

HR4
A.31/145
E.6

ANALES
DE LA
UNIVERSIDAD DE VALENCIA

AÑO XIV * 1933-1934

CUADERNO 106

LOS CUANTOS DE ACCION

POR D. FERNANDO RAMÓN Y FERRANDO
PROFESOR DE FÍSICA DE ESTA UNIVERSIDAD

VALENCIA
IMPRENTA HIJO F. VIVES MORA
HERNÁN CORTÉS, 8

ANALES DE LA UNIVERSIDAD DE VALENCIA

PROGRAMA

Se publican estos ANALES por acuerdo del Claustro, bajo la dirección de una Junta de Catedráticos de la Universidad.

*Publicarán los ANALES: Informaciones y Estadísticas referentes a la vida corporativa de la Universidad y de sus Facultades * Estudios monográficos, doctrinales y de investigación * Crónicas de las instituciones científicas y del movimiento cultural de Valencia.*

*Los ANALES se publicarán por Cuadernos, que formarán cada Año Académico un volumen de unas 500 páginas, con sus correspondientes láminas, portada e índice * Cada Cuaderno versará sobre una sola materia o un conjunto de materias conexas * El número de páginas de los Cuadernos y la fecha de su aparición dependen de las materias que constituyan el contenido de los mismos.*

CONDICIONES DE LA SUSCRIPCION

Aunque la Universidad de Valencia repartirá profusamente sus ANALES, espera de las Corporaciones y personas amantes de la cultura, que contribuirán al sostenimiento y mejora de los mismos inscribiéndose como suscriptores. Los precios son:

España, Portugal y América Española. . . 20 pesetas al año
Extranjero. 30 " "

*Sólo se admiten suscripciones por años completos, dando principio en Octubre * Se pondrá a la venta un número limitado de Cuadernos sueltos al precio marcado en cada uno de ellos * Se admiten anuncios de Librerías y Casas Editoriales * De todas las obras científicas y literarias cuyos autores o editores remitan dos ejemplares a los ANALES, se publicará una noticia en la Sección de Libros recibidos.*

JUNTA REDACTORA DE LOS ANALES

Dr. D. Ramón Velasco y Pajares

Catedrático y Secretario de la Facultad de Filosofía y Letras

Dr. D. Antonio Ipiens Lacasa

Catedrático y Secretario de la Facultad de Ciencias

Dr. D. José A. Rodríguez Muñoz

Catedrático y Secretario de la Facultad de Derecho

Dr. D. Rafael Campos Fillol

Profesor Auxiliar y Secretario de la Facultad de Medicina

Dr. D. Carlos Viñals y Estellés

Secretario general de la Universidad

Toda la correspondencia deberá ser dirigida al Sr. Director del servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia - Apartado Oficial

Hay un número reducido de los 57 Cuadernos publicados, que se venden al precio marcado para cada uno de ellos.—Los pedidos se deberán hacer, acompañados de su importe (por giro postal o en sellos de 0'25, certificando la carta en este último caso), más 50 céntimos para el franqueo, al Sr. Administrador de los ANALES: Universidad de Valencia (España).

ANALES
DE LA
UNIVERSIDAD DE VALENCIA

AÑO XIV * 1933-1934

CUADERNO 106

Los cuantos de acción

POR D. FERNANDO RAMÓN Y FERRANDO

PROFESOR DE FÍSICA DE ESTA UNIVERSIDAD

ME he propuesto en este pequeño trabajo poner en orden unas lecciones que el curso pasado expliqué en nuestra Facultad. Mi contribución personal consiste en un esfuerzo para exponer en forma didáctica un asunto que llena una extensa bibliografía. (Por lo que toda cita me parece superflua) pero que, sin embargo, no es fácil encontrarlo en forma de iniciación para lectores que no han profundizado en el estudio de la física teórica. A éstos, y también a aquéllos que, sin conocimientos matemáticos pero con amplia cultura y espíritu inquieto, quieran asomarse al análisis de la, como dice Eddington, *primera ley natural*, va dedicado mi esfuerzo, en forma que éstos últimos podrán prescindir, en parte, de las fórmulas matemáticas en la se-

guridad de que el contenido de ideas no sufrirá por ello merma mas que en su precisión, pero no en su rigor lógico.

Con vistas a la sencillez y brevedad de este trabajo, he procurado exponer solamente todo aquello que conduce a hechos experimentales comprobados de gran bulto, considerando que las múltiples ramificaciones y aplicaciones de las teorías cuantísticas deben ser objeto de tratados especiales.

CAPÍTULO PRIMERO

EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

En la descripción y ordenamiento de los hechos y fenómenos del universo físico se ha llegado a la formación de una ciencia experimental que, excepto para los casos en que entran en juego únicamente pequeñísimas cantidades de energía, adquiere, en cuanto a su trama lógica y a la amplitud de sus conceptos, la perfección de la matemática. Conocida esta trama en forma de leyes y postulados, es interesante hacer un análisis de la forma en que se llega a la percepción de este universo físico.

