierde su Gestalt, de manera que la parábola que se debería apreciar como gráfica de una función cuadrática solo se ve como un par de segmentos verticales (Goldenberg, 1991).

112. (F edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = \ -(x+837)^2$ y realiza un zoom de alejamiento de la gráfica)

Parece que reconoce un patrón que debería aparecer en la gráfica (tal vez una parábola cóncava hacia abajo) pues realiza acciones como buscando un objeto que debe aparecer pero no lo halla.

113. (F utiliza la herramienta Encuadre de todos los objetos, con lo que ya se puede visualizar la parábola que representa la función)

Finalmente F utiliza un esquema para visualizar las gráficas de las funciones en la Vista Gráfica del GG, la herramienta "Encuadre de todos los objetos", con ella se visualiza la gráfica de la función (ítem 113 y fig.5.35), allí también se ve la nube de puntos –las letras que se sobreponen cerca al origen–.

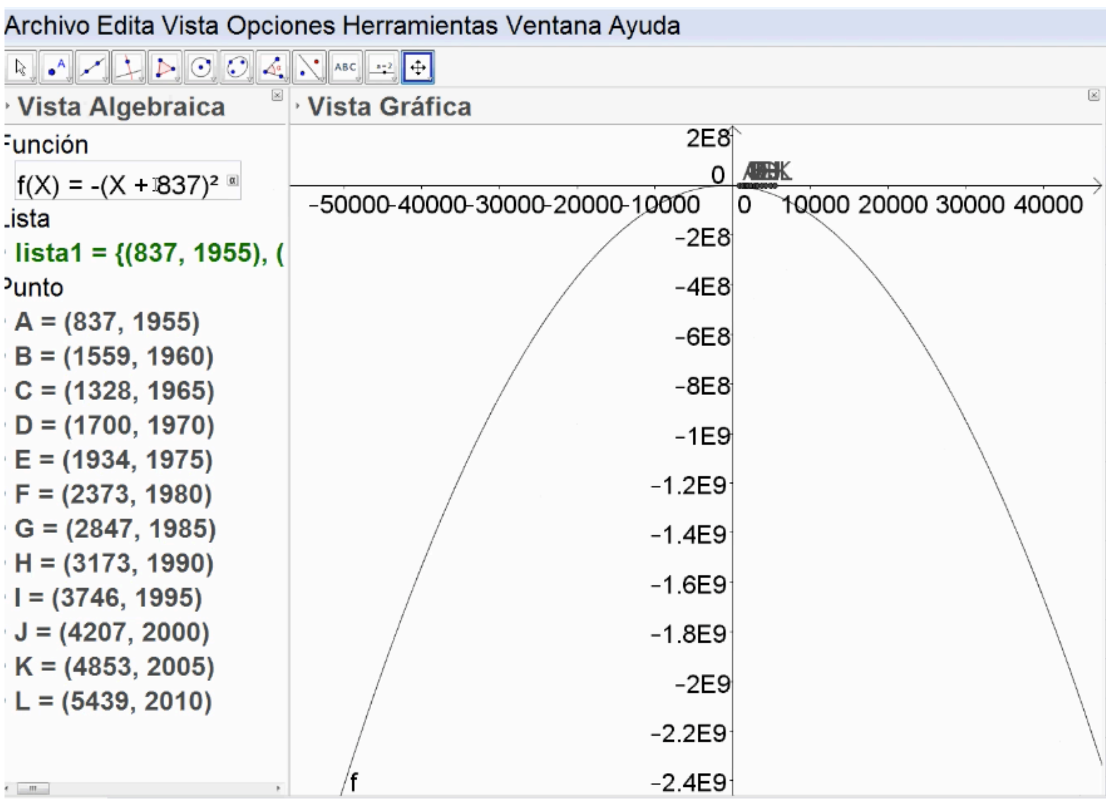


Figura 5.35 Función $f\,(x) = -\,(x + 837)^2$ (ítems 112-113)

114. (F hace zoom de alejamiento y acercamiento de la gráfica de la función)

115. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = \,-(x - 837)^2$)

F continúa ajustando la función, manteniendo la expresión y solo variando el sentido del desplazamiento horizontal ahora hacia la derecha, pareciera que esta conforme con que la parábola sea cóncava hacia abajo.

116. (El cambio en el parámetro de la ecuación no se nota en la gráfica dada la escala en que aparece).

Debido a la escala el cambio en el desplazamiento apenas es perceptible en la nueva gráfica.

117. (F dice algo en voz baja que no se entiende).

118. F: Ummm, una cuadrática

119. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = \,(x - 837)^2$).

F mantiene parte de la expresión, pero ahora cambia el sentido de la concavidad, quitándole el “menos” del comienzo a la expresión, con lo que ahora la parábola abre hacia arriba.

120. (F hace zoom de acercamiento repetidas veces).

121. (F utiliza la herramienta Encuadre de todos los objetos).

La función $f\,(x) = \,(x - 837)^2$ se acerca a la nube tocando algunos de los puntos (fig. 5.36). Aunque F ha logrado llevar esta función hasta la proximidad de la nube de puntos, sin embargo aún esta lejos de ser una función de ajuste.

122. F: Pues ahí se acerca ya ¿no?

123. M: Pues toca algunos puntos

124. F: Bueno (F suspira).

Lo cual parece reconocer F por sus expresiones (ítems 122, 124).

125. (F hace zoom de acercamiento repetidas veces).

126. (F dice algo en voz baja que no se entiende).

127. F: Una cuadrática

128. (F ubica el cursor en la vista algebraica).

129. F: ¿Se podría agregar un más o algo para que tocara los otros puntos?

Pareciera que F recordara algo de las expresiones de las ecuaciones canónicas y de la relación entre los parámetros y las transformaciones, pero duda.

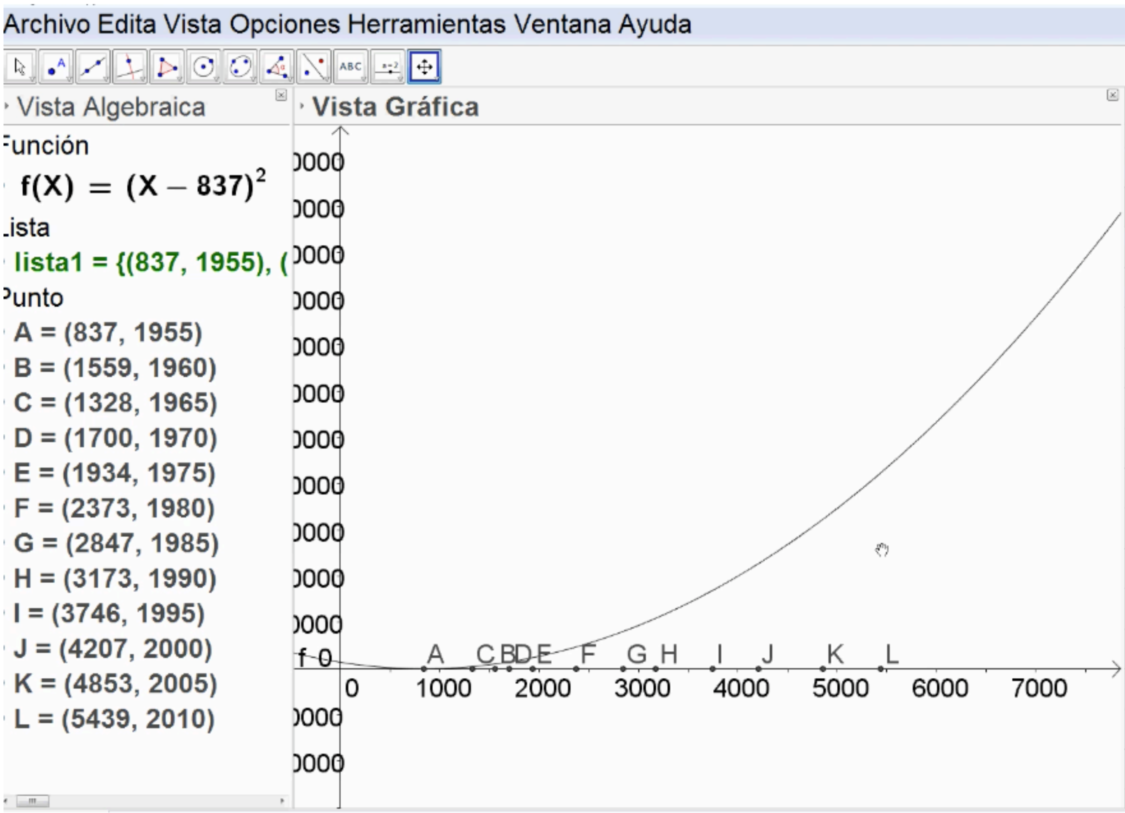
130. M: Si puede que eso le ayude

131. F: bueno probemos (lo dice en voz baja)

132. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = (\mathrm{x} - 837) + (x - 1559)^2$)

F insiste en que las coordenadas del punto A (837, 1955) están relacionadas con las transformaciones de la gráfica, pero esta vez además empieza a emplear otro punto extra B (1559,1960) tal vez buscando el efecto de otra transformación.

De otra parte parece que F no reconoce las ecuaciones canónicas, ni su manejo algebraico, lo que no le produce buenos resultados, aquí en el ítem 132 varía algunos parámetros en la función cuadrática, pero anota dos expresiones con la variable *x*.



Gráfica 5.36 Función $f\,(x) = \,(x-837)^2$ (ítems 119-125)

133. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = \,-x - 837 + (x - 1559)^2$)

F hace un nuevo intento variando un signo en la expresión.

134. (F hace zoom de acercamiento repetidas veces)
135. F: ¿En el momento en que yo la pongo cuadrática se vuelve lineal? No mentiras que estoy diciendo
136. M: será por la escala de los puntos
137. (F hace zoom de acercamiento y alejamiento repetidas veces)
138. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = \,-x - 837 + (x - 1559) + (x - 5439)^2$).

Nuevamente F utiliza los valores de las coordenadas de los puntos extremos en la nube, como en el ítem 133, pero en este caso además de las coordenadas en *x* de A y B incluye los valores del último punto L (5439, 2010).

139. (F ve en la Vista Gráfica la representación de la función).
140. F: No.
¿Qué se hace ahora? (habla en voz baja).
141. (F deshace los cambio realizados en la ultima edición de la ecuación).
142. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = \,-x - 837 + (x - 4853)^2$).

Ahora F empieza a utilizar otros puntos como “indicadores paramétricos”, para identificar las características de las

	transformaciones en este caso elige el punto K (4853, 2005) combinado con el valor de A que ya venia utilizando.
143. (F borra completamente la función y escribe $f(x) = -837 + (x-2847)^2$).	Esta vez F elige la coordenada x del punto G (2847,1985), ubicado aproximadamente a la mitad de la nube de puntos como "indicador paramétrico".
144. F: ¿Cómo haría para que bajara la gráfica? (F le pregunta a M). 145. M: ¿Y quede más "recta"? 146. F: Sí, y que quede como más … (F dice algo que no se entiende). 147. M: Habría que "abrir" más la parábola. Si fuera una parábola, habría que abrirla más. 148. F: Ummmm 149. F: abrirla más	F consulta sobre otra trasformación que necesita aplicarle a la parábola, en este caso un "estiramiento", pero F no sabe que parámetro aplicarle a la función para lograr este efecto (ítems 144-149).
150. (F hace zoom sobre le punto G acercando la gráfica de la función). 151. F: bajarla, bajarla	
152. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f(x) = -1 + 809973$). 153. (F ve en la Vista Gráfica la recta que representa la función y borra inmediatamente la expresión).	F realiza un intento pero nuevamente olvida incluir la variable *x*, lo que le produce una función constante (ítems 152-153).
154. F: ¿ *x* por fuera y lo demás por dentro? ¿O como se bajaría profe? (F pregunta a M). 155. M: con un numerito antes de la *x*, pero multiplicando. 156. F: con un numerito antes de la *x*, ¡ah! 157. M: Sí pero muy pequeño.	F vuelve a consultar sobre la transformación de "estiramiento" a lo que M le da algunas pistas sobre la forma de la ecuación canónica (ítems 154-157).
158. (F edita la función y escribe $f(x) = -1(x-2847)^2$).	F empieza a utilizar la ecuación canónica $f(x) = a(x-c)^2 + b$ de una función cuadrática, para ello prueba con la expresión $f(x) = -1(x-2847)^2$ en donde el valor del parámetro a es -1, el de b es cero y utiliza el valor de la coordenada x del punto G (2847,1985), para el parámetro c .

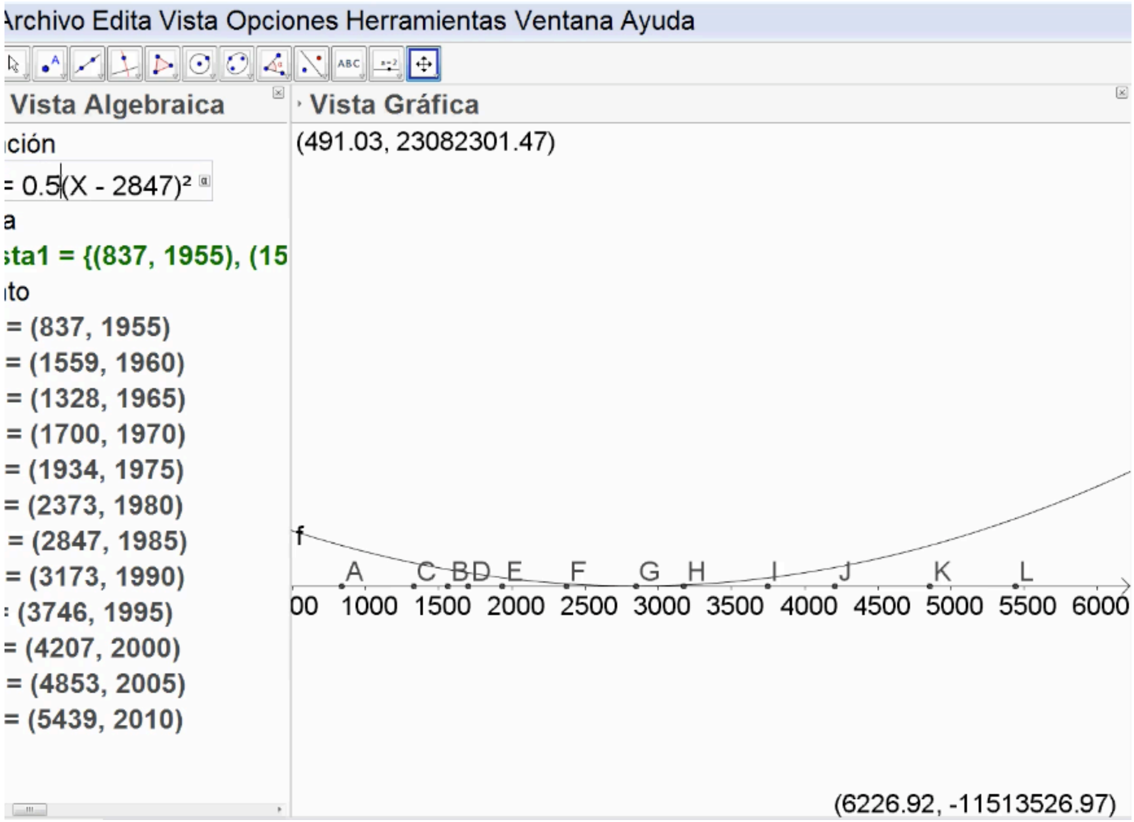


Figura 5.37 Función $f\,(x) = 0.5(x - 2847)^2$ (ítem 163).

159. (La gráfica de la parábola se invierte y abre hacia abajo).

160. F: pero la manda para… (F habla en voz baja).

161. (F edita nuevamente la función y escribe $f\,(x) = \ 2(x - 2847)^2$).

162. (La gráfica de la parábola se invierte y vuelve a abrir hacia arriba).

F ve con sorpresa la gráfica de la función propuesta, lo que pareciera que muestra que no reconoce el efecto del parámetro a sobre la gráfica, sin embargo en su siguiente intento con la expresión $f\,(x) = 2(x - 2847)^2$, al hacer positivo el valor de a cambia el sentido de la concavidad de la parábola lo que parece que muestra que F sí reconoce este efecto del signo menos en el parámetro a (ítem 159-162). Sin embargo el nuevo valor de 2 en a, hace que la parábola sea “más estrecha”, en contra de lo que F esta buscando que es acercarse a la nube de puntos.

163. (F edita nuevamente la función y escribe $f\,(x) = \ 0.5(x - 2847)^2$).

164. (Con lo que la función se acerca a la nube de puntos).

F ajusta la función variando el parámetro a, que ahora es 0.5, lo que hace que la función se acerque a la nube de puntos, como se puede ver en la figura 5.37 .

165. (F edita nuevamente la función y escribe

F le hace un nuevo ajuste a la

	$f\ (x) = \ 0.03(x - 2847)^2$).	expresión cambiando el parámetro a, de 0.5 a 0.03 lo que produce un acercamiento de la función a la nube de puntos (ítems 165-166 y fig. 5.38).
166.	(Con lo que la función se acerca más a la nube de puntos).	
167.	(F hace zoom de acercamiento y alejamiento repetidas veces).	
168.	F: ¡Listo!	Parece que F esta satisfecho con la función y la considera la considera una función de ajuste
169.	F: Entonces no es ni una, ni la otra, ni nada…	El comentario de F en el ítem 169, es particular, pues parece que no reconoce la expresión como miembro de ninguna de las familias estudiadas, o tal vez se refiere F a que después de los intentos que ha realizado la función de ajuste no coincide con las hipótesis que ha empleado.
170.	(F lee la pregunta 7 de la guía “Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace”).	
171.	(F responde en la guía la pregunta anotando la última función $f\ (x) = \ 0.03(x - 2847)^2$, aunque cambia el 2847 por 2897).	F le hace un cambio final a su expresión cambiando el valor del parámetro c, de 2847 a 2897, con lo que su función del mejor ajuste es $f\ (x) = \ 0.03(x - 2847)^2$.
172.	(F lee en la guía la pregunta 8 “Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?”).	
173.	M: Pues si quiere ahora sí, use la herramienta que tiene el GG para eso.	
174.	(F sombrea el bloque de casillas [D2; E13], los valores de x e y invertidos en la HdC).	F comienza a utilizar las herramientas estadísticas del paquete informático para hallar la función del mejor ajuste (ítems 174-194).
175.	(F utiliza el menú estadístico de GG para empezar a hacer el análisis de regresión entre dos variables).	

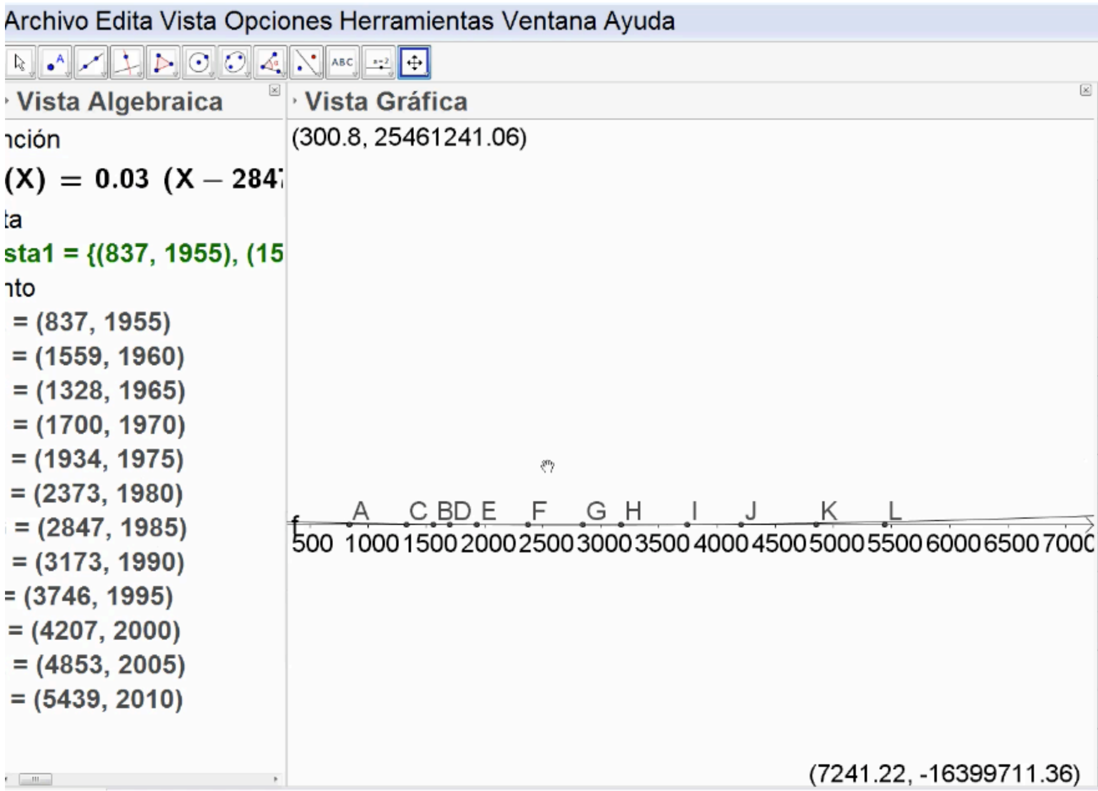


Figura 5.38 Función $f(x) = 0.03(x - 2847)^2$ (ítem 165).

176. (Aparece en la pantalla del ordenador una primera gráfica y su ecuación de regresión utilizando una función cuadrática).

177. (F se desplaza con el ratón por el menú de tipos de regresión).

178. F: No hay cuadrática (F se refiere a que entre los nombres de las regresiones del GG no aparece la función cuadrática).

179. F: Evalúa *x* igual a 2008.

180. (F comienza a extrapolar utilizando las herramientas del GG, coloca en la casilla *evalúa x =* 2008).

Parece un lapsus en F, pues aunque no aparece la función cuadrática sí se encuentra en el listado la función polinómica, he incluso GG ha realizado una regresión cuadrática (ítem 176), y parece que él se ha dado cuenta de todo esto pues continúa para extrapolar.

181. M: ¿ Ahí, qué hizo?

182. F: No, ¿cuál escogí? No, ahí no hice nada, por que como los precios están en *y*.

F se da cuenta que ha realizado el ajuste y la interpolación de los valores para la nube de puntos que el creó en donde los puntos tenían coordenadas (*y*,*x*).

183. (F sombrea en la HdC el bloque de celdas [A1: B13]).

184. (F comienza a usar el análisis de regresión del menú estadístico de la HdC de GG y aparece una nueva ventana con la nube de puntos y una regresión polinómica).

Ahora si F realiza, el ajuste para la nube de puntos original, para la cual obtiene la ecuación de regresión

185. (GG muestra la función $g(x) = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$).

186. (F introduce 2008 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5189.6092).

187. F: Ya ahora sí, 2008, 5189.6092

188. F: Y para el 2013

189. (F introduce 2013 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5836,3477).

190. (F responde en la guía la pregunta 8 sobre los valores de interpolación).

191. F: Listo profe.

192. F: Ya.

193. M: Ummmm.

194. M: Muchas Gracias.

$g(x) = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$ (ítem 184-185 y fig. 5.39).

F realiza la interpolación para los valores 2008 y 2013.

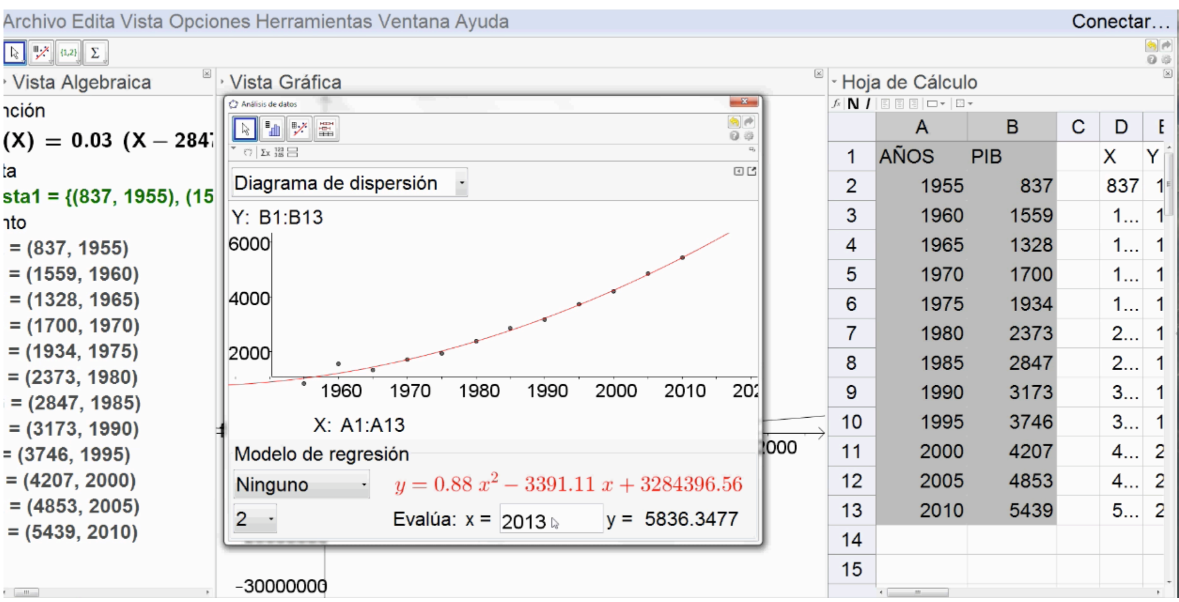


Figura 5.39 Extrapolando valores.

6. Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones de nuestra investigación, empezando por las relacionadas con las actuaciones de los sujetos en el estudio de casos; adicionalmente completamos estas ideas finales con algunos otros aspectos de interés que reconocimos en el estudio de grupo y que resultan pertinentes como conclusiones del estudio que hemos realizado. Y ya para cerrar, presentamos también algunas conclusiones generales sobre ciertos aspectos del estudio, y sus futuras proyecciones.

6.1 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE CASOS

Para no repetir aquí los comentarios anotados en el estudio de casos y facilitar las referencias de consulta, nos referiremos al sujeto del caso, anotando entre paréntesis las primeras letras de su nombre y luego el número de ítem, figura o recuadro pertinente, Así por ejemplo para referirnos a la intervención de Daniela en el ítem 48 y la representación gráfica realizada en la figura 5.3, anotaremos (Dani ítem 48, fig. 5.3).

A continuación, presentamos las conclusiones de nuestra tesis doctoral, a manera de un listado de actuaciones de los estudiantes, sin que sigan un orden preestablecido.

6.1.1 IDEAS DE AJUSTE

En el desarrollo del estudio de casos hemos podido observar que los estudiantes tienen diferentes formas de aproximarse, de comprender y de usar la idea de ajuste, dependiendo de los elementos de que dispongan como apoyo (tablas, gráficas, herramientas estadísticas del paquete informático) y de otra parte de la etapa o momento en el proceso de modelización en que se encuentren. Para poder visualizar las situaciones a las que nos referimos, utilizaremos a lo largo de este apartado algunos extractos del protocolo de Daniela, por ser ella un ejemplo paradigmático de las diferentes ideas de ajuste que observamos.

En un primer momento, a partir de la lectura de la tabla de datos algunos sujetos reconocen *tendencias* en la nube de puntos, en el sentido de que la gran mayoría de los puntos en la nube mantienen una serie de características de comportamiento semejante, por ejemplo en cuanto a dirección, concavidad, o pendiente –en el caso de las rectas– que se podrían agrupar en las características o representación de un determinado tipo de función.

En el proceso que hemos seguido en nuestro estudio, en las primeras fases del análisis cualitativo del fenómeno los estudiantes manifiestan esta "tendencia" del fenómeno. así por ejemplo Daniela menciona "de resto sigue así, así, así (*hace el gesto con la mano de cómo los demás puntos de la nube a partir de C*(1965, 1328) *mantienen la misma dirección*)" (Daniela ítem 49).

De otra parte, algunos de los sujetos participantes demostraron tener la habilidad para examinar, de una manera general, el fenómeno y "ver" en su mente este tipo de tendencias de la nube de puntos desde la tabla de datos, incluso antes de realizar un primer bosquejo de la nube. Así por ejemplo, Daniela reconoce una tendencia lineal en la nube de puntos desde los primeros momentos en que se enfrenta a la situación (ver Dani ítem 3).

Cuando los sujetos ya tienen la posibilidad de usar el paquete informático, a partir de la nube de puntos que han realizado en la Vista Gráfica, comienzan a buscar la función que les dé el mejor ajuste. Algunos de los sujetos entienden esta función como aquella "que más se acerca al mayor número de puntos" (Dani ítem 105), descripción que, en principio, es una idea correcta. Algunos sujetos lo expresaron de una manera un poco más ambigua, haciendo referencia a la forma que observan, así, por ejemplo, se referían a la función del mejor ajuste como la función que sea más parecida a la nube de puntos (Dani ítems 103 y 131). Finalmente, también con el uso del GG, algunos sujetos revisaron los estadígrafos que proporcionaba el paquete, para tomar su decisión sobre la función de mejor ajuste (Dani ítems 114 y 117).

6.1.2 TENDENCIA A LA LINEALIDAD.

En el apartado anterior mencionamos como algunos sujetos logran observar una cierta tendencia en la nube de puntos, una de las manifestaciones de este fenómeno, es la "tendencia a la linealidad", de la cual ya existen referencias en la literatura, (Lovell, 1971, Markovits et al., 1986, Zaslavsky, 1987, Leinhardt et al., 1990) esta tendencia consiste en la facilidad como algunos sujetos se inclinan a reconocer en la nube de puntos un comportamiento lineal, a pesar de existir otras tendencias en la nube (Leinhardt et al., 1990). Esta tendencia la hemos reconocido en algunos de los estudiantes participantes en nuestro estudio, en diferentes circunstancias, así por ejemplo Daniela menciona desde el comienzo de su análisis cualitativo del fenómeno, "a primera vista parece lineal" (Dani ítem 3) o como se puede notar en los bosquejos que construye con lápiz y papel de la nube de puntos, (Dani Fig. 5.2 y Fig. 5.4) tanto antes, cómo después de ver la representación gráfica que realiza el paquete informático (Dani Fig. 5.3). Las gráficas que realiza Daniela, tienen esta clara apariencia de línea recta; particularmente llamativa es la figura que realiza posterior al uso del GG (Dani Fig. 5.4) pues la representación que realiza el paquete *no* muestra la linealidad que "ve" Daniela, aunque se podría asumir.

En este mismo sentido se puede interpretar el gesto que realiza Daniela al recorrer la nube de puntos, en línea recta, pero justo saltando el punto de valor anómalo. (Dani ítems 55-57).

55. Maestro: ¿Y como a qué función se te parecen esos puntos?

56. Daniela: Es que si lo veo así, o sea (*Daniela esta recorriendo los puntos de la nube de un extremo a otro moviéndose con el cursor*).

57. Daniela: esta parte seria más bien como una línea [recta] (*Daniela recorre los puntos de la nube desde* C(1965, 1328) *hasta* L(2010, 5439) *de un punto a otro moviéndose con el cursor, hacia arriba y hacia abajo, y de nuevo hacia arriba, aunque cuando baja llega hasta el punto A sin pasar por el punto anómalo B*).

Otro ejemplo de esta tendencia lo observamos en el trabajo de las alumnas 6 y 15, ya no en el estudio de casos, sino durante la actividad 3 (Préstamos, Ingresos y Costos) del proceso de enseñanza. Específicamente en la Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes (ver apartado 3.9.7.1). Recordemos que dicha tarea se apoya en la situación realista de un préstamo, a partir de la cual se les solicita a las alumnas que encuentren las funciones que den el mejor ajuste a tres nubes de puntos, la de los intereses, la de la amortización y la del total a pagar cada año. Los datos se suministran en una tabla. Cuando las alumnas se enfrentan a esta tarea, realizan un primer análisis cualitativo del fenómeno que plasman en los bosquejos de las nubes de puntos que representan los intereses, la amortización y el total a pagar anualmente (ver recuadro 4.29 ítem 1), en donde utilizan funciones lineales discretas, con diferentes pendientes según la situación; después explican simplemente que las gráficas son líneas rectas (ver recuadro 4.30 ítem 2), y luego pasan a construir las gráficas de las nubes de puntos de las tres situaciones en GG, de acuerdo con la tabla de datos. A pesar de su análisis cualitativo previo, en las gráficas de las nubes de puntos de los intereses y la amortización se nota su curvatura (figs. 6.1, 4.22 y 4.23).

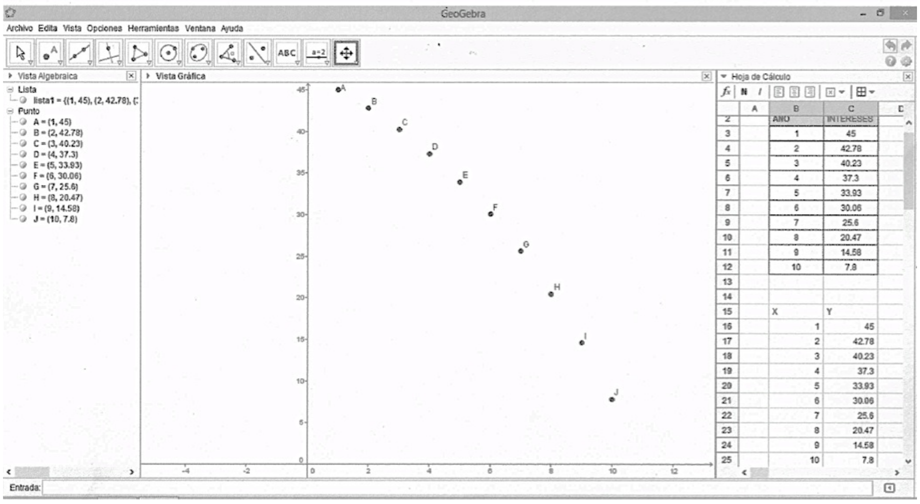


Figura 6.1 Gráfica de la nube de puntos de los intereses en la Tarea 1 Préstamos Cuotas Constantes de la Actividad 3 (alumnas 6 y 15).

Sin embargo luego en el ítem 6 de la tarea, cuando se les solicita que encuentren la función que brinde el mejor ajuste para cada una de las tres situaciones y que expliquen su proceso, las estudiantes retoman las funciones lineales del análisis cualitativo y proponen funciones de ajuste lineales, realizando los cálculos de la pendiente de cada una de las rectas utilizando para ello los dos primeros puntos de cada una de las situaciones (recuadro 4.31 ítem 6). Este comportamiento nos llamó mucho la atención pues en la literatura al referirse a la "Tendencia a la linealidad" de algunos estudiantes (ver apartado 2.3.3.1), Zaslavsky (1987) menciona un caso con rasgos muy parecidos.

Zaslavsky (1987) pidió a los estudiantes que encontraran una ecuación para la gráfica de una parábola que contenía tres puntos marcados. Algunos estudiantes utilizaron sólo dos puntos para encontrar la ecuación. Pero además, los usaron de una manera que sugiere una mentalidad lineal, porque los utilizaron para calcular cuál sería la pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos. Luego insertaron este "valor de la pendiente" en la forma canónica de la ecuación de una parábola como el coeficiente principal. En el caso que presentamos de las alumnas 6 y 15 no se llega hasta la ecuación de la parábola, pero por lo demás nos parece que la situación es bastante similar.

6.1.3 DIFICULTAD PARA RECONOCER LAS ECUACIONES CANÓNICAS DE LAS FAMILIAS DE FUNCIONES.

A lo largo del estudio de casos, una de las dificultades importantes que observamos es que los estudiantes no reconocen las ecuaciones canónicas de las familias de funciones que podrían ser adecuadas para el ajuste, lo que realmente les crea problemas para poder llevar a cabo la tarea de hallar la función de mejor ajuste. Uno de los estudiantes que presenta esta situación es Daniela, tal como se evidencia en un extracto del protocolo de su entrevista.

Daniela parece no reconocer la forma de la ecuación canónica adecuada para una determinada familia de funciones pues habla de las funciones lineales, (ítem 71), pero no encuentra la ecuación canónica adecuada, pues de hecho escribe: $f(x) = x2$ (ítem 74), que corresponde a una función lineal; pero no es claro si esa es la función que busca, o si es un error, porque luego, sin graficarla, la cambia a $f(x) = x^2$, que corresponde a una función cuadrática (ítem 75), que intenta visualizar, pero por la ubicación de la nube de puntos, no aparece en la vista gráfica; luego intenta buscar el ajuste adecuado con otras funciones cuadráticas, pero tampoco logra visualizarlas. Después de estos intentos, Daniela sí anota una expresión utilizando la forma canónica de una función lineal, $f(x) = 837x + 1995$ (ítem 94); sin embargo, no la grafica, y desiste del ajuste.

71. Daniela: $f(x)$ pero es que siendo una lineal (En la barra de entrada de GG Daniela introduce $f(x)=$ pero no completa la expresión y se queda pensativa).
72 (silencio)
73. Daniela: no, no se me ocurre…
74. Daniela: así como … (Daniela introduce $f(x) = x2$).
75. (Daniela corrige $f(x) = x^2$ y da enter).
76. Daniela: Pero no la grafica.
77. Maestro: Sí la debe graficar pero debe estar muy lejos.
78. Daniela: Sí (Daniela se ha ubicado en la vista algebraica con el cursor sobre $f(x) = x^2$ parece que con la intención de editar la expresión).
79. Daniela: … Suponiendo que… (silencio y luego Daniela edita la expresión a $f(x) = 2x^2$ y da enter).

94. (Daniela de nuevo en la ventana algebraica escribe $f(x) = 837x + 1995$, pero no le da enter para ver la posible gráfica y borra la entrada).

Otros estudiantes presentan desarrollos similares con otras familias de funciones. Por ejemplo Jan muestra confusión con la ecuación canónica de las funciones exponenciales. En su búsqueda de la función del mejor ajuste, inicialmente prueba con expresiones sin variable como $f(x) = (1950)^{0.5}$ (ítem 91), para luego caer en cuenta que necesita la variable x en la expresión y entonces anota $f(x) = 1955^{x}$ en el ítem 97. Más adelante, en un nuevo intento de ajuste Jan menciona que va a usar una función polinómica, pero escribe una función lineal, que técnicamente es polinómica, pero parece más bien que Jan se hubiera equivocado o confundido.

104 Maestro: …pues ensaye con otra función a ver si le sirve…
105 Jan: [en voz baja] 1950 [inaudible]
106 Jan: bueno una polinómica, digamos que 1950 x más cinco
107 (Jan escribe en la barra de entrada $f(x) = 1950x + 5$)

6.1.4 DIFICULTAD PARA RECONOCER EL EFECTO DEL CAMBIO DE PARAMETROS EN LA GRAFICA DE LA FUNCIÓN

Otra situación observada en los estudiantes, que nos parece relevante mencionar, es la dificultad para reconocer el efecto de los parámetros en la gráfica de la función. Esta situación nos pareció muy particular, pues ya desde el momento del diseño de las unidades de enseñanza contemplamos la importancia que tenía el que los estudiantes comprendiesen la relación entre los parámetros y las transformaciones en la gráfica de la función. De hecho, en la primera actividad *Familias de Funciones* unos de nuestros objetivos era lograr que los estudiantes comprendieran esta relación y desarrollasen la habilidad necesaria para manipular las gráficas, ajustando sus parámetros. En principio, a partir de la observación de los estudiantes en la actividad y de la revisión de los materiales desarrollados por los alumnos, pensamos que se había logrado el objetivo y había quedado claro el tema.

Sin embargo, durante el estudio de casos, en el momento de utilizar este conocimiento los estudiantes mostraron confusión. Por ejemplo, Daniela –en la misma situación presentada en el apartado anterior–, parece reconocer que existen transformaciones que pueden afectar la función, y que la gráfica está ubicada en otra parte, lejos de la nube de puntos, lo que la lleva a ensayar funciones ajustando las expresiones para que puedan modelizar el fenómeno (Dani ítems 78-81).

Pero pareciera que Daniela no reconoce, o recuerda, el significado de los parámetros, (Dani ítems 79-81) ni la forma como afectan la gráfica de la función, pues a la función cuadrática $f(x) = x^2$ ejemplo de la forma canónica $f(x) = a(x-b)^2 + c$, Daniela le ha variado el parámetro a, y lo ha cambiado hacia unos valores que no favorecen el ajuste; y por otra parte, pareciera que estaba a punto de agregar el parámetro c pues escribe la expresión $f(x) = 8x^2 +$ pero se detiene (Dani ítem 81).

78. Daniela: Sí (Daniela se ha ubicado en la vista algebraica con el cursor sobre $f(x) = x^2$ parece que con la intención de editar la expresión).
79. Daniela: … Suponiendo que… (silencio y luego Daniela edita la expresión a $f(x) = 2x^2$ y da enter).
80 (Daniela: vuelve a la expresión $f(x) = x^2$ dice algo inaudible y la edita escribiendo $f(x) = 8x^2$ y da enter).

81. (Daniela: vuelve a la expresión $f(x) = 8x^2$ y la edita escribiendo $f(x) = 8x^2 +$ y se queda en silencio).

6.1.5 TENDENCIA A UTILIZAR LAS HERRAMIENTAS ESTADÍSTICAS DEL GG PARA HALLAR LA FUNCIÓN DEL MEJOR AJUSTE.

A lo largo del proceso de enseñanza, presentamos dos caminos para lograr hallar la función del mejor ajuste: un método que hemos llamado "ajuste manual" en el que se utilizan las ecuaciones canónicas y los parámetros de las funciones; y otro método en que los estudiantes parten de las herramientas estadísticas que ofrece el GG para hallar la función. Sobre este punto, notamos una tendencia bastante generalizada en los sujetos a preferir este último método sobre el primero, situación que se manifestó tanto en el estudio de casos, como en algunas de las actividades realizadas en el estudio de grupo, y durante el proceso de enseñanza.

Así, por ejemplo, en la segunda parte del post-test en la que los sujetos debían modelizar una situación realista, se les insistió a los estudiantes para que, en primera instancia, se enfrentaran a la tarea por medio del ajuste manual; sin embargo los resultados, presentados en el estudio de grupo muestran como el 80% (16 estudiantes), prefirió utilizar las herramientas estadísticas que ofrece el GG, frente a un 20% (4 estudiantes) que utilizó el ajuste manual.

En este mismo sentido durante las entrevistas del estudio de casos, también en una situación de modelización se les pedía a los sujetos que en primera instancia emplearan el ajuste manual, solamente uno de los resolutores, Felipe, optó por el método de ajuste manual en primera instancia, los demás alumnos intentaban primero utilizar las herramientas estadísticas del GG y solo ante la insistencia del investigador, consideraban la posibilidad de utilizar otro método. Sin embargo algunos de ellos aunque lo intentaron realmente no pudieron emplear el ajuste manual.

De otra parte, revisando las producciones de los alumnos durante el proceso de enseñanza, encontramos que solamente una pareja de estudiantes del grupo (los alumnos 9 y 17), empleó el método de ajuste manual en las tareas de ajuste de la actividad 3 Préstamos, Ingresos y Costos (ver apartado 4.3, recuadros 4.26 - 4.28).

De acuerdo con lo que observamos en nuestra investigación, creemos que esta tendencia a preferir el uso de las herramientas estadísticas que ofrece el GG como método para resolver este tipo de situaciones, puede deberse en especial a dos razones: de una parte la aparente facilidad con que el paquete informático resuelve la situación, sin exigir mayores requerimientos al resolutor, y en segunda instancia, lo que en la literatura se conoce como el "poder mágico de la máquina" (ver Tall, 1989, Leinhard et al., 1990 y apartado 2.3.4.2.3), que hace que el estudiante le otorgue a la máquina u ordenador una enorme autoridad, y no cuestiona sus respuestas. Más adelante, en este mismo capítulo comentaremos algunos aspectos relacionados con esta última situación.

Otra actitud que observamos, relacionada con lo dicho hasta aquí, es la aparente renuencia de los estudiantes a utilizar lo que hemos llamado el ajuste manual. Esto puede deberse al hecho de que este método exige del resolutor la comprensión y el manejo eficiente de las formas canónicas de las familias de funciones, así como de los parámetros que ellas contienen, y lo que hemos notado es la dificultad de los estudiantes en el manejo adecuado de estos tópicos.

Como una muestra de lo señalado hasta aquí, rescatamos dos fragmentos de las entrevistas de Felipe y Jan, que ponen en evidencia la dificultad que algunos estudiantes presentan para usar el método de ajuste manual.

Jan, en el ítem 110, después de haber realizado cinco intentos de ajuste manual para encontrar una función de ajuste a la nube de puntos, utilizando diferentes familias de funciones, hace un comentario sobre la dificultad del método: "Así es muy difícil, es más fácil cuando uno pone…"; probablemente lo que iba a decir Jan era: "cuando uno utiliza el método de regresión" que propone el paquete informático. Y después de contestar la pregunta 7 de la guía, Felipe hace el siguiente comentario:

60. (Felipe continúa en la guía, ahora leyendo la pregunta 7 "Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace")

61. Felipe: Bueno, aquí es donde viene lo difícil.

Este comentario pone de presente la dificultad que nota Felipe para llevar adelante el proceso de ajuste, sobre todo en términos del "ajuste manual", que es el método que va a utilizar.

Sin embargo Felipe merece una mención especial en este apartado, pues aunque realizó este comentario, fue el único estudiante que cuando se enfrentó a la tarea de buscar la función del mejor ajuste, se decidió por el método manual. A lo largo de la entrevista realizó diferentes intentos, pero lamentablemente las dificultades del método, y los vacíos de Felipe en el manejo de las ecuaciones canónicas, de los parámetros y las transformaciones, impidieron que sus esfuerzos culminaran exitosamente.

6.1.6 MÉTODOS PARA REALIZAR EL AJUSTE

Como ya comentamos en el apartado anterior, originalmente, cuando estábamos diseñando las Unidades de Enseñanza, pensamos en presentar dos caminos para lograr la función del mejor ajuste: un método que hemos llamamos "ajuste manual", que consiste en usar las ecuaciones canónicas y los parámetros de las funciones para hallar, la función de ajuste, y otro método en que se partía de las herramientas estadísticas que ofrece el GG.

Sin embargo a lo largo del proceso de enseñanza y del estudio de casos hemos visto cómo los estudiantes, además de los métodos propuestos, han usado otros dos métodos alternativos que, sin duda, vale la pena resaltar aquí, ya que estos hallazgos pueden servir de referencia para otras investigaciones relacionadas con el tema de nuestra tesis.

El primero de estos métodos es una variante del método de ajuste manual en donde la manipulación de los parámetros de la ecuación canónica no se realiza directamente en la ecuación sino a través de otra herramienta del paquete: el deslizador. Esta utilidad del programa, que favorece un manejo dinámico de los parámetros, se presentó durante el estudio de la actividad 1 familias de funciones, en diversas tareas.

Este tipo de ajuste manual con ayuda del deslizador es la forma que planteó uno de los estudiantes participantes, Álvaro, para hallar la función que brinda el mejor ajuste. Él lo explicó de la siguiente manera: "[…] tocaría identificar más o menos que función es y colocar pues no se como en un deslizador tratando de cuadrar una función que más o menos se ajuste" (Álvaro ítem 82). En los ítems siguientes (83-97) el investigador intenta que Álvaro utilice el método que ha propuesto pero, el estudiante no reconoce los parámetros que debe utilizar en la expresión con el deslizador, ni tampoco la magnitud que deben tener de acuerdo a la nube de puntos (ítems 96-97).

El otro método alternativo que hemos encontrado se relaciona con una de las herramientas más poderosas que posee el GG, común en la gran mayoría de programas de Geometría Dinámica (SGG), esto es, la herramienta arrastre. Esta se utiliza con frecuencia en situaciones geométricas y sabíamos que se podía utilizar en GG para realizar transformaciones de funciones (esta herramienta se activa al señalar con el cursor la gráfica de una $f(x)$ en la vista gráfica; y manteniendo oprimido el botón izquierdo del "ratón" es posible desplazar la $f(x)$ a otra ubicación; en el proceso se van ajustando los parámetros de la ecuación de la $f(x)$ a la nueva ubicación). Sin embargo, estábamos reacios a utilizar esta herramienta, por razones didácticas, y por ello no se les presentó a los estudiantes cuando estudiamos las trasformaciones, solamente utilizamos los parámetros y los deslizadores.

No obstante, en la sesión del post-test con GG, los estudiantes descubrieron el arrastre por sí mismos, lo cual fue muy interesante. En dicha sesión, varios de ellos estaban intentando hallar la función del mejor ajuste con los parámetros, pero luego de tener la estructura de una ecuación canónica en la proximidad de la nube de puntos que les permitía intuir la función de ajuste, pasaron a utilizar el arrastre para ajustar la función, lo que hizo este proceso mucho más fácil. Incluso fueron un paso más allá: como los monitores de los ordenadores con los que trabajábamos en la sala estaban provistos de pantallas sensibles al tacto (se comportan como tabletas, pero son monitores de 23 pulgadas), algunos de los estudiantes se dieron cuenta que podían realizar el arrastre de las funciones con tan solo tocar el monitor con su dedo y desplazar la función a la ubicación que quisieran en la pantalla.

Este método de ajuste por "arrastre" lo emplearon tanto Jan, como Álvaro en las sesiones del estudio de casos. Jan, siguiendo un proceso muy parecido al descrito para el post-test, realizó en primera instancia un ajuste manual de la función a la nube de puntos hasta llevar la función a la proximidad de la nube, momento en el que cambio del ajuste manual, al ajuste por arrastre. Y de esta manera Jan, utilizando el método de arrastre, logró ajustar la función $f(x) = (x - 1955)^2$ (ítems 119-122 y fig. 5.15), y cambiarla a la nueva función $f(x) = (x - 1941.48)^2 + 609.35$ (fig. 5.16, ítems 123-136).

