UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Investigación en Didácticas Específicas

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA MEDIANTE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS A UN ESTUDIANTE DE EDUCACIÓN PRIMARIA CON ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

EVA ARBONA PICOT

Tutores

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Dra. María José Beltrán Meneu

Dra. Adela Jaime Pastor

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Valencia, 30 de junio de 2016

Ficha técnica (todos los campos son obligatorios excepto el resumen en inglés): **Máster**:

Máster en Investigación en Didácticas Específicas por la Universitat de València

Especialidad: Didáctica de las Matemáticas

Autor: Apellidos: Arbona Picot
Nombre: Eva

Título de la memoria: Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas

Tutor 1: Apellidos: Gutiérrez Rodríguez
Nombre: Ángel
Departamento: Didáctica de las matemáticas

Tutor 2: Apellidos: Beltrán Meneu
Nombre: María José
Departamento: Didáctica de las matemáticas

Tutor 3: Apellidos: Jaime Pastor
Nombre: Adela
Departamento: Didáctica de las matemáticas

Fecha de defensa:

Calificación (numérica y Matr. de Honor si procede):

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, Álgebra, Patrones, Altas Capacidades, Educación Primaria.

Keywords: Mathematics education, Algebra, Patterns, Gifted, Primary education.

Códigos Unesco (hasta 4): 1299 (didáctica de las matemáticas), 1201.99 (enseñanza del álgebra), 6104.99 (altas capacidades matemáticas)

Resumen (máximo 10 líneas): Esta investigación tiene por objetivo diseñar, mediante la metodología de investigación de diseño, una secuencia de enseñanza que permita iniciar en álgebra, mediante problemas de patrones geométricos, a estudiantes con altas capacidades matemáticas. Hemos analizado los procesos de aprendizaje involucrados y las características presentadas propias de estos estudiantes. La secuencia diseñada ha sido experimentada en un único estudiante superdotado de 9 años de edad, quien ha manifestado una buena capacidad de generalización y una gran rapidez de aprendizaje, realizando la transición de la aritmética al álgebra con facilidad y siendo capaz, además, de aplicar lo aprendido a otros contextos.

Abstract: The aim of this research is to design, based on the design research methodology, a teaching sequence that allows to introduce algebra, through geometric pattern problems, to mathematically talented students. We have analysed the learning processes involved and the characteristics of these students with a 9 years old gifted student, who has shown a good generalization capability and quick learning abilities, making the transition from arithmetic to algebra with little difficulty and being able to apply the new knowledge to other contexts.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría dar las gracias a todos los que han hecho posible realizar esta investigación. Su apoyo y ayuda ha sido esencial para el desarrollo de la misma.

A mis tutores, Ángel Gutiérrez, María José Beltrán y Adela Jaime, por estar siempre dispuestos a ayudarme y mejorar el trabajo.

Al estudiante que ha participado en esta investigación y a su madre, por hacer posible la implementación de la secuencia diseñada.

A mi familia, por su apoyo incondicional, paciencia y colaboración.

Índice

1. INTRODUCCIÓN

> La sociedad no se puede permitir el lujo de que en este siglo se nos sigan quedando niños sin atender, por la injusticia social que supone y por el “despilfarro” que significa no disponer de los alumnos de alta capacidad intelectual con una buena formación, cuando nuestro futuro como sociedad, como grupo, va a depender de los avances en el saber (Torrego, 2011, p. 9).

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de Calidad Educativa (LOMCE), en su modificación de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), establece que los centros escolares realizarán las adaptaciones curriculares necesarias para asegurar que el alumnado que requiera una atención educativa diferente a la ordinaria –entendiendo como tal a aquellos que presentan necesidades educativas especiales, dificultades específicas de aprendizaje, TDAH, altas capacidades, incorporación tardía al sistema educativo o condiciones personales o de historia escolar– pueda alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales.

No obstante, a pesar de lo establecido en la LOMCE, los estudiantes con altas capacidades suelen recibir escasa atención, principalmente, por falta de detección, pues, según Arocas, Martínez y Martínez (2009, p. VII), “la mayor parte de los docentes dispone de una información muy incompleta e inexacta acerca de las características del alumnado con altas capacidades y, en general, desconocen cuáles son sus necesidades más frecuentes y el tipo de respuesta educativa que requieren”. Además, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) reconoce que “los estudiantes más olvidados, en términos de alcanzar su potencial, son los estudiantes superdotados de matemáticas” (NCTM, 1980, p. 18, citado en Castro, Benavides y Segovia, 2008, p. 125).

Esto supone una gran problemática, puesto que,

> (e)n ocasiones, estudiantes de altas capacidades, que podrían aportar soluciones geniales y ser grandes científicos, ingenieros, profesores, médicos, artistas, historiadores, etc., ven frustrados sus intentos de originalidad o su interés por aprender lo que todavía no saben a causa de un sistema educativo que, cuando implementa realmente los currículos oficiales, ignora el potencial de estos estudiantes (Jaime y Gutiérrez, 2014, p. 147-148).

Es más, esta falta de atención puede generar dificultades de aprendizaje, así como alteraciones de personalidad y comportamiento (Ramírez, 2012). En consecuencia, es conveniente y necesario que, una vez detectados (mediante técnicas cualitativas y cuantitativas), se lleve a cabo un conjunto de acciones relacionadas, “fundamentalmente, en el contexto escolar y junto a otros/as agentes educativos, con el objetivo de potenciar todas las capacidades del alumnado” (Aretxaga, 2013, p. 46).

El estudio del álgebra puede servir como contexto para potenciar algunas de las capacidades de estos estudiantes, así como para llevar a cabo una intervención educativa extracurricular en Educación Primaria, pues el álgebra es una parte fundamental del currículum de matemáticas en la E.S.O. que permite al alumnado “generalizar, modelizar y analizar situaciones matemáticas” (NCTM, 2008, p. 2, citado en Markworth, 2010, p. 5). Concretamente, el álgebra en Educación Primaria puede ser abordada desde la perspectiva del pensamiento algebraico. Diversos autores han tratado de definir y caracterizar esta forma de pensamiento y, sin embargo, aún no se ha llegado a un acuerdo al respecto. No obstante, se trata de un tipo determinado de pensamiento que permite a los estudiantes trabajar y operar con cantidades desconocidas e indeterminadas y que no se basa en el uso de notaciones simbólicas alfanuméricas (Radford, 2011b).

Teniendo en cuenta estos aspectos, la generalización de patrones ha sido demostrada como un entorno que permite desarrollar y promover el pensamiento algebraico. Los problemas de patrones geométricos demandan calcular un conjunto de términos de dificultad gradual a partir de una serie de figuras geométricas que guardan una relación de propiedades comunes. Así pues, es interesante trabajar con este tipo de problemas, con todo el alumnado en general y, concretamente, con los estudiantes con altas capacidades matemáticas, pues son considerados *actividades matemáticas ricas* (Jaime y Gutiérrez, 2014) y, por tanto, permiten el desarrollo de sus habilidades y capacidades. Además, el trabajo mediante la resolución de problemas ha sido demostrado como un modo eficaz de desarrollar el talento matemático de estos estudiantes.

En este trabajo[1] tenemos como objetivo general explorar una posible forma de introducir y trabajar la pre-álgebra con estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas, con el fin de que aprendan a manipular símbolos algebraicos y entiendan el significado de su terminología básica.

Este objetivo general se desglosa en los tres objetivos específicos siguientes:

- Diseñar y experimentar una secuencia de enseñanza-aprendizaje que permita la iniciación al álgebra de estudiantes con altas capacidades matemáticas mediante la resolución de problemas de patrones geométricos.

La actividad experimental realizada se ha basado en un caso de un estudiante, lo cual nos ha proporcionado datos para:

- Observar y analizar los procesos de aprendizaje empleados por un estudiante con altas capacidades matemáticas durante la implementación de la secuencia de enseñanza-aprendizaje diseñada.
- Aportar información que nos permita identificar las características que manifiestan los estudiantes con altas capacidades matemáticas en este contexto de iniciación al álgebra (pre-álgebra).

Una vez planteada la problemática a abordar y los objetivos de la investigación, en el capítulo 2 presentamos una revisión de las investigaciones previas relacionadas con las altas capacidades, en particular con las altas capacidades matemáticas, el álgebra y los problemas de patrones geométricos.

---

[1] La investigación presentada es parte de las actividades de los proyectos de investigación *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259, MINECO) y *Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional* (EDU2015-69731-R, MINECO/FEDER).

En el capítulo 3, describimos el marco teórico en el que hemos fundamentado esta investigación. Para ello, tratamos el álgebra como forma de intervención con estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas, teniendo en cuenta las dificultades presentadas por estudiantes de la E.S.O. en su estudio y el modelo dinámico de la balanza como forma de resolución de ecuaciones lineales. Asimismo, planteamos los problemas de patrones geométricos como método de introducción al pensamiento algebraico a través de la generalización y mostramos distintas estrategias de resolución y niveles de generalización identificados por diversos investigadores.

En el capítulo 4, describimos la metodología utilizada para el desarrollo de la investigación. En ella, abordamos la preparación del experimento, su implementación en las diferentes etapas que constituyen el experimento de diseño y los criterios elaborados para su análisis.

En el capítulo 5, analizamos los datos obtenidos durante la experimentación y referidos al proceso de aprendizaje seguido por el estudiante. Además, analizamos las características propias de los estudiantes de altas capacidades matemáticas puestas en juego a través de las distintas sesiones y la presencia o ausencia de dificultades en el aprendizaje del álgebra.

Finalmente, en el capítulo 6, presentamos las conclusiones obtenidas en relación con los objetivos planteados, las limitaciones de la investigación y posibles perspectivas futuras de investigación.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En este capítulo, presentamos una revisión bibliográfica de los estudios e investigaciones relacionados con este trabajo, dividiendo el capítulo en tres secciones, dedicadas, respectivamente, a las altas capacidades, el álgebra y los problemas de patrones geométricos.

2.1. Altas capacidades

A lo largo del tiempo, se han empleado diversos nombres para designar a los estudiantes que poseen habilidades y capacidades por encima de la media. De entre los más utilizados, podemos destacar y diferenciar los términos talentoso, superdotado y de altas capacidades. No obstante, en la literatura no hay unanimidad en la definición de estos términos.

Para Aretxaga (2013), el término talentoso se refiere a aquellos alumnos que presentan habilidades o capacidades específicas, propias de un ámbito, aspecto cognitivo o tipo de procesamiento concreto, mientras que el término superdotado hace referencia a aquellos estudiantes que destacan en todas las áreas y, por tanto, presentan una capacidad superior generalizada. Por otra parte, para Torrego (2011, pp. 13-14), el término altas capacidades es más amplio, puesto que se utiliza para referirse a aquellos alumnos que "presentan un nivel de rendimiento intelectual superior en una amplia gama de capacidades y aprenden con facilidad cualquier área o materia". Sin embargo, Gardner (1995) propone la existencia de diferentes tipos de inteligencias, caracterizadas por la presencia de altas capacidades en unas áreas específicas.

Además, desde el ámbito de la psicología, se han desarrollado diversos modelos teóricos que tratan de explicar el fenómeno de las altas capacidades. Cada uno de estos modelos centra su atención en unos aspectos concretos; por este motivo, diferentes autores clasifican estos modelos en función de los elementos valorados (Arocas, Martínez y Martínez, 2009; Torrego, 2011; Aretxaga, 2013; Jaime y Gutiérrez, 2014).

Podemos encontrar modelos basados en capacidades, como el Coeficiente Intelectual de Terman (1925, citado en Benavides, 2008) o la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Gardner (1995); modelos cognitivos, entre los que destaca el de Sternberg (1997, citado en Benavides, 2008) de la Teoría Triárquica de la Inteligencia, la Teoría Pentagonal Implícita y el Modelo WISC (Sabiduría, en inglés *Wisdom,* Inteligencia, Síntesis y Creatividad) (Torrego, 2011); modelos orientados al rendimiento, entre los cuales se encuentra el Modelo de los Tres Anillos de Renzulli (1998) y el Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento de Gagné (2000), y modelos socioculturales, como el Modelo de la Interdependencia Tríadica de Mönks (Aretxaga, 2013) o el Modelo Psicosocial de Tannenbaum (Aretxaga, 2013). De los modelos surgidos en España, destacamos el Modelo Global de Superdotación y Talento de Pérez (Torrego, 2011) y el Modelo Explicativo de la Superdotación de Prieto y Castejón (Jaime y Gutiérrez, 2014).

El desarrollo de modelos explicativos ha permitido la identificación de estos estudiantes, pues establecen, en función de los elementos valorados, cuáles son las características principales que presentan y qué ámbitos ejercen influencia sobre el desarrollo de sus capacidades.

Sin embargo, es necesario destacar que, independientemente del modelo explicativo que adoptemos o consideremos más idóneo, el proceso de identificación deberá emplear estrategias y herramientas diversificadas, donde participen todos los miembros de la comunidad escolar y familiar, con tal de atender el desarrollo emocional, social y creativo del individuo, pues, en definitiva, la identificación, deberá ser multidimensional, cualitativa y cuantitativa, contextualizada y un proceso normalizado (Aretxaga, 2013).

Esta identificación debe ser la base que propicie una adecuada intervención educativa, entendida, según Aretxaga (2013), como un conjunto de acciones relacionadas que permitan potenciar todas las capacidades del alumnado, tanto en el contexto escolar (intervención curricular) como junto a otros agentes educativos (intervención extracurricular), ya que es común que, a pesar de ser detectados, no se lleve a cabo ninguna intervención en el aula para los alumnos con altas capacidades, bien sea por desconocimiento o bien por la creencia de que no necesitan intervención debido a sus capacidades superiores (Carreras, Valera y Reig, 2006).

2.1.1. Altas capacidades matemáticas

Dentro del marco de las altas capacidades, se ha prestado atención a diferentes tipos de capacidades –Gardner (1995) diferenció 9 tipos de inteligencias–, siendo una de ellas la relacionada con el pensamiento matemático. Los estudiantes con altas capacidades matemáticas son aquellos que destacan claramente en este tipo de inteligencia. Krutetskii (1976, p. 77) denomina talento matemático a "un conjunto único de habilidades matemáticas que ofrecen la posibilidad de un desempeño exitoso en la actividad matemática". Torrego (2011) define a los estudiantes de altas capacidades matemáticas como aquellos que destacan en aptitudes como el razonamiento lógico-analítico, en formas de pensamiento visual y espacial, y que muestran una habilidad excepcional para aprender matemáticas. En esta memoria, y refiriéndonos al área de las matemáticas, vamos a considerar como equivalentes los términos "talentoso" y "alta capacidad", o sus variantes, como "estudiante talentoso" y "altas capacidades".

Estos estudiantes "representan un porcentaje relativamente pequeño de la población total de alumnos escolarizados" (Castro, Benavides y Segovia, 2006, p.6), ya que Miller (1990) sitúa a los estudiantes con altas capacidades matemáticas entre el 2% o el 3% de la población y, según los datos de Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez (2004), representan un 2'7% del total.

2.1.1.1. Características

> La caracterización del talento matemático, como caso particular de talento, establece unas posibles actuaciones para estimularlo y desarrollarlo. El talento necesita emerger y crecer evolutivamente ya que puede que no llegue a manifestarse sin una adecuada estimulación. Descubrir el potencial que encierra cada alumno y desarrollar sus capacidades con la mejor atención educativa

> colaborará, no sólo a mejorar su rendimiento escolar, sino también a su desarrollo como persona (Ramírez, 2012, p. 1).

Autores como Krutetskii (1976), Greenes (1981), Miller (1990), Touron y otros (1998) y Freiman (2006) han elaborado diversos listados de características observadas en los alumnos con altas capacidades matemáticas. Estos listados de características suelen diferenciar entre habilidades matemáticas, como, por ejemplo, una memoria excepcional, resoluciones atípicas de problemas o interés por las matemáticas, y características generales personales, entre las cuales se incluyen la perseverancia y la tolerancia frente a la frustración o el interés por tareas desafiantes (Singer, Sheffield, Freiman y Brandl, 2016). En la Tabla 1 presentamos una recopilación de las características, clasificadas en los tres tipos de habilidades descritos por Gutiérrez y Jaime (2013).

> En conjunto, las habilidades enunciadas por estos autores pueden organizarse en habilidades de tipo afectivo (relacionadas con el gusto e interés por las matemáticas), de aprendizaje (relativas a sus formas de aprender diferentes contenidos matemáticos) y de resolución de problemas (sobre sus estrategias de resolución, procesos metacognitivos de control, uso de la imaginación e intuición, etc.) (Gutiérrez y Jaime, 2013, p. 320).

	Krutetskii (1976)	Greenes (1981)	Miller (1990)	Tourón y otros (1998)	Freiman (2006)
Afectivas		Formulación espontánea de problemas	Entusiasmo inusual y una gran curiosidad sobre la información numérica		Pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean
Aprendizaje	Habilidad para formalizar material matemático Habilidad para generalizar material matemático Memoria matemática Habilidad para conceptos espaciales	Habilidad para transferir ideas Habilidad para generalizar	Rapidez inusual para aprender, comprender y aplicar ideas matemáticas Habilidad inusual para transferir aprendizaje a nuevas situaciones matemáticas	Rapidez de aprendizaje Generalización y transferencia Capacidad de abstracción Memoria matemática para las relaciones, las características, los métodos, los principios y los símbolos matemáticos Estructura mental matemática	Construye nexos y estructuras matemáticas Presta atención a los detalles Desarrolla estrategias eficientes Piensa críticamente Persiste en conseguir sus objetivos

	Krutetskii (1976)	Greenes (1981)	Miller (1990)	Tourón y otros (1998)	Freiman (2006)
Resolución de Problemas	Habilidad para operar con números y símbolos Habilidad para el razonamiento lógico Habilidad para acortar los procesos de razonamiento Habilidad para invertir los procesos mentales Flexibilidad de pensamiento	Flexibilidad en el manejo de datos Habilidad para organizar datos Agilidad mental para el flujo de ideas Originalidad de interpretación	Gran habilidad para pensar y trabajar de un modo abstracto y habilidad para ver patrones y relaciones matemáticas Habilidad inusual para pensar y trabajar con problemas matemáticos de un modo flexible y creativo	Flexibilidad en los procesos mentales requeridos para la actividad matemática Reducción del proceso de razonamiento matemático Pensamiento lógico Habilidad para la inversión de los procesos mentales en el razonamiento matemático	Busca patrones y relaciones Busca la clave (esencial) del problema Produce ideas originales y valiosas Mantiene la situación del problema bajo control Cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra

Tabla 1. Clasificación de las características de los estudiantes con altas capacidades matemáticas.

2.1.1.2. Investigaciones sobre altas capacidades matemáticas

La investigación educativa en el ámbito de las altas capacidades matemáticas es relativamente reciente, puesto que se inicia hacia la mitad del siglo XX (Benavides, 2008). Sus "temas de estudio se agrupan en tres grandes focos: la caracterización del talento matemático, establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención dentro de programas especiales dentro y fuera de la escuela" (Castro, 2008, pp. 21-22).

Se han desarrollado diversas investigaciones dirigidas a la caracterización de las altas capacidades matemáticas, puesto que es necesario conocer qué características diferenciadoras presenta este tipo de alumnado para poder identificarlo. Krutetskii (1976) realizó un estudio longitudinal de once años de duración (1955 – 1966) con 192 estudiantes de entre 6 y 16 años. En este estudio, observó los procesos cognitivos de los estudiantes mientras resolvían una serie de problemas preparados para la investigación. Finalmente, detectó que los estudiantes superdotados presentan cierta tendencia a preferir formas de pensamiento visuo-espacial o lógico-analítico y, además, piensan de un modo cualitativamente diferente sobre las matemáticas, incluso con destrezas de resolución de problemas matemáticos propias de los adultos. Por su parte, Greenes (1981) describe siete características –referenciadas en la tabla 1– que permiten identificar a los estudiantes con altas capacidades matemáticas y diferenciarlos de los "buenos estudiantes".

En cuanto a la identificación, diferentes autores han investigado qué métodos o mecanismos de identificación son más fiables y precisos y han propuesto y validado nuevos métodos que permitan llevar a cabo una buena identificación, así como, posteriormente, una intervención adecuada para aquellos alumnos que sean identificados. Benavides (2008) ha elaborado y validado un cuestionario de problemas de estructura multiplicativa que permite identificar a estudiantes con talento matemático. Reyes-Santander y Karg (2009) diseñaron tareas enriquecedoras que, al implementarlas, permiten identificar alumnos con talento matemático mediante la observación de las características propias de estos estudiantes en sus actuaciones y respuestas.

Por otra parte, buena parte de las investigaciones que podemos encontrar en el campo de investigación de las altas capacidades matemáticas se encuentran enfocadas hacia la intervención educativa, tanto dentro como fuera del ámbito escolar. Amit y Neria (2008) presentan un análisis de las estrategias empleadas por estudiantes talentosos pre-algebraicos para resolver problemas de patrones geométricos. En Fritzlar y Karpinski-Siebold (2012) se describe un estudio realizado con el objetivo de explorar cómo de distinto es el pensamiento algebraico en estudiantes pre-algebraicos de 4º de Educación Primaria y descubrir si existe alguna relación entre el pensamiento algebraico y el talento matemático.

Por su parte, Ramírez (2012) diseña buenas prácticas docentes para desarrollar la visualización en estudiantes con altas capacidades matemáticas a través del análisis de las habilidades de visualización que utilizan en diversas sesiones de enriquecimiento curricular. En esta misma línea, Jaime y Gutiérrez (2014) ofrecen algunas perspectivas de lo que consideran que debería ser una enseñanza de calidad que permita el máximo desarrollo del potencial de los estudiantes con altas capacidades matemáticas. Para ello, resumen diferentes modos de intervención educativa, tanto escolar como extraescolar.

2.2. Álgebra

> El álgebra es un modo de pensamiento y un conjunto de conceptos y habilidades que permite a los estudiantes generalizar, modelizar y analizar situaciones matemáticas. El álgebra proporciona una forma sistemática para investigar relaciones, ayudando a describir, organizar y comprender el mundo. (NCTM, 2008, p. 2, citado en Markworth, 2010, p. 5)

El estudio y la comprensión del álgebra son esenciales para acceder y alcanzar el éxito en estudios avanzados de las matemáticas. Por este motivo, los estudiantes necesitan modos de acceso al álgebra más equitativos y que permitan experimentarla como matemáticas significativas (Markworth, 2010), pues, para muchos estudiantes, el álgebra carece de relevancia y significado (Kaput, 1999).

En este sentido, un aspecto que debe ser tenido en cuenta a la hora de enseñar álgebra es el carácter dual que presenta y al que han hecho referencia diversos autores. Sfard (1991) explica que una expresión algebraica puede ser percibida operativamente como un proceso, así como estructuralmente como un objeto, siendo complementarios estos dos modos diferenciados de percibirla. Siguiendo esta descripción, Drijvers (2003) apunta que la presencia de flexibilidad para cambiar de un modo a otro de percibir la expresión algebraica es signo de madurez en la comprensión del pensamiento algebraico. Finalmente, Rojano (1985) indica que la dualidad del álgebra ha sido observada en trabajos como el de Hans Freudenthal desde la óptica de la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas, según el cual el álgebra es una estructura matemática que, mediante la enseñanza, debe ser convertida en lenguaje para que pueda ser aprendido y utilizado por los estudiantes.

2.2.1. El lenguaje algebraico

Según el diccionario de la Real Academia Española (RAE), el lenguaje es una “manera de expresarse”. Los seres humanos poseen diversas formas de expresarse y, por este motivo, se pueden identificar diversos tipos de lenguaje: lenguaje hablado, lenguaje escrito, lenguaje gestual, lenguaje matemático, lenguaje musical, etc. Sin embargo, estos lenguajes no son innatos, deben ser aprendidos y, para ello, las personas pueden apoyarse en los lenguajes que ya han sido aprendidos previamente a través de la traducción, que consiste en la reproducción de un mismo contenido en un lenguaje distinto (Freudenthal, 2001).

Además, Freudenthal (2001, p. 111) también indica que “la reproducción, producción y creación de expresiones lingüísticas sólo es posible si uno entiende lo que significan los elementos lingüísticos significativos y domina el funcionamiento de los elementos estructurantes”. En el lenguaje matemático, no todos los signos son de naturaleza lingüística, sino que se distinguen signos estrictamente matemáticos, así como también signos pertenecientes a algún lenguaje vernáculo (Filloy, Puig y Rojano, 2008). El conjunto de estos dos tipos de signos conforma un Sistema Matemático de Signos (SMS).

Para la construcción del SMS algebraico, es necesario partir del SMS aritmético, así como de las operaciones aritméticas elementales, las cuales se verán involucradas en operaciones con nuevos objetos. En esta transición del conocimiento aritmético al conocimiento algebraico es crucial una intervención de enseñanza, como indican Filloy, Puig y Rojano (2008), ya que los cambios en los hábitos y nociones aritméticas no aparecen de un modo espontáneo.

Asimismo, tanto el leguaje aritmético como el lenguaje algebraico son lenguajes formales, en el sentido en que “un lenguaje es puramente formal si sus expresiones se pueden manejar, imitar y comprobar si son correctas (esto es, si exhiben la regularidad requerida) sin prestar atención a su significado, que quizá sea incluso absurdo” (Freudenthal, 2001, p. 111), puesto que siguen ciertas reglas.

2.2.2. Del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico

Diversas investigaciones han sido conducidas en la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. Matz (1980, citado en Radford, 2006) y Kaput y Sims-Knight (1983, citado en Radford, 2006) investigaron algunos de los errores asociados con el uso de símbolos. Kieran (1981) identificó diferentes conceptos asociados al signo igual. Booth (1984) indicó la existencia de una similitud notable entre la aritmética y el álgebra. Filloy y Rojano (1989) apuntan algunos de los problemas a los que se enfrentan los estudiantes principiantes al resolver ecuaciones. Y, finalmente, Bednarz y Janvier (1996, citado en Radford, 2006) estudiaron los efectos que tiene la estructura de los problemas verbales en el razonamiento aritmético y algebraico.

Sin embargo, y pese a la gran cantidad de investigaciones enfocadas a este campo de las matemáticas, aún no existe una definición clara y concisa de pensamiento algebraico. Según Radford (2006, p. 3), este hecho puede deberse “a la amplia gama de objetos algebraicos (por ejemplo, ecuaciones, funciones, patrones…) y procesos (invertir, simplificar…), así como a las diversas formas posibles de concebir el pensamiento en general”.

Quizás por este motivo, existen múltiples estudios que tratan de caracterizar en qué consiste el pensamiento algebraico, pues, como indican Fritzlar y Karpinski-

Siebold (2012), el álgebra no es sólo saber tratar con símbolos, términos, ecuaciones o funciones. Estos mismos autores postulan seis componentes del pensamiento algebraico: manejar operaciones como objetos y sus inversas, establecer relaciones entre números, conjuntos y relaciones, generalizar, tratar con incógnitas, tratar con cambios y usar representaciones (simbólicas). Del mismo modo, Radford (2006) crea una lista no exhaustiva de tres elementos interrelacionados característicos del pensamiento algebraico: el sentido de la indeterminación, el manejo analítico de objetos indeterminados y la representación simbólica de objetos indeterminados.

En este marco, varias investigaciones se han orientado a caracterizar el pensamiento algebraico por contraposición al pensamiento aritmético, es decir, aquellas habilidades que difieren de uno a otro y que pueden significar la adquisición del pensamiento algebraico, pues "en la transición de la aritmética al álgebra, los estudiantes necesitan hacer muchos ajustes, incluso aquellos que son muy competentes en aritmética" (Kieran, 2004, p. 140).

Filloy y Rojano (1989) y Filloy, Puig y Rojano (2008), basándose en las investigaciones realizadas por Kieran (1981), Matz (1982, citado en Filloy y Rojano, 1989) y Booth (1984), identifican tres cambios conceptuales y simbólicos que marcan la diferencia entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico: las diferentes interpretaciones de las letras, la noción de igualdad y las convenciones simbólicas utilizadas para codificar operaciones y transformaciones en la solución de ecuaciones. Por su parte, Kieran (2004) elabora una lista de cinco reenfoques que deben tener lugar para poder realizar esta transición entre tipos de pensamiento: enfocarse en las relaciones y no solamente en calcular una respuesta numérica; enfocarse en las operaciones y sus inversas; enfocarse en representar y resolver un problema en lugar de únicamente resolverlo; enfocarse en los números y en las letras, en vez de sólo en los números; y reenfocar el significado del signo igual.

En cualquier caso, y sean cuales sean las características del pensamiento algebraico, no es de ninguna manera un proceso natural de adquisición, pues no aparecerá con la madurez de los estudiantes (Radford, 2011b), sino que debe ser alcanzado a través de la enseñanza y esta adquisición es la que plantea serias dificultades a algunos estudiantes.

2.2.3. Enfoques didácticos

Teniendo en cuenta los cambios nombrados, tanto conceptuales como simbólicos, por los que pasan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, las intervenciones de los maestros y profesores de E.S.O. en las aulas son cruciales para llevar a cabo la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. Por este motivo, diversos autores se han ocupado de analizar posibles formas de trabajo en las aulas.

Según Filloy y Rojano (1989), existen dos enfoques didácticos opuestos sobre el tipo de enseñanza que debe proporcionársele a los alumnos. Uno de ellos propone el inicio del aprendizaje del álgebra en el nivel sintáctico, a través de la enseñanza de las reglas sintácticas y su aplicación en la resolución de ecuaciones. El otro enfoque propone como punto de partida el nivel semántico del álgebra, utilizando como modelo algún contexto concreto que dote de significado y sentido a las operaciones y los objetos algebraicos. No obstante, el uso de este modelo

> no significa que la construcción de la sintaxis algebraica desde esta primera aproximación sea inmediata; entremedias hay procesos de abstracción de las operaciones realizadas con los elementos de la situación concreta en la que se modelan los nuevos objetos y operaciones. Estos procesos, a su vez, implican otros, tales como el proceso de generalización de las acciones en el modelado, y el proceso de discriminación de los diferentes casos para ser modelados, entre otros (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 100).

