



## TEMA 2

# I. ESTIMACIÓ DELS FLUXOS NETS DE CAIXA

Professor: Dr. Alfredo J. Grau Grau<sup>®</sup>

VNIVERSITAT  
E VALÈNCIA



Facultat d' Economia

Grau en Administració i Direcció d'Empreses



# Material protegit per "CREATIVE COMMONS"



® Alfredo J. Grau Grau

Alfredo G



**Reconeixement (Attribution):** En qualsevol explotació de l'obra autoritzada per la llicència caldrà reconèixer l'autoria.

lo Grau©

Alfredo G



**No Comercial (Non commercial):** L'explotació de l'obra queda limitada a usos no comercials.

lo Grau©



**Sense Obres Derivades (No Derivate Works):** L'autorització per explotar l'obra no inclou la transformació per crear una obra derivada.

Alfredo G



**Compartir Igual (Share alike):** L'explotació autoritzada inclou la creació d'obres derivades sempre que mantinguin la mateixa llicència en ser divulgades.

lo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



fredo Grau©

Alfredo Grau©

**Reconeixement - NoComercial - SenseObraDerivada (by-nc-nd):** No es permet un ús comercial de l'obra original ni la generació d'obres derivades.

fredo Grau©



fredo Grau©

<http://cat.creativecommons.org/licencia/>

Alfredo Grau©

### DADES DE L'ENUNCIAT:

- Durada de la producció: 3 anys (2015, 2016 i 2017; inici al començament de l'any 2015).
- Maquinària necessària per a la producció: compra i pagament al començament de l'any 2015 per 60.000€, vida útil 5 anys, sistema d'amortització anual lineal amb valor residual nul, venda al comptat al final de l'any 2017 per 15.000€.
- Producció i venda anual: 10.000 tornavisos. No es genera inventari d'*inputs* ni d'*outputs*.
- Preu de venda de la producció: 20€/tornavís.
- Despesa variable de producció: 2€/tornavís.
- Despesa fixa anual de producció: 30.000€.
- Ajornament del pagament de les despeses variables (pactat amb proveïdors): 135 dies.



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 1 (II)



- Ajornament del cobrament dels ingressos per vendes (pactat amb clients): 180 dies.
- Al començament de l'any 2015 es realitza una dotació de 4.000€ al comptat en concepte de tresoreria operativa (saldo preventiu), que revertirà al comptat al final de l'any 2017.
- La taxa anual de l'impost sobre societats és 20%. Es paga al final de cada any.
- Computeu anys de 360 dies (mesos de 30 dies).
- Es demana que:
  - a) Calculeu els fluxos nets de caixa esperats del projecte d'inversió si l'empresa utilitza recursos propis per a finançar el projecte.**



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 1 (III)



- b) Calculeu els fluxos nets de caixa esperats del projecte d'inversió si suposem que la compra de la maquinària i la constitució de tresoreria operativa es financen conjuntament amb un préstec al començament de l'any 2015 a tipus d'interès del 2%, amb una durada de 3 anys i de tipus americà (pagament anual d'interessos i devolució del principal al final de l'any 2017).
- c) Calculeu sobre els *Cash Flow* anuals de l'apartat b) el flux monetari del qual poden disposar els accionistes i creditors cada any.



### SOLUCIÓ:

a) Calculeu els fluxos nets de caixa esperats del projecte d'inversió si l'empresa utilitza recursos propis per a finançar el projecte.

- Calculem primer l'amortització anual:

$$A. \text{ anual} = \frac{60.000}{5} = 12.000\text{€}/\text{any}$$

- I la variació patrimonial:

$$\Delta \nabla \text{ Patrim} = P_{\text{venda}} - \text{VNC} = P_{\text{venda}} - [P_0 - A. \text{ acum}]$$

$$= 15.000 - [60.000 - 36.000] = -9.000\text{€}$$



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 1 (V)



Alfredo Grau© ■ Càlcul del BAIT(1-t):

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

	1	2	3
<b>(+) INGRESSOS</b>	<b>200.000</b> <i>(10.000*20)</i>	<b>200.000</b> <i>(10.000*20)</i>	<b>200.000</b> <i>(10.000*20)</i>
<b>(-) COSTOS</b>	<b>62.000</b>	<b>62.000</b>	<b>62.000</b>
Costos variables	20.000 <i>(10.000*2)</i>	20.000 <i>(10.000*2)</i>	20.000 <i>(10.000*2)</i>
Costos fixos	30.000	30.000	30.000
Amortitzacions	12.000	12.000	12.000
(+) $\Delta \nabla$ Patrimonial			-9.000
<b>(=) BAIT</b>	<b>138.000</b>	<b>138.000</b>	<b>129.000</b>
(-) Impost Societats (IS)	27.600	27.600	25.800
<b>(=) BAIT(1-t)</b>	<b>110.400</b>	<b>110.400</b>	<b>103.200</b>



Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 1 (VI)



Alfredo Grau© ■ Càlcul de les  $\Delta \nabla$  NOF: Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

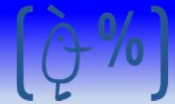
	0	1	2	3	4
(+) Clients	---	100.000	100.000	100.000	---
<b>(+) <math>\Delta \nabla</math> Clients</b>	---	<b>100.000</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-100.000</b>
(-) Proveïdors	---	7.500	7.500	7.500	---
<b>(-) <math>\Delta \nabla</math> Proveïdors</b>	---	<b>7.500</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-7.500</b>
(+) $\Delta \nabla$ Tresoreria	<b>4.000</b>	---	---	<b>-4.000</b>	---
<b>(=) <math>\Delta \nabla</math> NOF</b>	<b>4.000</b>	<b>92.500</b>	<b>0</b>	<b>-4.000</b>	<b>-92.500</b>





# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 1 (VII)



Alfredo Grau© ■ Càlcul del FCF i dels FNC:

Alfredo Grau©

	0	1	2	3	4
(=) BAIT(1-t)		110.400	110.400	103.200	
(+) Amort.		12.400	12.400	12.400	
(-) $\Delta \nabla$ NOF	4.000	92.500	0	-4.000	-92.500
(-) $\Delta$ Act. fix	60.000			-24.000	
<b>(=) FCF</b>	<b>-64.000</b>	<b>29.900</b>	<b>112.400</b>	<b>143.200</b>	<b>92.500</b>
(+) Estalvis fiscals	0	0	0	0	
<b>(=) FNC</b>	<b>-64.000</b>	<b>29.900</b>	<b>112.400</b>	<b>143.200</b>	<b>92.500</b>

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



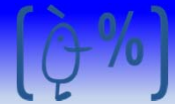
Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 1 (VIII)



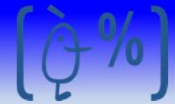
b) Calculeu el E(FNC) del projecte d'inversió si suposem que la compra de la maquinària i la constitució de tresoreria operativa es financen conjuntament amb un préstec amb  $i=2\%$ ,  $n=3$  anys i de tipus americà.

- Càlcul del FCF i dels FNC:

	0	1	2	3	4
(=) BAIT(1-t)		110.400	110.400	103.200	
(+) Amort.		12.400	12.400	12.400	
(-) $\Delta \nabla$ NOF	4.000	92.500	0	-4.000	-92.500
(-) $\Delta$ Act. fix	60.000			-24.000	
<b>(=) FCF</b>	<b>-64.000</b>	<b>29.900</b>	<b>122.400</b>	<b>143.200</b>	<b>92.500</b>
(+) Estalvis fiscals		256 (64.000*0,02*0,2)	256 (64.000*0,02*0,2)	256 (64.000*0,02*0,2)	
<b>(=) FNC</b>	<b>-64.000</b>	<b>30.156</b>	<b>122.656</b>	<b>143.456</b>	<b>92.500</b>

# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 1 (IX)



c) Calculeu sobre els *Cash Flow* anuals de l'apartat b) el flux monetari del qual poden disposar els accionistes i creditors cada any.

	0	1	2	3	4
(=) FNC	-64.000	30.156	122.656	143.456	92.500
<b>CF<sub>accionistes</sub></b>		<b>28.876</b>	<b>121.371</b>	<b>78.176</b>	<b>92.500</b>
<b>CF<sub>creditors</sub></b>		<b>1.280</b>	<b>1.280</b>	<b>65.280</b> <i>(64.000+1.280)</i>	





### DADES DE L'ENUNCIAT: Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

–Despeses I+D: 1.000.000€.

Alfredo Grau©

–n: 3 anys.

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

– $\Delta$  Actiu fix: 250.000€:

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

▪ Vida útil: 10 anys.

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

▪ Valor residual: 0€.

▪ Venda en  $t=3$ : 100.000€.

Alfredo Grau©

–Producció anual: 15.000 unitats con  $\Delta$  20%.

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

–Preu venda unitari: 150€.

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

–Cost variable unitari: 45€.

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

–Costos fixos: 800.000.000€.

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

–Ajornament pagament proveïdors: 30 dies.

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 2 (II)



—Deixa de vendre:

- 40% de 25.000 unitats de producció.
- Preu de venda unitari (producció antiga): 95€.
- Cost unitari de producció (producció antiga): 30€.

—Es demana que:

- a) Calculeu els fluxos nets de caixa esperats suposant que tot el finançament relatiu al projecte es realitza amb recursos propis. Computeu anys de 360 dies (mesos de 30 dies).**



### SOLUCIÓ:

a) Calculeu els FNC esperats suposant que tot el finançament relatiu al projecte es realitza amb recursos propis. Computeu anys de 360 dies (mesos de 30 dies).

- Calculem primer l'amortització anual:

$$A. \text{ anual} = \frac{250.000}{10} = 25.000 \text{€ / any}$$

- I la variació patrimonial:

$$\Delta \nabla \text{ Patrim} = P_{\text{venda}} - \text{VNC} = P_{\text{venda}} - [P_0 - A. \text{ acum}]$$

$$= 100.000 - [250.000 - (3 * 25.000)] = -75.000 \text{€}$$



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 2 (IV)



- Els efectes incrementals per la pèrdua de part de la producció antiga (efecte canibalització) serà:

- Pel que fa als ingressos que deixa d'ingressar:

$$(-) \text{Ingressos} = 10.000 * 95 = 950.000 \text{€}/\text{any}$$

- Les despeses que s'estalvia:

$$(+) \text{Despeses} = 10.000 * 30 = 300.000 \text{€}/\text{any}$$

- El cost d'oportunitat total serà:

$$(=) 300.000 - 950.000 = 650.000 \text{€}/\text{any}$$



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 2 (V)



Alfredo Grau© ■ Càlcul del BAIT(1-t):

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

	1	2	3
<b>(+) INGRESSOS</b>	<b>2.250.000</b> <i>(15.000*150)</i>	<b>2.250.000</b> <i>(15.000*150)</i>	<b>2.250.000</b> <i>(15.000*150)</i>
<b>(-) Ingressos (incrementals)</b>	<b>950.000</b>	<b>950.000</b>	<b>950.000</b>
<b>(-) COSTOS</b>	<b>1.500.000</b>	<b>1.635.000</b>	<b>1.797.000</b>
Costos variables	675.000 <i>(15.000*45)</i>	810.000 <i>(15.000*1,2*45)</i>	972.000 <i>(15.000*1,2<sup>2</sup>*45)</i>
Costos fixos	800.000	800.000	800.000
Amortitzacions	25.000	25.000	25.000
<b>(+) Despeses (incrementals)</b>	<b>300.000</b>	<b>300.000</b>	<b>300.000</b>
(+) $\Delta \nabla$ Patrimonial			-75.000
<b>(=) BAIT</b>	<b>100.000</b>	<b>415.000</b>	<b>718.000</b>
<b>(-) Impost Societats (IS)</b>	<b>30.000</b>	<b>124.500</b>	<b>215.400</b>
<b>(=) BAIT(1-t)</b>	<b>70.000</b>	<b>290.500</b>	<b>502.600</b>





# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 2 (VI)



Alfredo Grau © ■ Càlcul de les  $\Delta \nabla$  NOF: Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo	0	1	2	3	4
Alfr (-) Proveïdors	---	56.250 <i>(675.000/12)</i>	67.500 <i>(810.000/12)</i>	81.000 <i>(972.000/12)</i>	---
(-) $\Delta \nabla$ Proveïdors	---	<b>52.250</b>	<b>11.250</b>	<b>13.500</b>	<b>-81.000</b>
Alfr (=) $\Delta \nabla$ NOF	<b>0</b>	<b>-56.250</b>	<b>-11.250</b>	<b>-13.500</b>	<b>81.000</b>

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 2 (VII)



Alfredo Grau© ■ Càlcul del FCF i dels FNC:

Alfredo Grau©

	0	1	2	3	4
(=) BAIT(1-t)		70.000	290.500	502.600	
(+) Amort.		25.000	25.000	25.000	
(-) $\Delta \nabla$ NOF	0	-56.250	-11.250	-13.500	81.000
(-) $\Delta$ Act. fix	250.000			-175.000	
<b>(=) FCF</b>	<b>-250.000</b>	<b>151.250</b>	<b>326.750</b>	<b>716.100</b>	<b>-81.000</b>
(+) Estalvis fiscals	0	0	0	0	
<b>(=) FNC</b>	<b>-250.000</b>	<b>151.250</b>	<b>326.750</b>	<b>716.100</b>	<b>-81.000</b>

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Cost d'oportunitat per no vendre la màquina: 500.000€.

–  $\Delta$  Actiu fix: 60.000€:

- Vida útil: 5 anys.

- Valor residual: 10.000€.

- Venda en  $t=3$ : 35.000€.

– Producció anual: 3.000 unitats.

– Preu de venda unitari: 150€.

– Cost variable unitari: 40€.

– Costos fixos: 10.000€.

– Ajornament cobrament clients: 60 dies.

– IS: 30%.



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 3 (II)



—Es demana que:

- a) Calculeu els fluxos nets de caixa esperats sabent que el tipus impositiu de l'impost de societats és del 30% anual. Computeu anys de 360 dies (mesos de 30 dies).**



### SOLUCIÓ:

a) Calculeu els fluxos nets de caixa esperats sabent que el tipus impositiu de l'impost de societats és del 30% anual. Computeu anys de 360 dies (mesos de 30 dies).

- Calculeu primer la amortització anual:

$$A. \text{ anual} = \frac{60.000 - 10.000}{5} = 10.000 \text{€ / any}$$

- I la variació patrimonial:

$$\Delta \nabla \text{ Patrim} = P_{\text{venda}} - \text{VNC} = P_{\text{venda}} - [P_0 - A. \text{ acum}]$$

$$= 35.000 - [60.000 - 30000] = 5.000 \text{€}$$



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 3 (IV)



Alfredo Grau© ■ Càlcul del BAIT(1-t):

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

	1	2	3
<b>(+) INGRESSOS</b>	<b>450.000</b> <i>(3.000*150)</i>	<b>450.000</b> <i>(3.000*150)</i>	<b>450.000</b> <i>(3.000*150)</i>
<b>(-) COSTOS</b>	<b>62.000</b>	<b>62.000</b>	<b>62.000</b>
Costos variables	120.000 <i>(3.000*40)</i>	120.000 <i>(3.000*40)</i>	120.000 <i>(3.000*40)</i>
Costos fixos	10.000	10.000	10.000
Amortitzacions	10.000	10.000	10.000
(+) $\Delta \nabla$ Patrimonial			5.000
<b>(=) BAIT</b>	<b>310.000</b>	<b>310.000</b>	<b>315.000</b>
(-) Impost Societats (IS)	93.000	93.000	94.500
<b>(=) BAIT(1-t)</b>	<b>217.000</b>	<b>217.000</b>	<b>220.500</b>



Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 3 (V)



Alfredo Grau © Càlcul de les  $\Delta \nabla$  NOF: Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo	0	1	2	3	4	
Alfr (+) Clients	---	75.000 (450.000/6)	75.000 (450.000/6)	75.000 (450.000/6)	---	©
(+) $\Delta \nabla$ Clients	---	<b>75.000</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-75.000</b>	
Alfr (=) $\Delta \nabla$ NOF	<b>0</b>	<b>75.000</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-75.000</b>	©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©

Alfredo Grau ©



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 3 (VI)



Alfredo Grau© ■ Càlcul del FCF i dels FNC:

Alfredo Grau©

	0	1	2	3	4
(=) BAIT(1-t)		217.000	217.000	220.500	
(+) Amort.		10.000	10.000	10.000	
(-) $\Delta \nabla$ NOF	0	75.000	0	0	-75.000
(-) $\Delta$ Act. fix	60.000			-30.000	
(-) $\Delta$ Cost op.	500.000				
<b>(=) FCF</b>	<b>-560.000</b>	<b>152.000</b>	<b>227.000</b>	<b>260.500</b>	<b>75.000</b>
(+) Estalvis fiscals	0	0	0	0	
<b>(=) FNC</b>	<b>-560.000</b>	<b>152.000</b>	<b>227.000</b>	<b>260.500</b>	<b>75.000</b>

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– $\Delta$  Actiu fix: 10.000€:

- Vida útil: 4 anys.

- Valor residual: 0€.

- Venda en  $t=4$ : 2.000€.

–Producció anual:  $10\% \text{ s}/2.000.000=200.000\text{€}$ .

–Cost variable: 10.000€.

–Costos fixos:  $9.600+18.000=27.600\text{€}$ .

–Ajornament pagament proveïdors: 90 dies.

–IS: 30%.



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 4 (II)



—Es demana que:

- a) Calculeu els fluxos nets de caixa esperats si el tipus impositiu que grava el benefici empresarial és el 30% anual. Computeu anys de 360 dies (mesos de 30 dies).**



### SOLUCIÓ:

a) Calculeu els fluxos nets de caixa esperats si el tipus impositiu que grava el benefici empresarial és el 30% anual. Computeu anys de 360 dies (mesos de 30 dies).

- Calculeu primer la amortització anual:

$$A. \text{ anual} = \frac{10.000}{4} = 2.500\text{€}/\text{any}$$

- I la variació patrimonial:

$$\Delta \nabla \text{ Patrim} = P_{\text{venda}} - \text{VNC} = P_{\text{venda}} - [P_0 - A. \text{ acum}]$$

$$= 2.000 - [10.000 - 10.000] = 2.000\text{€}$$



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 4 (IV)



■ Càlcul del BAIT(1-t):

	1 a 3	4
<b>(+) INGRESSOS</b>	<b>200.000</b> <i>(2.000.000*0,1)</i>	<b>200.000</b> <i>(2.000.000*0,1)</i>
<b>(-) COSTOS</b>	<b>1.500.000</b>	<b>1.635.000</b>
Costos variables	10.000	10.000
Costos fixos	27.600 <i>(9.600+18.000)</i>	27.600 <i>(9.600+18.000)</i>
Amortitzacions	2.500	2.500
(+) $\Delta \nabla$ Patrimonial		2.000
(-) Cost d'oportunitat	24.000	24.000
<b>(=) BAIT</b>	<b>135.900</b>	<b>137.900</b>
(-) Impost societats (IS)	40.770	41.370
<b>(=) BAIT(1-t)</b>	<b>95.130</b>	<b>96.530</b>



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 4 (V)



Alfredo Grau© Càlcul de les  $\Delta \nabla$  NOF: Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo	0	1	2	3	4	5
Alfr (-) Proveïdors	---	2.500 (10.000/4)	2.500 (10.000/4)	2.500 (10.000/4)	2.500 (10.000/4)	2.500 (10.000/4)
(-) $\Delta \nabla$ Proveïdor	---	<b>2.500</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-2.500</b>
Alfr (=) $\Delta \nabla$ NOF	<b>0</b>	<b>2.500</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-2.500</b>

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



# Bloc I. Tema 2

## PRÀCTICA 4 (VI)



Alfredo Grau© ■ Càlcul del FCF i dels FNC:

Alfredo Grau©

	0	1	2 a 3	4	5
(=) BAIT(1-t)		95.130	95.130	96.530	
(+) Amort.		2.500	2.500	2.500	
(-) $\Delta \nabla$ NOF	0	-2.500	0	0	2.500
(-) $\Delta$ Act. fix	10.000				
<b>(=) FCF</b>	<b>-10.000</b>	<b>100.130</b>	<b>97.630</b>	<b>99.030</b>	<b>-2.500</b>
(+) Estalvis fiscals	0	0	0	0	
<b>(=) FNC</b>	<b>-10.000</b>	<b>100.130</b>	<b>97.630</b>	<b>99.030</b>	<b>-2.500</b>

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



## TEMES 3 - 4

# II. VALORACIÓ I SELECCIÓ DE PROJECTES D'INVERSIÓ AMB CERTESA

Professor: Dr. Alfredo J. Grau Grau<sup>®</sup>

VNIVERSITAT  
E VALÈNCIA



Facultat d' Economia

Grau en Administració i Direcció d'Empreses



# Material protegit per "CREATIVE COMMONS"



® Alfredo J. Grau Grau

Alfredo G



**Reconeixement (Attribution):** En qualsevol explotació de l'obra autoritzada per la llicència caldrà reconèixer l'autoria.

lo Grau©

Alfredo G



**No Comercial (Non commercial):** L'explotació de l'obra queda limitada a usos no comercials.

lo Grau©



**Sense Obres Derivades (No Derivate Works):** L'autorització per explotar l'obra no inclou la transformació per crear una obra derivada.

Alfredo G



**Compartir Igual (Share alike):** L'explotació autoritzada inclou la creació d'obres derivades sempre que mantinguin la mateixa llicència en ser divulgades.

lo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



fredo Grau©

Alfredo Grau©

**Reconeixement - NoComercial - SenseObraDerivada (by-nc-nd):** No es permet un ús comercial de l'obra original ni la generació d'obres derivades.

fredo Grau©



fredo Grau©

<<http://cat.creativecommons.org/licencia/>>

Alfredo Grau©





### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Cost inicial de la inversió: 10.000 €.

– FNC esperats després d'impostos: 1.000, 10.000 i 1.000 €.

– Cost d'oportunitat nominal anual: 10%.

– Es demana valorar la conveniència de portar-ho endavant:

a) Valor actual net (VAN).

b) Taxa interna de rendibilitat (TIR).

c) Termini de recuperació estàtic i dinàmic.

d) Índex de rendibilitat (IR).



### SOLUCIÓ:

#### a) Valor actual net (VAN)



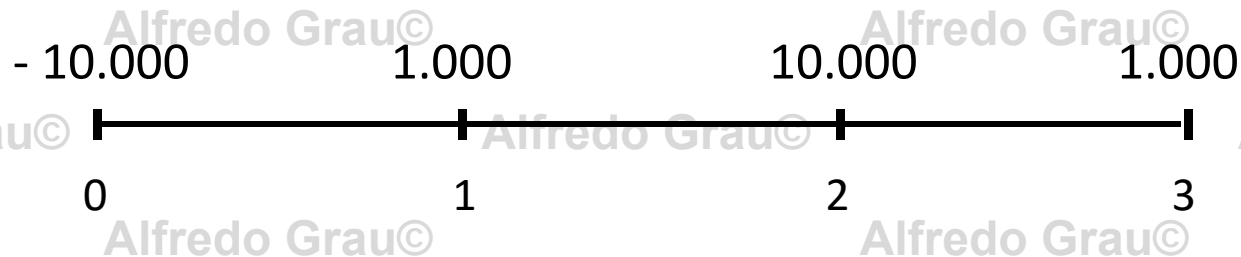
$$VAN = -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{FNC}{(1+k)^j} ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$VAN = -10.000 + \frac{1.000}{(1+0,10)} + \frac{10.000}{(1+0,10)^2} + \frac{1.000}{(1+0,10)^3} = 75,13 \text{ €} < 0$$

- El *VAN nominal* és negatiu i, per tant, no resulta rendible portar endavant el projecte.



### b) Taxa interna de rendibilitat (TIR).



$$\text{TIR} \Rightarrow -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\text{FNC}}{(1+r)^j} = 0 ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$\text{TIR} \Rightarrow -10.000 + \frac{1.000}{(1+r)} + \frac{10.000}{(1+r)^2} + \frac{1.000}{(1+r)^3} = 0$$

- La *TIR bruta nominal* de la inversió é de 0,0958 (9,58%).
- Lògicament, si el  $\text{VAN} < 0$  la TIR ha de ser inferior al cost d'oportunitat ( $r < k ; 9,58\% < 10\%$ ).



### c.1) Termini de recuperació estàtic.©

Alfredo Grau©

	0	1	2	3
$P_0$	-10.000	---	---	---
$FNC_j$	---	1.000	10.000	1.000
$\Sigma FNC_j$	---	1.000	11.000	

- La inversió inicial de 10.000 € es recupera al llarg del segon any, però en quin moment aproximat?

si 10.000 € → 12 mesos (1 any)

9.000 € → X

X=10,8 mesos

si 1 mes → 30 dies

0,8 mesos → Y

Y=24 dies

- El termini de recuperació estàtic serà d'1 any, 10 mesos i 24 dies.



### c.2) Termini de recuperació dinàmic.

Alfredo Grau©

	0	1	2	3
$P_0$	-10.000	---	---	---
$FNC_j/(1+k)^j$	---	909,09	8.264,46	751,31
$\sum FNC_j/(1+k)^j$	---	909,09	9.173,55	9.924,86

- La inversió inicial de 10.000 € no es recupera abans d'esgotar-se la vida del projecte.
- El projecte no és rendible.
- Aquest resultat és coherent amb el resultat obtingut pels mètodes anteriors: VAN i TIR.



