INSTITVTIONES ARITHMETICAE AD PERCIPIENDAM ASTROLOGIAM ET Mathematicas facultates necessariæ.

AVCTORE

Hieronymo Munyos Valentino Hebraicæ linguæ pariter atq; Mathematum in Gymnasio Valentino publico professore

VALENTIAE.
Ex typographia Ioannis Mey.
Anno 1566.

Ex li[illegible] Ludouici [illegible] professoris in eiusdem
schola [illegible] 4 [illegible]

Impreſſum cum facultate Illuſt. ac Reue. domini Archiepiſcopi Valentini.

Cautum eſt Senatus conſulto Reipub. Valentinæ, ne quis has inſtitutiones in hoc regno excudere, aut alibi excuſſas vendere intra quinque annos audeat, ſub pœnis in priuilegio contentis. Datum Valentiæ die 21. menſ. Martij. Ann. 1566.

Auctor studioso Le-
ctori S. P. D.

SVPPVTANDI facultatem quam Græci ἀριθμητικὴν, atque etiam λογιστικὴν vocant, homini non minùs propriam ratiocinandi facultate, docet primum verborũ affinitas. λογίζειν enim non solùm supputare, verùm etiam putare, nempe ratiocinari significat: vnde λογισμὸς cogitatio, ratiocinatio, & συλλογισμὸς collectio, seu ratiocinium dicitur, atque à Latinis ratiocinatores supputatores dicuntur, quòd perinde sit homini naturale, ratione vti, ac supputatione. Adhæc, qui à natura ad supputãdi facultatem sit cõparatus, idem sit ad scientias omnes & sapientiam & iura populis accuratiùs danda natus: contra verò, qui natura supputandi facultate est destitutus, quales multos passim licet inuenire, ijdem ad functionem intellectus non videãtur apti, cuius rei euidentißimũ stolidi indicium præ se ferunt: vnà enim cum ratione facultate supputandi priuantur. Quare meritò Plato Dialogo 7. de Rep. ait.

Cernis igitur amice, reuerà peritiam huius disciplinæ nobis necessariam, quandoquidem, vt apparet, animum ad hoc inducit, vt ipsa intelligētia vtatur ad veritatem ipsam percipiendā. An & hoc aduertisti, homines natura Arithmeticos, ad omnes doctrinas, vt ita dixerim, acutos videri? quin etiam si qui ingenio tardiores huius studio se dederint, si nullam vtilitatem aliam susceperint, tamen hoc assequuntur, vt acutiores quàm antea sint. Hanc autē facultatem, cùm intelligam ab innumerorum scriptorum stylis appeti, ne dicā lacerari, à paucis verò μεθοδικῶς tradi, plerisque omnibus centones potiùs Arithmetices, quàm præcepta tradentibus. Cùm à teneris annis ad Mathematicas scientias fuerim procliuis, ex quarum professione alibi multis annis, hic verò plusquam triennium vixerim, ac tandem scholasticorum efflagitationibus, ex priuato professor publicus in hoc gymnasio Valentino fuerim constitutus, non potui iustis eorum precibus non obtemperare, præsertim Mathematicarum scientiarum primam auspicaturus. Cumq; eorum manibus dictata nostra circūferrentur, eò nos adegerunt, vt de Arithmetica ea, quæ ad Mathematicas & Astrologiam percipiendas, necessaria censerentur, excudi permitteremus. Expensis autem pene omnium classicorum auctorum Arithmeticis, cùm paucorum auctorum scripta circa hoc argumentum extent, atque ijdem pauca, atque non satis elaborata, nec ordine

Mathema-

Mathematico composuisse videãtur, compulsi fuimus ad Euclidem, Theonem, Proclum, & priscos alios Mathematicos confugere, quorum scripta nostris lucubrationibus multùm profuerunt, ad quæ discenda auditores nostros prouocare desiderantes, ex ipsis nostras Arithmeticas institutiones excerpere decreuimus, ne autem demonstrationum difficultate absterrerentur, paratu facilibus probationibus vsi sumus. Methodum autem Mathematicam delegimus, id vnicè curantes, vt degustata Mathematicorum methodo, eos ad Euclidem omnium bonarum disciplinarum magistrũ deduceremus. Quòd si sumptuũ in his cudendis iacta alea, feliciter cesserit, sitque par fortuna labori, propediem quicquid restat ex Euclide ad Arithmeticam pertinẽs, & alia scripta Mathematica, quæ eorum manibus circumferuntur, ad incudẽ reuocata auctiora & emendatiora edentur. Vale. Calendis Aprilis, anni M. D. Lxvj.

Prudens lector, quæ in hoc libro contigere errata, boni consule. non enim est, ut ait Salomon, homo qui non peccet. nec ullus est mortalium, teste Plinio, qui omnibus horis sapiat. Acciderunt enim aliquot errata, sed secunda manu operi admota, expurgata iam habes.

ERRATA.

f. folio. p. pagina. v. versu. l. lege.

Emendabis primum numeros seriei foliorum.

f.4 p.2.v.17.pro 9.l.27. f.5.p.1.v.28.l.tantum. f.5.p.2.v.4. pro 575.l.384. f.7.p.2.v.6.pro Chaldæos, l. Hebræos Samaritanos. f.8.p.2. l.quarta quaq;. f.10.p.2.l.Kænan. f.11.p.1.v.1.dele ad. f.15.p.1.v.2.pro minor, l. maior. f.22.p.1.v.19.l.qui efficiunt. f.23.p.2.v.23.l.pro est, sunt. f.25.p.1.v.19.l.pro duas, tres. f.26.p.1.v.23.l.pro sinistro, dextro, & post decussis, adde: deinde ex notis numeri diuidendi reiectis 9, remanent 3 notanda in latere sinistro decussis. quia. &c. f.28.p.1.v.6.l.linea, & dele, duplum 1. f.28.p.2.v.4.l.120. f.32.p.2.v.21.l.cubici. f.34.p.1.v.20.l.digitos. f.35.p.1.v.5.l.95. f.35.p.1.v.17.l pro diuisore, diuidendo. f.43.p.2.v.28.l. $\frac{63}{7}$. f.49.p.2.v.6.pro minor, l.maior. f.50.p.2.v.9.l.ex 71947. f.51.p.1.v.4.pro secundæ.l. quartæ. f.52.p.2.v.16. pro $\bar{3}$ ducta in 3, l. 3 ducta in 1. & v.29.pro diuidat, l.diuidatur. f.54.p.1.v.12. pro 1.l.1. f.55.p.2.v.28: l.accepti. f.59.p.2.v.18.l.partiliter. f.71.p.2.v.7.pro antecedentem, l.consequentem. v.8.pro consequentem, l.antecedentem. v.9 pro consequentem, l.antecedentem. ducesq; lineolas in tertio schemate prorsus ut in secundo.

TABVLA ARITHMETICAE.

f. folio, p. pagina.

Primo libro cõtinẽtur.

Secũd. libro cõtinẽtur.

Libro tertio cõtinẽtur.

TABVLAE FINIS.

INSTITVTIONES

ARITHMETICÆ AD PERCIPIENDAM *Astrologiam, & Mathematicas facultates necessariæ.*

EVCLIDES elementorũ libros in Principia, & Problemata, & Theoremata diuisit. Principiorum duo genera sunt. Vnum est ceu pars propositionis, vt definitiones: alterum propositio, quæ cõmunes animi conceptiones, & petitiones continet. Ex his tribus principijs, nempe Definitionibus, communibus animi Conceptionibus, & Petitionibus, Problemata primùm, deinde Theoremata colliguntur, seu demonstrantur. Problema verò vocauit propositionem ad opus pertinentem, scilicet quà aliquid fieri præcipitur, cuius prędicatum latius patet subiecto. Theorema verò propositionem, quà solùm consideratur, seu expenditur aliquid, cuius prædicatum propria quædam passio est subiecti, idcirco cum eo conuertitur. Præcedit opus ordine doctrinæ, inde est operis inspectio. Prius enim scias oportet, triangulorum genera describere, & datæ lineæ æqualem aliam constituere ad datum punctum, & lineas, & angulos bifariam secare, quàm de quantitatibus, & æqualitatibus angulorum, & areæ eorum captu disseras. Sic in Arithmetica est faciendum. prius enim scire oportet colligere, subducere seu abstrahere, ducere seu multiplicare, diuidereq; numeros, partem proportionalem, & radices quadratas, ac cubicas colligere, quàm de eorum affectibus seu proprietatibus demonstrationes con nectas. Itaq; Arithmetica est ars supputandi, & affectus atq; proprietates numerorum expendendi.

PRINCIPIA PRIMA.

ὅροι, vel definitiones.

VNitas est, qua vnumquodque eorum, quæ sunt, dicitur vnum.

Ex cuius compositione omnes numeri fiunt, & in eam tamquam minimam partem omnes numeri resoluuntur.

Numerus est, ex vnitatibus composita multitudo.

Componitur autem numerus bifariam, aut physicè seu per aceruationem, aut Arithmeticè. Compositione autem per aceruationem tria, & septē partes sunt denarij, Arithmeticè verò duo, & quinq; decem efficiunt; non autem tria & septem.

Si igitur compositionem physicam seu acerualem numerorum cōtempleris, omnis numerus aut est digitus, aut articulus, aut compositus.

Digitus est, quiuis numerus denario minor.

Vt 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Articulus est numerus in circulum (quem zero aut cifram vulgus appellat) desinens.

Vt 10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100. &c.

Numerus compositus physicè, per excellentiam dicitur omnis, qui ex articulo & digito constat.

Vt 12. 36. &c. Nam in duodecim sunt 10, qui numerus est articulus, & duo insuper, qui numerus est digitus, compositi omnes desinunt in digitis.

Differentia

Differentia numerorũ est id quo maior numerus minorem superat, qui excessus dicitur.

Si ad Arithmeticam compositionem animum adhibeas,

Pars Arithmetica est numerus maiorem dimetiens.

Scilicet qui à maiore numero, qui & cõpositus & multiplex dicitur, aliquoties tãtum continetur.

Partes vero quando non dimetiuntur.

Id est, quæ simul sumptæ nullo modo producunt maiorem numerum.

Numerus par est, qui bifariam secatur.

Vtpote qui ex æquo in duo sine vnitatis sectione diuidi potest: vt 4. 6.

Numerus impar est, qui non secatur bifariã, aut qui vnitate differt à numero pari.

Id est, qui ex æquo in duo sine fractione vnitatis diuidi nequit: vt 3. & 5.

Paris numeri membra, secundum Euclidem, pariter par, pariter impar.

At impariter parem reijcimus ab arte, quòd sit inutile recentiorum Latinorum post Boethium commentum: cuius nec Euclides, nec Aristoteles meminit, sed ab Euclidis interprete adijcitur.

Pariter par est, qui à pari numero per parem mensuratur.

Qui tantùm ex paris per parem ductu fit, vt 4. 8. 16. &c. duplicando.

Pariter impar est, qui à pari numero per imparem mẽsuratur.

Id est, qui ex pari per imparem fieri potest, vt 12, nam licet fiat ex duobus & sex, qui sunt pares, quia fieri potest ex quatuor & tribus dicetur pariter impar, licet melius vocaretur par impariter: nam est numerus par ex pari numero per imparem procreatus. Euclides tamen hoc genus numeros ἀρτιάκις περισσοὺς, id est, pariter impares, non tam eorum naturas contemplatus, quàm veterum nomenclaturas seruans, appellauit. Non enim sunt hi numeri impares, sed pares.

Imparis numeri membra.

Impariter impar est, qui ab impari numero per imparem mensuratur.

Videlicet qui ex ductu imparis per imparem fit, vt 9. ex 3. in se ducto. Et 15. ex 3. in 5. Semper enim impar per imparem ductus imparem procreat, & impar diuisus per imparem in imparem resoluitur.

Primus numerus, qui aliter incompositus Arithmeticè dicitur, est numerus impar, quem sola vnitas metitur.

Quod idem est ac si dixeris, qui ex solius vnitatis ductu in impares numeros fit, vt 3. 5. 7. Hos enim numeros nunquam effeceris, nisi multiplicando vnitatem in aliquem numerum imparem. At 9 non est numerus primus, fit enim aliter quàm ducta vnitate in nouenarium, nempe ex tribus in sese. Primus dicitur, quod sola vnitate, quæ est numerorum initium, mensuratur: reliqui non secundi, sed compositi dicuntur, alioqui tertios & quartos, & sic in infinitum dicere oportebat.

Obiter nota, apud Euclidem definitiones has efferri per verbum mensurandi, metaphora sumpta à gæodætis seu agrimensoribus, qui agrorum latera podismo seu dodrāte, aut alia minore mensura, ne fractiones inter supputandum

dum

dum obrepant, metiuntur. Numeris instar linearum considératis, vt sex mensurantur à binario & ternario: sit igitur linea ab sex. a c vna eius pars sexta, a d tertia pars, a e medietas. Dico lineam a b à solis partibus a c, a d, a e, non autem ab a f, nec ab a g mensurari. Nam a c sexies ducta efficit ipsam a b: at a d ter ducta efficit ipsam a b, & a e bis ducta efficit totam a b. At a f neq; sexies, aut ter, aut bis, aut aliter ducta efficit ipsam a b. Quare mensurabitur linea a b à lineis a c, a d, a e: non autem à lineis a f, & a g. Proinde mensurari aliquem numerum ab alio, est ab eo aliquoties ducto procreari.

Primi ad sese mutuò dicuntur numeri, qui sola vnitate mensurantur mensura communi.

Id est, quibus præter vnitatem nulla alia est Arithmetica pars communis, vt 5 & 7. 7 & 8: atq; horum vterq; potest esse impar, vel vnus par, alter verò impar. Par tamen vterq; esse nequit. Tales enim numeri, præter vnitatem, vtriq; communem pari numero, etiam mensura communi mensurantur. Hos numeros etiam inter sese mutuò incompositos dixeris.

Compositi ad sese mutuò dicuntur numeri, qui numero aliquo mensurantur communi mensura.

Vt quatuor & sex, quos pręter vnitatē binarius vtriusque numeri pars Arithmetica atq; cōmunis mensura metitur. Item 2 & 6 sunt compositi inter sese, nam binarius etiā à sese dicitur mensurari: fit enim ex binario in vnitatem ducto.

Numerus numerū multiplicare dicitur, quando quot sunt æquales in eo vnitates, toties compositus fuerit qui multiplicatur, & fit aliquis numerus.

Numerus multiplicans à Latinis aduerbio profertur, multiplicatus nomine numerali, vt ter quatuor sunt 12 ter dicitur numerus multiplicans, quatuor, πολλαπλασιαζόμενος, id est, qui multiplicatur, vel vt recentiores dicunt, numerus multiplicatus. Qui autem ex his duobus fit, productus ex multiplicatione appellatur. Si igitur velis scire quis numerus producatur, multiplicato vno numero in alium, cõpone numerum qui multiplicatur toties quot sunt æquales vnitates in multiplicante, vt in dato exemplo ter quatuor sunt duodecim, compone seu collige in vnum numerum tres quaternarios sic, inueniesq́ 12.

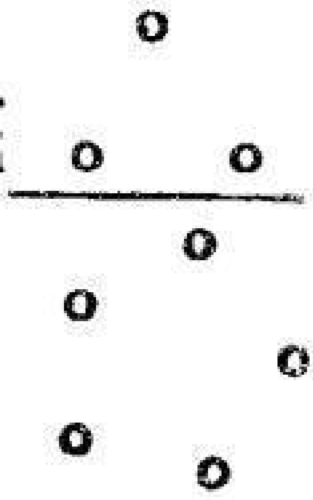
$$\begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

Quando duo numeri sese multiplicantes efficiunt aliquem, qui fit, planus nominatur.

Latera verò ipsius dicuntur, numeri qui sese mutuè multiplicant.

Ex definitione Euclidis constat, numerum planum eundem omnino esse, qui hactenus compositus dicebatur, qui & multiplex aliter dicitur. Differunt tamen sola relatione, nam compositus refertur ad partes, planus ad superficiem seu ad figuram: cuius duæ tãtum sunt species, scilicet quadratus, & altera parte longior. nullam enim aliam figuram numeri inter sese ducti componere possunt. Vnde non caret reprehensione Boethius, qui planum numerum, neglecto Euclide, aut ignorato, definiuit, esse qui per suas vnitates descriptus, in longum, ac latum porrigitur. quasi velit dicere, qui in descriptione superficiaria, seu figurali duas habet dimensiones, vel duo latera, longitudinem scilicet, & latitudinem: verbis ab Euclide differens, re aut vera consen-

consentiens. Deinde verò numerum planum in triangularem, quadratum, quinquangularem, sexangularem, & in alios infinitos planos pro ratione seriei numerorum diuisit. quum præter quadratum, & quadrangularem, nullus sit numerus alius, qui sit planus. Nam reliqui carent longitudinis & latitudinis lateribus. Dispone enim triangularem & quinquangularem, vt vides. Dico hos numeros nō habere duo latera, nā ternarij latus non sunt duæ vnitates, alioqui efficerent quatuor: nam quod erit aliud latus nisi duo? Sic in pentagono seu quinquangulari, si demus duo esse vnum latus, aliud latus esse non poterit quicquam præter duo. Iam itaq; duo hæc latera nō efficerēt quinq;, sed quatuor.



Quadratus numerus plani numeri species est, fitque ex aliquo numero in seipsum ducto.

Vt 9 ex 3. & 3. qui sic deliniatur: cuius figuræ vnumquodq; latus est 3. & latera circa eundem angulum inter se ducta numerū nouenarium efficiunt. Quadratus autem numerus vulgaribus dicitur census, & notatur à quibusdam nota □ quadrati Gæometrici, ab alijs verò nota hac ȝ. Eius autē latus dicitur radix quadrata, quæ notatur sic coª cosa, vel sic ꝛe vel sic √.

o o o
o o o
o o o

Numerus altera parte longior est, secunda species plani, qui fit ex ductu duorum inæqualium numerorum.

Vt 12. fit enim ex 3 & 4. vel ex 6 & 2. itaq; duobus modis poterit duodenarius in superficie figurari. sic primæ figuræ altera parte longioris latera sunt 4 & 3. secundæ verò figuræ 2 & 6.

o o o o
o o o o
o o o o

vel sic

o o
o o
o o
o o
o o
o o

Quan-

Quando verò tres numeri multiplicantes sese mutuò, efficiunt aliquem, qui fit, solidus vocatur.

Vt corpora tribus constant dimensionibus, sic solidi numeri ex tribus numeris, tanquam dimensionibus inter sese ductis producuntur: vt ter quatuor ter sunt 36. nam ter 4. sunt 12. at ter 12. sunt 36. erit itaq; 36. numerus solidus.

Latera verò eius, vt in planis numeris, dicuntur numeri qui se ipsos multiplicant, vel ex quorum multiplicatione numerus solidus fit.

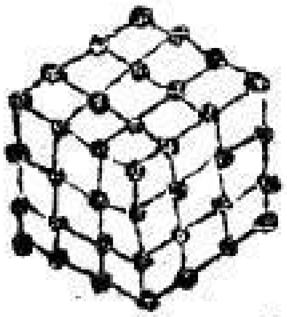
Vt in præcedēti exemplo latera sunt 3.4.3. quæ efficiūt inter se ducta 36. cuius numeri solidi alia sunt latera præter superiora, nempe 3. 3. 4. vel 2. 9. 2. vel 3. 6. 2. his enim numeris inter sese ductis semper fiunt 36.

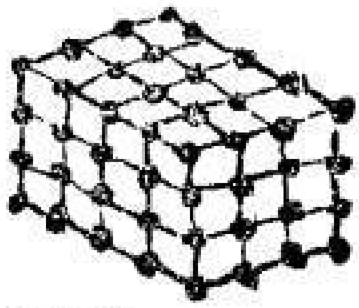
Numerus solidus aut omnia latera habet æqualia, & dicitur Cubus, qui ab Euclide dicitur, æqualiter æqualis æqualiter, vel sub tribus æqualibus numeris comprehensus. Vt bis duo bis sunt 8. ter tria ter sunt 27. &c. numerus autem Cubus notatur charactere ☐☐, vel sic ce: cuius latus dicitur radix cubica, quæ notatur sic ʷ√.

At si solidi numeri latera omnia fuerint inæqualia vtraque parte longus, si verò duobus lateribus existentibus æqualibus tertium fuerit inæquale, altera parte longus dici poterit. Quod si ad corpora solida conferas, ab eisq; nomenclaturam hoc genus numeris indere velis, numerus prismatodis, seu serratilis dici poterit vterq; solidus numerus ex inæqualibus lateribus conflatus. præter Cubici & serratilis numeri solidi species, nullam aliam nouit Euclides: sed nec esse potest. Nam si cōmisceas tres numeros, id est, si inter se ducas, aut illi omnes sunt æquales, & fiet ex eorum ductu Cubus, aut inæquales: vel omnes inter sese, vel duo sunt æquales, & tertius est inæqualis. Fietq; nume

rus

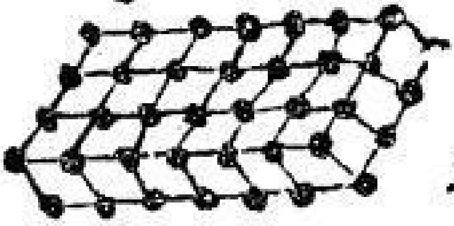
rus solidus lõgus seu serratilis. Quare lapsus est Boethius, qui diffinito numero solido ex tribus dimensionibus, quas in eius vnitatum descriptione habet idem cum Euclide, quoad solidi numeri diffinitionem attinet, sentiens. Postea suis non constans principijs, numerum solidum diuisit in Pyramidem, Cubum, Laterculum, Asserem, Cuneum, & Circularem, & Sphæricum, & Parallelipedum. Cum non possit reperiri numerus pyramidalis, neq; cuneus, neq; circularis (qui non esset solidus, sed planus: nam circulus in plana cõsistit superficie) neq; sphæricus. Tres enim numeri qualescunq; sint inter sese multiplicati, nunquam efficient pyramidem, neq; cuneum, sed tantum ea genera quę recensui. 64





80

Cubi figuratio.



56

Habes figuras omniũ numerorũ solidorum. Nam 64. est cubus ex 4. 4. 4. At 80. est solidus serratilis descriptus, ex 4. 5. 4. alter verò ex 7. 4. 2.

Numeri proportionales dicuntur, quando primus secundi, & tertius quarti fuerit æqualiter multiplex: aut eadem pars, aut eædem partes.

Nempe qando quã habet rationem primus ad secundum, eandem tertius ad quartum. Vt sicut 4. ad 2. ita 6. ad 3. qui numeri dicuntur discontinuè proportionales: aut vt 4. ad 6. ita 6. ad 9. qui continuè proportionales dicũtur. in quibus tamen sunt tres termini naturâ diuersi.

Similes plani & solidi numeri sunt qui habent latera proportionalia.

Planorum sit exemplum. 12. cùm sit ex. 3 & . 4. similis est 48. cùm sit ex . 6. & . 8. nam vt se habent. 3. ad. 4. ita. 6. ad. 8.

Solidorum exemplum, ut. 48. cùm sit ex 2. 4. 6. similis est ipsi. 576. cùm sit ex. 4. 8. 12. nã vt 2. 4. 6. ita. 4. 8. 12. Omnes itaq; numeri cubi inter sese sunt similes.

Perfectus numerus est, qui suis partibus æqualis est.

Vt. 6, & . 28. &c. nam partes senarij sunt. 3. 2. 1. quæ efficiunt. 6. partes 28. 14. 7. 4. 2. 1. quæ complent. 28.

Hactenus Euclides & Aristoteles species numerorum pertraxerunt. Boethius verò adiecit numerum diminutũ, nempe cuius partes minorem toto efficiunt, vt 8. & redundantem, cuius partes ipsum totum superant, vt 12. quæ definitiones videntur à ratione alienæ. Qui enim dici potest numerus diminutus, si superet suas partes: aut redundans, si suis partibus minor sit? Quæ causa fuit vt ab Euclide 7. lib. Elementorum prætermissi fuerint. Item ab Aristotele 3. Problemate sectionis 15. ait enim à denario contineri omnia numerorum genera, scilicet par & impar, paris species sunt pariter par & (vt ego censeo nominandum) impariter par. Qui si definitur sic nempe cuius media æqualium partitionem admittũt, sed partium in duo æqua partitio citra vnitatẽ deficit, vt Boethius finiuit, tum primus omniũ impariter pariũ esset. 12. qui sub denario nõ cõtinetur, qua de causa tantũ duo membra paris numeri approbauimus. Rursus ait Aristoteles sub denario contineri, numerũ quadratum & longũ, quem nos altera parte longũ diximus. Item cubum & longum, solidum & planum, & primum & compositum: ommiũt tamen Aristoteles perfectum numerum. Nusquam tamen apud ipsum, vel antiquum aliquem Mathematicum diminutum, aut redundantem numerum reperies. Nullus enim ex redundatibus numeris sub denario continetur. At omnes numerorum species ab Euclide,

& alijs

& alijs priscis Mathematicis descriptas denarius sub se cō plectitur.

AETEMATA,
seu petitiones.
Petatur.

Cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales.

Quolibet numero aliquem posse sumi maiorem.

Seriem numerorum in infinitum procedere.

Numerum omnem in vnitatem minimam eius partem resolui.

Vnitatem, vt omne continuum, in infinitū posse secari.

Quæ sectiones fractiones dicuntur, vt $\frac{1}{2}$ medietas, seu semis $\frac{1}{3}$ triens, seu tertia pars $\frac{1}{4}$ quadrās, aut quarta pars. &c.

κοιναὶ ἔννοιαι *communes animi conceptiones.*

Omnis pars minor est suo toto, partes omnes simul iunctæ toti sunt æquales.

Quicunque numeri tertio sunt æquales, sibi inuicem sunt æquales.

Si æqualibus numeris æquales adieceris, qui colligentur erunt æquales.

Si ab æqualibus numeris detraxeris æquales, relinquentur æquales.

Si æqualibus numeris inæquales adieceris, relinquentur inæquales.

Si ab æqualibus numeris inæquales detraxeris, relinquentur inæquales.

Si inæqualibus numeris addideris æquales, remanebunt inæquales: sed sub eadem differentia.

Si ab inæqualibus numeris dempseris æquales, relinquentur inæquales: sed sub eadem differentia.

Quicunque numeri tertio sunt æquè maiores, sibi inuicem sunt æquales.

Aequales sunt numeri, quãdo quot sunt vnitates in vno totidem sunt in alio: maior verò in quo plures, minor in quo pauciores existunt.

Omnis pars eiusdem numeri est minor, quæ maiorem habet denominationem: maior verò est, quæ minorem habet denominationem.

Vnitas est cuiuslibet numeri pars ab eo denominata.

Omnis numerus tantus est ab vnitate, quota pars ipsius est vnitas.

Quicunque numerus ducitur in vnitatem, seipsum producit.

Quicunque numerus diuiditur per vnitatem, seipsum relinquit.

Quicunque numerus metitur duos, compositum etiam ex illis metietur.

Quicunque numerus metitur aliquem, omnem etiam numerum ab illo mensuratum metietur.

Quicun-

Quicunque numerus metitur totum, & detractum, metietur etiam residuum.

DE NOTIS SEV CHARACTERIBUS NUMERORUM.

Chaldæi, atq; Assyrij, apud quos perpetuas fuisse literas Plinius arbitratur, literarum notas pro numerorum characteribus vsurpant. Quod etiam faciunt Hebræi, qui solis literarum Hebræarum characteribus supputationum regulas omnes expediunt; vt docet Elias Leuites in libro de Hebræorum Arithmetica. Græci verò literarum notas pro numeris vsurpantes seriei literarum aliud genus notas interijciunt, nec continuæ seriei literarum, vt faciũt Hebræi & Chaldæi numerorum ordinem tribuunt. Romani verò ex notis literarum numerorũ notas selegerũt, nulla ordinis literarum habita ratione. Vnitatem signarunt per. I. binarium per. II. ternarium per. III. quaternariũ per. IIII. quinque per V. decem per. X. viginti per XX. triginta. XXX. quadraginta per. XXXX. vel, XL. quinquaginta per. L. cẽtũ per. C. quingẽta per. D. mille per. M. Vnitas proximè præposita notæ denarij sic. IX. ei detrahit vnitatem. Denarius præpositus notæ quinquaginta, vel centũ detrahit decem, vt XL. quadraginta. XC. nonaginta. Nota centenaria proximè antecedens charactẽrẽ quingentorũ demit centum. Itaq; CD. hæ duæ notæ significãt CCCC quadringẽtos. Numerãdi rationem opera harum notarum Ioa. Nouiomagus in sua Arithmetica explicat. Verùm addendi & detrahendi ratio facilis est. ducẽdi verò & diuidẽdi methodus non perinde obuia, imò longè difficilior quàm quæ per notas vulgatas Arith meticis doceri solet. Notæ verò quibus in hac Arithmetica vtemur, neq; Chaldæis, neq; Hebræis, neq; Arabibus, neq; Græcis, neq; Latinis ad numerandum in vsu sunt. Videtur verò potius post Gothos ab Italis, Germanis, Gallis & Hispanis vsurpatæ, quæ sic habent 1, vnum. 2 duo, 3 tria. 4, quatuor, quarta harum notarum etiam apud Chaldæos quatuor significat Est enim quartum alphabeti elementum. 5, quinque. 6, sex. 7, septem. 8, octo. 9, nouem. Decima nota, 0, ab Hispanis & Arabibus zero, id est, nihil, à quibusdam ciphra: quæ dictio Chaldaicé numerum significat, ab alijs circulus dicitur. Hæc per se nihil significat. Cæterum postposita numeros, quos articulos vocauimus, componit, vt 10, decem. 20, viginti. 30, triginta, &c. præposita verò notis significantibus, nihil efficit, vt ne dicam perperam poni.

DE LIMITIBVS SEV *sedibus numerorum.*

Limites siue sedes, siue situs numerorum sunt ordines quidam, aut series acierum instar, quæ numerorum notas decupla ratione adproximè versus dextrā locatam cōparatæ, augent, ex vno efficientes decē, vel centum, vel mille, vel decem millia, &c. ex duobus verò viginti, vel bis centum, vel bis mille, vel viginti milia, &c. Atq; similiter dicendum de alijs notis. Nam eadem ratione crescunt ipsæ series à dextra versus sinistrā pergentes, sic vt sedes quæuis proximè versus dextram præcedentem decupla ratione superet à proximè verò sequenti versus sinistram decupla ratione superetur. In prima sede seu serie notæ numerorum pro digitis, in reliquis verò omnibus pro articulis accipiuntur. Verùm in secūda pro denionibus, tot scilicet,

quot

quot vnitates ipsæ notæ significant. in tertia pro cẽturiis:
in quarta pro milibus, quo ordine semper versus sinistram
augentur. Quinta itaq; sedes subit ratione quartæ sedis,
rationem denionum, sed ratione sextæ locum habet digi-
torum. Sexta sedes, si ad quintam conferatur denionũ ha-
bet locum: si ad quartam, centuriarum: si ad tertiã, milliũ:
si ad secundam, decem milliũ: si ad primam conferas, cen-
tum millia repræsentat. Septima sedes millies millia, id est
millionem vulgarem significat. Castellani vocant cuento,
quod nomen significat eum numerum, qui fieret ex mille
ductis in mille, cuius multiplicationis summa collectio se-
ptem notas sedibus totidẽ locatas desiderat sic 1000000.
Romani verò supra centum mille, repetitis centurijs nu-
merant.

Delineatio sedium numerorum.

Denio millionũ, millio. i. millies millia. cẽtũ millia. denio milliũ. mille. cẽturia. denio. digi.

De enumeratione.

Si notis Hebraicis, aut Chaldaicis, aut Græcis suppu-
tes, non eges hac regula, quandoquidem, quæcunq; nota
numerum & sedem secum præsefert, nec ratione sedis si-
gnificatum numerum decupla, aut centupla, aut millecu-
pla ratione, aut alia maiore auget. Apud Latinos verò illæ
tres notæ, I. X. C. habent peculiarem rationem enume
randi: nam ratione sedium augent, aut detrahunt. Sed nó
amplius quàm ipsæ per sese significãt, quod iam explicaui
mus. A recentioribus verò, enumeratio dicitur notarum
numerorũ seruata sediũ ratione valoris expressio. Quæ
non

non solúm ad exprimendas vires characterum, & sedium confert, verùm etiam ad notādum proprijs characteribus & sedibus quemcunq; propositum numerum. Si igitur velis exprimere quarumcunq; notarum valorem, subscribes sub quarto quoq; punctum. Primum punctum notat mille: secundum, quod sub septima incidet sede milies milia: tertium, quod sub decima ponetur sede significabit milies milia millies, &c. similiter. Porrò proximi numeri post puncta sinistrorsum, deniones: at secundi, post puncta sinistrorsum centurias significant. Sit exemplum.

8 3 4 5 6 7 9 8 7 5 6 9 8 3 4 0 5.
m. m. m. m. m. | m. m. m. m. | m. m. m. | milies mille. | mille.

Hunc numerum sic exprimes, octoginta tria milíes millia millies milia milies. quadringēta quinquagintasex milies milia milies milia. septingēta nonaginta octo milies milia milies. septingenta quinquaginta sex milies mille. nongenta octogintatria milia. quadringenta & quinq;. In qua enumeratione notæ 0, &. 8. post primum punctum sinistrorsum, & 5 post secundum punctum, & 9 post tertium, & 5 post quartum, & 8 post quintum semper exprimuntur per deniones. 0 verò quia nihil significat nullo denione expressa est. At 8 post primum punctum per octoginta, quæ sunt octo deniones, atq; aliæ notæ in consimilibus sedibus, post puncta locatæ, per deniones explicantur. Omnes autem tertiæ notæ post puncta, per centurias exprimuntur. Quòd si Latinè numerorum notas efferre velis supra centum mille, omnes notas per aduerbia, sed replicatis centurijs proferes. Sit numerus Latinè explicandus.

cēties cētena cēties. | cēcies cētena. | centena. | mille.
5 2 | 3 4 | 8 2 | 7 5 6 3.

Collocabis

Collocabis sub quarta nota punctum, quod significat mille, sub sexta nota aliud, quod significat centena millia, nempe centies mille, sub octaua ponetur aliud punctum quod significat centies centena millia, sub decima collocabitur aliud quod significat centies centena centies: itaque dices quinquies centies centena centies, vicies ter centies centena quadragies octies cētena, vigintiseptē milia quingenta sexaginta tria, qui numerus a vulgaribus latinis exprimeretur sic, quinquies millies millena millia, ducenta triginta quatuor millies millena, octingenta viginti septē millia, quingenta sexaginta tria. Plinius tamen priore modo illas notas exprimeret. Nam de terræ dimēsione agēs, ait, pars nostra terrarum ambiente Oceano velut innatās longissimè ab ortu ad occasum patet, hoc est, ab India ad Herculis colūnas, Gadibus sacratas, octuagies quinquies centena septuaginta octo millia passuum. Quem numerū septē notis exprimes sic 8 5 7 8 0 0 0, qui numerus ad leucas vulgares reductus, quarum quælibet cōtinet quatuor millia passuum Geometricorum efficiet 2 1 4 4 leucas cū semisse. Hæc enumerandi ratio maximopere est obseruanda, vt Latinorum librorum numeri ad nostros conuersi, intelligi possint. Hactenus de enumeratione.

Lib. 2. cap. 108.

DE NOTATIONE *cuiusque numeri.*

Ex proximè præcedenti capite solers lector propositū quemuis numerum sedibus & characteribus proprijs notare poterit. Sciens enim quid inter sedem numeri & eius characterem intersit, quid per sedem, quidve per characterem sit exprimendum facilè consequetur. Verùm in gratiam tyronum, quibus nos accōmodare cupimus, nonulla subijciemus. Sedium vel limitũ nomina sunt, articuli decupla ratione aucti, vt digitus seu vnitas, decem, centum, mille, decies mille, centum mille, millies mille, decem millies millia, &c. Secundùm vulgares Logistas: verùm secundum Latinos sunt, vnitas, decem, centum, mille, decē millia, centena millia, decies cētena millia, centies cētena millia. Re hæ sedium nomēclaturæ nequaquam differunt, sed nominibus solis. Sedes non exprimũtur notis, sed reliquæ partes numerorum. Sit exemplum, datur mihi vulgaribus notandus characteribus numerus, viginti octo millium quingentorum septuaginta sex. Primum numero huius numeri sedes, quæ sunt quinq;, nēpe digitus, senarius, denio septuaginta, centum quingenta, mille octo mille, decem millia viginti. Deinde quæro characteres huius numeri, qui necessariò totidem futuri sunt, quot sedes. Prima omnium versum dextram nota est. 6. nam sex vltimi loci præter primam sedem, sex continet vnitates. Secunda nota erit. 7. nam septuaginta sunt 7 denarij. In secunda verò sede quæcunq; nota est denionum. Tertia nota est. 5. nam in tertia sede quisq; numerus hecatontades, nempe centurias significat: quare pro quingentis solùm in tertia sede ponentur. 5. sic in quarta sede pro octo millibus ponetur 8. quia ea est chiliadibus destinata. In quinta sede denionum post chiliades seu milliaria ponentur. 2. nam ibi. 2. significat viginti. Notatur itaq; datus numerus his quinq; characteribus 28576. Cæterum hæc rudibus satis esse poterunt.

PROBLEMA PRIMVM.

Datos quoscunque numeros in vnum colligere.

Quatuor problematis omnes ambages, difficilesq; quæstiones

stiones Arithmeticæ, Gæometriæ, Musicæ, Astronomiæ, Cosmographiæ, extricantur: quæ vsqueadeò sunt necessaria his artibus, vt nullo non momento, aliquid ad eas pertinens meditanti sit cum ijs problematis obluctandũ. Sunt enim velut instrumanta his artibus necessaria. Ea autem sunt ad additionem numerorum, (quæ aceruatio quædam est,) ad abstractionem ad multiplicationem, ac eorundem diuisionem spectantia. non desunt qui hæc non problemata, sed regulas Arithmeticæ practicæ vocent: qui multis rationibus ab scopo Mathematicarum artium, & à veritate absunt. Primùm Arithmeticam vocantes practicam: existimantes tantum duo esse artium genera, nempe speculatiuum, quod & theoreticum, & quod practicum dicitur. Quum antiquorum omnium suffragiis, nempe Platonis, Aristotelis, Galeni, Quintiliani, artium genera præcipua sunt ars speculatiua, effectiua quæ & ποιητικὴ, actiua quæ & πρακτικὴ dicitur: comparatricem verò vt piscatoriam, & venatoriam, & resarcinatricem seu veteramentariam prætermitto. Effectrices post actionem opus ostendere possunt, vt fabrilis: practicæ cessante actione nullum opus relinquunt, vt saltatrix & choreas ducendi ars Quũ autem hæc relinquat post actionem opus, nó practica, sed effetrix esset censenda. Deinde aberrant à Mathematicarum artium natura nam quãuis suapte natura Mathematicæ sint theoreticæ, vt Geometria, habent tamen problemata & throremata: problemate exquiritur aliquid efficiendum, eius tamen opus ad speculationem destinatur, theoremate tantùm proponitur aliquid considerandum. Tanta problematum multitudo, quæ in primo, & quarto, & sexto elementorum Euclidis libris reperiuntur, non euincunt Gçometriam esse effectricem, quũ omnium calculis sit maximè post Arithmeticam theoretica. Sic quum

Plat. in dia. qui Gorgi. dicitur. Arist. li. 1 Metaphy. cap. 6. Galenus de consti. artis Medi. Quint. lib. 2. cap. 19.

in Arithmetica reperiantur problemata analoga illis quæ reperiuntur in Gæometria, nullo modo est dicenda, quatenus circa additiones, & abstractiones, & multiplicationes & diuisiones versatur, hæc scientia practica. Alij verò sententiam Platonis imitati Arithmeticam logisticam appellant: sed à Platonis mente aberrant. Si enim doceatur ratio addendi, detrahendi, multiplicandi, diuidendi, in solis numeris, theoreticæ, Arithmeticæ problemata sunt vocãda: verùm si ad mercium, aut aliarum rerum oculis subiectarum, supputationes accommodẽtur, nõ theoretica, sed logistica est censenda.

Dialogo 7. de iusto.

Definitio collectionis.

προσθεσις, seu collectio est numerorum cõpositio physica, scilicet qua numeri dati in vnam summam, seu vnicũ numerum æqualem datis aceruantur. Quæ ratio numerandi à Vitruuio cõsummatio dicitur.

Diuisio.