2.2.4. Pre-álgebra

En los últimos años, se ha incrementado el número de investigaciones dirigidas a la enseñanza del álgebra en la Educación Primaria (Cai y Knuth, 2011). Este contexto es conocido como *Pre-álgebra* y “propone organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas tratando de que haya una continuidad entre ambas” (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015, p. 279), así como la inclusión del pensamiento algebraico en el currículum de Educación Primaria. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) también resalta la importancia de la introducción del álgebra desde edades tempranas:

> Aunque aprender a usar el álgebra hace a los estudiantes poderosos resolutores de problemas, estos conceptos y habilidades importantes llevan tiempo para desarrollarse. Su desarrollo empieza pronto y debería ser un foco de instrucción matemática desde pre-K hasta grado 12. Conocer álgebra abre puertas y expande oportunidades, instalando una amplia gama de ideas matemáticas que son útiles en muchas profesiones y carreras. Todos los estudiantes deben tener acceso al álgebra y ayuda para su aprendizaje. (NCTM, 2008, p. 2, citado en Markworth, 2010, p. 5)

Así mismo, el NCTM (2000) establece cuatro estándares que los estudiantes deben alcanzar a través del estudio del álgebra durante su escolaridad. De este modo, los estudiantes deberán ser capaces de comprender patrones, relaciones y funciones, representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos, usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y, finalmente, analizar el cambio en contextos variados.

2.3. Problemas de patrones geométricos

Diversos estudios han demostrado y confirmado que los problemas de generalización, en particular los basados en patrones geométricos, son un buen modo de desarrollar y promover el pensamiento algebraico. Estos estudios varían en los tipos de patrones (geométricos o numéricos) que han utilizado y en la población de estudio (estudiantes de primaria, secundaria, universidad…), pero todos revelan la eficiencia de este tipo de problemas para el inicio en el álgebra.

English & Warren (1998) realizan un estudio con 430 alumnos de entre 12 y 15 años en el que revisan el enfoque alternativo de los patrones para la introducción del concepto de variable. También destacan ciertas dificultades que pueden presentar los alumnos cuando carecen de ciertas habilidades y realizan algunas recomendaciones para evitarlo. Amit y Neria (2008) llevan a cabo una investigación con estudiantes talentosos pre-algebraicos de entre 11 y 13 años en la cual analizan en profundidad las estrategias empleadas para resolver problemas de patrones presentados de forma pictórica y verbal.

Por su parte, Trujillo, Castro y Molina (2009) realizan un estudio de casos con cuatro alumnos de primer curso de Magisterio de la Universidad de Granada en el cual analizan sus procesos de generalización cuando trabajan con patrones en expresiones aritméticas. En Rivera (2010) se concluye que los estudiantes de entre 7 y 8 años parecen tener más dificultades al resolver problemas de patrones numéricos que problemas de patrones geométricos. Por último, Zapatera y Callejo (2011) identifican las estrategias que utilizan estudiantes de primero a cuarto de la E.S.O. al resolver problemas de patrones geométricos lineales con creciente grado de dificultad.

"La idea de patrón surge de la repetición de una situación con regularidad" (Castro, 1995, citado en Merino, Cañadas y Molina, 2013, p. 384). En estos problemas suelen aparecer, principalmente, dos tipos de patrones diferenciados: numéricos y geométricos. Un patrón numérico es una secuencia de números que pueden ser calculados mediante una regla definida desde el número anterior o desde su posición en la secuencia (Ndlovu, 2011). En cambio, un patrón geométrico puede ser definido como "una secuencia de figuras en las cuales los objetos de la figura cambian de un término a otro, normalmente de un modo predecible" (Huntzinger, 2008, p. 280, citado en Markworth, 2010, p. 11).

2.3.1. Tipos de cuestiones en un problema de patrones geométricos

En los problemas de patrones geométricos, según Merino, Cañadas y Molina (2013), las cuestiones radican en realizar generalizaciones a partir de términos conocidos de la secuencia para obtener nuevos términos o el término general x_n. Además, también indican que su contenido matemático se centra, principalmente, en relaciones funcionales de dos variables, entre las cuales existen dos tipos de relaciones: relación directa y relación inversa. En la relación directa conocemos un término en concreto (variable independiente) pero no cuántos elementos lo forman (variable dependiente), mientras que en la relación inversa sabemos el número de elementos que están presentes en un término determinado (variable dependiente), pero no de qué término se trata (variable independiente).

Si nos centramos en las cuestiones de relación directa, Radford (2011a) pide a sus estudiantes que extiendan la secuencia de figuras que les presenta, pues, para ello, necesitan comprender una regularidad que organiza tanto la estructura espacial como la estructura numérica del patrón. Y, según especifica, la unión de ambas estructuras constituye un aspecto importante para el desarrollo del pensamiento algebraico. Por otra parte, Stacey (1989) distingue dos tipos de cuestiones: cuestiones de generalización cercana, que pueden ser resueltas dibujando o contando, y cuestiones de generalización lejana, en las cuales no resulta práctico usar estas estrategias para su resolución.

Zapatera y Callejo (2013) incluyen en sus problemas una cuestión en la que los estudiantes deben identificar la regla general del patrón. Haciendo referencia a este tipo de cuestión, diversos autores han indicado que los estudiantes encuentran más fácil verbalizar la generalización que proporcionar una respuesta escrita formal o simbólica (English y Warren, 1998; Warren, 2005; Amit y Neria, 2008).

Por otra parte, en las cuestiones de relación inversa, Warren (2005) presenta el número total de elementos de un término del patrón y pregunta por el término que representan. Entre sus resultados destaca que muchos estudiantes encuentran esta cuestión bastante difícil porque requiere una buena comprensión de los patrones, entre otras razones.

Finalmente, Friel y Markworth (2009), a partir de las cuestiones recomendadas por Lee y Freiman (2006) para promover el pensamiento algebraico en problemas de patrones geométricos, han identificado tres fases del proceso de resolución de problemas como soporte para analizar problemas de patrones geométricos. En la tabla 2 presentamos la tabla elaborada por Friel y Markworth (2009), cuyas preguntas están formuladas a partir del patrón de la figura 1, que tiene como relación general $y_n = 3n + 1$.

Figura 1. Patrón al que hace referencia la tabla 2 (extraído de Friel y Markworth, 2009).

Fase 1: *Razonando figurativamente usando las características visuales de la tarea de patrón geométrico*	1. ¿De cuántas formas diferentes puedes ver el dibujo? a. ¿Cómo dibujarías el término siguiente? b. ¿Cómo dibujarías el 10º término? c. ¿Cómo dibujarías el 58º término? d. ¿Cómo le dirías a alguien que dibujara cualquier término? 2. Tengo una caja con 25 caras sonrientes. ¿Cómo es la mayor figura que puedo hacer? ¿Me sobrarán caras sonrientes?
Fase 2: *Desarrollando relaciones numéricas para generalizar una función*	3. ¿Cuántas caras sonrientes se necesita para hacer el 10º término, el 58º término o el 100º término? 4. ¿Cuántas caras sonrientes se necesita para hacer el nº término? 5. ¿Cuál de estas expresiones para hacer el nº término es correcta? (Descritas para el término 1) a. (1 (horizontal) + 1 (horizontal) + 1) + 1 (vertical) b. 1 + 3 c. 1 + 1 + 1 + 1

Fase 3: *Extendiendo el análisis de patrones*	6. ¿Qué término tiene exactamente 100 caras sonrientes? ¿Qué pasa con 50 caras sonrientes? 7. ¿Puedes crear un problema de patrones para la clase?

Tabla 2. Las tres fases de resolución de problemas de Friel y Markworth (2009).

2.3.2. Estrategias de resolución

Para resolver los diferentes tipos de cuestiones presentadas en el apartado anterior, los estudiantes emplean diversas estrategias, entendiendo por estrategia "cualquier procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión (resolución de problemas) haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual" (Rico, 1997, p. 31).

Diversos autores las clasifican en estrategia de conteo o recuento, estrategia recursiva, estrategia funcional y estrategia proporcional (Stacey, 1989; Zapatera y Callejo, 2011; Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012; García-Reche, Callejo y Fernández, 2015), aunque los nombres varían de un autor a otro. Además, algunos de ellos realizan una clasificación más exhaustiva y detallada como, por ejemplo, Zapatera y Callejo (2011), que las clasifican en cuatro categorías: estrategias aditivas, como el recuento, el proceso iterativo y el proceso recursivo; estrategias funcionales, como la generalización local y la generalización global; razonamiento proporcional; y otros.

Por su parte, García-Cruz y Martinón (1997) analizan la naturaleza de razonamiento de los estudiantes en problemas de patrones geométricos y distinguen entre estrategia visual, en la cual el dibujo desarrolla un papel esencial en el proceso de abstracción, y estrategia numérica, en la cual juega este papel esencial la secuencia numérica.

2.3.3. Generalización

"Una revisión de la literatura revela la importancia y la prominencia de la generalización, así como su complejidad, y las diversas teorías que rodean la capacidad de generalizar. Es más, ilustra la conexión entre álgebra y generalización, particularmente la generalización de patrones" (Amit y Neria, 2008, p. 113).

Varios autores han definido el concepto de generalización (Polya, 1965; Kaput, 1999; Radford, 2006; Zapatera y Callejo, 2011), pero todos coinciden en que generalizar consiste en extender una propiedad observada en un caso o un conjunto de casos concretos a un conjunto más amplio en el cual se encuentran incluidos los casos concretos.

Krutetskii (1976), por su parte, indica que cualquier generalización efectiva puede ser considerada a partir de dos aspectos: ser capaz de ver una situación similar (donde aplicarlo) y dominar el tipo de generalización (qué aplicar). García-Cruz (1998, citado en Zapatera y Callejo, 2011) ha identificado tres niveles de generalización: actividad procedimental (cuando se hacen recuentos o se emplea la diferencia constante), generalización local (cuando se utiliza una regla para cálculos específicos) y generalización global (cuando la regla usada se aplica a otras situaciones). Ellis (2007) elabora una taxonomía de la generalización que divide en dos categorías principales: las acciones de generalización, que describen los procesos mentales, y las generalizaciones de reflexión, con las que se indica un patrón o relación de semejanza y se aplica a nuevos contextos. En Radford (2006) se distinguen cinco niveles de generalización, en función de los recursos semióticos mostrados por los estudiantes: inducción ingenua, generalización aritmética, generalización algebraica factual, generalización algebraica contextual y generalización algebraica simbólica.

Del mismo modo, Polya (1966, citado en Merino, Cañadas y Molina, 2013) indica la importancia del reconocimiento de patrones para desarrollar la habilidad de generalizar, pues mediante la observación de una regularidad, se busca un patrón válido para una mayor amplitud de casos.

3. MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo, nos centramos en realizar una descripción detallada de aquellos estudios que nos han servido como base teórica para desarrollar nuestra investigación. Presentamos elementos teóricos que nos permitirán analizar los usos de las letras, identificar los componentes de los problemas de patrones geométricos y las formas de resolverlos, organizar la enseñanza de las ecuaciones lineales, e identificar las características de los estudiantes con altas capacidades matemáticas.

Una de las posibles vías para desarrollar una intervención educativa en estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas es la introducción del álgebra (Amit y Neria, 2008), ya que ésta juega un papel fundamental en las matemáticas de la E.S.O. y es la puerta de entrada a otras áreas de las matemáticas, diferentes de la aritmética y la geometría euclidiana, que pueden aportar mucha más riqueza e interés a estos estudiantes.

El currículum de E.S.O. de la Comunidad Valenciana marca el comienzo del aprendizaje del álgebra en 1º de la E.S.O., con la introducción de las letras como símbolos que representan números indeterminados o pertenecientes a conjuntos que tienen una propiedad común, la realización de operaciones con expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones lineales. No obstante, como indican Fritzlar y Karpinski-Siebold (2012), aunque el álgebra juega un papel fundamental en las matemáticas de la E.S.O. y las competencias algebraicas son necesarias para tener éxito en las matemáticas en general, muchos estudiantes presentan dificultades con el álgebra, incluso aquellos que obtienen buenas calificaciones en las matemáticas de Educación Primaria, centradas mayoritariamente en la aritmética.

Entre las diversas dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse al aprendizaje del álgebra, Banerjee y Subramaniam (2012) incluyen la falta de comprensión del significado de las letras y la falta de destreza manipulativa en las expresiones simbólicas o ecuaciones. Por su parte, Jupri, Drijvers y van den

Heuvel-Panhuizen (2015) distinguen cinco categorías de dificultades en el álgebra inicial: dificultades en la aplicación de operaciones aritméticas en expresiones algebraicas y numéricas, dificultades en la comprensión de la noción de variable, dificultades en el entendimiento de las expresiones algebraicas, dificultades en la comprensión de los distintos significados del signo igual y dificultades en la transformación de la situación de un problema real al mundo de las matemáticas.

Haciendo referencia a la falta de comprensión del significado de las letras, Küchemann (1981) clasifica el significado que atribuyen los estudiantes a las letras en función del uso que le dan. De este modo, identifica seis formas diferentes de interpretar y usar las letras:

- *La letra evaluada*: se le asigna un valor concreto sin necesidad de operar sobre la incógnita en ecuaciones aritméticas de tipo $x = a + b$ y $x + a = b$.
- *La letra no usada*: se obvia porque puede ser sustituida por un valor o una expresión determinada.
- *La letra usada como objeto*: se considera como una abreviación de un objeto o un objeto en sí mismo.
- *La letra usada como incógnita específica*: se considera un número concreto y específico, pero que no es conocido y sobre el que se puede operar.
- *La letra usada como número generalizado*: se considera que puede representar diversos valores.
- *La letra usada como variable*: se considera que representa un rango inespecífico de valores y una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

Radford (2006, p. 5) define la generalización algebraica de un patrón como “la capacidad de comprender un aspecto común en algunos elementos de una secuencia S, siendo consciente de que ese aspecto común se aplica a todos los términos de S y siendo capaz de usarlo para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S".

Siguiendo esta definición, sugiere que el proceso de generalización incluye dos componentes interrelacionados, los cuales son notar los aspectos comunes en términos particulares y formar un concepto general a partir de los aspectos comunes de todos los términos de la secuencia, así como un tercer componente que caracteriza, en concreto, la generalización algebraica: proporcionar una expresión para cualquier término de la secuencia. A partir de estas ideas, Radford (2006) distingue, según el tipo de estrategia empleada, entre inducción ingenua (los estudiantes resuelven problemas de patrones mediante ensayo y error) y generalización (buscan similitudes entre las figuras). Además, también diferencia distintos niveles de generalización (tabla 3):

- *Generalización aritmética*: los estudiantes emplean relaciones recursivas entre figuras consecutivas y no son capaces de proporcionar una expresión de cualquier término de la secuencia, ya que generalizan aspectos locales comunes observados en algunas figuras.
- *Generalización algebraica*
    - *Generalización factual*: caracterizada por expresar cualquier término en acciones concretas, es decir, operando con números particulares, pues la variable no es nombrada.
    - *Generalización contextual*: exteriorizada con expresiones verbales reducidas (palabras) que hacen referencia al contexto, nombrando lingüísticamente a la variable.
    - *Generalización simbólica*: expresada a través de símbolos alfanuméricos, de una manera que permite calcular la cantidad correspondiente a la posición en la serie.

<table>
<tr><td>Inducción ingenua</td><td colspan="4">Generalización</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ensayo y error</td><td>Aritmética</td><td colspan="3">Algebraica</td></tr>
<tr><td></td><td>Factual</td><td>Contextual</td><td>Simbólica</td></tr>
</table>

Tabla 3. Niveles de generalización de Radford (2006).

Investigaciones recientes han evidenciado que estudiantes de Educación Primaria pueden comenzar a aprender algunos conceptos algebraicos y a entender ciertos aspectos de la generalización de patrones (Warren, 2005; Radford, 2011; Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012; Merino, Cañadas y Molina, 2013; García-Reche, Callejo y Fernández, 2015). Estas habilidades algebraicas de los estudiantes de Educación Primaria pueden ser abordadas a través del pensamiento algebraico (Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012), pues, como indica Radford (2011b), el pensamiento algebraico no se basa en el uso de notaciones simbólicas alfanuméricas, sino en el hecho de tratar con cantidades indeterminadas y poder realizar cálculos con ellas. Además:

> El pensamiento algebraico en edades tempranas implica el desarrollo de formas de pensamiento con actividades en las cuales puede ser usada el álgebra simbólica como una herramienta, pero que no son exclusivas del algebra y pueden ser resueltas sin usar el álgebra simbólica, por ejemplo, analizando las relaciones entre cantidades, observando su estructura, estudiando los cambios, generalizando, resolviendo problemas, modelizando, justificando, probando y prediciendo (Kieran, 2004, p. 149).

Así pues, uno de los contextos en los que es posible desarrollar formas de pensamiento algebraico en la Educación Primaria es la generalización de patrones (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015). Los problemas de patrones geométricos son problemas que

> presentan los primeros términos de una secuencia y piden calcular, por este orden, el término *inmediato* (el que sigue a los dados), un término *próximo* a los conocidos (de manera que se puedan utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de valores), un término *lejano* tal que, aunque esté asociado a un valor numérico, su representación gráfica sea costosa de llevar a cabo y sea más conveniente poner en marcha un proceso de generalización y, finalmente, formular una expresión (que se espera sea algebraica) para el término *general* de la secuencia (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015, p. 154).

En su resolución, los estudiantes ponen en marcha distintas estrategias. García-Cruz y Martinón (1997) distinguen entre estrategia visual, en la cual el dibujo desarrolla un papel esencial en el proceso de abstracción, y estrategia numérica, en la cual juega este papel esencial la secuencia numérica. Por su parte, García-Reche, Callejo y Fernández (2015) establecen cuatro estrategias diferenciadas:

- *El uso de una representación gráfica*: se identifica la configuración presentada y se reproduce el término demandado, sin asociarle ninguna afirmación matemática.
- *La estrategia recursiva*: se identifica un orden y un patrón de crecimiento en la sucesión de figura, apoyándose en un término para construir el siguiente.
- *La estrategia funcional*: se asocia la configuración del patrón a expresiones matemáticas que permiten identificar el número de elementos de un término específico o del término general.
- *La estrategia proporcional*: se identifica una relación de proporcionalidad entre las posiciones y los valores de los términos, es decir, una regularidad, que no siempre es correcta.

Por otra parte, Rojano (1985, p. 84) localiza un corte didáctico en ecuaciones lineales en términos de aprendizaje. De este modo, diferencia entre:

- *Ecuaciones aritméticas*: “no requieren operaciones y nociones fuera de la aritmética para su resolución”, es decir, “basta con operar los datos para llegar a la solución”. Son del tipo $ax \pm b = c$ y $a(bx \pm c) = d$.
- *Ecuaciones no-aritméticas*: “en cuya resolución es preciso operar la incógnita” y son del tipo $ax \pm b = cx$ y $ax \pm b = cx \pm d$.

Aunque Rojano (1985) menciona como ecuaciones no-aritméticas ecuaciones con la incógnita a ambos lados del signo igual, nosotros también consideramos ecuaciones de este tipo aquellas en las que la incógnita sólo aparece a un lado del signo igual pero tienen una estructura compleja, que incluye paréntesis, que no permite a los estudiantes resolverla sin operar con la incógnita.

Entre los recursos didácticos disponibles para salvar estas dificultades y cortes didácticos identificados en la resolución de ecuaciones de primer grado, se encuentra el modelo de la balanza, en el cual “se recurre a la metáfora de la preservación del equilibrio para enseñar la noción de igualdad algebraica restringida” (Rojano, 2010, p. 6). De este modo, la ecuación es representada en la balanza, colocando en cada una de sus partes uno de los miembros de la ecuación y realizando transformaciones algebraicas mediante las acciones de añadir o quitar objetos (Filloy, Puig y Rojano, 2008).

Además, diversos estudios han sido realizados con este modelo, como, por ejemplo, el de Radford y Grenier (1996, citado en Rojano, 2010), en el cual afirman que la balanza permite comprender la regla de eliminación de términos semejantes situados en miembros distintos, es decir, la resolución de ecuaciones mediante compensación, o la investigación de Vlassis (2002), en la que indica que el efecto de darle significado a la manipulación de ecuaciones mediante la balanza hizo que perdurase varios meses en los estudiantes.

Los estudiantes con altas capacidades matemáticas presentan ciertas habilidades que nos permiten identificarlos. Jaime y Gutiérrez (2014) presentan una relación de habilidades identificadas por diversos autores (Krutetskii, 1976; Greenes, 1981; Miller, 1990; Tourón y otros, 1998; Freiman, 2006) y recogidas en distintas publicaciones (Pasarín y otros, 2004; Ramírez, 2012) como características de las altas capacidades matemáticas:

- Formulación espontánea de preguntas que van más allá de la tarea matemática propuesta.
- Flexibilidad: Cambian fácilmente de estructura y de estrategia, según convenga.
- Producción de ideas originales, valiosas y extensas.
- Localización de la clave de los problemas.
- Identificación de patrones y relaciones.
- Construcción de nexos y estructuras matemáticas.
- Mantenimiento de los problemas y su resolución bajo control.
- Atención a los detalles.
- Desarrollo de estrategias eficientes.

- Pensamiento crítico y persistente en la consecución de los objetivos que se propone.
- Mostrar abreviación de los procesos al resolver problemas de tipo similar.
- No estar sujetos a técnicas de resolución que han tenido éxito en el pasado y poder hacer reajustes cuando éstas fallan.
- Tendencia a recordar las estructuras generales, abreviadas, de los problemas y sus soluciones.
- Menores muestras de cansancio trabajando en matemáticas que en otras materias.
- Rapidez de aprendizaje.
- Capacidad de generalización y transferencia.
- Capacidad de abstracción.
- Reducción del proceso de razonamiento matemático. Lo simplifican para obtener soluciones racionales y económicas.
- Gran capacidad de utilización de pensamiento lógico utilizando símbolos matemáticos.
- Habilidad para la inversión de procesos mentales en el razonamiento matemático.
- Memoria matemática. No se trata de una memorización de datos inconexos, sino de recuperación de ideas, principios u operaciones significativas.

Un rasgo que caracteriza y diferencia a los estudiantes con altas capacidades matemáticas es la capacidad de generalizar (Krutetskii, 1976; Greenes, 1981; Touron y otros, 1998), debido a los aspectos matemáticos que involucra, como la abstracción, la visualización, el pensamiento holístico, el razonamiento y la flexibilidad (Amit y Neria, 2008). Una de las posibles formas de promover esta capacidad de generalizar es mediante de los problemas de patrones geométricos, pues son considerados *actividades matemáticas ricas*, ya que están ligados al contenido establecido por el currículum de Educación Primaria, se basan en una metodología de resolución de problemas y permiten graduar su dificultad o complejidad, adaptándose, así, a la diversidad de capacidades y conocimientos matemáticos de los estudiantes presentes en las aulas ordinarias (Jaime y Gutiérrez, 2014). Así pues, se trata de un enfoque que permite a los estudiantes con altas capacidades matemáticas profundizar en su comprensión de las matemáticas a través de tareas interesantes y motivadoras, que les supongan un reto a superar (Singer, Sheffield, Freiman, Brandl, 2016).

4. METODOLOGÍA

Con el fin de dar respuesta a los objetivos específicos planteados en la investigación, empleamos una metodología cualitativa enfocada hacia una intervención educativa para estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas, llevada a cabo fuera del ámbito escolar y centrada en la iniciación de la enseñanza del álgebra a una edad temprana.

En este contexto, era necesaria una metodología de trabajo que nos permitiese tanto diseñar formas particulares de aprendizaje, sujetas a constantes cambios y revisiones durante la experimentación, como analizar las secuencias de aprendizaje diseñadas en el contexto de su intervención una vez finalizada la experimentación (Cobb y otros, 2003). De este modo, utilizamos una metodología de *investigación de diseño*, cuyo objetivo último es "elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente" (Molina y otros, 2011, p. 79).

En la aplicación de la metodología de investigación de diseño, van den Akker y otros (2006) distinguen tres fases diferenciadas: la preparación del experimento, la realización del experimento de diseño y el análisis retrospectivo. En la primera fase se clarifican los objetivos de aprendizaje y los puntos de partida instruccionales, para los cuales puede ser útil la literatura de investigación existente. Más adelante, en la segunda fase, se lleva a cabo el experimento diseñado a través de una serie de ciclos, mediante los cuales cada sesión de aprendizaje es diseñada, experimentada y analizada, influyendo en el diseño de la siguiente sesión. Finalmente, en la tercera fase se realiza un análisis retrospectivo de los datos recogidos durante el experimento. A continuación, en la figura 2, presentamos un esquema de las tres fases características de la investigación de diseño.

Figura 2. Esquema de las fases de la investigación de diseño.

Como se puede observar, se trata de una metodología de carácter cíclico, caracterizada por la existencia de macrociclos, formados por las tres fases de aplicación, y microciclos, formados por los ciclos internos de la segunda fase. En nuestra investigación sólo fue posible desarrollar el primer macrociclo debido a la limitación de tiempo existente para la realización de la experimentación.

Los experimentos de diseño pueden ser muy variados en cuanto a su tipología y alcance. Cobb y otros (2003) describen cinco tipos, de entre los cuales destacamos el *experimento de diseño* uno a uno. En este, se realiza una serie de sesiones con un grupo reducido de alumnos para estudiar el proceso de aprendizaje en detalle.

Siguiendo esta metodología de trabajo, seleccionamos una muestra de conveniencia formada por un único estudiante, identificado como superdotado y especialmente destacado en el área de matemáticas. Este estudiante, en el momento de iniciar la experimentación, tenía 9 años y había finalizado 4º de Educación Primaria (está acelerado un curso).

4.1. Preparación del experimento

Como se ha comentado en capítulos anteriores, una buena forma de introducir el álgebra en edades tempranas, en concreto en Educación Primaria, es a través de los problemas de patrones geométricos (Amit y Neria, 2008; Cooper y Warren, 2011; Radford, 2011; Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012). Además, diversos estudios han demostrado la eficacia de la resolución de problemas para el desarrollo de la creatividad y el talento matemático (Singer, Sheffield, Freiman y Brandl, 2016) y, concretamente, los problemas de patrones geométricos se enmarcan dentro del contexto de las actividades matemáticas ricas, destacados también por su carácter motivador y de profundización en estos estudiantes (Singer, Sheffield, Freiman y Brandl, 2016).

Siguiendo esta línea de trabajo, diseñamos una secuencia de enseñanza de pre-álgebra por medio de problemas de patrones geométricos. Para ello, previamente definimos los siguientes objetivos de aprendizaje, trazando así la "trayectoria hipotética de aprendizaje", definida por Simon (1995) como la consideración del objetivo y las actividades de aprendizaje que los estudiantes pueden abordar y que esperábamos ver cumplida en la experimentación de la secuencia de enseñanza diseñada:

1) Realizar generalizaciones a través de problemas con patrones geométricos.
    - Generalizar relaciones directas.

- Resolver relaciones inversas.

2) Adquirir y asimilar conceptos algebraicos básicos.
   - Comprender el significado de las letras en expresiones algebraicas, así como el significado de la terminología algebraica básica.
   - Transformar expresiones verbales en expresiones algebraicas.
   - Conocer y aplicar la jerarquía de las operaciones, así como el uso del paréntesis.
   - Resolver ecuaciones de primer grado aritméticas ($ax \pm b = c$).

3) Aplicar el álgebra en diversos contextos.
   - Transformar expresiones algebraicas mediante el uso de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división).
   - Resolver ecuaciones de primer grado no aritméticas ($ax \pm b = cx \pm d$).
   - Resolver problemas de ecuaciones lineales con enunciado verbal.

Además, tras realizar una revisión bibliográfica de la literatura de didáctica de las matemáticas sobre generalización y aprendizaje del álgebra, identificamos algunos de los cambios significativos que marcan la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. Tomando como referencia a Filloy, Puig y Rojano (2008), encontramos tres conceptos clave en la adquisición del pensamiento algebraico:

- La interpretación de las letras.
- La noción de igualdad.
- Las convenciones simbólicas para codificar operaciones y transformaciones en la resolución de ecuaciones.

Estos cambios significativos, según apuntan Filloy, Puig y Rojano (2008), pueden ser entendidos como cortes didácticos entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Por este motivo, los tomamos como puntos de partida instruccionales para el diseño de las diferentes partes de la secuencia de enseñanza.

Por tanto, teniendo en cuenta los objetivos de aprendizaje planteados y los posibles cortes didácticos que podían surgir en la experimentación, diseñamos una secuencia de enseñanza de un modo progresivo y con tres etapas diferenciadas, diseñadas en paralelo con las experimentaciones. De este modo, los diseños de los problemas de las diferentes etapas estaban influenciados por la experimentación de las etapas previas que ya habían sido o estaban siendo implementadas, permitiéndonos adaptar y modificar los problemas de cada una de ellas en función de los avances y/o necesidades del estudiante. Cada una de estas etapas conforma un microciclo de la investigación de diseño planteada (figura 3) y tienen las siguientes características.

La primera etapa es de iniciación a la generalización. Sus objetivos son indagar y descubrir los conocimientos que pudiera poseer el estudiante sobre problemas de patrones geométricos y generalización, que aprendiera a generalizar en las relaciones directas y a resolver relaciones inversas y, además, poder identificar y analizar las diferentes estrategias de resolución empleadas por el alumno.

La segunda etapa es de introducción de conceptos algebraicos. Sus objetivos son indagar y descubrir los procesos de aprendizaje seguidos por el estudiante para aprender el significado de las letras, la traducción de expresiones verbales en expresiones simbólicas y la resolución de ecuaciones aritméticas con el modelo de la balanza.

La tercera etapa es de aplicación. Sus objetivos son, por una parte, comprobar si habían cambiado las estrategias empleadas por el estudiante al resolver los problemas de patrones geométricos de la primera etapa que presentaron mayor dificultad y, por otra parte, ver si era capaz de transferir los conocimientos adquiridos y resolver adecuadamente problemas de enunciado verbal propios del álgebra.