### d) Índex de rendibilitat (IR).

$$IR = \frac{\sum_{j=1}^T \frac{FNC_j}{(1+k)^j}}{P_0}$$

$$IR = \frac{909,09 + 8.264,46 + 751,31}{10.000} = 0,9924 < 1$$

- L'IR és inferior a la unitat, per tant, el projecte no s'escomet.
- La decisió de portar endavant o no aquest projecte pel mètode de l'IR ha de conduir a la mateixa decisió que pels mètodes anteriors. Així és.



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Projectes A i B excloents.

– **Projecte A** (n=2 anys):

- FNC nominals: 1.358 € i 50 €.
- Termini recuperació dinàmic d'1 any.

– **Projecte B** (n=2 anys):

- FNC nominals anuals i constants.
- VAN=230,66 €.

–  $\Delta 3\%$  anual constant en IGP (g) i una  $k=7\%$  real anual i constant.

– Es demana:

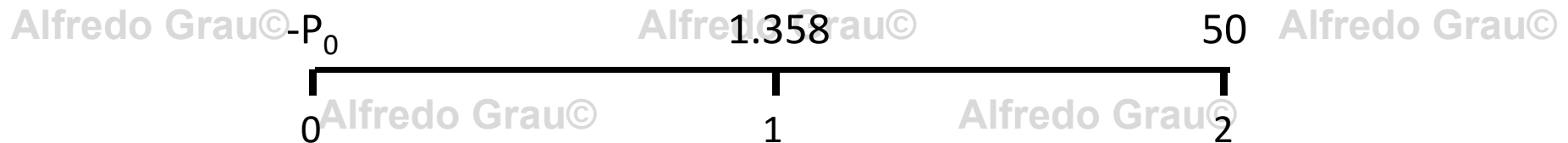
a) Calcular la rendibilitat absoluta neta del projecte A.

b) Calcular la rendibilitat relativa neta real del projecte B.



### SOLUCIÓ:

#### a) Rendibilitat absoluta neta del projecte A: VAN<sup>A</sup>.



- Primer hem de convertir el cost de capital real en termes nominals, açò és:

$$(1+k_N) = (1+k_R)(1+g) \Rightarrow k_N = (1+k_R)(1+g) - 1 \Rightarrow k_N = 0,1021 (10,21\%)$$

- Atés que el termini de recuperació dinàmica es d'1 any, el cost de la inversió serà igual al FNC en  $t=1$  descomptat a  $t=0$ :

$$P_0 = \frac{FNC_1}{(1+k_N)^1} \Rightarrow P_0 = \frac{1.358}{(1+0,1021)^1} \Rightarrow P_0 = 1.232,19\text{€}$$





# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 6 (III)



- El VAN del projecte A, serà:

$$VAN = -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{FNC}{(1+k)^j} ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$VAN = -1.232,19 + \frac{1.358}{(1+0,1021)} + \frac{50}{(1+0,1021)^2} = \mathbf{41,16 > 0}$$

- També podríem calcular la rendibilitat relativa bruta nominal (TIR nominal):

$$TIR \Rightarrow -1.232,19 + \frac{1.358}{(1+r_N)} + \frac{50}{(1+r_N)^2} = 0$$

$$r_N = 0,1378 \mathbf{(13,78\%)}$$

- El projecte A és rendible.



### b) Rendibilitat relativa neta real del projecte B.

- Primer calculem la TIR<sup>B</sup> en la fórmula general i l'obtenim en termes bruts i nominals. L'hauem de passar després a termes nets i reals.
- Desconeixem també els FNC, però sabem que són constants.

Atés que coneixem el VAN, podem calcular-los:

$$\text{VAN} = 1.500 + \frac{\text{FNC}}{(1 + 0,1021)} + \frac{\text{FNC}}{(1 + 0,1021)^2} = 230,6 \text{ €}$$

$$\text{VAN} = 1.500 + \text{FNC} \cdot a_{\overline{2}|0,1021} = 230,6 \text{ €}$$

$$\text{FNC} = 1.000 \text{ €}$$



## Bloc II. Temes 3 i 4

### PRÀCTICA 6 (V)



- Seguidament podem calcular la *TIR bruta nominal*:

$$TIR_N \Rightarrow -1.500 + \frac{1.000}{(1+r_N)} + \frac{1.000}{(1+r_N)^2} = 0$$

$$r_N = 0,2153 (21,53\%)$$

- La *TIR neta nominal* serà:

$$r_N - k_N \Rightarrow 21,53 - 10,21 = 11,32\%$$

- Si apliquem l'equació de Fisher, podem passar aquesta taxa que està en termes nominals a termes reals:

$$(1+r_N) = (1+r_R)(1+g) \Rightarrow r_R = \left( \frac{(1+r_N)}{(1+g)} \right) - 1 \Rightarrow r_R = 0,08077 (8,077\%)$$





### DADES DE L'ENUNCIAT:

- FNC esperats constants i perpetus: 2.000 €.
- S'espera recuperar el cost de la inversió als 6 anys.
- Cost d'oportunitat nominal anual: 10%.
- Es demana suposant tant el termini de recuperació estàtic com el dinàmic:

**a) Rendibilitat en termes absoluts.**

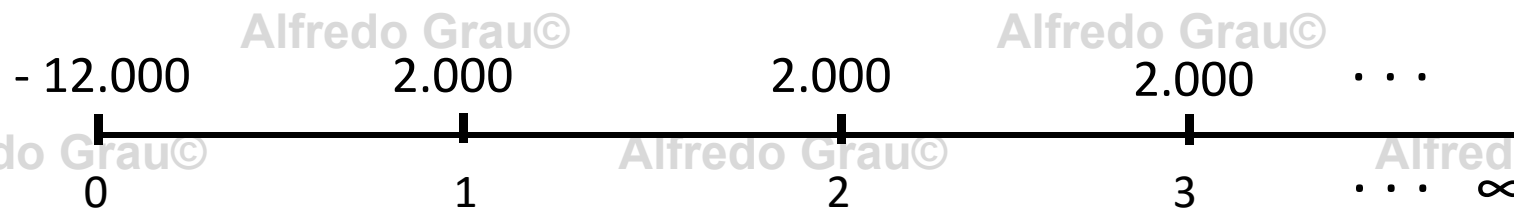
**b) Rendibilitat en termes relatius.**



### SOLUCIÓ:

#### a.1) Rendibilitat en termes absoluts (*pay-back* estàtic).

- Si es recupera la inversió en el sisè any,  $P_0 = 2.000 \cdot 6 = 12.000 \text{ €}$



$$VAN = -P_0 + FNC \cdot a_{\infty|k} \Rightarrow VAN = -P_0 + \frac{FNC}{k}$$

$$VAN = -P_0 + \frac{FNC}{k} \Rightarrow VAN = -12.000 + \frac{2.000}{0,10}$$

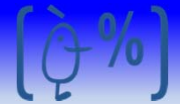
$$VAN = 8.000 \text{ €}$$

- El projecte té un  $VAN > 0$ , per tant, es pot escometre.



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 7 (III)



### a.2) Rendibilitat en termes absoluts (*pay-back* dinàmic).

- Si es recupera la inversió en el sisè any,  $P_0 = 2.000 \cdot 6 = 12.000 \text{ €}$

	1	2	3	4	5	6
$FNC_j$	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
$FNC_j / (1+k)^j$	1.818,18	1.652,89	1.502,63	1.366,03	1.241,84	1.128,95
$\sum FNC_j / (1+k)^j$	8.710,52					

$$VAN = -P_0 + FNC \cdot a_{\overline{6}|0,10} \Rightarrow 0 = -P_0 + 2.000 \cdot 4,35526 \Rightarrow P_0 = 8.710,52 \text{ €}$$

$$VAN = -P_0 + \frac{FNC}{k} \Rightarrow VAN = -8.710,52 + \frac{2.000}{0,10}$$

$$VAN = 11.289,48 \text{ €}$$

- El projecte té un  $VAN > 0$ , per tant, es pot escometre.



### b.1) Rendibilitat en termes relatius (*pay-back* estàtic).

$$\text{TIR} \Rightarrow -12.000 + \frac{2.000}{r} = 0 ; r = 0,1666 \text{ (16,66\%)}$$

- El projecte té un  $r > k$ , per tant, es pot escometre.

### b.2) Rendibilitat en termes relatius (*pay-back* dinàmic).

$$\text{TIR} \Rightarrow -8.710,52 + \frac{2.000}{r} = 0 ; r = 0,2296 \text{ (22,96\%)}$$

- El projecte té un  $r > k$ , per tant, es pot escometre.





### DADES DE L'ENUNCIAT:

- Projecte en curs fa 2 anys ( $n=4$ ).
- FNC esperats: 938.732, 957.507, 976.567 i 996.190 €.
- TIR real: 17,5%.
- Taxa inflació anual i constant ( $g$ ): 2%.
- Cost d'oportunitat real anual: 5%.
- Es demana saber:

**a) S'ha recuperat el desemborsament inicial?**

**b) Considerant una  $k$  real del 5%:**

**b.1) Quina rendibilitat absoluta neta va estimar inicialment?**

**b.2) Quin ha de ser el FNC nominal anual en els dos pròxims anys per a obtenir una rendibilitat absoluta neta real d'1.000.000 €? Solament plantegeu l'equació.**





### SOLUCIÓ:

#### a) S'ha recuperat el desemborsament inicial?

- Per a calcular el desemborsament inicial podem utilitzar l'equació de la TIR, però la  $r$  que tenim està en termes reals, cal passar-la abans a termes nominals:

$$(1+r_N) = (1+r_R)(1+g) \Rightarrow r_N = (1+r_R)(1+g) - 1 \Rightarrow r_N = 0,1985 (19,85\%)$$

$$\text{TIR} \Rightarrow \text{VAN} = 0 \Rightarrow -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\text{FNC}}{(1+k)^j} = 0$$

$$0 = -P_0 + \frac{938.732}{(1+0,1985)} + \frac{957.507}{(1+0,1985)^2} + \frac{976.567}{(1+0,1985)^3} + \frac{996.190}{(1+0,1985)^4}$$

$$P_0 = 2.499.949,45 \text{ €} \quad 2.500.000 \text{ €}$$



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 8 (III)



- Per comprovar si s'ha recuperat el desemborsament inicial sumarem tots el FNC descomptats i compararem:

	1	2	3	4
$FNC_j/(1+k)^j$	938.732	957.507	976.567	996.190
$\sum FNC_j/(1+k)^j$	3.868.996			

- No s'ha recuperat la inversió i, per tant, el projecte no és rendible.



b) Si considerem una  $k$  real del 5%:

Alfredo Grau©

**b.1) Quina rendibilitat absoluta neta va estimar inicialment?**

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

- Necessitem el cost de capital nominal i el que tenim està en termes reals, per tant:

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

$$(1+k_N) = (1+k_R)(1+g) \Rightarrow k_N = (1+k_R)(1+g) - 1 \Rightarrow k_N = 0,0710 \text{ (7,10\%)}$$

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

$$VAN = -2.500.000 + \frac{938.732}{(1+0,071)^1} + \frac{957.507}{(1+0,071)^2} + \frac{976.567}{(1+0,071)^3} + \frac{996.190}{(1+0,071)^4}$$

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

$$VAN = 763.406,49 \text{ €}$$

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



b) Si considerem una  $k$  real del 5%:

b.2) Quin ha de ser el FNC nominal anual en els dos pròxims anys per obtenir una rendibilitat absoluta neta real d'1.000.000 €? Solament plantegeu l'equació.

$$VAN = 1.000.000€$$

$$1.000.000 = -2.500.000 + \frac{938.732}{(1+0,071)^1} + \frac{957.507}{(1+0,071)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{FNC}{(1+0,071)^3} + \frac{FNC}{(1+0,071)^4}$$

$$FNC = 1.000.000 €$$



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 10 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

Alternativa	Desemborsament	IR	TIR
A	-4.500	1,4	54%
B	-12.000	1,25	37,5%

– Quina decisió prendrà tenint en compte quin és l'objectiu financer de l'empresa?



### SOLUCIÓ:

- A partir de les dades inicials podrem calcular el VAN de cada alternativa mitjançant l'IR:

$$IR = \frac{\sum_{j=1}^T \frac{FNC_j}{(1+k)^j}}{P_0} \Rightarrow \sum_{j=1}^T \frac{FNC_j}{(1+k)^j} = IR * P_0$$

$$\sum_{j=1}^T \frac{FNC_j}{(1+k)^j} = IR^A * P_0^A \Rightarrow \sum_{j=1}^T \frac{FNC_j}{(1+k)^j} = 1,4 * 4.500 = 6.300 \text{ €}$$

$$\sum_{j=1}^T \frac{FNC_j}{(1+k)^j} = IR^B * P_0^B \Rightarrow \sum_{j=1}^T \frac{FNC_j}{(1+k)^j} = 1,25 * 12.000 = 15.000 \text{ €}$$



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 10 (III)



- Ja podem calcular el VAN de les dues alternatives:

$$VAN = -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{FNC}{(1+k)^j}; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$VAN^A = -4.500 + 6.300 = 1.800 \text{ €}$$

$$VAN^B = -12.000 + 15.000 = 3.000 \text{ €}$$

- Aleshores la millor alternativa serà aquella que té el major VAN i, per tant, maximitza el valor de mercat de l'empresa, açò és, l'alternativa B.





### DADES DE L'ENUNCIAT:

–Projecte A (n=4 anys):

- FNC després d'impostos: 3.500, 7.000, 21.000 i 28.000 €.
- Rendibilitat relativa neta: 10,235% anual.

–Projecte B (n=5 anys):

- Desemborsament: 52.500 €.
- FNC després d'impostos constants i anuals.
- Termini recuperació estàtic: 3,75 anys.
- Rendibilitat absoluta neta: 3.397,94 €.

–Si el cost d'oportunitat és del 8% nominal anual, es demana:

**a) Ordenar ambdós projectes pel VAN i la TIR.**

**b) Condueixen aquests criteris a la mateixa ordenació?**

**c) Podeu assegurar que la decisió es mantindrà per a qualsevol  $k$ ?**





### SOLUCIÓ:

#### a) Ordenar ambdós projectes pel VAN i la TIR.

##### Projecte A

- Necessitem el desemborsament del projecte. Mitjançant la TIR bruta i la seua equació el podrem obtenir.
- Primer, passem la TIR en termes nets a termes bruts:

$$r_B = r_N + k \Rightarrow 10,235 + 8 = \mathbf{18,235\%}$$

- Ara ja podem calcular el cost inicial del projecte:

$$TIR \Rightarrow -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{FNC}{(1+r)^j} = 0 ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$



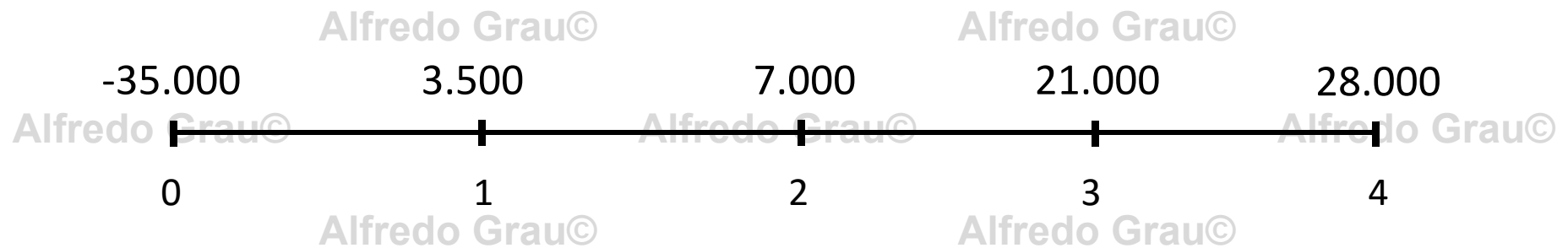
# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 11 (III)



$$\text{TIR} \Rightarrow -P_0 + \frac{3.500}{(1,18235)} + \frac{7.000}{(1,18235)^2} + \frac{21.000}{(1,18235)^3} + \frac{28.000}{(1,18235)^4} = 0$$

$$P_0 = 35.000 \text{ €}$$



- El valor del VAN del projecte serà:

$$\text{VAN} = -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\text{FNC}}{(1+k)^j} ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$\text{VAN} = -35.000 + \frac{3.500}{(1,08)} + \frac{7.000}{(1,08)^2} + \frac{21.000}{(1,08)^3} + \frac{28.000}{(1,08)^4} = \mathbf{11.493,43 \text{ €}}$$



### Projecte B

- Desconeixem els FNC, però amb el VAN i el desemborsament podrem calcular-los:

$$\text{VAN} \Rightarrow -52.500 + \text{FNC} \cdot a_{\overline{5}|0,08} = 3.397,94 \text{ €}$$

$$\text{FNC} = 14.000 \text{ €}$$



- L'equació que ens permet calcular la TIR (full de càlcul Excel):

$$\text{TIR} \Rightarrow -52.500 + \text{FNC} \cdot a_{\overline{5}|r} = 0 \Rightarrow r = 0,104248 (10,4248\%)$$



### b) Condueixen aquests criteris a la mateixa ordenació.

- Atenent els resultats anteriors:

	VAN	TIR
Projecte A	11.493,43	18,24%
Projecte B	3.397,94	10,42%

- Els dos criteris (VAN i TIR) coincideixen a assenyalar que el projecte A és el més rendible. Per tant, no hi ha discrepàncies.





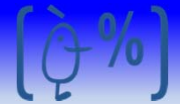
**c) Podeu assegurar que la decisió es mantindrà per a qualsevol valor de  $k$ ?**

- No es pot assegurar ja que el valor del VAN depèn del seu cost de capital,  $k$ .
- A mesura que  $k$  augmenta, el valor del VAN va decreixent.



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 12 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Dos projectes excloents:

Projecte	Desemborsament	FNC1	FNC2	TIR
A	-500	300	300	13,07%
B	-500	200	400	11,65%

– Es demana:

a) Hi ha taxa de Fisher? Si és el cas, determineu-la.

b) Establiu l'ordenació jeràrquica entre ambdós projectes i per a qualsevol cost d'oportunitat del capital.



### SOLUCIÓ:

a) Hi ha taxa de Fisher? Si és el cas, determineu-la.

- L'esquema temporal dels projectes per separat serà:



- L'esquema temporal de la inversió diferència serà:



## Bloc II. Temes 3 i 4

### PRÀCTICA 12 (III)



- El criteri VAN del projecte diferencia ens permet identificar l'existència o no de la taxa de Fisher, açò és:

$$0 + \frac{100}{(1+r_f)} - \frac{100}{(1+r_f)^2} = 0$$

- Cal resoldre l'equació de 2n grau:

$$100(1+r_f) - 100 = 0$$

$$100 + 100 * r_f - 100 = 0$$

$$r_f = 0$$

- Per tant, no hi ha taxa de Fisher. Amb el nostre cost de capital no es presentaran discrepàncies a l'hora de escollir un projecte o un altre.





**b) Establiu l'ordenació jeràrquica entre ambdós projectes i per a qualsevol cost d'oportunitat del capital.**

- Representem gràficament els VAN dels dos projectes.
- Punts màxims per als VAN:

$$VAN^A(k=0) = -500 + \frac{300}{(1+0)} + \frac{300}{(1+0)^2} = 100 \text{ €}$$

$$VAN^B(k=0) = -500 + \frac{200}{(1+0)} + \frac{400}{(1+0)^2} = 100 \text{ €}$$

- Punts de tall, TIR:

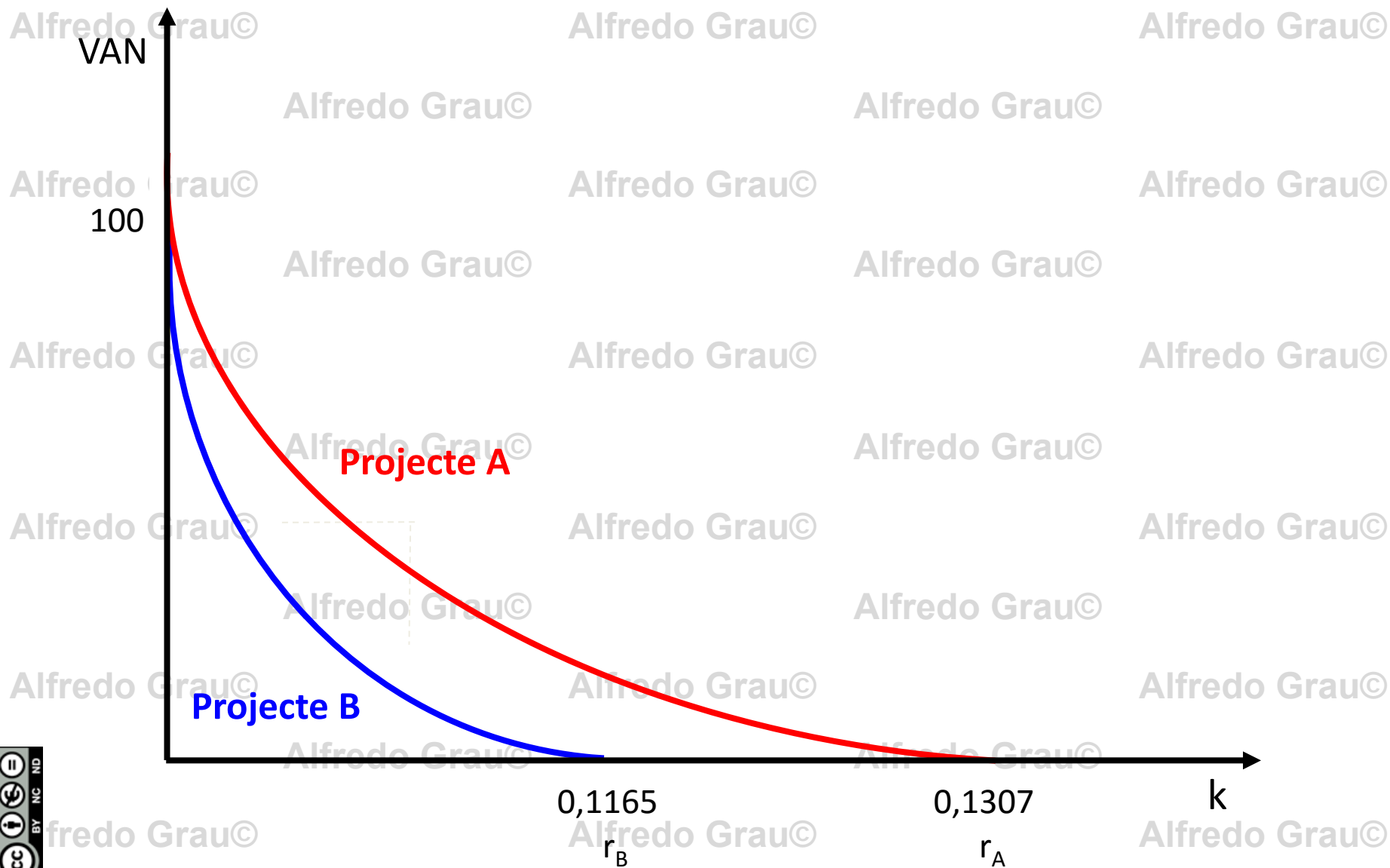
$$TIR^A = 13,07\%$$

$$TIR^B = 11,65\%$$



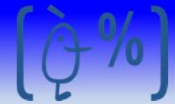
# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 12 (V)



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 12 (VI)



- Atès que  $r_f=0$ , els VAN d'aquests dos projectes es troben en el punt màxim.