Aut igitur proponuntur soli numeri eiusdem generis, vt sunt numeri per se considerati, aut numeri rerum eiusdem generis (vterq; modus eadem ratione expeditur) aut rerum diuersorum generũ sint primũ numeri rerũ eiusdẽ generis. a. 130. anni quibus vixerat Adam, cùm ei nasceretur Seth filius. b. 105. anni quibus vixerat Seth, quum ei nasceretur filius Enos. c. 90. anni vitæ Enos nascente filio eius Kænau. d. 70. anni vitæ Kænau nascente filio eius Mahalalhel. e. 65. anni vitæ Mahalalhel nascente eius filio Iered. f. 162. anni vitæ Iered nascente filio eius Hænoch. g. 65. anni vitæ Hænoch quum nascebatur filius eius Methuselah. h. 187. anni vitæ Methuselah nascente Lemech eius filio. i. 18[illegible]. anni vitæ Lemech nascente filio eius Noah. K. 600. anni elapsi à natiuitate Noah vsq; ad diluuium. Sunt hi numeri colligendi in vnam summam, vt sciamus à mundi origine vsq; ad diluuiũ quot peracti fuerint anni. Collocabis numeros maiores in superioribus regionibus (hoc

Expositio.

Apparatus.

enim.

enim est cõmodius, etsi ad veritatem non mutat alterius generis collocatio) in prima sede dextra datorũ numerorũ digitos, in secunda deniones, in tertia cẽturias, & cæteros suis sedibus dispones versus sinistrã procedens sic. Collocato primo numero, secundi numeri notas digitorum directè sub digitis primi numeri: & deniones secundi numeri sub denionibus primi, & centurias secundi sub centurijs primi, & millia secundi sub millibus primi, & cæteros numeros simili ratione collocabis similia similibus, velut agmine quodam ordinatissimo à supernis deorsum tendente coaptabis: duasq; parallelas subscribes. Hac methodo omnibus numeris colligendis dispositis, incipies colligere à minimis (parua enim qui despicit, magna non consequetur, atq; ex plurimis insensilibus fit magnum quoddam corpus sensum immutans) eos componendo, aut singulis descendendo aceruatis, aut ascendendo, aut vtroq; modo (quod loco examinis esse poterit) at numeri totius conflati ex digitis (si fuerit compositus aut digitus solùm) digitos scribes inter lineas subscriptas in sede digitorũ: si qui verò fuerint deniones præter digitos, animo retinebis Si verò numerus aceruatus ex digitis, fuerit articulus, collocabis propriam notam articulorum inter lineas, nempe. o. in digitorum sede: deniones verò eius animo seruatos iunges denionibus secundi limitis seu sedis. Omnibus denionibus secundi limitis collectis aut fit numerus digitus, tumq; illemet inter parallelas notabitur sub denionibus: aut fit articulus, & retentis animo denionibus, o, quæ est articuli nota inter parallelas sub denionibus collocabitur: aut fit numerus com

K.	600.
h.	187.
i.	187.
f.	162.
a.	130.
b.	105.
c.	90.
d.	70.
e.	65.
g.	65.
L.	1656.

 positus

positus, & seruatis animo denio̅ibus digitos, notabis inter lineas sub denionum sede, collectos verò deniones iunges tertiæ sedis notis, centuriarum videlicet, persequerisq; eadem methodo, seruādo semper animo deniones collectos ex notarum limitum singulorum additione, donec vētum sit ad postremum limitem sinistrum, ex cuius notarum collectione deniones prouenientes, per suos digitos signabūtur proximè læuorsum inter lineas parallelas, vt in datis numeris. 7.2.2.5.5.5. sunt 26, qui numerus est compositus ex 2 denionibus, & 6 digito, noto proinde 6 inter parallelas sub digitis, & seruo 2 deniones, quos iungo cū denionum notis, nempe cum 8.8.6.3.9.7.6.6. fiuntq; 55, qui numerus est compositus ex 5 denionibus denionum, (qui sunt 5 centuriæ,) & 5 denionibus, qui pro digitis sumūtur. Noto itaq; hos 5 digitos denionum sub acie denionum, & seruo 5 deniones denionum, id est, 5 centurias, quas iungo cum centurijs. 6.1.1.1.1.1. & proueniunt, 16. ex quibus. 6. digitum centuriarum sub centutijs collocabis: vnum verò denionem centuriarum, id est, mille sub quarta sede inter lineas parallelas. Erūt itaq; omnes illi decem numeri aceruati 1656 anni qui sunt ab orbis constitutione vsq; ad diluuium. Quod sic demōstratur: Illi numeri sunt æquales, quando quot sunt vnitates in vno, totidem reperiuntur in alio: sed quot sunt in. a. b. c. d. e. f. g. h. i. K. numeris vnitates, totidē reperitunur in L. nam digiti omnes remanētes ex prima eorum sede, sunt in prima sede ipsius K, & denionum ex eorum prima & secunda sede collectorum digiti omnes sunt in secunda sede ipsius K. & centuriarum ex secunda & tertia sede eorum collectarum digiti omnes sunt in tertia sede ipstus K, & mille collecta ex tertia sede eorū sunt in quarta sede ipsius K. Quare quidquid

Demonstratio.

quid est in.a.b.c.d.e.f.g.h.i.K.reperitur in L,nec aliquid deest,nec abundat. Quare datos numeros in vnum numerum collegimus,quod erat faciendum. In hoc primo problemate explicando omnes demonstrationis partes in gratiam tyronum Mathematicarũ ad amussim exposuimus: quæ sunt propositio,expositio,diuisio,apparatus, demonstratio, conclusio. De quibus fusissimè Proclus in primũ librum Euclidis scripsit,quæ sunt propria Mathematicorum,non autem Peripateticorum. Nam Aristoteles nusquam suis de Demonstratione libris artificium Mathematicarum demonstrationum explicauit.

Conclusio.

Lib. 3, commen. 6.

Examen collectionis propositæ.

Si incœpisti colligere sedẽ digitorum sigillatim descẽdendo,proueneruntq́3.26.rursus collige sigillatim ascendendo: quòd si rursus 26 proueniant, scito digitos rectè esse collectos,alioqui male, qua etiam ratione examinabis alias sedes. Quam inuersam iterationem loco examinis posse accipi dicebam.

Vulgare examen per nouenarium fit, proceditur enim sigillatim iungendo notas numerorum colligendorum, reiectisq́3 omnibus nouenarijs, quod reliquũ est,notatur. Deinde ex ipsa summa,collectis notis reijciuntur nouenarij. Quòd si relicta nota ex summa sit æqualis notæ relictæ ex numeris colligendis,existimatur vera collectio, alioqui falsa. Vt in proposito exemplo, reiectis nouenarijs ex numeris colligendis,relinquitur.o. similiter reiectis nouenarijs ex numero collecto,remanet. o. Quare censetur vera collectio. Hoc examen tres errores admittere potest, nempe si pro 9 ponas o, vel uice versa,vel imprudenter

inici

inijcias nouenarium, vel o. in numerũ collectum, examen erit verum, collectio verò falsa & erronea. Omnia examina præterquàm quod fit per substractionem (de quo sequenti problemate agemus) erroribus sunt obnoxia.

Quid agendum quando res addendæ sunt variorum generum?

Tum considerato num habeant communem aliquam mensuram, vt annus, mensis, dies. Nam 30 dies efficiunt mensem Aegyptiacum. 12 menses annũ. Item libra, quę à nostris per ℔ notatur, solidus ß, denarius δ numus. Nã 12 denarij efficiunt solidũ, 20 solidi librã. Item quintal, id est, talentum, arroua nempe harheuij, id est, quarta pars secundum Arabes & Hebræos. & libra, & vncia habent cõmunem mensuram. Nam apud nos 12 vnciæ libram. 30 libræ arrouam, quatuor arrouæ quintal efficiunt. Similiter apud Astrologos signum, gradus, minutum, secundũ, tertium habet mensuram communem. Nam 60 tertia vnũ secundum, 60 secunda vnum minutum, 60 minuta vnum

30 g. signu gradum, 30 gradus vnum signum physicum efficiunt. aut nullam habent mensuram communem, tum quæ ad idem genus pertinent tradita methodo in prima parte problematis colligentur; reliquæ verò alia collectione in vnum numerum aceruabuntur. Similibus semper similia coaptando.

Si verò sint numeri diuersorũ generum, habẽtes mensuram communem, tum potentia crassiores primum locũ tenebunt in sinistra parte, reliqui qui erunt mox post eos tenuiores, proximè versus dexteram disponentur, atque seruato hoc ordine tenuissimi omnium primum locum

in dextra

in dextra occupabunt, vt sint colligendæ tercentum sexaginta quatuor libræ, quindecim solidi, octo denarij. & quingentæ septuagintæ duæ libræ, decem & octo solidi, vndecim denarij: & nongentæ quadraginta libræ quindecim solidi, decem denarij. Exprimes datos numeros, vt vides in schemate. Edoctus primum, inter denarios nõ posse collocari numerum 12, aut eo maiorem, quia iam colligeretur ex 12 denarijs vnus solidus inter solidos collocandus. Similiter inter solidos non posse 20, aut plures solidos notari. Fieret enim ex illis vna libra inter libras collocanda. Secundò, ex denarijs excerptis solidis, & in sede solidorum notatis, remanentes denarios notandos sub denarijs, & ex solidis colligendas libras, notandasq; supra primam sedem librarum: solidos verò relictos sub solidis inter lineas fore scribendos. His notatis, hanc collectionem sic absolues. 8 denarij cum 11, & 10 simul iuncti faciunt 29 denarios, ex quibus colligo 2 solidos, & 5 denarios: quos noto sub denarijs in sede digitorum. Solidos verò duos supra 15 solidos. Deinde iungo digitos solidorum nempe 2. 5. 8. 5 solidos fiuntq; 20 solidi, quoniã verò libram efficiunt 20 solidi qui numerus in o desinit, noto sub 5 ipsam o, & duos deniones solidorum iungo cũ. 1. 1. 1 colligoq; 5 deniones solidorum, quorum bini efficiunt librã, quare noto duas libras supra quatuor proxime post notam ℔. & 1 denionem qui remanet ex quinq;, noto sub denionibus solidorum. deinde reliquos numeros librarũ quia sunt eiusdẽ generis, colligo prorsus, vt in prima parte problematis dictũ est: quare illæ tres series numerorũ diuersorum generum eandem tamen mensuram haben-

$36\overset{2}{4}$	℔	$1\overset{2}{5}$	ß	8	₰
572	℔	18	ß	11	₰
940	℔	15	ß	10	₰
1876	℔	10	ß	5	₰

tium collectæ efficiunt 1878 ℔ 10 ß 5 ₰.

Nouenarij examen solum habet locum in numeris rerum eiusdem generis, qui naturalem ordinem sedium seruant, id est, quando sedes decupla ratione augentur. quare in solidis ac denarijs nullo modo exiges examen per nouenarios, sed in libris: quandoquidem sedes librarum decupla ratione augentur.

Prorsus eadem methodo fient mathematicæ atq; astronomicæ additiones. Sed priusquam ad eas expediendas accedamus paucis opere prætium erit secandorum corporũ, & magnitudinum mathematicis atq; astronomis consuetum morem explicare. vt Romani assem. in 12 vncias, sic mathematici corpus omne & lineam in 60 partes quæ ἑξηκοσαὶ sexagesimæ dicuntur: circulum verò in 360 partes diuidunt: circuli partes gradus aut partes simpliciter appellãtur. Quisq; gradus similiter quæq; sexagesima in 60 minuta, aut minutias seu scrupulos secatur, quæ λεπτὰ πρῶτα minuta prima dicuntur, & per .m̃. supra scriptum notantur, quodq; minutum in 60 secunda diuiditur, notanturq; per .2̃. vnum quodq; secundũ in 60 tertia, notanturq; per .3̈. atq; sic sexagecupla ratione vsq; ad decima sectio continuatur. Si sexaginta sexagesimas aut gradus colligas habes vnum signum physicum, seu vnum primum maius quod Græci ἑξηκοντάδα sexagenam appellãt at 60 signa physica vnum secundũ maius: 60 secũda maiora vnum tertium maius &c.

Collecturus itaq; astronomicas fractiones collocabis singulas fractiones eiusdem generis in eadem sede sub titulo eius generis, vt signa sub signis, gradus sub gradibus, minuta sub minutis &c. Notabis prætereà in limitibus numerorũ qui digiti dicũtur, vt in reliquis vulgaribus

suppu-

ſupputationibus, colligendos eſſe deniones, reliquos verò digitos qui ſupererunt notandos directè ſub digitis inter parallelas, ſeruatos verò deniones iungendos proximis limitibus denionũ, factaq; collectione eorum pro ſingulis ſex denionibus eſſe accipiẽdam vnam vnitatem, fractioni proxime verſus ſiniſtram ſequenti addendam, nam ſexaginta vnitates, cuiuſcunq; fractionis efficiunt vnum, quod eſt velut integrum ratione partium in quas ſecatur, vt 60 ȝ valent 1.2̄, 60 2̄. 1 m̄, 60. m̄. 1. g̃, 60. g̃. 1. ſignũ, &c. At ſex deniones ſunt 60. quare pro 6 denionibus accipietur vnũ, transferendumq; ad ſedem digitorum proximè verſus ſiniſtram ſequentium.

Exemplum.

Secundum.	ſig.	g̃	m̄	2̄	ȝ̄
	20.	30.	56.	43.	22.
	12.	48.	37.	50.	48.
	36.	54.	28.	36.	57.
1.	10.	14.	3.	11.	7.

Sub titulo. ȝ. collecti digiti faciunt 17. noto. 7. inter parallelas ſub digitis, & ſeruo. 1. denionẽ, quem iungo proximè ſequentibus denionibus & colligo 12. deniones, id eſt, bis. 60. quæ efficiunt. 2. ȝ. nam 60 ȝ. faciunt. 1. 2̄. addo itaq; duo digitis ſecundorum, & colligo 11. pono igitur. 1 inter parallelas ſub digitis, & ſeruo 1 denionem, quem addo proximè ſequentibus denionibus ſecundorum, & colligo 13. deniones, nempe bis. 60. quæ ſunt 2 m̄. & 1 denionem locandum ſub denionibus. 2̄. duo verò minuta, quæ collegi addo digitis. m̄. & fiunt 23 m̄: pono itaq; 3 ſub. 8. & duos deniones addo denionibus minutorum, & colligo 12. deniones m̄. id eſt, 2 g̃. nihilq; relinquitur notandũ inter

ter parallelas ſub 2. Deinde duos gradus collectos addo digitis graduum, & fiunt 14, noto itaq; inter parallelas 4 ſub 4, & denionem collectum addo denionibus g̃. & fiunt 13. deniones g̃, id eſt, 2. ſigna, notoq; 1 denionem g̃ remanentem inter parallelas ſub 5. iungoq; 2 ſigna collecta digitis ſignorum, fiuntq; 10. ſcribo. o. inter parallelas ſub 6 & denionem. 1. ſignorum iungo denionibus ſequentibus, & colligo 7 deniones ſignorum, nempe 1 ſecũdum maius, & 1. denionem ſignorum, quem noto inter parallelas ſub 3. at 1 ſecundum maius noto inter parallelas proximè ver ſus ſiniſtram, ſub titulo ſecundoſ̃. Itaq; tres propoſiti numeri efficiunt. 1. ſecundum maius. 10. ſigna. 14. grad. 3. m̃ 11. 2̃. 7. 3̃.

PROBLEMA SECVNDVM.

A dato numero numerum quemuis minorem ſubtrahere.

ἀφαίρεσις, quæ ſubtractio à Latinis dicitur, eſt collatio minoris numeri cum maiore conſiderata differentia, qua minor à maiore ſuperatur, quæ ſubtractione minoris à maiore inuenitur. Itaq; quemadmodum in quantitate continua, dum quæritur quantitatum differentia, verbi gratia, vnius lineę ab alia, vna alteri admota partiliter quoad vnũ vtriuſq; latus coaptatur, quæ ſi æquales ſunt, prorſus per omnia latera ſibi mutuò reſpondentes nulla alteram excedit. Si verò coaptatis ipſis ex vno vtriuſq; latere, reliquã latera partiliter non cohæreant, ſed vnum alteri promineat, illud exceſſus dicitur, ſeu earum differentia, ſic in numerorum ſubtractione faciendum eſt. Maiori enim numero ſuperiore

periore ſemper loco conſtituto, minor coaptabitur. Eſt autem minor numerus ille, cuius nota omnium vltima ad ſiniſtram eſt maior, aut ſi illæ fuerint æquales: ille cuius notæ propinquiores poſtremæ ſiniſtræ ſunt maiores.

Si proponantur numeri per ſe conſiderati, aut rerum eiuſdem generis.

Tum ſubtrahendus numerus maiori admouebitur, ſic vt digiti vnius ſub digitis alterius, & deniones vnius ſub denionibus alterius, & ſedes vnius numeri ſub ſimilibus ſedibus alterius coaptentur. Deinde ſubſcribes illis tres parallelas, vt inter duas ſuperiores differentia numerorũ, inter duas inferiores examen ſubtractionis ſcribatur.

Sit ab a numero ſeptẽ millium octingentorum & trium ſubtrahendus b numerus trium millium ſeptingentorũ viginti quinq; . Notetur numerus maior in ſuperiore loco characteribus vulgaribus, cui ſeruata ſedium ratione ſubcribatur minor, qui & ſubtrahendus dicitur, vt vides, ſub notatis tribus lineis parallelis.

a.	7	8	0	3
b.	3	7	2	5
c.	4	0	7	8
d.	7	8	0	3

Deinde auſpicare à digitis, ſubtrahens 5. à. 3. quod cùm fieri nequeat, nam à minore numero maior ſubtrahi non poteſt: quare adde ipſi 3, vnũ denionem, fiẽtq; 13. à quibus ſubtrahe 5. & remanent 8. quæ notabis inter ſuperiores parallelas ſub digitis. (poteſt aliter ſuppleri ſeu addi ille denio ſic, a. 3. nõ poſſunt demi 5. at à 5. vſq; ad denionem ſunt 5, quæ addita numero ſuperiori efficiunt. 8. notanda ſub digitis inter ſuperiores parallelas. Hæc ratio prorſus eadem eſt cum ſuperiore, ſed differt hoc solo, quòd primum subtrahitur 5 à decem, & deinde additur numerus superior differentiæ, quæ est inter 5, & 10. Hæc methodus est expeditior: prior tamen est euidentior. Postquam numero maiori addidisti denionem, illum restitues numero subtrahendo: sed tantummodo addita vnitate ipsis. 2. nam cùm. 2. sint in sede denionum, si illis addatur vnitas, fient tres deniones. Tantundemq; additum erit maiori, quantũ minori. Rursus subtrahe hos tres deniones à 0. quod cùm nequeat fieri, addatur iterum denio numero maiori, à quo subtrahantur 3. deniones, & remanebunt 7, notanda inter parallelas superiores sub duobus in sede denionum. Deinde restituo illum denionem, quem addidi sedi denionum, id est, vnam centuriam numero minori, nempe ipsi 7°. fiuntq; 8. centuriæ: quibus subtractis ab. 8. nihil relinquitur. Quare inter superiores parallelas sub. 7. noto. 0. deinde subtraho à 7. ipsa. 3 & relinquũtur 4. notanda inter parallelas superiores in quarta sedę, & iã absoluta subtractione remanet numerus. c. quatuor milliũ septuaginta octo, qui est differentia inter datos numeros. Quòd autem hæc differentia necessariò debeat remanere, demonstratur sic: tantum additum est numero. a. quãtum numero. b. nam numero. a. quoad sedes digitorum, & denionum addidi duos deniones: vnus qui sedi digitorum adiectus est, tantùm repræsentat decem: alter, qui sedi denionum additus est, denio est denionum, id est, decies decem, nempe 100. Quare adieci numero maiori 110. Numero verò minori totidẽ adieci. Nam notæ 7, quæ est centuriarũ addidi vnitatem, quæ 100. in ea sede repræsentat, notæ. 2. quæ est denionum, addidi vnitatẽ, quæ 10. in ea sede significat, quare totidem 110 addidi numero maiori. Sed ab. a. numero 7823, additis 110. subtracto. b. numero 3725. additis

Demonstratio.

ditis 110. remanet differentia. c. 4078. vt operatione ipsa patuit. Quare si ab. a. numero 7803 subtrahas. b. 3725. remanebit differẽtia. c. 4078. Nam per communem animi conceptionem, si inæqualibus numeris addideris æquales, remanebunt inæquales: sed sub eadem differentia. quare eadem est differẽtia numerorum. a. & b. siue adieceris vtriq; 110, siue non. Hoc autem confirmatur examine. Differentia duorum numerorum inæqualium addita minori, æquat numerum maiorem: sed si addas. b. numero minori differẽtiã c, id est, colligas 3725 cum 4078, inuenies. d. numerũ 7803 æqualem. a. 7803. Quare à dato numero maiore rectè subtraxi minorem, quod erat faciendum. Examen.

De examine.

Hoc examen vsui esse poterit additionibus, quod à vulgaribus regium dicitur, quòd nullis sit lapsibus obnoxiũ. Ommittitur enim ex numeris colligendis superior numerus, facta principali collectione, quæ est omnium numerorum: deinde colliguntur reliqui numeri præter illum superiorem, numerus verò ex hac secunda additione conflatus subtrahitur ex principali summa: harum verò duarũ summarum differentia debet superiori numero relicto æquari, alioqui error accidit in collectionum aliqua.

Exemplum examinis regii in additionibus.

		3	5	7	6.
		5	8	9	3.
		4	0	8	2.
Summa principalis	1	3	5	5	1.
Summa secunda, quæ demitur à principali		9	9	7	5.
Differentia.		3	5	7	6.

Colligo tres numeros datos in vnũ numerũ 13551.

Volo

Volo examinare num sint bene collecti, ommisso supremo numero colligo duos inferiores, qui vidētur efficere 9975. quos demo à priore summa, videlicet a 13551. & supersunt. 3576. qui numerus est æqualis supremo numero ommisso, ex quo constat vtranq; collectionē esse accuratā.

Si verò numeri sint rerum diuersorum generum, communem mensuram habentium,

Tum constituto maiore numero in suprema regione, rerū crassiorū numeris ad sinistram, tenuiorū verò ad dextram notatis, seruato earum ordine, ei subscribes minoris numeri rerum genera sub superioris similibus generibus, nempe digitos vnius generis inferioris numeri sub digitis superioris congeneribus, &c. Incipiesq; subtractionem à minimis, & quando nota vna ab altera subtrahi nō poterit mutuatū vnum integrū proximè crassioris generis addes tenuioris generis numero, à quo poterit fieri subtractio, & ab aggesto numero subtrahes inferiorē, &c.

Exemplum.

a numero	34.℔.15.ß. 6.₰
demo	26.℔.17.ß. 8.₰
differētia	7.℔.17.ß.10.₰
examen	34.℔.15.ß. 6.₰

A 34.℔.15.ß.6.₰. subtraho.26.℔.17.ß.8.₰. digero hos numeros, vt vides subscriptis tribus parallelis, dico a.6, non possunt subtrahi 8 addo proinde ipsis 6.1 solid. fiuntq; 18.₰ à quibus subtractis 8. remanent 10 denarij collocandi inter superiores parallelas sub denarijs (vel quod idem est a.6. non possunt demi. 8. sed 8 possunt demi ab vno solido, id est, à 12 denarijs, & remanēt 4. qui iuncti cum 6 effi-

ciunt

ciunt. 10. vt prius) quia verò addidi vnum solidum numero superiori, eũ restituo numero inferiori, & colligo 18. ₰ quos non possum à 15. ₰ demere, quare eos demo ab vna libra, id est, à 20. ₰ & remanet 2. qui iuncti numero superiori efficiunt 17. ₰ notandos inter supremas parallelas sub solidis, quia verò addidi superiori numero 1. ß. eã restituo numero inferiori, & ex 26. efficio 27. ß quarũ 7. non possunt demi ex 4. superioribus, demãtur proinde ex 10. & remanẽt 3. quibus iungãtur 4. supremæ libræ & remanent 7. notãdæ sub 6. inter superiores parallelas, & restituo 1. denionem, quẽ addidi ipsis 2. fiuntq́ 3. quæ si demantur ex 3. superioribus nihil superest. Differentia itaq; datorum numerorum est 7. ß. 17. ₰. 10. ℔. quæ si addatur 26. ß. 17. ₰. 8. ℔. efficiẽt 34. ß. 15. ₰. 6. ℔.

Eodem modo fit substractio Astrologicis supputationibus,

Sint à 6. sig. 28. g̅. 32. m̅. 15. 2̅. 18. 3̅. subtrahenda 3. 40. 28. 37. 26.

Dispones hos numeros sic.

signum.	grad.	m̅.	2̅.	3̅.
6	28	32	15	18.
3	40	28	37	26.
2	48	3	37	52.
6	28	32	15	18.

Incipio à minimis, scilicet à tertijs, atque ab 8. demo 6. & supersunt 2. 3̅. notanda sub 6. 3̅. inter superiores parallelas, deinde subtraho 2. ab 1. quod non possum facere. Quare addo ipsi 1. sex deniones tertiorum, qui efficiunt vnum ī. & à 7. subtraho 2. & remanēt 5. notanda inter superiores parallelas sub 2. (vel sic 2. nō possum demere ab 1. demam proinde à 6. denionibus mutuatis qui sunt vnū 7. & relinquūtur 4. quibus addo superiorem numerum 1. & fiunt 5. quod idem est) deinde addo 1. 2. mutuatū ipsis 7. & fiunt 8. quos cum nequeam demere ex 5. demam ex 10. & remanebunt 2. addenda ipsis 5. fientq; 7. notāda sub 7. inter superiores parallelas: & restituo denionē inferiori numero, & fiunt 4. deniones, quos demo à 6. mutuatis denionibus, & manent 2. quibus addendus est numerus superior, & fiunt 3. notanda sub alijs 3. & restituo vnum m̄. sequenti 8. & fiunt 9. demenda à 10. & manet 1. addendū superiori numero, & fient 3. notanda sub 8. restituo mox vnum denionem, & ex 2. sequentibus efficio 3. quæ demo à superioribus 3. & nihil remanet, quare nihil est notandū inter parallelas superiores sub 2. Deinde ab 8. demo. 0. & remanent 8. notanda sub. 0. deniones verò 4. proximè sequentes subtraho à 6. mutuò acceptis, postquam à 2. non possunt demi, & remanēt 2. qui sunt addendi superiori numero, scilicet 2. & fiunt 4. notanda sub 4. inter superiores lineas parallelas, deinde restituo 6. deniones, grad. mutuò acceptos, id est, 1. signum ipsis 3. & fiūt 4. quibus demptis à 6. supersunt 2. signa sub 3. notanda. Peractā subtractionem collectio differentiæ & numeri subtrahendi veram esse ostendit.

Annotatio. In Astronomicis subtractionibus, si præcipiatur numerus maior à minori subtrahi (quando hoc manifestum est fieri non posse) addetur minori vnum integrum, nempe totus circulus, id est, 6. signa physica, & à toto numero cōflato, fiet subtractio.

Pro-

PROBLEMA 3.

Datum numerum per alium quemuis multiplicare.

Multiplicatio à Grecis πολλαπλασιασμός dicitur. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt ęquales vnitates in ipso, toties cōponitur multiplicandus, & fit aliquis numerus. Quare tres numeri, considerabuntur, quorum primus dicitur multiplicandus, ab Euclide verò multiplicatus, secundus multiplicans, tertius, qui fit ex multiplicatione duorum priorum, qui & productus & procreatus dicitur. Habet se igitur multiplicādus ad productum ex multiplicatione, vt vnitas se habet ad multiplicantem, & permutatim, vt multiplicandus se habet ad vnitatem: ita productus ex multiplicatione ad multiplicantem, vt si ducas 4. per 3. fient 12. quatuor est numerus multiplicandus 3. multiplicans, 12. est productus ex multiplicatione: dico, quam rationem habēt 4. ad 12. eandem habere 1. ad 3. & permutatim, quam habet 4. ad 1. eandem habere 12. ad 3. multiplicās solet per aduerbia efferri, multiplicandus & productus ex multiplicatione per nomina, vt ter, quatuor, sunt duodecim, ter est multiplicās, quatuor multiplicandus, duodecim productus ex multiplicatione.

Primum multiplicaturus, scire debes digitos omnes inter sese ducere, hoc est, quem numerum quisq; per alterum ductus efficiat. Quod scies facillimè, si mēte tenueris quadratos omnes, eorumq; radices vsq; ad 100. deinde addendo aut detrahendo interiacentes digitos, inuenies sine calami ope quod desideras.

Exemplum.

Volo ſcire octies nouem, quot efficiãt. Hoc omnino idẽ ſignificat, ac ſi dicas, octo nouenarij, vel octonarij nouem, habes in hac tabella, nouies nouem, ſeu nouem nouenarios efficere numerum quadratum 81, à quibus deme vnum nouenarium, & remanent 72. tot itaq; ſunt octies nouẽ. Quòd ſi inuertas nouies octo, id eſt, nouem octonarij, dices animo ſic, octo octonarij, ſunt 64.

Radi.	nume.quadr.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

quibus adde vnum octonarium & fient 72. quòd ſi recto ordine prolatis, non inuenias quot efficiant, inuertes & tũ fortaſsis commodius inuenies, vt ſi proponatur octies ſeptem, quot ſunt? inuertes ſepties octo, quot ſunt? nam vtroq; modo prolati, idẽ efficiunt, nempe 56. vel ſic facies. Si quæratur, quot efficiãt ſepties octo, ſcribe 7. & 8. in eadem ſede vnum ſupra alterum, deinde dic à 7. vſque ad 10. ſunt 3. notabis itaque 3. ad latus dextrum ipſorum

7	X	3
8		2
5		6

7. deinde dices ab 8. vſque ad 10. ſunt 2. quæ notabũtur ad latus dextrum ipſorum 8. ad hæc ducta decuſſe, vt vides. Dices ter duo ſunt 6. quæ notabuntur ſub 2. inter lineas parallelas, deinde ſubtrahes aut 3. ab 8. aut. 2. à 7. & remanebunt 5. notanda ſub 8. quare inuenies ſepties octo efficere 56. Deinde ſciẽdum multiplicatione fieri numeros multiplices planos, & Arithmeticè cõpoſitos, & numerũ multiplicãdũ & multiplicãtẽ eſſe latera numeri producti, qui ante dicebat multiplex, planus, & Arithmeticè cõpoſitus.

Mul

Multiplicaturus efficies multiplicandum eum, qui fuerit maior, quem in ſuprema regione collocabis. Ego verò breuitatis cauſa, ſolitus ſum eum facere multiplicantem, qui in prioribus limitibus dextris circulos ſeu ciphras habeat, flocci faciens, num ſit maior, an minor. Scripto numero multiplicādo per ſuos limites, multiplicātis digitos pones ſub digitis multiplicandi, & deniones vnius ſub denionibus alterius & reliquas notas in proprijs ſedibus. Annotatio

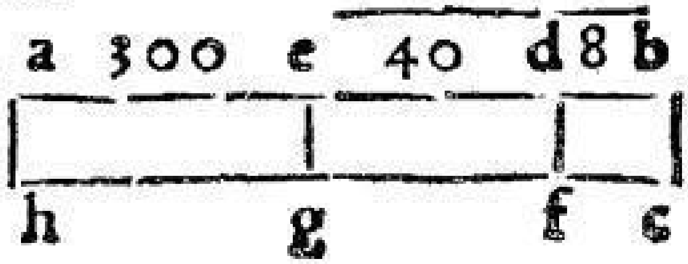
Aut igitur multiplicas aliquem numerum per digitum, aut per articulum, aut per numerum compoſitum. Diuiſio.

Quando fit multiplicatio digitis, quid eſt agendum?

	348
	6
	2088

SInt multiplicandi 348, per 6, qui numerus eſt digitus, collocabis 348, in ſuperiori regione & 6, ſub 8, in ſede digitorum, & ſub ſcribes virgulam, cùm itaq; idem ſit dicere ſexies tercentum quadraginta octo, ac hæc omnia ſimul, nempe ſexies tercētum, & ſexies quadraginta, & ſexies octo, duces primū ſex per 8, & fiēt 48, qui numerus eſt compoſitus ex 4, denionibus, & 8, digitis notandis ſub 6, & animo retinebis 4, deniones: deinde duc ſex per 4, & ſunt 24, quibus addes 4, alios deniones animo retentos & fiunt 28, ex quibus 8, notabis ſub 4, & retinebis animo 2. deniones denionum, id eſt, duas centurias, deinde duces 6, per 3, & fiēt 18, quibus addes 2. centurias animo retentas, & colliges 20, qui numerus deſinit in ciphram. noto itaque, 0, ſub 3, & duos deniones centuriarum, id eſt, 2, chiliadas ſcribo in ſequēti sede læuorsum. Quare si ducas 6, in 348, proueniet 2088, nam si ducas sex in 8, sunt 48, si ducas 6, in 4, deniones seu in 40, sunt 24, deniones, id est, 240, si ducas 6, in 3, centurias, sunt 18, centuriæ, id est, 1800, qui numeri collecti efficiunt 2088, æqualem priori, quod sic demõstratur sit, a b linea 348, diuisa in tres partes, scilicet in b d, quæ cõtineat tales 8, partes

48
240
1800
2088



quales a b, 348, & in d e, quæ cõtineat 40, partes, & in e a, quæ contineat 300, partes, sit b c, linea non diuisa 6, qualium tota a b est 348, dico quod sit rectangulum ex tota a b in b c, nẽpe a b c h, æquale est tribus rectangulis factis ex linea b c, in partes tres lineæ totius a b, quæ sunt b d. d e. e a, nempe rectangulis b d f c. d e g f. e a h g, vt patet ex ipsa figura, quemadmodum habet 1, proposito 2, libri elementorum. Nam si fuerint duæ lineæ, quarum vna in quotlibet partes diuidatur, illud quod ex ductu alterius in alteram fit, æquum erit, ijs quæ ex ductu lineæ indiuisæ in vnamquamq; partem lineæ particulatim diuisæ rectangula producentur.

olarium Ex hac demonstratione datis quibuscunq; characteribus numerorum, cuiusuis linguæ, haud erit difficile multiplicationes, quasuis absoluere.

Quando fit multiplicatio articulis, quid est agendum?

OMnino eadem est ratio, sed in gratiam tyronum sint multiplicanda 36, per 10, dispone vt vides datos nu-

meros

meros, duc primum 0, per 6, & producitur, 0. & rursus duco, per 3, & producitur 0, deinde duc 1. in 6. & producũtur 6, notãda in sede denionũ, nam denio ductus per digitos procreat deniones tot, quot fuerint ipsi digiti, quare 1, denio ductus in 6, digitos, procreat 6, deniones. Ideo 6, notanda sunt in sede denionum, deinde duc 1, in 3, & fiunt 3, eadem ratione notanda in sede centuriarũ. Collecti numeri efficiunt 360.

3	6	
1	0	
	0	0
3	6	0

Rationes conscindendi has multiplicationes, quæ fiunt per articulos.

SI numerum aliquem duxeris per 10, addes illi. 0. eritq́; peracta multiplicatio, vt decies 36, adde. 0. & fiet 360. Si numerum aliquem duxeris per 100, addes illi duas 00, eritq́; facta multiplicatio. Vt centies 36, fiunt 3600, similiterq́; quotiescunque duxeris aliquem numerum per articulos, à quibus denominantur limites, additis tot ciphris ad dextram numeri multiplicandi, quot habet articulus à quo fit limitum denominatio, erit peracta multiplicatio.

Si duxeris numerum desinentem in ciphras per alium desinentum in ciphras, multiplica notas significatrices datorum numerorum inter se, & producto numero adde tot ciphras, quot terminãt multiplicandũ & multiplicantem, eritq́; pacta multiplicatio, vt si ducas 300, per 300, duc 3, in 3, & fiũt 9, cui addes quatuor ciphras sic, 90000, quare si multiplices 300 per 300, fiũt 90000. Si numerus multiplicans solùm desinat in ciphram, multiplicabis per notas

tas significatrices relictis illis, quæ sunt in fine eius dextrorsum, vt si ducas 86, per 300, ducito 3. per 86, fiuntq; 258, quibus adde ciphras multiplicãtis, id est, duas, eruntq; 25800.

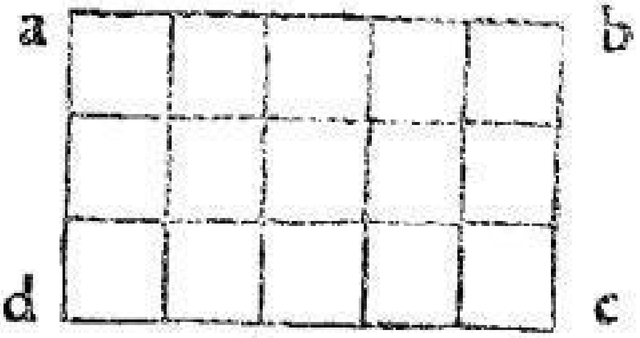
Ex prima propositione 2. lib. elementorũ multũ iuuatur animus ad multiplicandũ sine calamo. Nã si nõ potes his regulis animo numerum totũ multiplicare per alium, diuide in partes vel multiplicandũ, vel multiplicantẽ: vt videbitur magis expedire: erit autẽ cõmodius, si resoluatur in articulos, & factis singularũ partiũ multiplicationibus colliges earum summas, habebisq; summam totius multiplicationis. Sunt animo multiplicandi 28, per 35. Commodius resolues 35, in tres deniones & dimidium, dices itaq; decies 28, sunt 280, qui numerus ter accipiatur & eius dimidium, & sunt 980. Poterat hæc multiplicatio fieri sic, duc 35, in 30, & per præcedẽtes abbreuiationes sunt 1050. à quibus deme bis triginta quinq; id est, 70, (quia hoc additum est ob commoditatẽ multiplicationis) & remanent 980. Solers autem lector iuxta præcedẽtes regulas meditatione iugi compendia multa inueniet.

Quando fit multiplicatio per numeros compositos, quid est agendum?

[H]æc propo[sit]io [p]ẽdet [e]x 1. secun[d]i lib. Euc.

Eadẽ est methodus, quæ propositioni huic nititur, scilicet. Si vna linea in alterã ducatur, & vtraq; in quotlibet partes quomodolibet secetur, quod fit ex totis lineis rectangulũ, æquale est tot rectangulis, quot fiẽt ex numero partium vnius lineæ ducto in numerum partium alterius. Vt sit.

sit a b. linea quæ ducatur in lineam b c. faciet rectangulum a b c d. diuidaturq; a b. in 5. partes & b c. in 3. fient itaq; ducto numero partiū lineæ a b. in numerum partium lineæ b c. nempe 5. in 3. 15. rectangula, quæ simul sumpta sunt æqualia toti rectangulo a b c d. vt patet ex ipso schemate. In eo enim sunt 15. rectangula facta ex ductu partium lineæ a b. vel æqualiū linearum, in partes lineæ b c. vel in lineas æquales eius partibus per 34. primi. Sic quando multiplicatur aliquis numerus per numerū cōpositū, collocatis digitis vnius, sub digitis alterius, & denionibus vnius, sub denionibus alterius, & cæteris notis simili ratione, duces digitum multiplicantis per omnes notas multiplicādi, primamq́; notam ex ductu digiti multiplicantis in digitum multiplicandi collocabis sub digitis, reliquas verò seruato ordine versus sinistram, vt dictū est. Deinde duces deniones numeri multiplicātis per omnes notas numeri multiplicandi, & primam notam prouenientem ex denione multiplicantis in digitum multiplicandi scribes sub denionibus (quia denio ductus per digitos procreat semper deniones) reliquas verò suo ordine versus sinistram notabis. Deinde centuriam multiplicantis duces per omnes notas multiplicandi, primamq́; notam productam ex ductu centuriæ in digitos multiplicantis, notabis sub centurijs (quia centuria ducta per digitos procreat centurias) reliquas notas ex aliarum notarum ductu per centuriam multiplicatis, seruato limitū ordine, versus sinistram notabis, &c.



Exemplum.