La falta de exactitud que las leyes físicas imponen a nuestras percepciones

Y al emprender este análisis, lo primero que ocurre explicar es el *principio* llamado *de indeterminación o de incertidumbre* como rector de toda nuestra actividad perceptiva. Veamos el modo de llegar a él por un camino que hasta ahora no ha sido usado:

Cualquiera que sea el mecanismo de la percepción, no cabe duda de que, por lo menos parte de él, cae de lleno dentro de las leyes físicas hoy conocidas, tanto por lo que se refiere al funcionamiento de los órganos sensoriales, como al de los aparatos de medida de que el físico dispone. Si en el funcionamiento de alguno de éstos existe alguna anomalía o una restricción en cuanto a su exactitud, las percepciones que originen estarán afectadas de estas mismas anomalía o restricción, y lo mismo le ocurrirá a la ciencia que con la asociación de estas percepciones llegue a construirse.

Evidentemente todos los sentidos sufren de una falta de exactitud relativamente grande; esta falta de exactitud la suplen instrumentos cuyo progresivo perfeccionamiento podía darnos la ilusión de la posibilidad de llegar a sernos permiti-

tido un examen matemáticamente exacto de la constitución más íntima del universo físico. Sin embargo, esta aproximación a la exactitud tiene un límite cuya causa estriba en la misma esencia física, tanto de los sentidos como de los aparatos auxiliares, y que, por tanto, es infranqueable.

El cuanto de acción

Efectivamente. Elijamos la sensación visual: Un aparato de óptica, el más delicado y preciso que pueda usarse en el laboratorio, impresiona la retina por la luz que le envía; pues bien: para que esta luz actúe físicamente sobre la retina, es decir, para que produzca el movimiento de las cargas eléctricas que integran los conos y bastoncitos, es preciso que la cantidad de luz que llega esté sometida a ciertas condiciones, en forma parecida a lo que sucede en el fenómeno fotoeléctrico (§ 1). Este consiste en el arranque de un electrón de la superficie de un metal, que puede ser el cátodo de una célula fotoeléctrica, por la energía que le comunica cierta radiación incidente. Este fenómeno exige, según una ley de Einstein, además de otras circunstancias que el período de vibración, T , de la luz incidente y la energía E , que se necesita para el arranque, formen un producto

$$E T = h,$$

donde h es una constante universal que vale: $6'55 \cdot 10^{-27}$, llamada constante de Planck, y también *cuanto de acción*.

Con más o menos variantes, esta ley es aplicable a la acción de la luz sobre la retina, la cual no puede decirse que sea una acción física o química, pues es una *microacción*. Algunas teorías tratan de explicarla íntegramente como un fenómeno fotoeléctrico; pero aunque no se acepten totalmente, no cabe duda que en toda percepción luminosa se da este fenómeno: una absorción de luz, regida por la ley de Einstein y formada por uno o varios cuantos de acción (En realidad no existe ningún caso experimental de percepciones visuales en que entren en juego un solo cuanto de acción. Aún en los casos de mínima sensación, p. e., percepción de estrellas de poca magnitud, o del centelleo de

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

las partículas α , posiblemente existen varias remesas de energía E , distintas en valor, cada una de las cuales representa un cuanto de acción).

Ahora bien: es evidente que si el producto ET vale siempre la constante h , la magnitud acción no podrá adquirir nunca un valor en que h entre fraccionariamente, sino que tendrá que valer *un número entero de cuantos de acción*. Este hecho es suficiente para que esta magnitud, hasta ahora poco mencionada, adquiera importancia prima.

Pero otra circunstancia todavía, la hace destacar: En los fenómenos percibidos por observadores en distinto estado de movimiento, la medida de las magnitudes dinámicas (aceleración, velocidad, fuerza y otras) resulta distinta para cada observador. Por ej.: la energía cinética de una piedra que cae vale 0 para un observador que caiga junto con ella; tiene, en cambio, un valor positivo para un observador fijo sobre la superficie terrestre. Sólo la magnitud acción da el mismo resultado al ser medida por observadores en distinto estado de movimiento, y sólo referidas a ella concordarán los resultados obtenidos por esos observadores.

Pero si, como antes hemos visto, la percepción visual es un fenómeno al que es aplicable la ley de Einstein referente al efecto fotoeléctrico y, por tanto, en un cambio entre la retina y el mundo físico de esa magnitud llamada acción, no son posibles valores en los que h entre fraccionariamente, es evidente que la percepción más delicada no permitirá nunca apreciar fracciones de h y que la representación del mundo físico mediante la medición de la acción resulta forzosamente discontinua.

Y como, además, en los distintos sistemas, cualquiera que sea su estado de movimiento, podemos asegurar que se conserva la acción, podemos afirmar desde luego que el número de cuantos de acción percibidos procede del recinto material o radiante observado y que, por consiguiente, *este será percibido con una precisión no superior a h* .

No es solamente nuestra retina la que comercia con el mundo exterior por cantidades discontinuas de la magnitud

acción, sino que también a cualquier sentido a que nos refiramos podemos atribuirle la misma particularidad, pues las sensaciones de contacto (tacto, oído) se rigen por la teoría de Planck que fué la primera forma con que apareció la teoría de los cuantos; y las sensaciones olfativas y de gusto consisten en reacciones químicas en que hoy la mecánica ondulatoria y la de matrices no dejan lugar a duda que no existe la menor posibilidad de que se verifiquen cambios inferiores a un cuanto.

