



VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Facultat de Ciències Matemàtiques

Departament de Matemàtiques

Programa de doctorado en Matemáticas

Tesis doctoral:

El problema del acortamiento de curvas asociado a una densidad

Julio 2016

Doctorando: Francisco Viñado Lereu

Director: Dr. Vicente Felipe Miquel Molina



VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

Dr. Vicente F. Miquel Molina, Catedrático de Universidad del área de Geometría y Topología en el Departament de Matemàtiques de la Universitat de València - Estudi General.

CERTIFICA:

Que el trabajo recogido en la presente memoria, titulada *El problema del acortamiento de curvas asociado a una densidad*, presentado por Don Francisco Viñado Lereu ha sido realizado bajo su dirección y autoriza su presentación y defensa para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universitat de València - Estudi General.

Valencia, Julio 2016

La presente tesis doctoral se ha desarrollado al amparo de una beca del Subprograma Ayudas FPI-MICINN 2011 durante los cursos académicos 2011/2012, 2012/2013, 2013/2014 y 2014/2015 (referencia de la ayuda: BES-2011-045388). Asociada al proyecto de investigación “Volumen, energía y curvatura de variedades” (referencia del proyecto: MTM2010-15444).

Y durante el curso académico 2015/2016 al amparo de un contrato de investigador en formación asociado al proyecto de investigación “Geometría Riemanniana: flujos, estructuras y teoría del potencial”, CPI-15-209, que se enmarca dentro del programa Prometeo para grupos de investigación de Excelencia de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

A mis padres

Agradecimientos

Llevo cinco años aguardando este momento y ahora no sé cómo empezar. Esperaba con ganas el momento de escribir estas palabras dado que, sin el apoyo de todos los que aquí menciono, esta tesis doctoral no se hubiera podido culminar. Vamos allá.

En primer lugar, quiero agradecer a mi director, Vicente Miquel, toda la ayuda y las muchas horas de trabajo invertidas a lo largo de estos años. Sin duda él ha sido un pilar fundamental para la consecución de esta tesis, no solo por sus enseñanzas, sino por estar siempre ahí para dedicarle incontables horas a nuestra investigación. Ahora finaliza esta etapa pero espero que nuestra colaboración continúe. Sinceramente, gracias.

Pero además de a mi director quiero agradecer también al grupo de personas con el que he trabajado estos años, a todos los miembros del extinto Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Valencia, con una mención especial a Paco Carreras, que siempre estaba ahí para resolver cualquiera de mis preguntas, y a Óscar Macia, que empezó su vida en este Departamento al mismo tiempo que yo, con el que he compartido anécdotas, risas en el café y al que deseo un largo y exitoso futuro como investigador y docente.

Por otra parte, no puedo olvidarme de mi estancia de investigación en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada. Quiero agradecer a todos sus miembros su acogida y que me hicieran sentir parte de su grupo. En especial, quiero agradecer a César Rosales que me supervisara durante los meses que pasé allí descubriendo el mundo de los problemas isoperimétricos en densidad.

Además, tuve la suerte de realizar mi estancia internacional en la Universidad Federal de Ceará, donde quiero agradecer a Jorge H. de Lira su tutela y colaboración en la investigación que realizamos. Y digo suerte porque allí conocí a un gran grupo de personas que me hicieron sentir como en casa a pesar de estar a más de un océano de distancia. En especial, quiero agradecer a mis queridos Eraldo y Emilia que “cuidaran” de ese extranjero que no sabía cómo funcionaban las cosas en Brasil. Me abrieron las puertas de su casa e hicieron que aquellos tres meses pasaran volando. Gracias de todo corazón.

Finalmente, quiero dedicar mis más sinceras palabras de agradecimiento a las dos personas que han hecho que todo fuera posible, que con su esfuerzo y sacrificio han conseguido que avanzara, paso a paso, en mi formación académica y como persona. Estas dos personas son mis padres, M^aLuisa y Francisco, para las que no tengo suficientes palabras de agradecimiento por todo su apoyo y sus cuidados, desde los *tuppers* hasta sus consejos. Mil gracias por todo. Y, claro está, no puedo dar menos las gracias a mi hermano Javier, que siempre ha estado ahí para que no perdiera ningún tren. Gracias Javi.

Y para acabar, última pero no menos importante, solo me queda darle las gracias a Ángela. Por su apoyo constante, especialmente en estos duros meses finales de redacción de esta tesis. Gracias por su dedicación y cariño, por su paciencia y por todos sus chistes malos que conseguían hacerme sonreír. Sé que no te gusta que te dé las gracias por nada, pero ya sabes que no te hago caso. Gracias, de verdad.

Índice general

Introduction	XIII
1. Preliminares	1
1.1. Conceptos básicos	1
1.1.1. Cálculo tensorial	1
1.1.2. Geometría riemanniana	2
1.1.3. Principios del máximo	8
1.2. Problema del acortamiento de curvas	9
1.3. Geometría con densidad	11
1.3.1. Variedades con densidad y submersiones riemannianas	16
1.4. Fórmulas de evolución	20
1.4.1. Fórmula de Simon para $\nabla^2\alpha$ y $\Delta\alpha$	25
1.5. Flujo por la curvatura media asociado a una densidad	31
1.5.1. Caso particular: el espacio euclídeo con una densidad radial	33
1.5.2. El $\text{FCM}\psi$ de una hipersuperficie inmersa	37
1.5.3. Relación entre el $\text{FCM}\psi$ y el FCM	39
1.5.4. Otra visión de la densidad (anti-)gaussiana	40
2. $\text{PAC}\psi$ con ψ diferenciable	43
2.1. Caso general	43
2.2. Teoría de Angenent y Oaks	45
2.3. Fórmulas de variación para el $\text{PAC}\psi$	52
2.4. Existencia de solución para tiempo máximo finito	53
2.5. Existencia de solución para tiempo máximo infinito	54
2.6. Caso particular: El plano euclídeo con una densidad radial	73
3. Singularidades de tipo I en el $\text{PAC}\psi$	85
3.1. Teorema principal	85
3.1.1. Variedad ambiente del teorema principal	85
3.1.2. Formulación del problema de valor inicial	88
3.1.3. Grafos en evolución y singularidades tipo I	91

3.2. Singularidades de tipo I en el FCM ψ y su <i>blow-up</i>	93
3.2.1. <i>Blow-up</i> del espacio ambiente	95
3.2.2. <i>Blow-up</i> de la función densidad	96
3.2.3. <i>Blow-up</i> de las hipersuperficies del flujo	97
3.3. PAC ψ con singularidades tipo I	101
3.4. Convergencia de ciertos <i>blow-ups</i> (demostración del punto 4 del teorema 3.1.1)	113
A. Relación entre ∂_s^n y $\bar{\nabla}^n$	123
B. Ampliación demostración teorema 3.4.1	129
C. Teorema tipo Sturm	131
Conclusions	133

Introduction

A *Riemannian manifold with density* $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ is a Riemannian manifold $(\overline{M}, \overline{g})$ with a function $\psi : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ where the volume of an immersed submanifold M in \overline{M} ($\iota : M \rightarrow \overline{M}$) of dimension k is given by:

$$V_{\psi}^k(M) := \int_M e^{\psi} dv_g^k, \quad (1)$$

where dv_g^k is the Riemannian volume element of (M, g) , with $g \equiv \iota^* \overline{g}$ the induced metric over M by the immersion ι . This functional is called *ψ - k -volume*. The research around this type of manifolds has considerably increased in the past decade, focusing on different questions as the isoperimetric problems ([49, 11]), minimal submanifolds associated to a density, the natural generalization of the Riemannian geometrical objects to the geometry with density, as the Ricci's tensor and others, and the research of the intrinsic geometry corresponding to the new definitions ([43, 45]). Its relation with the probability field and diverse applications in Physics has enforced this development.

The work exposed in this manuscript is framed in the context of Riemannian manifolds with density.

A problem of huge relevance due to its multiple applications is the comprehension of the deformation of an immersed hypersurface M_0 in a Riemannian manifold $(\overline{M}, \overline{g})$ guided by its mean curvature vector, that is:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \vec{H} = HN, \quad (2)$$

giving rise to a family of immersed hypersurfaces $\{M_t\}$ which are called the *mean curvature flow* of M_0 (MCF or FCM in spanish). The problem dealing with the particular case in which the manifold \overline{M} is a surface is called *the curve shortening problem* (CSP or PAC in spanish). A fundamental issue that motivates the interest in this geometric deformation relies on the fact that (2) corresponds to the gradient flow associated with the n -volume functional over the set of immersed hypersurfaces in a $(n+1)$ -dimensional Riemannian manifold $(\overline{M}, \overline{g})$.

The understanding of the mean curvature flow presents a big amount of applications in Physics (as proves the fact that the first work on mean curvature flow appeared in the Journal of Applied Physics [44]) and in image processing ([16]).

The study of geometric flows tackles different sides:

1) the possibility that the flow develops a singularity in finite time and the classification of the diverse singularities that can occur;

2) in case of existing solutions without any type of singularity along their evolution, an asymptotic study about them will become necessary;

3) finally, it will be also required the characterization of sets of immersed hypersurfaces that present the same dynamic evolution throughout the flow, which means that they present the same type of singularity along the evolution or that they do not present any type of singularity through the flow and that have the same asymptotic form.

In the past thirty five years a wide progress has taken place in every type of question about (2). In the particular case of the curve shortening problem, an almost complete understanding of it was attained in the 80's and that was mainly done by Gage, Grayson and Hamilton ([25, 26, 24, 28, 29, 27]). One of the theorems that recapitulate all the work they developed, presented in [29], is the following:

Theorem 1. ([29]) *Let \bar{M} be a smooth Riemannian surface which is convex at infinity. Let $C(0) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \bar{M}$ be a smooth curve, embedded in \bar{M} . Then $C(t) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \bar{M}$ exists for $t \in [0, t_\infty)$, with t_∞ the maximal existence time of the flow, satisfying*

$$\frac{\partial C}{\partial t} = kN, \quad (3)$$

where k is the curvature of C and N is its unit normal vector. If t_∞ is finite, then C converges to a point. If t_∞ is infinite, then the curvature of C converges to zero in the C^∞ norm.

Previously, Gage in [25] demonstrated that in the Euclidean plane \mathbb{R}^2 the isoperimetric ratio L^2/A of the evolving curves decreases through the flow, reaching to prove, in [26], that in the case these curves collapsed to a point such isoperimetric ratio reached the lower bound 4π and showed that the point was a round point. This statement settled the mean curvature flow in the spotlight as a possible tool to obtain an answer to many isoperimetric problems.

On the other hand, Grayson took advantage of the flow in [29] to address a prove for the next result:

Theorem 2. (Corollary 0.2 of [29]) *A 2-sphere with a smooth Riemannian metric has at least three simple closed geodesics.*

Through this Theorem, it becomes clear that once the curve shortening problem was fully understood, it turned into a powerful tool to test the existence for closed geodesics in a surface.

The comprehension about the mean curvature flow, when the manifold \overline{M} has a dimension equal or greater than 3, follows a different way. This is mainly motivated by the techniques employed that, in the case of curves, are strongly dependent of the dimension and they are not extrapolable to other dimensions. Anyway, there has been published a great amount of works performed in this field ([32, 33, 34, 2, 51], etcetera) that, nowadays, allows to reach a wide understanding of the problem.

Gromov in [30] studied Riemannian manifolds with densities as “mm-spaces”, and mentioned the natural generalization of mean curvature in such spaces obtained as the gradient of the ψ -volume functional. According to [30, 43, 49, 41, 42] it is denoted by H_ψ and given (when $\overline{\nabla}\psi$ has sense) by

$$H_\psi = H - \langle \overline{\nabla}\psi, N \rangle, \tag{4}$$

with N as the inner normal. H_ψ is called ψ -mean curvature.

The hypersurfaces with $H_\psi = 0$ receive the name ψ -minimal. In the particular case of the Euclidean space \mathbb{R}^{n+1} with the Gaussian density $\psi(x) = -\frac{1}{2}n\mu^2|x|^2$, $\mu > 0$, the hypersurfaces with $H_\psi = 0$ appear as self-similar shrinker solutions of the MCF. Moreover, an important set of singularities of the MCF, called type I singularities, verify the equation $H_\psi = 0$. This is the motivation for an increasing number of works related to the classification of this type of hypersurfaces ([1, 9, 38, 37, 23, 13], etcetera). This type of hypersurfaces receive the name *shrinker*.

Owing to the increasing interest for the Riemannian manifolds with density is then logic to set up the study for the analogous flow of the mean curvature flow in this context, that is, a mean curvature flow governed by H_ψ instead of H . We shall call this flow:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \overrightarrow{H}_\psi = H_\psi N = (H - \langle \overline{\nabla}\psi, N \rangle)N, \tag{5}$$

the *mean curvature flow associated to a density ψ* (ψ MCF or FCM ψ in spanish). In the particular case where the dimension of the manifold \overline{M} is 2, we shall call this *the curve shortening problem associated to a density ψ* (ψ CSP or PAC ψ in spanish). We shall notice that in the particular case where the density is constant, then we recover the flow (2).

Previous works in this field have been presented by O. Schnürer and K. Smoczyk in [50] and A. Borisenko and V. Miquel in [12], although in the first of them we do not find any explicit reference to the term density. Both works were developed in Euclidean space \mathbb{R}^{n+1} with a defined radial density. A radial

density is the one given by a function ψ which depends only on the distance $r = |x|$ to the origin.

In the first place, Schnürer and Smoczyk studied, in the Euclidean space \mathbb{R}^{n+1} with radial density ψ , the evolution of a compact hypersurface evolving throughout the flow (5) and they considered as initial condition a hypersurface with the property of being, what they named, strengthened starshapedness. Thereby, they proved that, under this situation, such property was preserved through the flow and the solution exists for all time $t \in [0, \infty)$. Later on, they addressed the study of its asymptotic behaviour proving that the family of hypersurfaces subconverges to an attractive ψ -minimal sphere in the C^∞ norm.

Otherwise, Borisenko and Miquel studied, in the Euclidean space \mathbb{R}^{n+1} with Gaussian and anti-Gaussian density, the evolution of compact convex hypersurfaces throughout the flow (5). Let us notice again that the Gaussian density corresponds to $\psi(x) = -\frac{1}{2}n\mu^2|x|^2$ and, in the same way, the anti-Gaussian density to $\psi(x) = \frac{1}{2}n\mu^2|x|^2$ (in both cases $\mu > 0$).

In the first chapter of this manuscript we shall introduce the concepts that are necessary to understand the mathematical context that comprises the developed work: geometry with density (section 1.3), the evolution formulae corresponding to the geometric flow (section 1.4), the mean curvature flow associated to a density (section 1.5), etc. An important remark to understand the geometry of a Riemannian manifold with density is the explicit knowledge of the equivalence between the geometry of $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ and that of the warped product $\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} Q$, where Q is a m -dimensional Riemannian manifold. We describe it (in complete detail for the first time in the literature, as far as we know) in section 1.3.1. Besides all this, in this chapter, we have included some original results from our own work.

We shall employ the type barrier arguments in the ψ MCF as a tool to study the ψ -minimal hypersurfaces in the Euclidean space \mathbb{R}^{n+1} . These arguments are based on: given two hypersurfaces without intersect with each other then, their solutions through the ψ MCF (5) do not touch while both solutions exist.

Then, we start with our first family of manifolds with density that we try to understand. They are the Euclidean space \mathbb{R}^{n+1} with a radial density. Let us recall that a radial density is the one given by a function ψ which depends only on the distance $r = |x|$ to the origin. A key observation is that the density $-\ln r^n$ plays a special role in the behaviour of the other radial densities ψ . This behaviour depends of the crossings between the graphics of their derivatives ψ' and the graphic of $-n/r$ (see figure 1.1 and 1.2 in section 1.5.1). First we use this special role, together with barrier arguments in the ψ MCF, to study the ψ -minimal hypersurfaces in \mathbb{R}^{n+1} with this density and we obtain in section 1.5.1:

Proposition 3. *Let \mathbb{R}^{n+1} be the Euclidean space with a radial density ψ . Let us denote by r_{max} (respectively r_{min}) the maximal (respectively minimal) distance from any point of a closed hypersurface Σ to the origin. Let us suppose that*

- (a) ψ is smooth, and
- (b) the graphs of ψ' and $-\frac{n}{r}$ intersect transversally in a discrete family of points $r_1 < r_2 < \dots$.

Then

- i A hypersurface Σ satisfying $r_{2k} \leq r_{max} \leq r_{2k+1}$, is ψ -minimal if and only if it is one of the spheres $r = r_{2k}$ or $r = r_{2k+1}$. In particular, there is no closed ψ -minimal hypersurface inside the sphere $r = r_1$.
- ii The unique closed ψ -minimal hypersurfaces Σ with $r_{2k+1} \leq r_{min} \leq r_{2k+2}$ are the spheres $r = r_{2k+1}$ and $r = r_{2k+2}$.
- iii If the number of zeros of $\psi' + \frac{n}{r}$ is even and r_k is the last one, the unique closed ψ -minimal hypersurface Σ with $r_{max} \geq r_k$ is the sphere $r = r_k$.
- iv If the number of zeros of $\psi' + \frac{n}{r}$ is odd and r_k is the last one, the unique closed ψ -minimal hypersurface Σ with $r_{min} \geq r_k$ is the sphere $r = r_k$.
- v When $n = 1$, a ψ -minimal simple closed curve needs to be starshaped respect to the origin.

If we change the hypothesis (a) by (a') ψ is smooth only on $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \psi'(t) = -\infty$ and Σ is contained in $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$:

- i' If $\psi'(r) > -\frac{n}{r}$ for $r < r_1$, the same situations than under the hypothesis (a) are repeated.
- ii' If $\psi'(r) < -\frac{n}{r}$ for $r < r_1$, we have again the same situations than in case ψ smooth, but interchanging the roles of r_{max} and r_{min} .
- iii' Case v in the smooth situation holds with no change.

This proposition is contained in [41].

In the second chapter we will study the ψ CSP when the density ψ is smooth along the subset of the manifold \overline{M} where the curves evolve.

Our present work, together with Angenent and Oaks' contributions ([6, 8, 46]), generalized the results from Gage, Grayson and Hamilton for the CSP. Now we present the results of Angenent and Oaks:

Theorem 4. ([6, 8, 46]) *Let $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ be an orientable 2-Riemannian manifold with smooth density and let $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$ be a simple C^2 -curve. Then the solution $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ to ψ CSP (5) such that $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$ either shrinks to a point on \overline{M} in finite time or exists for infinite time.*

For the CSP, Grayson in [29] demonstrated that in those cases where the solution of the CSP exists for all time, the geodesic curvature $k \rightarrow 0$ in the C^∞ norm. On the other hand, Gage almost simultaneously in [27] demonstrated that in the case where the solution exists for all time the family of curves subconverges to a limit geodesic. These very results are the ones that we will generalize for the geometry with density, giving special attention to the subconvergence result due to its applications.

Theorem 5. *Let $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ be an orientable 2-Riemannian manifold with density, whose isoperimetric profile \mathcal{I} is a well defined continuous function which satisfies $\lim_{a \rightarrow a_0} \mathcal{I}(a) = 0$ implies $a_0 = 0$, and let $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$ be an embedded curve. Let $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ be a solution of the ψ CSP (5) with initial condition γ_0 .*

If this solution exists for every $t \in [0, \infty)$ and $\gamma(\mathbb{S}^1, t)$ is contained in a fixed compact domain U where the density ψ is smooth, then there is a reparametrization $\tilde{\gamma}(\cdot, t)$ of $\gamma(\cdot, t)$ such that there is a sequence $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $t_k \rightarrow \infty$, which C^m -converges to a closed ψ -minimal curve of \overline{M} for every $m \in \mathbb{N}$.

This result, together with the work developed by Xi-Ping Zhu in [53], fullfills the study for the ψ CSP in the case with smooth ψ .

Theorem 6. ([6, 8, 46, 53]) *Let $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ be an orientable 2-Riemannian manifold with smooth density and let $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$ be an embedded curve. Let $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ be a solution of the ψ CSP (5) with initial condition γ_0 . If the maximal time is $T < \infty$ the curve shrinks to a round point on \overline{M} in the C^∞ norm.*

The Theorem 5, besides the interest by itself, it is postulated as a possible tool to prove the existence of ψ -minimal curves in a 2-dimensional Riemannian manifolds with density. Anyway, in the present work we have focused in its understanding not in its applications.

Once the Theorem 5 is demonstrated (section 2.5), we will apply it to the particular case of the Euclidean plane with a radial density, that is to say, a density that only depends on the distance $r = |x|$ to the origin (in the section 2.6). We shall obtain:

Theorem 7. *Let \mathbb{R}^2 be the Euclidean plane with a radial density ψ such that the graphs of ψ' and $-\frac{1}{r}$ intersect transversally in a discrete number of points $r_1 < r_2 < \dots$, let γ_0 be a simple closed curve which bounds a domain Ω_0 .*

Let r_{max} and r_{min} be, respectively, the maximal and minimal distance from γ_0 to the origin. Let us suppose that either the sequence of zeros r_n goes to ∞ , or the curve γ_0 is contained in the disk centered at the origin whose radius is the biggest zero of $\psi' + \frac{1}{r}$, or $\psi' + \frac{1}{r} > 0$ after the biggest zero of $\psi' + \frac{1}{r}$.

(a) If ψ is smooth on \mathbb{R}^2 , then:

a.i If $r_{max} \leq r_1$, under ψ CSP, γ_0 collapses to a round point in finite time. In particular, if $\psi' + \frac{1}{r}$ has no zero, every simple closed curve collapses to a round point in finite time.

a.ii If $r_{2k-1} \leq r_{min} \leq r_{max} \leq r_{2k+1}$, $k \geq 1$, and $0 \notin \Omega_0$, under ψ CSP, it collapses to a round point in finite time.

a.iii If $r_1 \leq r_{min}$ and $0 \in \Omega_0$, the solution of the ψ CSP with the initial condition γ_0 exists for $t \in [0, \infty[$ and there is a sequence of times t_n , $t_n \rightarrow \infty$, such that the curves $\gamma(\cdot, t_n)$ converge, in the C^m topology, to a ψ -minimal curve, for every $m \in \mathbb{N}$. Moreover:

a.iii.1 If $r_{2k-1} \leq r_{min} \leq r_{max} \leq r_{2k+1}$, $k \geq 1$, the limit ψ -minimal curve is the circle of radius r_{2k} . This includes also the case $r_{2k+1} = \infty$, which occurs when r_{2k} is the last zero of $\psi' + \frac{1}{r}$.

(b) If ψ is smooth only on $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \psi'(t) = -\infty$ and γ_0 is contained in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$:

b.i If $\psi'(r) > -1/r$ for $r < r_1$, the situation is the same as in cases a.ii and a.iii.

b.ii If $\psi'(t) < -1/r$ for $r < r_1$, then:

b.ii.1 If γ_0 is contained inside the disk $r_{max} \leq r_2$ and $0 \notin \Omega_0$, under ψ CSP, it collapses to a round point in finite time.

b.ii.2 If γ_0 is contained inside the disk $r_{max} \leq r_2$ and $0 \in \Omega_0$, the solution of the ψ CSP with the initial condition γ_0 exists for $t \in [0, \infty[$, and there is a sequence of times t_n , $t_n \rightarrow \infty$, such that the curves $\gamma(\cdot, t_n)$ converge, in the C^m topology, to the circle of radius r_1 , for every $m \in \mathbb{N}$.

b.ii.3 If $r_{2k} \leq r_{min} \leq r_{max} \leq r_{2k+2}$, $k \geq 1$, and $0 \notin \Omega_0$, under ψ CSP, it collapses to a round point in finite time.

b.ii.4 If $0 \in \Omega_0$, the solution of the ψ CSP with the initial condition γ_0 exists for $t \in [0, \infty[$ and there is a sequence of times t_n , $t_n \rightarrow \infty$, such that the curves $\gamma(\cdot, t_n)$ converge, in the C^m topology, to a ψ -minimal curve, for every $m \in \mathbb{N}$. Moreover:

b.iii.4.1 If $r_{2k} \leq r_{min} \leq r_{max} \leq r_{2k+2}$, $k \geq 1$, the limit ψ -minimal curve is the circle of radius r_{2k+1} . This includes also the case $r_{2k+2} = \infty$, which occurs when r_{2k+1} is the last zero of $\psi' + \frac{1}{r}$.

Let us observe that for the anti-Gaussian density, all the possibilities are included in case (ai), because $\psi' + \frac{1}{r}$ has no zeros. The Gaussian density does not satisfy the condition “ $\psi' + \frac{1}{r} > 0$ after the biggest zero of $\psi' + \frac{1}{r}$ ”, but we can still apply case (ai). We did not try to go further in the study of this ψ CSP with the methods of the proof of Theorem 5 because Gaussian and anti-Gaussian densities are very special and more complete results can be obtained by applying the method used in [12] (section 1.5.4).

The situation studied by Schnürer and Smoczyk in [50] is the one given by cases (b.ii) in the above theorem, with $r_2 = \infty$. Here, cases (b.ii.1) and (b.ii.2) give all the possibilities of motion for a curve, then our results extend the result in [50] for curves, where we do not need the extra hypothesis for the curve of being strengthened starshapedness.

We have published Theorems 5 and 7 in [41].

In the following chapter (chapter 3) we will study the type I singularities that can take place through the ψ MCF assuming that the density has singularities in a given subset of the manifold \overline{M} .

Commonly the singularities that can be produced through the mean curvature flow have been classified in two large sets attending to divergence order of the maximal of the norm of the second fundamental form: type I and type II singularities. If a singularity in the evolution of the hypersurfaces is produced by (2), when $t \rightarrow T_{max}$ (maximal time), then:

$$\max_{M_t} |A| \geq \frac{1}{\sqrt{2(T_{max} - t)}}. \quad (6)$$

And it is natural to consider in first place those singularities for which exists a positive constant $C > 0$ such that:

$$\frac{C}{\sqrt{2(T_{max} - t)}} \geq \max_{M_t} |A| \geq \frac{1}{\sqrt{2(T_{max} - t)}}. \quad (7)$$

These singularities brought out by the mean curvature flow are the ones called *type I singularities*. The other cases are called *type II*.

As we said before, in the section 1.3.1, we adress the study of the relation between the Riemannian geometry of a Riemannian submersion and the Riemannian geometry with density of a manifold, hence we shall end up to obtain an equivalence between the Riemannian geometry with density and the Riemannian geometry of the warped products. This implies that the evolution of a

family of hypersurfaces M_t through the ψ MCF in $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ is equivalent to the evolution of $M_t \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ through the MCF in $\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$. The motivation for the study of this section 1.3.1 has its source in the work of Smoczyk [52]. Smoczyk observed that the ψ -mean curvature H_ψ of a hypersurface M in \overline{M} is essentially the same that the usual mean curvature H of the warped product $M \times_{e^\psi} \mathbb{R}$ in the warped product $\overline{M} \times_{e^\psi} \mathbb{R}$. All these remarks are contained in [42].

This relation between MCF (2) and ψ MCF (5) will allow us move in a natural way the definition of type I singularities of MCF towards ψ MCF (details in section 3.2). Then we claim that ψ MCF presents a *type I singularity* in $t = T$ if there is a constant $C > 0$ such that

$$\sup_{M_t} \left(|A|^2 + \frac{1}{b} \langle \overline{\nabla} \psi, N \rangle^2 \right) \leq \frac{C}{T-t} \quad \text{where } b > 0. \quad (8)$$

Under these circumstances, the equivalence between MCF and ψ MCF and (6), the singularities of ψ MCF can be the result of the norm of the second fundamental form $|A| \rightarrow \infty$ or by the hypersurfaces of evolution that touch the singular subset of ψ or both cases at the same time.

In the section 3.2, we provide a full study of the type I singularities of the ψ MCF. After that, in section 3.3, we focus on the study of the ψ CSP (5), developing a particular case in which the singularity produced by the flow is due to the solution that touches the singular subset of ψ . We prove that in such situation the singularity is of type I and we will study its blow-up.

In that precise case, we consider a two-dimensional oriented Riemannian manifold $(\overline{M}, \overline{g})$ with the following expression for the metric:

$$\overline{g} = dr^2 + e^{2\varphi(r)} dz^2, \quad (9)$$

where φ is smooth and satisfies $\varphi(r) = \varphi(-r)$. And we assume the incoming restriction over the density ψ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi^{(n)}(r)}{b/r^n} = (-1)^{n-1} (n-1)!, \quad \text{for some } b > 0 \text{ and } n = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\psi'''(r)}{\psi'(r)} - \frac{2}{b^2} \psi'(r)^2 \right) \text{ is bounded from above,} \quad (11)$$

where $^{(n)}$ denotes the n -th derivative respect to r . The motivation for the hypotheses (10) and (11) and also for the other hypotheses on ψ' and ψ'' that appear in the next Theorem is the corollary for the MCF that we call here as Corollary 9 and we shall explain them when we explain the setting for that corollary.

In this scenario the following Theorem make sense. We shall denote for $\mathfrak{z}(f)$ the first positive zero of the function f .

Theorem 8. *Let $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ be a 2-dimensional oriented Riemannian manifold with density with non-negative Gauss curvature and satisfying the conditions (9), (10) and (11). Let M_t be the solution of the ψ MCF (5) on a maximal interval $[0, T[$ such that the initial condition M_0 is a graph over the geodesic $r = 0$, is contained in the band limited by $r = 0$ and $r = \min\{\mathfrak{z}(\varphi' + \psi'), \sup\{r \mid (\psi'' + \psi'^2/b)|_{[0,r]} \leq 0\}\}$ and satisfies $H_\psi \geq 0$ (but not identically 0). We consider two cases:*

(i) M_0 is a closed curve,

(ii) M_0 is a compact curve with boundary contained in the boundary of a band G limited by two curves $z = b_1$ and $z = b_2$. In this case we add to (5) the boundary condition: “ M_t intersects ∂G orthogonally at the boundary of M_t for every $t \in [0, T[$ ”.

Then

1. $H_\psi > 0$ for every $t \in]0, T[$.
2. M_t is a graph over $r = 0$ for every $t \in [0, T[$.
3. $T < \infty$ and the flow $F(\cdot, t)$ is of type I in the sense of definition (8).
4. At each singular point, a blow-up centered at this point gives a limit flow \widetilde{M}_t in \mathbb{R}^2 with its Euclidean metric and density $\widetilde{\psi}^\infty = \ln r^b$ which is a graph over $r = 0$ for every time and, after doing a new blow-up, converges to a $\ln r^b$ -shrinker in \mathbb{R}^2 , which is the line $r = \text{constant}$ in case $b = m \in \mathbb{N}$.

The concept of $\ln r^b$ -shrinker employed in the last Theorem is as follows: given any function $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, we shall call f -shrinker in \mathbb{R}^{n+1} to a hypersurface $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ that satisfies $H_f + \langle F, N \rangle = 0$.

Finally, with the equivalence between the ψ MCF and the MCF, we will be able to study the evolution of hypersurfaces of revolution through the MCF in a rotationally symmetric space. A *rotationally symmetric space respect to an axis z* is, as was presented in [14] and [15], a smooth Riemannian manifold $(\widehat{M}, \widehat{g})$ admitting cylindrical coordinates $(r, z, u) \in I \times J \times \mathbb{S}^m$ respect to which \widehat{g} can be written in the form

$$\widehat{g} := dr^2 + e^{2\varphi(r)} dz^2 + e^{2\psi/m(r)} g_{\mathbb{S}}, \quad (12)$$

where $g_{\mathbb{S}}$ is the standard metric of sectional curvature 1 on the sphere \mathbb{S}^m . The curve $r = 0$ is a geodesic of \widehat{M} and it is called “axis z ” or “axis of revolution”. This is equivalent to say that $\widehat{M} = \overline{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$, where \overline{M} is a surface with metric \overline{g} that can be written under the form (9) and $\psi : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ is a function which depends only on the distance r to the “axis z ” (the geodesic $r = 0$ of \overline{M}).

A *hypersurface of revolution S* of \widehat{M} generated by a graph over the axis z is a submanifold of \widehat{M} that can be described in cylindrical coordinates by the immersion $J \times \mathbb{S}^m \rightarrow \widehat{M}/(z, u) \mapsto (r(z), z, u)$, where $r(z)$ is a smooth function.

In a rotationally symmetric space the condition (10) is accomplished (for all $n \in \mathbb{N}$ and $b = m \in \mathbb{N}$) and in the same way the condition (11) becomes true.

The fact that (10) and (11) are satisfied in this context is our motivation for these hypotheses in Theorem 8. Densities ψ satisfying them appear as a generalization of a rotationally symmetric space of “dimension” $b + 2$, but with b any positive real number (not necessarily a natural number). We remark also that, when ψ satisfies (10) and (11) and $b \notin \mathbb{N}$, $\overline{M} \times_{e^{\psi/k}} \mathbb{S}^k$ has singularities whatever $k \in \mathbb{N}$ be, then the hypotheses (10) and (11) on ψ seem to include many ψ MCF which are not equivalent to a MCF in any regular Riemannian manifold.

Moreover, the sectional curvature of \widehat{M} corresponding to the plane generated by ∂_r and ∂_z and those generated by ∂_r and a vector ∂_i tangent to \mathbb{S}^m , or by ∂_z and ∂_i are, respectively,

$$\begin{aligned} S_{rz} = \widehat{R}_{rzzr} &= -(\varphi'' + \varphi'^2), & S_{ri} = \widehat{R}_{riri} &= -\frac{\psi'^2 + m\psi''}{m^2}, \\ S_{zi} = \widehat{R}_{zizi} &= -\frac{\psi'\varphi'}{m}. \end{aligned} \quad (13)$$

If all the sectional curvatures of \widehat{M} are non-negative, then $\psi'' + \psi'^2/m \leq 0$ and the hypothesis on M_0 to be contained in a band reduces to be contained in the band limited by $r = 0$ and $r = \mathfrak{z}(\varphi' + \psi')$. Moreover the hypothesis that \bar{g} is smooth (with $\varphi(r) = \varphi(-r)$) and (10) imply that $\mathfrak{z}(\varphi' + \psi') > 0$ and this band always exists (look at figure of section 3.1.2 to have an idea in the sphere). This is again our motivation for the hypothesis of M_0 contained in such a band.

Then, we have the following consequence of Theorem 8 for rotationally symmetric spaces:

Corollary 9. *Let $(\widehat{M}, \widehat{g})$ be a rotationally symmetric space of dimension $m+2$ and non-negative sectional curvature. Let M_0 be a hypersurface of revolution of \widehat{M} generated by a graph over the axis “ z ”, with non-negative mean curvature (but not identically 0) and contained in the region limited by the cylinders $r = 0$ and $r = \mathfrak{z}(\varphi' + \psi')$. Let M_t be the solution of the MCF (2) on a maximal interval $[0, T[$ with the initial condition M_0 . We consider two cases:*

(i) M_0 is a closed hypersurface,

(ii) M_0 is a compact hypersurface with boundary contained in the boundary of a band G limited by two hypersurfaces $z = b_1$ and $z = b_2$. In this case we add to (2) the boundary condition: “ M_t intersects ∂G orthogonally at the boundary of M_t for every $t \in [0, T[$ ”.

Then

1. $H > 0$ for every $t \in]0, T[$.

2. M_t is a hypersurface of revolution of \widehat{M} generated by a graph over the axis “ z ” for every $t \in [0, T[$.
3. $T < \infty$ and the flow $F(\cdot, t)$ is of type I.
4. At each singular point, a blow-up centered at this point gives a limit flow which is a graph over $r = 0$ for every time and, after doing a new blow-up, converges to a cylinder in \mathbb{R}^{m+2} .

This Theorem generalizes to manifolds with non-negative curvature some results obtained by G. Huisken in [34] and S. Altschuler, S. Angenent and Y. Giga in [2], for surfaces of revolution in the Euclidean space \mathbb{R}^{n+1} .

Theorem 8 and Corollary 9 are contained in [42].

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de esta memoria la inmensa mayoría del trabajo estará orientada a estudiar hipersuperficies inmersas (M, ι) en una variedad riemanniana ambiente (\bar{M}, \bar{g}) . Es por ello por lo que desde el principio adoptaremos el siguiente convenio notacional: *los objetos geométricos asociados a la variedad ambiente llevarán una superbarra y los objetos geométricos asociados a la hipersuperficie no la llevarán.*

1.1. Conceptos básicos

1.1.1. Cálculo tensorial

Una buena exposición sobre el cálculo tensorial necesario para el desarrollo de la presente memoria puede encontrarse en el capítulo 1 de [4]. Aquí nos limitaremos a fijar la notación básica.

Sea una variedad diferenciable \bar{M} , a su fibrado tangente lo denotaremos por $T\bar{M}$ y al fibrado cotangente por $T^*\bar{M}$.

Definición 1.1.1. *Llamaremos tensor (k, l) sobre \bar{M} a una aplicación $C^\infty(\bar{M})$ -multilineal de la forma:*

$$F : \underbrace{\Gamma(T\bar{M}) \times \dots \times \Gamma(T\bar{M})}_k \times \underbrace{\Gamma(T^*\bar{M}) \times \dots \times \Gamma(T^*\bar{M})}_l \longrightarrow C^\infty(\bar{M}). \quad (1.1)$$

Al conjunto de tensores (k, l) sobre \bar{M} lo denotaremos por $\mathcal{T}_l^k(\bar{M})$. Los tensores son objetos puntuales, es decir el valor de la función $F(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \in C^\infty(\bar{M})$ en $p \in \bar{M}$ únicamente depende del valor de sus componentes en p , de $X_{1p}, \dots, X_{kp}, \omega_{1p}, \dots, \omega_{lp}$.

Sobre el conjunto $\mathcal{T}_l^k(\bar{M})$ podemos definir la aplicación *traza* sobre las componentes (i, j) con $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{k, \dots, k+l\}$:

$$\text{tr}_{ij} : \mathcal{T}_{l+1}^{k+1}(\bar{M}) \longrightarrow \mathcal{T}_l^k(\bar{M}), \quad (1.2)$$

como

$$(\text{tr}_{ij} F)(X_1, \dots, X_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+l})(p) := \text{tr} \left(F(X_{1p}, \dots, X_{i-1p}, \cdot_p, X_{ip}, \dots, X_{kp}, \omega_{k+1p}, \dots, \omega_{j-1p}, \cdot_p, \omega_{jp}, \dots, \omega_{k+lp}) \right) \quad (1.3)$$

donde $\text{tr} : T_1^1(T_p \overline{M}) \simeq \text{End}(T_p \overline{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación traza definida sobre el conjunto de matrices, $F \in \mathcal{T}_{l+1}^{k+1}(\overline{M})$, $p \in \overline{M}$, $X \in \Gamma(T\overline{M})$ y $\omega \in \Gamma(T^*\overline{M})$.

Dada una variedad riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$ de forma natural podemos definir las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} \flat : \mathcal{T}_1^0(\overline{M}) = \Gamma(T\overline{M}) &\longrightarrow \mathcal{T}_0^1(\overline{M}) = \Gamma(T^*\overline{M}) \\ X &\longmapsto \overline{g}(X, \cdot), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \sharp : \mathcal{T}_0^1(\overline{M}) = \Gamma(T^*\overline{M}) &\longrightarrow \mathcal{T}_1^0(\overline{M}) = \Gamma(T\overline{M}) \\ \omega &\longmapsto \text{tr}_{11}(\omega \otimes \overline{g}^{-1}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Donde \overline{g}^{-1} denota al tensor $(0, 2)$ inverso al tensor \overline{g} en el siguiente sentido:

$$\text{tr}_{24} \overline{g} \otimes \overline{g}^{-1} = \delta, \quad (1.6)$$

con δ el tensor $(1, 1)$ definido como:

$$\delta(X, \omega) := \omega(X), \text{ para todo } (X, \omega) \in \Gamma(T\overline{M}) \times \Gamma(T^*\overline{M}). \quad (1.7)$$

Las aplicaciones (1.4) y (1.5) pueden extenderse de forma natural a tensores y con ello a su vez podemos definir la aplicación *traza asociada a \overline{g}* :

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\overline{g}} : \mathcal{T}_l^k(\overline{M}) &\longrightarrow \mathcal{T}_{l-2}^k(\overline{M}) \\ F &\longmapsto \text{tr} F^\flat, \\ \text{tr}_{\overline{g}} : \mathcal{T}_l^k(\overline{M}) &\longrightarrow \mathcal{T}_l^{k-2}(\overline{M}) \\ F &\longmapsto \text{tr}_{\overline{g}} F := \text{tr} F^\sharp. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.1.2. Geometría riemanniana

En este apartado, nos limitaremos a introducir los conceptos básicos necesarios para el desarrollo de esta memoria con objeto de recordar conceptos y fijar la notación. Por lo tanto, no entraremos en la interpretación de dichos conceptos, para ello hay multitud de textos de geometría riemanniana (por ejemplo [22, 47, 48]).

Con el fin de fijar notación, procedemos a definir la curvatura de una variedad riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$:

Definición 1.1.2. La curvatura $\bar{R}^{(3,1)}$ de una variedad riemanniana (\bar{M}, \bar{g}) es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ una aplicación $\bar{R}^{(3,1)}(X, Y) : \mathfrak{X}(\bar{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\bar{M})$ dada por:

$$\bar{R}^{(3,1)}(X, Y)Z := \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(\bar{M}), \quad (1.9)$$

donde $\bar{\nabla}$ es la conexión riemanniana de \bar{M} .

A su vez, definimos el tensor $(4, 0)$ de curvatura como:

Definición 1.1.3. Llamaremos tensor $(4, 0)$ curvatura al tensor $(4, 0)$:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{(4,0)} : \mathfrak{X}(\bar{M}) \times \mathfrak{X}(\bar{M}) \times \mathfrak{X}(\bar{M}) \times \mathfrak{X}(\bar{M}) &\longrightarrow C^\infty(\bar{M}) \\ (X, Y, Z, W) &\longmapsto \bar{g}(\bar{R}^{(3,1)}(X, Y)Z, W). \end{aligned} \quad (1.10)$$

En múltiples ocasiones, cuando no haya lugar a confusión, los superíndices $(3, 1)$ y $(4, 0)$ sobre \bar{R} se omitirán, dado que sabremos a qué objeto nos estamos refiriendo en función de los argumentos sobre los que esté actuando \bar{R} .

A continuación, definimos también el tensor de Ricci de (\bar{M}, \bar{g}) :

Definición 1.1.4. Llamaremos tensor de Ricci de la variedad riemanniana (\bar{M}, \bar{g}) , al tensor $(2, 0)$:

$$\begin{aligned} \bar{Ric} : \mathfrak{X}(\bar{M}) \times \mathfrak{X}(\bar{M}) &\longrightarrow C^\infty(\bar{M}) \\ (X, Y) &\longmapsto \sum_i \bar{R}^{(4,0)}(X, \bar{e}_i, Y, \bar{e}_i), \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $\{\bar{e}_i\}$ es una referencia ortonormal de campos para (\bar{M}, \bar{g}) .

Inmersiones isométricas

Para una exposición más detallada y con demostraciones de este apartado puede consultarse el libro clásico de M. do Carmo [22]. Aquí nos limitaremos a realizar una breve exposición de los conceptos básicos y de los resultados que puedan ser útiles a lo largo de la memoria.

En primer lugar, sea una inmersión diferenciable $\iota : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k=m}$ de una variedad diferenciable M de dimensión n en una variedad riemanniana (\bar{M}, \bar{g}) de dimensión m . La métrica riemanniana \bar{g} induce, de forma natural, una métrica riemanniana g en M del siguiente modo:

$$g(v, w) := \bar{g}(\iota_* v, \iota_* w), \quad \text{para todo } v, w \in TM.$$

Dado $p \in M^n$ puede realizarse una separación natural del espacio tangente $T_{\iota(p)}\overline{M}$ tal y como presentamos a continuación:

$$T_{\iota(p)}\overline{M} \simeq \iota_*(T_p M) \oplus (\iota_*(T_p M))^\perp,$$

donde $(\iota_*(T_p M))^\perp \equiv \{v \in T_{\iota(p)}\overline{M} \mid \overline{g}(v, w) = 0, \forall w \in \iota_*(T_p M)\}$. En general denotaremos al subespacio $(\iota_*(T_p M))^\perp$ por $T_p M^\perp$.

La conexión de Levi-Civita en M^n asociada a g , a la que denotaremos por ∇ , verifica la igualdad:

$$\nabla_X Y = \iota_*^{-1} \left((\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T \right), \quad (1.12)$$

donde $\overline{X}, \overline{Y}$ son extensiones locales en \overline{M}^m de $\iota_*(X), \iota_*(Y)$ ($X, Y \in \mathfrak{X}(M)$), respectivamente; $\overline{\nabla}$ es la conexión de la variedad riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$ y $(\cdot)^T$ denota la proyección natural de los campos de \overline{M} sobre $\iota_* M$.

Llamaremos segunda forma fundamental vectorial de M^n a:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha} : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\overline{M}^m) \\ (X, Y) &\longmapsto \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde $\overline{X}, \overline{Y}$ son extensiones locales en \overline{M}^m de $\iota_*(X), \iota_*(Y)$ ($X, Y \in \mathfrak{X}(M)$), respectivamente. La aplicación $\overrightarrow{\alpha}$ es $C^\infty(M)$ bilineal y simétrica.

Dado $\eta \in T_p M^\perp$ de norma uno, llamaremos aplicación de Weingarten asociada a η de M a:

$$\begin{aligned} A_\eta : \mathfrak{X}(M^n) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M^n) \\ X &\longmapsto -\iota_*^{-1} \left((\overline{\nabla}_{\iota_* X} \eta)^T \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Notemos que entre la segunda forma fundamental vectorial $\overrightarrow{\alpha}$ y las aplicaciones de Weingarten de M , existe la siguiente relación:

$$\overrightarrow{\alpha}(X, Y) = \sum_{i=1}^k g(A_{\eta_i} X, Y) \eta_i, \quad (1.15)$$

con $\{\eta_i\}_{i=1}^k$ base ortonormal para $T_p M^\perp$.

Llamaremos segunda forma fundamental escalar α_{η_i} asociada a la dirección η_i a la aplicación:

$$\begin{aligned} \alpha_{\eta_i} : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) &\longrightarrow C^\infty(M^n) \\ (X, Y) &\longmapsto \overline{g}(\overrightarrow{\alpha}(X, Y), \eta_i). \end{aligned} \quad (1.16)$$

En caso de que $k = 1$ y la hipersuperficie sea orientable con un campo normal global N fijado a lo largo de la hipersuperficie, a α_N la denotaremos directamente por α . En alguna ocasión puede interesarnos considerar la aplicación:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y, \eta) &\longmapsto \bar{g}(\vec{\alpha}(X, Y), \eta). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Las ecuaciones fundamentales que relacionan las cantidades geométricas asociadas a las geometrías de (M^n, g) y (\bar{M}^m, \bar{g}) son:

Teorema 1.1.1. *Las siguientes igualdades son ciertas:*

- *Ecuación de Gauss*

$$\begin{aligned} \bar{R}^{(4,0)}(X, Y, Z, W) - R^{(4,0)}(X, Y, Z, W) \\ = \bar{g}(\vec{\alpha}(X, W), \vec{\alpha}(Y, Z)) - \bar{g}(\vec{\alpha}(Y, W), \vec{\alpha}(X, Z)). \end{aligned} \quad (1.18)$$

- *Ecuación de Ricci*

$$\bar{R}^{(4,0)}(X, Y, \eta, \zeta) - \bar{g}(R^{\perp(3,1)}(X, Y)\eta, \zeta) = \bar{g}([A_\eta, A_\zeta]X, Y), \quad (1.19)$$

donde $[A_\eta, A_\zeta]$ denota el operador $A_\eta \circ A_\zeta - A_\zeta \circ A_\eta$.

- *Ecuación de Codazzi*

$$\bar{R}^{(4,0)}(X, Y, Z, \eta) = (\bar{\nabla}_Y \alpha)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X \alpha)(Y, Z, \eta). \quad (1.20)$$

Donde $R^{\perp(3,1)}$ es la curvatura asociado a la conexión normal ∇^\perp . Para todos los detalles de estas ecuaciones puede consultare [22], paginas 134-138.

Cuando $k = 1$, M hipersuperficie de \bar{M} , las anteriores ecuaciones se simplifican, la ecuación de Gauss se reduce a:

$$\bar{R}^{(4,0)}(X, Y, Z, W) - R^{(4,0)}(X, Y, Z, W) = \alpha(X, W)\alpha(Y, Z) - \alpha(Y, W)\alpha(X, Z), \quad (1.21)$$

la ecuación de Ricci es trivial, por tanto no aporta información, y finalmente la ecuación de Codazzi es:

$$\bar{R}^{(4,0)}(X, Y, Z, N) = (\nabla_Y \alpha)(X, Z) - (\nabla_X \alpha)(Y, Z). \quad (1.22)$$

En el caso de hipersuperficies orientables, fijado un campo normal global N a lo largo de la hipersuperficie, llamaremos curvatura media de (M, g) y la denotaremos por H , a:

$$H = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i), \quad (1.23)$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal de (M, g) y α es la segunda forma fundamental escalar asociada a N .

Warped products

En este apartado usaremos como referencia el libro de O'Neill [47] y tomaremos prestados aquellos resultados que puedan sernos útiles a lo largo de la presente memoria. Todos ellos serán presentados sin demostración.

Sean dos variedades riemannianas diferenciables (B, g_B) , (F, g_F) y sea $f \in C^\infty(B)$ tal que $f(p) \neq 0$ para todo $p \in B$, a la variedad producto $\widehat{M} \equiv B \times F$ dotada con la métrica riemanniana:

$$g_{\widehat{M}} := g_B + f^2 g_F,$$

la llamaremos *warped product* y la denotaremos por $B \times_f F$. A la función f la llamaremos función *warping*.

En lo siguiente a los objetos geométricos de esta variedad riemanniana los denotaremos con el superíndice \wedge y a las elevaciones naturales de los elementos de las variedades B y F a \widehat{M} , los denotaremos con el superíndice $*$.

Tal y como se muestra en [47], la conexión de Levi-Civita $\widehat{\nabla}$ de \widehat{M} se puede relacionar con las de B y F , ∇^B y ∇^F respectivamente, del siguiente modo:

Proposición 1.1.1. *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ y $V, W \in \mathfrak{X}(F)$, entonces en $\widehat{M} = B \times_f F$*

- $\widehat{\nabla}_{X^*} Y^* \in \mathfrak{X}(B)$ es la elevación de $\nabla_X^B Y$ en B .
- $\widehat{\nabla}_{X^*} V^* = \widehat{\nabla}_{V^*} X^* = (Xf/f)^* V^*$.
- $\left(\widehat{\nabla}_{V^*} W^*\right)^\perp = -(\widehat{g}(V, W)/f^*)(\text{grad}f)^*$.
- $\left(\widehat{\nabla}_{V^*} W^*\right)^T \in \mathfrak{X}(F)$ es la elevación de $\nabla_V^F W$ en F .

Con los superíndices \perp y T denotamos la parte ortogonal y la parte tangencial a la fibra, respectivamente.

Ahora podemos expresar la curvatura del *warped product* $\widehat{M} = B \times_f F$ en términos de la función *warping* f y las curvaturas de B y F .

Proposición 1.1.2. *Sea un warped product $\widehat{M} = B \times_f F$ con tensor curvatura de Riemann \widehat{R} . Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ y $U, V, W \in \mathfrak{X}(F)$, entonces*

- $\widehat{R}_{X^* Y^*} Z^* \in \mathfrak{X}(B)$ es la elevación de $R_{XY}^B Z$ en B .
- $\widehat{R}_{V^* X^*} Y^* = (\nabla^{B^2} f(X, Y)/f)^* V^*$.
- $\widehat{R}_{X^* Y^*} V^* = \widehat{R}_{V^* W^*} X^* = 0$.
- $\widehat{R}_{X^* V^*} W^* = (\widehat{g}(V, W)/f^*) \left(\nabla_X^B (\text{grad}f) \right)^*$.

$$\blacksquare \widehat{R}_{V^*W^*}U^* = \left(R_{VW}^F U\right)^* - (|\text{grad}f|_{g_B}^2/f^2)^* \{\widehat{g}(V,U)W^* - \widehat{g}(W,U)V^*\}.$$

Nos puede resultar útil calcular la relación del laplaciano de una subvariedad en la base y el laplaciano de su elevación natural.

Proposición 1.1.3. Sean $\widehat{M} = \overline{M} \times_{e^{\psi/m}} F$ un warped product con $\dim \overline{M} = n + 1$, $\dim F = m$ y $\psi \in C^\infty(\overline{M})$, una hipersuperficie P de \overline{M} , su elevación natural $\widehat{P} \equiv P \times_{e^{\psi/m}} F$ a \widehat{M} y $\rho \in C^\infty(P)$, entonces:

$$\Delta^{\widehat{P}}(\rho^*) = \left(\Delta^P \rho + g_P(\nabla\psi, \nabla\rho)\right)^*. \quad (1.24)$$

Demostración. Sea $\left\{\widehat{E}_i\right\}_{i=1}^n, \left\{E_i^F\right\}_{i=1}^m\right\}$ una referencia ortonormal de campos de \widehat{P} en \widehat{M} de forma que la proyección de los primeros n campos a \overline{M} de una referencia ortonormal de campos para P . Entonces:

$$\begin{aligned} \Delta^{\widehat{P}}(\rho^*) &= \sum_{i=1}^n \nabla_{\widehat{E}_i, \widehat{E}_i}^{\widehat{P}} \rho^* + \sum_{i=1}^m \nabla_{E_i^F, E_i^F}^{\widehat{P}} \rho^* \\ &= \sum_{i=1}^n (\widehat{E}_i^2 - \nabla_{\widehat{E}_i}^{\widehat{P}} \widehat{E}_i)(\rho^*) + \sum_{i=1}^m (E_i^{F2} - \nabla_{E_i^F}^{\widehat{P}} E_i^F)(\rho^*) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (E_i^2 - \nabla_{E_i} E_i)\rho\right)^* - \sum_{i=1}^m \nabla_{E_i^F}^{\widehat{P}} E_i^F(\rho^*) \\ &= \left(\Delta^P \rho\right)^* - \sum_{i=1}^m (\nabla_{E_i^F}^{\widehat{P}} E_i^F)^\perp(\rho^*) \\ &= \left(\Delta^P \rho\right)^* + \sum_{i=1}^m \frac{g_{\widehat{P}}(E_i^F, E_i^F)}{e^{\psi/m}} (\text{grad}^P e^{\psi/m})^*(\rho^*) \\ &= \left(\Delta^P \rho\right)^* + \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} (\text{grad}^P \psi)^*(\rho^*) = \left(\Delta^P \rho + g_P(\nabla\psi, \nabla\rho)\right)^*. \end{aligned}$$

□

Convergencia Cheeger-Gromov

Definición 1.1.5. Llamaremos variedad riemanniana punteada a la terna $(\overline{M}, \overline{g}, p)$ donde $(\overline{M}, \overline{g})$ es una variedad riemanniana y p es un elemento de \overline{M} .