Sint ducenda —— 305
per —— 404

duco 4. per 5. fiunt 20. ſcribo o. ſub 4. in ſede digitorum, & ſeruo duos deniones. Deinde duco 4. per o. & nihil prouenit, ſcribo itaq; 2. deniones ſeruatos ſub o. Deinde duco 4. in 3. & fiunt 12.	1220 1220 123220

quæ noto ſic, vt 2. collocentur ſub 4. At 1. in proximè ſequenti limite ſiniſtrorſum. Adhæc duco notam o. per omnes notas numeri multiplicandi, quæ quum nihil procreet, nec ſit in prima ſede, prorſus omittitur, nec opus eſt ciphram aliquã ſcribere. Præterea duco 4. nempe tertiam notã multiplicatis, quæ eſt centuria per 5. digitos, & proueniunt 20. centuriæ, quare ſcribo o. ſub cẽturijs, & ſeruo 2. deniones centuriarum, id eſt, 2. millia. Deinde duco 4. per o. & nihil prouenit, quare addo 2. millia quæ ſeruaui in ſede millium, deinde duco 4. per 3. fiuntq; 12. notanda in proprijs limitibus. Deinde adhibeo duas lineas parallelas, & colligo numeros inter lineas ſuperiores, & inuenio ex ductu 305. in 404. prouenire 123220.

Examen per nouenarium.

Deme nouenarios ex notis numeri multiplicandi, quumq; nullus exiſtat aut conflari poſsit, pone 8. ſupra decuſſem. Rurſus deme ex notis multiplicantis numeri nouenarios, quumq; nullus ſit, in ima decuſſe notabis 8. duc 8. per 8. fiuntq; 64. cuius nouenarios ſi reijcias, reliqua erit 1. notanda in dextro lat-

8
1 —|— 1
8

pro latere decussis. Quòd si ex numero producto ex ipsa multiplicatione, remaneat etiam 1. eiectis nouenarijs, vt remanet, multiplicatio est rectè peracta, & 1. ponetur in latere decussis sinistro. Hoc examē totidem modis fallere potest, quot examen per nouenarium in additionibus. Vera ratio examinandi multiplicationes, per diuisionem fieri debet, scilicet, ut diuisa summa multiplicationis per multiplicantem, prodeat numerus multiplicatus, qui & multiplicandus, aut diuisa per multiplicandū, prodeat numerus multiplicans.

Quid agendum quando res diuersorum generum proponuntur multiplicandæ?

Si habeant mensuram communem, resoluantur ad minimum genus, & tum fiet multiplicatio, vt dictū est in hoc tertio problemate: vt si quis comparauit 42. tritici mensuras, singulas 3 ℓ. 8 ß. 6 denarijs, conuertat 3 ℓ. in 60 ß. quibus addet 8 ß. eruntq; 68 ß. quos ducet per 12. fientq; 816. denarij, quibus addet 6 ₰. eritq; totus numerus pretij singularum mensurarum 822 ₰. per quem multiplicabit 42. mēsuras, eruntq; 34524 ₰. quæ efficiunt 143 ℓ. 17 ß. pretium, scilicet 42. mensurarū tritici. Idem aliter tribus multiplicationibus. Ducat 42. per 6. denarios, & fient 252 ₰. id est, 1 ℓ. 1 ß. Ducat 42. per 8 ß. & fient 336 ß. id est, 16 ℓ. 16 ß. Ducat 42. per 3 ℓ. fiuntq; 126 ℓ. colligat modò 1 ℓ. 1 ß. 16 ℓ. 16 ß. 126 ℓ. eruntq; 143 ℓ. 17 ß. Idem aliter fieri docebitur, quando de multiplicatione fractionum agemus. Si Astronomicæ fractiones tam multiplicādi, quàm multiplicantis numeri ad minima genera resoluantur, possent hoc modo multiplicari, si de nomenclatura prouenientis fractionis cōstaret, sed quia hæc denominationum ratio pendet ex multiplicatione fractionum, proinde ad propria loca eas relegamus. Quādo res multiplicandę diuersorũ generum mensura carēt communi, tum tot multiplicationibus sunt supputandæ, quot habent genera. Quòd si aliqua fractio multiplicando, aut multiplicanti adhæreat, quando de fractionum multiplicatione agemus, latissimè quid sit agendum explicabitur.

PROBLEMA 4.

Datum numerum quouis alio minore diuidere.

Μερισμός, aut παραβολὴ diuisio à Latinis dicitur. Quēadmodum compositionem Physicam, quam additionem vocabamus, excepit mox problema subtractionum, quæ ad Physicam resolutionem spectabant: ita post compositionem Arithmeticam, quæ ductu multiplicandi in multiplicantem fit, diuisionis problema (quæ resolutio numeri in suas partes Arithmeticas existit) confestim est tradendum. Et quum corpus aliquod ab anatomicis secatur, in membra maiora primum, vt caput, crura, brachia secatur, deinde hæc membra in partes alias minores, rursus illæ in similares demum diuiduntur: sic numerus Arithmeticæ secandus, primum in partes maiores, deinde in alias aliquantulo minores, demũ in minimas, id est, digitos diuidi debet.

debet. Mutuò autem multiplicatio, & diuisio sibimet respondent. Numerus is qui ex multiplicandi per multiplicantem ductu fit, vices gerit numeri mensurandi ac diuidendi: multiplicandus respondet diuisori, multiplicans verò parti numerali seu metienti, quæ diuisione exquiritur (quam vulgares quotum & quotiẽtem numerum appellant) aut vice versa. Nã multiplicandus & multiplicans sunt numeri metientes numerum diuidendum: quare si diuidas productũ ex multiplicatione per multiplicandũ, proueniet multiplicans: Si verò diuidas eum per multiplicantem, proueniet multiplicandus, vt quotus, seu pars. Quare sicut se habet diuisor ad vnitatem, ita diuidendus ad suam partem: vt si diuidas 12. per 4. prouenient 3, quã itaq; rationem habet 4. ad 1. eandem habent 12. ad 3. Est autem diuisio compendium abstractionis. Nam diuidere 12. per 4. est expendere quoties possint à 12. auferri 4.

Annotatio. Si velis diuidere integra per alia integra æqualia, semper numerus diuidendus debet esse maior, aut æqualis numero diuisori, alioqui nullo modo secari poterit, quod mẽsurari ab Euclide dicitur. Verùm longè aliud est cùm franguntur integra: nam tum non solùm maior à minore, sed & minor à maiore, vt duæ perticæ possunt diuidi à sex digitis, & duæ quintæ à tribus quartis. Tum enim quæritur ratio, quam habet numerus maior, nempe diuisor, ad minorem diuidendum, de quo suo loco dicetur.

Diuisio. Aut igitur diuiditur numerus maior per digitum, aut per articulum, aut per numerum compositum.

Diuisio per digitos.

Omnis numerus qui diuiditur per vnitatem, seipsum relinquit, vt si diuidas 6. per 1. proueniunt 6. Nã quicunq; numerus ducitur per vnitatem, seipsum producit.

Quicunq; numerus diuiditur per 2. bifariam, id eſt, in duas æquas partes ſecatur, quæ medietates, ſeu ſemiſſes di cuntur. Vnde fit vt medietas $\frac{1}{2}$ denominetur à binario.

Quicunq; numerus diuiditur per 3. in trientes, ſeu ter tias partes ſecatur, vnde triens $\frac{1}{3}$ ſic notatur. Similiter di cendum de diuiſione per alios digitos.

Sint diuidenda 3 2 8 per 2. diſpone, vt vides ſubſcriptis duabus parallelis. Diuiſorem verò notabis, vel ad latus 3. vel ſub ternario, dicesq; in 3. quoties continentur. 2? & video contineri ſemel, & remanere 1. noto inter parallelas ſub 3. 1. & 1. quod remanet ſupra 3. & tranſuerſa virgula deleo 3. dein de dico, quoties continentur in 12, 2? & cõtinentur ſexies, noto itaq; 6. ſub 2. inter parallelas, & quod nihil remaneat ex 12. deleo 12. Deinde dico, quoties continentur 2. in 8? & video cõtineri quater, noto 4. ſub 8. inter parallelas, & deleo 8. nihilq; remanet diuidendum. Proinde concludo 3 2 8 ſi diuidantur per 2. prouenire 1 6 4. nam toties conti netur binarius in 3 2 8.

| 1
2 | 3 2 8
| 1 6 4

Idem aliter, ſint diuidenda 9 0 3 7. per 5. dico quinta pars 9. eſt. 1. notandum poſt vir gulam, relictis 4. ſupra 9. notãdis, & deleto 9. Dico quinta pars 40. eſt 8. notanda mox poſt 1. & cùm nihil ſuperſit deleo 40. Deinde quinta pars 3. nullum inte grum eſt: quare noto 0. poſt 8. manentibus 3. intactis. De inde dico, quinta pars 3 7. eſt 7. quæ notabuntur poſt 0. & duo remanentia ſupra 7. ſcribentur, & virgula ſequeſtra buntur, tanquã numerus, qui abſq; vnitatũ fractione per 5. nequeat diuidi. Dico igitur, ſi 9 0 3 7 diuidantur per 5. prouentura 1 8 0 7 integra, relictis 2. integris frangendis, ſeu ſecandis in minutias, vt in 5. diſtribui poſsint. Notatis

4 2
9 0 3 7 | 1 8 0 7

autem

autem 2. supra virgulam, & 5. inferius sic $\frac{2}{5}$ frangentur illa duo integra relicta, & dabũtur cuiq; ex 5 $\frac{2}{5}$ duæ quintæ partes vnius integri, nã cùm sint duo integra vnoquoq; secto in 5. quintas, colliget quisq; ex 5. $\frac{2}{5}$

Diuisio per articulos.

Diuisurus aliquem numerum per 10. demes ab eo digitum, quem superpones ipsis 10. interiecta linea vt si diuidas 368. per 10. reliquentur 36 $\frac{8}{10}$:nam si ducas 36. per 10. fient 360. quibus si addantur 8. fient 368.

*S*i diuidas per 100. demes duas vltimas notas dextras, & quod reliquum erit, ipsis 1 0 0. interposita linea supra scribetur, vt si diuidas 3687. per 100. prouenient 36 $\frac{87}{100}$.

Simili ratione si per quemcunq; articulum à quo limites numerorũ denominantur, diuiseris, à numero diuidendo detrahes tot dextras notas, quot habet diuisor ciphras, & supra positis dextris notis diuisori, interiecta linea erit facta diuisio.

Si verò diuidas per alios articulos intermedios, vt per 20. 30. 40. 200. 300. &c. Detractis à numero diuidendo tot notis dextris, quot diuisor habet ciphras, reliquum diuides per notam significatiuam : quòd si nihil relinquatur ex ea diuisione, detractas notas collocabis interposita linea supra diuisorem, quòd si aliquid supersit, illud iunges detractis notis, sed seruatis limitibus. Vt si diuidas 8 2 6. per 30. detracto 6. remanent 82. quę diuides per 3. & prouenient 27. relicta 1. supra 2. notanda: quæ cum 6 sequentis limitis efficiunt 16. quare colligo ex diuisione 826. per 30. prouenire 27. & $\frac{16}{30}$.

De numero limitum quos habiturus est numerus quotus, seu pars dimetiens numeri diuidendi.

Antequam aggrediaris diuisionem numerorum per numeros compositos, constare tibi debet, quot notas seu limites sit diuisor cuiusq; diuisionis habiturus. Si duas notas tãtùm habeat numerus diuidendus, & diuisor tantùm vnam, aut singulæ notæ diuidendi numeri sunt maiores, aut æquales, aut non, nota diuisoris. Si sint maiores, aut æquales, constat tum numerum quotum duas notas habiturum, vt si diuidas 78. per 2. aut 77. per 7. tũc quotus vtriusq; diuisionis duas tantùm notas habebit. Nam vnaquæq; semel secari potest per notam diuisoris, & quoties secari potest, tot notas quotus numerus est habiturus. Si verò diuidendi numeri notæ omnes non sint maiores, nec æquales notæ diuisoris, sed vna sit maior, altera verò sit minor: si ea quæ ad sinistram præcedit sit minor, tum numerus quotus solùm habebit vnicam notam. Vt si diuidas 69. per 8. numerus quotus erit 8. relictis 5. Si verò quę præcedit ad dextram esset solùm minor nota diuisoris, tum quotus habebit duas notas, vt si diuidas 96. per 8. quia in 9. semel continetur 8. & remanet 1. denio, qui cum sequenti nota efficit 16. in quibus 8. bis continentur. Quare in 96. continentur 8. duodecies.

Si diuidendus numerus habeat 2. notas, & diuisor totidem, quia semel diuidi potest totus diuidendus per diuisorem, tum quotus habebit vnicam notã. Vt si diuidas 96. per 12. prouenient 8. Quòd si tres notas habeat diuidẽdus numerus, & diuisor duas, si prima ad sinistram diuidendi numeri sit maior prima ad sinistram diuisoris: aut si sit

æqualis

æqualis, dummodo secunda diuidendi numeri non sit minor secunda diuisoris. Tunc diuidendus admittet duas sectiones, & proinde quotus habebit duas notas: si verò quæ secunda est post primam ad sinistram fuerit minor, vt primæ duæ sinistræ diuisoris simul sint maiores primis duabus sinistris numeri diuidendi, tunc vnicam solùm admittet sectionem. Vt si diuidas 8 2 5. per 8 3. tunc quotus habebit vnicam notam, & erit apparatus diuisionis talis, vt 8 diuisoris collocetur sub 2 diuidendi. 8 2 5|

Si diuisor habeat tres notas, diuidendus verò 8 3| quatuor: si tres notæ diuisoris à tribus prioribus sinistris diuidendi possint auferri, tunc quotus numerus habebit duas notas, vt si diuidas 5 3 8 7. per 4 5 9. quòd si nequeant auferri, vt si diuidas 5 3 8 7 per 5 4 1. tunc quotus habebit vnam sectionem, eritq; collocatio notarum diuisoris sub notis diuidendi talis, 5 3 8 7

Quòd si diuidendus habeat quinq; notas, 5 4 1
& diuisor tres, quæ possint demi à tribus prioribus sinistris numeri diuidendi, tunc quotus haberet duas notas, quarum prima quę per sectionē inueniretur esset cēturia, secūda denio, tertia digitus: alioqui si non possent auferri, tantùm haberet duas notas quotus, vt si diuidas 7 5 7 6 5, per 8 5 3. tunc disponerentur numeri sic. 7 5 7 6 5|

Nam ex hac prima dispositione vna col- 8 5 3 | ligitur sectio, quæ per vnam notā signatur: quia verò gradatim notæ diuisoris sunt permutandæ versus dextram, & vsq; ad lineam est tantùm vna sedes, tantùm fiet vna permutatio notarum diuisoris, ex qua colligetur alia nota. Quādo enim nota digitorū diuisoris gradatim per sedes mutati peruenerit ad notam digitorum diuidēdi numeri, tunc nulla alia restat ex diuisione colligenda nota.

H Exem-

Exemplum diuisionis per numeros compositos.

(4
15
37(8
4584 | 7 $2\frac{48}{63}$
633
6

Examen.

0
3 | 3
0

¶ Sint diuidenda 4584 per 63. constat duas notas diuisoris non posse demi à prioribus duabus sinistris diuidendi numeri, & ex prædictis quotum numerum habiturum duas notas, denionum scilicet & digitorum, & priorem futuram notam denionum. quia sectione prius proueniũt partes maiores, deinde minores, contra quam fit in compositione. Dico igitur in 45, quoties continentur 6? & video contineri septies, nam septies 6, sunt 42, & supersunt 3 ex 5. nam totus numerus 42 exhauritur: illa 3, quæ ex 5 supersunt, fingo esse supra 5, quæ cum sequenti nota 8, efficiunt 38. nunc exploro an ex 38 possint demi septies 3. quare cùm possint auferri, noto 7. post virgulam qui sunt 7 deniones, quoties continentur 63 in 4584: postquam exploraui tãtùm posse notari 7. duco 7 per 63, & fient 441. quæ demo ex 458, & remanent 17 notanda supra notas, vnde facta est substractio. quare deleo omnes notas nempe 458, & 63. vel sic facies, quod est compendiosius, sed obscurius. Duc 7. in 6. diuisoris, & sunt 42. quæ si demas ex 45, remanebunt 3 supra 5. Deinde duc 7 per 3 diuisoris, & fiũt 21. quod si demas à 38, 21, remanebũt 17. deletis omnibus præcedentibus notis præter 174. muto inde diuisorem gradatim versus virgulam, & 6 noto sub 7 remanentibus. nam sub 1, quæ remãsit non possum collocare 6. quia ab ea nõ possunt demi. Deinde exploro quoties possim demere ex 17, 6, & video posse demi bis tantùm, & remanere satis magnũ numerum, vt ex eo demi possint

posſint bis 3. noto 2 poſt 7, & duco 2 per 63, & ſunt 126. quæ ſi demas ex 174 reliqua erunt 48 notanda ſupra, & ductis lineolis ſequeſtrãda. Vel ſic, duco 2 in 6, & ſunt 12, quæ demo ex 17, & remanent 5 ſupra 7. & deletis 1, & 7. duco rurſus 2 in 3, & ſunt 6, quæ non poſſum demere à 4. demam proinde ex 10, & remanent 4. iungenda cum 4, & ſunt 8 notanda ſupra 4. & 1 quod mutuatus ſum demo à 5, & remanent 4, notanda ſupra 5. quare vt antea remanẽt 48. quæ per 62. non poſſunt ſecari, quæ ſupra virgulã ſcripta ſubnotatis 63 efficiũt quadraginta octo ſexageſsimas tertias vnius integri.

De examine per 9.

Iuxta diuiſionem deſcribes decuſſem, & iunge notas diuiſoris, & fiũt 9, quæ reijciuntur, & in ima decuſſe pono 0. deinde ex notis numeri quoti compoſitis fiunt 9, quæ reijcio, & noto 0 in ſuprema decuſſe. duco vnam ciphram in alteram & nihil efficitur. (Quod ſi fuiſſent notæ ſignificatiuæ ex eo quod fieret ducta vna in alteram reiecilſem 9, & reliquum iunxiſſem cum numeris relictis, quæ non potuerunt diuidi & reiectis nouenarijs relictum notaſſem ad latus dextrum decuſsis) Nunc verò quia ciphra addita 48. nihil efficit, ideo ex 4 & 8. iunctis reijcio 9, & remanẽt 3 notanda in latere ſiniſtro decuſsis. quia verò nota lateris dextri eſt æqualis notæ lateris ſiniſtri, pronuncio diuiſionem rectè factam.

Examen verum.

Verum examen fit per multiplicationem. nam diuiſio & multiplicatio ſibi mutuò reſpondent, vt reſolutio & compoſitio. Duc numerum quotum in diuiſorem & pro-

H ij ducto

ducto adde numerum relictum, & si proueniens numerus fuerit æqualis numero diuidẽdo, tum absq; dubio erit recta diuisio, vt in dato exemplo duc 72 in 63, & prouenict 4536, quibus adde 48, quæ remanserunt, & fiunt 4584. qui numerus est æqualis diuidendo.

Demum notandum inter diuidendum, semper numerũ relictum post vnamquamq; diuisionem, diuisore futurum minorem. Toties enim à diuidẽdo auferendus est diuisor, quoties in eo potest contineri. Proinde relictus numerus ipso diuisore minor debet esse: quòd si contingeret contrarium, scilicet aut eo esset maior, aut æqualis, tunc contingeret vtrumq; examen esse verum, diuisionem verò nõ esse accuratam seu præcisam.

PROBLEMA 5.

Dati numeri latus tetragonicum, aut ipsi propinquum inuenire.

Euclidem, qui post numeri plani definitionem quadratum definiuit imitati, mox post multiplicationes, & diuisiones de lateris tetragonici, seu quod idẽ est, de radicum quadratarũ inuentione agemus. Quadrati numeri forma perfectè quadrata delineari possunt, vt 4. 9. 16. qui fiunt ex ductu alicuius numeri in seipsum, vt 4. ex 2. at 9. ex 3. 16. ex 4. numeri ex quibus fiũt per multiplicationem, latera & lineæ & longitudines & radices eorum dicuntur.

Fiunt autem quadrati numeri ex naturali imparium numerorum progressione, ex tot scilicet imparibus simul iunctis

iunctis, quot habent ipsorũ radices vnitates. vt si colligas

impares	1.	3	5	7	9	11	13	15	17
quadrati		4	9	16	25	36	49	64	81
radices		2	3	4	5	6	7	8	9

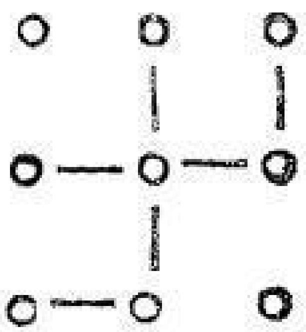
duos priores, impares fiunt 4, qui est quadratus ex 2. si tres priores, fiunt 9, quadratus ex 3. &c. similiter.

Deinde annotandæ sunt omnes radices quadratæ vsq; ad 100, qui numerus quadratus primus est eorum qui radicem seu latus habent duarum notarum, nempe 10. infra 100 omnis numerus latus habet vnius notæ. à 100 vsq; ad 10000 exclusiuè, omnium quadratorum numerorum radices habent duas tantùm notas: at 10000. primus est quadratorum, qui habent radices trium notarum, cuiusmodi sunt omnes quadrati à 10000 vsq; ad 1000000. exclusiuè: ipsius verò 10000 radix est 100. at 1000000 habent radicem quadratam 1000. estq; primus eorum qui habent radicem quadratam quatuor notarum. Ex quo manifestum est omnes numeros scriptos duabus notis habere radicem vnius notæ, omnes verò trium, aut quatuor notarum numeros radicem habere duarum notarum: numerorum verò quinq; aut sex notarum radices esse trium notarum: numeros verò septem, aut octo notarum habere radices seu latera quatuor notarum &c. Proinde inuestigaturus latus tetragonicum alicuius numeri, mox descriptum numerum lineolis à dextra versus sinistram pergẽs, binis quibusq; notis separatis in partes distingues. nam radix seu eius latus tetragonicũ tot habebit notas, quot erũt eius sic distincti interualla, vt proximè ante declarauimus.

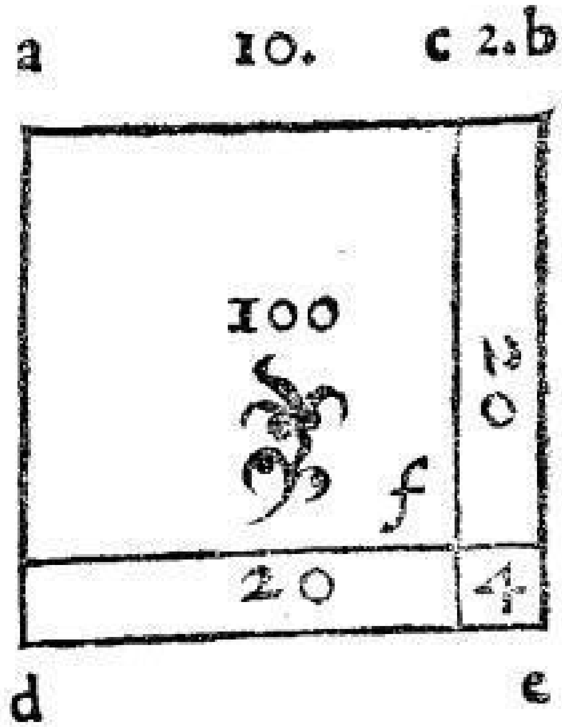
Annotatio

Corollariũ

Deinde sciendum duplata radice quadrata alicuius numeri, duploq; radicis addita vnitate atq; quadrato eius fieri numerū proxime maiorem quadratū, vt sit 4 numerus quadratus, cuius latus est 2. dupla 2, & sunt 4, quæ vna cum vnitate, & quadrato 4 faciunt 9 proxime maiorem quadratum.



Deinde annotandum inuentionem lateris tetragonici, vt docet Theon in 9. cap. libr. 1. magnæ constructionis, pendere ex 4. propo. 2. li. elemen. Euclidis, quę ita habet. Si recta linea secetur vtcunq;, quadratū quod fit ex tota, æquum est quadratis, quæ fiunt ex segmentis, & ei quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo. Vt sit a b linea 12, quæ secetur in duas partes a c 10, c b 2. dico quadratum totius lineæ a b nēpe a e 144, esse æquale duobus quadratis, scilicet partis a c, quod est a f 100, & partis c b, quod est 4, & duobus rectangulis, quæ fient ducta a c 10, in c b 2, quorum vnūquodq; est 20. nam si colligas quadrat. 100, & quadr. 4, & duo rectang. 20. habebis 144. cuius numeri latus tetragonicum 12, inquiretur sic. ex ante dictis 144, habebit radicem duarum notarū. Nam est numerus triū notarum, quare eius latus duobus segmētis diuidetur, vnū erit ex denionibus, alterū ex digitis. Dispones ergo numeros, vt vides in sequenti figura interposita virgula inter 1, & 4, & sub scribes duas parallelas, quæresq; latus tetragonicum 1, estq; 1, quod notabis inter parallelas, habebisq; iam primū segmētum maius lateris tetragonici nēpe a c,



Quadrat.	100
Quadrat.	4
Rectang.	20
Rectang.	20
Quadrat.	144
√	12

1 | 44
1 | 2
| 2

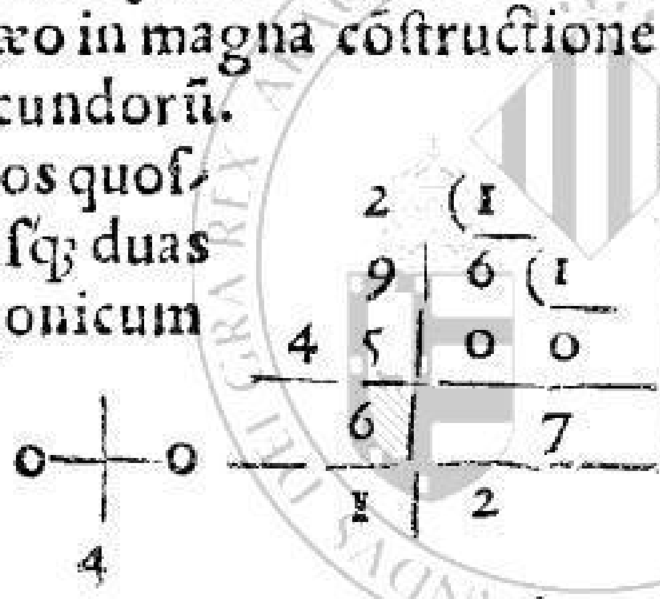
quod

quod est 1 denio. Quærendum restat aliud segmentum, scilicet linea b c, quod sic explorabitur. Præter quadratũ segmenti a c, quod est 100, restant duo rectangula ex a c, in c b, & quadratum c b inquirenda, vt compleatur quadratũ totius lateris a b, quod est 144. explorabitur autẽ quãta est lineæ c b, duplicando 1 duplũ 1, & fient 2. quia duo rectangula accipienda sunt ex a c, in b c, quorum maius latus est a c, scilicet 1 denio. Diuide itaq; 4 per 2, & prouenierẽt 2, & accipe quadratũ 2. qui numerus debet esse segmẽtum c b, & vide si bis duo deniones, id est 40, quæ sunt duo rectangula, vnâ cum quadrato ipsorum duorum, id est, cum 4. exhauriant ipsa 44, & vides exhaurire: quare scribe 2. inter parallelas sub dextro 4, & duc duo in 2. quæ sunt infra parallelas, & exhaurient 4. id circo ea delebis. deinde in se ducito 2, & fiẽt 4, quæ abstrahe ex 4, & nihil prorsus manet. Quare concludes numerum 144 esse quadratum, & eius latus esse 12.

In numeris non quadratis qui inueniatur propinquum latus?

Si numerus non sit quadratus, non poterit habere latus tetragonicum præcissum. Nam etsi numerus integrorum in se ductus efficiat quadratum numerum, partes tamen in se ductæ non explẽt numerum quadratum, sed partes. Proponatur itaq; numerus 4500. no quadratus, cuius latus tetragonicum dicitur à Ptolemæo in magna cõstructione esse 67 partiũ, 4 minutorũ, 55 secundorũ. Li.1.cap.9

Dispone numeros vt vides, binos quosque separãdo virgula, subscribesq; duas parallelas, quæresq; latus tetragonicum ipsorum 45, aut numeri quadrati eo proximè minoris, quod erit 6. qui notabuntur



inter parallelas sub 5, cuius quadratum sunt 36, quibus à superioribus 45 abstractis, remanent 9 notanda supra 5. hic primus numerus radicis est denionum: si duplices 6. deniones habebis 12 deniones, id est, 1200. quod segmentum est maximũ totius lateris tetragonici. Quare notabũtur 12 deniones in proprijs limitibus, nempe 2 sub denionibus, 1 sub centurijs, quia sunt 120. diuide deinde 90 per 12, & curabis vt remaneat numerus vnde lateris tetragonici secundum segmentum in sese ductum posit auferri, eritq; is numerus 7. dic itaq; septies 1, sunt 7. quibus demptis à 9, relinquuntur 2. deinde duc 7 in 2, & fiunt 14, quibus demptis à 20, remanent 6. deinde duc quadrate 7, & fiunt 49, quibus demptis ex 60, remanent 11. quare latus tetragonicum propinqui quadrati est 69. quæ in se ducta faciunt 4489. Recentiores illa 11, relicta supra virgulam scribentes, ei subijciunt duplum lateris inuenti addentes vnitatem ob quadratum gnomonis, vt declaratum est in procreatione numerorum quadratorum. Itaq; dicunt, latus tetragonicum propinquum 4500 erit 67 partiũ $\frac{11}{135}$. Partes enim laterum surdorũ numerorũ sunt denominandæ à differentia, quæ est inter duos quadratos proximos, inter quos ipsi continentur: vt latus tetragonicum 8. est 2 & $\frac{4}{5}$ nam differentia inter 4 & 9 proximos quadratos est 5. Ptolemæus verò & Theon sic reducũt ad sexagesimas. Illa 11 relicta multiplicant per 60, fiuntq; 660 m. deinde diuidunt per duplum lateris inuenti, nẽpe per 134. & prouenient 4 m, remanentq; 124. quæ rursus ducunt per 60, & fiunt 7440, vnde abstrahũt quadratum ipsorum 4, id est, 16, & remanẽt 7424, quæ rursus diuidunt per 134, nempe duplum lateris inuenti, & proueniunt 55 secunda quare tota radix 4500 erit 67 partium, 4 m. 55. $\bar{2}$. verùm si ducas in sese hunc numerum 67. 4. 55. prouenient 4499. partes

Reductio ad partes.

59 m.

59 m̄. 14. 2̄. 10. 3̄. 25. 4̄. Melius itaq; reduces ad fractiones sic. Duc 11 relicta in 60, & fiunt 660, quæ diuide per duplum radicis, id est per 134, & proueniunt 4 m̄, & remanēt 124. à quibus deme confestim antequam conuertantur ad secunda (nam in hoc lapsus est Theon post Ptolemæum) quadratum ipsorum 4. nempe 16, & remanent 108, quæ duc per 60, & fiunt 6480. 2̄, quæ diuide per 134, duplum scilicet radicis, & proueniunt 48 2̄. Quare propinquum latus tetragonicum 4500 est 67 partium, 4 m̄, 48 2̄: quod si ducas 67 part. 4 m̄, 48 2̄. in se se habebis 4499 part. 59 m̄. 43. 2̄. 35. 3̄. 24. 4̄. Hæc methodus in numeris surdis, qui sunt minores quadratis sola vnitate fallax est. Nam esset latus quadratum ipsorum. 8. 2, & 60 m̄, quæ essent 3, & latus quadratum ipsorum 15. essent 3 & 60 m̄. proinde duplatæ radici addetur vnitas, & conflatus numerus erit diuisor. Idē aliter & breuius ex Orōtio Finæo. Adde ipsis 4500 duo paria ciphrarū, vt in latere tetragonico habeas minuta, & secunda, fientq; 4500000, cuius numeri latus tetragonicum est 6708, neglectis alijs, quæ remanēt, à quo deme duas notas dextras ob duo paria ciphrarum addita. & duc 08 per 60, & fiunt 480, à quibus deme duas notas dextras, & remanent 4 m̄, duc duas notas dēptas 80 in 60, & fiunt 4800, vnde deme duas notas dextras, & colliges 48 2̄. & 00 tertia vt prius. Aliter. Aliter.

Si vt multiplicasti per 60 illa 11 relicta, multiplices per 100, & productum diuidas per duplum radicis addita vnitate, id est 135, inuenies partes centesimas: Si per 1000, & diuidas per eadem 135, inuenies partes millesimas &c. similiter. Hoc aliter fieri poterit, vt docebitur capite de latere cubico inueniendo.

De examine.

Aduerte relictum numerum post extractionem lateris tetragonici nō debere esse plusquam duplo maiorem ipso latere: etsi potest esse duplo maior. vt radix quadrata 8 est 2, & remanent 4. Si itaq; plusquam dupla ratione à relicto numero excedatur latus tetragonicum, extractio lateris tetragonici non erit accurata. Licet ducto latere tetragonico in sese, & producto addito numero relicto (quod est regium examen) conficietur datus numerus.

Examen per 9.

Reijce nouenarios à radice inuenta, & in calce decussis scribe quod remanet. Vt in secundo exemplo collectis 6 & 7 sunt 13, reiecto verò 9, remanent 4 notanda in calce decussis, duc deinde 4 quadrate, & sunt 16, vnde reiectis nouenarijs remanēt 7, quæ iuncta cum 11 relictis faciunt 9, quæ reije, & in latere decussis dextro scribe 0. deinde ex 4500 reijce nouenarios, & remanet 0. quare æstimatur talis lateris tetragonici extractio vera.

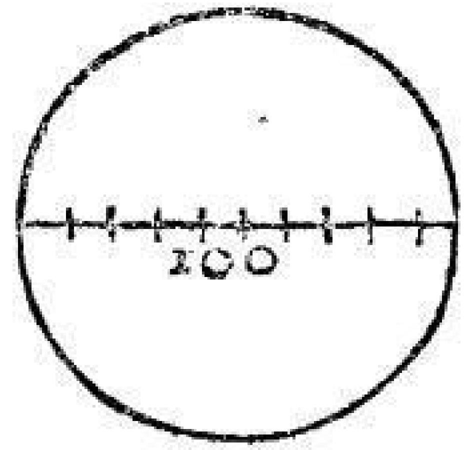
De vtilitatibus extractionis lateris tetragonici.

Ex 17 sexti & 20 septimi, si tres magnitudines aut tres numeri fuerint cōtinuò proportionales, quod fit ex ductu extremorū est æquale quadrato medij, & vice versa. quare medium proportionale inuenietur ductis extremis & producti extrahetur radix quadrata. vt si quæras inter 4 & 9 mediū proportionale, duc 4 in 9, & sunt 36, cuius numeri latus tetragonicum sunt 6. qui numerus est medium proportionale inter 4 & 9. Secundo, ratio inueniēdarum subtensarum 'tacarum angulis rectis, atq; inueniendorum laterum continentium angulum rectum, eget lateris tetragonici extractione, vt constat ex 46 primi. Item vniuersa doctrina inueniēdarum semissium & rectarum in circulo

pendet

pendet ab extractione lateris tetragonici. Vt docet Ptolemæus lib. 1. cap. 9. almagesti. Item si cupias multiplicare, aut alia quauis ratione augere quadrata, aut circulos, aut figuras similie, id est, inuenire circulos, aut figuras similes aut quadrata alijs duplo, aut triplo, aut alia quauis ratione maiora, opera lateris tetragonici efficies sic.

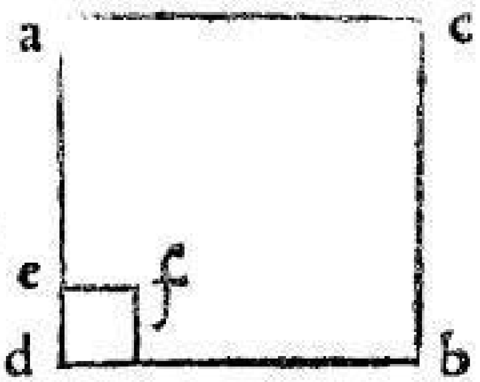
Sit a b area circularis, qua cupias inuenire aliam circularem triplo maiorē. Diuide diametrum eius in 10 partes aut plures, vt libuerit, ducesq; 10 quadrate, & fient 100, triplica 100, & fient 300, cuius numeri latus tetragonicum est partiū, 17. m. 19. 2. 12. diameter itaq; circuli triplo maioris erit talium 17 partiū, 19. m. 12. 2, quales habet diameter a circuli a b 10. Eadē ratione inuenies alias figuras datæ similes, quacunq; ratione maiores, quod ad diuisionē aquarum & distributionem luminis pro ratione quātitatis cubiculorū non mediocre præstat momentum. Hæc ratio Arithmetica multiplicandi figuras ex 1 duodecimi, & 11 octaui lib. emergit. Iuxta hanc methodum supputata est sequens tabula, in qua extant latera figurarum similium, vsq; ad sexagecuplam quadruplam rationem multiplicatarum. In qua figuræ simplicis latus aut diameter secatur in 10 partes: at duplo maioris latus continebit, vt vides in tabula 14 part. 8. m. 2. 24.



TABVLA MVLTIPLICATIONIS
Figurarum similium.

	pars.	$\overline{m}$.	$\overline{2}$.
Latus fig. simp.	10	0	0
latus duplæ	14	8	24
la. triplæ	17	19	12
la. 4.	20	0	0
la. 5.	22	21	36
la. 6	24	29	24
la. 7	26	27	0
la. 8	28	16	48
la. 9	30	0	0
la. 10	31	37	12
la. 11	33	9	36
la: 12	34	38	24
la. 13	36	3	0
la. 14	37	24	36
la. 15	38	43	12
la 16	40	0	0
la 17	41	13	48
la. 18	42	25	12
la. 19	43	34	48
la. 20	44	43	12
la. 21	45	49	12
la. 22	46	54	0
la. 23	47	57	0
la. 24	48	58	48
la. 25	50	0	0
la. 26	50	59	24
la. 27	51	57	36
la. 28	52	54	36
la. 29	53	51	0
la. 30	54	46	12
la. 31	55	40	12
la 32	56	33	36
la. 33	57	26	24
la. 34	58	18	0
la. 35	59	9	36
la. 36	59	0	0
la. 37	60	49	12
la. 38	61	38	24
la. 39	62	26	24
la. 40	63	14	24
la. 41	64	1	48
la. 42	64	48	0
la. 43	65	34	12
la. 44	66	19	48
la. 45	67	4	48
la. 46	67	49	12
la. 47	68	33	0
la. 48	69	16	48
la. 49	70	0	0
la. 50	70	42	36
la. 51	71	24	36
la. 52	72	6	36
la. 53	72	48	0
la. 54	73	28	48
la. 55	74	9	36
la. 56	74	49	48
la. 57	75	29	24
la. 58	76	9	0
la. 59	76	48	36
la. 60	77	27	0
la. 61	78	6	0
la. 62	78	44	24
la. 63	79	22	12
la. 64	80	0	0

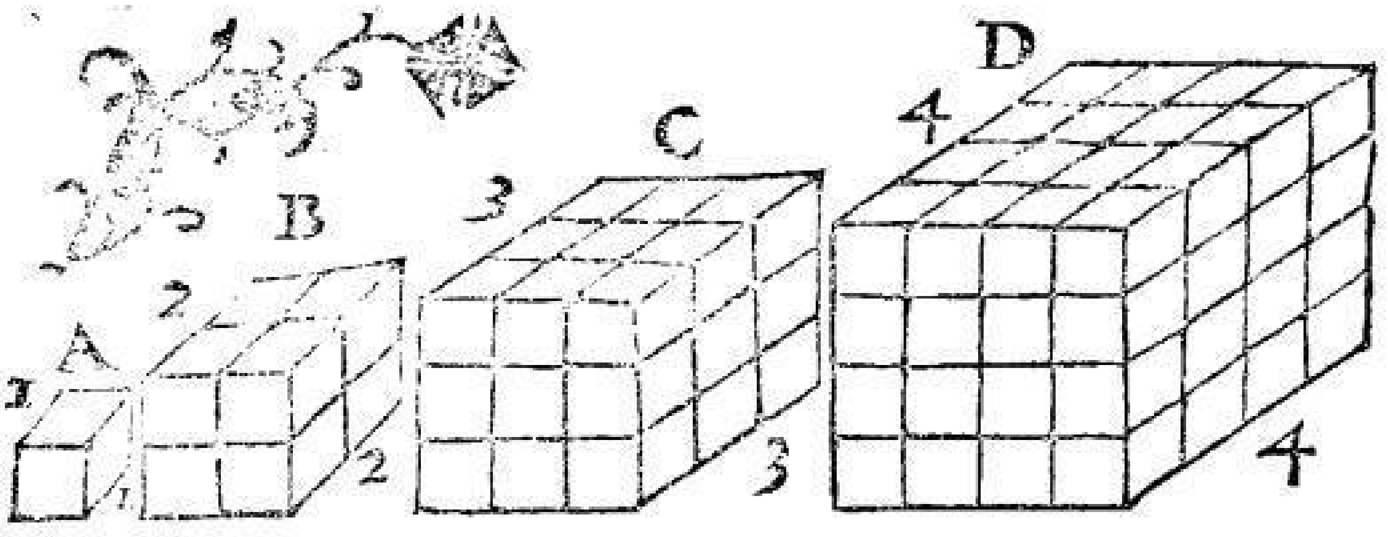
Quod si beneficio huius tabulæ velis latera submultiplicium similium figurarum inuenire vsq; ad sexagies quater minorum, exemplo sequenti disces. Sit a b area quadrata, quam expleat aqua fluens, & institutum sit hanc aquam distribuere in 25 partes æquales. Quæritur quantum futurum sit latus areæ quadratæ vigesimam quintã aquæ datæ partem diuisuræ. Accipe ex præcedenti tabula latus areæ vigecuplo quintuplo maioris, & reperies esse 50, qualiũ latus simplicis est 10. sit latus a c 50, ex quibus accipe 10, id est, quintam partẽ, quæ sit d e, sitq; eius quadratum d f. Dico aream d f continere vigesimam quintã partem areæ a b. Atq; ita de reliquis est faciendum: aut beneficio lateris tetragonici, vt docuimus expedietur quacunq; ratione sit augẽda aut minuenda area quæcunq; in aliam similem.