Interval d'anàlisi: [0%, $r_{\min}$ %[ $\Rightarrow$ [0%; 11,65%[		Ordre de preferència		
		VAN	TIR	Ordre
1	$k = 0$	$VAN_A = VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Discrepen
2	$0\% \leq k < 11,65\%$	$VAN_A > VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Coincideixen
3	$11,65\% \leq k < 13,07\%$	$VAN_A > VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Coincideixen
4	$k > 13,07\%$	$VAN_A, VAN_B < 0$	$TIR_A > TIR_B$	Coincideixen



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 13 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

–Dues màquines rentadores:

Projecte	Desemborsament	FNC <sub>1</sub>	FNC <sub>2</sub>	FNC <sub>3</sub>	TIR
A-2012	-10.000	5.000	5.000	5.000	23,38%
B-2012	-10.000	2.500	5.000	8.000	20,98%

–Es demana:

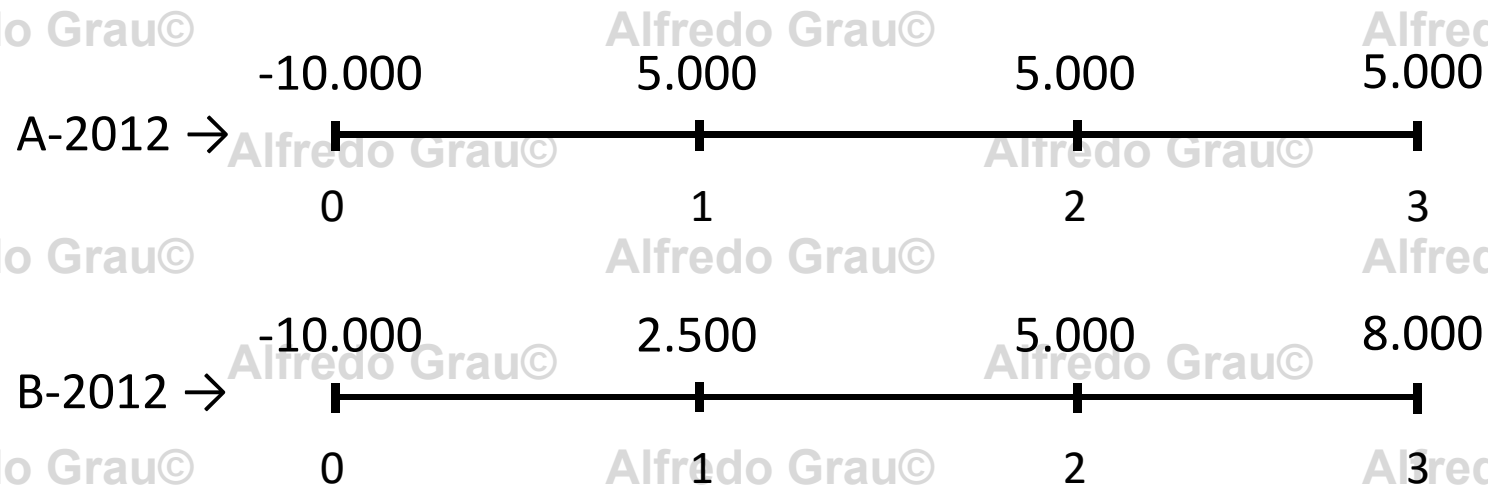
- Quina màquina seria més rendible pel criteri del VAN si el cost d'oportunitat de capital és del 8%?**
- Estudieu el VAN dels projectes, representeu-los i feu una comparativa gràfica en funció del cost de capital.**
- Quina seria la màquina escollida si el cost d'oportunitat del capital fóra del 9,54%?**



### SOLUCIÓ:

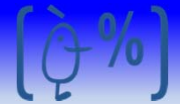
a) Quina màquina seria més rendible pel criteri del VAN si el cost d'oportunitat de capital és del 8%?

- L'esquema temporal dels projectes serà:



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 13 (III)



- El valor dels VAN dels projectes serà:

$$VAN = -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{FNC_j}{(1+k)^j} ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$VAN^{A-2012} = -10.000 + 5.000 \cdot a_{\overline{3}|0,08} = \mathbf{2.885,48 \text{ €}}$$

$$VAN^{B-2012} = -10.000 + \frac{2.500}{(1+0,08)} + \frac{5.000}{(1+0,08)^2} + \frac{8.000}{(1+0,08)^3} = \mathbf{2.952,17 \text{ €}}$$

- Si les TIR dels dos projectes són:

$$TIR^{A-2012} = \mathbf{23,38\%}$$

$$TIR^{B-2012} = \mathbf{20,98\%}$$



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 13 (IV)



- En resum:

$$VAN^{A-2012} < VAN^{B-2012}$$

$$TIR^{A-2012} > TIR^{B-2012}$$

- Hi ha discrepàncies entre els dos mètodes i, per tant, hi ha distinta ordenació jeràrquica.



b) Estudieu el VAN dels projectes, representeu-los i feu una comparativa gràfica en funció del cost de capital.

- Punts màxims per als VAN:

$$\text{VAN}^{\text{A-2012}}(k=0) = -10.000 + \frac{5.000}{(1+0)} + \frac{5.000}{(1+0)^2} + \frac{5.000}{(1+0)^3} = 5.000 \text{ €}$$

$$\text{VAN}^{\text{B-2012}}(k=0) = -10.000 + \frac{2.500}{(1+0)} + \frac{5.000}{(1+0)^2} + \frac{8.000}{(1+0)^3} = 5.500 \text{ €}$$

- Punts de tall, TIR:

$$\text{TIR}^{\text{A-2012}} = \mathbf{23,38\%}$$

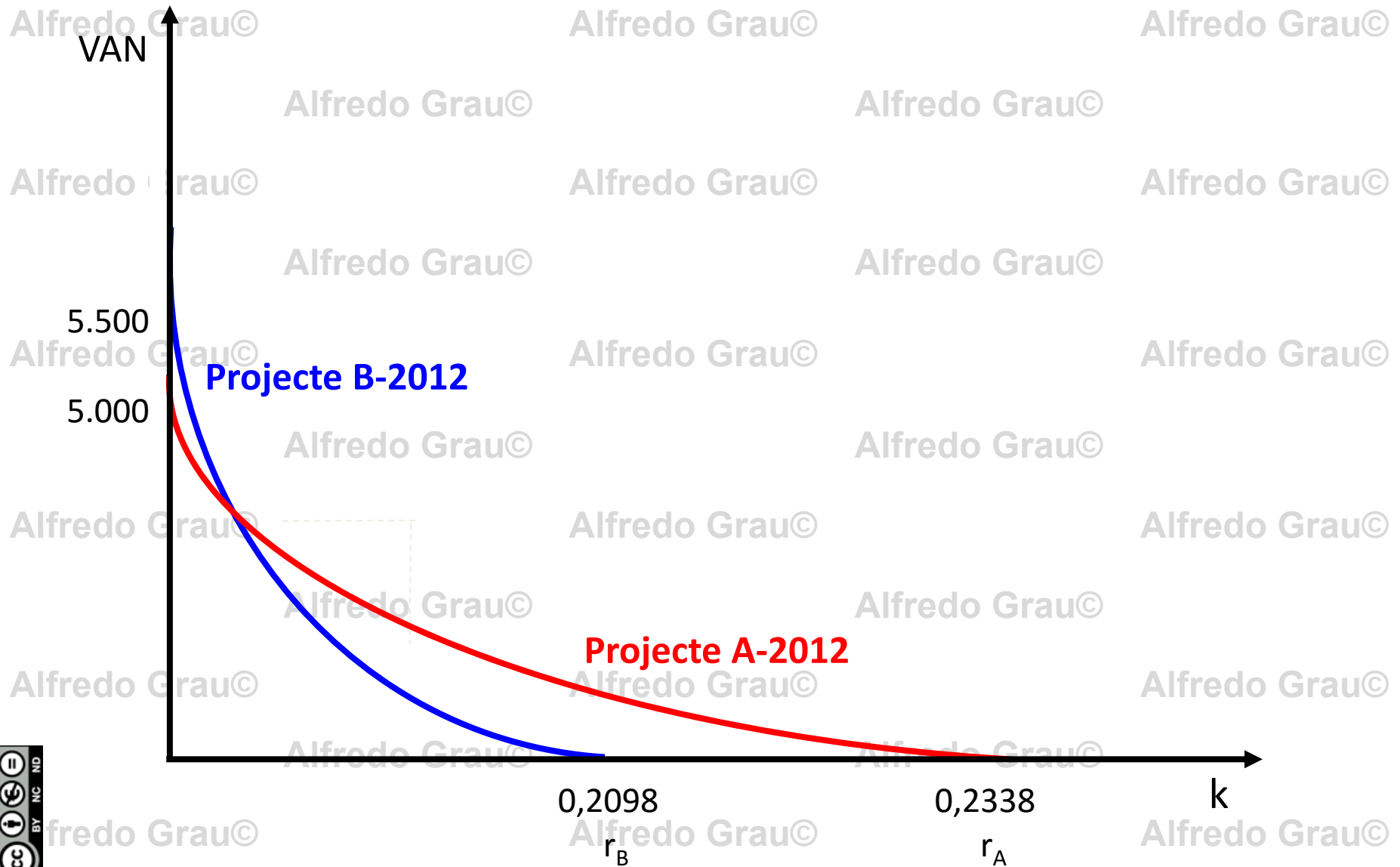
$$\text{TIR}^{\text{B-2012}} = \mathbf{20,98\%}$$





# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 13 (VI)

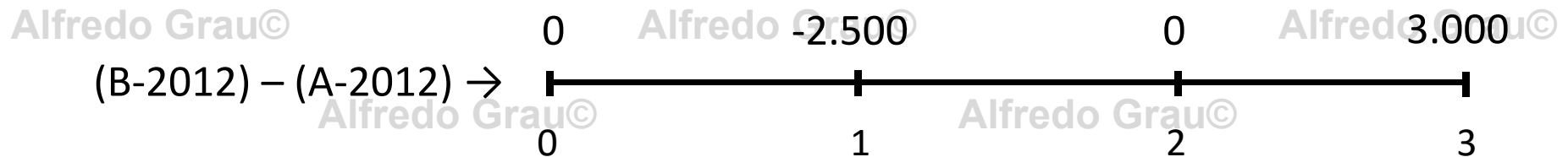


# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 13 (VII)



- Per a calcular la taxa de Fisher, obtenim primer l'esquema temporal de la inversió diferència:



Alfredo Grau©

$$0 - \frac{2.500}{(1+r_f)} + \frac{0}{(1+r_f)^2} + \frac{3.000}{(1+r_f)^3} = 0$$

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

$$-\frac{2.500}{(1+r_f)} + \frac{3.000}{(1+r_f)^3} = 0$$

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

$$-2.500 + \frac{3.000}{(1+r_f)^2} = 0$$

Alfredo Grau©



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 13 (VIII)



$$-2.500 + \frac{3.000}{(1+r_f)^2} = 0 \Rightarrow \text{fent el canvi de variable: } x = \frac{1}{(1+r_f)}$$

$$-2.500 + 3.000x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{2.500}{3.000}} = 0,911285$$

- Desfem el canvi de variable:

$$\frac{1}{(1+r_f)} = 0,911285$$

- Finalment, la taxa de Fisher serà:

$$r_f = 0,0954 (9,54\%)$$



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 13 (IX)



- En resum, els intervals de l'anàlisi de l'ordenació:

Interval d'anàlisi: [0%, $r_{\min}$ %[ $\Rightarrow$ [0%; 20,98%[		Ordre de preferència		
		VAN	TIR	Ordre
1	$0\% \leq k < 9,54\%$	$VAN_A < VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Discrepen
2	$k = 9,54\%$	$VAN_A = VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Discrepen
3	$9,54\% < k < 20,98\%$	$VAN_A > VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Coincideixen
4	$20,98\% < k < 23,38\%$	$VAN_A > VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Coincideixen
5	$k > 23,38\%$	$VAN_A, VAN_B < 0$	$TIR_A > TIR_B$	Coincideixen





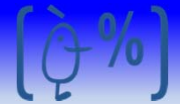
**c) Quina seria la màquina escollida si el cost d'oportunitat del capital fóra del 9,54%?**

- Atenent a quin 9,54% és la taxa de Fisher, el VAN obtinguts pels projectes seria el mateix i, per tant, seria indiferent escometre qualsevol dels dos.



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 14 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Dos projectes excloents:

Projecte	Desemborsament	FNC <sub>1</sub>	FNC <sub>2</sub>
A	-17.400	22.500	---
B	-12.500	8.750	9.200

–Es demana:

- Si la  $k$  és del 9%, en funció de la rendibilitat absoluta i relativa, quin projecte serà més rendible?
- Si es desconeixera la  $k$ , quina seria la decisió al respecte de quin projecte seria més atractiu?
- Suposeu que la  $k$  de l'apartat a) estiguera mal calculada i realment fóra del 10% o de l'11% anual, canviaria novament les rendibilitats inicials obtingudes en els dos projectes?



### SOLUCIÓ:

a) Si la  $k$  és del 9%, en funció de la rendibilitat absoluta i relativa, quin projecte serà més rendible?

- El VAN dels projectes serà:

$$VAN = -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{FNC_j}{(1+k)^j} ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$VAN^A = -17.400 + \frac{22.500}{(1+0,09)} = 3.242,20\text{€}$$

$$VAN^B = -12.500 + \frac{8.750}{(1+0,09)} + \frac{9.200}{(1+0,09)} = 3.270,98\text{€}$$



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 14 (III)



- La TIR dels projectes, serà:

$$TIR^A \Rightarrow -17.400 + \frac{22.500}{(1+r_A)} = 0$$

$$r_A = 0,2931 \text{ (29,31\%)}$$

$$TIR^B \Rightarrow -12.500 + \frac{8.750}{(1+r_B)} + \frac{9.200}{(1+r_B)^2} = 0$$

$$r_B = 0,2766 \text{ (27,66\%)}$$





# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 14 (IV)



- L'ordenació jeràrquica serà:

$$VAN^{A-2012} < VAN^{B-2012}$$

$$TIR^{A-2012} > TIR^{B-2012}$$

- Hi ha discrepàncies entre els dos mètodes i, per tant, hi ha distinta ordenació jeràrquica.
- Per complir en l'objectiu de la Teoria Financera (maximitzar el valor de mercat de l'empresa) seguirem el criteri del VAN (ja que està en termes absoluts) i, per tant, el projecte que cal escollir serà el de major VAN, açò és, el projecte B.



b) Si es desconeixera la  $k$ , quina seria la decisió al respecte de quin projecte seria més atractiu?

- Punts màxims per als VAN:

$$VAN^A(k=0) = 17.400 + \frac{22.500}{(1+0)} = 5.100 \text{ €}$$

$$VAN^B(k=0) = 12.500 + \frac{8.750}{(1+0)} + \frac{9.200}{(1+0)^2} = 5.450 \text{ €}$$

- Punts de tall, TIR:

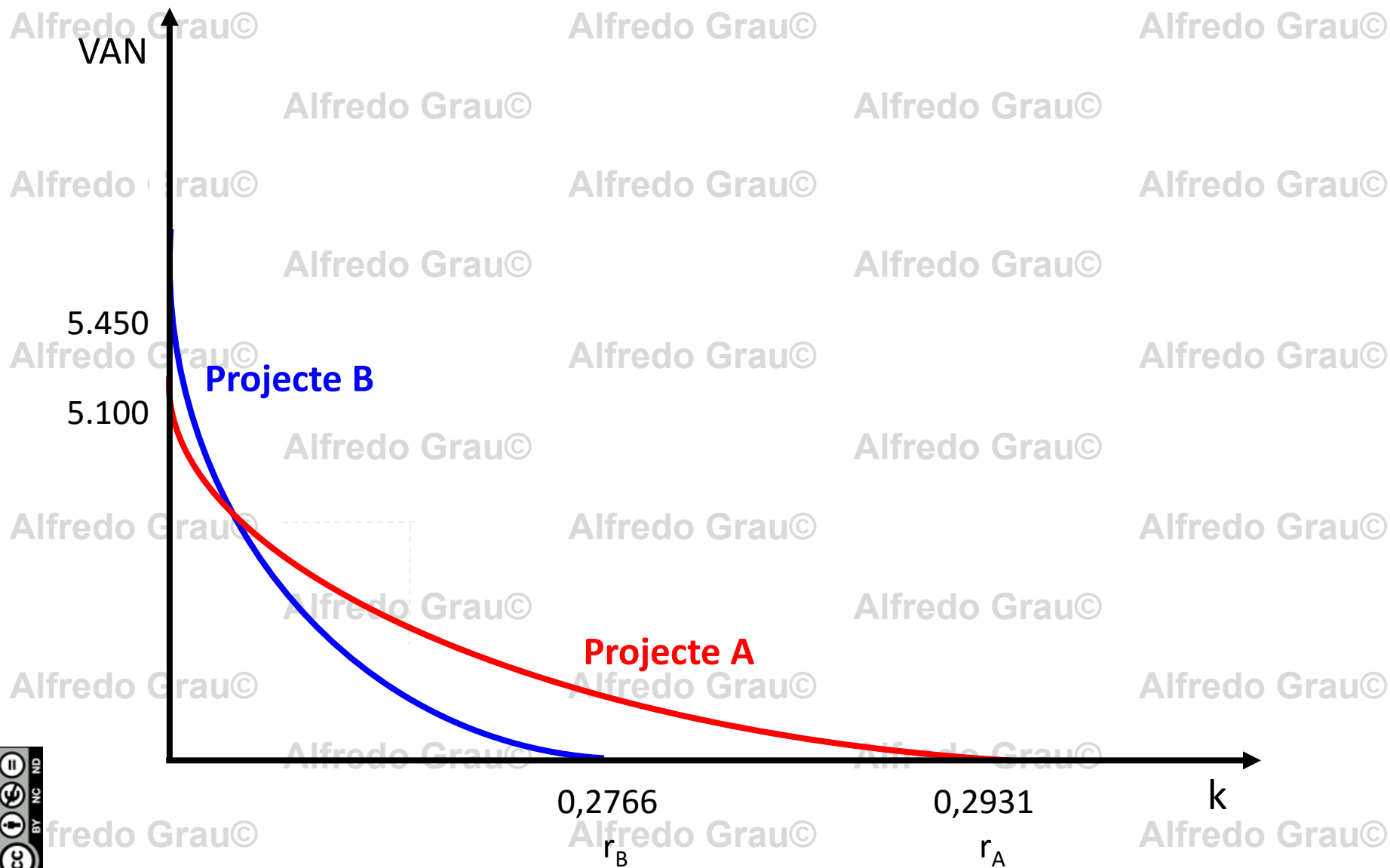
$$TIR^A = 29,31\%$$

$$TIR^B = 27,66\%$$



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 14 (VI)

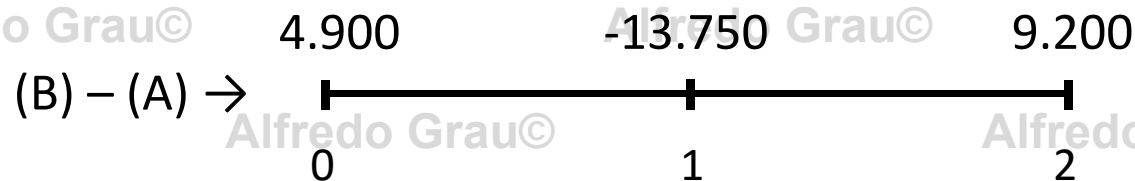


# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 14 (VII)



- Per a calcular la taxa de Fisher, obtenim primer l'esquema temporal de la inversió diferència:



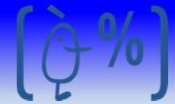
$$4.900 - \frac{13.750}{(1+r_f)} + \frac{9.200}{(1+r_f)^2} = 0$$

$$r_f = 0,1013 (10,13\%)$$



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 14 (VIII)



- En resum, els intervals de l'anàlisi de l'ordenació:

Interval d'anàlisi: [0%, $r_{\min}$ %[ $\Rightarrow$ [0%; 27,66%[		Ordre de preferència		
		VAN	TIR	Ordre
1	$0\% \leq k < 10,13\%$	$VAN_A < VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Discrepen
2	$k = 10,13\%$	$VAN_A = VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Discrepen
3	$10,13\% < k < 27,66\%$	$VAN_A > VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Coincideixen
4	$27,66\% < k < 29,31\%$	$VAN_A > VAN_B$	$TIR_A > TIR_B$	Coincideixen
5	$k > 29,31\%$	$VAN_A, VAN_B < 0$	$TIR_A > TIR_B$	Coincideixen



c) Supposeu que la  $k$  de l'apartat a) estiguera mal calculada i realment fóra del 10% o de l'11% anual, canviaria novament les rendibilitats inicials obtingudes en els dos projectes?

- Si ens fixem en el gràfic anterior, si el cost de capital fóra del 10%, encara seguiríem escollint el Projecte B perquè està a l'esquerra de la taxa de Fisher,  $r_f$ . Si fóra de l'11%, hem passat la taxa de Fisher i a partir d'ací el projecte més rendible passaria a ser el A.
- En definitiva, el valor de la  $k$  ens determinarà si convé escollir el projecte A o, el B.

# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 15 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Dos projectes excloents:

	n	$P_0$	FNC <sub>1</sub>	FNC <sub>2</sub>	FNC <sub>3</sub>	FNC <sub>4</sub>	FNC <sub>5</sub>
A	5	5.000	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500
B	2	19.000	12.000	13.500	---	---	---

– Es demana:

a) **Quines rendibilitats màximes es podrien obtenir amb aquests dos projectes?**

b) **Si  $k=7\%$  anual, calculeu:**

b.1) **Rendibilitats absolutes i relatives d'ambdós projectes.**

b.2) **Quin projecte triareu en funció del VAN? I de la TIR?**

c) **Estudieu gràficament i analítica la rendibilitat per qualsevol  $k$ .**



### SOLUCIÓ:

a) Quines rendibilitats màximes es podrien obtenir amb aquests dos projectes?

$$VAN^A = -5.000 + 3.500 \cdot a_{\overline{5}|0} = 12.500 \text{ €}$$

$$VAN^B (k = 0) = 19.000 + \frac{12.000}{(1+0)} + \frac{13.500}{(1+0)^2} = 6.500 \text{ €}$$





b) Si  $k=7\%$  anual, calculeu:

b.1) Rendibilitats absolutes i relatives d'ambdós projectes?

- Ens demana calcular el VAN dels dos projectes:

$$VAN = -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{FNC_j}{(1+k)^j} ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$VAN^A = -5.000 + 3.500 \cdot a_{\overline{5}|0,07} = 9.350,69 \text{ €}$$

$$VAN^B = -19.000 + \frac{12.000}{(1+0,07)} + \frac{13.500}{(1+0,07)^2} = 4.006,38 \text{ €}$$



# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 15 (IV)



- La TIR dels projectes serà:

$$\text{TIR}^A = -5.000 + 3.500 \cdot a_{\overline{5}|r_A} = 0$$

$$r_A = 0,6412 \text{ (64,12\%)}$$

$$\text{TIR}^B \Rightarrow -19.000 + \frac{12.000}{(1+r_B)} + \frac{13.500}{(1+r_B)^2} = 0$$

$$r_B = 0,2159 \text{ (21,59\%)}$$





### b.2) Quin projecte triareu en funció del VAN? I de la TIR?

- L'ordenació jeràrquica serà:

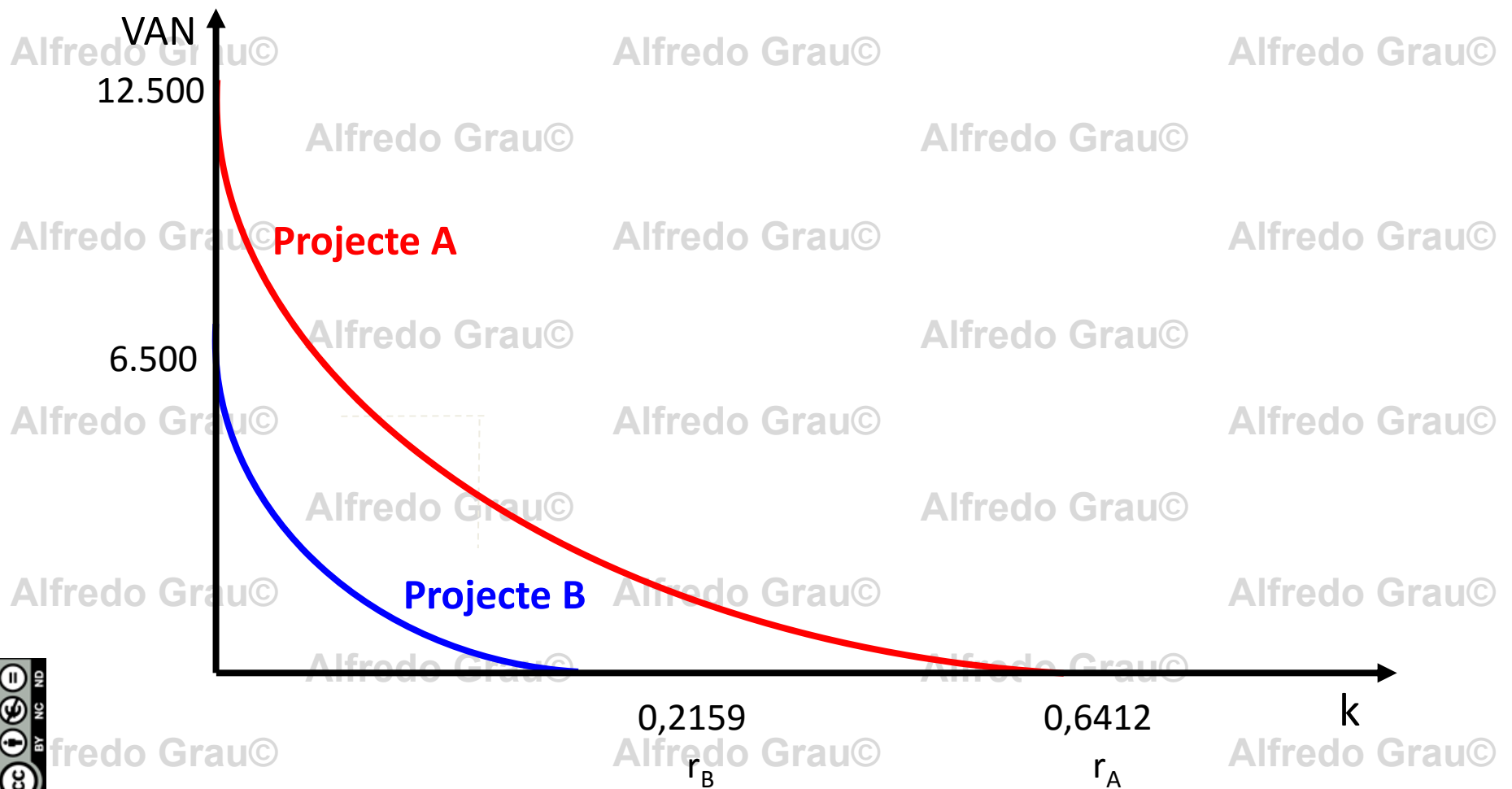
$VAN^A > VAN^B \Rightarrow$  millor alternativa el projecte A.