Sean dos variedades riemannianas punteadas $(\overline{M}_1, \overline{g}_1, p_1)$ y $(\overline{M}_2, \overline{g}_2, p_2)$ un morfismo entre ambas es una aplicación $f : (\overline{M}_1, \overline{g}_1, p_1) \rightarrow (\overline{M}_2, \overline{g}_2, p_2)$ tal que $f(p_1) = p_2$ y es C^∞ en un entorno de p_1 .

El conjunto de variedades punteadas con estos morfismos forman una categoría.

Definición 1.1.6. *Sea una sucesión de variedades riemannianas punteadas $\{(\overline{M}_n, \overline{g}_n, p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ completas, diremos que la sucesión converge a una variedad riemanniana punteada $(\overline{M}_\infty, \overline{g}_\infty, p_\infty)$ completa en la topología de Cheeger-Gromov si existe una familia de aplicaciones*

$$\{\varphi_n : (\overline{M}_\infty, \overline{g}_\infty, p_\infty) \rightarrow (\overline{M}_n, \overline{g}_n, p_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (1.25)$$

cuyos dominios $\{U_n \equiv \text{Dom } \varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{M}_\infty$ verifican que

- $p_\infty \in U_n \subseteq U_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y
- $\cup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \overline{M}_\infty$

y tal que para cada conjunto compacto $K \subset \overline{M}_\infty$, existe $n_0 = n_0(K) \in \mathbb{N}$ tal que $K \subsetneq U_{n_0}$, para todo $n \geq n_0$

- i) la restricción de φ_n a K es un difeomorfismo C^∞ sobre la imagen y
- ii) la sucesión de métricas $\{\varphi_n^* \overline{g}_n\}_{n \geq n_0}$ converge a \overline{g}_∞ en la topología C^∞ sobre K .

1.1.3. Principios del máximo

Teorema 1.1.2. ([39]) *Sea una familia de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t \in [0, T]}$ en una variedad M conexa, con o sin borde ∂M y tal que la dependencia respecto de t es diferenciable. Sea una función diferenciable $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:*

$$\partial_t u \leq \Delta_{g(t)} u + \langle X(p, u, \nabla u, t), \nabla u \rangle_{g(t)} + b(u),$$

donde X y b son respectivamente un campo vectorial continuo y una función localmente Lipschitz en sus variables.

Entonces, supongamos que para cada $t \in [0, T)$ existe un valor $\delta > 0$ y un subconjunto compacto $K \subset M \setminus \partial M$, tal que en cada instante $t' \in (t - \delta, t + \delta) \cap [0, T)$ el máximo de $u(\cdot, t')$ se da al menos en un punto de K (esto es inmediato si M es compacto sin borde).

Tomando $u_{\text{máx}}(t) = \max_{p \in M} u(p, t)$ tenemos que la función $u_{\text{máx}}$ es localmente Lipschitz, de donde diferenciable en casi todo tiempo $t \in [0, T)$, y en cada tiempo diferenciable se da:

$$\frac{du_{\text{máx}}(t)}{dt} \leq b(u_{\text{máx}}(t)).$$

Como consecuencia, si $h : [0, T') \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} h'(t) &= b(h(t)) \\ h(0) &= u_{\text{máx}}(0) \end{cases}$$

para $T' \leq T$, entonces $u \leq h$ en $M \times [0, T']$.

Más aún, si en algún instante de tiempo $\tau \in (0, T')$ se cumple que $u_{\max}(\tau) = h(\tau)$ entonces $u = h$ en $M \times [0, \tau]$, es decir, $u(\cdot, t)$ es constante en el espacio.

Aquí hemos decidido recordar únicamente el anterior principio del máximo, para otros principios del máximo débiles puede consultarse el capítulo 4 de [20] y para principios del máximo fuertes [19].

1.2. Problema del acortamiento de curvas

En esta sección vamos a introducir el problema del acortamiento de curvas y presentaremos una recopilación histórica del desarrollo de su comprensión.

Llamaremos *problema de acortamiento de curvas* (PAC) al siguiente problema:

Sea una variedad riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$ orientable y de dimensión 2, dada una inmersión diferenciable $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$, encuéntrese una familia de inmersiones diferenciables $\{\gamma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T]}$ tales que $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$, $\gamma(p, t) := \gamma_t(p)$, es diferenciable y verifique que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \vec{k}, \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0(\cdot). \end{cases} \quad (1.26)$$

El estudio del problema del acortamiento de curvas surge de forma natural por ser el flujo gradiente asociado al funcional de longitud de una curva inmersa sobre una superficie, es decir (1.26) equivale a:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\text{grad}_{\overline{g}} L. \quad (1.27)$$

Donde

$$L(\gamma) := \int_{\gamma} ds, \quad (1.28)$$

con s el parámetro longitud de arco de la curva inmersa γ . Y es de este hecho de donde recibe su nombre.

Los primeros resultados obtenidos en el campo fueron llevados a cabo en el plano \mathbb{R}^2 . El primero en abrir el camino en la comprensión de este flujo fue M. Gage al obtener la siguiente desigualdad isoperimétrica independiente del flujo:

Lema 1.2.1. ([25]) *Sea una curva $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^2 , cerrada y convexa, entonces:*

$$\pi \frac{L}{A} \leq \int_0^L k^2 ds, \quad (1.29)$$

siendo L , A y k la longitud de la curva, el área encerrada por el soporte de la misma y su curvatura geodésica, respectivamente.

Supuesta la existencia de solución para tiempo cortos del flujo, no es difícil demostrar que la convexidad se preserva por el mismo. Además, la variación de la razón isoperimétrica por el flujo es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L^2}{A} \right) = -2 \frac{L}{A} \left(\int_{\gamma} k^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right). \quad (1.30)$$

Que junto a la desigualdad isoperimétrica (1.29) para curvas convexas, implica que la razón isoperimétrica L^2/A para curvas convexas decrece por el PAC (1.26). Esto da una primera idea de que el flujo en cierto sentido hace que las curvas convexas se hagan más circulares, al mismo tiempo que, aumenta el interés por el PAC (1.26) por su relación con el problema isoperimétrico. Será en su siguiente trabajo [26] donde Gage logrará profundizar más en esta idea.

Teorema 1.2.1. ([26]) *Una familia de curvas γ_t C^2 , convexas, que verifican la ecuación de evolución (1.26) para $0 < t < T$ y para la que $\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0$ también satisface que el*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi. \quad (1.31)$$

Más aún, los soportes de las curvas normalizadas $\eta_t = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \gamma_t$ acotan regiones convexas $H(t)$ que convergen en la métrica Hausdorff a un disco unitario.

En estos dos trabajos de Gage ([25, 26]), las técnicas utilizadas en las demostraciones se basan principalmente en cálculos del tipo de los empleados en el estudio del problema isoperimétrico.

En este punto, todavía quedaba probar (tal y como Gage remarcó en su artículo [26]) que en el caso de la evolución de curvas convexas no se desarrolla ningún tipo de singularidad hasta que el área encerrada por la curva se va a cero. Trabajo que realizó junto a R. Hamilton en [24]. En el trabajo [24] el resultado principal que se obtiene es:

Teorema 1.2.2. ([24]) *Sea una curva embebida M convexa en el plano \mathbb{R}^2 , el PAC (1.26) contrae M a un punto. La curva permanece convexa y llega a hacerse circular al contraer, en el siguiente sentido:*

- *el cociente del radio inscrito por el circunscrito tiende a 1,*
- *el cociente de la curvatura máxima por la curvatura mínima tiende a 1, y*

- las derivadas de orden superior de la curvatura convergen a 0 uniformemente.

Hasta el momento todos los resultados habían sido obtenidos para curvas con la propiedad de ser convexas. Sería M. Grayson en [28] quién lograría demostrar que dada una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ embebida como condición inicial del PAC (1.26), su solución por el flujo se hace convexa sin desarrollar ninguna singularidad.

Por $T_{\text{máx}}$ denotaremos el tiempo máximo de existencia del flujo.

Teorema 1.2.3. ([28]) *Sea una curva diferenciable $\gamma(\cdot, 0) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ embebida en el plano y sea la solución $\gamma(\cdot, t)$ del PAC (1.26). Entonces $\gamma(\cdot, t)$ es diferenciable para todo t , converge a un punto cuando $t \rightarrow T_{\text{máx}}$ y su forma límite cuando $t \rightarrow T_{\text{máx}}$ es un círculo redondo que converge en la norma C^∞ .*

En un nuevo paper [29], Grayson abordaría el caso en que la variedad ambiente es una superficie con ciertas restricciones naturales, obteniendo:

Teorema 1.2.4. ([29]) *Sea una superficie riemanniana diferenciable \overline{M}^2 convexa en el infinito. Sea una curva diferenciable $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$ embebida en \overline{M} . Entonces la solución $\gamma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$ del PAC (1.26) existe para $t \in [0, T_{\text{máx}})$. Si $T_{\text{máx}}$ es finito, entonces γ converge a un punto. Si $T_{\text{máx}}$ es infinito, entonces la curvatura de γ converge a cero en la norma C^∞ .*

Casi simultáneamente, Gage en [27] obtuvo un resultado de subconvergencia C^m de la solución a una geodésica en el caso en que el flujo existe para todo tiempo, para todo $m \in \mathbb{N}$. Dicho resultado puede obtenerse desde el teorema 1.2.4 (no entraremos en esto aquí).

Otros muchos trabajos se han desarrollado al cabo de los años entorno a este problema ([7],[35], [18], [3],...).

1.3. Geometría con densidad

Llamaremos variedad riemanniana con densidad a la terna $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ donde $(\overline{M}, \overline{g})$ es una variedad riemanniana y ψ una aplicación $\psi : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Dada una subvariedad inmersa (M, ι) de \overline{M} , con o sin borde, de dimensión k , en la que consideraremos la métrica g inducida por la inmersión ι de manera usual $g = \iota^* \overline{g}$ y tal que $e^{\psi \circ \iota} \in L^1(M, dv_g)$; llamaremos ψ -volumen o volumen pesado o volumen en densidad de (M, ι) a

$$V_\psi^k(M) := \int_M e^\psi dv_g, \quad (1.32)$$

donde dv_g es el elemento de volumen riemanniano de dimensión k asociado a la métrica g . En el caso de curvas, lo llamaremos ψ -longitud o longitud en densidad. Llamaremos elemento de volumen en densidad de M a:

$$dv_\psi^k := e^{\psi \circ \iota} dv_g. \quad (1.33)$$

En general, consideraremos una $\psi \in C^\infty(\overline{M})$ pero en otras situaciones más particulares, existirá un subconjunto $A \subset \overline{M}$ donde ψ es singular y $\psi \in C^\infty(\overline{M} \setminus A)$.

En estos espacios existe una generalización natural del concepto de curvatura media de una hipersuperficie propuesta inicialmente por Gromov [30], según la cual, llamaremos vector curvatura media en densidad o vector ψ -curvatura media a:

$$\overrightarrow{H}_\psi := \overrightarrow{H} - \overline{\nabla} \psi^\perp = (H - \overline{g}(\overline{\nabla} \psi, N))N, \quad (1.34)$$

donde N es el vector normal a la hipersuperficie. El motivo de esta definición es que este campo es el gradiente del funcional de volumen en densidad que actúa sobre el conjunto de hipersuperficies inmersas. Notemos que dada una familia de hipersuperficies inmersas $\{\iota_t : M \rightarrow \overline{M}\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ tal que $\iota : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}$ es diferenciable y $\iota_t|_{K^c} = \iota_0|_{K^c}$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ con $K \subset M$ compacto, la primera variación del funcional de volumen en densidad es

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} V_\psi^n(M_t) = - \int_K \overline{g} \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \iota_t, \overrightarrow{H}_\psi \right) dv_\psi^n. \quad (1.35)$$

Por analogía con la geometría riemanniana, denominaremos curvatura media en densidad escalar, o simplemente ψ -curvatura media, de una hipersuperficie orientada a:

$$H_\psi := \overline{g}(\overrightarrow{H}_\psi, N) = H - \overline{g}(\overline{\nabla} \psi, N). \quad (1.36)$$

En el caso de que la variedad ambiente tenga dimensión 2, caso de curvas, la llamaremos curvatura geodésica en densidad o ψ -curvatura geodésica y la denotaremos por k_ψ .

Es importante remarcar que en la geometría con densidad alteramos el volumen pero mantenemos la métrica original \overline{g} , frente a la geometría conforme en la que ambos elementos se ven alterados. La curvatura media H' asociada a la métrica conforme $e^{2\psi/n} \overline{g}$ difiere de H_ψ por un factor conforme $H' = e^{-\psi/n} H_\psi$.

A las hipersuperficies en las que $H_\psi = 0$ las llamaremos hipersuperficies ψ -mínimas, en concordancia con la geometría riemanniana. A su vez, en el caso particular de que la variedad ambiente tenga dimensión 2 también las llamaremos ψ -geodésicas. Existe un conjunto de densidades en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} para las que la clasificación de hipersuperficies ψ -mínimas cobra una gran importancia en el campo del flujo por la curvatura media:

- Densidad gaussiana $\psi(x) = -\frac{\mu}{2}|x|^2$, con $\mu > 0$ constante, las hipersuperficies ψ -mínimas se corresponden con las soluciones autosemejantes en contracción por el flujo por la curvatura media, que a su vez modelizan las singularidades de tipo I para dicho flujo.
- Densidad lineal $\psi(x) = ax + b$, las hipersuperficies ψ -mínimas se corresponden con las soluciones autosemejantes en traslación por el flujo por la curvatura media, que a su vez modelizan las singularidades de tipo II para dicho flujo.

La ψ -divergencia

En las variedades riemannianas con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ de dimensión $n+1$, también tenemos un nuevo concepto de divergencia y de laplaciano asociados a la densidad, a los que llamaremos ψ -divergencia y ψ -laplaciano, respectivamente. Estos se definen como la divergencia y el laplaciano asociados a la forma de volumen en densidad dv_ψ^{n+1} , es decir:

$$(\overline{\text{div}}_\psi X) dv_\psi^{n+1} := \mathcal{L}_X dv_\psi^{n+1} \quad \text{y} \quad \overline{\Delta}_\psi f := \overline{\text{div}}_\psi \overline{\text{grad}} f, \quad (1.37)$$

con $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ y $f \in C^\infty(\overline{M})$.

Veamos la relación existente entre $\overline{\text{div}}_\psi$, $\overline{\Delta}_\psi$ y $\overline{\text{div}}$, $\overline{\Delta}$, respectivamente:

Lema 1.3.1. Sea $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ y $f \in C^\infty(\overline{M})$

$$\overline{\text{div}}_\psi X = \overline{\text{div}} X + d\psi(X), \quad \overline{\Delta}_\psi f = \overline{\Delta} f + d\psi(\overline{\text{grad}} f). \quad (1.38)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X dv_\psi^{n+1} &= d\iota_X(e^\psi dv_{\overline{g}}) = e^\psi (d\iota_X dv_{\overline{g}} + d\psi \wedge \iota_X dv_{\overline{g}}) \\ &= e^\psi \overline{\text{div}} X dv_{\overline{g}} + e^\psi d\psi \wedge \iota_X dv_{\overline{g}}, \end{aligned}$$

veamos quién es el último término

$$\begin{aligned} d\psi \wedge \iota_X dv_{\overline{g}} &= d\psi \wedge \iota_X dv_{\overline{g}}(e_1, \dots, e_{n+1}) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i d\psi(e_i) dv_{\overline{g}}(X, e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_{n+1}) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} d\psi(e_i) dv_{\overline{g}}(e_1, \dots, \widehat{X^i}, \dots, e_{n+1}) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} d\psi(e_i) \theta^i(X) dv_{\overline{g}}(e_1, \dots, e_i, \dots, e_{n+1}) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^{n+1} \\ &= d\psi(X) dv_{\overline{g}}, \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathcal{L}_X dv_\psi^{n+1} = (\overline{\operatorname{div}} X + d\psi(X)) dv_\psi^{n+1},$$

de donde se sigue el resultado. \square

Queda aquí patente que en el caso particular de que la densidad ψ sea constante, recuperamos los conceptos clásicos de divergencia y laplaciano de la geometría riemanniana.

A continuación veremos cómo en la geometría con densidad tenemos teoremas análogos a los de la geometría riemanniana para el teorema de la divergencia y para el teorema de la integración por partes.

Teorema 1.3.1. (Teorema de la divergencia) *Sean una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ de dimensión $n + 1$; un dominio $\overline{\Omega}$ compacto, orientado y con borde diferenciable $\partial\overline{\Omega}$; y el vector normal interior unitario N a $\partial\overline{\Omega}$, entonces:*

$$\int_{\overline{\Omega}} \overline{\operatorname{div}}_\psi X \, dv_\psi^{n+1} = - \int_{\partial\overline{\Omega}} \langle X, N \rangle \, dv_\psi^n, \quad (1.39)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\overline{\Omega})$.

Demostración. Notemos que

$$\iota_X dv_\psi^{n+1} = e^\psi \iota_X dv_{\overline{g}}^{n+1} = e^\psi \langle X, N \rangle \, dv_\psi^n = \langle X, N \rangle \, dv_\psi^n,$$

entonces, utilizando el teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega}} \overline{\operatorname{div}}_\psi X \, dv_\psi^{n+1} &= \int_{\overline{\Omega}} \mathcal{L}_X dv_\psi^{n+1} = \int_{\overline{\Omega}} d\iota_X dv_\psi^{n+1} = - \int_{\partial\overline{\Omega}} \iota_X dv_\psi^{n+1} \\ &= - \int_{\partial\overline{\Omega}} \langle X, N \rangle \, dv_\psi^n. \end{aligned}$$

\square

Teorema 1.3.2. (Integración por partes) *Sean una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ de dimensión $n + 1$; un dominio $\overline{\Omega}$ compacto, orientado y con borde diferenciable $\partial\overline{\Omega}$; y el vector normal interior unitario N a $\partial\overline{\Omega}$, entonces:*

$$\int_{\overline{\Omega}} f \overline{\Delta}_\psi f \, dv_\psi^{n+1} = - \int_{\overline{\Omega}} |\overline{\nabla} f|^2 \, dv_\psi^{n+1} - \int_{\partial\overline{\Omega}} f \langle \overline{\nabla} f, N \rangle \, dv_\psi^n, \quad (1.40)$$

para toda $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demostración. En primer lugar

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_\psi f^2 &= \overline{\Delta} f^2 + \langle \overline{\nabla} \psi, \overline{\nabla} f^2 \rangle = 2f \overline{\Delta} f + 2|\overline{\nabla} f|^2 + 2f \langle \overline{\nabla} \psi, \overline{\nabla} f \rangle \\ &= 2f \overline{\Delta}_\psi f + 2|\overline{\nabla} f|^2,\end{aligned}$$

entonces, por el teorema de la divergencia,

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Omega}} f \overline{\Delta}_\psi f dv_\psi^{n+1} &= \int_{\overline{\Omega}} \frac{1}{2} \overline{\Delta}_\psi f^2 dv_\psi^{n+1} - \int_{\overline{\Omega}} |\overline{\nabla} f|^2 dv_\psi^{n+1} \\ &= - \int_{\partial \overline{\Omega}} f \langle \overline{\nabla} f, N \rangle dv_\psi^n - \int_{\overline{\Omega}} |\overline{\nabla} f|^2 dv_\psi^{n+1}.\end{aligned}$$

□

Además, ambos conceptos pueden ser a su vez extendidos a tensores. Dado β , un tensor r covariante, la divergencia usual y el laplaciano vienen definidos como

$$\operatorname{div} \beta(X_2, \dots, X_r) = \sum_{i=1}^{n+1} (\nabla_{e_i} \beta)(e_i, X_2, \dots, X_r), \quad \Delta \beta = \operatorname{div}(\nabla \beta) = \operatorname{tr} \nabla^2 \beta, \quad (1.41)$$

con $X_2, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Y las correspondientes definiciones naturales de div_ψ y Δ_ψ son:

$$\operatorname{div}_\psi \beta := \operatorname{div} \beta + \iota_{\nabla \psi} \beta, \quad \Delta_\psi \beta := \operatorname{div}(\nabla \beta) + \nabla_{\nabla \psi} \beta = \operatorname{tr} \nabla^2 \beta + \nabla_{\nabla \psi} \beta. \quad (1.42)$$

Curvatura de Ricci en variedades con densidad

En el campo de la geometría con densidad existen diferentes definiciones propuestas para el tensor de Ricci asociado a la densidad, al que denotaremos por \overline{Ric}_ψ .

En los cálculos de este capítulo y del capítulo 2 nosotros tomaremos la siguiente definición:

$$\overline{Ric}_\psi := \overline{Ric} - \overline{\nabla}^2 \psi. \quad (1.43)$$

Esta ha sido utilizada en multitud de trabajos de geometría con densidad (ver [43], [49]). Elegimos la definición (1.43) porque simplifica la presentación de ciertas fórmulas de evolución que aparecen al estudiar el flujo por la curvatura media asociado a una densidad ψ , y lo que es más, en términos formales existe una mayor similitud entre las fórmulas de variación de este flujo y las del flujo por la curvatura media.

En el capítulo 3 tomaremos la definición:

$$\overline{Ric}_\psi := \overline{Ric} - (\overline{\nabla}^2 \psi + \frac{1}{m} \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla} \psi), \quad (1.44)$$

para un cierto $m \in \mathbb{N}$ que fijaremos en función de la densidad ψ con la que estemos trabajando. Esta definición fue introducida en [10] y es por ello llamada ocasionalmente tensor de Bakry-Emery en referencia a los autores del artículo. Diversos autores han utilizado esta definición, como por ejemplo en la tesis de Bayle [11].

La definición (1.43) surge como una generalización de (1.44). En la sección 1.3.1 daremos una posible motivación para ambas definiciones.

A los tensores (1.43) y (1.44) los llamaremos ψ -curvatura de Ricci o ψ -Ricci. En función del capítulo en el que nos encontremos sabremos si nos referimos a (1.43) o a (1.44). Al comienzo de los capítulos 2 y 3 se recordará que tensor tomamos.

1.3.1. Variedades con densidad y submersiones riemannianas

Los resultados expuestos en la presente sección forman parte del artículo [42].

Sean una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ y una hipersuperficie inmersa (M, ι) de \overline{M} . Smoczyk, en [52], observó que H_ψ de M es la curvatura media del *warped product* $M \times_{e^\psi} \mathbb{R}$ en $\overline{M} \times_{e^\psi} \mathbb{R}$. A lo largo de la sección explicaremos y explotaremos más a fondo esta idea, buscando clarificar en que situaciones un problema de geometría con densidad es equivalente a un cierto problema en geometría riemanniana.

Sea una submersión riemanniana $\pi : \widehat{M} \rightarrow \overline{M}$ con fibras de dimensión m , y la variedad base \overline{M} de dimensión $n + 1$. Dado cualquier $p \in \overline{M}$, el elemento de volumen riemanniano $dv_{\overline{g}}^{n+1+m}$ de \widehat{M} en un $x \in \pi^{-1}(p) \subseteq \widehat{M}$ puede ser descompuesto (con un evidente abuso de notación) como

$$dv_{\overline{g}}^{n+1+m}(x) = dv_{\overline{g}}^{n+1}(p) \wedge dv^m(x), \quad (1.45)$$

donde $dv_{\overline{g}}^{n+1}$ denota el elemento de volumen de \overline{M} en p y $dv^m(x)$ denota el elemento de volumen de la fibra $\pi^{-1}(p)$ en x . Como consecuencia, dada una subvariedad inmersa P de \overline{M} y de dimensión ℓ , el elemento de volumen de $\widehat{P} = \pi^{-1}(P)$ es $dv_{\widehat{g}}^{\ell+m}(x) = dv_{\overline{g}}^\ell(p) \wedge dv^m(x)$, donde $dv_{\overline{g}}^\ell$ es el elemento de volumen de P .

Supongamos que las fibras de la submersión tienen volumen finito, en ese caso podemos definir una aplicación $\psi : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$e^\psi(p) := \int_{\pi^{-1}(p)} dv^m(x). \quad (1.46)$$

La diferenciabilidad de esta aplicación ψ se sigue de la diferenciabilidad de la submersión $\pi : \widehat{M} \rightarrow \overline{M}$.

Ahora, si consideramos la variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$, donde ψ viene dada por (1.46), tenemos que dada cualquier subvariedad inmersa isométrica (P, ι) de $(\overline{M}, \overline{g})$ se da la siguiente relación:

$$\begin{aligned} V^{\ell+m}(\pi^{-1}(P)) &= \int_{\pi^{-1}(P)} dv_g^\ell(p) \wedge dv^m(x) \\ &= \int_P \left(\int_{\pi^{-1}(p)} dv^m(x) \right) dv_g^\ell(p) = \int_P e^\psi dv_g^\ell = V_\psi^\ell(P). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Por tanto, *el volumen riemanniano de $\pi^{-1}(P)$ coincide con el ψ -volumen de P .*

A continuación, relacionaremos otros invariantes geométricos asociados a la variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ con invariantes geométricos asociados a la variedad riemanniana $(\widehat{M}, \widehat{g})$.

En primer lugar, calculemos $\overline{\nabla}\psi$. Dados $p \in \overline{M}$ y $v \in T_p\overline{M}$ cualesquiera, tomemos una curva $c(t)$ en \overline{M} que verifica $c(0) = p$ y $c'(0) = v$. Denotaremos por \vec{H}_p el vector curvatura media de la fibra $\pi^{-1}(p)$ en \widehat{M} y por v^* la elevación horizontal de v a la fibra $\pi^{-1}(p)$. Notemos que si π_*^\perp es la restricción de π_* al complementario ortogonal de $T_x\pi^{-1}(p)$, entonces $v^*(x) = \pi_*^{\perp-1}v$. Por la definición de gradiente de una función,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}\psi, v \rangle &= \left. \frac{d\psi \circ c}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \ln \int_{\pi^{-1}(c(t))} dv^m = \\ &= - \frac{1}{\int_{\pi^{-1}(p)} dv^m} \int_{\pi^{-1}(p)} \langle \vec{H}_p(x), v^* \rangle dv^m(x). \end{aligned} \quad (1.48)$$

La última igualdad se sigue desde la fórmula de la primera variación del funcional de área aplicada a la variación $(x, t) \mapsto c_x^*(t)$, donde $c_x^*(t)$ es la elevación horizontal de $c(t)$ empezando en $x \in \pi^{-1}(p)$.

La ecuación (1.48) nos dice que *el gradiente de ψ en $p \in \overline{M}$ es la ponderación de la curvatura media de la fibra $\pi^{-1}(p)$* . Más aún, podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 1.3.1. *Si la fibra $\pi^{-1}(p)$ tiene curvatura media constante, en el sentido de que su vector curvatura media en \widehat{M} es la elevación horizontal de un vector tangente a \overline{M} , entonces*

$$\overline{\nabla}\psi(p) = -\pi_{**}\vec{H}_p(x) \text{ para todo } x \in \pi^{-1}(p). \quad (1.49)$$

A las derivadas covariantes de \widehat{M} y \overline{M} las denotaremos por $\widehat{\nabla}$ y $\overline{\nabla}$, respectivamente. Las ecuaciones de una submersión riemanniana nos dan la siguiente relación entre ellas:

$$\pi_*(\widehat{\nabla}_{X^*}Y^*) = \overline{\nabla}_X Y, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}). \quad (1.50)$$

O, equivalentemente:

$$(\widehat{\nabla}_{X^*} Y^*)^\perp = (\overline{\nabla}_X Y)^*, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}). \quad (1.51)$$

Como consecuencia de esta relación entre las derivadas covariantes, dada una hipersuperficie inmersa M de \overline{M} , la segunda forma fundamental $\widehat{\alpha}$ de $\pi^{-1}(M)$ en \widehat{M} está relacionada con la correspondiente segunda forma fundamental α de M en \overline{M} . La relación explícita es:

$$\widehat{\alpha}(X^*, Y^*) = \alpha(X, Y)^*, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}). \quad (1.52)$$

A su vez la relación entre las respectivas curvaturas medias escalares es

$$\widehat{H}(x) = H(p) + \langle \overrightarrow{H}_p(x), N^*(x) \rangle, \text{ para todo } x \in \pi^{-1}(p). \quad (1.53)$$

Entonces, si \overrightarrow{H}_p es la elevación horizontal de un campo vectorial tangente a \overline{M} , desde (1.53) y (1.49) tenemos que:

$$\widehat{H}(x) = H(p) - \langle \overline{\nabla}\psi(p), N(p) \rangle, \text{ para todo } x \in \pi^{-1}(p). \quad (1.54)$$

De donde concluimos el siguiente resultado:

Proposición 1.3.2. *Si \overrightarrow{H}_p es la elevación horizontal de un campo vectorial tangente a \overline{M} , la ψ -curvatura media de M en \overline{M} coincide con la curvatura media de $\pi^{-1}(M)$ en \widehat{M} .*

Cuando un grupo G actúa como grupo de isometrías en una variedad riemanniana \widehat{M} , los problemas invariantes por G son problemas donde únicamente los dominios o subvariedades invariantes por G son consideradas. Es en este conjunto de problemas donde nuestro planteamiento encaja a la perfección.

A su vez, cabe remarcar que el problema de clasificación de hipersuperficies mínimas e invariantes por un cierto subgrupo del grupo de isometrías de la variedad ambiente, también puede reducirse al problema de clasificación de hipersuperficies ψ -mínimas para funciones ψ adecuadas.

Volviendo al problema de la sección, un hecho importante a resaltar es que el proceso desarrollado es recíproco: a partir de una submersión riemanniana podemos obtener un problema en geometría con densidad y a partir de un problema en geometría con densidad podemos obtener un problema en una submersión riemanniana. Dada una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ si ψ es diferenciable entonces *cualquier problema con densidad es equivalente a muchos problemas en submersiones riemannianas*. Vamos a concretar de modo explícito este hecho. Sea una variedad riemanniana Q de dimensión m y volumen finito V . Si construimos el siguiente *warped product* $\widehat{M} \equiv \overline{M} \times_\phi Q$ con $\phi = ((e^\psi)/V)^{1/m}$ y consideramos la submersión riemanniana $\pi : \widehat{M} \rightarrow \overline{M}$,

$\pi(p, x) = p$, la densidad definida por (1.46) para esta submersión coincide con la densidad original que teníamos en la variedad riemanniana con densidad de partida, en efecto:

$$\int_{\pi^{-1}(p)} dv^m(x) = \int_Q \phi^m(p) dv_{g_Q}(x) = \phi^m(p)V = e^{\psi(p)}. \quad (1.55)$$

La hipótesis de que las fibras tengan volumen de dimensión m finito puede cambiarse por la hipótesis:

Las formas de volumen de las fibras son homotéticas. Es decir, existe una función $e^\psi : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que los elementos de volumen de las fibras tienen la forma $dv_x^m = e^\psi(p)\varphi_\alpha^* d\omega^m$ para toda carta φ_α fibrada de un cierto atlas de la fibración $\pi : \widehat{M} \rightarrow \overline{M}$ y una forma de volumen fija $d\omega^m$ en la fibra canónica. Con esta hipótesis alternativa, todavía tenemos que $dv^{\ell+m}(x) = dv^\ell(p) \wedge dv^m(x)$, entonces (salvo un isomorfismo φ_α^*) $dv^{\ell+m}(x) = e^\psi(p)dv^\ell(p) \wedge d\omega^m$. Esto da las mismas relaciones que antes entre H y \widehat{H} .

Los *warped products* $\widehat{M} = \overline{M} \times_{e^{\psi/m}} Q$ (con alguna variedad riemanniana Q) dan una familia de submersiones riemannianas $\pi : \widehat{M} \rightarrow \overline{M}$ que verifican (trivialmente) la hipótesis alternativa anterior.

En los casos en que $\text{volumen}(Q)$ es finito, obtenemos para la ψ definida por homotecias la expresión $e^\psi(p) = V(\pi^{-1}(p))/V(Q)$, que difiere de (1.46) únicamente en el producto por una constante, lo que no afecta a la geometría de los problemas.

La relación presentada entre variedad con densidad y *warped-product* da otra justificación de las definiciones de ψ -curvatura de Ricci (1.43) y (1.44) en variedades riemannianas con densidad. Por las fórmulas de la proposición 1.1.2 dada en la sección 1.1.2 podemos expresar \widehat{Ric} de $\widehat{M} = \overline{M} \times_{e^{\psi/m}} Q$ en función de elementos de la base de la submersión:

$$\begin{aligned} \widehat{Ric}(X^*, Y^*) &= \overline{Ric}(X, Y) - \frac{m}{e^{\psi/m}} \overline{\nabla}^2(e^{\psi/m})(X, Y) \\ &= \overline{Ric}(X, Y) - \frac{m}{e^{\psi/m}} \frac{e^{\psi/m}}{m} (\overline{\nabla}^2 \psi + \frac{1}{m} \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla} \psi)(X, Y) \\ &= \overline{Ric}(X, Y) - (\overline{\nabla}^2 \psi + \frac{1}{m} \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla} \psi)(X, Y), \end{aligned} \quad (1.56)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Esta expresión coincide con la ψ -curvatura de Ricci (1.44). Si nuestro problema está planteado inicialmente en geometría con densidad, la $m \in \mathbb{N}$ es arbitraria, por lo que podemos hacer tender m a ∞ y obtener la definición de ψ -curvatura de Ricci (1.43):

$$\overline{Ric}_\psi = \overline{Ric} - \overline{\nabla}^2 \psi. \quad (1.57)$$

Por último, si recordamos la expresión para el laplaciano de un *warped product* dada en (1.24) vemos que:

$$\Delta^{\widehat{M}} f^*(x) = \Delta^{\overline{M}} f(p) + \langle \overline{\nabla} \psi, \nabla f \rangle_p = \Delta_{\psi}^{\overline{M}} f(p), \quad \text{para toda } f \in C^\infty(\overline{M}). \quad (1.58)$$

Es decir, el operador ψ -laplaciano (1.37) de \overline{M} coincide con el operador laplaciano de \widehat{M} actuando sobre las funciones $f^* = f \circ \pi$ tales que $f \in C^\infty(\overline{M})$.

1.4. Fórmulas de evolución

Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable y de dimensión $n + 1$, y una familia de hipersuperficies inmersas $\{F_t : M \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T]}$ orientables, tal que $F : M \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$, $F(p, t) := F_t(p)$, es una aplicación diferenciable y verifica la siguiente ecuación de evolución:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = fN, \quad (1.59)$$

donde N es el normal a la hipersuperficie y f depende de M , t y de la inmersión $F(\cdot, t)$.

En esta sección calcularemos la variación de diversas cantidades geométricas a lo largo de este flujo.

Para cada $t \in [0, T]$ consideraremos la métrica *pull-back* $F_t^* \overline{g}$ sobre M , a dicha métrica la denotaremos por $g_{M_t} \equiv F_t^* \overline{g}$. Con estas respectivas métricas sobre M^n todas las inmersiones consideradas $\{F_t\}_{t \in [0, T]}$ son inmersiones isométricas. A las respectivas conexiones de Levi-Civita asociadas a las métricas g_{M_t} las denotaremos por ∇^t y por M_t denotaremos a la variedad riemanniana (M, g_{M_t}) .

Procedemos a calcular la variación de diversas cantidades geométricas. Remarquemos que ∂_t como campo de \overline{M} denota a $\frac{\partial F}{\partial t}$.

Lema 1.4.1.

$$\overline{\nabla}_{\partial_t} N = \overline{\nabla} \frac{\partial F}{\partial t} N = -\nabla f. \quad (1.60)$$

Demostración. Sean $(x_0, t_0) \in M \times [0, T]$ y una referencia local $\{e_i\}_{i=1}^n$ de M entorno a x_0 que es g_{t_0} -ortonormal en x_0 . Notemos que $[e_i, \partial_t] = 0$ y por lo tanto $[F_* e_i, F_* \partial_t] = F_* [e_i, \partial_t] = 0$.

Calculemos $\bar{\nabla}_{\partial_t} N$ en (x_0, t_0) . En primer lugar:

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_t} N, N) &= \frac{1}{2} \bar{\nabla}_{\partial_t} (\bar{g}(N, N)) = 0. \\ \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_t} N, F_{\star} e_i) &= -\bar{g}(N, \bar{\nabla}_{\partial_t} F_{\star} e_i) = -\bar{g}(N, \bar{\nabla}_{F_{\star} \partial_t} F_{\star} e_i) = -\bar{g}(N, \bar{\nabla}_{F_{\star} e_i} F_{\star} \partial_t) \\ &= -\bar{g}(N, \bar{\nabla}_{F_{\star} e_i} (fN)) = -f \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{F_{\star} e_i} N) - F_{\star} e_i(f) \\ &= -F_{\star} e_i(f).\end{aligned}$$

Y teniendo presente que $\{N_{t_0}, \{F_{t_0 \star} e_i\}_{i=1}^n\}_{x_0}$ es una base ortonormal para $T_{F(x_0, t_0)} \bar{M}$ podemos descomponer $\bar{\nabla}_{\partial_t} N(x_0, t_0)$ del siguiente modo:

$$\bar{\nabla}_{\partial_t} N(x_0, t_0) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_t} N, N)N + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_t} N, F_{\star} e_i) F_{\star} e_i = -\nabla f.$$

□

Lema 1.4.2.

$$\frac{\partial}{\partial t}(g) = -2f\alpha, \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(g^{-1}) = 2fA^{\sharp}. \quad (1.62)$$

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, procedamos a calcular la variación de $g(X, Y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(g(X, Y)) &= \frac{\partial}{\partial t}(\bar{g}(F_{\star} X, F_{\star} Y)) \\ &= (\bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{g})(F_{\star} X, F_{\star} Y) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_t} F_{\star} X, F_{\star} Y) + \bar{g}(F_{\star} X, \bar{\nabla}_{\partial_t} F_{\star} Y) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_{\star} X} \partial_t, F_{\star} Y) + \bar{g}(F_{\star} X, \bar{\nabla}_{F_{\star} Y} \partial_t) \\ &= f \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_{\star} X} N, F_{\star} Y) + f \bar{g}(F_{\star} X, \bar{\nabla}_{F_{\star} Y} N) \\ &= -2f\alpha(X, Y),\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\bar{\nabla} \bar{g} = 0$. Calculemos la fórmula de variación (1.62), para ello usaremos $\text{tr}_{13} g \otimes g^{-1} = \delta$

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial t} \delta = \frac{\partial}{\partial t} \text{tr}_{13} g \otimes g^{-1} = \text{tr}_{13} \frac{\partial}{\partial t}(g) \otimes g^{-1} + \text{tr}_{13} g \otimes \frac{\partial}{\partial t}(g^{-1}) \\ &= -2f \text{tr}_{13} \alpha \otimes g^{-1} + \text{tr}_{13} g \otimes \frac{\partial}{\partial t}(g^{-1}) = -2fA + \text{tr}_{13} g \otimes \frac{\partial}{\partial t}(g^{-1}) \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(g^{-1}) = 2fA^{\sharp}.\end{aligned}$$

□

Denotemos por dv_{g_t} el elemento de volumen de dimensión n asociado de forma natural a la métrica riemanniana g_t , del mismo modo denotaremos por $dv_{\bar{g}}$ al elemento riemanniano de volumen del ambiente \bar{M} .

Lema 1.4.3.

$$\partial_t(dv_{g_t}) = -fHdv_{g_t}. \quad (1.63)$$

Demostración. Sean $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ linealmente independientes, arbitrarios y fijos. En caso contrario, si son linealmente dependientes, se cumple que $dv_{g_t}(X_1, \dots, X_n) = 0$ para todo t y la fórmula de evolución (1.63) se traduce en la identidad $0 = 0$. Teniendo en cuenta que $\bar{\nabla}_N N$ es tangente a M y $\bar{\nabla} dv_{\bar{g}} = 0$ procedemos a calcular la fórmula de variación:

$$\begin{aligned} \partial_t(dv_{g_t}(X_1, \dots, X_n)) &= \partial_t(dv_{\bar{g}}(F_*X_1, \dots, F_*X_n, N)) \\ &= (\bar{\nabla}_{\partial_t} dv_{\bar{g}})(F_*X_1, \dots, F_*X_n, N) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n dv_{\bar{g}}(F_*X_1, \dots, \bar{\nabla}_{\partial_t} F_*X_i, \dots, F_*X_n, N) \\ &\quad + dv_{\bar{g}}(F_*X_1, \dots, F_*X_n, \bar{\nabla}_{\partial_t} N) \\ &= \sum_{i=1}^n dv_{\bar{g}}(F_*X_1, \dots, \bar{\nabla}_{F_*X_i} \partial_t, \dots, F_*X_n, N) \\ &= f \sum_{i=1}^n dv_{\bar{g}}(F_*X_1, \dots, \bar{\nabla}_{F_*X_i} N, \dots, F_*X_n, N) \\ &= -f \sum_{i=1}^n dv_{\bar{g}}(F_*X_1, \dots, F_*A^{M_t} X_i, \dots, F_*X_n, N) \\ &= -f \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i^j dv_{\bar{g}}(F_*X_1, \dots, F_*X_j, \dots, F_*X_n, N) \\ &= -f \sum_{i=1}^n A_i^i dv_{\bar{g}}(F_*X_1, \dots, F_*X_i, \dots, F_*X_n, N) \\ &= -f \left(\sum_{i=1}^n A_i^i \right) dv_{g_t}(X_1, \dots, X_n) = -fHdv_{g_t}(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

□

Denotemos por $dv_{\psi_t}^n$ el elemento de ψ -volumen de dimensión n de g_t , del mismo modo denotaremos por dv_{ψ}^{n+1} al elemento de ψ -volumen del ambiente \bar{M} .

Lema 1.4.4.

$$\partial_t(dv_{\psi_t}^n) = -fH_{\psi} dv_{\psi_t}^n. \quad (1.64)$$

Demostración. Sean $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ linealmente independientes, arbitrarios y fijos. En caso contrario, si son linealmente dependientes, se cumple que $dv_{\psi_t}^n(X_1, \dots, X_n) = 0$ para todo t y la fórmula de evolución (1.64) se traduce en la identidad $0 = 0$. Utilizando la fórmula de variación (1.63) obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t(dv_{\psi_t}^n(X_1, \dots, X_n)) &= \partial_t(e^\psi dv_{g_t}(X_1, \dots, X_n)) \\ &= \partial_t(\psi)dv_{\psi_t}^n(X_1, \dots, X_n) - fHdv_{\psi_t}^n(X_1, \dots, X_n) \\ &= \left(f \langle \bar{\nabla}\psi, N \rangle - fH\right)dv_{\psi_t}^n(X_1, \dots, X_n) \\ &= -fH_\psi dv_{\psi_t}^n(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

□

A la segunda forma fundamental escalar de la hipersuperficie $F_t : (M, g_t) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ la denotaremos por α^{M_t} , cuando no haya lugar a confusión se denotará únicamente por α .

Lema 1.4.5.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha) = \nabla^2 f - f\left(\alpha(A \cdot, \cdot) - \bar{R}^{(4,0)}(\cdot, N, \cdot, N)\right) \quad (1.65)$$

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, notemos que $[X, \partial_t] = 0$ por lo que $[F_*X, F_*\partial_t] = F_*[X, \partial_t] = 0$. Usando esto, la definición de \bar{R} y los abusos de notación $\partial_t \equiv \frac{\partial F}{\partial t}$ y $X \equiv F_*X$, podemos calcular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha^{M_t}(X, Y)) &= \frac{\partial}{\partial t}(\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_*X}F_*Y, N)) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_t}(\bar{\nabla}_{F_*X}F_*Y), N) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_*X}F_*Y, \bar{\nabla}_{\partial_t}N) \\ &= \bar{g}(\bar{R}^{(3,1)}(F_*X, \partial_t)F_*Y + \bar{\nabla}_{F_*X}(\bar{\nabla}_{\partial_t}F_*Y) - \bar{\nabla}_{[F_*X, \partial_t]}F_*Y, N) \\ &\quad - \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_*X}F_*Y, \nabla f) \\ &= f\bar{R}^{(4,0)}(F_*X, N, F_*Y, N) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_*X}(\bar{\nabla}_{F_*Y}\partial_t), N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_*X}F_*Y, \nabla f) \\ &= \nabla^2 f(X, Y) - F_*X(F_*Y(f)) + f\bar{R}^{(4,0)}(F_*X, N, F_*Y, N) \\ &\quad + \bar{g}(F_*X(F_*Y(f))N + F_*Y(f)\bar{\nabla}_{F_*X}N + F_*X(f)\bar{\nabla}_{F_*Y}N \\ &\quad + f\bar{\nabla}_{F_*X}(\bar{\nabla}_{F_*Y}N), N) \\ &= \nabla^2 f(X, Y) + f\bar{R}^{(4,0)}(F_*X, N, F_*Y, N) - f\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_*X}(F_*A^{M_t}Y), N) \\ &= \nabla^2 f(X, Y) + f\bar{R}^{(4,0)}(F_*X, N, F_*Y, N) - f\alpha^{M_t}(A^{M_t}X, Y) \\ &= \nabla^2 f(X, Y) - f\left(\alpha^{M_t}(A^{M_t}\cdot, \cdot) - \bar{R}^{(4,0)}(\cdot, N, \cdot, N)\right)(X, Y). \end{aligned}$$

□

A la aplicación de Weingarten de la hipersuperficie $F_t : (M, g_t) \rightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ la denotaremos por A^{M_t} , cuando no haya lugar a confusión se denotará únicamente por A .

Lema 1.4.6.

$$\frac{\partial}{\partial t}(A) = \nabla \cdot \nabla f + f(A^2 + \overline{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N) \quad (1.66)$$

Demostración. Sea $t_0 \in [0, T)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (\alpha^{M_t}) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (g_t(A^{M_t}, \cdot)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (g_t)(A^{M_{t_0}}, \cdot) + g_{t_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (A^{M_t}, \cdot) \right) \\ &= -2f\alpha^{M_{t_0}}(A^{M_{t_0}}, \cdot) + g_{t_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (A^{M_t}, \cdot) \right). \end{aligned}$$

Despejando el último sumando y teniendo en cuenta que $\overline{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N$ es tangente a la hipersuperficie:

$$\begin{aligned} g_{t_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (A^{M_t}, \cdot) \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (\alpha^{M_t}) + 2f\alpha^{M_{t_0}}(A^{M_{t_0}}, \cdot) \\ &= \nabla^2 f + f \left(\alpha^{M_{t_0}}(A^{M_{t_0}}, \cdot) + \overline{R}^{(4,0)}(\cdot, N, \cdot, N) \right) \\ &= g_{t_0}(\nabla \cdot \nabla f, \cdot) + f \left(g_{t_0}(A^{M_{t_0}^2}, \cdot) + g_{t_0}(\overline{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N, \cdot) \right) \\ &= g_{t_0} \left(\nabla \cdot \nabla f + f(A^{M_{t_0}^2} + \overline{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N), \cdot \right). \end{aligned}$$

□

Lema 1.4.7.

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \Delta f + f(|A|^2 + \overline{Ric}(N, N)) \quad (1.67)$$

Demostración. Calcularemos la variación de H respecto de t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{tr}_{14} \text{tr}_{23} g^{-1} \otimes \alpha \right) = \text{tr}_{14} \text{tr}_{23} \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{-1} \otimes \alpha + g^{-1} \otimes \frac{\partial}{\partial t} \alpha \right) \\ &= \text{tr}_{14} \text{tr}_{23} \left(2fA^\sharp \otimes \alpha + g^{-1} \otimes (\nabla^2 f - f(\alpha^{M_t}(A^{M_t}, \cdot) - \overline{R}^{(4,0)}(\cdot, N, \cdot, N))) \right) \\ &= 2f|A|^2 + \Delta f - f(|A|^2 - \overline{Ric}(N, N)) \\ &= \Delta f + f(|A|^2 + \overline{Ric}(N, N)). \end{aligned}$$

Otra posibilidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H &= \frac{\partial}{\partial t} \text{tr} A = \text{tr} \frac{\partial}{\partial t} A = \text{tr} \left(\nabla \cdot \nabla f + f(A^2 + \overline{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N) \right) \\ &= \Delta f + f(|A|^2 + \overline{Ric}(N, N)). \end{aligned}$$

□

Lema 1.4.8.

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle = f \bar{\nabla}^2 \psi(N, N) - \langle \bar{\nabla} \psi, \nabla f \rangle \quad (1.68)$$

Demostración. Calculemos la variación de $\langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle$ teniendo en cuenta (1.60):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{F_* \partial_t} \bar{\nabla} \psi, N \rangle + \langle \bar{\nabla} \psi, \bar{\nabla}_{F_* \partial_t} N \rangle \\ &= f \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla} \psi, N \rangle - \langle \bar{\nabla} \psi, \nabla f \rangle = f \bar{\nabla}^2 \psi(N, N) - \langle \bar{\nabla} \psi, \nabla f \rangle. \end{aligned}$$

□

Lema 1.4.9.

$$\frac{\partial}{\partial t} H_\psi = \Delta_\psi f + f(|A|^2 + \overline{Ric}_\psi(N, N)), \quad (1.69)$$

donde $\Delta_\psi = \Delta + \langle \bar{\nabla} \psi, \nabla \rangle$, $\overline{Ric}_\psi = \overline{Ric} - \bar{\nabla}^2 \psi$ (tal y como se definió en (1.37) y (1.43)).

Demostración. Procedamos a calcular la variación de H_ψ respecto de t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_\psi &= \frac{\partial}{\partial t} (H - \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle) \\ &= \Delta f + f(|A|^2 + \overline{Ric}(N, N)) - f \bar{\nabla}^2 \psi(N, N) + \langle \bar{\nabla} \psi, \nabla f \rangle \\ &= \Delta_\psi f + f(|A|^2 + \overline{Ric}_\psi(N, N)). \end{aligned}$$

□

1.4.1. Fórmula de Simon para $\nabla^2 \alpha$ y $\Delta \alpha$

Comencemos recordando dos ecuaciones clásicas de la geometría riemanniana, la ecuación de Codazzi:

$$-(\nabla_X \alpha)(Y, \cdot) + (\nabla_Y \alpha)(X, \cdot) = \overline{R}_{XY \cdot N} \quad (1.70)$$

donde $(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = X(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$; y la ecuación de Gauss:

$$\begin{aligned} \overline{R}_{XYZW} - R_{XYZW} &= \langle \vec{\alpha}(Y, Z), \vec{\alpha}(X, W) \rangle - \langle \vec{\alpha}(X, Z), \vec{\alpha}(Y, W) \rangle \\ &= \alpha(Y, Z) \alpha(X, W) - \alpha(X, Z) \alpha(Y, W). \end{aligned} \quad (1.71)$$

Con la ayuda de estas dos ecuaciones podemos obtener la famosa fórmula de Simon. Realizaremos los cálculos en un cierto $p \in M$, utilizando campos vectoriales X, Y, Z, W cuyas derivadas covariantes se anulan en el punto p

$$(\nabla_{ZW}^2 \alpha)(X, Y) = \nabla_Z((\nabla_W \alpha)(X, Y)) = \nabla_Z((\nabla_X \alpha)(W, Y) + \overline{R}(X, W, Y, N)). \quad (1.72)$$

Si desarrollamos el segundo sumando de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
\nabla_Z(\bar{R}(X, W, Y, N)) &= (\bar{\nabla}_Z \bar{R})(X, W, Y, N) + \bar{R}(\bar{\nabla}_Z X, W, Y, N) \\
&\quad + \bar{R}(X, \bar{\nabla}_Z W, Y, N) + \bar{R}(X, W, \bar{\nabla}_Z Y, N) + \bar{R}(X, W, Y, \bar{\nabla}_Z N) \\
&= (\bar{\nabla}_Z \bar{R})(X, W, Y, N) + \alpha(Z, X)\bar{R}(N, W, Y, N) \\
&\quad + \alpha(Z, W)\bar{R}(X, N, Y, N) - \bar{R}(X, W, Y, AZ). \tag{1.73}
\end{aligned}$$

También desarrollamos el primer sumando en la igualdad (1.72) y conmutamos Z y X :

$$\begin{aligned}
\nabla_Z((\nabla_X \alpha)(W, Y)) &= \nabla_Z(\nabla_X(\alpha(W, Y)) - \alpha(\nabla_X W, Y) - \alpha(W, \nabla_X Y)) \\
&= \nabla_Z(\nabla_X(\alpha(W, Y)) - \alpha(\nabla_Z \nabla_X W, Y) - \alpha(W, \nabla_Z \nabla_X Y)) \\
&= \nabla_X(\nabla_Z(\alpha(W, Y)) - \alpha(\nabla_X \nabla_Z W, Y) + \alpha(R(Z, X, W), Y) \\
&\quad - \alpha(W, \nabla_X \nabla_Z Y) + \alpha(W, R(Z, X, Y))) \\
&= \nabla_X((\nabla_Z \alpha)(W, Y)) + \alpha(R(Z, X, W), Y) + \alpha(W, R(Z, X, Y)) \\
&= (\nabla_X^2 \alpha)(W, Y) + \alpha(R(Z, X, W), Y) + \alpha(W, R(Z, X, Y)) \tag{1.74}
\end{aligned}$$

Al aplicar la ecuación de Codazzi a $\nabla_X((\nabla_Z \alpha))$ como lo hicimos para obtener (1.73):

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^2 \alpha)(W, Y) &= \nabla_X((\nabla_Y \alpha)(W, Z) + \bar{R}(Y, Z, W, N)) \\
&= (\nabla_X^2 \alpha)(Z, W) + (\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z, W, N) + \alpha(X, Y)\bar{R}(N, Z, W, N) \\
&\quad + \alpha(X, Z)\bar{R}(Y, N, W, N) - \bar{R}(Y, Z, W, AX). \tag{1.75}
\end{aligned}$$

De (1.72) a (1.75):

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z^2 \alpha)(X, Y) &= (\nabla_X^2 \alpha)(W, Y) + \alpha(R(Z, X, W), Y) + \alpha(W, R(Z, X, Y)) \\
&\quad + (\bar{\nabla}_Z \bar{R})(X, W, Y, N) + \alpha(Z, X)\bar{R}(N, W, Y, N) \\
&\quad + \alpha(Z, W)\bar{R}(X, N, Y, N) - \bar{R}(X, W, Y, AZ) \\
&= (\nabla_X^2 \alpha)(Z, W) + (\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z, W, N) + \alpha(X, Y)\bar{R}(N, Z, W, N) \\
&\quad + \alpha(X, Z)\bar{R}(Y, N, W, N) - \bar{R}(Y, Z, W, AX) \\
&\quad + \alpha(R(Z, X, W), Y) + \alpha(W, R(Z, X, Y)) \\
&\quad + (\bar{\nabla}_Z \bar{R})(X, W, Y, N) + \alpha(Z, X)\bar{R}(N, W, Y, N) \\
&\quad + \alpha(Z, W)\bar{R}(X, N, Y, N) - \bar{R}(X, W, Y, AZ). \tag{1.76}
\end{aligned}$$

Cuando reordenamos los términos:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{ZW}^2 \alpha)(X, Y) &= (\nabla_{XY}^2 \alpha)(Z, W) + (\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z, W, N) + (\bar{\nabla}_Z \bar{R})(X, W, Y, N) \\
&\quad + \alpha(X, Y) \bar{R}(N, Z, W, N) \\
&\quad + \alpha(Z, W) \bar{R}(X, N, Y, N) \\
&\quad - \bar{R}(Y, Z, W, AX) - \bar{R}(X, W, Y, AZ) \\
&\quad + R(Z, X, W, AY) + R(Z, X, Y, AW). \tag{1.77}
\end{aligned}$$

Después podemos aplicar la fórmula de Gauss en (1.77) y así obtenemos la **fórmula de Simon**:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{ZW}^2 \alpha)(X, Y) &= (\nabla_{XY}^2 \alpha)(W, Z) + (\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z, W, N) + (\bar{\nabla}_Z \bar{R})(X, W, Y, N) \\
&\quad + \alpha(X, Y) \bar{R}(N, Z, W, N) + \alpha(Z, W) \bar{R}(X, N, Y, N) \\
&\quad - \bar{R}(Y, Z, W, AX) - \bar{R}(X, W, Y, AZ) \\
&\quad + \bar{R}(Z, X, W, AY) - \alpha(X, W) \alpha(Z, AY) + \alpha(Z, W) \alpha(X, AY) \\
&\quad + \bar{R}(Z, X, Y, AW) - \alpha(Z, AW) \alpha(X, Y) + \alpha(Z, Y) \alpha(X, AW). \tag{1.78}
\end{aligned}$$

Para obtener la **fórmula clásica de Simon** tomamos trazas en la anterior expresión:

$$\begin{aligned}
(\Delta \alpha)(X, Y) &= \nabla_{XY}^2 H - (\bar{\nabla}_X \bar{Ric}_M)(Y, N) - (\bar{\delta}_M \bar{R})(X, Y, N) \\
&\quad - \bar{Ric}(N, N) \alpha(X, Y) + H \bar{R}(X, N, Y, N) \\
&\quad + \bar{Ric}_M(Y, AX) + \bar{Ric}_M(X, AY) \\
&\quad - 2A \bar{R}_M(X, Y) \\
&\quad - |A|^2 \alpha(X, Y) + H \alpha(X, AY), \tag{1.79}
\end{aligned}$$

para cualquier $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, donde:

$$\bar{Ric}_M(X, Y) := \sum_{i=1}^n \bar{R}(X, e_i, Y, e_i) = \text{tr}_M^{24} \bar{R}^{(4,0)}, \tag{1.80}$$

$$A \bar{R}_M(X, Y) := \sum_{i=1}^n \bar{R}(X, e_i, Y, Ae_i), \tag{1.81}$$

y

$$\bar{\delta}_M \bar{R}(X, Y, N) := \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} \bar{R}(e_i, X, Y, N) = \text{tr}_{12}^M \bar{\nabla} \bar{R}^{(4,0)}(X, Y, N), \tag{1.82}$$

para cualquier referencia local ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de M (notemos que todos ellos son tensores).