PROBLEMA 6.

Latus cubicum propositi numeri aut ei propinquum inuenire.

Latus cubicum seu radix, seu linea, dicitur numerus qui duplici multiplicatione sui ipsius efficit numerum cubicum. Prima enim multiplicatione fit quadratus, qui ductus per propriam radicem procreat cubicum. vt bis duo bis, sunt octo. Nam bis duo sunt 4, bis 4 sunt 8, duo igitur latus & radix cubica dicitur ipsorum 8. cuius tres dimensiones seu latera sunt 2. 2. 2. quæ gemina multiplicatione procreant 8.



Ex quatuor schematis præcedentibus quatuor corporũ cubicorum, similiter & quatuor cubicorum numerorum priorum intelliges rationes pariter & latera: nam si latera cubica se habeant vt 1.2.3.4, corpora cubica & sphæræ, & omnia corpora similia & cubici numeri se habebunt vt 1.8.27.64. quod oculari inspectione ex schematis percipere poteris. Tales enim cubicæ 8 magnitudines paruæ sunt in B, qualis est 1 A, & tales 27 sunt in C, qualis 1 est A, & tales 64 sunt in D, qualis 1 est A. Itaq; cubica multiplicatio corporum solidorum magnitudines prodit. Quemadmodum docet Euclides li. 12. propo. 18. & alijs multis, dicens sphæras & corpora omnia similia, vt sunt cubica & columnæ similes, & prismata similia & reliqua omnia similia solida inter sese triplicatam habere rationẽ ad eam quam habẽt inter sese diametri, aut eorum latera quæ triplicata ratio est cubica multiplicatio diametrorum aut laterum, vt constat ex definitione 11. quinti libri, vbi habet si fuerint quatuor magnitudines vel numeri proportionales, primus ad quartam rationem habet triplicatã, quam ad secundum nempe compositam ex tribus rationibus intermedijs. Et propositione 12. octaui habetur duorum cubicorum numerorum duo sunt medij proportionales, & cubicus ad cubicũ triplicatam rationem habet, quam latus ad latus ad latus, & ex 5. definitione sexti, ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum magnitudines in seipsas multiplicatae, efficiũt aliquas, quare si velis scire, quae ratio sit inter cubicum B & C, compone ter eorum latera sic, & duc 2 in duo fiunt 4, & 4 in 2, & fiunt 8, rursus duc 3 in 3, & fiunt 9, & in 9 in 3, & fiũt 27. quare inter cubicos B & C est ratio qualis 27 ad 8. nam inter 27 & 8. sunt duo medij proportionales ratione sesquialtera, nempe 12, 18. & inter B & D cubicos est ratio simili methodo inuestigata, qualis inter 8 & 64, inter quos numeros duo sunt media proportionalia, scilicet 16 & 32.

latus B. 2. 2. 2.
latus C. 3. 3. 3.

Extrahere radicem cubicam, seu inuenire latus cubicũ alicuius numeri, est inuenire numerum qui cubicè ductus efficiat illum, aut proximè minorem. vt si quaeras radicem cubicam 64, habes in sequẽti tabella eius latus cubicum 4.

TABELLA.

Latera.	Quadrati	Cubici.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10.	100.	1000.

Numeri qui habent latera cubica absq; fractionibus dicuntur cubici, reliqui verò dicuntur surdi, quòd nullam vnquã latus perfectũ dari possit, quod in sese cubicè ductũ illũ numerum efficiat.

De procreatione numerorum cubicorum.

Fiunt autem numeri cubici ex naturali serie imparium,

tot

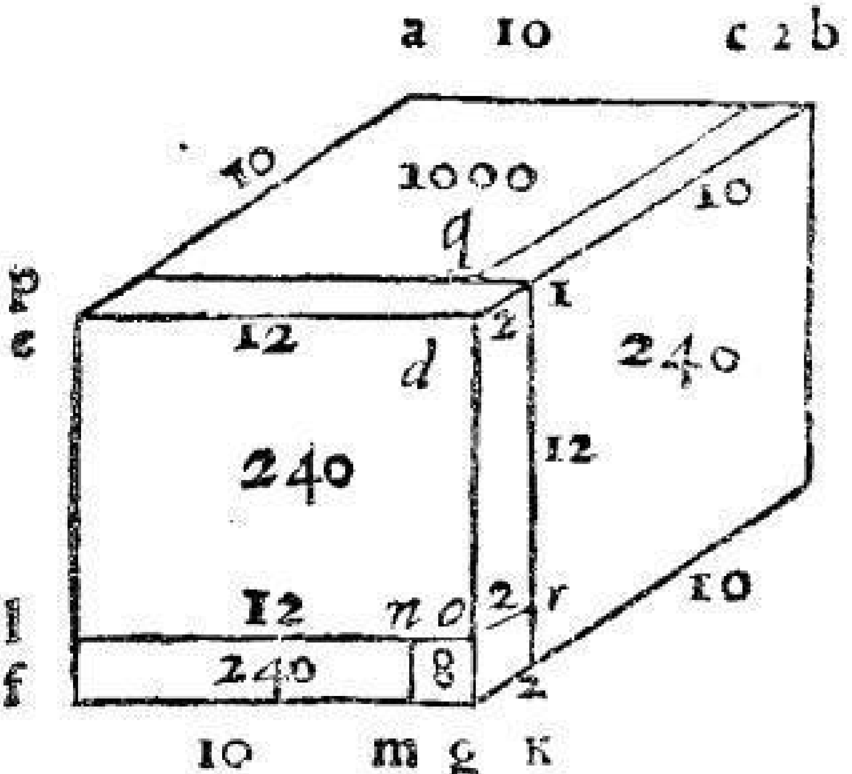
tot ſcilicet imparibus ſimul iūctis, quot vnitates habet ipſa radix. vt patet ex ſequenti tabella.

1	8	27	64	125
1	3. 5.	7.9.11.	13.15.17.19.	21.23.25.27.29.
1	2	3	4	5

Aliter etiam fiunt numeri cubici, nempe ex triplicata radice ſeu latere proximè præcedentis cubici, eaq́; ducta per ſuum triplum, demum addita vnitate. Collectis itaq; numero cubico proximè minore, & triplo radicis eius, & producto ex triplo per radicem & vnitate, fiet cubicus numerus proximè maior. vt 8 cubica radix eſt 2, cuius triplū eſt 6, quibus ductis per 2, fiunt 12. demum componantur 8. 6. 12. & 1. fient 27. qui eſt cubicus proximè maior, qui modus eſt apprime neceſſarius lateribus cubicis inueniendis. Similiter enim reſoluuntur in ſuas radices cubici numeri, ac componuntur ex præcedentiū radicibus: additur autem illa vnitas, vt præſeferens cubicum minus in quod maius reſoluitur.

Cubicus		8
Radix	2	
Rad. triplum.		6
Rad. per tripl.		12
Vnitas		1
Cub. proxime maior		27

Deinde ſciendum, ſi ex aliqua linea vtcunq; ſecta in ſe ducta fiat quadratum, & ex quadrato cubicū corpus, quod ſecetur planis pro ratione ſectionis lineæ cum lateribus cubicis æquidiſtātibus, cubicum corpus reſecari in quinq; corpora, quorum duo ſunt cubica ex ſegmētis datæ lineæ facta: reliqua verò tria ſolida ſunt priſmata, tribus dimenſionibus ſeu lateribus cōſtantia, quorū vnum æquale eſt vni ſegmento lineæ datæ, alterum verò alteri ſegmēto, tertiū verò toti lineæ datæ. vt ſit linea a b 12 ſecta puncto c in ſegmentum a c 10, & ſegmentum c b 2, ex qua in ſe ducta fiat quadratum a b d e & ex quadrato ducto in longitudinem



gitudinẽ lineæ a b fiat cubicũ corpus b e g ſectum planis c q, & p r, & l n, æquidiſtantibus cũ cubici lateribus. dico cubicum corpus b e g ſecari in cubicum a q, & cubicum m r: cubici verò a q, latus cubicum eſſe a c: at cubici m r latus eſſe g k æquale ſegmento c b Inſuper ſecatur in tria priſmata æqualia, nempe in e i o, & in b q k, & in f n, quod latet. & cuiuſq; priſmatis latera ita ſe habẽt, vt maximum ſit æquale toti lineæ a b: alterũ æquale ſegmento a c: tertium æquale ſegmento c b. Si quis autem voluerit cubũ corpus, vt docet propoſitio ſecare, quinq; hæc corpora qualia à nobis deſcripta ſunt, conſpiciet. Sit itaq; a b tota linea 12, ſecta in a c 10 & c b 2. erit itaq; quadratũ a b 12, 144 cubicum verò a b 12: erit 1728, cubicum a c 10, erit 1000, cubicum ipſius c b 2, erit 8. ſi ex 10, & 2, & 12 cóficias priſma erit 240. Si itaq; colligas tria huiuſmodi priſmata cum duobus cubicis ſegmentorum inuenies 1728, cuiuſmodi erat quantitas cubici ipſorum a b 12.

Cubus 10	1000
Priſma ex 12. 10. 2.	240
Priſma	240
Priſma	240
Cubus 2	8
Summa cubici totius	1728

Annotatio.

Inſuper ſciendum numero cuiuis tribus notis ſcripto contingere tantùm vnius notæ cubicum latus; nam infra

K 1000

1000 omnis numeri latus cubicum est tantùm vnius notæ, nam 1000 est primus cubicus, cuius latus est duarum notarum, scilicet 10. infra 1000000 quiuis numerus latere cubico duarum tantùm literarum cõtentus est. Nam primus cubicus, cuius radix cubica, est trium notarũ, videlicet 100 est numerus 1000000, quare cuiq; ternario notarum numeri cubici destinabitur pro latere cubico vna litera: distinguendus ergo erit numerus, cuius quæritur latus cubicum, in terniones notarũ à dextra versus sinistrã, tribus quibusq; virgula separatis, & quot erunt interualla tot notas habebit latus cubicum.

Exemplo docetur lateris cubici inuestigatio.

1	7	2	8
1			2
	3	3	

Examen. 0 0 3

Volo inuenire latus cubicum numeri 1728, secerno tres priores notas virgula subscriptis duabus parallelis, dico modò latus cubicum, vt patet ex annotatione, habiturum duas notas, quarũ prima erit denionum, secunda digitorum. Quæro latus cubicum 1 & est 1. hoc idem est ac si dicas, latus 1000 est vnus denio. Habeo iam cubicũ segmenti a c, cuiusmodi latus est etiã latus trium prismatum, quorum inuestiganda sunt latera duo, quæ desunt. In numero itaq; 728 debent contineri tria prismata æqualia, quorum vnum latus sit 1 denio, & vnum aliud cubicum. Triplo itaq; latus cubicũ primo inuentũ ob trium illorũ prismatum tria latera æqualia, & efficio 3 deniones, quos noto in sede denionũ, scilicet sub 2. quia verò vnũquodq; prisma habet tria latera & vnum est inuentum 1 denionis & maximum latus cuiusq; prismatis debet esse æquale totius cubici lateri. quod vt minimum esse potest 1 denionis, duco triplum radicis, nempe 3 deniones in ipsam radicem inue inuētam, nempe in 1 denionem, & fient 3 centuriæ: quare noto 3 centurias in sede centuriarum, nempe sub 7 infra parallelas, & pronuncio tria illa prismata, vt minimum posse valere 300. Diuido modò 72 per 33, nempe per triplum radicis, & per productum ex triplo radicis collecta (nam hoc cōmodius est ad citius extrahendum, quàm vt per solū productū ex triplo lateris primi in latus primū diuidas. nā addendo triplum lateris primi inuenti fiunt 33 deniones, scilicet 330, & fingo vnum ex lateribus prismatum esse 11, alterum 10, tertiū 1 & ita vnūquodq; prisma fingo esse 110, quod si vnitas non potest esse tertium latus prismatum, nec alia nota maior esse poterit) & inuenio bis tantùm contineri in 72 ipsa 33. fingo itaq; tertium latus cuiusq; prismatis esse 2, & totum latus cubicū dati numeri 1728 esse 12. si itaq; 2 est secūda nota totius lateris cubici, habebit vnumquoq; illorum trium prismatum tria latera, quorum vnum erit 1 denio, secūdum erit 2 digiti, tertium erit 12. Multiplico 12 per 3 deniones laterum prismatum, & fiunt 36 deniones, qui rursus ducendi sunt per 2 igitos, qui sunt tertiū latus cuiusq; prismatis, & fiunt 72 deniones, quibus demptis ex 72 exhauriunt 72 superiores, qui sunt 720 quæ est quantitas trium prismatū. Nunc videndum, num cubicum 2, (nam hoc restat, vt compleantur illa quinq; solida, in quæ vnumquodq; cubicū resoluitur) quod est 8 posit demi à numero relicto, nempe ab 8, quod cùm posit, & nihil remaneat dico latus cubicum 1728 esse 12.

Examen.

Certissimum examen fit multiplicato latere cubice, vt si ducas 12 in se, fiunt 144, rursus si ducas 144 per 12, fient 1728. quare rectè extractum est latus cubicum. Aliud per 9. deme 9 quoties fieri poterit à latere cubico, & remanent 3 notanda sub decusse, duc cubicè 3, & fient 27, à quibus deme 9, & nihil remanet, cui est addendum quod remanet facta extractione lateris: & quia nihil remanet, noto in latere dextro decussis 0. Deinde aufero 9 quoties possum à numero vnde extractum est latus cubicum & nihil remanet: scribo similiter in latere sinistro decussis 0, & conijcio rectam esse extractionem lateris cubici.

Aliud exemplum.

Sit inueniendum latus cubicum 876943579: separo virgulis interpositis tertias quasq; literas, fientq; tria interualla. quare latus cubicum habebit tres notas, quarum prima erit centuriarum, secunda denionum, tertia digitorum. Quæro ex tabella laterum cubicorum cubicum 9 & inuenio esse 729, & demo 729 ex 876, & remanent 147

			(4	7				
	1	9	5	6	6	0	8	
1	4	7	6	9	8	4	2	(6
8	7	6	9	4	3	5	7	9
		9			5			7
			2	7)	2	8	5	
	2	4	3)					
		2	7	0	7	5		

notãda supra proprias sedes, & noto 9 inter parallelas, quæ erit nota prima, centuriarum, videlicet ipsius lateris cubici, & concludo numeri 729000000 latus cubicũ esse 900. Deinde triplico 9 & 27 eius triplum noto sub 9 & 4: præterea duco 27 per 9. & primam notam productam ex 9 per 7 pono sub 2, scilicet in proxima sede dextrorsum: reliquas verò suo ordine scribo, & sunt 243 quæ seruatis limitibus, collecta cum 27, sunt 2457, per quem numerũ diuido 14794, & prouenient 6. fingo itaq; 6 esse secundã notam lateris cubici. Experiar modò num tria prismata possint demi ex 14794. ducam proinde 96 in 27, & fiunt 2592, quæ rursus ducam per 6, & fient 15552, quæ non possunt demi ex 14794: proinde non potest esse secunda nota lateris. Fingo itaq; esse 5, &

4 | 4
3

ducam

ducam 95 in 27, & sunt 2565, quæ ducam per 5, & sunt 12825, quæ demo ex 14794, & remanent 1969: deinde ex his demo cubicum ipsorũ 5, id est 125, & remanent 19568 vsq; ad virgulam. Hac methodo extraxim tria primata, quorum quodq; habet tria latera, vnum ex 96, alterum ex 90, tertium ex 5, & cuiusq; valor est 42750: at omniũ valor est 128250, & cubicum ipsorum 5, id est 125, quod coniunctum cum 128250, facit 128375, extraxim, inquam, totum hunc numerum ex relictis 146943, & totidem supersunt, quot ante, nẽpe 19568. Præterea triplica 95, & fiunt 285, & 5 pono sub 7, & alias notas sinistrorsum suo ordine. Deinde duco 95 per 285, & fient 27075, & 5 pono sub 8 triplicati numeri, reliquas notas per ordinem proprium sinistrorsum scribo, & seruatis eorum sedibus colligo hos duos numeros, & fiet 271035, per quem numerum diuido 1956857, & proueniunt 7, relicto satis magno numero ex diuisore. quare dico tertiam nota lateris esse 7. duco itaq; 957 per triplum, nẽpe per 285, & fiunt 272745, quæ rursus duco per 7, tertiam notam inuentam, & fiunt 1909215, quæ demo ex 1956857, & remanent 47642, & insuper 9. ex his itaq; sex notis demo cubicum ipsorũ 7, nempe 343, & remanent 476086.

Examen.

Duc 957 per 957, & fiunt 915849, quæ rursus duc per 957, & fiunt 876467493, quibus adde quæ superfuerunt 476086, & prouenit primus datus numerus 876943579. Aliud per 9. reijce 9 quoties potes ex latere cubico, & remanent 3, quæ duc cubicè, & fiunt 27, ex quibus reiectis 9, nihil remanet. ex numero relicto reijce 9 quoties potes, & remanent 4 sub latere dextro decussis notanda. Deinde ex dato numero reijce 9 quoties potes, & remanent 4, quæ ponentur in latere sinistro decussis, quare coniicio extractionem lateris cubici rectè factam.

De denominatione, quam habiturus est numerus, qui, extracto latere cubico, relinquitur.

Triplica radicem seu latus cubicũ inuentum (posito primum supra virgulam numero relicto, vt in dato exẽplo 476086) duc deinde triplum radicis, scilicet 2871 per radicem cubicã cubici proximé maioris, scilicet 958, & fient 2750419 cum addita vnitate, quæ subscribes tanquã proprium denominatorem numero relicto. Quare cubica radix 876943579 sunt 957 $\frac{476086}{2750419}$. In numeris surdis denominator partium est differentia inter duos proximos cubicos, inter quos continẽtur. Vt si quæras latus cubicũ 6, est 1 relictis 5, quæ denominabuntur à differentia, quæ est inter 1 & 8 proximos cubicos, inter quos est 6. Itaq; latus cubicum 6, est 1 & $\frac{5}{7}$, quod idem est ac si triplicares 1, & efficeres 3, & 3 duceres per radicem 2, & sunt 6, et adderes vnitatem. nam fierent 7.

Idem aliter fiet, si velis reducere relictum numerum ad fractiones Astronomicas, scilicet ad minuta: duc ipsum per 60, & productum diuide per productum ex triplo radicis in radicem proximi cubici maioris addita vnitate, vt in dato exẽplo per 2750419, & inuenies illi fractioni respondere 10 m̄. Si verò velis ad minuta & secunda reducere fractionem, duces relicta 476086 per 3600, & productũ diuides per 2750419, & inuenies 623 2̄, id est 10 m̄ 23 2̄.

Idem aliter, institutũ est inuenire dati numeri surdi latus cubicũ propinquũ quod ad minuta & secunda, vt numeri 26. illi adde duos terniones ciphrarum, & fiunt 26000000, cuius numeri latus cubicum est 296, neglectis quæ supersunt: & quia addidi duos ciphrarum terniones, demo duas notas dextras, & manent 2 integra, duco deinde 96 in 60, in 60, fiuntq; 5760, à quibus demo duas notas dextras, & manēt 57 $\overline{m}$. rursus duco 60 per 60, & fiunt 3600, dēptisq; duabus notis dextris, manēt 36 2. quare latus cubicum 26 est 2 integrorum 57 $\overline{m}$ 36 2.

Idem aliter, si velis inuenire surdi numeri latus cubicum quò ad cētesimas, aut millesimas, aut sexagesimas primas, aut secundas, accipe cubicum numerum ipsorum 100, vel 1000, vel 60, vel 3600, quem numerū duces per datum surdum, & producti numeri latus cubicum erunt vel centesimæ, si per cubicum ipsorum 100 eum duxisti: aut millesime, si per cubicū ipsorum 1000 eum duxisti: vel minuta, si per cubicum ipsorum 60 eum duxisti: vel secunda, si per cubicum ipsorum 3600 eum duxisti: vt si 26 velis inuenire latus cubicum quò ad minuta, accipies cubicum ipsorum 60, & fiunt 216000, quem duces per 26, & sunt 5616000, cuius numeri latus cubicum sunt 177, quę sunt minuta seu $\frac{177}{60}$ quod idem est, vtpote 2 integra 57 m. quare latus cubicū ipsorum 26 est 2 integrorū 57 m. Si accipias quadratū ipsorum 100, vel 1000, vel 60, vel 3600, eumq; ducas per datū aliquē surdū & producti sumatur latus quadratum, inuenies surdi numeri latus quadratū quò ad centesimas, vel millesimas, vel minuta, vel secunda. Annotatio

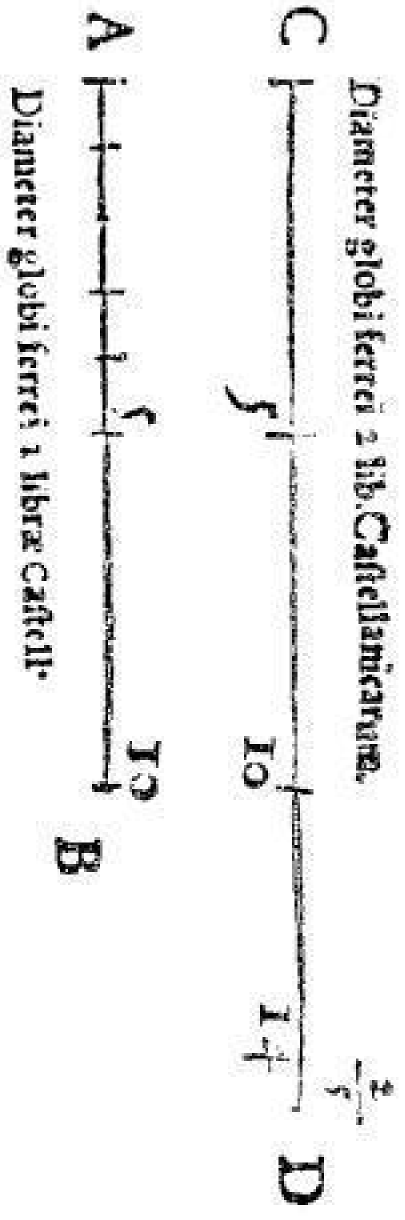
De vsu radicis seu lateris cubici.

Vt vnus numerus medius proportionalis inter duos extremos inuenitur opera extractionis lateris quadrati: sic duo medij proportionales inter datos duos extremos inueniūtur extractione lateris cubici. Nā vt inter quadratos tantùm vnus medius existit proportionalis, sic inter cubicos reperiuntur duo medij proportionales: qui autē sint inueniendi proprio problemate docebimus. Eucl. pro. 11. & 12. octa. lib.

Deinde opera inuentionis lateris cubici inueniuntur

quanti-

quantitates diametrorum, & laterum quoruncunq; solidorum, dato aliquo simili quacunq; ratione maiorum. Esto verbi gratia A B linea diameter sphæræ aut latus solidi angulis præditi, quod sit vnius põdo. Si Arithmetica ratione velis inuenire lineã, quæ sit diameter, aut latus solidi similis triũ pondo: diuide lineã A B in partes æquales, quotcunq; libuerit. Sitq; in 10 diuisa, cuius numeri cubicus est 1000, tot itaq; sunt in solido cuius est diameter, aut latus linea A B similia solida prędita diametro, aut latere vnius decimæ partis lineæ A B. Quoniã inquiritur diameter aut latus solidi similis triplo maioris, triplica 1000, & sunt 3000 solida parua lateris aut diametri vnius decimæ ptis lineæ A B, quot cõtinebit solidum triplo maius: huius numeri latus cubicum, scilicet 14 decimæ 25 m. sunt diameter, aut latus solidi similis triplo maioris, cuiusmodi est linea C D.



Item si cupias inuestigare cuicunq; prismati cubicũ corpus æquale aut quauis ratione maius, aut cuicunq; columnæ rotundæ longæ columnam æqualem, aut quauis ratione maiorem, quæ sit prædita dimensionibus æqualibus, hoc fiet opera inuentionis lateris cubici. Nam si dimensiones eorum communi aliqua mensura inuestigaueris, & inter sese multiplicaueris, producti latus cubicũ est latus cubici, aut cylindri regularis ęqualis. Si verò productum aliqua ratione auxeris, aucti numeri latus cubicũ erit latus cubici, aut columnæ regularis eadẽ ratione maioris, qua methodo facta est sequens tabula.

TA-

TABULA DOCENS QUOmodo duplicandi, aut triplicandi, aut amplius augendi usque ad sexagecuplam quadruplam rationem sint globi & corpora similia.

Latera.	pars.	m.	2.
Lat. corp. sump.	10	0	0
lat. dupli	12	35	21
la. tripli	14	25	12
la. 4.	15	55	12
la. 5.	17	5	24
la. 6	18	11	24
la. 7	19	7	12
la. 8	20	0	0
la. 9	20	48	0
la. 10	21	32	24
la. 11	22	13	48
la. 12	22	52	48
la. 13	23	30	36
la. 14	24	6	0
la. 15	24	39	36
la. 16	25	11	24
la. 17	25	42	36
la. 18	26	12	0
la. 19	26	40	48
la. 20	27	8	24
la. 21	27	34	48
la. 22	28	1	21
la. 23	28	25	48
la. 24	28	50	24
la. 25	29	14	24
la. 26	29	37	12
la. 27	30	0	0
la. 28	30	19	48
la. 29	30	41	24
la. 30	31	4	12
la. 31	31	24	36
la. 32	31	44	24
la. 33	32	4	12
la. 34	32	23	24
la. 35	32	42	36
la. 36	33	3	0
la. 37	33	19	12
la. 38	33	36	36
la. 39	33	54	36
la. 40	34	10	48
la. 41	34	23	48
la. 42	34	45	36
la. 43	31	1	48
la. 44	35	18	0

L pars

	pars.	m̄.	2̄.
la. 45	35	33	36
la. 46	35	48	48
la. 47	36	2	24
la. 48	36	20	24
la. 49	36	35	24
la. 50	36	50	24
la. 51	37	4	48
la. 52	37	19	12
la. 53	37	33	36
la. 54	37	47	24
la. 55	38	1	12
la. 56	38	15	0
la. 57	38	28	48
la. 58	38	41	24
la. 59	38	55	12
la. 60	39	8	24
la. 61	39	21	36
la. 62	39	29	24
la. 63	39	47	24
la. 64	40	0	0

Annotatio. Quemadmodum opera extractionis lateris cubici multiplicium globorum, aut corporum ſolidorum ſimilium diametros & latera vſq; ad 64 maiorū inuenimus, poterūt etiā quauis alia ratione maiorū, atq; etiā minorū diametri & latera inueſtigari. Quod etiam, quò ad ſubmultiplicium ſolidorum vſq; ad ſexagies quater minorū diametros, conuertendo hanc tabulam, fieri poterit. Vt ſi velis inuenire diametrum globi ſubdupli ad datum, accipe diametrum globi dupli, nempe 12 part. 35 m̄, 24 2̄, & in tot partes & minuta & ſecunda diuide diametrum dati globi, ex quibus accipies 10 partes, & ex illarum quantitate fiet diameter, aut latus corporis ſolidi ſubduplò minoris. Vt autē vites difficultatē diuidendi diametrū dati globi in 12 par. 35 m̄, 24 2̄, accipies diametrū globi octupli, qui eſt 20 part. 0 m̄ 0 2̄, & diuides in 20 partes diametrum globi dati, ex quibus accipies 15 partes, 55 m̄, 12 2̄ diametri quadrupli. Nā quadrupli ad octuplum eſt ratio ſubdupla. Quî autem doctrina inuētionis laterum cubicorum, ad vſus machinarū bellicarum, & ad artem militarem pertineat, Superis for-

tunannantibus, in incæpto à nobis opere de re militari explicabitur.

Lubenter subiecissem mox problema de inuestigandis lateribus figurarum altera parte longiorum, nisi egeret multiplicatione fractorum.

PROBLEMA 7.

Datis duobus numeris tertium continuò proportionalem inuenire.

Propositio 18. libri noni elementorum, quæ colligitur ex 17. libr. 6. & 20. septimi, qua ait Euclides. Si tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis, æqualis est ei, qui fit à medio & vice versa. Sint dati numeri 4 & 6. Inueniẽdus est numerus, qui eandem habeat rationem ad 6, quam 6 ad 4. Duc itaq; 6 in sese, & fient 36, quem numerũ diuide per primum, nempe 4, & fient 9. quare 9 erit tertius proportionalis. Dentur secundo 8 & 11, quibus sit dãdus tertius continuò proportionalis. Duc 11 in se, & fient 121, quem numerũ diuide per 8, & proueniet tertius numerus continuò proportionalis, scilicet $15\frac{1}{8}$. quare 8. 11. $15\frac{1}{8}$ erunt cõtinuò proportionales. Ex hac propositione facile poteris, in datis quibuscunq; numeris, continuare eandem rationem. Nam vt ducto secundo in se, & eius quadrato diuiso per primum, inuenitur tertius: Sic si quadratũ tertij diuidatur per secundum, proueniet quartus cõtinuo proportionalis, atq; ita de reliquis erit agendum.

Exemplum

Aliud.

Corollariũ

PROBLEMA 8.

Tribus numeris datis quartum proportionalem inuenire.

Propositio 19.lib.9. Aut dantur tres numeri continuò proportionales: aut tres numeri diuersas rationes habentes. Si sint continuò proportionales, ex proximè praecedenti problemate quartus in eadem ratione inuenietur. vel quartus poterit inueniri ex propo. 16. libr. 6. vel 19. libr.7. vbi ait Euclides, si quatuor numeri fuerint proportionales, qui ex primo & quarto fit numerus, æqualis est ei qui fit ex secũdo & tertio numero: & si qui fit ex primo & quarto, sit æqualis ei, qui fit ex secundo & tertio, illi numeri sunt proportionales. Duces itaq; secũdum in tertiũ, & numerus productus diuidetur per primum & prodibit quartus numerus proportionalis. Nam si quod fit ex secundo in tertium, est æquale, ei quod fit ex primo in quartum, illud quod fit ex secundo in tertiũ, erit quãtitas plani numeri ex primo in quartũ facti, cuius plani datur vnum latus, nempe primus numerus: quare per primum diuiso plano, prodibit latus alterũ, nempe numerus quartus, qui per dictam propositionem erit proportionalis: vt dentur

Exemplum 2.6.18 continuò proportionales, duc 6 in 18, & fiunt 108. quē diuide per 2, & fiunt 54, qui est quartus numerus proportionalis. Omnino eadem ratione colligetur quartus proportionalis, quando tres dati numeri habent diuersas

Exempl. rationes. Vt si 8 dant 12, quot dabunt 20? Duc 20 in 12, & funt 240, quem numerũ diuide per 8, & prouenient 30. Dico, qualis est ratio 8 ad 12, talis est ratio 20 ad 30: nẽpe subsesquialtera. Hic vsus problematis dicitur rectus, quia recto ordine dantur tres priores numeri.

Vsus inuersus. Alter vsus huius problematis est inuersus, vtpote quod ordine legitimo non proponãtur tres priores numeri, sed perturbentur: at vbi tres numeri dati ad legitimum ordinem fuerint conuersi, beneficio huius problematis inue-

Exempl. nietur quartus. Vt si quum venditur tritici mensura (quæ cafiz dicitur) 80 ℔ dantur 14 vnciæ panis 4 denarijs: quãdo cafiz venditur 70 ℔, quot vnciæ dandæ erunt 4 denarijs? Inuertes sic, si 70 ℔ dant 80 ℔, quot dabunt 14 vncię. nam ea ratione qua pretium minuitur, vnciæ panis sunt augendæ. duc itaq; 80 in 14, & fiunt 1120, quæ diuide per 70, & prouenient 16 vnciæ panis exhibendæ 4 denarijs: debet enim pretium cum pretio, & vnciæ cum vncijs conferri. Si, vt proponuntur numeri, velis absoluere quæstionem, duces primum in secundum, & productum diuides per tertium, & proueniet quartus, quod idem est: vt si cùm *Exemplum* venditur amphora vini 5 ℔, dantur pro singulis denarijs 6 vncię vini: quot dabuntur, cùm amphora vendetur 4 ℔? duc 5 in 6, & fiunt 30, quæ diuide per quatuor, & prouenient 7 vnciæ cum $\frac{2}{4}$ id est $\frac{1}{2}$ vnciæ exhibendæ denario. Item, si *Exempl.* 30 fabri conficiunt triremem 40 diebus, 100 fabri quot diebus conficient? duc 30 in 40, & fiunt 1200, quæ diuide per 100, & prouenient 12 dies. Vel sic perturbatim propones. 30 fabri faciunt triremem 40 diebus, vt absoluatur *Exempl.* triremis 12 diebus, quot fabris est opus? duc 30 in 40, & fiunt 1200, quæ diuide per 12, & prouenient 100 fabri. Innumeræ quæstiones huiusmodi contingunt inuersis numeris. Ordo autem legitimus est, vt conferas res eiusdem *Ordo legitimus.* generis inter sese, & quam hæ habent inter sese rationem, talem reliquæ alterius generis inter sese sunt habituræ. Quando partes, seu fractiones adhærebunt integris, absoluetur supputatio per problemata de fractionibus integrorum tradenda.

Examen.

Examinata multiplicatione secundi per tertium, & diuisione producti per primum, necessariò prodibit verus quartus proportionalis. Examen regium, inuento quarto ex tribus prioribus, quæres eadem methodo ex tribus posterioribus primũ, qui si sit æqualis primo erit recta supputatio. Item si duxeris primum per quartum, & productum diuiseris per tertium, prouenire debet secundus: & si diuiseris illum productũ per secundũ, prouenire debet tertius. Vsus varios huius problematis, ad innumeras ambages extricandas, quæ emergunt ex mercatorum commercijs, potes ex immensa turba Arithmeticarum petere: quæ à vulgaribus practicæ dicuntur. Nos enim institutiones ac methodos vniuersales supputandi, futuro Mathematico ac potissimum Astrologo, tradimus.

PROBLEMA 9.

Numeros gradatim procedentes in vnum numerum, expeditius quam per primum problema, cõponere.

Recẽtiores logistæ numeros gradatim procedẽtes, progressionem Arithmeticam vocant, qua numeri æquali excessu progrediuntur, quæ ratio supputandi inutilis est futuro Mathematico, quandoquidem raro aut nunquam vsurpatur. Si autẽ libeat scire, quì expediatur huiusmodi compositio: sic facito, compone primum & vltimum, & producti medietas ducetur per numerum ipsorum: aut medietas numeri ipsorum ducetur per compositũ ab extremis, & proueniet summa totius. Vt sint numeri gradatim procedentes 1.3.5.7.9.11.13.15. Iungo 1 cum 15, qui sunt extremi & sunt 16, cuius numeri medietas sunt 8, duc 8 in 8, nam octo dati sunt numeri, & fiunt 64, quanta est summa datorum numerorum. Vel duc 16 conflatum ab extremis in 4, medietatem 8 numerorum, fiuntq́ꝫ 64.

Exemplum

Pro-

PROBLEMA 10.

Datos quoscunque numeros continuò proportionales, expeditius quam per primum problema, in vnum componere.

Hoc problema non tam vtile est astronomo, quam decorũ, ideo explicatur. Numeros cõtinuò proportionales, recentiores vocant progresſionem Gæometricam, vt 1. 3. 9. 27. 81. 243. Primum ſcies minimos numeros datæ rationis, qui in hoc exemplo ſunt 1. 3. Duc numerum minimum eius rationis in minimum eius progresſionis, ſeu continuæ proportionis: Deinde duc numerum maiorem datæ rationis in numerum maiorem datæ continuæ proportionis. Vt in dato exẽplo, duco 1 in 1, & ſunt 1: deinde duco 3 in 243, & fiunt 729. Subtrahe productum ex minimo termino rationis in minimum numerum continuæ proportionis, & remanent 728, hanc differentiam diuide per differentiam inter minimos terminos datæ rationis, ſcilicet per 2, & prouenient 364, ſumma datæ continuæ proportionis. Idem aliter ex Euclidis 35. propoſitione 9. libri, quæ ita habet, ſi fuerint quotcunq; numeri continuò proportionales, auferantur verò à ſecundo & vltimo æquales primo, vt ſe habet exceſſus ſeu differentia ſecundi ad primũ, ita differẽtia extremi ad omnes, qui ante ipſum ſunt. Vt in dato exemplo differentia ſecundi ad primum eſt 2, differẽtia vltimi ad primum ſunt 242. itaq; vt 2 ad 1, ita 242 ad omnes numeros, qui ſunt ante vltimum. Ergo ſi diuidas 242 per 2, prouenient 121: omnes itaq; numeri ante 243, efficiunt 121, quibus adde vltimum, id eſt 243, & fiunt 364, vt prius.

Exemplum

Aliter.

SECVNDVS
LIBER DE PARTIBVS
continuorum(quas fractiones ſeu ſegmenta vocāt)ſupputandis.

VT vnitatum aceruatione in immenſum numerus creſcit, ſic vnitas dum in infi- nitum ſecatur, ſemper decreſcit. Vnū enim à Mathematicis dicitur, quod ſuis terminis cōtinetur, ac proinde quantū intelligitur, quæ dicitur continua quā- titas. Omne autem continuum ſecari poteſt in ſemper diuidua, nec vnquā deuenietur ad puncta indiuidua, quòd infiniti non ſit medietas, nec tertia, nec vlla pars: alioqui ſi partē ab aliquo numero denominatā haberet, iam finiretur illarum partium numero, & quia omne diuiduum conſtat ex infinitis punctis, ideo non poteſt diuiſio ad indiuidua puncta peruenire. Itaq; ſi mo- nas ſeu vnitas in duo æqua ſecetur, eius vnaquæq; medie- tas dicetur $\frac{1}{2}$ vnum ſecundum, vel vnum ex duobus, à la- tinis ſemis. Si in tres partes vnaquæq; tertia pars, vel triēs $\frac{1}{3}$ vnū ex tribus dicitur: $\frac{1}{4}$ quarta vel quadrās: $\frac{1}{5}$ quinta vel quintans, &c. Numerus ſupra virgulam collocatus numerator, infra virgulam denominator dicitur. vt in $\frac{4}{5}$ 4 dicitur numerator, 5 denominator.

Ariſtotel. 1. cap. 1. li. de cælo.

Numerator. Denominator.

Partiū duo ſunt genera, quædam ſimplices, quibus pri ma ſectione ſecatur corpus, aliæ ſunt particulæ partium, vt cum poſt primam ſectionē vnaquæq; pars in alias par- ticulas ſecatur, quæ ex prima ſectione fiunt μοιριαῖαι, aut μοῖραι partes, verum quæ ex parte in particulas ſecta fiūt,

μέρη

μέρη à Græcis dicũtur, particulę à nostris dici possũt: à recentioribus quibusdã fractiones compositæ, quæ notãtur sic $\frac{2}{3}\ \frac{1}{5}$ duo trientes quintantis: hæc cum inciderint, confestim ad partes simplices reducentur, cuius reductionis modus ex 5. problemate huius petetur.