Y observemos que, en último término, el mismo soma se forma y desarrolla por un proceso de asimilación, que, regulado por leyes físico-químicas, obedece a la restricción de la indivisibilidad de los cuantos de acción (Únicamente el germen es inasequible, por ahora, a todo intento de investigación cuantística). De modo que se puede afirmar que un individuo, desde la iniciación del soma hasta un momento cualquiera de su vida, ha cambiado con el mundo exterior un número exacto de cuantos de acción, ya en forma de materia, ya en forma de sensaciones. (Para un físico una y otras en la concepción del universo, hasta ahora formada, no son más que una y la misma cosa: energía).

Así, pues, el elemento indispensable en la observación del mundo exterior, que es el observador mismo, no puede llegar nunca a alcanzar un *límite de sensibilidad*, como se dice para un aparato, inferior a un cuanto h , cualesquiera que sean los aparatos auxiliares con que aumente la perfección de sus sentidos. Es verdad que este límite no ha sido hasta ahora alcanzado por las sensaciones más delicadas (Posiblemente lo alcanzan algunas olfativas). Pero aquí no se trata ya de una imposibilidad práctica, sino de una imposibilidad física que impone a nuestros conocimientos una limitación en que hasta ahora no habían pensado ni los físicos ni los filósofos, limitación que en sus consecuencias hay que trasladar al universo mismo, pues sin llegar a afirmar que el mundo es nuestra propia representación de él, si podemos asegurar que lo que sea *para nosotros* depende de nuestros medios físicos de conocimiento.

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

Y ahora podemos entrar de lleno en la exposición del principio de incertidumbre. Hemos dicho que la magnitud h es el producto de otras magnitudes que pueden ser, *p. e.*: $h = T E$. Se deduce de lo que llevamos dicho que el producto de las precisiones con que ambos factores sean apreciados no podrá ser mayor que h ; de lo contrario apreciaríamos valores de la acción inferiores a h . O, de otro modo, el error posible, esto es, la incertidumbre en la apreciación de esos factores podrá siempre ser tal que el producto de ambos llegue a valer h ; de lo que se puede escribir, llamando ΔT y ΔE dichos errores

El principio de incertidumbre

$$\Delta T \times \Delta E \leq h.$$

Como, según hemos dichos, la magnitud acción puede considerarse también como producto de otros factores (éstos deben ser tales que forman un par llamado en Mecánica *conjugados*), podemos escribir en lugar de E y T el impulso p_x en la dirección de un eje de coordenadas x y la longitud x , por lo que la relación anterior tomará la forma

$$\Delta p_x \times \Delta x \leq h$$

y otras dos para los ejes y y z

$$\Delta p_y \times \Delta y \leq h \quad \Delta p_z \times \Delta z \leq h.$$

Estas cuatro relaciones constituyen por ahora la expresión del principio de indeterminación de Heisemberg o, como llaman otros, creo más acertadamente, *principio de incertidumbre*. Se puede ampliar a cualquier otro par de magnitudes conjugadas.

Este principio es, pues, algo general que afecta a todo posible conocimiento físico. Implica una incertidumbre en el conocimiento no sólo de la acción, sino también de las magnitudes que la integran.

Pongamos un ejemplo: en el caso de la velocidad de una partícula de un miligramo, cuyo centro se determina por un

procedimiento cualquiera, con un error menor de una diez milésima de centímetro, el principio de incertidumbre nos dice que:

$$\Delta p_x \times \Delta x = h = 6'55 \cdot 10^{-27}.$$

Como $p_x = mv_x$ y Δx vale, por lo supuesto, 10^{-4} , sale como límite posible de precisión en la medición de la velocidad

$$\Delta v_x = 6'55 \cdot 10^{-20} \text{ cms. por s.,}$$

límite, naturalmente, no alcanzado por ningún aparato, por ahora, pero que no podrá superar ningún otro que se invente, por perfecto que sea.

El problema podría ser inverso, es decir: conocida la velocidad con cierta aproximación, determinar el valor del otro factor, o sea la aproximación posible en la determinación de la posición del móvil en el instante de medir esa velocidad, o sea Δx .

Vamos a otro ejemplo más interesante. Si queremos conocer la energía de un sistema físico cometeremos un error cuyo mínimo valor, alcanzable con los aparatos más perfectos, depende de la exactitud con que se determine el instante t al cual nos referimos. Pero hemos dicho que $\Delta E \cdot \Delta T \leq h$ por tanto, si consideramos que el instante está determinado con la exactitud matemática clásica, o sea que el error Δt es igual a cero, el error posible en la determinación de la energía puede valer $\Delta E = \infty$, o sea que es imposible determinar la energía de un sistema, *p. e.*, la del universo, en un instante dado, pues el error que se puede cometer vale infinito. Por tanto: *la evaluación de la energía en un instante dado no tiene sentido*. Inversamente: si consideramos la energía evaluada exactamente, $\Delta E = 0$, ΔT valdrá infinito, o sea que *sólo puede evaluarse exactamente la energía de un sistema a través de la eternidad*.