6.1.7 USO DE LAS COORDENADAS DE UN PUNTO COMO INDICADOR PARAMÉTRICO.

En lo que se refiere al manejo y la comprensión de los parámetros, encontramos que varios de los estudiantes utilizaron una estrategia que en muchos casos les resultó efectiva a la hora de ajustar una determinada ecuación canónica a la nube de puntos.

Esta estrategia la hemos llamado uso de un punto como *indicador paramétrico*, y consiste en tomar un determinado punto de la nube, y utilizar las coordenadas de este punto como referencia para los movimientos que realizaría la gráfica desde el origen, o en otras palabras, como si estas coordenadas fueran los parámetros buscados, lo cual tiene bastante lógica, pues la coordenada x del punto correspondería al desplazamiento horizontal, y la coordenada y estaría relacionada con el desplazamiento vertical. Esta estrategia es efectiva, ya que realmente estos dos desplazamientos están incorporados en muchas de las ecuaciones canónicas, y por tanto su uso adecuado conlleva hallar una función de la familia elegida en la proximidad de la nube de puntos.

Entre los estudiantes que utilizaron esta estrategia, se encuentra Felipe. Él, desde los primeros intentos (Felipe ítems 65-67), para hallar una función de ajuste a la nube de puntos, se fijó detenidamente en el punto A (837, 1955)[1] e incluso lo señaló, e intentó incorporarlo en una ecuación canónica (ítem 67), lo que no resulta muy bien por sus dificultades con las ecuaciones canónicas.

65. (F señala con el cursor el punto A)
66. (F amplia la vista algebraica, para ver las coordenadas del punto A (837, 1955))
67. (F vuelve a la barra de entrada y anota $f(x)$= 1 (837,1955))

En sus intentos de hallar una función de ajuste, Felipe ensaya con la función cúbica y de nuevo incluye una coordenada del punto A (837,1955), que en este caso corresponde a la abscisa, como se puede ver en las siguientes expresiones. Estos cambios en el parámetro le permiten llevar la función a la proximidad de la nube de puntos.

$f\ (x) =\ 1\ (837)^3$	ítem 69
$f\ (x) =\ (x + 837)^3$	ítem 83
$f\ (x) =\ -1(x + 837)^3$	ítem 87
$f\ (x) =\ (x - 837)^3$	ítem 93

En el ítem 97, Felipe nos confirma nuestra intuición de que estaba utilizando el punto A como *indicador paramétrico*. Felipe explica su estrategia diciendo: “Allá tomé el punto A (837,1955)”.

Daniela también empleó esta estrategia, pero de una manera interesante: ella utiliza la forma canónica de la función lineal y anota la expresión $f(x) = 837x + 1995$ (ítem 94), aunque lamentablemente no construyó la gráfica. Además utiliza los dos valores de las coordenadas de los puntos, 1995 y 837, para establecer una expresión, lo cual podría mostrar que tiene la noción de que la función que busca se ha desplazado en torno a estos valores, en la medida en que son coordenadas en (x, y).

Estos dos valores parecen extraños, por cuanto ni siquiera son uno de los puntos dados, pues el punto A es (1955, 837) y el punto I es (1995, 3746). Sin embargo podríamos especular que los valores que quería utilizar eran los del punto A (1955, 837) como si el uso de estas coordenadas sirviera como referencia de los movimientos que realizaría la grafica desde el origen o en otras palabras, como si estas coordenadas fueran los parámetros buscados, para los desplazamientos horizontal y vertical. Este manejo pudo

[1] El punto A (837, 1955) al que nos referimos aquí, es el punto A “nuevo” que ha generado Felipe al invertir las coordenadas x e y de el punto original A (1955, 837).

ser un aprendizaje generado por el uso de los parámetros en otras familias de funciones, donde la relación que hemos explicado es más clara, y pareciera que Daniela se lo ha trasladado a la función lineal.

Debemos resaltar aquí que este manejo de un punto, o más específicamente de sus coordenadas, como *indicador paramétrico*, es una situación que aparece en varios de los casos estudiados.

6.1.8 USO DE LOS GESTOS.

Un aspecto que no habíamos contemplado en la revisión bibliográfica que realizamos para esta tesis, pero que se manifestó notoriamente durante el estudio de casos a lo largo de las entrevistas, fue el uso de gestos por parte de los sujetos, como una parte de su representación semiótica (Radford, 2009 y Arzarello et al., 2009). Esta situación nos llamó poderosamente la atención, pues en el trascurso del estudio de casos, varios de los estudiantes realmente utilizaron los gestos con mucha frecuencia, bien al dar sus explicaciones durante la entrevista, o bien en una suerte de reflexiones personales al interiorizar las ideas en su proceso de comprensión. Así por ejemplo, Daniela hace a lo largo de su entrevista ocho intervenciones en las que realiza 19 manifestaciones con gestos. En tres de las ocho intervenciones, hizo 7 gestos dirigidos al investigador, aclarando sus argumentos y respuestas; y en las cinco intervenciones restantes, hizo 12 gestos para acompañar sus reflexiones personales.

Ahora bien, cabe subrayar en estas conclusiones, que en el estudio de casos notamos dos tipos de gestos: de una parte existen unos que parecen servirle al resolutor para comprender la situación que estudia. En este sentido, los gestos parecen seguir un cierto patrón: mantienen una dirección del exterior hacia el interior del sujeto; así pasó con muchos de los gestos que, de acuerdo con las grabaciones, mostraron Daniela o Jan durante algunas de sus intervenciones.

Así por ejemplo, fue particular el gesto que realizó Daniela (ítem 46) cuando recorre los puntos de la gráfica con el cursor, marcando especialmente la variación en la dirección entre el punto A (1955, 837), el punto anómalo B (1960, 1559) y el punto C (1965, 1328); al observar detenidamente los gestos de Daniela, da la impresión de que ella está revisando la gráfica, tratando de compararla con sus hipótesis.

O en la situación sobre los parámetros citada anteriormente, pareciera que Daniela tratara de recordar el significado y manejo de los parámetros por el gesto de la mano con su movimiento de derecha a izquierda (ítems 85 y 86). Este tipo de gestos parecen ser, como lo han anotado varios autores –tales como Radford (2009) y Arzarello et al. (2009)–, un apoyo en la comprensión del estudiante.

84. M: Eh si, o en la misma ecuación ¿Qué cambiaba para que se moviera a la izquierda o a la derecha?

85. Daniela: Umm *x*, no mentiras (D hace un gesto con la mano moviéndola de derecha a izquierda y de vuelta)

86. Daniela: o sea para … (D vuelve a hacer el gesto con la mano moviéndola de derecha a izquierda y de vuelta) …

De otra parte, los estudiantes también utilizan gestos cuando explican sus razonamientos o comprensiones, por ejemplo al ser requeridos por el maestro; cuando esto sucede, los gestos parecen tener una dirección del interior del sujeto al exterior, al menos así lo hemos podido observar en el trascurso de nuestra investigación. Veamos un ejemplo de esta situación.

De la información recogida en nuestra investigación queremos rescatar aquí, como ejemplo de lo dicho en el párrafo anterior, el caso de Daniela, quien para explicar la nube de puntos y en particular el punto anómalo (1960, 1559) realiza todo un abanico de gestos en la tabla de datos; en primera instancia (ítem 5), indica que "sube", y *señala con el dedo hacia arriba,* refiriéndose a cómo cambia entre los dos primeros puntos; luego anota que "baja" entre el segundo y el tercer punto (ítem 6), y *hace un gesto hacia abajo con la mano,* para finalmente (ítem 7) concluir que "ahí ya hay una curva" y *con la mano hace el gesto de una variación ascendente y descendente.*

2. Maestro: ¿Cómo crees que es esa función?

3. Daniela: No se, porque bueno, uno así a simple vista uno podría decir que es lineal…

4. Daniela: … pero si uno mira, no se también tiene unas variaciones …
5. Daniela: … porque acá sube … (*señala con el dedo hacia arriba,* refiriéndose a una pareja de coordenadas en la tabla)
6. Daniela: … y luego baja … (*hace un gesto hacia abajo con la mano*)

7. Daniela: … y ahí ya hay una curva … (*con la mano hace el gesto de una variación ascendente y descendente*) …

8. Daniela: … entonces eso cambia totalmente todo, ya no es una función lineal…

6.1.9 OBSTÁCULOS EN LA VISUALIZACIÓN.

En este apartado queremos subrayar algunas situaciones que notamos pueden haber sido obstáculos para la comprensión de algunas de las representaciones gráficas, y que por tanto vale la pena tener en cuenta para luego buscar estrategias pedagógicas que faciliten de manera más efectiva el aprendizaje. Una primera situación tiene que ver con la representación que brinda el programa de ciertas funciones que no corresponden exactamente con la Gestalt con que normalmente se identifican y enseñan.

Este es el caso de la función cuadrática en la nube de puntos durante el análisis cualitativo. La representación de la nube no corresponde exactamente con la "forma" o "imagen" con que normalmente se identifica y enseña una función cuadrática, (Goldenberg, 1991), esto es, una parábola de eje vertical ya que en la nube de puntos que ven los sujetos apenas se visualiza una parte de la parábola, aproximadamente la mitad. Esta falta de correspondencia con la "imagen" que tienen los estudiantes hace que no la puedan "ver".

De otra parte, muy relacionados con la primera situación, observamos los problemas de escala, muchos de los cuales ya se encuentran documentados en la literatura y que el paquete informático ayuda a controlar con ciertas herramientas, como por ejemplo: zoom, encuadre de todos los puntos, ajustes manuales de la escala en los ejes por separado, etc.

Sin embargo, en el trascurso de nuestra investigación, hemos visto una limitación en la ventana de análisis de datos en que se muestran las gráficas de las regresiones (fig. 6.2 ventana pequeña). Allí el programa genera una escala automática, en una ventana relativamente pequeña, en donde los intervalos en los ejes (en especial en *y*) resultan por lo general muy amplios –por lo menos para las situaciones que hemos utilizado en nuestro experimento–; esto, unido al "tamaño" de los puntos en la gráfica y al "grosor" con que el paquete dibuja la línea de regresión, puede dar una información falsa, o por lo menos ambigua, sobre la relativa proximidad de los puntos con la función.

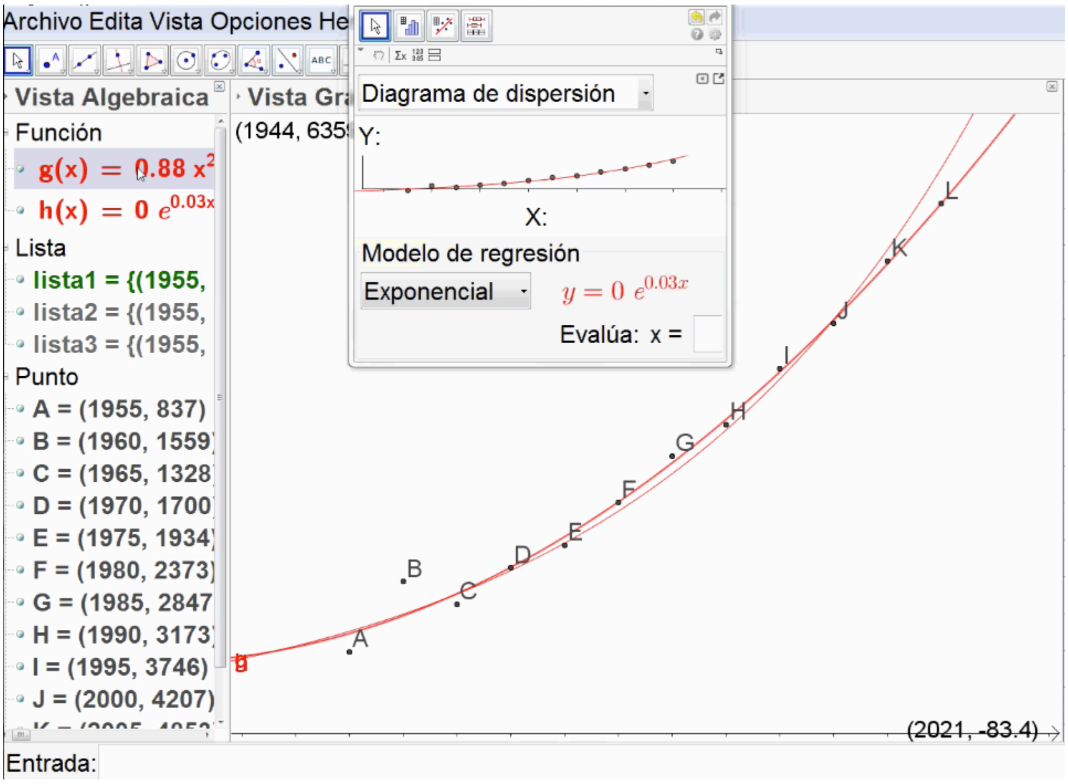


Figura 6.2 Captura de pantalla del trabajo de Erika después del ítem 119, con las regresiones Exponencial y Polinómica (la más intensa).

Esta situación, por ejemplo, la experimentó Erika, quien vio en la ventana de análisis de datos (ventana pequeña) como si la función brindara un buen ajuste a la nube de puntos (Erika ítems 118-124 y fig. 6.2). En la situación a la que hacemos referencia, Erika manifestó: "Pero acá parece que cuadrara", pero cuando traslada la función a la vista gráfica, donde la escala es mayor (ventana grande), ya la función no presenta tan buen ajuste. Sobre este particular dice Erika: "Ahí ya no cuadra" (Erika ítem 122), y es evidente que esta situación la confunde (Erika ítem 124).

118. (Nuevamente Erika cambia de regresión y una vez más escoge la regresión exponencial y observa su resultado en la nube de puntos)
119. (Erika copia la gráfica de la regresión exponencial de la ventana estadística a la vista gráfica).

120. Maestro: Si quieres cámbiale el color o algo para [poderlas diferenciar] (M se refiere a las gráficas de las dos regresiones polinómica g y exponencial h).
121. (Erika borra la ecuación de la regresión polinómica dejando solo la exponencial).
122. Erika: Ahí ya no cuadra (se refiere a que el ajuste a la nube de puntos con esta función no es preciso).
123. Erika: Pero acá parece que cuadrara (se refiere a la representación gráfica en otra escala que se ve en la pequeña ventana de análisis de datos de la HdC).
124. Erika: no se.

Un extremo de esta situación lo observamos en el caso de Álvaro, quien desde la tabla reconstruye la gráfica de la nube de puntos (Álvaro ítem 54, pregunta 4 de la guía), pero lo hace de una manera diferente a lo que esperábamos, y a los métodos empleados por otros resolutores, pues realiza la gráfica de la nube de puntos en la pequeña ventana de análisis de datos, y no en la ventana amplia de la Vista Grafica de GG.

Esta forma de afrontar la situación tiene varias consecuencias: de una parte, la ubicación de los puntos en la nube no es clara, esto debido a la escala tan reducida, a la estrechez de la pantalla y a que los puntos se confunden con los valores del eje x, como se puede notar en la Fig. 6.3. De otra parte, no hay permanencia de la nube de puntos para comparar, pues se grafican las regresiones y con cada intento, inmediatamente después de graficar, desaparece la imagen presentada. Además, usar la ventana pequeña, en lugar de la amplia, hace que el resolutor no tenga en cuenta el punto anómalo B, pues en la ventana de análisis de datos en que GG grafica las regresiones, la escala no permite ver con suficiente claridad la diferencia entre el punto B, y los demás puntos de la nube. Y de otra parte la nube de puntos da la apariencia de una línea recta. En esta ventana pequeña el eje x no tiene ecuación y = 0, sino que parece estar ubicado más arriba, como se puede desprender de la ubicación de puntos "bajo el eje x", lo que quiere decir que tendrían valores negativos, y como puede verse en la tabla y en las condiciones del problema todos son valores positivos.

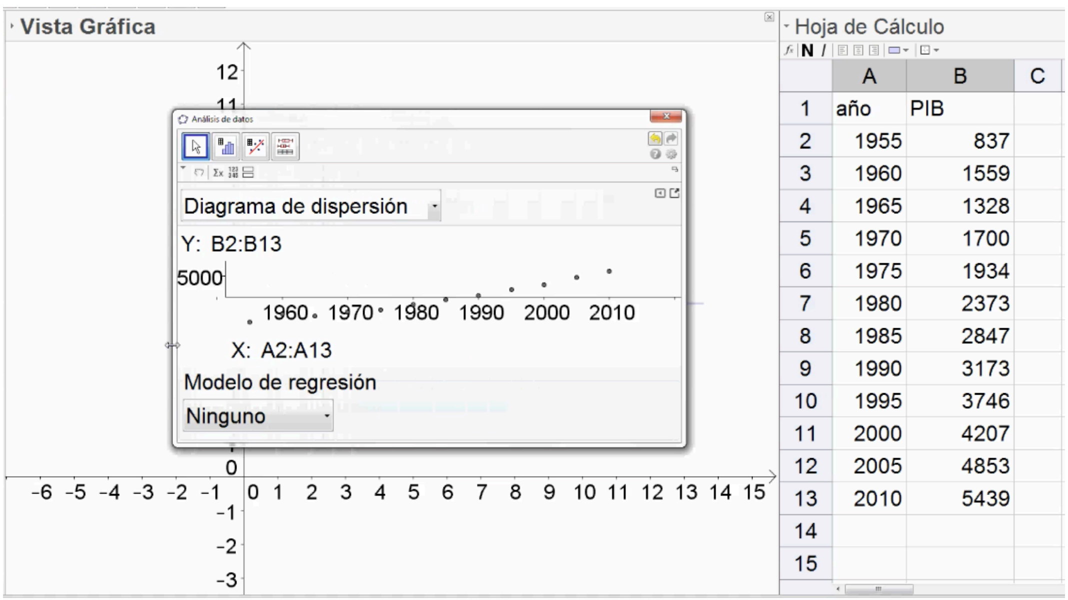


Figura 6.3 Gráfica de la nube de puntos sin ampliar (Álvaro ítem 54 pregunta 4 de la guía).

6.1.10 MANEJO DE ESQUEMAS EN EL USO DEL PAQUETE INFORMÁTICO.

De acuerdo con la teoría de la Génesis Instrumental (Trouche 2004), los sujetos en su relación con una herramienta tecnológica, un ordenador, un programa, o parte de él, –en nuestro caso el paquete informático GeoGebra–, siguen un proceso de apropiación de dicha herramienta, hasta convertirla, poco a poco, en un instrumento. A lo largo del estudio de casos, hemos visto cómo nuestros estudiantes aplicaban esquemas ya adquiridos –como por ejemplo los del manejo de la HdC– y además iban desarrollando una serie de nuevos esquemas en el manejo del paquete informático GG, o de algunas de sus herramientas específicas, facilitándoles las tareas en el entorno del ordenador. Entre los casos más relevantes podemos citar, en este capítulo conclusivo, los siguientes

Esquemas de manejo de la Escala

Algunos estudiantes implementaron un esquema para el manejo de la escala de las gráficas de las funciones o la nube de puntos, que representaban durante el experimento, lo que les permitía visualizarlas adecuadamente. Este esquema consistía básicamente en la combinación de los comandos “encuadre de todos los puntos”, con los comandos del zoom –tanto de alejamiento como de acercamiento– (Dani ítems 44-45; Felipe ítems 112-113).

Esquemas de ubicación espacial

Son ciertos esquemas desarrollados por los estudiantes que les permitían predecir la zona del sistema de coordenadas en donde quedaría la nube de puntos. En el desarrollo de nuestra investigación, hemos reconocido dos tipos diferentes de esquema.

El primero, el que nos parece más general, es aquel en el que el resolutor, después de revisar la tabla de datos, escoge el último punto, cuyos valores son los mayores en una o ambas variables, y lo toma como referencia para definir los extremos, tanto positivos como negativos de la ventana de la Vista Gráfica; este es el caso de Felipe (Felipe, ítem 34).

Un esquema más elaborado se da cuando el sujeto revisa cuidadosamente la tabla de datos, y discrimina tanto los valores de x en el dominio, como los de y en el rango, y a partir de ellos ajusta los extremos de la ventana de la Vista Gráfica; este es el caso de Jan (Jan, ítem 45 y fig. 5.12)

Esquemas de control

Sobre este particular, el caso de Erika es bien representativo. Esta estudiante, a partir de su descubrimiento de la inexactitud o ambigüedad de la imagen de la función de ajuste en la ventana de análisis de datos (fig. 6.2), desarrolló todo un esquema para evitar estas ambigüedades, de tal forma que para cada función de regresión que quería revisar, primero la veía en la ventana pequeña de análisis de datos, y luego, para verla mejor, la pasaba a la ventana de la Vista Gráfica, y si quería comparar dos funciones, ambas las pasaba a la Vista Gráfica para verlas simultáneamente. (Erika, ítems 118-124 figs. 6.2 y 5.10).

Este esquema de control, de comparar las gráficas de varias funciones en la Vista Gráfica, lo utilizaron algunos de los estudiantes a lo largo del estudio de grupo como lo mencionamos en el capítulo cuatro. Por ejemplo, las alumnas 13 y 16 graficaron dos funciones cuadráticas (ver figs. 4.19 y 4.20), y el alumno 12 realizó una función cúbica y una cuadrática (ver fig. 4.21); en todos los caos los estudiantes compararon la función de regresión que propone el paquete informático con otra función que ellos habían ajustado de manera manual.

6.1.11 ANALISIS CUALITATIVO DEL PROCESO COMO MECANISMO DE CONTROL.

Puig y Monzó (2013) proponen el uso del análisis cualitativo tanto del fenómeno, como de las familias de funciones, como un mecanismo de control del proceso, en la medida en que va confirmando las suposiciones y guiando los pasos posteriores del resolutor en el proceso. Esta situación la registramos en varias ocasiones durante el estudio de casos, como por ejemplo, con Daniela.

Ante la tarea propuesta de modelizar el fenómeno, Daniela comienza a realizar el análisis cualitativo. A partir de la inspección de los datos desde la tabla, reconoce en su mente una serie de características del fenómeno; por ejemplo, que el fenómeno se comporta de manera creciente, y le parece además que puede ser lineal (ítem 3); reconoce que el segundo punto (1960, 1559) (ítem 4), tiene un comportamiento anómalo con respecto a la nube de puntos y que su ubicación produce una particular variación (ítems 4-7), lo que la lleva a "ver" una curva en esa fluctuación (ítem 7), que pone en duda su hipótesis de que la nube de puntos sea una función lineal, (ítem 8), y le abre el horizonte a nuevas hipótesis (ítems 9 y 10); en particular piensa en la función exponencial y en la función seno.

Luego del análisis cualitativo Daniela continúa la tarea, construyendo la tabla, y la gráfica de la nube de puntos en el paquete informático, para después confrontar el análisis cualitativo previo del fenómeno y de la familia de funciones, con los resultados que muestra la vista gráfica de GG, (ítems 47-50). Daniela comprueba entonces varias de las conclusiones de su análisis: la primera es cómo la variación en la nube de puntos alrededor del punto anómalo B (1960, 1559), produce en la gráfica una curva.

47. Maestro: ¿Si parece lineal?
48. Daniela: No. Lo que yo te decía, la curva acá (*señala en la pantalla del ordenador como cambia la gráfica entre los puntos* A (1955, 837), B (1960, 1559) y C (1965, 1328), *hace el gesto de dibujar la gráfica)*
49. Daniela: de resto sigue así, así, así (*hace el gesto con la mano de cómo los demás puntos a partir de* C (1965, 1328) *mantienen la misma dirección*)

Daniela reconoce además, que los demás puntos de la nube, desde el punto C (1965, 1328) hasta L (2010, 5439), mantienen una tendencia, conservando una dirección y sentido (ítem 49). De otra parte, el reconocer esta tendencia, pero sobre todo el gesto que realiza con la mano, de cómo los puntos mantienen la misma dirección, pareciera reafirmar otra de las hipótesis de Daniela, el que la nube de puntos se comporta como una función lineal (ítem 49). Lo cual parece confirmar en el ítem 57 "esta parte sería más bien como una línea [recta]" (*Daniela recorre los puntos de la nube desde* C (1965, 1328) *hasta* L (2010, 5439) *de un punto a otro moviéndose con el cursor, hacia* *arriba y hacia abajo, y de nuevo hacia arriba, aunque cuando baja llega hasta el punto* A *sin pasar por* B).

Más adelante, ya utilizando las herramientas estadísticas de GG para realizar análisis de regresión, los resultados del análisis cualitativo llevan a Daniela a que las primeras regresiones que intenta sean precisamente las de sus hipótesis, es decir: las funciones lineal, sinusoidal y exponencial (Dani ítems 110-112).

En este sentido el análisis cualitativo se convierte en un mecanismo para la buena gestión del proceso, confirmando las suposiciones y guiando los pasos posteriores como lo mencionan Puig y Monzó (2013).

6.1.12 DIFICULTAD PARA RECONOCER LAS VARIABLES DEPENDIENTE E INDEPENDIENTE

Dentro de la literatura, se ha marcado como un error común entre los estudiantes, en el momento de graficar funciones y en particular líneas rectas, el confundir la ubicación de las variables en los ejes del sistema coordenado, intercambiándolas (Beichner, 1994). Una situación semejante la hemos podido observar en el protocolo de Felipe, quien en el momento de representar la situación a modelizar, en el estudio de casos, realiza varias acciones en este sentido. Así, en un primer momento, al pedirle que realice un bosquejo de cómo cree que se comporta el fenómeno, el estudiante construye una función lineal en donde ha intercambiado la ubicación de los ejes del sistema coordenado, ubicando en el eje y la variable "Años" y en el eje x el valor del PIB (Felipe fig. 5.30). Luego en un segundo momento cuando la guía le solicita que construya en el paquete informático la tabla de datos y la gráfica correspondiente al PIB, Felipe las realiza, pero parece que no le satisface la disposición de la nube de puntos en la gráfica y luego, casi inmediatamente, construye una nueva tabla de datos en que intercambia las abscisas y las ordenadas de los puntos (Felipe ítems 37-52, figs. 5.31-5.33 y 6.4).

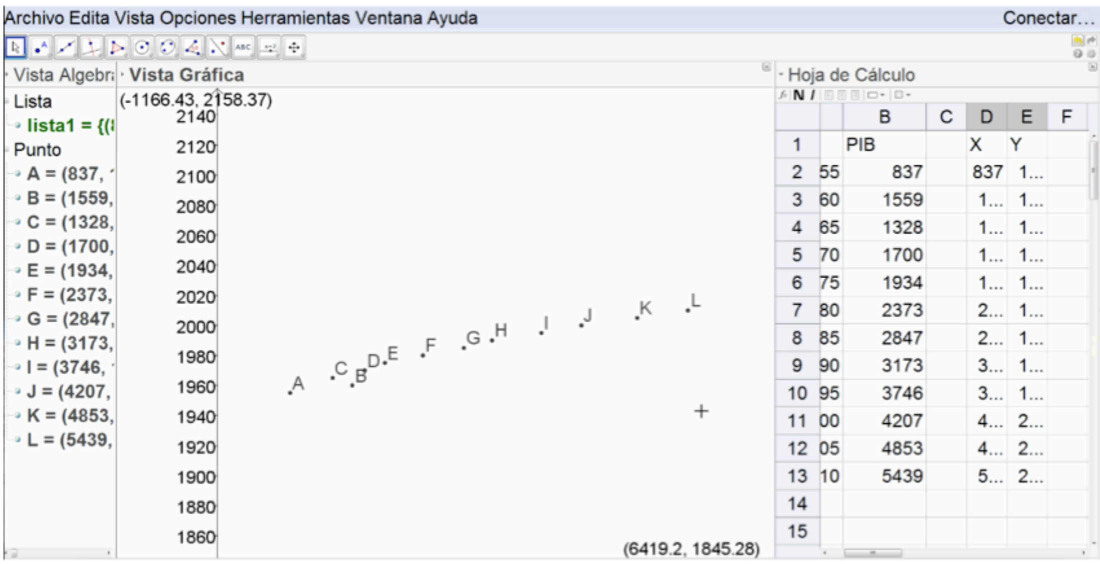


Figura 6.4 Nueva nube de puntos de Felipe después del ítem 51

Por lo que observamos, esta nueva disposición de los puntos le parece mucho mejor, pues dice (Felipe ítem 52): “Si ve, así quedó mejor que la anterior” (se refiere a la nube de puntos original); luego, cuestionado por el cambio que ha efectuado, responde tal como se describe en el siguiente extracto,

52. Felipe: Si ve, así quedó mejor que la anterior (se refiere a la nube de puntos original).
53. (Felipe hace un pequeño zoom para alejar la nube de puntos).
54. Maestro: ¿Pero no importa cual sea x y cual sea y ?
55. Felipe: No, no ¿importa?
56. Maestro: No, pregunto.
57. Felipe: Pues para mi, por eso yo hago este cambio, si veo que los precios en y no me “cuadran” entonces hago el cambio de los precios en x y los años en y.

Por las respuestas de Felipe en los ítems 55 y 57 pareciera que él no solo comete un error al intercambiar las variables en los ejes, sino que además no tiene claridad sobre la relación de dependencia entre las variables involucradas en la función.

6.1.13 RIESGOS DEL USO DE TECNOLOGÍA

Ya Tall en 1989 expresó su preocupación de que en el proceso de utilización de la tecnología, la "autoridad de la máquina" puede ser un impedimento para el aprendizaje, sobre todo en las primeras etapas. Este mismo fenómeno lo mencionan Leinhard et al. (1990), en relación con el efecto que produce el ordenador en la comprensión de las gráficas.

> En la instrucción basada en computadora, la autoridad puede estar en manos de la computadora de maneras sutiles que no apoyan el aprendizaje. La gráfica que la máquina produce es incuestionable. Un profesor debe ser consciente del efecto "mágico" que esto puede tener en los estudiantes. Los estudiantes pueden desarrollar una dependencia demasiado fuerte de la máquina.
>
> (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990, p.7)

Como ya lo hemos mencionado en otros apartados, los estudiantes optaron por el uso de las herramientas estadísticas del GG, para hallar la función que brinda el mejor ajuste. Esta opción, en algunos casos, nos ha parecido que conlleva varios riesgos, en especial la excesiva dependencia de la tecnología que va, sin lugar a dudas, en detrimento del propio conocimiento.

Por ejemplo Erika, desde los primeros intentos de realizar el ajuste recurre directamente a estas herramientas (Erika, ítem 50); luego al insistirle en que utilice otros métodos para hallar la función del mejor ajuste, ella propone utilizar la pendiente de la recta, que fue uno de los métodos alternativos para las líneas rectas, que se utilizaron durante el proceso de enseñanza; sin embargo, no lo desarrolla para poder hallar una función adecuada de ajuste (Erika ítem 54), sino que piensa de nuevo en las herramientas estadísticas del paquete (Erika, ítem 56); pareciera aquí que Erika lo que quisiera hacer es utilizar las herramientas estadísticas del GG, sin tener en cuenta otras herramientas del paquete informático u otros métodos adecuados para hallar la ecuación de ajuste.

53. Erika: Pues no se... con...
54. Erika: No pues para hallar una ecuación, ¿sería con la pendiente y esas cosas?
55. Maestro: O algo así, si, por ejemplo.
56. Erika: ¿pero igual la busco acá? (se refiere al uso de las herramientas estadísticas de la HdC).

Seguidamente el maestro le insiste para que utilice otros métodos, dándole algunas claves sobre las transformaciones y las ecuaciones canónicas, a lo que Erika responde proponiendo una nueva familia de funciones: las funciones exponenciales (Erika, ítem 88), pero luego vuelve a recurrir a las herramientas estadísticas del paquete informático (Erika, ítem 90).

87. Maestro: Con otro tipo de función o algo, otra que te sirva más.
88. Erika:¿Una exponencial?
89. Maestro: ummmm
90. Erika: (dice algo en voz baja que no entiende) ... habría que sacar la grafiquita de allá (Erika: se refiere a la ventana del menú estadístico de la HdC de GG).

Otra situación que muestra este mismo riesgo, la observamos en la entrevista de Jan, un estudiante con buen nivel en matemáticas, quien después de haber realizado por un largo tiempo, diferentes aproximaciones para lograr la función del mejor ajuste, logra obtener una función que le brinda un ajuste significativo, "Pues esa ya sería una de las que "podría" tocar más o menos los puntos ...[se refiere a la función de ajuste $f(x) = (x - 1941.32)^2 + 769.71$, que obtuvo a través del arrastre]" (Jan ítem 160). Enseguida hace un comentario muy diciente en el ítem 162: "ah entonces dejémosla ahí y busquemos la que es", refiriéndose a la función de ajuste que ha obtenido, y haciendo ver que ahora va a comenzar a utilizar las herramientas estadísticas del paquete informático. Es muy llamativa la enorme autoridad que le da al ordenador, como si la maquina tuviera la respuesta correcta y única, y en cambio, todo el proceso que él ha desarrollado, no tuviera validez.

6.1.14 SOBRE LA VISUALIZACIÓN.

Nuestra intención al aplicar la prueba de Visualización de Norma Presmeg (Presmeg, 1985), era poder catalogar a los alumnos en el estudio de acuerdo a sus características de visualización, y ver si existía alguna relación entre estas características y su desempeño en el aprendizaje de las familias de funciones y los procesos de modelización de funciones, en tanto que las unidades de enseñanza se habían diseñado contemplando una proporción significativa de trabajo en el entorno visual propuesto por el paquete informático GeoGebra.

Sin embargo, como se puede observar en la tabla 4.3, los resultados de nuestro grupo de estudio se hallan muy cerca de la media, con apenas algunas pequeñas fluctuaciones, lo cual no nos permitió clasificar a los estudiantes para el estudio de casos, de acuerdo con este criterio, y estudiar su desempeño con respecto a sus capacidades de visualización.

Las actuaciones de los estudiantes que hemos revisado, tanto en el estudio de casos, como en el material de enseñanza, no nos permiten sacar conclusiones sólidas en relación con esta posible relación entre las capacidades de visualización, y el desempeño en el aprendizaje de las familias de funciones y en los procesos de modelización. Sin embargo, nos parece que la pregunta es pertinente y debe ser seguir abierta, y por tanto amerita desarrollar investigaciones enfocadas en estos aspectos.

6.2 CONCLUSIONES DESDE EL ESTUDIO DE GRUPO

Conviene señalar que las conclusiones que presentamos a continuación sólo tienen validez para la población sometida al estudio, y no pretendemos establecer generalizaciones a cualquier otro tipo de población. Tampoco podemos hacer responsable de las observaciones del estudio de grupo a las características del paquete informático, sino a la secuencia de enseñanza que hemos elaborado con la finalidad de enseñar las familias de funciones y los procesos de modelización de funciones para esta tesis.

Tras la secuencia de enseñanza, en la primera parte del post-test, se muestran mejores resultados que en el pre-test, en las preguntas correspondientes, lo que nos permite decir que los estudiantes han mejorado en su desempeño algebraico en cuanto a la identificación y manejo de expresiones, así como en lo relacionado con el conocimiento y manipulación de los parámetros y las ecuaciones canónicas de las familias de funciones estudiadas, como era de esperarse después de un proceso de enseñanza. Cabe anotar que se observó una mejora particular en el manejo dinámico de la variación, y en el reconocer y usar los parámetros relacionados con los desplazamientos.

Sin embargo, en algunos estudiantes aún persisten dificultades en el manejo de los parámetros de la ecuación canónica y sus efectos en las gráficas de las funciones, así como en el reconocer las características de algunas familias de funciones.

En la segunda parte del post-test, la realizada en GG, es claro que todos los estudiantes pudieron resolver la situación que se les planteó, realizando un adecuado análisis cualitativo del fenómeno y de la función y logran llegar a modelizar una función que represente el comportamiento del fenómeno.

Sin embargo, en la forma en que resuelven la tarea se notan dos y hasta tres tendencias claras, a partir de las cuales podríamos definir sendos grupos. El tercer grupo, en este caso, estaría compuesto por algunos sujetos que parece combinar las dos tendencias más notorias, o estar en un momento intermedio.

La primera tendencia es la de aquellos estudiantes que realizan el análisis cualitativo del fenómeno y de la función en sus líneas generales y que prefieren utilizar directamente las herramientas estadísticas de GG para hallar la función de regresión. Algunos de los estudiantes que siguen este método, presentan dudas en los tipos de funciones, o en el papel que juegan los parámetros en la gráfica de la función, o en el manejo de determinadas herramientas, como los deslizadores. Quienes siguen esta tendencia, no usan el método de “ajuste manual”, tal vez porque les parece muy complicado o muy tedioso.

La segunda tendencia clara, es la de aquellos estudiantes que realizan el análisis cualitativo del fenómeno y de la función con un amplio surtido de opciones, lo que les permite abordar de manera exitosa el proceso de modelización de la función del mejor ajuste, de manera “manual”, utilizando la función canónica y los ajustes en los parámetros.

Como mencionamos antes, existe un grupo de estudiantes que parece combinar estas dos tendencias, o estar en un momento intermedio. Así, algunos estudiantes solucionan el problema por ambos métodos, mostrando un buen desempeño en ambas situaciones. Algunos otros lo intentaron por ambos métodos, y presentaron avances en lo relacionado con el ajuste “manual”, pero de todas maneras muestran preferencia por utilizar las herramientas estadísticas de GG.

De acuerdo con los resultados de nuestra investigación, la mayoría de los estudiantes (14, que equivale al 70%) están en la primera de las tendencias mencionadas, mientras que en la segunda identificamos tres estudiantes (el 15%), y en el tercer grupo, otros tres estudiantes (15%).

&&&&&&&&&&&&&

7. Referencias

Alemán, M. C., & González, E. (2003). *Modelos financieros en Excel*. México: Compañía Editorial Continental.

Alspaugh, C. A. (1972). Identification of Some Components of Computer Programming Aptitude. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*, 89-98.

Amit, M., & Fried, M. N. (2005). Multiple representations in 8th grade algebra lessons: Are learners really getting it? In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 2, 57–64

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241

Arnau, D. (2010). *La Enseñanza de la Resolución Algebraica de Problemas en el Entorno de la Hoja de Cálculo*. Tesis Doctoral, España: Universitat de València.

Artigue, M. (1997). Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques liésà l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. [The software Derive as relevator of didactical phenomena related to the use of technological environements for the learning.] *Educational Studies in Mathematics*, 33, 133-169.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics,* 70, 97–109. DOI 10.1007/s10649-008-9163-z

Beichner, R. J. (1994) Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Phisics* 62, 750 -762

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics* 2,(1), 34-42.

Berry J., Graham, E. & Watkins, A. (1993). *Learning mathematics through Derive.*

Chichester, UK: Ellis Horwood.

Berry J., Graham, E. & Watkins, A. (1994). Integrating the Derive program into the teaching of mathematics. *The International Derive Journal,* 1(1), 83-96.

Bills, L. (1997). Stereotypes of literal symbol use in senior school algebra. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th conference of the international group for the PME*, Vol 2 (pp. 73-80). Helsinki/Lahti: University of Helsinki/Lahti Research and Training Centre.

Bills, L. (2001). Shifts in the meanings of literal symbols. In M. van den Heuvel-Panhuize (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the PME*, Vol 2 (pp. 161-168). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.

Bloedy-Vinner, H. (1994). The analgebraic mode of thinking - the case of parameter. In J.P. Da Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the PME*, Vol 2 (pp. 88-95). Lisbon: University of Lisbon.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables - parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 177-189). Dordrecht, Netherlands: Kluwer AcademicPublishers.

Blum, W. y Niss, M (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22, 37-68. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Boromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process, *ZDM*, 38 (2), 86-95

Brasell, H., & Rowe, M.(1989). Graphing skills among high-school physics students. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules? *Sigsam Bulletin*, 24(1), 10-17.

Butler, M., Pyzdrowski, L., Walker, V.L., Yoho, S., (2010). Studying person response systems in a college algebra course. *Investigators in Mathematics Learning* 2 (2), 1–17.

Carpenter T,.P., Corbit, M.K., Kepner, H.S., Jr., Lindquist, M.M., & Reys, R.E. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of* *the ninth international conference of the International Group for Psychology the Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 369-375). Utrecht, The Netherlands: IGPME

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in Cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics,*11 (1-2), 77-87.

Davis, R. B. (1982). Teaching the concept of function: Method and reasons. In G. Van Barnveld & H. Krabbendam (Eds.), *Conference on functions,* (Report 1, pp. 47-55). Enschede, The Netherlands: Foundation for Curriculum Development.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning: Teaching, Learning and testing of Mathematics for the Life and Social Sciences*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Demana, F., & Waits, B. K. (1988). Pitfalls in graphical computation, or why a single graph isn't enough. *College Mathematics Journal,*19 (2), 177-183.

Dick, T. P. (1992). Symbolic-graphical calculators: Teaching tools for mathematics. *School Science and Mathematics, 92*, 1–5. doi:10.1111/j.1949-8594.1992.tb12128.x.

Doerr, H. M. (2001). Learning algebra with technology: The affordances and constraints of two environments. In H. Chick, K. Stacey, Ji. Vincent & Jo. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference the future of the teaching and learning of algebra*, Vol1 (pp. 199-206). Melbourne: The University of Melbourne.

Doerr, H. M. & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. Educational Studies in Mathematics, 41, 143-163.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education,*13(5), 360-380.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: Obstacles are opportunities. *ZDM*, *34*(5), 221-228

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Doctoral dissertation. Universiteit Utrecht.

Drijvers, P., & Weigand, H. (2010). The role of handheld technology in the mathematics classroom. *ZDM, 42*(7), 665-666.

Dugdale, S. (1982). Green globs: A microcomputer application for graphing of equations. *Mathematics Teacher*, 75,208-214.

Duncan, A. G. (2010). Teachers' views on dynamically linked multiple representations, pedagogical practices and students' understanding of mathematics using TI-Nspire in Scottish secondary schools. *ZDM–International Journal of Mathematics Education, 42*, 763–774. doi:10.1007/ s11858-010-0273-6.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 237-273). Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.

Fey, J. T. (1989). School algebra for the year 2000. In S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Volume 4 of Research agenda for mathematics education, pp. 199–213). Reston, VA: NCTM.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008a). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach.* New York, USA: Springer.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008b). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), pp. 327-342.

Food and Agriculture Organization of the United Nations FAO (2012) *The State of Food Insecurity in the World 2013* En: http://www.fao.org/publications/sofi/en/ Revisado: 12/12/2014

Freudenthal, H. (1962). Logical analysis and critical survey. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on the relations between arithmetic and algebra* (pp. 20-41). Groningen, Netherlands: J.B. Wolters.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1982). Variables and functions. In G. van Barneveld & H. Krabbendam (Eds.), *Report on the conference on functions* (pp. 7-20). Enschede, Netherlands: SLO.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Mathematics education library. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F. & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: A little difference? In J.P. Da Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the PME*, Vol 2 (pp. 368-375). Lisbon: University of Lisbon.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 4-11.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological* *research and practice*. Cambridge University Press.

Ginsburg, H.P., Jacobs, S. y López, L. (1993). Assessing Mathematical Thinking and Learning Potential. In R.B. Davis & C. Maher (Eds.). *Schools, Mathematics, and the Word of Reality* (pp. 237-262). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Goldenberg, E. P. (1987). Believing is Seeing: How Preconceptions Influence the Perception of Graphs. In J. Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran (Eds.) *Proceedings of the eleventh international conference of PME* Montreal v 1 pp. 197- 203.

Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol 7(2), Aug 1988, 135-173.

Goldenberg, E. P. (1991) The Difference Between Graphing Software and Educational Graphing Software. In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.). *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 77-86). Washington, DC: Mathematical Association of America

Goldenberg, E. P., Harvey,W., Lewis, P. G., Umiker, R. J., West, J., & Zodhiates, P. (1988). *Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the graphical representation of Functions* (Tech. Rep. No. 88-4). Cambridge, MA: Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education.

González-Calero, J. A. (2014), *La Enseñanza de la Resolución Algebraica de Problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente*. Tesis Doctoral, España: Universitat de València.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education: Ontwikkelen Van Realistisch Reken/Wiskundeonderwijs: Met Een Samenvatting in Het Nederlands*. CD-β Series on research in education. Utrecht: CD β Press

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning. 1(2),* 155-177.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent Modelling as a Precursor to Mathematical Modelling. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study* (pp. 137–144). New York: Springer.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal, a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, *32*(6), 777–796.

Greeno, J. G. (1988a). The situated activities of learning and knowing mathematics. In M. J. Behr, C. B. Lacampagne, & M. M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the tenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.481-521). DeKalb IL:IGPME-NA.

Greeno, J. G. (1988b). *Situations, mental models, and generative knowledge*. Unpublished manuscript, Institute for Research on Learning, Palo Alto CA.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestration. *ZDM, 34*(5), 204-211.

Gutierrez, A. (2005). Notas de clase funciones. Universitat de València.

Harshbarger, R. J. y Reynolds, J. J. (2005) Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales, , Séptima edición, México: McGraw-Hill.

Hatfield, L. L. y Kieren, T. E. (1972). Computer-Assisted Problem Solving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*, 99-112.

Hegedus, S., & Kaput, J. (2007). *Lessons from SimCalc: What research says* (Research Note 6). Dallas, TX: Texas Instruments.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 3-25.

Heid, M. K., Sheets, C., Matras M,. A., & Menasian J,. (1988). *Classroom and computer lab interaction in a computer-intensive algebra curriculum*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.

Heid, M. K., Thomas, M. & Zbiek, R. (2013). How Might Computer Algebra Systems Change the Role of Algebra in the School Curriculum? In M. A. (Ken) Clements et al. (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education*, Springer International Handbooks of Education 27, pp. 597-641. DOI 10.1007/978-1-4614-4684-2_20.

Hillel, J., Lee, L., Laborde, C. & Linchevski, L. (1992). Basic functions through the lens of computer algebra systems. *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 119-158.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and its Applications,* vol. 7 March. Article ID1448 Retrieved 6, January, 2012, from http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study*. New ICMI Study Series. New

York: Springer.

Infante, F. y Puig, L. (2013). Modelos emergentes en un primer curso de Economía y Administración. *Modelling in science education and learning*, 6 (2), 235-248.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments*. Doctoral Disertation. University of Nottingham.

Janvier, C. (198la). Difficulties related to the concept of variables presented graphically. In C. Comiti (Ed.), *Proceedings of the fifth international conference of PME* (pp. 189-193). Grenoble, France: IGPME.

Janvier, C. (1981b). Use of situations in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,*12, 113-122.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Juan, M. A. (2012). Modelo plausible vs. Modelo esperable. Un estudio exploratorio de aspectos del proceso de modelización. Trabajo de fin de Máster. València: Universitat de València.

Kaiser, G., Blomhøj, M. & Sriraman, B. (2007). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM*, 38 (2), 82-85

Kaput, J. J. (1987a). Representation and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving.* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate.

Kaput, J. J. (1987b). Towards a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving.* (pp. 159-196). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate.

Kaput, J. J. (1987c). PME XI algebra papers: A representational framework. In J. C. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference.* (p. 354). Montreal, Canada.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra.* (Volume 4 of Research agenda for mathematics education. pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (pp. 515-556). New York, USA: Macmillan.

Karplus, R. (1979). Continuous functions: Students' viewpoints. *European Journal of Science Education*, 1(4), 397-413.

Kemme, S. (1990). Uitleggen van wiskunde. [Explaining mathematics.] Dissertation. Groningen, Netherlands: Rijksuniversiteit Groningen.

Kerslake D,. (1977). The understanding of graphs. *Mathematics in School*, 6(2), 56-63.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra In A. Gutierrez, & P. Boero, (Eds). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future.* (pp. 11-49) Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7, 230-240.

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 500–508.

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: 11-16 (pp. 102-119). London: John Murray.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research,* Vol.60, 1, 1-64.

Lovell, K. (1971). Some aspects of growth of the concept of a function. In M. F. Rosskopf, L. P. Steffe, & S. Taback (Eds.), *Piagetian cognitive development research and mathematical education* (pp.12-33). Washington D,C: National Council of Teachers of Mathematics.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.

Macintyre, T. & Forbes, I. (2002). Algebraic skills and CAS - Could assessment sabotage the potential? *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 9, 29-56.

Malik, M.A. (1980) Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of mathematics education in science and technology,* 11 (4), 489 –92

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. [Didactical problems of elementary algebra.] Wiesbaden, Germany: Vieweg.

Markovits Z, Eylon, B., & Bruckheimer M., (1983). Functions: Linearity unconstrained. In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the seventh international conference of PME* (pp. 271-277). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of

Science.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning,of Mathematics*, 6(2), 18-28.

Marmolejo, E. (2014) *Análisis del aprendizaje del concepto y uso de parámetro*. Tesis Doctoral. Mexico: CINVESTAV.

McDermott, L., Rosenquist, M., & van Zee, E. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Example from kinematics. *American Journal of Physics*, 55(6), 503- 513.

McKenzie, D. L., & Padilla, M. J. (1986). The construction and validation of the Test of Graphing in Science (TOGS). *Journal of Research in Science Teaching*, 23(7), 571-579.

Ministerio de Educación Nacional República de Colombia MEN (2003). *La Revolución Educativa: Estándares básicos de matemáticas y lenguaje, Educación básica y media.* Bogotá: MEN.

Mokros, J. R., & Tinker, R. F. (1986). *The impact of microcomputer-based labs on children's ability to interpret graphs*. Unpublished manuscript Technical Education Research Centers and Harvard University, Cambridge, M A.

Monzó, O. y Puig, L. (2007). Modelización con la Class Pad 300, 1ª parte. *Veintidós Séptimos*, 24, 26-29.

Monzó, O. y Puig, L. (2008). Modelización con calculadoras gráficas. *Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas JAEM* (CD3, T05-01). Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Monzó, O. y Puig, L. (2010). Modelización con la Class Pad 300, 2ª parte. *Veintidós Séptimos*, 26, 4-6.