Enumeratio partium est earum valoris expressio, cum obseruatione, num integra contineãt, necne. Quotiescunq; enim numerator partis est æqualis denominatori, vt $\frac{4}{4}$ partes continent vnitatem, & perinde sunt $\frac{4}{4}$ ac $\frac{1}{1}$ nempe 1. Quando numerator partiũ denominatore fuerit maior, tunc continent plusquam vnum. Diuide tum numeratorem per denominatorem, & proueniunt vnitates, vt $\frac{27}{9}$ erunt $\frac{3}{1}$, seu 3. *Enumeratio.*

Deinde sciendũ, existentibus ęqualibus numeratoribus, eam fractionem esse maiorem, cuius denominator est minor, vt dictum est inter communes animi conceptiones, vt $\frac{2}{3}$ maiores sunt $\frac{2}{5}$. Item omnes partes esse æquales, quarum numeratores rationem eandem habent cum suis denominatoribus, vt $\frac{2}{3}\ \frac{4}{6}\ \frac{6}{9}\ \frac{8}{12}$ sunt æquales partes: vt patet ex definitione numerorum proportionaliũ. Item integra reduci ad fractiones, seu ad partes, ducto numero integrorum in denominatorem partiũ, vt si ex 8 integris velis facere septimas, duc 8 in 7, & sunt $\frac{56}{7}$. *Annotatio.*

PROBLEMA I.

Datarum partium minimos numeros, æquales cum ipsis partes efficientes, inuenire.

Aut denominator & numerator partium sunt numeri ad inuicem primi, vt $\frac{7}{4}$, & tunc per propo. 23. libr. 7. sunt minimi numeri illarũ partium & omnium cum illis æqualium. *De abbreuiandis fractionibus.*

Qui cognoscētur numeri ad inuicem primi.

Qui inueniatur maxima mensura cōis.

lium. Si verò primi ad inuicem fuerint, per 1. propo. li. 7. vno ab altero reciprocè ablato semper minore à maiore, qui relinquetur nullo modo metietur præcedētem, donec à principio sumpta fuerit vnitas: vt si proponantur 7 & 4 si à 7 demas 4, remanēt 3: si verò à 4 demas 3, remanebit 1. quare sunt adinuicem primi. Si verò non sint adinuicem primi, vno ab altero reciprocè ablato semper minore à maiore, qui relinquetur vtrunq; metietur, eritq; per 2. septimi, relictus numerus maxima mensura communis vtriusq;, considera tunc quoties in vtroq; maxima mensura communis cōtineatur: nam illi numeri erunt minimi partium æqualium cum ipsis. Vt si proponantur $\frac{8}{12}$: abstrahe 8 à 12, & remanent 4. abstrahe 4 ab 8, & remanēt 4, qui erit maxima mensura communis 12 & 8. in 12 continentur 4 ter, in 8 bis: quare $\frac{2}{3}$ sunt partium $\frac{8}{12}$ æqualium cum ipsis minimi numeri. Quod erat faciendum.

PROBLEMA 2.

Minimos numeros, quos datæ partes metiuntur inuenire.

Hæc ex 36 & 37 septimi colligitur. Si denominatores datarum partium sint numeri ad inuicem primi, duc eos inter sese, & producetur minimus ab eis mensuratus, vt $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ minimum numerum mentiuntur 60. Nam si ducas 3 in 4 sunt 12, & 12 in 5 sunt 60, infra quem numerū nullus est qui habeat $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$. Si denominatores sint numeri adinuicem compositi, si se metiuntur proportionaliter, vt $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$, tum maximus eorū est minimus mensuratus ab illis. 8 enim habet $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{8}$. Si verò non metiantur se proportionaliter, vt si quæras quis sit minimus numerus mēsuratus ab $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{6}$: nam 3 metiuntur giuntur 6, non autem 4. & 4 & 6 sunt numeri ad inuicem cōpositi, omittes $\frac{1}{3}$ quia omnis numerus habens partem aliquam, habet omnes partes denominatas à sub multiplicibus eius denominatoris, & quæres numeros ad se inuicem primos, per præcedentem, qui metiantur 4 & 6, & sunt 2, & 3, quos ad latus eorum quos mensurāt collocabis sic, decusse interposita, & duces 4 in 3 vel 6 in 2 & sunt 12, qui est minimus mensuratus à $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{6}$; eadē ratione $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ minimum metientur 24. debet enim reijci vna quarta, quia numerus habens $\frac{1}{8}$ necessariò habet $\frac{1}{4}$. Hoc idem est cum ratione inueniendi minimos numeros, qui habeant datas partes. Nota.

$$\begin{array}{ccc} 4 & & 2 \\ & \times & \\ 6 & & 3 \end{array}$$

PROBLEMA 3.

Datam, aut datas partes ad alias cuiuscunque denominationis sibi æquales conuertere.

Si denominatores partium sint numeri ad se inuicem compositi, tum ex 8. problemate primi libri inuenietur facillimè. vt dentur $\frac{2}{3}$ conuertendæ ad $\frac{\ }{6}$ dicito si 3 dant 2: quantum dabunt 6? & inuenio 4, locanda supra, sic $\frac{4}{6}$, erunt itaq; $\frac{2}{3}$ quatuor sextæ. Si verò sint numeri ad se inuicem primi, tunc fiet simili modo, sed accident particulæ partium, vt sint $\frac{3}{7}$ conuertendæ ad $\frac{\ }{5}$, dicito si 7 dant 3: quantum dabunt 5? & inuenio respondere $\frac{2}{5}$, & remanet 1, quæ est dicenda $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$. Nam ad quintas conuertis septimas, & illa vnitas, quæ remanet ex 15 diuisis per 7 necessariò est $\frac{1}{7}$, quia per 7 diuidis. Quare $\frac{3}{7}$ idem sunt quod $\frac{2}{5}$ cum $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$. Nam vt docebimus problemate 4. $\frac{2}{5}$ cum $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$ efficiunt $\frac{75}{175}$, quæ idem sunt cum $\frac{3}{7}$.

PROBLEMA 4.

Datas quascunque partes quarũcunque denominationũ, ad partem vel partes eiusdem denominationis cum datis æquales, conuertere.

Per secundum problema huius inuenies minimum numerum, quem datæ partes mensurãt, & illum diuides per earum partium denominatores, & quoti prouenientes supra scripti minimo numero ab eis demensurato, erunt reducti ad partes eiusdem denominationis, vt per 2. problema, minimus numerus mensuratus à $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ est 60. Diuide 60 per 3 & prouenient $\frac{20}{60}$, nēpe $\frac{1}{3}$, diuide per 4 & proueniẽt $\frac{15}{60}$, id est $\frac{1}{4}$, diuide per 5 & proueniẽt $\frac{12}{60}$, scilicet $\frac{1}{5}$.

Aliter. Si partes datæ sint eiusdem denominationis, non est opus problemate: alioqui, sint verbi gratia $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{7}$ conuertẽdæ ad vnam denominationem, dispone vt vides, posita decusse inter datas partes.

$$\begin{array}{ccc} 14 & & 15 \\ \frac{2}{5} & \times & \frac{3}{7} \\ 35 & & 35 \end{array}$$

Duc per 5 denominatorē primæ, 3 numeratorem secundæ, & scribe 15 supra 3. deinde duc per 5, 7 denominatorem secundæ, & sunt 35, quæ scribe sub 7. Præterea duc per denominatorem secũdæ, scilicet 7, ipsa 2 fientq; 14 scribenda supra 2, & per eadem 7 duc 5, & fient 35 scribenda infra 5. Erunt itaq; $\frac{2}{5}$ conuersæ ad $\frac{14}{35}$, & $\frac{3}{7}$ conuersæ ad $\frac{15}{35}$.

Quod sic demõstratur. 2 & 5 ducta sunt per 7: habebũt itaq; producta ex 7 in 2 & ex 7 in 5, scilicet 14 & 35, per propo. 17. lib. 7. eandem rationem, quam habent 2 & 5; & per eandem propositionem 15 & 35, facta ex ductu 5 in 3 & 5 in 7 habebunt eandem rationem, quam habent 3 & 7,

quare

quare ex annotatione tradita in initio huius libri, æquales partes sunt $\frac{2}{5}$ cum $\frac{14}{35}$, & $\frac{3}{7}$ cum $\frac{15}{35}$ quod erat faciendũ.

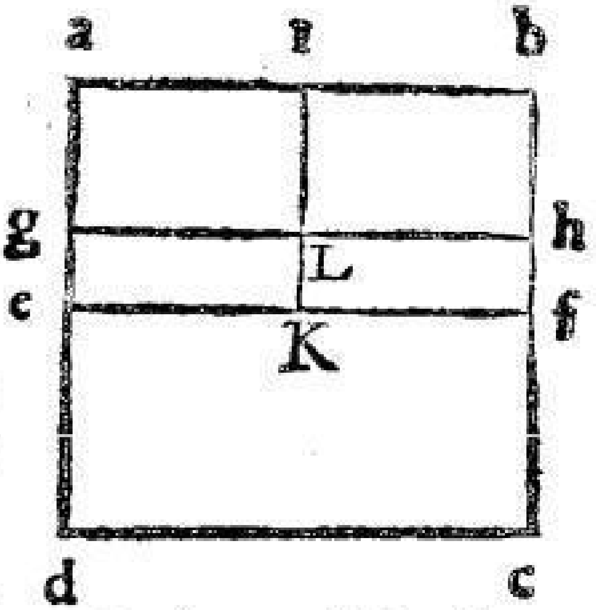
Hinc pronum est cuiuis partes colligere. Nam si sint eiusdem denominationis, colligentur numeratores & subscribetur denominator, vt $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{5}$ efficiunt $\frac{7}{5}$, scilicet 1 & $\frac{2}{5}$. Si verò fuerint datæ partes diuersarum denominationum per pręsens problema reducentur ad eandem denominationem, postea colligentur, vt $\frac{2}{5}$ sunt $\frac{14}{35}$: $\frac{3}{7}$ $\frac{15}{35}$, si iungas $\frac{14}{35}$ cum $\frac{15}{35}$, fient $\frac{29}{35}$. *Additio.*

Deinde facilè vnam partem ab alia subtrahemus. Nam si sint eiusdem denominationis, minor numerator subtrahetur à maiore, & subscribetur denominator. Vt si subtrahas à $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$, remanebit $\frac{1}{5}$. Si sint diuersarum denominationum reducentur per præsens problema ad eandem denominationem. vt si subtrahãtur à $\frac{3}{7}$ $\frac{2}{5}$, cõuertentur $\frac{3}{7}$ ad $\frac{15}{35}$ & $\frac{2}{5}$ ad $\frac{14}{35}$, & remanebit, subtractis $\frac{2}{5}$ à $\frac{3}{7}$ $\frac{1}{35}$. *Subtractio*

PROBLEMA 5.

Datas partes in alias quascunque multiplicare.

Dum integra per integra ducuntur, semper fit maior numerus, & vnitates augentur: at dum pars per aliam partem ducitur, semper fit pars denominationis maioris, sed reipsa minor ijs, ex quarum ductu fit. Similiter si vnitas ducatur in quancunq; partem, fit semper eadem pars: vt, quum ducitur vnitas in quemcunq; numerum, fit semper idem met numerus. Quare si multiplices 1 per $\frac{1}{2}$ fit medietas, si per $\frac{1}{3}$ fit $\frac{1}{3}$ &c. Et si ducas $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{2}$ fit $\frac{1}{4}$, si $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{3}$ fit $\frac{1}{6}$, si $\frac{1}{2}$ ducatur per $\frac{1}{4}$ fit $\frac{1}{8}$, quod ita demonstratur. Sit a b linea 1, quæ ducatur in sese fiet quadratum a c; sumatur a e medietas ipsius a b. Si itaq; a b, ducas



in a e $\frac{1}{2}$, fiet a f rectangulum, medietas quadrati a e, per 1. propositione 6. quod si ducas a b. 1. in a g eius $\frac{1}{3}$ fiet rectangulū a h, quod est tertia pars quadrati a c per 1. propositionem 6. vnde patet vnitatem ductam per quamuis partem efficere illammet. Ad hæc si ducas $\frac{1}{2}$ lineæ a b, nempe a 1, in a e, medietatem lineæ a d, æqualis ipsi a b, fiet rectāgulum a k, quod est $\frac{1}{4}$ totius quadrati a c: & si ducas a 1, id est $\frac{1}{2}$ a b, in a g, id est $\frac{1}{3}$, fiet rectāgulum a l, quod est sexta pars quadrati a c. Quare $\frac{1}{2}$ ducta in medietatem procreat $\frac{1}{4}$: & $\frac{1}{2}$ ducta in $\frac{1}{3}$ facit $\frac{1}{6}$. Quod erat demonstrandum.

Canō multiplicationis partiū. Ducturus itaq; vnam partem in alteram, multiplica numeratorem vnius, in numeratorem alterius, & fiet numerator: deinde multiplica denominatorem vnius, in denominatorē alterius, & fiet denominator partis productæ: vt si ducas $\frac{3}{5}$ in $\frac{4}{7}$, duc 3 in 4 & sunt 12, deinde 5 in 7 & sunt 35, quæ scribe interposita virgula ipsis 12, & fient $\frac{12}{35}$. Ex hoc canone etiam poteris quascunq; partiū particulas, ad partes cōuertere, vt $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{7}$, est $\frac{1}{14}$: & $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ sunt $\frac{6}{15}$. Nā canone multiplicationis cōuertūtur ad primas partes.

Particularū ad ptes conuersio.

Multiplicatio integrorum in partes. Si integra ducas in partes, dispones integra ad formam partium: vt si ducas 9 integra in $\frac{5}{7}$ subscribes ipsis 9 vnitatem sic $\frac{9}{1}$, & secundum hunc canonem inuenies $\frac{45}{7}$, id est 6 vnitates & $\frac{3}{7}$. Qui modus est expeditior, quàm vt 9 conuertas in $\frac{63}{7}$, & deinde multiplices per hunc canonē $\frac{63}{7}$ in $\frac{5}{7}$.

Integra p integra cū ptibus. Si integra duxeris per integra & partes: vt 8 per 7 cum $\frac{3}{4}$, ex 8 efficies $\frac{8}{1}$, ex 7 cum $\frac{3}{4}$ efficies $\frac{31}{4}$, conuersis 7 ad $\frac{28}{4}$, & additis $\frac{3}{4}$. Ducesq; secundum hunc canonem $\frac{8}{1}$ per $\frac{31}{4}$, & ductis 8 in 31, fiunt 248, & 1 in 4, & fiet 4, id est $\frac{248}{4}$

$\frac{248}{4}$: quod si diuidas 248 per 4, prouenieēt 62. Tot itaq; fiunt ductis 8 in 7 cum $\frac{3}{4}$. Idem aliter more vulgarium. *Aliter.*
Dispone numeros quemadmodum in integrorum multiplicationibus, & accipe quartã partem ipsorum 8, & sunt 2: & quia sunt $\frac{3}{4}$ accipies 2 ter, & pones 6. Deinde duc 7 in 8, & sunt 56, & fient 62, vt prius. Vel sic multiplica 3 numeratorem $\frac{3}{4}$ in 8, & fiunt $\frac{24}{4}$, & prouenient 6 integra notanda, vt prius, sub 7 &c. vt proximè ante. Prorsus similiter est agendum, quãdo integra cum partibus, per integra ducuntur.

8 per	3
7	4
6	
56	
62	

Integra cũ partibus p integra cũ partibus.

Si integra cum partibus ducantur in integra cum partibus, integra multiplicandi conuertes ad partes ipsius, & integra multiplicantis ad partes ipsius, & colliges singulas partes multiplicandi, & multiplicãtis, & secundum hunc canonẽ multiplicabis. vt si ducas 8 cum $\frac{1}{2}$ per 7 cũ $\frac{3}{4}$, ex multiplicãdo efficies $\frac{17}{2}$, ex multiplicãte verò $\frac{31}{4}$, quæ ducta secundum canonem efficiunt $\frac{527}{8}$, quæ sunt 65 cum $\frac{7}{8}$. Hoc idem posses efficere, vt diximus solitos facere vulgares.

PROBLEMA 6.

Datam vel datas partes, per aliam vel alias quascunque diuidere.

Diuisio reciproca esse debet multiplicationi: quum itaq; per multiplicationem partium proueniant partes minores, etsi maioris denominationis, diuisione partium prouenient partes illæ, ex quarum multiplicatione ipsæ factæ sunt. Idcirco quia vnitas ducta in medietatem facit medietatem: si medietas diuidatur per medietatem, proueniet vnitas. Si verò medietas diuidatur per vnitatẽ, proueniet medietas: & sic de alijs partibus factis ex du-

ctu

ctu vnitatis in ipsasmet. Praeterea si ex ductu $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$, fit $\frac{1}{4}$: diuisa $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{2}$, proueniet $\frac{1}{2}$. Atq; si ex ductu $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{3}$ fit $\frac{1}{6}$: diuisa $\frac{1}{6}$ per $\frac{1}{3}$ proueniet $\frac{1}{2}$: sin verò eã diuidas per $\frac{1}{2}$ proueniet $\frac{1}{3}$. Et si ex ductu $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{4}$ fit $\frac{1}{8}$, diuisa $\frac{1}{8}$ per $\frac{1}{4}$, proueniet $\frac{1}{2}$: & diuisa $\frac{1}{8}$ per $\frac{1}{2}$, proueniet $\frac{1}{4}$. Ex schemate proximè praecedentis problematis poteris intelligere haec verissima esse. Nam si diuidas a f rectangulũ, vtpote $\frac{1}{2}$ quadrati a c, in a e $\frac{1}{2}$, proueniet a b vnitas: si verò diuidas per a b vnitatem, proueniet a e $\frac{1}{2}$. At si diuidas a k rectangulum, scilicet quartam partem quadrati a c, per a e medietatem, ex qua factum est, proueniet a i medietas ipsius a b: atq; ita de reliquis.

Annotatio. Non est iam quod miretur tyro, cur diuidatur pars minor per maiorem, nec cur pars ex diuisione proueniens sit maior diuidẽda. Nã si ducta parte in alterã necessario fit pars minor, quum in vnitatum multiplicatione semper proueniat maior numerus, cur non etiam necessario sequetur, vt diuisa illa parte, quae ex multiplicatione procreata est, per alterã earũ, ex quibus facta est, fiat reliqua, & diuidatur minor pars per maiorem, atq; ex diuisione minoris partis per maiorem proueniat maior pars: quum diuisio necessario respondeat multiplicationi, vt resolutio compositioni. In partium diuisione numerus quotus, seu pars proueniẽs ex diuisione indicat rationem, quã habet pars, quae diuiditur ad diuidentem: vt si diuidas $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{2}$ proueniunt $\frac{2}{4}$, nempe medietas. Quam itaq; rationem habet numerator partis prouenientis ad denominatorem, vt in dato exemplo 2 ad 4, eandem habet pars, quae diuiditur ad diuidentem, nempe $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{2}$.

Canon diuisionis. Duc numeratorem diuidendae partis in denominatorem diuidentis, & fiat productũ numerator: duc deinde denominatorem diuidendae in numeratorem diuidentis, & fiat productum denominator, & interiecta lineola, erit

facta

facta diuisio. Vt si diuidas $\frac{2}{5}$ per $\frac{1}{7}$, fient $\frac{14}{5}$: cuius examen est. Nam si ducas $\frac{1}{7}$ per $\frac{14}{5}$ prouenient $\frac{14}{35}$, quæ per problema 1. huius efficiunt $\frac{2}{5}$. Exempl.

Si diuidas integra per partes, vt si sint diuidenda 8 per $\frac{3}{5}$ dispones 8 forma partium, sic $\frac{8}{1}$. Et ducito 8 in 5 & fient 40, scilicet numerator partium prouenientium, duc 1 in 3 & fiunt 3, scilicet denominator prouenientium partium, interiecta verò virgula fiunt $\frac{40}{3}$, nempe 13 integra, & $\frac{1}{3}$. Exempl.

Si diuidas integra per integra cum partibus, integra seorsum data dispones forma partium, integra reliqua conuertes ad suas partes, & colliges omnes partes. Diuidesque deinde vt iubet canon. Vt si diuidas 9 per 5 & $\frac{1}{3}$. Exempl. Diuides $\frac{9}{1}$ per $\frac{16}{3}$ & prouenient $\frac{27}{16}$, id est 1 & $\frac{11}{16}$. Idem Aliter. aliter ex 9 ductis per 3 fac 27, quæ erunt tertiæ: ex 5 & $\frac{1}{3}$ ductis per 3 fac 16 tertias: diuide modo vt dictum est problemate 4. primi libri, & fient 1 & $\frac{11}{16}$. Hæc ratio diuidendi emergit ex 17 septimi. Eadem methodo diuides integra cum partibus per integra.

At si integra cum partibus per integra cum partibus diuidas: integra diuidenda conuertes ad suas partes & addes partes, integra diuidentia conuertes ad suas partes & addes partes: facta conuersione vtriusque, operaberis iuxta canonem. Vt si diuidas duo integra cum $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ per 4 integra Exempl. & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$ conuertes $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ per 4 problema huius ad $\frac{5}{6}$ & ex 2 integris efficies $\frac{12}{6}$, quæ sunt collectæ cum alijs $\frac{17}{6}$. Deinde ex $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$ facies $\frac{8}{15}$, ad quas conuertes 4 integra diuisoris, eruntque omnes $\frac{68}{15}$. Si verò diuidas $\frac{17}{6}$ per $\frac{68}{15}$ prouenient $\frac{255}{408}$, quæ sunt $\frac{85}{136}$. Examen, ducito Examen. modo $\frac{85}{136}$ per $\frac{68}{15}$, & fiunt $\frac{5780}{2040}$, quæ sunt $\frac{17}{6}$, nam ex problemate 8. primi libri. Qualis est ratio 5780 ad 2040, eadem est 17 ad 6. quare si 2 integra cum $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ diuidas per 4 & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$ prouenient $\frac{85}{136}$, quæ sunt $\frac{5}{8}$.

PROBLEMA 7.

Latus tetragonicum datarum partium inuenire.

Si denominator & numerator datarum partium habeant latera tetragonica, ea suis locis disponentur interposita virgula. *Exemplũ.* Vt latus tetragonicum $\frac{4}{9}$ sunt $\frac{2}{3}$, & latus tetragonicum $\frac{16}{25}$ sunt $\frac{4}{5}$: nam $\frac{2}{3}$ ductæ in se faciunt $\frac{4}{9}$, & $\frac{4}{5}$ ductæ in se faciunt $\frac{16}{25}$. Si verò non habuerint latera quadrata, ex problemate 5. li. 1. accipies numeratoris propinquum latus, & denominatoris similiter, & latus numeratoris constitues supra latus quadratum denominatoris, & interpones virgulam. Vt latus quadratum $\frac{5}{11}$ est *Aliud.* $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{7}$. Nam latus quadratum 5 est 2 & $\frac{1}{5}$, & latus quadratum 11 est 3 & $\frac{2}{7}$. Sed hæc methodus quò propinquior est pars vni integro, tantò est fallacior. Nam esset latus quadratum $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{2}$ & $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$, id est 1 & $\frac{2}{25}$, quod est falsum. *Aliter.* Aut quod est certius, additis tribus paribus ciphrarum numeratori, & totidem denominatori, erit latus quadratũ numeratoris 2236 superponendum lateri quadrato denominatoris, nempe ipsis 3316. Sic $\frac{2236}{3316}$, quæ partes erunt latus quadratum $\frac{5}{11}$. Nec opus est hos duos numeros diuidere per 60, vt conuertantur ad minuta & secunda, vt vitetur labyrinthus particularum partium. Si verò datæ partes non habeant latera quadrata: *Nota.* at reducta ad minorem denominationem habuerint, tunc cõuertes ad minorem, & earum quæretur latus. Vt $\frac{8}{18}$ idem sunt, quod $\frac{4}{9}$, quarũ latus quadratum erunt $\frac{2}{3}$, quæ etiã sunt latus quadratum $\frac{8}{18}$.

PRO-

PROBLEMA 8.

Latus cubicum datarum partium inuenire.

Si numerator & denominator habent latera cubica, ea dispones in formam partium, & erit peractum. Vt latus cubicum ipsorũ $\frac{8}{27}$ est $\frac{2}{3}$: nam si cubicè ducas $\frac{2}{3}$, efficies $\frac{8}{27}$. *Si* verò non habeant latera cubica, sed conuersa ad minorem denominationem habuerint: tum illarum cubicum latus accipietur pro cubico omnium partiũ æqualium cum ipsis. Vt $\frac{16}{54}$ & $\frac{24}{81}$ latus cubicũ erunt $\frac{2}{3}$ quia $\frac{16}{54}$ & $\frac{24}{81}$ sunt æquales $\frac{8}{27}$, quarum latus cubicum est $\frac{2}{3}$. *Si* verò careant latere cubico, inuenies eorum propinqua latera, quemadmodum docuimus problemate 6. primi libr. & latus cubicum numeratoris collocabis supra latus cubicum denominatoris interiecta virgula: atq; illud erit latus cubicum datarum partium. Vt si quæras latus cubicum $\frac{10}{29}$: latus cubicum 10 est 2 & $\frac{2}{19}$, & latus cubicum 29 est 3 & $\frac{2}{37}$: quare erit latus cubicum ipsarum $\frac{10}{29}$ $\frac{2}{3}$ & $\frac{2}{19}$ / $\frac{2}{37}$, quę methodus quò pars est propinquior vni integro, tantò est fallacior. Nam esset latus cubicum $\frac{9}{10}$, $\frac{2}{2}$ & $\frac{1}{19}$ / $\frac{2}{19}$, id est 1 $\frac{2}{361}$, quæ cubicè ducta longè superant $\frac{9}{10}$: Vel quod est certius si eorum quærantur latera cubica, additis ternionibus binis ciphrarum, latus cubicum $\frac{10}{29}$ erit $\frac{215}{307}$.

Exemplũ

Aliud.

Aliud.

Aliter.

PROBLEMA 9.

Datis duabus partibus tertiam continuò proportionalem inuenire.

Dentur $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$, quæritur pars tertia cõtinuò proportionalis. Quemadmodũ docuimus problem. 7. primi lib.

N ij duc

duc $\frac{1}{4}$ in se, & fit $\frac{1}{16}$, quam diuide per $\frac{1}{2}$ & fiūt $\frac{2}{16}$, quæ reductæ ad minorem denominationem efficiunt $\frac{1}{8}$, quæ est pars tertia continuò proportionalis. Sic continuabis in integris & partibus eandem rationem, modo integra conuertas ad suas partes.

PROBLEMA 10.

Datis tribus partibus quartam proportionalē inuenire.

Si datæ tres partes sint continuò proportionales, duc quadratè tertiam, & productum diuide per secundam, & habebis quartam proportionalem, vt datis $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$, reperies quartam continuò proportionalem esse $\frac{1}{16}$: aut duc secundā in tertiam, siue sint cōtinuò proportionales, siue non, & productum diuide per primam, & prodibit quarta proportionalis: vt si $\frac{2}{3}$ dant $\frac{1}{7}$: quantā dabit $\frac{1}{5}$? duc $\frac{1}{5}$ in $\frac{1}{7}$, & fit $\frac{1}{35}$, quam diuide per $\frac{2}{3}$, & fiunt $\frac{3}{70}$.

Exemplū.

Aliud.

Lubenter accommodassem problemata progressionū, & numerorum continuò proportionalium colligendorū partibus colligendis, si aliquid vtilitatis essent allatura: sed quia non solum non prosunt, verū etiam obsunt, proinde missa facimus.

PROBLEMA II.

Numerorum planorum altera parte longiorum latera inuestigare.

Hi numeri fiunt ex ductu duorum numerorū inæqualium: quum autē inæquales contingat esse infinitos, debēt dari minimi numeri rationis, quā habitura sunt illa latera.

Note-

Noreturq; illa ratio forma partium, & per eam diuidetur datus numerus, cuius quoti accipietur latus tetragonicũ, eritq; latus minimum dati numeri, vt sint 48 disponenda figura plana, cuius vnum latus ad alterũ habeat rationem triplã, disponentur minimi numeri rationis triplæ forma partium, sic $\frac{3}{1}$: diuide itaq; 48 per $\frac{3}{1}$ & prouenient 16, cuius numeri latus tetragonicum sunt 4. qui numerus est minimum latus : quod si 48 diuidas per 4, prouenient 12, quæ sunt alterum latus, quod ad 4 habet rationem triplã. Canon. Exemplũ.

Sit idem numerus disponendus figura altera parte longiore, & latera se habeant in ratione sesquitertia, vt est 4 ad 3, formetur hæc ratio sic $\frac{4}{3}$, diuide 48 per $\frac{4}{3}$, fientq; $\frac{144}{4}$, id est 36 vnitates, quarũ latus tetragonicum sunt 6, quod est primum latus dati numeri in data ratione, per quod diuidentur 48, & prouenient 8, quæ sunt alterum latus in data ratione. Quare si 48 sint disponenda figura plana, cuius vnum latus ad alterum habeat rationẽ sesquitertiã, erunt latera 6 & 8. Horũ laterum inuestigationes, vt & tetragonici, cõmodæ sunt ad acies quacunq; figura parallelogramma pro ratione dati loci instruendas. Aliud.

PROBLEMA 12.

Astronomicas partium & sexagesimarum & sexagenarũ multiplicationes per alias quascunque expedire.

Quandoquidem hæ Astronomicarum partium multiplicationes & aliæ supputationes nullo modo differunt ab aliarum partium supputationibus, hæc causa fuit, vt cũ illarum problematis, astronomicarum supputationum problemata coniungeremus. Circulus diuiditur in 360

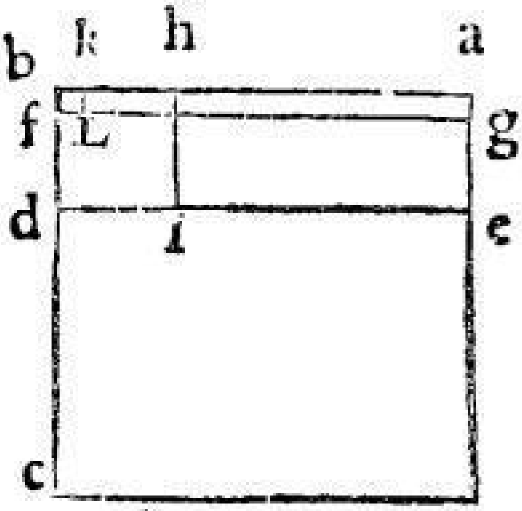
 partes

μοιριαῖα aut μοιρὰς, id est partes, quod fecerũt Astronomi, quia numero dierũ anni, nẽpe 365 nullus numerus, qui posset in tot partes secari, tã propinquus existit, quàm 360. Nam hic fit ex 6 numero perfecto & 60: At hic habet plurimas partes, atq; etiam fit ex 6 numero perfecto & 10, sub quo omnium numerorum genera continentur. Haberq; 60 semissem 30, tricesimam 2: trientem 20, vicesimam 3, quadrantem 15, quintandecimam 4: quintantem 12, vnciam seu duodecimam 5: sextantem 10, dextantem seu decimam 6. Ad hæc præsefert semi diametrum circuli. Nam per 16 quarti, semidiameter subtendit sextã circuli partem, sic si sexies ducas 60, inuenies totum circulum continere 360 partes, quæ & gradus. Vnaquæq; verò pars continet 60 particulas, quæ sexagesimæ primæ vel ternuia prima, seu scrupuli seu minutiæ, aut minuta dicuntur, signãturq; forma partium sic $\frac{1}{60}$, & per m̄ aut per $\overline{1}$ notãtur. Vnaquæq; prima sexagesima secatur in 60 particulas, quæ secundæ sexagesimæ dicuntur, quare secunda sexagesima erit vna pars termillesima sexcẽtesima partis trecentesimæ sexagesimæ cerculi, & signabitur sic $\frac{1}{3600}$, aut per $\overline{2}$. vnaquæq; secunda continet 60 tertias sexagesimas, quæ signantur per $\frac{1}{216000}$ vel per $\overline{3}$. singulæ tertiæ secantur in 60 quartas & notabũtur per $\frac{1}{12960000}$ aut per $\overline{4}$. Nam tot quartas continet quæq; pars circuli trecentesima sexagesima, atq; ita de cæteris sexagesimis vsq; ad decimas dici posset. Hæ dicuntur ἑξηκοστὰ μέρη. Verum 60 μοιρὰι, id est, partes principes circuli efficiunt vnã ἑξηκοντάδα, id est, sexagenam, quæ signũ physicum seu primũ maius à vulgaribus Mathematicis dici deberet. Si colligas 60 sexagenas primas, id est 3600 partes principes circuli, habebis vnã sexagenam secundã: si colligas 60 sexagenas secundas, id est 216000 partes principes,

habebis

habebis vnam ſexagenā tertiam: ſi colligas 60 ſexagenas tertias, id eſt 12960000 principes partes circuli, habebis vnam ſexagenam quartam &c. Vnaquæq; pars princeps, quæ & gradus dicitur, vnitati ſimilis eſt, quæ in quencūq; numerum ducta, illummet gignit. Sic ait Diophantus referente Theone in comment. in 9. caput 1. libr. Magnæ constructionis, vnitas in quancunq; ſexageſimam ſiue ſexagenam ducatur, illammet gignit. Notabitur itaq; vnaquæq; pars princeps circuli per $\frac{1}{1}$, & Prima ſexagena per $\frac{60}{1}$, Secunda ſexagena per $\frac{3600}{1}$. Tertia ſexagena per $\frac{216000}{1}$, Quarta verò ſexagena per $\frac{12960000}{1}$.

Quod autem pars ſeu gradus ductus in primam ſexageſimā faciat primā ſexageſimā, demonſtratur ſic. Sint duæ rectæ a b, & b c, quæ efficiant quadratū a c & vnaquæq; ſit 1 pars prīceps circuli, ſecetur b c in 60 primas ſexageſimas, ſeu minuta, & ſit b d prima ſexageſima vnitatis, & per 3 1 primi ducatur parallela d e.



Demonſtratio Theonis.

Poſtquā igitur, vt ſe habet b c ad b d: ita a c ad a d, per 1. propo. lib. 6: at ſexagecuplo maior eſt b c ipſa b d, erit & ſexagecuplo maius a c ipſo a d, eſt aut a c 1, pars princeps quadrata, ergo & a d erit vna prima ſexageſima, quæ continetur ab a b, 1 pte & b d prima ſexageſima. Quare pars ducta per primam ſexageſimā procreat ſexageſimā primā. Similiter ſi accipiamus ſexageſimam partē ipſius b d, quæ ſit b f, & per f ducatur parallela f g, erit f a vna ſecunda ſexageſima contenta ſub a b 1 parte & b f vna ſecunda ſexageſima: itaq; pars ducta in ſecundam ſexageſimam creat ſecūdam ſexageſimam, & ita in tertias ducta creabit tertias &c. Deinde prima ſexageſima in primam ſexage-

ſexageſimam ducta, gignit ſecundam ſexageſimam. Diuidatur a b in 60 æqualia, & ſit ipſius vna ſexageſima prima b h, & ducatur parallela h i, eritq; ipſum b i vna ſexageſima prima ipſius d a: at ipſum d a eſt vna ſexageſima prima ipſius c a, erit itaq; b i ſecunda ſexageſima ipſius c a, & continetur b i ſub b h & b d primis ſexageſimis ipſarum b a vnius & b c vnius partis, quare prima in primam procreat ſecundam. Rurſus prima in ſecundam ducta parit tertiam, poſtquam autem a f eſt vna ſecunda ſexageſima, & eius eſt ſexageſima pars f h: ergo ipſum f h tertia eſt ſexageſima, & cõtinetur ſub b h prima ſexageſima & b f ſecunda: quare prima in ſecundã ducta facit tertiã. Deinde ſecunda in ſecundas ducta facit quartas, ſumatur ex b h pars ſexageſima b k, quæ erit ſexageſima ſecunda, & per k ducatur parallela ipſi b f linea k l: poſtquam autem f h demonſtrata eſt tertia ſexageſima, eſtq; ipſius ſexageſima pars ipſum b l, erit ergo b l quarta ſexageſima & continetur ſub b k & b f vnaquaq; earum exiſtente ſecunda ſexageſima: qnare ſecunda per ſecundã ducta facit quartam. Quod autem pars ducta per ſexagenas procreet ipſaſmet, notum eſt: quia ſexagenæ ſunt ſexagenariæ collectiones vnitatum: & in quencunq; numerum ducitur vnitas illumme tprocreat.

Poſtquam autẽ pars ducta in ſexageſimas & ſexagenas illammet ſpecie in quam ducitur procreat, reliquum eſt demonſtrare ex analogia ſeu proportione per 16 & 17 ſexti, aut per 19 & 20 ſeptimi, reliquas denominationes ex multiplicatione vnius cuiuſq; in alteram ductu prouenientes.

Sexa-

Sexagenæ.							*Sexageſimæ*			
quint.	*quar.*	*tert.*	*ſecū.*	*prim.*	*μοιρα̃ pars.*	$\overline{1}$.	$\overline{2}$.	$\overline{3}$.	$\overline{4}$.	$\overline{5}$.

Hæ magnitudines ſunt continuò proportionales ratione ſexagecupla. Sed pars in $\overline{2}$ ducta facit $\overline{2}$, ergo per 17 ſexti $\overline{1}$ in $\overline{1}$ facit $\overline{2}$: ſi pars in $\overline{3}$ facit $\overline{3}$, ergo $\overline{1}$ in $\overline{2}$ facit $\overline{3}$. Item pars, $\overline{2}$, $\overline{4}$, ſunt proportionales, ſed pars in $\overline{4}$ facit $\overline{4}$: ergo per eandem, $\overline{2}$ in $\overline{2}$ ducta facit $\overline{4}$, & $\overline{1}$ in $\overline{3}$ facit $\overline{4}$. Deinde, pars ducta in $\overline{5}$ facit $\overline{5}$: ſed vt ſe habet pars ad $\overline{2}$, ita $\overline{3}$ ad $\overline{5}$: ergo per 16 ſexti, & 19 ſeptimi, $\overline{2}$ ducta in $\overline{3}$ facit $\overline{5}$. Eadem ratione, ſi accipias quatuor proportionales partē, $\overline{1}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, colliges ex $\overline{1}$ in $\overline{4}$, fieri $\overline{5}$. Item ſi pars in $\overline{6}$ facit $\overline{6}$, faciet $\overline{1}$ in $\overline{5}$ ducta, $\overline{6}$, & $\overline{2}$ in $\overline{4}$ ducta, $\overline{6}$, & $\overline{3}$ in $\overline{3}$ ducta, $\overline{6}$. Quare addendo numeros denominatores, fiet numerus denominationis partis prouenientis ex multiplicotione, ſiue ſint ſexageſimæ, ſiue ſexagenæ.

Corollarium.

Si verò ducas ſexagenam per ſexageſima eiuſdem denominationis, 17 propoſitione 6. probatur prouenire ſemper pars, ſeu vnitas: quia vnitas eſt medio loco proportionalis, vt ex prima ſexagena in $\overline{1}$ ſexageſimam, & ex ſecunda in $\overline{2}$, & tertia in $\overline{3}$, ſemper prouenit vnitas, nempe pars. At ſi ſint diuerſarum denominationum, ex 16 propoſitione ſexti colligetur denominatio proueniens. Vt ſi ducatur ſecunda ſexagena in $\overline{1}$ ſexageſimā: quia ſecunda, prima, pars, $\overline{1}$, ſunt quatuor proportionales, & ex prima in partem ducta fit prima ſexagena: quare ex ſecunda ſexagena in $\overline{1}$ proueniet prima ſexagena. Sic ſi ducas primam ſexagenam in $\overline{2}$ ſexageſimam: quia ex parte in $\overline{2}$ ſexageſimam, fit $\overline{2}$ ſexageſima, proueniet ex ductu primæ ſexa-

O genæ

genæ in $\bar{2}$ sexagesimã $\bar{1}$ sexagesima, & ita de reliquis erit dicendum.

Corollariũ Ex quo sequitur, si denominatorem minorem subtrahas à maiore, remanebit denominatio prouenien ex multiplicatione sexagenæ in sexagesimã. Quod si maior denominatio sit sexagesimæ, proueniet sexagesima: si minor denominatio sit sexagenæ, fiet sexagena.

Ex problemate 5. huius colligẽtur prorsus eædem partiũ denominationes, ex multiplicatione prouenientes.