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

Aclarado el principio de incertidumbre o de indeterminación, podemos hacer un análisis de las formas en que ha aparecido la teoría de los cuantos de acción.

Ya en la obra fundamental de Planck, *Wärmestrahlung*, 1906, aparece por primera vez algo que podía parecer muy atrevido, pero que en el fondo es la piedra fundamental de la nueva teoría. Planck introduce en sus estudios la celdilla indivisible h del universo. Esta celdilla no es un elemento más o menos pequeño del espacio ordinario ni del tiempo sino un producto de magnitudes tales que dan una acción de valor h . Las magnitudes pueden ser, *p. e.*, Δp_x e Δx , o sea un impulso y una longitud; ellas pueden presentarse a la observación en cualquier valor, pero su producto viene obligado a valer h . De este modo desarrolló Planck su teoría cuantística del calor radiante que fué la primera forma con que apareció la teoría de los cuantos.

La celdilla de Planck

Más clara nos aparece dicha teoría si la aplicamos al átomo de Bohr (§ 4). Suponíase primeramente que el electrón circulante alrededor del núcleo atómico emitía constantemente energía, en virtud de la teoría electromagnética. Por medio del razonamiento cuantístico de Bohr con las hipótesis supletorias que él introduce, se llega a demostrar que para que un átomo emita un cuanto de radiación es preciso que un electrón cortical pase de una trayectoria alrededor del núcleo atómico a otra trayectoria más cercana. Dos cuestiones quedan indeterminadas en la teoría de Bohr. Una, el momento en que se verifica la emisión de la energía durante el paso de una trayectoria a otra; otra, qué camino sigue el electrón para verificar este paso. Las dos acusaban la teoría de Bohr de imprecisa y vaga en su fondo. Si nos fijamos en el valor universal del cuanto h , ninguna de ellas tiene sentido.

El principio de incertidumbre complementa la teoría de Bohr

En cuanto a la primera, no podemos pretender nunca conocer con absoluta exactitud el instante en que se verifica un fenómeno. El grado de aproximación dependerá del grado de aproximación de su magnitud conjugada, que sabemos que es la energía E que posee el átomo en el interva-

lo de tiempo que dura el paso de una trayectoria a otra. Pero el cálculo de Bohr permite conocer cuál es el valor de la energía atómica en cualquiera de las trayectorias (claro, porque no fija, en absoluto, el instante en que esta energía se evalúa), desconociendo su valor durante el intervalo de tiempo de paso. Existe, pues, durante este tiempo, una inexactitud en cuanto al conocimiento del valor de la energía del átomo que vale evidentemente la diferencia de energías correspondientes a las dos trayectorias, o sea la energía emitida ΔE . Tampoco sabemos el instante en que esta energía es emitida. La incertidumbre respecto a este instante es igual al tiempo que tarda en pasar de una trayectoria a otra, Δt , puesto que no sabemos cuál es el instante de este intervalo en que la energía es emitida. El producto de las dos incertidumbres debe valer h : $\Delta t \cdot \Delta E = h$. Y como la radiación emitida cumple la relación (§ 1) $h = E T$, siendo E la energía que traslada el cuanto de radiación, que es la misma que la emitida por el átomo, ΔE , y representando T el período de vibración de esta radiación, resulta, comparando ambas relaciones, que $\Delta t = T$, o sea, *el tiempo que tarda en pasar el electrón de una trayectoria a otra es igual al período de vibración de la radiación emitida*, consecuencia que desconoce la teoría de Bohr y que nosotros nos permitimos hacer notar.

En cuanto a la segunda cuestión, que se refiere al desconocimiento de la posición del electrón cae de lleno también en el principio de incertidumbre, pues la incertidumbre de una coordenada, Δx , dependerá de la incertidumbre de su conjugada Δp_x , de forma que

$$\Delta p_x \Delta x = h.$$

Ahora bien: como en el paso de una trayectoria a otra no se conoce el verdadero impulso del electrón, porque no conocemos su velocidad, tampoco se conoce su posición con la incertidumbre que resulta de la última relación.

El principio de incertidumbre, a la vez que por un lado

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

resuelve en las dos cuestiones indicadas de la teoría de Bohr, descarta por otro algo que la teoría de Bohr daba como seguro. Esta afirmaba que el electrón cortical, mientras no emitía radiación, seguía en una trayectoria perfectamente definida como línea puramente matemática. Tal afirmación es completamente opuesta a la incertidumbre que impone respecto a la posición el principio de Heisenberg. No hay seguridad en cuanto a la posición del electrón en el espacio, únicamente existe la seguridad de que esté dentro de un cierto volumen, con distinta probabilidad para cada uno de sus puntos.