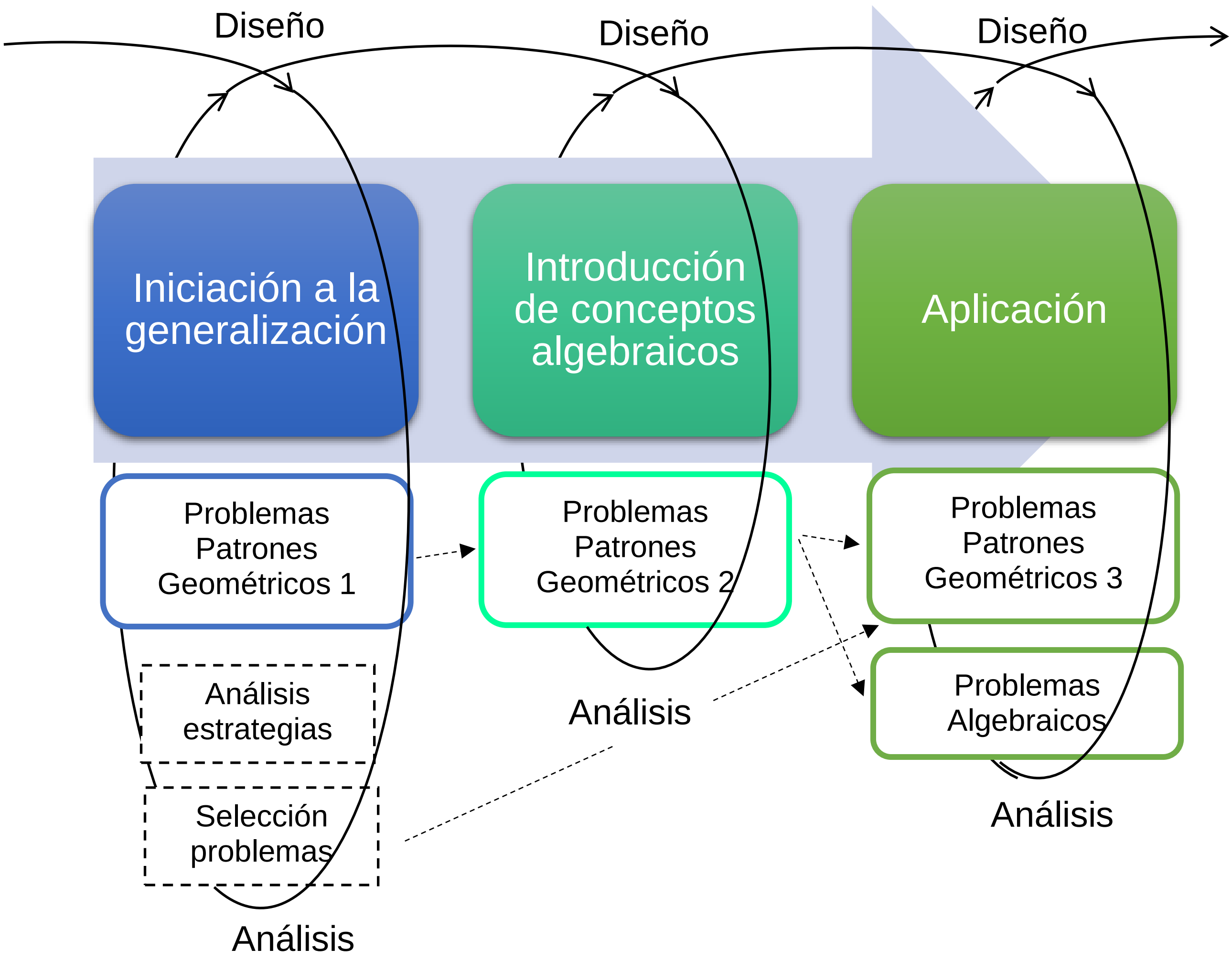


Figura 3. Esquema de los microciclos de la secuencia de enseñanza.

4.2. El experimento de diseño

En la fase del experimento de diseño es donde realmente se puede observar la naturaleza iterativa de esta metodología a través de cada uno de los ciclos llevados a cabo y cuyo objetivo es probar la trayectoria de aprendizaje formulada durante la fase de preparación con el fin de mejorarla (Cobb, Jackson y Dunlap, 2016).

La secuencia de enseñanza fue implementada durante 19 sesiones de entrevista individual entre el estudiante y la autora de esta memoria. Las sesiones fueron realizadas a través de videoconferencia y tuvieron una media de aproximadamente 60 minutos. Durante estas sesiones, el estudiante resolvió un total de 40 problemas diseñados para la enseñanza del álgebra. Estos problemas son descritos con más detalle en el capítulo 5. Además, el estudiante resolvió actividades recreativas que no guardan relación con esta investigación, intercaladas con los problemas de álgebra y uno de cuyos objetivos era hacer menos monótonas las sesiones. Las sesiones fueron grabadas en vídeo (captura de pantalla) y audio para su posterior análisis.

4.2.1. La etapa de iniciación a la generalización

Partíamos de la conjetura de que nuestro estudiante no tendría desarrolladas las destrezas necesarias para llevar a cabo ciertas generalizaciones y procesos inversos. Por ello, la primera etapa, destinada a la iniciación en la realización de generalizaciones a través de problemas tiene los siguientes objetivos didácticos:

- Realizar generalizaciones a través de problemas de patrones geométricos.
    - Generalizar relaciones directas.
    - Resolver relaciones inversas.

Para ello, diseñamos una secuencia de 20 problemas (anexo 1), nombrados como Problemas de Patrones Geométricos 1 (PPG1).

El desarrollo de la etapa tuvo una duración total de 9 sesiones. En ellas, el estudiante resolvió los apartados de cada problema siguiendo el orden mostrado en la figura 5 y proporcionó una explicación a sus respuestas. Estas explicaciones fueron las que nos permitieron llevar a cabo un análisis posterior de las estrategias empleadas y las generalizaciones realizadas. De este modo, identificamos los problemas que le presentaron mayor dificultad en las tareas de inversión y los rediseñamos con el planteamiento de nuevas cuestiones para su posterior experimentación en la tercera etapa, como detallamos más adelante.

4.2.2. La etapa de introducción de conceptos algebraicos

En segundo lugar, tras la consecución de los objetivos de la primera etapa, diseñamos una segunda etapa de introducción de conceptos algebraicos, cuyos objetivos eran los siguientes:

- Adquirir y asimilar conceptos algebraicos básicos.
    - Comprender el significado de las letras en expresiones algebraicas, así como el significado de la terminología algebraica básica.
    - Transformar expresiones verbales relacionadas con la generalización de patrones geométricos en expresiones algebraicas.
    - Conocer y aplicar la jerarquía de las operaciones, así como el uso del paréntesis.
    - Resolver ecuaciones de primer grado aritméticas ($y = ax \pm b$).

En esta ocasión, para la consecución de los objetivos establecidos, diseñamos una secuencia de 6 problemas de patrones geométricos (PPG2). También hemos utilizado un modelo concreto de enseñanza de resolución de ecuaciones. Para ello, escogimos el modelo de balanza dinámica (figura 4) de la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales (NLVM) por su aspecto visual que nos permitía conocer en todo momento si la igualdad se estaba manteniendo durante la resolución de la ecuación. Asimismo, nos permitía escribir nosotros mismos la ecuación lineal, del tipo $ax + b = cx + d$, que deseásemos resolver con incógnita en uno o ambos lados de la ecuación y, en caso de necesitarla, existía otra versión de este modelo de balanza que nos permitía también el uso de números enteros. Este último aspecto fue importante tenerlo en cuenta, pues en la literatura se han indicado en diversas ocasiones las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales al incluir en ellas los números enteros (Vlassis, 2002; Rojano, 2010). Por último, también permitía manipular la ecuación indicando las operaciones aritméticas que debían realizarse a ambos lados del igual y que nos permitían resolver la ecuación.

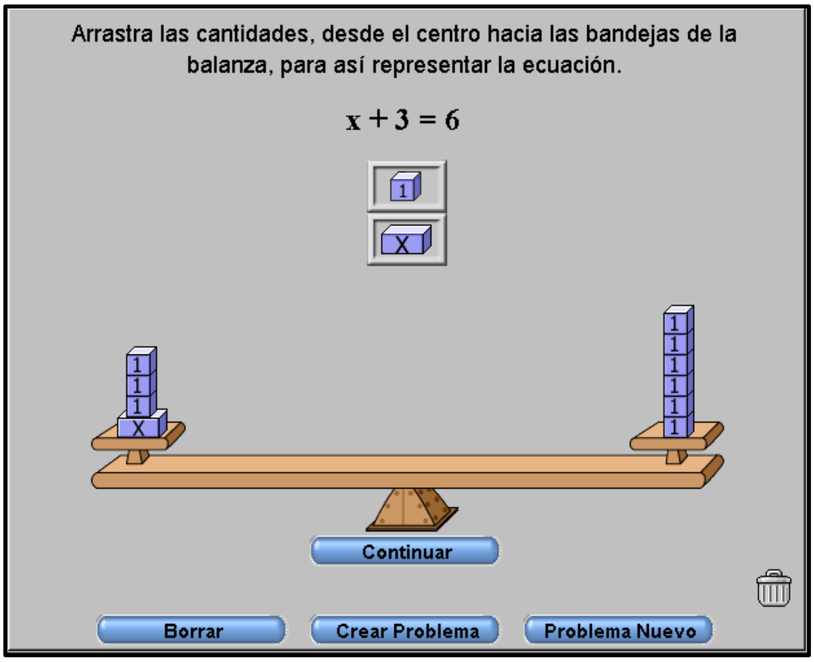


Figura 4. Software de balanza algebraica.

El uso de la balanza supondría un punto clave en el aprendizaje del álgebra del estudiante y, por este motivo, decidimos establecer los siguientes objetivos didácticos para el uso de la balanza:

1. Representar ecuaciones en la balanza.
2. Resolver ecuaciones en la balanza, eliminando los bloques de unidad e incógnita oportunos en ambos lados.
3. Resolver ecuaciones en la balanza, realizando las operaciones aritméticas oportunas (suma o resta) en ambos lados.
4. Resolver ecuaciones sin el software de la balanza, transfiriendo los conocimientos adquiridos a la resolución en papel.

Esta etapa tuvo una duración de 3 sesiones, en las cuales esperábamos que el estudiante siguiese un aprendizaje gradual de la transformación de expresiones verbales en expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones lineales, dándole sentido y significado al uso de la simbología propia del álgebra. Además, esperábamos que el modelo de la balanza le proporcionase las herramientas necesarias para asimilar una resolución de ecuaciones mediante compensación, de modo que llegase un punto en que fuese capaz de obviar la balanza y resolver las ecuaciones simplemente recordando el modelo ya asimilado. Por otra parte, la pantalla de la balanza sólo utiliza la letra x, por lo que su uso debería fomentar que el estudiante sustituyera las letras específicas de cada problema por la letra x.

4.2.3. La etapa de aplicación

Una vez alcanzados los objetivos de las dos etapas anteriores, diseñamos una tercera etapa dirigida a la aplicación de los conocimientos que el estudiante debía haber adquirido, para comprobar que realmente se habían adquirido y asimilado los contenidos estudiados en las etapas previas y profundizar el aprendizaje. Para ello, establecimos los siguientes objetivos didácticos de esta etapa:

- Aplicar el álgebra en diversos contextos.
    - Transformar expresiones algebraicas mediante el uso de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división).
    - Resolver ecuaciones de primer grado no aritméticas ($ax \pm b = cx \pm d$).
    - Resolver problemas verbales de ecuaciones lineales.

Para la consecución de estos objetivos decidimos diferenciar dos subetapas, que incluirían tipos de problemas distintos: una primera subetapa de aplicación del álgebra en problemas de patrones geométricos y una segunda subetapa de aplicación del álgebra en otros contextos. Consideramos esta distinción necesaria para conocer el grado de comprensión y asimilación que el estudiante habría alcanzado tras el proceso de enseñanza, pues, aunque su estudio estuviese basado en el contexto de los problemas de patrones geométricos establecimos que también debería de ser capaz de aplicar estos conocimientos en otros contextos distintos.

4.2.3.1. Aplicación del álgebra en problemas de patrones geométricos

Para esta subetapa, diseñamos 7 problemas de patrones geométricos (PPG3), a partir de los PPG1 que identificamos como más complejos debido a las estrategias empleadas en las tareas de inversión. Esta secuencia fue diseñada con la intención de asimilar, corregir y reafirmar los conocimientos adquiridos durante las etapas anteriores, así como introducir al alumno en el manejo de expresiones algebraicas mediante la resolución de ecuaciones lineales con incógnitas en los dos lados del igual.

En esta subetapa, que tuvo una duración de 2 sesiones, esperábamos subsanar los errores y las dudas que hubiesen podido quedar por resolver durante las etapas anteriores, así como profundizar en la resolución de ecuaciones lineales, de modo que el estudiante fuese capaz de resolver los problemas verbales de la siguiente subetapa.

4.2.3.2. Aplicación del álgebra en otros contextos

Para la segunda subetapa, diseñamos 7 problemas algebraicos (PA), entendidos como problemas con contextos diferentes a los problemas de patrones geométricos y cuya resolución es necesariamente algebraica. Esta parte de la secuencia fue diseñada con la intención de que el estudiante aplicara sus conocimientos en contextos diferentes de los problemas de patrones geométricos y más parecidos a los recogidos en los libros de texto utilizados en E.S.O. Para ello, elaboramos distintos tipos de problemas de enunciado verbal que posibilitaran la introducción del estudiante de un modo gradual y desde la perspectiva del aprendizaje.

En esta subetapa, que tuvo una duración de 5 sesiones, esperábamos que el estudiante fuese capaz de transferir sus conocimientos a diferentes contextos del álgebra presentados en forma de problemas verbales o simplemente ecuaciones descontextualizadas.

4.3. Análisis retrospectivo de los datos obtenidos

La tercera fase de una investigación de diseño está destinada a la realización de un “análisis completo, sistemático y retrospectivo de todos los datos recogidos durante el experimento” (van den Akker y otros, 2006, p. 69). Para ello, es necesario formular, en primer lugar, los criterios de análisis que guiarán nuestro estudio del conjunto de datos obtenidos de la experimentación.

4.3.1. Criterios de análisis de la secuencia de enseñanza

El análisis de la secuencia de enseñanza se centrará en el diseño de la secuencia. Para ello, relacionaremos los objetivos de aprendizaje planteados para cada una de las etapas con los problemas elaborados y la elección de las cuestiones de los distintos tipos de problemas en las tres etapas diferenciadas.

4.3.2. Criterios de análisis de las respuestas del estudiante

En primer lugar, analizaremos los datos recogidos a partir de las respuestas y las explicaciones proporcionadas por el estudiante que participó en esta investigación, así como la información proporcionada por las grabaciones de las distintas sesiones.

En concreto, en la primera etapa, analizaremos las estrategias empleadas por el estudiante al resolver las distintas tareas, tanto directas como inversas, de los problemas de patrones geométricos en relación con la fórmula general verbalizada por el estudiante y el tipo de generalización empleada (Radford, 2006).

A partir de las estrategias de resolución descritas por García-Cruz y Martinón (1997) y García-Reche, Callejo y Fernández (2015), hemos elaborado nuestra propia clasificación de las estrategias de resolución en problemas de patrones geométricos, pues consideramos necesario analizar teniendo en cuenta los dos puntos de vista adoptados por estas investigaciones, así como la diferenciación entre las estrategias de las cuestiones de relación directa y las de relación inversa. Las clasificaremos del siguiente modo:

- Estrategias en tareas de relación directa:
    - En función del modo de obtención del procedimiento de resolución, las clasificamos en:
        - *Visuales*: realiza una descomposición geométrica del patrón presentado en el problema para obtener la fórmula.
        - *Numéricas*: transforma el patrón geométrico en un patrón numérico para obtener la fórmula.
    - En función del procedimiento de cálculo, las clasificamos en:

    - *Recuento*: representa el patrón hasta llegar al término deseado y se realiza un recuento de los elementos que lo forman.
    - *Recursiva*: obtiene el número de elementos del término demandado sumando sucesivamente la diferencia entre términos a un término conocido.
    - *Funcional*: formula una expresión para obtener el número de elementos de un término cualquiera.
    - *Proporcional*: identifica una proporcionalidad entre los términos del patrón y sus números de elementos.

- Estrategias en tareas de relación inversa:
  - *Ensayo y error con cálculos de relación directa*: prueba diferentes valores para el término hasta que encuentra el número de elementos indicado.
  - *Inversión de las operaciones*: aplica la inversión a las operaciones aritméticas utilizadas en las tareas de relación directa para obtener el término de un número de elementos dado. Diferenciamos entre:
    - *Inversión correcta:* invierte las operaciones en el orden correcto.
    - *Inversión errónea:* altera el orden de inversión de las operaciones, dando lugar a una solución incorrecta.
  - *Resolución de ecuaciones*: plantea una ecuación para resolver la tarea de inversión.

Además, es posible establecer una relación entre las estrategias de resolución empleadas en las tareas de relación directa con los distintos tipos de generalizaciones establecidos por Radford (2006), que también serán analizados y que se pueden encontrar en el capítulo 3, destinado al marco teórico.

En la segunda etapa, analizaremos el proceso de aprendizaje seguido por el estudiante para la algebrización de sus respuestas en los problemas de patrones geométricos presentados. Para ello, centraremos nuestra atención en el significado que el estudiante le está dando a las letras cuando las utiliza en los distintos problemas (Küchemann, 1981), la conceptualización y escritura de ecuaciones mediante la transformación de la fórmula general verbalizada y el papel desarrollado por el modelo dinámico de la balanza para la resolución de ecuaciones.

En la tercera etapa, analizaremos las respuestas, estrategias y generalizaciones empleadas por el estudiante para la resolución de los problemas correspondientes a esta etapa, comparándolas con las respuestas proporcionadas durante la primera etapa. De este modo, analizaremos en profundidad las diferencias existentes en la resolución de problemas de patrones geométricos antes y después del proceso de enseñanza. Y, también analizaremos la aplicación de los conocimientos adquiridos a distintos contextos del álgebra, relatando su resolución de los problemas y las dificultades y obstáculos encontrados.

4.3.3. Criterios de análisis de las características de altas capacidades matemáticas

Analizaremos la presencia o ausencia de las dificultades descritas por Banerjee y Subramaniam (2012) y Jupri, Drijvers y van den Heuvel-Panhuizen (2015) al analizar a estudiantes mayores que el estudiante de nuestra experimentación, así como las distintas características propias de las altas capacidades matemáticas que han sido observadas en el estudiante durante las 19 sesiones llevadas a cabo, tomando como referencia la recopilación de características realizada en el capítulo 2 y el listado realizado por Jaime y Gutiérrez (2014).

5. ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

En este capítulo realizamos un análisis de la preparación de la secuencia de enseñanza, enfocado a presentar los problemas diseñados para cada una de las etapas que forman la secuencia y a mostrar cómo los objetivos planteados se relacionan con los problemas elaborados.

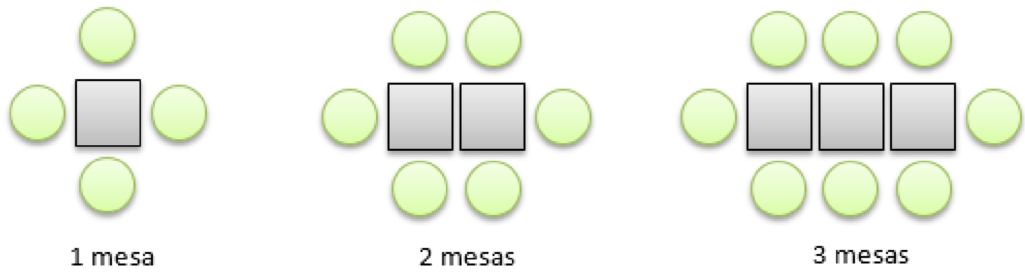
5.1. Etapa de iniciación a la generalización

En esta etapa diseñamos una secuencia de 20 problemas (anexo 1), destinados a iniciar al estudiante en la generalización de problemas de patrones geométricos. Estos problemas, cuya estructura es la misma, incluyen 5 tipos de cuestiones (figura 5):

- Una cuestión de generalización inmediata, la cual demandaba obtener un término inmediato de la figura y que era posible calcular mediante cualquier estrategia, como por ejemplo un recuento a través de un dibujo de la figura del patrón.
- Una cuestión de generalización cercana, la cual implicaba una mayor comprensión del patrón y también podía ser resuelta mediante cualquier estrategia, aunque en algunas resultaba un poco más costosa, como la recursiva o el recuento.
- Una cuestión de generalización lejana, cuya resolución implicaba una comprensión en profundidad del patrón y no podía solucionarse mediante cualquier estrategia en el tiempo establecido.
- Dos cuestiones de relación inversa, una exacta (su solución numérica es un número natural, que corresponde a una posición de la secuencia, por ejemplo, el aparatado *d* de la figura 5) y otra inexacta (cuya solución numérica no es un número natural, por lo que no corresponde a ninguna

posición de la secuencia, por ejemplo, el apartado *e* de la figura 5). La resolución de estas cuestiones nos permitiría iniciar al estudiante en la inversión de operaciones y contextualizar su introducción en el mundo del álgebra.

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



Pero María tiene un problema: no sabe cuántos invitados acudirán a su fiesta. ¿Podrías ayudarle a calcular cuántos invitados cabrán en función de cuántas mesas coloque?

a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 35 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

Figura 5. Ejemplo de Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.3).

Estas cuestiones fueron ordenadas de un modo gradual, de manera que las primeras sirviesen de preparación para la resolución de las más complejas. Así mismo, y para hacer frente al carácter exploratorio de esta etapa, pues no conocíamos cómo iba a responder nuestro alumno, preparamos problemas con patrones correspondientes a distintos tipos de relaciones, tanto lineales de los tipos $y = ax$, $y = ax \pm b$ e $y = ax + b(x \pm c) \pm d$, como cuadráticas de los tipos $y = x^2$ e $y = (x \pm a)(x \pm b)$, donde x es la posición del término en la serie e y es el número de elementos que componen ese término. Del mismo modo, también ordenamos los problemas en función del nivel de complejidad que presentaba la estructura geométrica del patrón para su visualización y abstracción. En las figuras 6 y 7 presentamos dos patrones lineales cuya estructura geométrica difiere en complejidad.

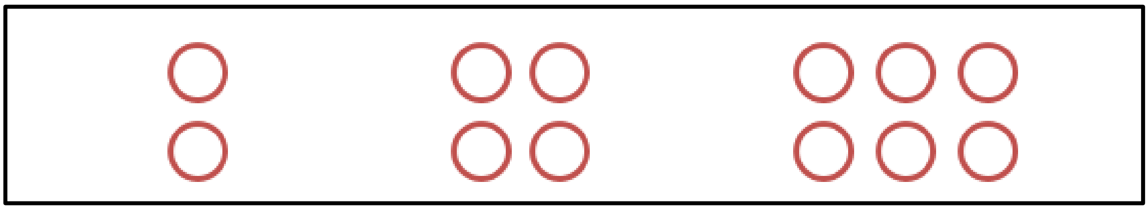


Figura 6. Ejemplo de estructura geométrica de PPG1 asociado a $y = 2x$ (anexo 1.1).

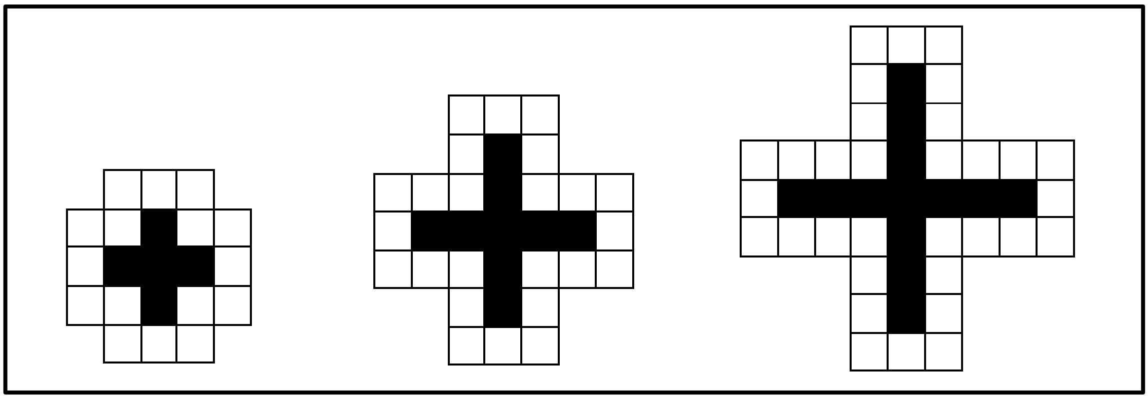


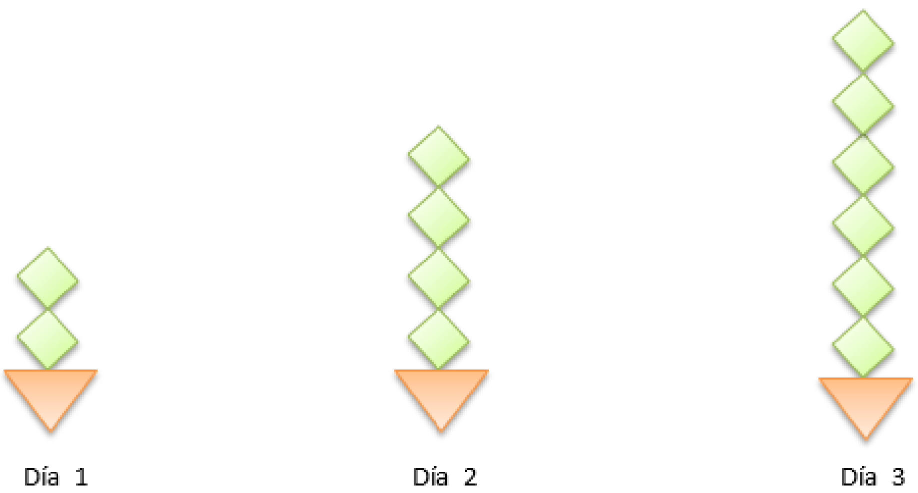
Figura 7. Ejemplo de estructura geométrica de PPG1 asociado a $y = 4(2x + 2)$ (anexo 1.17).

En cuanto a la metodología de enseñanza esperábamos que, en esta etapa, el estudiante siguiese un aprendizaje gradual de la generalización de patrones geométricos y la inversión de los mismos. Habíamos previsto que, en caso de bloqueo, le proporcionaríamos las herramientas necesarias para alcanzar los objetivos, mostrándole, por ejemplo, distintos modos de descomponer las figuras geométricas. También habíamos previsto que, si el estudiante era capaz de resolver las cuestiones planteadas desde un primer momento, le plantearíamos generalizaciones más elaboradas mediante el uso de estrategias que implicasen una mayor comprensión del patrón.

5.2. Etapa de introducción de conceptos algebraicos

En la segunda etapa, diseñamos una secuencia de 6 problemas (anexo 2), destinados a adquirir y asimilar conceptos algebraicos. Los problemas constan de 3 cuestiones (figura 8). Eliminamos las cuestiones que considerábamos innecesarias para el desarrollo de esta etapa, ya que habían sido resueltas correctamente en los PPG1. Mantuvimos la cuestión de generalización cercana porque es idónea para que el estudiante deduzca la relación general correspondiente al patrón y la verbalice. La segunda cuestión pide escribir la fórmula general verbalizada en la cuestión anterior. Esta cuestión serviría para introducir al estudiante en la utilización de letras y la simbología básica del álgebra, fomentando su comprensión a través de la transformación de expresiones verbales que tienen significado para el estudiante en expresiones algebraicas que las representan de manera simbólica. Por último, desechamos la cuestión de relación inversa no exacta y conservamos la cuestión de relación inversa exacta, la cual serviría para introducir al estudiante en la resolución de ecuaciones lineales.

Juan y Ana han plantado una enredadera en su casa. La enredadera crece del siguiente modo:



a) ¿Cuántas piezas cuadradas tendrá la enredadera en el día 12? ¿Cómo lo sabes?

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

c) Si la enredadera tiene 50 piezas cuadradas, ¿cuántos días habrán pasado? ¿Cómo lo sabes?

Figura 8. Ejemplo de Problema de Patrones Geométricos 2 (anexo 2.3).

Igual que han hecho otros autores (Stores, Richardson y Carter, 2016), la introducción del estudiante en la simbología del álgebra se hizo dotando a las letras de significados propios de los problemas para que emplease las letras como sustitutas de números desconocidos o variables propias del problema. Para ello, le propusimos usar la letra inicial de la palabra que hace referencia a la incógnita en cuestión. Siguiendo la clasificación del significado de las letras de Küchemann (1981), la cuestión *b* de estos problemas induciría hacia un uso de la letra como número generalizado, mientras que la cuestión *c* haría referencia a un uso de la letra como incógnita específica.

Además, para la enseñanza de la transformación de las expresiones verbales en expresiones algebraicas propusimos aplicar el orden sintáctico empleado en su verbalización, manteniendo así también el significado que el alumno le otorgaría, su semántica. A modo de ejemplo, si, en la figura 7, el estudiante generalizara la expresión verbal “multiplicar el día por dos”, sustituiría la palabra “día” por *d* y transformaría la expresión “multiplicar el día por dos” en $d \times 2$.

Así mismo, decidimos introducir al estudiante en la jerarquía de las operaciones y el uso del paréntesis para que pudiese escribir correctamente las expresiones generales verbalizadas, pues, como indican Store, Richardson y Carter (2016), las explicaciones verbales pueden ser transcritas erróneamente a la expresión simbólica escrita. Para ello, le explicarmos mediante ejemplos qué cuando no se sigue la jerarquía de las operaciones, se obtienen resultados distintos y que el uso del paréntesis facilita la correcta escritura de las expresiones.

5.3. Etapa de aplicación

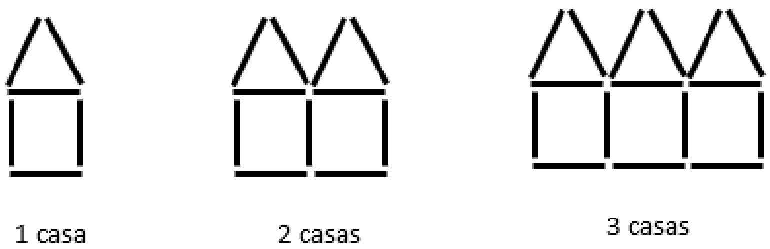
La etapa de aplicación fue dividida en dos subetapas, pues consideramos importante conocer tanto si el estudiante era capaz de aplicar el álgebra al contexto utilizado para su aprendizaje, es decir, los problemas de patrones geométricos, como en otras situaciones distintas.