$TIR^A > TIR^B \Rightarrow$  millor alternativa el projecte A.

- Els dos criteris assenyalen com a millor alternativa el projecte A, independentment del valor del cost d'oportunitat de capital.



c) Estudieu gràficament i analític la rendibilitat per qualsevol valor de  $k$ .

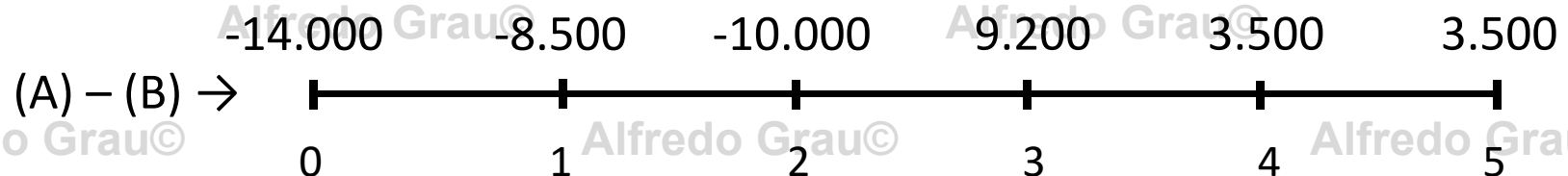


# Bloc II. Temes 3 i 4

## PRÀCTICA 15 (VII)



- Analíticament podem comprovar que les corbes no es creuen i, per tant, sempre serà preferible el projecte A, és a dir, no hi ha taxa de Fisher:

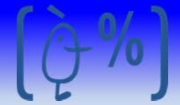


$$-14.000 - \frac{8.500}{(1+r_f)} - \frac{10.000}{(1+r_f)^2} + \frac{9.200}{(1+r_f)^3} + \frac{3.500}{(1+r_f)^4} + \frac{3.500}{(1+r_f)^5} = 0$$

$$r_f = 0$$

- Efectivament, aquest resultat verifica que no hi ha punt de tall entre les dues corbes.





## TEMA 5

### III. VALORACIÓ DE PROJECTES D'INVERSIÓ AMB INCERTESA

Professor: Dr. Alfredo J. Grau Grau<sup>®</sup>

VNIVERSITAT  
E VALÈNCIA



Facultat d' Economia

Grau en Administració i Direcció d'Empreses



# Material protegit per "CREATIVE COMMONS"



© Alfredo J. Grau Grau

Alfredo G



**Reconeixement (Attribution):** En qualsevol explotació de l'obra autoritzada per la llicència caldrà reconèixer l'autoria.

lo Grau©

Alfredo G



**No Comercial (Non commercial):** L'explotació de l'obra queda limitada a usos no comercials.

lo Grau©



**Sense Obres Derivades (No Derivate Works):** L'autorització per explotar l'obra no inclou la transformació per crear una obra derivada.

Alfredo G



**Compartir Igual (Share alike):** L'explotació autoritzada inclou la creació d'obres derivades sempre que mantinguin la mateixa llicència en ser divulgades.

lo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



fredo Grau©

Alfredo Grau©

**Reconeixement - NoComercial - SenseObraDerivada (by-nc-nd):** No es permet un ús comercial de l'obra original ni la generació d'obres derivades.

fredo Grau©



fredo Grau©

<http://cat.creativecommons.org/licencia/>

Alfredo Grau©

# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 16 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Dos projectes excloents:

Projecte	Desemborsament	FNC <sub>1</sub>	FNC <sub>2</sub>
Cotxe XY	-100.000	54.000	79.200
Cotxe XZ	-100.000	48.000	86.400

– Si la  $k$  és del 9,52381% i la inflació del 5%, es demana:

a) Quin seria el projecte escollit en funció del VAN?

b) En cas d'haver escollit el projecte menys rendible, en quan es deixaria de maximitzar la riquesa de l'accionista?

c) Si utilitzem el criteri de la TIR, triareu el mateix prototip de l'apartat anterior? Representeu les funcions VAN.





- d) La conclusió a la qual arribeu sobre l'elecció del projecte d'inversió amb els criteris utilitzats es mantindrà per a qualsevol valor de  $k$ ?
- e) A partir de quina taxa s'obtidrien rendibilitats absolutes netes negatives?
- f) Quina és la prima per risc que s'està exigint als projectes si el tipus d'interès sense risc nominal és del 6%?
- g) Suposem que els prototips de cotxes teledirigits, a diferència de com s'ha plantejat en el problema, tingueren un risc més elevat que l'actual risc econòmic de l'empresa. Si l'analista no se n'adonara i utilitzara la  $k$  que s'ha aplicat fins al moment, expliqueu si, amb les rendibilitats anteriorment calculades, els projectes d'inversió estarien ben valorats, infravalorats o sobrevalorats. Raoneu la resposta.

### SOLUCIÓ:

#### a) Quin seria el projecte escollit en funció del VAN?

- En primer lloc, calcularem el cost de capital en termes nominals:

$$(1+k_N) = (1+k_R)(1+g) \Rightarrow k_N = (1+k_R)(1+g) - 1 \Rightarrow k_N = 0,15 \text{ (15\%)}$$

$$VAN = -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{FNC}{(1+k)^j} ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$



$$VAN_{XY} = -100.000 + \frac{54.000}{(1+0,15)} + \frac{73.200}{(1+0,15)^2} = \mathbf{6.843 \text{ €}}$$

# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 16 (IV)



$$VAN_{XZ} = -100.000 + \frac{48.000}{(1 + 0,15)} + \frac{86.400}{(1 + 0,15)^2} = 7.070 \text{ €}$$

- Haurà d'escometre el projecte XZ ja que és el que maximitza la riquesa de l'accionista atès que té un VAN major.





**b) En cas d'haver escollit el projecte menys rendible, en quan es deixaria de maximitzar la riquesa de l'accionista?**

- Si escollira de manera errònia el projecte menys rendible, XY, el valor de mercat de l'empresa es reduiria 227 €, és a dir, la diferència entre 6.843 – 7.070.



c) Si utilitzem el criteri de la TIR, triareu el mateix prototip de l'apartat anterior? Representeu les funcions VAN.

- Calculem el valor de les TIR dels dos projectes:

$$\text{TIR} \Rightarrow -P_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\text{FNC}}{(1+r)^j} = 0 ; \forall j = 1, 2, \dots, n-1, n$$

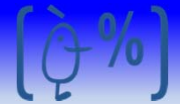
$$\text{TIR}_{xy} \Rightarrow -100.000 + \frac{54.000}{(1+r_{xy})} + \frac{79.200}{(1+r_{xy})^2} = 0 \Rightarrow r_{xy} = 0,20 \text{ (20\%)}$$

$$\text{TIR}_{xz} \Rightarrow -100.000 + \frac{48.000}{(1+r_{xz})} + \frac{86.400}{(1+r_{xz})^2} = 0 \Rightarrow r_{xz} = 0,20 \text{ (20\%)}$$



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 16 (VII)



- Per poder realitzar la gràfica abans necessitem calcular:

- Punts màxims per als VAN:

$$VAN_{xy}(k=0) = -100.000 + \frac{54.000}{(1+0)} + \frac{73.200}{(1+0)^2} = 34.400 \text{ €}$$

$$VAN_{xz}(k=0) = -100.000 + \frac{48.000}{(1+0)} + \frac{86.400}{(1+0)^2} = 33.200 \text{ €}$$

- Punts de tall, TIR:

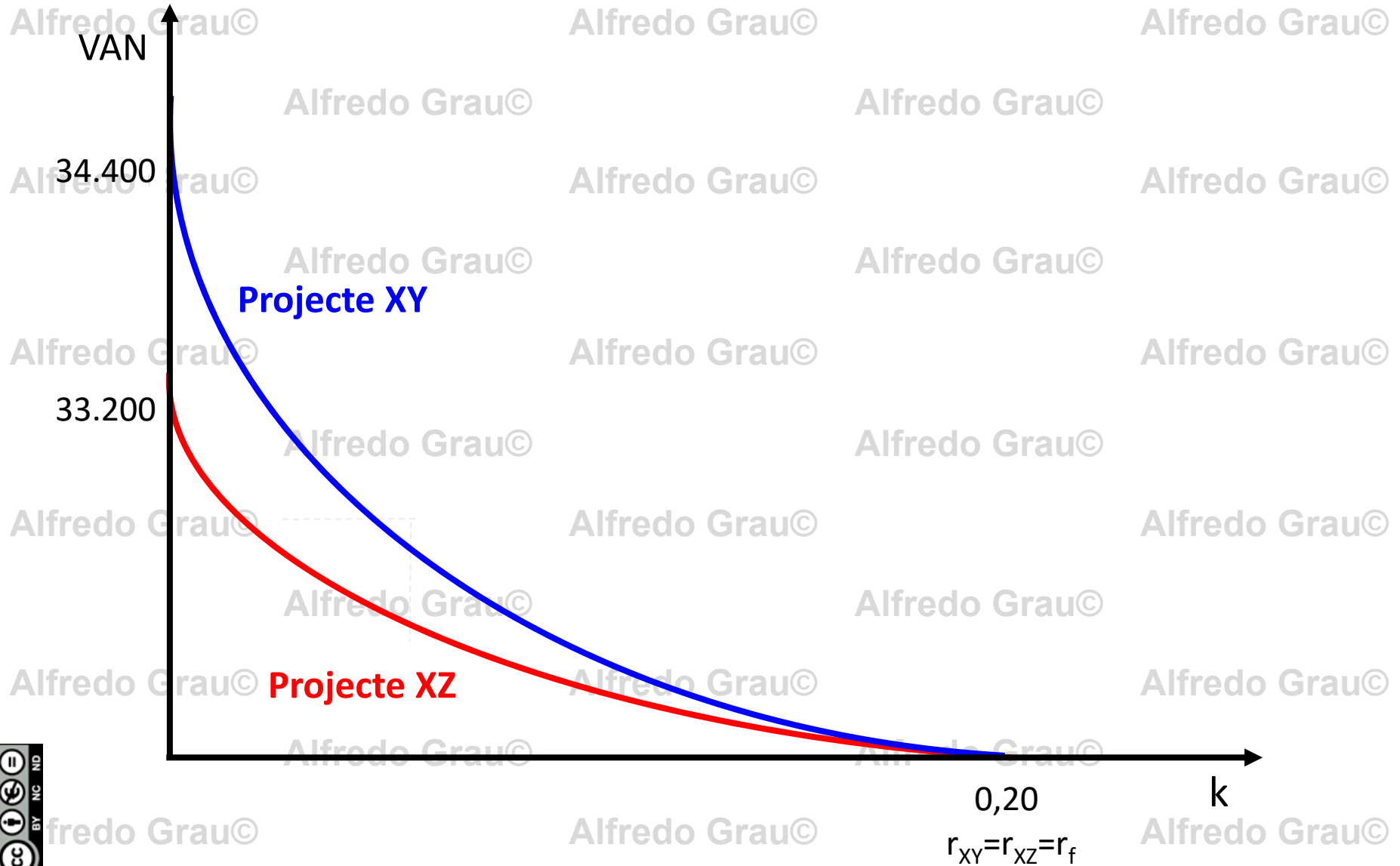
$$TIR_{xy} = \mathbf{20\%}$$

$$TIR_{xz} = \mathbf{20\%}$$



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 16 (VIII)



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 16 (IX)



- Atenen al criteri TIR, qualsevol dels dos projectes són igualment rendibles. D'altra banda, el criteri VAN assenjala el projecte XY com a més rendible.





**d) La conclusió a la qual arriba sobre l'elecció del projecte d'inversió amb els criteris utilitzats es mantindrà per a qualsevol valor de  $k$ ?**

- Sols per a una  $k$  del 20% els criteris VAN i TIR són coincidents en determinar que els dos projectes són igualment atractius des del punt de vista de la rendibilitat.
- D'altra banda, si la  $k \in [0\%-20\%[$ , el criteri VAN assenyala com a projecte més rendible el prototip XZ.





**e) A partir de quina taxa s'obtidrien rendibilitats absolutes netes negatives?**

- A partir d'una TIR o taxa de Fisher superior al 20% s'obtidrien rendibilitats negatives segons el VAN.



**f) Quina és la prima per risc que s'està exigint als projectes si el tipus d'interès sense risc nominal és del 6%?**

- Si anomenem  $\iota$  el tipus d'interès sense risc i  $\rho$  la prima per risc, podem descompondre el cost d'oportunitat del capital (taxa ajustada al risc) de la manera següent:

$$k = \iota + \rho \Rightarrow \rho = k - \iota \Rightarrow \rho = 0,15 - 0,06 = 0,09 (9\%)$$

- Aquesta prima indica el rendiment extra que obté un inversor en triar una inversió arriscada (adquirir les accions de MECANOTRÒNIC SA) respecte d'invertir en el mercat en un actiu al tipus lliure de risc (6%), se'l remunera amb un 9% addicional per haver triat aquella inversió que genera més risc (tesi de l'aversion al risc dels inversors racionals en el mercat de capitals: a més risc s'exigeix més rendibilitat).

g) Suposem que els prototipus de cotxes teledirigits, a diferència de com s'ha plantejat en el problema, tingueren un risc més elevat que l'actual risc econòmic de l'empresa. Si l'analista no se n'adonara i utilitzara la  $k$  que s'ha aplicat fins al moment, expliqueu si, amb les rendibilitats anteriorment calculades, els projectes d'inversió estarien ben valorats, infravalorats o sobrevalorats. Raoneu la resposta.

- Si els nous projectes són més arriscats que els projectes actuals de l'empresa (components electrònics), entenem que s'altera el risc econòmic de l'empresa, per la qual cosa la taxa de descompte hauria de ser major.



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 16 (XIV)



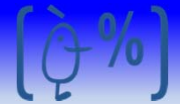
- Si l'analista que realitza la valoració no calcularà els VAN en la nova taxa ajustada al risc, estaria sobrevalorant els projectes; ja que si calculàrem els VAN a la taxa ajustada correctament, el resultat del càlcul de VAN seria menor (descomptem en una taxa més elevada). Podria succeir que algun projecte que en l'antiga taxa de descompte fóra rendible deixara de ser-ho amb la nova situació, exemple: suposem que la nova taxa ajustada al risc fóra del 21% (>15%), el VAN de XY passaria a ser:

$$VAN_{XY} = -100.000 + \frac{54.000}{(1 + 0,21)} + \frac{73.200}{(1 + 0,21)^2} = -1.277 \text{ €}$$



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 16 (XV)



- Així tenim que un projecte valorat en una taxa no adequada ens podria conduir a acceptar-lo quan realment les circumstàncies suggereixen rebutjar-lo.





### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Estimacions del nou projecte:

- Inversió inicial: 50 milions d'€.
- Vida útil: 8 anys.
- La quota de mercat de roba de bany corresponent a l'empresa és el 2% (anual i no acumulatiu) durant els vuit anys de la vida útil.
- Grandària del mercat de roba de bany: 15 milions d'unitats de producte.
- Preu unitari de venda: 90 €.
- Cost variable unitari: 30 €.
- Cost fix anual: 5 milions d'€
- Amortització lineal amb valor residual nul, acceptat per l'Administració.



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 17 (II)



- El valor de venda de l'equip al final de la seua vida útil és nul.
  - Tipus impositiu del 30% i l'impost es paga quan es merita.
  - Política de cobraments i pagaments al comptat.
  - El cost d'oportunitat del capital és el 10%.
- Es demana realitzar una anàlisi de sensibilitat suposant els valors que hi ha en la taula següent:

Variable	Rang		
	Pessimista	Esperada	Optimista
Grandària de mercat	13 milions u. f.	15 milions u. f.	16 milions u. f.
Quota de mercat	0,016	0,02	0,025
Preu unitari	85 €	90 €	95 €
Cost variable unitari	35 €	30 €	25 €
Costos fixos	8 milions	5 milions	3 milions





### SOLUCIÓ:

**FASE 1:** En primer lloc, calculem el VAN amb les dades esperades. Per tant, hem de calcular primer els FCF del projecte amb els valors esperats de cada variable.

- Càlculs previs per a determinar el BAIT anual del projecte (tots els anys iguals donat que les variables no canvien):

INGRESSOS I COSTOS D'EXPLOTACIÓ	
Vendes anuals esperades en u. f.	$15.000.000 * 0,02 = 300.000 \text{ u. f.}$
Ingressos anual per vendes	$300.000 * 90\text{€} = 27.000.000 \text{ €}$
Cost variable anual total	$300.000 * 30\text{€} = 9.000.000 \text{ €}$

AMORTITZACIÓ	
Amortització anual	$50.000.000 / 8 = 6.250.000 \text{ €}$

# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 17 (IV)



VARIACIÓ PATRIMONIAL	
Variació patrimonial = 0	El valor de venda de l'equip al final de la seua vida útil és nul

<b>CÀLCUL DEL BAIT (1-t)</b>	$t_0$	$t_1-t_8$
+ Ingressos per vendes		27.000.000
- Costos fixos		5.000.000
- Cost variable total		9.000.000
- Amortització		6.250.000
<b>=BAIT</b>		<b>+6.750.000</b>
- Impostos (30%)		2.025.000
<b>=BAIT (1-t)</b>		<b>+4.725.000</b>



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 17 (V)



<b>CÀLCUL DEL FREE CASH FLOW</b>	$t_0$	$t_1-t_8$
<b>=BAIT (1-t)</b>		<b>+4.725.000</b>
+ Amortització		6.250.000
- $\Delta$ Actiu fix	-50.000.000	
<b>=E(FCF) després d'impostos</b>	<b>-50.000.000</b>	<b>+10.975.000</b>

- Amb aquestes dades calculem el VAN esperat del projecte utilitzant la taxa de descompte ajustada al risc ( $k=10\%$ ):

$$\text{VAN} = -50.000.000 + \frac{10.975.000}{(1+0,10)} + \dots + \frac{73.200}{(1+0,10)^8} =$$

$$\text{VAN} \Rightarrow -50.000.000 + 10.975.000 \cdot a_{\overline{8}|0,10} = 8.550.815,02 \text{ €}$$



**FASE 2:** A continuació realitzem l'anàlisi de sensibilitat respecte a les variables considerades rellevants.

- En aquest exercici les variables considerades rellevants són: la grandària i la quota de mercat, el preu de venda unitari, el cost variable unitari i els costos fixos.
- Per a això, se sol·licita al personal de comercialització i de producció que realitzi una estimació optimista i una pessimista de cada una d'elles, valors que apareixen en la Taula 2 de l'enunciat.
- Realitzem el càlcul dels valors actuals nets (VAN) del projecte corresponents a la utilització de les estimacions optimista i pessimista de cada variable, mantenint per a la resta de les variables els valors esperats o previstos que es van estimar inicialment.

# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 17 (VII)



- En el quadre següent es representen de manera conjunta els diferents resultats dels VAN calculats (anàlisi de sensibilitat):

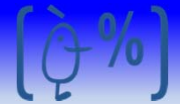
Variable	VAN (€)		
	Pessimista	Esperada	Optimista
Grandària de mercat	-411.860,99	8.550.815,02	13.032.153,03
Quota de mercat	-4.893.199,00	8.550.815,02	25.355.832,55
Preu unitari	2.949.142,51	8.550.815,02	14.152.487,53
Cost variable unitari	2.949.142,51	8.550.815,02	14.152.487,53
Costos fixos	-2.652.529,99	8.550.815,02	16.019.711,70

- Aquests resultats revelen la falta de seguretat respecte a l'augment de la riquesa de l'empresa si du a terme el projecte i que les variables que més poden posar en perill l'èxit del projecte són: la quota de mercat i els costos fixos.



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 17 (VIII)



- L'empresa es podria plantejar estudiar la realització d'una inversió addicional per tal de controlar la variabilitat d'aquestes dues variables crítiques.

**FASE 3: Consulteu el manual de referència.**





### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Estimacions del nou projecte:

▪ E(VAN): 48.599 €.

▪ Vida útil: 5 anys.

▪ Rendibilitat mínima: 10%.

▪ Cost unitari de producció esperat: 20 €, podria passar a 25 €.

▪ Cost unitari adquisició de matèries: 18 €.

▪ Cost fix anual: 4.000 €.

▪ Desemborsament: 100.000 € (no amortitzables).

▪ Preu esperat de venda unitari: 32 €.

▪ Unitats produïdes: 5.000.

▪ Taxa impositiva: 30%.



### SOLUCIÓ:

Si es compleixen les seues previsions respecte al cost variable de producció donada situació de crisi econòmica i la possible variació que poden patir el cost de les matèries primeres i el cost de l'energia, pot conduir al fracàs del projecte?

- Si el cost variable és de 25 €/unitat produïda (u.p.):

$$\text{BAIT} = (\text{Ingressos per vendes} - \text{costos de producció}) =$$

$$\text{BAIT} = [(\text{Unitats produïdes} * \text{preu de venda}) -$$

$$(\text{Unitats produïdes} * \text{CV}) - (\text{CF})] =$$





# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 18 (III)



■ Considerant l'efecte dels impostos:

$$\text{BAIT}(1 - t) = (\text{Ingressos per vendes} - \text{costos de producció}) * (1 - t) =$$

$$\text{BAIT}(1 - t) = [(\text{Unitats produïdes} * \text{preu de venda}) -$$

$$(\text{Unitats produïdes} * \text{CV}) - (\text{CF})] * (1 - t) =$$

■ El BAIT(1-t) serà:

$$\text{BAIT}(1 - t) = (5.000 * 32) - (5.000 * 25) - (4.000) * (1 - 0,30) = \mathbf{21.700 \text{ €}}$$

■ Ja que no s'han de fer ajustos, els FNC coincidiran amb la xifra anterior, açò és, 21.700 €/any.



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 18 (IV)



La rendibilitat final del projecte serà:

$$VAN = -100.000 + \frac{21.700}{(1+0,10)} + \dots + \frac{21.700}{(1+0,10)^5} =$$

$$VAN \Rightarrow -100.000 + 21.700 \cdot a_{\overline{5}|0,10} = -17.739,92 \text{ €}$$

- En definitiva, la contingència presentada el l'enunciat sí que podria fer fracassar el projecte d'inversió.





### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Estimacions del nou projecte:

- Vida útil: 10 anys.

- Cost d'oportunitat del capital: 10%.

- Cost unitari de producció esperat: 100 €.

- Cost fix anual: 200.000 €.

- Desemborsament: 350.000 €.

- Preu esperat de venda unitari: 800 €.

- Amortització anual: 35.000 €.

- Taxa impositiva: 30%.

– Calcular el punt d'equilibri o punt mort.



### SOLUCIÓ:

### Calcular el punt d'equilibri o punt mort

- Per a determinar el BAIT anual del projecte (tots els anys iguals donat que les variables no canvien), necessitem calcular les unitats que cal vendre i produir:

BAIT (1-t)	$t_1 - t_{10}$
+Ingressos per vendes	800 up
- Costos fixos	200.000
- Cost variable total	100 up
- Amortització	35.000
<b>= BAIT</b>	<b>+700 up – 235.000</b>
<b>= BAIT(1-t)</b>	<b>+ 490 up – 164.500</b>

# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 19 (III)



■ Fem ens corresponents ajustos:

$$FCF = \text{BAIT}(1 - t) + \text{Amortitzacions} =$$

$$FCF = [+490 \text{up} - 164.500] + 35.000 = (+490 \text{up} - 129.500) \text{€}$$

$$FCF = (+490 \text{up} - 129.500) \text{€/any}$$

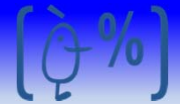
- Per a calcular el punt mort necessitem primer les unitats mínimes que s'han de vendre per tal que el projecte siga rendible. Si calculem "up" per a un  $\text{VAN}(k)=0$ , tindrem que l'augment de les unitats venudes augmentarà la rendibilitat del projecte i, per tant, començarà a ser rendible:

$$\text{VAN} \Rightarrow -350.000 + (+490 \text{up} - 129.500) \cdot a_{\overline{10}|0,10} = 0 \text{€}$$



# Bloc III. Tema 5

## PRÀCTICA 19 (IV)



■ Aillant “up” en l’anterior equació tindrem:

$$\text{up} = 380,53 \text{ unitats per produir / any}$$

- Finalment, l’empresa haurà de produir de 381 unitats cap amunt perquè el projecte comence a ser-li rendible.