La teoría de Bohr, aparte las lagunas en su planteamiento que el principio de incertidumbre rectifica, no explica algunos hechos experimentales. Precisaban rectificaciones de esta teoría, o bien elaborar otra nueva que estuviese más de acuerdo con la experimentación. El precursor de ésta fué Luis de Broglie. Con una tendencia natural a simplificar la concepción del Universo y estableciendo un paralelismo a lo que ocurre a la radiación, planteó la siguiente hipótesis: Si la radiación, según indica el efecto fotoeléctrico, forma gránulos de energía o *fotones* cuyo valor E es νh , los gránulos de materia contienen un fenómeno vibratorio de frecuencia ν , de suerte que la energía total de este gránulo de materia vale también νh . Como al valor de la energía de un gránulo de materia le atribuye el mismo dado por la Relatividad, mc^2 (c , velocidad de la luz), resulta:

*Las ondas de fase
de Broglie*

$$mc^2 = \nu h.$$

Ahora bien: cuando un movimiento vibratorio se propaga en el espacio, se forma una onda; análogamente el movimiento de dicho gránulo de materia o masa puntual engendra una onda cuya esencia desconocemos. A esta onda la llamamos *onda de fase*.

Como Broglie no aclara qué es lo que vibra en el seno de la partícula material, esta onda es algo desconocida para nosotros que escapa a nuestra representación; de ella cono-

ce mos únicamente su frecuencia. Pero Broglie llega a la conclusión de que estas ondas poseen una velocidad de propagación v que está relacionada con la del punto en movimiento, u , por la igualdad

$$v u = c^2$$

donde c representa la velocidad de la luz. Como la velocidad de un punto material es siempre menor que la de la luz, esta relación exige que la velocidad v de las ondas de fase sea superior a la de la luz, resultado que puede parecer contradictorio con la afirmación relativista de que la velocidad de la luz es el límite superior posible de velocidades. Ahora bien: este límite se refiere a la velocidad con que se mueve un cuerpo o se propaga una energía y la onda de fase no es ni materia ni energía.

Conocida por Broglie la frecuencia y la velocidad de la onda de fase, la fórmula $v = \lambda \nu$ nos da la longitud de onda λ de esta onda que no es materia ni radiación, puesto que no transporta energía. Pareció en el primer momento que el físico debía renunciar a cualquier experimento demostrativo de la misma, cuando un experimento casual puso en evidencia que las ondas de fase de Broglie interfieren y se difractan como una radiación cualquiera. Para que ocurra se necesitan redes de difracción del tamaño de las redes cristalinas y masas en movimiento pequeñas como las del electrón.

La hipótesis de Broglie se complementa por Schrödinger por medio del estudio analítico que hace de la onda de fase, buscando cuáles deben ser las condiciones de ésta para que nos represente el movimiento. De ello resulta su célebre ecuación (§ 16), cuyas soluciones únicamente existen cuando la energía del sistema en movimiento de que se trata obedece a ciertos requisitos. En el caso más general, únicamente una serie de valores discontinuos de la energía, que corresponden precisamente a las distintas trayectorias del electrón en el átomo de Bohr, hacen posibles las soluciones de dicha ecuación; es decir: hacen posible el movimiento.

*La ecuación de
Schrödinger*

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

Por la ecuación de Schrödinger, el estudio del movimiento de un punto queda convertido en el estudio analítico de una onda y con ello toda la Mecánica se convierte en ondulatoria. Las consecuencias de la misma alcanzan más amplitud que las contenidas en las primeras ideas de Bohr y Sommerfeld, a la vez que las corrigen en algunos puntos. Sin embargo, no permiten explicar un hecho experimental tan de bulto como es el efecto Spin (§ 8).

La mecánica ondulatoria introduce una hipótesis entroncada con los signos matemáticos que maneja (§ 20) y comprobada posteriormente por hechos experimentales, según la cual una carga eléctrica, un electrón, no ocupa un volumen reducido en el espacio, sino que se extiende por todo él en distinta concentración y forma, regulada ésta por la acción que posee, igual que una nube de humo que, sin variar la cantidad total de polvillo de carbón que contiene, adopta distintas formas y concentración. *Entiéndase bien que los puntos interiores de este volumen son indiscernibles para el físico*, lo cual no constituye más que una forma del principio de incertidumbre; significa que el físico nunca tendrá medios para conocer la posición que la partícula tiene dentro de este volumen; sólo existirá una probabilidad de que ocupe tal o cual posición.

Como la ecuación de Schrödinger conduce a la incertidumbre en la determinación del espacio

Comprueba esta idea la emisión de las partículas α por los cuerpos radioactivos (§ 20). Para salir dichas partículas del núcleo del cuerpo radioactivo, tienen que sobrepasar una cumbre de potencial superior a la energía cinética que ellos poseen, lo que es imposible de explicar en Mecánica ordinaria. Sólo se compagina con ésta, entendiendo que la partícula al salir ocupa a la vez las dos laderas de la cumbre del potencial; es decir, sólo una parte de este espacio incierto o indeterminado reside dentro del núcleo atómico; el resto del espacio ocupado por la partícula se confunde con el espacio ocupado por la corteza, verificándose una verdadera *penetrabilidad* de dicha corteza con la partícula saliente.