5.3.1. Aplicación del álgebra en problemas de patrones geométricos

En esta subetapa, diseñamos una secuencia de 7 problemas (anexo 3), destinados a aplicar el álgebra en el mismo contexto en que había sido estudiada.

Cada problema coincide con alguno de los PPG1, pero consta de tres cuestiones (figura 9) basadas en modificaciones de las cuestiones incluidas en los PPG2. Eliminamos la cuestión de generalización cercana incluida en los problemas anteriores. La primera cuestión pedía directamente una expresión algebraica para obtener cualquier término de la secuencia. La segunda cuestión está dirigida a que el estudiante simplifique la expresión algebraica elaborada en la cuestión anterior, con el fin de introducir al estudiante en la manipulación de expresiones algebraicas a través del uso de las operaciones aritméticas básicas y los paréntesis, y enseñándole a operar con incógnitas. La tercera cuestión es de relación inversa exacta, mediante la cual comprobaríamos que el estudiante había comprendido el modelo de la balanza y sabía aplicarlo para resolver las ecuaciones.

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo:



a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos palillos necesitará en función del número de casas.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si hay 96 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?

Figura 9. Ejemplo de Problemas de Patrones Geométricos 3 (anexo 3.5).

5.3.2. Aplicación del álgebra en otros contextos

En esta subetapa, diseñamos una secuencia de 7 problemas (anexo 4), destinados a comprobar si el estudiante era capaz de aplicar los conocimientos adquiridos en contextos diferentes al de los problemas de patrones geométricos y que describimos a continuación.

En el primer problema, había que transformar diversas expresiones verbales en expresiones algebraicas con una misma incógnita y, posteriormente, a partir de una de ellas, cuyo valor era conocido, resolver el resto de ecuaciones. En el segundo problema, bastante parecido al anterior, empleábamos rectángulos, cuyo perímetro era conocido y la expresión verbal era dada en función de la base o de la altura, teniendo que calcular la otra dimensión. El tercer problema era uno típico de edades, pero planteado en un contexto escolar conocido para el estudiante con colores en lugar de edades (figura 10). El cuarto problema pedía descifrar un truco de “matemagia” en el cual se deben seguir una serie de instrucciones en forma de cálculos aritméticos. El quinto problema era uno típico de edades. El sexto problema pedía resolver cuatro ecuaciones con distintos grados de dificultad, para que el estudiante las resolviese sin estar inmersas en ningún contexto. Y el problema era también de edades, pero un poco más complejo que los anteriores y en el que se incluye la presencia de tres personas.

> Héctor y María han estado contando en clase cuántos colores de madera tiene cada uno. Héctor tiene el doble de María más 7. Si Héctor tiene 33 colores de madera, ¿cuántos tiene María?

Figura 10. Ejemplo de Problema Algebraico (anexo 4.3).

6. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Teniendo en cuenta los objetivos de investigación, el marco teórico y la metodología planteada en los capítulos anteriores, ahora realizamos un análisis tanto de las respuestas del estudiante como de las características de los estudiantes de altas capacidades puestas en juego durante la intervención. En la primera sección analizamos las respuestas proporcionadas por el estudiante en cada una de las tres etapas de la secuencia de enseñanza. En la segunda sección comparamos las dificultades presentadas por los estudiantes que se inician el aprendizaje del álgebra en el momento establecido por el currículo oficial con las dificultades presentadas por nuestro estudiante, así como las características propias de los estudiantes con altas capacidades matemáticas presentadas.

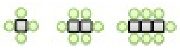
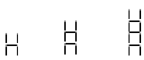
6.1. Análisis de las respuestas del estudiante

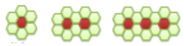
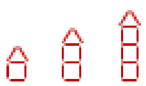
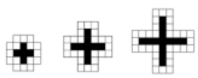
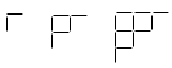
En esta sección realizamos un análisis en profundidad de los datos recogidos durante la experimentación de la secuencia de enseñanza diseñada, basándonos en los criterios descritos previamente en el capítulo 4, destinado a la metodología. Este análisis está dividido en tres secciones dedicadas al análisis de las respuestas obtenidas en cada una de las etapas de la intervención.

6.1.1. Etapa de iniciación a la generalización

Para la resolución de los problemas planteados en la etapa de iniciación a la generalización (PPG1), el estudiante utilizó diversas estrategias, que difieren en función de la relación entre variables demandada (directa o inversa). Por este motivo, en el análisis, diferenciamos entre las estrategias de resolución usadas en cuestiones de relación directa y las empleadas en cuestiones de relación inversa.

Entre las cuestiones de relación directa, distinguimos dos tipos principales de estrategias. Por una parte, según el modo de obtención del método de cálculo, las clasificamos en estrategias visuales o numéricas, y, por otra parte, en función del procedimiento de cálculo, las dividimos en estrategias de recuento, recursivas o funcionales. En la tabla 4 recogemos los tipos de estrategias empleadas por el estudiante en las cuestiones de relación directa, así como la expresión simbólica correspondiente a los cálculos aritméticos con números concretos realizados por el estudiante. Estos cálculos aritméticos han sido sustituidos por su expresión simbólica para facilitar la lectura. Cuando el estudiante hizo recuento, no incluimos ninguna expresión simbólica, ya que no realizó cálculos aritméticos.

PPG1	**Cuestión de generalización inmediata**	**Cuestión de generalización cercana**	**Cuestión de generalización lejana**
1 	Numérica	Visual	Visual
	Recursiva	Funcional	Funcional
	$y_n = y_{n-1} + 2$	$n + n$	$n + n$
2 	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$n + (n + 1)$	$n + (n + 1)$	$2n + 1$
3 	Visual	Visual	Visual
	Recuento	Recuento	Funcional
	-	-	$2n + 2$
4 	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$n + 1$	$n + 1$	$n + 1$
5 	Numérica	Numérica	Numérica
	Funcional	Funcional	Funcional
	$4n + 2$	$4n + 2$	$4n + 2$
6 	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$(n + 1) \times 2 + n$	$(n + 1) \times 2 + n$	$(n + 1) \times 2 + n$
7 	Numérica	Numérica	Numérica
	Recursiva	Recursiva	Funcional
	$y_n = y_{n-1} + 3$	$y_n = y_{n-1} + 3$	$(n - 1) \times 2 + n$

PPG1	Cuestión de generalización inmediata	Cuestión de generalización cercana	Cuestión de generalización lejana
8 	Visual	Visual	Visual
	Recuento	Funcional	Funcional
	-	$2n + (n + 1) + 2n$	$2n + (n + 1) + 2n$
9 	Numérica	Visual	Visual
	Recursiva	Funcional	Funcional
	$y_n = y_{n-1} + 4$	$(n - 1) \times 4 + 6$	$(n - 1) \times 4 + 6$
10 	Numérica	Numérica	Numérica
	Funcional	Funcional	Funcional
	$2n + 1$	$2n + 1$	$2n + 1$
11 	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$n + (n + 1) + (n + 1)$	$n + (n + 1) + (n + 1)$	$n + (n + 1) + (n + 1)$
12 	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$3n + 2$	$3n + 2$	$3n + 2$
13 	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$n \times n$	$n \times n$	$n \times n$
14 	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$n \times n + 1$	$n \times n + 1$	$n \times n + 1$
15 	Numérica	Numérica	Numérica
	Funcional	Funcional	Funcional
	$n \times n$	$n \times n$	$n \times n$
16 	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$4n - (n - 1) + 2$	$4n - (n - 1) + 2$	$4n - (n - 1) + 2$
17 	Numérica	-	-
	Recursiva	-	-
	$y_n = y_{n-1} + 8$	-	-
18 	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$(n + 1) \times n$	$(n + 1) \times n$	$(n + 1) \times n$

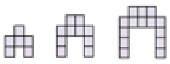
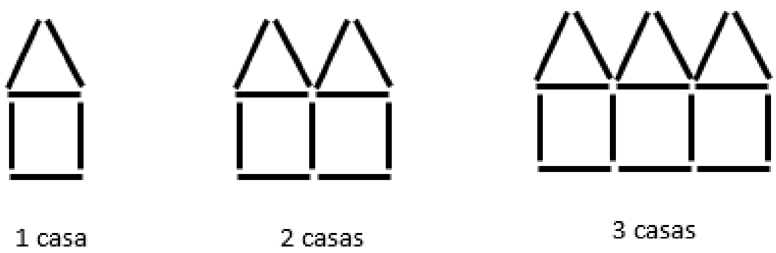
PPG1	Cuestión de generalización inmediata	Cuestión de generalización cercana	Cuestión de generalización lejana
19	Numérica	Numérica	Numérica
	Funcional	Funcional	Funcional
	$(n+1)\times 3+(n-1)$	$(n+1)\times 3+(n-1)$	$(n+1)\times 3+(n-1)$
20	Visual	Visual	Visual
	Funcional	Funcional	Funcional
	$(n\times n)+(n\times 2)$	$(n\times n)+(n\times 2)$	$(n\times n)+(n\times 2)$

Tabla 4. Estrategias en cuestiones de relación directa de PPG1.

Aunque el estudiante mostró una gran habilidad de generalización desde un primer momento, también presentó una ligera evolución a lo largo de la secuencia. Durante los nueve primeros PPG1, observamos una cierta variedad de estrategias, principalmente en las cuestiones de generalización inmediata, entre las cuales encontramos estrategias de recuento, recursivas y funcionales, como las que mostramos a continuación. En las transcripciones, hemos escrito las operaciones numéricas verbalizadas por el estudiante durante las conversaciones usando símbolos matemáticos, en lugar de texto literal con tal de facilitar su lectura.

- Estrategia de recuento (PPG1.8)

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo:



a) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 6 casas? ¿Cómo lo sabes?

Figura 11. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.8).

Investigadora: *¿Cómo va eso?*

Estudiante: *¿31?*

Investigadora: *31. Muy bien. ¿Cómo lo sabes?*

Estudiante: *Contando.*

Investigadora: *¿Qué has contado?*

[Problemas de sonido]

Madre: *Él dice que lo ha visto en su cabeza.*

Investigadora: *¿Y cómo lo ha calculado?*

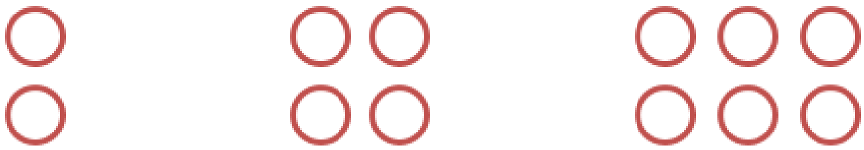
Madre: *Pues dentro de su cabeza imaginándoselo.*

Investigadora: *¿Ha hecho el dibujo en su cabeza y ha contado?*

Madre: *Exacto.*

- Estrategia recursiva (PPG1.1)

¡Nos han invitado a una fiesta! En la invitación nos han informado que se trata de una fiesta de los sabores y, por tanto, cada invitado debe llevar una comida. Nosotros hemos decidido llevar magdalenas con crema por encima. Vamos sacándolas poco a poco del horno y colocándolas de la siguiente forma para decorarlas:



1º 2º 3º

a) ¿Cuántas habrá la cuarta vez que saquemos magdalenas del horno?

Figura 12. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.1).

Estudiante: *Habrá 8.*

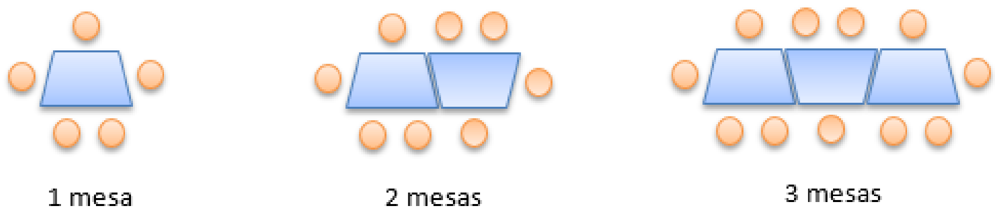
Investigadora: *La cuarta vez habrá 8. ¡Muy bien! ¿Cómo lo sabes?*

Estudiante: *Pues porque cada vez van sumando dos: 2+2=4, 4+2=6…*

Investigadora: *Muy bien.*

- Estrategia funcional (PPG1.12)

Nuestro primo Nacho quiere organizar una comida familiar. El problema es que somos muchos primos y no sabe si acudirán todos. Además, hay primos de todas las edades y, por tanto, algunos acudirán con su pareja e hijos. Quiere distribuir las mesas del siguiente modo:



a) ¿Cuántos invitados cabrán en 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?

Figura 13. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.12).

Investigadora: *Dime cosas.*

Estudiante: *Creo que esto funciona. Haces 3 o el número que sea por 3 y le sumas 2.*

Investigadora: *¡Muy bien! ¿Cómo se te ha ocurrido eso?*

Estudiante: *He hecho, en una mesa, los números de arriba, el 1 y el 2, 1x3=3. Después, en dos mesas, 3 abajo y 3 arriba, 2x3=6 y 3+3=6 y le tenemos que sumar aún estos dos. En las tres mesas, 5+4=9 y 3x3=9.*

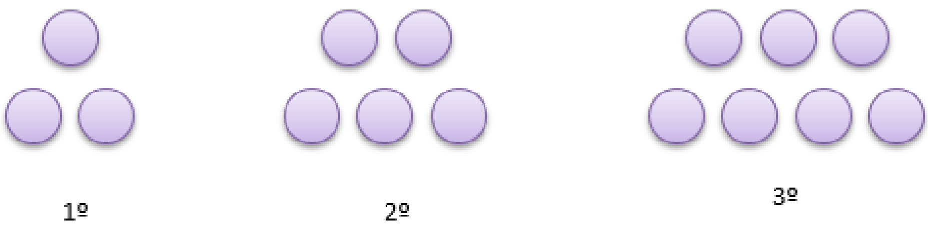
Investigadora: *Muy bien, muy buena idea.*

Sin embargo, en los once últimos PPG1, únicamente utilizó la estrategia funcional, a pesar del incremento de dificultad que caracterizó estos problemas. Este hecho puede deberse a una variación en el modo de resolución de los problemas. En los primeros problemas, buscó una estrategia para resolver cada una de las cuestiones a las que se enfrentaba de un modo independiente, en cambio, en los otros problemas, primero trató de encontrar una fórmula general que le permitiera resolver todas las cuestiones planteadas y, luego, la aplicó al término en cuestión. En estos once problemas, no incluimos el PPG1.17, ya que sólo resolvió la cuestión de generalización inmediata y para la resolución del resto de cuestiones de relación directa fue necesario proporcionarle una fórmula general.

En cuanto al modo de obtención del procedimiento de resolución, el estudiante presentó una preferencia por el uso de estrategias visuales, mediante las cuales descompuso el patrón geométrico en partes diferenciadas y obtuvo un procedimiento de cálculo para cada una de ellas. No obstante, resolvió algunos problemas mediante estrategias numéricas, quizás por la complejidad de su descomposición, y otros mediante una combinación de estrategias numéricas y visuales, ya que la tabla 4 muestra que el uso por nuestro estudiante de la estrategia recursiva siempre ha estado ligada a una visualización numérica de la figura presentada. Seguidamente, mostramos un ejemplo de estrategia visual y otro de estrategia numérica descritas por el estudiante:

- Estrategia visual (PPG1.2)

Un grupo de amigos hemos decidido jugar a los bolos. Pero como nos cuesta tirar al suelo varios bolos de una sola tirada, queremos que estos vayan aumentando poco a poco. Hemos decidido que aumenten del siguiente modo:



a) ¿Cuántos bolos habrá colocados la 5º vez que tiremos? ¿Qué haces para saberlo?

Figura 14. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.2).

Estudiante: *La respuesta a es 11.*

Investigadora: *¿Por qué 11?*

Estudiante: *He descubierto, como en la otra, que, en la primera, hay una arriba y dos abajo. En la segunda, dos arriba y una más abajo, tres. Después, en la tercera, hay tres arriba y cuatro abajo. En la quinta son cinco arriba y seis abajo.*

- Estrategia numérica (PPG1.10)

Juan quiere dibujar una cenefa para decorar su cuarto. La cenefa está formada por triángulos:

a) ¿Cuántas líneas necesitará para dibujar 6 triángulos? ¿Cómo lo sabes?

Figura 15. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.10).

Estudiante: *Yo creo que es 13.*

Investigadora: *¿Por qué?*

Estudiante: *Porque creo que esto está bien. He hecho una manera. De un triángulo, lo multiplico por dos y le sumo 1. Un triángulo por dos, más 1, 3. Dos triángulos, 2x2=4 y 4+1=5. Tres triángulos, 3x2=6 y 6+1=7. Y seis, 6x2=12 y 12+1=13.*

Investigadora: *Muy bien. ¿Y cómo has sacado esa fórmula?*

Estudiante: *Primero pensaba que cada vez era de una forma, pero al final la he sacado probando.*

Investigadora: *Pero, ¿has dividido los triángulos de alguna forma o simplemente se te ha ocurrido?*

Estudiante: *Eh… Pues… He ido… He probado, ¿vale? Porque primero iba a ver cuántos había e ir contando, pero, después, he dicho: "eso sería un rollo, sería demasiado tiempo". Y, al final, he pensado en hacer una fórmula y he probado algunas. Y, al final, me ha salido esta.*

Por otra parte, podemos emparejar cada una de las estrategias de resolución empleadas por el estudiante con un nivel concreto de generalización (Radford, 2006). En la tabla 5 mostramos el nivel de generalización alcanzado por el estudiante para la resolución de las cuestiones de relación directa junto al tipo de expresión simbólica usada.

PPG1	Cuestión de generalización inmediata	Cuestión de generalización cercana	Cuestión de generalización lejana
1	Generalización aritmética	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y_n = y_{n-1} + (y_n - y_{n-1})$	$y = ax$	$y = ax$
2	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax \pm b$
3	Inducción ingenua	Inducción ingenua	Generalización algebraica contextual
	-	-	$y = ax \pm b$
4	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual
	$y = ax \pm b$	$y = ax \pm b$	$y = ax \pm b$
5	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual
	$y = ax \pm b$	$y = ax \pm b$	$y = ax \pm b$
6	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$
7	Generalización aritmética	Generalización aritmética	Generalización algebraica factual
	$y_n = y_{n-1} + (y_n - y_{n-1})$	$y_n = y_{n-1} + (y_n - y_{n-1})$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$
8	Inducción ingenua	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	-	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$
9	Generalización aritmética	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y_n = y_{n-1} + (y_n - y_{n-1})$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$
10	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual
	$y = ax \pm b$	$y = ax \pm b$	$y = ax \pm b$
11	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$
12	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual

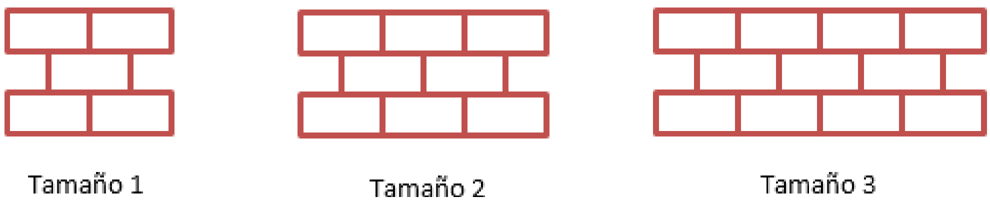
PPG1	Cuestión de generalización inmediata	Cuestión de generalización cercana	Cuestión de generalización lejana
	$y = ax \pm b$	$y = ax \pm b$	$y = ax \pm b$
13	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y = x^2$	$y = x^2$	$y = x^2$
14	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y = (x \pm a)(x \pm b)$	$y = (x \pm a)(x \pm b)$	$y = (x \pm a)(x \pm b)$
15	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y = x^2$	$y = x^2$	$y = x^2$
16	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$
17	Generalización aritmética	-	-
	$y_n = y_{n-1} + (y_n - y_{n-1})$	-	-
18	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual
	$y = (x \pm a)(x \pm b)$	$y = (x \pm a)(x \pm b)$	$y = (x \pm a)(x \pm b)$
19	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual	Generalización algebraica factual
	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$
20	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual	Generalización algebraica contextual
	$y = (x \pm a)(x \pm b)$	$y = (x \pm a)(x \pm b)$	$y = (x \pm a)(x \pm b)$

Tabla 5. Nivel de generalización en cuestiones de relación directa de PPG1.

Como se recoge en la tabla 5, el estudiante utilizó 4 niveles diferenciados de generalización: inducción ingenua, generalización aritmética, generalización algebraica factual y generalización algebraica contextual. No llegó a alcanzar la generalización algebraica simbólica, aunque, en esta etapa, tampoco le pedimos que escribiera expresiones algebraicas de sus generalizaciones verbales, ya que considerábamos que este nivel de abstracción no era propio de su edad y curso escolar.

No obstante, y pese a tratarse de un estudiante de tan solo 9 años, podemos destacar que realizó mayoritariamente generalizaciones de tipo algebraico, pues las generalizaciones aritméticas y las inducciones ingenuas son más bien escasas en el conjunto de cuestiones resueltas. También observamos una cierta tendencia a generalizar de un modo factual, es decir, a través de casos concretos como en este problema:

María y Marta están construyendo una pequeña pared alrededor de su jardín:



b) ¿Cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 11? ¿Cómo lo sabes?

Figura 16. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.11).

Estudiante: *En el b es 35.*

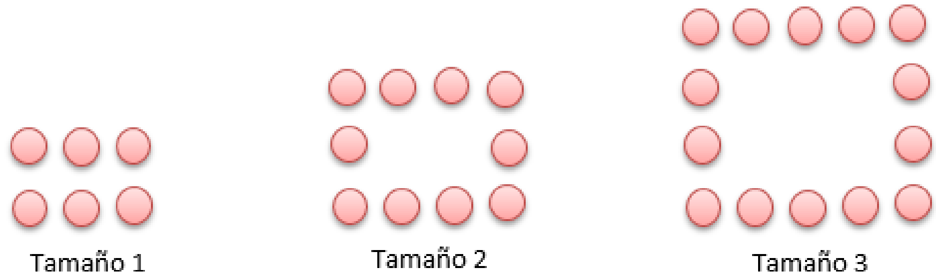
Investigadora: *35. Muy bien. ¿Por qué?*

Estudiante: *Porque es… ay, es 11, bueno, 11+1=12, 12x2=24 y 24+11=35.*

Investigadora: *Muy bien.*

Pero, también encontramos generalizaciones de tipo contextual, en las que el estudiante realizó expresiones generales sin utilizar números concretos y haciendo referencia a posiciones generales pero que aún se encuentran ligadas al contexto. Aquí mostramos un ejemplo de este tipo de generalización algebraica contextual:

Queremos construir una piscina en el huerto de la abuela, pero no nos ponemos de acuerdo con sus medidas. Así pues, hemos realizado un esquema para contar cuántas baldosas necesitaremos en función del tamaño escogido:



a) ¿Cuántas baldosas necesitaremos para el tamaño 5? ¿Cómo lo sabes?

Figura 17. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.5).

Estudiante: *El a es 24.*

Investigadora: *¿Por qué?*

Estudiante: *No, espera, 22.*

Investigadora: *¿Por qué?*

Estudiante: *Para averiguarlo he descubierto que es 4 por el tamaño que sea más 2.*

A partir de lo expuesto en la tabla 5, observamos que el estudiante realizó generalizaciones algebraicas contextuales únicamente cuando obtenía expresiones simbólicas del tipo $y = ax \pm b$ para patrones lineales y del tipo $y = (x \pm a)(x \pm b)$ para patrones cuadráticos, cuya abstracción parece resultar más sencilla al estudiante. Sin embargo, en aquellos problemas en los que realizó cálculos con expresiones simbólicas del tipo $y = ax + b(x \pm c) \pm d$ o del tipo $y = x^2$, el estudiante empleó, mayoritariamente, generalizaciones algebraicas de tipo factual, a partir de las cuales se centró en los cálculos matemáticos realizados y presentando un menor nivel de abstracción.

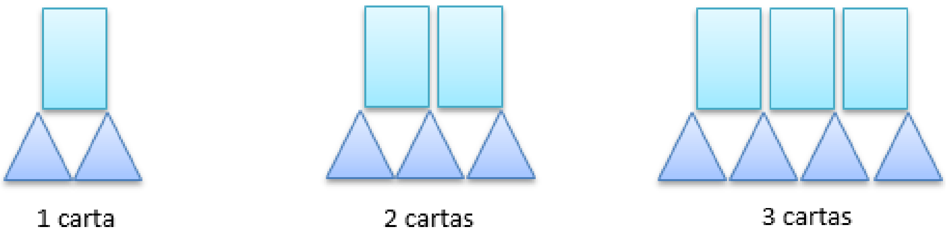
Finalmente, entre las cuestiones de relación inversa, distinguimos 3 estrategias diferenciadas de resolución: ensayo y error, inversión errónea e inversión correcta de las operaciones. En la tabla 6, indicamos las estrategias empleadas por el estudiante en relación con el tipo de generalización realizada en las cuestiones de relación directa. El orden de aparición de las cuestiones de relación inversa exacta e inexacta no era siempre el mismo en todos los problemas para evitar que el estudiante supiese de antemano qué tipo de solución iba a obtener. En consecuencia, si queremos analizar cómo el estudiante se enfrentó a las cuestiones de inversión en su mismo orden de aparición, no podemos nombrarlas como “cuestión de inversión exacta” y “cuestión de inversión inexacta”. Por ello, aparecen nombradas como “cuestión de inversión 1” y “cuestión de inversión 2”.

PPG1	Generalización	Cuestión de inversión 1	Cuestión de inversión 2
1	$y = ax$	Ensayo y error	Inversión correcta
2	$y = ax \pm b$	Ensayo y error	Ensayo y error
3	$y = ax \pm b$	Inversión correcta	Ensayo y error
4	$y = ax \pm b$	Inversión correcta	Inversión correcta
5	$y = ax \pm b$	Inversión correcta	Inversión correcta
6	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	Inversión errónea Ensayo y error	Ensayo y error
7	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	Ensayo y error	Ensayo y error
8	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	Ensayo y error	Ensayo y error
9	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	Ensayo y error	Ensayo y error
10	$y = ax \pm b$	Inversión errónea	Inversión correcta
11	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	Inversión errónea Ensayo y error	Ensayo y error
12	$y = ax \pm b$	Inversión correcta	Inversión correcta
13	$y = x^2$	Ensayo y error	Ensayo y error
14	$y = (x \pm a)(x \pm b)$	Ensayo y error	Ensayo y error
15	$y = x^2$	Ensayo y error	Ensayo y error
16	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	Ensayo y error	Ensayo y error
17	$y = ax \pm b$	Inversión correcta	Inversión correcta
18	$y = (x \pm a)(x \pm b)$	Ensayo y error	Ensayo y error
19	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	Ensayo y error	Ensayo y error
20	$y = (x \pm a)(x \pm b)$	Ensayo y error	Ensayo y error

Tabla 6. Estrategias en cuestiones de relación inversa de PPG1.

Como se puede observar, el estudiante utilizó una estrategia u otra en función del tipo de generalización realizada para las cuestiones de relación directa. Cuando las generalizaciones eran del tipo $y = ax \pm b$, el estudiante fue capaz, en la mayoría de casos, de invertir correctamente las operaciones y calcular un término concreto a partir del número de elementos que lo forman, como en el siguiente ejemplo:

Marcos está jugando a cartas con un amigo. Pero, como se aburren, deciden hacer castillos de cartas de solo dos alturas. Para ello, van aumentando poco a poco el número de cartas que forman el primer piso:



Como puedes ver, Marcos y su amigo han colocado las cartas de la base formando triángulos.

d) Si hay 23 triángulos de cartas, ¿cuántas cartas habrá en la primera planta? ¿Cómo lo sabes?

Figura 18. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.4).

Investigadora: *¿Y si lo hacemos al revés?*

Estudiante: *22.*

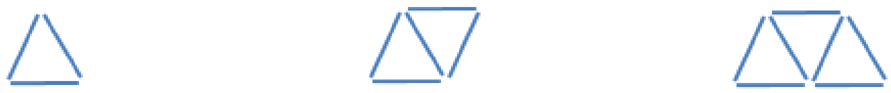
Investigadora: *Muy bien. ¿Qué has hecho ahora?*

Estudiante: *Restarle 1.*

Investigadora: *Muy bien.*

No obstante, cuando se trataba de otro tipo de generalización más compleja ($y = ax + b(x \pm c) \pm d$; $y = x^2$; $y = (x \pm a)(x \pm b)$), el estudiante no fue capaz de invertir el orden de las operaciones, dando lugar a inversiones erróneas o a su resolución mediante ensayo y error. En generalizaciones del tipo $y = ax + b(x \pm c) \pm d$, el estudiante sabía que debía invertir el orden de las operaciones; sin embargo, el desconocimiento de la jerarquía de las operaciones, así como de la importancia e influencia del orden en que se realizan, hizo que el estudiante realizase una inversión errónea de la expresión generalizada para los cálculos de relación directa. Este mismo aspecto puede observarse también en uno de los problemas del tipo $y = ax \pm b$, en el cual, tras indicarle el error cometido, el estudiante fue capaz de invertir correctamente el orden de las operaciones. En cambio, en el resto de casos en los que realizó una inversión errónea, el estudiante fue incapaz de subsanar su error y decidió resolver las cuestiones mediante ensayo y error. A continuación, mostramos un ejemplo de inversión errónea, en la cual, con ayuda de la investigadora, se dio cuenta de su error:

Juan quiere dibujar una cenefa para decorar su cuarto. La cenefa está formada por triángulos:



1 triángulo   2 triángulos   3 triángulos

d) Si hay 20 líneas , ¿cuántos triángulos habrá dibujado? ¿Cómo lo sabes?

Figura 19. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.10).