A su vez, por (1.79), podemos deducir una expresión para el laplaciano de la aplicación de Weingarten $A \equiv \text{tr}_{24} \alpha \otimes g^{-1} : \mathfrak{X}(M^n) \times \Omega^1(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$. En primer lugar notemos que:

$$\begin{aligned} \Delta A &= \Delta(\text{tr}_{24} \alpha \otimes g^{-1}) = \text{tr}_{24} \Delta(\alpha \otimes g^{-1}) \\ &= \text{tr}_{24} \left(\Delta \alpha \otimes g^{-1} + \alpha \otimes \Delta g^{-1} + 2\nabla \alpha \otimes \nabla g^{-1} \right) = \text{tr}_{24} \left(\Delta \alpha \otimes g^{-1} \right). \end{aligned} \quad (1.83)$$

Para realizar una exposición más clara, introduciremos nueva notación apropiada para esta situación:

$$\bar{\nabla}_X \bar{Ric}_M N := (\bar{\nabla}_X \bar{Ric}_M(N, \cdot))^\sharp, \quad (1.84)$$

$$\bar{\delta}_M \bar{R}(X, N) := (\bar{\delta}_M \bar{R}(X, \cdot, N))^\sharp, \quad (1.85)$$

$$\bar{Ric}_M X := (\bar{Ric}_M(X, \cdot))^\sharp, \quad (1.86)$$

$$A \bar{R}_M X := (A \bar{R}_M(X, \cdot))^\sharp. \quad (1.87)$$

Entonces por (1.83) y (1.79) podemos dar el laplaciano de A del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \Delta A(\cdot) &= \nabla \cdot \nabla H - \bar{\nabla} \cdot \bar{Ric}_M N - (\bar{\delta}_M \bar{R})(\cdot, N) - \bar{Ric}(N, N)A(\cdot) + H \bar{R}(N, \cdot)N \\ &\quad + \bar{Ric}_M \circ A(\cdot) + A \circ \bar{Ric}_M(\cdot) - 2A \bar{R}_M(\cdot) - |A|^2 A(\cdot) + H A^2(\cdot) \\ &= \nabla \cdot \nabla H - (|A|^2 + \bar{Ric}(N, N))A(\cdot) + H(A^2(\cdot) + \bar{R}(N, \cdot)N) \\ &\quad + \bar{Ric}_M \circ A(\cdot) + A \circ \bar{Ric}_M(\cdot) - 2A \bar{R}_M(\cdot) - \bar{\nabla} \cdot \bar{Ric}_M N - (\bar{\delta}_M \bar{R})(\cdot, N). \end{aligned} \quad (1.88)$$

Si empleamos la fórmula de Simon (1.79), podemos dar una expresión de la variación de α^{M_t} por el flujo en forma de la ecuación del calor, tal y como veremos en el siguiente resultado.

Lema 1.4.10. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha^{M_t}(X, Y) \right) &= \Delta \alpha^{M_t}(X, Y) + \nabla^2(f - H)(X, Y) + (\bar{\nabla}_X \bar{Ric}_M)(Y, N) \\ &\quad + (\bar{\delta}_M \bar{R})(X, Y, N) + (|A^{M_t}|^2 + \bar{Ric}(N, N))\alpha^{M_t}(X, Y) \\ &\quad + (f - H) \bar{R}(X, N, Y, N) \\ &\quad - \bar{Ric}_M(Y, A^{M_t} X) - \bar{Ric}_M(X, A^{M_t} Y) \\ &\quad + 2A^{M_t} \bar{R}_M(X, Y) - (f + H) \alpha^{M_t}(X, A^{M_t} Y). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Demostración. Recordemos que por (1.65) dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha^{M_t}(X, Y) \right) = \nabla^2 f(X, Y) - f \left(\alpha^{M_t}(A^{M_t} \cdot, \cdot) - \bar{R}^{(4,0)}(\cdot, N, \cdot, N) \right)(X, Y),$$

entonces utilizando la fórmula de Simon (1.79) en dicha igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha^{M_t}(X, Y) \right) &= \nabla^2 f(X, Y) - f \left(\alpha^{M_t}(A^{M_t} X, Y) - \bar{R}^{(4,0)}(X, N, Y, N) \right) \\
&= \Delta \alpha^{M_t}(X, Y) + \nabla^2 (f - H)(X, Y) + (\bar{\nabla}_X \bar{Ric}_M)(Y, N) \\
&\quad + (\bar{\delta}_M \bar{R})(X, Y, N) \\
&\quad + \bar{Ric}(N, N) \alpha^{M_t}(X, Y) + (f - H) \bar{R}(X, N, Y, N) \\
&\quad - \bar{Ric}_M(Y, A^{M_t} X) - \bar{Ric}_M(X, A^{M_t} Y) \\
&\quad + 2A^{M_t} \bar{R}_M(X, Y) \\
&\quad + |A^{M_t}|^2 \alpha^{M_t}(X, Y) - (f + H) \alpha^{M_t}(X, A^{M_t} Y).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.4.11.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (A) &= \Delta A + \nabla \cdot \nabla (f - H) + (|A|^2 + \bar{Ric}(N, N))A \\
&\quad + (f - H)(A^2 + \bar{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N) \\
&\quad - \bar{Ric}_M \circ A - A \circ \bar{Ric}_M + 2A \bar{R}_M + \bar{\nabla} \cdot \bar{Ric}_M N + \bar{\delta}_M \bar{R}(\cdot, N).
\end{aligned} \tag{1.90}$$

Demostración. Por (1.66) y la expresión para el laplaciano de A dada en (1.88) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (A) &= \nabla \cdot \nabla f + f(A^2 + \bar{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N) \\
&= \Delta A - \Delta A + \nabla \cdot \nabla f + f(A^2 + \bar{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N) \\
&= \Delta A + \nabla \cdot \nabla f + f(A^2 + \bar{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N) \\
&\quad - \nabla \cdot \nabla H + (|A|^2 + \bar{Ric}(N, N))A - H(A^2 + \bar{R}(N, \cdot)N) \\
&\quad - \bar{Ric}_M \circ A - A \circ \bar{Ric}_M + 2A \bar{R}_M + \bar{\nabla} \cdot \bar{Ric}_M N + \bar{\delta}_M \bar{R}(\cdot, N) \\
&= \Delta A + \nabla \cdot \nabla (f - H) + (|A|^2 + \bar{Ric}(N, N))A \\
&\quad + (f - H)(A^2 + \bar{R}^{(3,1)}(N, \cdot)N) \\
&\quad - \bar{Ric}_M \circ A - A \circ \bar{Ric}_M + 2A \bar{R}_M + \bar{\nabla} \cdot \bar{Ric}_M N + \bar{\delta}_M \bar{R}(\cdot, N).
\end{aligned}$$

□

Sobre el conjunto de matrices cuadradas tenemos definido el siguiente productor escalar, dadas B, C matrices cuadradas, de dimensión n y con entradas reales:

$$\langle B, C \rangle := \text{tr}(B^T C). \tag{1.91}$$

Este producto escalar define una norma sobre el conjunto de matrices, usualmente denominada norma de Frobenius:

$$|B| := \sqrt{\langle B, B \rangle}. \quad (1.92)$$

A continuación calcularemos la evolución a lo largo del flujo de la norma de Frobenius de la aplicación de Weingarten A^{M_t} asociada a la hipersuperficie $F_t : (M, g_t) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$.

Lema 1.4.12.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |A|^2 &= \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2 \langle \nabla \cdot \nabla (f - H), A \rangle + (|A|^2 + \bar{Ric}(N, N)) |A|^2 \\ &\quad + (f - H)(\text{tr} A^3 + A \bar{R}_M(N, N)) \\ &\quad + 2 \langle -\bar{Ric}_M \circ A - A \circ \bar{Ric}_M + 2A \bar{R}_M + \bar{\nabla} \cdot \bar{Ric}_M N + \bar{\delta}_M \bar{R}(\cdot, N), A \rangle \end{aligned} \quad (1.93)$$

Demostración. Primero calculemos el laplaciano de $|A|^2$ en M :

$$\begin{aligned} \Delta |A|^2 &= \Delta (\text{tr}(A^T \circ A)) = \text{tr}(\Delta(A^T \circ A)) \\ &= \text{tr}(\Delta(A^T) \circ A + A^T \circ \Delta A + 2\nabla(A^T) \circ \nabla A) \\ &= \text{tr}((\Delta A)^T \circ A + A^T \circ \Delta A + 2(\nabla A)^T \circ \nabla A) = 2 \langle \Delta A, A \rangle + 2|\nabla A|^2. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Por (1.90) y (1.94):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |A|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} \text{tr}(A^T \circ A) = \text{tr} \frac{\partial}{\partial t} (A^T \circ A) = \text{tr} \left(\frac{\partial A^T}{\partial t} \circ A + A^T \circ \frac{\partial A}{\partial t} \right) \\ &= \text{tr} \left(\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)^T \circ A + A^T \circ \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 2 \text{tr} \left(\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)^T \circ A \right) = 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (A), A \right\rangle \\ &= 2 \langle \Delta A + \nabla \cdot \nabla (f - H) + (|A|^2 + \bar{Ric}(N, N)) A \\ &\quad + (f - H)(A^2 + \bar{R}^{(3,1)}(N, \cdot) N) \\ &\quad - \bar{Ric}_M \circ A - A \circ \bar{Ric}_M + 2A \bar{R}_M + \bar{\nabla} \cdot \bar{Ric}_M N + \bar{\delta}_M \bar{R}(\cdot, N), A \rangle \\ &= \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2 \langle \nabla \cdot \nabla (f - H), A \rangle + (|A|^2 + \bar{Ric}(N, N)) |A|^2 \\ &\quad + (f - H)(\text{tr} A^3 + A \bar{R}_M(N, N)) \\ &\quad + 2 \langle -\bar{Ric}_M \circ A - A \circ \bar{Ric}_M + 2A \bar{R}_M + \bar{\nabla} \cdot \bar{Ric}_M N + \bar{\delta}_M \bar{R}(\cdot, N), A \rangle. \end{aligned}$$

□

1.5. Flujo por la curvatura media asociado a una densidad

Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ de dimensión $n + 1$ y una hipersuperficie inmersa $F_0 : M \rightarrow \overline{M}$, llamaremos *flujo por la curvatura media asociado a la densidad ψ* (FCM ψ) de la inmersión F_0 , a una familia de hipersuperficies inmersas diferenciables $\{F_t : M \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T]}$ tales que $F : M \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$ es diferenciable y verifica que:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} &= \overrightarrow{H}_\psi = H_\psi N = (H - \langle \nabla \psi, N \rangle) N, \\ F(\cdot, 0) &= F_0(\cdot), \end{cases} \quad (1.95)$$

donde N es el normal a la hipersuperficie. En el caso particular de que la variedad ambiente \overline{M} tenga dimensión 2, llamaremos a este problema de valor inicial *problema del acortamiento de curvas asociado a la densidad ψ* (PAC ψ).

Notemos que (1.95) está definido globalmente si \overline{M} y M son orientables y, en cualquier caso, siempre estará definido localmente.

Anteriormente se remarcó que el vector \overrightarrow{H}_ψ es el gradiente del funcional de volumen en densidad actuando sobre las hipersuperficies inmersas, por tanto, (1.95) es el flujo gradiente asociado a dicho funcional. En otras palabras, la hipersuperficie se deforma de modo diferenciable provocando que su ψ -volumen disminuya lo más rápidamente posible. Explícitamente (consecuencia de (1.64)):

$$\frac{d}{dt} V_\psi^n((M, \iota_t^* \overline{g})) = - \int_M H_\psi^2 d\nu_\psi^n. \quad (1.96)$$

Naturalmente en el caso particular en que ψ sea constante, el flujo se corresponde con el tan estudiado flujo por la curvatura media (FCM).

Diversos trabajos se han desarrollado previamente en esta área ([5], [12], [50], [51]), algunos de ellos sin hacer mención explícita al término densidad.

En primer lugar, para trabajar con este flujo necesitamos un teorema de existencia de solución para tiempos cortos. Huisken y Polden en [36] junto al trabajo posterior de Mantegaza y Martinazzi [40] estudiaron la existencia de solución para tiempos cortos para la siguiente ecuación geométrica de evolución:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\Delta^p H + \phi(F, N, A, \nabla A, \nabla^2 A, \dots, \nabla^{2p-1} A) \right) N, \quad (1.97)$$

con ϕ diferenciable en todos sus argumentos, lo que lleva al siguiente teorema.

Teorema 1.5.1. (Teorema 7.17 de [36]) *Dada una hipersuperficie diferenciable inmersa $F_0 : M \rightarrow \overline{M}$ compacta, existe una única solución al problema (1.97) definida en algún intervalo $0 \leq t \leq T$ con F_0 como condición inicial.*

El caso particular $p = 0$ y $\phi(F, N) := -\langle \bar{\nabla} \psi_F, N \rangle$ se corresponde con el FCM ψ (1.95), por lo que tenemos garantizada la existencia y unicidad de la solución para tiempos cortos del FCM ψ , tal como se detalla en el siguiente corolario

Corolario 1.5.1. (Existencia de solución para tiempos cortos) *Dada una hipersuperficie diferenciable inmersa $F_0 : M \rightarrow \bar{M}$ compacta, existe una única solución al problema (1.95) definida en algún intervalo $0 \leq t < T$ con F_0 como condición inicial.*

Llamaremos *tiempo máximo de existencia del flujo* (1.95) al mayor $T \in \mathbb{R}^+$ tal que existe la solución del problema de valor inicial (1.95) $F : M \times [0, T) \rightarrow \bar{M}$ o, lo que es lo mismo, al T tal que la solución $F : M \times [0, T) \rightarrow \bar{M}$ no puede ser prolongada. En términos generales, cuando escribamos $F : M \times [0, T) \rightarrow \bar{M}$ como solución a un problema de valor inicial (PVI) estaremos suponiendo que T es dicho tiempo máximo. En ocasiones podrá interesarnos remarcar dicho carácter y lo denotaremos por $T_{\text{máx}}$.

Una de las herramientas fundamentales para el estudio de este flujo geométrico es el principio del máximo parabólico (teorema 1.1.2). Gracias a él podemos llegar a obtener dos resultados de gran importancia para la comprensión del flujo.

Teorema 1.5.2. (Preservación de embebimiento) *Supongamos que la condición inicial $F_0 : M \rightarrow \bar{M}$ del PVI (1.95) es compacta y embebida, entonces F_t es embebida para todo $t \in [0, T)$.*

Teorema 1.5.3. (Principio de separación) *Sean dos soluciones al PVI (1.95) $F_1, F_2 : M_i \times [0, T_i) \rightarrow \bar{M}$ tales que M_1 es compacta, entonces la distancia entre las inmersiones $F_1(\cdot, t)$ y $F_2(\cdot, t)$ no decrece con el tiempo para todo $t \in [0, \min\{T_1, T_2\})$.*

La demostración de estos dos teoremas cuando la variedad ambiente es el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} fue presentada en [50].

El principio de separación nos permite tener cierta noción de cómo evoluciona una hipersuperficie por el flujo (1.95) mediante la comparación de soluciones, es decir, apoyándonos en la evolución de otra hipersuperficie de la que conozcamos de antemano su evolución.

Notemos que las hipersuperficies ψ -mínimas permanecen fijas por el flujo. Dada una hipersuperficie inmersa $F_0 : M \rightarrow \bar{M}$ ψ -mínima, entonces la solución al PVI (1.95), con condición inicial F_0 , es

$$F(p, t) = F_0(p), \text{ para todo } (p, t) \in M \times [0, \infty).$$

Gracias al principio de separación estas hipersuperficies actúan como barreras “fijas”. Dada una cierta inmersión F_0 compacta y ψ -mínima, cualquier otra

inmersión $F_1 : M_1 \rightarrow \overline{M}$, cuyo soporte esté dentro de la región acotada por el soporte de F_0 , permanecerá en dicha región a lo largo de toda su evolución por (1.95).

1.5.1. Caso particular: el espacio euclídeo con una densidad radial

Una primera situación a considerar es el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} con una densidad ψ radial respecto del origen coordenado, es decir, la densidad es la composición de una función $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, con la función distancia al origen coordenado $r(x) = |x|$. Trabajaremos con hipersuperficies $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ compactas y orientables y elegiremos el normal interior N a las mismas.

A la hora de trabajar, como función densidad tomaremos la aplicación $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi = \psi(r)$, en lugar de $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = \psi(r(x))$.

En esta variedad ambiente no resulta difícil ver cuál es la evolución de una esfera redonda centrada en el origen al evolucionar por el FCM ψ , veámoslo:

Una esfera redonda de dimensión n y radio R centrada en el origen tiene ψ -curvatura media constante

$$H_\psi = \frac{n}{R} - \psi'(R) \langle \overline{\nabla} r, N \rangle = \frac{n}{R} + \psi'(R), \quad (1.98)$$

lo que, al igual que ocurre con el FCM, nos hace pensar intuitivamente en que la evolución de la misma será una familia de esferas redondas centradas en el origen, autosemejantes, contrayéndose o expandiéndose en función de que H_ψ sea positiva o negativa, respectivamente. Para comprobar esta suposición, podemos definir $F(\cdot, t) := R(t)F_0$, con $F_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, la inmersión inicial de una esfera redonda centrada en el origen, de dimensión n y radio uno. Entonces, de ser cierta nuestra conjetura geométrica,

$$\begin{aligned} R'(t)F_0 &= \frac{\partial F}{\partial t} = H_\psi N = \left(\frac{n}{R(t)} + \psi'(R(t)) \right) N = - \left(\frac{n}{R(t)} + \psi'(R(t)) \right) \frac{F(t)}{R(t)} \\ &= - \left(\frac{n}{R(t)} + \psi'(R(t)) \right) F_0, \end{aligned} \quad (1.99)$$

por lo que nuestro problema se reduce al siguiente PVI para ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} R'(t) &= - \left(\frac{n}{R(t)} + \psi'(R(t)) \right), \\ R(0) &= R_0. \end{cases} \quad (1.100)$$

Por la teoría de EDO, existe una única solución para un cierto tiempo T y, por el corolario 1.5.1, esta debe ser la única solución al PVI (1.95).

La posibilidad de reducir el problema de la evolución de las esferas redondas centradas en el origen a un sistema dinámico de dimensión 1, nos lleva a pensar

en ciertas esferas como esferas atractoras o repulsoras en función de si el radio de dichas esferas se corresponde con un punto atractor o repulsor del espacio de configuración del sistema dinámico. Además, remarquemos que los puntos de equilibrio del sistema dinámico se corresponden con esferas ψ -mínimas.

Gracias al principio de separación, la evolución de las esferas redondas centradas en el origen condiciona el movimiento de otras hipersuperficies. Por ejemplo, en aquellos casos en los que toda esfera redonda centrada en el origen coordenado tiene ψ -curvatura media estrictamente positiva, dada cualquier otra hipersuperficie evolucionando por el FCM ψ , su intervalo máximo de existencia del flujo siempre será finito (el FCM es un caso particular de este fenómeno).

Más aún, al actuar las hipersuperficies ψ -mínimas de barreras fijas, podemos utilizar el FCM ψ para avanzar en el problema de clasificación de hipersuperficies ψ -mínimas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} con una densidad radial, tal y como veremos en la proposición 1.5.1.

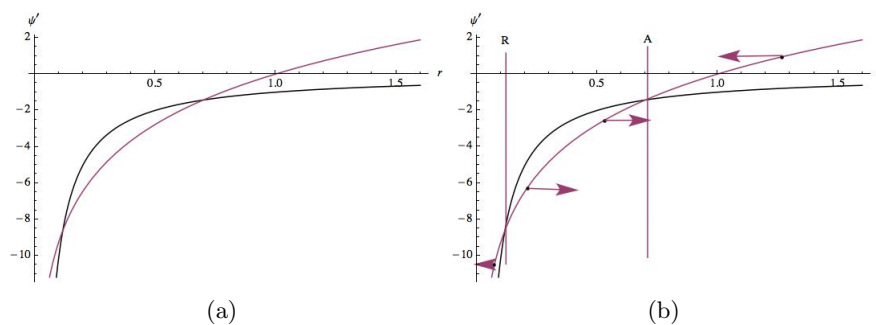
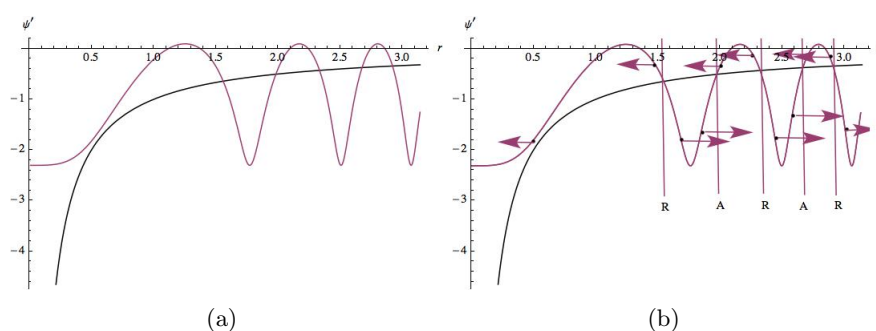
Ahora bien, necesitaremos un lema previo, de (1.100) se deduce inmediatamente el siguiente resultado:

Lema 1.5.1. *En el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} con una densidad radial $\psi = \psi(r)$, una esfera redonda \mathbb{S}^n de radio R y centrada en el origen, es ψ -mínima si y sólo si $\psi' = -\frac{n}{r}$.*

Bajo el FCM ψ , el radio R de una esfera \mathbb{S}^n centrada en el origen

- *crece cuando $-\left(\frac{n}{R} + \psi'\right) > 0$, es decir, cuando $\psi' < -\frac{n}{R}$,*
- *decrece cuando $-\left(\frac{n}{R} + \psi'\right) < 0$, es decir, cuando $\psi' > -\frac{n}{R}$.*

En las siguientes imágenes, la curva $(r, -n/r)$ está marcada con una línea negra. Con la finalidad de ilustrar este tipo de evoluciones vamos a dar dos ejemplos gráficos para la función $\psi'(r)$ (en rojo): uno para una densidad con singularidades y otro para una densidad regular. Para cada uno de estos ejemplos, las esferas de radio marcado en la vertical con A son atractores (las esferas en su entorno son atraídas por ellas) y aquellas cuyo radio está marcado en la vertical con R son repulsores. Las marcadas con A o R son ψ -mínimas y, por lo tanto, estacionarias. Las esferas de radio “ r ” que se encuentran en la base de las flechas se mueven en la dirección que estas indican.

Figura 1.1: ψ con singularidad en el origenFigura 1.2: ψ regular

Como consecuencia de este comportamiento y del principio de separación para el FCM ψ , tenemos:

Proposición 1.5.1. Sea \mathbb{R}^{n+1} el espacio euclídeo con una densidad radial $\psi = \psi(r)$. Denotaremos por $r_{\text{máx}}$ (respectivamente $r_{\text{mín}}$) la distancia máxima (respectivamente distancia mínima) de una hipersuperficie cerrada Σ al origen. Supongamos que:

- (a) ψ es diferenciable, y
- (b) las grafos de ψ' y $-\frac{n}{r}$ intersecan transversalmente en una familia discreta de puntos $r_1 < r_2 < \dots$

Entonces,

- i* Una hipersuperficie Σ que verifica $r_{2k} \leq r_{\text{máx}} \leq r_{2k+1}$ es ψ -mínima si y sólo si es una esfera redonda centrada en el origen de radio $r = r_{2k}$ o $r = r_{2k+1}$. En particular, no existen hipersuperficies cerradas ψ -mínimas en el interior de la esfera redonda centrada en el origen de radio $r = r_1$.

- ii Las únicas hipersuperficies Σ cerradas y ψ -mínimas con $r_{2k+1} \leq r_{\min} \leq r_{2k+2}$ son las esferas redondas centradas en el origen de radio $r = r_{2k+1}$ y $r = r_{2k+2}$.
- iii Si el número de ceros de $\psi' + \frac{n}{r}$ es par y r_k es el último, la única hipersuperficie Σ cerrada y ψ -mínima con $r_{\max} \geq r_k$ es la esfera redonda centrada en el origen de radio $r = r_k$.
- iv Si el número de ceros de $\psi' + \frac{n}{r}$ es impar y r_k es el último, la única hipersuperficie Σ cerrada y ψ -mínima con $r_{\min} \geq r_k$ es la esfera redonda centrada en el origen de radio $r = r_k$.

Si cambiamos la hipótesis (a) por (a') tal que ψ es diferenciable únicamente en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, el $\lim_{t \rightarrow 0} \psi'(t) = -\infty$ y el soporte de Σ está contenido en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, entonces:

- i' Si $\psi'(r) > -\frac{n}{r}$ para $r < r_1$, se dan las mismas situaciones que bajo la hipótesis (a).
- ii' Si $\psi'(r) < -\frac{n}{r}$ para $r < r_1$, tenemos las mismas situaciones que en el caso ψ diferenciable, pero intercambiando los papeles de r_{\max} y r_{\min} .

Demostración. Por el lema 1.5.1, en el caso diferenciable (respectivamente caso singular (ii')), las esferas redondas centradas en el origen de radio r_{2k} son atractoras (respectivamente repulsoras) y las de radio r_{2k+1} son repulsoras (respectivamente atractoras). Teniendo esto en mente, podemos ver que en cada uno de los casos (i) a (iv), (i') y (ii'), si Σ es ψ -mínima y no es una de las esferas mencionadas, existe una esfera disjunta de Σ que evoluciona bajo el FCM ψ hasta tocar a Σ , lo que nos da una contradicción con el principio de separación. \square

Siguiendo en la línea de clasificación de hipersuperficies ψ -mínimas, para el caso crítico $\psi(x) = a - n \ln(|x|)$, es posible dar una clasificación completa de las hipersuperficies cerradas ψ -mínimas:

Proposición 1.5.2. *En \mathbb{R}^{n+1} con una densidad crítica $\psi(x) = a - n \ln(|x|)$, las únicas hipersuperficies cerradas y ψ -mínimas, son las esferas redondas centradas en el origen.*

Demostración. Todas las esferas redondas centradas en el origen son ψ -mínimas. Si Σ es otra hipersuperficie cerrada y ψ -mínima, debe ser tangente a alguna de estas esferas en algún punto, ya que son dos hipersuperficies tangentes ψ -mínimas, por el principio del máximo, deben coincidir. \square

En el caso del plano euclídeo \mathbb{R}^2 con una densidad radial $\psi = \psi(r)$, tenemos más información sobre las curvas ψ -mínimas:

Proposición 1.5.3. *En el plano euclídeo \mathbb{R}^2 con una densidad radial $\psi = \psi(r)$ tal que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0\})$, una curva cerrada, simple, ψ -mínima, y cuyo soporte está contenido en la región diferenciable de ψ , es estrellada respecto del origen.*

Demostración. En una densidad radial, las líneas que pasan por el origen son ψ -mínimas. Por otro lado, Σ estrellada respecto del origen significa que $\langle F, N \rangle \neq 0$ en cualquier punto F de Σ . Entonces, si Σ no es estrellada, existe una línea que pasa por el origen tangente a Σ pero, por el principio del máximo, esto es imposible. \square

En el caso gaussiano $\psi(x) = -\frac{1}{2}\mu^2 r^2(x)$ en el plano \mathbb{R}^2 , es conocido que la única curva cerrada, simple y ψ -mínima, es el círculo de radio $r = 1/\mu$ ([1]).

Schnürer y Smoczyk en [50] estudiaron en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} con una densidad radial ψ , sin hacer mención explícita a la palabra densidad, la evolución de una hipersuperficie Σ embebida cuyo soporte está contenido en un anillo centrado en el origen de coordenadas, de dimensión $n + 1$, es decir, $r(F_0(\Sigma)) \subset [r_0, r_1]$, $r_0 > 0$. Existiendo $r^* \in (r_0, r_1)$ tal que la esfera redonda centrada en el origen de radio r^* es un atractor a derecha e izquierda y no existen otros puntos críticos en $[r_0, r_1]$ para el sistema (1.100). Además, ellos impusieron una propiedad a la hipersuperficie inicial, ser “fuertemente estrellada”. Bajo dichas condiciones demostraron que la solución del flujo 1.95 existía para todo tiempo y subconvergía a una inmersión límite en la norma C^∞ .

El caso especial del flujo de hipersuperficies convexas en \mathbb{R}^n , con las densidades gaussiana y antigaussiana, fue estudiado por A. Borisenko y V. Miquel en [12].

1.5.2. El FCM ψ de una hipersuperficie inmersa

Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ de dimensión $n + 1$ y orientable.

Teorema 1.5.4. (Invarianza geométrica bajo perturbaciones tangenciales) *Sea una familia de inmersiones $\{\tilde{F}_t : M \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T]}$ compactas, orientadas y de codimensión 1, tal que $\tilde{F} : M \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$ sea diferenciable y verifique el sistema:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(p, t) &= \overline{H}_\psi + \tilde{F}_{t*} p(X(p, t)), \\ \tilde{F}(p, 0) &= \tilde{F}_0(p), \end{cases} \quad (1.101)$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M \times [0, T])$. Entonces, existe una única familia de reparametrizaciones globales $\Upsilon : M \times [0, T] \rightarrow M$ de las respectivas \tilde{F}_t tal que $F(p, t) := \tilde{F}(\Upsilon(p, t), t)$ verifica el sistema del FCM ψ (1.95) con la inmersión \tilde{F}_0 como condición inicial.

Recíprocamente, si $\tilde{F} : M \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$ puede ser globalmente reparametrizada para que verifique el sistema del FCM ψ (1.95), entonces \tilde{F} debe satisfacer (1.101) para un cierto campo $X \in \mathfrak{X}(M \times [0, T])$.

Demostración. Sea una familia diferenciable de difeomorfismos $\Upsilon : M \times [0, T] \rightarrow M$ que verifica la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(p, t) &= -X(\Upsilon(p, t), t), \\ \Upsilon(p, 0) &= p. \end{cases} \quad (1.102)$$

El teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias en una variedad compacta nos asegura que existe una única solución diferenciable para el sistema (1.102).

Ahora consideremos la familia de inmersiones \tilde{F}_t , solución de (1.101), reparametrizadas utilizando esta familia de difeomorfismos Υ , $F(p, t) := \tilde{F}(\Upsilon(p, t), t)$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(p, t) &= \frac{d}{dt} \tilde{F}(\Upsilon(p, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}(\Upsilon(p, t), t) + \tilde{F}_{t\star} \Upsilon(p, t) \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(p, t) \right) \\ &= \tilde{H}_\psi(\Upsilon(p, t), t) + \tilde{F}_{t\star} \Upsilon(p, t) \left(X(\Upsilon(p, t), t) \right) - \tilde{F}_{t\star} \Upsilon(p, t) \left(X(\Upsilon(p, t), t) \right) \\ &= \tilde{H}_\psi(\Upsilon(p, t), t) \tilde{N}(\Upsilon(p, t), t) = H_\psi(p, t) N(p, t). \end{aligned} \quad (1.103)$$

Y respecto a la condición inicial:

$$F(p, 0) = \tilde{F}(\Upsilon(p, 0), 0) = \tilde{F}(p, 0) = \tilde{F}_0(p), \text{ para todo } p \in M. \quad (1.104)$$

Por tanto, queda probada la existencia de una tal reparametrización global. La unicidad de Υ se deduce del cálculo (1.103) junto a la unicidad de solución de (1.102). Con lo que queda probada la primera parte del teorema.

Veamos el recíproco. Si podemos reparametrizar $\tilde{F} : M \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$ de forma que dicha reparametrización, $F(p, t) := \tilde{F}(\Upsilon(p, t), t)$, verifique el sistema (1.95), entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}(\Upsilon(p, t), t) + \tilde{F}_{t\star} \Upsilon(p, t) \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(p, t) \right) = H_\psi(p, t) N(p, t).$$

Por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}(\Upsilon(p, t), t) = \tilde{H}_\psi(\Upsilon(p, t), t) \tilde{N}(\Upsilon(p, t), t) - \tilde{F}_{t\star} \Upsilon(p, t) \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(p, t) \right).$$

O equivalentemente:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \tilde{F}(p, t) = \tilde{H}_\psi(p, t_0) \tilde{N}(p, t_0) - \tilde{F}_{t_0 \star p} \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \Upsilon(\Upsilon_{t_0}^{-1}(p), t) \right).$$

Si definimos el campo vectorial:

$$X(p, t_0) := - \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \Upsilon(\Upsilon_{t_0}^{-1}(p), t), \text{ para todo } (p, t_0) \in M \times [0, T]. \quad (1.105)$$

Obtenemos finalmente que $\tilde{F} : M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ verifica el sistema (1.101). \square

Por lo general nosotros estamos interesados en conocer la geometría de las hipersuperficies inmersas que evolucionan por el FCM ψ , por tanto no nos importa tanto conocer cual es la forma exacta de la inmersión F . Es por este motivo y gracias al teorema (1.5.4), que en ocasiones nos centraremos en el siguiente problema para hipersuperficies inmersas orientadas:

Dada una hipersuperficie inmersa M_0 orientada, compacta, de $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ encuéntrese una familia de hipersuperficies inmersas $\{M_t\}_{t \in [0, T)}$ de \overline{M} tal que existe una familia de inmersiones $F : M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ para dichas hipersuperficies, diferenciable y que verifique que:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N \right\rangle = H_\psi, \\ F(\cdot, 0) = F_0(0). \end{cases} \quad (1.106)$$

Por otro lado, gracias al teorema 1.5.4 podemos ver el FCM ψ (1.95) como un FCM perturbado por un campo externo de fuerzas. Dada una familia de inmersiones $F : M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ solución del FCM ψ (1.95), por el teorema 1.5.4, existe una familia de reparametrizaciones globales de las respectivas F_t de forma que la nueva familia de inmersiones $\tilde{F} : M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ verifica el sistema (1.101) con $X(p, t) := -(\overline{\nabla} \psi)_{\tilde{F}(p, t)}^T$, es decir, verifican:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(p, t) = \overline{H}_\psi - (\overline{\nabla} \psi)^T = \overline{H} - \overline{\nabla} \psi, \\ \tilde{F}(p, 0) = F_0(p), \end{cases} \quad (1.107)$$

Señalemos que $\overline{\nabla} \psi \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ no es más que un campo globalmente integrable sobre la variedad riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$.

1.5.3. Relación entre el FCM ψ y el FCM

Esta sección forma parte del artículo [42].

Por la proposición 1.3.2 de la sección 1.3.1, dada una submersión riemanniana $\pi : (\widehat{M}^{m+n+1}, \widehat{g}) \rightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ con fibras de volumen de dimensión m

finito y con vector curvatura media constante, en el sentido de que su vector curvatura media en \widehat{M} es la elevación horizontal de un vector tangente a \overline{M} , y una inmersión $\widehat{\iota}_0$ de una hipersuperficie en \widehat{M} que contenga a todas las fibras de su proyección, entonces la evolución de esta inmersión por el FCM en $(\widehat{M}, \widehat{g})$ es equivalente a la evolución de su proyección por el FCM ψ en $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$, siendo ψ la aplicación definida en (1.46).

Smoczyk en [51] ya utilizó esta ruta sin hacer mención explícita a la palabra densidad. Estudió la evolución de ciertas hipersuperficies por el FCM reduciendo el problema a un problema de evolución por el FCM ψ , hipersuperficies invariantes por un cierto subgrupo del grupo de isometrías de la variedad ambiente \overline{M} .

Esta equivalencia tiene interés en sí misma y además nos ayudará en el capítulo 3 a comprender las singularidades de tipo I que se dan por el FCM ψ , apoyándonos en la teoría ya conocida para las singularidades de tipo I del FCM.

1.5.4. Otra visión de la densidad (anti-)gaussiana

Esta sección forma parte del artículo [41].

En \mathbb{R}^{n+1} la densidad (anti-)gaussiana se corresponde con

$$\psi(x) = \varepsilon \frac{1}{2} n \mu^2 |x|^2, \quad (1.108)$$

$\varepsilon = 1$ anti-gaussiana y $\varepsilon = -1$ gaussiana. El FCM ψ con estas densidades tiene dos propiedades particulares que fueron usadas por A. Borisenko y V. Miquel en [12] para describir la evolución de una hipersuperficie compacta y convexa de \mathbb{R}^{n+1} bajo estos flujos. La primera propiedad particular es:

Lema 1.5.2. ([52, 12]) *$F(\cdot, t)$ es una solución de (1.95) (con ψ la densidad (anti-)gaussiana) si y solo si $\widehat{F}(\cdot, \widehat{t}) = e^{\varepsilon n \mu^2 t(\widehat{t})} F(\cdot, t(\widehat{t}))$ es una solución de:*

$$\left\langle \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{t}}, \widehat{N} \right\rangle = \widehat{H}, \quad (1.109)$$

donde $t(\widehat{t}) = \frac{1}{\varepsilon 2n\mu^2} \ln(1 + \varepsilon 2n\mu^2 \widehat{t})$. (Cuando $\varepsilon = -1$, $\widehat{t} < \frac{1}{2n\mu^2}$).

El lema enunciado aquí, lema 1.5.2, aparece en [12], pero está basado en un resultado más general de equivalencia de flujos dado por K. Smoczyk en [52]. La otra propiedad especial es:

Lema 1.5.3. ([12]) *Sea un punto $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, la evolución $F_t(M)$ de $F_0(M)$ es la composición del movimiento $\widehat{F}_t(M)$ de $F_0(M) - p_0$ por el flujo (1.95) con la traslación del vector $p(t) = e^{-\varepsilon n \mu^2 t} p_0$, esto es $F_t(x) = e^{-\varepsilon n \mu^2 t} p_0 + \widehat{F}_t(x)$.*

Aquí usamos estas propiedades para estudiar la evolución de una curva cerrada y embebida en el plano \mathbb{R}^2 bajo PAC ψ , con ψ una densidad (anti)-gaussiana. Probaremos:

Teorema 1.5.5. *En el plano \mathbb{R}^2 con la densidad (anti)-gaussiana $\psi = \varepsilon \frac{1}{2} \mu^2 |x|^2$, sea $\gamma(\cdot, t)$ la solución de (1.95) tal que $\gamma(\cdot, 0)$ es una curva embebida. Denotaremos por A el área de la región acotada por el soporte de $\gamma(\cdot, 0)$.*

1. Si $\varepsilon = 1$, la solución máxima $\gamma(\cdot, t)$ está definida en $\mathbb{S}^1 \times [0, T[$, $T = \frac{1}{2\mu^2} \ln(1 + \mu^2 \frac{A}{\pi})$ y $\lim_{t \rightarrow T} \gamma(\mathbb{S}^1, t)$ es un punto redondo.
2. Si $\varepsilon = -1$:
 - a) Si $A < \pi/\mu^2$, la solución máxima $\gamma(\cdot, t)$ está definida en $\mathbb{S}^1 \times [0, T[$, $T = -\frac{1}{2\mu^2} \ln(1 - \mu^2 \frac{A}{\pi})$ y $\lim_{t \rightarrow T} \gamma(\mathbb{S}^1, t)$ es un punto redondo.
 - b) Si $A = \pi/\mu^2$, la solución máxima $\gamma(\cdot, t)$ está definida en $\mathbb{S}^1 \times [0, \infty[$, y $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\mathbb{S}^1, t)$ es un círculo de radio $1/\mu$ centrado en el origen $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ o centrado en el infinito.
 - c) Si $A > \pi/\mu^2$, la solución máxima $\gamma(\cdot, t)$ está definida en $\mathbb{S}^1 \times [0, \infty[$, y $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\mathbb{S}^1, t)$ puede ser una línea recta pasando por $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ o una curva en el infinito que acota una región infinita, o una curva en el borde “infinito” de \mathbb{R}^2 que acota todo el espacio.

Demostración. Sea $A(t)$ (respectivamente $\hat{A}(\hat{t})$) el área del dominio acotado por el soporte de la curva $\gamma_t(\mathbb{S}^1)$ (respectivamente $\hat{\gamma}_{\hat{t}}(\mathbb{S}^1)$). Por los trabajos [24, 28, 29], sabemos que el flujo $\hat{\gamma}_{\hat{t}}$ de $\hat{\gamma}_0$ bajo (1.109) evoluciona a un punto redondo cuando $\hat{t} \rightarrow \frac{\hat{A}(0)}{2\pi}$. Por la definición de $\hat{\gamma}$ y $t(\hat{t})$ tenemos que $\hat{\gamma}(\cdot, 0) = \gamma(\cdot, 0)$, entonces $\hat{A}(0) = A(0)$. Usando el lema 1.5.2, la evolución de γ se deduce de la evolución de $\hat{\gamma}$ acorde a los siguiente casos:

Cuando $\varepsilon = 1$, esto da que γ_t está bien definida para $t \in [0, \frac{1}{2\mu^2} \ln(1 + \mu^2 \frac{A(0)}{\pi})]$, y el límite de γ_t cuando $t \rightarrow \frac{1}{2\mu^2} \ln(1 + \mu^2 \frac{A(0)}{\pi})$ es un punto redondo.

Cuando $\varepsilon = -1$, la cota $\hat{t} < \frac{1}{2\mu^2}$ obliga a distinguir tres casos:

- 1) $A(0) < \frac{\pi}{\mu^2}$. La evolución es igual que en el caso $\varepsilon = 1$.
- 2) $A(0) = \frac{\pi}{\mu^2}$. La solución $\gamma(\cdot, t)$ está bien definida para $t \in [0, \infty[$. Cuando el $\lim_{\hat{t} \rightarrow 1/2\mu^2} \hat{\gamma}(\mathbb{S}^1, \hat{t}) = (0, 0)$, estamos exactamente en el caso en que γ es el movimiento normalizado asociado al flujo por la curvatura media de $\hat{\gamma}$, como

se describe en [32] (ver la última sección de [12]), entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\mathbb{S}^1, t)$ es un círculo de radio $1/\mu$ centrado en $(0, 0)$. Cuando $\lim_{\hat{t} \rightarrow 1/2\mu^2} \hat{\gamma}(\mathbb{S}^1, \hat{t}) \neq (0, 0)$, el anterior resultado combinado con el lema 1.5.3 da que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\mathbb{S}^1, t)$ es un círculo de radio $1/\mu$ y centrado en un punto en el infinito.

3) $A(0) > \frac{\pi}{\mu^2}$. Entonces $\lim_{\hat{t} \rightarrow 1/2\mu^2} \hat{\gamma}(\mathbb{S}^1, \hat{t}) =: C_{1/2\mu^2}$ es una curva cerrada y embebida (ya que el flujo de γ para antes de que el flujo de $\hat{\gamma}$ finalice). Sea $\hat{\Omega}_{1/2\mu^2}$ el dominio acotado por $\hat{C}_{1/2\mu^2}$, y Ω_t el dominio acotado por $\gamma(\mathbb{S}^1, t)$. Existen tres posibilidades:

3.1 $(0, 0) \in C_{1/2\mu^2}$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\mathbb{S}^1, t)$ es una línea y $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_t$ es un semi-plano.

3.2 $(0, 0) \in \Omega_{1/2\mu^2} - C_{1/2\mu^2}$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\mathbb{S}^1, t)$ es una curva en el infinito y $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_t$ es todo el espacio \mathbb{R}^2 .

3.3 $(0, 0) \notin \Omega_{1/2\mu^2}$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\mathbb{S}^1, t)$ es una curva en el infinito y $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_t$ está también en el infinito.

□

Capítulo 2

PAC ψ con ψ diferenciable

En este capítulo nos centraremos en el *problema del acortamiento de curvas asociado a una densidad ψ* (PAC ψ) que fue introducido en la sección 1.5 como el caso particular del flujo por la curvatura media asociado a una densidad ψ (1.95) cuando la variedad ambiente tiene dimensión 2. Más concretamente, estudiaremos la evolución de una curva por el PAC ψ en el caso en que la densidad ψ de la variedad ambiente $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ sea diferenciable en la región donde se da la evolución de la curva. Los resultados de este capítulo han sido publicados en [41].

2.1. Caso general

Recordaremos la notación necesaria, expondremos nuevamente el problema y enunciaremos el resultado general del capítulo.

Como variedad ambiente consideraremos una variedad riemanniana diferenciable con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable y de dimensión 2.

Al fibrado tangente unitario de $(\overline{M}, \overline{g})$ lo denotaremos por $S^1\overline{M}$. Al considerar $(\overline{M}, \overline{g})$ orientada existe una aplicación diferenciable $J : S^1\overline{M} \rightarrow S^1\overline{M}$ definida por $J(p, v) := (p, v^*)$ donde $\{v, v^*\}$ es una base para $T_p\overline{M}$, ortonormal y positivamente orientada. Dada una curva γ y su tangente unitario \mathfrak{t} , tomaremos como normal a la curva $N \equiv J\mathfrak{t}$, de forma que $\{\mathfrak{t}, N\}$ es una base ortonormal y positivamente orientada.

Dada una inmersión $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$ por k y k_ψ denotaremos a la curvatura geodésica y a la curvatura geodésica en densidad, respectivamente. Notemos que en este caso la curvatura geodésica de γ coincide con su curvatura media. Por s nos referiremos al parámetro longitud de arco de la curva parametrizada por γ . Todas las curvas consideradas serán cerradas. El tensor curvatura de Ricci de \overline{M} es $\overline{Ric} = \overline{K}\overline{g}$ donde \overline{K} es la curvatura de Gauss de la variedad ambiente \overline{M} . Por L denotaremos a la longitud de la curva y por A el área de la

región delimitada por el soporte de la curva aquella a la que apunta el vector normal a la misma (ya sea finita o infinita).

En general, trabajaremos con familias de inmersiones cerradas, orientadas y dependientes de un parámetro continuo $\{\gamma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T]}$. Estas familias se verán como una aplicación:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) &\rightarrow \overline{M} \\ (\alpha, t) &\mapsto \gamma(\alpha, t) := \gamma_t(\alpha). \end{aligned} \quad (2.1)$$

El objeto de estudio es el siguiente problema de valor inicial:

Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable y de dimensión 2, dada una inmersión diferenciable $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$, encuéntrese una familia de inmersiones diferenciables $\{\gamma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T)}$ tales que $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ es diferenciable y verifique que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \vec{k}_\psi, \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0(\cdot). \end{cases} \quad (2.2)$$

A la variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ le exigiremos la siguiente propiedad:

El perfil isoperimétrico \mathcal{I} es una función continua bien definida que verifica

$$\text{que si } \lim_{a \rightarrow a_0} \mathcal{I}(a) = 0 \text{ entonces } a_0 = 0. \quad (2.3)$$

Obtendremos el siguiente resultado original principal:

Teorema 2.1.1. *Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable, de dimensión 2 y que satisface (2.3) y un embebimiento $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$. Sea la solución máxima del PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ con condición inicial γ_0 .*

Si $T = \infty$ y existe un dominio $U \subset \overline{M}$ compacto donde $\psi \in C^\infty(U)$ y tal que $\text{Sop } \gamma_t \subseteq U$ para todo $t \in [0, \infty)$. Entonces existe una reparametrización $\tilde{\gamma}(\cdot, t)$ de $\gamma(\cdot, t)$ de modo que existe una sucesión $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $t_k \rightarrow \infty$, que converge en C^m a una inmersión $\tilde{\gamma}^\infty(\cdot) \in C^m$ que parametriza una curva C^m , cerrada y ψ -mínima en \overline{M} para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Este resultado, junto al trabajo desarrollado por Zhu en [53] del que hablaremos en la sección 2.4 y que expondremos a continuación, completa el estudio del PAC ψ (2.2) en el caso en que la densidad ψ sea diferenciable y la condición inicial γ_0 sea un embebimiento.

Teorema 2.1.2. ([53]) *En la situación del teorema anterior, si $T < \infty$ la curva colapsa a un punto redondo en la norma C^∞ .*

Después de demostrar el teorema 2.1.1, lo utilizaremos en la sección 2.6 para obtener interesantes aplicaciones en el caso particular en el que la variedad ambiente es el plano euclídeo \mathbb{R}^2 .

2.2. Teoría de Angenent y Oaks

Recopilaremos todos aquellos resultados ya conocidos para el PAC ψ (2.2) como consecuencia del desarrollo de teorías más generales y así poder ver en qué punto se encontraba la comprensión de dicho problema previamente a nuestro trabajo. Es por ello por lo que en toda esta sección presentaremos parte del trabajo realizado por Angenent en [6, 8] y complementado por Oaks en [46].

En primer lugar introduciremos una construcción y notación referente a los fibrados de la variedad ambiente, todo ello necesario para presentar la parte deseada del trabajo de Angenent y Oaks. Sea una variedad riemanniana diferenciable (\bar{M}, \bar{g}) orientable y de dimensión 2 y sea $\pi : T\bar{M} \rightarrow \bar{M}$ la proyección natural del fibrado tangente. El fibrado tangente de $T\bar{M}$ puede descomponerse como suma de Whitney del fibrado vertical $\mathcal{V}(T\bar{M})$ y el fibrado horizontal $\mathcal{H}(T\bar{M})$:

$$T(T\bar{M}) = \mathcal{V}(T\bar{M}) \oplus \mathcal{H}(T\bar{M}). \quad (2.4)$$

El fibrado vertical sobre $T\bar{M}$ se define como $\mathcal{V}(T\bar{M}) := \text{Ker } \pi_*$ y el fibrado horizontal sobre $T\bar{M}$ lo definimos en $u \in T\bar{M}$ como el espacio tangente a las curvas $\xi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T\bar{M}$ tales que $\xi(0) = u$ y $\bar{\nabla}_{c'(s)}\xi(s) = 0$, donde $c(s) := \pi \circ \xi(s)$, es decir:

$$(\mathcal{H}(T\bar{M}))_u := \{ \xi'(0) \in T_u(T\bar{M}) \mid \xi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T\bar{M}, \xi(0) = u \\ \text{y } \bar{\nabla}_{c'(s)}\xi(s) = 0, c = \pi \circ \xi \}.$$

Al fibrado tangente unitario sobre \bar{M} lo denotaremos por $S^1\bar{M}$:

$$S^1\bar{M} := \{ v_x \in T\bar{M} \mid \bar{g}_x(v, v) = 1 \}. \quad (2.5)$$

La misma separación realizada para $T(T\bar{M})$ puede ser realizada para $T(S^1\bar{M})$:

$$T(S^1\bar{M}) = \mathcal{V}(S^1\bar{M}) \oplus \mathcal{H}(S^1\bar{M}). \quad (2.6)$$

En $S^1\bar{M}$ tenemos definida de forma natural una métrica riemanniana y la separación (2.6) permite descomponer su conexión de Levi-Civita $\nabla^{S^1\bar{M}}$ en dos componentes, la correspondiente a la parte vertical ∇^v y la de la parte horizontal ∇^h .