Otro hecho comprobatorio inverso a éste, consiste en la desintegración de un átomo por la proyección sobre su

núcleo de una partícula eléctrica positiva, aunque la fuerza viva de la misma sea inferior a la necesaria para vencer la repulsión electrostática del núcleo del átomo. La idea de carga difusa permite también explicar este fenómeno como otro caso de penetrabilidad. Efectivamente: el voltaje usado para mover las partículas desintegradas, es inferior al que el cálculo da como necesario para penetrar *de lleno* dentro del núcleo; pero si suponemos que sólo una pequeña parte del volumen ocupado por la partícula consigue entrar dentro del núcleo, lo que implica una pequeña probabilidad de que la desintegración se verifique, tendremos una explicación de tal anomalía.

La ecuación de
Dirac

No obstante estos éxitos, la mecánica ondulatoria no consigue explicar un hecho experimental tan de bulto como es el efecto spin, el cual antes hemos mencionado. A partir de ella y de la Mecánica cuantística de Heisenberg, consiguió Dirac establecer una ecuación que contiene el efecto spin (§ 26) a la cual han seguido una serie de teorías no cristalizadas, en las que el esfuerzo para usar la matemática como instrumento representativo llega a límites insospechados.

La ecuación de Dirac ha tenido un éxito al ser descubiertas experimentalmente las partículas de *masa negativa* (§ 27), consecuencia teórica, a su vez, de dicha ecuación. Sin embargo, la crítica actual ha introducido en ella su piqueta, pudiéndose asegurar que su predominio será fugaz porque nos encontramos en un momento de renovación profunda de los conceptos clásicos sobre los cuales la Matemática opera.

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

Si, como acabamos de decir, el espacio es indeterminado en recintos pequeños, ¿qué queda de la geometría, especialmente de la cartesiana al aplicarla con criterio de continuidad, o como descripción cuyo fondo está en el concepto de punto? A éste, la recta y demás concepciones geométricas, queda asignado con más motivo el valor de conceptos puros sin realidad posible.

El punto, la superficie y la línea en Física

Para un físico no puede existir un punto como intersección de dos líneas, ni una línea como intersección de dos superficies, ni una superficie como límite de un volumen; de modo tal que estos puntos, líneas y superficies se refieran a algo determinado físicamente. Lo único que existe para el físico, en su cualidad de elemento constitutivo del universo sensible, es la celdilla de Planck, cuya magnitud no es ni una superficie ni un volumen, sino una acción, y cuyo valor es h : hablar del interior de estas celdillas no tiene sentido físico, como tampoco lo tiene hablar de una fracción de las magnitudes espacio, tiempo, impulso, energía, etc., que pueden formar estas magnitudes. ¿Qué queda entonces del espacio y el tiempo continuo como intuiciones puras? Parece que la idea de Kant queda intacta en cuanto se refiere a una percepción *a priori*. Pero sin entrar en un terreno filosófico que nos está vedado, apuntaremos solamente la cuestión de si hubieran sido posibles las concepciones de Kant sin estar precedidas del concepto de infinitud post-helénico y el concepto de continuidad de la geometría cartesiana. También sería interesante conocer el concepto que la doctora americana Hellen Keller, ciega y sordo-muda, tiene del espacio.

Se ha dado hasta ahora en Física gran importancia a dos magnitudes consideradas como *simples o fundamentales*: longitud y tiempo. Ciertamente no existe valor preentendido para las expresiones simple y fundamental. Si ello significa solamente que se han elegido estas dos magnitudes arbitrariamente como fundamentales, del mismo modo que en Dinámica se elige la masa, no hay nada que objetar; pero si se les atribuye una cualidad que les dé por su esencia prio-

Significación de las magnitudes fundamentales

ridad frente a las otras en cuanto a la percepción, debe desecharse tal primacía.

Se dice también que la longitud es una magnitud simple porque puede medirse con una regla *de una vez*; pero esta medición es una operación desde el punto de vista biológico muy complicada; es decir: el hombre como aparato registrador, efectúa varias operaciones para conocer la longitud de una regla. Lo mismo puede decirse de otra magnitud cualquiera: todas ellas suponen un mecanismo complicado de percepción; únicamente la magnitud acción actúa directamente por unidades *b* sobre los centros perceptores.

Lo mismo podríamos suponer formada una concepción del Universo arrancando de otras magnitudes. Por ejemplo: Podemos apurar la situación de la Srta. Hellen Keller, de tal modo que, anuladas sus sensaciones gustativas y olfativas viviera sentada en un coche del cual recibiría únicamente las fuerzas aceleratrices de su movimiento. En tal situación notaría solamente las aceleraciones del coche, y, mediante su tiempo interior, combinado con la sensación de fuerza del coche, tendría que construir todo su concepto del Universo. ¿Podría entonces adquirir el concepto del espacio tal como lo tenemos nosotros? Evidentemente, no; sin embargo, si su vida fuera bastante larga, podría llegar a una descripción ordenada, es decir, a una ciencia de nuestro universo físico, o, mejor, del suyo, por la limitación impuesta a sus medios; pero dentro de esta limitación sus resultados serían coincidentes con los nuestros; ¿y de qué magnitudes se valdría? De las más adecuadas, de las que proporcionarían aquella representación de la manera más sencilla. Cualquier sistema de magnitudes puede ser, pues, útil para describir; pero todas ellas exigen para su percepción mecanismo complicado y una operación intelectual para ponerlas en relación con unidades elegidas arbitrariamente. Solamente la acción tiene la ventaja entre todas de que, 1.º, es recibida por los sentidos por unidades discretas indivisibles que pueden ser contadas con exactitud, mientras que las demás magnitudes tienen un límite de certidumbre. Y, 2.º, que su valor es el

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

mismo cualquiera que sea el estado de movimiento del cuerpo en que se observe.