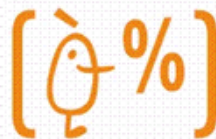


## TEMA 6

# IV. RENDIBILITAT I RISC D'ACTIUS FINANCERS

Professor: Dr. Alfredo J. Grau Grau<sup>®</sup>

VNIVERSITAT  
E VALÈNCIA



Facultat d' Economia

Grau en Administració i Direcció d'Empreses



# Material protegit per "CREATIVE COMMONS"



® Alfredo J. Grau Grau

Alfredo G



**Reconeixement (Attribution):** En qualsevol explotació de l'obra autoritzada per la llicència caldrà reconèixer l'autoria.

lo Grau©

Alfredo G



**No Comercial (Non commercial):** L'explotació de l'obra queda limitada a usos no comercials.

lo Grau©



**Sense Obres Derivades (No Derivate Works):** L'autorització per explotar l'obra no inclou la transformació per crear una obra derivada.

Alfredo G



**Compartir Igual (Share alike):** L'explotació autoritzada inclou la creació d'obres derivades sempre que mantinguin la mateixa llicència en ser divulgades.

lo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



fredo Grau©

Alfredo Grau©

**Reconeixement - NoComercial - SenseObraDerivada (by-nc-nd):** No es permet un ús comercial de l'obra original ni la generació d'obres derivades.

fredo Grau©



fredo Grau©

<<http://cat.creativecommons.org/licencia/>>

Alfredo Grau©



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 21 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Tenim dos títols, X i Y:

Estat de la naturalesa	Probabilitat d'esdeveniment	Rendibilitat títol X	Rendibilitat títol Y
I	60%	25%	15%
II	40%	10%	11%

– Es demana:

- Calculeu la rendibilitat esperada i el risc de cada títol. Calculeu la covariància i la correlació lineal de les rendibilitats d'ambdós títols.
- Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera de mínima variància global (CMV).



- c) **Determineu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera C integrada equiponderadament pels títols X i Y. En relació a aquesta cartera, calculeu la mitjana ponderada del risc (desviació típica) d'ambdós títols i indiqueu si coincideix o no amb el risc (desviació típica) d'aquesta cartera.**
- d) **Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera òptima S d'un inversor racional que no vol suportar cap risc. Seria eficient aquesta cartera?**
- e) **Calculeu la composició pressupostària i la rendibilitat esperada de la cartera òptima P d'un inversor racional que vol suportar un risc del 5,192918%. Seria eficient aquesta cartera?**
- f) **Calculeu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera Q en què el pes pressupostari del títol Y siga el 120% del pressupost d'inversió. Seria eficient aquesta cartera?**



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 21 (III)



g) Calculeu la composició pressupostària i el risc d'una cartera K la rendibilitat esperada de la qual siga el 13,96%. Seria eficient aquesta cartera?

h) Dibuixeu en l'espai rendibilitat esperada-risc (desviació típica) el conjunt factible de carteres i assenyalau-hi els títols X i Y, i totes les carteres calculades en l'exercici.



### SOLUCIÓ:

- a) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc de cada títol. Calculeu la covariància i la correlació lineal de les rendibilitats d'ambdós títols.

$$E(\tilde{R}_i) = \sum_{j=1}^m R_{ij} \cdot P_j \quad ; \quad \sigma^2(\tilde{R}_x) = \sigma_x^2 = \sum_{j=1}^m P_j \cdot [R_{xj} - E(\tilde{R}_{xj})]^2$$

- Rendibilitat i risc del títol X:

$$E(\tilde{R}_x) = \sum_{j=1}^m R_{xj} \cdot P_j = (0,6 * 0,25) + (0,4 * 0,1) = 0,19 \text{ (19\%)}$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_x) = \sigma_x^2 = 0,6 * (0,25 - 0,19)^2 + 0,4 * (0,1 - 0,19)^2 = 0,0054$$

$$\sigma(\tilde{R}_x) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_x)} = \sigma_x = \sqrt{0,0054} = 0,07348 \text{ (7,348\%)}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 21 (V)



■ Rendibilitat i risc del títol Y:

Alfredo Grau©

$$E(\tilde{R}_Y) = \sum_{j=1}^m R_{Yj} \cdot P_j = (0,6 * 0,15) + (0,4 * 0,11) = 0,134 \text{ (13,4\%)}$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_Y) = \sigma_Y^2 = 0,6 * (0,15 - 0,134)^2 + 0,4 * (0,11 - 0,134)^2 = 0,000384$$

$$\sigma(\tilde{R}_Y) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_Y)} = \sigma_Y = \sqrt{0,000384} = 0,01959 \text{ (1,959\%)}$$

■ Covariància dels títols X i Y:

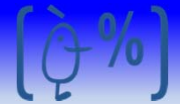
$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = P_j (R_X - E(\tilde{R}_X))(R_Y - E(\tilde{R}_Y))$$

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = 0,6 * (0,25 - 0,19) * (0,15 - 0,134) + \\ + 0,4 * (0,1 - 0,19) * (0,11 - 0,134) = \mathbf{0,00144}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 21 (VI)



Correlació entre títols X i Y:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} ; -1 \leq \rho_{XY} \leq +1$$

$$\rho_{XY} = \frac{0,00144}{0,07348 * 0,019595} = 1$$

- Hi ha una correlació lineal perfecta positiva entre aquests dos títols X i Y.



b) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera de mínima variància global (CMV).

- Pes pressupostari del títol X en la CMVG (la de menor risc):

$$\omega_X = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}$$

$$\omega_X = \frac{0,000384 - 0,00144}{0,0054 + 0,000384 - 2 * 0,00144} = -0,363636 \text{ (-36,36\%)}$$

- Pes pressupostari del títol Y en la CMVG:

$$\omega_Y = 1 - \omega_X \Rightarrow \omega_Y = 1 - (-0,3636) = 1,3636 \text{ (136,36\%)}$$



- Rendibilitat esperada (esperança matemàtica) de la CMVG:

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_X E(\tilde{R}_X) + \omega_Y E(\tilde{R}_Y)$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = ((-0,3636) * 0,19) + (1,3636 * 0,134) =$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = 0,113636 \text{ (11,3636\%)}$$

- Risc esperat (variància) de la CMVG:

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_X^2 \sigma^2(\tilde{R}_X) + \omega_Y^2 \sigma^2(\tilde{R}_Y) + 2\omega_X \omega_Y \sigma(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = 0,1322 * 0,0054 + 1,8595 * 0,000384 +$$

$$+ 2 * (-0,3636) * 1,3636 = 0$$





c) **Determineu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera C integrada equiponderadament pels títols X i Y. En relació a aquesta cartera, calculeu la mitjana ponderada del risc (desviació típica) d'ambdós títols i indiqueu si coincideix o no amb el risc (desviació típica) d'aquesta cartera.**

- Rendibilitat esperada d'una cartera C equiponderada:

$$E(\tilde{R}_C) = 0,5 * E(\tilde{R}_X) + 0,5 * E(\tilde{R}_Y)$$

$$E(\tilde{R}_C) = 0,5 * 0,19 + 0,5 * 0,134 = 0,162 \text{ (16,2\%)}$$

- Atés què el coeficient de correlació és unitari, l'efecte avantatjós de la diversificació no es produeix.



- Risc esperat (variància) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma^2(\tilde{R}_C) = 0,5^2 * \sigma^2(\tilde{R}_X) + 0,5^2 * \sigma^2(\tilde{R}_Y) + 2 * 0,5 * 0,5 * \sigma(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_C) = 0,5^2 * 0,0054 + 0,5^2 * 0,000384 +$$

$$+ 2 * 0,5 * 0,5 * 0,00144 = 0,002166$$

- Risc esperat (desviació típica) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_C)}$$

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{0,002166} = 0,04654 \text{ (4,654\%)}$$



**d) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera òptima S d'un inversor racional que no vol suportar cap risc. Seria eficient aquesta cartera?**

- Sent  $\rho_{XY}=1$ , un inversor que no vol suportar cap risc formarà la cartera de mínima variància global (CMV), aleshores:
  - Pes pressupostari del títol X a la cartera S:  $\omega_X = -0,363636$
  - Pes pressupostari del títol Y a la cartera S:  $\omega_Y = 1,363636$
  - Rendibilitat esperada de la cartera S:  $E(R_S) = 0,1136$  (11,363%)
  - Risc (desviació típica) de la cartera S:  $\sigma_S = 0$  (0%)
- La cartera S és eficient ja que coincideix amb la CMVG, no hi ha cap altra cartera amb major rendibilitat esperada per a aquest nivell concret de risc.

e) Calculeu la composició pressupostària i la rendibilitat esperada de la cartera òptima P d'un inversor racional que vol suportar un risc del 5,192918%. Seria eficient aquesta cartera?

- Volem combinar els actius X i Y per tal d'aconseguir un determinat nivell de risc ( $\sigma_P = 0,5192918$ ).
- Ja que en aquest exercici el coeficient de correlació és 1, es compleix que:

$$\sigma_P = \omega_X \sigma_X + \omega_Y \sigma_Y$$

$$\sigma_P = \omega_X \sigma_X + \omega_Y \sigma_Y = 0,05192918$$

- Com que la suma de pesos ha de ser igual a 1, i només tenim dos actius:



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 21 (XIII)



$$\sigma_p = \omega_x 0,07348 + (1 - \omega_x) 0,019596 = 0,05192918$$

$$\omega_x 0,07348 + (1 - \omega_x) 0,019596 = 0,05192918$$

- Aïllant  $\omega_x$  podem trobar la composició pressupostària:

$$\omega_x = 0,6 (60\%)$$

$$\omega_y = (1 - \omega_x) = 1 - 0,6 = 0,4 (40\%)$$

- Una vegada coneguda la composició de la cartera que volem, podem calcular-ne la rendibilitat esperada:



- Rendibilitat esperada d'una cartera P:

$$E(\tilde{R}_p) = 0,6 * 0,19 + 0,4 * 0,134 = 0,1676 \text{ (16,76\%)}$$

- La cartera P és “eficient” ja que la seua rendibilitat esperada és major que la de CMVG:

$$E(\tilde{R}_p) > E(\tilde{R}_{CMVG})$$

$$E(\tilde{R}_p) = 16,76\% > E(\tilde{R}_{CMVG}) = 11,363\%$$

- Tot i que també el seu risc és major que el de la CMVG:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = 5,1929\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$



**f) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera Q en què el pes pressupostari del títol Y siga el 120% del pressupost d'inversió. Seria eficient aquesta cartera?**

- Rendibilitat esperada de la cartera Q:

$$E(\tilde{R}_Q) = -0,2 * 0,19 + 1,2 * 0,134 = 0,1228 (12,28\%)$$

- Risc esperat (variància) de la cartera Q:

$$\sigma^2(\tilde{R}_Q) = 0,04 * 0,0054 + 1,44 * 0,000384 + 2 * (-0,2) * 1,2 * 0,00144 = 0,00007776$$

- Risc esperat (desviació típica) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{0,00007776} = 0,008818 (0,8818\%)$$



- La cartera Q és “eficient” ja que la seua rendibilitat esperada és major que la de CMVG:

$$E(\tilde{R}_Q) > E(\tilde{R}_{CMVG})$$

$$E(\tilde{R}_Q) = 12,28\% > E(\tilde{R}_{CMVG}) = 11,363\%$$

- Tot i que també el seu risc és major que el de la CMVG:

$$\sigma(\tilde{R}_Q) = 0,88\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$





**g) Calculeu la composició pressupostària i el risc d'una cartera K la rendibilitat esperada de la qual siga el 13,96%. Seria eficient aquesta cartera?**

- Rendibilitat esperada de la cartera K:

$$E(\tilde{R}_K) = \omega_x 0,19 + (1 - \omega_x) 0,134 = 0,1396$$

$$\omega_x = 0,1 (10\%)$$

$$\omega_y = (1 - \omega_x) = 1 - 0,1 = 0,9 (90\%)$$

- Risc esperat (variància) de la cartera K:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{R}_K) &= 0,01 * 0,0054 + 0,9 * 0,000384 + \\ &+ 2 * (0,1) * 0,9 * 0,00144 = 0,00062424 \end{aligned}$$

- Risc esperat (desviació típica) de la cartera K:

$$\sigma(\tilde{R}_K) = \sqrt{0,00062424} = 0,02498 (2,498\%)$$

- La cartera K és “eficient” ja que la seua rendibilitat esperada és major que la de CMVG:

$$E(\tilde{R}_K) > E(\tilde{R}_{CMVG})$$

$$E(\tilde{R}_K) = 13,96\% > E(\tilde{R}_{CMVG}) = 11,363\%$$

- Tot i que també el seu risc és major que el de la CMVG:

$$\sigma(\tilde{R}_K) = 2,49\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$



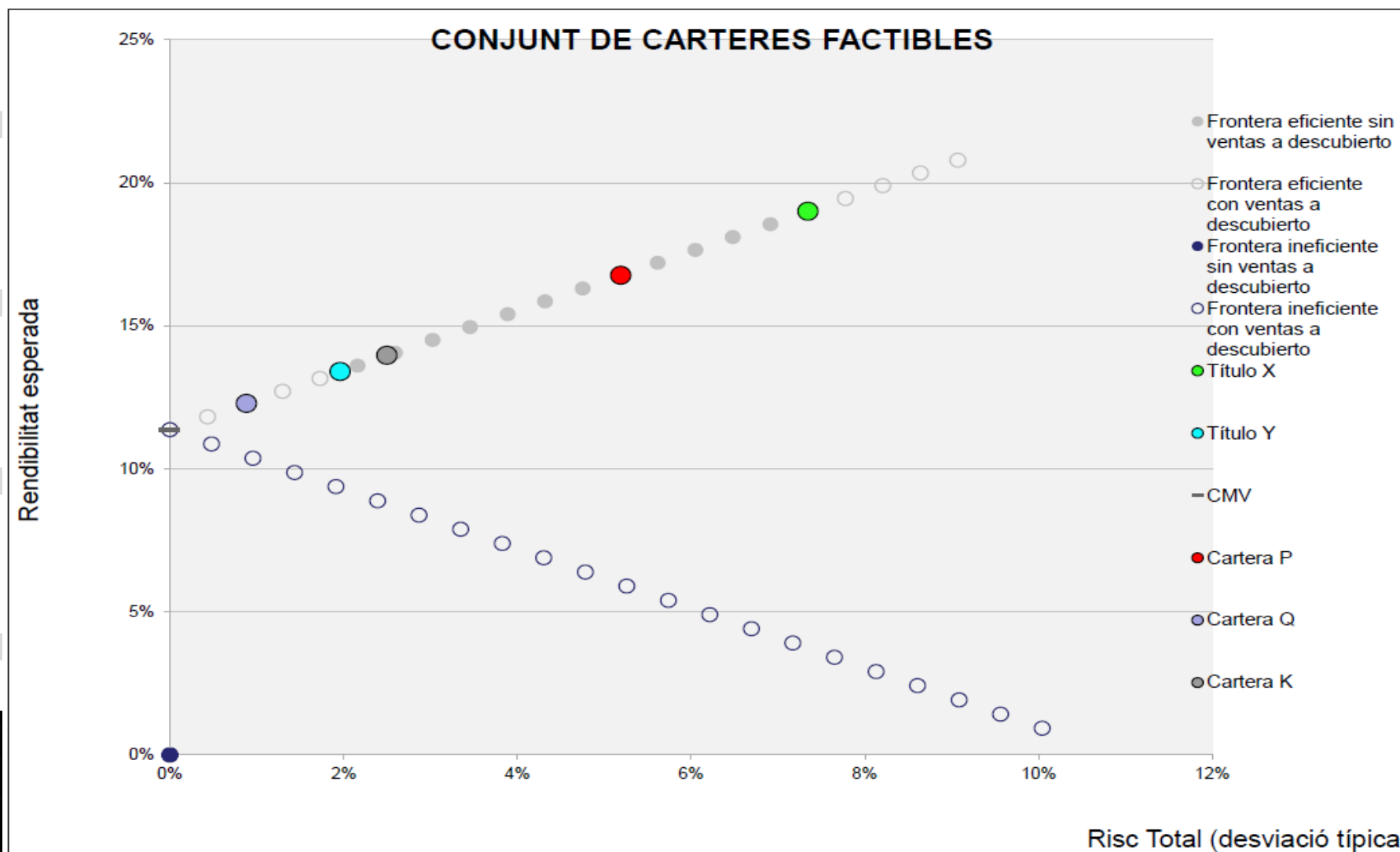
# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 21 (XIX)



h) Dibueixu en l'espai rendibilitat esperada-risc.

Alfredo Grau©



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 22 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Tenim dos títols, X i Y:

Estat de la naturalesa	Probabilitat d'esdeveniment	Rendibilitat títol X	Rendibilitat títol Y
I	60%	20%	5%
II	40%	10%	8%

– Es demana:

- Calculeu la rendibilitat esperada i el risc de cada títol. Calculeu la covariància i la correlació lineal de les rendibilitats d'ambdós títols.
- Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera de mínima variància global (CMV).



## Bloc IV. Tema 6

### PRÀCTICA 22 (II)

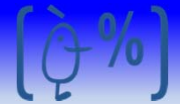


- c) Determineu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera C integrada equiponderadament pels títols X i Y. Amb relació a aquesta cartera, calculeu la mitjana ponderada del risc (desviació típica) d'ambdós títols i indiqueu si coincideix o no amb el risc (desviació típica) d'aquesta cartera.
- d) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera S d'un inversor racional que no vol suportar cap risc. Seria eficient aquesta cartera?
- e) Calculeu la composició pressupostària i la rendibilitat esperada de la cartera P d'un inversor racional que vol suportar un risc del 2,35151%. Seria eficient aquesta cartera?
- f) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera Q en què el pes pressupostari del títol X siga el -20% del pressupost d'inversió. Seria eficient aquesta cartera?



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 22 (III)



g) Calculeu la composició pressupostària i el risc d'una cartera K la rendibilitat esperada del qual siga el 7,18%. Seria eficient aquesta cartera?

h) Dibuixeu en l'espai rendibilitat esperada-risc (desviació típica) el conjunt factible de carteres i assenyaleu-hi els títols X i Y, i totes les carteres calculades en l'exercici.



### SOLUCIÓ:

- a) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc de cada títol. Calculeu la covariància i la correlació lineal de les rendibilitats d'ambdós títols.

$$E(\tilde{R}_i) = \sum_{j=1}^m R_{ij} \cdot P_j \quad ; \quad \sigma^2(\tilde{R}_x) = \sigma_x^2 = \sum_{j=1}^m P_j \cdot [R_{xj} - E(\tilde{R}_{xj})]^2$$

- Rendibilitat i risc del títol X:

$$E(\tilde{R}_x) = \sum_{j=1}^m R_{xj} \cdot P_j = (0,6 * 0,2) + (0,4 * 0,1) = 0,16 \text{ (16\%)}$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_x) = \sigma_x^2 = 0,6 * (0,2 - 0,16)^2 + 0,4 * (0,1 - 0,16)^2 = 0,0024$$

$$\sigma(\tilde{R}_x) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_x)} = \sigma_x = \sqrt{0,0024} = 0,04899 \text{ (4,899\%)}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 22 (V)



■ Rendibilitat i risc del títol Y:

Alfredo Grau©

$$E(\tilde{R}_Y) = \sum_{j=1}^m R_{Yj} \cdot P_j = (0,6 * 0,05) + (0,4 * 0,08) = 0,0624 \text{ (6,24\%)} \\ \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©}$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_Y) = \sigma_Y^2 = 0,6 * (0,05 - 0,062)^2 + 0,4 * (0,08 - 0,062)^2 = 0,000216$$

$$\sigma(\tilde{R}_Y) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_Y)} = \sigma_Y = \sqrt{0,000216} = 0,014697 \text{ (1,4697\%)} \\ \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©}$$

■ Covariància dels títols X i Y:

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = P_j (R_X - E(\tilde{R}_X))(R_Y - E(\tilde{R}_Y))$$

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = 0,6 * (0,2 - 0,16) * (0,05 - 0,062) +$$

$$+ 0,4 * (0,1 - 0,16) * (0,08 - 0,062) = -0,00072 \\ \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©}$$





Correlació entre títols X i Y:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} ; -1 \leq \rho_{XY} \leq +1$$

$$\rho_{XY} = \frac{-0,00072}{0,04899 * 0,014697} = -1$$

- Hi ha una correlació lineal perfecta negativa entre aquests dos títols X i Y.



b) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera de mínima variància global (CMV).

- Pes pressupostari del títol X en la CMVG (la de menor risc):

$$\omega_X = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}$$

$$\omega_X = \frac{0,000216 - (-0,00072)}{0,0024 + 0,000216 - 2 * (-0,00072)} = 0,23077 \text{ (23,07\%)}$$

- Pes pressupostari del títol Y en la CMVG:

$$\omega_Y = 1 - \omega_X \Rightarrow \omega_Y = 1 - 0,2307 = 0,7692 \text{ (76,92\%)}$$



- Rendibilitat esperada (esperança matemàtica) de la CMVG:

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_X E(\tilde{R}_X) + \omega_Y E(\tilde{R}_Y)$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = (0,23077 * 0,16) + (0,76923 * 0,062) =$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = 0,0846 \text{ (8,46\%)}$$

- Risc esperat (variància) de la CMVG:

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_X^2 \sigma^2(\tilde{R}_X) + \omega_Y^2 \sigma^2(\tilde{R}_Y) + 2\omega_X \omega_Y \sigma(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = 0,053254 * 0,0024 + 0,591715 * 0,000216 +$$

$$+ 2 * 0,230769 * 0,76923 * 0,04899 * 0,014697 = 0$$



c) **Determineu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera C integrada equiponderadament pels títols X i Y. En relació a aquesta cartera, calculeu la mitjana ponderada del risc (desviació típica) d'ambdós títols i indiqueu si coincideix o no amb el risc (desviació típica) d'aquesta cartera.**

- Rendibilitat esperada d'una cartera C equiponderada:

$$E(\tilde{R}_C) = 0,5 * E(\tilde{R}_X) + 0,5 * E(\tilde{R}_Y)$$

$$E(\tilde{R}_C) = 0,5 * 0,16 + 0,5 * 0,062 = 0,111 \text{ (11,1\%)}$$

- Atés què el coeficient de correlació és unitari, l'efecte avantatjós de la diversificació no es produeix.



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 22 (X)



- Risc esperat (variància) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma^2(\tilde{R}_C) = 0,5^2 * \sigma^2(\tilde{R}_X) + 0,5^2 * \sigma^2(\tilde{R}_Y) + 2 * 0,5 * 0,5 * \sigma(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_C) = 0,5^2 * 0,0024 + 0,5^2 * 0,000216 +$$

$$+ 2 * 0,5 * 0,5 * (-0,00072) = 0,000294$$

- Risc esperat (desv. típica) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_C)}$$

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{0,000294} = 0,017146 \text{ (1,7146\%)}$$



**d) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera òptima S d'un inversor racional que no vol suportar cap risc. Seria eficient aquesta cartera?**

- Sent  $\rho_{XY} = -1$ , un inversor que no vol suportar cap risc formarà la cartera de mínima variància global (CMV), aleshores:
  - Pes pressupostari del títol X a la cartera S:  $\omega_X = -0,230769$
  - Pes pressupostari del títol Y a la cartera S:  $\omega_Y = 0,769231$
  - Rendibilitat esperada de la cartera S:  $E(R_S) = 0,08462$  (8,462%)
  - Risc (desviació típica) de la cartera S:  $\sigma_S = 0$  (0%)
- La cartera S és eficient ja que coincideix amb la CMVG, no hi ha cap altra cartera amb major rendibilitat esperada per a aquest nivell concret de risc.

e) Calculeu la composició pressupostària i la rendibilitat esperada de la cartera òptima P d'un inversor racional que vol suportar un risc del 2,35151%. Seria eficient aquesta cartera?

- Volem combinar els actius X i Y per tal d'aconseguir un determinat nivell de risc ( $\sigma_p = 0,0235151$ ).
- Ja que en aquest exercici el coeficient de correlació és 1, es compleix que:

$$\sigma_p = \pm(\omega_x \sigma_x + \omega_y \sigma_y)$$

$$\sigma_p = \omega_x \sigma_x + \omega_y \sigma_y = 0,0235151$$

- Com que la suma de pesos ha de ser igual a 1, i només tenim dos actius:



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 22 (XIII)



$$\text{Eq. 1} \Rightarrow \sigma_p = +(\omega_x 0,04899 + (1 - \omega_x) 0,014697) = 0,0235151$$

$$\text{Eq. 2} \Rightarrow \sigma_p = -(\omega_x 0,04899 + (1 - \omega_x) 0,014697) = 0,0235151$$

- Aïllant  $\omega_x$  podrem trobar la composició pressupostària:

$$\text{Eq. 1} \Rightarrow \omega_x = 0,6 (60\%) \Rightarrow \omega_y = (1 - \omega_x) = 1 - 0,6 = 0,4 (40\%)$$

$$\text{Eq. 2} \Rightarrow \omega_x = -0,1386 (-13,86\%) \Rightarrow \omega_y = (1 - \omega_x) = 1 - (-0,1386)$$

$$= 1,1386 (-113,86\%)$$

- Com que hi ha dues carteres que compleixen la condició, hem de seleccionar l'eficient:





- Rendibilitat esperada d'una cartera P1:

$$E(\tilde{R}_{P_1}) = 0,6 * 0,16 + 0,4 * 0,062 = 0,1208 \text{ (12,08\%)}$$

- La cartera P1 és “eficient” ja que la seua rendibilitat esperada i el seu risc són majors que els de CMVG:

$$E(\tilde{R}_{P_1}) = 12,08\% > E(\tilde{R}_{CMVG}) = 8,46\%$$

$$\sigma(\tilde{R}_{P_1}) = 2,35151\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$

- Rendibilitat esperada d'una cartera P2:

$$E(\tilde{R}_{P_2}) = (-0,1386) * 0,16 + 1,1386 * 0,062 = 0,0484 \text{ (4,84\%)}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 22 (XV)



- La cartera P2 és “ineficient” ja que la seua rendibilitat esperada i el seu risc són majors que els de CMVG:

$$E(\tilde{R}_{P2}) = 4,84\% < E(\tilde{R}_{CMVG}) = 8,46\%$$

$$\sigma(\tilde{R}_{P2}) = 2,35151\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$



f) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera Q en què el pes pressupostari del títol X siga el -20% del pressupost d'inversió. Seria eficient aquesta cartera?