Estudiante: *El d es… Creo que es un número entre el 9 y el 10.*

Investigadora: *Entre el 9 y el 10. ¿Por qué?*

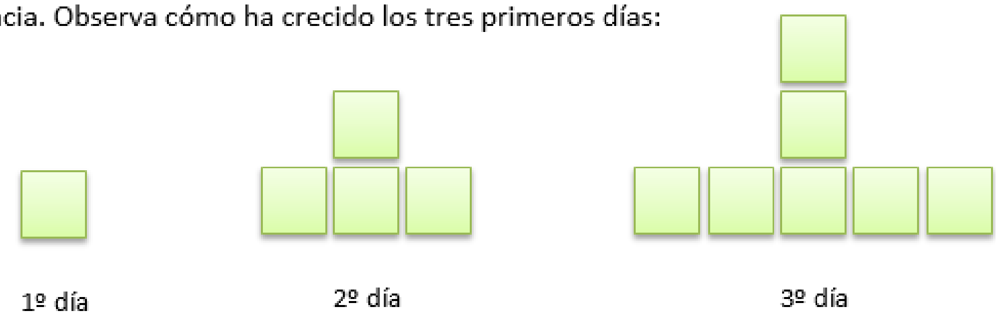
Estudiante: *He hecho 20 entre 2 menos 1.*

Investigadora: *20 entre 2 menos 1. Pero, ¿tú crees que eso está bien? Es entre 9 y 10, muy bien. Pero, si antes multiplicabas por dos y, luego, sumabas uno, ahora lo estás haciendo al revés. ¿Qué tienes que hacer primero? ¿La división o la resta?*

Estudiante: *La resta.*

Así pues, cuando la generalización verbalizada para las cuestiones de relación directa era del tipo $y = ax + b(x \pm c) \pm d$, $y = x^2$ o $y = (x \pm a)(x \pm b)$, el estudiante no pudo invertir las operaciones, debido a la complejidad que presentaban, y los resolvió mediante ensayo y error, probando distintos valores para la variable en la generalización directa hasta que encontró el valor correcto. Un ejemplo de estrategia de ensayo y error es el siguiente:

Una amiga de mi madre se ha comprado una planta nueva de una especie un poco rara. La planta crece siempre de noche, de modo que a la mañana siguiente se nota la diferencia. Observa cómo ha crecido los tres primeros días:



d) Si hay 20 cuadrados, ¿cuántos días tendrá? ¿Cómo lo sabes?

Figura 20. Problema de Patrones Geométricos 1 (anexo 1.7).

Investigadora: *¿Y si probamos a hacerlo al revés?*

Estudiante: *Voy a intentarlo.*

Investigadora: *Vale. Intenta sacar el número de cuadros. Antes lo has hecho multiplicando el número de antes por 2 y sumándole ese número. Mira, a ver, ahora cómo lo sacas.*

Estudiante: *El séptimo día.*

Investigadora: *El séptimo día, pero ¿exacto o no exacto?*

Estudiante: *Es el séptimo día a medianoche.*

Investigadora: *Vale. ¿Y cómo lo has sacado?*

Estudiante: *Primero he probado con 8 y no me ha dado. Después, he probado con 7 y tampoco me ha dado, me ha dado uno menos. Entonces, tenía que estar entre 7 y 8.*

Además, este hecho puede deberse a la complejidad presentada por los distintos tipos de ecuaciones para resolverlas mentalmente y de forma aritmética invirtiendo el orden de las operaciones. En ecuaciones lineales, las ecuaciones de tipo $n = ax$ o $n = ax \pm b$ son más fáciles de invertir que las ecuaciones de tipo $n = ax + b(x \pm c) \pm d$, ya que, en el primer tipo de ecuaciones, es posible invertir el orden de las operaciones $[x = (n \pm b)/a]$, pero el segundo tipo de ecuaciones presenta más de un término de la incógnita y el estudiante no poseía los conocimientos necesarios para poder agruparlos. Las ecuaciones cuadráticas aún resultan más complejas, pues, además de poseer más de un término de la incógnita, el estudiante todavía no había estudiado las operaciones aritméticas correspondientes para su resolución.

En cuanto a la influencia del tipo de cuestión de inversión y aunque la diferencia es poca, realizó más inversiones correctas en las cuestiones exactas que en la inexactas y también intentó en un mayor número de veces llevar a cabo inversiones que acaban siendo erróneas. Por el contrario, en las cuestiones inexactas, recurrió más a menudo a una estrategia de ensayo y error, tal y como podemos ver en la tabla 7.

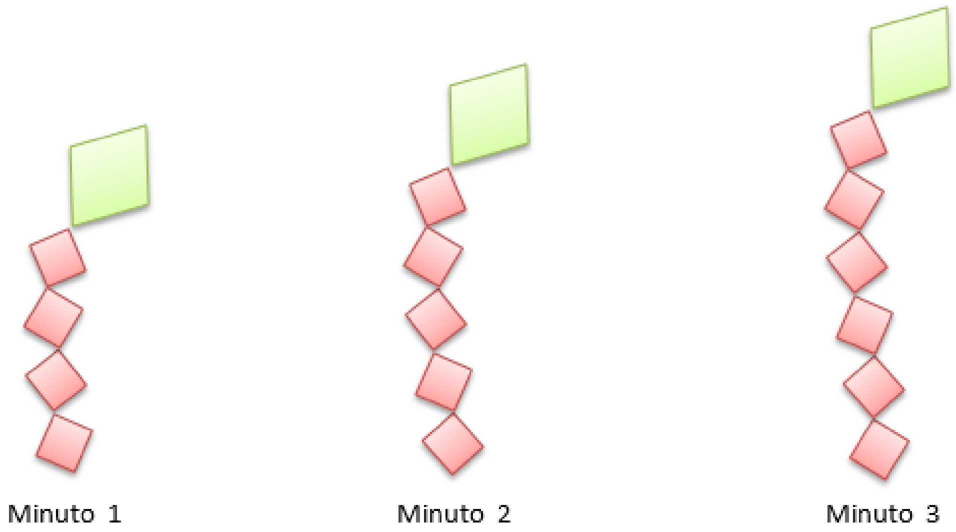
PPG1	Cuestión de inversión exacta	Cuestión de inversión inexacta
1	Inversión correcta	Ensayo y error
2	Ensayo y error	Ensayo y error
3	Inversión correcta	Ensayo y error
4	Inversión correcta	Inversión correcta
5	Inversión correcta	Inversión correcta
6	Inversión errónea Ensayo y error	Ensayo y error
7	Ensayo y error	Ensayo y error
8	Ensayo y error	Ensayo y error
9	Ensayo y error	Ensayo y error
10	Inversión correcta	Inversión errónea
11	Inversión errónea Ensayo y error	Ensayo y error
12	Inversión correcta	Inversión correcta
13	Ensayo y error	Ensayo y error
14	Ensayo y error	Ensayo y error
15	Ensayo y error	Ensayo y error
16	Ensayo y error	Ensayo y error
17	Inversión correcta	Inversión correcta
18	Ensayo y error	Ensayo y error
19	Ensayo y error	Ensayo y error
20	Ensayo y error	Ensayo y error

Tabla 7. Estrategias en cuestiones de relación inversa de PPG1.

6.1.2. Etapa de introducción de conceptos algebraicos

En esta etapa, se inició al estudiante en el mundo del álgebra a través del proceso de enseñanza-aprendizaje descrito en otro capítulo. Para ello, primeramente, introdujimos al estudiante en el uso de las letras para la trasformación de expresiones verbales en expresiones algebraicas. A continuación, mostramos un fragmento de la sesión en que se introduce al estudiante en este aspecto:

Alberto ha decidido salir hoy a volar su cometa. Como hay bastante viento para volarla alto, cada minuto añade piezas cuadradas a su cola, como ves.



a) ¿Cuántas piezas cuadradas tendrá la cola en el minuto 10? ¿Cómo lo sabes?

Figura 21. Problema de Patrones Geométricos 2 (anexo 2.1).

Estudiante: *Vale, ya tengo un truco.*

Investigadora: *Dímelo.*

Estudiante: *A ver, en el de 10, 10 menos 9… ay, 10-1=9.*

Investigadora: *Vale, pero, ¿cómo…?*

Estudiante: *Eh, pues… La del 1, 1-1=0. Hay 4 piezas, ¿vale? 1-1=0 y 4+0=4. Está bien. En el 2 hay 5 piezas. 2-1=1 y 4+1=5. Da 5, está bien. Le resto al minuto uno y le sumo cuatro a lo que me ha dado la resta.*

Investigadora: *Vale. Ahora vamos a hacer una cosa. Vamos a compartir pantalla y vamos a hacer el apartado B, ¿vale? Vamos a intentar escribir la fórmula que tú me has dicho en el ordenador.*

Estudiante: *Vale.*

[Comparte la pantalla de su ordenador]

Estudiante: *Pero, ¿cómo lo escribo? ¿Escrito o en números?*

Investigadora: *Pues, en números y, en vez de poner minuto, pones m, porque es la letra por la que empieza.*

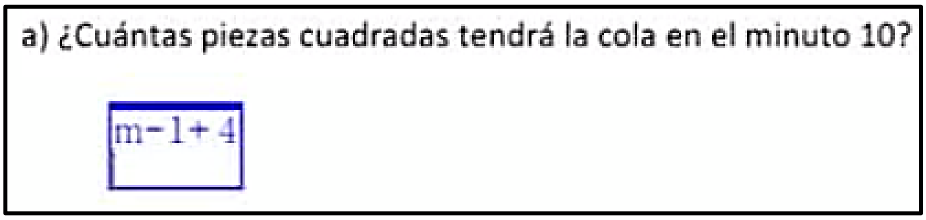


Figura 22.

Así pues, el estudiante, tras indicarle el procedimiento, escribió directamente su fórmula general verbalizada, acortando “le resto al minuto uno y le sumo cuatro a lo que me ha dado la resta” al sustituir *minuto* por su inicial: *m*. Asimismo, transformó las operaciones verbalizadas en operaciones aritméticas aplicadas a la incógnita que había sido nombrada *m*. Este paso previo a la resolución de ecuaciones y característico de la comprensión de la simbología básica algebraica, en la que se incluyen las letras, fue adquirido y asimilado rápidamente por el estudiante, pues, sin más explicación, fue capaz de transformar las generalizaciones verbales de los siguientes problemas en expresiones algebraicas sin ninguna dificultad aparente.

Siguiendo la clasificación de la interpretación y uso de las letras establecida por Küchemann (1981), podemos decir que el estudiante hace un uso dual de las letras, pues identifica la letra como un objeto, ya que la letra escogida es una abreviatura que hace referencia a un objeto o concepto concreto (*m* de minuto); pero también como un número generalizado, puesto que es consciente de que la letra puede representar diversos valores (puede tratarse del minuto 1, 5, 10 o 100, por ejemplo). En el siguiente fragmento, observamos la concepción de la letra como número generalizado cuando el estudiante escribe en un primer momento *N e* para hacer referencia al número de estantes, es decir, a un conjunto de valores en lugar de a un número específico o un objeto en sí mismo.

a) ¿Cuántas piezas cuadradas tendrá la cola en el minuto 10? ¿Cómo lo sabes?

13x4+2=54 maderas

Figura 23.

Investigadora: *Y, ahora, nos toca escribir la fórmula. ¿Qué letra utilizaremos?*

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

N e

Figura 24.

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

E

Figura 25.

Estudiante: *¿Si pongo estante lo entiendes bien? Si pongo E en vez de N e.*

Investigadora: *Claro. La letra que tú quieras. La E de estantes me parece perfecto.*

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

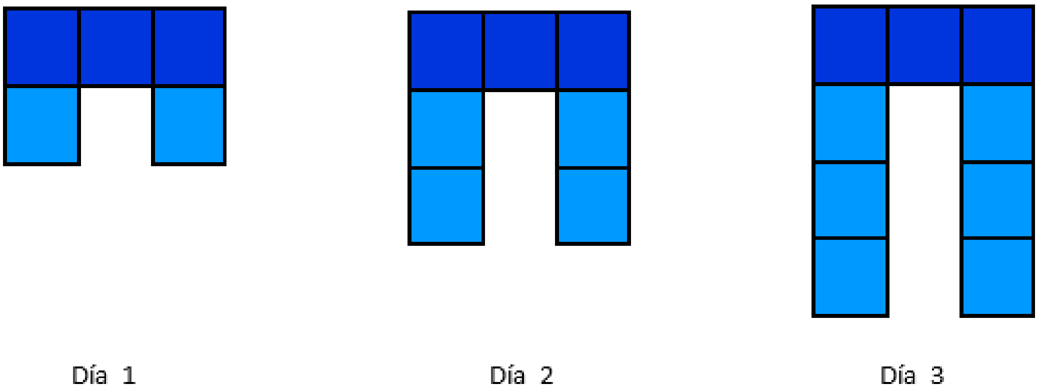
Ex4+2

Figura 26.

Investigadora: *Muy bien.*

Seguidamente, fue necesario instruir al estudiante en la jerarquía de las operaciones y el uso de paréntesis para la escritura de sus expresiones algebraicas. Este aspecto fue necesario porque, en ocasiones, la generalización obtenida por el estudiante era compleja y, aunque su verbalización no se prestaba a confusión, su transcripción algebraica variaba debido a que la jerarquía de operaciones marcaba otro orden de resolución. Store, Richardson y Carter (2016) también han indicado la necesidad de introducir el uso del paréntesis y la jerarquía de las operaciones para que los estudiantes realizasen una escritura correcta de sus reglas. En el siguiente fragmento, mostramos cómo tuvo lugar este proceso:

Han abierto una tienda nueva muy curiosa en Silla. En esta tienda solo venden pantalones vaqueros. Pero no son pantalones cualesquiera, ¡pueden ser tan largos como quieras! Cada día la tienda saca un nuevo modelo un poco más largo.



a) ¿Cuántos cuadrados tiene el pantalón del día 9? ¿Cómo lo sabes?

Figura 27. Problema de Patrones Geométricos 2 (anexo 2.2).

Estudiante: *Vale, ya tengo un truco.*

Investigadora: *Dímelo.*

Estudiante: *9, el día, más 1, por 2, más 1.*

Investigadora: *Entonces, ¿qué te da el 9?*

Estudiante: *21.*

Investigadora: *Muy bien. Vamos a probar a escribirlo.*

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

d+1x2+1

Figura 28.

Investigadora: *Vale, pero hay un problema. Está bien, ¿vale? Solo que, en las ecuaciones, para que salga bien, hay una regla de qué operaciones se hacen primero y cuáles se hacen después. Entonces, para saber cuáles van primero, se ponen paréntesis. Por ejemplo, imagínate que la d es un 1, ¿vale? Entonces, podríamos hacer 1+1=2, 2x2=4 y*

4+1=5. Pero, imagínate que decimos: 'no, primero quiero hacer la multiplicación'. Entonces, haríamos 2x1=2, 2+1=3 y 3+1=4. Ya no nos da lo mismo. ¿Lo entiendes?

Estudiante: *Sí.*

Investigadora: *Entonces, para que la gente empiece por donde toque y dé lo mismo, hay una regla que dice que primero se hacen las multiplicaciones y las divisiones y, después, las sumas y las restas. Pero, si nosotros queremos que primero se haga la suma porque si no no nos dará bien, lo que vas a hacer es ponerle un paréntesis a esa suma, porque el paréntesis se hace antes que la multiplicación. ¿Me has entendido?*

Estudiante: *Sí.*

Investigadora: *Entonces, pondríamos un paréntesis que rodeara a aquello que queremos que se haga primero. ¿Qué queremos que se haga primero?*

Estudiante: *d+1.*

Investigadora: *El d+1. Pues vamos a ponerle un paréntesis.*

Estudiante: *¿Delante de la d?*

Investigadora: *Antes que la d. Primero, el paréntesis, después, dentro, la suma que queremos que se haga.*

Estudiante: *¿d+1?*

Investigadora: *d+1.*

Figura 29.

Investigadora: *Después del paréntesis, lo primero que se hace son multiplicaciones y divisiones. Entonces, ya ponemos la multiplicación y la suma, que es lo último.*

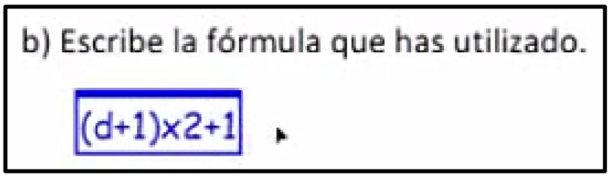


Figura 30.

Por último, utilizamos el modelo de balanza dinámico para que el estudiante aprendiese a resolver ecuaciones lineales del tipo $n = ax + b$. A continuación, incluimos un fragmento de la introducción del modelo de balanza:

Investigadora: *Pues, mira, esto es una página web que nos permite resolver ecuaciones como la que tú acabas de poner* $[\mathrm{m} - 1 + 4 = 45]$, *¿vale? Pero las ecuaciones son como si fueran balanzas. Así que tienes que tener la misma cantidad en una parte y en la otra para poder igualar. Por eso, llevan un igual en medio. Entonces, vamos a ver, ¿tú que habías puesto? Menos 1, más 4, ¿no?*

Estudiante: *Sí.*

Investigadora: *Pues vamos a crear una. No nos deja. Bueno, da igual, Vamos a hacer otra, ¿vale? Yo me invento una y, así, practicamos. Vamos a poner, por ejemplo, más tres, que es el otro que habías dicho tú, que es muy parecido, y aquí pondremos que valdrá 6.*

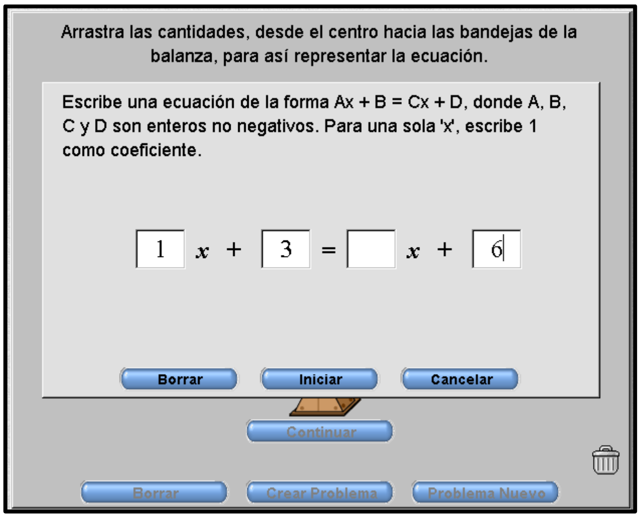


Figura 31.

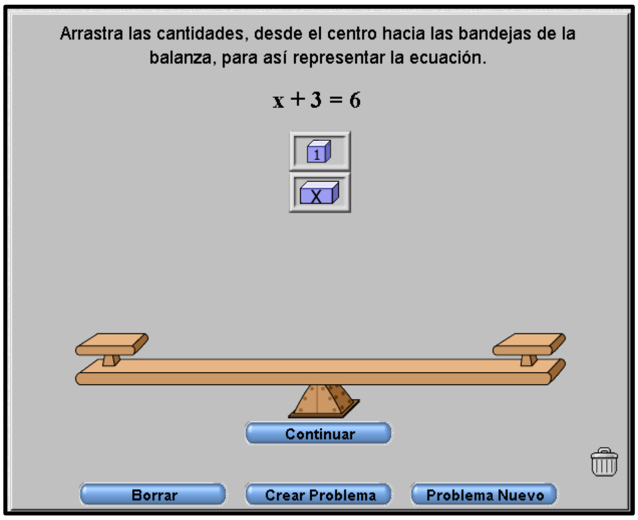


Figura 32.

Investigadora: *Tenemos nuestra ecuación, ¿la ves? Entonces, ¿cuántas* x *tenemos en la parte de la izquierda?*

Estudiante: *Eh… ¿Una?*

Investigadora: *Una. Pues, ponemos una aquí. ¿Cuántos 1 tenemos en la parte de la izquierda?*

Investigadora: *Tres, ¿no?*

Investigadora: *¿Y a la derecha que tenemos?*

Estudiante: *Seis 1.*

Investigadora: *Seis 1, muy bien.*

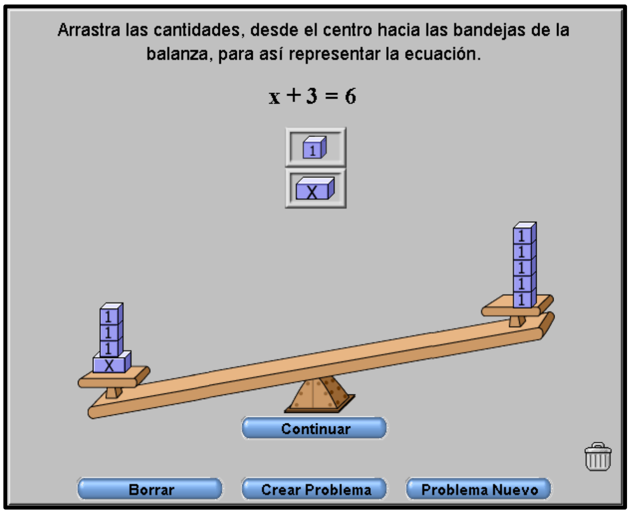


Figura 33.

Investigadora: *Ahora está descompensada. Cuando le pongo el último 1, se vuelve a compensar, ¿vale?*

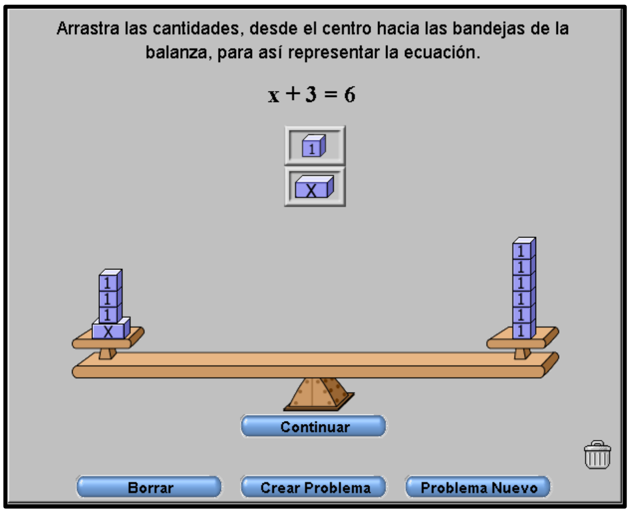


Figura 34.

Investigadora: *Las dos partes de la balanza son iguales, por eso, ponemos el igual. Entonces, ahora, ¿cómo resolvemos la ecuación? ¿Qué podemos hacer?*

Estudiante: *Pues* x *igual a…*

Investigadora: *No intentes decir* x *ya. Tenemos* $x + 3$*, vamos a intentar quitar primero los números, ¿no?*

Investigadora: *Vale, mira, hago yo el primero y, después, sigues tú, ¿vale?*

Estudiante: *Vale.*

Investigadora: *Si quito un 1 de una parte, se me descompensa. ¿Qué tendré que hacer?*

Estudiante: *Quitar uno de la otra parte.*

Investigadora: *Quitar uno de la otra parte.*

Investigadora: *Y vuelve a equilibrarse. ¿Qué más hago?*

Estudiante: *Quitar un 1 de la izquierda.*

Estudiante: *Y quitar un 1 de la derecha.*

Estudiante: *Quito 1 de la izquierda y quito otro de la derecha.*

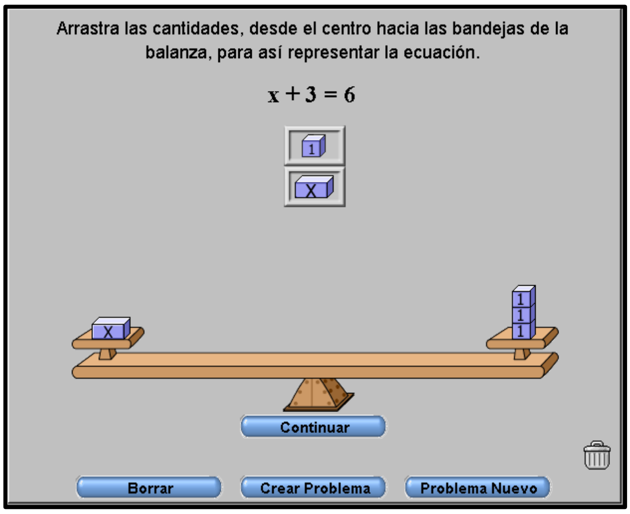


Figura 35.

Investigadora: *Muy bien. ¿Y que nos queda?*

Estudiante: x *igual a 3.*

Como podemos extraer del fragmento relatado, el estudiante entendió rápidamente el funcionamiento del modelo de la balanza. Sin embargo, es necesario destacar que el applet de la balanza únicamente fue utilizado en una sesión y para la resolución de dos ecuaciones. Los problemas técnicos del ordenador del estudiante para abrir el applet junto con la complejidad de las generalizaciones verbalizadas, pues el applet no nos permitía representarlas, provocaron que dejáramos de usar la balanza dinámica.

No obstante, y tomando como referencia el análisis de sesiones con balanza simple de Rojano (2010), el estudiante ya había asimilado el modelo de resolución y supo adaptarlo al papel perfectamente, mediante reproducciones diagramáticas del modelo, para seguir utilizándolo el tiempo que fuese necesario. En el siguiente fragmento podemos observar el proceso de adaptación del modelo de la balanza a la versión en Word:

Investigadora: *Antes, al utilizar esa fórmula* $[\mathrm{m}-1+4]$, *nos daba cuántas piezas había en la cola. Entonces pondremos m, que serán los minutos… La fórmula de antes: menos 1, más 4. Eso nos dará cuántas piezas tiene en ese minuto.*

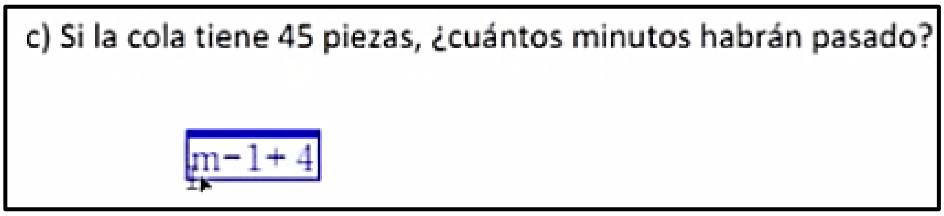


Figura 36.

Estudiante: *Esa fórmula para sacar los minutos no la podríamos hacer.*

Investigadora: *Porque nosotros no sabemos los minutos y esa fórmula es para los minutos. Pero con esa fórmula, ¿qué averiguamos? Averiguamos los cuadrados que tiene la cometa, ¿no? Y, ahora, sí que sabemos cuántos cuadrados tiene la comenta.*

Estudiante: *Sí.*

Investigadora: *Entonces, lo que haremos será que, en esa fórmula que has escrito, pondremos igual a 45.*

Figura 37.

Investigadora: *¿Ahora sabrías hacer lo mismo que estábamos haciendo con la balanza?*

Estudiante: *Lo dibujo como si estuviera en la balanza, ¿vale?*

Investigadora: *Vale.*

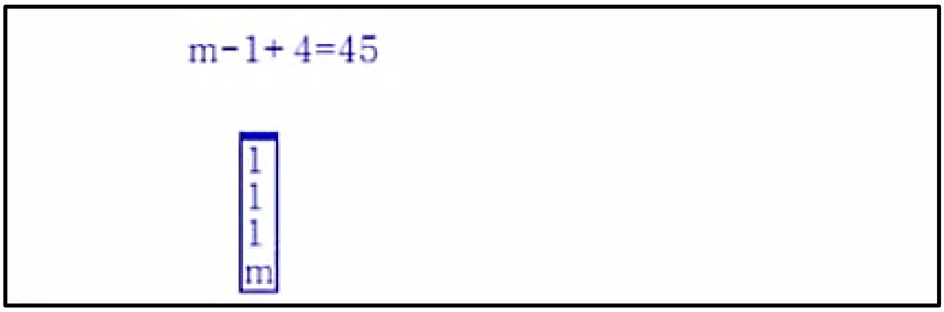


Figura 38.

Investigadora: *En el otro lado no pongas 45 unos.*

Estudiante: *Pongo cuatro 10 y un 5, ¿vale?*

Investigadora: *Vale.*

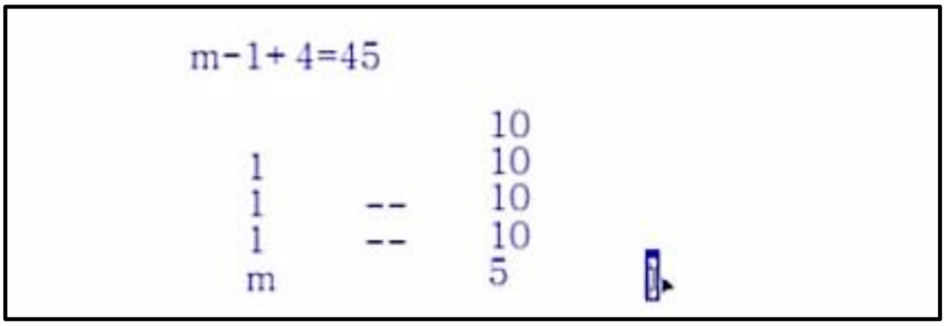


Figura 39.

Estudiante: *Lo del medio es un igual, ¿vale?*

Investigadora: *Perfecto. A ver, dime, ¿qué haríamos?*

Estudiante: *Quitaríamos un 1 de aquí* [señalando la parte izquierda del igual].

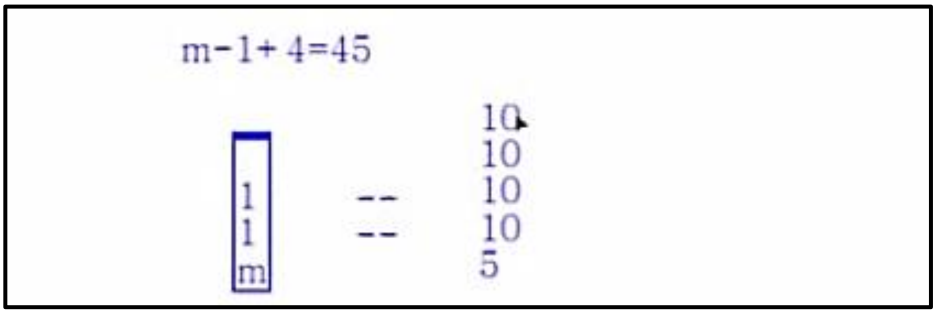


Figura 40.