Dispone continua proportione sexagenas, & sexagesimas vt partes vulgares, vt vides.

quart.	tert.	secun.	prim.	pars.	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\frac{12960000}{1}$	$\frac{216000}{1}$	$\frac{3600}{1}$	$\frac{60}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{3600}$	$\frac{1}{216000}$	$\frac{1}{12960000}$

Duc partem, nempe $\frac{1}{1}$ in quancunq; partem, procreabitq́ eandem speciē: vt si ducas $\frac{1}{1}$ in $\frac{3600}{1}$ fiet necessariò $\frac{3600}{1}$, id est, secunda sexagena: Duc $\frac{1}{1}$ in $\frac{1}{3600}$ & fiet $\frac{1}{3600}$, quæ est $\bar{2}$ sexagesima. Et sic de alijs. Deinde duc $\frac{1}{60}$ in $\frac{1}{3600}$, scilicet $\bar{1}$ in $\bar{2}$, & fiet $\frac{1}{216000}$, quæ est $\bar{3}$ sexagesima. Sic si ducas $\frac{60}{1}$ in $\frac{3600}{1}$, scilicet primam sexagenam in secundam sexagenam, proueniẽt $\frac{216000}{1}$, scilicet tertia sexagena. Præterea si $\frac{1}{3600}$, id est, secundam sexagesimam ducas in $\frac{3600}{1}$, id est, secundam sexagenam, fient $\frac{3600}{3600}$, quæ sunt $\frac{1}{1}$, id est pars. Atq; ita de reliquis. Quòd si ducas secundam sexagenam $\frac{3600}{1}$ in $\bar{1}$, id est in $\frac{1}{60}$ prouenient $\frac{3600}{60}$, quæ sunt $\frac{60}{1}$, id est vna prima sexagena. At si ducas $\frac{1}{3600}$, nempe $\bar{2}$ sexagesimam in $\frac{60}{1}$ fiet $\frac{60}{3600}$, quæ sunt $\frac{1}{60}$, scilicet $\bar{1}$ sexagesima. &c. Ex his demonstrationibus in gratiam tyronum facta est sequens tabella.

Ta

Tabella denominationum ex multiplicatione genitarum.

	quint.	quar.	tert.	ſecun.	prim.	pars.	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
quint.	deci.	non.	octa.	ſept.	ſext.	quint.	quar	tert.	ſecun	prim.	pars
quar.	non.	octa.	ſept.	ſext.	quint.	quar.	tert.	ſecun.	prim.	pars	$\overline{1}$
tert.	octa.	ſept.	ſext.	quint.	quar.	tert.	ſecun	prim.	pars	$\overline{1}$	$\overline{2}$
ſecun.	ſept.	ſext.	quint.	quar.	tert.	ſecun.	prim.	pars	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
prim.	ſext.	quint.	quar.	tert.	ſecun.	prim.	pars	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
pars	quin.	quar.	tert.	ſecun.	prim.	pars	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	quar.	tert.	ſecun.	prim.	pars	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	4	$\overline{5}$	6
$\overline{2}$	tert.	ſecun.	prim.	pars	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	4	$\overline{5}$	6	$\overline{7}$
$\overline{3}$	ſecū	prim.	pars	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	5	6	$\overline{7}$	8
$\overline{4}$	prim.	pars	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	4	$\overline{5}$	6	$\overline{7}$	8	$\overline{9}$
$\overline{5}$	pars.	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	6	$\overline{7}$	8	$\overline{9}$	$\overline{10}$

Vſus tabulæ.

Sexagenæ literis expreſſæ ſunt, ſexageſimæ verò characteribus numerorum apice ſupra ſcripto. Per prim. intelligitur prima ſexagena, quæ ſignum phyſicum dicitur. Per $\overline{1}$ intelligitur prima ſexageſima, quæ minutū & ſcrupulus ab alijs dicitur. Accipe in vertice tabulæ denominationem vnam, alteram verò in latere ſiniſtro, & in proſelyde, ſiue angulo communi inuenies denominationem ex multiplicatione genitam.

Quando fit multiplicatio per conuerſionem quid eſt agendum?

Multiplicati numeri partes conuertes ad minimam, reſoluendo eas per ſexagenariā multiplicationē, & multiplicantis partes ſimiliter conuertes ad minimas. Deinde vnā in alteram duces, & producto denominationē dabis iuxta tabellam denominationū, deinde diuidēdo per 60 reduces ad maiores partes: vt si ducantur 30 secun. 23 primæ sexagenæ, per 39 partes, 28 Ī. Ducito 30 secun. per 60, & fiunt 1800 primæ sexagenæ, quibus addentur 23 primæ sexagenæ, eruntq́ 1823 primæ. Præterea duc 39 partes per 60, & fiunt 2340 Ī: quibus adde 28 Ī, fiuntq́ 2368 Ī. Duc modo 1823 primas per 2368 Ī, & prouenient 4316864, quæ dicendæ sunt partes. Nam primæ in Ī ductæ gignūt partes, quas diuide per 60, & fiunt 71947 primæ, relictis 44 partibus. Rursus diuide per 60, & colliges ex 71747 primis, 1199 secundas, relictis 7 primis. Rursus diuide 1199 secundas per 60, & fient 19 tertiæ, & remanent 59 secundæ. Quare si ducas 30 secun. 23 primas sexagenas per 39 partes, 28 Ī, prouenient 19 tertiæ sexagenæ, 59 secundæ, 7 primæ, 44 partes.

Exemplū

Quando fit multiplicatio per tabulam proportionalem sexagenariam, quid est agendum?

Tabula proportionalis sexagenaria dicitur, quòd ratione sexagecupla componatur, & nullus numerus in eius area reperiatur maior 60. Sed quando ex ductu vnius numeri in alium proueniret maior, aut æqualis numerus 60, pro singulis 60 accipitur 1, vt si essent ducenda 20 per 20, fierent 400, quæ si ad sexagenas reducantur, erunt 6, & 40. Proinde in tabula ad profelydē 20 in vertice, & 20 in latere sinistro acceptorum, habes 6.40: ex quibus numeris 6 dicitur sinister, 40 dexter. Dextro quidem denominatio præscripta, in tabella denominationum genitarū, cōferenda est: sinistro verò numero tribuenda est semper denominatio vno ordine proximè maioris partis. Vt si ducas 20 partes per 20 Ī. notum est prouenturas Ī sexagesimas. Quare quum in tabula proportionali habeas 6.40,

erunt

erunt 40, 1 sexagesimæ, 6 verò erunt partes. Si rursus ducas 20 1 sexagesimas in 20 3. prouenient 6 5, 40 4. Si ducas 20 primas sexagenas in 20 secundas sexagenas, prouenient 6 secundæ, 40 tertiæ sexagenæ. Si ducas 20 secundas in 20 2, prouenient 6 primæ, 40 partes, & ita de reliquis est dicendum. Area tabulæ dicitur quid quid est in tabula præter supremam seriẽ, quæ vertex, caput, & frons dicitur: & præter extimam seriem descendentem ad latus sinistrum.

Dispone numerum multiplicandũ cum suis titulis denominationum, seruata analogia denominationum. Similiter dispones multiplicantis numeri singulas particulas sub titulis proprijs, & subscribes virgulam, ducesq; particulam multiplicantis potentia maiorem, per singulas multiplicandi, & sub titulis denominationum, ex multiplicatione prouenientium genitas, collocabis. Deinde secundam particulam multiplicantis similiter duces per singulas multiplicandi, & prouenientes particulas, sub proprijs titulis dispones, & ita ages de reliquis particulis multiplicandi, si plures habeat. Si multiplicandi numeri particulã accipias in vertice tabulæ, multiplicantis accipies in latere sinistro tabulæ, & in proselyde inuenies particulam prouenientem: toties autem ingredieris tabulam, quoties multiplicabis. Si multiplicãdus habeat tres particulas, seu tria segmenta, & multiplicans vnam, ter ingredieris in tabulã. Si verò multiplicans habeat duas, tunc sexies ingredieris in tabulam, & ita de alijs. Non refert, num in fronte, an in latere sinistro tabulæ accipias multiplicandum: sed si hunc accipias in fronte, multiplicantẽ accipies in latere sinistro: quòd si multiplicandũ accipias in latere sinistro, tum multiplicantem accipies in fronte tabulæ.

Canon multiplicationũ per tabulam proportion.

Exemplum.

Sint multiplicandæ per tabulam 67 partes, 4 $\bar{1}$, 55 $\bar{2}$, per ſemet. Nam hæ dicuntur à Ptolemæo latus tetragonicum 4500. in tabula non reperies 67. proinde conuerte ad ſexagenas & fac 1 primam, 7 partes, 4 $\bar{1}$, 55 $\bar{2}$. Diſpone vt vides, duc 1 per 1 & reperio in tabula 0—1, ex quibus 1 eſt ſecunda, quia prima ducta per primam creat ſecũdam: quare erit 0 tertia 1 ſecunda, duco primam 1 per 7 partes, & inuenio in tabula 0—7, quæ vno interuallo dimiſſo ſcribo verſus dextram: nam ſunt ex ante dictis 0 ſecundę 7 primæ. Deinde duco 1 in 4, & ſunt 0—4, quæ noto vno limite dimiſſo, deinde duco 1 per 55 & ſunt 0—55, quæ noto verſus dextram vno limite dimiſſo. Prætere a duco 7 multiplicantis in 1 multiplicandi & fiunt 0—7, quæ ſunt 0 ſecundæ 7 primæ, deinde duco 7 in 7 & ſunt 0—49, quæ noto vno limite dimiſſo Deinde duco 7 per 4, & ſunt 0—28, quæ noto verſus dextram vno limite ommiſſo. Deinde duco 7 per 55 & in tabula inuenio 6—25, quæ noto verſus dextram vno limite omiſſo. Præterea duco 4 multiplicãtis per 1, & fiũt 0 primæ, 4 partes, quas noto ſub proprijs titulis. Deinde duco 4 per 7 & fiunt 0—28, quæ noto vno limite ommiſſo, deinde duco 4 per 4, & fiunt 0—16, quæ noto vno limite ommiſſo. Deinde duco 4 per 55, & proueniunt 3—40, quæ noto vno limitæ ommiſſo. Præterea duco 55 per 1, & fiũt 0—55, quæ ſunt 0 pars 55 $\bar{1}$, quas ſub proprijs ſedibus colloco,

ſec.	prim.	part.	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	
	1	7	4	55			
	1	7	4	55			
0—1	7	4	55				
	0	0	0				
	0—7	49	28	25			
		0	0	6			
		0—4	28	16	40		
			0	0	3		
			0—55	25	40	25	
				6	3	50	
1.	14.	59.	59.	14.	10.	25.	

loco, deinde duco 55 per 7, & ſunt 6—25, quæ noto verſus dextrā vno limite ommiſſo, deinde duco 55 per 4 & ſunt 3—40, quæ noto verſus dextrā vno limite ommiſſo, deinde duco 55 per 55, & inuenio in tabula 50—25, quæ noto verſus dextram vno limite ommiſſo. Factis omnibus multiplicationibus colloco lineam, & colligo omnes numeros & inuenio 1 ſecun. 14 prim. 59 part. 55 $\overline{1}$, 14 $\overline{2}$, 10 $\overline{3}$. 25 $\overline{4}$. Quod ſi vni ſecundæ ſexagenæ, quæ eſt 60 prim. addas 14 prim. facies 74 primas, quæ ductæ per 60 efficiunt 4440 partes, quibus ſi addas 59 part. 59 $\overline{1}$, 14 $\overline{2}$, 10 3, 25 $\overline{4}$ inuenies ex ductu 1 primæ & 7 partium 4 $\overline{1}$, 55 $\overline{2}$, prouenire 4499 partes 59 $\overline{1}$, 14 $\overline{2}$, 10 $\overline{3}$, 25 $\overline{4}$.

Multiplicare per 60 abſque aliqua denominatione, quid ſit?

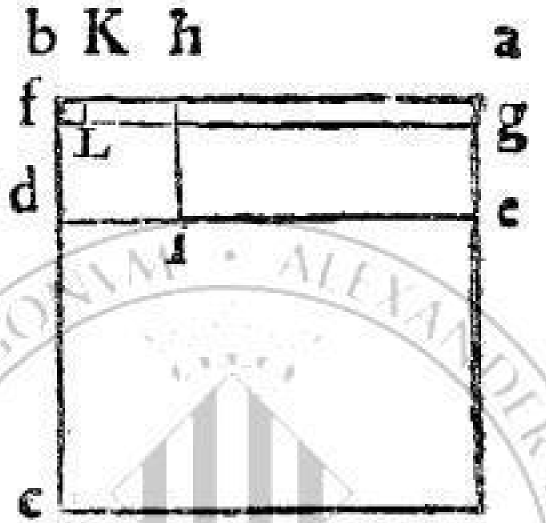
Eſt datas quaſcunq; partes vno ordine augere, ſcilicet ex $\overline{3}$ facere $\overline{2}$, ex $\overline{2}$ facere $\overline{1}$, ex $\overline{1}$ partes, ex partibus primas &c. ſimiliter. Vt ſi ducas 10 partes per 60, protinus dicito fieri 10 primas ſexagenas: quia ſi ducas 10 per 60, fiūt 660 partes, quæ faciunt per 60 diuiſæ 10 primas ſexagenas. Si ducas per 60 numerum 15 prim. 23 par. 43 $\overline{1}$, 37 $\overline{2}$, auge vno ordine, & fient 15 ſecun. 23 prim. 43 part. 37 $\overline{1}$: quādo enim fit ſolum per 60 multiplicatio eadem pars ſumitur, ſexagies abſq; mutatione denominationis, quare cum ſexagies ſumatur, fiet alia vno ordine proximè maior. Quando ex vna parte per reductionem facis 60 alias proximè minores: vt ex 4 partibus multiplicando per 60 fiunt 240 $\overline{1}$: tunc eas reſoluis ſeu ſecas in alias, non autem propriè multiplicas per 60: id eſt non aceruas ſeu cōponis 60 ſimilis denominationis partes, quo fit vt in ea multiplicatione per 60, non proueniant partes maiores, ſed minores.

PRO-

PROBLEMA 12.

Datā, aut datas Astronomicas partes per alias quascunque diuidere.

Diuisio necessariò respōdet multiplicationi. Quare notis denominationibus partis multiplicantis, & multiplicandæ, ex quibus facta est pars, quæ diuiditur, si per vnam, vt verbi gratia multiplicantem, summa multiplicationis diuiditur, necessariò debet prouenire pars multiplicanda. Vt si ex partibus 10, in 5 $\overline{1}$, factæ sint 50 $\overline{1}$: si diuidas 50 $\overline{1}$ per 5 $\overline{1}$, prodibunt 10 partes. Si verò 50 $\overline{1}$ diuidas per 10 partes, necessariò prodibūt 5 $\overline{1}$. Si 10 partes ductæ in 5 $\overline{2}$, faciunt 50 $\overline{2}$. Si diuidas 50 $\overline{2}$ per 5 $\overline{2}$, prouenient 10 partes. Quòd si diuidas per 10 partes 50 $\overline{2}$, prouenient 5 $\overline{2}$. Itē ex $\overline{1}$ in $\overline{2}$ fit $\overline{3}$: quare diuisa $\overline{3}$ per $\overline{1}$, prodibit $\overline{2}$: diuisa $\overline{3}$ per $\overline{2}$ prodibit $\overline{1}$. Item $\overline{4}$ fit ex parte ducta in $\overline{4}$, & ex $\overline{3}$ ducta in $\overline{3}$, & ex $\overline{2}$ in $\overline{2}$. Ergo resoluendo, si $\overline{4}$ diuidatur per partem prouenie t $\overline{4}$, si diuidatur $\overline{4}$ per $\overline{4}$ proueniet pars. Si verò diuidatur $\overline{4}$ per $\overline{1}$, proueniet $\overline{3}$: si per $\overline{3}$, proueniet $\overline{1}$. Si vero $\overline{4}$ diuidatur per $\overline{2}$, proueniet $\overline{2}$. Hæc, ex schemate proximè præcedentis problematis, diuisis rectangulis per latera sua, intelligi manifestè possunt, conuertendo scilicet rectangula ex multiplicationibus facta, in sua latera. Nam si rectangulū a d factū est ex b a vna parte, b d vna sexagesima prima. Si a d diuidatur per b d $\overline{1}$, prodibit a b pars; si a d diuidat $\overline{1}$, per b a partem, prodibit b d $\overline{1}$. Item, si rectangulum h d vna $\overline{2}$ rectanguli a e, diuidatur per b d $\overline{1}$, prodibit b h $\overline{1}$. Et si rectangulum f a, quod est vna



est vna 2 æqualis ipsi h d, diuidatur per b f 2, proueniet b a pars seu vnitas: Si per b a partem proueniet b f 2 &c.

Cæterum si perpendisti quæ adhuc conclusa sunt, facile inueneris denominationem ex diuisione prouenientem, quando sexagesima, aut sexagena diuidenda habet maiorem denominationem quàm diuidēs, tunc enim subtracta denominatione eius, quæ diuidit à denominatione diuidendæ, remanet denominatio eius, quæ prouenit ex diuisione: dummodo numerus diuidendus sit maior aut æqualis numero diuidenti. Nam tum vno interuallo est denominatio minuenda in sexagenis, augenda verò in sexagesimis: vt si diuidas 50 $\overline{5}$ per 10 $\overline{4}$, prouenient 5 $\overline{1}$: quia 10 $\overline{4}$ ductæ per 5 $\overline{1}$, faciūt 50 $\overline{5}$. Verùm si diuidas 8 $\overline{5}$ per 10 $\overline{4}$, proueniēt 48 $\overline{2}$: quia si ducas 48 $\overline{2}$ per 10 $\overline{4}$, fient 480 $\overline{6}$, quæ diuisæ per 60 reddunt 8 $\overline{5}$.

Si verò diuidas sexagenam per aliam sexagenā maioris denominationis, p̄uenit sexagesima eius denominationis, quam dat subtractio vnius denominationis ab altera: vt si diuidas 10 secundas sexagenas per 1 quartam sexagenam prouenient 10 $\overline{2}$ sexagesimæ. Similis ratio est quando diuidis 10 2 sexagesimas per 1 $\overline{3}$ sexagesimam: nam prouenient 10 secundæ sexagenæ: quia si ducas 10 secundas sexagenas per 1 $\overline{3}$, prouenient 10 $\overline{2}$ sexagesimæ: modò numerus diuidendus sit maior diuidente, alioqui vno ordine prouenit minor pars, vt si diuidas 5 2 per 10 3 sexagesimas proueniēt 30 partes: nam si ducas 30 partes per 10 $\overline{3}$, prouenient 300 $\overline{3}$, quæ sunt 5 $\overline{2}$. Sed in gratiam tyronum hæc luculentius sequentibus regulis dilucidabuntur. Diuisionibus astronomicis non solùm maior numerus per minorem, sed & minor per maiorem diuidi potest. Hæc enim non differunt à diuisionibus vulgarium partium, vt patebit ex sequentibus.

P Canon

Canon generalis prouenientium ex diuisione denominationum.

Quando numerus partiū astronomicarum diuidendus, fuerit maior diuidente, denominatio ex diuisione prouenens, tantùm distabit ab vnitate, quæ partem principem seu gradum præsefert, quantum denominatio partis diuidendæ distat à denominatione partis diuidentis.

Disponantur denominationes partium cōtinua proportione sic.

Sexagenæ						*Sexagesimæ*				
quint.	quart.	tert.	secun.	prim.	pars 1	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

Canon particularis 1. *Si* pars princeps per partem principem diuidatur, prouenit pars princeps.

Canon 2. *Si* per partes principes sexagesimæ, aut sexagenæ diuidantur prouenit eadem specie pars. Vt si diuidas per partes principes $\bar{2}$ sexagesimas, prouenient $\bar{2}$ sexagesimæ: nam ex ductu $\bar{2}$ in partē fit $\bar{2}$, & tantùm distat $\bar{2}$ ab vnitate, quantum denominatio $\bar{2}$ diuidendarnm abest à denominatione partium principum.

Canon 3. Si partes principes diuidantur per sexagenas aut sexagesimas, prouenit denominatio eiusdem numeri, sed alterius generis: vt si diuidantur per $\bar{2}$ sexagesimas, proueniēt secundæ sexagenę. Scribe astronomicas partes instar vulgarium partium. Erit itaq; pars princeps $\frac{1}{1}$, & vna $\bar{2}$ erit $\frac{1}{3600}$, iuxta problema 6. huius, si diuidas $\frac{1}{1}$ per $\frac{1}{3600}$ prouenient $\frac{3600}{1}$, nēpe vna secūda sexagena. Quod si diuidas, $\frac{1}{1}$ per secundā sexagenam, scilicet $\frac{3600}{1}$, proueniet $\frac{1}{3600}$, id est 1 $\bar{2}$ sexagesima: Tantùm enim distat $\bar{2}$ sexagesima prouenіens ex diuisione ab 1, quātum distat $\frac{1}{1}$ diuidenda à de-à denominatione secundarum sexagenarum, quæ est denominatio diuidens.

Si pars diuidatur per alteram eiusdem generis, alterius tamen denominationis, demes denominationē minorem à maiore, & quod remanebit, dabit denominationem prouenienti parti, quæ erit eiusdem generis, si denominatio partis diuidendæ sit maior denominatione diuidēntis: alioqui erit alterius generis. vt si diuidas 2 per 1 fiunt 1 sexagesimæ, quod si diuidas 1 per 2 fiet primæ sexagenæ: quia 1 per 1 ductæ faciunt 2: & 2 per primas sexagenas ductæ faciunt 1. Et tantùm distat prima sexagena ab 1 quantum 1 à 2. Ad hæc si diuidas $\frac{1}{60}$ primam sexagesimam, vt diximus problema 6. huius, per $\frac{1}{3600}$, prouenient $\frac{3600}{60}$, quæ sunt $\frac{60}{1}$ nempe vna sexagena. Canon 4. Exemplū

Omnis pars quæ per seipsam diuiditur, procreat partes principes. Vt si diuidas 1 per 1 nempe $\frac{1}{60}$ per $\frac{1}{60}$ fiunt $\frac{60}{60}$, id est $\frac{1}{1}$. Si diuidas $\frac{60}{1}$ per $\frac{60}{1}$, fient $\frac{60}{60}$, id est $\frac{1}{1}$. Canon 5.

Si sexagena diuidatur per sexagesimam, aut vice versa prouenit pars denominata à denominatoribus earum simul iunctis, atq; est semper eiusdem generis cum ea quæ diuiditur. Vt si diuidas $\frac{1}{60}$ per $\frac{60}{1}$ fiet $\frac{1}{3600}$, id est 1 2, quod si primam sexagenam, nempe $\frac{60}{1}$ diuidas per vnam sexagesimam primam, id est $\frac{1}{60}$, prouenient $\frac{3600}{1}$, id est vna secunda sexagena. Canon 6. Exempl.

Omnes hæ regulæ veræ sunt quando numerus diuidendus est maior, aut æqualis diuidenti, alioqui proueniet pars vno ordine minor: quod antea declarauimus.

Quando fit diuisio per conuersionem quid est agendum?

Cōuertes omnes partes diuidendas ad minimas, pariter & diuidentes, si peracta conuersione diuidendus numerus sit maior, cum diuides per diuisorem, & prouenit pars denominanda secundum traditas regulas, quod ex-

P ij uniuisione remanebit ducetur per 60, & productũ diuidetur per primum diuisorem, & proueniet pars vno ordine minor, &c. similiter. Si peracta cõuersione ad minimas partes, diuidendus numerus sit diuisore minor, eum multiplicabis toties per 60, imminutis vno ordine partibus, donec fiat diuidendus maior, & tunc diuidetur per diuisorem, vt antea. Vt si diuidas 23 partes principes per 8 I sexagesimas, per 3 canonem prouenient 2 primæ sexagenæ, relictis 7 partibus principibus, quas conuertes, ducendo per 60, ad 420 I, quæ diuisæ per 8 I relinquunt pro quoto 52 partes principes, per 5 canonem, & remanẽt 4 I, id est 240 2, quæ diuisæ per 8 I, creant 30 I, per 4 canonem, & nihil remanet: quare si diuidas 23 partes principes per 8 I sexagesimas, prouenient 2 primæ sexagenæ, 52 partes principes, 30 I sexagesimæ. Sint rursus diuidendæ 7 partes principes per 10 2. Manifestum est 7 non posse diuidi per 10, quare ex 7 partibus efficio 420 I, quas diuido per 10 2, & prouenient 42 primæ sexagenæ, per canonem 4. Duc 42 primas sexagenas per 10 2, & fiunt 420 I, quæ diuisæ per 60 faciunt 7 partes principes.

Exemplũ (beside "antea. Vt si diuidas") · *Aliud.* (beside "cipes, 30 I sexagesimæ") · *Examen.* (beside "42 primas sexagenas")

Aliud exemplũ

Rursus diuidantur 8 primæ sexagenæ, 15 partes, per 2 I, 50 2. ex diuidendo efficio 495 partes, ex diuisore verò 170 2. quod si diuidas 495 partes per 170 2, prouenient 2 secundæ sexagenæ, per 3 canonem, & remanent 155 partes, quæ nequeunt diuidi per 170 2. Quare ex ipsis efficio 9300 I, quas diuido per 170 2, proueniuntq; 54 primæ sexagenæ, & remanẽt 120 I, quas iterum resoluo in 7200 2, quas diuido per 170 2, & prouenient 42 partes, relictis 60 2, quæ resoluentur in 3600 3, quæ diuisæ per 170 2, exhibent 21 I. Quòd si velis vlterius, sic diuidendo, procedere, inuenies, diuisis 8 primis sexagenis, 15 partibus

per

per 2 $\overline{1}$, 50 $\overline{2}$, prouenire 2 secundas sexagenas, 54 primas, 42 partes, 21 $\overline{1}$, 10 $\overline{2}$, 35 $\overline{3}$, &c.

Quis ordo seruandus in diuisione partium Astronomicarum per tabulam proportionalem?

Quò hoc genus diuisionum priore compendiosius, eò tyronibus videtur difficilius: quum veteranis, quorū sententiæ standum est, videatur facilius. Omnes numeri areæ tabulæ proportionalis sexagenariæ fiunt ex ductu duorū numerorum, quorum alter extat in fronte, alter verò in latere sinistro, & ad proselydem horum occurrit arealis numerus, qui diuidendum numerum præsefert. Quare diuidendus numerus quæretur in area, quòd si diuisor accipiatur in fronte, quotus ex diuisione reperietur in latere sinistro: & si diuisor accipiatur in latere sinistro, quotus reperietur in fronte, eritq́ꝫ diuidēdus proselys, seu angulus cōmunis diuisoris & quoti. Annotatio

Deinde sciendum, habendam esse rationem numerorū diuidendi & diuisoris, perinde ac in integris: vt si in 34 nō continentur 9 plus quàm ter, nec in tabula poterit inueniri alius numerus quotus maior ternario, & iuxta rationem 7 remanentium quæretur deinde pars quota. Atq; quādo numerus diuidendus est æqualis, aut maior diuisore, habita ratione omnium particularum vtriusq;, tunc diuidēdus accipietur inter numeros areales dextros: si verò diuidendus sit minor diuisore, tunc quæretur diuidendus inter numeros areales sinistros: alioqui toto errares cœlo. Vt si diuidas 1 $\overline{1}$, per 6 $\overline{1}$, notum est, 1 non posse diuidi per 6: cæterum si ex 1 $\overline{1}$ efficias 60 $\overline{2}$, tunc prouenient 10. Proinde quādo 1 præcipitur diuidi per 6, debet quæri sexta pars vnius, quam inuenies in tabula proportionali, sic, Annotatio

Quando diuisor habet vnam particulam, quomodo fiet per tabulam diuisio?

Accipe diuisorem in fronte tabulæ, sub quo rectè descendẽdo inter numeros areales dextros, si diuidendus sit maior aut æqualis diuisori: alioqui si sit minor, inter areales sinistros, quæres diuidendum aut eo proximè minorẽ, è regione verò in sinistro latere inuenies quotum respondentem, qui secundum prædictos canones denominationem accipiet. Notabisq; eum inter lineas paralelas sub suo titulo, relictum verò numerum ex diuidendo rursus quæres sub eodem diuisore aut eo proximè minorem, & è regione similiter vt prius, in latere sinistro inuenies alium quotum, qui erit vno ordine minor prius inuẽto, & ita de alijs. Idẽ obtinebis, si diuisor sumatur in latere sinistro, & diuidendus aut eo proximè minor è regione dextrorsum, tunc quotus reperietur in fronte directè supra diuidendum, aut supra eo proximè minorem, &c. similiter.

Exemplũ

Sint diuidendæ 1 1 $\bar{2}$ per 2 $\bar{1}$, colloca numeros vt vides.

$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
	1	
	1 1	
5.	30	
2.		

Accipe 2 diuisoris in fronte tabulæ, sub quo directè descendendo inter numeros areales dextros, quia maior diuiditur per minorem, quæres 11, quem non inuenies, sed 10, qui numerus est eo proximè minor, quare accipio 10. & è regione in latere sinistro inuenio 5, qui est quotus proueniens ex diuisione 10 per 2: eruntq; per canonem 4 sexagesimæ primæ, ideo inter parallelas sub titulo $\bar{1}$ scribo 5 $\bar{1}$, quæ ductæ in 2 $\bar{1}$ faciunt 10 $\bar{2}$, quas demo ex 1 1 $\bar{2}$, & remanet 1 $\bar{2}$, quæ scribetur supra 1 1 $\bar{2}$ expun-

expunctas. Præterea ſub 2 diuiſoris in fronte acceptis, quære directe deſcendendo inter areales numeros ſiniſtros, quia minor numerus diuiditur per minorem, relictã 1 diuidendam, & reperies è regione ad latus ſiniſtrum, reſpondere 30, quæ vno ordine faciunt particulam minorẽ, nẽpe ſexageſimas $\overline{2}$, quas noto inter parallelas ſub titulo $\overline{2}$ & quum nihil remaneat, prorſus eſt diuiſio peracta, & ex diuiſione 11 2 per 2 $\overline{1}$ pronunciabo prouenire 5 $\overline{1}$, 30 $\overline{2}$.

Quando diuiſor habet multas partes, quid eſt agendum?

Et ſi poſſunt omnes partes diuiſoris in fronte tabulæ accipi, & ſub eius partibus diuidendi partes inquiri, aut eo proximè minores, & è regione in ſiniſtro latere accipi poteſt numerus quotus, vt dictum eſt in præcedenti canone: commodius tamen accipiẽtur omnes eius partes in latere ſiniſtro, & è regione primæ partis diuiſoris dextrorſum accipies primam partem diuidẽdi numeri, aut ea proximè minorem, & in eadem linea à fronte ad calcem deſcendente, accipies numeros reſpondentes reliquis partibus diuiſoris in ſiniſtro latere acceptis, & coniunges numeros areales reſpondentes partibus diuiſoris, ſic vt numerus arealis dexter reſpondens vni parti diuiſoris iungatur cum numero areali ſiniſtro reſpondente alteri parti diuiſoris: quod ſi ſic coniuncti numeri areales ſingulis partibus diuiſoris in latere ſiniſtro acceptis reſpondentes, poſsint demi à numero diuidendo, accipies in fronte tabulæ numerum reſpondentem omnibus illis arealibus in eadem linea ſub ſe collocatis, pro numero quoto, qui

qui obtinebit denominationem, qualem prima pars maior diuidendi numeri diuiſa per primã partem diuiſoris, ſecũdum præcedentes canones facere nata eſt. Si abſtracto numero coniuncto ex omnibus arealibus à numero diuidendo, aliquid ex diuidẽdo remaneat, rurſus illud per eoſdem diuiſores ibidem acceptos ſimili methodo diuidetur & quotus ſecunda diuiſione proueniens erit pars vno ordine minor, ea quæ primo loco eſt inuenta: cætera perſequeris ſimiliter, donec ex diuidendo nihil remaneat.

Exemplum.

8 primæ ſexagenæ, 15 partes diuidendæ ſunt per 2 ī ſexageſimas 50 z̄. Accipio in latere ſiniſtro 2 & dextrorſum procedẽdo, quia numerus maior per minorẽ diuiditur, inter areales numeros dextros accipio proximè minorem ipſis 8. Nam ſi accipiam 8, in fronte tabulæ reſpondent 4 pro quoto: ſed in 8, 15 non poſſunt 2. 50 contineri quater: quare non accipiam lineam, in qua ipſis 2 diuiſoris in latere ſiniſtro acceptis è regione dextrorſum reſpõdẽt 0—8: quare è regione 2, accipio 0—6, ſub quibus directè deſcendendo è regione 50 diuiſoris in latere ſiniſtro acceptis, inuenio 2—30, quibus iunctis cum 0—6, ſic vt dexter vnius iũgatur cum ſiniſtro alterius, fient 0—8—30, quæ nõ poſſunt demi ex 8.15 diuidendis. Quare è regione 2 in latere ſiniſtro acceptorũ non poſſum accipere 0—6: proinde accipio proximè minorem, ſcilicet 0—4, cui adnecto, vt dictum

ſecun.	primæ	part.	ī	z̄
		2		
	2	35		
	8	15	1	30
2	54	42	21	10
	5 —	40	2	50
				Diuiſor.
	2 —	33		
		1 —	59	
			59 —	30

ctum est, sub 0—4 in eadem linea descendēte, è regione 50 in latere sinistro acceptorum, inuentos numeros 1—40, & fiunt 0—5—40, quę demo ex superioribus 8, 15 diuidendis, & remanent 2, 35, notanda supra 8, 15, & in fronte lineæ, vbi reperi 0—4, & 1—40, inuenio 2, qui est quotus, & per 5 canonē, sunt secundæ sexagenę: noto itaq; inter parallelas sub titulo secund. 2 secund. sexagenas.

Præterea è regione 2 diuisoris in latere sinistro acceptorum inter numeros areales sinistros, quia totus diuisor diuidendo numero maior est, quæro 2, 35 diuidenda, vel proximè minores numeros, ea lege, vt cū ijs numeris, vel proximè minoribus, directè subiectos numeros, è regione 50 diuisoris in latere sinistro acceptorum, coniungam dextrum vnius cum sinistro alterius: qua methodo è regione 2 in latere sinistro acceptorum, primus qui occurrit est 1—48: nam si directè sub 1—48, & è regione 50 in latere sinistro acceptorum descēdas, inuenies 45—0, qui numeri iuncti prædicto modò efficiunt 2—33—0, quæ si demas ex superioribus 2, 35, remanent 2 notanda supra 5, & quia numeros, quos cōiunxi, inueni sub 54, quæ sunt in fronte, accipiam 54 pro secundo quoto, quæ vno ordine partes minuendo, erunt primæ sexagenæ: quare eas noto in propria sede inter parallelas, demptisq; 2, 33, à 2, 35, remanent 2 notanda supra 35. Præterea eadē methodo diuidendo 2, quæ supersunt per 2—50, sub 42 in fronte acceptis, reperio è regione 2 lateris sinistri, 1—24, & sub ijs directe è regione 50 lateris sinistri, reperio 35—0, quæ coniuncta prædicto modo efficiunt 1—59, quibus demptis à 2 superioribus relictis ex diuidendo, remanet 1 1, & noto 42 in fronte inuenta in sequenti sede inter parallelas. Lex coniunctionis

Pręterea si diuidam 1 1 per 2—50, reperio sub 21 in fronte acceptis, è regione 2 lateris sinistri 0—42, & sub eo è

Q regione

regione 50 lateris sinistri, inueniam 17—30, quæ iuncta cū 0—40 faciunt 59—30, demenda ab 1 $\overline{1}$, & remanent 30, quæ notabuntur sub $\overline{2}$, & 21 $\overline{1}$ inter parallelas. Præterea si diuidam 30 per 2—50, inueniam quotum esse 10 $\overline{2}$, notandas inter parallelas. Eadem ratione potero totam diuisionem absoluere. Quare si diuidam 8 primas sexagenas, 15 partes per 2 $\overline{1}$, 50 $\overline{2}$, proueniēt 2 secūdæ sexagenæ, 54 primæ, 42 partes, 21 $\overline{1}$, 10 $\overline{2}$.

De diuisione particularum astronomicarum per 60.

Datam vel datas partes vno ordine minue, & erit peracta diuisio. Vt multiplicatione vno ordine crescunt, sic diuisione vno ordine minuuntur: quare si diuidendæ sunt
Exemplū 10 partes principes per 60, prouenient 10 $\overline{1}$. Nam si ex 10 partibus principibus feceris $\overline{1}$, fient 600 $\overline{1}$, quæ diuisæ per 60, reddunt 10 $\overline{1}$. Adhæc ex canone multiplicationum per 60, si 10 $\overline{1}$ multiplices per 60, efficiunt 10 partes. Item si
Aliud. diuidas 20 partes, 15 $\overline{1}$, 42 $\overline{2}$ per 60, minues partes vno ordine, & prouenient 20 $\overline{1}$, 15 $\overline{2}$, 42 $\overline{3}$.

Vtilitas. Vtilis est hæc diuidendi per 60 ratio ad supputandos motus horarios planetarum, datis diurnis ex ephemeridibus. Subtracto enim loco planetæ initij diei à loco initij proximè sequentis diei, si planeta sit directus, aut vice versa, si sit retrogradus, colligitur motus diurnus planetæ, nempe motus totius diei naturalis, qui constat 24 horis. Iunge itaq; bis 24 & semissem, seu quod idē est, duc 24 per 2 & $\frac{1}{2}$, & proueniunt 60 horæ, qui numerus erit diuisor: & quia per 2 & $\frac{1}{2}$ duxisti 24 horas, ducito motum planetæ diurnum per 2 & $\frac{1}{2}$, eritq; producti ex 2 & $\frac{1}{2}$ horarum ad productum ex 2 & $\frac{1}{2}$ diurni motus planetæ, per 17 in septimi, eadem ratio, qualis est 24 horarum ad diurnum motum planetæ; quare diuiso producto ex 2 & $\frac{1}{2}$ in

Motus diurnus.

$\frac{1}{2}$ in diurnum motum per 60, proueniet idem quotus, qui proueniret ex diuisione diurni motus per 24 horas, vt patet ex definitione proportionalium numerorum. Minues itaq; productum ex 2 & $\frac{1}{2}$ in motum diurnum planetæ vno ordine, & proueniet motus horarius planetæ. Sit motus diurnus lunæ 13 partium, 20 $\overline{1}$, 15 $\overline{2}$: accipe hunc numerum bis, & eius semissem, & colliges 33 partes, 20 $\overline{1}$, 37 $\overline{2}$, 30 $\overline{3}$, quē numerũ si diuidas per 60, proueniet motus horarius lunæ illius diurni, scilicet 33 $\overline{1}$, 20 $\overline{2}$, 37 $\overline{3}$, 30 $\overline{4}$. Quando verbi gratia ex 240 $\overline{1}$ diuidendo per 60, colligis 4 partes, non propriè eas diuidis per 60, sed ex singulis 60 $\overline{1}$ componis vnam partē; ideo non debet prouenire pars minor, sed maior.

Exemplũ.

	part.	$\overline{1}$	$\overline{2}$	
motus Lunæ	13	20	15	
diurnus	13	20	15	
	6	40	7	30
	33	20	37	30

Annotatio

PROBLEMA 14.

Datarum partium astronomicarum latus tetragonicum, aut ei propinquum inuenire.

Denominatio lateris tetragonici

Tetragonicum latus per semet ductũ procreare debet datas partes, aut numerum proximum illis: debet itaq; haberi ratio denominationũ ex multiplicatione prouenientium, ita vt denominator partium datarum habeat medietatem, alioqui si careat, reducetur ad denominationem parem, vt medietas eius denominet partes lateris tetragonici. Nam si $\overline{1}$ in $\overline{1}$ faciunt $\overline{2}$, latus tetragonicum $\overline{2}$, erunt $\overline{1}$: & si $\overline{2}$ per $\overline{2}$ faciunt $\overline{4}$, erit latus tetragonicum $\overline{4}$ denominandum à $\overline{2}$. Quod si quæratur latus tetragonicum $\overline{3}$, resolues $\overline{3}$ in sexagesimas quartas, quarum medietas $\overline{2}$ denominabit latus earum tetragonicum.

Exemplum inuentionis lateris tetragonici per conuersionem.