- Rendibilitat esperada de la cartera Q:

$$E(\tilde{R}_Q) = -0,2 * 0,16 + 1,2 * 0,062 = 0,0424 (4,24\%)$$

- Risc esperat (variància) de la cartera Q:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{R}_Q) &= 0,04 * 0,0024 + 1,44 * 0,000216 + \\ &+ 2 * (-0,2) * 1,2 * (-0,00072) = 0,00075264 \end{aligned}$$

- Risc esperat (desviació típica) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{0,00075264} = 0,027434 (2,7434\%)$$



- La cartera Q és “eficient” ja que la seua rendibilitat esperada és major que la de CMVG:

$$E(\tilde{R}_Q) > E(\tilde{R}_{CMVG})$$

$$E(\tilde{R}_Q) = 4,24\% < E(\tilde{R}_{CMVG}) = 8,46\%$$

- Tot i que també el seu risc és major que el de la CMVG:

$$\sigma(\tilde{R}_Q) = 2,74\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$



**g) Calculeu la composició pressupostària i el risc d'una cartera K la rendibilitat esperada de la qual siga el 7,18%. Seria eficient aquesta cartera?**

- Rendibilitat esperada de la cartera K:

$$E(\tilde{R}_K) = \omega_x 0,16 + (1 - \omega_x) 0,062 = 0,0718$$

$$\omega_x = 0,1 (10\%)$$

$$\omega_y = (1 - \omega_x) = 1 - 0,1 = 0,9 (90\%)$$

- Risc esperat (variància) de la cartera K:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{R}_K) &= 0,01 * 0,0024 + 0,81 * 0,000216 + \\ &+ 2 * (0,1) * 0,9 * (-0,00072) = 0,00006936 \end{aligned}$$



- Risc esperat (desv. típica) de la cartera K:

$$\sigma(\tilde{R}_K) = \sqrt{0,00006936} = 0,00833 (0,833\%)$$

- La cartera K és “ineficient” ja que la seua rendibilitat esperada és major que la de CMVG:

$$E(\tilde{R}_K) > E(\tilde{R}_{CMVG})$$

$$E(\tilde{R}_K) = 7,18\% < E(\tilde{R}_{CMVG}) = 8,46\%$$

- Tot i que també el seu risc és major que el de la CMVG:

$$\sigma(\tilde{R}_K) = 0,833\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$



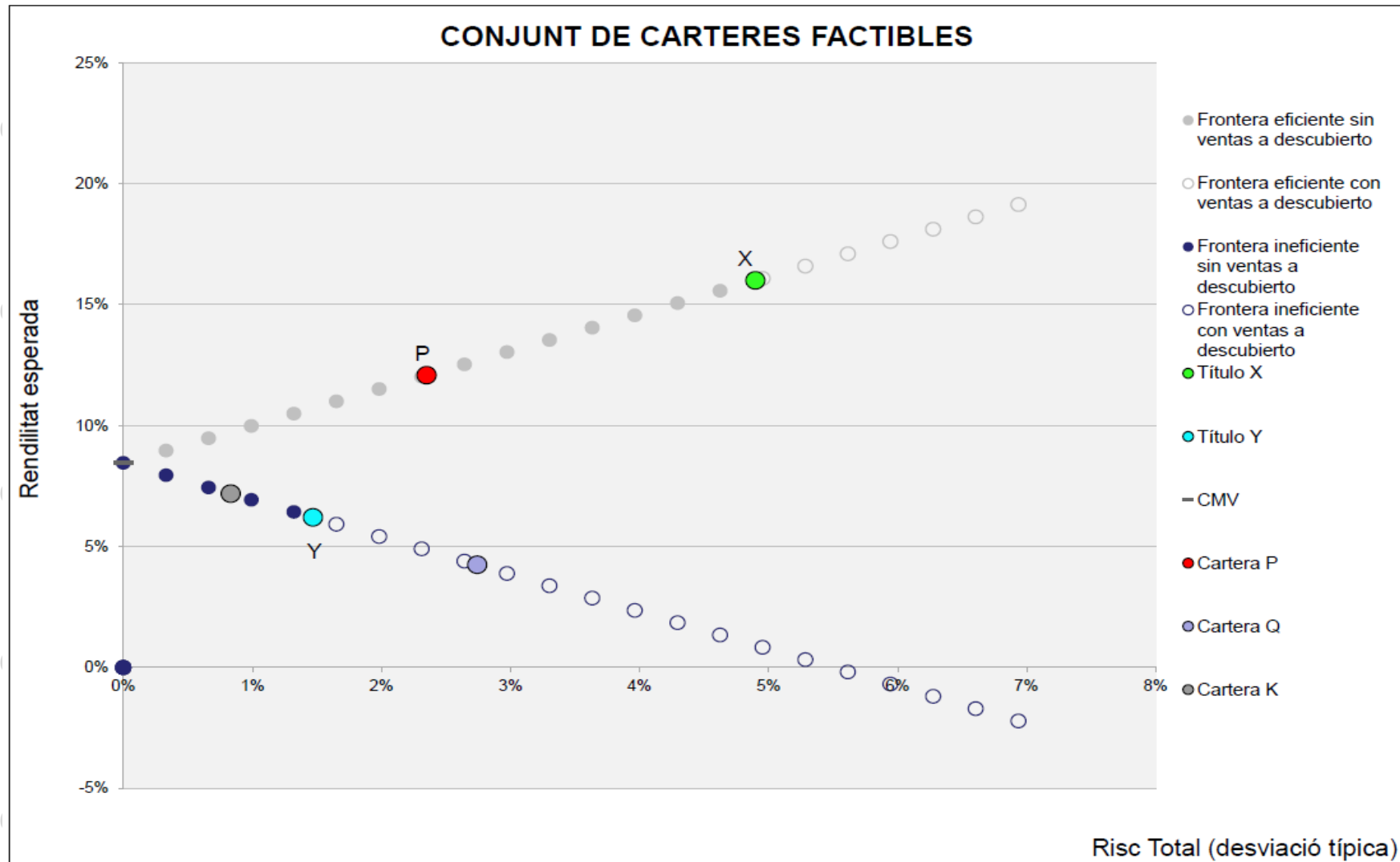
# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 22 (XX)



h) Dibueixu en l'espai rendibilitat esperada-risc.

Alfredo Grau©



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 23 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT: Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

– Tenim dos títols, X i Y:

Alfredo Grau©

Estat de la naturalesa	Probabilitat d'esdeveniment	Rendibilitat títol X	Rendibilitat títol Y
I	20%	18%	2%
II	20%	20%	8%
III	20%	22%	5%
IV	20%	15%	3%
V	20%	10%	11%

– Es demana:

a) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc de cada títol.

Calculeu la covariància i la correlació lineal de les rendibilitats d'ambdós títols.







- b) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera de mínima variància global (CMV).
- c) Determineu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera C integrada equiponderadament pels títols X i Y. En relació a aquesta cartera, calculeu la mitjana ponderada del risc (desviació típica) d'ambdós títols i indiqueu si coincideix o no amb el risc (desviació típica) d'aquesta cartera.
- d) Quina cartera podria formar un inversor que estiguera disposat a suportar un risc nul? Quina cartera podria formar un inversor que estiguera disposat a suportar un risc no major que el 0,958319%?
- e) Indiqueu quina cartera P dissenyaria un inversor racional que estiguera disposat a assumir un risc del 2,24% i expliqueu quin seria l'avantatge d'aquesta diversificació.



- f) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera Q en què el pes pressupostari del títol Y siga el 120% del pressupost d'inversió. Seria eficient aquesta cartera?
- g) Calculeu la composició pressupostària i el risc d'una cartera K la rendibilitat esperada del qual siga el 6,92%. Seria eficient aquesta cartera?
- h) Dibuixeu en l'espai rendibilitat esperada-risc (desviació típica) el conjunt factible de carteres i assenyalau-hi els títols X i Y, i totes les carteres calculades en l'exercici.

### SOLUCIÓ:

a) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc de cada títol. Calculeu la covariància i la correlació lineal de les rendibilitats d'ambdós títols.

- Rendibilitat i risc del títol X:

$$E(\tilde{R}_x) = \sum_{j=1}^m R_{xj} \cdot P_j = (0,2 * 0,18) + (0,2 * 0,2) + (0,2 * 0,22) + (0,2 * 0,15) + (0,2 * 0,1) = 0,17 \text{ (17\%)}$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_x) = \sigma_x^2 = 0,2 * (0,18 - 0,17)^2 + 0,2 * (0,2 - 0,17)^2 + 0,2 * (0,22 - 0,17)^2 + 0,2 * (0,15 - 0,17)^2 + 0,2 * (0,1 - 0,17)^2 = 0,00176$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 23 (V)



$$\sigma(\tilde{R}_x) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_x)} = \sigma_x = \sqrt{0,00176} = 0,04195 \text{ (4,195\%)}$$

- Rendibilitat i risc del títol Y:

$$E(\tilde{R}_Y) = \sum_{j=1}^m R_{Yj} \cdot P_j = (0,2 * 0,02) + (0,2 * 0,08) + (0,2 * 0,05) + \\ + (0,2 * 0,03) + (0,2 * 0,11) = 0,058 \text{ (5,8\%)}$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_x) = \sigma_x^2 = 0,2 * (0,02 - 0,058)^2 + 0,2 * (0,08 - 0,058)^2 + \\ + 0,2 * (0,05 - 0,058)^2 + 0,2 * (0,03 - 0,058)^2 + \\ + 0,2 * (0,11 - 0,058)^2 = 0,0011$$

$$\sigma(\tilde{R}_x) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_x)} = \sigma_x = \sqrt{0,0011} = 0,00331 \text{ (3,31\%)}$$



■ Covariància dels títols X i Y:

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = P_j (R_X - E(\tilde{R}_X))(R_Y - E(\tilde{R}_Y))$$

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = 0,2 * (0,18 - 0,17) * (0,02 - 0,058) +$$

$$+ 0,2 * (0,2 - 0,17) * (0,08 - 0,058) +$$

$$+ 0,2 * (0,22 - 0,17) * (0,05 - 0,058) +$$

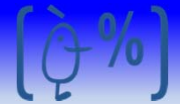
$$+ 0,2 * (0,15 - 0,17) * (0,03 - 0,058) +$$

$$+ 0,2 * (0,1 - 0,17) * (0,11 - 0,058) = -0,00064$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 23 (VII)



■ Correlació entre títols X i Y:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} ; -1 \leq \rho_{XY} \leq +1$$

$$\rho_{XY} = \frac{-0,00064}{0,04195 * 0,03317} = -0,461$$

- Hi ha una correlació lineal negativa entre aquests dos títols X i Y.



b) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera de mínima variància global (CMV).

- Pes pressupostari del títol X en la CMVG (la de menor risc):

$$\omega_X = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}$$

$$\omega_X = \frac{0,0011 - (-0,00064)}{0,00176 + 0,0011 - 2 * (-0,0064)} = 0,42 \text{ (42\%)}$$

- Pes pressupostari del títol Y en la CMVG:

$$\omega_Y = 1 - \omega_X \Rightarrow \omega_Y = 1 - 0,42 = 0,58 \text{ (58\%)}$$



- Rendibilitat esperada (esperança matemàtica) de la CMVG:

$$E(\tilde{R}_{\text{CMVG}}) = \omega_x E(\tilde{R}_x) + \omega_y E(\tilde{R}_y)$$

$$E(\tilde{R}_{\text{CMVG}}) = (0,42 * 0,17) + (0,58 * 0,058) = 0,105 \text{ (10,5\%)}$$

- Risc esperat (variància i desviació típica) de la CMVG:

$$\sigma^2(\tilde{R}_{\text{CMVG}}) = \omega_x^2 \sigma^2(\tilde{R}_x) + \omega_y^2 \sigma^2(\tilde{R}_y) + 2\omega_x \omega_y \sigma(\tilde{R}_x, \tilde{R}_y)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_{\text{CMVG}}) = 0,176172 * 0,00176 + 0,3367145 * 0,001096 +$$

$$+ 2 * 0,42 * 0,58 * (-0,00064) = 0,000368$$

$$\sigma(\tilde{R}_{\text{CMVG}}) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_{\text{CMVG}})} = \sqrt{0,000368} = 0,0192 \text{ (1,92\%)}$$





c) **Determineu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera C integrada equiponderadament pels títols X i Y. En relació a aquesta cartera, calculeu la mitjana ponderada del risc (desviació típica) d'ambdós títols i indiqueu si coincideix o no amb el risc (desviació típica) d'aquesta cartera.**

- Rendibilitat esperada d'una cartera C equiponderada:

$$E(\tilde{R}_C) = 0,5 * E(\tilde{R}_X) + 0,5 * E(\tilde{R}_Y)$$

$$E(\tilde{R}_C) = 0,5 * 0,04195 + 0,5 * 0,033105 = 0,0375 \text{ (3,75\%)}$$

- El risc (desviació típica) de la cartera és menor que la mitjana ponderada del risc (desviació típica) dels títols que la integren, en haver-hi correlació negativa.



**d) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera òptima S d'un inversor racional que no vol suportar cap risc. Seria eficient aquesta cartera?**

- Sent  $\rho_{XY} = -0,461$ , el mínim risc que es pot suportar combinant ambdós títols és el de la cartera de mínima variància, que és d'1,92%.
- No hi ha carteres per a aquests inversors que o no vulguen suportar risc o només vulguen suportar un risc de 0,958319%



e) Calculeu la composició pressupostària i la rendibilitat esperada de la cartera òptima P d'un inversor racional que vol suportar un risc del 2,24%. Seria eficient aquesta cartera?

- En aquest exercici:

$$\sigma_P^2 = \omega_X^2 \sigma_X^2 + \omega_Y^2 \sigma_Y^2 + 2\omega_X \omega_Y \sigma_{XY}$$

$$\sigma_P^2 = \omega_X^2 0,00176 + (1 - \omega_X)^2 0,0011 + 2\omega_X (1 - \omega_X) (-0,00064)$$

$$\sigma_P^2 = 0,0224^2$$

- Hem de resoldre l'equació de 2n grau.



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 23 (XIII)



Solució 1  $\Rightarrow \omega_x = 0,6$  (60%) ;  $(1 - \omega_y) = 0,4$  (40%)

Solució 2  $\Rightarrow \omega_x = 0,24$  (24%) ;  $(1 - \omega_y) = 0,76$  (76%)

- Hi ha dues carteres que compleixen el risc desitjat.

- Rendibilitat esperada d'una cartera P1 amb risc 2,24%:

$$E(\tilde{R}_{P_1}) = 0,6 * 0,17 + 0,4 * 0,058 = 0,1252 \text{ (12,52\%)}$$

- Aquesta cartera P1 és eficient ja que la seua rendibilitat esperada és major que la de la CMV (tot i que el seu risc també ho és):

$$E(\tilde{R}_{P_1}) = 12,52\% > E(\tilde{R}_{CMVG}) = 10,5\%$$



- Rendibilitat esperada d'una cartera P2 amb risc 2,24%:

$$E(\tilde{R}_{P_1}) = 0,24 * 0,17 + 0,76 * 0,058 = 0,08488 \text{ (8,488\%)}$$

- Aquesta altra cartera P2 no és eficient ja que la seua rendibilitat esperada és menor que la de la CMV i el seu risc és major:

$$E(\tilde{R}_{P_1}) = 8,48\% < E(\tilde{R}_{CMVG}) = 10,5\%$$



**f) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera Q en què el pes pressupostari del títol X siga el 120% del pressupost d'inversió. Seria eficient aquesta cartera?**

- Rendibilitat esperada de la cartera Q:

$$E(\tilde{R}_Q) = -0,2 * 0,17 + 1,2 * 0,058 = 0,0356 (3,56\%)$$

- Risc esperat (variància) de la cartera Q:

$$\sigma^2(\tilde{R}_Q) = 0,04 * 0,00176 + 1,44 * 0,001096 + 2 * (-0,2) * 1,2 * (-0,00064) = 0,0019558$$

- Risc esperat (desv. típica) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{0,0019558} = 0,044225 (4,4225\%)$$



**g) Calculeu la composició pressupostària i el risc d'una cartera K la rendibilitat esperada de la qual siga el 6,92%. Seria eficient aquesta cartera?**

- Rendibilitat esperada de la cartera K:

$$E(\tilde{R}_K) = \omega_x 0,17 + (1 - \omega_x) 0,058 = 0,0692$$

$$\omega_x = 0,1 (10\%)$$

$$\omega_y = (1 - \omega_x) = 1 - 0,1 = 0,9 (90\%)$$

- Risc esperat (variància) de la cartera K:

$$\sigma^2(\tilde{R}_K) = 0,01 * 0,00176 + 0,81 * 0,001096 + 2 * (0,1) * 0,9 * (-0,00064) = 0,00079016$$



- Risc esperat (desv. típica) de la cartera K:

$$\sigma(\tilde{R}_k) = \sqrt{0,0007916} = 0,0281097 (2,81\%)$$

- La cartera K és “ineficient” ja que la seua rendibilitat esperada és menor que la de CMVG:

$$E(\tilde{R}_k) < E(\tilde{R}_{CMVG})$$

$$E(\tilde{R}_k) = 6,92\% < E(\tilde{R}_{CMVG}) = 10,5\%$$

- Tot i que també el seu risc és major que el de la CMVG:





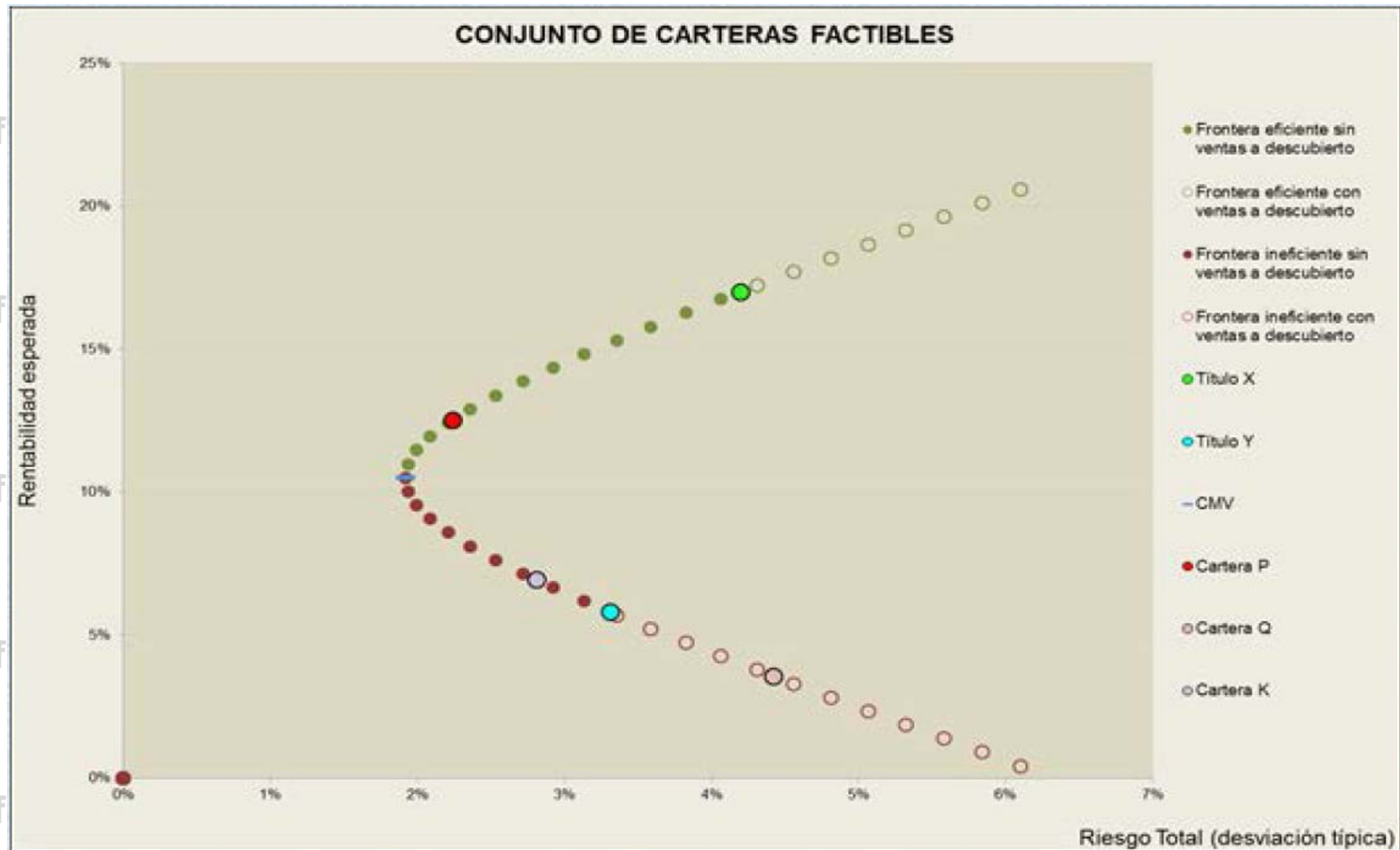
# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 23 (XVIII)



h) Dibueixeu en l'espai rendibilitat esperada-risc.

Alfredo Grau©



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 24 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT: Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

– Tenim dos títols, X i Y:

Alfredo Grau©

Estat de la naturalesa	Probabilitat d'esdeveniment	Rendibilitat títol X	Rendibilitat títol Y
I	30%	-10%	10%
II	40%	20%	10%
III	30%	50%	10%

– Es demana:

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

**a) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc de cada títol. Calculeu la covariància i la correlació lineal de les rendibilitats d'ambdós títols.**

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

**b) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera de mínima variància global (CMV).**

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©

Alfredo Grau©



- c) **Determineu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera C integrada equiponderadament pels títols X i Y. En relació amb aquesta cartera, calculeu la mitjana ponderada del risc (desviació típica) d'ambdós títols i indiqueu si coincideix o no amb el risc (desviació típica) d'aquesta cartera.**
- d) **Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera òptima S d'un inversor racional que no vol suportar cap risc. Seria eficient aquesta cartera?**
- e) **Calculeu la composició pressupostària i la rendibilitat esperada de la cartera òptima P d'un inversor racional que vol suportar un risc del 13,94274%. Seria eficient aquesta cartera?**
- f) **Calculeu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera Q en què el pes pressupostari del títol Y siga el 120% del pressupost d'inversió. Seria eficient aquesta cartera?**



- g) Calculeu la composició pressupostària i el risc d'una cartera K la rendibilitat esperada del qual siga l'11%. Seria eficient aquesta cartera?
- h) Dibuixeu en l'espai rendibilitat esperada-risc (desviació típica) el conjunt factible de carteres i assenyalau-hi els títols X i Y, i totes les carteres calculades en l'exercici.
- i) Compareu entre si els gràfics d'aquest exercici i dels tres anteriors i deduiu-ne les conclusions principals.



### SOLUCIÓ:

a) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc de cada títol. Calculeu la covariància i la correlació lineal de les rendibilitats d'ambdós títols.

- Rendibilitat i risc del títol X:

$$E(\tilde{R}_X) = \sum_{j=1}^m R_{Xj} \cdot P_j = (0,3 * (-0,1)) + (0,4 * 0,2) + (0,3 * 0,5) = \\ = 0,2 \text{ (20\%)}$$

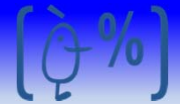
$$\sigma^2(\tilde{R}_X) = \sigma_X^2 = 0,3 * (-0,1 - 0,2)^2 + 0,4 * (0,2 - 0,2)^2 + \\ + 0,3 * (0,5 - 0,2)^2 = 0,054$$

$$\sigma(\tilde{R}_X) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_X)} = \sigma_X = \sqrt{0,054} = 0,23238 \text{ (23,238\%)}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 24 (V)



■ Rendibilitat i risc del títol Y:

Alfredo Grau©

$$E(\tilde{R}_Y) = \sum_{j=1}^m R_{Yj} \cdot P_j = (0,3 * 0,1) + (0,4 * 0,1) + (0,3 * 0,1) = 0,1 \text{ (10\%)} \\ \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©}$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_Y) = \sigma_Y^2 = 0,3 * (0,1 - 0,1)^2 + 0,4 * (0,1 - 0,1)^2 + 0,3 * (0,1 - 0,1)^2 = 0$$

$$\sigma(\tilde{R}_Y) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_Y)} = \sigma_Y = \sqrt{0} = 0 \text{ (0\%)} \\ \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©}$$

Alfredo Grau©

- La covariància és nul·la perquè no hi ha relació entre la variabilitat d'un títol arriscat i un títol sense risc, mentre que el coeficient de correlació no està definit. Açò és:

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = P_j (R_X - E(\tilde{R}_X))(R_Y - E(\tilde{R}_Y)) \\ \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©}$$

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = 0 \\ \text{Alfredo Grau©} \quad \text{Alfredo Grau©}$$

Alfredo Grau©



**b) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera de mínima variància global.**

- Pes pressupostari del títol X en la CMVG (la de menor risc):

$$\omega_x = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}$$

$$\omega_x = \frac{0 - 0}{0,054 + 0 - 2 * 0} = 0 \text{ (0\%)}$$

- Pes pressupostari del títol Y en la CMVG:

$$\omega_Y = 1 - \omega_x \Rightarrow \omega_Y = 1 - (0) = 1 \text{ (100\%)}$$

- Com que el títol Y no té risc, i no es pot suportar un risc inferior a zero, la cartera formada només pel títol Y és la CMVG.