Monzó, O. y Puig, L. (2011). Materials per a l'estudi de famílies de funcions. En M. Contreras, O. Monzó y L. Puig (Eds.). *Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana (I, 167-185).* València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī",

Monzó, O. y Puig, L. (2012). Familias de funciones. En Torralbo, M. y Carrillo, A. (Eds.) *Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas* (103-133). Sevilla: SAEM Thales y División didáctica CASIO-Flamagas.

Monzó, O., Puig, L. y Navarro, M.T. (2015). Un estudio sobre el proceso de modelización, en el entorno informático de las tabletas. *Actas de las XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas JAEM*. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation* *standards for school mathematics*. Reston,VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston,VA: NCTM.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Olive, J., Makar, K., Hoyos, V. & Sträβer, R. (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies, In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, (pp.133-177). Springer: New York.

Ortega, M. (2013). *Un estudi exploratori sobre el procés de modelització amb dades reals en l'entorn informàtic dels iPads*. Treball de fi de màster del màster d'investigació en didàctiques específiques. València: Universitat de València.

Pardo, R. (2014). Salario Mínimo. *Dinero.* p. 25.

Parra, M. (2010) *Análisis y perspectiva del desempleo en los últimos 12 años.* Informe Fedesarrollo. Bogotá: Fedesarrollo.

Pea, R. D. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist*, 20(4), 167-182.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pecharromán, C. (2009). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas*. Tesis Doctoral, España: Universidad de Valladolid.

Philipp, RA. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, 85(7), 557-561.

Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Pierce, R., & Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*, 1–20. doi:10.1007/s10758-010-9158-6.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. (1985). Geometric and numerical strategies in students' functional reasoning. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th PME International Conference,* 1, 413–418.

Preece, J. (1983). Graphs are not straight forward. In T. R. G. Green & S. J. Payne (Eds.), *The psychology of computer use: A European perspective* (pp. 41-56).

London: Academic Press.

Presidencia de la República de Colombia (1989). *Decreto 3019 de 1989*, Bogotá: Diario oficial.

Presmeg, N. C. (1985). *The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation*, Unpublished Ph.D. dissertation, University of Cambridge.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaría* (pp. 61–94). Barcelona: Horsori; ICE.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En Bolea, P.; González, Mª. J. y Moreno, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática 10. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126) Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Puig, L. (2015). Modelización con datos reales. *Actas de las XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas JAEM*. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Puig, L. y Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo y Mª J. Peris, (Eds.) *El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana* (pp. 142-158). Castellón: SEMCV.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.) *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35) México: Trillas.

Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (Eds.). (1993). *Integrating research on the graphical representation of function*. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of a variable. *Mathematics Teacher*, 74(6), 418-420.

Santamaria, F. I. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda.* Tesis de Maestría. Neuquén, Argentina: Universidad Nacional del Comahue.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press

Socas, M. (1999). Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III SEIEM* (pp. 261-282).Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th conference of the international group for the PME*, Vol 4 (pp. 190-197). Helsinki/Lahti: University of Helsinki/Lahti Research and Training Centre.

Stein, M. K., & Leinhardt, G. (1989). *Interpreting graphs: An analysis of early performance and reasoning.* Unpublished manuscript, University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center, PA.

Sträβer, R. (2001). Cabri-géomètre: does a dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning? *International Journal for Computers in Mathematics Learning*. 6(3), 319-333.

Swan, M. (1982). The teaching of functions and graphs. In G. Van Barnveld & H. Krabbendam (Eds.), *Conference on functions* (Report 1, pp. 151-164). Enschede, The Netherlands: Foundation for Curriculum Development.

Tall, D. (1989). Concepts images, generic organizers, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics.* 9(3) 37-42.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction, the Wiskobas Project*. Netherlands Dordrecht: Reidel.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281-307.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A.F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12, 1988 Yearbook of the NCTM* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education in the Netherlands, en J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching. Innovative Approaches for the Primary Classroom* (pp. 49–63). Buckingham: Open University Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002): Realistic Mathematics Education as Work in Progress. En: Common sense in Mathematics education de Fou-Lai Lin (Eds.), *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*. (pp. 1- 43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 9–35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2010). Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! En L.

Sparrow, B. Kissane, & C. Hurts, (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 2–25). Fremantle: MERGA.

Vergnaud, G. (1987). About constructivism, a reaction to Hermine Sinclair's and Jeremy Kilpatrick's papers. In J. Bergerson, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the international group for the PME*, Vol 1 (pp. 73-80). Montreal, Canada: University of Montreal.

Verillon, P. and Rabardel, P. (1995). Cognition and artifact: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity, *European Journal of Psychology in Education* 9(3), 77–101.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 107-118.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher,* 76, 474-485.

Willoughby, S. S., Bereiter, C., Hilton, P., & Rubinstein, J. H. (1981). *Real math* (Teacher's Guide Level 5). LaSalle, IL: Open Court.

Yerushalmy, M. (1988). *Formation of algebraic concepts using multiple representation software environments*. Unpublished manuscript, University of Haifa, Israel.

Yerushalmy, M. (1989). The use of graphs as visual interactive feedback while carrying out algebraic transformations *Proceedings of the 13th international conference of PME* (Vol. 3, pp. 252-260). Paris: PME.

Yerushalmy, M., & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 41–68). Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Zaslavsky, O. (1987). *Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions*. Unpublished doctoral dissertation, Technion, Haifa, Israel.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 119–140.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.

1169–1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Zbiek, R. M., & Hollebrands, K. (2008). A research-informed view of the process of incorporating mathematics technology into classroom practice by inservice and prospective teachers. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics* (Research syntheses, Vol. 1, pp. 287–344). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

(IX)

POST TEST

Nombre: Alvaro Bermúdez Salamanca Grupo: DAO 1N Fecha: 24/11/14

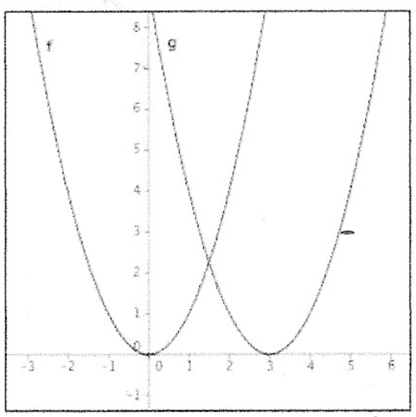
IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

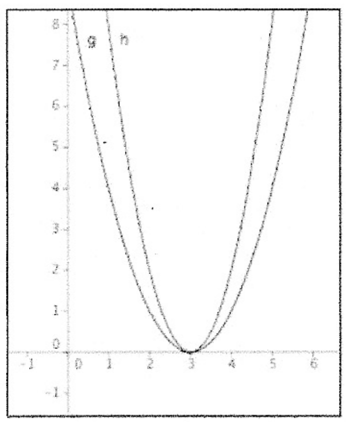
PRIMERA PARTE
Resuelva

1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

Cuando x es mas grande y tiende a disminuir hacia la izquierda.

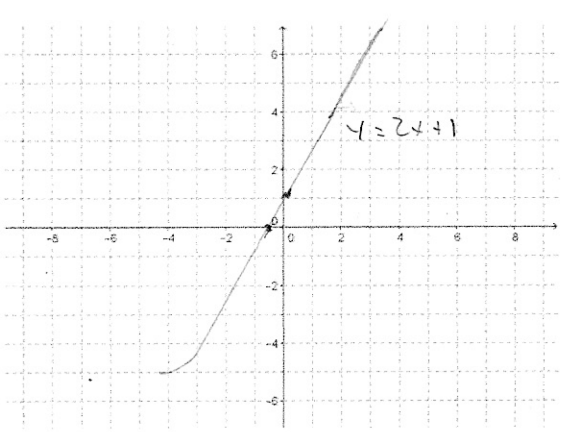
2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.

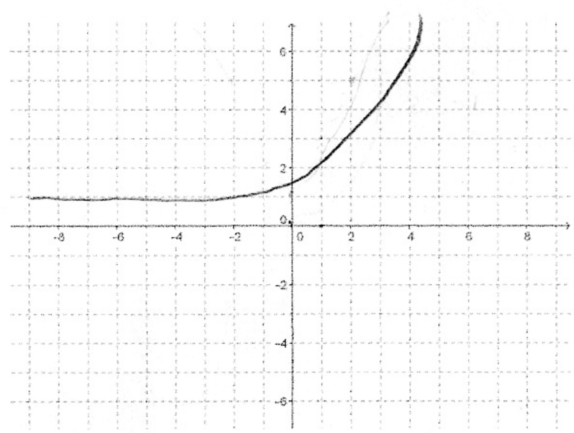




$g(x) = (x-3)^2$ $h(x) = 3(x-3)^2$

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,





$y = x^2 + 3$

13

POST TEST

Nombre: Ana lorena Mora Gonzalez Grupo: DAC1N Fecha: 24/Nov/14

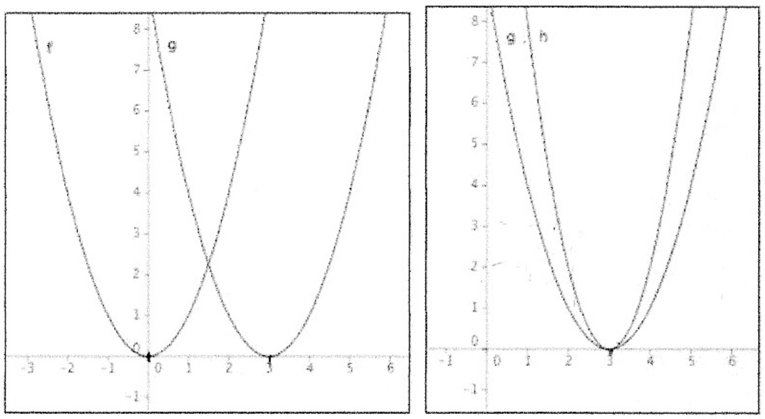
IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva

1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

✓ Al ser x más grande o mayor , y disminuye su valor

2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.



✓ Para hallar g(x) utilizamos los puntos de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ teniendo encuenta los puntos que hay en la grafica, donde el vertice de O y asi quede en el punto de simetria este sobre x

$g(x) = x^2 - 6x + 9$

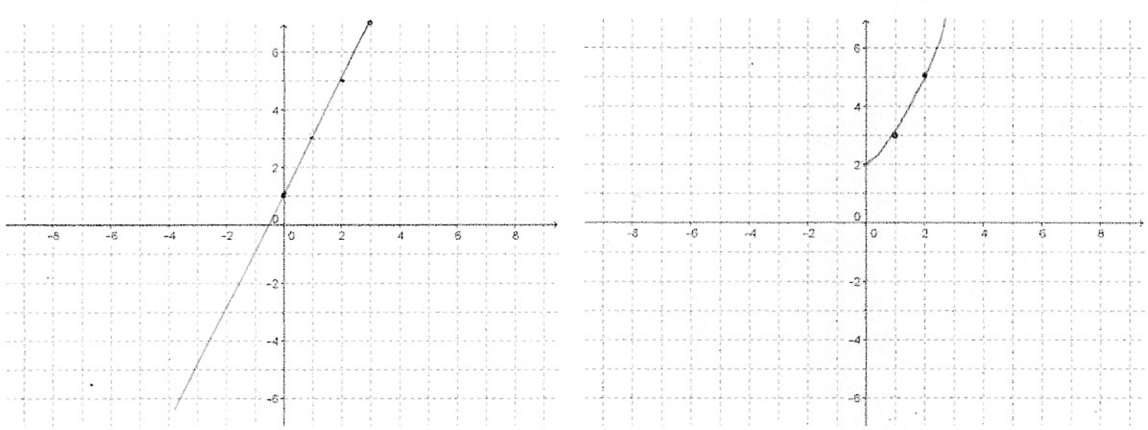
✓✗ Para hallar la abertura de h(x) esta cambia dependiendo del valor que tenga "a" en la función

$h(x) = 3(x-3)^2$

$h(x) = (3x-9)^2$

→ Escanear

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,



✓

✓✗

falta la parte de la asintota

$y = 2(3) + 1$
$= 6 + 1$
$= 7$

$y = 2(1) + 1$
$y = 2 + 1$
$y = 3$

$f(x) = 2^{(1)} + 1$
$f(x) = 3$

$f(x) = 2^{(2)} + 1$
$f(x) = 4 + 1$
$f(x) = 5$

11

POST TEST

Nombre: Andrés David Gómez M Grupo: DAO1N Fecha: 24 NOV 2014

IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva
1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

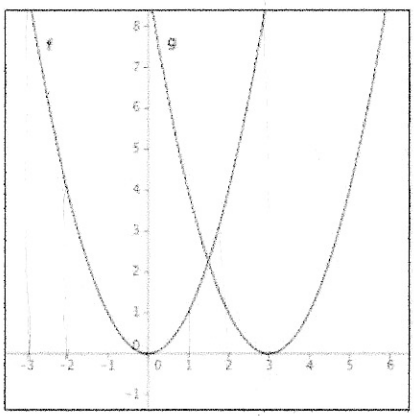
cuando x es más grande, va decreciendo.

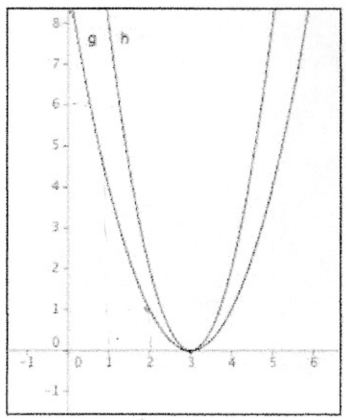
2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.

$f(x) = x^2$

$g(x) = (x-3)^2$

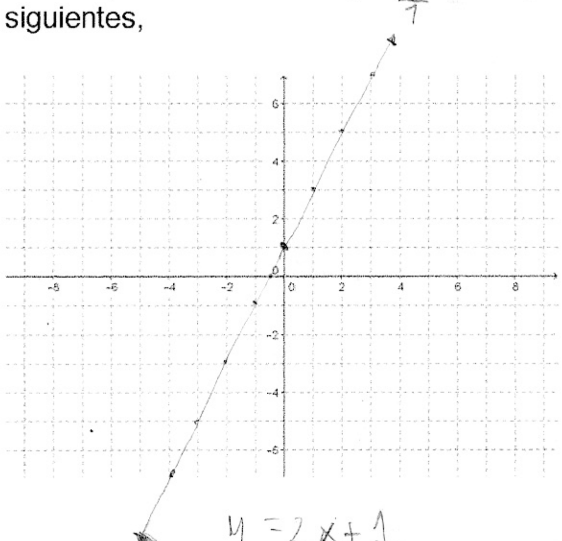
x	y
-2	4
-3	9
1	1
2	4
3	8



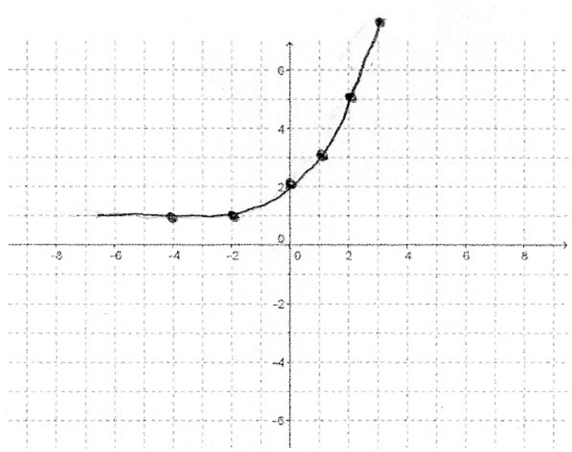


$h(x) = 3(x-3)^2$

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,



$y = 2x + 1$



$f(x) = 2^x + 1$

2

POST TEST

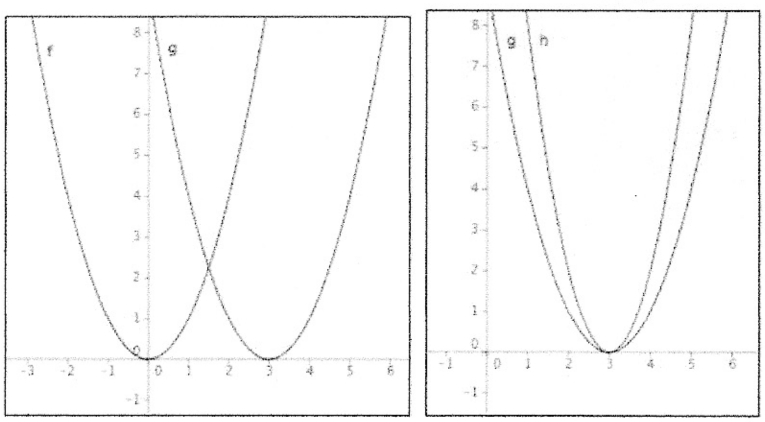
Nombre: Angie Barbosa Castillo Grupo: DAO1N Fecha: 24/11/14.

IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva
1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

Cuando x es más grande, y decrece.

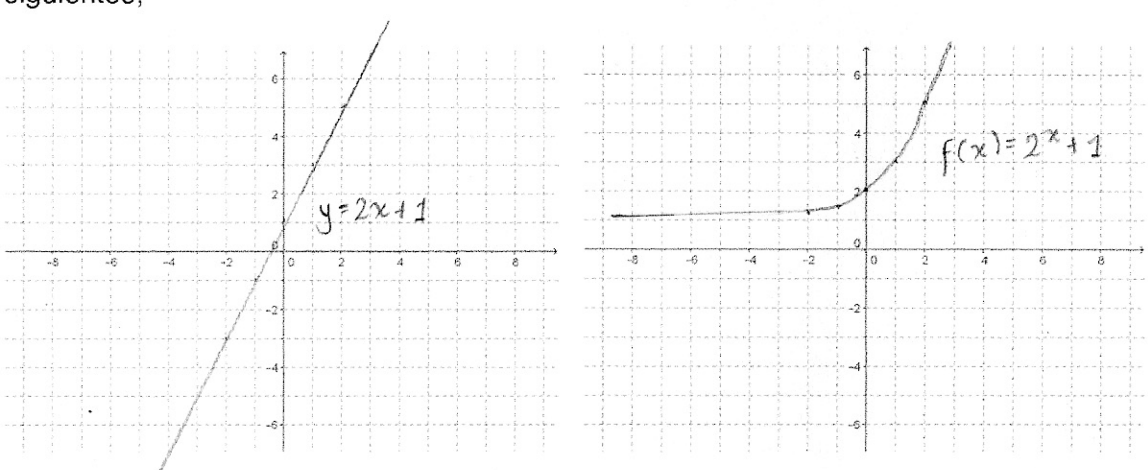
2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.



$g(x) = (x-3)^2$

$h(x) = 3(x-3)^2$

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,



9

POST TEST

Nombre: Jan Carlos Gutierrez A Grupo: DADAN Fecha: 24/11/19

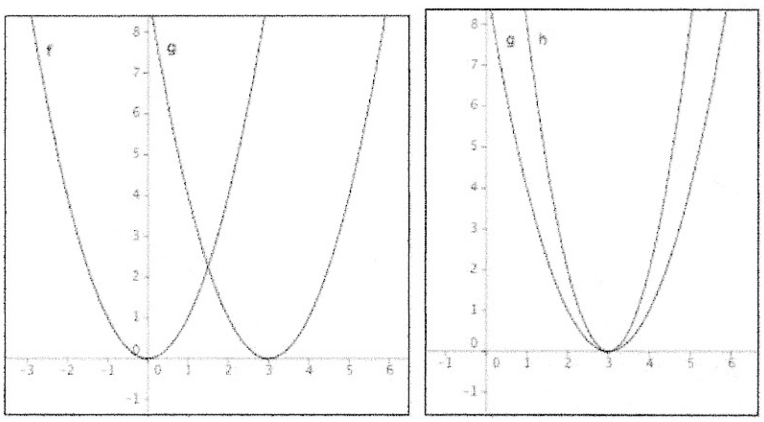
IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva

1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

Cuando X es mas grande, la Grafica tiende a ser negativo, ose desciende.

2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.

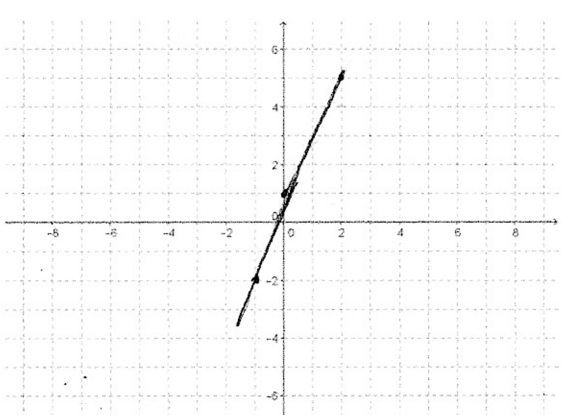


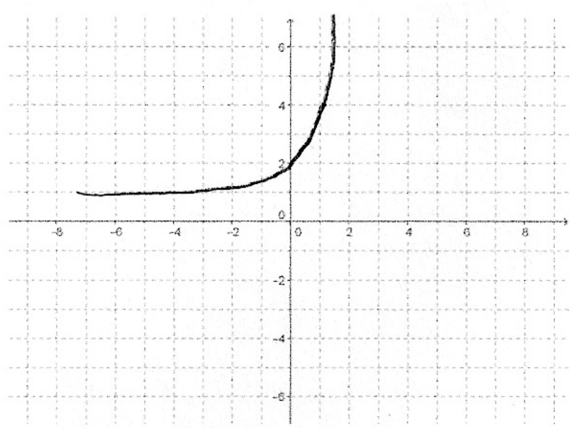
$g(x) = (x-3)^2$

$h(x) = 3(x-3)^2$

ojo otras expres.

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,





6

POST TEST

Nombre: Carol Forero Gonzalez Grupo: DAO1N Fecha: 24-11-2014.

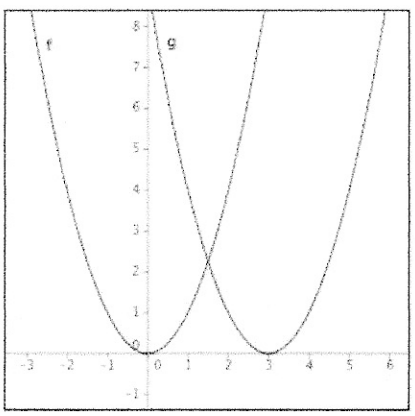
IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

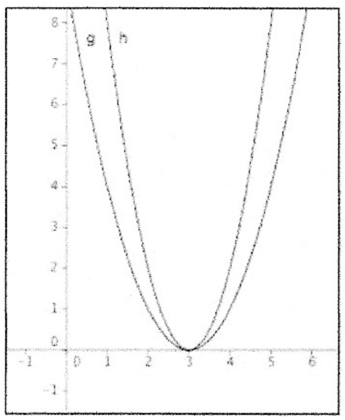
PRIMERA PARTE
Resuelva
1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

Si X va Creciendo o aumentando la y o lo que sucede con y es que se acerca mas a o la linea de una recta y

X

2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x)*. Explique como lo hace.





$f(x) = \cancel{x}2$

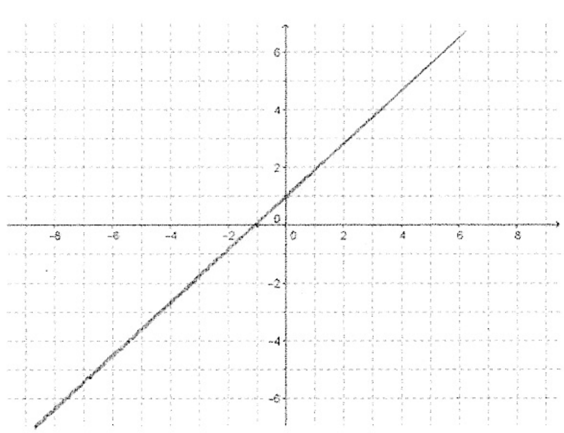
$g(x) = (x-3)^2$ ✓

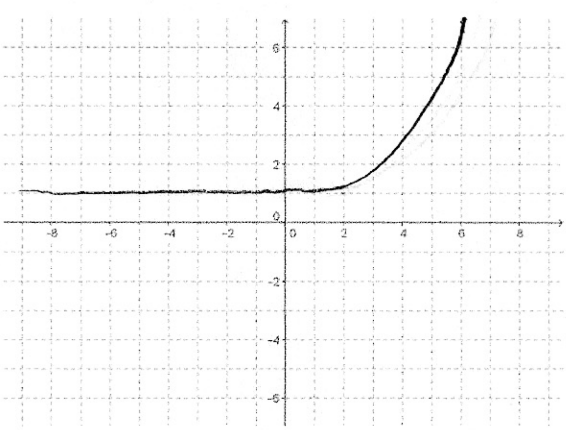
$h(x) = 3(x-2)^2$ ✓

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,

m no

✓





✓

12

POST TEST

Nombre: Daniel Felipe Marda Grupo: DAOIN Fecha: 24 Nov.

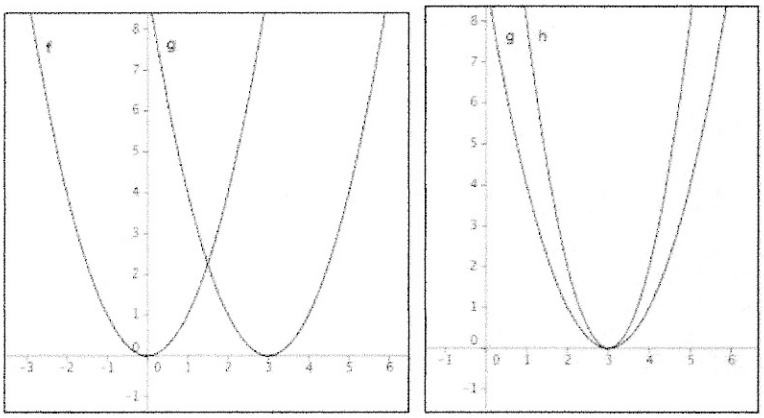
IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva

1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

Al ser mas grande se multiplica y pierde su valor, osea disminuye

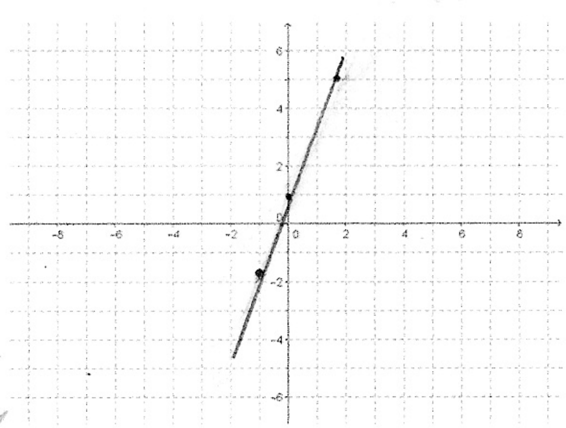
2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.

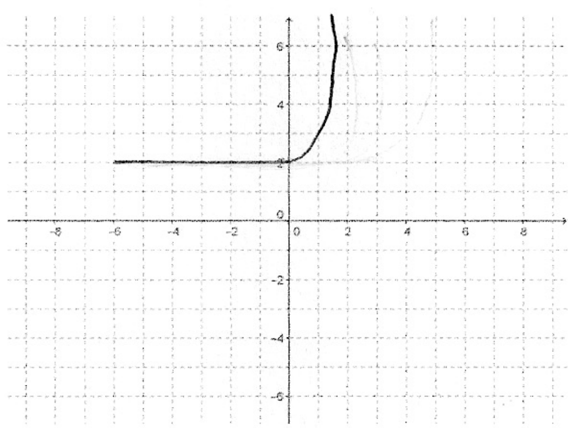


$g(x) = (x-3)^2$

$h(x) = 3(x-3)^2$

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,





bosquejo mal corto

3

POST TEST

Nombre: erica milena barriga T. Grupo: DAO1N Fecha: 24 de noviembre

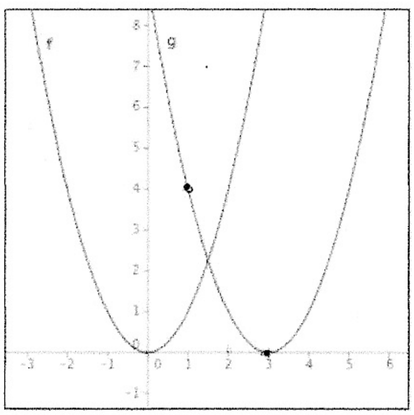
IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

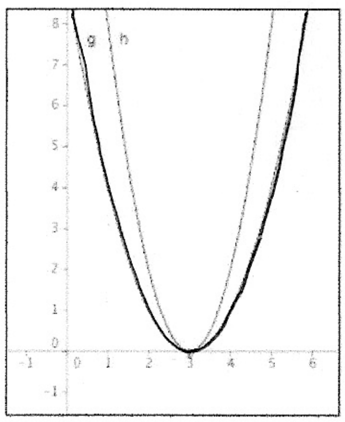
PRIMERA PARTE
Resuelva

1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

Va decreciendo.

2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.

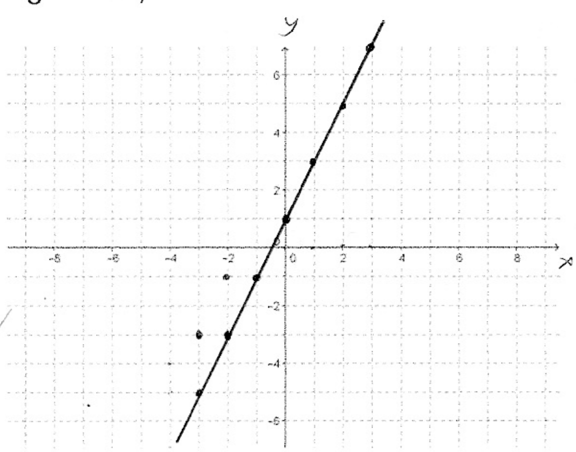


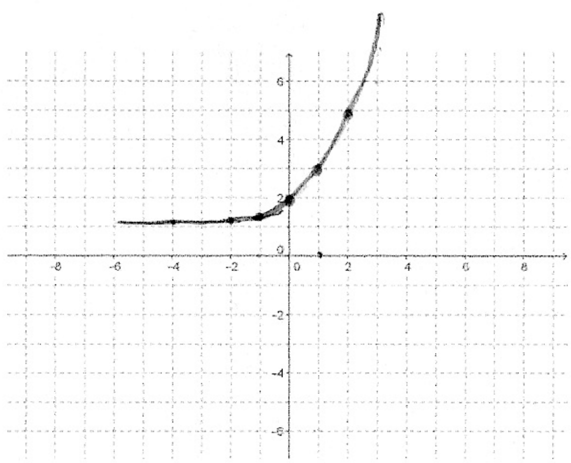


$g(x) = (x-3)^2$

$h(x) = 3(x-3)^2$

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,





17

POST TEST

Nombre: Juan Sebastian Daiba Grupo: DA01N Fecha: 24 de nov. 2014

IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

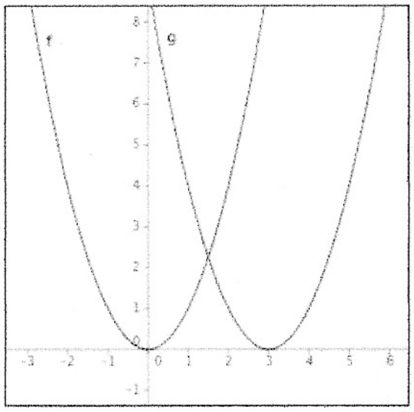
PRIMERA PARTE
Resuelva
1. En la relación $\boldsymbol{y} = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

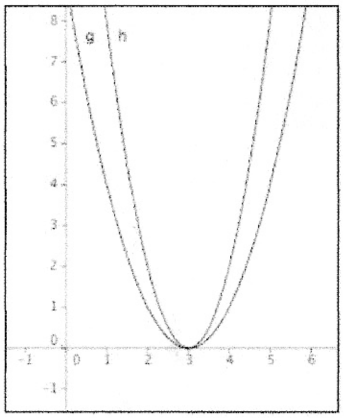
✓ Cuando x es cada vez más grande, va decreciendo.

2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.

$g(x) = (x-3)^2$

✓





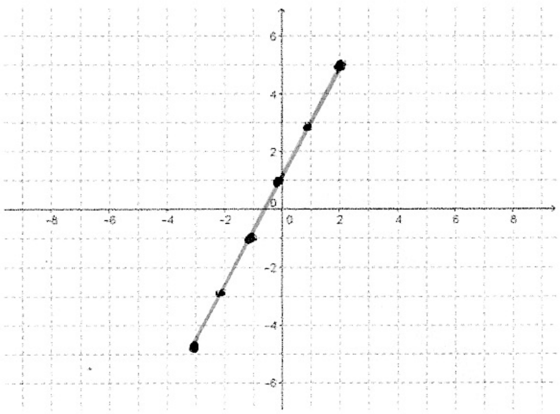
✓✗

$h(x) = 3(x-3)^2$

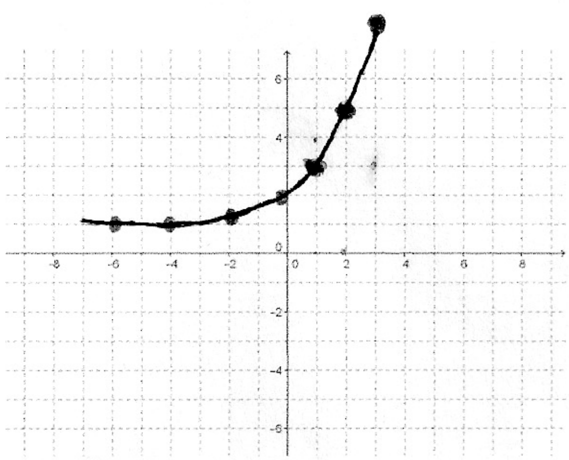
3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,

✓

✓



$Y = 2x + 1$



$f(x) = 2^x + 1$

16

POST TEST

Nombre: Laura Daniela Ortiz Osorio Grupo: DAO 1N Fecha: 24 /11 /2014

IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

m

Resuelva

1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

✓ Si la variable x aumenta su valor, y disminuye como consecuencia.

$y = 10 - 4x \rightarrow 10 - 4(2) = 2$

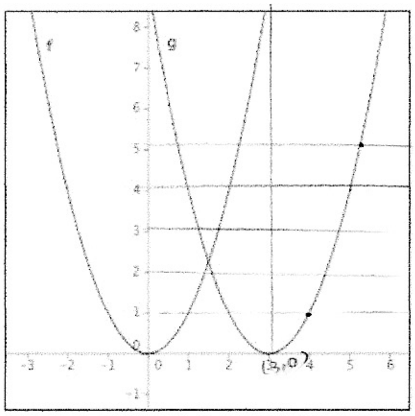
2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, $g(x)$ y $h(x)$. Explique como lo hace.

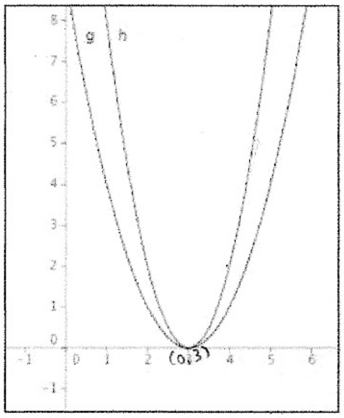
$g(x) = (x-3)^2$

$h(x) = 3(x-3)^2$

✓

✗

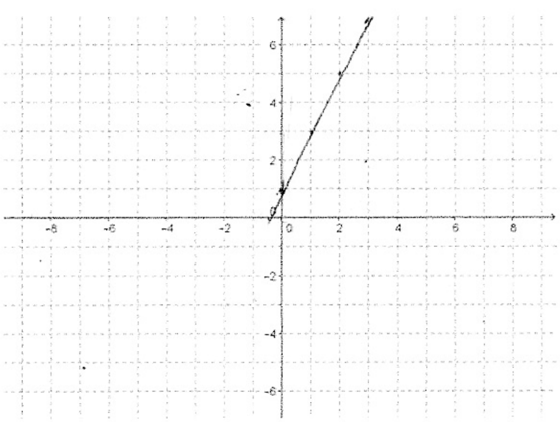


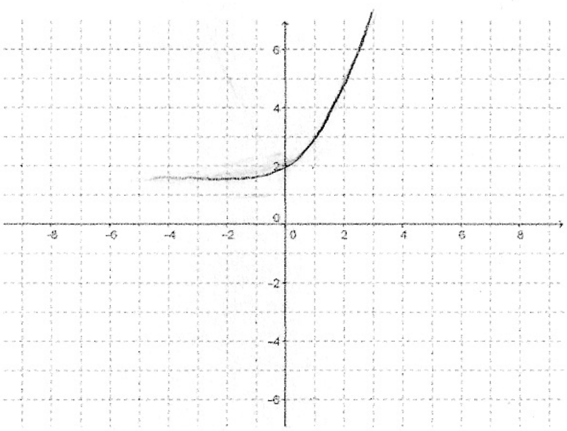


3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,

✓

✓





$f(x) = 2^x + 1$

3. $y = 2x + 1$

$0 = 2x + 1$

$-1 = 2x$

$-\frac{1}{2} = x$

$(-1/2, 0)$

$y = 2x + 1$

$y = 2(0) + 1$

$y = 1$

$(0, 1)$

8

POST TEST

Nombre: Luisa Fernanda Galindo Barrera Grupo: DAD1N Fecha: 24-Nov-14.

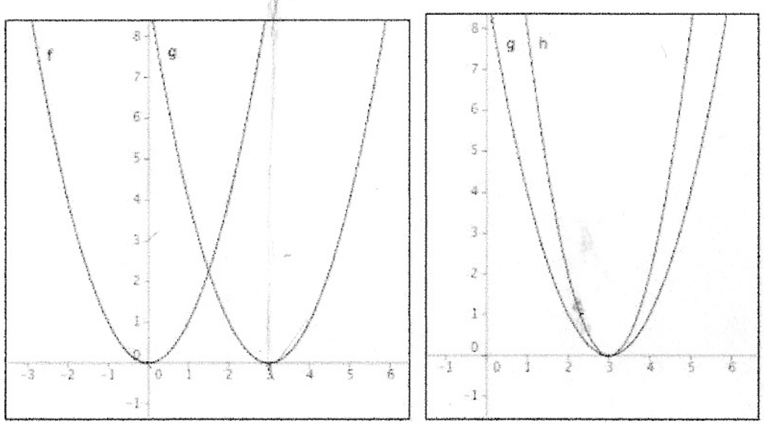
IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva

1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

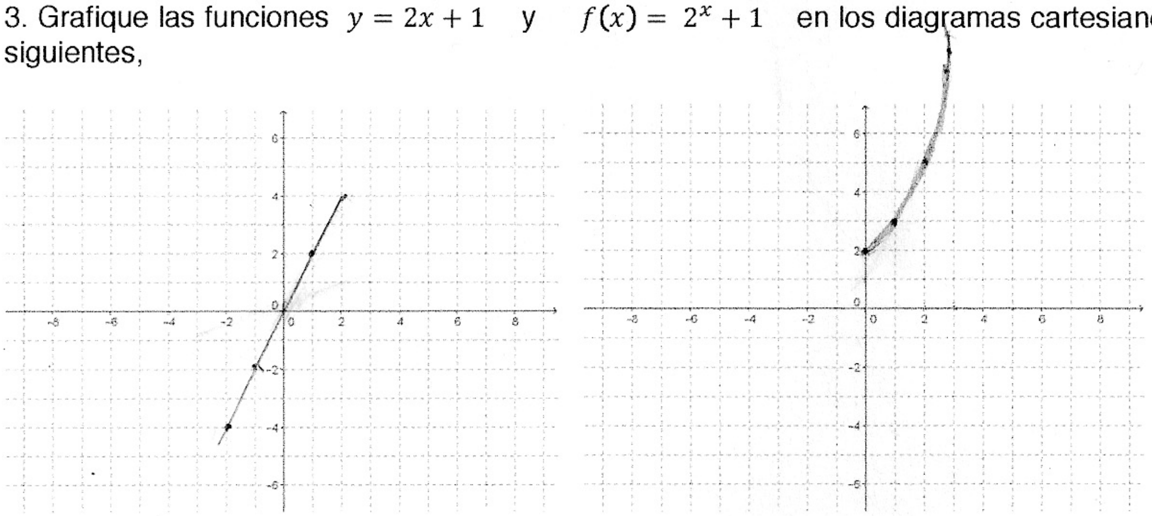
Cada vez que la variable x aumente, la variable y disminuye, siendo inversamente proporcional

2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.



$f(x) = x^2$.
$g(x) = (x-3)^2$
$h(x) = 3(x-3)^2$

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,



falta parte asintota

$y = 2(0)+1$
$y = 1$
$(0,1)$

$y = 2x+1$
$0 = 2x+1$ $(0{,}5, 0)$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$
$x = 0{,}5$

$f(x) = 2^x + 1$
$f(0) = 2^0 + 1 = 2$.
$f(1) = 2^1 + 1 = 3$
$f(2) = 2^2 + 1 = 5$.

15

POST TEST

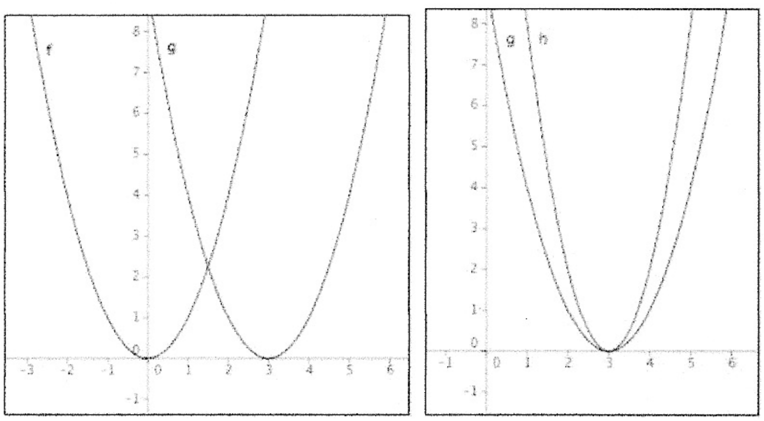
Nombre: Luisa Fernanda Nieto Bernal. Grupo: DA01N Fecha: Noviembre - 24 - 2014.

IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva
1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

Si x va creciendo o aumentando la y o lo que sucede con y es que se acerca más a 0 o ~~la~~ línea de una recta y.

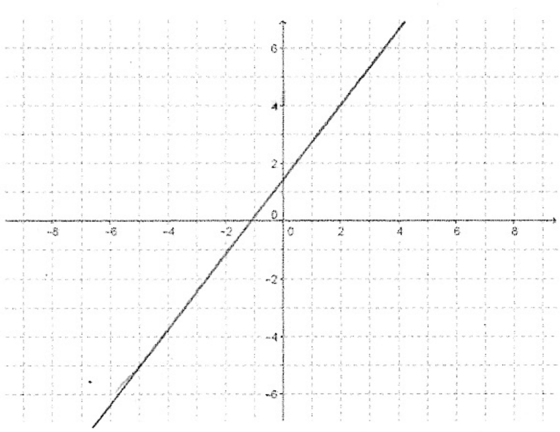
2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.

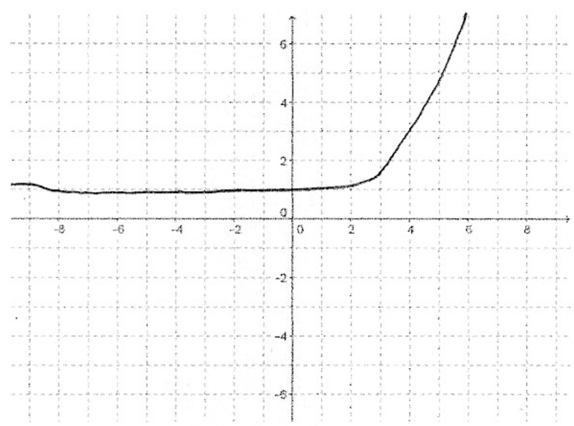


$f(x) = x^2$
$g(x) = (x-3)^2$
$h(x) = 3(x-3)^2$

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,

no m
no b





19

POST TEST

Nombre: María Fernanda Zapata Grupo: OAE01N Fecha: 24/11/14

IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

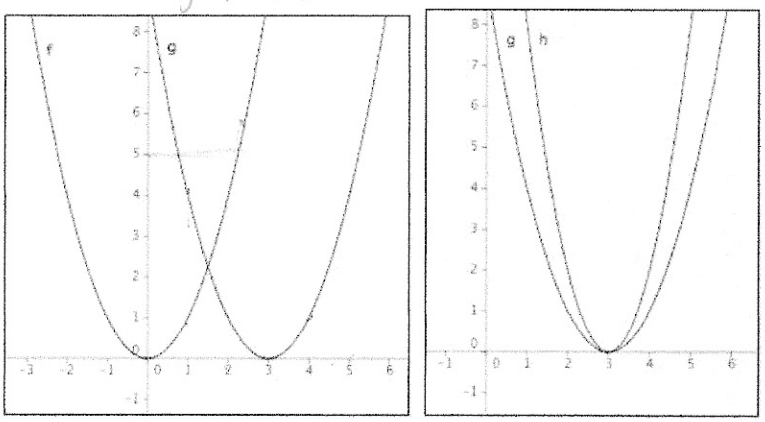
Resuelva

1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

Cuando x es cada vez más grande, y disminuye más, se devuelve más.

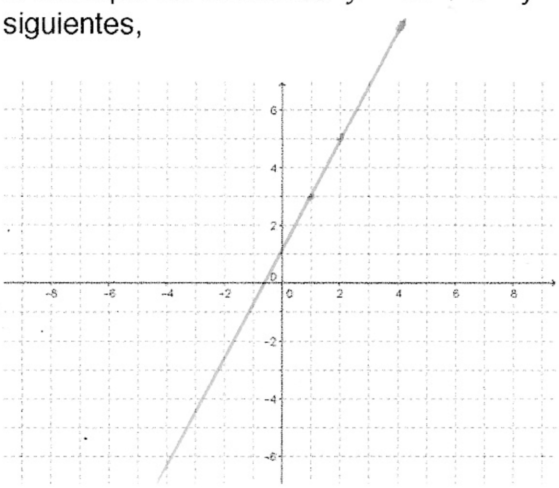
2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.

$g(x) = (x-3)^2$

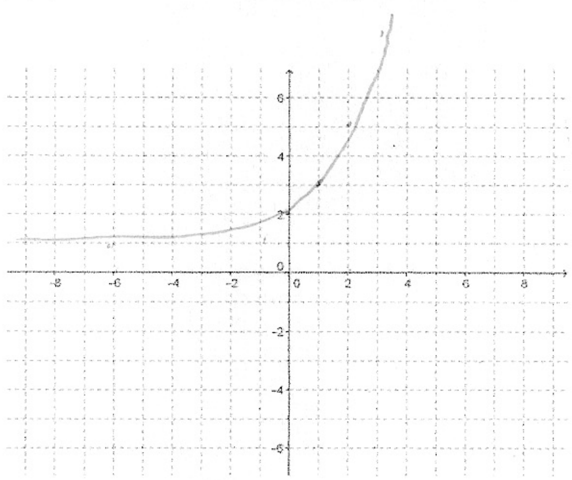


$\rightarrow h(x) = 3(x-3)^2$

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,



$y = 2x + 1$



$f(x) = 2^x + 1$

(10)

POST TEST

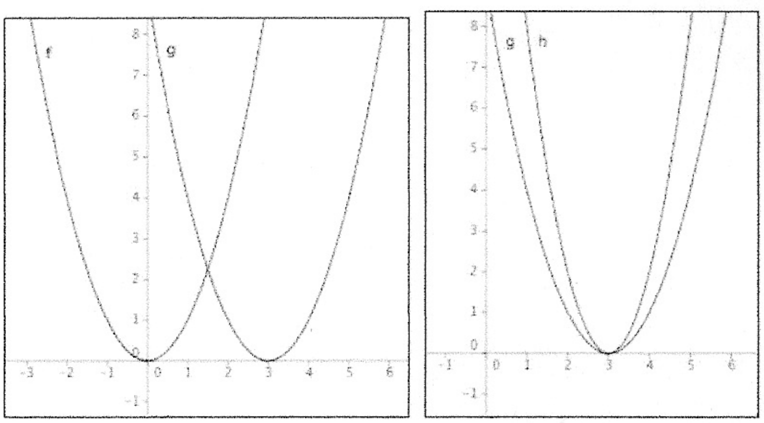
Nombre: Nicolas Gutierrez Z. Grupo: DA01N Fecha: 24/11/14

IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva
1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

✓ A medida que x aumenta Y disminuye haciendo la grafica descendiente

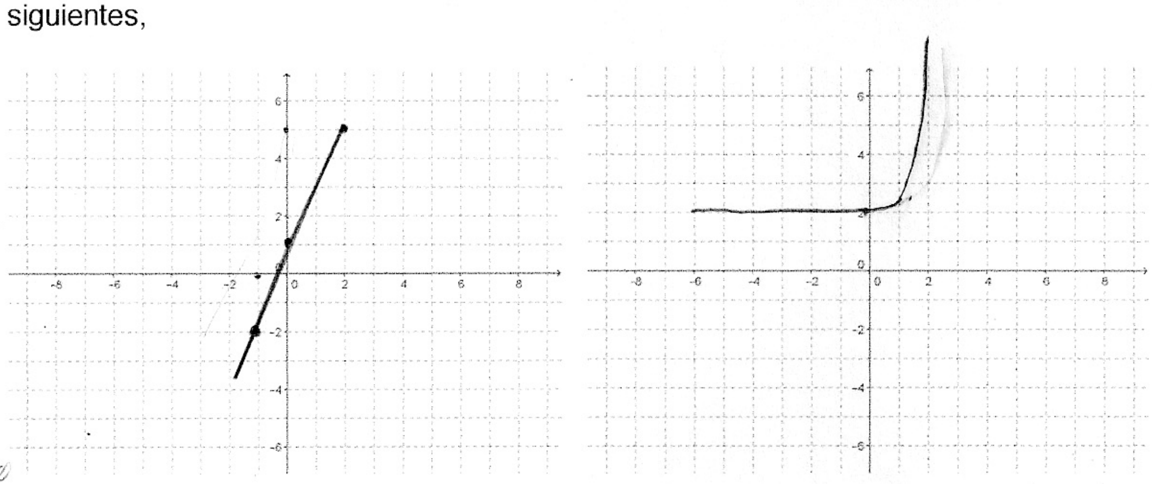
2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x)*. Explique como lo hace.