Ahora ya estamos en condiciones de introducir el problema de estudio de la sección. Sea una variedad riemanniana diferenciable $(\overline{M}, \overline{g})$ orientable y de dimensión 2 y

$$\begin{aligned} V : S^1 \overline{M} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{u}, \ell) &\longmapsto V(\mathbf{u}, \ell) \end{aligned} \quad (2.7)$$

una aplicación que cumple una serie de propiedades que enunciaremos posteriormente. Nos centraremos en el siguiente problema de valor inicial:

Dada una inmersión diferenciable $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$, encuéntrese una familia de inmersiones $\{\gamma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T]}$ diferenciables tales que $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$ sea diferenciable y verifique que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= V(\mathbf{t}, k) J \mathbf{t}, \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0(\cdot). \end{cases} \quad (2.8)$$

Una primera propiedad de interés del problema de valor inicial (2.8) es:

Teorema 2.2.1. (Invarianza geométrica bajo perturbaciones tangenciales) *Sea una familia de inmersiones $\{\tilde{\gamma}_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T]}$ tal que $\tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$ sea diferenciable y verifique el sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t}(p, t) &= V(\tilde{\mathbf{t}}(p, t), \tilde{k}(p, t)) J \tilde{\mathbf{t}}(p, t) + \tilde{\gamma}_{t \star p}(X(p, t)), \\ \tilde{\gamma}(p, 0) &= \tilde{\gamma}_0(p), \end{cases} \quad (2.9)$$

donde $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1 \times [0, T])$, entonces existe una única familia de reparametrizaciones globales $\Upsilon : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^1$ de las respectivas $\tilde{\gamma}_t$ tal que $\gamma(p, t) := \tilde{\gamma}(\Upsilon(p, t), t)$ verifica:

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(p, t) &= V(\mathbf{t}(p, t), k(p, t)) J \mathbf{t}(p, t), \\ \gamma(p, 0) &= \tilde{\gamma}_0(p). \end{cases} \quad (2.10)$$

Recíprocamente, si la familia de inmersiones $\tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$ puede ser globalmente reparametrizada para que verifique el sistema (2.10), entonces $\tilde{\gamma}$ debe satisfacer (2.9) para un cierto campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1 \times [0, T])$.

La demostración de este teorema es análoga a la demostración que se dio para el teorema 1.5.4 en la sección 1.5.2.

El teorema 2.2.1 nos lleva a plantearnos el siguiente problema más general que (2.8):

Dada una inmersión diferenciable $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$, encuéntrese una familia de inmersiones $\{\gamma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T]}$ diferenciables tales que $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$ sea diferenciable y verifique que:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, J\mathbf{t} \right\rangle = V(\mathbf{t}, k), \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0(\cdot). \end{cases} \quad (2.11)$$

Una vez garantiza la existencia de solución para el problema (2.8), tendremos garantizada la existencia de solución para este problema (la solución de (2.8) es solución de (2.11)). Sin embargo, perdemos la unicidad de solución (el problema (2.8) tiene una única solución). Pero dadas dos soluciones $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{S}^1 \times [0, T_i] \rightarrow \overline{M}$ de (2.11) con condición inicial $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$ por el teorema 2.2.1 existirá una única familia de reparametrizaciones globales $\Upsilon : \mathbb{S}^1 \times [0, \min\{T_1, T_2\}) \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $\gamma_2(p, t) = \gamma_1(\Upsilon(p, t), t)$. A su vez de este hecho se deduce que el tiempo máximo de existencia de solución es el mismo para todas las posibles soluciones de (2.11).

A pesar de la falta de unicidad de la familia de inmersiones solución al problema (2.11) sí que hay unicidad en el sentido que expondremos a continuación.

Sobre el conjunto:

$$\{\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow (\overline{M}, \overline{g}) \mid \gamma \text{ inmersión diferenciable, cerrada y orientada}\}, \quad (2.12)$$

al que denotaremos a partir de ahora por $I(\overline{M})$, podemos definir la siguiente relación de equivalencia:

$$\text{Dadas } \gamma_1, \gamma_2 \in I(\overline{M}) \text{ diremos que } \gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ si existe una isometría } \phi : (\mathbb{S}^1, \gamma_1^* \overline{g}) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \gamma_2^* \overline{g}) \text{ preservando la orientación y tal que } \gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi.$$

Entonces el espacio cociente $\Omega(\overline{M}) \equiv I(\overline{M}) / \sim$ está formado por todas las curvas de \overline{M} , diferenciables, cerradas y orientadas. Y todos aquellos elementos de $I(\overline{M})$ que pertenecen a una misma clase de equivalencia (curva) son las diferentes inmersiones que parametrizan a la curva orientada.

En este contexto, el problema (2.11) tiene una única solución si planteamos el problema en $\Omega(\overline{M})$. Sean dos familias de inmersiones $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$ solución de (2.11) con condición inicial $\gamma_0 \in I(\overline{M})$, entonces por el teorema 2.2.1 se deduce que $\gamma_1(\cdot, t) \sim \gamma_2(\cdot, t)$ para todo $t \in [0, T]$. Es decir, existe una única familia de curvas verificando dicho problema cuya condición inicial es la curva $[\gamma_0] \in \Omega(\overline{M})$.

Con este planteamiento, podremos pensar en el PAC ψ para inmersiones, el problema (2.2), o en el PAC ψ para curvas en el sentido de (2.11).

Ahora procedemos a enunciar las propiedades que debe verificar la aplicación $V = V(\mathbf{u}, \ell)$ para poder aplicar la teoría desarrollada por Angenent en [6, 8]. Estas son:

V1) V es una función continua localmente Lipschitz.

V2) $\lambda \leq \frac{\partial V}{\partial \ell} \leq \lambda^{-1}$ para casi todo $(\mathbf{u}, \ell) \in S^1\overline{M} \times \mathbb{R}$, con $\lambda > 0$ una constante.

V3) $|V(\mathbf{u}, 0)| \leq \mu$ para casi todo $\mathbf{u} \in S^1\overline{M}$, con $\mu > 0$ una constante.

Además de suponer que verifica una de las siguientes propiedades:

V4) $|\nabla^{S^1\overline{M}}V| \leq \hat{\mu}$ para casi todo $(\mathbf{u}, \ell) \in S^1\overline{M} \times [-1, 1]$.

V5) $|\nabla_{\mathbf{u} \oplus \ell \mathbf{n}}^{S^1\overline{M}}V| \leq \nu(1 + |\ell|^{1+\kappa})$ para casi todo $(\mathbf{u}, \ell) \in S^1\overline{M} \times \mathbb{R}$.

V5*) $|\nabla^h V| + |\ell| |\nabla^v V| \leq \nu(1 + |\ell|^2)$ para casi todo $(\mathbf{u}, \ell) \in S^1\overline{M} \times \mathbb{R}$.

Donde $\hat{\mu}$, ν son constantes positivas y κ es una constante perteneciente al intervalo $[1, \infty)$. Por $\nabla^{S^1\overline{M}}V$ denotamos el gradiente de V con respecto a su primer argumento $\mathbf{u} \in S^1\overline{M}$, y $\nabla^v V$, $\nabla^h V$ denotan la componente vertical y horizontal de $\nabla^{S^1\overline{M}}V$, respectivamente. Los resultados más fuertes de [6, 8] se obtienen al imponer, a su vez, la siguiente condición:

S) $V(\mathbf{u}, \ell) = -V(-\mathbf{u}, -\ell)$ para todo $(\mathbf{u}, \ell) \in S^1\overline{M} \times \mathbb{R}$.

Es decir, cuando la evolución de la curva orientada no depende de su orientación.

Oaks en [46] sustituyó la condición V1) por otra más fuerte:

V1*) V es $C^{2,1}$.

Y obtuvo sus resultados para una V que satisface V1*), V2), V3), V5*), y S).

El PAC ψ (2.2) en \overline{M} se corresponde con la situación particular en la que:

$$V(\mathbf{u}_x, \ell) := \ell - \langle \overline{\nabla}\psi(x), J\mathbf{u}_x \rangle. \quad (2.13)$$

Para este V la condición V2) se cumple de forma automática y el resto de condiciones se pueden reescribir en los siguientes términos:

V1*) $\langle \overline{\nabla}\psi(x), J\mathbf{u}_x \rangle$ es una función $C^{2,1}$.

V3) $|\overline{\nabla}\psi| \leq \mu$ para casi todo $x \in \overline{M}$.

V4) $|\overline{\nabla}^2\psi(J\mathbf{u}, \cdot)|^2 + |\langle \overline{\nabla}\psi, J\cdot \rangle|^2 \leq \hat{\mu}^2$ para cada $\mathbf{u} \in S^1\overline{M}$.

V5*) $|\overline{\nabla}^2\psi(J\mathbf{u}, \cdot)| + |\ell| |\langle \overline{\nabla}\psi, J\cdot \rangle| \leq \nu(1 + |\ell|^2)$ para casi todo $(\mathbf{u}, \ell) \in S^1\overline{M} \times \mathbb{R}$.

Con $\mu, \hat{\mu}, \nu$ constantes positivas. Además la función (2.13) también verifica la propiedad de simetría:

S) $V(-\mathbf{u}, -\ell) = -\ell + \langle \overline{\nabla}\psi, J\mathbf{u} \rangle = -V(\mathbf{u}, \ell)$, para todo $(\mathbf{u}, \ell) \in S^1\overline{M} \times \mathbb{R}$.

Tengamos en cuenta que todas estas propiedades se verifican si ψ , $\bar{\nabla}\psi$ y $\bar{\nabla}^2\psi$ son diferenciables y acotadas en \bar{M} . Es por ello por lo que de aquí en adelante supondremos:

Hipótesis: ψ , $\bar{\nabla}\psi$ y $\bar{\nabla}^2\psi$ están acotadas.

A continuación vamos a comprobar que efectivamente las propiedades V4) y V5*) dadas para el PAC ψ (2.2) se corresponden con las dadas para el trabajo de Angenent [6, 8]:

Sean $X \in \mathfrak{X}(S^1\bar{M})$, $(\mathbf{u}_0, \ell_0) \in S^1\bar{M} \times \mathbb{R}$ y $p_0 \equiv \pi(\mathbf{u}_0) \in \bar{M}$, sea una curva diferenciable $\xi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^1\bar{M}$ tal que $\xi(0) = \mathbf{u}_0$ y $\xi'(0) = X$ y sea $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \bar{M}$ la proyección de ξ , $c = \pi \circ \xi$. Notemos que $c(0) = \pi(\xi(0)) = p_0$ y $c'(0) = \pi_{*\xi(0)}(\xi'(0)) = \pi_{*\mathbf{u}_0}(X)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla^{S^1\bar{M}}V, X \right\rangle_{(\mathbf{u}_0, \ell_0)} &= dV_{(\mathbf{u}_0, \ell_0)}(X) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} V(\xi(s), \ell_0) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left(\ell_0 - \langle \bar{\nabla}\psi_{c(s)}, J\xi(s) \rangle \right) \\ &= - \langle \bar{\nabla}_{c'(0)} \bar{\nabla}\psi, J\xi(0) \rangle_{c(0)} - \left\langle \bar{\nabla}\psi_{c(0)}, \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} J\xi(s) \right\rangle_{c(0)} \\ &= -\bar{\nabla}^2\psi_{p_0}(c'(0), J\mathbf{u}_0) - \left\langle \bar{\nabla}\psi_{p_0}, \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} J\xi(s) \right\rangle_{p_0}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Con el último término hay que tener cuidado al calcular la variación de $J\xi(s)$, distinguiremos para ello entre campos verticales y campos horizontales. Si $X^v \in \mathcal{V}(S^1\bar{M})$, entonces $\pi_*X^v = 0$ y por tanto $c'(0) = 0$. Más aún $\xi(s) \subset \pi^{-1}(p_0) \subset S^1\bar{M}$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, entonces:

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla^{S^1\bar{M}}V, X^v \right\rangle_{(\mathbf{u}_0, \ell_0)} &= dV_{(\mathbf{u}_0, \ell_0)}(X) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} V(\xi(s), \ell_0) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left(\ell_0 - \langle \bar{\nabla}\psi_{p_0}, J\xi(s) \rangle \right) = - \left\langle \bar{\nabla}\psi_{p_0}, \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} J\xi(s) \right\rangle_{p_0} \\ &= - \langle \bar{\nabla}\psi_{p_0}, J\xi'(0) \rangle_{p_0} = - \langle \bar{\nabla}\psi_{p_0}, JX^v \rangle_{p_0}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si $X^h \in \mathcal{H}(S^1\bar{M})$ entonces $\bar{\nabla}_{c'(s)}\xi(s) = 0$ y $\left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} J\xi(s) = J \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \xi(s) = 0$ y por tanto:

$$\left\langle \nabla^{S^1\bar{M}}V, X^h \right\rangle_{(\mathbf{u}_0, \ell_0)} = -\bar{\nabla}^2\psi_{p_0}(c'(0), J\mathbf{u}_0), \quad (2.16)$$

haciendo un pequeño abuso de notación puede escribirse como:

$$\left\langle \nabla^{S^1\bar{M}}V, X^h \right\rangle_{(\mathbf{u}_0, \ell_0)} = -\bar{\nabla}^2\psi_{p_0}(X^h, J\mathbf{u}_0). \quad (2.17)$$

Finalmente, ya que $T(S^1\overline{M}) = \mathcal{V}(S^1\overline{M}) \oplus \mathcal{H}(S^1\overline{M})$, dado $X \in \mathfrak{X}(S^1\overline{M})$ podemos descomponerlo como $X = X^v + X^h$ y:

$$\left\langle \nabla^{S^1\overline{M}} V, X \right\rangle_{(u_0, \ell_0)} = -\overline{\nabla}^2 \psi_{p_0}(X^h, Ju_0) - \langle \overline{\nabla} \psi_{p_0}, JX^v \rangle_{p_0}. \quad (2.18)$$

De (2.18) no es difícil deducir que las propiedades V4) y V5*) dadas para el PAC ψ (2.2) se corresponden con las dadas para el trabajo de Angenent [6, 8] particularizadas a este caso concreto. Lo que finaliza la comprobación.

En este punto pasamos a enunciar aquellos resultados desarrollados por Angenent [6, 8] que son útiles para la comprensión de nuestro problema (2.2). Empezando por el teorema de existencia y unicidad de solución para tiempos cortos y continuando con un teorema de prolongación de solución mientras la curvatura geodésica de las inmersiones esté acotada.

Teorema 2.2.2. (Teorema de [6]) *Sea una inmersión diferenciable $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$, existe una única solución máxima $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ con condición inicial γ_0 al problema de valor inicial (2.8).*

Teorema 2.2.3. (Teorema 9.1 de [6]) *Sea una solución máxima de (2.11) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ con $T < \infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow T} \sup_{\mathbb{S}^1} |k| = \infty$. Más aún, existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\sup_{\mathbb{S}^1} |k| \geq \frac{c}{\sqrt{2(T-t)}}, \quad (2.19)$$

para todo $t \in [0, T)$.

A continuación enunciamos el principio de separación de soluciones.

Teorema 2.2.4. (Teorema 1.3 de [8]) *Sean dos soluciones de (2.11) $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \times [0, T_i) \rightarrow \overline{M}$ tales que $[\gamma_0(\cdot, 0)] \neq [\gamma_1(\cdot, 0)] \in \Omega(\overline{M})$. Entonces, en cada momento de tiempo $t \in (0, \min\{T_0, T_1\})$, el número de intersecciones de $\gamma_0(\cdot, t)$ y $\gamma_1(\cdot, t)$,*

$$\#\{(s_0, s_1) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \mid \gamma_0(s_0, t) = \gamma_1(s_1, t)\} \quad (2.20)$$

es finito. Este número no crece con el tiempo y decrece exactamente en aquellos instantes t tal que $\gamma_0(\cdot, t)$ y $\gamma_1(\cdot, t)$ tienen un punto de tangencia. El conjunto de estos instantes t es un subconjunto discreto de $(0, \min\{T_0, T_1\})$.

En la misma línea de demostración es posible obtener el resultado análogo para los autocortes de la curva, por tanto, procederemos a enunciar el principio de embebimiento.

Teorema 2.2.5. (Principio de embebimiento) *Sea una solución de (2.11) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$, en cada instante t la curva $\gamma(\cdot, t)$ tiene un número finito de autointersecciones y este número no crece con el tiempo, decrece exactamente cuando $\gamma(\cdot, t)$ tiene una autotangencia.*

Una parte importante del trabajo de Angenent se centró en estudiar lo que ocurre en el límite cuando $t \rightarrow T_{\text{máx}}$.

Teorema 2.2.6. (Teorema 6.2 de [6]) *Sea la solución del problema de valor inicial (2.8) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T_{\text{máx}}) \rightarrow \overline{M}$ con condición inicial la inmersión γ_0 , $\gamma(\cdot, t)$ converge uniformemente a una aplicación continua $\gamma^* \in C^0(\mathbb{S}^1; \overline{M})$ cuando $t \rightarrow T_{\text{máx}}$.*

En la exposición del siguiente resultado, estudio de la curva límite cuando el tiempo máximo de existencia de solución es finito, adoptaremos la terminología adoptada por Oaks en [46].

Definición 2.2.1. (Oaks) *Diremos que $[a, b] \subseteq \mathbb{S}^1$ es un intervalo singular si*

- (i) $\lim_{t \rightarrow T_{\text{máx}}} \text{máx}\{|k(u, t)| : u \in [a, b]\} = \infty$,
- (ii) $\gamma([a, b], T_{\text{máx}}) = \{Q\}$, y
- (iii) *no existe un intervalo $[a', b']$ que contenga propiamente a $[a, b]$ y satisfaga (ii).*

Teorema 2.2.7. (Teorema 5.1 de [8] revisado por Oaks [46]) *Supongamos que V es $C^{m,1}$ con $m \geq 2$, entonces existe un número finito de intervalos singulares $[a_j, b_j]$ en \mathbb{S}^1 tal que $\gamma(\mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_j [a_j, b_j], T_{\text{máx}})$ está formado por arcos C^{m+2} . Fuera de los intervalos $[a_j, b_j]$ la curva $\gamma(\cdot, t)$ converge en la topología C^{m+2} a $\gamma(\cdot, T_{\text{máx}})$.*

El número de intervalos singulares no excede a $K(T_{\text{máx}})/\pi$, donde $K(T_{\text{máx}})$ es la cota superior para la curvatura absoluta total de $\gamma(\cdot, T_{\text{máx}})$.

Oaks avanzó en esta dirección llegando a obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.2.8. ([6, 8, 46]) *Sea una curva C^2 simple $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$, entonces la solución $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ a (2.8) tal que $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0(\cdot)$ contrae a un punto en \overline{M} en tiempo finito o existe para tiempo infinito.*

Este resultado fue presentado como un corolario (corolario 6.2) en [46].

La parte original de este capítulo se centra en completar este resultado en el caso del PAC ψ (2.2) y obtener aplicaciones para el plano con densidades radiales.

2.3. Fórmulas de variación para el PAC ψ

Aquí expondremos el conjunto de fórmulas de evolución, asociadas a (2.2), necesarias para alcanzar los objetivos del capítulo. Estas fueron calculadas en términos generales en la sección 1.4. La traducción de las fórmulas es: H y H_ψ se convierten en k y k_ψ respectivamente, el elemento de volumen (respectivamente de ψ -volumen) dv_g (respectivamente dv_ψ^n) de M se convierte en el elemento de longitud ds (respectivamente de ψ -longitud ds_ψ) de la curva y las curvaturas de Ricci ($\overline{Ric}(N, N)$) y ψ -Ricci ($\overline{Ric}_\psi(N, N)$) se convierten en las curvaturas de Gauss \overline{K} y ψ -Gauss $\overline{K} - \overline{\nabla}^2\psi(N, N)$ de la superficie.

Proposición 2.3.1. *Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable, de dimensión 2 y una solución del PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$, entonces*

$$\bullet \quad \overline{\nabla}_{\partial_t} N = -\nabla k_\psi, \quad (2.21)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial t}(g_t) = -2k_\psi \alpha_t, \quad (2.22)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial t}(ds_t) = -kk_\psi ds_t, \quad (2.23)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial t}(ds_{\psi t}) = -k_\psi^2 ds_{\psi t}, \quad (2.24)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial k}{\partial t} = \Delta k_\psi + k_\psi(k^2 + \overline{K}), \quad (2.25)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial k_\psi}{\partial t} = \Delta_\psi k_\psi + k_\psi(k^2 + \overline{K} - \overline{\nabla}^2\psi(N, N)). \quad (2.26)$$

Es preciso remarcar el hecho de que el operador de longitud en densidad

$$\begin{aligned} L_\psi : I(\overline{M}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto L_\psi(\gamma) := \int_{\mathbb{S}^1} e^{\psi \circ \gamma} ds \end{aligned} \quad (2.27)$$

es monótono no creciente a lo largo de la familia de inmersiones $\{\gamma_t\}_{t \in [0, T)}$ solución del PAC ψ (2.2) con condición inicial γ_0 , ya que, como se deduce de (2.24),

$$\frac{d}{dt} L_\psi(\gamma_t) = - \int_{\mathbb{S}^1} k_\psi^2 e^{\psi \circ \gamma} ds. \quad (2.28)$$

Por tanto:

$$L_\psi(t) \leq L_\psi(0), \quad (2.29)$$

para todo $t \in [0, T)$.

2.4. Existencia de solución para tiempo máximo finito

Abordemos el caso en que la solución del flujo solo exista durante un cierto tiempo finito. El estudio de este caso queda englobado en la teoría general desarrollada por Xi-Ping Zhu [53] para flujos anisotrópicos con $T_{\text{máx}} < \infty$. Él considera el siguiente problema de valor inicial:

Dada una inmersión diferenciable $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$, encuéntrese una familia de inmersiones $\{\gamma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}\}_{t \in [0, T]}$ diferenciables tales que $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ sea diferenciable y verifique que:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, J\mathbf{t} \right\rangle &= \Phi(\mathbf{t})k + \Psi(\mathbf{t}), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0(\cdot). \end{cases} \quad (2.30)$$

Con Ψ y Φ tal que satisfacen las siguientes condiciones:

(H_1) $\Phi, \Psi : S^1\overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables acotadas.

(H_2) $\lambda \leq \Phi(\mathbf{t}) \leq \lambda^{-1}$ para todo $\mathbf{t} \in S^1\overline{M}$, con λ constante positiva.

(H_3) $\Phi(-\mathbf{t}) = \Phi(\mathbf{t})$, $\Psi(-\mathbf{t}) = -\Psi(\mathbf{t})$, para todo $\mathbf{t} \in S^1\overline{M}$.

Este problema queda englobado dentro de los trabajos de Angenent [6, 8] y Oaks [46], por lo que el trabajo de Zhu se reduce al estudio de la forma asintótica de las curvas cuando se produce el colapso a un punto; por otro lado, la técnica utilizada se basa en el trabajo desarrollado por Hamilton [31]. Al particularizar el trabajo de Zhu al caso en que Φ es una función constante sobre las fibras de $S^1\overline{M}$, se obtiene el siguiente corolario (extensión del corolario 4.2 [53]):

Corolario 2.4.1. ([6, 8, 46, 53]) *Sea una solución máxima del problema de valor inicial (2.30) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T_{\text{máx}}) \rightarrow \overline{M}$ con Φ constante sobre las fibras de $S^1\overline{M}$, si $T_{\text{máx}} < \infty$, entonces γ_t converge a un punto redondo en el tipo de convergencia C^∞ .*

Remarquemos que cuando Φ es constante igual a 1 y $\Psi(\mathbf{t}) = -\langle \overline{\nabla}\psi, J\mathbf{t} \rangle$, (2.30) es equivalente al PAC ψ (2.2) el cual verifica (H_1), (H_2) y (H_3) por tanto:

Corolario 2.4.2. *Sea una solución máxima del PAC ψ (2.11)*

$\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T_{\text{máx}}) \rightarrow \overline{M}$, si $T_{\text{máx}} < \infty$, entonces γ_t converge a un punto redondo en el tipo de convergencia C^∞ .

A partir de ahora cuando digamos que una inmersión $\gamma \in I(\overline{M})$ o una curva $[\gamma] \in \Omega(\overline{M})$ colapsa a un punto redondo será en este sentido.

2.5. Existencia de solución para tiempo máximo infinito

En esta nueva sección trabajaremos con curvas que evolucionan por el PAC ψ (2.2) en una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable, de dimensión 2 y que a lo largo del subconjunto donde se da la evolución, verifica:

$$\text{i) } |\overline{\nabla}^j \overline{K}| \leq C_j, \text{ para ciertas constantes positivas } C_j, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

$$\text{ii) } \quad 0 < E \leq e^\psi \leq D, \quad |\overline{\nabla}^j \psi| \leq P_j, \quad (2.32)$$

para ciertas constantes positivas $E, D, P_j, j = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{iii) El perfil isoperimétrico } \mathcal{I} \text{ es una función continua bien definida que verifica que si } \lim_{a \rightarrow a_0} \mathcal{I}(a) = 0 \text{ entonces } a_0 = 0. \quad (2.33)$$

Notemos que la condición iii) la verifica cualquier superficie compacta \overline{M} y muchas superficies no compactas para las que existe un recubrimiento compacto. En particular, \mathbb{R}^2 verifica (2.33).

Teorema 2.5.1. *Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable, de dimensión 2 y que satisface (2.33) y un embebimiento $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$. Sea la solución del PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ con condición inicial γ_0 , supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

- *La solución existe para todo $t \in [0, \infty[$.*
- *Existe un dominio $U \subset \overline{M}$ compacto donde las condiciones (2.32) se verifican y tal que $\text{Sop } \gamma_t \subseteq U$ para todo $t \in [0, \infty[$.*

Entonces existe una reparametrización $\tilde{\gamma}(\cdot, t)$ de $\gamma(\cdot, t)$ tal que existe una sucesión $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}, t_k \rightarrow \infty$, que converge en C^m a una inmersión $\tilde{\gamma}^\infty(\cdot) \in C^m$ que parametriza una curva C^m , cerrada y ψ -mínima de \overline{M} para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Naturalmente U verificará (2.31) por ser compacto y \overline{M} una variedad riemanniana sin singularidades. Notemos que la existencia de este U se tiene garantizada de forma natural en una gran cantidad de casos gracias a la existencia de barreras (curvas ψ -mínimas). Veremos diferentes situaciones en la sección 2.6.

Para dar la demostración del teorema 2.5.1, necesitamos unos resultados previos.

Lema 2.5.1. *Bajo las hipótesis del teorema 2.5.1 se cumple la siguiente propiedad:*

- *Existe una constante $c = c(\gamma_0) > 0$ tal que $L(t) \geq c$ para todo $t \in [0, \infty[$.* (2.34)

Demostración. Como U es compacto si la restricción de la inmersión γ_0 a U , $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow U$, no es homotópica a un punto en U , entonces (2.34) es inmediato.

Supongamos ahora que γ_0 es homotópica a un punto como inmersión en U , $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow U$. Debemos probar que existe una constante c' tal que $\liminf_{t \rightarrow \infty} L(t) \geq c'$. Esto es una consecuencia del hecho que probaremos a continuación:

“Sea $[0, T_{\text{máx}}[$ el intervalo máximo de existencia del flujo de (2.2) $\gamma(\cdot, t)$, si $\liminf_{t \rightarrow T_{\text{máx}}} L(t) = 0$ entonces $T_{\text{máx}} < \infty$.”

Para probarlo, en primer lugar recordemos que la fórmula de evolución (2.28) implica que L_ψ es monótona no creciente por el flujo. Esta propiedad, junto con la hipótesis $0 < E \leq e^\psi \leq D$, da la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow T_{\text{máx}}} L(t) = 0 &\Rightarrow \liminf_{t \rightarrow T_{\text{máx}}} L_\psi(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow T_{\text{máx}}} L_\psi(t) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow T_{\text{máx}}} L(t) = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Por la hipótesis (2.33) se sigue que $\lim_{t \rightarrow T_{\text{máx}}} L(t) = 0$ implica $\lim_{t \rightarrow T_{\text{máx}}} A(t) = 0$. Entonces, existe $t_0 \in [0, T_{\text{máx}}[$ tal que,

$$C_0 A(\Omega_t) + (P_1 + 1)L(t) \leq \pi \quad \text{para todo } t \geq t_0. \quad (2.36)$$

De (2.28), (2.32), la fórmula de Gauss-Bonnet y la desigualdad aritmética $x^2 + 1 \geq x$, se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_\psi(t) &= - \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi \leq -E \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_t \leq -E \int_{\gamma(\cdot, t)} (k_\psi - 1) ds_t \\ &= E \left(L(t) - \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi ds_t \right) \\ &= E \left(L(t) - \int_{\gamma(\cdot, t)} k ds_t + \int_{\gamma(\cdot, t)} \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle ds_t \right) \\ &\leq E \left((P_1 + 1)L(t) - \int_{\gamma(\cdot, t)} k ds_t \right) \\ &= E \left((P_1 + 1)L(t) - 2\pi + \int_{\Omega_t} \bar{K} dv_{\bar{g}} \right) \\ &\leq E \left((P_1 + 1)L(t) - 2\pi + C_0 A(\Omega_t) \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Remarquemos que para aplicar la correspondiente fórmula de Gauss-Bonnet hemos utilizado que las inmersiones $\gamma(\cdot, t)$ son homotópicas a un punto en \bar{M} .

De (2.36) y (2.37) concluimos que $\frac{d}{dt} L_\psi \leq -\pi E$ para todo $t \geq t_0$, por tanto el tiempo máximo de existencia $T_{\text{máx}}$ es finito. Lo que finaliza la demostración de (2.34). \square

Lema 2.5.2. *Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable, de dimensión 2, que verifica (2.31) y (2.32) y sea un embebimiento $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{M}$ que evoluciona bajo el PAC ψ (2.2). Si γ_0 verifica $k_\psi \geq C \geq P_1 + \sqrt{C_0 + P_2} + 1$, entonces $k_\psi(\cdot, t) \geq C$ para todo $t \in [0, T_{\max})$.*

Demostración. Por (2.26) la fórmula de variación de k_ψ es:

$$\frac{d}{dt}k_\psi = \Delta k_\psi + \langle \overline{\nabla}\psi, \nabla k_\psi \rangle + k_\psi(k^2 + \overline{K} - \overline{\nabla}^2\psi(N, N)).$$

Pero, de las hipótesis (2.31) y (2.32) si $k_\psi \geq P_1 + \sqrt{C_0 + P_2} + 1$ entonces,

$$\begin{aligned} k^2 + \overline{K} - \overline{\nabla}^2\psi(N, N) &\geq (k_\psi + \langle \overline{\nabla}\psi, N \rangle)^2 - C_0 - P_2 \\ &\geq (k_\psi - P_1)^2 - C_0 - P_2 > 0, \end{aligned}$$

y el lema se deduce desde el principio del máximo parabólico. \square

Lema 2.5.3. *Si s_t denota el parámetro arco de la curva parametrizada por γ_t solución al PAC ψ (2.2), se cumple que:*

$$[\partial_t, \partial_{s_t}] = k_\psi k \partial_{s_t}. \quad (2.38)$$

Demostración. Parametrizando la curva del enunciado por el ángulo α de \mathbb{S}^1 tenemos $ds_t = ds_t(\partial_\alpha)d\alpha$, entonces $\partial_{s_t} = \frac{1}{ds_t(\partial_\alpha)}\partial_\alpha$ y, usando la fórmula (2.23),

$$[\partial_t, \partial_{s_t}] = \partial_t \left(\frac{1}{ds_t(\partial_\alpha)} \right) \partial_\alpha = \frac{k_\psi k}{ds_t(\partial_\alpha)^2} ds_t(\partial_\alpha) \partial_\alpha = \frac{k_\psi k}{ds_t(\partial_\alpha)} \partial_\alpha = k_\psi k \partial_{s_t}.$$

\square

Para enunciar y llevar a cabo la demostración del siguiente resultado, necesitamos introducir notación previa. Las letras mayúsculas J denotarán multi-índices con una cantidad de entradas finita y con dichas entradas pertenecientes al conjunto de los números naturales, $J \in \mathbb{N}^q$. Consideraremos que todas las entradas j_k de un multi-índice $J = (j_1, \dots, j_q)$ están ordenadas del siguiente modo $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_q \geq 0$. Por ello, introducimos el siguiente conjunto:

$$\mathbb{J}_q^n \equiv \{(j_1, \dots, j_q) \in \mathbb{N}^q \mid 0 \leq j_q \leq j_{q-1} \leq \dots \leq j_1 \leq n\}$$

Dado $J \in \mathbb{J}_q^n$, denotaremos por $o(J) := j_1$, $|J| := j_1 + \dots + j_q$, $\dim(J) := q$ y por $n(J) :=$ número de elementos de J no nulos ($n(J) \leq \dim(J)$). Dadas $J, K \in \mathbb{J}_q^n$ y $f \in C^\infty(\overline{M})$, por $\partial_s^J k_\psi$ y $\overline{\nabla}^K f$ denotaremos a:

$$\begin{aligned} \partial_s^J k_\psi &\equiv \partial_s^{j_1} k_\psi \cdots \partial_s^{j_{n(J)}} k_\psi, \\ \overline{\nabla}^K f &\equiv \overline{\nabla}^{k_1} f \otimes \dots \otimes \overline{\nabla}^{k_{n(K)}} f, \end{aligned}$$

si $J, K \equiv (0, \dots, 0)$, entonces:

$$\begin{aligned}\partial_s^J k_\psi &\equiv 1, \\ \overline{\nabla}^K f &\equiv 1.\end{aligned}$$

El siguiente resultado tiene importancia en sí mismo al margen del objetivo de la sección.

Proposición 2.5.1. *Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable, de dimensión 2 y con $\psi \in C^{n+2}(\overline{M})$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$ y sea una solución del PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \overline{M}$. Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial t} \partial_s^n k_\psi = \Delta_\psi(\partial_s^n k_\psi) + (a_{n0} + a_{n1} k_\psi + a_{n2} k_\psi^2) \partial_s^n k_\psi + \sum a_{iJ} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi, \quad (2.39)$$

donde $i + |J| \geq 1$, $i \leq n + 1$, $o(J) \leq n - 1$, $|J| \leq n$, y los coeficientes “a..” son polinomios en las variables $\overline{\nabla}^m \overline{K}$, $\overline{\nabla}^m \psi$, $m = 1, \dots, n + 2$ que actúan sobre ∂_s y/o N , y algunos de ellos pueden ser cero.

Además, el conjunto de índices del sumatorio de los términos que no tienen $\overline{\nabla}^m \overline{K}$ verifica la relación $i + |J| + n(J) + |K| = n + 3$ y los polinomios “ a_{nj} ” satisfacen que todos sus monomios que contienen a $\overline{\nabla}^K \psi$ verifican que $|K| = 2 - j$.

Demostración. Si utilizamos la regla de conmutación (2.38) obtenemos:

$$\partial_t \partial_s^n (k_\psi) = \partial_s^n \partial_t k_\psi + \sum_{i=0}^{n-1} \partial_s^i (k_\psi k \partial_s^{n-i} k_\psi),$$

(ver la proposición A.1 para su demostración). Si además aplicamos la fórmula de variación (2.26) para k_ψ :

$$\partial_t (\partial_s^n k_\psi) = \partial_s^n \left(\Delta_\psi k_\psi + k_\psi (k^2 + \overline{K} - \overline{\nabla}^2 \psi(N, N)) \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \partial_s^i (k_\psi k \partial_s^{n-i} k_\psi). \quad (2.40)$$

Ahora calculemos cada uno de los términos de (2.40):

$$\begin{aligned}\partial_s^n (\Delta_\psi k_\psi) &= \partial_s^{n+2} k_\psi + \partial_s^n \langle \nabla \psi, \nabla k_\psi \rangle \\ &= \Delta(\partial_s^n k_\psi) + \partial_s \psi \partial_s^{n+1} k_\psi + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \partial_s^{1+i} \psi \partial_s^{n+1-i} k_\psi \\ &= \Delta_\psi(\partial_s^n k_\psi) + n \partial_s^2 \psi \partial_s^n k_\psi + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \partial_s^{1+i} \psi \partial_s^{n+1-i} k_\psi, \quad (2.41)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_s^n (k_\psi (k^2 + \overline{Ric}_\psi(N, N))) &= (\partial_s^n k_\psi)(k^2 + \overline{K} - \overline{\nabla}^2 \psi(N, N)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \partial_s^i (k^2 + \overline{K} - \overline{\nabla}^2 \psi(N, N)) \partial_s^{n-i} k_\psi, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \partial_s^i (k_\psi k \partial_s^{n-i} k_\psi) = k_\psi k \partial_s^n k_\psi + \sum_{i=1}^{n-1} \partial_s^i (k_\psi k \partial_s^{n-i} k_\psi). \quad (2.43)$$

Además de la notación basada en multi-índices, que se introdujo antes de enunciar la proposición, vamos a introducir la siguiente notación para agilizar los cálculos. Dada $f \in C^\infty(\overline{M})$, por

$$\sum_{m,r}^{s,t} c_{iJKl} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\overline{\nabla}^K \psi \otimes \overline{\nabla}^l f),$$

denotaremos el sumatorio sobre los índices i, J, K, l , sujetos al siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} i + |J| + n(J) + |K| + l &= m + r, \\ 0 \leq i \leq m + r - s, \quad o(J) &\leq t, \quad o(K) \leq m + r - s, \\ s \leq l \leq s + t, \\ 0 \leq \dim(J) &\leq [(m + r - s)/2], \\ \dim(K) &= m + r - s, \\ \#\{j \mid j = t\} &\leq 1. \end{aligned}$$

Algunas de las constantes C_{iJKl} pudieren ser cero y $C(\overline{\nabla}^K \psi \otimes \overline{\nabla}^l f)$ denota al tensor $\overline{\nabla}^K \psi \otimes \overline{\nabla}^l f$ actuando sobre $|K| + l$ copias de ∂_s y/o N . En el caso en que $f = \psi$, l pasará a formar parte del multi-índice K y como consecuencia natural, algunas de las restricciones de índices anteriores se verán afectadas:

$$\begin{aligned} i + |J| + n(J) + |K| &= m + r, \\ s \leq o(K) &\leq \max\{m + r - s, s + t\}, \\ \dim(K) &= m + r - s + 1. \end{aligned}$$

Por el apéndice A tenemos que existen constantes c_{iJK} (diferentes para cada fórmula), tales que:

$$\partial_s^m \psi = \overline{\nabla}^m \psi(\partial_s, \dots, \partial_s) + \sum_{m,0}^{1,m-2} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\overline{\nabla}^K \psi), \quad (2.44)$$

$$\partial_s^m \left(\bar{\nabla}^2 \psi(N, N) \right) = \bar{\nabla}^{m+2} \psi(\partial_s, \dots, \partial_s, N, N) + \sum_{m,2}^{2,m-1} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi), \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \partial_s^m k &= \partial_s^m (k_\psi + \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle) \\ &= \partial_s^m k_\psi + \bar{\nabla}^{m+1} \psi(\partial_s, \dots, \partial_s, N) + \sum_{m,1}^{1,m-1} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\partial_s^m \bar{K} = \bar{\nabla}^m \bar{K}(\partial_s, \dots, \partial_s) + \sum_{m,0}^{1,m-2} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^\ell \bar{K}). \quad (2.47)$$

Esto, incluyendo los coeficientes binomiales en las constantes y renombrando las constantes c_{iJK} en la última igualdad, da para la derivada de k^2 :

$$\begin{aligned} \partial_s^m k^2 &= \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} \partial_s^\ell k \partial_s^{m-\ell} k \\ &= \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} \left(\partial_s^\ell k_\psi + C(\bar{\nabla}^{\ell+1} \psi) + \sum_{\ell,1}^{1,\ell-1} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi) \right) \\ &\quad \left(\partial_s^{m-\ell} k_\psi + C(\bar{\nabla}^{m-\ell+1} \psi) + \sum_{m-\ell,1}^{1,m-\ell-1} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi) \right) \\ &= 2 (C(\bar{\nabla} \psi) + k_\psi) \partial_s^m k_\psi + \sum_m c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi), \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde el último sumatorio es sobre todos los coeficientes i, J, K con $i \leq m$, $|J| \leq m-1$, $|K| \leq m-1$ y algunos de los c_{iJK} son cero. Más aún, se verifica la siguiente relación sobre los índices $i + |J| + |K| = m+2$.

Y juntando todo esto en (2.41), (2.42) y (2.43), obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_s^n (\Delta_\psi k_\psi) &= \Delta_\psi (\partial_s^n k_\psi) + n \left(\bar{\nabla}^2 \psi(\partial_s, \partial_s) + k_\psi C(\bar{\nabla} \psi) + C(\bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla} \psi) \right) \partial_s^n k_\psi \\ &\quad + \sum_{\ell=2}^n \binom{n}{\ell} \left(\bar{\nabla}^{1+\ell} \psi(\partial_s, \dots, \partial_s) + \sum_{1+\ell,0}^{1,\ell-1} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi) \right) \partial_s^{n+1-\ell} k_\psi, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}
& \partial_s^n (k_\psi (k^2 + \bar{R}i c_\psi(N, N))) \\
&= \left(k_\psi^2 + 2 \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle k_\psi + \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle^2 + \bar{K} - \bar{\nabla}^2 \psi(N, N) \right) (\partial_s^n k_\psi) \\
&+ 2 (C(\bar{\nabla} \psi) + k_\psi) k_\psi \partial_s^n k_\psi + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} \binom{n}{\ell} (C(\bar{\nabla} \psi) + k_\psi) \partial_s^\ell k_\psi \partial_s^{n-\ell} k_\psi \\
&+ \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} \left[\sum_{\ell} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi) \right. \\
&\quad \left. + \left(\bar{\nabla}^\ell \bar{K}(\partial_s, \dots, \partial_s) + \sum_{\ell,0}^{1,\ell-2} c_{iJKr} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^r \bar{K}) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\bar{\nabla}^{\ell+2} \psi(\partial_s, \dots, \partial_s, N, N) + \sum_{\ell,2}^{2,\ell-1} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi) \right) \right] \partial_s^{n-\ell} k_\psi,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{n-1} \partial_s^r (k_\psi k \partial_s^{n-r} k_\psi) = k_\psi k \partial_s^n k_\psi + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \partial_s^j (k_\psi \partial_s^{n-r} k_\psi) \partial_s^{r-j} k \\
&= k_\psi k \partial_s^n k_\psi + \sum_{r=1}^{n-1} \partial_s^r (k_\psi \partial_s^{n-r} k_\psi) k + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \partial_s^j (k_\psi \partial_s^{n-r} k_\psi) \partial_s^{r-j} k \\
&= n(k_\psi^2 + k_\psi \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle) \partial_s^n k_\psi + (k_\psi + \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle) \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^r \binom{r}{\ell} \partial_s^\ell k_\psi \partial_s^{n-\ell} k_\psi \\
&\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \partial_s^j (k_\psi \partial_s^{n-r} k_\psi) \left(\partial_s^{r-j} k_\psi + C(\bar{\nabla}^{r-j+1} \psi) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r-j,1}^{1,r-j-1} c_{iJK} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi) \right).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Observemos que, con la excepción del término $\Delta_\psi(\partial_s^n k_\psi)$, todas estas expresiones (2.49), (2.50) y (2.51) tienen la forma:

$$(a_{n0} + a_{n1} k_\psi + a_{n2} k_\psi^2) \partial_s^n k_\psi + \sum a_{iJ} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi, \tag{2.52}$$

donde $i + |J| \geq 1$, $i \leq n + 1$, $o(J) \leq n - 1$, $|J| \leq n$ y los coeficientes “ $a_{..}$ ” son polinomios en las variables $\bar{\nabla}^m \bar{K}$, $\bar{\nabla}^m \psi$, $m = 1, \dots, n + 2$ que actúan en ∂_s y/o N y algunos de ellos pueden ser cero.

En concreto los coeficientes “ a_{n_j} ” son:

$$\begin{aligned}
a_{n0} + a_{n1}k_\psi + a_{n2}k_\psi^2 &= n \left(\bar{\nabla}^2 \psi(\partial_s, \partial_s) + k_\psi C(\bar{\nabla}\psi) + C(\bar{\nabla}\psi \otimes \bar{\nabla}\psi) \right) \\
&+ k_\psi^2 + 2 \langle \bar{\nabla}\psi, N \rangle k_\psi + \langle \bar{\nabla}\psi, N \rangle^2 + \bar{K} - \bar{\nabla}^2 \psi(N, N) + 2 (C(\bar{\nabla}\psi) + k_\psi) k_\psi \\
&+ n(k_\psi^2 + k_\psi \langle \bar{\nabla}\psi, N \rangle) \\
&= C(\bar{\nabla}^2 \psi) + C(\bar{\nabla}\psi \otimes \bar{\nabla}\psi) + \bar{K} + C(\bar{\nabla}\psi)k_\psi + (n+3)k_\psi^2,
\end{aligned}$$

por tanto:

$$a_{n0} = C(\bar{\nabla}^2 \psi) + C(\bar{\nabla}\psi \otimes \bar{\nabla}\psi) + \bar{K}, \quad (2.53)$$

$$a_{n1} = C(\bar{\nabla}\psi), \quad (2.54)$$

$$a_{n2} = n + 3. \quad (2.55)$$

De forma que todos los términos “ a_{n_j} ” de (2.52), salvo el último de a_{n0} , verifican que $|K| = 2 - j$.

En cuanto al orden máximo alcanzable por $\bar{\nabla}^m \psi$ en (2.50) vemos que en el último paréntesis del último sumatorio aparece el término

$$-\bar{\nabla}^{n+2} \psi(\partial_s, \dots, \partial_s, N, N)k_\psi,$$

y puede comprobarse que no existe ningún otro con mayor orden, por tanto $o(K) \leq n + 2$.

Ahora vamos a comprobar de forma explícita que los términos del sumatorio de (2.52) que no contienen a $\bar{\nabla}^\ell \bar{K}$ verifican la igualdad $i + |J| + n(J) + |K| = n + 3$. Para ello comprobaremos todos los términos de (2.49), (2.50) y (2.51) que contribuyen a dicho sumatorio. Las sumas de los índices se presentaran al principio en la forma $i + |J| + n(J) + |K|$ manteniendo el orden y agrupándolos en función del conjunto al que pertenecen (i , $|J|$, $n(J)$ o $|K|$).

En (2.49) comprobamos los dos términos del sumatorio de la segunda línea:

Primer término:

$$(n + 1 - \ell) + 1 + (1 + \ell) = n + 3.$$

Segundo término:

$$\begin{aligned}
i + (|J| + n + 1 - \ell) + (n(J) + 1) + |K| &= n + 2 - \ell \\
+ (i + |J| + n(J) + |K|) &= n + 2 - \ell + (1 + \ell) = n + 3.
\end{aligned}$$

En (2.50) comprobamos el último sumatorio de la tercera línea (primer y segundo término), dentro del sumatorio final que empieza en la cuarta línea estudiamos el sumatorio de la cuarta línea (tercer término) y el sumatorio de la última línea (cuarto y quinto término):

Primer término:

$$(\ell + n - \ell) + 2 + 1 = n + 3.$$

Segundo término:

$$1 + (\ell + n - \ell) + 2 = n + 3.$$

Tercer término:

$$\begin{aligned} \text{Si } \ell \neq n : i + (|J| + n - \ell) + (n(J) + 1) + |K| &= n + 1 - \ell \\ &+ (i + |J| + n(J) + |K|) = n + 1 - \ell + (\ell + 2) = n + 3. \end{aligned}$$

$$\text{Si } \ell = n : (i + 1) + |J| + n(J) + |K| = 1 + (\ell + 2) = n + 3.$$

Cuarto término:

$$\text{Si } \ell \neq n : (n - \ell) + 1 + (\ell + 2) = n + 3.$$

$$\text{Si } \ell = n : 1 + (\ell + 2) = n + 3.$$

Quinto término:

$$\begin{aligned} \text{Si } \ell \neq n : i + (|J| + n - \ell) + (n(J) + 1) + |K| &= n + 1 - \ell \\ &+ (i + |J| + n(J) + |K|) = n + 1 - \ell + (\ell + 2) = n + 3. \end{aligned}$$

$$\text{Si } \ell = n : (i + 1) + |J| + n(J) + |K| = 1 + (\ell + 2) = n + 3.$$

Finalmente en (2.51), comprobamos el último sumatorio de la tercera línea (primer y segundo término) y el sumatorio final (tercer, cuarto y quinto término). En el sumatorio final habrá que diferenciar cada uno de los términos en dos casos, ya que al desarrollar

$$\partial_s^j (k_\psi \partial_s^{n-r} k_\psi) = k_\psi \partial_s^{n-r+j} k_\psi + \sum_{m=1}^j \binom{j}{m} \partial_s^m k_\psi \partial_s^{n-r+j-m} k_\psi,$$

aparecen dos situaciones diferentes cuando $m = 0$ y cuando $m \neq 0$. Procedamos a realizar la comprobación:

Primer término:

$$1 + (\ell + n - \ell) + 2 = n + 3.$$

Segundo término:

$$(\ell + n - \ell) + 2 + 1 = n + 3.$$

Tercer término:

$$\begin{aligned} \text{Si } m \neq 0 : (m + n - r + j - m + r - j) + 3 &= n + 3. \\ \text{Si } m = 0 : 1 + (n - r + j + r - j) + 2 &= n + 3. \end{aligned}$$

Cuarto término:

$$\begin{aligned} \text{Si } m \neq 0 : (m + n - r + j - m) + 2 + (r - j + 1) &= n + 3. \\ \text{Si } m = 0 : 1 + (n - r + j) + 1 + (r - j + 1) &= n + 3. \end{aligned}$$

Quinto término:

$$\begin{aligned} \text{Si } m \neq 0 : i + (m + n - r + j - m + |J|) + (n(J) + 2) + |K| \\ &= n + 2 + j - r + (i + |J| + n(J) + |K|) \\ &= n + 2 + j - r + (r - j + 1) = n + 3. \\ \text{Si } m = 0 : (i + 1) + (n - r + j + |J|) + (n(J) + 1) + |K| \\ &= n + 2 + j - r + (r - j + 1) = n + 3. \end{aligned}$$

□

Demostración del teorema 2.5.1. Daremos la demostración en varios pasos:

Paso 1. Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, e^\psi)$ orientable, de dimensión 2, que satisfice (2.31) y (2.32) y sea una solución del PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, \infty) \rightarrow \overline{M}$ que verifica (2.34). Entonces, existe una constante $C > 0$ independiente de t , tal que

$$\inf_{\mathbb{S}^1} |k_\psi(\cdot, t)| \leq C, \text{ para todo } t \in [0, \infty). \quad (2.56)$$

Demostración. Procederemos por reducción a lo absurdo. Supongamos que

$$\text{para toda } C > 0, \text{ existe } t_0 = t_0(C) \text{ tal que } \inf_{\mathbb{S}^1} |k_\psi(\cdot, t_0)| > C.$$

Dada $C > 0$, arbitraria y fija existen dos posibilidades:

$$k_\psi(s, t_0) = |k_\psi(s, t_0)| > C > 0, \forall s \in \mathbb{S}^1, \quad (2.57)$$

o

$$k_\psi(s, t_0) = -|k_\psi(s, t_0)| < -C < 0, \forall s \in \mathbb{S}^1. \quad (2.58)$$

Tomemos $C = P_1 + \sqrt{C_0 + P_2} + 1$.

En el caso (2.57), por el lema 2.5.2, $k_\psi(s, t) \geq C$ para todo $(s, t) \in \mathbb{S}^1 \times [t_0, \infty)$. Entonces:

$$\frac{d}{dt} L_\psi = - \int_{\mathbb{S}^1} k_\psi^2 e^\psi ds \leq -C^2 L_\psi \leq -C^2 E L \leq -C^2 E c < 0,$$

donde hemos utilizado (2.32) en la segunda desigualdad y (2.34) en la tercera. Lo que implica $T_{\max} < \infty$ en contradicción con la hipótesis de que la solución $\gamma(\cdot, t)$ está bien definida para todo $t \in [0, \infty)$.

En el caso (2.58), cambiamos la orientación de la variedad ambiente \overline{M} . En esta nueva orientación $k_\psi(s, t_0) > C > 0$ y el problema queda, por tanto, reducido al caso (2.57). Lo que finaliza la demostración del resultado. \square

Paso 2. Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable, de dimensión 2, que satisface (2.31) y (2.32) y sea una solución del PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, \infty) \rightarrow \overline{M}$ que verifica (2.34). Si esta solución existe para todo $t \in [0, \infty[$, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2(s, t) ds_\psi = 0. \quad (2.59)$$

Demostración. Necesitaremos calcular la variación de la norma L_ψ^2 de $k_\psi(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Usaremos (2.31), (2.32), (1.40), (2.26), $\overline{Ric}_\psi = \overline{K}\overline{g} - \overline{\nabla}^2 \psi$ y

$$k^2 = (k_\psi + \langle \overline{\nabla} \psi, N \rangle)^2 \leq k_\psi^2 + 2|k_\psi|P_1 + P_1^2 \leq (1 + 2P_1)k_\psi^2 + P_1^2 + 2P_1,$$

con el fin de obtener

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi &= \int_{\gamma(\cdot, t)} \left[2k_\psi \partial_t(k_\psi) - k_\psi^4 \right] ds_\psi \\ &= \int_{\gamma(\cdot, t)} \left[2k_\psi \left(\Delta_\psi k_\psi + k_\psi(k^2 + \overline{Ric}_\psi(N, N)) \right) - k_\psi^4 \right] ds_\psi \\ &= \int_{\gamma(\cdot, t)} \left[2k_\psi^2 k^2 - k_\psi^4 - 2(\partial_s k_\psi)^2 + 2k_\psi^2 \overline{Ric}_\psi(N, N) \right] ds_\psi \\ &\leq a \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^4 ds_\psi + b \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi - 2 \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_\psi)^2 ds_\psi, \quad (2.60) \end{aligned}$$

para algunas constantes positivas a y b independientes de t .

Con el propósito de acotar el primer término de la última desigualdad, necesitaremos probar que existen constantes $a_1, b_1 > 0$ independientes de t tales que:

$$\max_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 \leq a_1 + b_1 \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_\psi)^2 ds_\psi, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.61)$$

De hecho, por el Paso 1, existe una constante $C > 0$ de modo que:

$$\inf_{\mathbb{S}^1} |k_\psi(\cdot, t)| \leq C, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

Dado cualquier $t \in [0, \infty)$, arbitrario y fijo, sea $s_0 \in \mathbb{S}^1$, $s_0 = s_0(t)$, verificando $|k_\psi(s_0, t)| \leq C$. Por integración:

$$\begin{aligned} |k_\psi(s_1)| &\leq |k_\psi(s_0)| + \left| \int_{s_0}^{s_1} \partial_s k_\psi ds_t \right| \leq C + \left| \int_{s_0}^{s_1} \partial_s k_\psi ds_t \right| \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{C^2 + \left(\int_{s_0}^{s_1} (\partial_s k_\psi)^2 ds_t \right) \left(\int_{s_0}^{s_1} ds_t \right)} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{C^2 + \frac{1}{E^2} L_\psi(t) \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_\psi)^2 e^\psi ds_t}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Hölder en la tercera desigualdad y (2.32) en la cuarta. Ya que $L_\psi(t)$ es monótona no creciente, se obtiene de la expresión anterior:

$$\max_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 \leq 2C^2 + \frac{2L_\psi(0)}{E^2} \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_\psi)^2 ds_\psi,$$

lo que prueba (2.61).