Investigadora: *¿Y, en el otro lado, para compensar?*

Estudiante: *Ponemos un 9.*

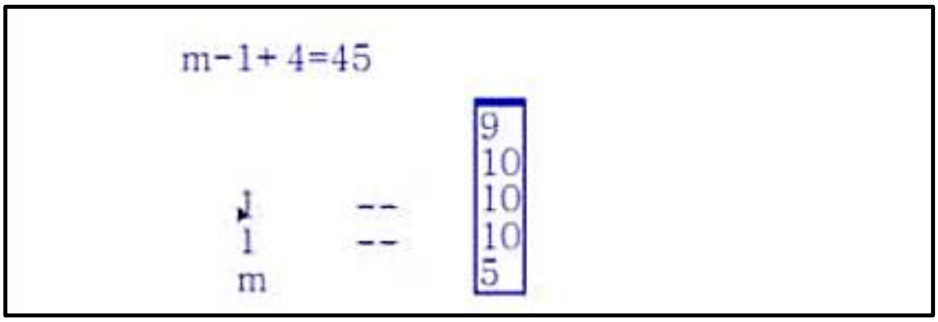


Figura 41.

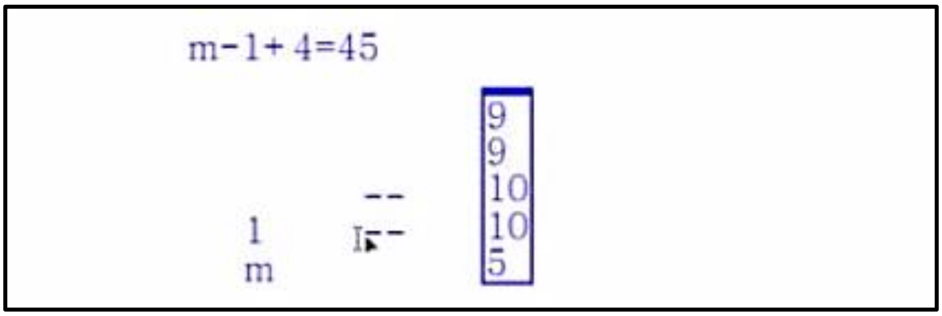


Figura 42.

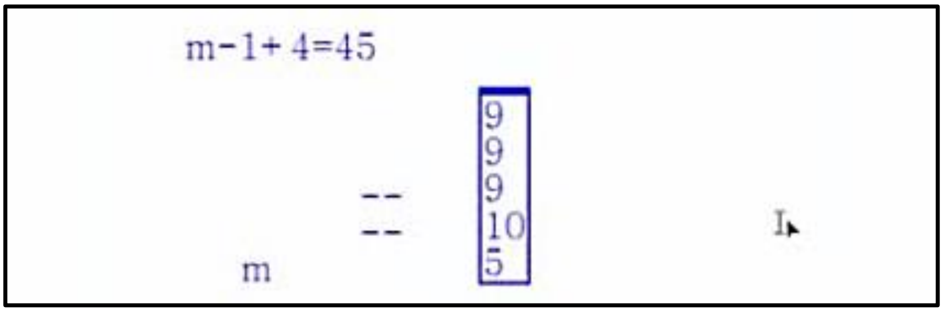


Figura 43.

Investigadora: *Vale. ¿Y ahora?*

Estudiante: *Sumar 9, 9, 9, 10 y 5.*

Investigadora: *Vale. ¿Eso qué da?*

Estudiante: *42.*

Investigadora: *Y el 42, ¿qué es?*

Estudiante: *La m.*

Investigadora: *Y la m, ¿qué era?*

Estudiante: *Los minutos.*

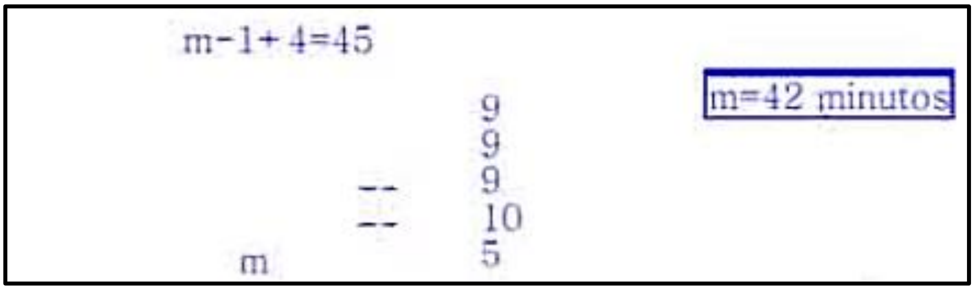


Figura 44.

Así pues, creemos conveniente destacar la rapidez con que el estudiante fue capaz de asimilar el modelo de balanza y adaptarlo a los recursos disponibles. Asimismo, podemos decir que consiguió relacionar el significado de equilibrio, propio del modelo de la balanza, con el significado del signo de igualdad en la ecuación, propio del álgebra, pues fue capaz de transformar el resultado obtenido en el diagrama de la balanza a una expresión algebraica en forma de ecuación.

Por último, durante la última sesión de la etapa de introducción de conceptos algebraicos, el estudiante muestra un progreso significativo hacia la sintaxis algebraica, ya que decide prescindir de la balanza y solucionar la ecuación de la cuestión de inversión con la escritura de expresiones algebraicas únicamente (figura 45).

c) Si hay 49 personas esperando su turno, ¿en qué minuto estaremos? ¿Cómo lo sabes?

M+3=49 M+3-3=49-3 M=46 Min.

Figura 45. Resolución de la cuestión inversa sin el modelo de balanza del PPG2 del anexo 2.6.

En esta figura, podemos observar cómo el estudiante aplica directamente la operación inversa correspondiente, pero lo hace en ambos términos, siendo este aspecto una muestra de que aún recurre mentalmente al modelo de la balanza. Sin embargo, ha comprendido el proceso de resolución de ecuaciones como un proceso de compensación, aplicando la misma operación en ambas partes del igual, en lugar de memorizar las reglas sintácticas propias de la resolución de ecuaciones como un proceso de despeje o simplificación. Este hecho nos muestra el gran papel que ha desempeñado la balanza en el aprendizaje y comprensión de la resolución de ecuaciones.

6.1.3. Etapa de aplicación

Como se ha comentado en el capítulo 4, destinado a la metodología, la etapa de aplicación fue dividida en dos subetapas diferenciadas para comprobar el grado de comprensión del álgebra a partir de la aplicación de los conocimientos adquiridos en distintos contextos, propios de los problemas de patrones geométricos y del álgebra. A continuación, realizamos un análisis de cada una de estas subetapas por separado.

6.1.3.1. Aplicación del álgebra en problemas de patrones geométricos

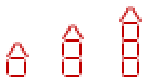
Los problemas de patrones geométricos (PPG3) que planteamos al estudiante en esta subetapa fueron algunos de los que ya había resuelto durante la etapa de iniciación a la generalización (PPG1), pero con una cierta variación en las cuestiones demandadas, como puede apreciarse al comparar sus enunciados (ver los anexos 1 y 3). Tras analizar con detenimiento los éxitos, las dificultades, las estrategias y las generalizaciones empleadas por el estudiante en los PPG1, decidimos seleccionar algunos de los problemas lineales en los que el estudiante había mostrado mayores dificultades en el proceso de inversión para, así, una vez acabada la etapa de introducción de conceptos algebraicos, averiguar si el estudiante había superado dichas dificultades. Los PPG1 seleccionados fueron los números 1, 2, 6, 7, 8, 11 y 16, todos ellos patrones en los que había conseguido obtener la generalización lejana sin grandes dificultades y cuya generalización había sido del tipo $y = ax + b(x \pm c) \pm d$, a excepción de los problemas 1 y 2, en los que había obtenido una generalización de los tipos $y = ax$ e $y = ax \pm b$.

Para constatar la evolución del estudiante en cuanto al uso y aplicación del álgebra, realizamos un análisis comparativo de las estrategias empleadas para la resolución de los PPG3, teniendo disponibles las herramientas del álgebra, con las estrategias de resolución utilizadas en los PPG1, donde aún no se había iniciado en el álgebra. Como en el análisis de los PPG1, también ahora diferenciamos entre las estrategias empleadas para la resolución de cuestiones de relación directa y cuestiones de relación inversa.

6.1.3.1.1. Aplicación del álgebra en cuestiones de relaciones directas

Para las cuestiones de relación directa, vamos a comparar y analizar las diferencias entre las estrategias y generalizaciones que empleó para las cuestiones de expresión general en los PPG3 con las estrategias y generalizaciones que utilizó para las cuestiones de generalización lejana de los PPG1 correspondientes a los mismos patrones de los PPG3 elaborados. Esta comparación es válida y fiable porque, como se observa en las tablas 4 y 5, el estudiante solía encontrar una expresión general para realizar los cálculos, por lo que, aunque no se le pidió que la verbalizara, fue posible saber qué tipo de generalización estaba usando en cada problema.

En la tabla 8 recogemos la comparación de los tipos de estrategias y generalizaciones empleadas por el estudiante en cuestiones de relación directa con los mismos patrones geométricos durante la etapa de iniciación a la generalización (PPG1) y la subetapa de aplicación del álgebra a problemas de patrones geométricos (PPG3). En la columna de la izquierda de cada parte (PPG1 y PPG3), presentamos los tipos de estrategias empleadas por el estudiante en las cuestiones de generalización lejana (PPG1) o de expresión general (PPG3), así como la expresión simbólica correspondiente a los cálculos aritméticos con números concretos realizados por el estudiante en los PPG1 y la expresión simbólica escrita por el estudiante en los PPG3. En la columna de la derecha de cada parte (PPG1 y PPG3), mostramos el nivel de generalización alcanzado por el estudiante para la resolución de las cuestiones correspondientes junto al tipo de expresión simbólica usada.

PPG1	Cuestión de generalización lejana	
1 	Visual	Generalización algebraica factual
	Funcional	
	$n+n$	$y=ax$
2 	Visual	Generalización algebraica factual
	Funcional	
	$2n+1$	$y=ax\pm b$
6 	Visual	Generalización algebraica factual
	Funcional	
	$(n+1)\times 2+n$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$
7 	Numérica	Generalización algebraica factual
	Funcional	
	$(n-1)\times 2+n$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$
8 	Visual	Generalización algebraica factual
	Funcional	
	$2n+(n+1)+2n$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$
11 	Visual	Generalización algebraica factual
	Funcional	
	$n+(n+1)+(n+1)$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$
16 	Visual	Generalización algebraica factual
	Funcional	
	$4n-(n-1)+2$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$

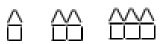
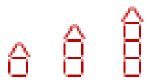
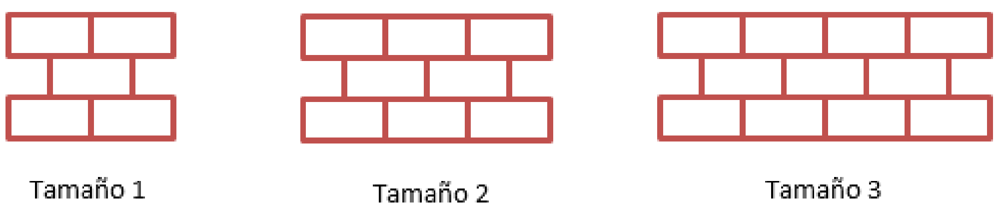
PPG3	Cuestión de expresión general	
1 	Visual	Generalización algebraica simbólica
	Funcional	
	$H\times 2$	$y=ax$
2 	Visual	Generalización algebraica simbólica
	Funcional	
	$T+T+1$	$y=ax\pm b$
3 	Visual	Generalización algebraica simbólica
	Funcional	
	$(E+1)\times 2+E$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$
4 	Visual	Generalización algebraica simbólica
	Funcional	
	$D+(D-1)\times 2$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$
5 	Visual	Generalización algebraica simbólica
	Funcional	
	$C\times 2+C+1+C+C$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$
6 	Visual	Generalización algebraica simbólica
	Funcional	
	$(T+1)\times 2+T$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$
7 	Visual	Generalización algebraica simbólica
	Funcional	
	$P\times 4-(P-1)+2$	$y=ax+b(x\pm c)\pm d$

Tabla 8. Comparación de estrategias en cuestiones de relación directa de PPG1 y PPG3.

Tras comparar las distintas estrategias y generalizaciones empleadas por el estudiante antes y después de la etapa de introducción de conceptos algebraicos, podemos observar cómo el estudiante sigue haciendo uso sistemático de una estrategia funcional, mediante la cual proporciona una expresión (numérica, verbal o simbólica) para obtener un término de la secuencia de patrones. Sin embargo, en esta ocasión los problemas de PPG3, la fórmula generalizada es escrita utilizando los símbolos alfanuméricos propios del álgebra, en lugar de ser expresada, como en los problemas de PPG1, mediante números y operaciones concretas, que en la tabla 8 han sido sustituidas por expresiones algebraicas equivalentes. El estudiante ha dejado de usar las generalizaciones algebraicas factuales que empleó en su primera resolución, así como las generalizaciones algebraicas contextuales utilizadas en otros PPG1. En los PPG3, únicamente realiza generalizaciones algebraicas simbólicas, pues era capaz de plasmar simbólicamente la generalización realizada. A continuación, mostramos, a modo de ejemplo, un problema en el que, en la primera etapa, realizó una generalización algebraica factual y, en esta subetapa, una generalización algebraica simbólica. En el apartado 6.1.1. mostramos el ejemplo de generalización algebraica factual de este mismo problema, pero con la cuestión de generalización cercana.

María y Marta están construyendo una pequeña pared alrededor de su jardín:



a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos ladrillos necesitará para cada tamaño.

Figura 46. Problema de Patrones Geométricos 3 (anexo 3.6).

Estudiante: *Vale. Ya tengo una fórmula.*

Investigadora: *¡Qué rápido! Pues dímela o escríbela.*

a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos ladrillos necesitará para cada tamaño.

(T+1)x2+T

Figura 47.

6.1.3.1.2. Aplicación del álgebra en cuestiones de relaciones inversas exactas

En las cuestiones de relación inversa, compararemos y analizaremos las diferencias entre las estrategias de la resolución de cuestiones de inversión exacta tanto en los PPG3 como en los PPG1 correspondientes. En la tabla 9 recogemos las estrategias empleadas para su resolución. En los problemas de PPG1, analizados en el apartado 5.1.1. de este mismo capítulo, el estudiante era capaz de invertir correctamente el orden de las operaciones cuando verbalizaba generalizaciones de los tipos $y = ax$ o $y = ax \pm b$. Sin embargo, era incapaz de invertir correctamente cuando verbalizaba generalizaciones del tipo $y = ax + b(x \pm c) \pm d$ y las resolvía mediante ensayo y error.

PPG1	Cuestión de inversión exacta	Generalización	PPG3	Cuestión de inversión exacta
1	Inversión correcta	$y = ax$	1	Ecuación
2	Ensayo y error	$y = ax \pm b$	2	Ecuación
6	Inversión errónea Ensayo y error	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	3	Ecuación
7	Ensayo y error	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	4	Ecuación
8	Ensayo y error	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	5	Ecuación
11	Inversión errónea Ensayo y error	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	6	Ecuación
16	Ensayo y error	$y = ax + b(x \pm c) \pm d$	7	Ecuación

Tabla 9. Comparación de estrategias en cuestiones de relación inversa de PPG3 y PPG1.

Como podemos observar, tras la introducción del estudiante en el mundo del álgebra, fue capaz de resolver las cuestiones de relación inversa exactas mediante la formulación y resolución de ecuaciones lineales, como muestra la figura 48. Así mismo, había asimilado correctamente el manejo de expresiones algebraicas mediante el uso de las operaciones aritméticas básicas, así como la jerarquía de operaciones y el uso del paréntesis, pues era capaz de simplificar las expresiones algebraicas formuladas a partir del patrón geométrico.

Dos amigas están tratando de hacer edificios con palillos sobre un folio.

a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos palillos necesitará en función del número de plantas.

Px4-(P-1)+2

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

4P-(P-1)+2=4P-P+3=3P+3

c) Si el edificio está formado por 45 palillos, ¿cuántas plantas tendrá? ¿Cómo lo sabes?

3P+3=45   3P=42   P=42:3   P=14 plantas

Figura 48. Respuesta al problema PPG3.7.

Finalmente, creemos conveniente destacar que el estudiante ha seguido avanzando tanto en el significado de las letras como en la adquisición de la sintaxis algebraica. Retomando la clasificación de Küchemann (1981), ahora el estudiante entiende la letra usada como una variable, ya que considera que representa un conjunto de valores relacionados y dependientes de otro conjunto de valores. Además, tomando como referencia a Rojano (2010), el estudiante ha finalizado el progreso significativo hacia la sintaxis algebraica, pues, como se observa en la figura 48, es capaz de simplificar la expresión algebraica obtenida directamente del análisis del patrón geométrico y, después, para la resolución de la ecuación realiza la operación de agrupamiento en un único término de la ecuación sin mostrar ningún indicio de haber recurrido al modelo de la balanza, ni aún en forma mental.

6.1.3.2. Aplicación del álgebra en otros contextos

En la subetapa de aplicación del álgebra a otros contextos, planteamos al estudiante diversos problemas algebraicos (PA) graduados en complejidad y tomando como referencia el corte didáctico establecido por Rojano (1985) entre ecuaciones aritméticas y no-aritméticas para comprobar si era capaz de aplicar los conocimientos adquiridos a contextos dispares.

El estudiante fue capaz de resolver el primer PA (figura 49) rápidamente y sin ningún obstáculo aparente. Él mismo formuló las expresiones algebraicas usando las letras como variables, tal y como se ha explicado en el apartado anterior, asociando *p* a puntuación y *x* al número de puntos obtenidos y, posteriormente, fue resolviendo las ecuaciones encadenadas. Creemos conveniente destacar que el estudiante se centró en obtener x primeramente, a partir de $4x = 500$, porque se dio cuenta de que, de este modo, obtendría el resto más fácilmente.

La semana pasada, en Silla, se ha realizado una olimpiada matemática a la que se presentaron diversos participantes. Pero, hubo un pequeño problema: ¡los correctores perdieron las notas! Ayúdales a recuperarlas a partir de la información que recuerdan.

	Expresión algebraica	Puntuación
Maite sacó x puntos.	P=X	X=125
Luis tenía 45 puntos más que Maite.	X+45=P	X+45=170
Silvia obtuvo el triple que Maite.	3X=P	3X=375
Valerià tenía 100 puntos menos que Silvia.	3X-100=P	3X-100=275
La puntuación de Silvia menos la de Maite es la que obtuvo Ana.	2X=P	3X-X=250
Andrea sacó un tercio de la puntuación de Maite.	X:3=P	X:3=41,6
El doble de la puntuación de Ana es 500.	4X=500	2X=250

Figura 49. Respuesta al problema PA.1 (anexo 5.1).

La resolución del segundo PA (figuras 50 y 51) supuso más dificultades, pues, aunque el planteamiento de las ecuaciones fue rápido, su resolución implicaba la sustitución de incógnitas por expresiones algebraicas, su simplificación y, finalmente, la obtención de una cantidad exacta para cada una de las incógnitas.

Mañana es el cumpleaños de Joan y queremos regalarle un póster para felicitarle. En la tienda nos dicen los tamaños de los pósteres rectangulares de un modo peculiar. ¿Puedes decirnos cuánto mide la base y la altura para poder escoger el que más nos convenga?

	Base	Altura	Perímetro
1. La altura mide 45 cm más que la base.	B=A-45=5	A=B+45=50	110
2. La base es el doble que la altura.	B=2A=20	A=B:2=10	60
3. La altura es el triple de la base más 10 cm.	B=A:3-10=5	A=(B+10)x3=45	190
4. La base es el doble de la suma de la altura más 3.	B=(A+3)x2=24	A=B:2-3=9	54

Figura 50. Respuesta al problema PA.2 (anexo 5.2).

En un principio, el problema fue planteado para que el estudiante emplease una única incógnita, de modo que facilitase su resolución, pues no había que pensar en términos de resolución de sistemas de ecuaciones. Sin embargo, el estudiante fue más allá y planteó una ecuación con dos incógnitas, cada una de las variables, ya que ya había asimilado el significado de variable de las letras y las reglas sintácticas de inversión de operaciones en ecuaciones.

Así pues, se le indicó que, para poder resolver la situación planteada, debía escribir la fórmula del perímetro, que el estudiante ya conocía, y, luego, sustituir una de las letras por la expresión planteada en el recuadro. Curiosamente, escogió sustituir siempre la *A* por su expresión algebraica, a pesar de que, en algunas ocasiones, quizás le habría resultado más fácil su resolución si hubiese sustituido la *B*. En consecuencia, en algunas ecuaciones, necesitó ayuda de la investigadora, pues la inclusión de divisiones en las expresiones junto a sumas y restas resultó compleja.

1 P=2B+2A=2B+2x(B+45)=110
2B+2B+90=110
4B=110-90=20
B 20:4=5 cm
5=B

2 P=2B+2A=2B+2(B:2)=60
2B+1B=60
3B=60
B=60:3
B=20

3 P=2B+2A=2B+(2B+20)x6=190
P=14B+120=190
14B=190-120=70
B=70:14=5
B=5

4 P=2B+2A=2B+(B2:4-6)=54
P=2B-6+2B:4=54
P=4B-12+4B:4=108
P=4B-12+B=108
P=5B-12=108
5B=120
B=120:5
B=24

Figura 51. Respuesta al problema PA.2 (anexo 5.2).

En cuanto al tercer PA (figura 52), el estudiante lo resolvió fácilmente y sin ningún problema. Tal y como se observa en la figura, planteó las incógnitas de la ecuación como colores de Héctor (*CH*) y colores de María (*CM*), manteniendo, así, el sentido semántico de las letras, pues no se trata de Héctor y María ni tampoco de solamente colores. Además, nos resultó curioso que fue capaz de plantear la ecuación de un modo claro y fácil, ya que, normalmente, los estudiantes se atascan en las expresiones como “Héctor tiene el doble de María” y acaban expresándolo al revés.

Héctor y María han estado contando en clase cuántos colores de madera tiene cada uno. Héctor tiene el doble de María más 7. Si Héctor tiene 33 colores de madera, ¿cuántos tiene María?

CH=CMx2+7

CH-7=CMx2

CH=33

33-7=26

26:2=13

13=CM

Figura 52. Respuesta al problema PA.3 (anexo 5.3).

Respecto al cuarto PA (figura 53), decidimos plantear una situación diferente, de modo que, el estudiante tuviese que descubrir cuál era el truco de esta magia matemática. Su planteamiento y resolución fue correcto sin ningún percance, salvo algún olvido del paréntesis que fue necesario recordarle. Es necesario destacar que, en un momento determinado, el estudiante decide simplificar uno de los paréntesis de la ecuación planteada en forma de operaciones encadenadas y fuera del contexto de la ecuación, un paso propio más bien de un pensamiento pre-algebraico situado entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Sin embargo, no debemos olvidar que se trata de un estudiante de 9 años de edad que ha asimilado el álgebra en tan sólo 5 sesiones.

Vamos a hacer un truco de magia y para ello tienes que seguir los siguientes pasos:

1) Piensa un número.
2) Súmale 13.
3) Réstale 5.
4) Súmale 1.
5) Súmale 1 al número que pensaste y réstaselo a lo que habías obtenido.

El resultado es: 8

Para conocer el resultado debes cambiar de color el texto de dentro del círculo.

¿Por qué crees que ocurre esto?

Escribe la fórmula algebraica que podemos extraer de los pasos que has seguido.

N+13

N+13-5

N+13-5+1

(N+13-5+1)-(N+1)

13-5=8+1=9+N=N+9

(N+9)-(N+1)=08

Figura 53. Respuesta al problema PA.4 (anexo 5.4).

En el quinto PA, el estudiante obtiene de cabeza una solución, sin necesidad de realizar ninguna operación escrita y decide comprobarla sustituyendo en los miembros de la ecuación planteados de forma independiente (figura 54). No obstante, obtiene que el resultado no es correcto y decide resolverlo planteando una ecuación (figura 55).

Dentro de 10 años Alberto tendrá el doble de la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuántos años tiene ahora Alberto? 14

14-4=10

14+10=24-4=20

Figura 54. Respuesta al problema PA.5.

La ecuación planteada en la figura 55, es escrita fácilmente por el estudiante y con el correcto uso del paréntesis sin necesidad de ayuda alguna. Tras su resolución, e influenciados por su intento anterior, decidimos ayudarle a comprobar la solución obtenida en la ecuación planteada, aunque, nuevamente, el estudiante operó ambos miembros de forma independiente.

Dentro de 10 años Alberto tendrá el doble de la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuántos años tiene ahora Alberto? Tiene 18 años

A=(A-4)x2=A+10 (18-4)x2=18+10

2A-8=A+10 18-4=14 14x2=18+10

2A=A+18 14x2=28 18+10=28

A=18

Figura 55. Respuesta al problema PA.5 (anexo 5.5).

Para el sexto PA (figura 56), le planteamos al estudiante una secuencia gradual, de acuerdo con la clasificación de Rojano (1985), de ecuaciones descontextualizadas para que las resolviese.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5(x+2)=20$

b) $35+x=3(5+x)$

c) $11-x=(x-47)\div 3$

d) $3x+7+2(3x+6)=x+5\times 10-3(2-x)$

Figura 56. Problema Algebraico (anexo 4.6).

En esta ocasión, el estudiante resolvió las ecuaciones sin grandes dificultades (figura 57). Sin embargo, trataba de averiguar la solución antes de realizar la resolución algebraica y, por tanto, en algunas ocasiones ya conocía lo que iba a obtener y se dejaba pasos sin escribir, pues no los necesitaba.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5(2+2)=20$ 5x($x+2$)=20

b) $35+10=3(5+10)$ $35+x=3\times(5+x)$ 35+$x=15+3x$ 20+x=3x

20=2x 20÷2=10

c) $(11-20)\times 3=(20-47)$ 33-3x=x-47 -3x=x-47-33 -3x=x-80

-4x=-80

4x=80 80:4=20

d) $15+7+2(15+6)=5+5\times 10-3(2-5)$ $9x+19=4x+44$ 44-19= 25

5x=25 25:5=5 15+7+42=64 5+50-6+15=64

Figura 57. Respuesta al problema PA.6 (anexo 5.6).

Además, fue necesario introducirle los números enteros, ya que, en los apartados c) y d) se debían realizar restas que daban como resultado un número negativo. En el siguiente fragmento, mostramos cómo se lo explicamos y la rapidez con que captó el concepto:

Estudiante: *11-20=0.*

Investigadora: *Vale, a ver cómo te lo explico… Tú tienes 11 caramelos y me tienes que dar a mí 20. Entonces, me darás esos 11 y, ¿cuántos te faltarán por darme? ¿Cuántos me deberás?*

Estudiante: *9.*

Investigadora: *Vale, pero, como me los debes, serían menos 9, porque tú tienes menos 9 caramelos, tú me debes nueve. ¿Lo entiendes?*

Estudiante: *Sí.*

Investigadora: *Vale. Para hacer la multiplicación es igual. ¿9x3?*

Estudiante: *27.*

Investigadora: *Serían menos 27. Vale, ¿y la otra parte del igual?*

Estudiante: *20 menos 47… Yo tengo 20 caramelos y te debo 47, te doy 20 y te faltarán 27. Menos 27.*

Investigadora: *Muy bien.*

Más adelante, en el apartado c) y tras la simplificación de la ecuación inicial, obtuvo la ecuación $-4x = -80$, que resolvió fácilmente gracias al modelo de la balanza, tal y como mostramos a continuación:

c) $(11 - 20) \times 3 = (20 - 47)$ 33-3x=x-47 -3x=x-47-33 -3x=x-80

-4x=-80

Figura 58.

Investigadora: *Vale. Pero, ¿qué pasa ahora que tenemos un menos en cada parte?*
Estudiante: *Quitamos los dos menos.*
Investigadora: *Muy bien.*

Por último, en el séptimo PA (figura 58), el estudiante plantea y resuelve una ecuación no-aritmética con incógnitas en ambos lados del igual, primero mentalmente y, después, mediante la resolución de ecuaciones. Esta vez, fue necesario indicarle que la suma de las edades de los hermanos más los años que habrá transcurrido no era igual que la suma de las edades que tendrán los hermanos cuando hayan pasado esos años, es decir, $(1 + 2) + x \neq (1 + x) + (2 + x)$. Esto se debió a que el estudiante planteó, en primer lugar, la siguiente ecuación: $x + 15 = (3 + x) \times 2$.

Alicia tiene dos hermanos pequeños de 1 y 2 años. Si ella tiene 15 años, ¿cuántos años deben pasar para que el doble de la suma de las edades de sus hermanos sea la misma que la edad que tendrá ella? . Tendrá 18 años. Habrán pasado 3 años

$3 + 15 = [(1 + 3) + (2 + 3)] \times 2$

$a + 15 = [3 + 2a] \times 2$

$a + 15 = 6 + 4a$

$9 = 3a$

$a = 9 \div 3 = 3$

a=3

Figura 59. Respuesta al problema PA.7 (anexo 5.7).

6.2. Análisis de las características de altas capacidades matemáticas

En este apartado analizaremos las distintas características propias de las altas capacidades matemáticas que han sido observadas en el estudiante durante las 19 sesiones llevadas a cabo, y que lo diferencian del resto de estudiantes que también se inician en el álgebra, por lo general, con mayor edad.

Por una parte, tomando como referencia a Banerjee y Subramaniam (2012) y a Jupri, Drijvers y van den Heuvel-Panhuizen (2015), el estudiante podría haber presentado cualquiera de las siguientes dificultades que suelen presentar los estudiantes que se enfrentan al álgebra en el momento establecido (normalmente, con 13 años):

- Falta de comprensión del significado de las letras.
- Falta de destreza manipulativa en expresiones simbólicas o ecuaciones.
- Dificultades en la aplicación de operaciones aritméticas en expresiones algebraicas y numéricas.
- Dificultades en la comprensión de la noción de variable.
- Dificultades en el entendimiento de las expresiones algebraicas.
- Dificultades en la comprensión de los distintos significados del signo igual.
- Dificultades en la transformación de la situación de un problema real al mundo de las matemáticas.