✓ $g(x) = (x-3)^2$

✗ $h(x) = y = 3(x-3)^2$

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,



✓

✗ bosquejo mal corte

1

POST TEST

Nombre: Paula Andrea Aponte Prieto Grupo:________Fecha: ____________

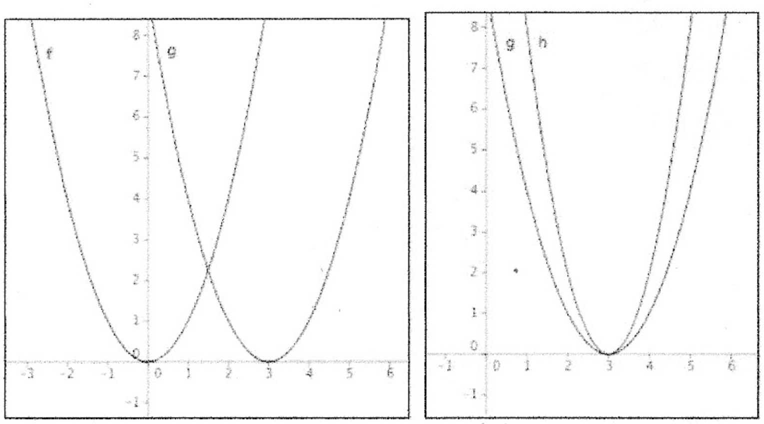
IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE
Resuelva

1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

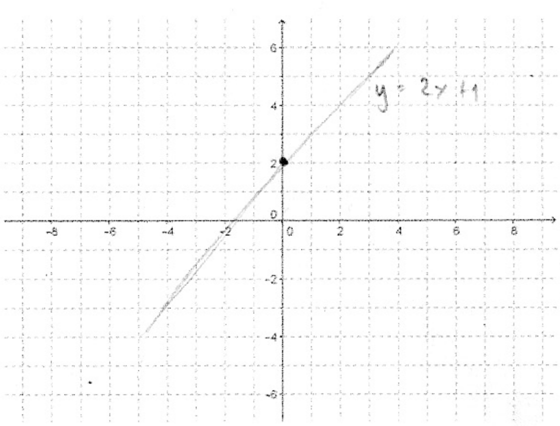
R/- Cuando x es mas grande, y tiende a disminuir. Osea negativo.

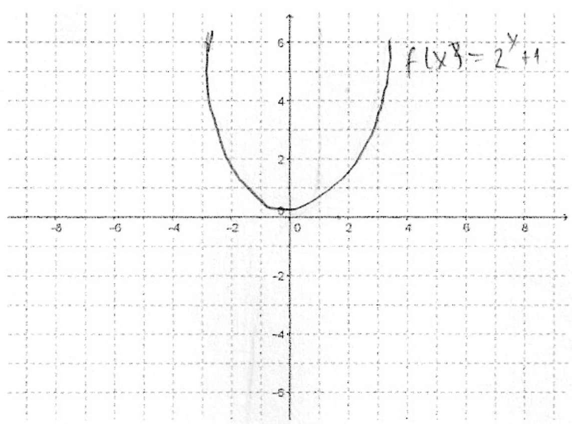
2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.



$g(x) = (x-3)^2$ $h(x) = 3(x-3)^2$.

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,





18

POST TEST

Nombre: Sara Constanza Uribe Rincón Grupo: DA01N Fecha: 24/nov/2014.

IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva

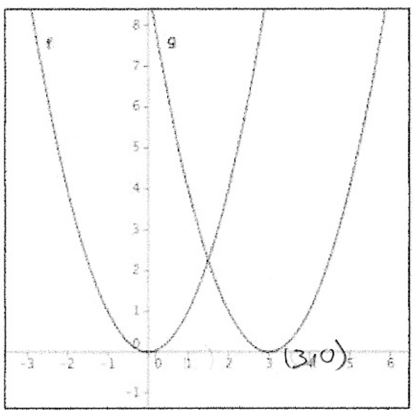
1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

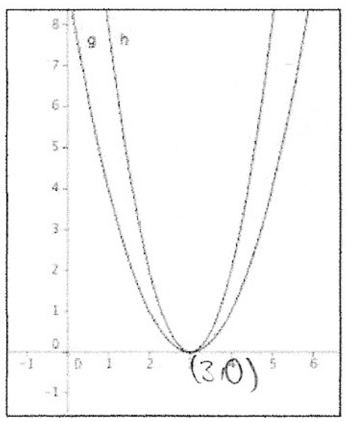
✓ Cuando x es cada vez más grande, y disminuye.

2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x)*. Explique como lo hace.

$g(x) = (x-3)^2$.
$h(x) = 3(x-3)^2$.

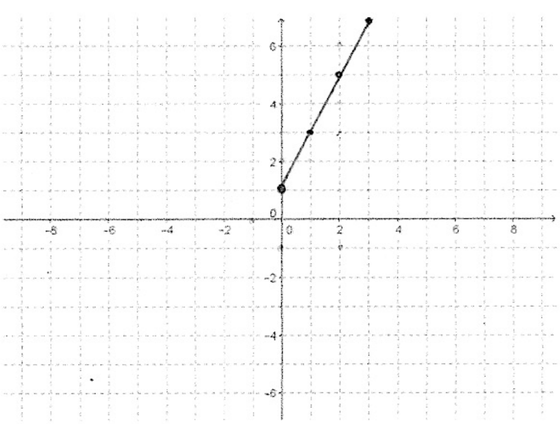
✓ ✓✗ aunque antes había...

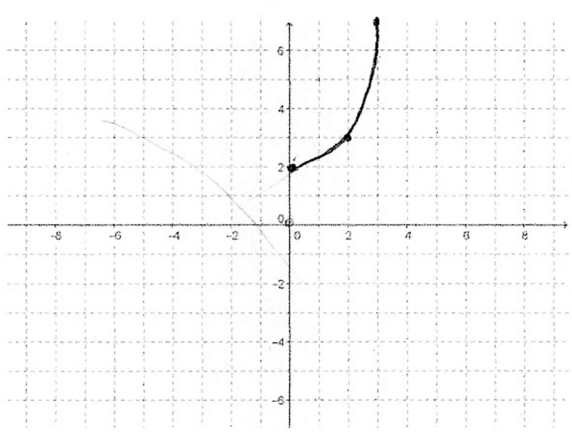




✓ 3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,

$a = 2$ $b = 0$ $c = 1$





✓✗ falta lado asíntota

(5)

POST TEST

Nombre: Yulithe Gycel Cicery Guerrero Grupo: DAOJN Fecha: 24 Nov

IMPORTANTE:
En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
Usted debe intentar resolver todos los problemas.

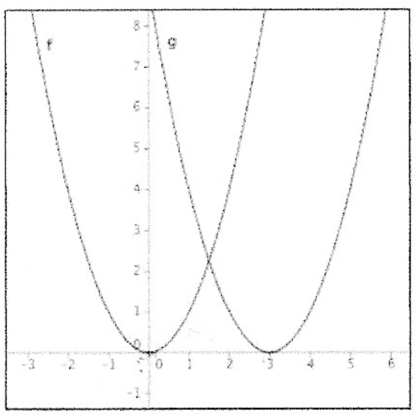
PRIMERA PARTE
Resuelva
1. En la relación $y = 10 - 4x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

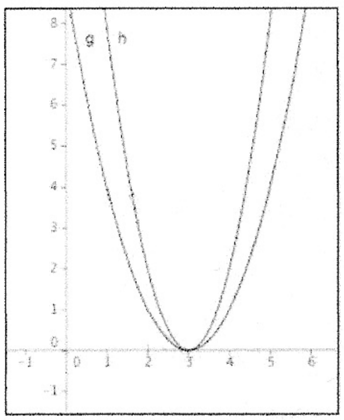
y(1)

✓ A medida que x aumente de valor y va a disminuir

2. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, *g(x) y h(x).* Explique como lo hace.

✓





1. Para hallar g(x) se necesita de la función $f(x)\ ax^2+bx+c$ en el cual, en la gráfica ya se encuentra el vértice que es 3. Para que el punto quede en x, el vértice debe dar cero, dando así
$f(x) = x^2 - 6x + 9$

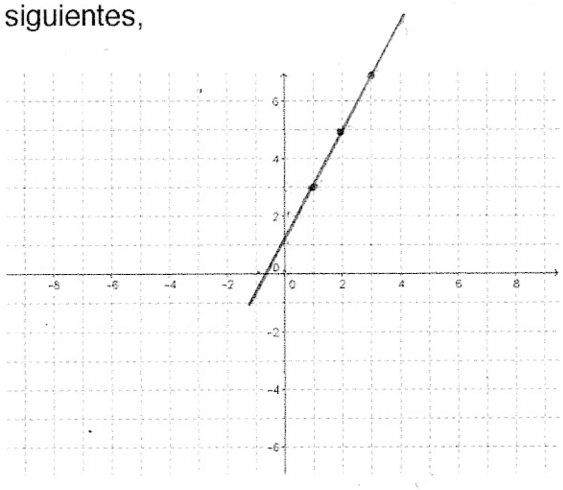
✗

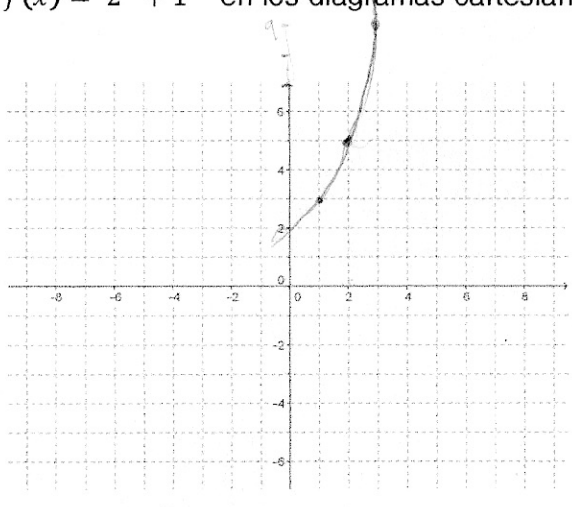
2. Para h(x), la abertura de la parábola afecta dependiendo del valor de a
$f(x) = 3(x-3)^2$
$f(x) = (3x-9)^2$

cambio 2 a 3

3. Grafique las funciones $y = 2x + 1$ y $f(x) = 2^x + 1$ en los diagramas cartesianos siguientes,

✓





✗

falta parte cerca asíntota

$y = 2(1) + 1$
$y = 2 + 1$
$y = 3$

$y = 2(2) + 1$
$y = 4 + 1$
$y = 5$

$2^{(2)} + 1 = 5$

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Alvaro Bermúdez Salamanca Grupo: DA01 Fecha: 24/11/14

IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

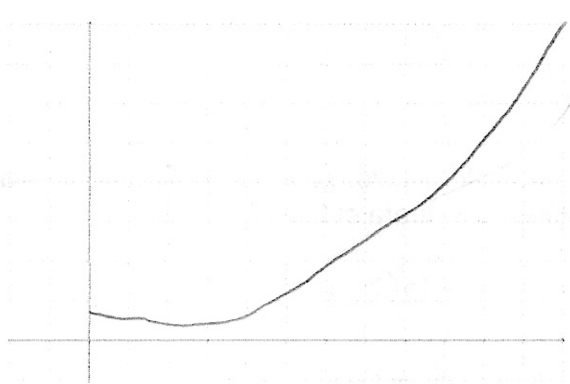
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Funcion exponencial

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
   (PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

   Función Polinomio

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

   $h(x) = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374872.4$

   Tome los puntos, señale la lista y coloque la opción de análisis de regresión.

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

   2005 -> 1766.77

   2015 -> 2764.28

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Ana lorena Mora Gonzalez Grupo: OA01N Fecha: 24 /Nov/14

IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG). En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

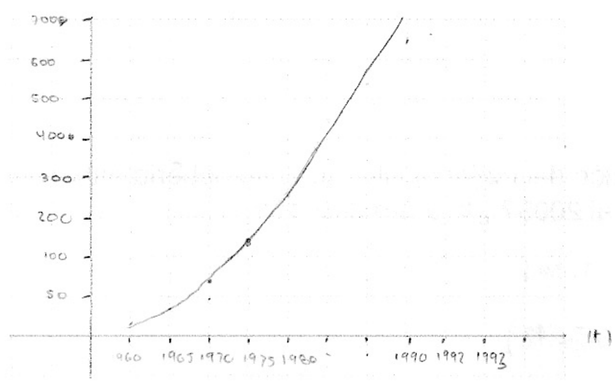
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

La grafica de dicha función se parece a una función exponencial por su curva

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
   (PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

   la grafica se parece a una función cúbica

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

   $y = 1.1322x^2 - 4452.68705x + 4377890.91168$

   Para hallar la función se tiene en cuenta la tabla los años y costos

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

   (2005, 1765.34)

   (2015, 2765.12)

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Andrés David Gómez Grupo: DA01N Fecha: 24 NOV 2014.

IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

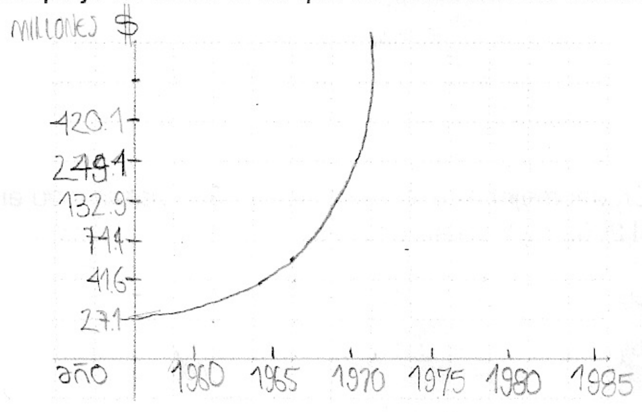
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si es similar a la función exponencial.

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

se parese a la función exponencial

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$y = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374869.94$

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

en 2005 = 1766.7632
en 2015 = 2769.1884

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Angie Barbosa Castillo Grupo: DA01N Fecha: 24/11/14.

IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

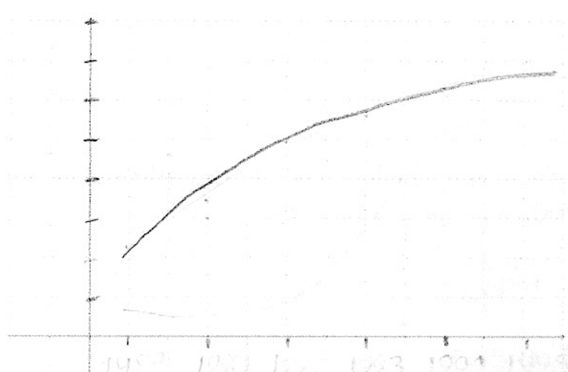
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

La función se parece a la función exponencial.

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos. (PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

A una función exponencial.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$y = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374860.94$.

Mediante el análisis de datos y aproximaciones.

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

2005 → 1766.7632

2015 → 2769.1884

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Carol Forero Gonzalez Grupo:________ Fecha: 24-11-2014

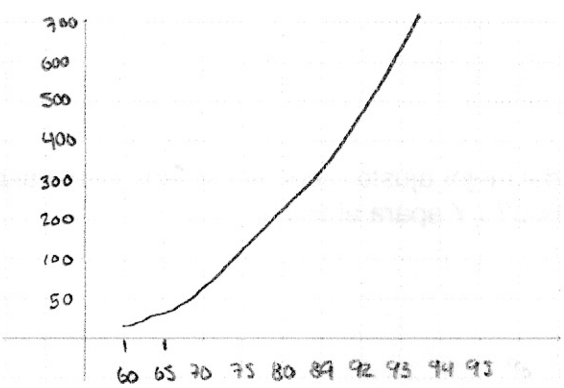
IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

SALUD
Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

La funcion se parece a una función exponencial

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
   (PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

   La funcion que realizamos tiene similitud con un Polinomio.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Daniel Felipe Marta Grupo: DA01N Fecha: 29 Nov.

IMPORTANTE:

Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

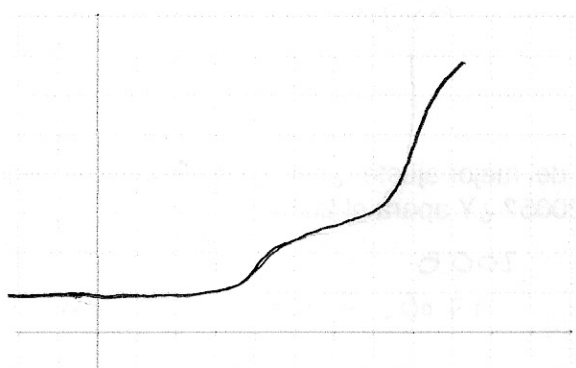
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Una funcion exponencial

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

Ya esta

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Una funcion cubica ó polinomio

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

la funcion que se le acerca es
$f(x) = 0.03\,(x - 1962.07)^3$.
Probando cada uno de los puntos, aumentando y disminuyendo hasta encontrar una que tocara algunos puntos.

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

En el 2005 el costo del sistema de salud seria 1766.737 y en el 2015 2769.1494

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

Ya esta

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: erica milena barriga. Grupo: DA01N Fecha: 24/noviembre/2014.

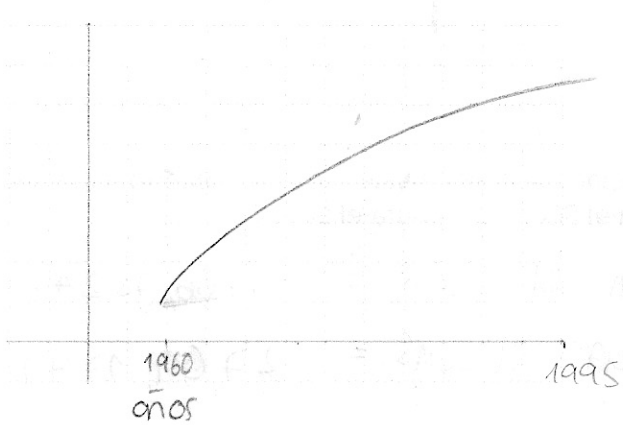
IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

SALUD
Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, se parece a la exponencial.

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

Correo !

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, se parece a la función ~~exponencial~~ de polinomio.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$$y = 1{,}1322\,x^2 - 4451{,}12x + 4374872{,}4$$

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

en el 2005 = 1766,7524.

en el 2015 = 2769,1771.

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

Correo !

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Jon Carlos Gutierrez A. Grupo: DADAN Fecha: 24/11/2014

IMPORTANTE:

Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

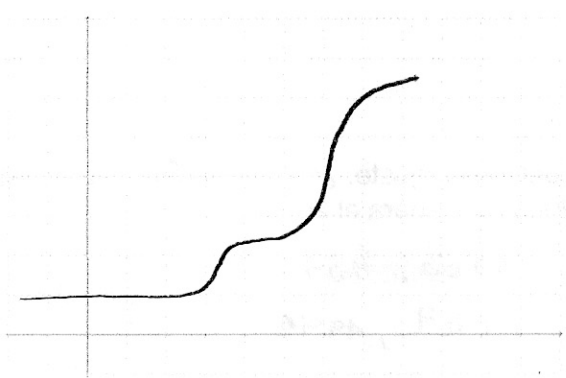
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Una función Exponencial

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
   (PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

Ya esta hecho

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Es una funcion Exponencial

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$F(x) = 0{,}03\,(x - 1962{,}24)^3 + 48{,}08$

Probando con una serie de funciones que habiamos visto y editando la grafica.

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

2005 = 1766, 7371

2015 = 2769, 1494

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Laura Daniela Ortiz O. Grupo: 0A01N Fecha: 24/11/2014

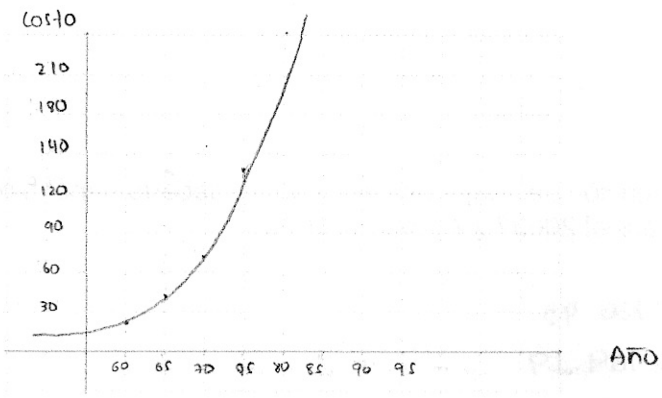
IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

SALUD
Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

x *Año*	y *Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Se parece a la funcion exponencial

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos. (PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Se parece a la funcion Exponencial

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

funcion Exponecial.

$f(x) = (x - 1963.62)^2 - 24.18$

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

2005: 1766.93

2015: 2769.19

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Luisa Fernanda Galindo Barrero Grupo: DAD1N Fecha: 24-11-14

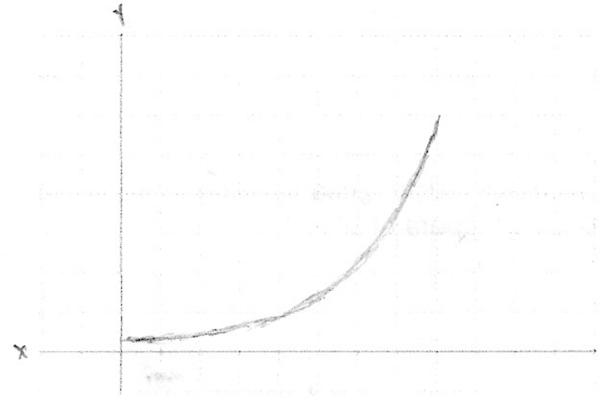
IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

SALUD
Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	Costo ($millones)	Año	Costo ($millones)
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

La función exponencial.

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
Sí, se parece a la función de raiz cúbica.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Luisa Fernanda Nieto Grupo: DAO1N Fecha: 24-11-2014

IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

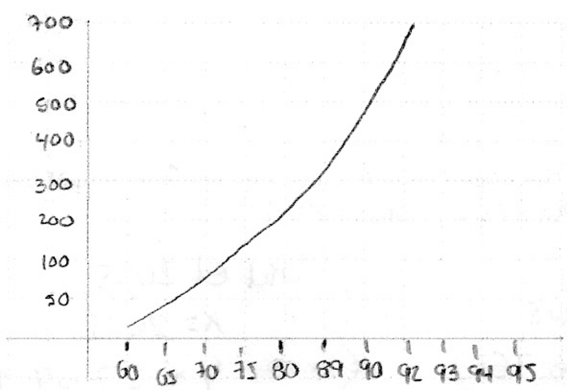
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

la funcion se parece a una funcion exponencial.

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

La función que realizamos tiene similitud con un polinomio.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

- $y = x^2 - 3927.13x + 3855591.05$

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

Para el 2005:
$x = 2005$
$y = 1766.7632$

Para el 2015.
$x = 2015$
$y = 2769.1884.$

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: María Fernanda Zapata Grupo: DAO1N Fecha: 24/11/2014

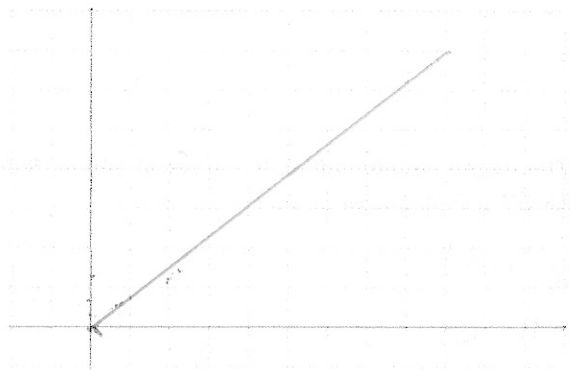
IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

SALUD
Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, se Parece a una Función Lineal

$y = mx + b$

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, a la exponencial

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$g(x) = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374872.4$

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

2005 → 1766.77
2015 → 2769.28

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Nicolas Gutierrez Z. Grupo: DA01N Fecha: 24/11/14

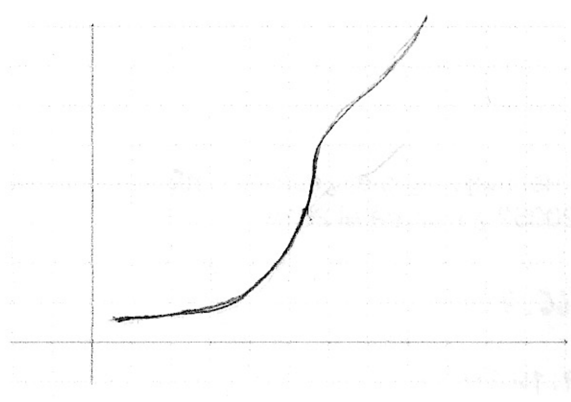
IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

SALUD
Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, la funcion cubica.

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

Imagen

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, la funcion cubica, polinomio.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$f(x) = 0.03(x-1962.73)^3 + 37.57$

Empezando a combinar las formulas de las funciones hasta que se vaya acercando

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

f 0.03

2005 = 1766.737

2015 = 2769.1494

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

Ima

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Paula Andrea Aponte Prieto Grupo: DAON1 Fecha: 24 Nov. 2014.

IMPORTANTE:

Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

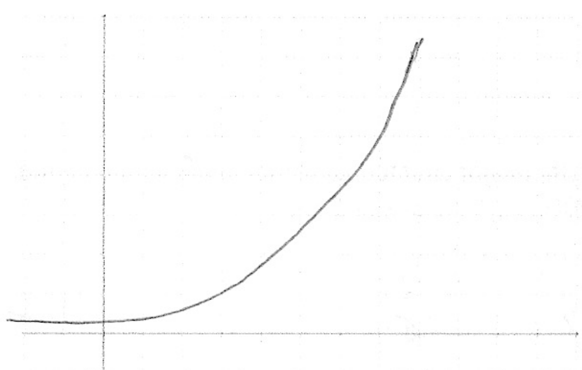
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

R/: funcion Exponencial.

clave)

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
   (PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

   R\- funcion. Exponencial, Polinomio

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

   $g(x) = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374869$

   Tome los puntos señale la linea Salieron en forma polinomial, en el analisis De Regresion.

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

   2005 → 1766077

   2015 → 2764.28.

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Sara Constanza Uribe Grupo: DA01N Fecha: 24 / nov / 2014.

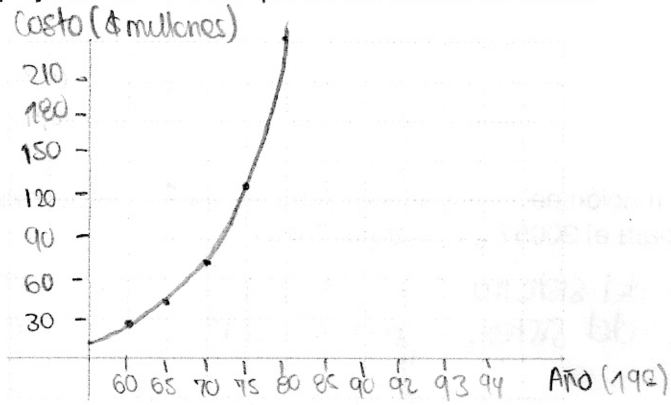
IMPORTANTE:
Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

SALUD
Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

La funcion se parece a la función exponencial.

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Se parece a la funcion cubica.

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$f(x) = (x - 1963.58)^2 + 12{,}53.$

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

El costo del sistema para el 2005 seria 1728.79.
El costo del sistema para el 2015 seria 2656.86.

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Juan Sebastian Daiba A. Grupo: DA07N Fecha: 24 nov. 2014

IMPORTANTE:

Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

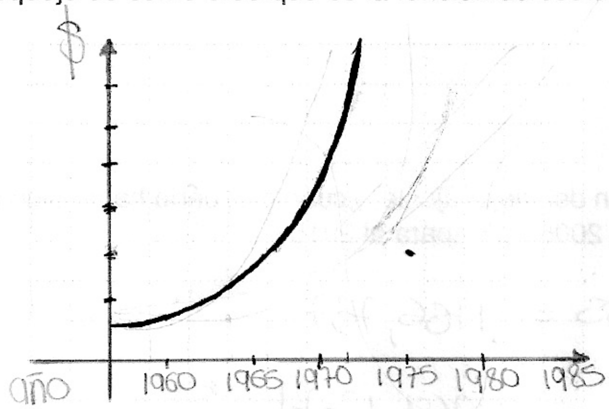
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Sí, se parece a la función exponencial, es muy Similar

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Sí, se parece a la función ~~exponencial~~ polinomica ó exponencial

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

En este caso tomaré la polinomica.

$g(x) = 1.13x^2 - 4451.12x + 4374872.48$

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

en el 2005 = 1766,737

en el 2015 = 2769,1771

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

POST TEST SEGUNDA PARTE

Nombre: Yolithe Yolithe Cicery Grupo: DAO3N Fecha: 24 Nov

IMPORTANTE:

Esta parte es para resolver con ayuda de GeoGebra (GG).En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. ***Es importante que usted responda en la hoja de papel y allí también explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.***

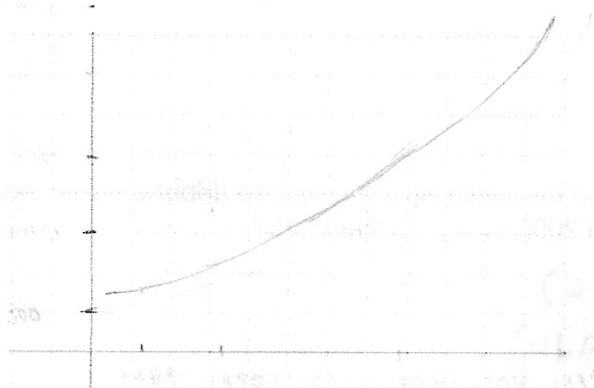
SALUD

Una de las preocupaciones y de las promesas de gobierno del presidente Obama, en Estados Unidos, además de la regularización de los inmigrantes, ha sido el cambio en el sistema de salud. Los siguientes datos muestran los costos de dicho sistema desde 1960 hasta 1995 para algunos años específicos.

Año	*Costo ($millones)*	*Año*	*Costo ($millones)*
1960	27.1	1989	539.9
1965	41.6	1990	697.5
1970	74.4	1992	834.2
1975	132.9	1993	892.1
1980	249.1	1994	937.1
1985	420.1	1995	988.5

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services.

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función de costo.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

La gráfica se parece a la función exponencial ya que esta aumentando el valor del costo

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.
(PEGUE AQUÍ UNA CAPTURA DE PANTALLA CON LA TABLA Y LA GRÁFICA.)

5. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

la gráfica se parece a la función cuadrática

6. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$(x-1963.949)^2+13,68829$

Para realizar la ecuación, se toma en cuenta el año y el costo de 1960. Su forma es de una función polinómica.

7. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el costo del sistema de salud para el 2005? ¿Y apara el 2015?

(2005, 1765.6)

(2015, 2769.14)

8. Haga una captura de pantalla de la gráfica de esta función del mejor ajuste y péguela aquí.

rescanear 4 y 5 ¡?

4

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Alvaro Bermúdez Salamanca Grupo D401N Fecha: 13/08/2014

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a{\cdot}x+b=c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x =$....

   $a \cdot a + b = c \qquad a^2 + b = c$

   b. Exprese b en x, a, c

   $a \cdot x + x = ax + x = c$

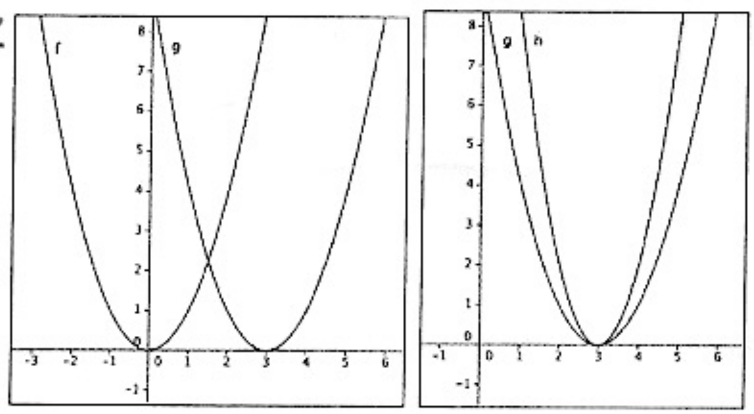
2. En la relación $y{=}5{-}2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

   Y empieza a decrecer

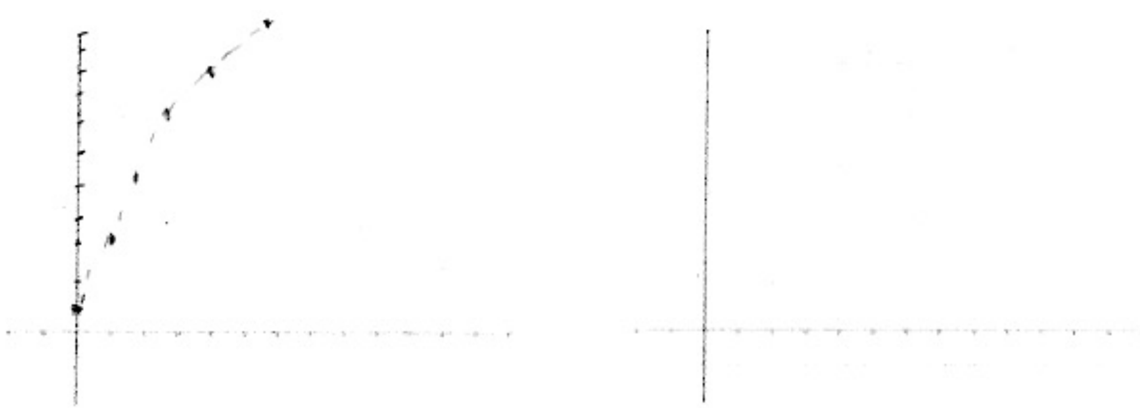
3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

$g(x) = x^2 + 2$

$h(x) = x^2 + 4$



4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y{=}2x{+}1$



x	y
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

X

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

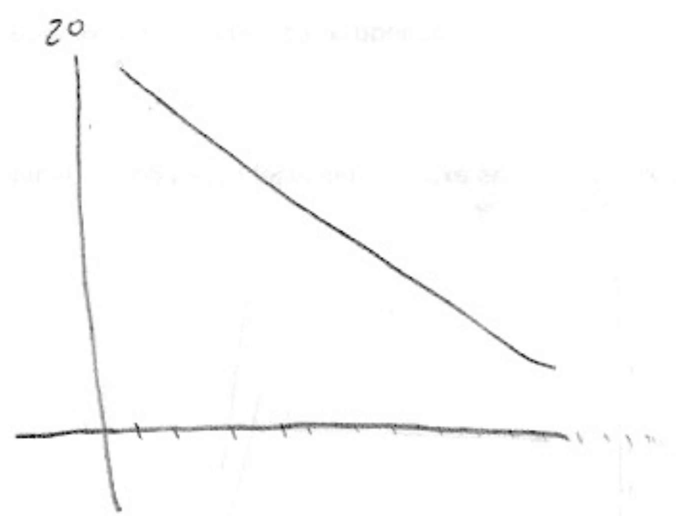
b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

No abod

c. Suponga que la entrada aún es del U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es del U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así? $ 4

a)

X



Escanor
3 y 5c

11

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Andrés David Gómez Grupo:______ Fecha: —○—○—○—

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a \cdot x + b = c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = ...$

✓

$$x = \frac{c-b}{a}$$

$a \cdot x + b = c$

$x = \frac{c-b}{a}$

   b. Exprese b en x, a, c

✓

$$b = c - a \cdot x$$

$a \cdot x + b = c$

$b = \frac{c-a}{x}$

2. En la relación $y = 5 - 2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

X

Aumenta porque y debe ser igual al resultado de la expresion $5 - 2x$

$y = 5 - 2x$

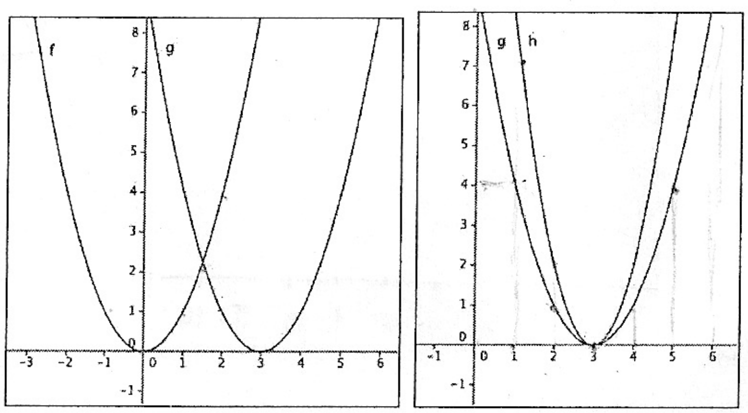
3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, $g(x)$ y $h(x)$. Explique como lo hace.

X

$g(x) = -1$

X

$y = 3x$



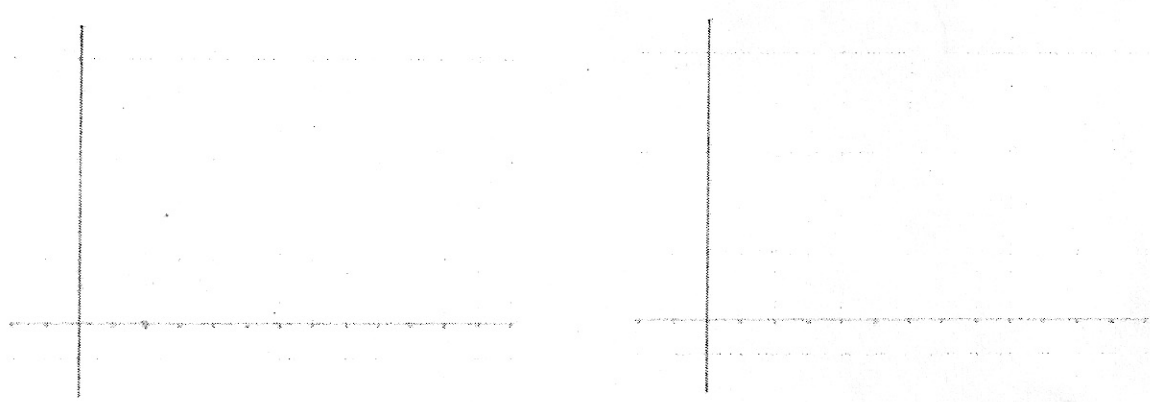
x	y	x	y
1	1	1	4
2	2	2	1
3	0	3	0
4	2	4	1
5	1	5	4

$x + 3 - 1$

$x - (-3)$

4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y = 2x + 1$

NA



5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

✓✗ a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

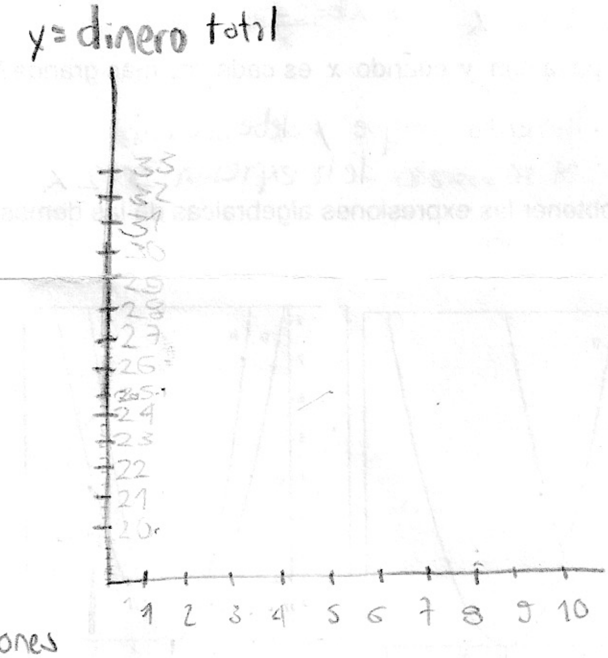
b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

Lo que sucede es que el 20 dejó de ser el primer valor en y.

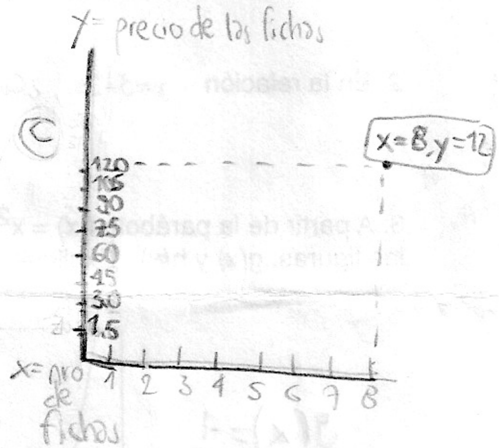
✓

✓ c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

5 a b



c



entrada: 20
atracciones: 8
total: 32

28

cada ficha cuesta 1.5 U$

2

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Angie Barbosa Castillo Grupo: DA01N Fecha: 13/08/14.

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a{\cdot}x+b=c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x =$....

   $x = \frac{c-b}{a}$

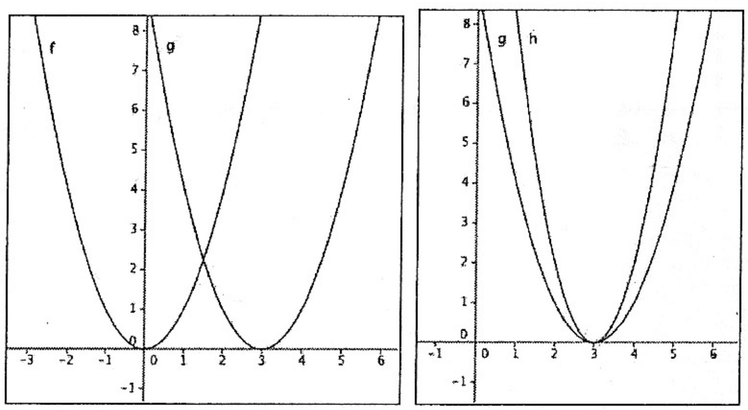
   b. Exprese b en x, a, c

   $b = \frac{c}{a \cdot x}$

2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

   y es menor

3. A partir de la parábola f(x) = x^2, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.



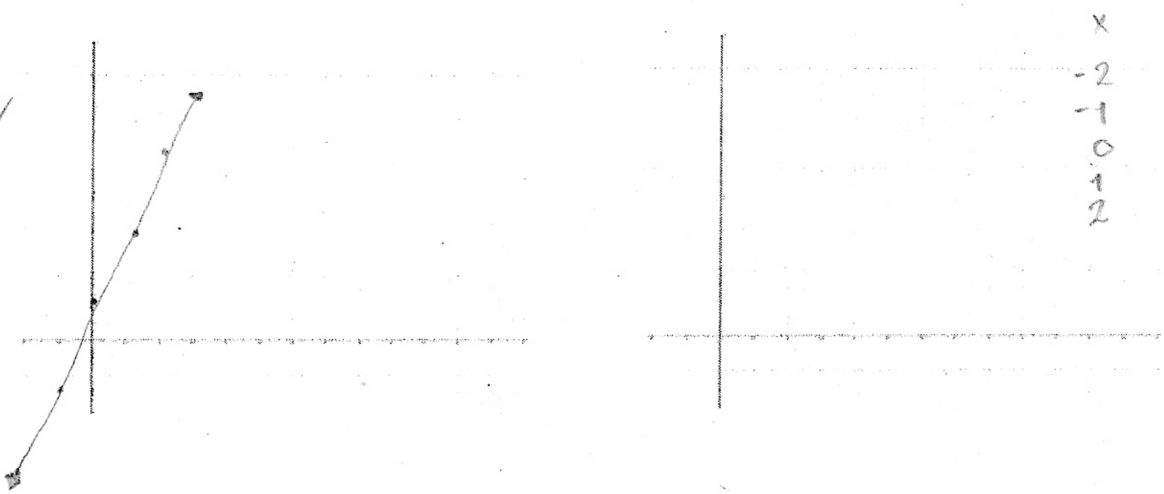
f(x)

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y=2x+1$

$y = 2x+1$

x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5



5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

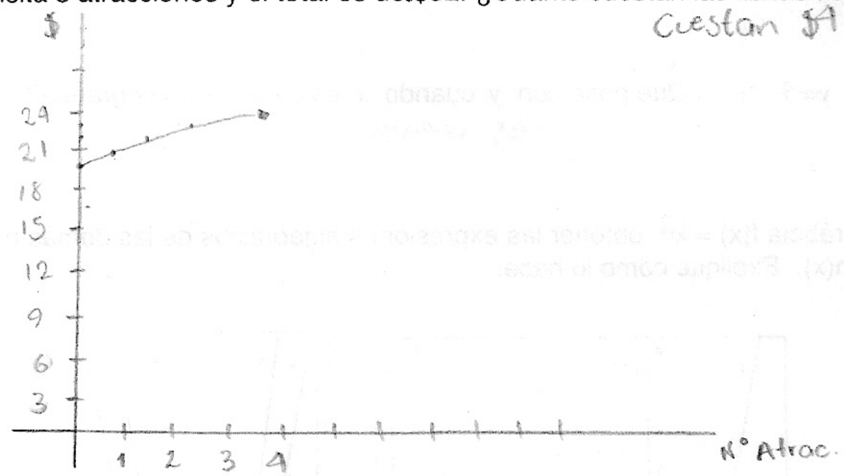
a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

El diagrama sube y aumenta crecientemente

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

Cuestan $1.



9

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Jan Carlos Gutierrez A Grupo: 1B Fecha: 13 / 08 / 14

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a{\cdot}x+b=c$ $-b+a$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x=$....

      X

      $x = c - b + a$. Despeje cambiando de lado los que acompañan a X.

   b. Exprese b en x, a, c

      X

      $b = C + X - a$ Despeje a b.

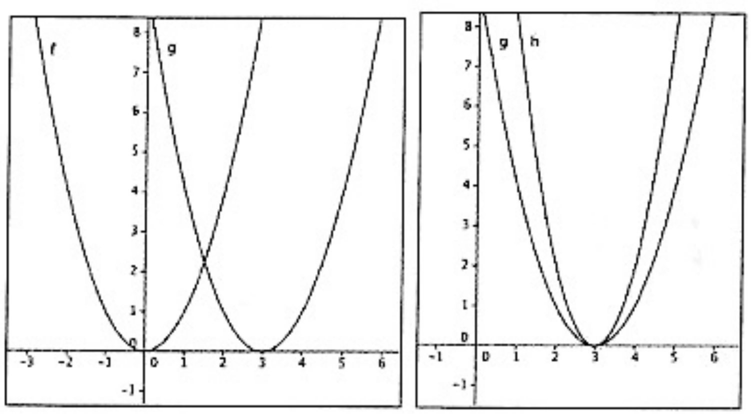
2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

   ✓

   El valor de y sera cada vez menor

3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

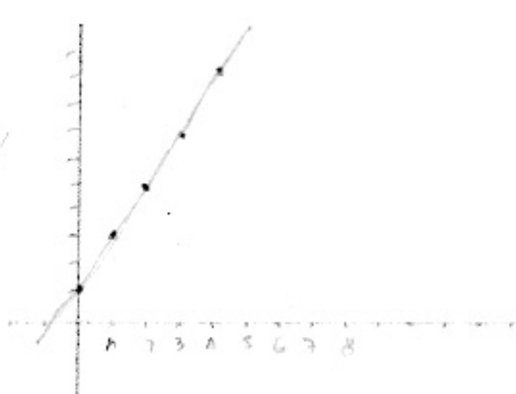
N/A

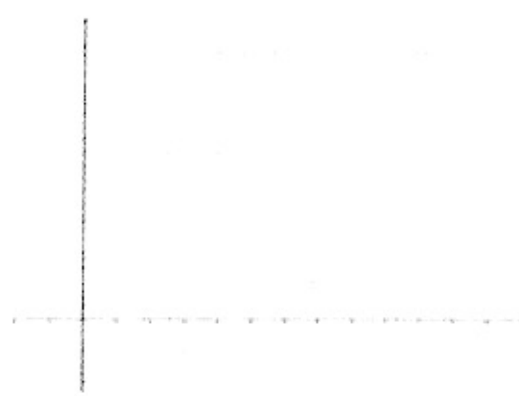


No recuerdo como se hace esto

4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y=2x+1$

✓





5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

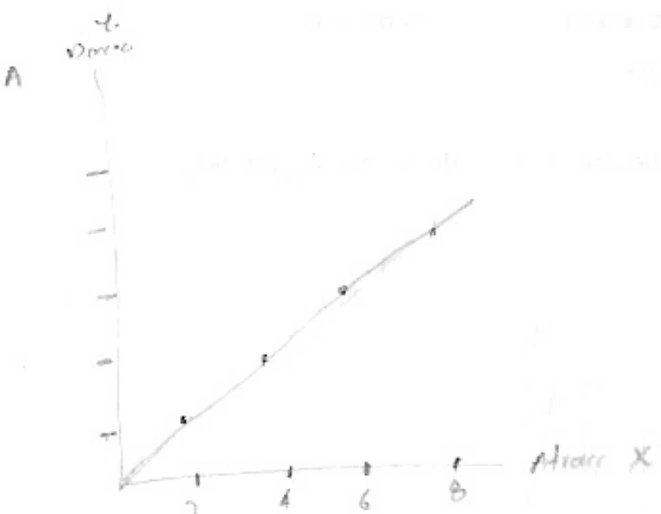
a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

El dinero gastado aumenta.