Al sustituir (2.61) en (2.60), tenemos que existen constantes positivas a_2 y b_2 independientes de t que verifican:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi &\leq -2 \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_\psi)^2 ds_\psi \\ &\quad + a_2 \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi + b_2 \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_\psi)^2 ds_\psi, \end{aligned} \quad (2.62)$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Por otro lado, dado un ε arbitrario, con $0 < \varepsilon < \frac{1}{b_2}$, existe $t_1 = t_1(\varepsilon)$ tal que:

$$\int_{\gamma(\cdot, t_1)} k_\psi^2 ds_\psi < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_t^\infty \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi dt < \varepsilon^2 \quad \text{para } t \in [t_1(\varepsilon), \infty[. \quad (2.63)$$

Notemos que:

$$L_\psi(0) = L_\psi(t) - \int_0^t \frac{dL_\psi}{dt} dt \geq - \int_0^t \frac{dL_\psi}{dt} dt \quad \text{para todo } t \in [0, \infty), \quad (2.64)$$

esto junto a la fórmula de variación (2.28) nos da que:

$$L_\psi(0) \geq - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{dL_\psi}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi dt,$$

lo que implica (2.63).

Para cualquier t' en el que se cumpla la desigualdad:

$$\int_{\gamma(\cdot, t')} k_\psi^2 ds_\psi \leq 1/b_2, \quad (2.65)$$

sustituyendo en la desigualdad (2.62), obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t'} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi \leq - \int_{\gamma(\cdot, t')} (\partial_s k_\psi)^2 ds_\psi + a_2 \int_{\gamma(\cdot, t')} k_\psi^2 ds_\psi, \quad (2.66)$$

Tomemos el $t_1 = t_1(\varepsilon)$ de la desigualdad (2.63). Vamos a probar, por reducción a lo absurdo, que:

$$\int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi < \varepsilon, \text{ para todo } t \geq t_1. \quad (2.67)$$

Supongamos que $t_2 > t_1$ es el primer t tal que $\int_{\gamma(\cdot, t_2)} k_\psi^2 ds_\psi = \varepsilon$. De modo que (2.65) queda satisfecho para cualquier $t' \in [t_1, t_2]$ y podemos usar a su vez (2.66) en el intervalo $[t_1, t_2]$ para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &< \int_{\gamma(\cdot, t_2)} k_\psi^2 ds_\psi - \int_{\gamma(\cdot, t_1)} k_\psi^2 ds_\psi = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi \right) dt \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} a_2 \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi \leq a_2 \int_{t_1}^{\infty} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi dt < a_2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Esto implica que $\frac{1}{2a_2} < \varepsilon$, pero ε arbitrario, lo que nos da una contradicción. Así la sentencia (2.67) es cierta y finalmente obtenemos (2.59). \square

Paso 3. Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable, de dimensión 2, que satisface (2.31) y (2.32) y sea una solución del PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, \infty) \rightarrow \overline{M}$ que verifica (2.34). Si la solución existe para todo $t \in [0, \infty[$, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_\psi)^2 ds_\psi = 0 \text{ para todo número natural } n. \quad (2.68)$$

Demostración. Lo probaremos por inducción. Cuando $n = 0$, (2.68) es exactamente (2.59). Ahora supongamos que (2.68) es cierto para las derivadas de k_ψ hasta orden $n - 1$ y veamos que también es cierto para la derivada de orden n . Como en el caso $n = 0$, empezaremos calculando la derivada con respecto a t de la norma L_ψ^2 de $\partial_s^n k_\psi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_\psi)^2 ds_\psi = \int_{\gamma(\cdot, t)} \left[2(\partial_s^n k_\psi) \partial_t \partial_s^n (k_\psi) - (\partial_s^n k_\psi)^2 k_\psi^2 \right] ds_\psi, \quad (2.69)$$

así por (2.39) y usando también (1.40), podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_\psi)^2 ds_\psi &= \int_{\gamma(\cdot, t)} \left[2\partial_s^n k_\psi (\Delta_\psi(\partial_s^n k_\psi) + (a_{n0} + a_{n1}k_\psi + a_{n2}k_\psi^2)\partial_s^n k_\psi \right. \\
&\quad \left. + \sum a_{iJ} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi) - k_\psi^2 (\partial_s^n k_\psi)^2 \right] ds_\psi \\
&= -2 \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n+1} k_\psi)^2 ds_\psi + 2 \int_{\gamma(\cdot, t)} (a_{n0} + a_{n1}k_\psi + a_{n2}k_\psi^2) (\partial_s^n k_\psi)^2 ds_\psi \\
&\quad + \sum a_{iJ} \int_{\gamma(\cdot, t)} (k_\psi^i \partial_s^J k_\psi) (\partial_s^n k_\psi) ds_\psi. \tag{2.70}
\end{aligned}$$

Con las restricciones sobre los índices del último sumatorio dadas por la proposición 2.5.1, en particular $i + |J| \geq 1$. Ahora, debemos estimar cada uno de los sumandos de (2.70). En primer lugar, observemos que si $s_0 \in \mathbb{S}^1$ es un punto crítico de $\partial_s^{j-1} k_\psi(\cdot)$, para cualquier otro punto $s_1 \in \mathbb{S}^1$, $j \geq 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|\partial_s^j(k_\psi)(s_1)| &= |\partial_s^j(k_\psi)(s_1) - \partial_s^j(k_\psi)(s_0)| = \left| \int_{s_0}^{s_1} \partial_s^{j+1} k_\psi ds \right| \leq \int_{s_0}^{s_1} |\partial_s^{j+1} k_\psi| ds \\
&\leq \frac{1}{E} \int_{s_0}^{s_1} |\partial_s^{j+1} k_\psi| e^\psi ds \leq \frac{1}{E} L_\psi(\gamma|_{[s_0, s_1]})^{1/2} \left(\int_{s_0}^{s_1} |\partial_s^{j+1} k_\psi|^2 e^\psi ds \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{E} L_\psi(\gamma)^{1/2} \left(\int_\gamma |\partial_s^{j+1} k_\psi|^2 e^\psi ds \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la hipótesis $0 < E \leq e^\psi$ y la desigualdad de Hölder. De esto concluimos que:

$$\max_{\mathbb{S}^1} (\partial_s^j(k_\psi))^2 \leq \frac{1}{E^2} L_\psi(\gamma) \int_\gamma (\partial_s^{j+1} k_\psi)^2 ds_\psi \quad \text{para } j \geq 1, \tag{2.71}$$

y usando esta acotación, obtenemos:

$$\int_\gamma (\partial_s^j k_\psi)^2 ds_\psi \leq \frac{1}{E^2} L_\psi(\gamma)^2 \int_\gamma (\partial_s^{j+1} k_\psi)^2 ds_\psi \quad \text{para } j \geq 1, \tag{2.72}$$

$$\int_\gamma (k_\psi)^2 (\partial_s^n k_\psi)^2 ds_\psi \leq \frac{1}{E^2} L_\psi(\gamma) \int_\gamma k_\psi^2 ds_\psi \int_\gamma (\partial_s^{n+1} k_\psi)^2 ds_\psi. \tag{2.73}$$

Necesitaremos también la siguiente acotación, alternativa a (2.72), que podemos obtener usando la acotación $0 < E \leq e^\psi \leq D$ de (2.32), la desigualdad de

Hölder y la integración por partes:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} (\partial_s^n k_{\psi})^2 ds_{\psi} &\leq D \int_{\gamma} (\partial_s^n k_{\psi})^2 ds \leq D \left(\int_{\gamma} (\partial_s^{n-1} k_{\psi})^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\gamma} (\partial_s^{n+1} k_{\psi})^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{D}{E} \left(\int_{\gamma} (\partial_s^{n-1} k_{\psi})^2 ds_{\psi} \right)^{1/2} \left(\int_{\gamma} (\partial_s^{n+1} k_{\psi})^2 ds_{\psi} \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{D}{E} \left(\int_{\gamma} (\partial_s^{n-1} k_{\psi})^2 ds_{\psi} \right)^{1/2} \left(1 + \int_{\gamma} (\partial_s^{n+1} k_{\psi})^2 ds_{\psi} \right). \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Las desigualdades (2.73), (2.74) y $x \leq 1 + x^2$, nos dan una cota para el segundo sumando de (2.70). Esta cota nos permitirá probar nuestro objetivo.

Ahora estudiaremos el tercer sumando de (2.70) empleando las desigualdades (2.61), (2.71) y (2.72) junto con la desigualdad de Hölder y la de Young para obtener:

$$\begin{aligned}
&\sum a_{iJ} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_{\psi}^i \partial_s^J k_{\psi} \partial_s^n k_{\psi} ds_{\psi} \leq \sum \frac{a_{iJ}}{2} \left[\int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_{\psi})^2 ds_{\psi} + \int_{\gamma(\cdot, t)} k_{\psi}^{2i} (\partial_s^J k_{\psi})^2 ds_{\psi} \right] \\
&= \left(\sum \frac{a_{iJ}}{2} \right) \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_{\psi})^2 ds_{\psi} + \sum_{i \neq 0} \frac{a_{i0}}{2} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_{\psi}^{2i} ds_{\psi} \\
&\quad + \sum_{n(J) \geq 1} \frac{a_{iJ}}{2} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_{\psi}^{2i} (\partial_s^J k_{\psi})^2 ds_{\psi} \\
&\leq \left(\sum \frac{a_{iJ}}{2} \right) \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_{\psi})^2 ds_{\psi} + \sum_{i \neq 0} \frac{a_{i0}}{2} \left(c_1 + c_2 \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_{\psi})^2 ds_{\psi} \right)^{i-1} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_{\psi}^2 ds_{\psi} \\
&\quad + \sum_{n(J) \geq 1} \frac{a_{iJ}}{2} \frac{L_{\psi}(\gamma)^{q-1}}{E^{2(q-1)}} \left(c_1 + c_2 \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_{\psi})^2 ds_{\psi} \right)^i \\
&\quad \quad \times \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{j_1} k_{\psi})^2 ds_{\psi} \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{j_2+1} k_{\psi})^2 ds_{\psi} \cdots \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{j_q+1} k_{\psi})^2 ds_{\psi}. \quad (2.75)
\end{aligned}$$

Aquí queremos remarcar que $i \leq n + 1$ y que $n(J) \geq 1$ implica $n > 1$ ya que $o(J) \leq n - 1$.

Si utilizamos las desigualdades (2.73), (2.74) y (2.75) en (2.70) y si tenemos en cuenta que $k_{\psi} \leq 1 + k_{\psi}^2$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_\psi)^2 ds_\psi \leq -2 \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n+1} k_\psi)^2 ds_\psi \\
& + 2(a_{n1} + a_{n2}) \frac{L_\psi(\gamma)}{E^2} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n+1} k_\psi)^2 ds_\psi \\
& + (2a_{n0} + 2a_{n1} + \sum \frac{a_{iJ}}{2}) \frac{D}{E} \left(\int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n-1} k_\psi)^2 ds_\psi \right)^{1/2} \left(1 + \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n+1} k_\psi)^2 ds_\psi \right) \\
& + \sum_{i \neq 0} \frac{a_{i0}}{2} \left(c_1 + c_2 \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_\psi)^2 ds_\psi \right)^{i-1} \int_{\gamma(\cdot, t)} k_\psi^2 ds_\psi \\
& + \sum_{n(J) \geq 1} \frac{a_{iJ}}{2} \frac{L_\psi(\gamma)^{q-1}}{E^{2(q-1)}} \left(c_1 + c_2 \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s k_\psi)^2 ds_\psi \right)^i \\
& \quad \times \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{j_1} k_\psi)^2 ds_\psi \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{j_2+1} k_\psi)^2 ds_\psi \cdots \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{j_q+1} k_\psi)^2 ds_\psi.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Cuando $n = 2$ aparece un término con $j_2 = 1$ que da lugar a $\int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_\psi)^2 ds_\psi$ en la última línea de la anterior expresión. En este caso aplicaremos (2.74) a este término.

Debido a la hipótesis de inducción, dado cualquier $\varepsilon_n > 0$, arbitrario y fijo, existe $t^* > 0$ tal que para todo $t \geq t^*$ la suma de los coeficiente de $\int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n+1} k_\psi)^2 ds_\psi$, que no están en el primer sumando de (2.76), es menor que 1 y la suma de los términos que no contienen $\int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n+1} k_\psi)^2 ds_\psi$ ni $\left(\int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n-1} k_\psi)^2 ds_\psi \right)^{1/2}$ es menor que ε_n . Usando esto, podemos escribir (2.76) como

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_\psi)^2 ds_\psi \leq \varepsilon_n + C_n \left(\int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n-1} k_\psi)^2 ds_\psi \right)^{1/2}, \tag{2.77}$$

para todo $t \geq t^*$, con $C_n > 0$ uniforme. Por otro lado, si repetimos el proceso anterior para obtener (2.76), pero sin usar (2.74) y sin olvidar el término negativo que contiene la derivada de orden superior, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n-1} k_\psi)^2 ds_\psi \leq - \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^n k_\psi)^2 ds_\psi + \varepsilon_{n-1} + D_n \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{n-1} k_\psi)^2 ds_\psi. \tag{2.78}$$

Denotemos por $g_j(t) \equiv \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^j k_\psi)^2 ds_\psi$, $j = 0, 1, \dots, n, \dots$, así las desigualdades (2.77) y (2.78) pueden reescribirse en estos términos como:

$$g'_{n-1}(t) \leq -g_n(t) + D_n g_{n-1}(t) + \varepsilon_{n-1}, \tag{2.79}$$

$$g'_n(t) \leq \varepsilon_n + C_n g_{n-1}(t)^{1/2}. \tag{2.80}$$

Usando nuevamente que $\lim_{t \rightarrow \infty} g_{n-1}(t) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $t_0 = t_0(\varepsilon)$ tal que $0 \leq g_{n-1}(t) \leq \varepsilon^2$, para todo $t \geq t_0$. Por (2.80) $g'_n(t) \leq C_n \varepsilon + \varepsilon_n$ para todo $t \geq t_0$. Al integrar conseguimos:

$$g_n(t_2) - g_n(t_1) \leq (C_n \varepsilon + \varepsilon_n)(t_2 - t_1), \quad \text{para todo } t_2 \geq t_1 \geq t_0 \quad (2.81)$$

y por (2.79):

$$g'_{n-1}(t) \leq -g_n(t) + D_n \varepsilon^2 + \varepsilon_{n-1}, \quad \text{para todo } t \geq t_0. \quad (2.82)$$

Ahora probaremos por reducción a lo absurdo que el $\lim_{t \rightarrow \infty} g_n(t) = 0$. Supongamos que existen $C > 0$ y $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, $t_{k+1} \geq t_k$, $t_1 \geq t_0$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ y $g_n(t_k) \geq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (2.81) tenemos

$$g_n(t) \geq \frac{C}{2}, \quad \text{para todo } t \in [\max\{t_0, t_j - \frac{C}{2(C_n \varepsilon + \varepsilon_n)}\}, t_j] \neq \emptyset, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Entonces, a partir de (2.82),

$$g'_{n-1}(t) \leq -\frac{C}{2} + D_n \varepsilon^2 + \varepsilon_{n-1}, \quad (2.83)$$

para todo $t \in [\max\{t_0, t_j - \frac{C}{2(C_n \varepsilon + \varepsilon_n)}\}, t_j] \neq \emptyset$, y $j \in \mathbb{N}$.

Elijamos ε , ε_{n-1} y $j(\varepsilon)$ tales que $A(\varepsilon) := \frac{C}{2} - (D_n \varepsilon^2 + \varepsilon_{n-1}) > 0$ y $s_j := t_j - \frac{C}{2(C_n \varepsilon + \varepsilon_n)} > t_0$ para todo $j \geq j(\varepsilon)$. Entonces $g'_{n-1}(t) \leq -A(\varepsilon)$ y $g_{n-1}(t) \leq \varepsilon^2$ para todo $t \in [s_j(\varepsilon), t_j]$, $j \geq j(\varepsilon)$. Si integramos la desigualdad (2.83):

$$0 \leq g_{n-1}(t) \leq g_{n-1}(s_j(\varepsilon)) - A(\varepsilon)(t - s_j(\varepsilon)),$$

para todo $t \in [s_j(\varepsilon), t_j]$. (2.84)

Para un ε suficientemente pequeño el último término de (2.84) se anula cuando $t = s_j(\varepsilon) + \frac{g_{n-1}(s_j(\varepsilon))}{A(\varepsilon)} \leq s_j(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{A(\varepsilon)} < t_j$. Con estos valores de ε y $j(\varepsilon)$, se llega de nuevo por (2.84) a que, para $j \geq j(\varepsilon)$

$$0 \leq g_{n-1}(t) \leq g_{n-1}(s_j(\varepsilon)) - A(\varepsilon)(t - s_j(\varepsilon)) < 0,$$

para todo $t \in]s_j(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{A(\varepsilon)}, t_j[$.

Lo que nos da una contradicción. Por lo tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} g_n(t) = 0$ lo que finaliza la demostración del Paso 3 por inducción. \square

Paso 4. Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ orientable, de dimensión 2, que satisface (2.31) y (2.32) y sea una solución del PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, \infty) \rightarrow \overline{M}$ que verifica (2.34). Si esta solución existe para todo $t \in [0, \infty[$ entonces, para todo $m = 0, 1, 2, \dots$, $\partial_s^m k_\psi$ converge uniformemente a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Este hecho es una consecuencia de (2.59), (2.68), la propiedad L_ψ monótona no creciente, la condición (2.34) y la siguiente desigualdad cuya demostración se deduce a partir de las ideas utilizadas para probar (2.61). Para cada t , sea s_0 el punto donde $|\partial_s^m k_\psi(s_0, t)| = \min_{s \in \mathbb{S}^1} |\partial_s^m k_\psi(s, t)|$, entonces:

$$\begin{aligned} |\partial_s^m k_\psi(s_1)| &= \left| \partial_s^m k_\psi(s_0) + \int_{s_0}^{s_1} \partial_s^{m+1} k_\psi ds_t \right| \\ &\leq \frac{1}{L_\psi(t)} \int_{\gamma(\cdot, t)} |\partial_s^m k_\psi| ds_\psi + \frac{1}{E} \int_{\gamma(\cdot, t)} |\partial_s^{m+1} k_\psi| ds_\psi \\ &\leq \left(\frac{1}{L_\psi(t)} \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^m k_\psi)^2 ds_\psi \right)^{1/2} + \frac{1}{E} \left(L_\psi(t) \int_{\gamma(\cdot, t)} (\partial_s^{m+1} k_\psi)^2 ds_\psi \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

para todo $s_1 \in [0, \text{Long}(\gamma(t))]$. Por el Paso 3, esto va a cero cuando $t \rightarrow \infty$ y así el Paso 4 está probado. \square

Nota 2.5.1. El Paso 4 junto al teorema 2.2.8 generalizan al caso con densidad el teorema dado por Grayson en [29] para el PAC (1.26).

Demostración. **Paso 5: Fin de la demostración del teorema 2.5.1.** Por la hipótesis de que la evolución de γ está contenida en un subconjunto compacto de \overline{M} , se deduce que $\gamma(\cdot, t)$ está uniformemente acotada. Para probar que $|\partial_\theta \gamma(\theta, t)|$ está también acotada, notemos que $ds_\psi = |\partial_\theta \gamma(\theta, t)| e^\psi d\theta$ y la fórmula de variación (2.24) nos da que $\partial_t(|\partial_\theta \gamma(\theta, t)| e^\psi) = -k_\psi^2 |\partial_\theta \gamma(\theta, t)| e^\psi$, entonces $\partial_t \ln(|\partial_\theta \gamma(\theta, t)| e^\psi) = -k_\psi^2$. Por lo tanto $|\partial_\theta \gamma(\theta, t)| e^\psi$ es decreciente respecto de la variable t y, ya que e^ψ está acotada por la hipótesis (2.32),

$$|\partial_\theta \gamma(\theta, t)| \text{ también está acotada por una constante independiente de } t. \quad (2.85)$$

Ahora reparametricemos γ por $u = \frac{st}{2\pi L_t}$, es decir, consideremos $\tilde{\gamma}(u, t) = \gamma(\varphi_t(u), t)$ donde, para cualquier $t \geq 0$, φ_t es la inversa de la función $\theta \mapsto \frac{\int_0^\theta |\partial_\theta \gamma(\theta, t)| d\theta}{2\pi \int_0^{2\pi} |\partial_\theta \gamma(\theta, t)| d\theta} = \frac{s_t(\theta)}{2\pi L_t}$. Ya que $\tilde{\gamma}(\cdot, t)$ y $\gamma(\cdot, t)$ son geoméricamente la misma curva, todas las estimaciones que tenemos para k , k_ψ , $\partial_s^m k$ y $\partial_s^m k_\psi$ son

las mismas para ambas parametrizaciones. Más aún,

$$\frac{\partial s_t}{\partial u} = 2\pi L_t \quad , \quad \frac{\partial^m s_t}{\partial u} = 0 \text{ para } m \geq 2, \quad (2.86)$$

$$\partial_{s_t}^2 \gamma = kN, \quad (2.87)$$

$$\partial_{s_t}^3 \gamma = \partial_s k N - k T, \quad (2.88)$$

$$\partial_{s_t}^4 \gamma = \partial_s^2 k N - \partial_s k k T - \partial_s k T - k^2 N, \quad (2.89)$$

$$\partial_{s_t}^5 \gamma = \partial_s^3 k N - 2 \partial_s^2 k k T - (\partial_s k)^2 T - \partial_s k k^2 N - \partial_s^2 k T - 3k \partial_s k N + k^3 T, \quad (2.90)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\partial_{s_t}^m \gamma = \xi_m(k, \partial_s k, \dots, \partial_s^{m-3} k)T + \zeta_m(k, \partial_s k, \dots, \partial_s^{m-2} k)N, \quad (2.91)$$

\dots\dots\dots

donde ξ_m y ζ_m son polinomios en $k, \partial_s k, \dots, \partial_s^{m-2} k$ de grado menor que $m - 1$, donde el grado de cada monomio se obtiene contando el grado de $\partial_s^j k$ como $j + 1$. Al usar estas fórmulas para el cálculo de $\partial_u \tilde{\gamma}$, obtenemos:

$$|\partial_u \tilde{\gamma}| = \left| \frac{\partial s_t}{\partial u} \partial_{s_t} \gamma \right| = |2\pi L_t \partial_{s_t} \gamma| = 2\pi L_t, \quad (2.92)$$

$$|\partial_u^2 \tilde{\gamma}| = |(2\pi L_t)^2 \partial_{s_t}^2 \gamma| = (2\pi L_t)^2 |k|,$$

\dots\dots\dots

$$|\partial_u^m \tilde{\gamma}| = (2\pi L_t)^m \sqrt{\xi_m^2 + \zeta_m^2}. \quad (2.93)$$

Por el Paso 4, (2.46) y la hipótesis (2.32), se concluye que $\sqrt{\xi_m^2 + \zeta_m^2}$ está acotado por una constante independiente de t . Gracias a (2.32) tenemos que $L(t) = \int_{\gamma(\cdot, t)} e^{-\psi} ds_\psi \leq \frac{1}{E} L_\psi(\gamma(\cdot, 0))$. De este modo, para cada m , por el teorema de Ascoli-Arzela, existe una sucesión $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge C^m a una curva C^m que, por el Paso 4, tiene $k_\psi = 0$. Y lo que es más, por (2.92) y (2.34) la curva límite es regular.

Podemos obtener una sucesión $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ independiente de m usando un argumento diagonal de la siguiente forma. Primero, para $m = 1$, aplicamos el teorema de Ascoli-Arzela (utilizando que $|\tilde{\gamma}|$, $|\partial_u \tilde{\gamma}|$ y $|\partial_u^2 \tilde{\gamma}|$ uniformemente acotadas) para obtener una sucesión $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_{n1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge en C^1 a $\tilde{\gamma}(\cdot, \infty)$ curva C^1 . Aplicamos de nuevo el teorema de Ascoli-Arzela (utilizando que $|\tilde{\gamma}|$, $|\partial_u \tilde{\gamma}|$, $|\partial_u^2 \tilde{\gamma}|$ y $|\partial_u^3 \tilde{\gamma}|$ uniformemente acotadas) para obtener una subsucesión $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_{n2})\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_{n1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge en C^2 a una curva C^2 , que por unicidad del límite C^1 , es la misma curva $\tilde{\gamma}(\cdot, \infty)$. Continuamos el proceso de inducción para conseguir una sucesión de subsucesiones $\{\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_{nm})\}_{n \in \mathbb{N}}\}_{m \in \mathbb{N}}$ cuyo término m -ésimo converge en C^m a $\tilde{\gamma}(\cdot, \infty)$ y el término $(m + 1)$ -ésimo es una subsucesión del término m -ésimo.

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{\gamma}(\cdot, t_{11}), & \tilde{\gamma}(\cdot, t_{21}), & \cdots, & \tilde{\gamma}(\cdot, t_{n1}), & \cdots & \rightarrow & \tilde{\gamma}(\cdot, \infty) & C^1(\mathbb{S}^1) \\
\tilde{\gamma}(\cdot, t_{12}), & \tilde{\gamma}(\cdot, t_{22}), & \cdots, & \tilde{\gamma}(\cdot, t_{n2}), & \cdots & \rightarrow & \tilde{\gamma}(\cdot, \infty) & C^2(\mathbb{S}^1) \\
\tilde{\gamma}(\cdot, t_{13}), & \tilde{\gamma}(\cdot, t_{23}), & \cdots, & \tilde{\gamma}(\cdot, t_{n3}), & \cdots & \rightarrow & \tilde{\gamma}(\cdot, \infty) & C^3(\mathbb{S}^1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\tilde{\gamma}(\cdot, t_{1m}), & \tilde{\gamma}(\cdot, t_{2m}), & \cdots, & \tilde{\gamma}(\cdot, t_{nm}), & \cdots & \rightarrow & \tilde{\gamma}(\cdot, \infty) & C^m(\mathbb{S}^1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \tag{2.94}$$

Entonces, para cualquier m , la sucesión diagonal $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_{nn})\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en C^m a $\tilde{\gamma}(\cdot, \infty)$. Probemoslo, fijado $m \in \mathbb{N}$ para todo $\epsilon > 0$ existe $n_m = n_m(\epsilon, m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\tilde{\gamma}(\cdot, \infty) - \tilde{\gamma}(\cdot, t_{nm})\|_{C^m(\mathbb{S}^1)} < \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_m. \tag{2.95}$$

Por otro lado $\{t_{nn}\}_{n \geq m}$ es una subsucesión de $\{t_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces dado $\epsilon > 0$ arbitrario y fijo podemos tomar $n^* := \max\{m, n_m\} \in \mathbb{N}$ y

$$\|\tilde{\gamma}(\cdot, \infty) - \tilde{\gamma}(\cdot, t_{nn})\|_{C^m(\mathbb{S}^1)} < \epsilon, \text{ para todo } n \geq n^*. \tag{2.96}$$

Por tanto $\{\tilde{\gamma}(\cdot, t_{nn})\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en C^m a $\tilde{\gamma}(\cdot, \infty)$. Esto finaliza la demostración del teorema 2.5.1. \square

Nota 2.5.2. *El teorema 2.5.1 junto al teorema 2.2.8 generalizan al caso con densidad el teorema dado por Gage en [27] para el PAC (1.26).*

2.6. Caso particular: El plano euclídeo con una densidad radial

En esta sección estudiaremos varias situaciones concretas en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 con una densidad radial donde puede darse una descripción de la evolución de una curva inmersa $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cerrada por el PAC ψ (2.11) para una familia bastante amplia de las mismas. Las diferentes situaciones de estudio vienen marcadas por la posición del soporte de la curva inicial (acotar o ser acotado) respecto los círculos ψ -mínimos centrados en el origen. Por otro lado, en el capítulo I se vio que la densidad radial ψ tal que $\psi' = -1/r$ juega un papel especial entre las densidades radiales, el próximo teorema pondrá en relevancia este hecho.

Al estar trabajando con curvas embebidas en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 consideraremos que el normal N a la curva γ es el normal interior.

En el siguiente resultado (teorema 2.6.1), el caso (a) se corresponde con una densidad diferenciable y el (b) considera los casos análogos cuando ψ tiene una singularidad en el origen.

Teorema 2.6.1. *Sea el plano euclídeo \mathbb{R}^2 con una densidad radial $\psi = \psi(r)$ tal que los grafos de ψ' y $-\frac{1}{r}$ intersecan transversalmente en un conjunto discreto de puntos $r_1 < r_2 < \dots$. Sea una curva γ_0 diferenciable, orientada, cerrada, simple y cuyo soporte acota un dominio $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$. Sean $r_{\text{máx}}$ y $r_{\text{mín}}$ la distancia máxima y mínima de γ_0 al origen, respectivamente. Supongamos que tenemos una sucesión de ceros r_n de $\psi' + \frac{1}{r}$ que va a ∞ o que el soporte de la curva γ_0 está contenido en el disco centrado en el origen cuyo radio es el mayor cero de $\psi' + \frac{1}{r}$ o $\psi' + \frac{1}{r} > 0$ después del mayor cero de $\psi' + \frac{1}{r}$, pueden darse los siguientes casos:*

(a) *Si ψ es diferenciable en \mathbb{R}^2 , entonces:*

a.i *Si $r_{\text{máx}} \leq r_1$, bajo PAC ψ (2.11), γ_0 colapsa a un punto redondo en tiempo finito. En particular, si $\psi' + \frac{1}{r}$ no tiene ceros, toda curva cerrada y simple colapsa a un punto redondo en tiempo finito.*

a.ii *Si $r_{2k-1} \leq r_{\text{mín}} \leq r_{\text{máx}} \leq r_{2k+1}$, $k \geq 1$, y $0 \notin \Omega_0$, bajo PAC ψ (2.11), γ_0 colapsa a un punto redondo en tiempo finito.*

a.iii *Si $r_1 \leq r_{\text{mín}}$ y $0 \in \Omega_0$, la solución del PAC ψ (2.11) con condición inicial γ_0 existe para $t \in [0, \infty[$ y existe una sucesión de tiempos t_n , $t_n \rightarrow \infty$, tal que las curvas $\gamma(\cdot, t_n)$ convergen en la topología C^m a una curva ψ -mínima, para cada $m \in \mathbb{N}$. Más aún:*

a.iii.1 *Si $r_{2k-1} \leq r_{\text{mín}} \leq r_{\text{máx}} \leq r_{2k+1}$, $k \geq 1$, la curva límite ψ -mínima es el círculo de radio r_{2k} . Esto incluye también el caso $r_{2k+1} = \infty$ que se da cuando r_{2k} es el último cero de $\psi' + \frac{1}{r}$.*

(b) *Si ψ solo es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, el $\lim_{t \rightarrow 0} \psi'(t) = -\infty$ y el soporte de γ_0 está contenido en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$:*

b.i *Si $\psi'(r) > -1/r$ para $r < r_1$, la situación es la misma que en los casos a.ii y a.iii.*

b.ii *Si $\psi'(t) < -1/r$ para $r < r_1$, entonces:*

b.ii.1 *Si γ_0 está contenida en el interior del disco $r_{\text{máx}} \leq r_2$ y $0 \notin \Omega_0$, bajo PAC ψ (2.11) colapsará a un punto redondo en tiempo finito.*

b.ii.2 *Si γ_0 está contenida en el interior del disco $r_{\text{máx}} \leq r_2$ y $0 \in \Omega_0$, la solución del PAC ψ (2.11) con condición inicial γ_0 existe para $t \in [0, \infty[$ y existe una sucesión de tiempos t_n , $t_n \rightarrow \infty$, tal que las curvas $\gamma(\cdot, t_n)$ convergen en la topología C^m al círculo de radio r_1 para cada $m \in \mathbb{N}$.*

- b.ii.3 Si $r_{2k} \leq r_{\min} \leq r_{\max} \leq r_{2k+2}$, $k \geq 1$ y $0 \notin \Omega_0$, bajo $PAC\psi$ (2.11) colapsará a un punto redondo en tiempo finito.*
- b.ii.4 Si $0 \in \Omega_0$, la solución del $PAC\psi$ (2.11) con condición inicial γ_0 existe para $t \in [0, \infty[$ y existe una sucesión de tiempos t_n , $t_n \rightarrow \infty$, tal que las curvas $\gamma(\cdot, t_n)$ convergen en la topología C^m a una curva ψ -mínima, para cada $m \in \mathbb{N}$. Y lo que es más:*
- b.iii.4.1 Si $r_{2k} \leq r_{\min} \leq r_{\max} \leq r_{2k+2}$, $k \geq 1$, la curva límite ψ -mínima es el círculo de radio r_{2k+1} . Esto incluye también el caso $r_{2k+2} = \infty$ que se da cuando r_{2k+1} es el último cero de $\psi' + \frac{1}{r}$.*

La condición “los grafos de ψ' y $-\frac{1}{r}$ intersecan transversalmente” no es esencial para una descripción de las evoluciones, únicamente se ha tomado así por simplicidad al exponer las diferentes situaciones. Después de ver la demostración del teorema, cualquier lector puede pensar en otras situaciones donde existan círculos ψ -mínimos que sean atractores a derecha y repulsores a izquierda y viceversa. Estas situaciones son generadas por puntos de tangencia entre las gráficas anteriores.

La siguiente imagen describe algunas de las situaciones descritas en el teorema. Todos los círculos que aparecen representados son círculos ψ -mínimos.

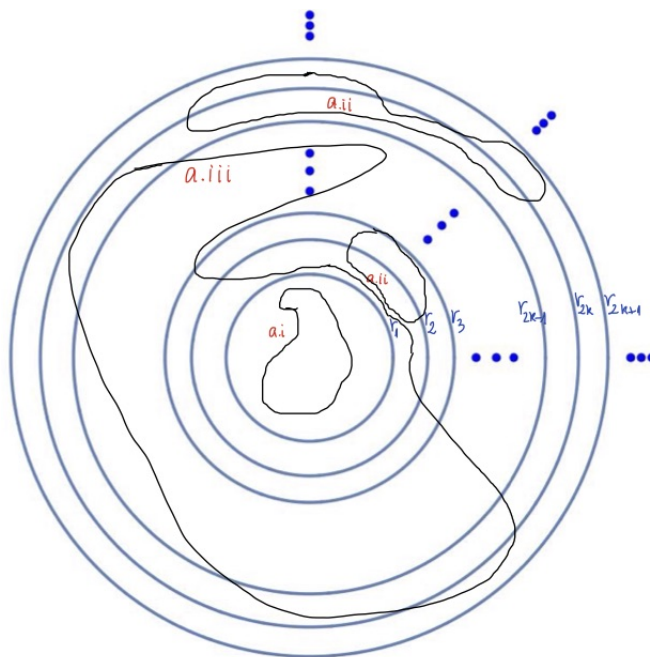


Figura 2.1: Ejemplos de los casos ai, aii y aiii del teorema 2.6.1.

Es interesante remarcar que para la densidad antigaussiana, $\psi(r) = \frac{1}{2}\mu^2 r^2$, todas las posibilidades están incluidas en el caso (ai) ya que $\psi' + \frac{1}{r}$ no tiene ceros. La densidad gaussiana, $\psi(r) = -\frac{1}{2}\mu^2 r^2$, no cumple la condición “ $\psi' + \frac{1}{r} > 0$ después del mayor cero de $\psi' + \frac{1}{r}$ ”, pero aún podemos aplicar el caso (ai). En cualquier caso, estas dos interesantes densidades ya fueron estudiadas en el teorema 1.5.5.

La situación estudiada por Schnürer y Smoczyk en [50] está incluida en el caso (b.ii) del teorema anterior, con $r_2 = \infty$. Aquí los casos (b.ii.1) y (b.ii.2) dan todas las posibilidades del movimiento para una curva, por tanto este resultado extiende el resultado dado en [50] para el caso de curvas donde no necesitamos imponer la hipótesis extra de que la curva inicial sea fuertemente estrellada.

Antes de la demostración del teorema 2.6.1 necesitamos un lema previo. En el que se calculará la variación de la distancia de la curva al origen por el PAC ψ (2.2), expresándola en forma de la ecuación del calor.

Lema 2.6.1. *Sean el plano euclídeo \mathbb{R}^2 con una densidad radial $\psi = \psi(r)$ y una solución para el PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, entonces:*

$$\frac{\partial r_t}{\partial t} = \Delta r + \left(\psi' + \frac{1}{r}\right)|\nabla r|^2 - \left(\psi' + \frac{1}{r}\right). \quad (2.97)$$

Demostración. En primer lugar, por ser $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ solución del problema de valor inicial (2.2) tenemos que:

$$\frac{\partial r_t}{\partial t} = \left\langle \bar{\nabla} r, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle = k_\psi \langle \bar{\nabla} r, N \rangle. \quad (2.98)$$

Por otro lado, en el espacio euclídeo \mathbb{R}^2 si escribimos la métrica en coordenadas polares $dr^2 + r^2 d\theta^2$ podemos utilizar las relaciones para un *warped product* dadas en la sección 1.1.2 y calcular Δr del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \Delta r &= \text{ttr} = \text{t} \langle \text{t}, \bar{\nabla} r \rangle = k \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \langle \text{t}, \bar{\nabla}_{\text{t}} \bar{\nabla} r \rangle \\ &= k \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \left\langle \text{t}, \bar{\nabla}_{\text{t} - \langle \text{t}, \bar{\nabla} r \rangle \bar{\nabla} r} \bar{\nabla} r \right\rangle = k \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \frac{1}{r} \langle \text{t}, \text{t} - \langle \text{t}, \bar{\nabla} r \rangle \bar{\nabla} r \rangle \\ &= k \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \frac{1}{r} (1 - |\nabla r|^2). \end{aligned} \quad (2.99)$$

A su vez con el objetivo de poder sustituir la expresión para el laplaciano en

(2.98), lo escribimos como sigue:

$$\begin{aligned}
\Delta r &= k \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \frac{1}{r} (1 - |\nabla r|^2) \\
&= k_\psi \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \frac{1}{r} (1 - |\nabla r|^2) \\
&= k_\psi \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \langle N, \bar{\nabla} r \rangle^2 \psi' + \frac{1}{r} (1 - |\nabla r|^2) \\
&= k_\psi \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \left(\psi' + \frac{1}{r} \right) (1 - |\nabla r|^2). \tag{2.100}
\end{aligned}$$

Esta última expresión para el laplaciano nos permite escribir la ecuación de evolución (2.98) de la forma de la ecuación del calor:

$$\frac{\partial r_t}{\partial t} = \Delta r + \left(\psi' + \frac{1}{r} \right) (|\nabla r|^2 - 1). \tag{2.101}$$

□

Ahora ya podemos proceder a dar la demostración del teorema 2.6.1.

Demostración. (del Teorema 2.6.1)

- Casos (a): ψ diferenciable en \mathbb{R}^2 :

Por las hipótesis generales del teorema y la proposición 1.5.1, cuando ψ es diferenciable, dada cualquier curva γ_0 cerrada y simple, existe siempre un círculo que acota un disco que contiene al soporte de γ_0 tal que o es una curva ψ -mínima o contrae bajo el PAC ψ (2.11). Entonces, por el principio de separación de soluciones (teorema 2.2.4) γ evoluciona en una región acotada de la variedad ambiente y podemos aplicar los teoremas 2.2.8, 2.5.1 y el corolario 2.4.2.

En esta situación siempre que una curva colapse a un punto, por el corolario 2.4.2, este será redondo. No se volverá a entrar en esta cuestión en el resto de la demostración.

Ahora estudiemos en detalle los diferentes casos cuando ψ es diferenciable.

- (a.i) Si $r_{\text{máx}} < r_1$, el tiempo máximo de existencia del flujo de γ está acotado por el correspondiente tiempo de existencia para el círculo de radio $r_{\text{máx}} + \delta < r_1$ que evoluciona con una velocidad dada por (1.100). Ya que ψ' es continua en $[0, r_{\text{máx}} + \delta]$ y $\psi'(r) + 1/r > 0$, existe un $\varepsilon > 0$ que verifica $\psi' + 1/r > \varepsilon$, por lo que el radio del círculo evoluciona acorde a $\frac{dr}{dt} = -\left(\frac{1}{r} + \psi'\right) < -\varepsilon$. Entonces el círculo colapsa a un punto en tiempo finito y, por el principio de separación, lo mismo ocurre con γ .

Si $r_{\text{máx}} \leq r_1$ e igual a r_1 en algún punto de γ , podemos usar (2.97):

$$\frac{\partial r_t}{\partial t} = \Delta r + \left(\psi' + \frac{1}{r}\right) |\nabla r|^2 - \left(\psi' + \frac{1}{r}\right).$$

Ya que en $t = 0$, $r \leq r_1$, por el principio del máximo, $r(t) \leq r_1$ y existen puntos con $r < r_1$. Por el principio del máximo fuerte, $r(t) < r_1$ para $t > 0$ de modo que nosotros podemos aplicar el argumento del caso previo empezando con $\gamma(\cdot, t)$.

- (a.ii) Si $r_{2k-1} < r_{\text{mín}} \leq r_{\text{máx}} < r_{2k+1}$ y $0 \notin \Omega_0$, el soporte de la curva está dentro del anillo delimitado por dos círculos de radios $r_{2k-1} + \delta$ y $r_{2k+1} - \delta$ que evolucionan hacia un círculo de radio r_{2k} . Existe un tiempo finito en el que el área de este anillo es tan pequeña como nosotros queramos. Tal y como se probará en (2.106) la fórmula de variación del área encerrada por el soporte de la curva es:

$$\frac{d}{dt} \left(A_{\bar{g}}(\Omega_t) \right) = -2\pi - \int_{\Omega_t} \bar{\Delta} \psi \, da_{\bar{g}},$$

con Ω_t la región encerrada por el soporte de la curva $\gamma(\cdot, t)$. Por tanto dado $t_0 \in [0, T)$ el área de Ω_t varía con velocidad menor que una constante estrictamente negativa independiente de $t \in [t_0, T)$, es decir $\frac{d}{dt} A_{\bar{g}}(\Omega_t) < c = c(t_0) < 0$ para todo $t \in [t_0, T)$. Entonces el flujo de γ existe solo para tiempo finito y, por el teorema 2.2.8, colapsará a un punto.

Si $r_{2k-1} \leq r_{\text{mín}} \leq r_{\text{máx}} \leq r_{2k+1}$ donde al menos una igualdad se da en algún punto, podemos usar (2.97) y el principio del máximo fuerte como antes para concluir que, para $t > 0$, $r_{2k-1} < r < r_{2k+1}$ y podemos aplicar el argumento del párrafo previo.

- (a.iii) Si $r_1 < r_{\text{mín}}$ y $0 \in \Omega_0$, el círculo de radio $r = r_1$ y un círculo de radio $r > r_{\text{máx}}$ actúan como barreras. De modo que γ no puede colapsar a un punto y, por el teorema 2.5.1, subconverge a una curva ψ -mínima.

- (a.iii.1) Si $r_{2k-1} < r_{\text{mín}} \leq r_{\text{máx}} < r_{2k+1}$ y $0 \in \Omega_0$, por la proposición 1.5.1, la única curva cerrada, simple, ψ -mínima y contenida en este anillo es el círculo de radio r_{2k} , que da el caso iii.1.

Si en los últimos dos casos ((a.iii) y (a.iii.1)) tenemos “ \leq ” en lugar de “ $<$ ”, argumentamos como antes usando (2.97) y el principio del máximo fuerte para reducir la situación al caso previo.

- Casos (b): Si ψ es sólo diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \psi'(t) = -\infty$ y el soporte de γ_0 está contenido en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$:

- (b.i) Si $\lim_{r \rightarrow 0} \psi'(r) = -\infty$ y $\psi' > -\frac{1}{r}$ para $r < r_1$, no podemos asegurar que un círculo de radio $< r_1$ vaya a 0 en tiempo finito. Tampoco podemos asegurar que γ se mueva en una región con ψ' acotada de forma que podamos aplicar los teoremas 2.2.8 y 2.5.1. Por esta razón, no consideramos la situación $r_{\text{máx}} \leq r_1$ cuando ψ tiene una singularidad en el origen y $\psi' > -\frac{1}{r}$ para $r \in]0, r_1]$. Para los otros casos la discusión es exactamente la misma que para el caso diferenciable.
- (b.ii) Si $\lim_{r \rightarrow 0} \psi'(r) = -\infty$ y $\psi' < -\frac{1}{r}$ para $r < r_1$, tenemos dos círculos que acotan un anillo que contiene el soporte de γ_0 , que son curvas ψ -mínimas o se mueven hacia una curva ψ -mínima, y la situación es similar al caso diferenciable. En los casos (b.ii.1) y (b.ii.3) la situación es análoga al caso (a.ii) en el caso diferenciable y los mismos argumentos usados dan su demostración. Casos (b.ii.2) y (b.ii.4) se deducen de los mismos argumentos, similares a los casos (a.iii) en el caso diferenciable.

□

El teorema 2.6.1 pone de relevancia la importancia de la densidad $\psi = a \ln(r)$ con $a < 0$. La combinación de esta densidad con la gaussiana y la antigaussiana, $\psi(x) = \lambda \frac{|x|^2}{4} + a \ln(|x|)$, con $\lambda \neq 0$, $a < 0$, está también incluida en las situaciones descritas en el teorema 2.6.1. Sobre estas combinaciones existe una para la que podemos precisar el tiempo de existencia del flujo. Este caso y el caso crítico $\psi(x) = -\ln(|x|)$, que no está incluido en las situaciones descritas por el teorema 2.6.1, es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 2.6.2. *En el plano euclídeo \mathbb{R}^2 con densidad ψ , sea una curva γ_0 cerrada, simple, cuyo soporte esté contenido en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ y que acote un dominio Ω_0 de área A :*

1. Si $\psi(x) = -\ln(|x|)$ y $0 \notin \Omega_0$, bajo $PAC\psi$ (2.11) γ_0 evoluciona a un punto redondo en tiempo $T = A/2\pi$.
2. Si $\psi(x) = -\ln(|x|)$ y $0 \in \Omega_0$, el $PAC\psi$ (2.11) con γ_0 como condición inicial tiene solución para $t \in [0, \infty[$ y existe una sucesión de tiempos t_n , $t_n \rightarrow \infty$, tal que las curvas $\gamma(\cdot, t_n)$ convergen en la topología C^m a un círculo de radio $r = \sqrt{A(\gamma(0))/\pi}$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$.
3. Si $\psi(x) = \lambda \frac{|x|^2}{4} + a \ln(|x|)$, con $\lambda > 0$ y $a < -1$, y $0 \notin \Omega_0$, bajo $PAC\psi$ (2.11) γ_0 evoluciona a un punto redondo en tiempo $T = \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\lambda A_{\bar{g}}(0)}{2\pi}\right)$.

Una herramienta importante en la demostración del teorema 2.6.2 es la fórmula de variación del funcional de área,

$$\begin{aligned} A_{\bar{g}} : I(\mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto A_{\bar{g}}(\gamma) := \int_{\Omega} dv_{\bar{g}} \end{aligned} \quad (2.102)$$

cuyo dominio restringimos a las curvas simples de $I(\mathbb{R}^2)$ y donde Ω es la región de \mathbb{R}^2 delimitada por el soporte de la curva orientada γ hacia la que apunta el normal interior a la misma. La variación de este funcional a lo largo de la solución del PAC ψ para una condición inicial $\gamma_0 \in I(\mathbb{R}^2)$ simple es:

$$\frac{d}{dt} A_{\bar{g}}(\gamma(\cdot, t)) = - \int_{\gamma(\cdot, t)} k_{\psi} ds_t. \quad (2.103)$$

Esta igualdad es fácil de comprobar si tenemos en cuenta que en \mathbb{R}^2 dicho funcional puede ser expresado del siguiente modo. Si usamos que $\bar{\Delta}r^2 = 4$ en \mathbb{R}^2 y aplicamos el teorema de la divergencia, obtenemos:

$$\begin{aligned} A_{\bar{g}}(\gamma) &= \int_{\Omega} dv_{\bar{g}} = \int_{\Omega} \frac{1}{4} \bar{\Delta}(r^2) dv_{\bar{g}} = -\frac{1}{4} \int_{\gamma} \langle \bar{\nabla}r^2, N \rangle ds = -\frac{1}{2} \int_{\gamma} r \langle \bar{\nabla}r, N \rangle ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma} \langle \gamma, N \rangle ds. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Entonces, dada una solución del PAC ψ (2.2) $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, utilizando (2.104), (2.21) y (2.23):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_{\bar{g}}(\gamma(\cdot, t)) &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma(\cdot, t)} \frac{\partial}{\partial t} (\langle \gamma, N \rangle ds_t) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma(\cdot, t)} \left(\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, N \right\rangle + \langle \gamma, \bar{\nabla}_{\partial t} N \rangle - k_{\psi} k \langle \gamma, N \rangle \right) ds_t \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma(\cdot, t)} \left(k_{\psi} - \langle \gamma, \nabla k_{\psi} \rangle - k_{\psi} k \langle \gamma, N \rangle \right) ds_t \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma(\cdot, t)} \left(2k_{\psi} - \frac{d}{ds} (k_{\psi} \langle \gamma, \partial_s \rangle) \right) ds_t \\ &= - \int_{\gamma(\cdot, t)} k_{\psi} ds_t, \end{aligned} \quad (2.105)$$

lo que finaliza la demostración de (2.103).

Ahora analicemos dicha fórmula de variación (2.103) supuesta ψ diferenciable:

$$\frac{dA_{\bar{g}}}{dt} = - \int_{\gamma(\cdot, t)} k_{\psi} ds = - \int_{\gamma(\cdot, t)} k ds + \int_{\gamma(\cdot, t)} \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle ds = -2\pi - \int_{\Omega_t} \bar{\Delta} \psi da_{\bar{g}}, \quad (2.106)$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia y la diferenciabilidad de ψ en Ω_t en la última igualdad. Si ψ es radial, $\overline{\Delta}\psi = \text{tr}(\overline{\nabla}^2\psi) = \text{tr}(\overline{\nabla}(\psi'\overline{\nabla}r)) = \text{tr}(\psi''\overline{\nabla}r \otimes \overline{\nabla}r + \psi'\overline{\nabla}^2r) = \psi'' + \psi'\frac{1}{r}$, entonces sustituyéndola en (2.106) obtenemos:

$$\frac{dA_{\overline{g}}}{dt} = -2\pi - \int_{\Omega_t} \left(\psi'' + \frac{1}{r}\psi' \right) da_{\overline{g}}. \quad (2.107)$$

Si buscamos densidades con una fórmula de variación de $A_{\overline{g}}(\Omega_t)$, de forma que nos proporcione cierta información sobre la evolución del flujo, podemos considerar las soluciones de $\psi'' + \frac{1}{r}\psi' = \lambda$ (donde λ es una constante), que dan $\frac{dA_{\overline{g}}}{dt} = -2\pi - \lambda A_{\overline{g}}(\Omega_t)$ y son:

$$\psi(r) = \lambda \frac{r^2}{4} + b + a \ln(r). \quad (2.108)$$

Pero esta solución tiene una singularidad en $r = 0$ si $a \neq 0$, de modo que la fórmula (2.106) no puede ser aplicada ya que ha sido obtenida utilizando la diferenciabilidad de ψ en todo Ω_t . Para el caso en el que tenemos una singularidad en el origen, necesitamos distinguir las siguientes situaciones:

S1) El origen está en el interior de Ω_t , de modo que (2.106) tiene que ser calculada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{\overline{g}}}{dt} &= - \int_{\gamma(\cdot, t)} k ds + \int_{\gamma(\cdot, t)} \langle \overline{\nabla}\psi, N \rangle ds \\ &= -2\pi - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega_t - B^2(\rho)} \overline{\Delta}\psi da_{\overline{g}} - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^1(\rho)} \langle \overline{\nabla}\psi, \xi \rangle ds, \end{aligned} \quad (2.109)$$

donde $\xi = \overline{\nabla}r$ es el campo normal unitario al círculo $\mathbb{S}^1(\rho)$ de radio ρ apuntando hacia el interior de $\Omega_t - B^2(\rho)$. Si ψ es radial, esto da:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{\overline{g}}}{dt} &= -2\pi - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega_t - B^2(\rho)} \left(\psi'' + \frac{1}{r}\psi' \right) da_{\overline{g}} - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^1(\rho)} \psi' ds \\ &= -2\pi - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega_t - B^2(\rho)} \left(\psi'' + \frac{1}{r}\psi' \right) da_{\overline{g}} - \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi\rho\psi'(\rho), \end{aligned} \quad (2.110)$$

y cuando ψ tiene la forma (2.108):

$$\frac{dA_{\overline{g}}}{dt} = -2\pi - \lambda A_{\overline{g}}(\Omega) - 2\pi a. \quad (2.111)$$

S2) El origen está fuera de Ω_t , entonces la fórmula (2.106) es válida y cuando ψ tiene la forma (2.108):

$$\frac{dA_{\overline{g}}}{dt} = -2\pi - \lambda A_{\overline{g}}(\Omega). \quad (2.112)$$

Ahora, utilizando (2.111) y (2.112), ya podemos dar la demostración del teorema 2.6.2:

Demostración. (del Teorema 2.6.2)

- Caso (1) y (2) del teorema 2.6.2: $\lambda = 0$, $a = -1$.

En estos casos ψ tiene una singularidad en el origen, pero dada cualquier curva contenida en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, por la proposición 1.5.2, existe una curva ψ -mínima que acota un disco D entre el origen y la curva, que actúa como una barrera. Además el borde de un disco centrado en el origen que contiene el soporte de la curva actúa como otra barrera. De este modo la evolución de la curva se da en el dominio acotado por estas dos curvas ψ -mínimas. Así, las hipótesis de los teoremas 2.2.8, 2.5.1 y el corolario 2.4.2 se verifican.

Si el dominio acotado por γ_0 no contiene el origen (caso (1)), entonces la fórmula (2.112) nos dice que el área del dominio Ω_t decrece a velocidad constante 2π . De modo que, por el teorema 2.2.8, el flujo contrae a un punto en tiempo $T = A/(2\pi)$. Además, por el corolario 2.4.2, este debe ser redondo.

Si el dominio acotado por γ_0 contiene el origen (caso (2)), la fórmula (2.111) nos dice que el área del dominio Ω_t es constante, entonces el flujo está definido para todo tiempo. Por el teorema 2.5.1, debe subconverger a una curva ψ -mínima cuyo soporte encierra la misma área y que, por la proposición 1.5.2, es el círculo de radio $\sqrt{A/\pi}$.

- Caso (3) del teorema 2.6.2: $\lambda > 0$, $a < -1$.

Nuevamente ψ tiene una singularidad en el origen. Por la proposición 1.5.1, el círculo de radio $r = \sqrt{-2(a+1)/\lambda}$ es el único círculo ψ -mínimo y es un atractor. Por lo tanto, dada cualquier curva cuyo soporte esté contenido en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ existe un círculo de radio menor que r_{\min} y otro de radio mayor que el máximo entre r_{\max} y $\sqrt{-2(a+1)/\lambda}$ que actúan como barreras. Entonces las hipótesis de los teoremas 2.2.8, 2.5.1 y el corolario 2.4.2 se verifican.