No obstante, como hemos podido comprobar a través del análisis de las respuestas, el estudiante comprendió rápidamente el significado de las letras y alcanzó la noción de variable en poco tiempo (5 sesiones), consiguiendo comprender las expresiones algebraicas. Así mismo, el modelo de la balanza le facilitó la comprensión de los distintos significados del igual, así como la aplicación de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) en las expresiones algebraicas. Además, la transformación de la situación de un problema real al mundo de las matemáticas mediante expresiones algebraicas con una e, incluso, con dos incógnitas no le supuso ningún problema. La única cuestión que, en ocasiones, le dificultaba el progreso y avance en el álgebra fue la falta de destreza manipulativa en expresiones simbólicas o ecuaciones, debido a su desconocimiento de la jerarquía de las operaciones.

Por otra parte, tomando como referencia las características nombradas anteriormente en el capítulo 2 y el resumen de estas realizado por Jaime y Gutiérrez (2014), vamos a realizar una recopilación de algunas de las características que han surgido en el análisis de las respuestas. El estudiante ha mostrado *flexibilidad en el uso de estrategias*, utilizando la más conveniente en cada momento. Asimismo, durante las tres etapas desarrolladas con problemas de patrones geométricos, el estudiante ha sido capaz de *identificar patrones y relaciones* y *generalizarlos*, a través del *desarrollo de estrategias eficientes*. Además, ha localizado la *clave de los problemas* con facilidad y ha mantenido su *resolución bajo control*, *abreviando los procesos de resolución* en problemas similares.

Por último, una de las características más significativas de las altas capacidades matemáticas y a destacar en este estudiante es la *rapidez de aprendizaje*, pues con 6 sesiones ya utilizaba únicamente estrategias funcionales de resolución y realizaba generalizaciones algebraicas, tanto factuales como contextuales y, posteriormente, con tan sólo 3 sesiones aprendió los contenidos de álgebra planteados en esta investigación, que reafirmó en 2 sesiones de aplicación en el contexto de los problemas de patrones geométricos. Finalmente, en la subetapa de problemas algebraicos ya había asimilado los conceptos aprendidos y fue capaz de aplicarlos y resolver los problemas sin muchas dificultades.

7. CONCLUSIONES

La investigación detallada en este documento ha pretendido descubrir formas de trabajo pre-algebraicas para llevar a cabo intervenciones extracurriculares con estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas. Para ello, hemos diseñado e implementado una secuencia de enseñanza basada en la introducción del álgebra a través de problemas de patrones geométricos y su posterior aplicación a este y otros contextos. Concretamente, nos planteamos como objetivos específicos diseñar y experimentar la secuencia mencionada y, basándonos en un caso de un estudiante, observar y analizar los procesos de aprendizaje empleados e identificar las características propias de los estudiantes con altas capacidades matemáticas manifestadas durante la secuencia.

La metodología de trabajo seguida, y basada en la metodología de investigaciones de diseño, nos ha permitido llevar a cabo el diseño de una secuencia concreta de enseñanza de un modo progresivo, en paralelo con las experimentaciones y sujeta a constantes cambios y revisiones durante el desarrollo de la experimentación. Esta secuencia fue dividida en tres etapas diferenciadas, de modo que los contenidos y la consecución de los objetivos didácticos planteados siguiesen una evolución gradual.

La primera etapa de la secuencia fue diseñada con el propósito de iniciar al estudiante en la generalización de patrones geométricos. La segunda etapa tuvo como finalidad la introducción de conceptos algebraicos, como el significado de las letras, la transformación de expresiones verbales en expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones lineales. Por último, la tercera etapa pretendía la aplicación de los conocimientos adquiridos tanto en los problemas de patrones geométricos como en otros contextos propios del álgebra. Por este motivo, la tercera etapa fue dividida en dos subetapas: por una parte, una subetapa donde el estudiante aplicase los conocimientos adquiridos a problemas de patrones geométricos en los que, previamente, había mostrado dificultades, y, por otra parte, una subetapa donde el estudiante transfiriese los conocimientos adquiridos en el contexto de los problemas de patrones geométricos a otros contextos más dispares.

El estudio del proceso de aprendizaje desarrollado por el estudiante superdotado y especialmente destacado en el área de matemáticas fue realizado de un modo diferenciado en cada una de las tres etapas establecidas, con tal de poder analizar los aspectos de interés y necesarios para el diseño de la etapa siguiente.

Como resultados de la experimentación, podemos destacar que el análisis de la primera etapa nos muestra una preferencia por estrategias visuales y de tipo funcional por parte del estudiante en la resolución de cuestiones de relación directa, así como una mayor presencia de estrategias de ensayo y error en las cuestiones de relación inversa. Además, entre las cuestiones de relación directa emplea, mayoritariamente, generalizaciones algebraicas factuales de tipo $y = ax + b(x \pm c) + d,\ \ y = x^2$ e $y = (x \pm a)(x \pm b)$ y generalizaciones algebraicas contextuales de tipo $y = ax \pm b$. En cuanto a las cuestiones de relación inversa, invierte las operaciones correctamente en las ecuaciones de tipo $n = ax \pm b$, pero es incapaz de hacerlo en ecuaciones de tipo $n = ax + b(x \pm c) + d, n = x^2$ e $n = (x \pm a)(x \pm b)$ debido a su complejidad y, en consecuencia, las resuelve por ensayo y error.

Del análisis de la segunda etapa destacamos la rapidez de aprendizaje del estudiante, pues, con breves explicaciones, obtuvo una comprensión dual del significado de las letras, según la clasificación de Küchemann (1981), otorgándoles un uso como objeto y como número generalizado. Además, entendió y aplicó el uso del paréntesis y la jerarquía de las operaciones para plasmar sus transformaciones de las generalizaciones verbales en expresiones algebraicas. El aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales mediante el modelo de la balanza le permitió comprender el proceso de resolución como un proceso de compensación, relacionando el significado del equilibrio de la balanza con el signo igual, y un progreso significativo hacia la sintaxis algebraica a través del uso de diagramas representativos de la balanza (Rojano, 2010).

Finalmente, la tercera etapa nos muestra, por una parte, un progreso en la adquisición de conocimientos y, por otra parte, una asimilación significativa de estos. En primer lugar, el estudiante sigue haciendo uso de las estrategias visuales y funcionales, pero, esta vez, únicamente realiza generalizaciones algebraicas simbólicas, ya que se le pide que proporcione una expresión algebraica. Además, es capaz de invertir cualquier tipo de ecuación lineal a través del planteamiento y resolución de ecuaciones, haciendo un uso de las letras como variables y ya de un modo sintáctico y sin ninguna muestra aparente que haga referencia al uso de la balanza. En segundo lugar, aplica correctamente y sin grandes dificultades los conocimientos adquiridos a distintos contextos del álgebra.

Por otra parte, el estudiante muestra distintas características propias de los estudiantes con altas capacidades matemáticas a lo largo de la secuencia de enseñanza. De entre ellas, las más destacadas son la identificación de patrones y relaciones, la capacidad de generalizar, la flexibilidad en el uso de estrategias, la localización de la clave en los problemas y, sobre todo, la rapidez de aprendizaje. Además, fijándonos en las dificultades presentadas por alumnos de E.S.O. en el inicio del álgebra, el estudiante únicamente presentó la falta de destreza manipulativa en expresiones algebraicas.

Por todo ello, concluimos que los problemas de patrones geométricos son una buena herramienta para la introducción de estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el mundo del álgebra a través de la generalización.

7.1. Limitaciones

En la investigación aquí relatada, podemos identificar, principalmente, dos limitaciones: por una parte, el tamaño de la muestra utilizada y, por otra parte, el tiempo disponible y marcado para realizar la investigación.

En primer lugar, escoger como muestra a un único estudiante con altas capacidades matemáticas limita esta investigación, pues los resultados obtenidos se encuentran muy ligados al contexto y no pueden ser generalizados. Así mismo, al no disponer de otros estudiantes con los que comparar no podemos discernir, hasta cierto punto, si el éxito de la secuencia de aprendizaje es realmente de la secuencia o de la capacidad de aprendizaje del estudiante.

En segundo lugar, la investigación debía realizarse con un tiempo determinado establecido y estipulado. Este hecho limitó bastante el desarrollo de la investigación, ya que nos gustaría haber estudiado con mayor profundidad las posibles relaciones entre las estrategias de resolución empleadas y las características de los patrones geométricos correspondientes y ciertos aspectos del proceso de aprendizaje, así como haber comparado la implementación de la secuencia de problemas con otros estudiantes, cosas que no han sido posibles. La metodología planteada en esta investigación está caracterizada por ser un proceso cíclico en el que se implementa la secuencia en varias ocasiones, modificándola y mejorándola en cada implementación. Debido a las limitaciones de tiempo únicamente fue posible realizar la experimentación correspondiente al primer ciclo de dicho proceso.

7.2. Perspectivas de futuro

Tras finalizar la investigación y realizar un análisis retrospectivo de la misma, consideramos que aún quedan varios aspectos que mejorar y ampliar.

Por una parte, consideramos que es necesario rediseñar la secuencia de enseñanza, reduciendo el número de problemas de la primera etapa y modificando algunas de las cuestiones de las dos etapas siguientes. Y, una vez mejorada la secuencia, creemos necesario experimentarla en una muestra de mayor tamaño y con estudiantes de mayor variedad de capacidades matemáticas. La muestra debería incluir a otros alumnos con altas capacidades matemáticas y a alumnos con capacidades medianas, tanto de su misma edad (9 años) como de la edad correspondiente al curso en el que se da inicio al estudio del álgebra (13 años).

Por otra parte, consideramos necesario completar la metodología con nuevos ciclos de diseño, experimentación y análisis, es decir, macrociclos, que completen y mejoren la investigación realizada.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Amit, M. y Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 111-129.

Aretxaga, L. (coord.) (2013). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales.* Vitoria: Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dig_publicaciones_innovacion/es_escu_inc/adjuntos/16_inklusibitatea_100/100012c_Pub_EJ_altas_capacidades_c.pdf

Arocas, E., Martínez. P. y Martínez, M. D. (2009). *Intervención con el alumnado de altas capacidades en Educación Secundaria Obligatoria.* Valencia: Conselleria de Educación, Generalitat Valenciana. Recuperado de http://www.cefe.gva.es/ocd/areacd/docs/esp/interv_altascap.pdf

Banerjee, R. y Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational Studies of Mathematics, 80*, 351-367.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problema-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht/ Boston/ Londres: Kluwer.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* (Tesis doctoral no publicada). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de http://hera.ugr.es/tesisugr/17349515.pdf

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's' strategies and errors.* Windsor: NFER-Nelson.

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early algebraization*. Heidelberg, Alemania: Springer.

Carreras, L., Valera, M. y Reig, C. (2006). *Guia per a la detecció i intervenció educativa en els alumnes amb altes capacitats intel·lectuals*. Recuperado de http://www.pedagogs.cat/doc/guia_superdotacio.pdf

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales* (Tesis Doctoral). Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo González (Coord.), *Investigación en Educación Matemática XII*. Badajoz: SEIEM.

Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faísca, 11*, 4-22.

Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2008). Diagnóstico de errores en niños con talento. *Unión*, (16), 123-140.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Research, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K. y Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). Nueva York: Routledge.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). Berlín: Springer-Verlag.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CD-β Press.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

English, L. D. y Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Nueva York: Springer.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados). 2ª Edición.* Traducción, notas e introducción de Luis Puig. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Friel, S. N. y Markworth, K. A. (2009). A framework for analysing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 24-33.

Fritzlar, T. y Karpinski-Siebold, N. (2012). *Continuing patterns as a component of algebraic thinking – An interview study with primary school students.* Artículo presentado en el 12th International Congress on Mathematical Education (ICME12). Seúl, Corea del Sur. Recuperado de http://www.icme12.org/upload/upfile2/tsg/0360.pdf

Gagné, F. (2000). *A differentiated model of giftedness and talent* (DMGT). Manuscrito no publicado. Montreal (Canadá). Recuperado de http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/policies/gats/assets/p df/poldmgt2000rtcl.pdf

García-Cruz, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de la Laguna.

García-Cruz, J. A. y Martinón, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalising problems. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 289-296). Helsinki (Finlandia): PME.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Gardner, H. (1995). *Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica.* Barcelona: Paidós.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. M. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Londres: John Murray.

Huntzinger, E. M. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-293). Reston, VA: NCTM.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de E. Primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Jupri, A., Drijvers, P. y van den Heuvel-Panhuizen, M. (2015). Improving grade 7 students' achievement in initial algebra through a technology-based intervention. *Digital Experiences in Mathematics Education, 1*(1), 28-58.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. y Sims-Knight, J. (1983). Errors in translations to algebraic equations: Roots and implications. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 5*, 63-78.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Lanin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *MERJ, 18*(3), 3-28.

Lee, L. y Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(9), 428-433.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, *BOE núm. 106*, de 4 de mayo de 2006.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, *BOE núm. 295*, de 10 de diciembre de 2013.

Markworth, K. A. (2010). *Growing and growing: promoting functional thinking with geometric growing patterns* (Tesis doctoral no publicada). Chapel Hill: University of North Carolina.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behaviour, 3*, 93-166.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En Seeman, D. y Brown, J. S., *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). Academic Press.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent.* Washington, DC: ERIC. Recuperado de http://eric.ed.gov/?id=ED321487

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). NCTM position statement on algebra: What, when, and for whom. *NCTM News Bulletin, 45*(5), 2.

Ndlovu, W. C. (2011). *Learners' mathematical reasoning when generalizing from number patterns in the general education and training phase* (Tesis doctoral no publicada). Johannesburg (South Africa): University of the Witwatersrand.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O. y Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en Educación Secundaria. *Faísca*, (11), 83-102. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2476416

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Anual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2011a). Embodiment, perception and simbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Radford, L. (2011b). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Heidelberg, Alemania: Springer.

Radford, L. y Grenier, M. (1996). Les apprentissages mathématiques en situation. *Revue des Sciencies de l'Education, XXII*(2), 253-276.

Ramírez, R. (2012) *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral no publicada). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/23889/1/21400763.pdf

Real Academia Española (2016). *Diccionario de la Real Academia Española*. http://www.rae.es/

Renzulli, J. S. (1998). Three-ring conception of giftedness. En S. M. Baum, S. M. Reis y L. R. Maxfield (Eds.), *Nurturing the gifts and talents of primary grade students*. Mansfield Center, CT (EEUU): Creative Learning Press.

Reyes-Santander, P. y Karg A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). Santander: SEIEM.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: Horsori.

Rivera, F. D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 81-88. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad)* (Tesis doctoral no publicada). México D.F.: Centro de investigación y estudios avanzados del I.P.N.

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números, 75*, 5-20.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Singer, F. M., Sheffield, L. J., Freiman, V. y Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students*. ICME-13 Topical Surveys. Hamburg: Springer Open.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Sternberg, R. J. (1997). A triarchic view of giftedness: Theory and practice. En N. Coleangelo y G. A. Davis (Eds.), *Handbook of Gifted Education* (pp. 43-53). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Store, J. C., Richardson, K. D. y Carter, T. S. (2016). Fostering understanding of variable with patterns. *Teaching Children Mathematics, 22*(7), 420-427.

Terman, L. M. (1925). *Genetic studies of genius: Vol. 1. Mental and Physical traits of a thousand gifted children*. Stanford, CA: Stanford University Press.

Torrego, J. C. (Coord.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperative. Un modelo de respuesta educativa.* Madrid: Fundación SM. Recuperado de http://www.fundacionpryconsa.es/pdf/Altas_capacidades_y_aprendizaje_c ooperativo.pdf

Tourón, J., Repáraz, C., Peralta, F., Gaviria, J. L., Fernández, R., Ramos, J. M. y Reyero, M. (1998). Identificación del talento verbal y matemático: descripción de un proyecto de validación. En A. Sipán (Coord.), *Respuestas Educativas para Alumnos Superdotados y Talentosos: Actas del Congreso Internacional.* Zaragoza: Mira.

Trujillo, P. A., Castro, E. y Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 511-522). Santander: SEIEM.

Utah State University (1999-2016). *Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales (NLVM)*. http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions&from=category_g_4_t_2.html

van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. y Nieveen, N. (Eds.) (2006). *Educational design research.* Nueva York: Routledge.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 341-359.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: PME.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 599-610). Ciudad Real: SEIEM.

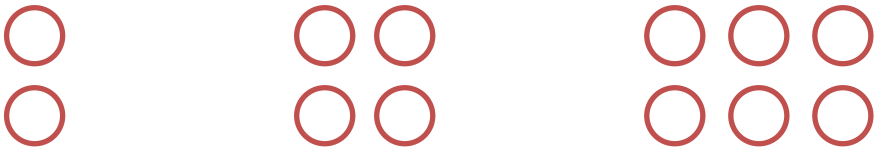
Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

ANEXO 1

Problemas de Patrones Geométricos 1

1.1. ¡DECORAMOS MAGDALENAS!

¡Nos han invitado a una fiesta! En la invitación nos han informado que se trata de una fiesta de los sabores y, por tanto, cada invitado debe llevar una comida. Nosotros hemos decidido llevar magdalenas con crema por encima. Vamos sacándolas poco a poco del horno y colocándolas de la siguiente forma para decorarlas:



1º 2º 3º

a) ¿Cuántas habrá la cuarta vez que saquemos magdalenas del horno?

b) ¿Cuántas habrá la décima vez que saquemos magdalenas del horno? ¿Cómo lo sabes?

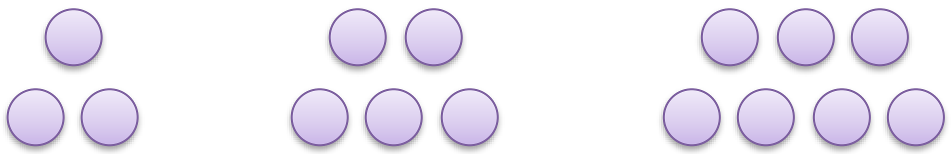
c) Son muchos invitados, así que haremos muchas magdalenas. ¿Sabrías algún modo de calcular cuántas tendremos cuando saquemos magdalenas del horno por 50 vez? ¿Cómo lo sabes?

d) Entro en la cocina y están sacando la última tanda de magdalenas. Hay 17 magdalenas. ¿Cuántas veces han horneado magdalenas?

e) Voy de nuevo a la cocina más tarde y veo que están sacando una tanda de 104 magdalenas. ¿Cuántas remesas de magdalenas se han cocinado?

1.2. ¡JUGAMOS A LOS BOLOS!

Un grupo de amigos hemos decidido jugar a los bolos. Pero como nos cuesta tirar al suelo varios bolos de una sola tirada, queremos que estos vayan aumentando poco a poco. Hemos decidido que aumenten del siguiente modo:



1º 2º 3º

a) ¿Cuántos bolos habrá colocados la 5º vez que tiremos? ¿Qué haces para saberlo?

b) ¿Cuántos bolos habrá colocados la 12º vez que tiremos? ¿Cómo lo sabes?

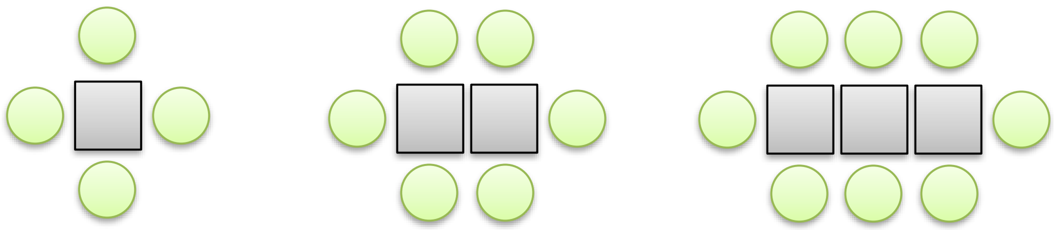
c) Como estamos aburridos, vamos a pasar mucho tiempo jugando. ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos bolos tendremos colocados cuando hagamos la tirada 65? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 31 bolos preparados, ¿de qué número de tirada se trata? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 44 bolos preparados, ¿de qué número de tirada se trata? ¿Cómo lo sabes?

1.3. ¡CUMPLEAÑOS FELIZ!

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



1 mesa 2 mesas 3 mesas

Pero María tiene un problema: no sabe cuántos invitados acudirán a su fiesta. ¿Podrías ayudarle a calcular cuántos invitados cabrán en función de cuántas mesas coloque?

a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?

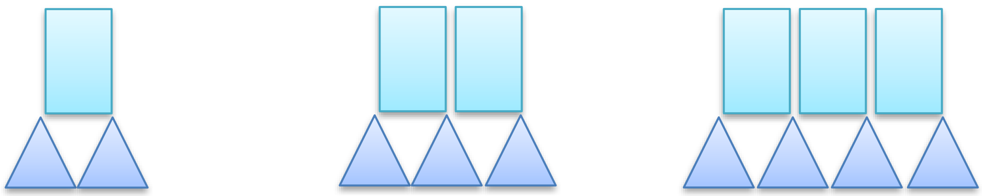
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 35 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

1.4. CARTAS

Marcos está jugando a cartas con un amigo. Pero, como se aburren, deciden hacer castillos de cartas de solo dos alturas. Para ello, van aumentando poco a poco el número de cartas que forman el primer piso:



1 carta 2 cartas 3 cartas

Como puedes ver, Marcos y su amigo han colocado las cartas de la base formando triángulos.

a) ¿Cuántos triángulos deberán colocar para tener 5 cartas en la primera planta? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos triángulos deberán colocar para tener 13 cartas en la primera planta? ¿Cómo lo sabes?

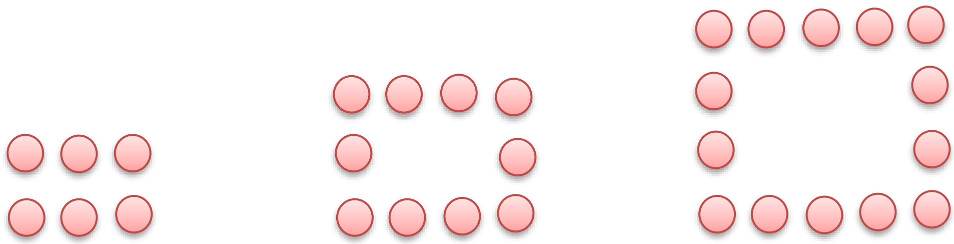
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos triángulos deberán colocar para tener 56 cartas en la primera planta? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 23 triángulos de cartas, ¿cuántas cartas habrá en la primera planta? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 47 triángulos de cartas, ¿cuántas cartas habrá en la primera planta? ¿Cómo lo sabes?

1.5. PISCINA

Queremos construir una piscina en el huerto de la abuela, pero no nos ponemos de acuerdo con sus medidas. Así pues, hemos realizado un esquema para contar cuántas baldosas necesitaremos en función del tamaño escogido:



Tamaño 1 Tamaño 2 Tamaño 3

a) ¿Cuántas baldosas necesitaremos para el tamaño 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántas baldosas necesitaremos para el tamaño 12? ¿Cómo lo sabes?

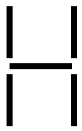
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántas baldosas necesitaremos para el tamaño 60? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 31 baldosas, ¿qué tamaño será? ¿Cómo lo sabes?

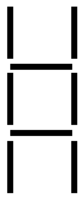
e) Si hay 42 baldosas, ¿qué tamaño será? ¿Cómo lo sabes?

1.6. ESCALERA

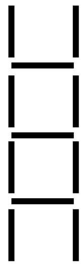
Un grupo de amigos estaba jugando al baloncesto, cuando, sin querer, han lanzado el balón demasiado alto y ha ido a parar al tejado. Para bajarlo, van a construir una escalera con madera, pero desconocen cuántos escalones necesitarán.



1 escalón



2 escalones



3 escalones

a) ¿Cuántos trozos madera necesitarán para 4 escalones? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos trozos madera necesitarán para 10 escalones? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos trozos madera necesitarán para 45 escalones? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 26 trozos de madera, ¿cuántos escalones tendrá? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 39 trozos de madera, ¿cuántos escalones tendrá? ¿Cómo lo sabes?

1.7. PLANTA

Una amiga de mi madre se ha comprado una planta nueva de una especie un poco rara. La planta crece siempre de noche, de modo que a la mañana siguiente se nota la diferencia. Observa cómo ha crecido los tres primeros días:

1º día 2º día 3º día

a) ¿Cuántos cuadrados tendrá el esquema del 5º día? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos cuadrados tendrá el esquema del 13º día? ¿Cómo lo sabes?

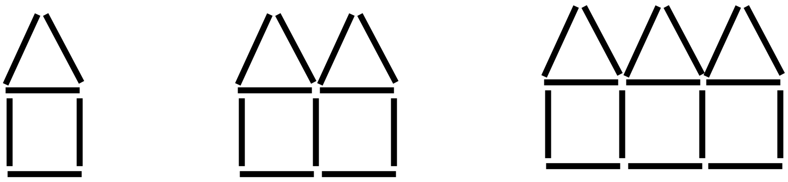
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos cuadrados tendrá el esquema del día 65? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 20 cuadrados, ¿cuántos días tendrá? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 58 cuadrados, ¿cuántas días tendrá? ¿Cómo lo sabes?

1.8. URBANIZACIÓN

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo:



1 casa 2 casas 3 casas

a) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 6 casas? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos palillos necesitarán para dibujar 11 casas? ¿Cómo lo sabes?

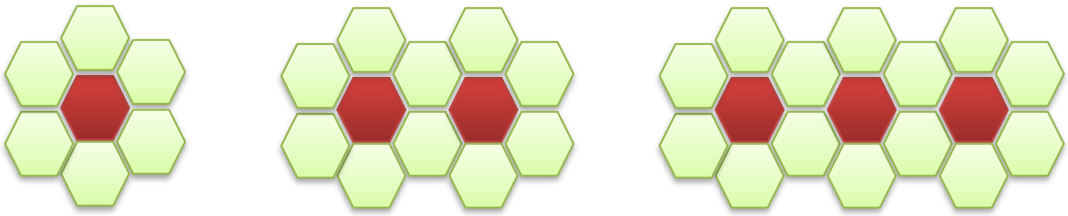
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos palillos necesitarán para dibujar 44 casas? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 51 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 98 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?

1.9. JARDINERA

El ayuntamiento quiere instalar jardineras en el parque y rodearlas con baldosas hexagonales del siguiente modo:



1 jardinera   2 jardineras   3 jardineras

a) ¿Cuántas baldosas necesitará para instalar 5 jardineras? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántas baldosas necesitará para instalar 13 jardineras? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántas baldosas necesitará para instalar 53 jardineras? ¿Cómo lo sabes?

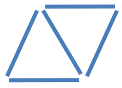
d) Si hay 30 baldosas, ¿cuántas jardineras instalarán? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 60 baldosas, ¿cuántas jardineras instalarán? ¿Cómo lo sabes?

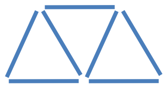
1.10. CENEFA

Juan quiere dibujar una cenefa para decorar su cuarto. La cenefa está formada por triángulos:

1 triángulo



2 triángulos



3 triángulos

a) ¿Cuántas líneas necesitará para dibujar 6 triángulos? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántas líneas necesitará para dibujar 12 triángulos? ¿Cómo lo sabes?

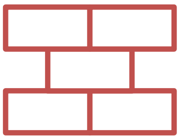
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántas líneas necesitará para dibujar 47 triángulos? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 20 líneas , ¿cuántos triángulos habrá dibujado? ¿Cómo lo sabes?

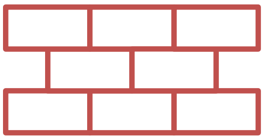
e) Si hay 31 líneas, ¿cuántos triángulos habrá dibujado? ¿Cómo lo sabes?

1.11. PARED

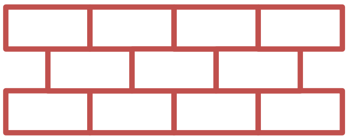
María y Marta están construyendo una pequeña pared alrededor de su jardín:



Tamaño 1



Tamaño 2



Tamaño 3

a) ¿Cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 11? ¿Cómo lo sabes?

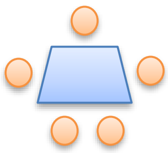
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 50? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 38 ladrillos, ¿qué tamaño habrán construido? ¿Cómo lo sabes?

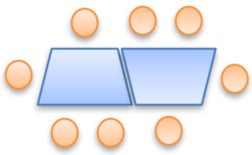
e) Si hay 45 ladrillos, ¿qué tamaño habrán construido? ¿Cómo lo sabes?

1.12. FAMILIA

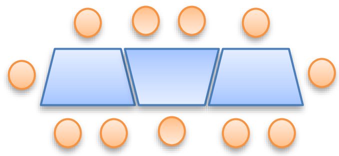
Nuestro primo Nacho quiere organizar una comida familiar. El problema es que somos muchos primos y no sabe si acudirán todos. Además, hay primos de todas las edades y, por tanto, algunos acudirán con su pareja e hijos. Quiere distribuir las mesas del siguiente modo:



1 mesa



2 mesas



3 mesas

a) ¿Cuántos invitados cabrán en 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos invitados cabrán en 12 mesas? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán en 53 mesas? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 24 invitados, ¿cuántas mesas necesitará? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 50 invitados, ¿cuántas mesas necesitará? ¿Cómo lo sabes?

1.13. CUADRADOS

Ana está jugando con sus piezas de construcción a formar todos los cuadrados posibles con los cuadraditos que dispone.

Cuadrado 1　　Cuadrado 2　　Cuadrado 3

a) ¿Cuántos cuadraditos necesitará para el cuadrado 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos cuadraditos necesitará para el cuadrado 10? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos cuadraditos necesitará para el cuadrado 35? ¿Cómo lo sabes?

d) Si tiene 30 cuadraditos, ¿qué cuadrado podrá hacer? ¿Cómo lo sabes?

e) Si tiene 49 cuadraditos, ¿qué cuadrado podrá hacer? ¿Cómo lo sabes?