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

Cada Ficha costaria $ $1\frac{1}{2}$



TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

(12)

Nombre: Daniel Felipe Mar[illegible] Grupo: 7A01N Fecha: ________

IMPORTANTE:

- En cada respuesta, muestre los procesos, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a{\cdot}x+b=c$

   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x=$....

   ✓ $x=\dfrac{c-b}{a}$

   b. Exprese b en x, a, c

   X $b=\dfrac{c\cdot a}{x}$

2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

   ✓ Al ser mas grande se multiplica y pierde su valor, osea disminuye.

3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

$y = 5-2(1) = 3$

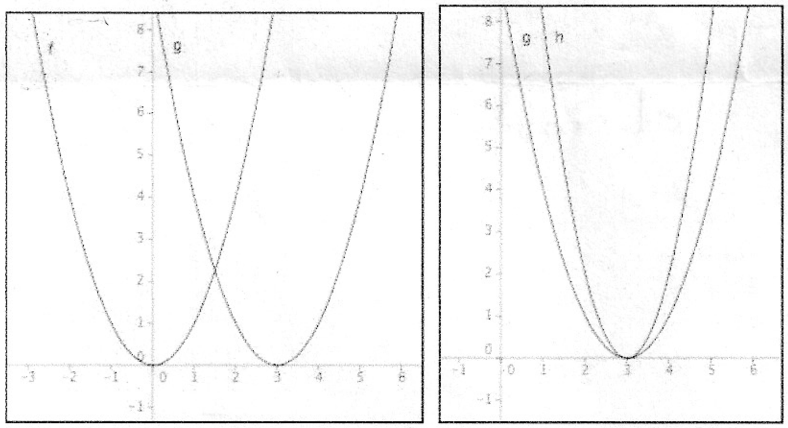
$y = 5-2(2) = 1$

$y = 5-2(3) = -1$

$y = 5-2(4) = -3$

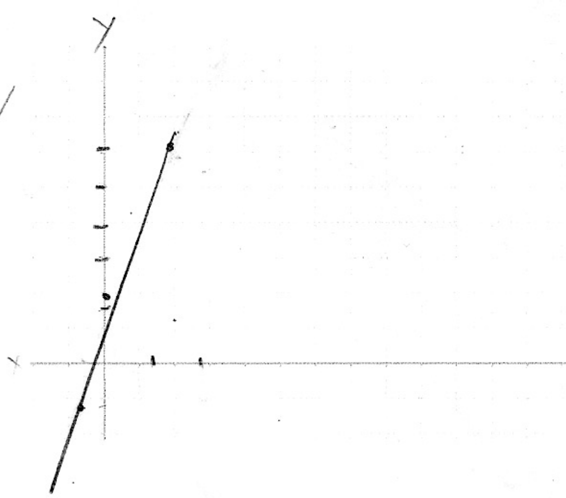
$y = 5-2(5) = -5$

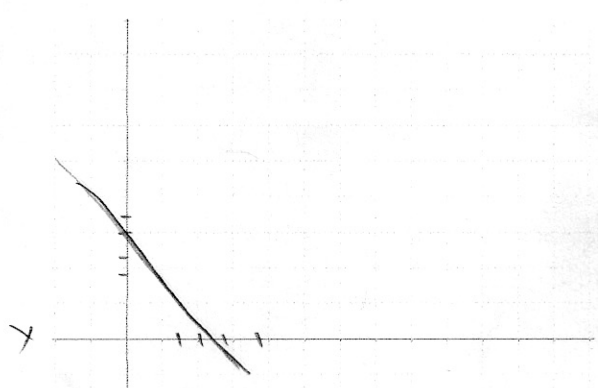
NA



4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y=2x+1$

✓





X → Atracciones

5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan $20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta $1 y le permite entrar en una atracción.

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

X

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo $25?

NA

c. Suponga que la entrada aún es de $20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de $32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

✓

$32 - 20 = 12$

$12 \div 8 = 1.5$

el coste de cada ficha es de 1.5 $

ESCANEAR ATRAS

3

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Erika Milena Barriga Grupo:____ Fecha: 13 de Agosto.

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a \cdot x + b = c$

$a \circ x + b = c$

$x = \frac{c-b}{a}$

   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = \ldots$

$x = \frac{c-b}{a}$

   b. Exprese b en x, a, c

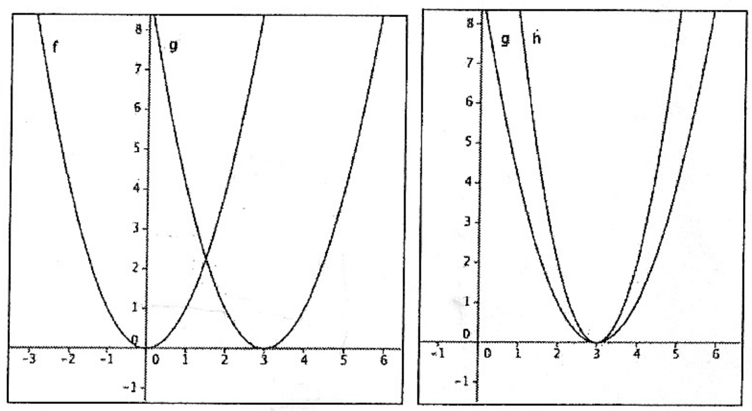
$b = c - a \cdot x$

2. En la relación $y = 5 - 2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

pues (y) va disminuyendo.

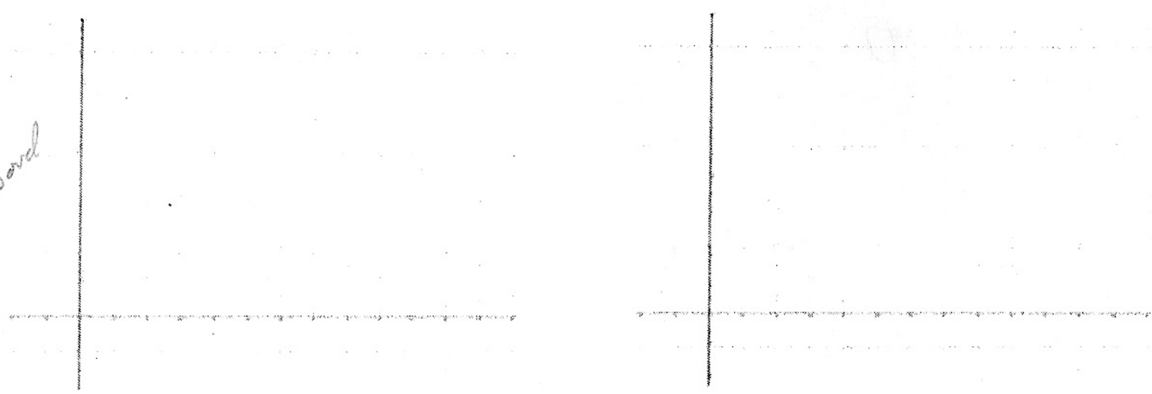
3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, $g(x)$ y $h(x)$. Explique como lo hace.

no abord



4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y = 2x + 1$

no abord

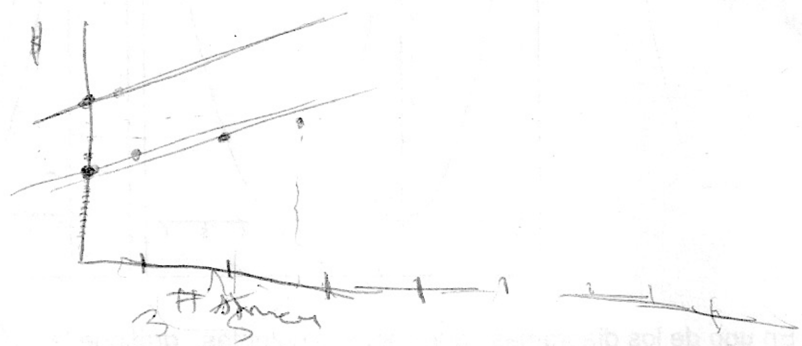


5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?



Escah. 1a

7

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Luisa Fernanda Galindo Barrera Grupo: DA 01N Fecha: 13 de Agosto - 2014

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a \cdot x + b = c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = ...$

X

$a \cdot x + b = c \quad x = \frac{c}{a} - b$

$x + b = \frac{c}{a}$

   b. Exprese b en x, a, c

X

$b = \frac{c}{a} - x$

2. En la relación $y = 5 - 2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

✓

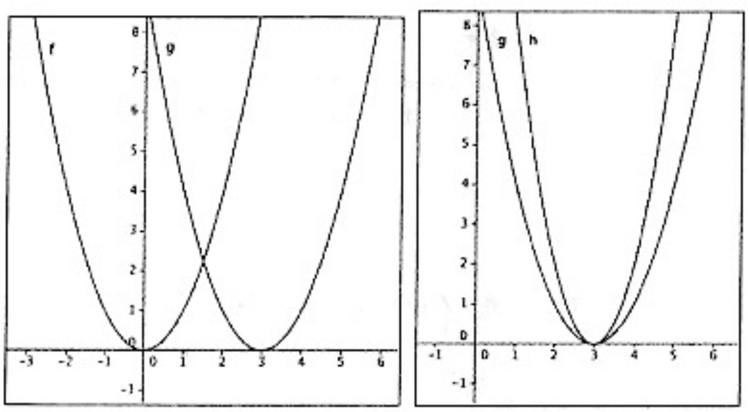
$y = 5 - 2(1) \quad y = 5 - 2(2)$

$y = 3 \quad y = 1$ Rta: disminuye

3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

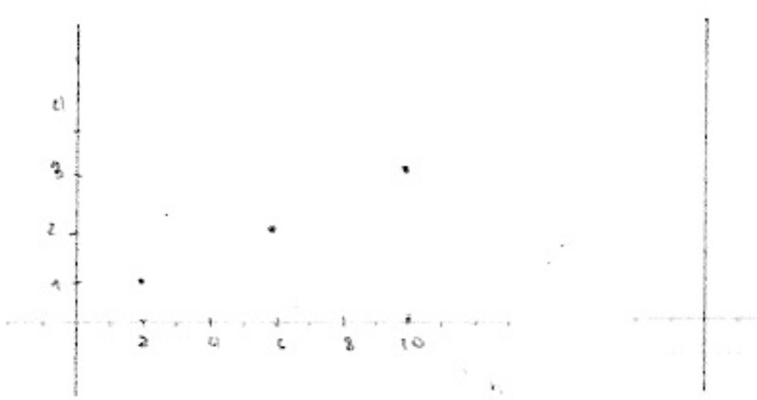
No recuerdo

No abord



4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y = 2x + 1$

X



5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

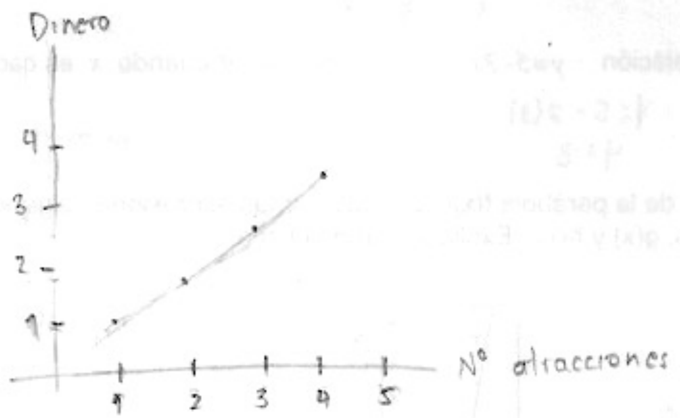
a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

• Aumenta

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

5. Entradas $20
Atracción $1



C= Rta. Cuestan 4 fichas más de lo inicial.

15

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Luisa Fernanda Nieto Bernal Grupo: DA 01N Fecha: Miercoles - 13 de Agosto.

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a{\cdot}x+b=c$

   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x =$....

✓

$$x = \frac{c-b}{a}$$

   b. Exprese b en x, a, c

X

$$b = \frac{c\,c}{-a\cdot x}$$

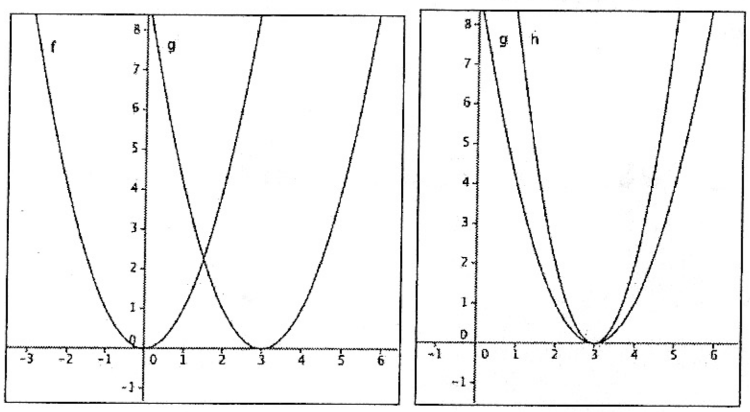
2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

X

Pues y va aumentando su valor al reemplazar x por un numero.

3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

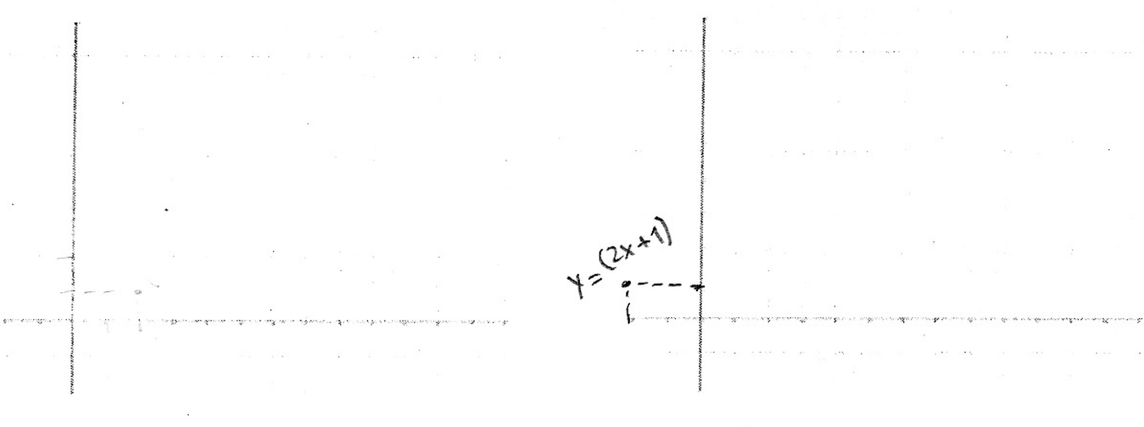
NA



No me acuerdo.

4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y=2x+1$

X



5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

X

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

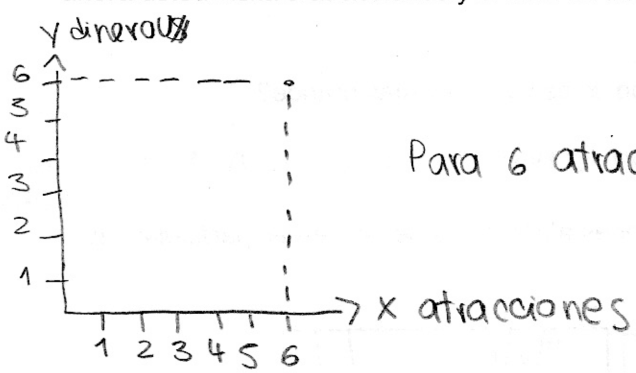
NA

No me acuerdo.

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

X

a.



Para 6 atracciones cuesta U$6.

c) 8 x 4 = 32 es decir cada ficha costaria U$ 8

8

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Marcel Daniel Galindo Grupo: DAo1N Fecha: 13 Agosto 2014

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a \cdot x + b = c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = ...$

X $x = \frac{b-c}{a}$

   b. Exprese b en x, a, c

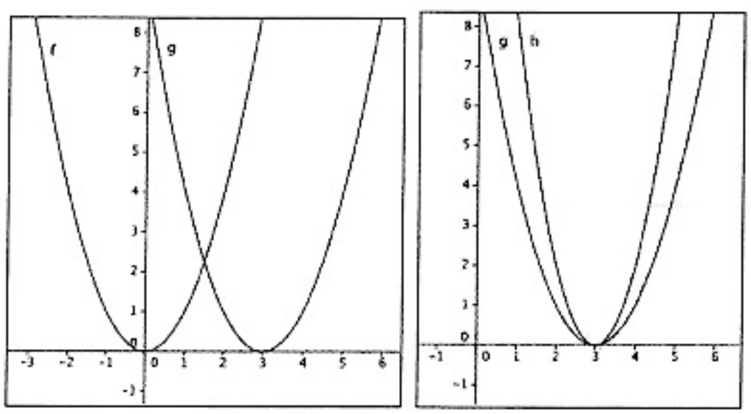
X $b = \frac{c}{a.x}$

2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

X Y tambien es mas Grande

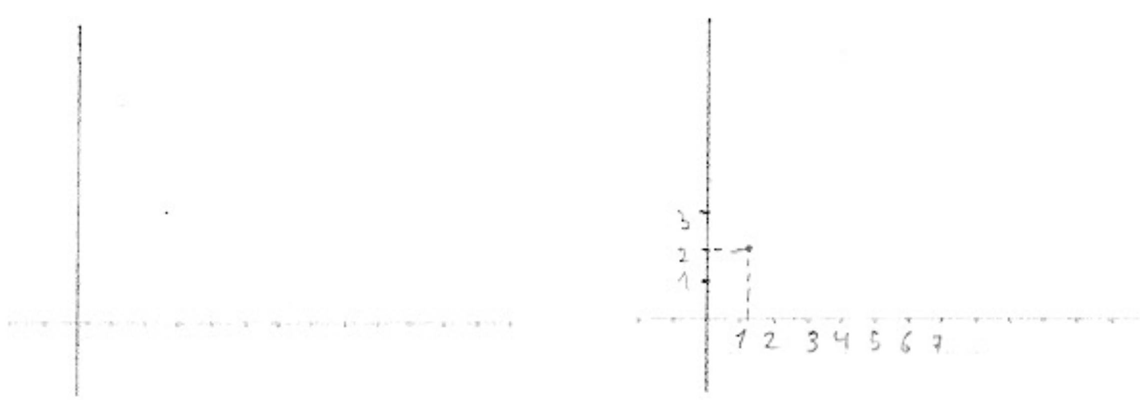
3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

NA No Se



4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y=2x+1$

X



5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

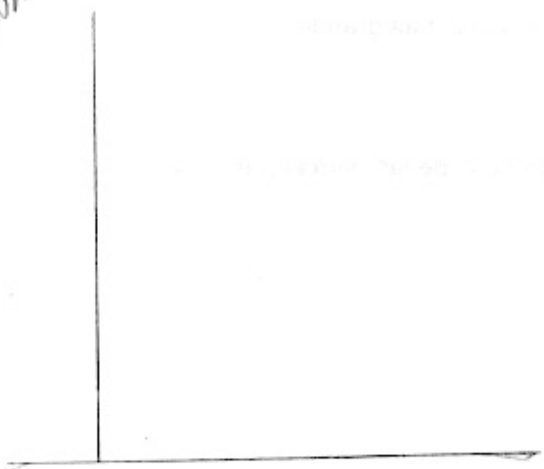
NA

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

NA

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

NA



(19)

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Maria Fernanda Zapata Baluin Grupo: DAEO1 Fecha: ____________

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a \cdot x + b = c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = ...$

✓ $x = \frac{c-b}{a}$

   b. Exprese b en x, a, c

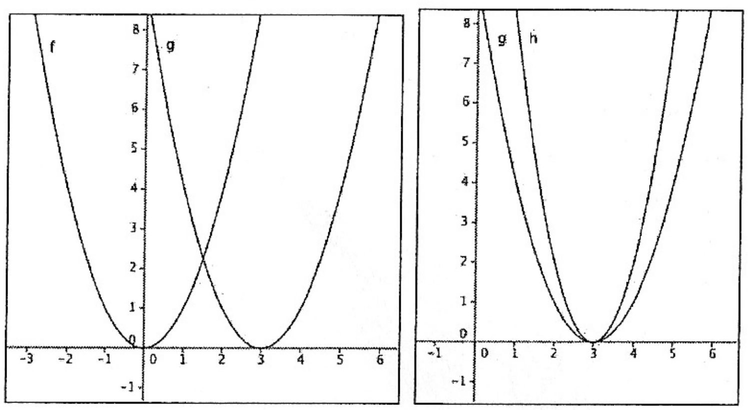
X $b = \frac{c}{a \cdot x}$

2. En la relación $y = 5 - 2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

✓ se vuelve cada vez más negativo

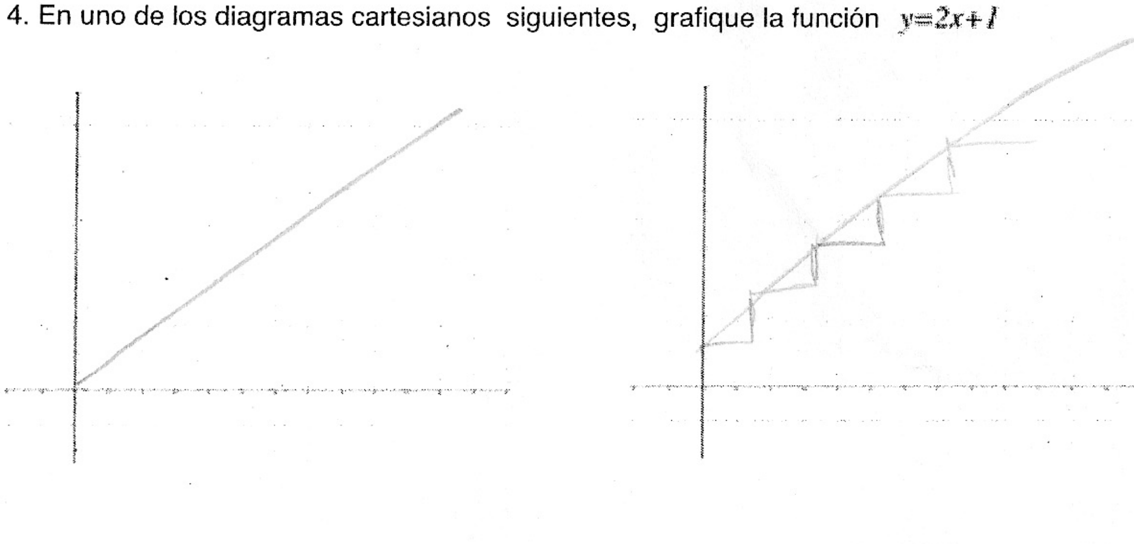
3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

NA



4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y = 2x + 1$

✓X



5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

NA

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

tiende más al horizonte

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

NA

ESCANEAR ATRAS

10

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

DAO 1N

Nombre: Nicolas Gutierrez Z. Grupo:_____ Fecha: 24/11/14

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a \cdot x + b = c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = ...$

   ✓ $x = \frac{c-b}{a}$

   b. Exprese b en x, a, c

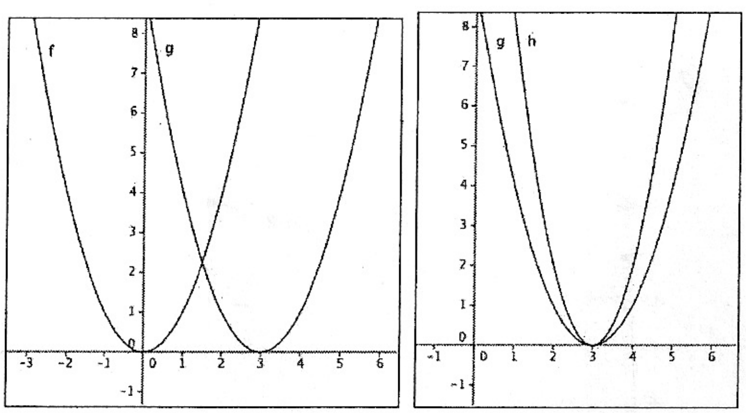
   X $b = \frac{c-a}{x}$

2. En la relación $y = 5 - 2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

✓ cuando x es mas grande y disminuye de a dos.

3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

NA



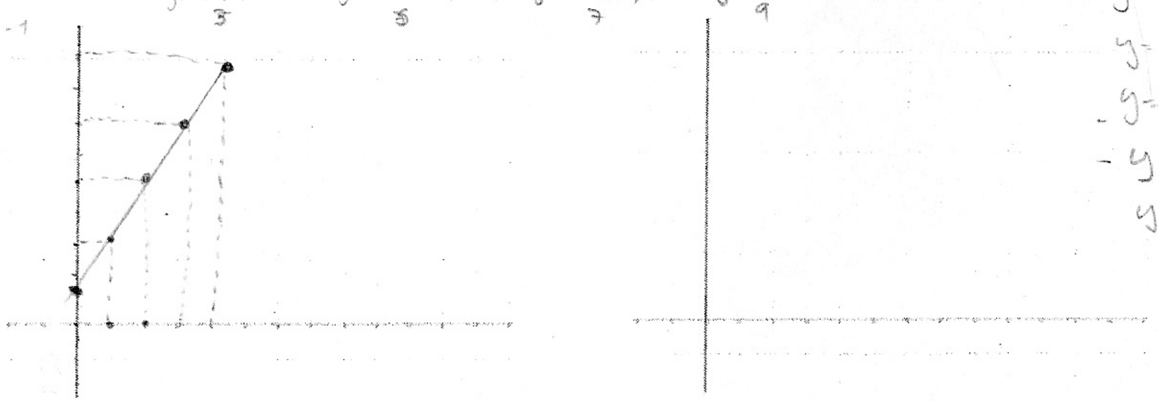
$y = 5 - 2(2) = 1$
$- y = 5 - 2(3) = -1$
$- y = 5 - 2(5) = -5$
$y = 5 - 2(10) = -15$
$- y = 5 - 2(4) = -3$
$- y = 5 - 2(6) = -7$
$y = 5 - 2(7) = -9$

4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y = 2x + 1$

$y = 2(0) - 1$ $y = 2(1) + 1$ 3 $y = 2(2) + 1$ 5 $y = 2(3) + 1$ 7 $y = 2(4) + 1$ 9

$y = 2(-1) - 1$ -3

✓



5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

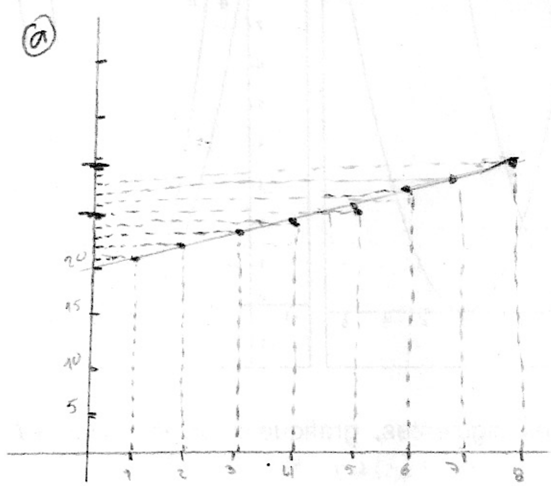
b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

La grafica aumenta en el eje vertical

c. Suponga que la entrada aún es del U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es del U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

$32 - 20 = 12$ $\quad \frac{12}{8} = 1.50$ el total de cada Ficha es de $1.50

(a)



Escan 3.

18

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Sara Uribe Rincón Grupo: DAU IN Fecha: 13/agosto/2014.

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a{\cdot}x+b=c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x=$....

   $a \cdot x + b = c$
   $a \cdot x = c - b$ $\quad x = \frac{c-b}{a}$

   b. Exprese b en x, a, c

   $a \cdot x + b = c$
   $b = c - ax$

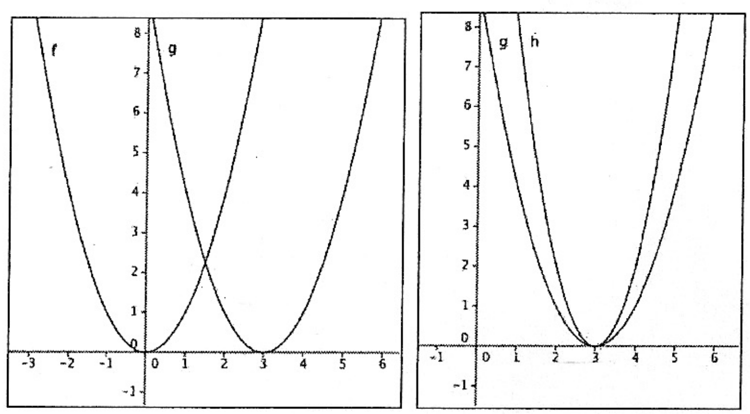
2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

   $y = 5 - 2(2)$
   $y = 1$
   cada vez que x es mas grande, y disminuye.

3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

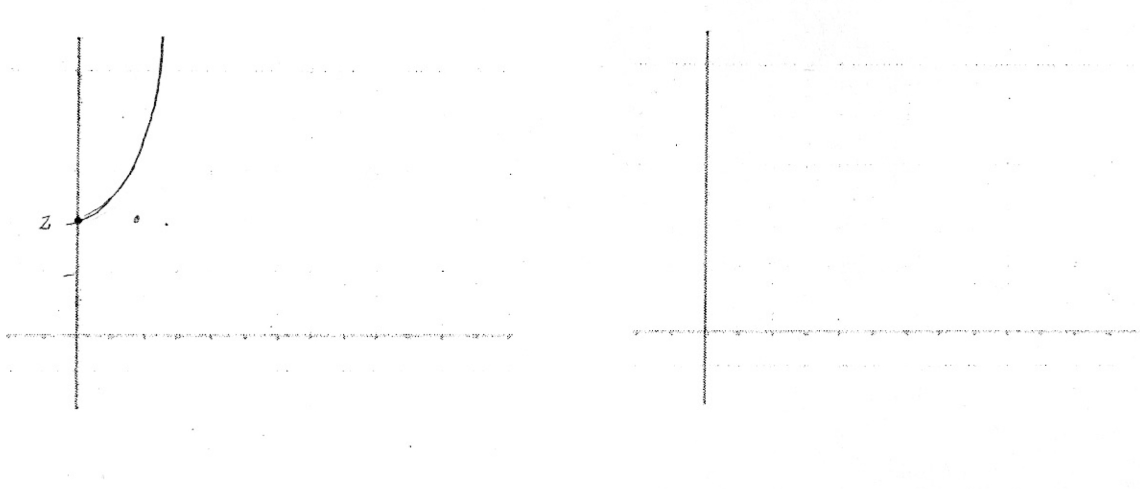
$f(x) = x^2$

$(f \circ g) = f(g(x))^2$ ←



$h(x) = 3x \,|\, g(x)$

4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y=2x+1$



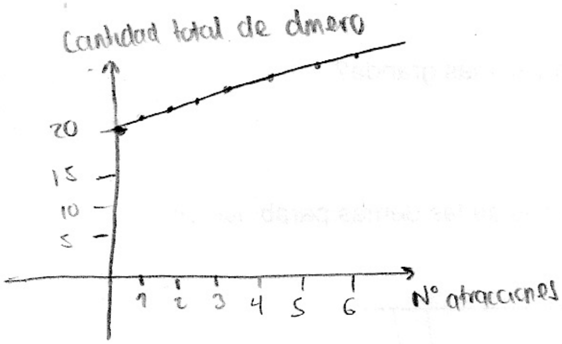
5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

Se seguiría aumentando 1 a 1 el precio de las atracciones, ya que el único cambio que hubo es en el precio de la entrada, la cual lógicamente se pagaría una vez.

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?



c. 32 = 8 x 4

Cada ficha cuesta $4

Escan. 3 y 4

17

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Juan Sebastian Paiba Aya Grupo: ______ Fecha: 19-8-2019

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a{\cdot}x+b=c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = ...$

   ✓ $x = \frac{c-b}{a}$

   b. Exprese b en x, a, c

   ✓ $b = c - ax$

2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

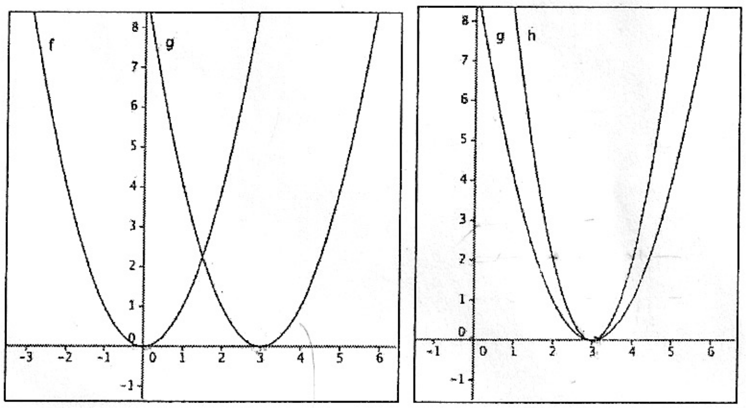
✓ Tabular

x	y
0	5
1	3
2	1

Cuando x es más grande y disminuye

3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

✓ $g(x) = x^2+3$



$(x-3)^2$

$y = (x \pm h)^2$

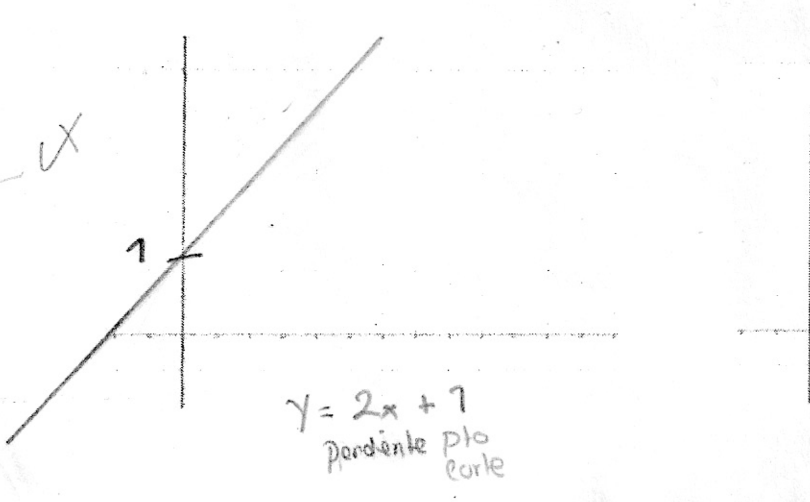
$h > 0$

$h < 0$

$y = (x-3)^2$

4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y=2x+1$

✓



$y = 2x + 1$
pendiente pto corte

x	y
0	9
1	4
2	1
3	16

5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

NA

a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

NA

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

NA

Juan S. Paiba Ayo

1ra Parte.

- Resuelva

1. Considere la ecuación $a \cdot x + b = c$

a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = \ldots$

R/ $x = \dfrac{c-b}{a}$

b. exprese b en x, a, c.

R/ $b = c - a \cdot x$

2. En la relación $y = 5 - 2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

R/ Tabular.

x	y
0	5
1	3
2	1
3	-1

* Cuando x es más grande y disminuye.

4. En el diagrama cartesiano siguiente, grafique la función $y = 2x + 1$

$y = 2x + 1$

(14) Escanear 3??

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Yulieth Tatiana Moreno Rojas Grupo: DA 01N Fecha: 13-08-14

IMPORTANTE:
- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a \cdot x + b = c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x = ...$

X

$x = c - a - b$

   b. Exprese b en x, a, c

X

$b = c - a + x$

2. En la relación $y = 5 - 2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

√X

y sera un numero Negativo mas pequeño

$y = 5 - 2(3) = 5 - 6 = -1$

$y = 5 - 2(5) = 5 - 10 = -5$

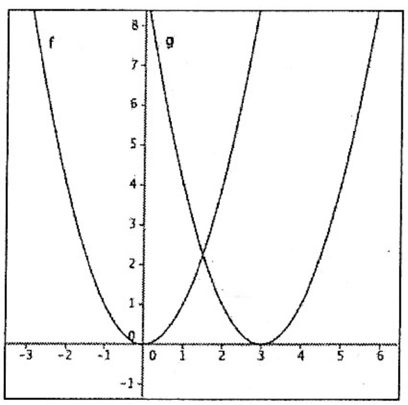
3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

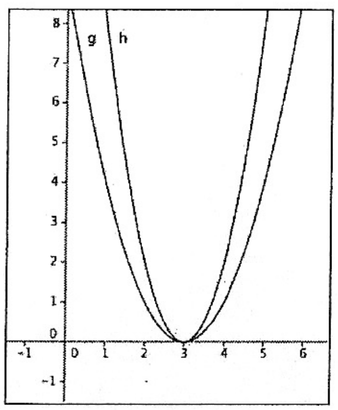
el ancho de la parabola varia segun

$f(x) = x^2 \boxed{+ 7}$

cuando se suma

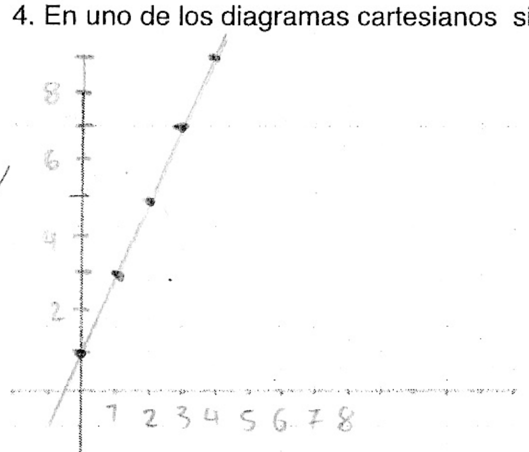
X

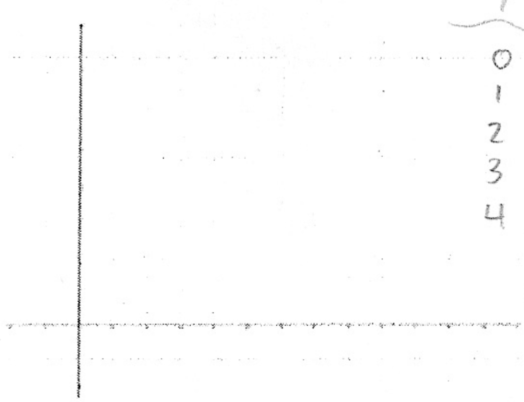




4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y = 2x + 1$

√





x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

Escan 5c ?

5

TEST CONDUCTAS DE ENTRADA

Nombre: Yulithe Gycel Cueny   Grupo: DA03N Fecha: 13.08.14.

IMPORTANTE:

- En cada respuesta muestre los procesos que desarrolla, sea lo más explícito posible. Es importante que usted explique el trabajo realizado de la manera más detallada y clara que pueda.
- Usted debe intentar resolver todos los problemas.

PRIMERA PARTE

Resuelva:

1. Considere la ecuación $a{\cdot}x+b=c$
   a. Exprese x en a, b, c en otras palabras escriba la ecuación en la forma $x=$....

      ✗ $X = c - b - a$

   b. Exprese b en x, a, c

      ✗ $b = c + x - a$

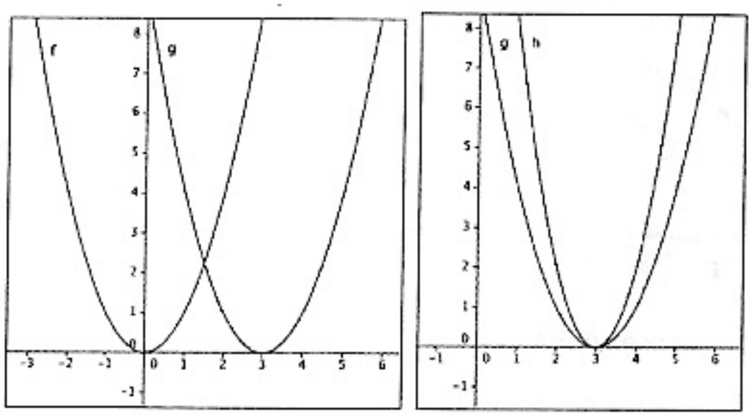
2. En la relación $y=5-2x$ ¿Que pasa con y cuando x es cada vez más grande?

   ✓ R=/ Y va disminuyendo

3. A partir de la parábola $f(x) = x^2$, obtener las expresiones algebraicas de las demás parábolas en las figuras, g(x) y h(x). Explique como lo hace.

R=/ $3x^2$

✗

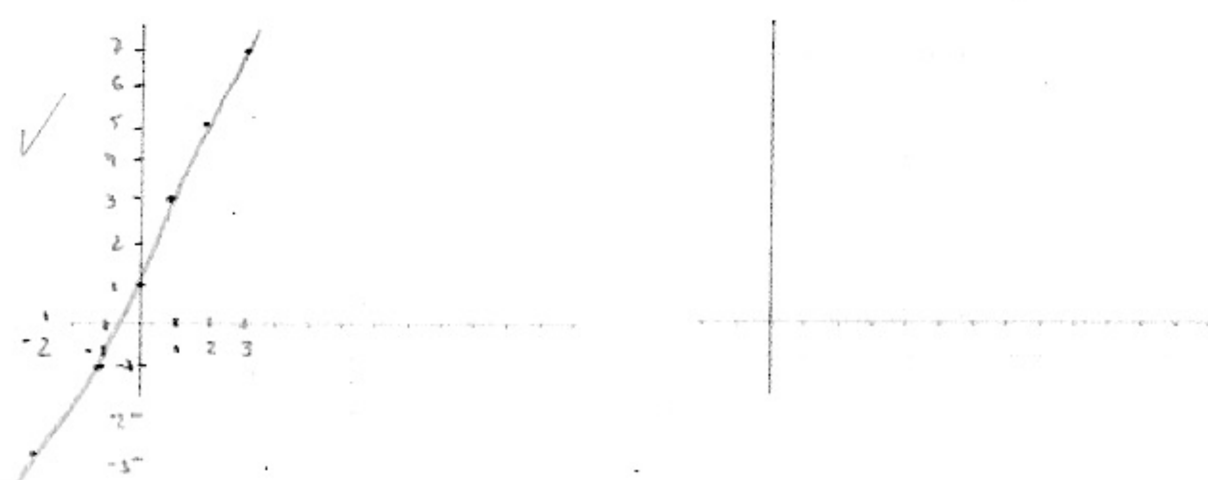


4. En uno de los diagramas cartesianos siguientes, grafique la función $y=2x+1$

x	y
1	3
2	5
3	7

x	y
-1	-1
-2	-3
-3	

✓



5. Las entradas en un parque de diversiones cuestan U$20. Una vez dentro usted puede comprar fichas que le dan acceso a las diferentes atracciones. Cada ficha cuesta U$1 y le permite entrar en una atracción.

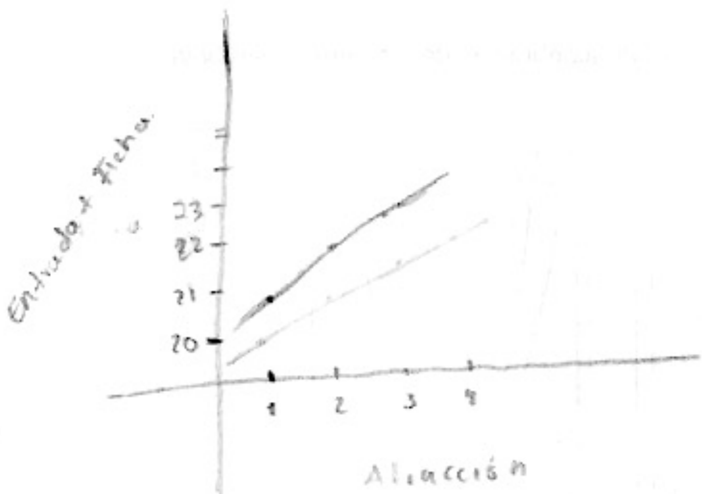
a. Dibuje una gráfica de esta situación en donde el eje horizontal represente el número de atracciones a las que entre y el eje vertical represente la cantidad total de dinero que podría costar. Utilice uno de los diagramas cartesianos.

b. ¿Qué sucede en la gráfica si el precio de la entrada se va incrementando, por ejemplo U$25?

- Va aomentar el precio de las fichas

c. Suponga que la entrada aún es de U$20, pero el precio de las fichas se ha incrementado, ahora usted visita 8 atracciones y el total es de U$32. ¿Cuánto cuestan las fichas así?

32 | 8
U 4 : Las fichas cuestan U$4



*Luisa Fernanda Nieto Bernal.
*Carol Forero Gonzalez

DA01N

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

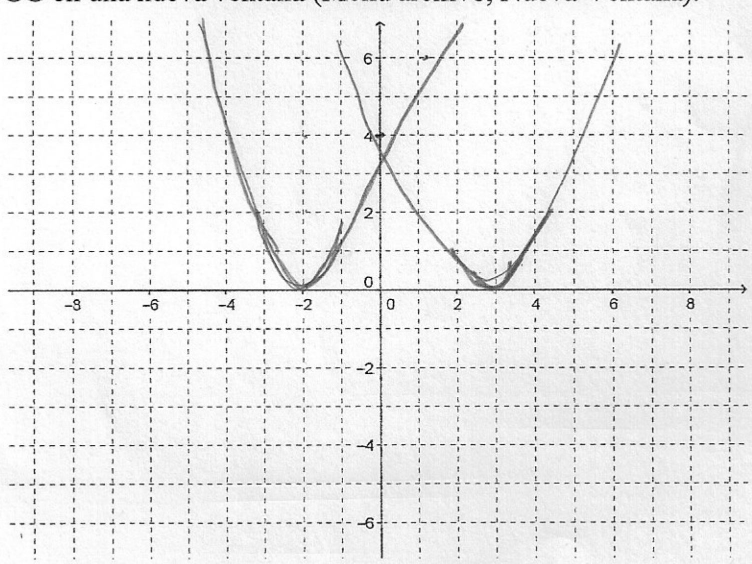
$g(x) = (x-1)^2$ $\qquad$ $m(x) = (x+3)^2$

$h(x) = (x-2)^2$ $\qquad$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c? Sea lo más claro y específico posible.

Veo que todas las funciones son concavas, todas tienen como el mismo angulo, pero en diferente posición, la $g(x)$ y $h(x)$ estan hacia el lado positivo y las funciones $n(x)$ y $m(x)$ van hacia el lado negativo.

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ o $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro d, para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$

$g(x)=x^2+1$

$h(x)=x^2-2$

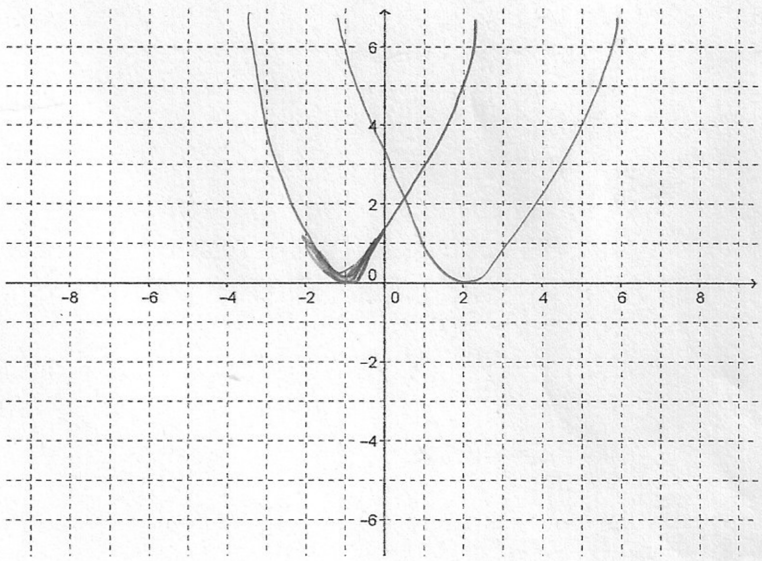
$k(x)=x^2+3$

$p(x)=x^2-4$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

Veo que cada función va siendo más pequeña con un ángulo más chiquito y la función $P(x)=x2-4$ baja hasta la parte negativa de $-y$.

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x)=x^2+2$ o $k(x)=x^2-\frac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

Si veo la relación de que cambia el sitio de posición y el grado, aunque mi bosquejo quedo diferente.

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a,* pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

Yo creo que este parametro hace cambiar la pocisión de derecha o izquierda.

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$

$g(x) = 2x^2$

$h(x) = 3x^2$

$k(x) = -x^2$

$p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$q(x) = -0.33x^2$

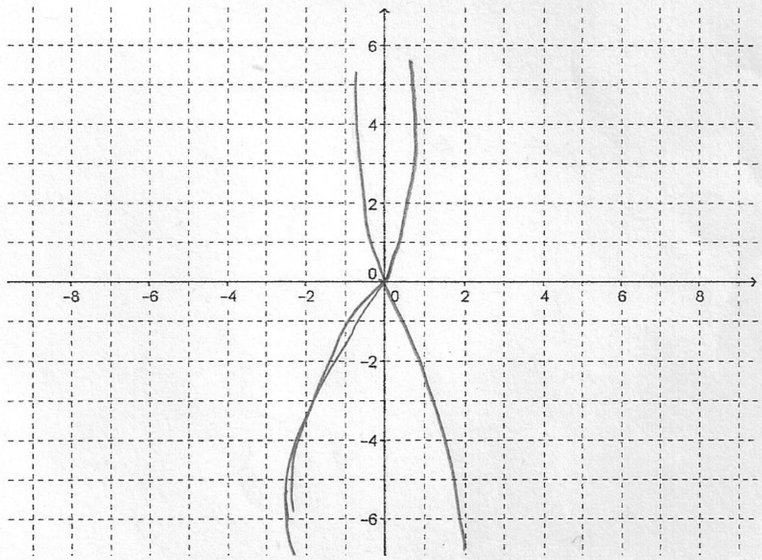
7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a? Sea lo más claro y específico posible.