Por ej.: en la desintegración de la materia, en la forma antes citada, el voltaje necesario para lograrla no corresponde a un valor determinado *a priori*, sino que a cada voltaje le corresponde una cierta probabilidad de que la desintegración se verifique; en cambio, el número de cuantos de acción puestos en juego obedece a reglas conocidas o no, pero en las cuales no interviene el azar.

CAPÍTULO II

PRIMERAS FORMAS CUANTÍSTICAS

§ I. *Efecto fotoeléctrico; relación cuántica de Einstein. Fotón.*

—El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de electrones por un metal al incidir sobre él una radiación. La salida de un electrón supone la adquisición por parte del mismo de la energía necesaria para lograrlo, compuesta de dos partes: una es la fuerza viva, $\frac{mv^2}{2}$, que le corresponde por la velocidad que posee una vez fuera del metal, y otra el trabajo τ , necesario para sustraerlo a la atracción electrostática del mismo. Esta energía puede proceder únicamente de la radiación incidente. Para que se verifique este cambio de energía entre la radiación y el electrón, la Mecánica clásica exige solamente que se cumpla el principio de conservación de la energía; pero el resultado de los experimentos destaca además dos hechos que caracterizan el fenómeno, que son los siguientes:

Primeras limitaciones a la mecánica clásica

1.º La energía radiante total absorbida por el electrón para salir del metal, incide en una superficie de éste enormemente superior a la superficie del electrón, según la idea que hasta ahora se ha tenido de la superficie del mismo. Como sobre la forma de captar la energía la Mecánica clásica no tenía nada previsto, este hecho ni la confirma ni la contradice.

2.º La energía total ϵ , absorbida por el electrón, vale νh , siendo ν la frecuencia de la radiación monocromática absorbida y h el factor mínimo de *acción*, descubierto por Plank, que vale:

$$h = 6'55 \cdot 10^{-27},$$

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

lo que puede expresarse, teniendo en cuenta las dos formas en que se distribuye la energía, por la siguiente igualdad, debida a Einstein.

$$\epsilon = \frac{mv^2}{2} + \tau = \nu h \quad (1)$$

Recordando que la frecuencia de la radiación, ν , es igual a $1 : T$ (T , período de vibración) resulta para h también el valor ϵT : las dimensiones de la magnitud h son, pues, de una energía multiplicada por el tiempo. Tal magnitud, poco usada hasta ahora, es, precisamente, la magnitud fundamental de la Mecánica actual.

Este segundo hecho es trascendental porque indica que la frecuencia ν debe ser lo suficientemente grande para que el producto νh supere ligeramente al trabajo τ ; de lo contrario no queda energía para comunicar velocidad de salida al electrón. Como el trabajo τ es distinto para cada metal, la frecuencia mínima necesaria es distinta también para cada uno. No importa la densidad de energía radiante que incide sobre el metal; para que la descarga se verifique es preciso que la frecuencia sea igual o superior al límite impuesto por la igualdad (1).

La absorción de la energía, ϵ , de una radiación monocromática en el efecto fotoeléctrico se verifica, por lo dicho, por cantidades iguales a νh , es decir, por cantidades discretas, una para cada electrón arrancado. Esto no dice que el efecto fotoeléctrico no permita absorber cantidades de energía tan pequeñas como se quiera; para ello es suficiente imaginar un metal, teóricamente en condiciones tales, que el trabajo necesario para separar un electrón sea muy pequeño o nulo. Entonces, una radiación de frecuencia tan pequeña como se quiera (ultrahertziana) llevará energía suficiente para comunicar velocidad de salida al electrón. El efecto fotoeléctrico no fija, pues, un mínimo de energía universal, pero *fija*, en cambio, *cualquiera que sea el estado del metal y la calidad de la radiación incidente, un mínimo de acción, h* ; de modo que tomando el valor h como unidad de acción, *por*

cada electrón arrancado se absorbe una unidad de acción; y esta es la verdadera restricción que queda reducido este proceso frente a la Mecánica clásica que, si alguna vez manejó la acción, fué como magnitud sometida en todos los procesos a la continuidad matemática a que están sometidas las demás magnitudes.

El fotón Pero si la energía no está sometida a un mínimo, parece que la cantidad necesaria de radiación para arrancar un electrón debe estar concentrada en un volumen relativamente pequeño, para ser absorbida de una vez por el electrón, como una verdadera acumulación o gránulo de energía cuyo valor es nh . Este gránulo se llama *fotón*.