Latus tetrag.	quart.	secund.
latus	secundarum	primæ
latus	primarum	partes
lat.	part.	partes
lat.	$\overline{2}$	$\overline{1}$
lat.	$\overline{4}$	$\overline{2}$
lat.	$\overline{6}$	$\overline{3}$

Quære latus tetragonicũ 35 part. 16 $\overline{1}$. conuerte 35 partes ad 2100 $\overline{1}$, quibus adde 16 $\overline{1}$, & fiunt 2116 $\overline{1}$, cuius numeri non quæres latus tetragonicum: quia $\overline{1}$ caret medietate, quare conuertes eas ad 126960 $\overline{2}$, cuius numeri latus tetragonicũ est 356 $\overline{1}$, remanentibus $\frac{224}{713}$, quas ex problemate trium rationaliũ conuertes ad $\overline{2}$ & $\overline{3}$ sic: Si 713 dant 60, quantum dabunt 224? & prouenient 18 $\overline{2}$, 50 $\overline{3}$, &c. Deinde reduc 356 $\overline{1}$ ad partes principes, & proueniet totum latus tetragonicũ dati numeri 35 partium, 16 $\overline{1}$: scilicet 5 part. 56 $\overline{1}$, 18 $\overline{2}$, 50 $\overline{3}$, quem numerum si in semet duxeris, procreabit 35 part. 15 $\overline{1}$, 49 $\overline{2}$; quia datus numerus est surdus.

Quæ methodus seruanda ad inueniendum latus tetragonicum per tabulam proportionalem?

Si lineam diagoniã tabulæ, ab angulo sinistro superiori ad dextrum inferiorem obserues, in ea omnes numeros quadratos tabulæ, laterũ verò vnũ in fronte, alterũ verò priori prorsus æquale, in latere sinistro inuenies: quadrati enim numeri in proselydibus duorum æqualium numerorum cõtinentur. Vt si in linea diagonia accipias 10—25 numerum quadratum, in fronte directè habes 25 eius latus tetragonicum, atq; etiam directè ad latus sinistrum pergens reperies 25, alterum latus priori æquale.

Si prima particula sinistra dati numeri denominetur à numero

numero impari, frustra quæres in tabula eius latus tetragonicum, nisi fuerit denominata à prima sexagena. Tunc enim denominabitur prima particula sinistra lateris tetragonici à partibus principibus. Vt si proponatur inueniendum latus tetragonicum 26 primarum sexagenarum, 40 partium. Quæres hunc numerũ in linea diagonia tabulæ, & supra ipsum directe habes 40, nempe partes, quod est eius latus tetragonicũ, in alijs verò quæres latera per reductionẽ. *Si* autẽ denominetur prima particula sinistra à numero pari, inuenietur ferè simili ratione, ac in integris. Si prima particula dati numeri denominetur à primis sexagenis, tunc ingredieris in lineam diagoniam cum dati numeri prioribus duabus partibus: in alijs verò numeris, quorũ prima sinistra particula denominatur à pari numero, primæ eius particulæ accipies latus tetragonicum, vel propinqui numeri, vt in integris absq; tabulæ subsidio, quod notabis infra parallelas, & eius quadratum demes à superioribus: deinde duplicabis latus primò inuentum, & per illud diuides, quod remansit, & illius numeri quoti accipies quadratũ, quod iunges cum producto ex numero quoto ducto in duplum radicis, ea lege, vt dexter vltimus talis producti iungatur cum primo sinistro quadrati facti ex numero quoto, quod si possint demi à superioribus relictis, rite peracta est secũdæ particulæ lateris tetragonici inuentio: sin minus, accipies alium quotũ tantùm vnitate minorem, & tentabis, si ita ductus per duplum radicis, & ipsiusmet quadratum iũcta præscripta lege possint demi à superioribus: quod toties explorabis, donec illa simul iuncta possint à superioribus auferri. Quibus ablatis, notabitur intra parallelas secunda particula lateris tetragonici inuenta, & per ipsas duplicatas quæres tertiam particulã lateris tetragonici, similiter vt inuenisti secũdam &c.

Canon extractionis lateris per tabulam.

Q iij Sit

Exemplū. Sit per tabulam quærendum latus tetragonicum 3 primarū sexagenarum, 50 partium, 1 Ī, 40 Z̄. dispono numeros, vt vides. Quæro in linea diagonia, quæ est quadratorū, duas priores particulas, nēpe 3, 50, quas nō inuenio: quare accipio 3–45, numeros ipsis proximos, quos protinus demo à 3, 50, & remanent 5 supra 50: in fronte verò tabulæ supra 3–45, habeo primā particulam lateris tetragonici, scilicet 15, quæ sunt partes, quas duplico, & fiunt 30, per quas diuido 5 partes 1 Ī, 40 Z̄, accipiens 30 in fronte tabulæ, & descendendo per eandem columnā inter numeros sinistros, quia minor diuiditur per maiorē, inuenio 5–0, & è regione in latere sinistro inuenio 10, cuius numeri quadratum est 1–40: at productum ex duplo lateris, scilicet ex 30 in 10, sunt 5–0, quæ perscripta lege cum 1–40 iuncta faciunt 5–1–40, quæ partialiter exhauriunt relictas 5 partes, 1 Ī, 40 Z̄: quare noto 10 sub Ī inter parallelas, & concludo 3 primarum, 50 partium 1 Ī, 40 Z̄, latus tetragonicum esse 15 partes, 10 Ī. *Examen.* Nam si ducas 15 partes 10 Ī in semet, obtinebis 3 primas, 50 part. 1 Ī, 40 Z̄.

prim.	part.	Ī	Z̄
	5		
3	50	1	40
	15	10	
	30 *diuisor*		
	5—1—40		

Inueniendum est latus tetragonicū 32 part. 45 Ī, 36 Z̄.

Aliud. Dispono numeros cū suis titulis subscriptis duabus virgulis. Quæro primum latus tetragonicum 32 part. aut numeri quadrati proximè minoris, & absq; tabula inuenio primæ particulæ latus tetragonicum esse 5, relictis 7: idem inuenirem in tabula proportionali. *Annotatio* Cæterùm quia pars ducta per partes solum facit partes, non

pars	Ī	Z̄	3	4
7	4	47		
32	45	36	59	35
5	43	25	5	
10 *diuisor* 1.				
7—40—49				
11—26 *diuisor* 2.				
	4—46—00			25
11—26—50 *diuisor* 3.				

ctes, non egeo tabula, vt in præcedenti exemplo, in quo pars per partem ducta faciebat primũ partes, deinde verò primas sexagenas. Ideo non iunxi 32 partes cum 45 1 ad inueniendum latus tetragonicum, vt in priore exemplo, quod est solitarium: quia prima particula dati numeri erat primarum sexagenarũ, cuius denominatio est ab vnitate, quæ medietate caret: at in omnibus alijs numeris, qui inchoãtur à particula denominata à numero pari, absq; tabula proportionali possum inuenire primę particulæ latus tetragonicũ. Noto itaq; 5 inter parallelas sub partibus, quia latus tetragonicum partiũ sunt partes. Duplico 5 & fiũt 10 partes, per quas diuido 7 partes, 45 1, 36 2, & inuenio ex diuisione posse prouenire quotum 46 & 45 & 44: cæterùm, vt prædictũ est, si iungam 7–20, quæ respondent in area, 44 acceptis in latere sinistro, quadrato ipsorum 44, id est cum 32–16, fient 7–52–16, quæ nõ possum auferre à 7, 45, 36: proinde accipio pro quoto 43, quibus in area sub 10 respondent 7–10, quæ iuncta cum quadrato 43, nẽpe cum 30–49, fient 7, 40, 49, quæ possunt demi à 7, 45, 36, &c. Et proinde demo, & remanent 4 1, 47 2, & noto 43 inter parallelas sub 1. Præterea duplico 5–43 & fiunt 11 partes, 26 1, per quas diuido 4 1, 47 2, & proueniũt 25: producto verò ex 25 in 11–26, nempe ipsis 4–45–50, addo perscripta lege quadratum 25, scilicet 10–25 & fiunt 4–46–00–25, quibus demptis à superioribus relictis 4, 47, remanent 59 3, 35 4 diuidendæ per duplum lateris inuenti, scilicet per 11–26–50–: quotus autem qui prouenit nẽpe 25 notabitur inter parallelas sub 2. Præterea si diuidas relictas 59–35 per duplum lateris, scilicet per 11, 26, 50, & persistes in explicata methodo, particula quarta lateris tetragonici erũt 53. reliquas particulas lateris tetragonici negligo, quòd hic processus in numeris surdis sit infinitus. Quod si ducas quadratè 5 partes, 43 1, 25 2, 53 prouenient 32 partes, 45 1, 35 2, 57 3, 39 4, 10 5, 25 6. ferè eadem cum priore. Examen.

PRO-

PROBLEMA 15.

Datarum partium astronomicarum latus cubicum, aut ei propinquum inuenire.

Latus cubicum per se ductum facit quadratum, quod per suum latus ductum facit cubicum numerũ: quare pro ratione harum multiplicationum quæretur denominatio lateris cubici, vt si $\bar{1}$ ducta in $\bar{1}$ facit $\bar{2}$, & hæc ducta in $\bar{1}$ facit $\bar{3}$, latus cubicum $\bar{3}$ erit denominandum à $\bar{1}$, qua ratione facta est hæc tabella.

Sextarum	latera cubica	secundæ
tertiarum		primæ
primarum		partes
partium		partes
$\bar{3}$		$\bar{1}$
$\bar{6}$		$\bar{2}$
$\bar{9}$		$\bar{3}$

Quare si numerus denominetur à quintis, aut à quartis, aut à secũdis, aut à $\bar{1}$, aut à $\bar{2}$, aut à $\bar{4}$, aut à $\bar{5}$, non poterit habere latus cubicum, nisi cõuertatur ad denominationes tabulæ: cæterùm ad eas cõuersus poterit habere cubicũ latus, vt dictum est de integris.

Exemplum per conuersionem.

Quære latus cubicũ 37 part. 55 $\bar{1}$, 3 $\bar{2}$, 44 $\bar{3}$, 21 $\bar{4}$, 6 $\bar{5}$, 1 $\bar{6}$: has conuertes ad 1769088459961 $\bar{6}$, cuius numeri latus cubicum est 12094 $\bar{2}$, quæ si diuidantur per 60, fient 201 $\bar{1}$, relictis 34 $\bar{2}$: diuisis verò 201 $\bar{1}$ per 60, prouenient 3 partes, 21 $\bar{1}$: itaq; latus cubicum 37 part. 55 $\bar{1}$, 3 $\bar{2}$, 44 $\bar{3}$, 21 $\bar{4}$, 6 $\bar{5}$, 1 $\bar{6}$ sunt 3 part. 21 $\bar{1}$, 34 $\bar{2}$.

Idem exemplũ per tabulam proportionalem examinatur, quod latus habeat.

Dispono

	pars	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
	10	19	20	23			
	37	55	3	44	21	6	1
	3	21	34				
27	9 *diuisor*						
	10 — 35 — 43 — 21						
33 — 40 — 3	3 *diuisor*						
	10						

Inuentio primæ notæ lateris.

Dispono datũ numerum vt vides, quęro inter cubicos numeros tabulæ proportionalis 37, vel proximè minorẽ cubicũ, & inuenio 0—27, & ad frontem tabulæ inuenio eius latus cubicum 3, quæ sunt partes notandæ inter parallelas sub partibus. Demo confestim 0—27 cubicum 3, ex 37, & remanẽt 10. triplico 3 & fiũt 9 partes, quas scribo sub 3. Secunda nota radicis quæretur sic, in latere sinistro tabulæ acceptis 37 parti. quæro è regione earum in area 10 part. 55 $\bar{1}$, quas non inuenio. Accipio propterea numerum proximè minorem, scilicet 10—29, supra quẽ in fronte tabulæ habeo 17, quem numerum notabis seorsum exploraturus, num sit secũdus numerus lateris cubici, hoc modo: Duco totum latus inuentum, videlicet 3 partes, 17 $\bar{1}$ per triplum prioris lateris, nempe per 9 part. & fiunt 29 part. 33 $\bar{1}$, quas rursus duco per easdẽ 17, & fient 8 part. 22 $\bar{1}$, 21 $\bar{2}$, quas si cõnectam cũ cubico ipsorum 17, qui est 1 $\bar{1}$, 21 $\bar{2}$, 53 $\bar{3}$, fiẽt 8 partes 23 $\bar{1}$, 43, $\bar{2}$53 $\bar{3}$, quæ non exhauriũt, quam proximè fieri potest, relictas 10 partes, 55 $\bar{1}$, &c. Quomodo nec 18 $\bar{1}$, è regione ipsorum 37 in sinistro latere acceptorum, exhaurient 10 part. 55 $\bar{1}$ relictas: quem ordinem seruans inueni 21 $\bar{1}$ esse secũdam particulam lateris cubici, & proximè exhaurire 10 partes, 55 $\bar{1}$. Nam si 3 part. 21 $\bar{1}$ ducam per 9 partes, scilicet per triplum prioris lateris, & productum ex hac multiplicatione, nempe 30 part. 9 $\bar{1}$, rursus duxero per 21 $\bar{1}$, vt fieri solet in extractione lateris cubici in integris, vt di-

Inuentio secundæ.

 ctum

ctum est problem.6.primi libri, inueniam 10 partes 33 $\overline{1}$, 9 $\overline{2}$, cui numero 51 iuxta præscriptā legem coniunctionis numerorum tabulæ proportionalis, adiecero cubicum ipsarum 21 $\overline{1}$, id est, 2 $\overline{1}$, 34 $\overline{2}$, 21 $\overline{3}$, inueniam proximum numerum minorem esse 10 part. 35 $\overline{1}$, 43 $\overline{2}$, 21 $\overline{3}$, quibus subtractis à 10 part. 55 $\overline{1}$, 3 $\overline{2}$, 44 $\overline{3}$, &c. manent 19 $\overline{1}$, 20 $\overline{2}$, 23 $\overline{3}$, &c.

Idē aliter. Cæterùm licet hic modus eodem tendat cum sequenti, tamen quia sequens ad amussim conuenit cum tradito modo, problemate.6.primi libri, proinde hunc sequamur. Triplico 3 latus primo inuentum, & fiunt 9 partes, duco 9 in latus primo inuentum, & sunt 27, quæ vno limite sinistrorsum scriptæ erunt primæ: diuido itaq; per 27 primas cum 9 partibus ipsas 10 part. & 55 $\overline{1}$ relictas, &c. & prouenient 24 $\overline{1}$. Quòd si ducam 3 partes 24 $\overline{1}$ per 9 partes, fient 30 partes 36 $\overline{1}$, quæ rursus ductæ per 24 $\overline{1}$, faciunt 12 part. 14 $\overline{1}$, 24 $\overline{2}$, qui numerus excedit 10 partes 55 $\overline{1}$: quanto magis excederet, si ei coniungeretur præscripta lege cubicū ipsarum 24 $\overline{1}$, quem ordinem seruans inuenio vt prius, secundam particulam lateris esse 21 $\overline{1}$, &c.

Triplico deinde 3, 21, & fiunt 10 part. 3 $\overline{1}$, quas duco per latus inuentum, scilicet per 3—21, & fiunt (vno limite sinistrorsum promouēdo, vt fit in integris) 33 secūd. 40 primæ, 3 partes, quibus præscripta lege iungo triplum 10—3, primam particulam huius coniungendo cum vltima particula producti ex triplo per latus inuentum, & fiunt 33 secund. 40 primæ, 13 partes, 3 $\overline{1}$, per quas diuidam 19, 20, 23, &c. & inueniam prouenire 34. si itaq; ducam 3 partes, 21 $\overline{1}$, 34 $\overline{2}$, per triplum duarum priorum particularum lateris, nempe per 10 part. 3 $\overline{1}$, & productum duxero per 34 $\overline{2}$, & adiecero præscripta lege cubicum ipsorum 34, scilicet 10, 55, 4, fient 19 $\overline{1}$, 7 $\overline{2}$, 55 $\overline{3}$, 19 $\overline{4}$, 58 $\overline{5}$, 55 $\overline{6}$, 4 $\overline{7}$, quę si demātur à numero relicto, remanebunt 12 $\overline{2}$, 28 $\overline{3}$, 1 $\overline{4}$, 7 $\overline{5}$, 5 $\overline{6}$, 56 7. noto itaq; 34 2 inter parallelas. Idem inuenirē, si tri plarem 21 1 secundam particulam lateris cubici, & fient 1 pars, 3 1, quæ collectæ cum 9 partibus tripli lateris prioris faciūt 10 partes 3 1: has autem quærerē è regione 37 part. in latere sinistro acceptarum, & secundum priorē methodum quærerem tertiā particulam lateris cubici, quæ laboriosiùs inueniretur. Ex numero relicto quære secundum vtranq; methodum, si vacat, quartam particulā lateris cubici. Cæterùm quia hæc inuentio lateris cubici per tabulā proportionalem sexagenariam nō est vsui omnibus numeris, sed ijs tantū quorū numerus primus sinister est primarum sexagenarum, & aliarum particularum, quæ in tabella notatæ sunt, atq; est longè prolixior & difficilior, quàm quæ fit per reductionem: proinde consultū velim compendia disciplinarum sectantibus, vt omisso tanto temporis dispendio, cōtenti sint tantùm per reductionem latera cubica partium Astronomicarum inuestigare. *Aliter.*

PROBLEMA 16.

Datarum partium numeros proportionales inuenire.

Hoc problema est apprime necessariū futuro Astronomo. non enim omnia possunt in tabulis Astronomorū sigillatim ad 1, vel 2, vel 3 reduci: sed aliquid relinquendum fuit industriæ tabulas versantium. ex problematum 7 & 8 primi libri commodo vsu facilè omnia, quæ quis desiderat quoad 1, & 2, & 3 inuenerit.

Quando ex numeris lateris sinistri, & frontis tabularū, cupis ad communem eorum proselydem respondentes numeros inuenire, tūc hic tabularū vsus dicitur lateralis. At quando ex numeris qui in proselydibus seu areolis tabularum extant, quo ad partes, quæ in area non reperiuntur, quæritur numerus in latere sinistro respōdens, tunc tabulæ vsusdicitur arealis. *Duplex vsus tabularum Astronomicarū.*

Lateralis. In vsu laterali tabularum Primus numerus proportionalis est differentia vnius numeri lateris ab alio eiusdem lateris proximè sequenti, qui interdum est 60 m̄, aut actu vnus gradus, qui & pars principalis dicitur, aut vnus dies naturalis qui cõstat 24 horis, pro ratione cõstructionis tabulæ. Secundus numerus proportionalis est differentia vnius numeri arealis ab altero areali ꝑximo. Tertius proportionalis est differentia dati numeri, qui quæritur in latere sinistro tabulæ: verùm partiliter non reperitur, ab eo qui eo est proximè minor, aut proximè maior in eodem latere. Ex his tribus Quartus inuestigatur, ducẽdo secundum in tertium, & productum diuidendo per primum, cui adhibetur denominatio secundum problemata multiplicationis & diuisionis ipsi competens. Verùm quando primus numerus proportionalis est 1 pars seu vnus gra-

Annotatio. dus, tunc sufficiet ducere secundum in tertium, nam si diuidas productũ ex secundo in tertiũ p primũ, vt cõstat ex secundo canone denominationum prouenientium in diuisionibus, omnino idem prodibit. Vt si 1 pars dat 6 1: quot dabunt 9 1? Nam si ducas 6 1 in 9, 1 prouenient 54 2, quod si diuidas 54 2 per 1 partem, prouenient 54 2. quare sufficit ducere secundum in tertium.

Arealis. In vsu areali Primus numerus proportionalis est differentia inter duos areales proximos, qui numerus dat differentiam, quæ existit inter laterales illis arealibus respondentes, quæ est Secundus numerus proportionalis. Tertius numerus proportionalis est differentia dati nu-

Annotatio. meri in area quęrendi, verùm in ea non extantis, à numero areali proximo. Obseruabis tamen ordinem numerorũ, an crescant. Et ducto tertio numero proportionali per secundum, productum diuidetur per primum, & prodibit quartus proportionalis, qui erit addendus, si areales

areales progrediantur crescendo, alioqui si decrescant, auferetur: at quia secundus numerus proportionalis est 1 pars, proinde manet idemmet tertius ex multiplicatione ipsius per secundum, vt patet ex 2. canone denominationũ prouenientium ex diuisione: quare sufficiet, vt tertius diuidatur per primum. Vt si 6 $\bar{1}$ dant 1 partem, 9 $\bar{1}$ quantum dabunt? Duc 1 partem per 9 $\bar{1}$ & prodibunt 9 $\bar{1}$, quas si diuidas per 6 $\bar{1}$, proueniet 1 pars 30 $\bar{1}$, quare sufficiebat absq; multiplicatione diuidere 9 $\bar{1}$ per 6 $\bar{1}$.

Motus diurnus lunæ est 13 partium, quæritur 3 horis quot partes peragrabit? Dicito 24 horæ, quibus constat dies naturalis, exhibent 13 partes, 3 horæ quantũ exhibebunt? Duc 13 in 3, & sunt 39, quibus diuisis per 24, prodit 1 pars cum $\frac{15}{24}$, quæ sunt 37 $\bar{1}$ 30 $\bar{2}$. *Exẽplum in laterali vsu*

13 partes conficiuntur à luna 24 horis, 6 partes quot horis peragrabũtur? Duc 6 per 24, & sunt 144, quæ diuide per 13, & prouenient 11 horæ & $\frac{1}{13}$. *Exẽplũ in areali.*

1 pars dat 35 $\bar{1}$, 28 $\bar{1}$ quot dabunt? Duc 35 $\bar{1}$ in 28 $\bar{1}$, & fiunt 980 $\bar{2}$, quæ si diuidantur per 60 $\bar{1}$, prouenient 16 $\bar{1}$ 20 $\bar{2}$: tot igitur dabunt 28 $\bar{1}$. vel sic diuide 980 $\bar{2}$ per 1 partem & prouenient 980 $\bar{2}$, quæ sunt 16 $\bar{1}$, 20 $\bar{2}$, quare sufficiebat secundum ducere in tertium. *Exẽplũ in laterali.*

1 pars, 37 $\bar{1}$, dant 1 partem seu 60 $\bar{1}$, quot dabunt 59 $\bar{1}$? Duc 59 $\bar{1}$ per 1 partem, & fient 59 $\bar{1}$, quas diuide per 1 partem 37 $\bar{1}$, & prouenient 36 $\bar{1}$, 29 $\bar{2}$, 41 $\bar{3}$, &c. *Aliud in areali.*

De parte proportionali per tabulam proportionalem inuenienda.

In hunc vsum potissimum videtur tabula proportionalis instituta, vnde & denominationem obtinuit: quæ vtilis est, quando primus numerus proportionalis in vsu laterali est vnum, quod consideratur in 60 diuidendum, & *Vsus tabulæ potißimus.*

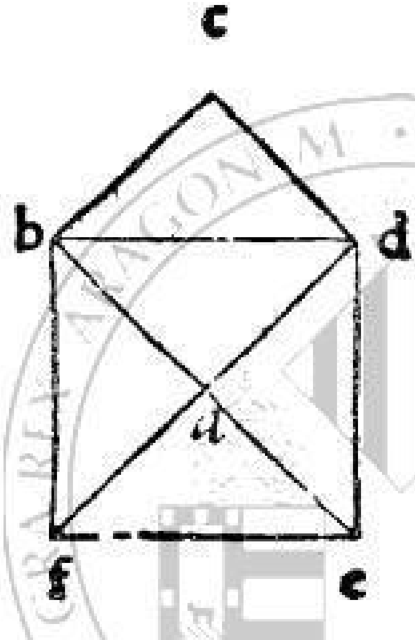
in areali quando secundus numerus proportionalis est 1 ō quod cōsideratur in 60 diuidendum. nam si consideretur diuidendum in 24, vt dies in 24 horas, partem proportionalem non inueneris in tabula, quæ propterea dicitur sexagenaria, quia tantū vtilis est ad inueniendas partes pro-
Canon. portionales ratione 60. Quando igitur ingrederis in tabulam per latus sinistrum, aut per frontem ipsius, multiplicatio sola secundi in tertium exhibet partem proportionalem, vt in tertio exemplo, si vna pars dat 35 ī, 28 ī quot da-
Exemplum bunt? acceptis 35 ī in latere sinistro, & 28 ī in fronte: vel vice versa, in proselyde horum duorum numerorum inuenies 16 ī, 20 2̄: tot itaque proueniunt in desiderata parte proportionali. Nam si diuidas 16 ī, 20 2̄ per primam partem, prouenient tantùm 16 ī, 20 2̄, quare redundure et ea di-
Canon. uisio. At quando ingredieris in tabulam arealiter, quia secundus arealis est 1 pars, seu 60 ī, & tertius ductus per secundum seipsum solum efficit, sufficiet vt tertius diuida-
Exēplum. tur per primum. vt in quarto exemplo, si 1 pars 37 ī dant 1 partem, seu 60 ī, quod idem est: quod dabunt 59 ī? diuide 59 ī per tabulam, per 1 partem 37 ī, & prouenient 36 ī, 29 2̄, 41 3̄, quanta erit pars proportionalis desiderata.

FINIS SECVNDI LIBRI.

LIBER TERTIVS, DE RATIONIBVS & proportionibus.

Λόγος ratio, est duarum magnitudinũ eiusdẽ generis secundum quantitatem inter sese quædam habitudo. Definitio 3 lib. 5.
Conferuntur autem secundum quantitatem, id est, qua vna alteram quantitate excedit, & eodem genere quantitatis præditæ esse debent. quare ratio inter duos terminos versata, numeros numeris, continua continuis, corpora corporibus, superficies superficiebus, lineas lineis, sonos sonis, tempus tempori conferet.

Rationem inter sese habere magnitudines dicũtur, quæ possũt multiplicatæ sese inuicẽ excedere. Definitio 5. lib. 5. Etiã si nõnullæ incõmẽsurabiles magnitudines ἄλογα μεγέθη irrationales, seu sine ratione, nẽpe effabili, seu quę numeris exprimi possit, dicãtur ab Euclide li. 10. rationẽ tamẽ inter sese habẽt aliquã. multiplicatę enim sese excedũt nota aliqua mẽsura, vt diameter & latus quadrati. sit enim quadrati a b c d diameter b d, huius verò quadratũ sit e f b d. ex 47 primi quadratum e f b d, quod fit ex b d subtensa angulo recto d a b, est æquale quadrato lateris a b, & quadrato lateris a d. quare quadratum e f b d est duplum ad quadratum a b c d: ergo per 11 propositionem octaui, ratio vnius ad alterũ est ratio laterum duplicata: quare ratio diametri b d ad latus b a quadrati, est me-



dictas

dietas vnius duplæ, & duæ rationes diametri ad latus quadrati component vnam rationẽ duplam. Erit itaq; aliqua ratio inter diametrum & latus quadrati. Nam multiplicatæ hæ magnitudines sese excedunt aliqua mensura, seu area communi, quod ex schemate est notum. Nam triangulus d a b bis metitur quadratũ a b c d productũ seu multiplicatum ex a b in se, & quater metitur quadratum e f b d multiplicatum ex diametro b d. Quæ causa est, vt diameter & latus quadrati lib. 10. dicantur lineæ potentia commensurabiles, cùm sint ipsæ per sese incommensurabiles.

Diuisio rationis. Duplex itaq; erit ratio, vna effabilis, quæ ῥητὸς Græcè dicitur, quæ numeris exprimi poterit, ideo Arithmetica dicitur: alia verò erit ἄῤῥητος ineffabilis, qualis est inter diametrum & latus quadrati, & inter numeros surdos & sua latera. Gæometra circa vtrasq; rationes, Arithmeticus verò tantùm circa effabiles rationes versatur.

Diuisio rationis effabilis. Ratio effabilis æqualitatis dicitur, cũ æqualia inter sese conferuntur: inęqualitatis, cùm inæqualia. Si minor confera tur cum maiore dicitur ὑπολογία, id est, minoris inæqualitatis ratio: si maior cum minore ἐπιλογία, id est, maioris inæqualitatis. Minoris inæqualitatis rationes denominabuntur à maioris inæqualitatis eorundem terminorũ rationibus, præponendo ὑπὸ, id est, sub. Vt 2 ad 1 est dupla, at 1 ad 2 subdupla. Rationis maioris inæqualitatis simplicia genera sunt, πολλαπλάσιος multiplex, ἐπιμόριος

Diuisio in genera simplicia. superparticularis, ἐπιμερὴς superpartiens. Composita genera πολλαπλασιεπιμόριος multiplex superparticularis, & πολλαπλασιεπιμερὴς, id est, multiplex superpartiens. Multiplex est quando maior minorem aliquoties tantum continet. Multiplicis species, διπλάσιος dupla, vt 2 ad 1, τριπλάσιος tripla, vt 3 ad 1: τετραπλάσιος quadrupla, vt 4 ad 1. & c. similiter.

Super-

Superparticularis dicitur, quando maior numerus minorem tantùm semel, & vnam partem tantùm, non autem partes eius continet. Quòd si maior totum minorem & eius medietatem contineat, dicitur λόγος ἡμιόλιος ratio sesquialtera. vt 3 ad 2: si totum & tertiã tantùm contineat, dicitur ἐπίτριτος sesquitertia, vt 4 ad 3: si totum & quartã tantùm, dicitur ἐπιτέταρτος sesquiquarta, vt 5 ad 4, &c.

Superpartiens dicitur, quando maior minorem tantùm semel & eius aliquot partes, quæ nullo modo partem efficiunt, continet. Quòd si contineat semel & duas tertias, erit ἐπιδιμερὴς τρίτων superbipartiens tertias, vt 5 ad 3. Si semel & duas quintas, ἐπιδιμερὴς πέμπτων superbipartiens quintas, vt 7 ad 5. Si semel & tres quartas ἐπιτριμερὴς τετάρτων, vt 7 ad 4, &c.

Ex simplicibus rationibus fiunt duo genera composita, vtpote multiplex superparticularis, quando numerus maior minorem aliquoties, & eius aliquam partem continet. quòd si bis et medietatem, dicetur dupla sesquialtera, vt 5 ad 2. si ter & medietatem, tripla sesquialtera, vt 7 ad 2, &c. Aliud genus compositum dicitur multiplex superpartiens, quando maior numerus minorem aliquoties & eius aliquot partes continet. quòd si bis & duas tertias eius contineat, dicetur dupla superbipartiens tertias, vt 8 ad 3, &c. Notabis ex hoc sequi nullam rationem vocandam superpartientem, quando partes efficiunt aliquã partem, nec dicendam rationem superbipartientem quartas, quia duæ quartę sunt vna medietas, quare erit sesquialtera. Composita genera. Nota.

Rationis minoris inæqualitatis totidẽ sunt genera quot & maioris.

In eadem ratione numeri esse dicuntur, primus ad secundum, & tertius ad quartum, quando primus secundi,

& tertius quarti æqualiter fuerit multiplex, aut eadem pars, aut eædem partes.

Hæc est propria definitio Euclidis numerorum proportionalium, nam quæ traditur libr. 5. Eudoxi est Magistri Platonis, non Euclidis, quam iure vt definito longè obscuriorem prætermitto.

7.definit.5 *Numeri eandem rationem habentes proportionales dicuntur.* Αναλογία *proportio, est rationum similitudo, seu*
4.defi 8.5 *comparatio duarum æqualium rationum.*

Quando itaq; primus fuerit secundi æquè multiplex, aut submultiplex, vt tertius quarti, illi numeri sunt proportionales, vt 4 ad 2, ita 6 ad 3, & vice versa. Has duas proportiones significauit Euclides per duas priores partes definitionis. At proportiones quæ fiunt in rationibus superparticularibus & superpartientibus, vltima definitionis parte significatæ sunt. vt sicut 4 ad 6, ita 8 ad 12: nã quæ partes sunt $\frac{4}{6}$, eædem sunt $\frac{8}{12}$: seu quæ partes sunt 4 ipsorum 6, eædem sunt 8 ipsorum 12, nempe duæ tertiæ: & vice versa vt 6 ad 4, ita 12 ad 8. In superpartienti analogia exẽplũ. Sicut 5 ad 7, ita 15 ad 21: nam quæ partes sunt 5 ipsorum 7 eædem sunt 15 ipsorum 21, nempe quinq; septimæ: & vice versa, vt se habent 7 ad 5, ita 21 ad 15.

9.definit.5 *Proportio in tribus terminis vt minimum existit.*

Hæc dicitur continua, in qua sunt tres termini natura diuersi, vt sicut 4 ad 6, ita 6 ad 9. sed reuerà sunt 4 termini, nam secundus bis sumitur.

Discontinua quatuor terminis natura diuersis constat, vt sicut 4 ad 6, ita 10 ad 15.

Quando tres numeri proportionales fuerint, primus ad
10.defin.5 *tertium duplo maiorẽ rationem habet quàm ad secundũ.*

Nam

Nam ratio extremorum cõposita est ex rationibus medij, quæ sunt duæ æquales.

Quando quatuor numeri fuerint continuo proportionales, primus ad quartum triplo maiorem rationem habet, quàm ad secundum, & ita deinceps vno minus quandiu fuerit proportio.

Nam si sint quinque cõtinuo proportionales, primus ad quintũ quadruplo maiorem rationẽ habet quàm ad secundum: nam proportio primi ad quintum quatuor æqualibus rationibus constat, scilicet primi ad secundum, secundi ad tertium, tertij ad quartum, & quarti ad quintum.

ὁμόλογοι homologi, seu eiusdem ordinis inter sese dicuntur omnes numeri eiusdem proportionis antecedentes, & omnes consequentes inter sese dicuntur etiam homologi. 11. defi. 5.

Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationũ magnitudines in seipsas multiplicatæ efficiunt τινὰ aliquam, non aliquas. 5. definitio 6. libri.

Ita enim censeo legendum, quæ sic composita est componentibus æqualis, id est, quando homologi numeri antecedentes talium rationum multiplicati inter sese efficiunt aliquem antecedentem: & homologi consequentes earundem rationum efficiunt aliquem consequentem. Horum enim qui gignuntur ratio est composita ex datis rationibus. vt si componas sesquialteram $\frac{3}{2}$ cum $\frac{4}{3}$ sesquitertia, fiet vna dupla $\frac{12}{6}$.

Corollariũ. Vnde fit vt datis quibuſcũque numeris extremis, ratio vnius ad alterum componatur ex omnibus rationibus intermedijs. vt ſi ſumas 5 & 1, quæ ratio eſt quintupla, ea cõponetur ex ratione ſeſquiquarta, quæ eſt 5 ad 4, & ſeſquitertia, quæ eſt 4 ad 3, & ſeſquialtera, quæ eſt 3 ad 2, & dupla, quæ eſt 2 ad 1. omnes enim hæ rationes compoſitæ, vt docet Euclides, faciunt vnam quintuplam. Vel ſi vnum medium numerum acceperis, ſcilicet 3, ratio quintupla cõſtabit ex ratione 5 ad 3 ſuperbipartiente tertias, & ratione 3 ad 1, quæ eſt tripla. hæ enim duæ rationes component vnam quintuplam: quod non ſolum verum eſt, quãdo medium extremo vno eſt minus, altero verò maius: ſed etiam quando vtroq; extremo maius eſt, vel minus: vt ſi digeras 2.5.3 ratio 3 ad 2 ſeſquialtera, componitur ex rationibus 3 ad 5, & 5 ad 2. nam diſpone $\frac{3}{5}$ & $\frac{5}{2}$, & fiet ratio per 5 definitionem 6 libri, 15 ad 10, quæ eſt ſeſquialtera. Vel ſi ſic digeras 6, 2, 4, ratio 4 ad 2 dupla, & 2 ad 6 ſubtripla, faciunt ſubſeſquialteram, & proinde ratio ſubſeſquialtera componetur ex dupla & ſubtripla.

Modi colligendi ex rationibus.

12. defin. 5 Ἐναλλὰξ λόγος *permutatim ratio* (quæ temerè viciſsim à Zamberto interprete dicitur) *eſt acceptio antecedẽtis ad antecedens, & conſequentis ad conſequens.*

Vt ſicut a 2 ad b 4, ita c 3, ad d 6. quare & permutatim, vt a 2 ad c 3, ita b 4 ad d 6.

13. defin. 5 Ἀνάπαλιν λόγος *eſt acceptio conſequentis tanquam antecedentis, ad antecedens tanquam conſequens.*

Vt ſicut a 2 ad b 4, ita c 3 ad d 6; ergo vt b 4 ad a 2, ita d 6 ad c 3.

14. defi. 5. Σύνθεσις λόγου *compoſitio rationis, eſt acceptio antecedentis*

tis cum consequente tanquam vnius ad ipsum consequēs.

Vt sicut a 2 ad b 4, ita c 3 ad d 6. ergo vt a b 6 ad b 4, ita c d 9 ad d 6. Vel aliter

Est acceptio antecedentis cum consequente tanquam vnius ad antecedens.

Vt se habēt 2 ad 4, ita 3 ad 6: ergo vt 2 & 4, id est 6 ad 2, ita 3 & 6, id est 9 ad 3.

Διαίρεσις λόγου *diuisio rationis, est acceptio differentiæ inter antecedens & consequens ad ipsum consequens, vel ad ipsum antecedens.* 15. defin. 5

Vt se habēt 4 ad 6, ita 8 ad 12: ergo vt se habent 2 differētia inter 4 & 6 ad 6, ita 4 differentia inter 8 & 12 ad 12. vel ita se habebūt 2 ad 4, vt 4 ad 8.

Ἀναστροφὴ λόγου *subuersio, aut euersio rationis, est acceptio antecedentis ad differentiam inter antecedens & consequens. Vel erit acceptio consequentis ad eandem differentiam.* 16. defin. 5

Vt se habent 4 ad 6, ita 8 ad 12: ergo vt se habent 4 ad 2, differentiam inter 4 & 6, ita se habent 8 ad 4 differentiam inter 8 & 12: vel, vt se habent 6 ad 2 differentiam, ita 12 ad 4 differentiam.

Δίϊσου λόγος *ex æquo ratio, fit quando plures numeri binatim sumuntur, & alij totidem numero in eadem, vel eisdem rationibus cum prioribus, vt se habet in prioribus numeris primus ad vltimum, ita in secundis primus ad vltimum. Aut aliter, est acceptio extremorum per subtractionem mediorum.* 17. defin. 5

Vt 3, 4, 2, ita 12, 6, 3: ergo vt 8 ad 2, ita 12 ad 3. vel quando

S iij in di-in diuersis rationibus proponuntur priores, vt 8,6,4, ita 12,9,6: ergo vt se habent 8 ad 4, ita 12 ad 6.

a 2	{ c 6 / b 4
c 3	{ d 6 / f 9

Præter hos modos colligendi simplices, occurrerunt mihi aliquando hi sequentes intricatiores vt sicut a ad b, ita c ad d: & sicut a ad e, ita c ad f: ergo vt a ad b e, ita c ad d f: quæ est compositio rationis. Cuius diuisio erit huiusmodi. vt se habet a ad b e, ita c ad d f: & vt a ad b, ita c ad d: ergo vt a ad e, ita c ad f. Vel sic, vt a ad b e, ita c ad d f: & vt a ad e, ita c ad f: ergo vt a ad b, ita c ad d.

18. defin. 5 *Ordinata proportio est, quando fuerit vt antecedens ad consequens, ita antecedens ad cõsequens: vel vt consequẽs ad aliud quippiam, sic consequens ad aliud quippiam.*

Vt vides in præcedenti exemplo, in quo rectum ordinem seruant termini.

19. defin. 5 *Perturbata proportio est, quando sumuntur tres numeri, atq; alij totidem multitudine, & vt in prioribus numeris antecedens se habet ad consequentem, sic in secundis numeris antecedens se habet ad consequentem: vt verò in primis numeris consequẽs se habet ad alium quempiam, ita in secundis alius quispiam numerus se habet ad antecedentem.*

Exemplum. sicut 6 ad 3, ita 8 ad 4. & vt 3 consequẽs primæ rationis se habet ad 2 alium quempiam numerum, ita 12 alius quispiam numerus se habet ad 8 antecedentem secundæ rationis. Quare si proponantur perturbatim 6,3,2, & 12,8,4: vt 6 ad 3,

6 — 3   2

12   8 — 4

6 ad 3, ita 8 ad 4: & vt 3 ad 2, ita 12 ad 8: ergo etiā ex æquo vt se habent 6 ad 2, ita 12 ad 4.

PROBLEMA 1.

Datæ rationis cuiuscunq; speciei ex ipso nomine minimos terminos eius inuenire.