Salen desde el mismo punto, lo que varia es el ángulo y depende si es positivo si quede abajo o arriba.

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro *a* en la gráfica?

Hace que la gráfica quede abierta hacia el eje -y.

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



Uso de Deslizadores

Tarea 8
Hasta aquí hemos revisado los parámetros *a, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro *c* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=(x+c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

lo que sucede es que al momento de mover el deslizador la función se mueve de derecha a izquierda y us pero con los límites de -10 y 10.

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si produce el mismo efecto con el mismo ángulo en diferente posición pero con el deslizador tiene límites.

Tarea 9
Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo *d* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Se disminuye cuando el el deslizador va hacia 10 y cuándo va hacia -10 aumenta, cambiando de ángulo.

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si, el deslizador produce el mismo efecto con respecto a la función $P(x) = x^2 - 4$.

Tarea 10

Ahora revisemos el parámetro a, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo a, con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Al mover el deslizador vemos que la función es una parabola, cuándo a es negativa la parabola es abierta hacia abajo, y cuánda a es positiva la parabola es abierta hacia arriba.

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si, el deslizador tiene el mismo efecto que con la función de la pregunta 7.1

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros c y d. ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

El efecto que produce los dos deslizadores en la función $F(x) = (x+c)^2 + d$, la parabola con primer deslizador siempre se mantiene abierta y cuándo se desliza hacia los números positivos tiende a -x y cuándo se deslizan a los números negativos tiende a x. El 2do deslizador cuándo esta en # negativos tiende a -y y cuándo esta en # positivo tiende a y, positiva.

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

Lo anterior es lo que sucede.

Erika Barriga
Angie Barbosa

DA 01N
Negocios Internacionales.

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

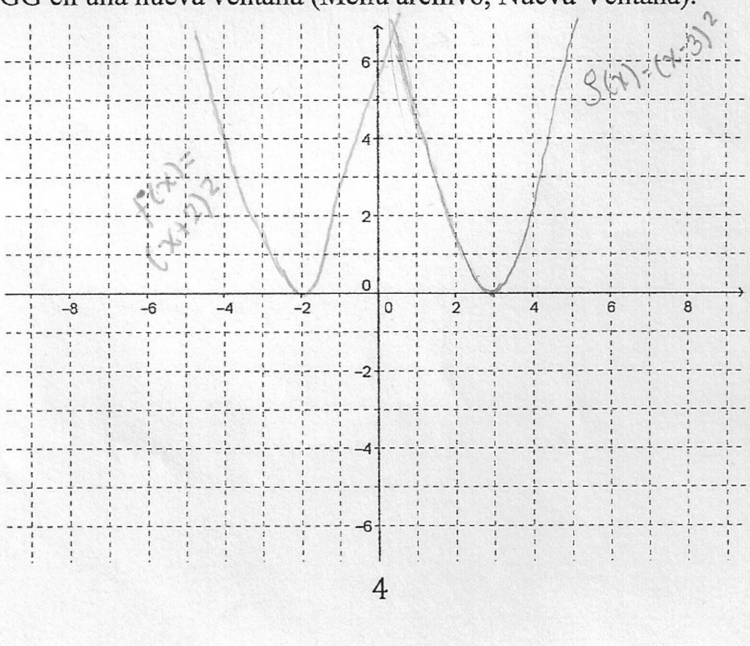
Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

$g(x) = (x-1)^2$ $\qquad$ $m(x) = (x+3)^2$

$h(x) = (x-2)^2$ $\qquad$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c ? Sea lo más claro y específico posible. * a medida que el parametro c varia positivo se corre Hacia la izquierda y cuando varia negativo corre Hacia la derecha.
* Si el parametro C varia, el vértice de la parábola varia.

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ o $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro *d,* para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$

$g(x)=x^2+1$

$h(x)=x^2-2$

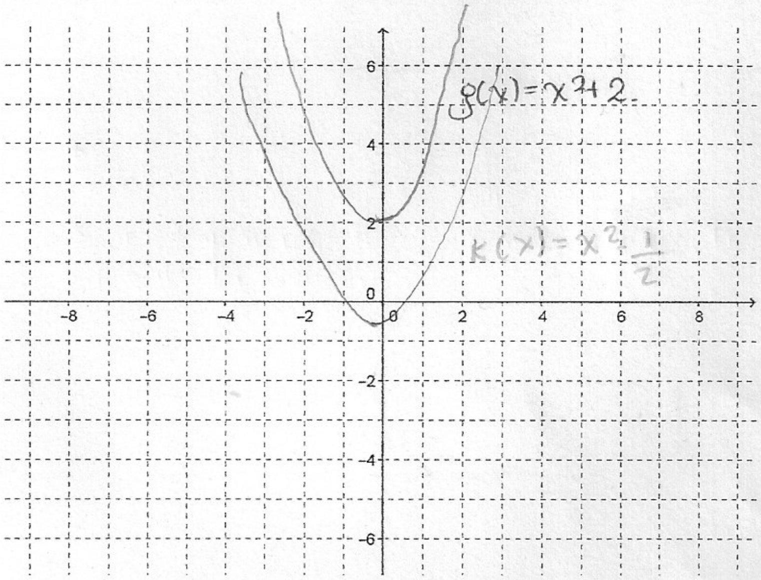
$k(x)=x^2+3$

$p(x)=x^2-4$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

* Cuando el parametro d cambia, la parábola se mueve a lo largo del eje y.
* Cuando es negativa, la parábola se mueve de forma "descendente", "hacia abajo" y cuando es positiva, la parábola sube.

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x)=x^2+2$ *o* $k(x)=x^2-\frac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

El parámetro **d** de los dos tipos de funciones determinan el punto en el que en el caso de la lineal corta con el eje y y en el caso de la cuadrática, el vértice de la parábola.

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a,* pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

Que varia la abertura de la parábola.

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $k(x) = -x^2$

$g(x) = 2x^2$ $\qquad$ $p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$h(x) = 3x^2$ $\qquad$ $q(x) = -0.33x^2$

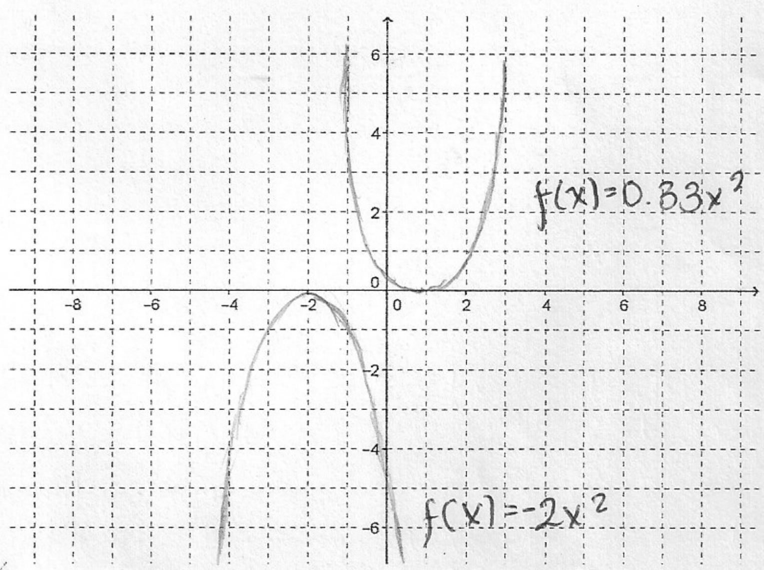
7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a ? Sea lo más claro y específico posible.

Cuando el parámetro a varia, varia la abertra de la parábola, entre que a es menor, la abertura es más abierta, y cuando a es mayor la parabola es cerrada.

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro *a* en la gráfica?

Que la parábola se situa en el cuadrante negativo, con su foco en la parte superior, es decir, cuando es negativo abre hacia abajo.

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



Uso de Deslizadores

Tarea 8

Hasta aquí hemos revisado los parámetros *a, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro *c* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = (x+c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

la parábola se mueve y el punto c varia, el movimiento es a lo largo del eje x.

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si, se produce el mismo efecto, ya que el deslizador contiene esos intervalos.

Tarea 9

Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo *d* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

la parábola se mueve pero con respecto al eje y.

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si tiene el mismo efecto.

Tarea 10
Ahora revisemos el parámetro a, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo a, con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Varia la abertura de la parábola.

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si se produce el mismo efecto.

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros c y d. ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

Se producirian dos efectos en la misma parábola, es decir si es el deslizador a y d, varia la abertura y se mueve con respecto al eje y.

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

con la función $F(x) = (x + c)^2 + d$
con el deslizador "c" la gráfica se desliza en el eje x, y con el deslizador "d" la gráfica se desliza sobre el eje y.

Juan Sebastian Daiba Aya DAO1N
Andrés Gomez

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

$g(x) = (x-1)^2$ $\qquad$ $m(x) = (x+3)^2$

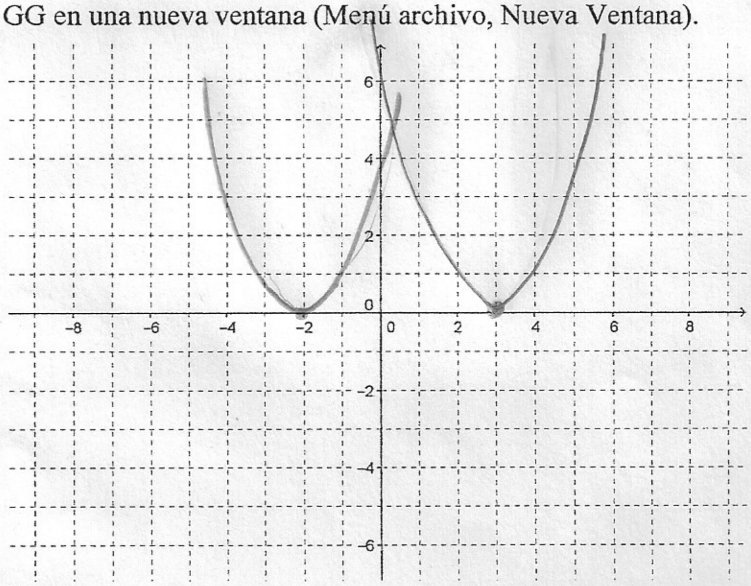
$h(x) = (x-2)^2$ $\qquad$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c? Sea lo más claro y específico posible.

las graficas varian dependiendo del cambio en (c), cuando (c) es positivo la parabola tiende a desplazarse hacia la izquierda, cuando (c) es negativo la parabola tiende a desplazarse hacia la derecha. y al graficar (c) se puede evidenciar el punto de corte con el eje y al multicar $(c)^2$.

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ o $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).

$f(x) = (x+2)^2$



Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro *d*, para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$

$g(x)=x^2+1$

$h(x)=x^2-2$

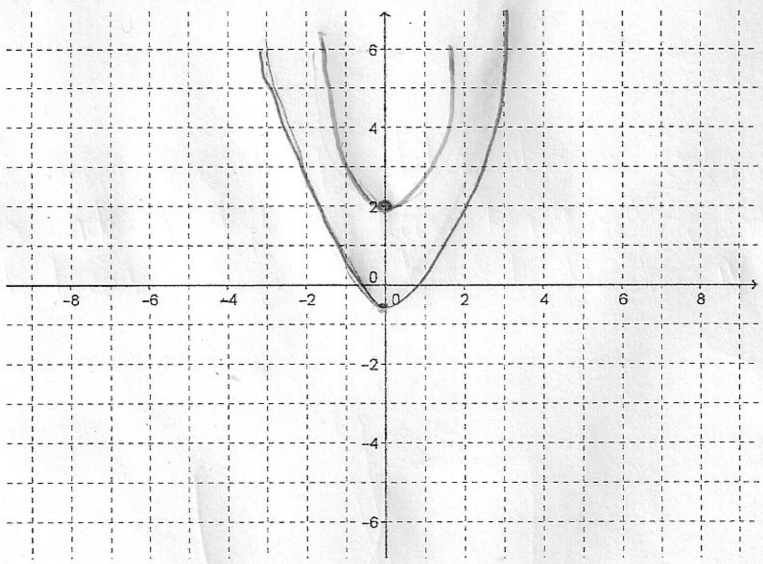
$k(x)=x^2+3$

$p(x)=x^2-4$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

Al graficar las funciones podemos ver que el vertice dela parabola es igual al parametro (d), y por ser x^2 la parabola es concava

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x)=x^2+2$ o $k(x)=x^2-\frac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

el punto (d) y el punto (b) son los puntos de corte en el eje y.

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a,* pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

lo que se cree ver al variar el parámetro (a) es que la abertura de la parabola se expande o se contrae dependiendo del valor de (a).

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $k(x) = -x^2$

$g(x) = 2x^2$ $\qquad$ $p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$h(x) = 3x^2$ $\qquad$ $q(x) = -0.33x^2$

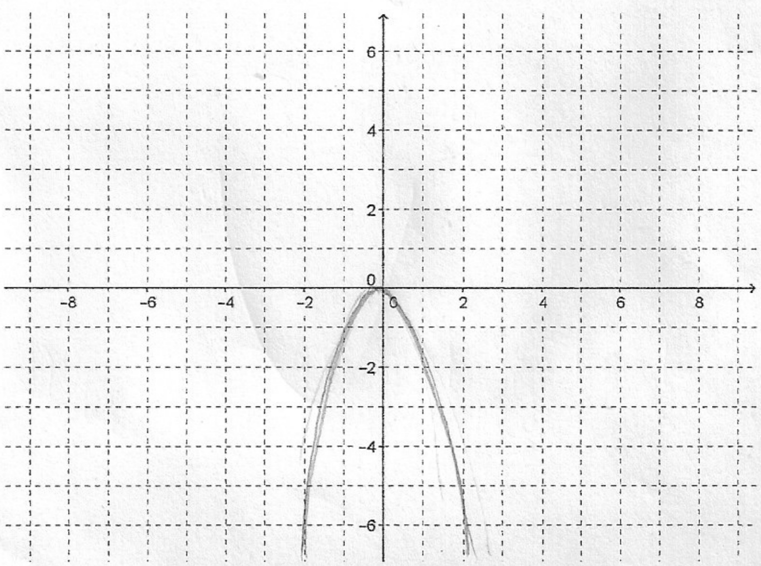
7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a ? Sea lo más claro y específico posible.

al variar el parametro (a) se puede ver que la parabola cambia en cuanto a su forma, es decir que se abre o se cierra. Al ser negativo el parametro (a) su parabola tiende hacia abajo y igualmente depende de su valor (se abre o cierra).

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro *a* en la gráfica?

Al ser negativo el parametro (a) su parabola tiende hacia abajo y depende de su valor (se abre o se cierra).

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



Uso de Deslizadores

Tarea 8
Hasta aquí hemos revisado los parámetros *a, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro c , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=(x+c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

La parabola se mueve atraves del eje x y su punto de origen se convierte en los límites del deslizador

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

si produce el mismo efecto, solo que con el deslizador se tienen límites. (limitaciones)

Tarea 9
Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo d , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Al mover el deslizador podemos ver que la parábola se mueve atraves del eje y su punto se origén se convierte en los limites donde situemos el deslizador.

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

se produce el mismo efecto, solo que con el deslizador se tienen límites. (limitaciones).

Tarea 10

Ahora revisemos el parámetro a, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo a, con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Al deslizarlo se puede observar que el punto de origen nunca cambia en este caso es (0) y al deslizarlo hacia los negativos la parabola se va cerrando y tiende hacia abajo, en el caso de los positivos la parabola también se va cerrando, pero tiende hacia arriba.

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

se produce el mismo efecto, sin embargo los limites -10 y 10 los determina el deslizador

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros c y d. ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

cambian la abertura y el vertice de la función a medida que se mueven los deslizadores

el vertice se mueve en y, pero también se varia la abertura.

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

Al mover los deslizadores cambia la función

(a) controla la abertura, (b) el vertice en y (c) el vertice en x.

Laura Daniela Ortiz
Sara Uribe.
Grupo DA01N.

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

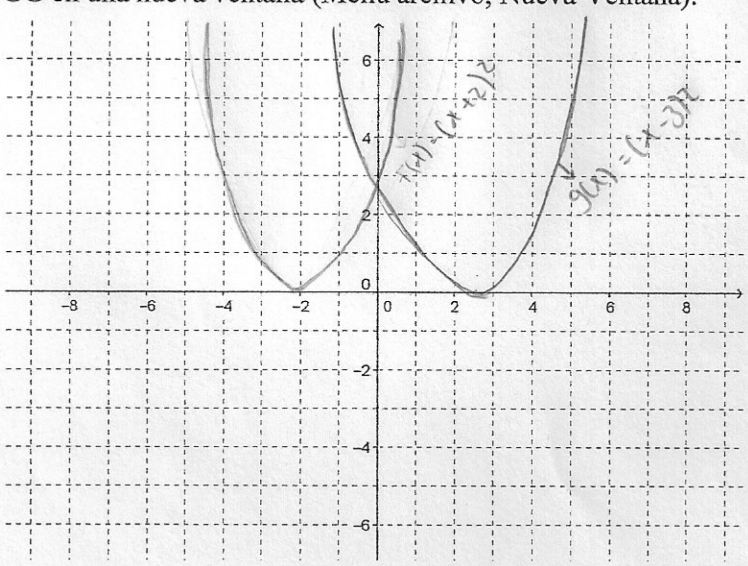
$g(x) = (x-1)^2$ $\qquad$ $m(x) = (x+3)^2$

$h(x) = (x-2)^2$ $\qquad$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c ? Sea lo más claro y específico posible.

Las gráficas se desplazan en x, siguen con la misma concavidad, son secantes, y su concavidad es hacia arriba.

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ o $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro *d*, para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$

$g(x)=x^2+1$

$h(x)=x^2-2$

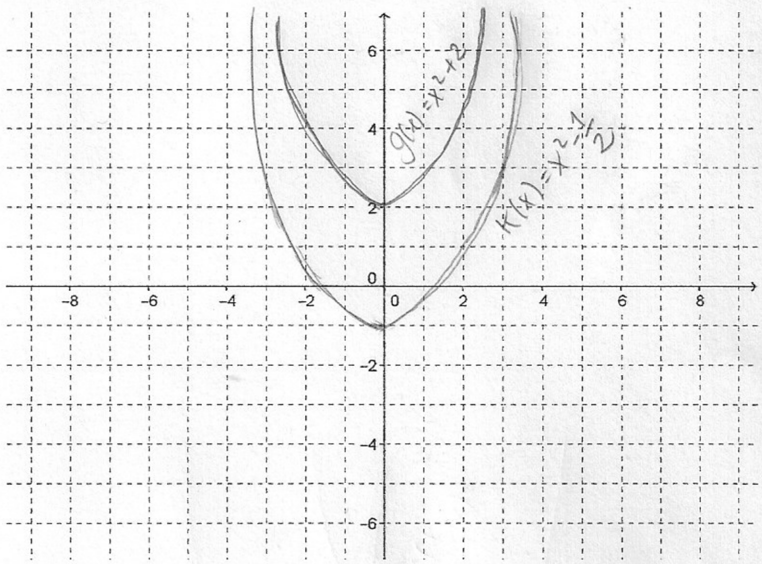
$k(x)=x^2+3$

$p(x)=x^2-4$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

Notamos que la gráfica solo se altera en el eje y y en donde cambia con la magnitud de la parábola, alterando tambien el eje x, siendo asi que se combierte en una imagen en forma de onda. Son concavas hacia arriba.

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x)=x^2+2$ *o* $k(x)=x^2-\frac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

No hay relación, ya que d en las otras funciones son lineales, en cambio en la función cuadrática se forma una parábola.

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a*, pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

Consideramos que cuando se cambia a, la gráfica cambia de posición.

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$

$g(x) = 2x^2$

$h(x) = 3x^2$

$k(x) = -x^2$

$p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$q(x) = -0.33x^2$

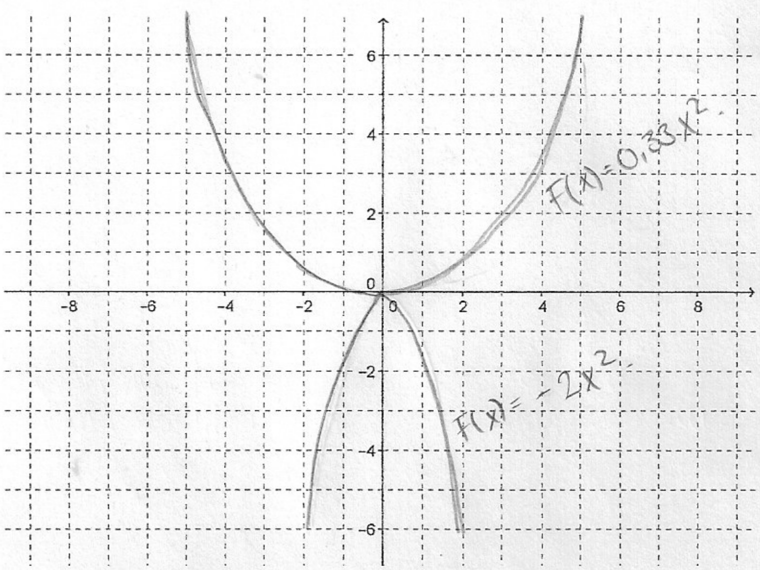
7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a ? Sea lo más claro y específico posible.

En la gráfica, la parábola empieza a disminuir su amplitud a medida que a va aumentando. También, la orientación de la parábola cambia cuando a es negativa.

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro *a* en la gráfica?

La orientación de la parábola cambia, ya que cuando a es negativa la parábola es concava hacia abajo.

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



Uso de Deslizadores

Tarea 8

Hasta aquí hemos revisado los parámetros *a, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro c , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=(x+c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

la parábola, a medida que movemos el deslizador hacia la derecha, la parábola se desliza hacia la izquierda, y cuando movemos el deslizador hacia la izquierda, la parábola se desliza a la derecha.

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

El mismo, ya que la gráfica se desplaza en el mismo eje, o sea x, su concavidad no cambia, y es secante.

Tarea 9

Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo d , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

la parábola, a medida que se desplaza el deslizador, la parábola aciende o deciende, siendo así que tambien su concavidad cambia, aumenta cuando el deslizador se mueve hacia la izquierda y la parábola deciende.

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Produce el mismo efecto, ya que cambia la posicion del eje x, como en el punto 6.1.

Tarea 10

Ahora revisemos el parámetro a, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo a, con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

la parábola cambia de concavidad cada vez que se mueve un deslizador, cuando en el deslizador $a = 0$ la parábola se convierte en una línea recta.

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Produce el mismo efecto, ya que la concavidad de la parábola se ve alterada.

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros c y d. ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

Cambiará simultaneamente la posición de la parábola si se le adiciona a la formula $F(x) = (x-c)^2 + d$

Si se conserva la formula original ($F(x) = x^2$) no sucederá nada con los deslizadores.

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

Cuando se utiliza el deslizador c la parábola se desplaza en el eje x, cuando se mueve el deslizador d. la parábola se desplaza en. en eje y.

Luisa Fernanda Galindo Barrera = 2176601 Grupo: DA01N
Maria Fernanda Zapata Balvin. = 2172164

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

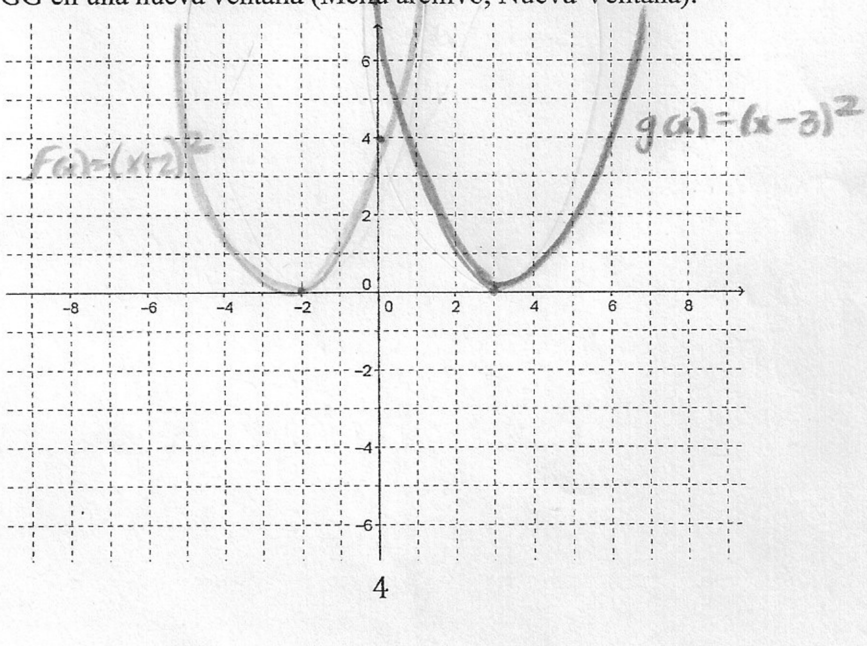
Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

$g(x) = (x-1)^2$ $m(x) = (x+3)^2$

$h(x) = (x-2)^2$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c? Sea lo más claro y específico posible. Cuando en la función el parámetro "c" es positivo, el vertice inicia en los negativos de X, cuando el parámetro "c" es negativo, el vertice inicia en los positivos del eje X, teniendo la misma concavidad.

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ o $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro *d*, para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$

$g(x)=x^2+1$

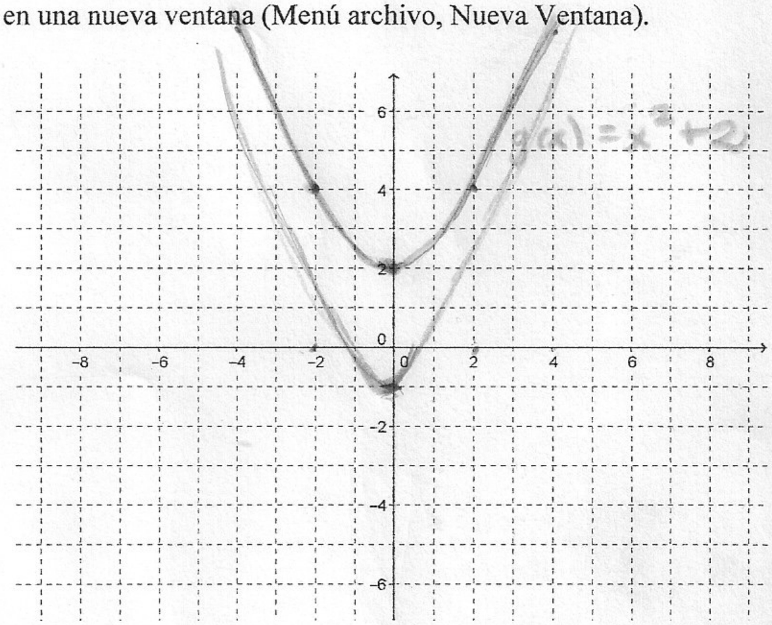
$h(x)=x^2-2$

$k(x)=x^2+3$

$p(x)=x^2-4$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible. Cuando el parámetro 'd' es negativo, se úbica en el eje Y en sus negativos, y cuando es parámetro es positivo, se úbica en el eje Y en sus positivos, ~~siendo~~ convexas.

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x)=x^2+2$ *o* $k(x)=x^2-\dfrac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

• Son elementos que a cada conjunto de partida, le pertenece uno de llegada.

En las funciones lineales la expresión es: f(x) 2x+3, mientras que en la función cuadrática lel expresión es: f(x): x²+3x+2, y su gráfica es concava, por el contrario de la lineal que es recta.

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a,* pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

Al modificar el parámetro a, varío la abertura de la gráfica.
Es decir, sí el parámetro "a" su número es mayor a 1, su gráfica tiende a cerrarse, y así cada vez que se incremento su cantidad.

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$

$g(x) = 2x^2$

$h(x) = 3x^2$

$k(x) = -x^2$

$p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$q(x) = -0.33x^2$

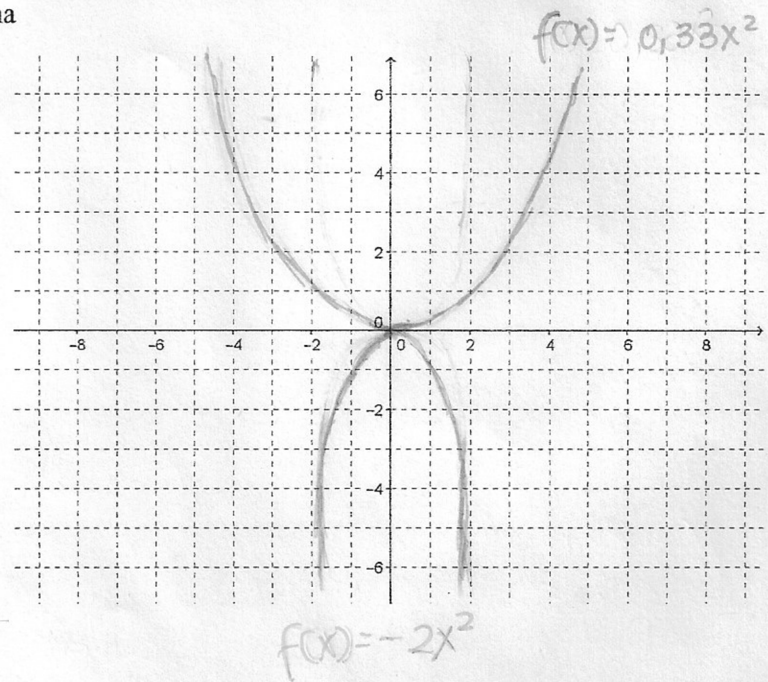
7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a ? Sea lo más claro y específico posible.

Cambian la abertura variando el incremento o el valor que tome "a",
Sí la cantidad del parámetro es mayor, tiende a cerrarse en el eje Y,
pero sí es cada vez menor, tiende a expandir su abertura al eje Y
-Si el parámetro es negativo, es concavo hacia abajo, sí es positivo, es concavo hacia arriba.

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro a en la gráfica?

La gráfica es concavo hacia abajo.

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



Uso de Deslizadores

Tarea 8
Hasta aquí hemos revisado los parámetros *a, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro *c* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=(x+c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Sí pulsamos el deslizador y lo corremos hacia la derecha, en los positivos, la gráfica se desplaza hacia la izquierda, por el contrario, sí lo pulsamos hacia la izquierda, la gráfica se desplaza hacia los positivos, es decir a la derecha.

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si, los dos producen el mismo efecto. ~~tomando a los~~
Los dos inician en positivos, desplazandose hacia los negativos, mientras que sí unos inician en negativos, se desplazan hacia los positivos, teniendo una reacción inversa.

Tarea 9
Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo *d*, con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede? Variando el parámetro "d" incrementando su cantidad, la gráfica se desplaza en el eje "y" hacia arriba, modificando su vertice y la abertura de la gráfica tiende a cerrarse, mientras que si el aerodeslizador se desplaza hacia los negativos, la gráfica modifica su vertice en los negativos del eje "y". ~~y su~~

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

·En el punto 6.1. se desplaza de izquierda a derecha, en el eje x, por el contrario del anterior aerodeslizador, desplazandose de arriba hacia bajo. en el eje "y".

Tarea 10

Ahora revisemos el parámetro a, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo a , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede? Cuando el parámetro "a" es cero, la gráfica se extiende en el eje x completamente, Si se incrementa su valor, tiende a cerrarse en el eje Y. en los positivos, mientras que sí disminuimos su valor o cantidad tiende a ser concavo hacia abajo, sin modificar su vertice.

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Cuando es menor su concavidad es hacia abajo y su abertura se tiende a cerrar en los negativos, mientras que sí es positivo es concavo hacia arriba y si cada vez se incrementa más, la abertura tiende a cerrarse en el eje "y".

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros c y d. ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

• No sucede nada porque no se incluyen en la función. Es decir no adiciona los parámetros "c" y "d" en la función, no varia la gráfica en ningún aspecto.

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

Sí el parámetro "c" se módifica, incrementando su valor, se desplaza hacia la izquierda en el eje "x", sí se disminuye la cantidad, la gráfica se desplaza hacia la derecha, sin ninguna modificación en vertice o abertura.

Para el parámetro "d" modifica su posición en el eje "y", si aumenta su valor, la gráfica tiende a encogerse cerrando su abertura, mientras que si se disminuye su cantidad, la gráfica tiende a dirigirse hacia los negativos del eje "Y", sin modificar su posición en el eje "X". Es decir, de izquierda o derecha.

$$f(x) = (x+c)^2 + d$$

NOMBRES: Ana Lorena Mora Gonzalez GRUPO: DAONS
Yulithe Gycel Cicery Guerrero

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

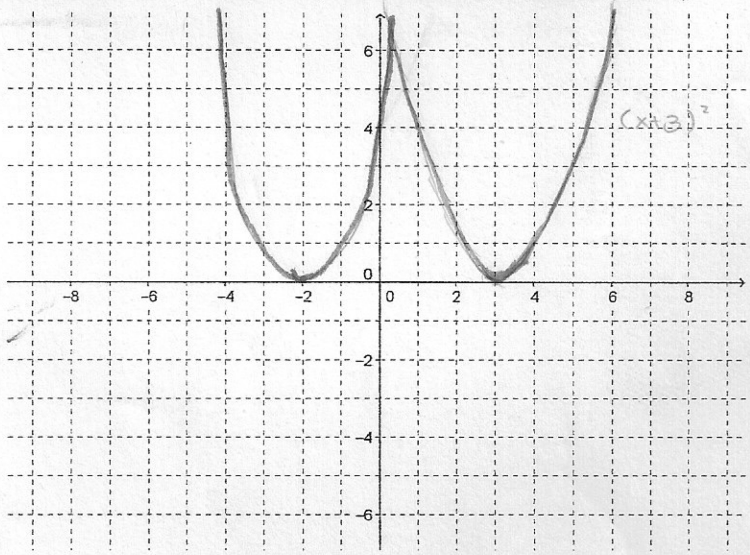
$g(x) = (x-1)^2$ $m(x) = (x+3)^2$

$h(x) = (x-2)^2$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c? Sea lo más claro y específico posible.

Al variar el parámetro c, dependiendo del signo que tenga c, la gráfica sempieza en el eje x siendo el signo opuesto de c.

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ o $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro *d*, para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$

$g(x) = x^2 + 1$

$h(x) = x^2 - 2$

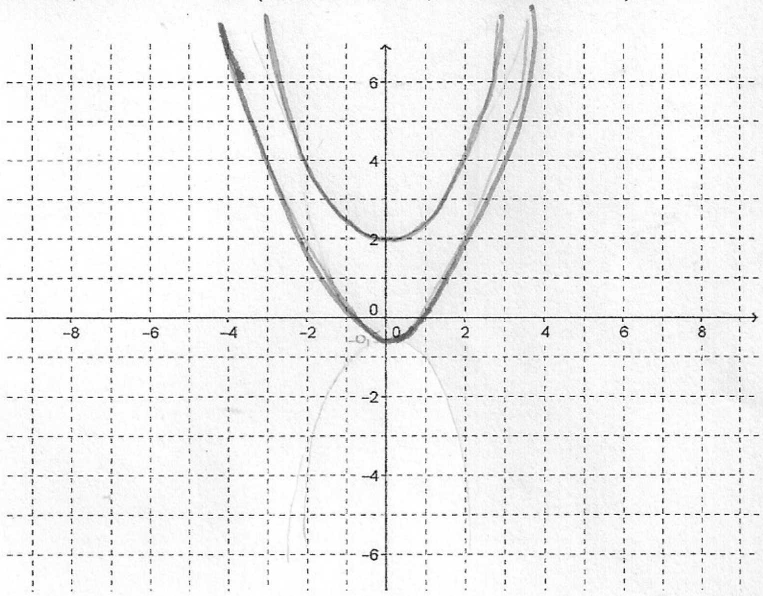
$k(x) = x^2 + 3$

$p(x) = x^2 - 4$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

Al variar el parámetro d en la gráfica, la parábola empieza desde el Valor que tiene d en la recta y

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x) = x^2 + 2$ o $k(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

de acuerdo con la formula y=mx+b, d y b son los puntos de corte en y

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a,* pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

El parámetro a es la concavidad o la abertura de la parábola.

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$

$g(x) = 2x^2$

$h(x) = 3x^2$

$k(x) = -x^2$

$p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$q(x) = -0.33x^2$

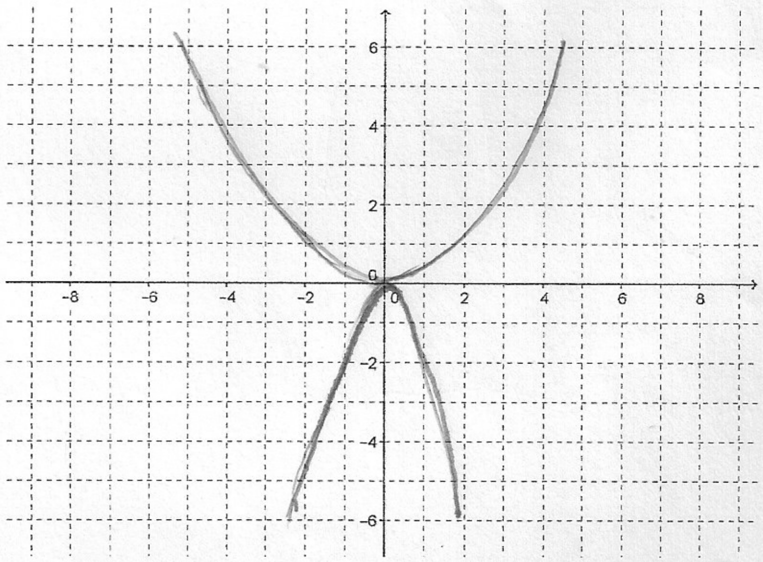
7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a ? Sea lo más claro y específico posible.

Afecta en la abertura de cada parábola.

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro a en la gráfica?

Si el parámetro a es negativo, el sentido de la gráfica cambia de dirección hacia abajo.

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



Uso de Deslizadores

Tarea 8

Hasta aquí hemos revisado los parámetros *a, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro *c* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = (x + c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Cambia el valor del parámetro C, haciendo que la parábola se mueva horizontalmente.

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

El valor de C varia en el eje x igual que sucedió en la pregunta 5.1., es decir, el deslizador hace que C cambie también su signo dependiendo a que lugar se desplace el punto de deslizador.

Tarea 9

Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo *d* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

~~La abertura de la parábola aumenta si el deslizador se mueve hacia la izquierda.~~ El punto en y cambia. Al mover el punto hacia la derecha del deslizador hace que "d" tome valores positivos y si pasa al contrario a valores negativos. "d" es el punto de corte en y.

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si. "d" es el punto donde la parábola tiene corte con el eje y.

Tarea 10

Ahora revisemos el parámetro a, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo a, con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

El valor de "a" cambia haciendo que la abertura de la parábola cambie.
Cuando "a" toma valor de 0 da una recta paralela en el eje x.
Igualmente, el sentido de la parábola cambia dependiendo el signo "a", que tome

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si, la abertura de la parábola cambia dependiendo del valor de "a".

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros c y d. ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

$f(x)=(x+c)^2+d$. = El parámetro "d" es el que cambia el valor en y, es decir, el punto de corte de la parábola en éste.

El parámetro "c" hace que el valor cambie en el eje x.

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

Observando las tareas anteriores, suponemos que en la parábola tendrá movimientos horizontales y verticales, y a la vez el cambio del punto en y.

Alvaro Bermudez
Paula Aponte. DAO 7N

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

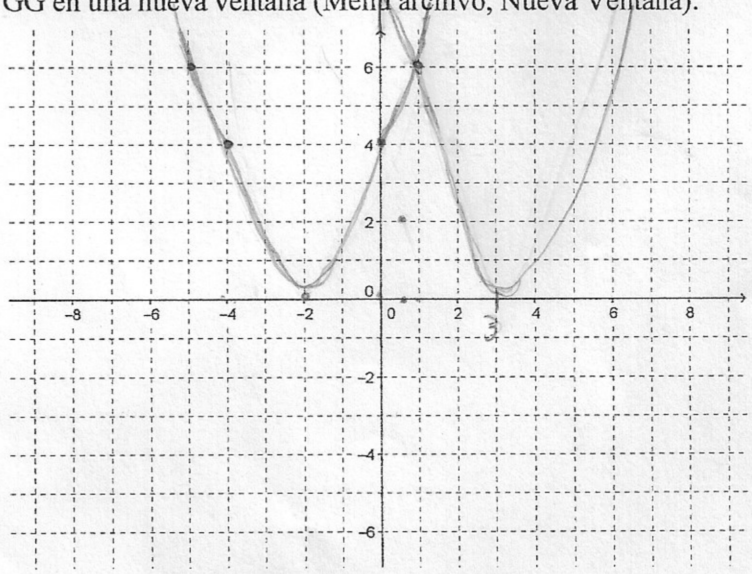
$g(x) = (x-1)^2$ $\quad$ $m(x) = (x+3)^2$

$h(x) = (x-2)^2$ $\quad$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c? Sea lo más claro y específico posible.

R/: las graficas se mueven segun cuando se cambia C, Tambien Dependiendo Del signo. Se mueve hacia la izquierda ó derecha.

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ o $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro d, para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$

$g(x)=x^2+1$

$h(x)=x^2-2$

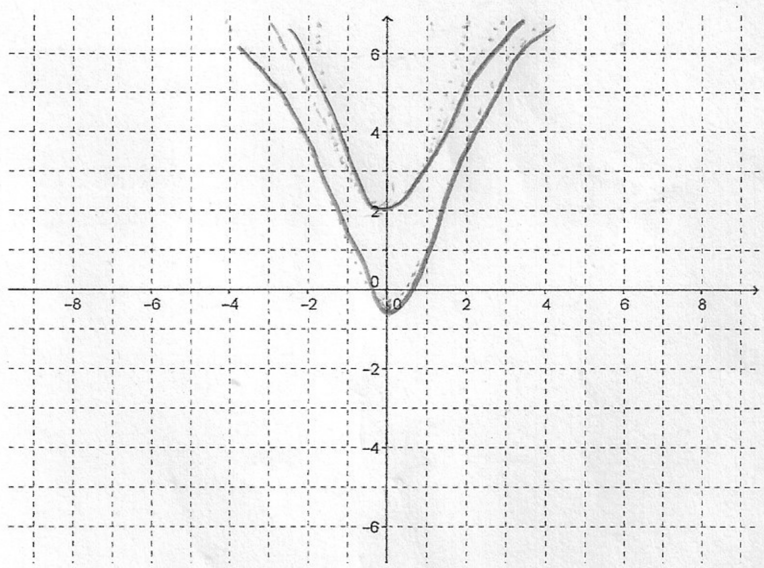
$k(x)=x^2+3$

$p(x)=x^2-4$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

R/= Cuando se Cambia D: en el eje de y se puede Observar si es Positivo Sube, si es negativo baja.

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x)=x^2+2$ o $k(x)=x^2-\frac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

R/= Si hay Relacion Por que Siempre se van a encontrar en algun Ponto De la grafica/.

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a,* pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

la grafica se desplaza de izquierda derecha

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $k(x) = -x^2$

$g(x) = 2x^2$ $\qquad$ $p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$h(x) = 3x^2$ $\qquad$ $q(x) = -0.33x^2$

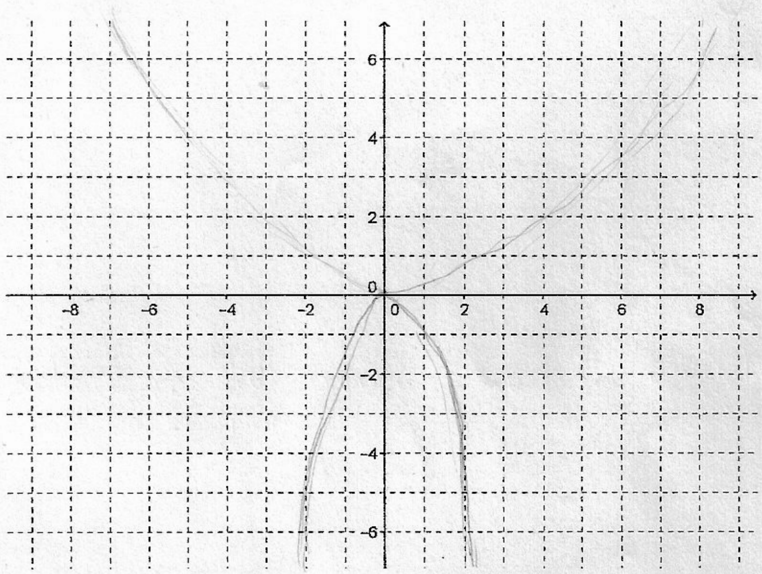
7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a ? Sea lo más claro y específico posible.

R/: Todas las ecuaciones inician en el punto (0,0). y cuando es Positivo esta arriba y negativo baja.

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro *a* en la gráfica?

La grafica en el eje y empieza desde 0 hacia bajo siendo y negativo.

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



Uso de Deslizadores

Tarea 8
Hasta aquí hemos revisado los parámetros *a, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro *c* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=(x+c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Pasa que la grafica se mueve a la izquierda y derecha entre los parametros -10 , 10 , donde -10 se mueve hacia la derecha y hacia 10 se mueve a la izquierda

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

No varia

Tarea 9
Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo *d* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

La grafica sube y baja en los parametros -10 , 10 cuando es negativo en el eje y empieza a bajar hacia los numeros negativos y si es positivo sube la curva

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Es diferente por que en la anterior se movia la grafica en el eje x y en esta determina desde que punto inicia la curva.

Tarea 10

Ahora revisemos el parámetro a, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo a , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Pasa que hacia la izquierda la grafica tiende a bajar e ir cerrandose en el eje y y hacia la derecha la grafica y se cierra hacia arriba

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

En la anterior se desplaza de arriba hacia abajo y en se desplaza pero se va cerrando dependiendo si es negativo o positivo.

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros c y d. ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

En c la grafica se mueve de izquierda derecha y en d la grafica se mueve de arriba hacia abajo

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

Segun cada deslizador en c la grafica se mueve la parabola de izquierda derecha y en d la parabola se mueve de arriba hacia abajo

Malcol Galindo
felipe Solano
Manta

DA01N

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

-2 · 2

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

-4

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

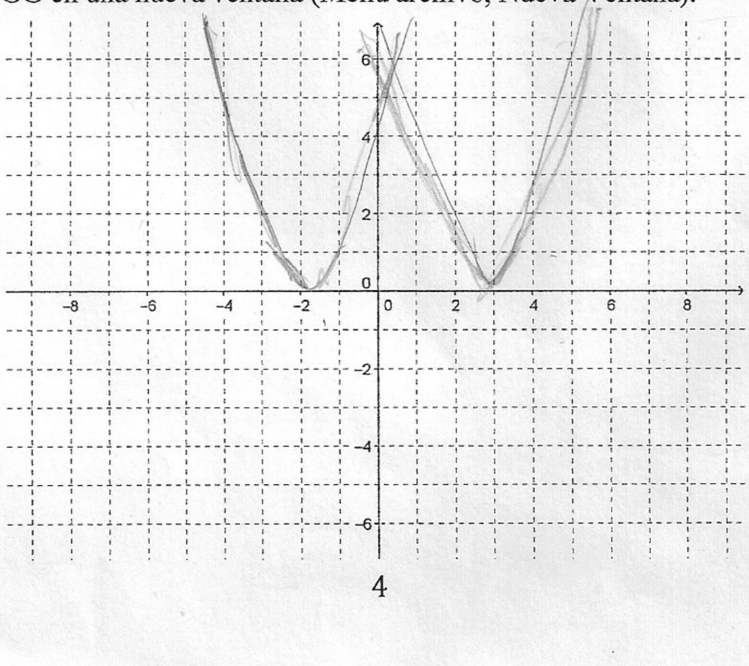
$g(x) = (x-1)^2$ $\qquad$ $m(x) = (x+3)^2$

$h(x) = (x-2)^2$ $\qquad$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c? Sea lo más claro y específico posible.

Las parabolas negativas van al lado positivo y las parabolas positivas al lado negativo. la suma de solo los ~~simbolos~~ signos

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ o $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro *d,* para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$

$g(x)=x^2+1$

$h(x)=x^2-2$

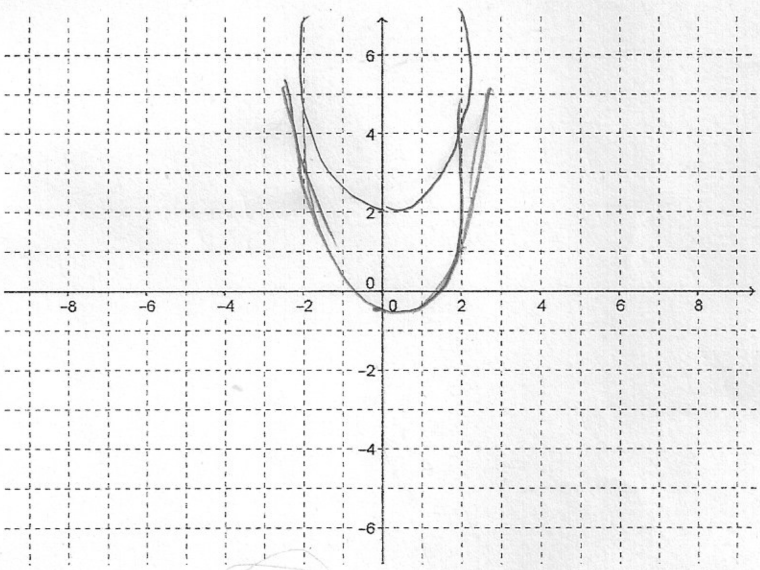
$k(x)=x^2+3$

$p(x)=x^2-4$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

Cada una pertene y no se mueve de y, el x^2 es el que afecta a la funcion, tambien dependen de la aplitud, puede afectar el signo.