Si el dominio acotado por γ_0 contiene el origen, las barreras indicadas en el párrafo previo empujan γ al único círculo ψ -mínimo. Entonces, por el teorema 2.5.1, no puede colapsar a un punto, por tanto debe subconverger a una curva cerrada ψ -mínima y esta debe ser el círculo mencionado.

Si el dominio acotado por γ_0 no contiene el origen, la fórmula (2.112) da una cota superior negativa para la velocidad de variación del área. Entonces el flujo existe solo para tiempo finito y el teorema 2.2.8 implica que dicho límite es un punto y, por el corolario 2.4.2, debe ser redondo.

Finalmente, por (2.112), se deduce que $T_{\text{máx}} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\lambda A_{\bar{g}}(0)}{2\pi}\right)$.

□

Capítulo 3

Singularidades de tipo I en el PAC ψ

Los resultados obtenidos en este capítulo junto a las secciones 1.3.1 y 1.5.3 constituyen el contenido del artículo [42].

A lo largo de este capítulo estudiaremos la evolución de una curva por el PAC ψ en el caso en que la densidad ψ de la variedad ambiente $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ tenga singularidades en una cierta región del espacio y la curva en evolución llegue a tocar dicho conjunto singular de ψ . Todas las cuestiones a tratar se plantearán desde la perspectiva más general posible, aunque en última instancia se apliquen al problema expuesto.

3.1. Teorema principal

En primer lugar describiremos en detalle la variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ en la que trabajaremos. En segundo lugar presentaremos las curvas a considerar como datos iniciales del PAC ψ . Y finalmente presentaremos el resultado principal del capítulo.

3.1.1. Variedad ambiente del teorema principal

Consideraremos como variedad ambiente una variedad riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$ de dimensión 2, orientable, completa, con curvatura de Gauss $\overline{K} \geq 0$ y con una métrica que pueda ser escrita del siguiente modo:

$$\overline{g} = dr^2 + e^{2\varphi(r)} dz^2, \quad (3.1)$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable que verifica $\varphi(s) = \varphi(-s)$, r denota la distancia a la curva $r = 0$ medida con la métrica \overline{g} y $\varphi(r) \equiv \varphi \circ r$. La existencia de este tipo de métricas \overline{g} sobre \overline{M} es equivalente a la existencia en \overline{M}

de una geodésica a la que denotaremos por Γ (la curva $r = 0$ en las coordenadas en las que la métrica está escrita), tal que la reflexión respecto a esta geodésica $(r, z) \mapsto (-r, z)$ y las reflexiones $(r, a - z) \mapsto (r, a + z)$ son isometrías. Ejemplos de estas superficies son los elipsoides de revolución, donde la geodésica $r = 0$ es un ecuador (dentro de estos ejemplos está la esfera redonda), y el plano llano.

En \overline{M} consideraremos una densidad ψ que únicamente depende de r y es C^∞ salvo en la geodésica $r = 0$. Lo que se traduce en la existencia de una función diferenciable en $]0, \infty[$, que denotaremos también por $\psi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\psi(x) = \psi(r(x)) \equiv \psi(r)(x)$, donde la primera ψ es una función definida en \overline{M} y la segunda ψ es la función definida en $]0, \infty[$. Además impondremos las siguientes restricciones a ψ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi^{(n)}(r)}{b/r^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad \text{para algún } b > 0 \text{ y } n = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\psi'''(r)}{\psi'(r)} - \frac{2}{b^2} \psi'(r)^2 \right) \text{ está acotado superiormente,} \quad (3.3)$$

donde $^{(n)}$ denota la derivada n -ésima respecto de r . En (3.10) y (3.11) se dará la motivación de las hipótesis (3.2) y (3.3) sobre la densidad ψ .

Una vez expuesta la variedad ambiente sobre la que trabajaremos, a continuación procedemos a estudiar en detalle los diferentes elementos geométricos de dicha variedad.

La derivada covariante $\overline{\nabla}$ de \overline{M} por la proposición 1.1.1 verifica:

$$\overline{\nabla}_{\partial_r} \partial_r = 0, \quad \overline{\nabla}_{\partial_z} \partial_z = -\varphi' e^{2\varphi} \partial_r, \quad \overline{\nabla}_{\partial_r} \partial_z = \overline{\nabla}_{\partial_z} \partial_r = \varphi' \partial_z. \quad (3.4)$$

Por la última ecuación de (3.4) comprobamos, tal y como veremos a continuación, que efectivamente la curva $r = 0$ es una geodésica. Por ser $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ simétrica respecto de 0 y diferenciable debe verificar que $\varphi'(0) = 0$, entonces:

$$A^\Gamma X = \overline{\nabla}_X \partial_r = \langle X, \partial_z \rangle \frac{1}{e^{2\varphi}} \overline{\nabla}_{\partial_z} \partial_r = \langle X, \partial_z \rangle \frac{1}{e^{2\varphi}} \varphi'(0) \partial_z = 0,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Gamma)$, luego Γ es una geodésica. Tomaremos z como el parámetro longitud de arco de la geodésica Γ en \overline{M} , entonces φ debe verificar $\varphi(0) = 0$. A su vez, de la primera ecuación de (3.4), se deduce que las curvas $z = \text{constante}$ son también geodésicas.

Por la expresión de \overline{g} es inmediato que la reflexión respecto de Γ $((r, z) \mapsto (-r, z))$ y las reflexiones respecto de las curvas $z = c$ $((r, c - z) \mapsto (r, c + z))$ son isometrías.

La curvatura de Gauss \overline{K} de \overline{M} está dada por:

$$\overline{K} = -\varphi'' - \varphi'^2. \quad (3.5)$$

Para el cálculo utilizamos que $\left\{\partial_r, \frac{1}{e^\varphi}\partial_z\right\}$ es una base ortonormal, la proposición 1.1.2 de la sección 1.1.2 y (3.4):

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \bar{R}\left(\partial_r, \frac{1}{e^\varphi}\partial_z, \partial_r, \frac{1}{e^\varphi}\partial_z\right) = -\bar{g}\left(\bar{R}\left(\frac{1}{e^\varphi}\partial_z, \partial_r\right)\partial_r, \frac{1}{e^\varphi}\partial_z\right) \\ &= -\bar{g}\left(\frac{\bar{\nabla}e^\varphi(\partial_r, \partial_r)}{e^\varphi} \frac{1}{e^\varphi}\partial_z, \frac{1}{e^\varphi}\partial_z\right) = -\frac{\bar{\nabla}e^\varphi(\partial_r, \partial_r)}{e^\varphi} = -\frac{\partial_r^2(e^\varphi)}{e^\varphi} \\ &= -\frac{\varphi''e^\varphi + \varphi'^2e^\varphi}{e^\varphi} = -\varphi'' - \varphi'^2.\end{aligned}$$

El hecho de que \bar{g} sea una métrica impone que φ' tenga la siguiente expansión de Taylor en torno a $r = 0$:

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= \varphi'(0) + \varphi''(0)r + \varphi'''(0)\frac{r^2}{2} + \varphi''''(0)\frac{r^3}{6} + \dots \\ &= -\bar{K}(0)r + \varphi'''(0)\frac{r^2}{2} + \varphi''''(0)\frac{r^3}{6} + \dots\end{aligned}\quad (3.6)$$

ya que:

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= 0, \\ \varphi''(0) &= -\bar{K}(0) - \varphi'^2(0) = -\bar{K}(0).\end{aligned}$$

Bajo este contexto, debido a la relación entre variedades riemannianas con densidad y variedades *warped product* dada en la sección 1.3.1, estudiaremos la geometría de las variedades *warped product* $\bar{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$. Notemos que existen situaciones en las que a pesar de que ψ sea singular en Γ la variedad *warped product* $\bar{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ es una variedad riemanniana regular. Por ejemplo, si $\varphi(r) = 1$ y $\psi(r) = \ln(r)$ entonces $\bar{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ es el espacio euclídeo de dimensión $m+2$.

De las ecuaciones de la curvatura para un *warped product*, proposición 1.1.2, se obtiene que la curvatura seccional de $\bar{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ correspondiente a los planos rz , los generados por ∂_r y un vector ∂_i tangente a \mathbb{S}^m o por ∂_z y ∂_i son, respectivamente,

$$\begin{aligned}S_{rz} &= \hat{R}_{r z r z} = -(\varphi'' + \varphi'^2), & S_{ri} &= \hat{R}_{r i r i} = -\frac{\psi'^2 + m\psi''}{m^2}, \\ S_{zi} &= \hat{R}_{z i z i} = -\frac{\psi'\varphi'}{m}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Cuando $\bar{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ es una variedad riemanniana C^∞ (sin singularidades), para todo $p \in \Gamma$, consideremos la hipersuperficie de $\bar{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ dada por $\{\exp_p(ru) \mid u \in T_p\Gamma^\perp \subset T_p(\bar{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m)\}$. Entonces, la aplicación de Weingarten A^S de una esfera geodésica definida en esta hipersuperficie está dada por:

$$A^S = \frac{\psi'}{m} Id. \quad (3.8)$$

Comprobémoslo:

$$\begin{aligned} A^S X &= -\nabla_X \nabla r = -\nabla_X \bar{\nabla} r = -\left(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla} r\right)^T = -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla} r + \left\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} r, \frac{\partial_z}{e^\varphi} \right\rangle \frac{\partial_z}{e^\varphi} \\ &= \frac{\partial_r(e^{\psi/m})}{e^{\psi/m}} X = \frac{\psi'}{m} X. \end{aligned}$$

Por (3.8), la curvatura media de una esfera geodésica en $\{\exp_p(ru) \mid u \in T_p \Gamma^\perp\}$ es igual a $\psi'(r)$ y, utilizando el desarrollo en serie de potencias de la curvatura media de una esfera geodésica dado en el teorema 3.2 del artículo [17], obtenemos:

$$\psi'(r) = \frac{m}{r} - \frac{r}{3} \text{Ric}^S(\bar{\nabla} r, \bar{\nabla} r)(p) + \sum_{j \geq 2} A_j r^j, \quad (3.9)$$

donde las A_j son constantes determinadas por el valor en p de polinomios en la curvatura y la derivada covariante de la curvatura de $\{\exp_p(ru) \mid u \in T_p \Gamma^\perp\}$ en p . A partir de (3.9) deducimos que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi^{(n)}(r)}{m/r^n} = (-1)^{n-1} (n-1)!, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (3.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\psi'''(r)}{\psi'(r)} - \frac{2}{m^2} \psi'(r)^2 \right) \text{ es finito.} \quad (3.11)$$

La fórmula (3.10) es la que nos ha motivado a considerar densidades ψ sobre \bar{M} que verifican (3.2). Observemos sin embargo que, cuando b no es un número natural, no existe un natural m para el que $\bar{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ sea una variedad riemanniana diferenciable ya que, en estos casos, la curvatura seccional S_{r_i} se hace infinito cuando $r \rightarrow 0$. Entonces, la hipótesis (3.2) en ψ incluye muchas situaciones donde el $\text{PAC}\psi$ es especial y no equivalente al FCM de alguna variedad riemanniana regular.

3.1.2. Formulación del problema de valor inicial

Para la inmersión inicial $\gamma_0 : M \rightarrow \bar{M}$ del $\text{PAC}\psi$ consideraremos dos posibilidades:

(i) $M = \mathbb{S}^1$ y γ_0 es una inmersión diferenciable orientada, simple y cerrada en \bar{M} .

(ii) $M = [b_1, b_2]$, γ_0 es una inmersión diferenciable orientada, simple y existe una región $G = \{(r, z) \in \bar{M}; a_1 \leq z \leq a_2\}$ tal que $\text{Sop } \gamma_0$ está contenido en G , con $\partial \text{Sop } \gamma_0 = \{\gamma(b_1, 0), \gamma(b_2, 0)\} \subset \partial G$ y $\text{Sop } \gamma_0$ es ortogonal a ∂G en los puntos $\gamma(b_i, 0)$.

Al conjunto de las inmersiones descritas en el caso (i), sin imponerles la condición de ser simples, las denotaremos por $I(\overline{M})$. Y al conjunto de las inmersiones orientadas descritas en el caso (ii), sin imponerles la condición de ser simples, las denotaremos por $I(G)$.

Cuando la inmersión inicial que se considera como condición inicial para el PAC ψ se encuentra en el caso (ii) debemos volver a formular el problema imponiendo condiciones de frontera tipo Neumann.

Con motivo de formular el problema cuando la condición inicial se encuentra en el caso (ii), recordarlo cuando está en el caso (i) y unificar ambas situaciones, formulamos los dos siguientes problemas de valor inicial. El primero se corresponde con el problema (2.2) y el segundo con (2.11).

Dada una inmersión diferenciable $\gamma_0 \in I(\overline{M})$ o $\gamma_0 \in I(G)$ encuéntrese una familia de inmersiones $\{\gamma_t\}_{t \in [0, T]} \subset I(\overline{M})$ o $\{\gamma_t\}_{t \in [0, T]} \subset I(G)$, respectivamente, tal que $\gamma : M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ o $\gamma : M \times [0, T) \rightarrow G$, respectivamente, sea diferenciable y verifique que:

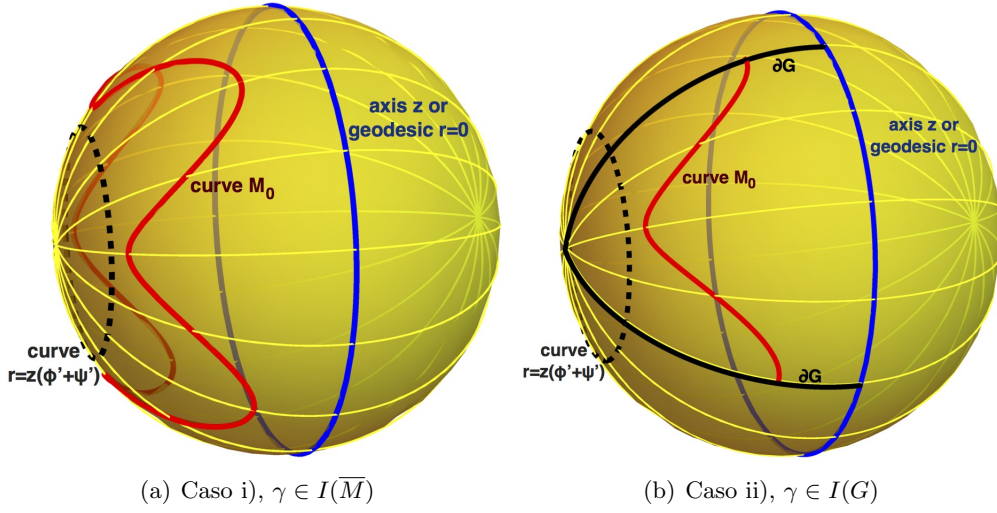
$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \vec{k}_\psi, \\ \gamma(0) &= \gamma_0(\cdot). \end{cases} \quad (3.12)$$

Dada una inmersión diferenciable $\gamma_0 \in I(\overline{M})$ o $\gamma_0 \in I(G)$ encuéntrese una familia de inmersiones $\{\gamma_t\}_{t \in [0, T]} \subset I(\overline{M})$ o $\{\gamma_t\}_{t \in [0, T]} \subset I(G)$, respectivamente, tal que $\gamma : M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ o $\gamma : M \times [0, T) \rightarrow G$, respectivamente, sea diferenciable y verifique que:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, J(\mathbf{t}) \right\rangle &= k_\psi, \\ \gamma(0) &= \gamma_0(\cdot). \end{cases} \quad (3.13)$$

Remarquemos que en estas formulaciones va implícita la condición de Neuman sobre el borde para curvas en el caso (ii): “Sop γ_t interseca a ∂G ortogonalmente en el borde de Sop γ_t para todo $t \in [0, T]$ ”.

Las siguientes imágenes dan ejemplos de estos casos cuando \overline{M} es una esfera redonda \mathbb{S}^2 :



Cuando la curva $\gamma : M \rightarrow \overline{M}$ es un grafo $(r(z), z)$ sobre Γ , elegiremos una orientación de \overline{M} de forma que el normal N a la curva $\gamma : M \rightarrow \overline{M}$ apunte hacia la región delimitada por el soporte de la curva γ y la geodésica Γ de \overline{M} . Nos referiremos a este normal como *normal interior*. Por otro lado, la relación entre N y \mathbf{t} es:

$$N = \langle N, \partial_r \rangle \partial_r + \left\langle N, \frac{\partial_z}{e^\varphi} \right\rangle \frac{\partial_z}{e^\varphi}, \quad \mathbf{t} = \left\langle N, \frac{\partial_z}{e^\varphi} \right\rangle \partial_r - \langle N, \partial_r \rangle \frac{\partial_z}{e^\varphi}. \quad (3.14)$$

Las fórmulas explícitas para calcular el vector tangente \mathbf{t} y el vector normal interior N a la curva γ son:

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{r} \overline{\nabla} r + \partial_z}{\sqrt{\dot{r}^2 + e^{2\varphi}}}, \quad N = \frac{-e^{2\varphi} \overline{\nabla} r + \dot{r} \partial_z}{e^\varphi \sqrt{\dot{r}^2 + e^{2\varphi}}} \quad (3.15)$$

Y las expresiones para su curvatura geodésica k y para $u := \langle N, \overline{\nabla} r \rangle$:

$$k = \langle \overline{\nabla} \mathbf{t}, N \rangle = \frac{e^\varphi}{\sqrt{\dot{r}^2 + e^{2\varphi}}} \left(\frac{-\ddot{r} + \dot{r}^2 \varphi'}{\dot{r}^2 + e^{2\varphi}} + \varphi' \right), \quad u = \frac{-e^\varphi}{\sqrt{\dot{r}^2 + e^{2\varphi}}}. \quad (3.16)$$

De (3.4) obtenemos la siguiente expresión concreta para el hessiano de ψ sobre una curva $\gamma : M \rightarrow \overline{M}$:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^2 \psi(N, N) &= \langle \overline{\nabla}_N \overline{\nabla} \psi, N \rangle = N(\psi') \langle N, \overline{\nabla} r \rangle + \psi' \langle \overline{\nabla}_N \overline{\nabla} r, N \rangle \\ &= \psi'' \langle N, \overline{\nabla} r \rangle^2 + \psi' \varphi' \langle N - \langle N, \overline{\nabla} r \rangle \overline{\nabla} r, N \rangle \\ &= \psi'' \langle N, \overline{\nabla} r \rangle^2 + \psi' \varphi' \left(1 - \langle N, \overline{\nabla} r \rangle^2 \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.1.3. Grafos en evolución y singularidades tipo I

Presentado el contexto, el objetivo principal del capítulo es demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.1.1. *Sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ de dimensión 2, orientable, con curvatura de Gauss no negativa y que verifica las condiciones (3.1), (3.2) y (3.3). Sea una solución máxima $\gamma : M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ o $\gamma : M \times [0, T) \rightarrow G$ del PAC ψ (3.13) en función de si la condición inicial $\gamma_0 : M \rightarrow \overline{M}$ se encuentra en $I(\overline{M})$ o en $I(G)$, respectivamente. Supongamos que la condición inicial γ_0 verifica las siguientes tres propiedades, es un grafo sobre la geodésica $r = 0$, Sop γ_0 está contenido en la banda limitada por $r = 0$ y $r = \min\{\mathfrak{z}(\varphi' + \psi'), \sup\{r; (\psi'' + \psi'^2/b)|_{[0,r]} \leq 0\}\}$ y su curvatura geodésica en densidad es $k_\psi \geq 0$ (pero no idénticamente 0). Entonces:*

1. $k_\psi > 0$ para todo $t \in]0, T[$.
2. Sop γ_t es un grafo sobre $r = 0$ para todo $t \in [0, T[$.
3. $T < \infty$ y el flujo $\gamma(\cdot, t)$ es de tipo I en el sentido de la definición 3.2.1.
4. En cada punto singular, un blow-up centrado en este punto da un flujo límite $\tilde{\gamma}$ en \mathbb{R}^2 con la métrica euclídea y densidad $\tilde{\psi}^\infty = \ln r^b$, el cual es un grafo sobre $r = 0$ para cada instante de tiempo y, después de hacer un nuevo blow-up, converge a un $\ln r^b$ -shrinker en \mathbb{R}^2 que es la línea $r = \text{constante}$ en el caso $b = m \in \mathbb{N}$.

Por $\mathfrak{z}(f)$ se denota el primer cero positivo de la función f y el concepto de $\ln r^b$ -shrinker utilizado en el anterior teorema es el siguiente:

Definición 3.1.1. *Dada cualquier función $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos f -shrinker en \mathbb{R}^{n+1} a toda hipersuperficie $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que verifica $H_f + \langle F, N \rangle = 0$.*

La desigualdad $\mathfrak{z}(\varphi' + \psi') > 0$ del teorema 3.1.1 se sigue de la hipótesis $\overline{K} \geq 0$ y (3.2). Y la condición $r < \mathfrak{z}(\varphi' + \psi')$ es necesaria en el sentido de que las líneas o círculos a distancia $\mathfrak{z}(\varphi' + \psi') - \varepsilon$ del eje $r = 0$ colapsen a este eje. Los detalles se darán en la sección 3.3.

Acorde a la fórmula (3.7), cuando $\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ es una variedad diferenciable (es decir $b = m \in \mathbb{N}$), $S_{ri} \geq 0$ es equivalente a $\psi'' + \psi'^2/m \leq 0$, entonces la hipótesis $r \leq \sup\{r; \psi'' + \psi'^2/b \leq 0\}$ del teorema 3.1.1 no es solamente una condición analítica, está motivada por este hecho.

Gracias a la relación existente entre la geometría riemanniana con densidad y la geometría riemanniana de un warped product dada en la sección 1.3.1 y, más concretamente, a la relación que se deduce de esto entre el PAC ψ de una curva

M en $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ y el FCM de la hipersuperficie $M \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ en $(\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m, \overline{g})$ junto a (3.10), podemos enunciar el teorema 3.1.1 en términos de las variedades *warped product* para el FCM de las hipersuperficies $M \times_{e^{\psi/m}} \mathbb{S}^m$ (corolario 3.1.1).

En primer lugar, necesitamos las definiciones de espacio e hipersuperficie rotacionalmente simétricos, dichas definiciones las tomaremos de [14] y [15] adaptándolas a la notación utilizada en este capítulo.

Definición 3.1.2. *Un espacio rotacionalmente simétrico respecto a un eje z es una variedad riemanniana $(\widehat{M}, \widehat{g})$ que admite coordenadas cilíndricas $(r, z, u) \in I \times J \times \mathbb{S}^m$ respecto a las que \widehat{g} puede ser escrita de la forma*

$$\widehat{g} = dr^2 + e^{2\varphi(r)} dz^2 + e^{2\psi/m}(r) g_{\mathbb{S}}, \quad (3.18)$$

donde $g_{\mathbb{S}}$ es la métrica estándar de la esfera \mathbb{S}^m de curvatura seccional 1.

La curva $r = 0$ es una geodésica de \widehat{M} y se llama “eje z ” o “eje de revolución”.

Definición 3.1.3. *Sea un espacio rotacionalmente simétrico respecto a un eje z $(\widehat{M}, \widehat{g})$. Una hipersuperficie de revolución S de \widehat{M} generada por un grafo $(r(z), z)$ sobre el eje z es una subvariedad de \widehat{M} que puede ser descrita en coordenadas cilíndricas por la inmersión $J \times \mathbb{S}^m \rightarrow \widehat{M}/(z, u) \mapsto (r(z), z, u)$, donde $r(z)$ es una función diferenciable.*

Ahora ya podemos enunciar el resultado mencionado:

Corolario 3.1.1. *Sea un espacio rotacionalmente simétrico $(\widehat{M}, \widehat{g})$ de dimensión $m+2$ y curvatura seccional no negativa. Sea una hipersuperficie de revolución M_0 de \widehat{M} generada por un grafo sobre el eje “ z ”, con curvatura media no negativa (pero no idénticamente 0) y contenida en una región limitada por los cilindros $r = 0$ y $r = \min\{\mathfrak{J}(\varphi' + \psi')\}$. Sea la solución del FCM (1.106), M_t , en un intervalo de tiempo máximo $[0, T[$ con condición inicial M_0 . Consideremos que tenemos una de las dos siguientes situaciones:*

(i) M_0 es una hipersuperficie cerrada.

(ii) M_0 es una hipersuperficie compacta con borde contenido en el borde de una banda G limitada por dos hipersuperficies $z = b_1$ y $z = b_2$. En este caso, al problema de valor inicial (1.106) para el FCM le añadimos la siguiente condición tipo Neumann sobre el borde: “ M_t interseca a ∂G ortogonalmente en el borde de M_t para todo $t \in [0, T[$ ”.

Entonces:

1. $H > 0$ para todo $t \in]0, T[$.
2. M_t es una hipersuperficie de revolución de \widehat{M} generada por un grafo sobre el eje “ z ” para todo $t \in [0, T[$.

3. $T < \infty$ y el flujo $F(\cdot, t)$ es de tipo I.
4. En cada punto singular, un blow-up centrado en este punto da un flujo límite que es un grafo sobre $r = 0$ para cada instante de tiempo y, después de hacer un nuevo blow-up, converge a un cilindro en \mathbb{R}^{m+2} .

Este corolario generaliza para variedades con curvatura no negativa algunos de los resultados obtenidos por G. Huisken en [34] y S. Altschuler, S. Angenent y Y. Giga en [2], para superficies de revolución en el euclídeo \mathbb{R}^{n+1} .

3.2. Singularidades de tipo I en el FCM ψ y su *blow-up*

En esta sección introduciremos el concepto de singularidad de tipo I para el FCM ψ y desarrollaremos el proceso necesario para llevar a cabo el estudio de dicha singularidad. Para introducir dicho concepto nos valdremos de la equivalencia entre el FCM y el FCM ψ dada en la sección 1.5.3, la cual se apoya en la relación existente entre la geometría con densidad y la geometría riemanniana de un *warped product* dada en la sección 1.3.1.

Sean una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$, una hipersuperficie inmersa $\iota_0 : M \rightarrow \overline{M}$ y $\iota : M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ la única solución máxima del FCM ψ con condición inicial ι_0 . Por lo visto en la sección 1.3.1 se concluye que este flujo es equivalente al FCM de $M_0 \times_{e^{\psi/m}} Q$ en $\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} Q$ ($\dim Q = m$). Notemos que $\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} Q$ podría ser una variedad riemanniana con singularidades en los puntos donde la densidad ψ presente singularidades, a pesar de ello es muy importante remarcar que podría darse el caso en que ψ sea singular y $\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} Q$ sea una variedad riemanniana regular, como vimos en la subsección 3.1.1. Para el FCM es ampliamente conocido que, si T es el tiempo máximo de existencia del flujo, o la solución alcanza un punto singular de la métrica del ambiente $\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} Q$ cuando $t \rightarrow T$ o $|\widehat{A}_t|^2$ se hace infinito cuando $t \rightarrow T$, y además en dicho caso:

$$\max_{x \in M_t \times_{e^{\psi/m}} Q} |\widehat{A}_t|^2 \geq \frac{1}{2(T-t)}. \quad (3.19)$$

La segunda forma fundamental $\widehat{\alpha}_t$ y la aplicación de Weingarten \widehat{A}_t de $M_t \times_{e^{\psi/m}} Q$ en $\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} Q$ verifican las siguientes ecuaciones (ver proposición 1.1.1 sección 1.1.2):

$$\widehat{A}_t X^* = (A_t X)^*, \quad \widehat{A}_t V = -\widehat{\nabla}_V N_t^* = -\frac{N_t e^{\psi/m}}{e^{\psi/m}} V = -\frac{1}{m} \langle \overline{\nabla} \psi, N_t \rangle V, \quad (3.20)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y para todo campo vectorial vertical V . Entonces $|\widehat{A}_t|^2 = |A_t|^2 + \frac{1}{m} \langle \overline{\nabla} \psi, N_t \rangle^2$ y $|\widehat{A}_t|^2$ se hace infinito en T si y solo si $|A_t|^2$ o $\langle \overline{\nabla} \psi, N_t \rangle^2$

se hace infinito en T . Es decir que M_t se hace singular ($\lim_{t \rightarrow T} |A_t|^2 \rightarrow \infty$) o la ecuación (1.95) deja de tener sentido. Estas situaciones son exactamente las que definirán en nuestro caso de forma natural el primer tiempo singular para el $\text{FCM}\psi$.

Por lo tanto, *el tiempo máximo T para el FCM y el $\text{FCM}\psi$ coinciden si no nos preocupamos de las posibles singularidades de la variedad riemanniana $\overline{M} \times_{e^{\psi/m}} Q$* . Por supuesto, si $\langle \overline{\nabla}\psi, N_t \rangle^2 \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow T$, la hipersuperficie toca el conjunto singular de ψ cuando $t \rightarrow T$, sin embargo, una hipersuperficie podría contener puntos singulares de ψ y mantener $\langle \overline{\nabla}\psi, N_t \rangle^2$ acotada. Acorde a (3.19) y (3.20), tenemos:

Proposición 3.2.1. *Si T es el primer tiempo singular del $\text{FCM}\psi$, entonces:*

$$\max_{x \in M_t} \left(|A_t|^2 + \frac{1}{m} \langle \overline{\nabla}\psi, N_t \rangle^2 \right) \geq \frac{1}{2(T-t)}. \quad (3.21)$$

La desigualdad (3.21) podría venir de $|A_t| \rightarrow \infty$ o de $|\langle \overline{\nabla}\psi, N \rangle| \rightarrow \infty$ o de ambas a la vez. Existen situaciones interesantes en las que la singularidad viene de la segunda situación, ya que las singularidades se localizan sobre el conjunto de puntos singulares de ψ . Tal y como probaremos en la sección 3.3, las situaciones descritas por el teorema 3.1.1 son de este tipo.

Al igual que en el FCM , dada la propiedad (3.21), tiene sentido definir:

Definición 3.2.1. *Un $\text{FCM}\psi$ presenta una singularidad de tipo I en $t = T_{\max}$ si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\sup_{M_t} \left(|A|^2 + \frac{1}{b} \langle \overline{\nabla}\psi, N \rangle^2 \right) \leq \frac{C}{T-t} \quad \text{donde } b > 0 \quad (3.22)$$

El número $b > 0$ es irrelevante, solo cambia la constante C en (3.22), pero lo escribimos para mantener la analogía con (3.21) y es útil en el contexto de la hipótesis (3.2) del teorema 3.1.1.

Naturalmente, si $\overline{\nabla}\psi$ está acotado en la región de \overline{M} donde M_t evoluciona por el $\text{FCM}\psi$, la evolución de M_t es de tipo I si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que $\sup_{M_t} |A|^2 \leq \frac{C}{T-t}$.

Una propiedad inmediata de las soluciones en las que se producen singularidades de tipo I es:

Proposición 3.2.2. *Sea una hipersuperficie inmersa $F_0 : M \rightarrow \overline{M}$ compacta, en una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ y supongamos que la solución máxima del $\text{FCM}\psi$ (1.95) $F : M \times [0, T[\rightarrow \overline{M}$ con condición inicial F_0 presenta una singularidad de tipo I en $t = T$, con $T < \infty$. Entonces, la familia de inmersiones $\{F_t\}_{t \in [0, T)}$ converge uniformemente a una función continua $F_T : M \rightarrow \overline{M}$. Más aún, el límite $F(M, T)$ es también compacto.*

Demostración. Dados $p \in M$ y $0 \leq s < t < T$ cualesquiera, tenemos que

$$\begin{aligned} d_{\bar{g}}(F(p, s), F(p, t)) &\leq L_s^t(F(p, \sigma)) = \int_s^t \left| \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right| d\sigma = \int_s^t |H - \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle| d\sigma \\ &\leq \int_s^t (|H| + |\langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle|) d\sigma \leq \int_s^t \frac{\sqrt{C}(\sqrt{n} + \sqrt{b})}{\sqrt{T - \sigma}} d\sigma \\ &= 2\sqrt{C}(\sqrt{n} + \sqrt{b}) \left(-\sqrt{T - t} + \sqrt{T - s} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por tanto, esta familia de inmersiones $\{F_t\}_{t \in [0, T]}$ es de Cauchy para la topología de la convergencia uniforme y al ser dicho espacio completo, implica que la familia debe converger a una función continua $F_T : M \rightarrow \bar{M}$. \square

Al igual que en [34], esta proposición nos lleva a definir:

Definición 3.2.2. Diremos que $p \in \bar{M}$ es un punto de blow-up para el FCM ψ de M si existe un $x \in M$ tal que $F(x, t)$ converge a p y $|A|(x, t)$ o $|\langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle|(x, t)$ son no acotados cuando $t \rightarrow T$.

A continuación desarrollaremos el estudio de estos puntos *blow-up*, por tanto a lo largo de la sección consideraremos que tenemos la siguiente situación:

Sean una variedad riemanniana con densidad (\bar{M}, \bar{g}, ψ) orientable y una hipersuperficie inmersa $F_0 : M \rightarrow \bar{M}$ tal que la única solución máxima $F : M \times [0, T[\rightarrow \bar{M}$ del FCM ψ (1.95) con condición inicial F_0 tenga $T < \infty$, presente una singularidad de tipo I en $t = T$ y tenga $p \in \bar{M}$ como punto de blow-up. Además supondremos que $F_0 : M \rightarrow \bar{M}$ es compacta, sin borde o con borde siempre que este último esté contenido en el borde ∂G de un cierto dominio G de \bar{M} y en ese caso $p \notin \partial G$. Y sea $x \in M$ tal que $F(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow T} p$.

En el caso de hipersuperficies con borde la condición sobre el borde debe ser capaz de garantizar la existencia de solución para tiempos cortos para dicho problema.

3.2.1. Blow-up del espacio ambiente

En primer lugar, para estudiar el punto de *blow-up* debemos reescalar la métrica de la variedad ambiente.

Consideremos una sucesión de tiempos $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_j < \dots < T$ que convergen a T . Para cada t_j , reescalamos la métrica \bar{g} del siguiente modo:

$$\bar{g}^j := \lambda_j^2 \bar{g}, \text{ donde } \lambda_j^2 \equiv \lambda(t_j)^2 := \frac{C}{T - t_j}. \quad (3.24)$$

Por \bar{g}^0 denotaremos a \bar{g} , $\bar{g}^0 \equiv \bar{g}$, equivalentemente $\lambda_0 = 1$. Este proceso de reescalado provoca el mismo efecto entre las métricas $g_t \equiv F_t^* \bar{g}$ y $g_t^j \equiv F_t^* \bar{g}^j$

inducidas por las inmersiones F_t en M . Es decir,

$$g_t^j = \lambda_j^2 g_t. \quad (3.25)$$

Sea $R > 0$ un número real menor que el radio de inyectividad de $(\overline{M}, \overline{g})$ y también menor que la distancia de p a ∂G en la métrica \overline{g} . La familia de variedades riemannianas punteadas $\{(B_R^{\overline{g}}(p), \overline{g}^j, p)\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge en la topología de Cheeger-Gromov C^∞ al espacio euclídeo punteado $(\mathbb{R}^{n+1}, g^e, 0)$. En lo siguiente nos dedicaremos a comprobar este hecho.

Sea una familia de isometrías entre espacios vectoriales $\{\Phi_j : (\mathbb{R}^{n+1}, g^e) \longrightarrow (T_p \overline{M}, \overline{g}_p^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$, definimos la siguiente familia de difeomorfismos:

$$\begin{aligned} \varphi_j : (B_{\lambda_j R}^e(0) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, g^e, 0) &\longrightarrow (B_R^{\overline{g}}(p) \subseteq \overline{M}, \overline{g}^j, p) \\ v &\longmapsto \varphi_j(v) := \exp_p^{\overline{g}^j} \circ \Phi_j(v) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Notemos que para cualquier compacto K de \mathbb{R}^{n+1} existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subsetneq B_{\lambda_j R}^e(0)$ para todo $j \geq j_0$ y la restricción de φ_j a K es un difeomorfismo C^∞ sobre la imagen para todo $j \geq j_0$ (importante la elección de R). Además, φ_j^{-1} nos proporciona coordenadas normales entorno a p en los puntos de $(B_R^{\overline{g}}(p), \overline{g}^j)$, calculando en estas coordenadas obtenemos que la expresión de la métricas \overline{g}^j en coordenadas normales entorno a p es:

$$\tilde{g}_{ik}^j(0) := (\varphi_j^* \overline{g}^j)_{ik}(0) = (\varphi_0^* \overline{g}^0)_{ik}(0) = g_{ik}^e = \delta_{ik}. \quad (3.27)$$

$$\tilde{g}_{ik}^j(v) := (\varphi_j^* \overline{g}^j)_{ik}(v) = (\varphi_0^* \overline{g}^0)_{ik}(v/\lambda_j). \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial v^\ell} \tilde{g}_{ik}^j(v) = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial v^\ell} \tilde{g}_{ik}^0(v/\lambda_j). \quad (3.29)$$

$$\dots \dots \dots \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^r}{\partial v^{\ell_1} \dots \partial v^{\ell_r}} \tilde{g}_{ik}^j(v) = \frac{1}{\lambda_j^r} \frac{\partial^r}{\partial v^{\ell_1} \dots \partial v^{\ell_r}} \tilde{g}_{ik}^0(v/\lambda_j). \quad (3.31)$$

Por tanto $\varphi_j^* \overline{g}^j$ converge C^∞ sobre compactos a g^e cuando $j \rightarrow \infty$ (equivalentemente cuando $\lambda_j \rightarrow \infty$). Y queda demostrada la convergencia de $\{(B_R^{\overline{g}}(p), \overline{g}^j, p)\}_{j \in \mathbb{N}}$ a $(\mathbb{R}^{n+1}, g^e, 0)$ en la topología de Cheeger-Gromov C^∞ .

3.2.2. *Blow-up* de la función densidad

El siguiente paso consiste en estudiar que ocurre con la densidad ψ al trasladar el problema a $(\mathbb{R}^{n+1}, g^e, 0)$.

Para los gradientes de la función ψ respecto de las métricas \overline{g} y \overline{g}^j , se cumple la siguiente relación:

$$\overline{g}(\overline{\nabla} \psi, X) = d\psi(X) = \overline{g}^j(\overline{\nabla}^j \psi, X) = \lambda_j^2 \overline{g}(\overline{\nabla}^j \psi, X), \quad (3.32)$$

$$\text{entonces } \overline{\nabla} \psi = \lambda_j^2 \overline{\nabla}^j \psi. \quad (3.33)$$

Para considerar la función ψ definida en los subconjuntos $B_{\lambda_j R}^e(0)$ de \mathbb{R}^{n+1} , tomamos el *pull-back* de ψ por φ_j y obtenemos las funciones inducidas:

$$\tilde{\psi}^j \equiv \varphi_j^* \psi = \psi \circ \varphi_j : B_{\lambda_j R}^e(0) \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (3.34)$$

Observemos que si $\Phi_0^{-1}(X) = v$, entonces $\Phi_j^{-1}(X) = \lambda_j v$, lo que da:

$$\tilde{\psi}^j(v) = \psi(\exp^{\bar{g}^j} \circ \Phi_j(v)) = \psi(\exp^{\bar{g}} \circ \Phi_0(v/\lambda_j)) = \tilde{\psi}^0(v/\lambda_j). \quad (3.35)$$

En el caso de que ψ sea C^k , $k \in \mathbb{N}$, en un entorno del punto de *blow-up* $p \in \bar{M}$, se cumple que si $C_{\psi(p)} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación constante $v \mapsto C_{\psi(p)}(v) := \psi(p)$, entonces para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\|C_{\psi(p)} - \tilde{\psi}^j\|_{C^k(K)} \rightarrow 0, \text{ cuando } j \rightarrow \infty. \quad (3.36)$$

Lo que nos permite definir una función límite en $(\mathbb{R}^{n+1}, g^e, 0)$ como $\tilde{\psi}^\infty \equiv C_{\psi(p)}$.

Cuando ψ es singular en p , lo anterior no tiene sentido ya que ψ no es continua en p o no está definida en p . A pesar de ello existen situaciones generales donde ψ es singular en p y tiene un cierto límite que nos permite continuar el estudio. Esta será la situación para la demostración del teorema 3.1.1, la cual se verá en la sección 3.3.

3.2.3. Blow-up de las hipersuperficies del flujo

Si p es el punto de *blow-up*, existe $x \in M$ tal que $F(x, t)$ converge a p cuando $t \rightarrow T$. Entonces, de la proposición 3.2.2 se sigue que $F^{-1}(B_R^{\bar{g}}(p))$ es un conjunto abierto en $M \times [0, T[$ que contiene a $\{x\} \times [t_0, T[$ para algún $t_0 \in [0, T[$. Para todo $t \in [t_0, T[$, sea la componente conexa de $M \times \{t\}$ que contiene a (x, t) y contenida en $F^{-1}(B_R^{\bar{g}}(p))$, a partir de ahora a dicha componente conexa la denotaremos por M_t . Debido a la elección de R , todas las geodésicas de (M_t, g_t) empezando en x están definidas para todos los valores de su parámetro longitud de arco o se paran exactamente en el borde de M_t .

Ahora definimos los flujos reescalados $F^j(\cdot, \tau(t))$ de M_t en $(\bar{B}_R^{\bar{g}}(p), \bar{g}^j)$ usando el anterior reescalamiento sobre la métrica, con $t_j > t_0$, y el siguiente reescalamiento del parámetro tiempo

$$\tau = \lambda_j^2(t - t_j) = \frac{C(t - t_j)}{T - t_j}, \quad \tau \in \left[\frac{C(t_0 - t_j)}{T - t_j}, C \right], \quad (3.37)$$

es decir, $F^j : \bigcup_{\tau \in \left[\frac{C(t_0 - t_j)}{T - t_j}, C \right]} M_\tau \longrightarrow (\bar{B}_R^{\bar{g}}(p), \bar{g}^j)$, con $t(\tau) = t_j + (1/C)(T - t_j)\tau = t_j + \lambda_j^{-2}\tau$, está definido por:

$$F^j(\cdot, \tau) := F(\cdot, t_j + \lambda_j^{-2}\tau) \text{ en } (\bar{B}_R^{\bar{g}}(p), \bar{g}^j) \quad (3.38)$$

Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, desde ahora supondremos que $t_0 = 0$.

Sea N_τ^j el campo vectorial normal unitario en la métrica \bar{g}^j de la inmersión $F^j(\cdot, \tau)$ y una referencia local, $\{e_{\tau i}^j\}_{i=1}^n$, ortonormal y tangente a la inmersión $F^j(\cdot, \tau)$. Obviamente, $N_\tau^j = N_\tau/\lambda_j$, $e_{\tau i}^j = e_{\tau i}/\lambda_j$ y las segundas formas fundamentales α y α^j de F y F^j , respectivamente, están relacionadas por:

$$\alpha_\tau(X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N_\tau) = \frac{1}{\lambda_j^2} \bar{g}^j(\bar{\nabla}_X^j Y, \lambda_j N_\tau^j) = \frac{1}{\lambda_j} \alpha_\tau^j(X, Y). \quad (3.39)$$

De donde la relación entre las curvaturas medias es:

$$H_\tau = \sum_i \alpha_\tau(e_{\tau i}, e_{\tau i}) = \sum_i \frac{1}{\lambda_j} \alpha_\tau^j(\lambda_j e_{\tau i}^j, \lambda_j e_{\tau i}^j) = \lambda_j H_\tau^j. \quad (3.40)$$

Y las normas de las segundas formas fundamentales cumplen:

$$|\alpha_\tau|_{\bar{g}}^2 = \sum_{ik} |\alpha_\tau(e_{\tau i}, e_{\tau k})|^2 = \sum_{ik} \frac{1}{\lambda_j^2} \lambda_j^4 |\alpha_\tau^j(e_{\tau i}^j, e_{\tau k}^j)|^2 = \lambda_j^2 |\alpha_\tau^j|_{\bar{g}^j}^2. \quad (3.41)$$

Por otro lado:

$$\bar{g}(\bar{\nabla} \psi, N) = \frac{1}{\lambda_j^2} \bar{g}^j(\lambda_j^2 \bar{\nabla}^j \psi, \lambda_j N^j) = \lambda_j \bar{g}^j(\bar{\nabla}^j \psi, N^j). \quad (3.42)$$

Proposición 3.2.3. Sean una variedad riemanniana con densidad (\bar{M}, \bar{g}, ψ) orientable y una hipersuperficie inmersa $F_0 : M \rightarrow \bar{M}$ compacta y sin borde o con borde contenido en el borde ∂G de un cierto dominio G de \bar{M} , de forma que esto constituya una condición tipo Neumann para el problema de valor inicial tal que garantice la existencia de solución para tiempos cortos para dicho problema. Supongamos que la única solución máxima $F : M \times [0, T[\rightarrow \bar{M}$ del FCM ψ (1.95) con condición inicial F_0 verifica $T < \infty$, presenta una singularidad de tipo I en $t = T$ y $p \in \bar{M}$ es un punto de blow-up. Además supondremos que estamos en una de las dos siguientes situaciones:

- (i) la densidad ψ es regular en p , o
- (ii) ψ es singular en p y el conjunto de puntos singulares de ψ , al que denotaremos por S , es una subvariedad regular de \bar{M} verificando que, dada cualquier curva $c : [0, 1] \rightarrow \bar{M}$ con $c(1) \in S$ y $c([0, 1]) \cap S = \emptyset$, el $\lim_{t \rightarrow 1} \bar{\nabla} \psi / |\bar{\nabla} \psi|(c(t))$ pertenece al fibrado normal de S .

Entonces, en el caso (i), la sucesión de flujos reescalados F^j definidos en (3.38) subconverge diferenciablemente sobre compactos a un FCM ψ $\tilde{F}^\infty : \tilde{M}_\infty \times]-\infty, C[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica euclídea g^e y una densidad $\tilde{\psi}^\infty$ que es constante

(es decir, un FCM). En el caso (ii), quizá el límite $\tilde{\psi}^\infty$ no esté bien definido, pero aún así las aplicaciones F^j subconvergen diferenciablemente sobre compactos a un flujo $\tilde{F}^\infty : \widetilde{M_\infty \times}]-\infty, C[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica euclídea g^e , tal que cada uno de los embebimientos $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau)$ tiene $\tilde{\psi}^\infty$ -curvatura media bien definida y $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau)$ evoluciona por un flujo (3.13) para esa $\tilde{\psi}^\infty$ -curvatura media.

En ambos casos \tilde{F}^∞ presentará una singularidad de tipo I y cualquier hipersuperficie $\tilde{F}^\infty(\widetilde{M_\infty}, \tau)$ con la métrica inducida por la inmersión $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau)$ es completa.

Demostración. Por su definición y las fórmulas (3.40) y (3.42), $F^j(\cdot, \tau)$ cumple la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^j}{\partial \tau} &= \lambda_j^{-2} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\lambda_j^2} H_\psi N = \frac{1}{\lambda_j^2} (\lambda_j H^j - \lambda_j \bar{g}^j(\bar{\nabla}^j \psi, N^j)) \lambda_j N^j \\ &= (H^j - \bar{g}^j(\bar{\nabla}^j \psi, N^j)) N^j. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Entonces cada $F^j(\cdot, \tau)$ es un FCM ψ en la variedad riemanniana con densidad $(B_R^{\bar{g}}(p), \bar{g}^j, \psi)$.

Para todo τ , si utilizamos (3.41), (3.42) y la definición (3.22), obtenemos:

$$|\alpha_\tau^j|_{\bar{g}^j}^2 + \frac{1}{b} \bar{g}^j(\bar{\nabla}^j \psi, N^j)^2 = \frac{1}{\lambda_j^2} |\alpha_\tau|_{\bar{g}}^2 + \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{1}{b} \bar{g}(\bar{\nabla} \psi, N)^2 \leq \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{C}{T-t} = \frac{C}{C-\tau}. \quad (3.44)$$

Por tanto, todo flujo F^j presenta una singularidad de tipo I en $\tau = C$, porque $\tau \in [\frac{-Ct_j}{T-t_j}, C[$ según vimos en (3.37). Notemos que C es independiente de j .

Por la demostración de la proposición 3.2.2 obtenemos:

$$\begin{aligned} d_{\bar{g}^j}(F^j(x, \tau), p) &= \lambda_j d_{\bar{g}}(F^j(x, \tau), p) = \lambda_j d_{\bar{g}}(F(x, t_j + \lambda_j^{-2} \tau), p) \\ &\leq \lambda_j 2\sqrt{C}(\sqrt{n} + \sqrt{b}) \sqrt{T - t_j - \lambda_j^{-2} \tau} \\ &= 2\sqrt{C}(\sqrt{n} + \sqrt{b}) \sqrt{\lambda_j^2(T - t_j) - \tau} \\ &= 2\sqrt{C}(\sqrt{n} + \sqrt{b}) \sqrt{C - \tau}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En particular $F^j(x, \tau) \rightarrow_{\tau \rightarrow C} p$ y por las relaciones (3.41) y (3.42) y ser p un punto de *blow-up* para F , se sigue que $p \in B_R^{\bar{g}}(p)$ es también un punto de *blow-up* para F^j .

Ahora, dado $j_0 \in \mathbb{N}$ arbitrario y fijo, consideremos los flujos F^j , para $j \geq j_0$, con τ definido únicamente en el intervalo cerrado $[-\lambda_{j_0}^2 t_{j_0}, C - \varepsilon]$. Por un lado, por (3.45) $d_{\bar{g}^j}(F^j(x, \tau), p) \leq 2\sqrt{C}(\sqrt{n} + \sqrt{b}) \sqrt{C + \lambda_{j_0}^2 t_{j_0}}$ para todo $\tau \in [-\lambda_{j_0}^2 t_{j_0}, C - \varepsilon]$ y todo $j \geq j_0$. Y por otro, en dicho intervalo (3.44) da una cota

universal ($\frac{C}{C-\tau} \leq \frac{C}{C-(C-\varepsilon)} = \frac{C}{\varepsilon}$) para las cantidades $|\alpha_\tau^j|_{\bar{g}^j}^2 + \frac{1}{b}\bar{g}^j(\bar{\nabla}^j\psi, N^j)^2$.

Como $\bar{g}^j(\bar{\nabla}^j\psi, N^j)$ está acotado, tenemos tres posibilidades:

- 1 ψ es diferenciable en todo punto.
- 2 $F^j(\cdot, \tau)$ no tiene un punto de tangencia con el conjunto singular de ψ para $\tau \leq C - \varepsilon$.
- 3 Existe un primer $\tau_0 \leq C - \varepsilon$ y un punto singular $F^j(x_0, \tau_0)$ de ψ , tal que

$$\lim_{(x,\tau) \rightarrow (x_0,\tau_0)} \bar{g}^j(\bar{\nabla}^j\psi, N^j)(x, \tau) = 0.$$

En el caso 3, por la hipótesis de que $\lim_{z \rightarrow p} \bar{\nabla}^j\psi/|\bar{\nabla}^j\psi|$ pertenece al fibrado normal del conjunto singular S de ψ , deducimos que $F^j(M_{\tau_0}, \tau_0)$ es transversal a S en $F^j(x_0, \tau_0)$. Ya que la hipersuperficie original no toca a S , esto implica que existe un $t(\tau) < t(\tau_0) < T$ donde la hipersuperficie $F(M, t(\tau))$ es tangente a S , pero entonces $|\langle \bar{\nabla}\psi, N \rangle| = \infty$ en este punto, lo que es imposible ya que T es el primer tiempo singular del flujo F . Por tanto, el caso 3 es imposible.

En los casos 1 y 2 el FCM ψ F^j en (\bar{M}, \bar{g}^j) es equivalente al FCM $F^j \times Id$ en $\bar{M} \times_{e^\psi} \mathbb{S}^1$, y la norma de la segunda forma fundamental de las correspondientes inmersiones verifica $|\hat{\alpha}_\tau^j|^2 = |\alpha_\tau^j|_{\bar{g}^j}^2 + \bar{g}^j(\bar{\nabla}^j\psi, N^j)^2 \leq \frac{C(1+b)}{\varepsilon}$. Entonces, el cálculo usual (ver [33]) para el FCM prueba que todas las cantidades $|\hat{\nabla}^{jr}\hat{\alpha}_\tau^j|$ están acotadas para todo $r \in \mathbb{N}$. Gracias a esto, a (3.20) y a las reglas para las derivadas covariantes en un *warped product* dadas en la proposición 1.1.1, se sigue que $|\nabla^{jr}\alpha_\tau^j|$ y $|\nabla^{jr}\langle \bar{\nabla}^j\psi, N^j \rangle|$ están acotadas para todo $r \in \mathbb{N}$. Estas cotas y (3.43) dan también una cota universal para la derivada de F^j respecto de τ . Todas estas cotas están tomadas con respecto a las métricas \bar{g}^j en el espacio ambiente.

A la derivada covariante en \mathbb{R}^{n+1} la denotaremos por $\bar{\nabla}^e$ y por g_τ^{je} , $\tilde{\nabla}_\tau^{je}$, \tilde{N}_τ^{je} , $\tilde{\alpha}_\tau^{je}$ y \tilde{H}_τ^{je} a la correspondiente métrica, normal unitario, segunda forma fundamental y curvatura media de la inmersión $\tilde{F}^j(\cdot, \tau) := \varphi_j^{-1} \circ F^j(\cdot, \tau)$ en $B_{\lambda_j R}^e(0)$ con la métrica euclídea g^e . Como $(B_R^{\bar{g}^j}(p), \bar{g}^j, p)$ converge a $(\mathbb{R}^{n+1}, g^e, 0)$ cuando $j \rightarrow \infty$ (esto es, las métricas $\{\bar{g}^j = \varphi_j^* \bar{g}^j\}_{j \geq j_0}$ convergen a g^e en cada $B_{\lambda_{j_0} R}^{g^e}(0)$), se sigue que:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} |g_\tau^{je} - \varphi_j^* g_\tau^j|_{g^e} &= 0, & \lim_{j \rightarrow \infty} |\tilde{N}_\tau^{je} - \varphi_j^{-1} N_\tau^j|_{g^e} &= 0, & \lim_{j \rightarrow \infty} |\tilde{\alpha}_\tau^{je} - \varphi_j^* \alpha_\tau^j|_{g^e} &= 0, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} |\tilde{H}_\tau^{je} - H_\tau^j \circ \varphi_j|_{g^e} &= 0, & \lim_{j \rightarrow \infty} |(\tilde{\nabla}_\tau^{je})^k \tilde{\alpha}_\tau^{je} - \varphi_j^* (\nabla_\tau^j)^k \alpha_\tau^j|_{g^e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

De (3.46) se sigue que cuando consideramos todas las anteriores magnitudes en \mathbb{R}^{n+1} con la métrica euclídea, estas están también acotadas. Más aún, por (3.45),

la distancia de $\varphi_j^{-1} \circ F^j \left(\bigcup_{\tau \in \left[\frac{C(t_0-t_j)}{T-t_j}, C \right]} M_{t(\tau)} \times \{\tau\} \right)$ a $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ está acotada. Entonces, por argumentos estándar (ver [39] página 91 o [54] página 87), las aplicaciones $\varphi_j^{-1} \circ F^j$ convergen C^∞ sobre compactos a una aplicación diferenciable \tilde{F}^∞ definida en $\tilde{M}_\infty \times]-\infty, C[$, para alguna variedad límite \tilde{M}_∞ , con valores en \mathbb{R}^{n+1} con la métrica euclídea (y con una densidad $\tilde{\psi}^\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\psi}^j$ si el límite existe).