- Rendibilitat esperada (esperança matemàtica) de la CMVG:

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_X E(\tilde{R}_X) + \omega_Y E(\tilde{R}_Y)$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = (0 * 0,2) + (1 * 0,1) =$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = 0,1 \text{ (10\%)}$$

- Risc esperat (variància i desviació típica) de la CMVG:

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_X^2 \sigma^2(\tilde{R}_X) + \omega_Y^2 \sigma^2(\tilde{R}_Y) + 2\omega_X \omega_Y \sigma(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = 0 * 0,054 + 1 * 0 + 2 * 0 * 1 = 0$$

$$\sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = \sqrt{0} = 0$$





c) Determineu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera C integrada equiponderadament pels títols X i Y. En relació amb aquesta cartera, calculeu la mitjana ponderada del risc (desviació típica) d'ambdós títols i indiqueu si coincideix o no amb el risc (desviació típica) d'aquesta cartera.

- Rendibilitat esperada d'una cartera C equiponderada:

$$E(\tilde{R}_C) = 0,5 * E(\tilde{R}_X) + 0,5 * E(\tilde{R}_Y)$$

$$E(\tilde{R}_C) = 0,5 * 0,2 + 0,5 * 0,1 = 0,15 \text{ (15\%)}$$

- Risc esperat (variància) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma^2(\tilde{R}_C) = 0,5^2 * \sigma^2(\tilde{R}_X) + 0,5^2 * \sigma^2(\tilde{R}_Y) + 2 * 0,5 * 0,5 * \sigma(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 24 (IX)



$$\sigma^2(\tilde{R}_C) = 0,5^2 * 0,054 + 0,5^2 * 0 + 2 * 0,5 * 0,5 * 0 = 0,0135$$

- Risc esperat (desviació típica) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_C)}$$

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{0,0135} = 0,1162 \text{ (11,62\%)}$$



**d) Calculeu la composició pressupostària, la rendibilitat esperada i el risc de la cartera òptima S d'un inversor racional que no vol suportar cap risc. Seria eficient aquesta cartera?**

$$\sigma(\tilde{R}_S) = 0$$

- Serà la cartera de mínima variància que està formada exclusivament pel títol Y.
- Té risc zero i rendibilitat esperada del 10%.
- És una cartera eficient.



e) Calculeu la composició pressupostària i la rendibilitat esperada de la cartera òptima P d'un inversor racional que vol suportar un risc del 13,94274%. Seria eficient aquesta cartera?

- Volem combinar els actius X i Y per tal d'aconseguir un determinat nivell de risc ( $\sigma_p = 13,94274$ ).

- El risc es podrà calcular:

$$\sigma_p^2 = \omega_x^2 \sigma_x^2 + \omega_y^2 \sigma_y^2 + 2\omega_x \omega_y \sigma_{xy}$$

$$\sigma_p^2 = \omega_x^2 0,054 + (1 - \omega_x)^2 0 + 2\omega_x (1 - \omega_x) 0 =$$

$$0,054\omega_x^2 = 0,1394274^2$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 24 (XII)



$$\sigma(\tilde{R}_p) = 0,2323\omega_x = 0,1394274$$

- Aïllant  $\omega_x$  podem trobar la composició pressupostària:

$$\omega_x = 0,6 \text{ (60\%)}$$

$$\omega_y = (1 - \omega_x) = 1 - 0,6 = 0,4 \text{ (40\%)}$$

- Una vegada coneguda la composició de la cartera que volem, podem calcular la seua rendibilitat esperada:

- Rendibilitat esperada d'una cartera P:

$$E(\tilde{R}_p) = 0,6 * 0,2 + 0,4 * 0,1 = 0,16 \text{ (16\%)}$$



- La cartera P és “eficient” ja que la seua rendibilitat esperada és major que la de CMVG:

$$E(\tilde{R}_p) > E(\tilde{R}_{CMVG})$$

$$E(\tilde{R}_p) = 16\% > E(\tilde{R}_{CMVG}) = 10\%$$

- Tot i que també el seu risc és major que el de la CMVG:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = 13,94274\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$



**f) Calculeu la rendibilitat esperada i el risc d'una cartera Q en què el pes pressupostari del títol Y siga el 120% del pressupost d'inversió. Seria eficient aquesta cartera?**

- Rendibilitat esperada de la cartera Q:

$$E(\tilde{R}_Q) = -0,2 * 0,2 + 1,2 * 0,1 = 0,08 (8\%)$$

- Risc esperat (variància) de la cartera Q:

$$\sigma^2(\tilde{R}_Q) = 0,04 * 0,054 + 1,44 * 0 + 2 * (-0,2) * 1,2 * 0 = 0,00216$$

- Risc esperat (desviació típica) d'una cartera C equiponderada:

$$\sigma(\tilde{R}_C) = \sqrt{0,00216} = 0,0464758 (4,64758\%)$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 24 (XV)



- La cartera Q no és eficient ja que la seua rendibilitat esperada és menor que la de CMVG:

$$E(\tilde{R}_Q) < E(\tilde{R}_{CMVG})$$

$$E(\tilde{R}_Q) = 8\% < E(\tilde{R}_{CMVG}) = 10\%$$

- Tot i que també el seu risc és major que el de la CMVG:

$$\sigma(\tilde{R}_Q) = 4,64758\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$





g) Calculeu la composició pressupostària i el risc d'una cartera K la rendibilitat esperada de la qual siga el 11%. Seria eficient aquesta cartera?

- Rendibilitat esperada de la cartera K del 11%:

$$0,11 = \omega_x E(\tilde{R}_x) + (1 - \omega_x) E(\tilde{R}_y)$$

$$\omega_x = 0,1 (10\%)$$

$$\omega_y = (1 - \omega_x) = 1 - 0,1 = 0,9 (90\%)$$

- Risc esperat (variància) de la cartera K:

$$\sigma^2(\tilde{R}_K) = 0,01 * 0,054 + 0,81 * 0 + 2 * (0,1) * 0,9 * 0 = 0,00054$$



- Risc esperat (desv. típica) de la cartera K:

$$\sigma(\tilde{R}_K) = \sqrt{0,00054} = 0,02323 (2,323\%)$$

- La cartera K és “eficient” ja que la seua rendibilitat esperada és major que la de CMVG:

$$E(\tilde{R}_K) > E(\tilde{R}_{CMVG})$$

$$E(\tilde{R}_K) = 11\% > E(\tilde{R}_{CMVG}) = 10\%$$

- Tot i que també el seu risc és menor que el de la CMVG:

$$\sigma(\tilde{R}_K) = 2,323\% > \sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = 0\%$$



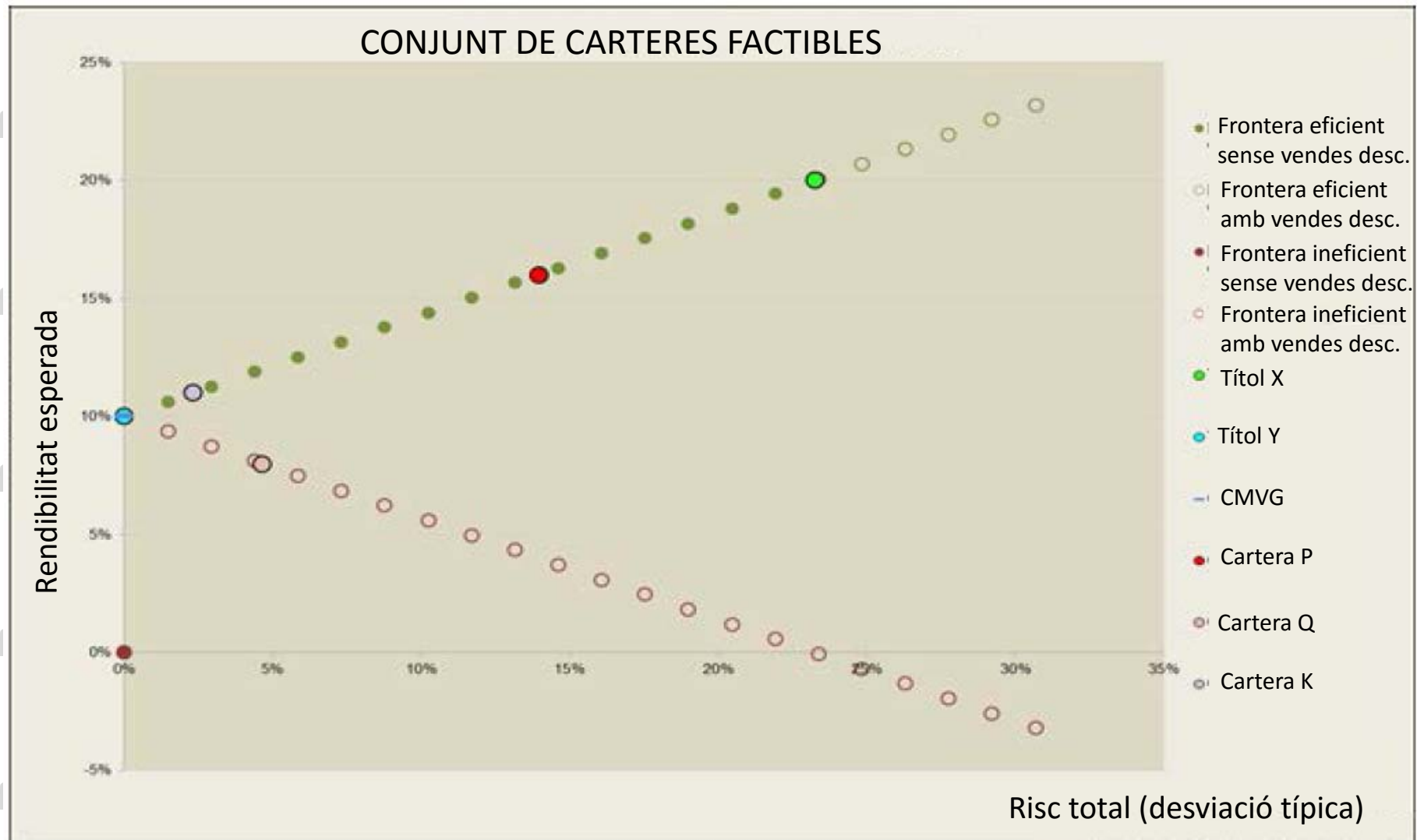
# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 24 (XVIII)



h) Dibuixeu en l'espai rendibilitat esperada-risc.

Alfredo Grau©



### DADES DE L'ENUNCIAT:

– Tenim dos títols, X i Y:

	Rendibilitat esperada	Risc (desviació típica)
Títol X	17,60%	7%
Títol Y	3%	3,6%

– Es demana:

**a) Traceu en l'espai rendibilitat esperada-risc (desviació típica) el conjunt de carteres factibles i dissenyeu la corresponent cartera de mínima variància global (CMV) per a cadascun dels tres casos següents:**

- Cas 1: la correlació lineal de les rendibilitats és igual a -1.

- Cas 2: la correlació lineal de les rendibilitats és igual a -0,5.

- Cas 3: la correlació lineal de les rendibilitats és igual a 1.

**b) Si un inversor racional vol obtenir una rendibilitat mitjana del 12%:**

**b.1) Dissenyeu la corresponent cartera en cadascun dels tres casos descrits (calculeu pesos pressupostaris i risc).**

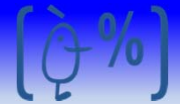
**b.2) Quin dels tres casos indicats seria per a l'inversor el més satisfactori? Representeu gràficament la situació.**

**b.3) En quin dels tres casos el risc (desviació típica) de la cartera és exactament igual a la mitjana ponderada del risc (desviació típica) dels títols que la integren?**

**c) Si un inversor racional estiguera disposat a suportar un risc del 4%:**

**c.1) Dissenyeu la corresponent cartera en cadascun dels tres casos descrits (calculeu pesos pressupostaris i rendibilitat esperada).**





**c.2) Quin dels tres casos indicats seria per l'inversor el més satisfactori? Representeu gràficament la situació.**

**c.3) En quin dels tres casos el risc (desviació típica) de la cartera és exactament igual a la mitjana ponderada del risc (desviació típica) dels títols que la integren?**



### SOLUCIÓ:

a) Traceu en l'espai rendibilitat esperada-risc el conjunt de carteres factibles i dissenyeu la corresponent CMV:

- Cas 1: la correlació lineal de les rendibilitats és igual a -1.

■ Càlcul de la covariància dels títols X i Y sabent que  $\rho_{XY} = -1$ :

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y$$

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = (-1) * 0,07 * 0,036 = -0,00252$$

■ Càlcul de la composició de la CMVG:

$$\omega_X = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (V)



$$\omega_x = \frac{0,036^2 - (-0,00252)}{0,07^2 + 0,036^2 - 2 * (-0,00252)} = 0,3396 \text{ (33,96\%)}$$

- Pes pressupostari del títol Y en la CMVG:

$$\omega_y = 1 - \omega_x \Rightarrow \omega_y = 1 - (0,3396) = 0,6604 \text{ (66,04\%)}$$

- Rendibilitat esperada (esperança matemàtica) de la CMVG:

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_x E(\tilde{R}_x) + \omega_y E(\tilde{R}_y)$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = (0,3396 * 0,176) + (0,6604 * 0,03) =$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = \mathbf{0,07958 \text{ (7,958\%)}}$$





■ Risc esperat (variància) de la CMVG:

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_X^2 \sigma^2(\tilde{R}_X) + \omega_Y^2 \sigma^2(\tilde{R}_Y) + 2\omega_X \omega_Y \sigma(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$

■ Atés que  $\rho_{XY} = -1$ :

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = (\omega_X \sigma(\tilde{R}_X) - \omega_Y \sigma(\tilde{R}_Y))^2$$

$$\sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = \pm (\omega_X \sigma(\tilde{R}_X) - \omega_Y \sigma(\tilde{R}_Y))$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = \pm (0,3396 * 0,07 + 0,6604 * 0,036) = 0$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = 0$$



a) Traceu en l'espai rendibilitat esperada-risc el conjunt de carteres factibles i dissenyeu la corresponent CMV:

- Cas 2: la correlació lineal de les rendibilitats és -0,5.

- Càlcul de la covariància dels títols X i Y sabent que  $\rho_{XY} = -0,5$ :

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y$$

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = (-0,5) * 0,07 * 0,036 = -0,00126$$

- Càlcul de la composició de la CMVG:

$$\omega_X = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (VIII)



$$\omega_x = \frac{0,036^2 - (-0,00126)}{0,07^2 + 0,036^2 - 2 * (-0,00126)} = 0,2932 \text{ (29,32\%)}$$

- Pes pressupostari del títol Y en la CMVG:

$$\omega_y = 1 - \omega_x \Rightarrow \omega_y = 1 - (0,2932) = 0,7068 \text{ (70,68\%)}$$

- Rendibilitat esperada (esperança matemàtica) de la CMVG:

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_x E(\tilde{R}_x) + \omega_y E(\tilde{R}_y)$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = (0,2932 * 0,176) + (0,7068 * 0,03) =$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = \mathbf{0,0728 \text{ (7,28\%)}}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (IX)



■ Risc esperat (variància) de la CMVG:

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_X^2 \sigma^2(\tilde{R}_X) + \omega_Y^2 \sigma^2(\tilde{R}_Y) + 2\omega_X \omega_Y \sigma(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$

■ Atés que  $\rho_{XY} = -0,5$ :

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = (0,2932^2 * 0,07^2) + (0,7068^2 * 0,036^2) +$$

$$+ 2 * 0,2932 * 0,7068 * (-0,5) * 0,07 * 0,036 =$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = 0,00054644$$

$$\sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = \sqrt{0,00054644} = 0,023376 \text{ (2,3376\%)}$$



a) Traceu en l'espai rendibilitat esperada-risc el conjunt de carteres factibles i dissenyeu la corresponent CMV:

- Cas 3: la correlació lineal de les rendibilitats és igual a 1.

- Càlcul de la covariància dels títols X i Y sabent que  $\rho_{XY}=1$ :

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y$$

$$\text{Cov}(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y) = \sigma_{XY} = (1) * 0,07 * 0,036 = 0,00252$$

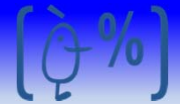
- Càlcul de la composició de la CMVG:

$$\omega_X = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (XI)



$$\omega_x = \frac{0,036^2 - (0,00252)}{0,07^2 + 0,036^2 - 2 * (0,00252)} = -1,0588 \text{ (-105,88\%)}$$

- Pes pressupostari del títol Y en la CMVG:

$$\omega_y = 1 - \omega_x \Rightarrow \omega_y = 1 - (-1,0588) = 2,0588 \text{ (205,88\%)}$$

- Rendibilitat esperada (esperança matemàtica) de la CMVG:

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_x E(\tilde{R}_x) + \omega_y E(\tilde{R}_y)$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = (-1,0588 * 0,176) + (2,0588 * 0,03) =$$

$$E(\tilde{R}_{CMVG}) = -0,12458 \text{ (-12,458\%)}$$



■ Risc esperat (variància) de la CMVG:

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = \omega_X^2 \sigma^2(\tilde{R}_X) + \omega_Y^2 \sigma^2(\tilde{R}_Y) + 2\omega_X \omega_Y \sigma(\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y)$$

■ Atés que  $\rho_{XY}=1$ :

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = (\omega_X \sigma(\tilde{R}_X) + \omega_Y \sigma(\tilde{R}_Y))^2$$

$$\sigma(\tilde{R}_{CMVG}) = (\omega_X \sigma(\tilde{R}_X) + \omega_Y \sigma(\tilde{R}_Y))$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = (-1,0588 * 0,07) + (2,0588 * 0,036) = 0$$

$$\sigma^2(\tilde{R}_{CMVG}) = 0$$

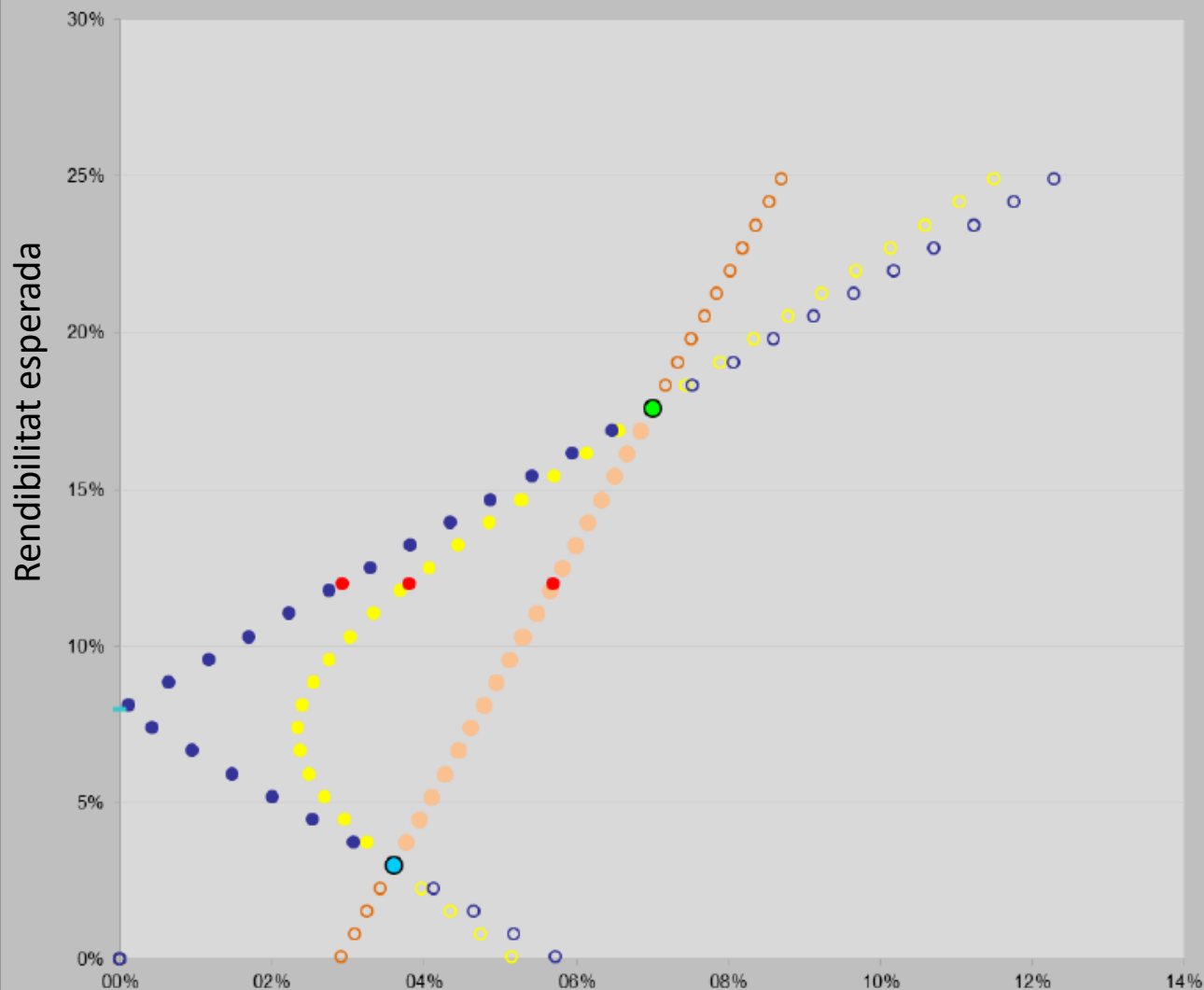


# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (XIII)



### DIVERSIFICACIÓ EN FUNCIÓ DE LA CORRELACIÓ LINIAL



- Conj. factible correlació XY=1
- Conj. factible correlació XY=-0,5
- Conj. factible correlació XY=-1
- Títol X
- Títol Y
- Rendibilitat: 12% i risc: 2,93%
- Rendibilitat: 12% i risc: 3,82%
- Rendibilitat: 12% i risc: 5,7%



Risc (desviació típica)



b) Si un inversor racional vol obtenir una rendibilitat mitjana del 12%:

b.1) Dissenyeu la corresponent cartera en cadascun dels tres casos descrits (calculeu pesos pressupostaris i risc).

▪ Càlcul del risc de les carteres en cada cas amb  $\omega_x = 0,6164$  i  $\omega_y = 0,3836$ :

▫ Risc (desviació típica) de  $\rho_{xy} = -1$ :

$$\sigma(\tilde{R}) = \pm(\omega_x \sigma(\tilde{R}_x) - \omega_y \sigma(\tilde{R}_y))$$

$$\sigma(\tilde{R}) = \pm((0,6164 * 0,07) - (0,3836 * 0,036)) =$$

$$= 0,02934 \text{ (2,934\%)}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (XV)



Risc (variància i desviació típica) de  $\rho_{XY} = -0,5$ :

$$\sigma^2(\tilde{R}) = \omega_x^2 \sigma^2(\tilde{R}_x) + \omega_y^2 \sigma^2(\tilde{R}_y) + 2\omega_x \omega_y \sigma(\tilde{R}_x, \tilde{R}_y)$$

$$\sigma^2(\tilde{R}) = (0,6164^2 * 0,07^2) + (0,3836^2 * 0,036^2) +$$

$$+ (2 * 0,6164 * 0,3836 * (-0,5) * 0,07 * 0,036) =$$

$$= 0,0014566$$

$$\sigma(\tilde{R}) = \sqrt{0,0014566} = 0,038165 \text{ (3,8165\%)}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (XVI)



□ Risc (desviació típica) de  $\rho_{XY}=1$ :

$$\sigma(\tilde{R}) = (\omega_x \sigma(\tilde{R}_x) + \omega_y \sigma(\tilde{R}_y))$$

$$\sigma(\tilde{R}) = (0,6164 * 0,07) + (0,3836 * 0,036)$$

$$= 0,0569576 \text{ (5,6957\%)}$$



**b) Si un inversor racional vol obtenir una rendibilitat mitjana del 12%:**

**b.2) Quin dels tres casos indicats seria per a l'inversor el més satisfactori? Representeu gràficament la situació.**

- Donada una rendibilitat esperada, el risc d'una cartera diversificada (açò és, no integrada exclusivament per un únic tipus de títol: X o Y) serà menor com menor siga alhora la correlació lineal de les rendibilitats dels títols que integren la cartera. Per tant, el cas més satisfactori seria el Cas 1 (en el qual la correlació és la mínima possible:  $\rho_{XY} = -1$ ), mentre que el cas més insatisfactori seria el Cas 3 (en el qual la correlació és la màxima possible :  $\rho_{XY} = 1$ ).