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x)=x^2+2$ o $k(x)=x^2-\frac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

Marcol: Si, puede que cambie los vertices de cada funcion

Daniel: Si, mejora una perspectiva

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a,* pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

El parametro a es afectado en la forma negativa
La funcion cambia, puede que tenga un
efecto de inclinación y su deslizado
afecte su signo

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$	$k(x) = -x^2$
$g(x) = 2x^2$	$p(x) = \frac{1}{2}x^2$
$h(x) = 3x^2$	$q(x) = -0.33x^2$

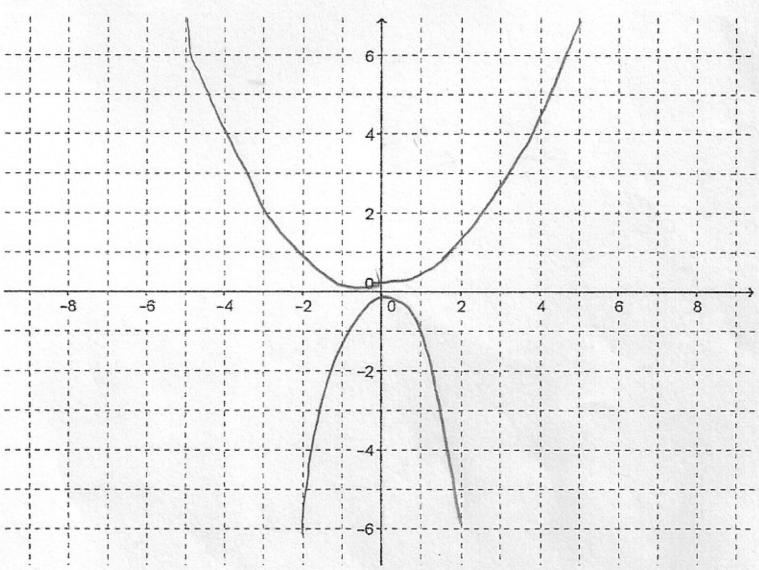
7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a ? Sea lo más claro y específico posible.

Al variar el permetro a, las graficas positivas van hacia arriba y llegan hasta cero, las negativas van al contrario de las positivas, y pasan por cero igual, a menor escala mayor avertura de la parabola.

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro *a* en la gráfica?

El negativo, pues solo lo manda a la + parte negativa del plano

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



Uso de Deslizadores

Tarea 8

Hasta aquí hemos revisado los parámetros a, c y d y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro c, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro c, con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=(x+c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Al mover el deslizador varia la ubicacion ya sea positivo o negativo, solo llega hasta cero

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si produce lo mismo, puesto que va de un lado a otro todo depende del signo (+, -)

Tarea 9

Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro d, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo d, con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Al deslizarlo, la parabola aumenta tanto su abertura y su amplitud, los negativos y positivos dependen del eje x y puede cambiar su estado

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si, no se mueve del eje y, la amplitud de-penden del signo (+, -) la funcion puedo ser cualquiera, le

Tarea 10

Ahora revisemos el parámetro a, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo a, con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Al deslizarlo, la parabola se abre hasta el punto 0 en el cual desaparece, su abertura depende de la funcion

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

No, esta vez la parabola se abre hasta el punto de desaparecer, en el punto 7,1 solo aumentaba la amplitud, tambien aqui, pero tambien varia los signos

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros c y d. ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

Al combinar los dos parametros cambian su amplitud y su posicion, pero su abertura es la misma

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

~~Sin~~ cambian su lugar pero su abertura es la misma y la amplitud aumenta o disminuye dependiendo donde este ubicado

Daniel F. Mata
Maicol Galindo

DA01N.

Al principio no nos dejaba graficar $m(x) = (x+3)^2$ y $n(x) = (x+4)^2$. $(x+4)$ ¿se grafico al lado negativo? Michael dice que es por los cuadrados y yo digo que es diferencia de simbolos, osea son los unicos que se toman. se hace otro ejemplo y las 2 cosas son en parte ciertas.

El primer numero es el "rango" osea la abertura de la ~~palabra~~ parabola.

Nicolas Gutierrez
Jan carlos Gutierrez

DAO 1N

1b FUNCIONES CUADRÁTICAS

La modificación de los parámetros y el efecto en la grafica

Continuaremos nuestro estudio con las funciones cuadráticas, para ello tomaremos la función patrón $y = x^2$ y revisaremos los parámetros a, c y d de la familia funcional

$$y = a(x - c)^2 + d$$

Para notar claramente los cambios que se ocurren sobre la función patrón $y = x^2$ es importante tomar uno por uno los parámetros (dejando los demás en cero) y ver el efecto que produce en la función patrón.

Como en tareas anteriores, vamos a graficar varias funciones, para cada una de ellas:

- Utilice colores diferentes.
- Asegúrese de que para una de las funciones aparezca la ecuación en la Vista Gráfica (cambiar nombre por nombre y valor en las preferencias).

Tarea 5
Comencemos graficando en GG la función $f(x) = x^2$ y cambiemos el parámetro c
En la misma pantalla grafique las funciones:

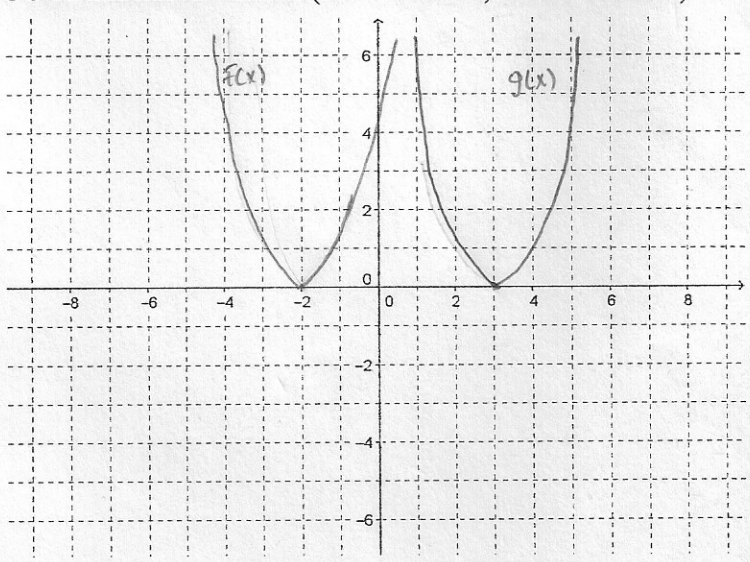
$g(x) = (x-1)^2$ $\quad$ $m(x) = (x+3)^2$

$h(x) = (x-2)^2$ $\quad$ $n(x) = (x+4)^2$

5.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro c? Sea lo más claro y específico posible.

El parametro c en este caso es el vertice de la parabola, cambia de acuerdo a el valor que tiene en la ecuacion, el signo es contrario (en el eje X)

5.2 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo, por ejemplo $f(x) = (x+2)^2$ o $g(x) = (x-3)^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



Tarea 6

Ahora revisemos el parámetro *d,* para ello, grafique en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana), nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$ $\qquad k(x)=x^2+3$

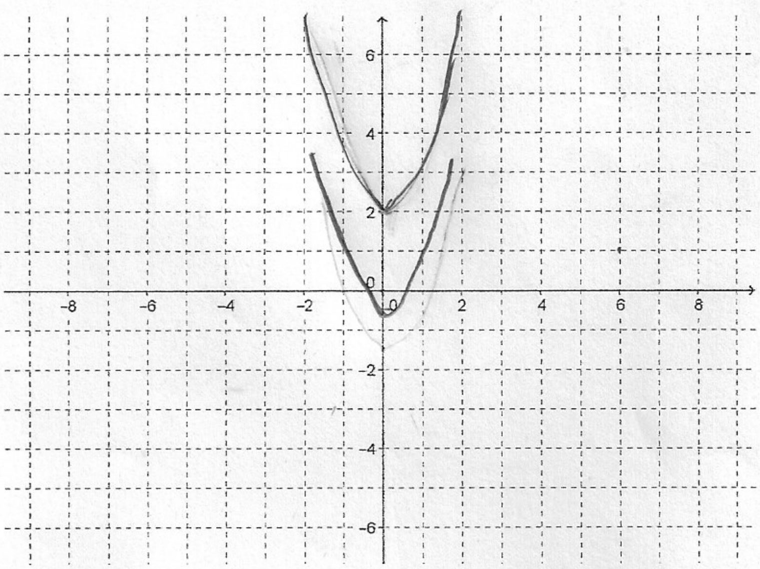
$g(x)=x^2+1$ $\qquad p(x)=x^2-4$

$h(x)=x^2-2$

6.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro d? Sea lo más claro y específico posible.

El numero entero es el corte con Y y solamente con y, por lo tanto vemos que el vertice se mueve en el eje y solo en el eje y. ~~tas~~ grafica se mantienen parabolas

6.2 ¿Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo? por ejemplo $g(x)=x^2+2$ *o* $k(x)=x^2-\frac{1}{2}$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana (Menú archivo, Nueva Ventana).



6.3 ¿Ve alguna relación entre el parámetro d que utilizamos en las funciones lineales y este parámetro d de las funciones cuadráticas? Explique.

Jan: Si, los dos son el que cambia el vertice de la parabola

Nicolas: Si

Tarea 7

Ahora estudiemos el efecto que produce el parámetro *a,* pero antes de hacerlo ¿Qué creé que ocurre al variar este parámetro? Anote su suposición

Si la función es negativa la grafica es negativa en Y. Y a medida que el parametro a. aumenta, la parabola aumentara en su anchor

Ahora si revisemos, grafique en una nueva ventana, nuevamente con colores diferentes y mostrando las ecuaciones en la Vista Gráfica, las siguientes funciones:

$f(x)=x^2$ $\qquad$ $k(x)=-x^2$

$g(x)=2x^2$ $\qquad$ $p(x)=\frac{1}{2}x^2$

$h(x)=3x^2$ $\qquad$ $q(x)=-0.33x^2$

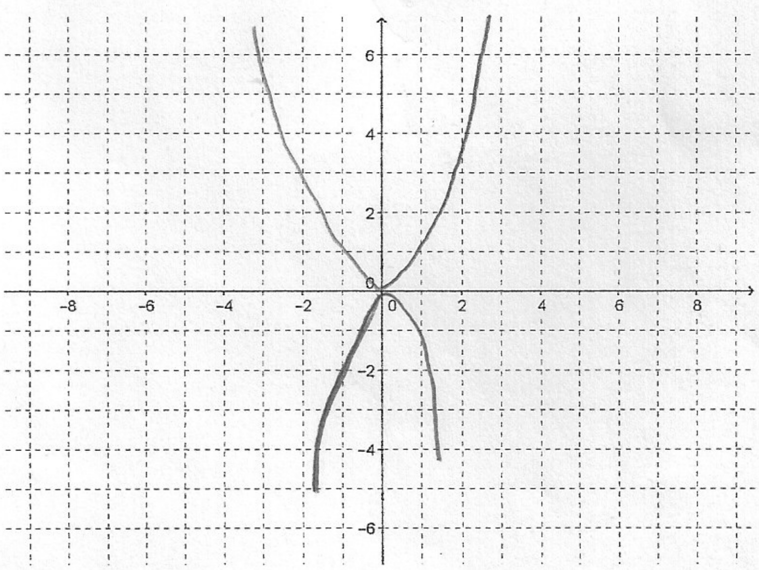
7.1 Escriba lo que nota, ¿Cómo cambian las gráficas, al variar el parámetro a ? Sea lo más claro y específico posible.

Todas las graficas parten del eje 0, la abertura de la parabola aumenta cuando el numero es pequeño, si la Funcion es negativa la grafica parte del punto 0 hacia el lado negativo en Y y abarca positivos y negativos en X

7.2 Específicamente, ¿Qué efecto produce el menos (-) junto al parámetro *a* en la gráfica?

Hace que la grafica este en el lado negativo en Y

7.3 Podría predecir como va a ser la gráfica de una función de este estilo como $f(x) = -2x^2$ o $f(x) = 0.33x^2$ realice un bosquejo con colores en papel y lápiz ANTES de hacerlo en GG en una nueva ventana



Uso de Deslizadores

Tarea 8
Hasta aquí hemos revisado los parámetros *a, c* y *d* y el efecto que producen en la grafica anotando varios ejemplos de la función, ahora revisemos los parámetros utilizando deslizadores.

Comencemos en el mismo orden que lo habíamos hecho, iniciando con el parámetro *c*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para el parámetro *c* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x)=(x+c)^2$ (paso 5 Tarea 3)

8.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Al mover el deslizador hacia la derecha notamos que el vertice se mueve hacia la izquierda y viceversa, (C)
y sucede lo mismo con a pero se mueve en el eje X

8.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 5.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Con el deslizador cumple la misma Funcion, al mover el deslizador se mueve la grafica dependiendo el parametro que sea.

Tarea 9
Continuando en el mismo orden revisemos el parámetro *d*, para ello, en una nueva ventana construyamos un nuevo deslizador llámelo *d* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = x^2 + d$ (paso 5 Tarea 3)

9.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Al mover el deslizador hacia la izquierda el vertice se mueve en el Y y disminuye hasta pasar a los negativos y viceversa, semueve el vertice en Y

9.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 6.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si, produce el mismo efecto, se mueve en el eje Y (Numero entero es el vertice) aumenta o disminuye en Y

Tarea 10

Ahora revisemos el parámetro *a*, para ello, en una nueva ventana vamos a construir un deslizador para este parámetro, llámelo *a* , con límites -10 y 10 (si le parece revise los pasos en la Tarea 3 de la sección 1a FUNCIONES LINEALES) solo que esta vez la expresión que anotaremos en la Barra de Entrada para incluir el deslizador será $f(x) = a * x^2$ (paso 5 Tarea 3)

10.1 Con el ratón mueva el punto del deslizador, ¿Qué sucede?

Cuanda a esta en 0 no hay grafica, al moverlo a la derecha el vertice es 0 y esta en lado positivo de Y, cambia la abertura. Y viceversa

10.2 ¿Produce el deslizador el mismo efecto que había anotado en la pregunta 7.1? en caso de ser diferente anote las diferencias.

Si al mover el deslizador cambia la abertura, y cambia de positivo a negativo en Y, el vertice es 0 siempre

10.3 ¿Qué creé que sucederá si combina dos deslizadores en la misma ventana? Por ejemplo los deslizadores de los parámetros *c* y *d*. ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función patrón $f(x) = x^2$

Cambian la abertura y el vertice de la funcion a medida que movemos los deslizadores; el vertice se mueve en Y y se varia la abertura

10.4 Realice en GG la combinación de los deslizadores. Ajuste la expresión para que los incluya a ambos. ¿Qué sucede?

Al mover los deslizadores cambia la funcion.

a = Controla la abertura (positivo o negativo)

d = controla vertice en Y.

C = Controla vertice en X

Nicolas Gutierrez
Jan Carlos Gutierrez

DAO1N

1. Nicolas = Cuando esta negativo en la ecuación aparece positivo en el eje (grafica)

Jan Responde = El vertice de la grafica es el numero dentro del parentesis con signo contrario

Nicolas agrega = Vemos que la parabola igual pero cambio el vertice de posición.

Jan anexa = Es cierto, tambien que cuando es X^2 el vertice es 0.

2. Nicolas = Es lo mismo en lo anterior pero el vertice se mueve en el eje Y.

Jan = Es cierto, pero no tanto jaja

Nicolas - jajaja

Jan = El numero es el vertice en Y (corte con Y)

① clip.0001
Voz 010 min 0. (1° Parte)
Video. MU14442. MOV.

ENTREVISTA

Nombre: Alvaro David Benitez Salamanca Grupo: DAO 1N Fecha: 28/11/14

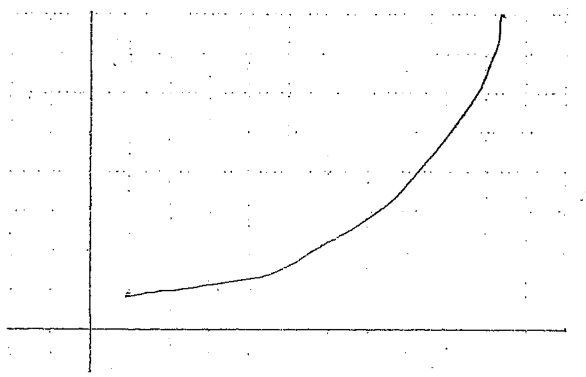
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

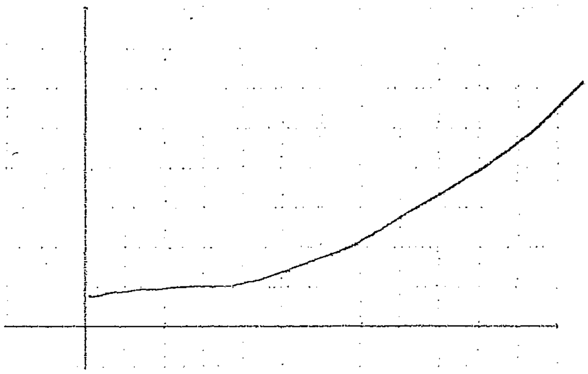
1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.



3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
Si puede ser exponencial o lineal

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si función exponencial o función lineal

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$y = 0.9755x^2 - 3391.1125x + 3284396.564$

formo la nube de puntos en geogebra luego colgo la opción regresion lineal para que me estudie que grafica es la mas adecuada. luego coloco el modelo de regresion donde busco la funcion

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

2008 = 5184.6092

2013 = 5836.3477

En el modelo de regresion ya teniendo la ecuación adecuada. busco en la opcion evalua para que me prediga como va hacer en esos años.

② clip 0002.
Voz 010 min. 18/19,…
Video. MVI 4443 mov.

ENTREVISTA

Nombre: Laura Daniela Ortiz Grupo: DAOIN Fecha: 28/11/2014

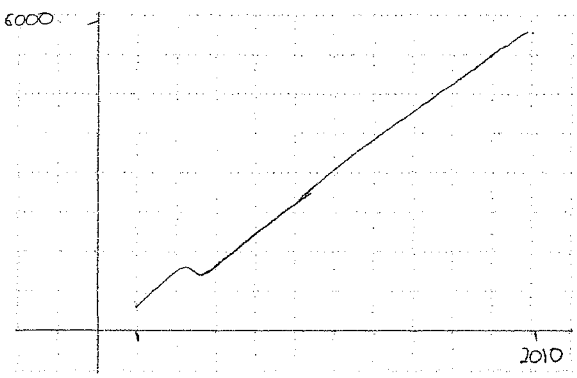
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.



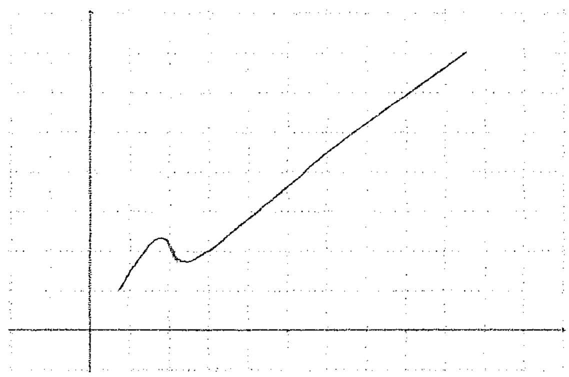
3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?
   Se asemeja a la función lineal, pero podría ser exponencial ó seno.
4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

Daniela.

Voz 10 → 18 seg ...

Clip 2

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

No, se asemeja a la lineal pero no lo es y no hay una Funcion que conosca que se le ajuste.

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

Polinomio: $y = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$.

La Ecuación se hallo mediante el Analisis de Regresión lineal.

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

PIB 2008: 5189.6092.

Remplazando el valor de x en la ecuación, o en analisis de datos, en evalúa x = se pone el año del cual se quiere hayar el PIB.

③ Clip 0003

Voz 011.

Video 28/11/2014 MVI_4445

ENTREVISTA

Nombre: Erika Milena barriga Grupo: DA01N Fecha: 28/11/2014

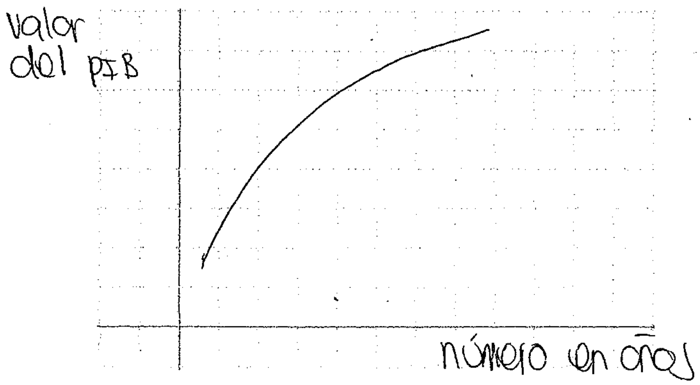
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.

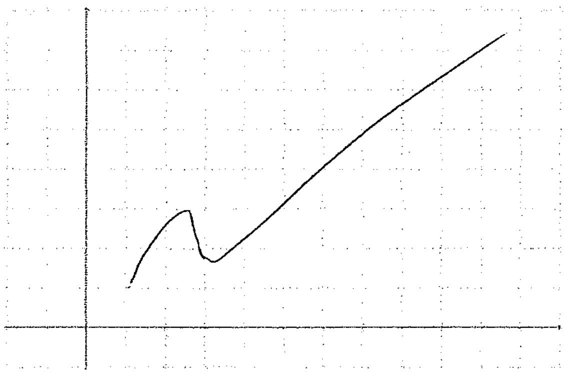


3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Sí, una funcion exponencial.

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

no,

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$g(x) = 0{,}88x^2 - 3391{,}11x + 3284396.56.$

usando los metodos de regresión en geogebra y analizando cada una de las graficas opcionales escogí la de polinomio puesto que es la que se acomoda mejor a la mayoría de puntos.

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

2008. = 51.89

2013 = 58.36

¿Comó ?

* con el metodo de regresión que más se ajusta y teniendo la formula reemplazo el valor que necesitamos en x para así hallar la y.

* otros métodos.
mirando la grafica se podrían denotar los demas valores.

④ Clip 0004
Voz 012.
Jean.

ENTREVISTA

Nombre: Jan Carlos Gutierrez Grupo:________ Fecha: 28 /11/2014.

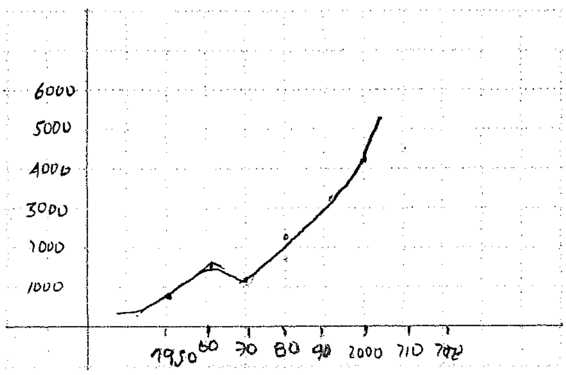
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.



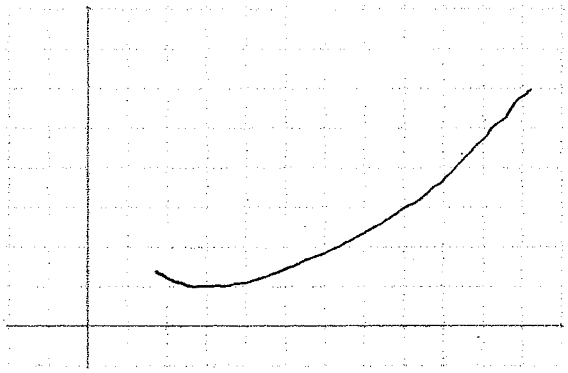
$F(x) = (x - 1941{,}3)^2 - 176$

3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, se parece a una Función cuadratica, esta es conocida por nosotros

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



$Y = 0{,}88x^2 - 3391{,}11x + 3284396{,}56$

6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Si, es una función polinomica, estas han sido estudiadas en clase

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

$Y = 0{,}88x^2 - 3391{,}11x + 3284396{,}56.$

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

2008 = 5189,6092.
2013 = 5836,347.

5 Clip 0005
Voz 013

ENTREVISTA

Nombre: Daniel Felipe Marta Grupo: DA01N Fecha: 28/11/14

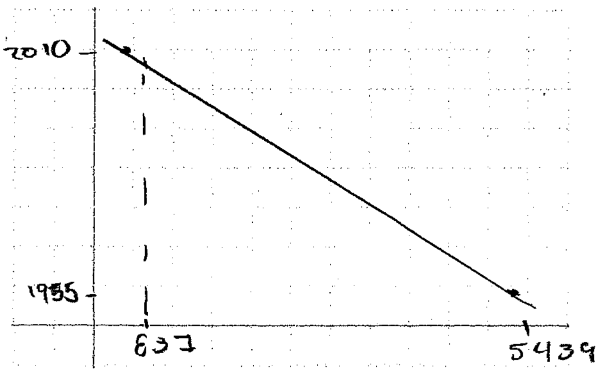
PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

1. Revise la tabla.
2. Trace un bosquejo de cómo cree que es la función que representa el PIB.

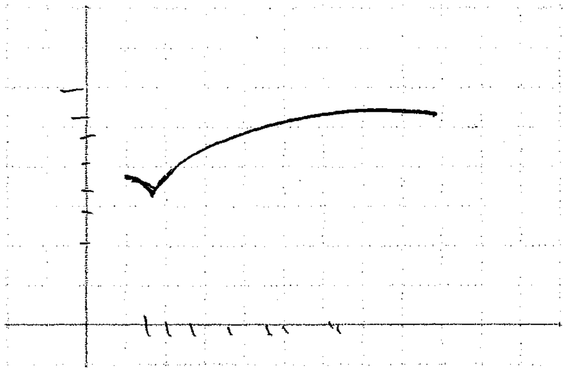


3. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Puede ser una función constante, o tambien una función lineal teniendo en cuenta los valores de la grafica

4. Ahora en GG reconstruya la tabla y grafique la nube de puntos.

5. Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG.



6. ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

Segun lo que hemos visto se podria decir que es una grafica cubica o exponencial.

7. Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique como lo hace.

La funcion que mejor se ajusta a los datos de la tabla seria la funcion cuadratica

$f(x) = 0.03(x - 2897)^2$.

8. Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?

Para el 2008 ~~las~~ el PBI seria de 5189.6097.

Y para el 2013 seria de 5836.3477.

Estos valores los halle evaluando en GG, pero tambien se podrian hallar tomando una referencia de año tras año.

ENTREVISTA DANIELA
Datos: Video… Audio… Pantalla …

Se le entrega a Daniela la Guía de Trabajo, y ella comienza a responder por escrito en la guía

(Daniela estudia la tabla presentada en la guía y a partir de la información dada en la tabla construye un bosquejo de cómo cree que podría ser la función que representa el PIB)
Maestro: ¿Cómo crees que es esa función?

1. Daniela: No se, porque bueno, uno así a simple vista uno podría decir que es lineal…
2. D: … pero si uno mira, no se también tiene unas variaciones …
   D: … porque acá sube … (señala con el dedo hacia arriba, refiriéndose a un punto de la gráfica que ha dibujado en la guía)
   D: … y luego baja … (hace un gesto hacia abajo con la mano)
   D: … y ahí ya hay una curva … (con la mano hace el gesto de una variación ascendente y descendente) …
3. D: … entonces eso cambia totalmente todo, ya no es una función lineal…
4. D: … más sin embargo de ahí sigue, pero entonces no se si pueda ser exponencial…
5. D: … pero entonces por la curva… según tengo entendido las únicas que dan como curvas así son las de seno…
6. D: … pero no se. (Silencio)
7. D: Suponiendo que es así (realiza un bosquejo de la función en la guía).

Gráfica 1 Bosquejo de la gráfica de la función (ítem 7 pregunta 2 de la guía)

D Retoma el trabajo en la guía durante 2 min.. completando los puntos 2 y 3 de la guía.

8. (D comienza a utilizar la Hoja de Cálculo (HdC) de GG en el ordenador e introduce [A1; años])
9. (D Introduce [B1; PIB])
10. (D Introduce [A2; 19950] corrige [A2; 1955])
11. (D Introduce [A3; 1960])

12. (D Introduce [A4; 1965])
13. (D Introduce [A5; 1970])
14. (D Introduce [A6; 1975])
15. (D Introduce [A7; 1])
16. (D Introduce [A8; 98])
17. (D corrige A7 e introduce [A7; 1980])
18. (D corrige A8 e introduce [A8; 1985])
19. (D Introduce [A9; 1990])
20. (D Introduce [A10; 1995])
21. (D Introduce [A11; 2000])
22. (D Introduce [A12; 2005])
23. (D Introduce [A13; 2010])
24. (D Introduce [B2; 837])
25. (D Introduce [B3; 1559])
26. (D Introduce [B4; 1328])
27. (D Introduce [B5; 1700])
28. (D Introduce [B6; 1934])
29. (D Introduce [B7; 2373])
30. (D Introduce [B8; 2847])
31. (D Introduce [B9; 3173])
32. (D Introduce [B10; 3746])
33. (D Introduce [B11; 4207])
34. (D Introduce [B12; 4853])
35. (D Introduce [B13; 5439])
36. (D selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)
37. (D crea la lista de puntos con el menú de la HdC de GG)
38. (D va a la ventana en la vista gráfica y hace click en la opción *"Encuadre de todos los objetos*", con lo que se visualiza completamente la nube de puntos)
39. (D ajusta el zoom de la vista grafica)
40. (D recorre con el cursor los puntos de la función comenzando en A(1955, 837) y terminando en L(2010, 5439), pasando específicamente por B(1960, 1559) y C(1965, 1328).

VISTA GRAFICA Y de la Hoja de Cálculo HASTA ITEM 40 en la pantalla del ordenador con GG

41. Maestro: ¿Si parece lineal?
42. D: No. Lo que yo te decía, la curva acá (D señala en la pantalla del ordenador como cambia la gráfica entre los puntos A(1955, 837), B(1960, 1559) y C(1965, 1328), hace el gesto de dibujar la gráfica) …
43. D: … de resto sigue así, así, así (D hace el gesto de cómo los demás puntos a partir de C(1965, 1328) mantienen la misma dirección)…
44. D: … por que tiene una alza y luego una caída (D hace el gesto con el lápiz en la mano de subir y bajar) …
45. D: … que es esto (D señala tocando con el lápiz en la pantalla del ordenador las casillas B3; 1559 y B4;1328 de la HdC)
46. D retoma la guía en papel para trabajar en el punto 5 "Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG"
47. (D dice algo, pero no se entiende)
48. (D realiza el bosquejo en la guía de acuerdo a la nube de puntos que aparece en GG).

GRAFICA 2 DE LA GUIA SEGÚN GG punto 5 de la guía, ítem 48

49. M: ¿Y como a qué función se te parecen esos puntos?
50. D: Es que si lo veo así, o sea … (D esta recorriendo los puntos de la nube de un extremo a otro moviéndose con el cursor)
51. D: … esta parte seria más bien como una línea [recta] (D recorre los puntos de la nube desde C(1965, 1328) hasta L(2010, 5439) de un punto a otro moviéndose con el cursor, hacia arriba y hacia abajo, y de nuevo hacia arriba, aunque cuando baja llega hasta el punto A sin pasar por B) ...
52. D: … pero no se
53. (D selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)
54. (D comienza a utilizar el menú estadístico de la HdC de GG para hacer un análisis de dos variables buscando

algún tipo de regresión)

55. M: Pero antes de hacer eso (se refiere al uso de las herramientas estadísticas de la HdC) ¿No hay otra forma de hacerlo?
56. D: ¿Qué cosa, calcularlo?
57. M: Si para encontrar la curva.
58 (silencio)
59. D: Pues yo no se o pues no recuerdo en el momento…
60. D: … ¡Ah! Pues unir puntos … (no se entiende)
61. D: … ¡Ah! Practicar con ecuaciones, con funciones
62. M: Ujumm (el maestro asiente)
63 D: Pero es que, bueno yo no se…
64. M: Ensaya
65. D: … *f(x)* pero es que siendo una lineal … (En la barra de entrada de GG D introduce *f(x)=* pero no completa la expresión y se queda pensativa)
66. (silencio)
67 D: … no, no se me ocurre…
68. D: … así como … (D introduce *f(x)=x2*)
69. (D corrige *f(x)*=x^2 y da enter)
70. D: Pero no la grafica
71. M: Si la debe graficar pero debe estar muy lejos
72. D: Si… (D se ha ubicado en la vista algebraica con el cursor sobre *f(x)*=x^2 parece que con la intención de editar la expresión)
73. D: … Suponiendo que… (silencio y luego D edita la expresión a *f(x)*=$2x^2$ y da enter)
74. (D vuelve a la expresión *f(x)*=x^2 dice algo inaudible y la edita escribiendo *f(x)*=$8x^2$ y da enter)
75. (D vuelve a la expresión *f(x)*=$8x^2$ y la edita escribiendo *f(x)*=$8x^2+$ y se queda en silencio)
76. M: ¿Recuerdas como se movía para qué… (refiriéndose a la gráfica de la función) … por ejemplo para moverlo a la derecha o la izquierda?
77. D: Los deslizadores
78. M: Eh si, o en la misma ecuación ¿Qué cambiaba para que se moviera a la izquierda o a la derecha?
79. D: Umm *x,* no mentiras … (D hace un gesto con la mano moviéndola de derecha a izquierda y de vuelta)
80. D: … o sea para … (D vuelve a hacer el gesto con la mano moviéndola de derecha a izquierda y de vuelta) …
81. D: … o será *y* ... (lo dice dudando)
82. M: No, es *x,* es *x,* pero ¿Qué haces?

83. D: … No se es que no me acuerdo
84. (D borrando la expresión anterior escribe en la ventana algebraica *f(x)=* pero no la completa)
85. D: O sea es negativo (señala la parte izquierda de la pantalla) positivo … (señala la parte derecha de la pantalla)
86. D: … pero bueno ahí está positivo … (señalando la nube de puntos)
87. D: … ahí la cosa sería … suponiendo que … esa se escribe como… entonces…
88. (D de nuevo en la ventana algebraica escribe *f(x)=837x + 1995* pero no le da enter para ver la posible gráfica y borra la entrada)
89. D: La verdad es que se me olvido profe, no se me viene a la mente una ecuación en el momento.
90. M: Entonces hazlo como lo estabas haciendo antes con la otra ventana
91. (D selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)
92. (D comienza a utilizar las herramientas estadísticas de la HdC del GG para hacer el análisis de regresión entre dos variables)
93. D: Esta (Aparece en la pantalla del ordenador una primera gráfica y su ecuación de regresión utilizando una función cuadrática)
94. (D cambia en el menú el tipo de regresión utilizando ahora una función lineal, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)
95. (D cambia en el menú el tipo de regresión utilizando en este caso una función logarítmica, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)
96. (D cambia en el menú el tipo de regresión utilizando en esta ocasión una función polinómica, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación, ésta coincide con la regresión cuadrática)

Gráfica 4 Regresión polinómica ítem 96

97. D: La polinomio es la que más se le parece
98. M: ¿Por qué crees que es mejor esa?
99. D: Por que toca la mayoría de los puntos y la cercanía que tiene de ellos es … (D mueve el cursor sobre los puntos de

izquierda a derecha)

100. D: … o sea, por decir éste está muy cerca … (señala con el cursor el punto C)

101. D: … éste también … (señala con el cursor el punto G)

102. D: … y éste también … (señala con el cursor el punto F)

103. D: … y el resto los toca … (D mueve el cursor sobre los puntos de izquierda a derecha)

104. D: … el único que está lejitos es éste (señala con el cursor el punto B) pero la gran mayoría pasa por ellos.

105. (D cambia en el menú el tipo de regresión utilizando una función sinusoidad, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

106 (D nuevamente cambia el tipo de regresión señalando esta vez en el menú una función de crecimiento [exponencial], aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

107. D: De crecimiento también podría ser

108. (D abre la ventana de los estadígrafos para la regresión de crecimiento [exponencial])

109. D: ¿Aquí qué pasó? (La ventana de los estadígrafos no es legible por la configuración de zoom que se le ha dado al ordenador para realizar la grabación de video)

110. M: Toca ese, si eso… (El maestro señala uno de los iconos para normalizar la visualización en la pantalla)

111. D: Pero ¿Por qué se ve tan chiquito [pequeño]? (Se muestra la ventana con los estadígrafos)

112. D: Este también podría ser… (D habla sobre la regresión exponencial)

113. D: … pero me parece que se ve mejor el polinomio … (D cambia de nuevo en el menú el tipo de regresión a una función polinomial, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

114. (D cambia en el menú el tipo de regresión volviendo a la exponencial, aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

115. (Nuevamente D cambia en el menú el tipo de regresión utilizando una función polinomial, aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

116. D: … si…

117. (D retoma la guía en papel para responder la pregunta 7 “Busque la

función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace" y comienza a contestar)

118. D: Aquí, explique cómo lo hace ¿Cómo lo halle?

119. M: Umjum (El maestro asiente)

Gráfica 3 Respuesta de la guía de entrevista de la pregunta 7

120. M: Cuéntame ¿Cómo la hallaste?

121. D: O sea como…

122. D: … se seleccionan estos dos que serían x y y ... (D señala las columnas A y B de la HdC)

123. D: … éste sería x por que no es variable (D señala la columna A) y éste y …

124 D: … luego se va uno a análisis de regresión lineal … (D indica los iconos del menú estadístico de la HdC)

125. D: … y él [el paquete informático GG] le arroja como la que mas se asemeje, o sea, la que cubra como la mayoría de puntos …

126. D: … pero entonces da también otras opciones de función, entonces de todas por decir la lineal y todo eso…

127. D: … pero la que más se asemeja es la polinomio por lo que yo te decía, por los puntos, pasa por la mayoría de ellos y los que no los toca están muy cerca

128. (D retoma la guía en papel para responder la pregunta 8 "Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?)
(D lee en voz baja la pregunta 8 de la guía: Según su función… […])

129 (D introduce 2008 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5189.6092)

130. M: ¿Y cómo haces para encontrar ese PIB para el 2008?

131. D: Se reemplaza en la *x,* por el, por el año, por decir en éste caso en análisis de datos uno remplaza en *evalúa,* entonces él calcula [el paquete informático GG calcula] o sea, el hace la operación matemática, o sea, reemplaza x en eso (D se refiere a la ecuación de regresión)

132. (D continúa contestando la pregunta 8 de la guía hasta terminar).

133. M: Bueno muchas gracias.

134. D: Con gusto profe.

Gráfica 4 Regresión Polinomial e Interpolación (ítems 128-132)

ENTREVISTA ERIKA

Datos: Video… Audio 011 Pantalla Clip 0003

Las preguntas de la entrevista se han organizado en una Guía de Trabajo, para darles respuesta el estudiante utiliza tanto la guía como el paquete informático GeoGebra (GG).

La guía propone la siguiente situación para ser modelizada:

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

Se le entrega a Erika la Guía de Trabajo, y ella comienza a responder por escrito en la guía.

1. (Erika estudia la tabla presentada en la guía y a partir de la información dada en la tabla construye un bosquejo de cómo cree que podría ser la función que representa el PIB)
2. Maestro: ¿Por qué crees que te da así? [el Maestro se refiere al bosquejo]
3. Erika: Porque hay unos valores, o sea empieza de chiquito [pequeño] a grande (E Mueve la mano de derecha a izquierda), pero también hay unos valores que van disminuyendo un tanto, y cosas así (E mueve la mano de arriba a bajo).
4. E: O sea, entonces no puede ser recta, porque no tienen como, no siempre van aumentando, entonces no siempre va ser así (E mueve la mano describiendo una diagonal, como una función creciente).

Gráfica 1 Bosquejo de la gráfica de la función (ítem 4 pregunta 2 y 3 de la guía).

5. (E amplia la ventana de la HdC de GG y comienza a introducir datos en la HdC, introduce [A1; años])
6. (E Introduce [B1; PIB])
7. (E Introduce [A2; 1960] corrige [A2; 1955])
8. (E Introduce [A3; 1960])
9. (E Introduce [A4; 1965])
10. (E Introduce [A5; 1970])
11. (E Introduce [A6; 1975])
12. (E introduce [A7; 1980])
13. (E introduce [A8; 1985])
14. (E Introduce [A9; 1990])
15. (E Introduce [A10; 1995])
16. (E Introduce [A11; 2000])
17. (E Introduce [A12; 2005])
18. (E Introduce [A13; 2010])
19. (E Introduce [B2; 837])
20. (E Introduce [B3; 1559])
21. (E Introduce [B4; 1328])
22. (E Introduce [B5; 1700])
23. (E Introduce [B6; 1934])
24. (E Introduce [B7; 2373])
25. (E Introduce [B8; 2847])
26. (E Introduce [B9; 3173])
27. (E Introduce [B10; 3746])
28. (E Introduce [B11; 4207])
29. (E Introduce [B12; 4853])
30. (E Introduce [B13; 5439])
31. (E cambia el encabezado de la tabla, cambiando el contenido de la celda A1, introduce [A1; x], con lo que GG grafica la recta $y = x$)
32. (E corrige e introduce [A1; X])
33. (E cambia el encabezado de la tabla, cambiando el contenido de la celda B1, introduce [B1; Y])
34. (E selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)
35. (E crea la lista de puntos con el menú de la HdC de GG)
36. (E va a la ventana en la vista gráfica y hace click en la opción *"Encuadre de todos los objetos*", con lo que se visualiza completamente la nube de puntos).
37. (E ajusta el zoom de la vista grafica a un 66%).

Gráfica 2 Vista Gráfica y de la Hoja de Cálculo en la pantalla del ordenador (ítem 37).

38. E: ¿Trazo una línea o dibujo los punticos? (E le consulta a M, se refiriere a la pregunta 5 de la guía: *Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG*).
39. (E señala con el dedo la trayectoria de la nube de puntos desde A(1955, 837) y hasta L(2010, 5439)).
40. M: Pues mas o menos, como la forma, es un bosquejo no tiene que ser así estrictamente cada punto, no
41. (E hace un nuevo zoom de acercamiento de la nube de puntos)
42. (E realiza un bosquejo a partir de la gráfica de la nube de puntos en GG)
43. E: No me acuerdo, no. (E se refiriere a la pregunta 6 de la guía:
¿La función se parece a alguna función que conozca o que hallamos estudiado?)
44. M: ¿Y que forma tienen esos puntos? ¿Es una recta?
45. (E recorre la nube de puntos con el cursor desde L(2010, 5439) hasta B(1960, 1539) y luego regresa hasta E(1975, 1934) y se aleja un poco de la nube de puntos).
46. E: No, pues no
47. E: ¿Cómo era? (E se pregunta a sí misma, en voz baja)
48. (E selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)
49. (E comienza a utilizar el menú estadístico de la HdC de GG para hacer un análisis de dos variables buscando algún tipo de regresión)
50. M: Pero, fuera de esa forma, ¿No hay otra manera en que puedas averiguarlo? (M se refiere al uso de las herramientas estadísticas de la HdC)
51. M: eso lo vamos a usar luego, pero…
52. E: Pues no se… con…
53. E: No pues para hallar una ecuación, ¿sería con la pendiente y esas cosas?
54. M: O algo así, si, por ejemplo
55. E: ¿pero igual la busco acá? (E se refiere al uso de las herramientas estadísticas de la HdC)
56. M: Pues si puedes hacer algo distinto de esa herramienta del GG, prueba con eso antes y luego sí de último hacemos lo de esa ventanita
57. (E revisa lo que ha respondido en la guía)
58 E: No se profe, no se que da…más hacer (no se entiende)
59. M: No, si el otro día hiciste una así

distinta, ¡sí!

60. E: No

61. M: Sí

62. E: Ah pues intentando funciones ¿no?

63. M: Por ejemplo

64. (E desplaza la ventana de las herramientas estadísticas, e intenta escribir en la barra de entrada, pero GG no responde)

65. M: Cierra la ventana y luego si vuelves

66. E: Es que no es eso

67. (E dice algo en voz baja que no se entiende) no se empiezo con 1955

68. (E escribe en la ventana de entrada 19955 y luego corrige a 1955)

69. (E dice algo en voz baja que no se entiende) no eso es en x

70. (E borra la entrada de 1955)

71. (E escribe en la ventana de entrada $837x$ y lo introduce)

72. E: ¿Aquí como hago para verla?
(E señala con el cursor la expresión $f(x) = 837x$ en la Vista Algebraica que se encuentra un poco oculta)

73. M: ¿Qué la veas?

74. E: Si

75. M: Corre un poco la ventana, desde el borde, ahí

76. E: ¿Acá?

77. M: Eso, (asiente)

78. E: Pero igual la [gráfica de la] línea no sale (E dice algo en voz baja que no SE entiende) en la pantalla, no es que…

79. M: Ah, ¿Qué las veas en la vista gráfica?

80. (E señala y recorre con el dedo la nube de puntos)

81. E: ujum

82. M: A no ahí si te toca correrte o haciendo zoom, o algo así (M se refiere a desplazarse por la vista gráfica, o hacer una traslación de la función)

83. E: No se (E dice algo en voz baja que no se entiende) que…

84. E: No se que hacer

85. E: No se que intentar

86. M: Con otro tipo de función o algo, otra que te sirva más

87. E: ¿Una exponencial?

88. M: ummmm

89. E: (E dice algo en voz baja que no entiende) … habría que sacar la grafiquita de allá

90. (E señala con el dedo la nube de puntos)

91. M: Bueno hazlo pues y luego volvemos a mirar a ver

92. (E sombrea en la HdC el bloque de celdas [A1: B13])
93. (E comienza a usar el análisis de regresión del menú estadístico de la HdC de GG y aparece una nueva ventana con la nube de puntos)
94. (E escoge la regresión lineal y observa su resultado en la nube de puntos)
95. (E cambia de regresión y escoge la regresión logarítmica y observa su resultado en la nube de puntos)
96. (Luego E cambia nuevamente de regresión y escoge la regresión polinómica y observa su resultado en la nube de puntos)
97. (De nuevo E cambia de regresión y escoge la regresión de potencia y observa su resultado en la nube de puntos)
98. (Nuevamente E cambia de regresión y escoge la regresión exponencial y observa su resultado en la nube de puntos)
99. (E cambia de regresión y escoge la regresión de crecimiento y observa su resultado en la nube de puntos)
100. (E de nuevo cambia de regresión y escoge la regresión sinusoidal y observa su resultado en la nube de puntos)
101. (E cambia de regresión y escoge nuevamente la regresión de crecimiento y observa su resultado en la nube de puntos)
102. E: todas funcionan
103. (E cambia nuevamente de regresión y escoge por segunda vez la regresión exponencial y observa su resultado en la nube de puntos)
104. (De nuevo E cambia de regresión y escoge nuevamente la regresión de potencia y observa su resultado en la nube de puntos)
105. (E cambia una vez más de regresión y escoge de nuevo la regresión polinómica y observa su resultado en la nube de puntos)
106. M: ¿Cuál te sirve?
107. E: la de polinomio
108. (E copia la gráfica de la regresión polinómica de la ventana estadística a la vista gráfica)
109. E: Si
110. E: No mentira
111. (E de nuevo cambia de regresión y escoge la regresión exponencial y observa su resultado en la nube de puntos)
112. (E vuelve a cambiar de regresión y escoge la regresión de potencia y

observa su resultado en la nube de puntos)

113. M: Acuérdate que luego tienes que predecir más valores, ¿no?

114. (E de nuevo cambia de regresión y escoge la regresión de crecimiento y observa su resultado en la nube de puntos)

115. (Una vez más E cambia de regresión y escoge la regresión logarítmica y observa su resultado en la nube de puntos)

116. (E vuelve a cambiar de regresión y escoge la regresión polinómica y observa su resultado en la nube de puntos)

117. (Nuevamente E cambia de regresión y una vez más escoge la regresión exponencial y observa su resultado en la nube de puntos)

118. (E copia la gráfica de la regresión exponencial de la ventana estadística a la vista gráfica)

119. M: Si quieres cámbiale el color o algo para [poderlas diferenciar] (M se refiere a las gráficas de las dos regresiones polinómica g y exponencial h)

Gráfica 3 Captura de pantalla después del ítem 101, con las regresiones Exponencial y Polinómica (las más intensa).

120. (E borra la ecuación de la regresión polinómica dejando solo la exponencial)

121. E: Ay ya no cuadra (se refiere a que el ajuste a la nube de puntos con esta función no es preciso)

122. E: Pero acá parece que cuadrara (se refiere a la representación gráfica en otra escala que se ve en la ventana estadística de la HdC)

123. E: no se

124. (E vuelve a la ventana estadística y cambia el tipo de regresión a una de crecimiento y copia la gráfica en la vista gráfica)

125. E: la lineal

126. (E borra la gráfica de la regresión de crecimiento en la vista gráfica.)

127. (E vuelve a la ventana estadística y cambia el tipo de regresión a una lineal y copia la gráfica en la vista gráfica.)

128. (E vuelve a la ventana estadística y cambia el tipo de regresión de nuevo a una función de crecimiento y copia la gráfica en la vista gráfica, quedando las dos regresiones.)