1.14. SERPIENTE

Una serpiente crece del siguiente modo:

Día 1 Día 2 Día 3

a) ¿Cuántos triángulos formarán la serpiente el día 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos triángulos formarán la serpiente el día 10? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos triángulos formarán la serpiente el día 40? ¿Cómo lo sabes?

d) Si está formada por 37 triángulos, ¿qué día será? ¿Cómo lo sabes?

e) Si está formada por 45 triángulos, ¿qué día será? ¿Cómo lo sabes?

1.15. LATAS DE TOMATE

En un supermercado quieren colocar las latas en el expositor en forma de pirámide. Cada día realizan una pirámide diferente para saber cuál es la más grande que pueden hacer:

a) ¿Cuántas latas habrá el día 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántas latas habrá el día 10? ¿Cómo lo sabes?

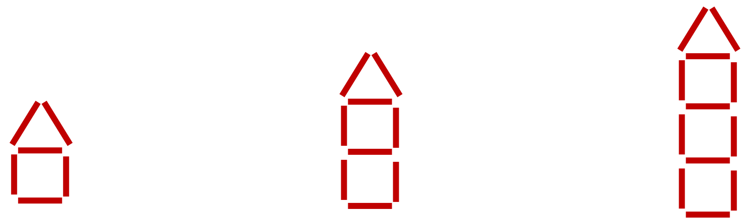
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántas latas habrá el día 30? ¿Cómo lo sabes?

d) Si está formada por 29 latas, ¿qué día será? ¿Cómo lo sabes?

e) Si está formada por 64 latas, ¿qué día será? ¿Cómo lo sabes?

1.16. EDIFICIOS

Dos amigas están tratando de hacer edificios con palillos sobre un folio.



1 planta 2 plantas 3 plantas

a) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 6 plantas? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 12 plantas? ¿Cómo lo sabes?

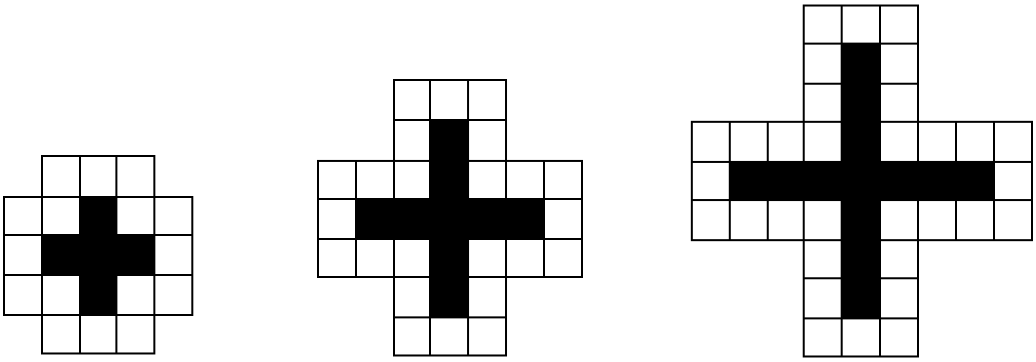
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 46 plantas? ¿Cómo lo sabes?

d) Si el edificio está formado por 27 palillos, ¿cuántas plantas tendrá? ¿Cómo lo sabes?

e) Si el edificio está formado por 43 palillos, ¿cuántas plantas tendrá? ¿Cómo lo sabes?

1.17. GRIETA

En el patio de nuestro colegio se ha formado una grieta que crece poco a poco. A su alrededor dibujamos cuadrados de la misma medida para poder saber cuánto ha aumentado.



Día 1 Día 2 Día 3

a) ¿Cuántos cuadrados necesitaremos para medir el tamaño de la grieta el día 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos cuadrados necesitaremos para medir el tamaño de la grieta el día 11? ¿Cómo lo sabes?

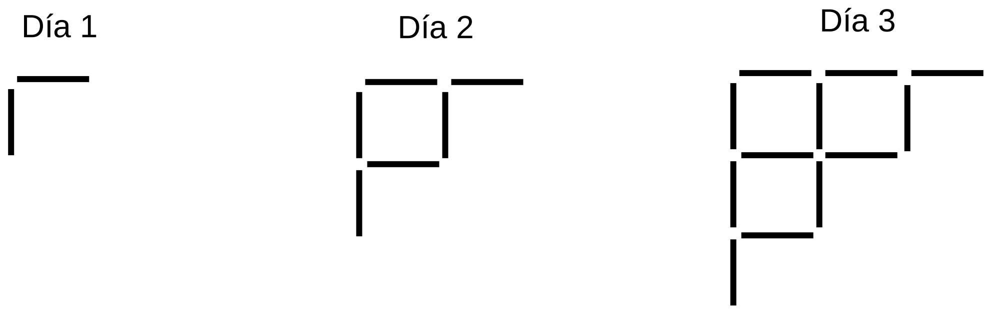
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos cuadrados necesitaremos para medir el tamaño de la grieta el día 25? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hemos necesitado 70 cuadrados, ¿cuántos días tiene la grieta? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hemos necesitado 128 cuadrados, ¿cuántos días tiene la grieta? ¿Cómo lo sabes?

1.18. ARAÑA

En clase tenemos una araña como mascota. En la esquina superior de su terrario está construyendo una telaraña. Cada día construye un fragmento siguiendo el siguiente patrón:



Cada una de las rayas representa un hilo diferente.

a) ¿Cuántos hilos habrá colocado en la telaraña el día 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos hilos habrá colocado en la telaraña el día 10? ¿Cómo lo sabes?

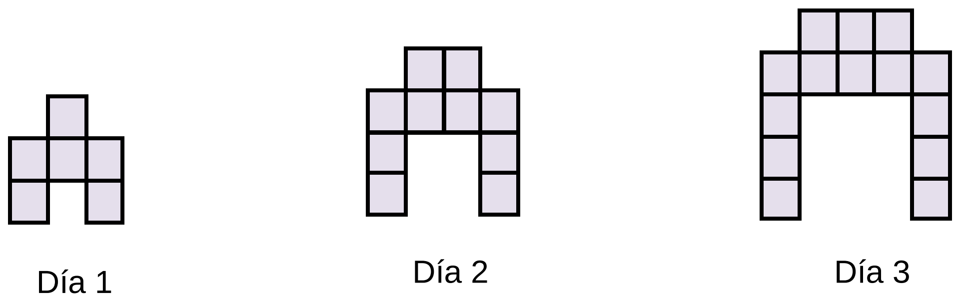
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos hilos habrá colocado en la telaraña el día 30? ¿Cómo lo sabes?

d) Si la telaraña está formada por 50 hilos, ¿cuántos días ha necesitado para hacerla? ¿Cómo lo sabes?

e) Si la telaraña está formada por 90 hilos, ¿cuántos días ha necesitado para hacerla? ¿Cómo lo sabes?

1.19. PUERTA

Mi hermana Ana y yo queremos construir una puerta para que nuestro perro pueda entrar y salir solo al jardín. Como no sabes cuántos bloques de construcción vamos a necesitar, cada día hacemos una y la probamos. ¿Nos ayudas?



a) ¿Cuántos bloques necesitaremos el día 6? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos bloques necesitaremos el día 12? ¿Cómo lo sabes?

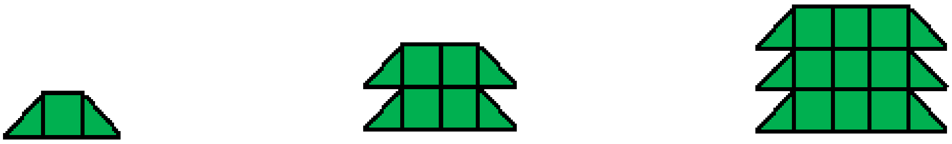
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos bloques necesitaremos el día 40? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hemos utilizado 62 bloques, ¿en qué día estamos? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hemos utilizado 36 bloques, ¿en qué día estamos? ¿Cómo lo sabes?

1.20. ARBUSTO

Alba y Sofía han decidido plantar un arbusto en su jardín y para medir cuánto crece cada día lo dividen en figuras geométricas:



Día 1 Día 2 Día 3

a) ¿Cuántas figuras tendrá el arbusto el día 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántas figuras tendrá el arbusto el día 11? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántas figuras tendrá el arbusto el día 25? ¿Cómo lo sabes?

d) Si el arbusto contiene 55 figuras, ¿en qué día estamos? ¿Cómo lo sabes?

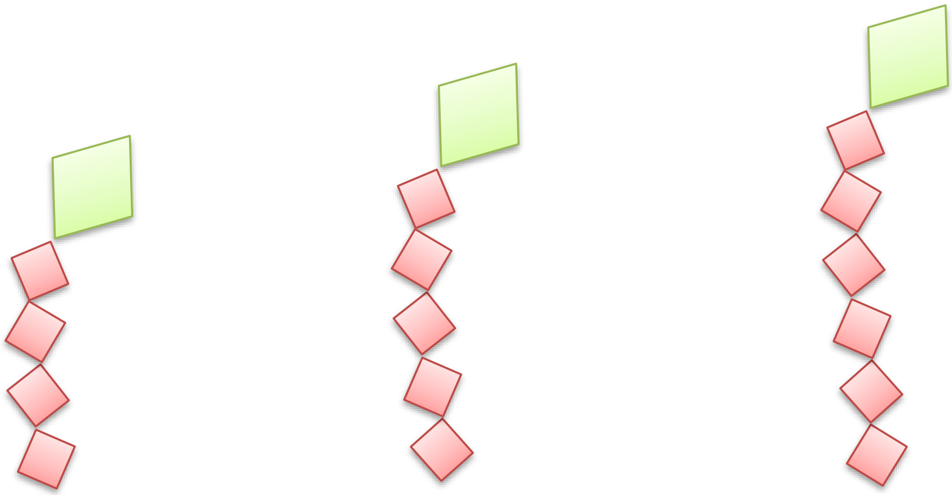
e) Si el arbusto contiene 99 figuras, ¿en qué día estamos? ¿Cómo lo sabes?

ANEXO 2

Problemas de Patrones Geométricos 2

2.1. COMETA

Alberto ha decidido salir hoy a volar su cometa. Como hay bastante viento para volarla alto, cada minuto añade piezas cuadradas a su cola, como ves.



Minuto 1 | Minuto 2 | Minuto 3

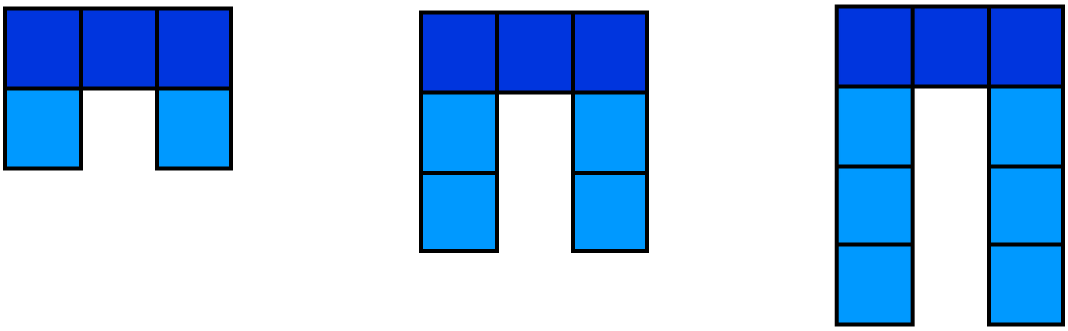
a) ¿Cuántas piezas cuadradas tendrá la cola en el minuto 10? ¿Cómo lo sabes?

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

c) Si la cola tiene 45 piezas, ¿cuántos minutos habrán pasado? ¿Cómo lo sabes?

2.2. PANTALÓN

Han abierto una tienda nueva muy curiosa en Silla. En esta tienda solo venden pantalones vaqueros. Pero no son pantalones cualesquiera, ¡pueden ser tan largos como quieras! Cada día la tienda saca un nuevo modelo un poco más largo.



Día 1 | Día 2 | Día 3

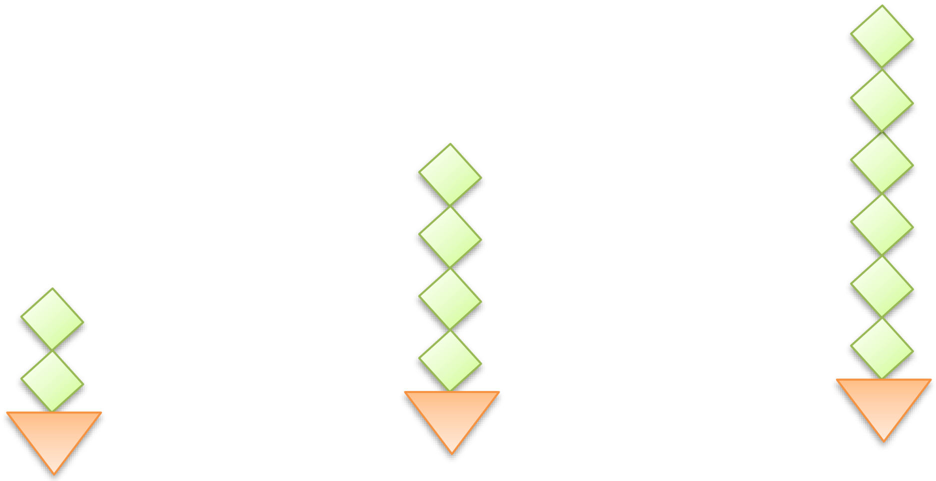
a) ¿Cuántos cuadrados tiene el pantalón del día 9? ¿Cómo lo sabes?

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

c) Si el pantalón tiene 57 cuadrados, ¿en qué día estamos? ¿Cómo lo sabes?

2.3. ENREDADERA

Juan y Ana han plantado una enredadera en su casa. La enredadera crece del siguiente modo:



Día 1 Día 2 Día 3

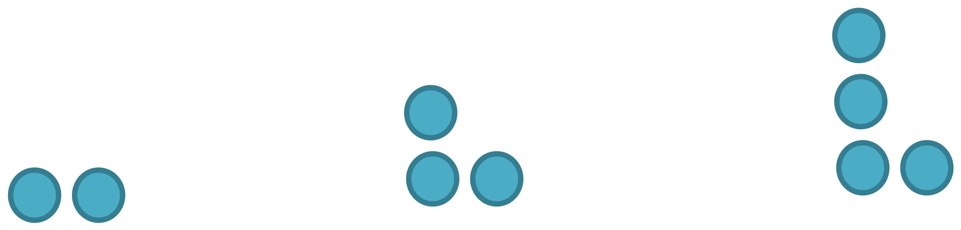
a) ¿Cuántas piezas cuadradas tendrá la enredadera en el día 12? ¿Cómo lo sabes?

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

c) Si la enredadera tiene 50 piezas cuadradas, ¿cuántos días habrán pasado? ¿Cómo lo sabes?

2.4. CARACOL

El caracol Pepito va avanzando poco a poco y cada día deja un rastro de su avance. Aquí puedes ver el recorrido que sigue:



Día 1 Día 2 Día 3

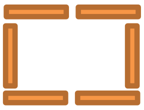
a) ¿Cuántas marcas circulares habrá dejado el día 11? ¿Cómo lo sabes?

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

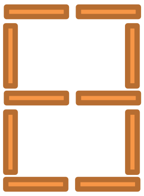
c) Si ya ha dejado 47 marcas circulares, ¿cuántos días habrán pasado? ¿Cómo lo sabes?

2.5. ESTANTERÍA

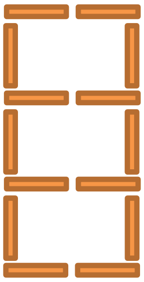
En la clase de tecnología nos han pedido que montemos una estantería que llegue hasta el techo de la clase. Pero, como no sabemos cuántas maderas ni cuántos estantes necesitaremos, vamos probando:



1 estante



2 estantes



3 estantes

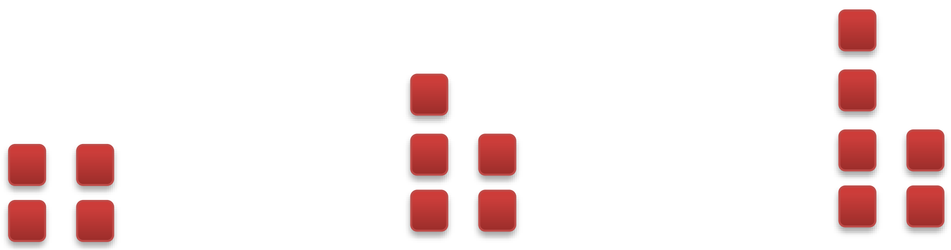
a) ¿Cuántas maderas necesitaremos para tener 13 estantes? ¿Cómo lo sabes?

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

c) Si construimos la estantería con 98 maderas, ¿cuántos estantes tendrá? ¿Cómo lo sabes?

2.6. SUPERMERCADO

En el supermercado sólo hay dos cajas abiertas para pagar, pero no funcionan bien y se está formando una gran cola mientras acuden los técnicos. Cada minuto llega alguien a caja y se coloca del siguiente modo para esperar su turno:



Minuto 1 Minuto 2 Minuto 3

a) ¿Cuántas personas estarán esperando su turno en el minuto 12? ¿Cómo lo sabes?

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

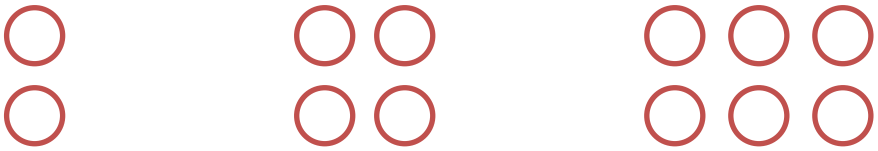
c) Si hay 49 personas esperando su turno, ¿en qué minuto estaremos? ¿Cómo lo sabes?

ANEXO 3

Problemas de Patrones Geométricos 3

3.1. ¡DECORAMOS MAGDALENAS!

¡Nos han invitado a una fiesta! En la invitación nos han informado que se trata de una fiesta de los sabores y, por tanto, cada invitado debe llevar una comida. Nosotros hemos decidido llevar magdalenas con crema por encima. Vamos sacándolas poco a poco del horno y colocándolas de la siguiente forma para decorarlas:



1º 2º 3º

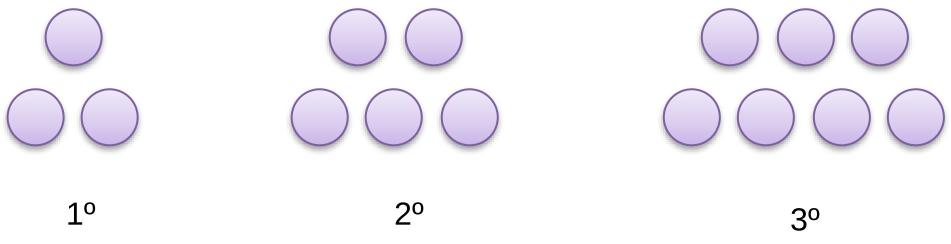
a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántas magdalenas habrá en cada hornada.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Entro en la cocina y están sacando la última tanda de magdalenas. Hay 104 magdalenas. ¿Cuántas veces han horneado magdalenas?

3.2. ¡JUGAMOS A LOS BOLOS!

Un grupo de amigos hemos decidido jugar a los bolos. Pero como nos cuesta tirar al suelo varios bolos de una sola tirada, queremos que estos vayan aumentando poco a poco. Hemos decidido que aumenten del siguiente modo:



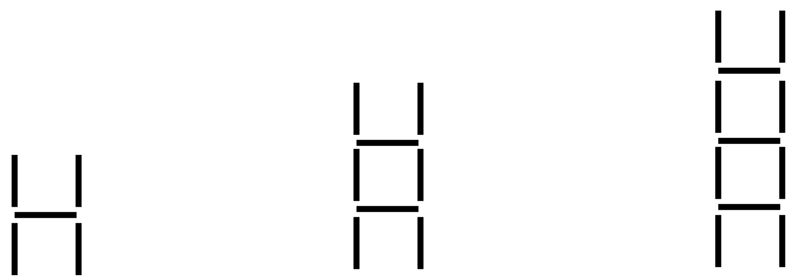
a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos bolos habrá colocados en cada posición.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si hay 43 bolos preparados, ¿de qué número de tirada se trata? ¿Cómo lo sabes?

3.3. ESCALERA

Un grupo de amigos estaba jugando al baloncesto, cuando, sin querer, han lanzado el balón demasiado alto y ha ido a parar al tejado. Para bajarlo, van a construir una escalera con madera, pero desconocen cuántos escalones necesitarán.



1 escalón   2 escalones   3 escalones

a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántas maderas necesitaremos para construir una escalera para cada número de escalones.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si hay 41 trozos de madera, ¿cuántos escalones tendrá? ¿Cómo lo sabes?

3.4. PLANTA

Una amiga de mi madre se ha comprado una planta nueva de una especie un poco rara. La planta crece siempre de noche, de modo que a la mañana siguiente se nota la diferencia. Observa cómo ha crecido los tres primeros días:

1º día 2º día 3º día

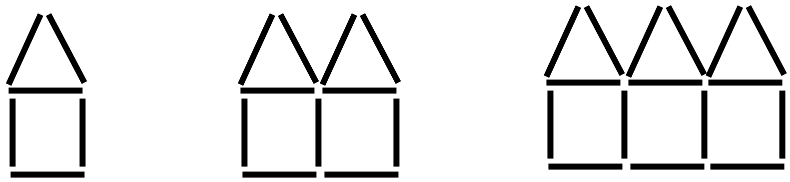
a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos cuadrados tendrá cada día.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si hay 58 cuadrados, ¿cuántas días tendrá? ¿Cómo lo sabes?

3.5. URBANIZACIÓN

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo:



1 casa 2 casas 3 casas

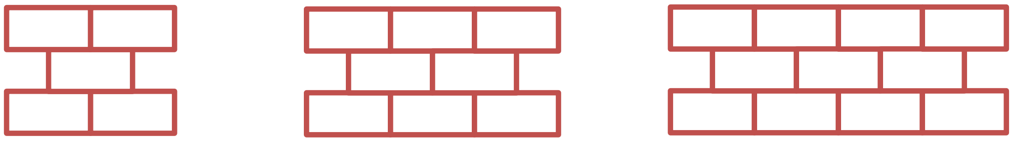
a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos palillos necesitará en función del número de casas.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si hay 96 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?

3.6. PARED

María y Marta están construyendo una pequeña pared alrededor de su jardín:



Tamaño 1 Tamaño 2 Tamaño 3

a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos ladrillos necesitará para cada tamaño.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si hay 50 ladrillos, ¿qué tamaño habrán construido? ¿Cómo lo sabes?

3.7. EDIFICIOS

Dos amigas están tratando de hacer edificios con palillos sobre un folio.

a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos palillos necesitará en función del número de plantas.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si el edificio está formado por 45 palillos, ¿cuántas plantas tendrá? ¿Cómo lo sabes?

ANEXO 4

Problemas Algebraicos

4.1. OLIMPIADA

La semana pasada, en Silla, se ha realizado una olimpiada matemática a la que se presentaron diversos participantes. Pero, hubo un pequeño problema: ¡los correctores perdieron las notas! Ayúdales a recuperarlas a partir de la información que recuerdan.

	Expresión algebraica	Puntuación
Maite sacó x puntos.		
Luis tenía 45 puntos más que Maite.		
Silvia obtuvo el triple que Maite.		
Valerià tenía 100 puntos menos que Silvia.		
La puntuación de Silvia menos la de Maite es la que obtuvo Ana.		
Andrea sacó un tercio de la puntuación de Maite.		
El doble de la puntuación de Ana es 500.		

4.2. PÓSTER

Mañana es el cumpleaños de Joan y queremos regalarle un póster para felicitarle. En la tienda nos dicen los tamaños de los pósteres rectangulares de un modo peculiar. ¿Puedes decirnos cuánto mide la base y la altura para poder escoger el que más nos convenga?

	Base	**Altura**	**Perímetro**
1. La altura mide 45 cm más que la base.			110
2. La base es el doble que la altura.			60
3. La altura es el triple de la base más 10 cm.			190
4. La base es el doble de la suma de la altura más 3.			54

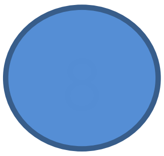
4.3. COLORES

Héctor y María han estado contando en clase cuántos colores de madera tiene cada uno. Héctor tiene el doble de María más 7. Si Héctor tiene 33 colores de madera, ¿cuántos tiene María?

4.4. MATEMAGIA

Vamos a hacer un truco de magia y para ello tienes que seguir los siguientes pasos:

1) Piensa un número.
2) Súmale 13.
3) Réstale 5.
4) Súmale 1.
5) Súmale 1 al número que pensaste y réstaselo a lo que habías obtenido.

El resultado es: 

Para conocer el resultado debes cambiar de color el texto de dentro del círculo.

¿Por qué crees que ocurre esto?

Escribe la fórmula algebraica que podemos extraer de los pasos que has seguido.

4.5. EDADES

Dentro de 10 años Alberto tendrá el doble de la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuántos años tiene ahora Alberto?

4.6. ECUACIONES

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5(x+2)=20$

b) $35+x=3(5+x)$

c) $11-x=(x-47)\div 3$

d) $3x+7+2(3x+6)=x+5\times 10-3(2-x)$

4.7. HERMANOS

Alicia tiene dos hermanos pequeños de 1 y 2 años. Si ella tiene 15 años, ¿cuántos años deben pasar para que el doble de la suma de las edades de sus hermanos sea la misma que la edad que tendrá ella?

ANEXO 5

Respuestas del estudiante a los Problemas Algebraicos

5.1. OLIMPIADA

La semana pasada, en Silla, se ha realizado una olimpiada matemática a la que se presentaron diversos participantes. Pero, hubo un pequeño problema: ¡los correctores perdieron las notas! Ayúdales a recuperarlas a partir de la información que recuerdan.

	Expresión algebraica	Puntuación
Maite sacó x puntos.	P=X	X=125
Luis tenía 45 puntos más que Maite.	X+45=P	X+45=170
Silvia obtuvo el triple que Maite.	3X=P	3X=375
Valerià tenía 100 puntos menos que Silvia.	3X-100=P	3X-100=275
La puntuación de Silvia menos la de Maite es la que obtuvo Ana.	2X=P	3X-X=250
Andrea sacó un tercio de la puntuación de Maite.	X:3=P	X:3=41,6
El doble de la puntuación de Ana es 500.	4X=500	2X=250

5.2. PÓSTER

Mañana es el cumpleaños de Joan y queremos regalarle un póster para felicitarle. En la tienda nos dicen los tamaños de los pósteres rectangulares de un modo peculiar. ¿Puedes decirnos cuánto mide la base y la altura para poder escoger el que más nos convenga?

	Base	**Altura**	**Perímetro**
1. La altura mide 45 cm más que la base.	B=A-45=5	A=B+45=50	110
2. La base es el doble que la altura.	B=2A=20	A=B:2=10	60
3. La altura es el triple de la base más 10 cm.	B=A:3-10=5	A=(B+10)x3=45	190
4. La base es el doble de la suma de la altura más 3.	B=(A+3)x2=24	A=B:2-3=9	54

1 P=2B+2A=2B+2x(B+45)=110

2B+2B+90=110

4B=110-90=20

B 20:4=5 cm

5=B

2 P=2B+2A=2B+2(B:2)=60

2B+1B=60

3B=60

B=60:3

B=20

3 P=2B+2A=2B+(2B+20)x6=190

P=14B+120=190

14B=190-120=70

B=70:14=5

B=5

4 P=2B+2A=2B+(B2:4-6)=54

P=2B-6+2B:4=54

P=4B-12+4B:4=108

P=4B-12+B=108

P=5B-12=108

5B=120

B=120:5

B=24

5.3. COLORES

Héctor y María han estado contando en clase cuántos colores de madera tiene cada uno. Héctor tiene el doble de María más 7. Si Héctor tiene 33 colores de madera, ¿cuántos tiene María?

CH=CMx2+7

CH-7=CMx2

CH=33

33-7=26

26:2=13

13=CM

5.4. MATEMAGIA

Vamos a hacer un truco de magia y para ello tienes que seguir los siguientes pasos:

1) Piensa un número.
2) Súmale 13.
3) Réstale 5.
4) Súmale 1.
5) Súmale 1 al número que pensaste y réstaselo a lo que habías obtenido.

El resultado es: 8

Para conocer el resultado debes cambiar de color el texto de dentro del círculo.

¿Por qué crees que ocurre esto?

Escribe la fórmula algebraica que podemos extraer de los pasos que has seguido.

N+13

N+13-5

N+13-5+1

(N+13-5+1)-(N+1)

13-5=8+1=9+N=N+9

(N+9)-(N+1)=08

5.5. EDADES

Dentro de 10 años Alberto tendrá el doble de la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuántos años tiene ahora Alberto? Tiene 18 años

A=(A-4)x2=A+10 (18-4)x2=18+10

2A-8=A+10 18-4=14 14x2=18+10

2A=A+18 14x2=28 18+10=28

A=18

5.6. ECUACIONES

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5(2+2)=20$ 5x($x+2$)=20

b) $35+10=3(5+10)$ $35+x=3\times(5+x)$ 35+$x=15+3x$ 20+x=3x 20=2x 20÷2=10

c) $(11-20)\times 3=(20-47)$ 33-3x=x-47 -3x=x-47-33 -3x=x-80

-4x=-80

4x=80 80:4=20

d) $15+7+2(15+6)=5+5\times 10-3(2-5)$ $9x+19=4x+44$ 44-19= 25

5x=25 25:5=5 15+7+42=64 5+50-6+15=64

5.7. HERMANOS

Alicia tiene dos hermanos pequeños de 1 y 2 años. Si ella tiene 15 años, ¿cuántos años deben pasar para que el doble de la suma de las edades de sus hermanos sea la misma que la edad que tendrá ella? . Tendrá 18 años. Habrán pasado 3 años

$3 + 15 = [(1 + 3) + (2 + 3)] \times 2$

$a + 15 = [3 + 2a] \times 2$

$a + 15 = 6 + 4a$

$9 = 3a$

$a = 9 \div 3 = 3$

a=3