**b) Si un inversor racional vol obtenir una rendibilitat mitjana del 12%:**

**b.3) En quin dels tres casos el risc (desviació típica) de la cartera és exactament igual a la mitjana ponderada del risc (desviació típica) dels títols que la integren?**

■ La mitjana ponderada del risc coincideix amb el risc de la cartera P només quan  $\rho_{XY} = 1$ , açò és, en el Cas 3, que, segons hem deduït, és el més insatisfactori. En els altres dos casos aquesta mitjana ponderada és major que el risc de la cartera (que alhora és menor com menor és la correlació lineal). Aleshores, donada una rendibilitat esperada, l'inversor ha d'intentar formar carteres diversificades combinant títols la correlació dels quals siga el més menuda possible.



c) Si un inversor racional estiguera disposat a suportar un risc del 4%:

c.1) Dissenyeu la corresponent cartera en cadascun dels tres casos descrits (calculeu pesos pressupostaris i rendibilitat esperada).

■ Si  $\rho_{XY} = -1$  i  $\sigma(\tilde{R}) = \pm(\omega_X \sigma(\tilde{R}_X) - \omega_Y \sigma(\tilde{R}_Y))$ :

$$\text{Eq. 1} \Rightarrow +(\omega_X 0,07 - (1 - \omega_X) 0,036) = 0,04$$

$$\omega_X = 0,717 (71,7\%) \text{ i } \omega_Y = (1 - \omega_X) = 0,283 (28,3\%)$$

$$\text{Eq. 2} \Rightarrow -(\omega_X 0,07 - (1 - \omega_X) 0,036) = 0,04$$

$$\omega_X = -0,0377 (3,77\%) \text{ i } \omega_Y = (1 - \omega_X) = 1,0377 (103,77\%)$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (XX)



- Tenim dues carteres que compleixen el nostre objectiu (risc 4%) però només una serà eficient. Calculem la rendibilitat esperada de cada una d'elles:

$$\begin{aligned} \text{Solució 1} \Rightarrow E(\tilde{R}_p) &= (0,717 * 0,176) + (0,283 * 0,03) = \\ &= 0,1346 \quad (13,46\%) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Solució 2} \Rightarrow E(\tilde{R}_p) &= (-0,0377 * 0,176) + (1,0377 * 0,03) = \\ &= 0,0244 \quad (2,44\%) \end{aligned}$$

- La segona cartera no és eficient, ja que dona una rendibilitat esperada inferior a la de la CMV  $[E(\tilde{R}_{CMVG}) = 7,95\%]$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (XXI)



■ Si  $\rho_{XY} = -0,5$  i  $\sigma^2(\tilde{R}) = \omega_x^2 \sigma^2(\tilde{R}_x) + \omega_y^2 \sigma^2(\tilde{R}_y) + 2\omega_x \omega_y \sigma(\tilde{R}_x, \tilde{R}_y)$ :

$$\sigma^2(\tilde{R}) = \omega_x^2 0,07^2 + (1 - \omega_y)^2 0,036 +$$

$$+ 2\omega_x (1 - \omega_y) (-0,5) 0,07 * 0,036 = 0,04^2$$

■ Equació de segon grau, amb dues solucions:

$$\text{Solució 1} \Rightarrow \omega_x = 0,49523 (49,523\%)$$

$$\omega_y = (1 - \omega_x) = 0,50477 (50,477\%)$$

$$\text{Solució 2} \Rightarrow \omega_x = 0,07346 (7,346\%)$$

$$\omega_y = (1 - \omega_x) = 0,92653 (92,653\%)$$





# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (XXII)



- La segona cartera no és eficient, ja que dona una rendibilitat esperada inferior a la de la CMV  $[E(\tilde{R}_{CMVG}) = 7,95\%]$

- Si  $\rho_{XY}=1$  i  $\sigma(\tilde{R}) = \pm(\omega_x \sigma(\tilde{R}_x) + \omega_y \sigma(\tilde{R}_y))$

$$\text{Eq. 1} \Rightarrow +(\omega_x 0,07 + (1 - \omega_x) 0,036) = 0,04$$

$$\omega_x = 0,1176 (11,76\%) \text{ i } \omega_y = (1 - \omega_x) = 0,8824 (88,24\%)$$

$$\text{Eq. 2} \Rightarrow -(\omega_x 0,07 + (1 - \omega_x) 0,036) = 0,04$$

$$\omega_x = -2,235 (-223,5\%) \text{ i } \omega_y = (1 - \omega_x) = 3,235 (323,5\%)$$

- Tenim dues carteres que compleixen el nostre objectiu (risc 4%), però només una serà eficient. Calculem la rendibilitat esperada de cada una d'elles:



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 25 (XXIII)



$$\begin{aligned} \text{Solució 1} \Rightarrow E(\tilde{R}_p) &= (0,1176 * 0,176) + (0,8823 * 0,03) = \\ &= 0,0471 (4,71\%) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Solució 2} \Rightarrow E(\tilde{R}_p) &= (-2,2352 * 0,176) + (3,2352 * 0,03) = \\ &= -0,2963 (-29,63\%) \end{aligned}$$

- La segona cartera no és eficient, ja que dóna una rendibilitat esperada inferior a la de la CMV  $[E(\tilde{R}_{CMVG}) = 7,95\%]$



c) Si un inversor racional estiguera disposat a suportar un risc del 4%:

c.2) Quin dels tres casos indicats seria per a l'inversor el més satisfactori? Representeu gràficament la situació.

- Donat un risc, la rendibilitat esperada d'una cartera diversificada (açò és, no integrada exclusivament per un únic tipus de títol: X o Y) serà major com menor siga alhora la correlació lineal de les rendibilitats dels títols que integren la cartera. Per tant, el cas més satisfactori seria el Cas 1 (en el qual la correlació és la mínima possible:  $\rho_{XY} = -1$ ), mentre que el cas més insatisfactori seria el cas 3 (en el qual la correlació és la màxima possible:  $\rho_{XY} = 1$ ).



**c) Si un inversor racional estiguera disposat a suportar un risc del 4%:**

**c.3) En quin dels tres casos el risc (desviació típica) de la cartera és exactament igual a la mitjana ponderada del risc (desviació típica) dels títols que la integren?**

■ La mitjana ponderada del risc coincideix amb el risc de la cartera P només quan  $\rho_{XY} = 1$ , açò és, en el Cas 3, que, segons hem deduït, és el més insatisfactori. En els altres dos casos el risc de la cartera és menor que aquesta mitjana ponderada (que alhora és menor com menor és la correlació lineal). Aleshores, donat un risc, l'inversor hauria de formar carteres diversificades combinant títols la correlació dels quals siga el més menuda possible.



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 26 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

- Tenim tres títols, X, Y i Z (no hi ha títol sense risc).
- Cartera òptima per a l'inversor K: Cartera BK.

	Rendibilitat esperada	Risc total (des. típ.)	Pressupost actiu X	Pressupost actiu Y	Pressupost actiu Z
Actiu X	13%	9,465728%			
Actiu Y	11,4%	7,144228%			
Actiu Z	7%	5,09902%			
CMVG	8,561451%	4,277422%	3,315518%	30,96636%	65,718122%
Cartera BK	10%	4,763603%	19,215791%	41,978467%	38,805742%

COVARIÀNCIA	Actiu X	Actiu Y	Actiu Z
Actiu X	0,00896		
Actiu Y	0,00236	0,005104	
Actiu Z	0,00122	0,00026	0,0026



—Es demana: **representeu gràficament i de manera aproximada el conjunt factible de Markowitz per l'inversor KARAM (K):**

- a) Seria eficient una cartera C el risc de la qual fóra el mínim possible per a una rendibilitat esperada del 11%? Per què? Seria eficient una cartera D el risc de la qual fóra el mínim possible per a una rendibilitat esperada del 6%? Per què?**

- **Cartera eficient:** aquella que per a un nivell donat de risc proporciona la màxima rendibilitat esperada i per a un nivell donat de rendibilitat esperada ofereix el mínim risc.
- **Cartera de mínima variància global:** és aquella que té el mínim risc possible del conjunt factible. Totes les carteres eficients estan en la frontera del conjunt factible i tenen una rendibilitat esperada major o igual a la CMVG.

# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 26 (III)



	Rendibilitat esperada	Risc total (des. típ.)	Pressupost actiu X	Pressupost actiu Y	Pressupost actiu Z
CMVG	8,561451%	4,277422%	3,315518%	30,96636%	65,718122%

- Cartera C: rendibilitat esperada  $11\% > 8,561451\%$  (CMVG):

⇒ EFICIENT.

- Cartera D: rendibilitat esperada  $6\% < 8,561451\%$  (CMVG):

⇒ NO EFICIENT.



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 26 (IV)



b) Segons les estimacions de l'inversor K: seria eficient una cartera E la rendibilitat esperada de la qual fóra el 10% i el risc de la qual fóra el 5,71%? Per què?

	Rendibilitat esperada	Risc total (des. típ.)	Pressupost actiu X	Pressupost actiu Y	Pressupost actiu Z
CMVG	8,561451%	4,277422%	3,315518%	30,96636%	65,718122%
Cartera BK	10%	4,763603%	19,215791%	41,978467%	38,805742%

- Cartera E: rendibilitat esperada 10 % > 8,561451% (CMVG).

- Cartera E: risc 5,71% > 4,277422% (CMVG).

*Podria ser eficient però:*

- Cartera E: rendibilitat esperada 10 % = 10% cartera BK òptima (eficient).

- Cartera E: risc 5,71% > 4,763603% cartera BK òptima (eficient).

*La cartera E té la mateixa rendibilitat i major risc: és INEFICIENT.*





c) Segons les estimacions de l'inversor K: seria factible una cartera G la rendibilitat esperada de la qual fóra el 8,56% i el risc del qual fóra el 3,42%? Per què?

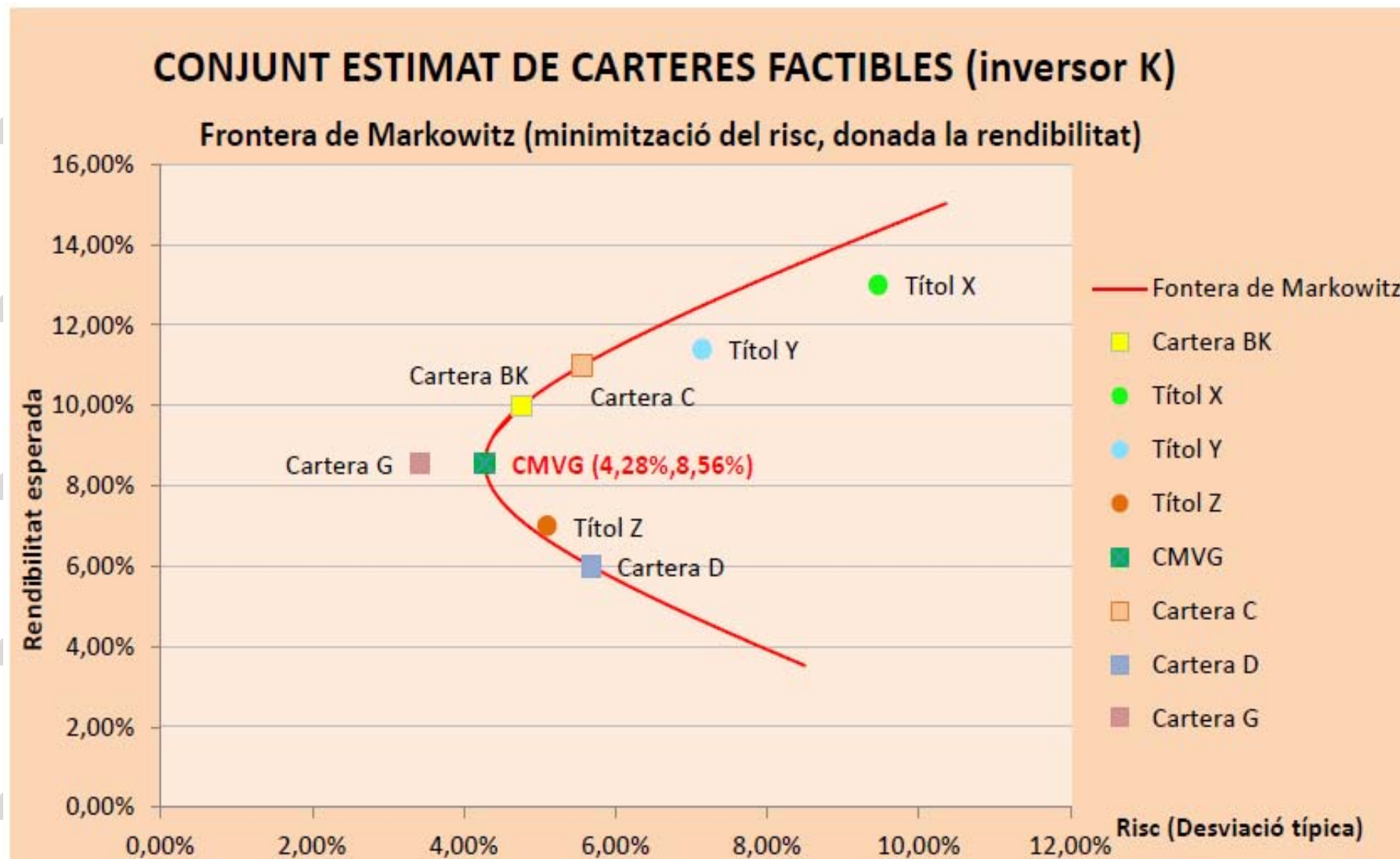
	Rendibilitat esperada	Risc total (des. típ.)	Pressupost actiu X	Pressupost actiu Y	Pressupost actiu Z
CMVG	8,561451%	4,277422%	3,315518%	30,96636%	65,718122%
Cartera BK	10%	4,763603%	19,215791%	41,978467%	38,805742%

- Cartera G: rendibilitat esperada 8,561451% = 8,561451% (CMVG).
- Cartera G: risc 3,421938% < 4,277422% (CMVG)

*La cartera F té MENYS RISC que la CMVG: IMPOSSIBLE: NO FACTIBLE.*



d) Representeu gràficament la situació de l'inversor K. Alfredo Grau©



### e) Quin efecte comporta la hipòtesi d'expectatives heterogènies (derivades de l'ús d'informació no homogènia?)

- Si la informació no és igual per a tots els inversors, o si els inversors tenen expectatives diferents sobre les característiques dels actius financers arriscats, estimaran de manera diferent el conjunt de possibilitats d'inversió factibles (conjunt factible de Markowitz).
- Les combinacions de carteres eficients seran diferents i la cartera de mínima variància global, també.
- Això provocarà diferents dissenys per a la frontera eficient de Markowitz.
- I, en definitiva, les carteres considerades eficients seran diferents entre els inversors.

# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 27 (I)



### DADES DE L'ENUNCIAT:

- Tenim tres títols, X, Y i Z (hi ha títol sense risc).
- Qualsevol inversor pot endeutar-se i prestar a tipus d'interés lliure de risc.
- L'inversor K:

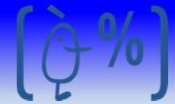
Rendibilitat i risc	Rendibilitat esperada	Risc total (des. t
Actiu F	2,573545%	0%
Actiu X	13%	9,465728%
Actiu Y	11,4%	7,144228%
Actiu Z	7%	5,099020%
Cartera T	10%	4,763603%

Pesos pressupostaris	Actiu X ( $W_X$ )	Actiu Y ( $W_Y$ )	Actiu Z ( $W_Z$ )
Cartera T	19,215791%	41,978467%	38,805742%
Cartera O	24,203265%	52,874021%	48,877804%



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 27 (II)



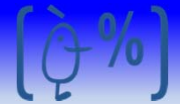
Correlació lineal	Actiu X	Actiu Y	Actiu Z	Cartera T	Cartera O
Actiu X	1				
Actiu Y	0,34898171	1			
Actiu Z	0,25276629	0,7137257	1		
Cartera T	0,70653988	0,79247394	0,55683096	1	
Cartera O	0,70653988	0,79247394	0,55683096	1	1

–T és la cartera de tangència entre frontera Tobin i conjunt de Markowitz.

–K tria com a la seua cartera òptima la cartera O.

- a) **Representeu gràficament la situació del mercat financer derivable de les estimacions de l'inversor K (açò és, dibuixeu de manera aproximada el conjunt factible de Markowitz i la frontera eficient de Tobin estimats per l'esmentat inversor). Per què? Calculeu la rendibilitat esperada i risc de la cartera O.**





- b) En quina cartera invertiria si no vol suportar cap risc? I si volguera invertir només en títols arriscats? Cartera amb rendibilitat esperada 12% i risc 4,763603%?
- c) Disposa d'un pressupost (recursos propis) d'1.000.000 € i vol gastar 1.500.000 € en la compra al comptat de títols representatius de la cartera T i formar una cartera eficient S. Quines serien les característiques de la cartera S?
- d) Disposa d'un pressupost (recursos propis) d'1.000.000 € i vol gastar 400.000 € en la compra al comptat de títols representatius de la cartera T, i esgotar tot el pressupost invertint en la formació d'una cartera eficient N. Quines serien les característiques de la cartera N?



a) Representeu gràficament la situació del mercat financer derivable de les estimacions de l'inversor K (açò és, dibuixeu de manera aproximada el conjunt factible de Markowitz i la frontera eficient de Tobin estimats per l'esmentat inversor). Per què? Calculeu la rendibilitat esperada i el risc de la cartera O.

- La forma habitual del conjunt factible de Markowitz és una corba, corresponent a la situació en què no hi ha correlacions perfectes (ni positives ni negatives) entre les rendibilitats dels actius arriscats.
- En considerar l'actiu lliure de risc, extensió de Tobin, la frontera eficient es converteix en una línia recta que parteix del punt  $R_F$  i és tangent a la frontera eficient que s'obtenia sense introduir el títol sense risc.



- Les carteres mixtes eficients són les formades per:
  - L'actiu lliure de risc: pes  $W$ .
  - La cartera eficient tangent (en aquest exemple és la cartera T): pes  $1-W$ .
- La rendibilitat de qualsevol cartera en aquesta línia serà:

$$\tilde{R}_p = \omega R_F + (1 - \omega) \tilde{R}_T$$

- $1 - W < 1$ , prestant a la taxa lliure de risc: l'esquerra de T.
  - $1 - W > 1$ , demanant prestat: endeutament.
- Les carteres mixtes eficients són les formades per:

$$E(\tilde{R}_p) = R_F + \left( \frac{E(\tilde{R}_T) - R_F}{\sigma(\tilde{R}_T)} \right) \sigma(\tilde{R}_p)$$





### FRONTERA EFICIENT DE TOBIN (inversor K)



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 27 (VII)



$$E(\tilde{R}_p) = R_F + \left( \frac{E(\tilde{R}_T) - R_F}{\sigma(\tilde{R}_T)} \right) \sigma(\tilde{R}_p)$$

$$E(\tilde{R}_p) = 0,025735 + (1,5590009)\sigma(\tilde{R}_p)$$

- Rendibilitat esperada de la cartera O:

$$\tilde{R}_O = (1 - \omega_x - \omega_y - \omega_z)R_f + \omega_x E(\tilde{R}_x) + \omega_y E(\tilde{R}_y) + \omega_z E(\tilde{R}_z)$$

$$E(\tilde{R}_O) = (1 - 0,2420 - 0,5287 - 0,4887)0,0257 +$$

$$+ 0,2420 * 0,13 + 0,5287 * 0,114 + 0,4887 * 0,07 =$$

$$= 0,1193 \text{ (11,93\%)}$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 27 (VIII)



■ El risc de la cartera O:

$$\sigma^2(\tilde{R}_O) = \omega_x^2 \sigma^2(\tilde{R}_X) + \omega_y^2 \sigma^2(\tilde{R}_Y) + \omega_z^2 \sigma^2(\tilde{R}_Z) + 2\omega_x \omega_y \sigma(\tilde{R}_X) \sigma(\tilde{R}_Y) + 2\omega_x \omega_z \sigma(\tilde{R}_X) \sigma(\tilde{R}_Z) + 2\omega_y \omega_z \sigma(\tilde{R}_Y) \sigma(\tilde{R}_Z)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{R}_O) &= 0,2420^2 * 0,0947^2 + 0,5287^2 * 0,0714^2 + \\ &+ 0,4887^2 * 0,051^2 + 2 * 0,242 * 0,5287 * 0,35 * 0,0947 * 0,0714 + \\ &+ 2 * 0,242 * 0,4887 * 0,25 * 0,0947 * 0,051 + \\ &+ 2 * 0,5287 * 0,4887 * 0,07 * 0,0714 * 0,051 = 0,0036 \end{aligned}$$

$$\sigma(\tilde{R}_O) = \sqrt{0,0036} = 0,06 \text{ (6\%)}$$



**b) En quina cartera invertiria si no vol suportar cap risc? I si volguera invertir només en títols arriscats? Cartera amb rendibilitat esperada 12% i risc 4,763603%?**

- Si l'inversor K vol invertir en una cartera sense risc com és un inversor racional, invertiria tot el pressupost en l'actiu lliure de risc:

- $1-w = 0\%$  del pressupost s'invertirà en T.
- $w = 100\%$  en l'actiu lliure de risc (dóna en préstec).

- Rendibilitat esperada: rendibilitat actiu lliure risc:  
 $R_F = 2'573545\%$ .

- Si vol formar una cartera formada exclusivament per títols amb risc, sense gastar en ella ni més ni menys que el seu pressupost d'inversor (recursos propis) com que és un inversor, invertiria tot el pressupost en la cartera tangent (T):

# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 27 (X)



- $1-w = 100\%$  del pressupost s'invertirà en T.
- $w = 0\%$  en l'actiu lliure de risc.
- Rendibilitat esperada cartera: rendibilitat cartera T:  $R_T = 10\%$ .
- No és possible formar una cartera la rendibilitat esperada de la qual siga el  $12\%$  i el risc total de la qual, mesurat amb la desviació típica, siga el  $4,763603\%$  (coincident amb la cartera T)  $\Rightarrow$  La cartera és INFACTIBLE.



**c) Disposa d'un pressupost (recursos propis) d'1.000.000 € i vol gastar 1.500.000 € en la compra al comptat de títols representatius de la cartera T, i formar una cartera eficient S. Quines serien les característiques de la cartera S?**

- Donat que solament disposa d'1.000.000 € i vol gastar més: haurà de demanar un préstec de 500.000 €. Perquè siga eficient haurà d'endeutar-se al tipus d'interés lliure de risc.
- Composició cartera S:
  - 150% del pressupost s'invertirà en T.
  - -50% en l'actiu lliure de risc (s'endeuta).
- La rendibilitat de la cartera S:

$$\tilde{R}_S = \omega R_F + (1 - \omega) \tilde{R}_T$$



# Bloc IV. Tema 6

## PRÀCTICA 27 (XII)



$$\tilde{R}_S = (-0,5)0,025735 + (1,5)0,1 =$$

$$\tilde{R}_S = 0,13713 \text{ (13,713\%)}$$

- El risc de la cartera S:

$$E(\tilde{R}_S) = R_F + \left( \frac{E(\tilde{R}_T) - R_F}{\sigma(\tilde{R}_T)} \right) \sigma(\tilde{R}_S)$$

$$0,13713 = 0,02573545 + \left( \frac{0,1 - 0,02573545}{0,04763603} \right) \sigma(\tilde{R}_S)$$

$$\sigma(\tilde{R}_S) = 0,07145 \text{ (7,145\%)}$$



**d) Disposa d'un pressupost (recursos propis) d'1.000.000 € i vol gastar 400.000 € en la compra al comptat de títols representatius de la cartera T, i esgotar tot el pressupost invertint en la formació d'una cartera eficient N. Quines serien les característiques de la cartera N?**

- Donat que solament disposa de 1.000.000 € i vol gastar solament 400.000 € en actius arriscats, la resta del pressupost l'invertirà en l'actiu lliure de risc (600.000 €).
- Composició cartera N:
  - 40% del pressupost s'invertirà en T.
  - 60% en l'actiu lliure de risc (presta).



$$\tilde{R}_N = \omega R_F + (1 - \omega) \tilde{R}_T$$



▪ La rendibilitat de la cartera N:

$$E(\tilde{R}_N) = 0,6 * 0,025735 + 0,4 * 0,1 = 0,0554 \text{ (5,54\%)}$$

▪ El risc de la cartera N:

$$E(\tilde{R}_N) = R_F + \left( \frac{E(\tilde{R}_M) - R_F}{\sigma(\tilde{R}_M)} \right) \sigma(\tilde{R}_N)$$

$$0,05544127 = 0,02573545 + \left( \frac{0,1 - 0,02573545}{0,04763603} \right) \sigma(\tilde{R}_s)$$

$$\sigma(\tilde{R}_s) = 0,0191 \text{ (1,91\%)}$$