In rationibus multiplicibus denominatio prodit semper terminum maiorem ex minimis terminis eius rationis, alter terminus est semper 1. vt triplæ primus terminus est 3, secundus 1, &c. In superparticularibus postrema pars nominis prodit minimum terminū eius rationis, cui si addas 1, colliges alterū terminū, vt in sesquialtera, altera dicitur de duobus, idcirco 2 est minimus terminus, cui si addas 1, fiunt 3. quare dico 3 & 2 esse minimos terminos sesquialteræ. Similiter in superpartientibus vltima pars nominis significat minimum terminum rationis, cui si addas numerum aduerbij, in medio nominis collocati, habebis alterum terminum eius rationis ex duobus minimis. Vt si quæras minimos numeros rationis supertripartiētis quartas, 4 erit minimus terminus, cui adde 3 significata per aduerbium tri. & fiunt 7. dico 7 & 4 esse primos, seu minimos numeros datæ rationis. In multiplicibus superparticularibus rationibus vltima pars nominis significat minimum terminum rationis, qui est multiplicandus per denominationē multiplicis, & addēda vnitas. Vt volo scire minimos numeros rationis triplæ sesquitertiæ vltima pars nominis, tertia, præsefert 3, qui est minimus

terminus

terminus datæ rationis, qui ducatur per 3 vnde dicitur tripla, & fiunt 9, cui adde vnitatem, & fiunt 10. dico 10 & 3 esse minimos numeros datæ rationis. Similiter in multiplicibus superpartientibus, vltima pars nominis prodit minimū terminū rationis, qui multiplicatus per rationis multiplicis denominatorem, & producto additus numerus partium, qui significatur per aduerbium, produnt alterum terminū maiorem: vt si velis scire primos numeros rationis quadruplæ supertripartientis quintas: primus numerus eius rationis minimus est 5, qui quadruplicatus facit 20, additis verò tribus, fiunt 23: dico 23, & 5 esse rationis quadruplæ suptripartiētis quintas minimos terminos.

Exemplum

PROBLEMA 2.

Datis numeris quomodocunq;, minimos eandem rationē cum illis habentes inuenire.

Propositio 35 septimi. Si reciprocè minorem à maiore auferendo, peruenias ad vnitatem, per primam septimi erunt adinuicem primi, & per 23 eiusdem, erunt minimi numeri omnium eandem rationem habentium cum illis. Si reciprocè minorem à maiore auferendo tandem perueniatur ad aliquem numerum alium ab vnitate, ille erit mensura maxima cōmunis vtriusq;, per 2 proposi. eiusdem. Diuide modo per eam mensuram maximam vtrunq; numerum datum, & prouenientes quoti erunt minimi numeri habentes eandem rationem cum illis. Vt dētur primū 19 & 13, deme 13 à 19, & manent 6, quæ deme à 13, & manēt 7, rursus deme à 7 ipsa 6, & manet 1: quare 19 & 13 sunt primi ad se inuicem, & minimi omnium qui eandem cum illis

Exemplū.

illis rationem habent. Sint dati numeri 21 & 15, deme 15 à 21, & manent 6, quæ deme à 15, & manent 9, rursus à 9 deme 6, & manent 3, quòd si à 6 demas 3, manent 3, quare 3 est maxima mẽsura communis 21 & 15: diuide 21 per 3, & proueniunt 7, diuide 15 per 3, & proueniunt 5: quare 7 & 5 sunt minimi numeri omnium habentium eãdem rationem cum 21 & 15, cuius causam reddunt duæ sequentes propositiones.

Theorema primum, & propositio 3.

Si aliquis numerus duos multiplicans fecerit aliquos, geniti ex eis eandem rationem habebunt quã multiplicati.

Propositio 17 septimi multiplicet 5 duos numeros, scilicet 7 & 3, & fient 35 & 15, quorum ex præcedenti problemate minimi numeri eandem rationem cum illis habentes sunt 7 & 3. cuius ratio est. nam si 5 multiplicans 7, facit 35, & multiplicãs 3, facit 15, toties inuenietur 7 in 35, quoties 3 in 15, nempe quinquies: quare qualis pars est 7 ipsorũ 35, talis est 3 ipsorum 15. Vnde per definitionem numerorũ proportionalium, qualis ratio est 7 ad 35, talis est 3 ad 15, quare permutatim, qualis ratio est 7 ad 3, talis est 35 ad 15, quod erat demonstrandum.

Theorema 2, propositio 4.

Si per aliquem numerum duo alij diuidantur, prouenientes ex diuisionibus eandem rationem cum illis habebunt.

Hæc est conuersa per resolutionem, vt si diuidas 35 & 15 per 5, prouenient 7 & 3, qui multiplicati per 5, facient 35 & 15, numeros eiusdem rationis cum 7 & 3 per præcedentem.

T Theo

Theorema 3. propositio 5.

Si duo numeri aliquem multiplicātes, fecerint aliquos, geniti ex eis eandē rationē habebunt, quam multiplicātes.

Propositio 18 septimi conuersa 17. sint 3 & 2 habentes se in ratione sesquialtera, qui multiplicent 5, & fient 15, & 10, qui se habebunt in eadem ratione cum 3 & 2.

Theorema 4 propositio 6.

Si aliquis numerus per duos diuidatur, geniti ex diuisionibus eandem rationem cum diuisoribus habebunt, sed alterius generis.

Sint 40, quæ diuidantur per 5 & 4, & prouenient 8 & 10, qui habent eandem rationem, sed alterius generis, id est, si data ratio sit minoris inæqualitatis, quæ proueniet, erit maioris inæqualitatis, & contra.

PROBLEMA 3. PROPOSIT. 7.

Datorum numerorum rationes suis nomenclaturis exprimere.

Per secundam huius quære minimos numeros eandem cum ipsis rationem habentes, aut ex illis minimis, minor mensurat maiorem, id est, aut est pars eius, aut non. hoc autem deprehendes diuidendo maiorem per minorem: nam si ex diuisione nihil remaneat, minor mensurabit maiorē, & inter eos erit ratio multiplex: si ex diuisione proueniens sit 2, erit dupla, & minor erit medietas maioris: si quotus sit 3, erit maioris ad minorē tripla, &c. Si verò ex diuisione maioris per minorem proueniens quotus sit 1, & rema-

Multiplex

& remaneat 1, inter tales numeros est ratio superparticularis: si diuisor sit 2, erit sesquialtera, vt 3 ad 2. si diuisor sit 3, tunc erit sesquitertia, vt 4 ad 3. semper enim diuisor dabit denominationem relicto ex diuisione. Si verò maiorem diuidēdo per minorem quotus sit vnitas, & remaneat aliquis numerus alius ab vnitate, ratio erit inter eos numeros superpartiens, & diuisor dabit denominationem numero relicto, qui exprimetur per aduerbium. vt si diuisor sit 3, & remaneant ex diuisione 2, nempe $\frac{2}{3}$, quare erit superbipartiens tertias, &c. Si verò maiorem diuidendo per minorem, quotus sit alius numerus ab vnitate, si ex diuisione remaneat 1, ratio erit multiplex superparticularis, denominationem multiplicis dabit quotus: denominationem particulæ dabit diuisor, vt si sit diuisor 3, & quotus sit 3, & relictus ex diuisione sit 1, erit ratio tripla sesquitertia, qualis est inter 10 & 3. Si verò maiorem diuidendo per minorem, quotus sit alius ab vnitate, & remaneat alius numerus ab vnitate, ratio erit multiplex superpartiens; quotus dabit denominationem multiplicis, diuisor denominationē partibus, quæ tot erūt, quot significabit numerus relictus ex diuisione, & aduerbialiter efferētur. Vt sint minimi numeri 3 & 11, diuide 11 per 3, & proueniūt 3 & $\frac{2}{3}$: quare erit inter 11 & 3 ratio tripla superbipartiēs tertias.

Superparticularis.

Suppartiēs

Multiplex superparti.

Multiplex suppartiēs.

PROBLEMA 4. PROPOSIT. 8.

Datis quibuscunque rationibus, quæ sit altera maior inuenire.

Hoc proposi. 8. li. 5. docet Euclides, dicēs, inæqualiū magnitudinū maior ad eandē maiorē rationē habet, quā minor: & eadē ad minorē maiorē rationē habet quā ad maiorem. vt si conferas 6 & 4 ad 2, maior ratio est 6 ad 2, quā 4 ad 2. Similiter ſi 2 conferantur ad 4 & ad 6, maiorē rationem habent 2 ad 4, quàm ad 6: itaq; in cōferēdis inter ſeſe rationibus, debet eſſe communis quædam magnitudo antecedens, aut conſequens quare in multiplicium vniuerſo genere, quæ maiorem habet denominationem, maior eſt. omnium enim earum minimus conſequēs eſt vnitas: vt tripla maior eſt dupla, &c. in quo genere datur omnium minima, nempe dupla, non autem maxima. Inter ſuperparticulares contra accidit. maior enim eſt quæ minorem habet denominationem. nam ex 5 communi concepti. 7 libri, pars maior eſt quę minorem habet denominationem, idcirco omnium ſuperparticularium maxima eſt ſeſquialtera: non tamen datur minima ſuperparticularis. Inter ſuperpartientes ea eſt maior, quæ plures partes eiuſdem denominationis continet. vt ſupertripartiens quintas, maior eſt ſuperbipartiente quintas. In hypologis rationibus cōtrarium accidit. nam ſubdupla eſt omnium ſubmultiplicium maxima, nec datur minima ſubmultiplex. Inter ſubſuperparticulares minima eſt ſubſeſquialtera, nec datur aliqua omnium maxima. Reliquas autem atq; etiam prædictas reduces ad alias rationes æquales, quæ habeāt eoſdē conſequentes, quod facito vt problemate 4 ſecundi libri dictum eſt, diſpone datas rationes formis partium vt vides ſupratripartientem quintas, & ſuperbipartientem ſeptimas depictas, quas reduces ad eoſdem conſequentes, ſeu denominatores, vt ibi docuimus. Erit itaq; ſupertripartiens quintas reducta ad rationem, quæ eſt inter 56 & 35: & ſuperbipartiens ſeptimas reducta ad rationem, quæ eſt inter 45 & 35, vt probauimus ex 17 ſeptimi. Quare maior eſt ratio ſupertripartiens quintas ratione ſuperbipartiente ſeptimas $\frac{11}{35}$, is enim eſt exceſſus inter $\frac{56}{35}$

Exemplum

56	45
8	9
5	7
35	35

&

& $\frac{45}{15}$. hac methodo rationes hypologas conferes inter sese, & cum epilogis rationibus, vt scias quæ sit maior.

PROBLEMA 5. PROPOSIT. 9.

Datas rationes in minimis terminis continuare.

Duæ rationes in tribus terminis: tres, in quatuor terminis, quatuor in quinq; terminis continuãtur. Si duæ sunt continuandæ, duc antecedentem primæ in antecedentem secundæ, & fit primus terminus: duc consequentem primæ in antecedentem secundæ, & fit secundus terminus: duc consequentem primæ in consequentem secundæ, & fit tertius terminus: vt dupla 2 ad 1, & sesquitertia 4 ad 3, dispositis terminis, vt vides, continuantur in 8, 4, 3. Si tres sint continuandæ, duc antecedẽtem primæ in antecedentem secundæ, productum verò duc in antecedentẽ tertiæ, & fiet primus terminus: duc consequentem primæ in antecedentem secundæ, & productum duc in antecedentem tertiæ, & fiet secundus terminus: duc consequentem primæ in consequentem secundæ, & productum duc in antecedentem tertiæ, & fiet tertius terminus: duc consequentem primæ in consequentem secundæ, & productum duc in consequẽtẽ tertiæ, & fiet quartus terminus. Vt tripla & sesquitertia & quintupla dispositæ sic continuãtur. Exemplum

2 — 4
1 — 3

3 in 4 ducta faciũt 12, quæ ducta in 5 faciũt 60, scilicet primum terminũ. duc 1 in 4, & sunt 4, & 4 in 5, & sunt 20, secũdus scilicet terminus. duc 1 in 3, & 3 in 5, & fient 15, tertius terminus. demum duc 1 in 3, & sunt 3, & 3 in 1, & sunt 3, quartus videlicet Exemplum

3 — 4 — 5
1 — 3 — 1

 delicet

delicet terminus. dico igitur in 60, 20, 15, 3 continuari tres prædictas rationes. Si quatuor sint continuandæ, ducentur omnes antecedentes in sese, & fiet primus terminus. Ducetur deinde consequens primæ in antecedentem secũdæ, & productum iterum in antecedentem tertiæ, & productum in antecedentem quartæ, & fiet secundus terminus. consequens primæ ducetur in antecedētem secundæ, & productum in consequentem tertiæ, & productum in consequentem quartæ, & fiet tertius terminus. consequens primæ ducetur in consequentem secundæ, & productum in consequentem tertiæ, & productum in antecedentem quartæ, & fiet quartus. consequentes omnium ducentur in sese, & fiet vltimus terminus, vt sint continuandæ rationes tripla, dupla, sesquialtera, sesquitertia. dispones eas in minimis terminis, vt vides, &

inuenies 72, 24, 12, 8, 6 minimos terminos continuatarum rationum datarum.

PROBLEMA 6. PROPOSIT. 10.

Datas quascunque rationes in vnam componere.

Ex 5 definitione sexti ita facito. duc antecedentẽ vnius in antecedentem alterius, & fiat antecedens: & consequentem vnius in consequentem alterius, & fiat cõsequens. qui duo producti numeri continent datas rationes. vt si componas vnum tonum, qui constat sesquioctaua sonorum ratione, scilicet 9 ad 8 cum alio tono, fit ratio 81 ad 64. quæ est minor consonantia διατεσσάρων, id est sesquitertia differentia $\frac{13}{162}$. si componas diatessarωn cum tono, fit diapente. Si verò componas διαπέντε, id est, sesquialteram consonantiam

ſonantiã cum diateſſarωn, id eſt, ſeſquitertia, habebis cõſonantiam διὰ πασῶν, nempe duplam. Si verò diapaſῶn cõiungas cum diapente, habebis vnam triplam. Si duas diapaſῶn colligas, fiet diſdiapaſῶn, nempe quadrupla. Quod etiam ex proximè pręcedenti problemate probari poteſt. nam ſi duos tonos in minimis numeris continues, fiet 81, 72, 64. quare per vltimæ definitionis corollarium erit ratio 81 ad 64 compoſita ex ratione 81 ad 72, quæ eſt ſeſquioctaua, & ratione 72 ad 64, quæ etiam eſt ſeſquioctaua. Idẽ aliter.
Vt compoſuiſti duas, compones quotcunq; alias.

PROBLEM. 7. PROPOSI. 11.

Datas quaſcunque rationes inſtar partium vulgarium componere.

Hæc methodus rationes componendi rationum additio dici poteſt. Sæpe accidit, vt inter menſurandum addantur rationes quemadmodum partes, quò fit, vt duæ rationes æqualitatis faciant vnam duplã, vt ſi colligas $\frac{1}{1}$ cum $\frac{1}{1}$ fient $\frac{2}{1}$: ſi colligas $\frac{1}{1}$ cum $\frac{2}{1}$, id eſt dupla, fit $\frac{3}{1}$ tripla. ſi $\frac{3}{1}$ triplam cum $\frac{1}{1}$, fit quadrupla. Quo modo ſi componas vnam ſeſquialteram cum ſeſquitertia, fiet iuxta 4 problema 2 libri $\frac{17}{6}$, quod fuſiſsimè ibi quoad partes, eſt declaratum.

PROBLEM. 8. PROPOS. 12.

Rationes datas per alias quaſcunque diuidere.

Hoc genus diuiſionum vocatur rationum ablatio. Sicut in partibus non ſolùm maior per minorem, ſed & minor per maiorẽ diuiditur, ſic in rationibus non ſolùm maior

ior per minorem, ſed & minor per maiorem diuidi ſolet, quod in multiplicibus verum eſt, nedum in ſuperparticularibus & ſuperpartientibus, quarũ nomina prorſus ſunt ſimilia nominibus partiũ, quod ex rationũ nominibus manifeſtũ eſt. vt ſeſquitertia perinde eſt ac ſemel & tertia. Et vt in diuiſione partium quotus numerus continet rationẽ, quam habet diuidenda ad diuidentem, ſic in rationibus. eadem itaque erit methodus diuiſionis rationum cum partium diuiſione.

Canon. nempe diuidendæ rationis antecedens ducetur in conſequentem diuidentis, & fiet antecedẽs, illius verò conſequens in huius antecedẽtem, & fiet conſequẽs.

Exemplum vt ſi diuidas duplam per vnam quadruplam, id eſt ſi abſtrahas à dupla quadruplam, diſpones eas vt partes interpoſita virgula, & proueniet vna ſubdupla. atq; quam rationem habet 2 antecedens ſubduplæ ad 4 ſuum conſequẽtem, eãdem habet ratio dupla ad quadruplam.

$\frac{2}{1} \times \frac{4}{1}$ prouenit $\frac{2}{4}$.

Examen. Quòd ſi ducas quadruplam per ſubduplam, ſeu has duas rationes in vnã cõponas, proueniet dupla, quod examen eſt certiſsimum. Sic ſi diuidas conſonantiam diapente, nempe ſeſquialteram, per tonum, id eſt ſeſquioctauam, proueniet diateſſarωn, id eſt ſeſquitertia: ſi diapaſωn per diateſſarωn, emerget diapente: ſi diapaſωn per diapente, fiet diateſſarωn: ſi ex diateſſarωn demas diapente, remanebit ratio 8 ad 9 ſubſeſquioctaua, hypotonus. Hæc diuiſio mutuo reſpondet compoſitioni propoſit. 10. huius.

Quæ alio modo fieri poteſt, nempe ſi inter terminos diui-

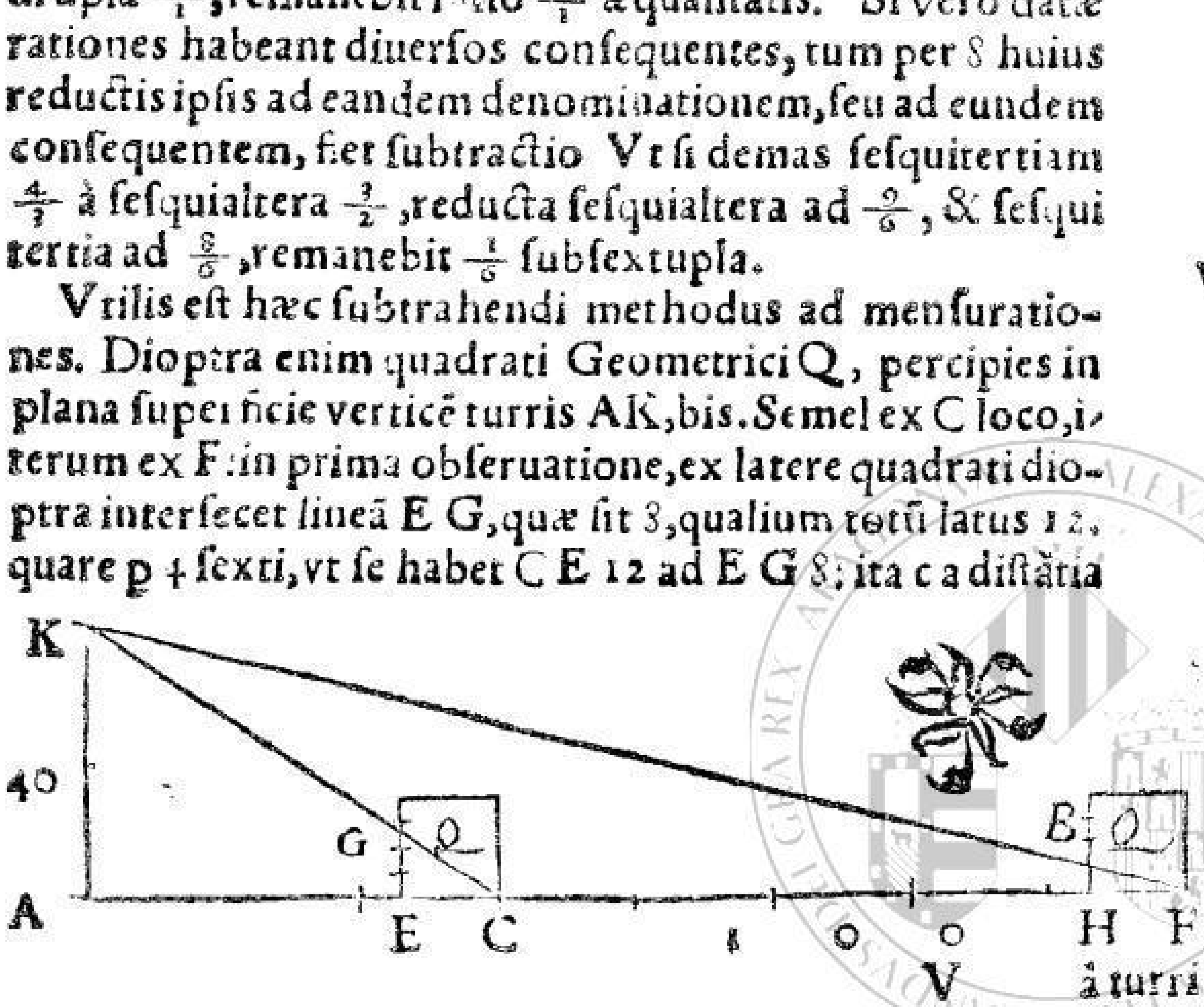
Aliter. dendæ rationis collocaretur numerus, ad quem aliquis terminus diuidendæ rationis ſe haberet in eadem ratione cũ diuidente ſic. Sit diuidenda dupla per ſeſquialteram, accipio duplã inter 4 & 2, inter quæ colloco 3, quæ ſe habent cum 2 in ratione ſeſquialtera: quum itaq; in 4, 3, 2, ratio 4 ad ad 2 dupla, sit composita ex ratione 4 ad 2 sesquitertia, & 3 ad 2 sesquialtera, dempta à ratione 4 ad 2, ratione 3 ad 2 sesquialtera, remanebit ratio 4 ad 3 sesquitertia.

PROBLEMA 9. PROPOSIT. 13.

Vnam rationem ab altera perinde ac partium subtractionem abstrahere.

Aut datæ rationes habent eosdem consequentes, aut non. Si habeant, subtrahe antecedentem minoris ab antecedente maioris manente eodem consequente, & prouenier differentia inter eas. Vt si demas duplam $\frac{2}{1}$ à quadrupla $\frac{4}{1}$, remanebit dupla $\frac{2}{1}$: si demas triplam $\frac{3}{1}$ à quadrupla $\frac{4}{1}$, remanebit ratio $\frac{1}{1}$ æqualitatis. *Si verò* datæ rationes habeant diuersos consequentes, tum per 8 huius reductis ipsis ad eandem denominationem, seu ad eundem consequentem, fiet subtractio Vt si demas sesquitertiam $\frac{4}{3}$ à sesquialtera $\frac{3}{2}$, reducta sesquialtera ad $\frac{9}{6}$, & sesquitertia ad $\frac{8}{6}$, remanebit $\frac{1}{6}$ subsextupla.

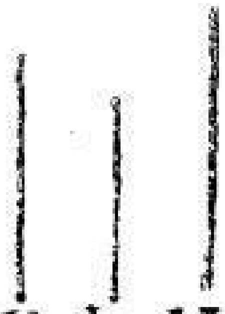
Vtilis est hæc subtrahendi methodus ad mensurationes. Dioptra enim quadrati Geometrici Q, percipies in plana superficie verticē turris AK, bis. Semel ex C loco, iterum ex F: in prima obseruatione, ex latere quadrati dioptra intersecet lineā E G, quæ sit 3, qualium totū latus 12, quare p 4 sexti, vt se habet C E 12 ad E G 8: ita c a distātia *Vtilitas.*



à turri ad A K eius altitudinem, sesquialtera videlicet ratione. Ex F loco cõspecto rursus vertice turris dioptra intercepit lineam H B, quæ sit 3, qualiũ totum latus quadrati est 12. Itaq; per eandẽ sexti, vt ratio F H ad H B est quadrupla, ita distãtiæ F A ad altitudinem A K est quadrupla, at à loco C ad locum F sunt 100 pedes, quæritur quanta sit turris A K altitudo? deme rationem sesquialterã C A ad A K, à ratione quadrupla F A ad A K, vt habetur hoc problemate, & remanebit ratio $\frac{5}{2}$, nempe distantiæ F C ad A K, quæ est dupla sesquialtera. Dic modò 5 dãt 2, quãtum dabunt 100 pedes? & per problema 8 primi, inuenies A K turris altitudinẽ esse 40 pedum. Si verò subtraheres sesquialteram à quadrupla, vt habetur proposit. 12 huius, remaneret ratio distantiæ F C ad A K altitudinem, dupla superbipartiẽs tertias, ex qua nõ posses turris altitudinem inuestigare, nam distantiæ F C ad A K altitudinem est ratio dupla sesquialtera. Vtraq; ergo rationum subtrahendarum methodus est vtilis Geometræ, sed quæ fit per diuisionem partibus consuetam, Musico & Astronomo est peculiaris, qua non solum minor ratio à maiore, sed etiam à minore maior subtrahitur, quod non potest fieri in subtractione quæ hîc traditur. Quòd autem maior ratio à minore subtrahatur, ex 5 definitione lib. sexti necessariò colligitur, atq; ex corollario nostro, & ex 19 definitione li. 7. secundum Campanum, & 12 & 13 capite primi libri Almagesti. Nam si ratio 3 ad 2, dispositis sic 3, 5, 2, cõposita est ex ratione 3 ad 5. & 5 ad 2: cùm 5 ad 2 sit dupla sesquialtera: at 3 ad 2 est sesquialtera, necessarium est vt minor ratio cõponatur ex maiore. quare à minore poterit subtrahi ratio maior minorem cõponens. Adhæc, necessariò respõdet diuisio multiplicationi, sed multiplicatio, seu compositio rationũ fit methodo multiplicationis partium, & diuisio

Demonstratio.

ſio rationum, ſeu abſtractio fiet omnino vt & diuiſio partium, qua minor per maiorem diuiditur. Maior ergo ratio à minore abſtrahetur, vt docet Theon in 23 propoſi. ſexti: dicit enim rationem lineæ C ad M componi ex rationibus C ad L, & L ad M, & viciſsim ratio M ad C cōponetur ex rationibus M ad L, & L ad C: ſed ratio M ad L eſt maior ratione M ad C, per 8 quinti: quare à ratione M ad C minore, poterit ſubtrahi ratio M ad L maior, & remanebit ratio L ad C. Errant itaque Io. Buteo, & frater Lucas contra ſentiētes.



PROBLEMA 10. PROPOSIT. 14.

Numeros continuò proportionales minimos in data ratione, quotcunque imperauerit quiſpiam, inuenire.

Propoſ. 2. lib. 8. Duc antecedentem datæ rationis in ſe, & in ſuum cōſequentem: deinde duc conſequentem in ſe, & habebis tres genitos numeros in eadem ratione. Deinde duc antecedentem datæ rationis in hos tres primogenitos, & conſequentem datæ rationis in vltimum ex tribus primogenitis, & habebis quatuor in eadem ratione, & cæteros ſimiliter. Vt ratio-

3	9	27	81	243	729
2	6	18	54	162	486
	4	12	36	108	324
		8	24	72	216
			16	48	144
				32	96
					64

Exēplum.

nis sesquialteræ, quæ in minimis numeris 3 & 2 existit, omnes numeros proportionales minimos institutum sit inuenire. Dispone eos numeros sic, duc 3 in se, & sunt 9, & in 2, & sunt 6: & 2 in se, & habes 4, 6, 9. rursus duc 3 in 9, & sunt 27: & 3 in 6, & sunt 18: & 3 in 4, & sunt 12: & 2 in 4, & sunt 8, 12, 18, 27, quatuor proportionales minimi in ratione sesquialtera &c Demõstratur hoc ex 17 propos. li. 7. quia 3 multiplicauit se, nempe 3 & 2: quare producti 9 & 6 se habent in eadem ratione, ac 3 & 2: rursus per eandem propos. li. 7. ipse 2 multiplicauit 3, & se, id est 2: quare producti 6 & 4, similiter se habebunt in eadem ratione cum 3 & 2: ergo per 11 quinti, qualis ratio est 9 ad 6, talis est 6 ad 4, quod erat faciendum.

Demonstratio.

Annotatio. Quomodo datis quibuscunq; terminis, sit ratio eorum continuãda, docuimus iam lib. 1, proble. 7. atq; quomodo sit inueniẽdũ vnũ mediũ proportionale, proble. 5. Quo inuento, simili ratione inuenientur duo alia: nam si inter A & E ducendo A in E, eius producti radix quadrata C est mediũ proportionale inter A & E: quare si ducas A in C, producti radix quadrata B erit medium proportionale inter A & C. Similiter, inter C & E inuenies D aliud mediũ proportionale, qua methodo inuenta erunt tria. & sic consequenter infinita media proportionalia impari progressione inueniri poterunt.

Theorema 5, Propositio 15.

Si fuerint tres numeri proportionales, cubus medij est æqualis ei, qui fit ex ductu omnium in sese.

Vt sicut 2, 4, 8, cubicus 4 est 64. si ducas 2 in 4, sunt 8, si 8 in 8, sunt 64. Hoc fit quia cubicus ad suã radicem habet rationem duplicatam ex ratione, quam habet ad quadratũ radicis

radicis: ſicut tertius proportionalis p 10 definitionē quinti, habet rationem duplicatam ex ratione, quæ eſt inter ſecundum & primum.

PROBLEMA 11. PROPOSIT. 16.

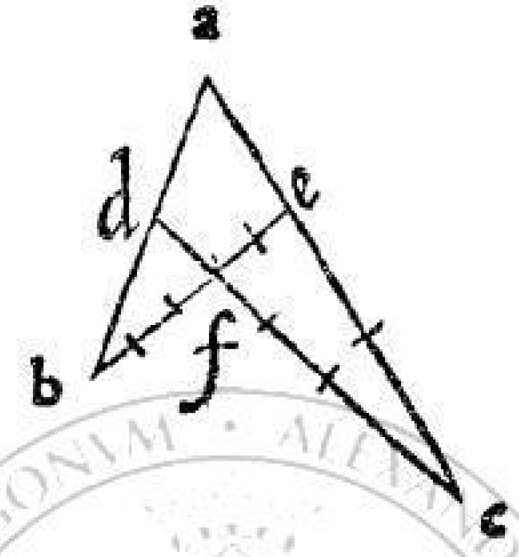
Inter datos numeros, duos medios proportionales inuenire.

Si ratio inter datos numeros poſsit in tres æquas rationes diuidi, dabuntur duo medij proportionales abſq; fractionibus ſic. Sint 2 & 16, inter quos eſt ratio octupla, quę componitur ex tribus duplis. duc 2 quadratè, & ſunt 4, quæ duc per 16, & fiũt 64, cuius latus cubicum ſunt 4, qui eſt primus medius minor. deinde duc quadratè 16, & fiũt 256, quæ duc per 2, & ſunt 512, cuius latus cubicum ſunt 8, alter medius proportionalis maior. Exēplum. *Si ratio inter datos non poſsit diuidi in tres æquas rationes, tum producti ex quadratis datorum numerorum in eos erunt ſurdi, nec habebunt latera cubica.* Quare notabis medios proportionales per notam ✓✓ abſq; inuentione lateris cubici. vt ſi dandi ſunt duo medij proportionales inter 2 & 10, inter quos eſt ratio ſubquintupla, quæ non poteſt diuidi in tres rationes æquales, quadra 2, & ſunt 4, quæ duc per 10, & ſunt 40. quadra 10, & ſunt 100, quæ duc per 2, & ſunt 200. dico 2 & ✓✓ 40, & ✓✓ 200 & 10 eſſe quatuor numeros proportionales. Exēplum. Accipe enim cubicos extremorum cum eis ſic, 8, 40, 200, 1000, qui numeri ſunt continuò proportionales ratione quintupla: quare & eorum latera erunt proportionalia per 12 propoſitionem 8 libri. Ratio huius propoſitionis ſumitur ex 10 definitione quinti. nam ſi quatuor numeri fuerint proportionales, ratio vnius extremi ad alterum est ratio mediorum triplicata. quare cùm ratio extremorum non posit ex tribus æqualibus rationibus componi, non poterunt absq; fractionibus dari duo medij proportionales.

PROBLEM. 12. PROPOSI. 17.

Data ratione composita ex duabus, ex sex terminis earum, compositas omnes ex illis sex terminis, & componentes omnes rationes inuenire.

Ptolomæus lib. 1. magnæ constructionis cap. 12. demõstrat, protractis duabus lineis, a b, & a c, à puncto a, & ab extremis earum ductis alijs duabus lineis b e, & c d, secantibus se in puncto f, futuram rationem c a ad a e, compositam ex rationibus c d ad d f, & f b ad b e. Item rationẽ c e ad e a componi ex rationibus c f ad f d, & d b ad b a. Similiter rationem b a ad a d componi ex rationibus b e ad e f, & f c ad c d. Itẽ rationem b d ad d a cõponi ex rationibus b f ad f e, & e c ad c a. Quod ex hoc schemate euidẽtissimum est, in quo c a est 3, qualiũ a e 1, & c d est 5, qualium d f est 1, & f b 3, qualium b e 5. Sit itaq; in prima synthesi c a 3 Primus terminus, a e 1 Secundus, c d 5 Tertius, d f 1 Quartus, f b 3 Quintus, b e 5 sextus. quod de hac synthesi prima quatuor, quæ emergunt ex hoc schemate, dicetur, dicendum est de omnibus rationibus compositis ex alijs duabus: quòd ratio primi 3 ad secundum 1, sit com-



ſit compoſita ex rationibus tertij 5 ad 1 quartū, & 3 quinti ad 5 ſextum, patet ex 5 definitione ſexti. nam $\frac{3}{1}$ ſit ex $\frac{5}{1}$, & $\frac{3}{5}$.

Ratio primi ad ſecundum conſtat ex rationibus tertij ad ſextum, & quinti ad quartū, nam $\frac{3}{1}$ conſtat ex $\frac{5}{5}$ & $\frac{3}{1}$. 1

Ratio primi ad tertium conſtat ex rationibus ſecundi ad quartū, & quinti ad ſextū. nam $\frac{3}{5}$ conſtat ex $\frac{1}{1}$, & $\frac{3}{5}$. 2

Ratio primi ad tertium conſtat ex rationibus ſecundi ad ſextum, & quinti ad quartū. nam $\frac{3}{5}$ cōſtat ex $\frac{1}{5}$ & $\frac{3}{1}$. 3

Ratio primi ad quintum conſtat ex rationibus ſecundi ad ſextum, & tertij ad quartum. nam $\frac{3}{3}$ ſit ex $\frac{1}{5}$ & $\frac{5}{1}$. 4

Ratio primi ad quintum conſtat ex rationibus ſecundi ad quartum, & tertij ad ſextum. nam $\frac{3}{3}$ conſtat ex $\frac{1}{1}$ & $\frac{5}{5}$. 5

Ratio ſecundi ad quartum conſtat ex rationibus primi ad tertium, & ſexti ad quintum. nam ratio $\frac{1}{1}$ conſtat ex $\frac{3}{5}$ & $\frac{5}{3}$. 6

Ratio ſecundi ad quartum conſtat ex rationibus primi ad quintum, & ſexti ad tertium. nam $\frac{1}{1}$ conſtat ex $\frac{3}{3}$ & $\frac{5}{5}$. 7

Ratio ſecundi ad ſextum conſtat ex rationibus primi ad tertium, & quarti ad quintum. nam ratio $\frac{1}{5}$ conſtat ex $\frac{3}{5}$ & $\frac{1}{3}$. 8

Ratio ſecundi ad ſextum cōſtat ex rationibus primi ad quintum, & quarti ad tertium. nam $\frac{1}{5}$ conſtat ex $\frac{3}{3}$ & $\frac{1}{5}$. 9

Ratio tertij ad quartum ſit ex rationibus primi ad ſecū- dum & ſexti ad quintum. nam $\frac{5}{1}$ conſtat ex $\frac{3}{1}$ & $\frac{5}{3}$. 10

Ratio tertij ad quartum conſtat ex rationibus primi ad quintum, & ſexti ad ſecundum. nam $\frac{5}{3}$ conſtat ex $\frac{3}{3}$ & $\frac{5}{3}$. 11

Ratio

12 Ratio tertij ad sextum fit ex rationibus primi ad secundum, & quarti ad quintum. nam ratio $\frac{5}{5}$ fit ex $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{3}$.

13 Ratio tertij ad sextum fit ex rationibus primi ad quintum, & quarti ad secundum. nam $\frac{5}{5}$ fit ex $\frac{3}{3}$ & $\frac{1}{1}$.

14 Ratio quarti ad quintum fit ex rationibus secundi ad primum, & tertij ad sextum. nam ratio $\frac{1}{3}$ fit ex $\frac{1}{3}$ & $\frac{5}{5}$.

15 Ratio quarti ad quintum fit ex rationibus secundi ad sextum, & tertij ad primum. nam ratio $\frac{1}{3}$ fit ex $\frac{1}{5}$ & $\frac{5}{3}$.

16 Ratio quinti ad sextum fit ex rationibus primi ad secũdum, & quarti ad tertium. nam ratio $\frac{3}{5}$ fit ex $\frac{3}{1}$ & $\frac{1}{5}$.

17 Ratio quinti ad sextum fit ex rationibus primi ad tertium, & quarti ad secundum. nam ratio $\frac{3}{5}$ fit ex $\frac{3}{5}$ & $\frac{1}{1}$.

Annotatio. Præter has 17 rationum compositiones, quæ emergunt ex sex terminis compositæ rationis ex duabus, nullæ aliæ sunt vtiles, inter quas plurimas rationes minores reperies à maioribus componi, & proinde per eas poterunt diuidi.

PROBLEMA 13. *PROPOSIT*. 18.

Datis quinque terminis rationis compositæ & duarum componentium, ex ipsis reliquum ignotum inuenire.

Si sextus fuerit ignotus, inuenietur ducto secundo in tertium, & productum diuidetur per primum, & quotus proueniens ducetur in quintum, & productum diuidetur per quartum. nam si ducas 1 in 5, fiunt 5: quibus diuisis per 3, prouenient 1 $\frac{2}{3}$, quæ si ducantur per 3, fient 5, sextus scilicet numerus.

Quintus inuenitur ducto primo in quartum, & productum diuiditur per tertium: quotus verò ducitur per sextum, &

tum, & productum diuiditur per secundum, & prouenit quintus. nam si ducas 3 in 1, fiunt 3, quæ si diuidas per 5, fiunt $\frac{3}{5}$, quæ si ducantur per 5, fiunt $\frac{15}{5}$, id est 3, quæ si diuidas per 1, fiunt 3, qui est quintus.

Quartus inuenitur ducto secundo in tertium, & productum diuiditur per primũ: quotus verò ducetur per quintum, & productum diuidetur per sextũ, & prodibit quartus. nam ducto 1 in 5, fiunt 5, quæ si diuidas per 3, fit 1, & $\frac{2}{3}$, quæ si ducas per 3, fient 5, quæ si diuidas per 5, perueniet 1, qui est quartus.

Tertius inuenitur ducto primo in quartum, & productum diuiditur per secundum: quotus verò ducetur in sextum, & productus diuidetur per quintum, & prodibit tertius. nam si ducas 3 in 1, fiunt 3, quæ si diuidas per 1, prouenient 3, quæ si ducas per 5, fiunt 15, quæ si diuidas per 3, fient 5, qui est tertius.

Secundus inuenitur ducto primo in quartum, & productum diuiditur per tertium: quotus verò ducetur in sextũ, & productum diuidetur per quintum, & prouenict secundus. Nam si ducas 3 in 1, fient 3, quæ si diuidas per 5, prouenient $\frac{3}{5}$, quæ si ducas per 5, fient $\frac{15}{5}$, id est 3, quæ si diuidas per 3, prouenict 1, qui est secundus.

Primus inuenitur ducto secundo in tertium, & productum diuiditur per quartum, & quotus ducitur in quintum, & productum diuiditur per sextum, & prouenit primus. Nam si ducas 1 in 5, fiunt 5: quæ si diuidas per 1, prouenient 5, quæ si ducas per 3, fient 15, quæ diuisa per 5, relinquunt 3, scilicet primum.

Cùm autem primus & secundus terminus habeant eandem mensuram communem, tertius verò & quartus aliã mensuram, quintus verò & sextus aliam, vt patet ex sche- Annotatio

X mate,

mate, ex primis duabus rationibus & vno termino alterius, colligetur sextus, qui erit mensuratus eadem mensura communi cum quinto. non erunt itaque hæ mensuræ, binis quibusq; eorum communes, inter sese commiscēdæ. nam alterius mensuræ sunt 3 partes lineæ c a, quàm 5 partes lineæ c d. atque huius 5 partes alterius sunt mensuræ, quàm 5 partes lineæ b e. Cæterùm quando quinq; termini dantur in solis numeris, quia omnes numeri habent vnitatem communem mensuram, protinus colligetur ex his regulis desideratus terminus.

FINIS INSTITVTIONVM ARITHMET.