129. E: No se puede

130. (E borra las gráficas de las regresiones

de crecimiento y lineal en la vista gráfica.)

131. (E vuelve a la ventana estadística y cambia el tipo de regresión a una función polinómica y copia la gráfica en la vista gráfica)

132. E: Yo creo que esta es la que más da [la que mejor se ajusta a la nube de puntos] (se refiere a la regresión polinómica)

133. (E ajusta la vista gráfica haciendo zoom, alejando ligeramente la nube de puntos y la curva de regresión)

134. E: Yo creo que esta es la que más da [la que mejor se ajusta a la nube de puntos] (se refiere a la regresión polinómica)

Gráfica 4 Vista Gráfica con la regresión polinómica y la nube de puntos después de ítem 134.

135. M: Bueno, y ¿Por qué crees que esa es la que mejor le va?

136. E: Pues es como la que a más puntos se acerca, por que las tres son muy distantes (se refiere a las regresiones lineal, exponencial y de crecimiento).

137. E: Digamos, toca como estos tres (E señala los puntos I, K y L) y las otras si no tocan. Digamos toca más puntos que las demás, entonces pues es la que más se acomoda.

138. (Mientras explica, E aleja y acerca ligeramente la nube de puntos haciendo zoom en la vista gráfica).

139. (E retoma la guía en papel para responder la pregunta 7 *"Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace"* y comienza a contestar)

140. (E amplia la vista algebraica para ver toda la expresión de la función de regresión polinómica $g(x) = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$)

141. (E dice algo que no se entiende)

142. E: Y ¿Cómo explico cómo lo hago?

143. M: Escribe lo que hiciste

144. E: ¿Te escribo todo el proceso?

145. M: Ujumm (M asiente)

Gráfica 5

146. M: ¿Qué hiciste?

147. E: Pues ya teniendo los punticos, pues con el método de regresión de GG, pues mire todas las posibilidades que habían

de gráficas [de regresión] y pues [observe] la que más se acercaba y pues la escogí, en este caso es la de polinomio, y ya.

148. M: Ujumm (M asiente)

149. (E reajusta la vista algebraica a su dimensión original).

150. (E retoma la guía en papel para responder la pregunta 8 *"Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?"*)

151. E: Tengo que volver a sacar todo

152. (E sombrea en la HdC el bloque de celdas [A1: B13])

153. (E comienza a usar el análisis de regresión del menú estadístico de la HdC de GG y aparece una nueva ventana con la nube de puntos)

154. (E escoge la regresión polinómica y GG muestra la función $g(x) = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$)

155. (E introduce 2008 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5189.6092)

156. M: ¿Ahí qué hiciste?

157. E: Pues como esa es la función que más se acomoda a los puntos, entonces remplace la *x* en esta función para hallar *y*.

158. (E introduce 2013 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5836.3477).

159. (E contesta la pregunta 8 en la guía).

160. (E aleja y acerca ligeramente la nube de puntos haciendo zoom en la vista gráfica).

161. E: Pues de pronto si uno mira la gráfica puede hallar los otros valores ¿No? (E se refiere a la última parte de la pregunta 8 *"¿Podría usar otro método para hallar esos valores?"*).

162. M: Ujumm (M asiente) por ejemplo.

163. E: Yo creo que si.

164. M: ¿Podrías hallar otra función ahora si? Que no fuera con la herramienta del GG.

165. E: A ver yo pienso.

166. (E amplia la vista algebraica, como revisando la ecuación).

167. (E devuelve a su tamaño la vista algebraica y amplia la vista gráfica).

168. (E borra la curva polinómica de regresión que había encontrado, dejando solo la nube de puntos en la vista

gráfica).

169. E: Pues es que, ni idea como hacerlo, no, o sea es que los valores varían mucho, no tienen como un patrón para decir es esto menos tal.
170. M: De pronto de otro estilo funcione ¿No?
171. E: ¿Cómo otras funciones?
172. M: Con otro tipo de funciones.
173. E: No profe no se.
174. M: Bueno listo, muchas gracias.

ENTREVISTA JAN
Datos: Video… Audio… Pantalla …

Las preguntas de la entrevista se han organizado en una Guía de Trabajo, para darles respuesta el estudiante utiliza tanto la guía como el paquete informático GeoGebra (GG).

La guía propone la siguiente situación para ser modelizada:

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)
Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analys

Se le entrega a Jan la Guía de la entrevista.

1. Maestro: Lo que vamos a hacer es algo muy parecido a lo del otro día, [se refiere a una actividad de modelización de funciones realizada la semana anterior]
2. Jan: Ummm. Entonces vamos..
3. M: Eso …
4. (J Toma la guía y comienza a estudiarla)
5. M: … pero cuando vaya a encontrar las funciones, … trate de usar otros métodos antes de usar la herramienta esa grande que tiene el GeoGebra para calcularlo [se refiere al uso de las herramientas estadísticas de GG].
6. M: ¿Si? …
7. J: Si
8. M:… pues al final vamos a usar esa [herramienta], pero si puede utilizar otros métodos antes buenísimo…
9. J: …Listo pues…

10. (J comienza a introducir los datos de la guía en la Hoja de Cálculo (HdC) de GG en el ordenador e introduce [A1; años])

11 (J Introduce [B1; PIB])

12 (J Introduce [A2; 1995]

13 J: ¿Como es que se hace esto? [se pregunta a sí mismo, refiriéndose a una de las herramientas de las hojas de cálculo que permite la construcción de series con un intervalo definido y autorrellenar, simultáneamente J Introduce [A3; 1960])]

14 J: ¿Cómo es que hago? ¿Esto permite hacer automáticamente como Excel también? [J pregunta a M refiriéndose a la herramienta de la HdC de construcción de series]

15 (simultáneamente con las preguntas J sombrea las casillas [A2; 1955] y [A3; 1960] en un solo bloque, para ejecutar la construcción de la serie de años)

16 M: …si.. ujummm… [M asiente, confirmando que la herramienta construcción de series también se encuentra en GG]

17 J: …acá no… [J señala con el ratón la esquina inferior derecha y trata de halar el bloque sombreado, para construir la serie]

18 M: …si…

19 J:.. si lo halo acá no, no me da… [J señala con el ratón la esquina inferior derecha del bloque e intenta halar el bloque marcado y no le funciona y luego si hala el bloque sombreado, pero duda al no aparecer los datos inmediatamente, así construye una parte de la serie años, hasta [A8; 1985]]

20 M: …si mire… que si, que si…

21 (J vuelve a sombrear esta vez el bloque de celdas conformadas desde [A2; 1955] hasta [A8; 1985], luego señala con el ratón la esquina inferior derecha del bloque y hala el bloque marcado ampliándolo hasta [A15; 2020] con lo que completa la serie de años de la tabla)

22 J: … uich (sic) me pase…

23 (J borra las celdas [A15; 2020] y [A14; 2015])

24 (J Introduce [B2; 837])

25 (J Introduce [B3; 1559])

26 (J Introduce [B4; 1328])

27 (J Introduce [B5; 1700])

28 (J Introduce [B6; 1934])

29 (J Introduce [B7; 2373])

30 (J Introduce [B8; 2847])

31 (J Introduce [B9; 3173])

32 (J Introduce [B10; 3746])

33 (J Introduce [B11; 4207])

34 (J Introduce [B12; 4853])

35 (J Introduce [B13; 5439])

36 (J selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13)

37 J: Le ponemos colorcito y todo?

38 M: Si quiere si…

39 (J cambia el color de las columnas A y B desde A1 a B13 a verde)

40 J: …pongámosle un colorcito para resaltarlo…

41 J: …vamos a ponerle de todo…

42 J: …amarillito acá… [J sombrea las celdas del encabezado [A1; años] y [B1; PIB cambiándoles el color a amarillo]

43 (J selecciona desde A2 a B13 y con el menú del botón derecho del ratón crea la lista de puntos en la HdC de GG)

44 (J cambia a la vista gráfica de GG, y selecciona las preferencias de la vista gráfica)

45 (En la ventana de preferencias de la vista gráfica, J cambia las dimensiones automáticas de la ventana en x e y a:
x Mín: 1950, x Máx: 2010,
y Mín: -10, y Máx: 5500)

Gráfica 1 Captura de pantalla de la ventana de preferencias de la Vista Gráfica cambiando las dimensiones de la ventana (ítem 45).

Gráfica 2 Captura de pantalla de la nube de puntos hasta el ítem 45.

46 (Ya con los puntos visibles, J ajusta ligeramente el zoom de la vista gráfica, para que se visualice el eje x)

47 J: Bueno…

48 J:… uich…

49 M: …[risas]…

50 J: … esta si da super rara pero bueno podemos iniciar …

51 M: Ahí pareciera que hay un punto corrido, el quinto punto pareciera que tiene un error…

52 (J revisa los datos en la tabla de la guía)

53 J: Uy (sic) si, diecinueve treinta y cuatro (J cambia el contenido de la casilla B6 de [B6;1394] a [B6;1934]

54 J: … ahora si…

56 (J se desplaza con el cursor sobre la nube de puntos siguiendo su rastro desde el punto F(1980, 2373) y terminando en A(1955, 837) pasando específicamente por C(1965, 1328), y B(1960, 1559), cuando llega a A,

reinicia el recorrido pasando por B y se termina en C).

57 J: …bueno ahora entonces …

58 (J selecciona las dos columnas A y B desde A2 a B13) [parece que con la intención de utilizar las herramientas estadísticas de GG y realizar una regresión].

59 J: … ah pero entonces no hacemos esto…[se refiere al uso de las herramientas estadísticas de GG].

60 M: Pero antes de [hacerlo con las herramientas estadísticas], luego vamos a hacerlo allá con esa herramienta, pero entonces trate de hacerlo de otra manera…

61 J: …pues, como es que era…

62 (J empieza a pasar el cursor sobre los íconos del menú, como buscando algo, parece intentar recordar otro método).

63 J: … acá hay un trabajo…

64 (J sombrea las dos columnas A y B y abre el menú del botón derecho del ratón, y continúa buscando en las opciones).

65 J: …acá…

66 J:… ya no recuerdo como se hacia acá…

67 (J continúa explorando los íconos del menú principal, buscando)

68 (J señala el punto A con el cursor y abre el menú del botón derecho del ratón, y continúa buscando en las opciones).

69 (J acerca un poco el zoom de la vista gráfica para ver mejor la nube de puntos).

70 M: ¿Cómo a que función se le parece eso? [se refiere a la nube de puntos].

71 J: Eso puede ser una logarítmica tal vez, [lo dice en voz baja, dudando] o una exponencial, [en voz baja], pues una exponencial, pero la B no o de pronto, tal vez… [se refiere al punto B (1960, 1559), que se sale del patrón de la función].

72 J: …pero es que, no me acuerdo cómo es que se empiezan a sacar ahí las gráficas…

73 M: …Pues ensaye. Ensaye con una ecuación a ver que tan cerca le da o que tan lejos…

74 J: [en voz baja] …ummm digamos que seria, digamos una que vaya así, digamos…

75 J: … digamos, x menos, [pausa], menos 3 [J dice una expresión en voz baja que no se entiende], a la 0.3, tal vez…

76 (Simultáneamente J escribe poco a poco en la barra de entrada:
$f(x) = (x\text{-}3)\text{^}(0.3)$).

77 J : …uich ¿qué se hizo?...

78 (J aleja el zoom para hallar la ubicación de la función propuesta)

79 J: … mejor esa no… [la gráfica de la función propuesta no aparece en la vista gráfica, la escala es de:
x Mín: 1498.7, x Máx: 2433.39,
y Mín: -33562.75, y Máx: 52272.9).

80 J: … esa fijo no es…

81 M: …[risas]…

Gráfica 3 Captura de pantalla de la nube de puntos con zoom de alejamiento(ítem 79).

82 (J vuelve a acercar el zoom de la vista gráfica, a la disposición anterior).

83 J: …eh ¡a no! Es x [pausa], menos 1950, 1955, esto elevémoslo por ahí a la 0.5 tal vez

84 (Simultáneamente J escribe en la barra de entrada:
$f(x) = (x\text{-}1955)\text{^}(0.5)$).

85 J: ¿Donde esta? No tampoco…

86 M: …salió un pedacito…

87 J: … si pero tiene que acercarse mucho más…

88 M: … ujummm…

89 J: … entonces no funcionó…

90 J: … entonces vamos 1950 elevado a la 0.5 tal vez…

91 (Simultáneamente J escribe en la barra de entrada:
$f(x) = (1950)\text{^}(0.5)$).

92 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de alejamiento)

93 M: …pero tiene que ponerle x en alguna parte, ¿o no?...

94 J: …Si

95 M: …y si no, no le va a salir

96 J:… ¡Era la x!

97 (J escribe en la barra de entrada
$f(x) = 1955\text{^}x$)

98 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de alejamiento)

99 J: …no tampoco, se pierde la gráfica…

100 J: …ya casi de aquí a una media hora lo tenemos…

101 M: …[risas]…

102 J: $f(x)$ …bueno que le pongo a esto …

103 (J escribe en la barra de entrada
$f(x) =$)

104 M: …pues ensaye con otra función a ver si le sirve…

105 J: [en voz baja] 1950 [inaudible]

106 J: … bueno una polinómica, digamos que 1950 x más cinco

107 (J escribe en la barra de entrada $f(x) = 1950x + 5$)

108 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de alejamiento)

109 J: Se pierde…

110 J: …así es muy difícil, es más fácil cuando uno pone… o tal vez…

111 (J escribe en la barra de entrada $f(x) =$)

112 J: …no pero que más le pongo…

113 M: ¿una cuadrática no podrá ser?

114 J: ummm podría ser pero, [pausa], bueno si …

115 J:… podríamos poner una, entre más abierta, entonces podría ser como 1955 y eso elevémoslo al cuadrado…

116 (J escribe en la barra de entrada $f(x) = 1955x^2$)

117 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de alejamiento y desplazándose sobre el eje x)

118 J: … no esta… ummm …

119 J: …entonces pongamos x menos 1955 …

120 (J escribe en la barra de entrada $f(x) = (x - 1955)^2$)

121 M: … ummm ¡Mire, que bien!

122 J: … al fin salió una más o menos…

Gráfica 4 Captura de pantalla de la Gráfica de $f(x) = (x - 1955)^2$ (ítems 119-122).

123 J: … bueno ahora la agrandamos para ver bien los puntos…

124 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de acercamiento)

125 (J señala la gráfica de la función con el cursor y la sujeta, de esta forma mueve la función ajustándola a la nube de puntos)

126 J: …esa podría ser ¿no?…

127 (J revisa la vista gráfica haciendo un zoom de acercamiento sobre algunos puntos)

128 J: … a ver miremos cuales faltan… [se refiere a los puntos mas distantes de la función en la nube de puntos]

129 J: … los puedo acomodar mejor…

130 J: …pero la curvita de acá (J señala en la pantalla la curva que hace la nube de puntos entre A, B y C) es la que jummm…

131 J: …no esa curvita queda por fuera, en esta gráfica…

132 (J estudia en detalle cada punto de la nube y observa como se ajusta la función a ellos)

133 J: …a es que hay una que va…

134 M:… de pronto cerrándola más…

135 J: … si de pronto, ¿a ver cuál es la función?

136 (J amplia la vista algebraica para poder ver la función que esta ajustando $f(x) = (x - 1941.48)^2 + 609.35$)

Gráfica 5 Captura de pantalla en el ítem 136.

137 J: es x menos 1941… [no se entiende]

138 J:… Ahí esta tocando uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis puntos y pues digamos que mantiene la tendencia [J señala la trayectoria de la función después del punto L]…

139 (J ajusta ligeramente la función a la nube de puntos)

140 J:… Y acá [señala la función antes del punto A] pues tal vez, dejémoslo en que puede mantener la tendencia

141 J: …esa podría ser una que se asemeja…

142 J: … digamos que no coge la curvita de la B, pero pues ahí más o menos se ve para donde puede seguir la gráfica…

143 J: … y la función de esa entonces sería como …

144 M: Anote esa función por si acaso…

145 (J amplia la vista algebraica para poder ver la función que esta ajustando $f(x) = (x - 1941.32)^2 + 769.71$)

146 J: … anotemos por acá esto…(J anota en la guía la función que ajustó a la nube de puntos)

Gráfica 6 Captura de pantalla en el ítem 145.

147 (J completa en la guía las primeras preguntas que no había respondido por escrito).

148 J: …bueno el bosquejo a ver lo pintamos

149 (J amplia la ventana de la vista gráfica para ver mejor la nube de puntos)

150 así como por acá digamos que 1950… [no se entiende]

151 M: … igual es un bosquejo no tiene que ser exacta pues…

152 J: …si como para no irse uno a perder, acá, acá…(J ubica puntos en el bosquejo de la nube de puntos)

153 J: … el bosquejo vendría como así…

154 J: …¡uy no! pero yo para graficar si…

155 M: …[risas]…

156 J: … más o menos algo así…

157 J: … digamos…

158 (J hace un bosquejo de la nube de puntos semejante a la gráfica 6)

159 J: ¿La función se parece a alguna función que conozca? [J lee en voz alta la pregunta 3 de la guía y la contesta en silencio].

160 J: Pues esa ya sería una de las que "podría" tocar mas o menos los puntos …

161 M: …ujummm [asiente]

162 J: …a entonces dejémosla ahí y busquemos la que es …

163 M: … bueno…

164 (J selecciona las dos columnas A y B desde A2 a B13)

165 (J comienza a utilizar las herramientas estadísticas de la HdC del GG para hacer el análisis de regresión entre dos variables)

166 (Aparece en la pantalla del ordenador una primera gráfica y su ecuación de regresión utilizando una función cuadrática)

167 J : … exponencial, [duda] polinómica yo creo… (J se desplaza con el mouse por el menú de tipos de regresión)

168 (J cambia en el menú el tipo de regresión a una función polinómica, no cambian la gráfica ni su correspondiente ecuación, pues coinciden con la regresión cuadrática)

169 J: … ujumm…

170 (J cambia en el menú el tipo de regresión utilizando en este caso una función logarítmica, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

171 (De nuevo J cambia en el menú el tipo de regresión utilizando en este caso una función de crecimiento, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

172 J: …exponencial…

173 (J cambia nuevamente en el menú el tipo de regresión utilizando en este caso una función exponencial, y aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

174 J: … no…

175 M: … ¿no? ¿Esa no?

176 J:… ¿la exponencial? …

177 J:… pues si podría ser, pero a ver…

178 M:… ¿o hay alguna mejor?...

179 (J revisa nuevamente la lista de tipos de regresión y cambia a una regresión logística, luego aparece la gráfica con su

correspondiente ecuación)

180 (J vuelve y cambia en el menú el tipo de regresión utilizando una función sinusoidal, en este caso no grafica la regresión y aparece el mensaje: *No disponible*)

181 J:… no esta si no…

182 (J cambia en el menú el tipo de regresión volviendo a utilizar una función polinómica, aparece la gráfica con su correspondiente ecuación)

183 J:… mira, esta podría estar mejor, [se refiere a la función polinómica] toca casi todos los puntos , excepto la curvita en 1960… (simultáneamente J mueve el cursor sobre la nube de puntos de un extremo a otro desde el punto L (2010, 5439) hasta el punto A (1955, 837), luego de llegar a A, se regresa a B (1960, 1559) y deja el cursor en B)

184 M: Fíjese que luego va a tener que predecir unos puntos después de los valores que tiene…

185 J: …no yo creo que la polinómica, además mantiene la tendencia, y acá también… (J señala con la mano los extremos de la nube de puntos sobre la pantalla del ordenador)

186 J: …pues eso creo, ¿no? Una polinómica …

Gráfica 7 Regresión polinómica (ítems 182-185).

187 (J retoma la guía para escribir la ecuación de la regresión)

188 M:… pues anote entonces esa también si quiere

189 J:… si entonces acá la anoto …

190 (J escribe la función: $y = 0.88\,x^2 - 3391.11x + 3284396.56$

191 J: …¿se la aplicamos ahí?

192 M:… si, si quiere…

193 (J pasa la gráfica de la regresión de la ventana estadística a la Vista Gráfica del GG)

194 M:… ¿Que tanta es la diferencia?...

195 J:… pues más o menos…

196 J:… espere le ponemos más color a eso, que se vea …

197 M:… [risas]

198 J:… pongámosle un azul … [J le cambia el color a la función de ajuste polinómico $g\,(x)$ que halló con el GG, dejándola azul]

Gráfica 8 Captura de pantalla con las dos funciones, la regresión polinómica $g(x)$ en azul (ítem 198).

199 J:… pues digamos que esta [se refiere a la función de color negro $f(x) = (x - 1941.32)^2 + 769.71$] es un poco mas cerrada, la negrita mantiene los puntos de acá… (J señala con el cursor los puntos C, E y H por los que pasa la función $f(x)$)

200 J:… y mantiene más la tendencia la azul

201 J:… ahora…

202 (J retoma la guía)

203 (J lee en voz baja la pregunta 5 de la guía)
J: Haga un bosquejo de la gráfica que le resultó en GG

204 M: … no pero si usted ya pinto la otra…

205 J:… si ya…

206 (J lee en voz baja la pregunta 6 de la guía)
J: ¿La función se parece a alguna función que conozca o que hayamos estudiado?

207 (J responde en la guía)

208 (J lee en voz baja la pregunta 7 de la guía)
J: Busque la función que de el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación.

209 (J responde en la guía escribiendo la función polinómica:
$y = 0.88\,x^2 - 3391.11x + 3284396.56$)

210 (J lee en voz baja la pregunta 8 de la guía)
J: Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013?

211 (J señala con el cursor la gráfica azul de $g(x)$ en la Vista Gráfica y abre la ventana de propiedades con el botón derecho del mouse)

212 J: Uy acá, no acá toco … [no se entiende]

213 (J selecciona las dos columnas A y B desde A2 a B13)

214 (J vuelve a utilizar el menú estadístico de la HdC de GG para hacer el análisis de regresión de nuevo le aparece la misma la regresión polinómica)

215 J: … era esta… [se refiere a la regresión polinómica]

216 J: …entonces 2008, 2008 (En la ventana estadística con la regresión polinómica J coloca el valor 2008 para interpolar)

217 M: ¿Y ahí que hizo?

218 J: Acá evalué la x en 2008 con la función que según el análisis que hizo

[GG] se acerca más a los puntos, a los datos que nos dieron.

219 J: 2008 daría como 5189.6092 [el valor de la interpolación es (2008, 5189.6092)]

220 J: es como la que mejor mantiene la tendencia

221 J: Ahora evaluemos, la *x* es 2013…

222 (En la ventana estadística con la regresión polinómica J coloca el valor 2013 para interpolar)

223 J: …2013 es 5836.3477 [el valor de la interpolación es (2013, 5836.3477)]

Gráfica 9 Interpolación para x = 2008 (ítems 216 – 219).

224 M: ¿Y esos valores si son razonables, con la tabla y todo lo que le esta dando?

225 J: Si pues podría ser, digamos que en el 2008 el valor que me da se mantiene entre los dos [puntos K y L] …

226 (J selecciona en la tabla de la HdC la casilla [A12 ; 2005] que corresponde a la coordenada *x* del punto K (2005, 4853))

227 J:… digamos que es mayor que 4207, a no es mayor que 4853, pero es menor que 5439 [J mira en la tabla las coordenadas de K (2005, 4853) y L (2010, 5439)] esta más o menos intermedio entonces podría seguir la tendencia…

Gráfica 10 Captura de pantalla con la tabla y el 2005 señalado (ítem 226).

228 J:… y en el 2013, es un poco mayor que en el 2010, puede mantener las tendencias.

229 J: A ver ahora (J lee la última pregunta de la guía) ¿Podría usar otro método para hallar estos valores?

230 J: Para hallarlos si, podría remplazar en la fórmula, lo que hacemos acá [se refiere a la interpolación en GG], pero hacerlo nosotros, remplazar la *x* por el 2013, o 2008.

231 J:…¿y ya se acabo?

232 J: ¿eso es todo?

233 M: Eso era

ENTREVISTA ALVARO
Datos: Video MVI_4442.MOV Audio Voz 010 (1parte) Pantalla Clip 0001.avi

Las preguntas de la entrevista se han organizado en una Guía de Trabajo, para darles respuesta el estudiante utiliza tanto la guía como el paquete informático GeoGebra (GG).

La guía propone la siguiente situación para ser modelizada:

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)
Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

Se le entrega a Alvaro la Guía de Trabajo, y el comienza a responder por escrito en la guía.

1. (Alvaro recibe la guía de trabajo)
2. Alvaro: ¿La marco?
3. Maestro: Sí, sí márquela, llene ahí las cositas que hay que llenar.
4. A: ¿DA1 sí es? (A pregunta por el nombre del grupo al que pertenece, uno de los datos iniciales que pide la guía)
5. M: A el de ustedes sí es DAO1N
6. A: ¿Estamos a 27, 28? (la fecha de la entrevista)
7. M: Uppps.
8. A: ¿Qué paso?
9. M: A ya, me asustó (ajustes previos para la grabación de la entrevista).
10. M: Empecemos.
11. (A estudia la tabla presentada en la guía y a partir de la información dada en la

tabla construye un bosquejo de cómo cree que podría ser la función que representa el PIB)

Gráfica 1 Bosquejo de la gráfica de la función (ítem 11 pregunta 2 y 3 de la guía).

12. A: ¿Empiezo a pasar la tabla de una vez? ¿la voy pasando? ¿O quiere que empiece a grabar?
13. M: Si comience, comience. Ah espere, póngalo a grabar ahí por favor, ahí *stop rec,* listo. (M se refiere a que active en la ventana del ordenador uno de los programas que grabará la entrevista).
14. (A comienza a introducir datos en la HdC de GG, introduce [A1; años])
15. (A Introduce [B1; PIB])
16. (A Introduce [A2; 1955])
17. (A Introduce [A3; 1960])
18. (A Introduce [A4; 1965])
19. (A Introduce [A5; 1970])
20. (A Introduce [A6; 1975])
21. (A introduce [A7; 1980])
22. (A introduce [A8; 1985])
23. (A Introduce [A9; 1990])
24. (A Introduce [A10; 1995])
25. (A Introduce [A11; 2000])
26. (A Introduce [A12; 2005])
27. (A Introduce [A13; 2010])
28. (A Introduce [B2; 837])
29. (A Introduce [B3; 1559])
30. (A Introduce [B4; 1328])
31. (A Introduce [B5; 1700])
32. (A Introduce [B6; 1934])
33. (A Introduce [B7; 2373])
34. (A Introduce [B8; 2847])
12. (A Introduce [B9; 3173])
13. (A Introduce [B10; 3746])
14. (A Introduce [B11; 4207])
15. (A Introduce [B12; 4853])
16. (A Introduce [B13; 5439])
17. M: Cuénteme una cosita antes de que empiece a graficar allá eso (M se refiere a graficar la nube de puntos con GG).
18. M : ¿Esa gráfica que usted hace ahí en la hoja por que cree que es así? (M se refiere al bosquejo realizado en la guía, ver ítem 11).
19. A: ¿Exponencial?

20. M: No se, esa forma en que la puso ahí

21. A: Va en crecimiento,

22. M: Ya

23. A: Esto por ejemplo que va subiendo la gráfica (A señala valores del PIB en la tabla)

24. M: Bueno listo

25. M: ¿Pero no es una recta? ¿o si es una recta?

26. A: No, creo que es en forma exponencial, pero todavía no se, hay que graficarla.

27. M: Vale.

28. (A amplia la vista de la HdC).

29. (A selecciona el bloque de celdas [A2; B13] y con ellas crea una lista de puntos).

30. (A abre la ventana estadística y comienza a realizar el análisis de regresión en GG).

31. A: ¿Se puede agrandar? (A se refiere a ampliar la ventana estadística de GG).

32. M: Si se puede, cogiéndolo del bordito

33. (A amplia la ventana).

34. M: Eso.

35. (A escoge una regresión exponencial en la ventana estadística)

36. (A cambia el modelo de regresión a uno lineal)

37. (A nuevamente cambia, esta vez a un modelo de potencia)

38. A: Yo creo que esa (A cambia a la regresión exponencial y recorre con el cursor los puntos)

39. M: ¿Esa será la mejor?

40. A: Pues, tal vez la que toca más puntos es esa, la que coge más puntos y va siguiendo

41. M: ¿Pero luego para poder predecir? Como luego le preguntan ahí que va a pasar con el Producto Interno Bruto (PIB) después, ¿Qué pasará?

42. A: De pronto mejor lineal, por que esta empieza a subir. [Mejor] Un poco mas recto, así, no se (A cambia a la regresión lineal).

43. (A cambia a la regresión polinómica)

44. A: Entonces esta.

45. M: No se. Usted tranquilo escoja la que le parezca.

46. (A retoma la guía en papel y comienza a contestar la pregunta 7 *"Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación.*

Explique cómo lo hace”).

47. (A amplia la ventana estadística y anota la expresión de la función de regresión polinómica $g(x) = 0.8755x^2 - 3391.1125x + 3284396.564$).

Gráfica 2 Imagen de la ventana estadística en el ítem 47

48. M: Cuénteme ¿Por qué escogió esa gráfica y no otra función?
49. M: o si quiere lea eso que usted escribió ahí de cómo la encuentra.
50. A: Yo la escogí porque es la gráfica que coge todos los puntos de la tabla, es la que más se adecúa a todos los datos de la tabla.
51. M: Ummm.
52. (A introduce 2008 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de estadística y el programa le da como salida 5189.6092).
53. M: ¿Y ahí que esta haciendo?
54. A: Predecir el Producto Interno Bruto en el 2008.
55. (A introduce 2013 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana estadística y el programa le da como salida 5836.3477)
56. (A retoma la guía en papel para responder la pregunta 8 *“Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?*).
57. M: ¿Cree qué habría encontrado o habría podido encontrar una función que diera un muy buen ajuste, sin usar las ayudas del GG? O sea ¿Sin utilizar esa ventana en particular? (M se refiere a la ventana estadística del GG).

58 A: Sí pero pues ya tocaría identificar más o menos que función es y colocar pues no se como en un deslizador tratando de cuadrar una función que más o menos se ajuste

59. M: Ensaye, ensaye ¿Cómo haría eso?
60. A: No se, es que eso si es…
61. M: Yo se que eso es un poquito más largo, pero ensaye, ensaye a ver si le funciona.
62. A: A ver.

63 (A borra la ventana estadística y queda

la Vista Gráfica de GG).

64. (A escribe en la barra de entrada y =).

65. (A escribe en la barra de entrada
$y = 2$^x)

66. (En la Vista Gráfica de GG aparece la gráfica de la función $f(x) = 2^x$).

67 A: Pero no me acuerdo como hacer un deslizador, no me acuerdo como se hace.

68. (A se desplaza por la barra de herramientas buscando el deslizador).

69. M: Ummm, aquí esta (M señala entre los iconos de la barra de herramientas el que corresponde a los deslizadores).

70. (A activa la herramienta deslizador).

71. M: Ahí.

72. A: No me acuerdo como se colocan las [los parámetros]

73. A: Además no veo cuanto necesito para correrlo

74. A: Puedo hacer esto, pero pues hasta que llegue allá (se refiere a desplazar la función manualmente, con la herramienta de arrastre de GG).

75. (A desplaza la función $f(x) = 2^x$ de manera manual aproximadamente 12 unidades a la derecha en el eje x y 1.3 unidades hacia arriba en el eje y, con la herramienta de arrastre de GG, la función es ahora
$f(x) = 2^{(x-12.2)} + 1.3$).

Gráfica 3 Uso de la herramienta de arrastre de GG $f(x) = 2^x$ desplazada a $f(x) = 2^{(x-12.2)} + 1.3$

76. A: No me acuerdo como se hacia para el deslizador.

77. A: Yo movería esto (señala la función que ha desplazado) hasta allá y trataría de cuadrarlo (se refiere a la ubicación de la nube de puntos).

78. M: ¿Y así a mano no lo podría mover?

79. A: ¿A Mano?¿Así?

80. (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es
$f(x) = 2^{(x-14.5)} + 1.3$).

81. (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a la derecha 17 unidades)

82. (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es
$f(x) = 2^{(x-30.2)} + 1.3$).

83. (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a la derecha 22 unidades)
84. (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-45.1)} + 1.62$).
85. A: No puedo, ¿Cómo se puede ampliar esto? ¿Se puede?
86. M: Sí.
87. (A hace un zoom continuado sobre la función alejándose)

Gráfica 4 La función después del ítem 87.

88. (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-915.23)} + 46.7$).
89. (A hace un zoom continuado sobre la función alejándose)
90. (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-1290)} + 57$).
91. (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-1400)} + 96$).

Gráfica 5 La función después del ítem 91.

92. (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a la derecha 1900 unidades y 700 unidades hacia abajo, en esta vista se ve parte de la nube de puntos).
93. (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre de GG, ahora es $f(x) = 2^{(x-2280)} + 800$).
94. (A hace un zoom sobre la función acercándose).
95. (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a la derecha 120 unidades y 590 hacia arriba, en esta vista se

observan los puntos A, B, C y D).

96. (A hace un zoom sobre la función alejándose, se ven los puntos A, B, C, D, E y F).

97. (A desplaza la función mediante el arrastre y la acerca a la nube de puntos).

98. (A hace un zoom sobre la función acercándose se observan los puntos B, C, D, E, F y G).

99. (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose a izquierda y derecha y arriba y abajo alrededor de la función)

100. (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica hasta una posición en que se ven los ejes de coordenadas, ahí se puede apreciar que la función corresponde a la expresión $f(x) = 2^{(x-2150)} + 900$).

101. (A desplaza nuevamente la función manualmente con la herramienta de arrastre acercándola a la nube de puntos, ahora es
$f(x) = 2^{(x-2000)} + 700$).

102. (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose hacia arriba y abajo alrededor de la nube de puntos).

103. (A desplaza nuevamente la función de manera manual con la herramienta de arrastre, acercándola un poco más a la nube de puntos ahora es
$f(x) = 2^{(x-1970)} + 700$).

104. (A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose continuamente hacia arriba por la nube de puntos hasta llegar al punto I y luego baja nuevamente hasta el punto A).

105. (Una vez más A desplaza la función de manera manual con la herramienta de arrastre, acercándola a la nube de puntos ahora es
$f(x) = 2^{(x-1972)} + 827$).

106. (A hace un zoom continuado sobre la función acercándose).

107. (Nuevamente A se desplaza dentro de la Vista Gráfica moviéndose sobre la nube de puntos hacia arriba y hacia abajo).

Gráfica 6 La función después del ítem 107.

ENTREVISTA FELIPE
Datos: Video MVI_FELI… Audio 013 Pantalla Clip 0005
Tiempos: 0 +1:13 (- 0:54 audio)

Las preguntas de la entrevista se han organizado en una Guía de Trabajo, para darles respuesta el estudiante utiliza tanto la guía como el paquete informático GeoGebra (GG).

La guía propone la siguiente situación para ser modelizada:

PRODUCTO INTERNO BRUTO (PIB)

Uno de los indicadores más significativos de la economía de un país es su producto interno bruto (PIB). Los siguientes datos muestran el PIB de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1955 hasta 2010 para algunos años específicos.

Años	PIB
1955	837
1960	1559
1965	1328
1970	1700
1975	1934
1980	2373
1985	2847
1990	3173
1995	3746
2000	4207
2005	4853
2010	5439

Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis

Se le entrega a Felipe la Guía de Trabajo, y el comienza a responder por escrito en la guía.

1. (Felipe lee la guía y estudia la tabla presentada y a partir de la información dada en la tabla construye un bosquejo de cómo cree que podría ser la función que representa el PIB)

Gráfica 1 Bosquejo de la gráfica de la función (ítem 1 pregunta 2 y 3 de la guía).

2. (Felipe amplia la ventana de la HdC de GG y comienza a introducir datos en la HdC, introduce [A1; años]).
3. (F Introduce [B1; PIB]).
4. (F Introduce [A2; 1955]).
5. (F Introduce [A3; 1960]).
6. (F Introduce [A4; 1965]).
7. (F Introduce [A5; 1970]).
8. (F Introduce [A6; 1975]).
9. (F introduce [A7; 1980]).

10. (F introduce [A8; 1985]).
11. (F Introduce [A9; 1990]).
12. (F Introduce [A10; 1995]).
13. (F Introduce [A11; 2000]).
14. (F Introduce [A12; 2005]).
15. (F Introduce [A13; 2010]).
16. (F Introduce [B2; 837]).
17. (F Introduce [B3; 1559]).
18. (F Introduce [B4; 1328]).
19. (F Introduce [B5; 1700]).
20. F: 1934 huy mentiras creo que el bosquejo lo hice mal
21. (F se refiere al punto E (1975, 1934) en donde se da cuenta que se ha equivocado).
22. Maestro: No importa, es su primer bosquejo, ahora tiene el chance de hacer otro.
23. F: Si porque como solo vi los dos primeros, o sea el primero y el último lo analicé así. Pero ahora si.
24. (F Introduce [B6; 1934]).
25. (F Introduce [B7; 2373]).
26. (F Introduce [B8; 2847]).
27. (F Introduce [B9; 3173]).
28. (F Introduce [B10; 3746]).
29. (F Introduce [B11; 4207]).
30. (F Introduce [B12; 4853]).
31. (F Introduce [B13; 5439]).
32. (F selecciona las dos columnas A y B desde A1 a B13).
33. (F abre la ventana para crear la lista de puntos en GG para visualizar la nube de puntos).
34. (F abre la ventana de preferencias de la Vista Gráfica y ajusta los extremos de los ejes coordenados).
35. (F cierra la ventana y se ve la nube de puntos).
36. (F nuevamente abre la ventana de preferencias de la Vista Gráfica y activa la opción *Encuadre de todos los objetos,* con lo que se ve mejor la nube de puntos).

Gráfica 2 Nube de puntos original (ítem 36)

37. (F vuelve a la HdC y en el encabezado de la columna D introduce [D1; x], con lo que GG grafica la recta $y = x$).
38. (F nombra el encabezado de la columna E, introduce [E1; *y*]).
39. (F corrige e introduce [A1; X]).
40. (F corrige e introduce [E1; Y]).

41. (F copia la columna B de los valores del PIB en D y los valores de los años en la columna E, con lo que ha invertido las coordenadas de los puntos).

42. (F borra uno a uno los puntos de la nube en la vista gráfica)
43. (F vuelve a la HdC y selecciona las dos columnas D y E desde D1 a E13)
44. (F nuevamente abre la ventana de preferencias de la Vista Gráfica y ajusta los extremos de los ejes coordenados).
45. (F vuelve a la HdC y selecciona de nuevo las dos columnas D y E desde D1 a E13)
46. (F abre la ventana para crear una nueva lista de puntos en GG).

47. (La nueva nube de puntos aparece en la vista gráfica)
48. M: ¿Por qué hizo ese cambio? (M se refiere a la creación de otra nube de puntos pero cada punto con coordenadas (y,x))
49. F: Lo pruebo de dos puntos haber si la gráfica puede tomar otro rumbo
50. M: Ummm
51. (F vuelve a utilizar la herramienta *Encuadre de todos los objetos*, con lo que se ve mejor la nueva nube de puntos en la Vista gráfica)

Gráfica 4 Nueva nube de puntos después del ítem 51

52. F: Si ve, así quedo mejor que la anterior (F se refiere a la nube de puntos original).
53. (F hace un pequeño zoom para alejar la nube de puntos).
54. M: ¿Pero no importa cual sea x y cual sea y?
55. F: No, no ¿importa?
56. M: No, pregunto.
57. F: Pues para mi, por eso yo hago este cambio, si veo que los precios en y no me "cuadran" entonces hago el cambio de los precios en x y los años en y.
58 M: Ummm
59. (F Continúa contestando en la guía (preg. 5 y 6), hace el nuevo bosquejo
60. (F Continúa en la guía, ahora leyendo la preg. 7 *"Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace"*)
61. F: Bueno, aquí es donde viene lo difícil
62. (F hace zoom acercando y alejando la nube de puntos)
63. (F comienza a escribir una función, en la

barra de entrada anota f (x), pero no continúa)

64. (F dice en voz baja: "la exponencial")

65. (F señala con el cursor el punto A)

66. (F amplia la vista algebraica, para ver las coordenadas del punto A (837, 1955))

67. (F vuelve a la barra de entrada y anota f(x)= 1 (837,1955))

68. (En la pantalla de la Vista gráfica se abre una ventana que advierte que la función no es permitida)

69. (F edita la expresión y escribe $f\,(x) = 1\,(837)^3$)

70. (F aplica repetidamente la herramienta *Encuadre de todos los objetos*)

71. (F hace varios zoom para acercar y alejar la nube de puntos)

72. (F pasa el cursor sobre los iconos de los menús como si buscara algo)

73. F: No se profe como hallarla

74. M: ¿Qué tipo de función cree que le sirva?

75. F: Creo que puede ser una función exponencial o también puede ser una función -¿Cómo es que se llama esa?- Exponencial o Cúbica.

76. (Simultáneamente mientras responde, F vuelve a hacer zoom acercando y alejando la nube de puntos)

77. F: No pero ¿por qué están así? (F se refiere a la nube de puntos).

78. F dice en voz baja: No espere

79. (F escribe en la barra de entrada f(x) =)

80. F dice en voz baja: el exponente de

81. F le pregunta a M: ¿Si fuera exponencial entonces se tomarían los puntos, primero se … [suspende la pregunta, y sigue su reflexión personal]

82. F: Si fuera cúbica se tomarían los primeros puntos que se sitúan a …. [en voz baja, consigo mismo]

83. (F escribe en la barra de entrada $f\,(x) = (x + 837)^3$)

84. M: [la gráfica] le quedó del otro lado (se refiere a la gráfica de la función que quedo en el cuarto cuadrante)

85. F: Sí

86. (F desplaza la Vista gráfica)

87. (F edita en la Vista algebraica la función, escribe
 $f\,(x) = -1(x + 837)^3$)

88. (No se nota mayor cambio en la Vista gráfica)

89. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
 $f\,(x) = -(x + 837)^3$)

90. F: Quedó del otro lado

91. M: ¿Entonces que habrá que cambiar?

92. F: el mas

93. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f\,(x) = (x - 837)^3$)

94. M: Ummm

95. F: Sí, sí

96. F: Ahora para que tome forma ¿cómo?

97. F: Allá tomé el punto A [837,1955]

98. F: a la tres

99. (F señala con el cursor la ecuación de la función en la vista algebraica y comienza a editarla, escribe
$f\,(x) = (x - 837)^3 + \ )$

100. F: si se le suma p…(lo dice en voz baja).

101. (F dice algo en voz baja pero no se entiende)

102. F: ¿Profe si f fuera exponencial que llevaría allá arriba? (le pregunta a M)

103. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f\,(x) = (x - 837)\ \ )$

104. M: ¿Arriba?

105. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f\,(x) = (x - 837)^{837}$)

106. F: ¡Ah! Ahora se perdió (se refiere a que la gráfica no es visible en la Vista gráfica)

107. (F vuelve a la función cúbica que tenía)

108. M: ¿Y no podría ser una parábola, una cuadrática?

109. F: ¿Una cuadrática? Pues… (se queda en silencio pensando)

110. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f\,(x) = (x - 837)^2$ y hace zoom acercando y alejando la gráfica)

111. (En la vista gráfica aparece la representación de la función, pero solo se ven dos segmentos verticales en esta escala)

112. (F edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = -(x + 837)^2$ y realiza un zoom de alejamiento de la gráfica)

113. (F utiliza la herramienta Encuadre de todos los objetos, con lo que ya se puede visualizar la parábola que representa la función)

Gráfica 5 función $f\,(x) = -\,(x + 837)^2$ (ítems 112-113)

114. (F hace zoom de alejamiento y acercamiento de la gráfica de la función)

115. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe
$f\,(x) = -(x - 837)^2$)

116. (El cambio en el parámetro de la ecuación no se nota en la gráfica dada la escala en que

aparece)
117. (F dice algo en voz baja que no se entiende)
118. F: Ummm, una cuadrática
119. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = (x - 837)^2$)
120. (F hace zoom de acercamiento repetidas veces)
121. (F utiliza la herramienta Encuadre de todos los objetos)
122. F: Pues ahí se acerca ya ¿no?
123. M: Pues toca algunos puntos
124. F: Bueno (F suspira)

Gráfica 6 función $f\,(x) = (x - 837)^2$ (ítems 119-125)

125. (F hace zoom de acercamiento repetidas veces)
126. (F dice algo en voz baja que no se entiende)
127. F: Una cuadrática
128. (F ubica el cursor en la vista algebraica)
129. F: ¿Se podría agregar un más o algo para que tocara los otros puntos?
130. M: Si puede que eso le ayude
131. F: bueno probemos (lo dice en voz baja)
132. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = (x - 837) \quad + (x - 1559)^2$)
133. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = -x - 837 + (x - 1559)^2$)
134. (F hace zoom de acercamiento repetidas veces)
135. F: ¿En el momento en que yo la pongo cuadrática se vuelve lineal? No mentiras que estoy diciendo
136. M: será por la escala de los puntos
137. (F hace zoom de acercamiento y alejamiento repetidas veces)
138. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = -x - 837 + (x - 1559) + (x - 5439)^2$)
139. (F ve en la Vista Gráfica la representación de la función)
140. F: No.
¿Qué se hace ahora? (habla en voz baja)
141. (F deshace los cambio realizados en la ultima edición de la ecuación).
142. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe $f\,(x) = -x - 837 + (x - 4853)^2$)
143. (F borra completamente la función y escribe $f\,(x) = -837 + (x - 2847)^2$)
144. F: ¿Cómo haría para que bajara la gráfica?

(F le pregunta a M)

145. M: ¿Y quede más recta?

146. F: Si, y que quede como más … (F dice algo que no se entiende)

147. M: Habría que abrir más la parábola. Si fuera una parábola, habría que abrirla más.

148. F: Ummmm

149. F: abrirla más

150. (F hace zoom sobre le punto G acercando la gráfica de la función).

151. F: bajarla, bajarla

152. (F nuevamente edita en la Vista algebraica la función, ahora escribe

$$f\ (x) = \ -1 + 809973\ )$$

153. (F ve en la Vista Gráfica la recta que representa la función y borra inmediatamente la expresión)

154. F: ¿ x por fuera y lo demás por dentro? ¿O como se bajaría profe? (F pregunta a M)

155. M: con un numerito antes de la *x,* pero multiplicando.

156. F: con un numerito antes de la *x,* ¡ah!

157. M: Sí pero muy pequeño

158. (F edita la función y escribe $f\ (x) = \ -1(x - 2847)^2$)

159. (La gráfica de la parábola se invierte y abre hacia abajo)

160. F: pero la manda para… (F habla en voz baja)

161. (F edita nuevamente la función y escribe $f\ (x) = \ 2(x - 2847)^2$)

162. (La gráfica de la parábola se invierte y vuelve a abrir hacia arriba)

163. (F edita nuevamente la función y escribe $f\ (x) = \ 0{,}5(x - 2847)^2$)

164. (Con lo que la función se acerca a la nube de puntos)

Gráfica 7 función $f\ (x) = 0{,}5(x - 2847)^2$ (ítem 163)

165. (F edita nuevamente la función y escribe $f\ (x) = \ 0{,}03(x - 2847)^2$)

166. (Con lo que la función se acerca más a la nube de puntos)

167. (F hace zoom de acercamiento y alejamiento repetidas veces)

168. F: ¡Listo!

Gráfica 8 función $f\ (x) = 0{,}03(x - 2847)^2$ (ítem 165)

169. F: Entonces no es ni una, ni la otra, ni nada…

170. (F lee la pregunta 7 de la guía *"Busque la función que dé el mejor ajuste a la nube de*

puntos. Escriba su ecuación. Explique cómo lo hace"

171. (F responde en la guía la pregunta anotando la última función $f\,(x) = 0{,}03(x - 2847)^2$, aunque cambia el 2847 por 2897).
172. (F lee en la guía la pregunta 8 *"Según su función del mejor ajuste, ¿cuánto debería haber sido el PIB para el 2008? ¿Y para el 2013? ¿Cómo halla estos valores? ¿Podría usar otro método para hallar esos valores?"*)
173. M: Pues si quiere ahora sí, use la herramienta que tiene el GG para eso
174. (F sombrea el bloque de casillas [D2; E13], los valores de x e y invertidos en la HdC)
175. (F utiliza el menú estadístico de GG para empezar a hacer el análisis de regresión entre dos variables)
176. (Aparece en la pantalla del ordenador una primera gráfica y su ecuación de regresión utilizando una función cuadrática)
177. (F se desplaza con el mouse por el menú de tipos de regresión)
178. F: No hay cuadrática (F se refiere a que entre los nombres de las regresiones del GG no aparece la función cuadrática)
179. F: Evalúa *x* igual a 2008
180. (F comienza a extrapolar utilizando las herramientas del GG, coloca en la casilla *evalúa x* = 2008)
181. M: ¿Ahí, qué hizo?
182. F: No, ¿cual escogí? No, ahí no hice nada, por que como los precios están en *y*.
183. (F sombrea en la HdC el bloque de celdas [A1: B13])
184. (F comienza a usar el análisis de regresión del menú estadístico de la HdC de GG y aparece una nueva ventana con la nube de puntos y una regresión polinómica)
185. (GG muestra la función $g(x) = 0.88x^2 - 3391.11x + 3284396.56$)
186. (F introduce 2008 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5189.6092)
187. F: Ya ahora sí, 2008, 5189.6092
188. F: Y para el 2013
189. (F introduce 2013 en la casilla *evalúa* que brinda la ventana de regresión y el programa le da como salida 5836,3477)
190. (F responde en la guía la pregunta 8 sobre los valores de interpolación)
191. F: Listo profe
192. F: Ya
193. M: Ummmm
194. M: Muchas Gracias

Gráfica 9 Extrapolando valores.