Aunque $\tilde{\psi}^\infty$ no esté definida, siempre existe el límite de las curvaturas medias asociadas a las densidades al que nosotros llamaremos curvatura media asociada a la densidad límite. En efecto, de (3.44) se sigue que H_τ^j y $\bar{g}^j(\bar{\nabla}^j \psi, N^j)$ están acotadas, entonces existe una subsucesión de F^j tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} H_{\psi\tau}^j = \lim_{t \rightarrow \infty} (H_\tau^j - \bar{g}^j(\bar{\nabla}^j \psi, N^j)) =: \tilde{H}_\tau^\infty$ existe, es a este límite al que llamaremos curvatura media asociada a la densidad límite, y está acotado por $\sqrt{\frac{(n+b)C}{\varepsilon}}$ para $\tau \leq C - \varepsilon$.

Por otro lado, ya que tenemos convergencia C^∞ sobre compactos, también respecto de τ , tenemos

$$\frac{\partial \tilde{F}^\infty}{\partial \tau} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_j^{-1} \circ F^j}{\partial \tau} = \lim_{j \rightarrow \infty} (H^j - \bar{g}^j(\bar{\nabla}^j \psi, N^j)) N^j = \tilde{H}_\tau^\infty N^\infty. \quad (3.47)$$

Más aún, el flujo límite \tilde{F}^∞ es también de tipo I, lo que se sigue desde (3.44) y (3.46).

Como hemos tomado M_t como la componente conexa de $M \times \{t\}$ que contiene a (x, t) y contenida en $F^{-1}(B_R^{\bar{g}}(p))$, las geodésicas de (M_t, g_t) , empezando en (x, t) , están bien definidas hasta que tocan el borde de M_t que está contenido en el borde de $B_R^{\bar{g}}(p)$. Pero cuando $j \rightarrow \infty$, este borde se va a infinito; por lo tanto, en el límite, las geodésicas que empiezan en (x, t) están bien definidas hasta el infinito. Entonces la correspondiente variedad límite es completa. \square

3.3. PAC ψ con singularidades tipo I

En esta sección nos situamos en el contexto y las hipótesis del teorema 3.1.1, y daremos la demostración de los apartados 1 al 3 de dicho teorema. Mientras no se diga lo contrario todos los cálculos se realizarán para el problema de inmersiones (3.12), a pesar de que en la exposición de algunos resultados (enunciados de los lemas, proposiciones, teoremas y corolarios) se hace referencia al problema (3.13). La relación entre (3.12) y (3.13) puede consultarse en la sección 2.2.

Dada cualquier inmersión $\gamma : M \rightarrow \bar{M}$ a lo largo de la sección supondremos siempre que $\gamma \in I(\bar{M})$ o $\gamma \in I(G)$ y que γ es simple. El vector normal N

considerado a lo largo de cualquier curva γ simple es el normal “interior”, es decir, el normal que apunta hacia la región delimitada por el soporte de la curva γ y la geodésica Γ del ambiente \bar{M} .

Con el objetivo de clarificar la exposición de los resultados, para referirnos a la situación:

Sean una inmersión $\gamma_0 : M \rightarrow \bar{M}$ tal que $\gamma_0 \in I(\bar{M})$ o $\gamma_0 \in I(G)$ y la (respectivamente una) solución máxima $\gamma : M \times [0, T) \rightarrow \bar{M}$ o $\gamma : M \times [0, T) \rightarrow G$ para el PAC ψ (3.12) (respectivamente (3.13)) con condición inicial γ_0 , en función de si $\gamma_0 \in I(\bar{M})$ o $\gamma_0 \in I(G)$ respectivamente.

Escribiremos:

Sean una inmersión $\gamma_0 : M \rightarrow \bar{M}$ y la (respectivamente una) solución $\gamma(\cdot, t)$ al PAC ψ (3.12) (respectivamente (3.13)) con condición inicial γ_0 .

Para alcanzar este objetivo, describiremos las propiedades básicas del PAC ψ en este ambiente, estudiaremos la existencia de barreras que nos garanticen que el tiempo máximo de existencia de solución sea finito, la preservación del signo de k_ψ y la preservación de la propiedad de ser un grafo (proposiciones 3.3.1, 3.3.2 y corolario 3.3.1, respectivamente). Después daremos una serie de formulas de variación con el objetivo de probar que todas las singularidades que se forman son de tipo I (teorema 3.3.1). El esquema o idea de la demostración de los apartados 1 a 3 de este teorema lo indicamos en la nota 3.3.2. Pevio a todo esto necesitamos una serie de observaciones.

Nota 3.3.1. *Las siguientes propiedades de las curvas y del PAC ψ (3.12) para inmersiones serán utilizadas a partir de ahora:*

$$(a) \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \bar{\nabla} r \right\rangle = \langle k_\psi N, \bar{\nabla} r \rangle = k_\psi u. \quad (3.48)$$

(b) Si la curva en evolución γ_t es un grafo, $\psi' \geq 0$ y N apunta hacia el eje singular Γ (normal interior), entonces $-\langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle = -\psi' \langle \bar{\nabla} r, N \rangle = -\psi' u \geq 0$.

(c) La curva $r = \text{constante}$, tiene ψ -curvatura geodésica:

$$\begin{aligned} k_\psi &= \left\langle \bar{\nabla}_{\partial_z / e^\varphi} \partial_r, \frac{\partial_z}{e^\varphi} \right\rangle - \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle = \varphi' - \langle \bar{\nabla} \psi, N \rangle = \varphi' - \psi' \langle \bar{\nabla} r, -\bar{\nabla} r \rangle \\ &= \varphi' + \psi', \end{aligned} \quad (3.49)$$

que es positiva (de hecho es $+\infty$ si $\lim_{r \rightarrow 0} \psi'(r) = +\infty$) en $r = 0$ y permanece positiva para r en el intervalo $[0, \mathfrak{z}(\varphi' + \psi')]$.

(d) Si aplicamos la fórmula de evolución (3.48) al PAC ψ (3.12) con condición

inicial la curva $r = r_0 < \mathfrak{z}(\varphi' + \psi')$, obtenemos que evoluciona por translación en la dirección del eje r y su posición en dicho eje $r = r(t)$ verifica la ecuación:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\varphi' - \psi' < -\min\{(\varphi' + \psi')(r) \mid 0 < r \leq r_0\} =: -\mu, \quad (3.50)$$

con $r(0) = r_0$, $\mu > 0$, por lo que la solución cumple que $r(t) < r_0 - \mu t$. Entonces, en un tiempo finito $T < r_0/\mu$, $r(T) = 0$ y la curva $r = 0$ tiene ψ -curvatura geodésica $k_\psi = \infty$.

(e) Necesitaremos las fórmulas dadas en la sección 2.3, en particular, la fórmula de variación de k_ψ (2.26), sustituyendo la expresión para el hessiano de ψ (3.17), adquiere la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_\psi}{\partial t} &= \Delta_\psi k_\psi + k_\psi \left(k^2 + \bar{K} - \bar{\nabla}^2 \psi(N, N) \right) \\ &= \Delta_\psi k_\psi + k_\psi \left(k^2 + \bar{K} - \left(\psi'' \langle \bar{\nabla} r, N \rangle^2 + \psi' \varphi' \left(1 - \langle N, \bar{\nabla} r \rangle^2 \right) \right) \right) \\ &= \Delta_\psi k_\psi + k_\psi \left(k^2 + \bar{K} - (\psi'' u^2 + \psi' \varphi' (1 - u^2)) \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Como consecuencia de los apartados (c) y (d) de la nota 3.3.1 y el principio de separación de soluciones, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.3.1. *Sea una inmersión $\gamma_0 : M \rightarrow \bar{M}$ cuyo soporte está acotado por las curvas $r = 0$ y $r = r_0 < \mathfrak{z}(\varphi' + \psi')$. Sea una solución máxima para el PAC ψ (3.13) $\gamma(\cdot, t)$ con condición inicial γ_0 . Entonces el soporte de γ_t está contenido en dicho dominio para todo $t \in [0, T)$. Y además, el tiempo máximo de existencia para γ_t es finito $T < r_0/\mu$, donde μ está definido en (3.50).*

Para llevar a cabo muchas de las estimaciones que realizaremos necesitaremos aplicar el principio del máximo (teorema 1.1.2). Este requiere que el máximo o el mínimo se dé en un punto interior de la curva. Entonces, en el caso en que la curva de estudio tenga borde $\gamma \in I(G)$, tendremos que estudiar lo que ocurre en este borde por separado. En nuestra variedad ambiente las aplicaciones $(r, c - z) \mapsto (r, c + z)$ son isometrías. Si, por ejemplo, el máximo se da en $z = b_2$, podemos considerar la simetría respecto de $z = b_2$, dada por $(r, z) = (r, b_2 + (z - b_2)) \mapsto (r, b_2 - (z - b_2)) = (r, 2b_2 - z)$, que duplica la curva de modo que el punto $z = b_2$ pasa a ser interior y así todos los argumentos pueden ser aplicados. Dicho método puede ser reiterado para obtener una curva no compacta y sin borde pero de periodo finito a la que podemos aplicar el principio del máximo sin ningún problema. El mismo proceso se puede aplicar si el punto de *blow-up* $p \in \partial G$, y así basta con considerar puntos de *blow-up* en el interior de G .

Proposición 3.3.2. *Sean una inmersión $\gamma_0 : M \rightarrow \overline{M}$ tal que $r \leq r_0 < \min\{\mathfrak{z}(\varphi' + \psi'), \sup\{r; (\psi'' + \psi'^2/b)|_{[0,r]} \leq 0\}\}$ y una solución máxima para el PAC ψ (3.13) $\gamma(\cdot, t)$ con condición inicial γ_0 .*

Si $k_\psi \geq 0$ pero no idénticamente 0 en γ_0 , entonces $k_\psi > 0$ para $t > 0$.

Demostración. Por la proposición 3.3.1 y la hipótesis de la acotación de $r \leq r_0 < \min\{\mathfrak{z}(\varphi' + \psi'), \sup\{r; (\psi'' + \psi'^2/b)|_{[0,r]} \leq 0\}\}$ en el instante 0, tenemos que $r(\gamma(\cdot, t)) \leq r_0$ para todo $t \in [0, T[$. Esta desigualdad, $\overline{K} \geq 0$ y Γ geodésica en \overline{M} (equivalentemente $\varphi'(0) = 0$) implican que:

$$\varphi' \leq 0, \quad \varphi'' \leq 0, \quad \psi' > 0, \quad \psi'' < 0. \quad (3.52)$$

Entonces, definimos la siguiente función a lo largo del flujo:

$$f(p, t) := k^2 + \overline{K} - (\psi''u^2 + \psi'\varphi'(1 - u^2)), \quad \text{para todo } (p, t) \in M \times [0, T]. \quad (3.53)$$

Por (3.52) esta función es no negativa para todo $(p, t) \in M \times [0, T]$. Y si la empleamos en (3.51), obtenemos que esta ecuación tiene la forma:

$$\frac{\partial k_\psi}{\partial t} = \Delta_\psi k_\psi + f k_\psi \quad , \quad \text{para todo } (p, t) \in M \times [0, T]. \quad (3.54)$$

Entonces, por el principio fuerte del máximo (por ejemplo, ver [19], página 181), obtenemos $k_\psi(t) > 0$ para $t > 0$. \square

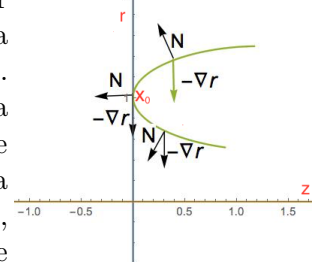
Por (3.52) y, ya que ψ' y ψ'' son continuas en el intervalo $(0, r_0]$ con $\lim_{r \rightarrow 0} \psi' = \infty$ y $\lim_{r \rightarrow 0} \psi'' = -\infty$, existen números reales positivos ϵ, δ tales que:

$$\psi' \geq \epsilon > 0, \quad \psi'' \leq -\delta < 0, \quad \psi'\varphi' \leq 0. \quad (3.55)$$

Corolario 3.3.1. *Supongamos todas las hipótesis del teorema 3.1.1 tanto para la variedad ambiente $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ como para la inmersión $\gamma_0 : M \rightarrow \overline{M}$ inicial. Sea una solución máxima para el PAC ψ (3.13) $\gamma(\cdot, t)$ con condición inicial γ_0 .*

Si $k_\psi \geq 0$ y $\gamma(\cdot, 0)$ es un grafo sobre la geodésica $r = 0$, entonces $\gamma(\cdot, t)$ es un grafo para todo $t \in [0, T[$.

Demostración. En primer lugar, por la proposición 3.3.2 $k_\psi > 0$ para todo $t \in (0, T)$. Por otro lado, ya que u es C^∞ en $M \times]0, T[$, $\sup_{x \in M} u$ es Lipschitz (por tanto continua) en $]0, T[$. Por reducción a lo absurdo, si $\sup_{x \in M} u$ cambia de signo debe existir un primer t_0 donde $(\sup_{x \in M} u)(t_0) = 0$. Por las condiciones sobre el borde, este supremo debe darse en algún punto interior $x_0 \in M$. En este punto $u = \langle \bar{\nabla} r, N \rangle = 0$, entonces la curvatura k de M verifica que $k(x_0) = k_\psi + \psi' u > 0$. Pero esto implica que, en un entorno de x_0 , la curva M_{t_0} está en uno de los lados de su línea tangente, que cumple la ecuación $z = \text{constante}$, y toca esta línea tangente solo en x_0 . Entonces, en este entorno de x_0 , el signo de u cambia en x_0 en contradicción con que $(\sup_{x \in M} u)(t_0) = 0$. Por tanto $\gamma(\cdot, t)$ es un grafo para todo t . \square



Ahora daremos una serie de lemas técnicos, principalmente fórmulas de variación, con el objetivo de probar que bajo las hipótesis del teorema 3.1.1 el PAC ψ produce singularidades de tipo I. La estrategia utilizada es similar a la usada en [34] y [2], y la indicamos en la siguiente nota.

Nota 3.3.2. (Esquema de la demostración del Teorema 3.1.1) *La idea es probar que la parte $k_2 := -\psi' u = -\langle \nabla \psi, N \rangle$ (positiva ya que $\psi' > 0$ y la curva es un grafo, esto es, $u < 0$) de $k_\psi = k + k_2$ domina, salvo constante, la parte dada por la curvatura geodésica estándar k de la curva. Entonces, por la hipótesis (3.2), ψ' está dominada, de nuevo salvo constante, por $1/r$. Por tanto todas las “curvaturas” serán dominadas por $1/r$ y de aquí finalmente se probará que verifica la propiedad de ser tipo I. Los puntos clave son las estimaciones sobre los cocientes k_2/k_ψ y k/k_2 , las cuales se obtienen de sus respectivas fórmulas de variación cuyo cálculo requiere a su vez de otras fórmulas de variación que calcularemos ahora.*

Lema 3.3.1. *La evolución de $r(\gamma(\cdot, t))$ cuando $\gamma(\cdot, t)$ evoluciona en una superficie \bar{M} bajo el PAC ψ (3.12) es*

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \Delta_\psi r + \varphi' |\nabla r|^2 - \varphi' - \psi'. \quad (3.56)$$

Demostración. En la curva el laplaciano de r , Δr , es exactamente $\mathbf{t}tr$ ya que $\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = 0$. Entonces el ψ -laplaciano es:

$$\Delta_\psi r = \mathbf{t}^2(r) + \langle \psi' \bar{\nabla} r, \mathbf{t} \rangle \langle \bar{\nabla} r, \mathbf{t} \rangle = \mathbf{t}^2(r) + \psi' \langle \bar{\nabla} r, \mathbf{t} \rangle^2 = \mathbf{t}^2(r) + \psi' (1 - u^2),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}^2(r) &= \mathbf{t} \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{t}} \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle + \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla}_{\mathbf{t}} \bar{\nabla} r \rangle \\
&= k \langle \bar{\nabla} r, N \rangle + \langle \mathbf{t}, \varphi'(\mathbf{t} - \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle \bar{\nabla} r) \rangle = k \langle \bar{\nabla} r, N \rangle + \varphi' - \varphi' \langle \bar{\nabla} r, \mathbf{t} \rangle^2 \\
&= (k_{\psi} + \langle \psi' \bar{\nabla} r, N \rangle) \langle \bar{\nabla} r, N \rangle + \varphi' \langle \bar{\nabla} r, N \rangle^2 \\
&= k_{\psi} \langle \bar{\nabla} r, N \rangle + (\psi' + \varphi') \langle \bar{\nabla} r, N \rangle^2.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\Delta_{\psi} r = k_{\psi} \langle \bar{\nabla} r, N \rangle + \psi' + \varphi' \langle \bar{\nabla} r, N \rangle^2.$$

Utilizando esta expresión en (3.48) y que $\langle \bar{\nabla} r, N \rangle^2 = 1 - |\nabla r|^2$:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \Delta_{\psi} r - \psi' - \varphi' \langle \bar{\nabla} r, N \rangle^2 = \Delta_{\psi} r + \varphi' |\nabla r|^2 - \varphi' - \psi'.$$

Y queda probado el resultado. \square

Lema 3.3.2. *La evolución de $u(\gamma(\cdot, t))$ cuando $\gamma(\cdot, t)$ evoluciona en una superficie \bar{M} bajo el PAC ψ (3.12) es:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\psi} u - (\psi' \varphi' + \varphi'^2 - \varphi'' - \psi'') u(1 - u^2) + (k + \varphi' u)^2 u. \quad (3.57)$$

Demostración. Usando (2.21) y (3.17) para $\psi = r$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k_{\psi} \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla} r, N \rangle - \langle \bar{\nabla} r, \nabla k_{\psi} \rangle \\
&= k_{\psi} \varphi' (1 - u^2) - \langle \bar{\nabla} r, \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} k + \langle \bar{\nabla} r, \nabla(\psi' u) \rangle \\
&= k_{\psi} \varphi' (1 - u^2) - \langle \bar{\nabla} r, \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} k + \psi' \langle \bar{\nabla} r, \nabla u \rangle + u \psi'' \langle \bar{\nabla} r, \nabla r \rangle.
\end{aligned} \quad (3.58)$$

Calculemos ahora el ψ -laplaciano:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\psi} u &= \mathbf{t} \mathbf{t} u + \psi' \langle \bar{\nabla} r, \nabla u \rangle, \\
\mathbf{t} u &= \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{t}} N, \bar{\nabla} r \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{\mathbf{t}} \bar{\nabla} r \rangle = -k \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle + \langle N, \varphi'(\mathbf{t} - \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle \bar{\nabla} r) \rangle \\
&= -(k + \varphi' u) \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle, \\
\mathbf{t} \mathbf{t} u &= -((\mathbf{t} k) + \varphi'' \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle u + \varphi' (-(k + \varphi' u) \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle)) \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle \\
&\quad - (k + \varphi' u) (k \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \langle \mathbf{t}, \varphi'(\mathbf{t} - \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle \bar{\nabla} r) \rangle) \\
&= -(\mathbf{t} k) \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle + \varphi' k (1 - u^2) + (\varphi'^2 - \varphi'') u (1 - u^2) - k^2 u \\
&\quad - 2\varphi' k u^2 - \varphi'^2 u^3, \\
\Delta_{\psi} u &= -(\mathbf{t} k) \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle + \varphi' k (1 - u^2) + (\varphi'^2 - \varphi'') u (1 - u^2) - k^2 u \\
&\quad - 2\varphi' k u^2 - \varphi'^2 u^3 + \psi' \langle \nabla r, \nabla u \rangle.
\end{aligned} \quad (3.59)$$

Sustituyendo esta expresión en (3.58), obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k_\psi \varphi'(1-u^2) + \Delta_\psi u - \varphi' k(1-u^2) - (\varphi'^2 - \varphi'') u(1-u^2) + k^2 u \\ &\quad + 2\varphi' k u^2 + \varphi'^2 u^3 + u\psi''(1-u^2) \\ &= \Delta_\psi u - (\psi' \varphi' + \varphi'^2 - \varphi'' - \psi'') u(1-u^2) + k^2 u + 2\varphi' k u^2 + \varphi'^2 u^3.\end{aligned}$$

□

Lema 3.3.3. *La evolución de $(\psi' u)(\gamma(\cdot, t))$ cuando $\gamma(\cdot, t)$ evoluciona en una superficie \bar{M} bajo el PAC ψ (3.12) es:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\psi' u)}{\partial t} &= \Delta_\psi(\psi' u) + \frac{-\psi'' \psi' - \psi'' \varphi'}{\psi'^3} (\psi' u)^3 + (k + \varphi' u)^2 \psi' u \\ &\quad + (-\psi''' u - (\psi' \varphi' + \varphi'^2 - \varphi'') u \psi' + 2\psi'' (k + \varphi' u)) (1-u^2).\end{aligned}\quad (3.60)$$

Demostración. Consideremos el operador $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\psi$ actuando sobre $\psi' u$.

$$\frac{\partial(\psi' u)}{\partial t} - \Delta_\psi(\psi' u) = u \left(\frac{\partial \psi'}{\partial t} - \Delta_\psi \psi' \right) + \psi' \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_\psi u \right) - 2 \langle \nabla \psi', \nabla u \rangle.\quad (3.61)$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = \psi'' \frac{\partial r}{\partial t} = \psi'' k_\psi u = \psi'' (ku - \psi' u^2).\quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}\Delta \psi' &= \mathbf{t} \mathbf{t} \psi' = \mathbf{t} (\psi'' \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle) \\ &= \psi''' (1-u^2) + \psi'' (k \langle N, \bar{\nabla} r \rangle + \varphi' \langle \mathbf{t}, (\mathbf{t} - \langle \mathbf{t}, \bar{\nabla} r \rangle \bar{\nabla} r) \rangle) \\ &= \psi''' (1-u^2) + \psi'' ku + \psi'' \varphi' u^2.\end{aligned}\quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}u \left(\frac{\partial \psi'}{\partial t} - \Delta_\psi \psi' \right) &= u (\psi'' (ku - \psi' u^2) - \psi''' (1-u^2) - \psi'' ku - \psi'' \varphi' u^2 \\ &\quad - \psi' \psi'' (1-u^2)) \\ &= -u (\psi'' \psi' u^2 + (\psi''' + \psi' \psi'') (1-u^2) + \psi'' \varphi' u^2).\end{aligned}\quad (3.64)$$

De (3.57), (3.61) y (3.64), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\psi' u)}{\partial t} - \Delta_\psi(\psi' u) &= -u (\psi'' \psi' u^2 + (\psi''' + \psi' \psi'') (1-u^2) + \psi'' \varphi' u^2) \\ &\quad + \psi' \left(-(\psi' \varphi' + \varphi'^2 - \varphi'' - \psi'') u(1-u^2) + (k + \varphi' u)^2 u \right) \\ &\quad + 2\psi'' (k + \varphi' u) (1-u^2),\end{aligned}$$

de donde se sigue la fórmula (3.60). □

Si la curva es un grafo sobre la geodésica $r = 0$ y $\psi' \neq 0$, entonces $k_2 := -\psi' u > 0$ como se vio en la Nota 3.3.2.

Ahora, queremos probar que $k_2 \leq Ck_\psi$ para alguna constante C independiente de t . Observemos que si $k \geq 0$, como $k_2 > 0$ y $k_\psi > 0$, entonces $k_2 \leq k_\psi$, lo que da $\frac{k_2}{k_\psi} \leq 1$, de modo que las dificultades para probar la acotación aparecen solo cuando $k < 0$. Empezaremos por calcular la variación del cociente $\frac{k_2}{k_\psi}$.

Lema 3.3.4. *La evolución de $\frac{k_2}{k_\psi}$ cuando γ_t evoluciona en una superficie \bar{M} bajo el PAC ψ (3.12) es:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) &= \Delta_\psi \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) + \frac{2}{k_\psi} \left\langle \nabla \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right), \nabla k_\psi \right\rangle \\ &\quad + \frac{k_2}{k_\psi} \left(\frac{\psi'' \varphi'}{\psi'} (2 - 3u^2) + 2u^2 \varphi'^2 - \frac{\psi'''}{\psi'} (1 - u^2) + \varphi'' (2 - u^2) \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{k_2}{k_\psi} - 1 \right) (\varphi' \psi' u^2 + \psi'' (1 - u^2)). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Demostración. Si utilizamos la fórmula

$$\Delta_\psi \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) = -\frac{k_2}{k_\psi^2} \Delta_\psi k_\psi + \frac{1}{k_\psi} \Delta_\psi k_2 - \frac{2}{k_\psi} \left\langle \nabla \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right), \nabla k_\psi \right\rangle \quad (3.66)$$

y las ecuaciones (3.51) y (3.60):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) &= \Delta_\psi \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) + \frac{2}{k_\psi} \left\langle \nabla \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right), \nabla k_\psi \right\rangle + \frac{1}{k_\psi} \left(\frac{\partial}{\partial t} k_2 - \Delta_\psi k_2 \right) \\ &\quad - \frac{k_2}{k_\psi^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} k_\psi - \Delta_\psi k_\psi \right) \\ &= \Delta_\psi \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) + \frac{2}{k_\psi} \left\langle \nabla \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right), \nabla k_\psi \right\rangle + \frac{k_2}{k_\psi} \left(-\frac{\psi''(\psi' + \varphi')}{\psi'^3} k_2^2 + k^2 + 2k\varphi'u \right. \\ &\quad \left. + \varphi'^2 u^2 - \left(\frac{\psi'''}{\psi'} + \varphi'(\psi' + \varphi') - \varphi'' \right) (1 - u^2) - 2\psi'' \left(\frac{k}{k_2} - \frac{\varphi'}{\psi'} \right) (1 - u^2) \right) \\ &\quad - \frac{k_2}{k_\psi} (k^2 - \varphi'' - \varphi'^2 - \psi'' u^2 - \psi' \varphi' (1 - u^2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) - \Delta_\psi \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) - \frac{2}{k_\psi} \left\langle \nabla \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right), \nabla k_\psi \right\rangle \\
&= \frac{k_2}{k_\psi} \left(-\frac{\psi'' \varphi'}{\psi'} u^2 - 2 \frac{k}{k_2} \varphi' \psi' u^2 + \varphi'^2 (1 + u^2) - \left(\frac{\psi'''}{\psi'} + \varphi'^2 - \varphi'' \right) (1 - u^2) \right. \\
&\quad \left. - 2 \psi'' \left(\frac{k}{k_2} - \frac{\varphi'}{\psi'} \right) (1 - u^2) + \varphi'' \right) \\
&= \frac{k_2}{k_\psi} \left(\frac{\psi'' \varphi'}{\psi'} (2 - 3u^2) - 2 \frac{k}{k_2} (\varphi' \psi' u^2 + \psi'' (1 - u^2)) + 2u^2 \varphi'^2 - \frac{\psi'''}{\psi'} (1 - u^2) \right. \\
&\quad \left. + \varphi'' (2 - u^2) \right) \\
&= \frac{k_2}{k_\psi} \left(\frac{\psi'' \varphi'}{\psi'} (2 - 3u^2) + 2u^2 \varphi'^2 - \frac{\psi'''}{\psi'} (1 - u^2) + \varphi'' (2 - u^2) \right) \\
&\quad - 2 \left(1 - \frac{k_2}{k_\psi} \right) (\varphi' \psi' u^2 + \psi'' (1 - u^2)).
\end{aligned}$$

Donde, en la última igualdad, hemos usado que $\frac{k}{k_\psi} = 1 - \frac{k_2}{k_\psi}$. \square

Lema 3.3.5. *Bajo las hipótesis del teorema 3.1.1 para todo $t_0 \in]0, T[$ el cociente $\frac{k_2}{k_\psi}$ está uniformemente acotado en $M \times]t_0, T[$ por $\max\{1, \left(\max_{M_{t_0}} \frac{k_2}{k_\psi} \right) e^{\alpha r_0 / \mu}\}$, donde $r_0 = \max\{r(x) \mid x \in M_{t_0}\}$, $\mu = \min\{(\varphi' + \psi')(r) \mid 0 < r \leq r_0\}$ y α es una constante que depende de $\varphi|_{[0, r_0]}$ y $\psi|_{[0, r_0]}$*

Demostración. Cuando las hipótesis del teorema 3.1.1 se cumplen, sabemos por la proposición 3.3.2 que $k_\psi(t) > 0$ para todo $t \in]0, T[$ y el cociente $\frac{k_2}{k_\psi}$ está bien definido para todo t . Además, por el corolario 3.3.1 y la primera igualdad de (3.55) tenemos que la función $\frac{k_2}{k_\psi} : M \times]t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente positiva. De la desigualdad (3.52) se sigue que $\varphi' \psi' u^2 + \psi'' (1 - u^2) \leq 0$. Por (3.2) se tiene que $-\frac{\psi'''}{\psi'} (1 - u^2) \leq C_2$, para alguna $C_2 > 0$ y todo $r \in]0, r_0]$, y por (3.2) y (3.6) que $\frac{\psi'' \varphi'}{\psi'} (2 - 3u^2) \leq C_1$, para algún $C_1 > 0$ y todo $r \in]0, r_0]$, y obviamente $2u^2 \varphi'^2 \leq C_3 > 0$. Sustituyendo estas desigualdades en (3.65), obtenemos que o

bien $\frac{k_2}{k_\psi} \leq 1$ o

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) \leq \Delta_\psi \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) + \frac{2}{k_\psi} \left\langle \nabla \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right), \nabla k_\psi \right\rangle + \frac{k_2}{k_\psi} \left(C_1 + C_3 + C_2 \right).$$

Por el principio del máximo (teorema 1.1.2), k_2/k_ψ está acotado superiormente por la solución de la ecuación $y'(t) = \alpha y(t)$, $\alpha = C_1 + C_2 + C_3$, con la condición inicial $y(t_0) = \max_{M_{t_0}}(k_2/k_\psi)$, esto es:

$$\frac{k_2}{k_\psi}(p, t) \leq \left(\max_{M_{t_0}} \frac{k_2}{k_\psi} \right) e^{\alpha(t-t_0)},$$

para todo $t \in [t_0, T[$. Por la Nota 3.3.1, T es finito y es menor que r_0/μ , entonces

$$\frac{k_2}{k_\psi}(p, t) \leq \left(\max_{M_{t_0}} \frac{k_2}{k_\psi} \right) e^{\alpha(T-t_0)} \leq \left(\max_{M_{t_0}} \frac{k_2}{k_\psi} \right) e^{\alpha r_0/\mu}. \quad (3.67)$$

La afirmación del lema se deriva de estas observaciones. \square

Lema 3.3.6. *Para todo número real $b > 0$ cuando γ_t evoluciona en una superficie \bar{M} bajo el PAC ψ (3.12), se cumple:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{k_2} \right) &= \Delta_\psi \left(\frac{k}{k_2} \right) + \frac{2}{k_2} \left\langle \nabla \left(\frac{k}{k_2} \right), \nabla k_2 \right\rangle \\ &+ 2 \frac{k_\psi}{k_2} \left[\left(\frac{b \psi'' + \psi'^2}{b} (1 - u^2) + \varphi' \psi' u^2 \right) \frac{k}{k_2} + \frac{1}{b} \psi'^2 (1 - u^2) \left(\frac{1}{b} - \frac{k}{k_2} \right) \right] \\ &+ \frac{k_\psi}{k_2} \left[-\varphi'' (2 - u^2) - 2\varphi'^2 u^2 + \left(\frac{\psi'''}{\psi'} - \frac{2}{b^2} \psi'^2 \right) (1 - u^2) + \frac{\psi'' \varphi'}{\psi'} (-2 + 3u^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Demostración. Calculando como en la demostración del lema 3.3.4 y utilizando

(3.65), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{k_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k_\psi}{k_2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{k_2/k_\psi} \right) = - \left(\frac{k_\psi}{k_2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) \\
&= \Delta_\psi \left(\frac{k_\psi}{k_2} \right) + 2 \frac{k_\psi}{k_2} \left\langle \nabla \left(\frac{k_\psi}{k_2} \right), \nabla \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) \right\rangle - \left(\frac{k_\psi}{k_2} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) - \Delta_\psi \left(\frac{k_2}{k_\psi} \right) \right) \\
&= \Delta_\psi \left(\frac{k}{k_2} \right) + \frac{2}{k_2} \left\langle \nabla \left(\frac{k}{k_2} \right), \nabla k_2 \right\rangle + 2(\psi''(1-u^2) + \varphi'\psi'u^2) \frac{k_\psi}{k_2} \frac{k}{k_2} \\
&\quad + \frac{2}{b^2} \psi'^2 \frac{k_\psi}{k_2} (1-u^2) \\
&\quad + \frac{k_\psi}{k_2} \left[-\varphi''(2-u^2) - 2\varphi'^2 u^2 + \left(\frac{\psi'''}{\psi'} - \frac{2}{b^2} \psi'^2 \right) (1-u^2) + \frac{\psi''\varphi'}{\psi'} (-2+3u^2) \right] \\
&= \Delta_\psi \left(\frac{k}{k_2} \right) + \frac{2}{k_2} \left\langle \nabla \left(\frac{k}{k_2} \right), \nabla k_2 \right\rangle + 2 \frac{k_\psi}{k_2} \left[(\psi''(1-u^2) + \varphi'\psi'u^2) \frac{k}{k_2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{b^2} \psi'^2 (1-u^2) \right] \\
&\quad + \frac{k_\psi}{k_2} \left[-\varphi''(2-u^2) - 2\varphi'^2 u^2 + \left(\frac{\psi'''}{\psi'} - \frac{2}{b^2} \psi'^2 \right) (1-u^2) + \frac{\psi''\varphi'}{\psi'} (-2+3u^2) \right] \\
&= \Delta_\psi \left(\frac{k}{k_2} \right) + \frac{2}{k_2} \left\langle \nabla \left(\frac{k}{k_2} \right), \nabla k_2 \right\rangle \\
&\quad + 2 \frac{k_\psi}{k_2} \left[\left(\frac{b\psi'' + \psi'^2}{b} (1-u^2) + \varphi'\psi'u^2 \right) \frac{k}{k_2} + \frac{1}{b} \psi'^2 (1-u^2) \left(\frac{1}{b} - \frac{k}{k_2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{k_\psi}{k_2} \left[-\varphi''(2-u^2) - 2\varphi'^2 u^2 + \left(\frac{\psi'''}{\psi'} - \frac{2}{b^2} \psi'^2 \right) (1-u^2) + \frac{\psi''\varphi'}{\psi'} (-2+3u^2) \right].
\end{aligned}$$

□

Lema 3.3.7. *Bajo las hipótesis del teorema 3.1.1, el cociente $|k/k_2|$ está uniformemente acotado en $\gamma(\cdot, t)$ para $t \in [0, T[$.*

Demostración. Si $k \leq 0$, por la proposición 3.3.2 $k_\psi(p, t) \geq 0$ para todo $(p, t) \in M \times [0, T)$. Entonces $k + k_2 \geq 0$ implica que $k_2 \geq |k|$. Por tanto en este caso ya hemos finalizado.

Si $0 \leq k/k_2 \leq 1/b$, ya hemos terminado. Si $k/k_2 > 1/b$, en la fórmula del lema 3.3.6 el sumando que contiene el término $1/b - k/k_2$ es negativo (porque $k_\psi/k_2 > 0$) y, gracias otra vez a (3.2), (3.52) y (3.55), el coeficiente de k/k_2 es no positivo y el otro sumando que multiplica a $k_\psi/k_2 = 1 + k/k_2$ está acotado por una constante δ uniforme, ya que φ es diferenciable y por la hipótesis (3.3)

$\psi'''/\psi' - 2\psi'^2/b^2$ está acotado superiormente. Entonces podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{k_2} \right) \leq \Delta_\psi \left(\frac{k}{k_2} \right) + \frac{2}{k_2} \left\langle \nabla \left(\frac{k}{k_2} \right), \nabla k_2 \right\rangle + \delta \frac{k}{k_2} + \delta \quad (3.69)$$

y por el principio del máximo (teorema 1.1.2):

$$\frac{k}{k_2} \leq (1 + \max_{M_0} \frac{k}{k_2}) e^{\delta T} - 1 \leq (1 + \max_{M_0} \frac{k}{k_2}) e^{(\delta r_0)/\mu} - 1. \quad (3.70)$$

□

Corolario 3.3.2. *Las singularidades del flujo ocurren cuando y solo cuando la curva en evolución toca el eje Γ .*

Teorema 3.3.1. *Bajo las hipótesis del teorema 3.1.1, el PAC ψ (3.13) desarrollará, en el primer punto singular, una singularidad de tipo I.*

Demostración. En lugar de (3.12) podemos usar el flujo equivalente:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{k_\psi}{\langle N, \bar{\nabla} r \rangle} \bar{\nabla} r. \quad (3.71)$$

Que tiene sentido cuando la curva en evolución es un grafo sobre Γ , ya que esto implica que $\langle N, \bar{\nabla} r \rangle < 0$ nunca se anula y (3.71) es equivalente a (3.12) ya que $\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N \right\rangle = k_\psi$. Bajo este flujo, la variación de r está dada por:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \left\langle \bar{\nabla} r, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \bar{\nabla} r, \frac{k_\psi}{\langle N, \bar{\nabla} r \rangle} \bar{\nabla} r \right\rangle = \frac{k_\psi}{u} = \frac{k}{u} - \psi'. \quad (3.72)$$

De los lemas 3.3.7 y 3.3.5 $|k| \leq C_1(-\psi' u) \leq C_2(-\psi' u + k)$, entonces (recorremos que $u < 0$) $\frac{k}{u} \leq \left| \frac{k}{u} \right| \leq C_2(\psi' - \frac{k}{u})$, esto es $(1 + C_2)\frac{k}{u} \leq C_2 \psi'$. Por esto y (3.72),

$$\frac{\partial r}{\partial t} \leq \left(\frac{C_2}{1 + C_2} - 1 \right) \psi' = -\frac{1}{1 + C_2} \psi' \leq -C_3 \frac{b}{r}, \quad (3.73)$$

donde hemos usado (3.2) para la última desigualdad, por tanto:

$$\frac{\partial r^2}{\partial t} \leq -2 b C_3 =: -C_4,$$

y, para cualquier $0 < t < t_1 < T$, tenemos que,

$$r^2(t_1) - r^2(t) \leq -C_4(t_1 - t), \quad \frac{1}{r^2(t)} \leq \frac{1}{r^2(t_1) + C_4(t_1 - t)} \leq \frac{1}{C_4(t_1 - t)},$$

para todo $t_1 < T$. Tomando límites cuando $t_1 \rightarrow T$, tenemos la desigualdad:

$$\frac{1}{r(t)} \leq \frac{1}{\sqrt{C_4(T-t)}} \quad (3.74)$$

Por otro lado, por el lema 3.3.7, la definición de k_2 , y (3.74),

$$|k_2|^2 + |k|^2 \leq (1 + C_1^2)k_2^2 \leq (1 + C_1^2)\psi'^2 \leq C_5 \frac{b^2}{r^2} \leq \frac{C_5 b^2}{C_4(T-t)}. \quad (3.75)$$

Lo que prueba que la singularidad es de tipo I. \square

3.4. Convergencia de ciertos *blow-ups* (demostración del punto 4 del teorema 3.1.1)

Supongamos que tenemos un FCM ψ en \mathbb{R}^{n+1} con la métrica euclídea y con una densidad $\psi(p) = b \ln r(p)$, donde $r(p)$ es la distancia euclídea de p al eje $z \equiv x_{n+1}$ de \mathbb{R}^{n+1} .

Sea una aplicación $u : \mathbb{R}^{n+1} \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$u(p, t) := \frac{1}{(4\pi(T-t))^{(n+b)/2}} e^{\frac{-|p|^2}{4(T-t)}} \quad (3.76)$$

Tendremos la siguiente fórmula de monotonía análoga a la fórmula de Huisken para el FCM en [34].

Proposición 3.4.1. *Sea una familia de inmersiones $F : M \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de una hipersuperficie M que evoluciona por el FCM ψ tal que o M es compacta o el volumen euclídeo de dimensión $n - 1$ de las intersecciones de M_t con las bolas cerradas \overline{B}_R de \mathbb{R}^{n+1} centradas en el origen está acotado por $f(t)R^q$, con $f(t) > 0$ y q un número positivo fijo, entonces:*

$$\frac{d}{dt} \int_M u(F(x, t), t) dv_\psi = - \int_M \left(H_\psi + \frac{\langle F(x, t), N(F(x, t)) \rangle}{2(T-t)} \right)^2 u(F(x, t), t) dv_\psi \quad (3.77)$$

Cuando $b = m \in \mathbb{N}$ recuperamos la fórmula de monotonía de Huisken restringida a hipersuperficies en \mathbb{R}^{n+1+m} obtenidas por la rotación de una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} .

Demostración. Primero necesitamos dar una fórmula tipo Minkowski. Para una hipersuperficie $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la fórmula clásica de Minkowski afirma que

$\Delta(\frac{1}{2}|X|^2) = n + H \langle N, X \rangle$. En nuestro caso precisaremos de la fórmula análoga en densidad, calculemosla a partir de la estándar:

$$\begin{aligned} \Delta_\psi(\frac{1}{2}|X|^2) &= n + H \langle N, X \rangle + \left\langle \nabla\psi, \nabla(\frac{1}{2}|X|^2) \right\rangle \\ &= n + H \langle N, X \rangle + \left\langle \bar{\nabla}\psi, \frac{1}{2}\bar{\nabla}|X|^2 \right\rangle - \langle \bar{\nabla}\psi, N \rangle \left\langle \frac{1}{2}\bar{\nabla}|X|^2, N \right\rangle \\ &= n + H_\psi \langle N, X \rangle + \langle \bar{\nabla}\psi, X \rangle. \end{aligned}$$

Si $\psi(p) = b \ln r(p)$, $\langle \bar{\nabla}\psi, X \rangle = b_{r(X)} \langle \bar{\nabla}r, X \rangle = b$, entonces:

$$\Delta_\psi(\frac{1}{2}|X|^2) = n + b + H_\psi \langle N, X \rangle. \quad (3.78)$$

Ahora procedemos a derivar teniendo en cuenta (1.64):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M \mathbf{u}(F(x, t), t) dv_\psi \\ = \int_M \left(\frac{1}{2(T-t)} \left(n + b - \frac{|F|^2}{2(T-t)} - H_\psi \langle F, N \rangle \right) - H_\psi^2 \right) \mathbf{u} dv_\psi. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Y sustituyendo (3.78) en la anterior expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M \mathbf{u}(F(x, t), t) dv_\psi \\ = \int_M \left(\frac{1}{2(T-t)} \Delta_\psi \left(\frac{1}{2}|F|^2 \right) - \frac{|F|^2}{4(T-t)^2} - 2 \frac{H_\psi \langle F, N \rangle}{2(T-t)} - H_\psi^2 \right) \mathbf{u} dv_\psi. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Por otro lado, notemos que:

$$\int_M \frac{|F|^2}{4(T-t)^2} dv_\psi = \int_M \frac{|F^\top|^2}{4(T-t)^2} dv_\psi + \int_M \frac{\langle N, F \rangle^2}{4(T-t)^2} dv_\psi \quad (3.81)$$

Si M es compacto, podemos aplicar el teorema de Stokes para el ψ -laplaciano, con el ψ -volumen, a:

$$\begin{aligned} \int_M \left(\frac{1}{2(T-t)} \Delta_\psi \left(\frac{1}{2}|F|^2 \right) \right) \mathbf{u} dv_\psi &= - \int_M \frac{1}{2(T-t)} \left\langle \nabla \left(\frac{1}{2}|F|^2 \right), \nabla \mathbf{u} \right\rangle dv_\psi \\ &= \int_M \frac{1}{4(T-t)^2} \left\langle \nabla \left(\frac{1}{2}|F|^2 \right), \nabla \left(\frac{1}{2}|F|^2 \right) \right\rangle \mathbf{u} dv_\psi = \int_M \frac{1}{4(T-t)^2} |F^\top|^2 \mathbf{u} dv_\psi. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Sustituyendo (3.81) y (3.82) en (3.80)

$$\frac{d}{dt} \int_M \mathbf{u}(F(x, t), t) dv_\psi = \int_M \left(-\frac{\langle N, F \rangle^2}{4(T-t)^2} - 2\frac{H_\psi \langle F, N \rangle}{2(T-t)} - H_\psi^2 \right) \mathbf{u} dv_\psi \quad (3.83)$$

esto nos da (3.77).

Si M no es compacto, podemos calcular la integral a lo largo de M como el límite de integrales a lo largo de sus intersecciones $M_{tR} := M_t \cap \bar{B}_R$ con las bolas cerradas \bar{B}_R de \mathbb{R}^{n+1} centradas en el origen con radio R cuando $R \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} & \int_{M_{tR}} \left(\frac{1}{2(T-t)} \Delta_\psi \left(\frac{1}{2} |F|^2 \right) \right) \mathbf{u} dv_\psi \\ &= - \int_{M_{tR}} \frac{1}{2(T-t)} \left\langle \nabla \left(\frac{1}{2} |F|^2 \right), \nabla \mathbf{u} \right\rangle dv_\psi + \int_{\partial M_{tR}} \frac{1}{2(T-t)} \nu \left(\frac{1}{2} |F|^2 \right) \mathbf{u} dv_\psi \\ &= \int_M \frac{1}{4(T-t)^2} |F^\top|^2 \mathbf{u} dv_\psi + \int_{\partial M_{tR}} \frac{1}{2(T-t)} \nu \left(\frac{1}{2} |F|^2 \right) \mathbf{u} dv_\psi \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde ν es el campo normal unitario exterior a ∂M_{tR} . Estudiemos el último término de (3.84).

$$\begin{aligned} \int_{\partial M_{tR}} \nu \left(\frac{1}{2} |F|^2 \right) \mathbf{u} dv_\psi &= (4\pi(T-t))^{-(n+b)/2} e^{-R^2/(4(T-t))} \int_{\partial M_{tR}} \langle \nu, F \rangle r(F)^b dv \\ &\leq (4\pi(T-t))^{-(n+b)/2} e^{-R^2/(4(T-t))} R^{b+1} \int_{\partial M_{tR}} dv \\ &\leq (4\pi(T-t))^{-(n+b)/2} e^{-R^2/(4(T-t))} f(t) R^{q+b+1} \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Y a partir de este punto podemos continuar la demostración de la fórmula como en el caso compacto. \square

Nuestro objetivo es aplicar la anterior fórmula a un FCM ψ de un grafo completo $(z, r(z))$ sobre el eje z en \mathbb{R}^2 . En este caso M no es compacto, pero es sencillo comprobar que la condición de la anterior proposición se cumple si tomamos cuadrados cerrados C_R centrados en 0 de lado $2R$ en lugar de bolas \bar{B}_R . En efecto, en este caso el teorema tipo Sturm que escribiremos y demostraremos a continuación nos asegura que el número de cortes entre M_t y ∂C_R es finito, entonces $\int_{\partial M_t \cap C_R} dv$ está acotado por el número máximo de puntos de intersección, que es finito, y la fórmula (3.77) se cumple.

Con el fin de probar el anunciado teorema tipo Sturm, trabajaremos con el flujo (3.71) equivalente al FCM ψ y usado en la demostración del teorema 3.3.1.

Bajo este flujo la variación de r viene dada por (3.72). Para obtener la variación de $\eta := \dot{r} \equiv \frac{\partial r}{\partial z}$ tomaremos la derivada de (3.72) respecto a z y obtendremos:

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{k_\psi}{u} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{u} - \psi' \right) = \frac{uk - k\dot{u}}{u^2} - \psi'' \dot{r}. \quad (3.86)$$

Empleando (3.16) en la anterior expresión y calculando sus correspondientes coordenadas, obtenemos, para $\eta := \dot{r}$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\ddot{\eta}}{\eta^2 + e^{2\varphi}} + T(\eta)\eta \quad (3.87)$$

donde

$$\begin{aligned} T(\eta) := & -\frac{2\dot{\eta}}{(\eta^2 + e^{2\varphi})^2}(\dot{\eta} + e^{2\varphi}\varphi') - 2\left(\frac{\dot{\eta}}{\eta^2 + e^{2\varphi}} - \frac{\eta^2}{(\eta^2 + e^{2\varphi})^2}(\dot{\eta} + e^{2\varphi}\varphi')\right)\varphi' \\ & - \frac{\eta^2}{\eta^2 + e^{2\varphi}}\varphi'' - \varphi'' - \psi'', \end{aligned}$$

Por el corolario 3.3.2 sabemos que para todo $t_0 \in [0, T[$, $T(\eta)$ está acotado en $J \times [0, t_0]$ y también los coeficientes de $\ddot{\eta}$ en (3.87), entonces podemos aplicar el teorema tipo Sturm desarrollado por Angenent en [5] (ver apéndice C) para obtener:

Lema 3.4.1. *Sea M_t , con $t \in [0, T[$, la solución máxima de (3.71) con condición inicial M_0 , tal que \dot{r}_0 no es idénticamente 0, y verificando las hipótesis del teorema 3.1.1. Para todo $t \in]0, T[$, el conjunto $Z_t := \{z \in \mathbb{S}^1 \text{ or } z \in [a_1, a_2] \mid \dot{r}_t = 0\}$ es finito, la función $t \mapsto N(t) := \#(Z_t)$ es no creciente y, en los puntos (z_0, t_0) que verifican $0 = \dot{r}_{t_0}(z_0) = \ddot{r}_{t_0}(z_0)$ existe un entorno donde el número de ceros decrece.*

Ahora, ya podemos probar el punto 4 que aparece en el teorema 3.1.1 y en el corolario 3.1.1.

Teorema 3.4.1. *Bajo las hipótesis del teorema 3.1.1, en el primer tiempo singular y en cada punto singular, un blow-up centrado en este punto da un nuevo flujo límite de tipo I en \mathbb{R}^2 con la métrica euclídea y densidad $\tilde{\psi}^\infty = \ln r^b$, el cual es un grafo sobre $r = 0$ para cada instante de tiempo y, después de hacer un nuevo blow-up, converge a un $\ln r^b$ -shrinker en \mathbb{R}^2 que es la línea $r = \text{constante}$ en el caso $b = m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por la proposición 3.2.3, un *blow-up* centrado en este punto da un flujo límite en \mathbb{R}^2 con la métrica euclídea y densidad $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi \circ \varphi_j$, si

este límite existe. Sabemos, de hecho, que el límite existe y quién es usando la propiedad $\tilde{\psi}^j(v) = \tilde{\psi}^0(v/\lambda_j)$ enunciada en (3.35). Esta fórmula implica que

$$(\tilde{\psi}^j)^{(n)}(r) = \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^n (\tilde{\psi}^0)^{(n)}\left(\frac{r}{\lambda_j}\right),$$

entonces, por (3.2), para todo compacto $K \subset (0, \infty)$

$$\|\tilde{\psi}^{j'} - \frac{b}{r}\|_{C^2(K)} \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty, \quad (3.88)$$

ya que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\psi}^{j'} - \frac{b}{r}\|_{C^2(K)} &= \sum_{i=0}^2 \sup_K \left| (\tilde{\psi}^j)^{(i+1)}(r) - \left(\frac{b}{r}\right)^{(i)}(r) \right| \\ &= \sum_{i=0}^2 \sup_K \left| \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{i+1} (\tilde{\psi}^0)^{(i+1)}\left(\frac{r}{\lambda_j}\right) - (-1)^i i! \frac{b}{r^{i+1}} \right| \\ &= \sum_{i=0}^2 \sup_K \left| i! \frac{b}{r^{i+1}} \left| \frac{(\tilde{\psi}^0)^{(i+1)}\left(\frac{r}{\lambda_j}\right)}{b} - 1 \right| \right| \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty \text{ por (3.2)}. \end{aligned}$$

Es decir, existe una función límite $\tilde{\psi}^{\infty'} = b/r$ de $\tilde{\psi}^{j'}$ lo que nos permite definir una densidad límite $\tilde{\psi}^\infty$ en \mathbb{R}^2 por $\tilde{\psi}^\infty = b \ln r$ y el flujo límite $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau)$ verifica la ecuación (3.13) con la curvatura media asociada a esta densidad.

A su vez por la proposición 3.2.3 este flujo límite $\tilde{F}^\infty : \tilde{M}_\infty \times]-\infty, C[\rightarrow \mathbb{R}^2$ presentara una singularidad de tipo I en $\tau = C$.

Como $\tilde{F}^j(\cdot, \tau)$ son grafos que convergen C^∞ sobre compactos a $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau)$, los flujos equivalentes $(\tilde{r}^j(z, \tau), z)$ tienen las derivadas de $\tilde{r}^j(z, \tau)$ respecto de z acotadas sobre compactos por las cotas de las derivadas de $\tilde{F}^j(z, \tau)$ respecto de z , entonces $\tilde{r}^j(z, \tau)$ converge C^∞ sobre compactos a una función $\tilde{r}^\infty(z, \tau)$ y $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau)$ es un grafo para cada τ .

Ahora, aplicamos al flujo $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau)$, en el espacio euclídeo con densidad $(\mathbb{R}^2, g^e, \tilde{\psi}^\infty = \ln r^b)$, el *blow-up* estándar:

$$\lambda(\tau)^2 = \frac{1}{2(C - \tau)}, \quad \tilde{\tau}(\tau) = \ln \lambda(\tau), \quad \tilde{F}(\cdot, \tilde{\tau}) = e^{\tilde{\tau}} \tilde{F}^\infty(\cdot, \tau(\tilde{\tau})) \quad (3.89)$$

$$\text{y } \tilde{\psi}(v) = \tilde{\psi}^\infty(v/\lambda) = \ln r(v/\lambda)^b = \ln \frac{r(v)^b}{\lambda^b}, \quad (3.90)$$

que nos da las siguientes relaciones entre ciertas cantidades geométricas de

\tilde{F} y \tilde{F}^∞ :

$$\tilde{k}(\tilde{F}(\cdot, \tilde{\tau})) := \tilde{H}(\tilde{F}(\cdot, \tilde{\tau})) = \frac{1}{\lambda} \tilde{H}^\infty(\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau(\tilde{\tau}))) =: \frac{1}{\lambda} \tilde{k}^\infty(\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau(\tilde{\tau}))), \quad (3.91)$$

$$g^e(\bar{\nabla} \tilde{\psi}, N)(\tilde{F}(\cdot, \tilde{\tau})) = \frac{1}{\lambda} g^e(\bar{\nabla} \tilde{\psi}^\infty, N)(\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau(\tilde{\tau}))), \quad (3.92)$$

$$|\tilde{k}|^2 = |\tilde{\alpha}_{\tilde{F}}|^2 = \frac{1}{\lambda^2} |\tilde{\alpha}^\infty|^2 = \frac{1}{\lambda^2} |\tilde{k}^\infty|^2. \quad (3.93)$$

Teniendo en cuenta la estimación (3.44), es decir el hecho de que $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau)$ presenta una singularidad de tipo I en $\tau = C$, podemos comprobar que el flujo $\tilde{F}(\cdot, \tilde{\tau})$ no presenta ninguna singularidad:

$$\frac{1}{b} g^e(\bar{\nabla} \tilde{\psi}, N)^2 + |\tilde{k}|^2 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{b} g^e(\bar{\nabla} \tilde{\psi}^\infty, N)^2 + \frac{1}{\lambda^2} |\tilde{k}^\infty|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \frac{C}{C - \tau} = 2C. \quad (3.94)$$

Obteniendo además la siguiente cota para \tilde{k}_ψ :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_\psi^2 &= \frac{1}{\lambda^2} (\tilde{k}_\psi^\infty)^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} g^e(\bar{\nabla} \tilde{\psi}^\infty, N)^2 + \frac{1}{\lambda^2} |\tilde{k}^\infty|^2 + 2 \frac{1}{\lambda^2} |g^e(\bar{\nabla} \tilde{\psi}^\infty, N)| |\tilde{k}^\infty| \\ &\leq 2Cb + 2C + 2\sqrt{2Cb}\sqrt{2C} = 2C(1 + \sqrt{b})^2. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Por otro lado, por (3.45)

$$d_{g^e}(\tilde{F}^\infty(x, \tau), 0) \leq 2\sqrt{C}(1 + \sqrt{b})\sqrt{C - \tau}, \quad (3.96)$$

entonces:

$$d_{g^e}(\tilde{F}(x, \tilde{\tau}), 0) \leq \sqrt{2C}(1 + \sqrt{b}), \quad (3.97)$$

lo que nos garantiza que el flujo reescalado $\tilde{F}(\cdot, \tilde{\tau})$ no se nos va “entero” a infinito cuando $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$, es decir siempre quedan puntos cuya distancia a 0 es inferior a $\sqrt{2C}(1 + \sqrt{b})$.

Observemos también que (3.89) y (3.90) dan:

$$\tilde{\psi}(\tilde{F}(\cdot, \tilde{\tau})) = \tilde{\psi}^\infty(\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau(\tilde{\tau}))) = \ln(r(\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau(\tilde{\tau})))^b). \quad (3.98)$$

Es decir, la función inducida en \tilde{M}_∞ por las inmersiones $\tilde{F}(\cdot, \tilde{\tau}) : \tilde{M}_\infty \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau) : \tilde{M}_\infty \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la misma, la llamaremos $\psi_{\tilde{M}_\infty}$, pero las métricas inducidas verifican $\tilde{g} = \lambda^2 \tilde{g}^\infty$, lo que da para los gradientes de la función anterior en las dos diferentes métricas la relación $\tilde{\nabla} \psi_{\tilde{M}_\infty} = \lambda^{-2} \tilde{\nabla}^\infty \psi_{\tilde{M}_\infty}$ (ya que $\tilde{g}^\infty(\tilde{\nabla}^\infty \psi_{\tilde{M}_\infty}, X) = d\psi_{\tilde{M}_\infty}(X) = \tilde{g}(\tilde{\nabla} \psi_{\tilde{M}_\infty}, X) = \lambda^2 \tilde{g}^\infty(\tilde{\nabla} \psi_{\tilde{M}_\infty}, X)$). Además, los laplacianos ordinarios en estas dos métricas están relacionados por $\tilde{\Delta} = \lambda^{-2} \tilde{\Delta}^\infty$.

De ambas expresiones obtenemos:

$$\tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}} = \lambda^{-2} \tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}^\infty}. \quad (3.99)$$

Y, para las derivadas de orden superior,

$$(\partial_{\tilde{s}}^m \tilde{k}_\psi)^2 = \frac{1}{\lambda^{2m+2}} (\partial_{\tilde{s}^\infty}^m \tilde{k}_\psi^\infty)^2, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (3.100)$$

y

$$\bar{\nabla}^m \tilde{\psi} = \lambda^{-m} \bar{\nabla}^m \tilde{\psi}^\infty. \quad (3.101)$$

Por la proposición 2.5.1 y las expresiones anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} (\partial_{\tilde{s}}^m \tilde{k}_\psi)^2 &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\lambda^{2m+2}} (\partial_{\tilde{s}^\infty}^m \tilde{k}_\psi^\infty)^2 \right) \\ &= -\frac{2m+2}{\lambda^{2m+2}} (\partial_{\tilde{s}^\infty}^m \tilde{k}_\psi^\infty)^2 + \frac{1}{\lambda^{2m+4}} \left[\tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}^\infty} \left(\partial_{\tilde{s}^\infty}^m \tilde{k}_\psi^\infty \right)^2 - 2 \left(\partial_{\tilde{s}^\infty}^{m+1} \tilde{k}_\psi^\infty \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(a_{m0} + a_{m1} \tilde{k}_\psi^\infty + a_{m2} (\tilde{k}_\psi^\infty)^2) (\partial_{\tilde{s}^\infty}^m \tilde{k}_\psi^\infty)^2 + \sum a_{iJ} \left((\tilde{k}_\psi^\infty)^i \partial_{\tilde{s}^\infty}^J \tilde{k}_\psi^\infty \right) (\partial_{\tilde{s}^\infty}^m \tilde{k}_\psi^\infty) \right] \\ &= -(2m+2) (\partial_{\tilde{s}}^m \tilde{k}_\psi)^2 + \tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}} \left(\partial_{\tilde{s}}^m \tilde{k}_\psi \right)^2 - 2 \left(\partial_{\tilde{s}}^{m+1} \tilde{k}_\psi \right)^2 \\ &\quad + 2(a_{m0} + a_{m1} \tilde{k}_\psi + a_{m2} (\tilde{k}_\psi)^2) (\partial_{\tilde{s}}^m \tilde{k}_\psi)^2 + \sum a_{iJ} \left((\tilde{k}_\psi)^i \partial_{\tilde{s}}^J \tilde{k}_\psi \right) (\partial_{\tilde{s}}^m \tilde{k}_\psi), \end{aligned} \quad (3.102)$$

en la última igualdad hemos utilizado el hecho de que, por la proposición 2.5.1, el conjunto de índices del sumatorio verifica la relación $i+|J|+n(J)+|K| = m+3$ y los polinomios “ a_{mj} ” verifican que $|K| = 2 - j$. Esta ecuación es similar a la que aparece en el FCM ordinario para el *blow-up* en las singularidades de tipo I (por ejemplo, ver [39] página 59). Entonces, con argumentos estándar (ver apéndice B) se prueba que existe una familia de constantes positivas $\{C_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tales que

$$(\partial_{\tilde{s}}^m \tilde{k}_\psi)^2 \leq C_m^2 \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \quad (3.103)$$

Notemos que por (3.95) $C_0^2 = 2C(1 + \sqrt{b})^2$.

Como estamos en el plano euclídeo y r es la distancia a una línea, tenemos que $|\bar{\nabla} r| = 1$ y $\bar{\nabla}^m r = 0$ para $m \geq 2$. Debido a esto y a (3.90) se sigue que:

$$\bar{\nabla}^m \tilde{\psi} = (-1)^{m+1} \frac{(m-1)! b}{r^m} \bar{\nabla} r \otimes \dots \otimes \bar{\nabla} r \quad (3.104)$$

y

$$|\bar{\nabla}^m \tilde{\psi}| \leq \frac{(m-1)!b}{r^m}. \quad (3.105)$$

Además, de (3.74) se deduce que los flujos reescalados F^j verifican:

$$\frac{1}{r(F^j)} \leq \frac{1}{\lambda_j} \frac{1}{\sqrt{A_1(T - t_j - \lambda_j^{-2}\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \frac{1}{\sqrt{C - \tau}} = \sqrt{\frac{2}{A_1}} \lambda(\tau), \quad (3.106)$$

para una cierta constante $A_1 > 0$. Entonces:

$$\frac{1}{r(\tilde{F}^\infty)} \leq \sqrt{\frac{2}{A_1}} \lambda(\tau) \text{ y } \frac{1}{r(\tilde{F})} \leq \sqrt{\frac{2}{A_1}} =: A_2. \quad (3.107)$$

Esto da:

$$|\bar{\nabla}^m \tilde{\psi}| \leq (m-1)!b A_2^m. \quad (3.108)$$

Ahora por (2.46) (o por el apéndice A)

$$\begin{aligned} |\partial_s^m \langle \bar{\nabla} \tilde{\psi}, N \rangle| &= |\bar{\nabla}^{m+1} \tilde{\psi}(\partial_s, \dots, \partial_s, N) + \sum_{m,1}^{1,m-1} c_{iJK} \tilde{k}_\psi^i \partial_s^J \tilde{k}_\psi \partial_s^K \tilde{\psi}| \\ &\leq |\bar{\nabla}^{m+1} \tilde{\psi}| + \sum_{m,1}^{1,m-1} c_{iJK} |\tilde{k}_\psi|^i |\partial_s^J \tilde{k}_\psi| |\bar{\nabla}^K \tilde{\psi}| \\ &\leq m!b A_2^{m+1} + \sum_{m,1}^{1,m-1} c_{iJK} C_0^i C_{j_1} \dots C_{j_n(j)} b^{n(K)} A_2^{|K|} (k_1 - 1)! \dots (k_{n(K)} - 1)! \\ &=: E_m, \end{aligned} \quad (3.109)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Entonces por (3.103) y (3.109)

$$|\partial_s^m \tilde{k}| \leq |\partial_s^m \tilde{k}_\psi| + |\partial_s^m \langle \bar{\nabla} \tilde{\psi}, N \rangle| \leq C_m + E_m, \quad (3.110)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto junto a (3.97) implica que existe una sucesión de tiempos $\tilde{\tau}_n$ tales que el $\tilde{F}(\cdot, \tilde{\tau}_n)$ converge diferenciablemente a una curva $\tilde{F}^\infty : \tilde{M}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^2$ no vacía.

Ahora, comprobemos que podemos aplicar la fórmula (3.77) al flujo $\tilde{F}^\infty(\cdot, \tau)$. Para ello necesitamos comprobar que $\partial(\tilde{F}^\infty(\tilde{M}^\infty, \tau) \cap C_R)$ está acotado por un número natural finito independiente de τ y R (para τ suficientemente grande). Consideremos, en el flujo equivalente (3.71), la familia $\tilde{r}^j(z, \tau)$ con τ fijo que

converge C^∞ a una cierta $\tilde{r}^\infty(z, \tau)$. Por el lema 3.4.1 existe un t_0 tal que para cada $t \geq t_0$ existe una familia finita ordenada de ceros $z_1^j < z_2^j < \dots < z_m^j$ de $\tilde{r}^j(\cdot, \tau) = \dot{r}(z/\lambda_j, t_j + \lambda_j^{-2}\tau)$. Si consideramos $\tilde{r}^t(\cdot, \tau) = \dot{r}(z/\lambda(t), t + \lambda(t)^{-2}\tau)$ como una función de $t \in [t_0, T[$, para cada τ fijo, los correspondientes ceros $z_1(t) < z_2(t) < \dots < z_m(t)$ son funciones continuas de t . Entonces, un argumento similar al dado en la demostración del lema 5.1 en [2] prueba que $\lim_{j \rightarrow \infty} z_k^j = \lim_{t \rightarrow T} z_k(t) =: z_k$ existe para $k = 1, \dots, m$, donde quizá algunos de los z_i son $-\infty$ o ∞ .

Ya que $z_1^j < z_2^j < \dots < z_m^j$ tenemos que $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_m$. Sean $i_0 = \min\{i \mid z_i > -\infty\}$ e $i_m = \max\{i \mid z_i < \infty\}$. De nuevo por el lema 3.4.1, las funciones \tilde{r}^j son estrictamente monótonas en los intervalos $]-\infty, z_1^j[$, $]z_1^j, z_2^j[$, \dots , $]z_m^j, \infty[$, entonces su límite \tilde{r}^∞ es monótono en los intervalos $] -\infty, z_{i_0}[$, $]z_{i_0}, z_{i_0+1}[$, \dots , $]z_{i_m}, \infty[$. Entonces, en cada uno de estos intervalos, la intersección de una línea $r = \text{constante}$ con las gráficas de $\tilde{r}^\infty(\cdot, \tau)$ es un punto o un segmento. Entonces, la intersección de una línea $r = \text{constante}$ con las gráficas de $\tilde{r}^\infty(\cdot, \tau)$ a lo largo de todo el dominio de \tilde{r}^∞ es una unión finita de segmentos y puntos. Lo que implica que el borde de la intersección del grafo de $\tilde{r}^\infty(\cdot, \tau)$ con un cuadrado centrado en el origen consiste en un número finito de puntos menor que $2m$, y la condición necesaria para poder aplicar la fórmula (3.77) se cumple.

De las fórmulas (3.77), (3.89), (3.91) y (3.92), teniendo en cuenta que $\tilde{\mu}_t = \lambda \tilde{\mu}_t^\infty$ y $\frac{d}{d\tilde{\tau}} = \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} \frac{d}{d\tau} = e^{-2\tilde{\tau}} \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{d\tau}$, se deduce:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tilde{\tau}} \int_{\tilde{M}_\infty} e^{-|\tilde{F}|^2/2} r(\tilde{F})^b \tilde{\mu}_t &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{d\tau} \int_{\tilde{M}_\infty} e^{-|\tilde{F}^\infty|^2 \lambda^2/2} \lambda^b r(\tilde{F}^\infty)^b \lambda \tilde{\mu}_\tau^\infty \\
&= \frac{(2\pi)^{(1+b)/2}}{\lambda^2} \frac{d}{d\tau} \int_{\tilde{M}_\infty} u(\tilde{F}^\infty, \tau) r(\tilde{F}^\infty)^b \tilde{\mu}_\tau^\infty \\
&= -\frac{(2\pi)^{(1+b)/2}}{\lambda^2} \int_{\tilde{M}_\infty} (\tilde{k}_\psi^\infty + \lambda^2 \langle \tilde{F}^\infty, N \rangle)^2 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \right)^{(1+b)} e^{-|\tilde{F}^\infty|^2 \lambda^2/2} r(\tilde{F}^\infty)^b \tilde{\mu}_\tau^\infty \\
&= -\frac{1}{\lambda^2} \int_{\tilde{M}_\infty} (\lambda \tilde{k}_\psi + \lambda \langle \tilde{F}, \tilde{N} \rangle)^2 \lambda^{1+b} e^{-|\tilde{F}/\lambda|^2 \lambda^2/2} \lambda^{-b} r(\tilde{F})^b \lambda^{-1} \tilde{\mu}_t \\
&= -\int_{\tilde{M}_\infty} (\tilde{k}_\psi + \langle \tilde{F}, \tilde{N} \rangle)^2 e^{-|\tilde{F}|^2/2} r(\tilde{F})^b \tilde{\mu}_t. \tag{3.111}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, para todo $\tilde{\tau}_0 > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\tau}_0}^{\infty} \int_{\tilde{M}_{\infty}} (\tilde{k}_{\psi} + \langle \tilde{F}, \tilde{N} \rangle)^2 e^{-|\tilde{F}|^2/2} \tilde{\mu}_{\psi\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} &= - \int_{\tilde{\tau}_0}^{\infty} \frac{d}{d\tilde{\tau}} \int_{\tilde{M}_{\infty}} e^{-|\tilde{F}|^2/2} \tilde{\mu}_{\psi\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \\ &= \int_{\tilde{M}_{\infty}} e^{-|\tilde{F}|^2/2} \tilde{\mu}_{\psi\tilde{\tau}_0} - \lim_{\tilde{\tau} \rightarrow \infty} \int_{\tilde{M}_{\infty}} e^{-|\tilde{F}|^2/2} \tilde{\mu}_{\psi\tilde{\tau}} \\ &\leq \int_{\tilde{M}_{\infty}} e^{-|\tilde{F}|^2/2} \tilde{\mu}_{\psi\tilde{\tau}_0} < \infty, \end{aligned}$$

entonces $\int_{\tilde{M}_{\infty}} (\tilde{k}_{\psi} + \langle \tilde{F}, \tilde{N} \rangle)^2 e^{-|\tilde{F}|^2/2} \tilde{\mu}_{\psi\tilde{\tau}} \xrightarrow{\tilde{\tau} \rightarrow \infty} 0$, y \tilde{M}_{∞} verifica $\langle \tilde{F}_{\infty}, \tilde{N} \rangle + \tilde{k}_{\psi} = 0$. Por lo tanto \tilde{M}_{∞} es un $\tilde{\psi}$ -*shrinker* con $\tilde{\psi} = b \ln(r)$, como queríamos demostrar.

Cuando $b = m$, \tilde{k}_{ψ} coincide con la curvatura media de una hipersuperficie de revolución $\tilde{M}_{\infty} \times_{m \ln r} \mathbb{S}^m$ de \mathbb{R}^{m+2} y se sabe que, por la clasificación de los *shrinkers* de curvatura media no negativa, debe ser un cilindro. Por lo tanto, \tilde{M}_{∞} debe ser una línea. \square

Apéndice A

Relación entre ∂_s^n y $\overline{\nabla}^n$

En este apéndice demostraremos algunas fórmulas utilizadas en el texto para las que no se dio demostración previamente.

En primer lugar, sea una variedad riemanniana con densidad $(\overline{M}, \overline{g}, \psi)$ de dimensión 2 y orientable. Sea una solución $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ o $\gamma : M \times [0, T) \rightarrow G$ al PAC ψ (3.13) con condición inicial la inmersión $\gamma_0 \in I(\overline{M})$ o $\gamma_0 \in I(G)$, respectivamente. Por s_t denotaremos el parámetro arco de la curva parametrizada por $\gamma(\cdot, t)$, para todo $t \in [0, T)$.

Proposición A.1. *Sea $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1 \times [0, T))$ entonces:*

$$\partial_t \partial_s^n f = \partial_s^n \partial_t f + \sum_{i=0}^{n-1} \partial_s^i (k_\psi k \partial_s^{n-i} f) \quad (\text{A.1})$$

Demostración. Por (2.38)

$$\partial_t \partial_s f = \partial_s \partial_t f + k_\psi k \partial_s f,$$

que se corresponde con la expresión del enunciado para $n = 1$. Vamos a proceder por inducción: supongamos que es cierta para n y probemos que lo es para $n+1$.

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_s^{n+1} f &= \partial_t \partial_s (\partial_s^n f) =_{\{n=1\}} \partial_s \partial_t (\partial_s^n f) + k_\psi k \partial_s (\partial_s^n f) \\ &= \partial_s (\partial_t \partial_s^n f) + k_\psi k \partial_s^{n+1} f = \partial_s \left(\partial_s^n \partial_t f + \sum_{i=0}^{n-1} \partial_s^i (k_\psi k \partial_s^{n-i} f) \right) + k_\psi k \partial_s^{n+1} f \\ &= \partial_s^{n+1} \partial_t f + \sum_{i=0}^{n-1} \partial_s^{i+1} (k_\psi k \partial_s^{n-i} f) + k_\psi k \partial_s^{n+1} f \\ &= \partial_s^{n+1} \partial_t f + \sum_{i=0}^n \partial_s^i (k_\psi k \partial_s^{n+1-i} f). \end{aligned}$$

En la cuarta igualdad hemos aplicado la hipótesis de inducción. Por el principio de inducción queda probado el resultado. \square

La siguiente notación ya fue introducida en la sección 2.5. Las letras mayúsculas J denotarán multi-índices con una cantidad de entradas finita y con dichas entradas pertenecientes al conjunto de los números naturales, $J \in \mathbb{N}^q$. Consideraremos que todas las entradas j_k de un multi-índice $J = (j_1, \dots, j_q)$ están ordenadas del siguiente modo $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_q \geq 0$. Por ello introducimos el siguiente conjunto:

$$\mathbb{J}_q^n \equiv \{(j_1, \dots, j_q) \in \mathbb{N}^q \mid 0 \leq j_q \leq j_{q-1} \leq \dots \leq j_1 \leq n\}$$

Dado $J \in \mathbb{J}_q^n$, denotaremos por $o(J) := j_1$, $|J| := j_1 + \dots + j_q$, $\dim(J) := q$ y por $n(J) :=$ número de elementos de J no nulos ($n(J) \leq \dim(J)$). Dadas $J, K \in \mathbb{J}_q^n$, y $f \in C^\infty(\bar{M})$, por $\partial_s^J k_\psi$ y $\bar{\nabla}^K f$ denotaremos a:

$$\begin{aligned} \partial_s^J k_\psi &\equiv \partial_s^{j_1} k_\psi \cdots \partial_s^{j_{n(J)}} k_\psi, \\ \bar{\nabla}^K f &\equiv \bar{\nabla}^{k_1} f \otimes \dots \otimes \bar{\nabla}^{k_{n(K)}} f, \end{aligned}$$

si $J, K \equiv (0, \dots, 0)$, entonces:

$$\begin{aligned} \partial_s^J k_\psi &\equiv 1, \\ \bar{\nabla}^K f &\equiv 1. \end{aligned}$$

Las siguientes expresiones son independientes del flujo. Sea una curva orientada γ en \bar{M} y su parámetro arco s .

Proposición A.2. *Sea $f \in C^\infty(\bar{M})$:*

$$\partial_s^m f = \bar{\nabla}^m f(\underbrace{\partial_s, \dots, \partial_s}_m) + \sum_{i, J, K, l} C_{i, J, K, l} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f). \quad (\text{A.2})$$

Los índices del sumatorio verifican el siguiente conjunto de relaciones:

- $i + |J| + n(J) + |K| + l = m$,
- $0 \leq i \leq m - 1$, $o(J) \leq m - 2$, $o(K) \leq m - 1$,
- $1 \leq l$ y $l \leq m - 1$ si $m \neq 1$,
- $\dim(J) = \lceil m/2 - 1 \rceil$, es decir $\dim(J) = a$ si $m = 2a + 1$ ó $\dim(J) = a - 1$ si $m = 2a$,
- $\dim(K) = m - 1$,
- $\#\{j \in J \mid j = m - 2\} \leq 1$.

Algunas de las constantes $C_{i, J, K, l}$ pueden ser cero y $C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f)$ denota al tensor $\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f$ actuando sobre $|K| + l$ copias de ∂_s y/o N .

Demostración. Teniendo en cuenta que $\bar{\nabla}_{\partial_s} \partial_s = kN$ y $\bar{\nabla}_{\partial_s} N = -k\partial_s$, vamos a proceder al cálculo de las primeras derivadas de f respecto de ∂_s .

Para $m = 1$:

$$\partial_s f = \bar{\nabla} f(\partial_s).$$

Para $m = 2$:

$$\partial_s^2 f = \bar{\nabla}^2 f(\partial_s, \partial_s) + k\bar{\nabla} f(N) = \bar{\nabla}^2 f(\partial_s, \partial_s) + k_\psi \bar{\nabla} f(N) + \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla} f(N, N).$$

Para $m = 3$:

$$\begin{aligned} \partial_s^3 f &= \bar{\nabla}^3 f(\partial_s, \partial_s, \partial_s) + k_\psi \bar{\nabla}^2 f(N, \partial_s) + k_\psi \bar{\nabla}^2 f(\partial_s, N) + \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla}^2 f(N, N, \partial_s) \\ &\quad + \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla}^2 f(N, \partial_s, N) + \partial_s k_\psi \bar{\nabla} f(N) + k_\psi \bar{\nabla}^2 f(\partial_s, N) - k_\psi^2 \bar{\nabla} f(\partial_s) \\ &\quad - k_\psi \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla} f(N, \partial_s) + \bar{\nabla}^2 \psi \otimes \bar{\nabla} f(\partial_s, N, N) - k_\psi \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla} f(\partial_s, N) \\ &\quad - \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla} f(N, \partial_s, N) + \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla}^2 f(N, \partial_s, N) \\ &\quad - k_\psi \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla} f(N, \partial_s) - \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla} f(N, N, \partial_s). \end{aligned}$$

Los tres casos se ajustan a la fórmula del enunciado. Ahora procederemos por inducción, supongamos que la expresión del enunciado es cierta para $m \geq 3$ y probemos que es cierta para $m + 1$:

$$\begin{aligned} \partial_s^{m+1} f &= \partial_s(\partial_s^m f) \\ &= \partial_s \left(\underbrace{\bar{\nabla}^m f(\partial_s, \dots, \partial_s)}_m + \sum C_{ij_1 \dots j_{q_m} k_1 \dots k_{p_n}} l k_\psi^i \partial_s^{j_1} k_\psi \dots \partial_s^{j_{q_m}} k_\psi \bar{\nabla}^{k_1} \psi \otimes \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \otimes \bar{\nabla}^{k_{p_m}} \psi \otimes \bar{\nabla}^l f \right) \\ &= \bar{\nabla}^{m+1} f(\underbrace{\partial_s, \dots, \partial_s}_{m+1}) + k_\psi \sum_1^m \bar{\nabla}^m f + \sum_1^m \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla}^m f \\ &\quad + \sum_{i \neq 0} C_{ij_1 \dots j_{q_m} k_1 \dots k_{p_n}} l i k_\psi^{i-1} \partial_s k_\psi \partial_s^{j_1} k_\psi \dots \partial_s^{j_{q_m}} k_\psi \bar{\nabla}^{k_1} \psi \otimes \dots \otimes \bar{\nabla}^{k_{p_m}} \psi \otimes \bar{\nabla}^l f \\ &\quad + \sum_{h=1}^{q_m} \sum_{j_h \neq 0} C_{ij_1 \dots j_{q_m} k_1 \dots k_{p_n}} l k_\psi^i \partial_s^{j_1} k_\psi \dots \partial_s^{j_h+1} k_\psi \dots \partial_s^{j_{q_m}} k_\psi \bar{\nabla}^{k_1} \psi \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes \bar{\nabla}^{k_{p_m}} \psi \otimes \bar{\nabla}^l f \\ &\quad + \sum_{h=1}^{p_m} \sum_{k_h \neq 0} C_{ij_1 \dots j_{q_m} k_1 \dots k_{p_n}} l k_\psi^i \partial_s^{j_1} k_\psi \dots \partial_s^{j_{q_m}} k_\psi \bar{\nabla}^{k_1} \psi \otimes \dots \\ &\quad \otimes (\bar{\nabla}^{k_h+1} \psi + \sum_1^{k_h} \delta k_\psi \bar{\nabla}^{k_h} \psi + \sum_1^{k_h} \delta \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla}^{k_h} \psi) \otimes \dots \otimes \bar{\nabla}^{k_{p_m}} \psi \otimes \bar{\nabla}^l f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{ij_1 \dots j_{q_m} k_1 \dots k_{p_n} l} k_\psi^i \partial_s^{j_1} k_\psi \dots \partial_s^{j_{q_m}} k_\psi \bar{\nabla}^{k_1} \psi \otimes \dots \\
& \otimes \bar{\nabla}^{k_{p_m}} \psi \otimes (\bar{\nabla}^{l+1} f + \sum_1^l \delta k_\psi \bar{\nabla}^l f + \sum_1^l \delta \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla}^l f),
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la hipótesis de inducción en la segunda igualdad y delta es 1 o -1 según corresponda en cada caso. Notemos que la expresión obtenida es de la forma de la del enunciado para $m+1$, de forma que por el principio de inducción hemos terminado la demostración. \square

Proposición A.3. Sea $f \in C^\infty(\bar{M})$ y $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
& \partial_s^m (\bar{\nabla}^n f(\underbrace{N, \dots, N}_n)) \\
& = \bar{\nabla}^{m+n} f(\underbrace{\partial_s, \dots, \partial_s}_m, \underbrace{N, \dots, N}_n) + \sum_{i, J, K, l} C_{i J K l} k_\psi^i \partial_s^J k_\psi C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Los índices del sumatorio verifican el siguiente conjunto de relaciones:

- $i + |J| + n(J) + |K| + l = m + n$,
- $0 \leq i \leq m$, $o(J) \leq m - 1$, $o(K) \leq m$,
- $n \leq l \leq m + n - 1$,
- $\dim(J) = \lfloor m/2 \rfloor$, es decir $\dim(J) = a$ si $m = 2a + 1$ ó $m = 2a$,
- $\dim(K) = m$,
- $\#\{j \in J \mid j = m - 1\} \leq 1$.

Algunas de las constantes $C_{i J K l}$ pueden ser cero y $C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f)$ denota al tensor $\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f$ actuando sobre $|K| + l$ copias de ∂_s y/o N .

Demostración. Para $m = 1$:

$$\begin{aligned}
\partial_s (\bar{\nabla}^n f(\underbrace{N, \dots, N}_n)) & = \bar{\nabla}^{n+1} f(\partial_s, \underbrace{N, \dots, N}_n) - k_\psi \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}^n f(\underbrace{N, \dots, N}_{i-1}, \partial_s, \underbrace{N, \dots, N}_n) \\
& \quad - \sum_{i=1}^n \bar{\nabla} \psi \otimes \bar{\nabla}^n f(\underbrace{N, \dots, N}_i, \partial_s, \underbrace{N, \dots, N}_{n+1}).
\end{aligned}$$

Para $m = 2$:

$$\begin{aligned}
& \partial_s^2(\overline{\nabla}^n f(\underbrace{N, \dots, N}_n)) \\
&= \overline{\nabla}^{n+2} f(\underbrace{\partial_s, \partial_s}_2, \underbrace{N, \dots, N}_n) + k_\psi \overline{\nabla}^{n+1} f(\underbrace{N, \dots, N}_{n+1}) + \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla}^{n+1} f(\underbrace{N, \dots, N}_{n+2}) \\
&\quad - k_\psi \sum_{i=1}^n \overline{\nabla}^{n+1} f(\underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_{i}, \underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla}^{n+1} f(\underbrace{N, \partial_s, N, \dots, N}_{i+1}, \underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_{n+2}) \\
&\quad - \partial_s k_\psi \sum_{i=1}^n \overline{\nabla}^n f(\underbrace{N, \dots, N}_{i-1}, \underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_n) \\
&\quad - k_\psi \sum_{i=1}^n \overline{\nabla}^{n+1} f(\underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_{i-1}, \underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_{n+1}) - k_\psi^2 \sum_{i=1}^n \delta_i \overline{\nabla}^n f \\
&\quad - k_\psi \sum_{i=1}^n \delta_i \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla}^n f - \sum_{i=1}^n \overline{\nabla}^2 \psi \otimes \overline{\nabla}^n f(\underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_i, \underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_{n+2}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla}^{n+1} f(\underbrace{N, \partial_s, N, \dots, N}_{i+1}, \underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_{n+2}) \\
&\quad + k_\psi \sum_{i=1}^n \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla}^n f(\underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_i, \underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla}^n f(\underbrace{N, \partial_s, N, \dots, N}_{i+1}, \underbrace{\partial_s, N, \dots, N}_{n+2}) \\
&\quad - k_\psi \sum_{i=1}^n \delta_i \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla}^n f - \sum_{i=1}^n \delta_i \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla} \psi \otimes \overline{\nabla}^n f,
\end{aligned}$$

donde los deltas son 1 o -1 según corresponda en cada caso. Ahora procedemos por inducción, supongamos que la expresión del enunciado es cierta para $m \geq 2$ y probemos que es cierta para $m+1$. El desarrollo es análogo al de la proposición anterior. De donde se concluye el enunciado. \square

Con la finalidad de unificar notación y hacer más fácil trabajar con estas

expresiones, adoptaremos la siguiente notación de sumatorios. Por

$$\sum_{m,r}^{s,t} C_{iJKl} k_{\psi}^i \partial_s^J k_{\psi} \ C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f),$$

denotaremos al sumatorio sobre el siguiente conjunto de índices:

$$\begin{aligned} i + |J| + n(J) + |K| + l &= m + r, \\ 0 \leq i \leq m + r - s, \ o(J) \leq t, \ o(K) &\leq m + r - s, \\ s \leq l \leq s + t, \\ 0 \leq \dim(J) &\leq [(m + r - s)/2], \\ \dim(K) &= m + r - s, \\ \#\{j \mid j = t\} &\leq 1. \end{aligned}$$

Algunas de las constantes C_{iJKl} podrían ser cero y $C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f)$ denota al tensor $\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f$ actuando sobre $|K| + l$ copias de ∂_s y/o N .

De este modo los dos resultados anteriores pueden escribirse como:

$$\partial_s^m f = \bar{\nabla}^m f(\underbrace{\partial_s, \dots, \partial_s}_m) + \sum_{m,0}^{1,m-2} C_{iJKl} k_{\psi}^i \partial_s^J k_{\psi} \ C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f), \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \partial_s^m (\bar{\nabla}^n f(\underbrace{N, \dots, N}_n)) \\ = \bar{\nabla}^{m+n} f(\underbrace{\partial_s, \dots, \partial_s}_m, \underbrace{N, \dots, N}_n) + \sum_{m,n}^{n,m-1} C_{iJKl} k_{\psi}^i \partial_s^J k_{\psi} \ C(\bar{\nabla}^K \psi \otimes \bar{\nabla}^l f). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Algunas de las constantes C_{iJKl} pueden ser cero y los tensores $\bar{\nabla}^k \psi$ y $\bar{\nabla}^l f$ están actuando sobre los campos ∂_s y N .

Apéndice B

Ampliación demostración teorema 3.4.1

En esta sección detallaremos un argumento que se menciona en la demostración del teorema 3.4.1, pero del que no se dio demostración. Por tanto, a partir de este momento y para el resto del apéndice nos situamos en el contexto de la demostración de dicho teorema.

La demostración es análoga a la del FCM y puede encontrarse en [39], páginas 59 y 60.

Por (3.95):

$$\tilde{k}_\psi^2 \leq C_0^2 = 2C(1 + \sqrt{b})^2, \quad (\text{B.1})$$

nuestro propósito es probar que en consecuencia $(\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2$ está uniformemente acotada en $\tilde{M}_\infty \times [0, \infty)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Realizaremos la demostración por inducción.

Por (3.102):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} (\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 &= \tilde{\Delta}_{\psi, \tilde{M}_\infty} \left(\partial_s^m \tilde{k}_\psi \right)^2 - 2 \left(\partial_s^{m+1} \tilde{k}_\psi \right)^2 - (2m+2) (\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 \\ &\quad + 2(a_{m0} + a_{m1} \tilde{k}_\psi + a_{m2} (\tilde{k}_\psi)^2) (\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + \sum a_{iJ} \left((\tilde{k}_\psi)^i \partial_s^J \tilde{k}_\psi \right) (\partial_s^m \tilde{k}_\psi), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

con $o(J) \leq m-1$.

Supongamos por inducción que:

$$(\partial_s^i \tilde{k}_\psi)^2 \leq C_i^2, \text{ para } i = 0, \dots, m-1, \quad (\text{B.3})$$

con $C_i = C_i(i, b, C, \tilde{F}^\infty) > 0$ constantes independientes de $\tilde{\tau}$. Entonces, por la fórmula (B.2), la hipótesis de inducción (B.3), la cota para la norma de las

derivadas covariantes $\bar{\nabla}^\ell \tilde{\psi}$ (3.108) y la desigualdad $x \leq 1 + x^2$:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} (\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 \leq \tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}} \left(\partial_s^m \tilde{k}_\psi \right)^2 - 2 \left(\partial_s^{m+1} \tilde{k}_\psi \right)^2 + D_m (\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + E_m, \quad (\text{B.4})$$

con D_m, E_m constantes uniformes respecto de $\tilde{\tau}$ dependientes de m, b, C y \tilde{F}^∞ .

A partir de la última desigualdad y nuevamente usando la hipótesis de inducción (B.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} \left((\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + D_m (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 \right) \leq \tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}} \left(\partial_s^m \tilde{k}_\psi \right)^2 - 2 \left(\partial_s^{m+1} \tilde{k}_\psi \right)^2 \\ & \quad + D_m (\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + E_m + D_m \tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}} \left(\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi \right)^2 - 2 D_m \left(\partial_s^m \tilde{k}_\psi \right)^2 \\ & \quad + D_m D_{m-1} (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 + D_m E_{m-1} \\ & = \tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}} \left((\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + D_m (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 \right) - 2 \left(\partial_s^{m+1} \tilde{k}_\psi \right)^2 - D_m (\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 \\ & \quad + D_m D_{m-1} (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 + E_m + D_m E_{m-1} \\ & \leq \tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}} \left((\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + D_m (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 \right) - D_m (\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + D_m D_{m-1} C_{m-1}^2 + E_m \\ & \quad + D_m E_{m-1} \\ & = \tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}} \left((\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + D_m (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 \right) - D_m \left((\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + D_m (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 \right) \\ & \quad + D_m^2 (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 + D_m D_{m-1} C_{m-1}^2 + E_m + D_m E_{m-1} \\ & \leq \tilde{\Delta}_{\psi_{\tilde{M}_\infty}} \left((\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + D_m (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 \right) - D_m \left((\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + D_m (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2 \right) \\ & \quad + D_m^2 C_{m-1}^2 + D_m D_{m-1} C_{m-1}^2 + E_m + D_m E_{m-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Por el principio del máximo, la función $(\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2 + D_m (\partial_s^{m-1} \tilde{k}_\psi)^2$ está uniformemente acotada en el espacio y el tiempo por una constante. Y utilizando una última vez la hipótesis de inducción (B.3) se concluye que $(\partial_s^m \tilde{k}_\psi)^2$ está uniformemente acotada por una constante C_m^2 . Por el principio de inducción el resultado se tiene para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Apéndice C

Teorema tipo Sturm

Presentamos aquí el enunciado del teorema tipo Sturm dado por Angenent en [5]:

Teorema C.1. (Teorema C de [5]) *Sea $u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una solución acotada de*

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u, \quad (\text{C.1})$$

que verifica sobre el borde una condición tipo Dirichlet, Neumann o periódica. Supongamos que a , b y c verifican:

$$a, a^{-1}, a_t, a_x \text{ y } a_{xx} \in L_\infty, \quad (\text{C.2})$$

$$b, b_t \text{ y } b_x \in L_\infty, \quad (\text{C.3})$$

$$c \in L_\infty. \quad (\text{C.4})$$

Además, en el caso de condiciones en el borde tipo Neumann supongamos que $a \equiv 1$ y $b \equiv 0$.

Por $z(t)$ denotemos el número de ceros de $u(\cdot, t)$ en $[0, 1]$. Entonces:

- *$z(t)$ es finito para $t > 0$,*
- *si (x_0, t_0) es un cero múltiple de u entonces para todo $t_1 < t_0 < t_2$ tenemos $z(t_1) > z(t_2)$.*

Conclusions

If the reader has arrived to this part of the thesis, more likely he has guessed that our aim was to initiate a systematic study of the mean curvature flow associated to a density.

Until now the unique paper written on MCF with this name (density) joined was [12], which was dedicated to the particular case of the Gaussian density.

When we started to look at the bibliography, we discovered that many other people have worked on ψ MCF (without mention of the name density), or even in more general flows, although mainly restricted to the flow of curves in surfaces. The masterpieces of this work are the papers of Angenent ([6, 8]), Oaks ([46]) and Zhu ([53]), and also some relevance in this context have the papers by Altschuler, Angenent and Giga ([2]) and that of Huisken ([34]). Before that, we also knew that the papers [52, 50] of Smoczyk and Schnürer and Smoczyk were concerned to ψ MCF and, after some time, we discovered that also the paper [51] of Smoczyk deals with manifolds with density, as we did mention in chapter I section 1.5.3.

To begin, it was necessary to understand the meaning of the ψ MCF. This comes first by the natural definition of the ψ -mean curvature H_ψ as the gradient of the ψ -volume functional in [30, 43, 49]. But, looking again to the bibliography we discovered, more or less explicit in the work of Smoczyk [52, 51], that there must be a deep relation between the ψ MCF and the MCF in some warped products. One of our first tasks (section 1.3.1) has been to explain in detail this relation, which is in fact a part of a general relation between the geometry of a manifold with density and the geometry of a warped product (or, more general, the geometry of certain riemannian submersions). In some sense, we have discovered an alternative that has some physical flavour: we can study the geometry of manifolds with densities with points as main objects, or we can study warped products with the “fibers” of the product as main objects (the physical flavour comes from the idea in Physics to understand it by a conversion of the 3-dimensional physical space in a higher dimensional one). In analogy to Physics, we could say: warped products are a way to use only riemannian metrics where you need also to use densities. In both cases the price paid to

simplify the problem is to increase the number of dimensions of the space and the objects which we are working with.

Once we have understood the meaning of a density, the idea to start a systematic study of ψ MCF is natural and simple: there are known results for the MCF, then try to find the analogous (if there were) for the ψ MCF. One of the first to look at is the Huisken theorem on the flow of a convex hypersurface in \mathbb{R}^{n+1} . After a bit of thinking and computations, we discovered that in this the analogous for the ψ MCF is precisely the evolution of an equivariant hypersurface of under MCF studied in the Smoczyk paper [51], where the word “density” does not appear anywhere.

Then, we looked at the flow of a curve in a plane with density, trying to prove the analogous of Grayson-Gage-Hamilton results which describe the evolution of a curve in a surface by the MCF. Again, we found that a big part of the above theorems were generalized to the mean curvature flow with density (in fact to more general flows) in the above cited articles by Angenent, Oaks and Zhu. From the first two authors we can conclude that, under some natural and very general conditions, by the mean curvature flow associated to a density, any closed curve moves for an infinite time or it shrinks to a point. Results of Zhu complete this description proving that, when it goes to a point, it converges as a round point. Fortunately for our work, there was still a classical result pending to be extended. In fact, Gage and Grayson had proved that, if the curve is moving all the time by a MCF and it is obliged to remain in a compact domain, then there is a sequence of times such that the correspondent sequence of curves converges to a geodesic (we use the word “subconverges” to express this property). There was no analogous proved for surfaces with density. This was our first main Theorem 2.5.1.

This completes the study of the evolution of closed curves in a surface with density and the problem is, in some sense, finished. However, a better and deeper comprehension of the problem can be achieved if we consider different classes of densities and we are able to describe more explicitly the different behavior of the closed curves under ψ MCF in a family of densities. This was our second concern. We considered radial densities in the Euclidean plane, that is, densities depending only on the distance to the origin. Some essential properties of these densities are independent of the dimension. A careful lecture of the paper of Schnürer and Smoczyk ([50]) convinced us that, among radial densities on \mathbb{R}^{n+1} , the density $\psi(r) = -\ln r^n$ plays a special role. In fact, in this density, all the spheres centered at the origin are ψ -minimal; moreover, for other radial densities ψ the spheres with radius r_i satisfying $\psi'(r_i) = -n/r_i$ are ψ -minimal, attractors or repulsors depending on the behavior of ψ' in a neighborhood of r_i , and can be used as barriers for other solutions of the ψ MCF (Proposition 1.5.1). The union of these observations with the above Theorem 2.5.1 and the results of

Angenent, Oaks and Zhu, give a fairly good description for the motion of a closed curve in the plane with a radial density, that we have stated as Theorem 2.6.1

With all the above well understood, one is tempted to think that the only problems remain are in higher dimensions. However, there is still something to do in dimension 2. In fact, a conclusion of all the theorems obtained in Chapter II on the ψ MCF on a surface could be paraphrased saying: “densities do not produce any surprise, the motion of a closed curve continues all the time without singularities (may be converging to a ψ -minimal) or has a unique singularity in finite time that consists on its collapse to a round point”. Just as in MCF. But all this is with the hypothesis that the density ψ is a regular function. However, if we look again at the relation between ψ MCF and the MCF of a warped product, it appears very natural to consider densities ψ with singularities. In fact, $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2 \times_r \mathbb{S}^{n-1}$, where r denotes the distance to some line in \mathbb{R}^2 . Then, according to the “equivalence” between problems in a warped product and problems in a manifold with density, there are problems in \mathbb{R}^{n+1} equivalent to problems in \mathbb{R}^2 with density $\psi = \ln r^{n-1}$, which is singular at points $r = 0$. Moreover, surfaces of revolution moving under MCF become singular when they reach the axis $r = 0$. As a consequence, in the plane there are interesting densities with singularities such that the motion of a curve under ψ MCF produces singularities at the points where ψ is singular.

Then it is worth to study the different classes of singularities that can be produced in the motion of a curve in a surface with a singular density. We started this study considering type I singularities in the context of ψ MCF. We have begun the last chapter of this Thesis with the definition of this kind of singularity and the way to do the blow-up (section 3.2). Then we have given a general theorem of convergence of flows of type I under certain hypotheses (Proposition 3.2.3). We apply it to a special family of densities which are motivated by the example of those producing hypersurfaces of revolution. These are densities defined on a surface \overline{M} of non-negative curvature which depends on the distance r to a geodesic $r = 0$ of \overline{M} and are singular at $r = 0$ with a special behavior when $r \rightarrow 0$. They include the above density $\psi = \ln r^{n-1}$ but also many cases which seem not to have any equivalent MCF in smooth manifolds. For these kind of densities in surfaces we have proved that a curve which is a graph over the geodesic $r = 0$ of \overline{M} , has non-negative ψ -curvature and is not too far from $r = 0$, evolves under ψ MCF developing type I singularities in finite time when it touches the axis $r = 0$. When we apply a double blow-up at a singular point of this flow one obtains a $\ln r^b$ -shrinker in \mathbb{R}^2 which is a line parallel to $r = 0$ when $b = m \in \mathbb{N}$ (Theorem 3.1.1). The last case ($b = m \in \mathbb{N}$) gives a generalization to rotationally symmetric spaces of non-negative curvature of previous results of Huisken, Altschuler, Angenent and Giga on the MCF of a

hypersurface of revolution in \mathbb{R}^{n+1} .

After we have finished this work, we think that there are still interesting questions to solve for the ψ MCF of curves in surfaces. Among it, we think natural next steps are:

1. Determine the $\ln r^b$ -shrinkers on the euclidean \mathbb{R}^2 when $b \notin \mathbb{N}$. We think that the answer is that they are lines, but the proof cannot be a simple adaptation of the proof when $b \in \mathbb{N}$, because it uses the geometry of \mathbb{R}^{b+2} .
2. Describe other situations giving type I singularities.
3. Are generic type I singularities in some sense similar to the one given in [21].
4. Consider the above problems when ψ depends only on the distance to a fixed point.
5. Classify type I singularities for some families of densities ψ with singularities.
6. Describe flows associated to a density producing type II singularities.

Bibliografía

- [1] ABRESCH, U., AND LANGER, J. The normalized curve shortening flow and homothetic solutions. *Journal Differential Geometry* 23, 2 (1986), 175–196.
- [2] ALTSCHULER, S., ANGENENT, S., AND GIGA, Y. Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation. *Journal of Geometric Analysis* 5, 3 (1995), 293–358.
- [3] ANDREWS, B., AND BRYAN, P. Curvature bound for curve shortening flow via distance comparison and a direct proof of grayson’s theorem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 653 (2011), 179–187.
- [4] ANDREWS, B., AND HOPPER, C. *The Ricci Flow in Riemannian Geometry. A complete proof of the differentiable 1/4-pinching sphere theorem.*, vol. 2011 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [5] ANGENENT, S. The zero set of a solution of a parabolic equation. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 390 (1988), 79–96.
- [6] ANGENENT, S. Parabolic equations for curves on surfaces. i. curves with p-integrable curvature. *Annals of Mathematics (2)* 132, 3 (1990), 451–483.
- [7] ANGENENT, S. On the formation of singularities in the curve shortening flow. *Journal Differential Geometry* 33, 3 (1991), 601–633.
- [8] ANGENENT, S. Parabolic equations for curves on surfaces. ii. intersections, blow-up and generalized solutions. *Annals of Mathematics (2)* 133, 1 (January 1991), 171–215.
- [9] ANGENENT, S. Shrinking doughnuts. *Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, 3 (Gregynog, 1989)*, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, Birkhäuser Boston, Boston, MA 7 (1992), 21–38.
- [10] BAKRY, D., AND ÉMERY, M. Diffusions hypercontractives. *Séminaire de probabilités de Strasbourg* 19 (1985), 177–206.

-
- [11] BAYLE, V. *Propriétés de concavité du profil isopérimétrique et applications*. PhD thesis, Institut Fourier, Université Joseph-Fourier, Grenoble, France, 2004.
- [12] BORISENKO, A., AND MIQUEL, V. Gaussian mean curvature flow. *Journal of Evolution Equations* 10 (2010), 415–423.
- [13] BRENDLE, S. Embedded self-similar shrinkers of genus 0. *Annals of Mathematics* 183 (2016), 715 – 728.
- [14] CABEZAS-RIVAS, E., AND MIQUEL, V. Volume-preserving mean curvature flow of revolution hypersurfaces in a rotationally symmetric space. *Mathematische Zeitschrift* 261, 3 (03 2009), 489 – 510.
- [15] CABEZAS-RIVAS, E., AND MIQUEL, V. Volume preserving mean curvature flow of revolution hypersurfaces between two equidistants. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 43, 1 (01 2012), 185 – 210.
- [16] CAO, F. *Geometric Curve Evolution and Image Processing*, 1 ed. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [17] CHEN, B.-Y., AND VANHECKE, L. Differential geometry of geodesic spheres. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 325 (1981), 28–67.
- [18] CHOU, K.-S., AND ZHU, X.-P. Shortening complete plane curves. *Journal Differential Geometry* 50 (1998), 471–504.
- [19] CHOW, B., CHU, S.-C., GLICKENSTEIN, D., GUENTHER, C., ISENBERG, J., IVEY, T., KNOPF, D., LU, P., LUO, F., AND NI, L. *The Ricci Flow: Techniques and Applications. Part II: Analytic Aspects*, vol. 144 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [20] CHOW, B., AND KNOPF, D. *The Ricci Flow: An Introduction*, vol. 110 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2004.
- [21] COLDING, T. H., AND MINICOZZI-II, W. P. Generic mean curvature flow i; generic singularities. *Annals of Mathematics* 175, 2 (2012), 755 – 833.
- [22] DO CARMO, M. *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory and Applications. Birkhäuser Basel, 1992.
- [23] DRUGAN, G. An immersed s^2 self-shrinker. *Transactions of the American Mathematical Society* 367, 5 (May 2015), 3139 – 3159.

- [24] GAGE, M., AND HAMILTON, R. The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal Differential Geometry* 23 (1986), 69–96.
- [25] GAGE, M. E. An isoperimetric inequality with applications to curve shortening. *Duke Mathematical Journal* 50, 4 (December 1983), 1225–1229.
- [26] GAGE, M. E. Curve shortening makes convex curves circular. *Inventiones mathematicae* 76 (1984), 357–364.
- [27] GAGE, M. E. Curve shortening on surfaces. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 23, 2 (1990), 229–256.
- [28] GRAYSON, M. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal Differential Geometry* 26 (1987), 285–314.
- [29] GRAYSON, M. Shortening embedded curves. *Annals of Mathematics* 129 (1989), 71–111.
- [30] GROMOV, M. Isoperimetry of waists and concentration of maps. *Geometric And Functional Analysis* 13, 1 (February 2003), 178 – 215.
- [31] HAMILTON, R. Isoperimetric estimates for the curve shrinking flow in the plane. *Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*, Princeton University Press, NJ (1995), 201–222.
- [32] HUISKEN, G. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *Journal Differential Geometry* 20, 1 (1984), 237 – 266.
- [33] HUISKEN, G. Contracting convex hypersurfaces in riemannian manifolds by their mean curvature. *Inventiones mathematicae* 84, 3 (October 1986), 463 – 480.
- [34] HUISKEN, G. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *Journal Differential Geometry* 31, 1 (1990), 285 – 299.
- [35] HUISKEN, G. A distance comparison principle for evolving curves. *Asian Journal of Mathematics* 2, 1 (1998), 127 – 134.
- [36] HUISKEN, G., AND POLDEN, A. *Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems*, vol. 1713 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 1999, ch. Geometric evolution equations for hypersurfaces, pp. 45 – 84.
- [37] KAPOULEAS, N., KLEENE, S., AND MOLLER, N. M. Mean curvature self-shrinkers of high genus: Non-compact examples. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (2015).

-
- [38] KLEENE, S., AND MOLLER, N. M. Self-shrinkers with a rotational symmetry. *Transactions of the American Mathematical Society* 366, 8 (August 2014), 3943 – 3963.
- [39] MANTEGAZZA, C. *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*, vol. 290 of *Progress in Mathematics*. Springer Basel, 2011.
- [40] MANTEGAZZA, C., AND MARTINAZZI, L. A note on quasilinear parabolic equations on manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze (5)* 11, 4 (2012), 857–874.
- [41] MIQUEL, V., AND VIÑADO-LEREU, F. The curve shortening problem associated to a density. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 55:61, 3 (June 2016), 1 – 30.
- [42] MIQUEL, V., AND VIÑADO-LEREU, F. Type i singularities in the curve shortening flow associated to a density. *Preprint arXiv.org: 1607.08402v1* (2016).
- [43] MORGAN, F. Manifolds with density. *Notices of the American Mathematical Society* 52, 8 (September 2005), 853 – 858.
- [44] MULLINS, W. W. Two-dimensional motion of idealized grain boundaries. *Journal of Applied Physics* 27 (1956), 900–904.
- [45] MUNTEANU, O., AND WANG, J. Geometry of manifolds with densities. *Advances in Mathematics* 259 (2014), 269–305.
- [46] OAKS, J. A. Singularities and self intersections of curve evolving on surfaces. *Indiana University Mathematics Journal* 43, 3 (1994), 959–981.
- [47] O’NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. 1983.
- [48] PETERSEN, P. *Riemannian Geometry*, 2 ed., vol. 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [49] ROSALES, C., CAÑETE, A., BAYLE, V., AND MORGAN, F. On the isoperimetric problem in euclidean space with density. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 31, 1 (January 2008), 27 – 46.
- [50] SCHNÜRER, O. C., AND SMOCZYK, K. Evolution of hypersurfaces in central force fields. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 550 (2002), 77–95.

-
- [51] SMOCZYK, K. Symmetric hypersurfaces in riemannian manifolds contracting to lie-groups by their mean curvature. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 4, 2 (February 1996), 155 – 170.
- [52] SMOCZYK, K. A relation between mean curvature flow solitons and minimal submanifolds. *Mathematische Nachrichten* 229, 1 (September 2001), 175–186.
- [53] ZHU, X.-P. Asymptotic behavior of anisotropic curve flows. *Journal Differential Geometry* 48 (1998), 225–274.
- [54] ZHU, X.-P. *Lectures on Mean Curvature Flows*, vol. 32. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Providence, RI, September 2002.