Nuevas limitaciones para los movimientos periódicos § 2. *Condiciones de Sommerfeld para todo movimiento periódico.*—El efecto fotoeléctrico es una manifestación del fondo cuántico de la Naturaleza fácilmente demostrable. Pero existen una porción de fenómenos intra-atómicos, denunciados por el análisis espectral que caen de lleno dentro de la teoría de los cuantos. El primer paso para explicarlos lo dió Bohr; pero una forma que permite enunciar con brevedad y amplitud gran contenido de dicha teoría es la condición de Sommerfeld, aplicable a todo movimiento periódico, que dice que tal movimiento, además de las leyes ordinarias, debe cumplir la condición siguiente: *Si se multiplica en cada momento el valor de una variable por la diferencial de su conjugada canónica (*) y se integra a lo largo de un periodo el resultado es un número entero n de cuantos h.*

$$\int p dq = nh \quad (2)$$

para una periodicidad sencilla; p. e.: un movimiento harmónico, el movimiento de un planeta (aparte la corrección de

(*) Dos variables se llaman conjugadas canónicas cuando su producto tiene las dimensiones de una acción; por ejemplo: la energía por el tiempo, el impulso por una longitud $m \frac{dx}{dt} \times dx$. Para la aplicación de la condición de Sommerfeld se elige el par que dé más facilidades para el cálculo.

relatividad). Cuando existe doble periodicidad es preciso aplicar esta relación a los dos periodos; ejemplo: en las curvas de Lisajous; el movimiento de un planeta teniendo en cuenta la rotación de su perihelio, para el que existen dos periodos, uno correspondiente a la periodicidad de una coordenada longitudinal y otro correspondiente al periodo de rotación del eje de la elipse.

La condición de Sommerfeld indica que un punto material u objeto rígido en movimiento periódico debe poseer un número entero de cuantos de acción; de variar la acción de este punto debe ser por cantidades discretas de unidad h . Naturalmente que en los fenómenos macroscópicos no se hace perceptible esta variación dada la pequeñez de h : un volante de una máquina en movimiento posee en un momento dado, *no en un instante*, trillones de cuantos h ; la variación de una unidad es imperceptible.

§ 3. *Aplicación al oscilador.*—Como caso sencillo, apliquemos la condición de Sommerfeld a una masa m , un electrón o un protón, sometido a un movimiento harmónico.

$$x = a \text{ sen. } \omega t \quad (3)$$

El par de coordenadas canónicas, en este caso, será: el impulso mx' (m , masa; x' , velocidad) y la coordenada x ; por tanto, la condición dicha se reduce a

$$\int mx' dx = nh.$$

Calculando x' o sea dx/dt y dx a partir de la igualdad 3, sustituyendo e integrando entre los instantes 0 y T, siendo T el periodo del oscilador, se obtiene:

$$nh = \int_0^T ma^2 \omega^2 \cos.^2 \omega t = ma^2 \omega^2 T/2 = 2 ma^2 \pi^2 \nu,$$

donde $\nu = 1/T$ es la frecuencia de vibración del oscilador y

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Téngase en cuenta, por otro lado, que:

$$\text{Energía cinética} = \frac{mv'^2}{2} = 2 ma^2 \pi^2 v^2$$

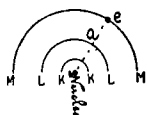
y comparando con la igualdad anterior resulta:

$$\text{Energía cinética} = nhv.$$

La energía cinética de un oscilador es un múltiplo del valor hv .

Este mismo resultado fué hallado primero por Plank por un procedimiento mucho más complicado. La condición de Sommerfeld permite en cambio la deducción sencilla que hemos hecho. Ha sido confirmado en cuanto explica las consecuencias experimentales referentes a los calores específicos a baja temperatura y ha sido además el punto de apoyo para demostrar las leyes de distribución de la energía radiante por Plank y Wien.

§ 4. *Aplicación al átomo de Bohr.*—Otro caso sencillo de aplicación y fecundo en confirmaciones experimentales es el ideado por Bohr para el átomo de hidrógeno, anteriormente al enunciado de la condición de Sommerfeld.



Conocida la constitución de este átomo que, como se sabe, consta de un protón N en el núcleo y un electrón e en la corteza, la condición de estabilidad dinámica consiste que en cada momento la fuerza centrífuga que posee el electrón, en su movimiento circular alrededor del núcleo, viene equilibrada por la atracción coulombiana del mismo, o sea:

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{ee}{a^2} \quad mv^2 a = e^2 \quad (4)$$

donde a es el radio de la trayectoria y e representa lo mismo la carga del protón que la del electrón. Sustitúyase en vez de v su valor en función del período de rotación T y sale la tercera ley de Keplero que hace posible trayectorias con un valor cualquiera del radio.

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

Hasta aquí la Mecánica clásica; pero téngase en cuenta que en la rotación del electrón existe una aceleración centrípeta constante por parte de éste, lo que según la teoría electromagnética exige una constante emisión de energía radiante a expensas de la energía potencial del mismo que acabaría produciendo la caída del electrón sobre el núcleo. La teoría de Bohr admite que *durante la permanencia de un electrón sobre un piso no se realiza emisión de energía radiante.*

Restricciones a la teoría electromagnética

Añádase, además, a la condición mecánica (4) la condición de Sommerfeld, para lo cual elegiremos como coordenadas conjugadas canónicas el momento del impulso con respecto al centro, mva , y el ángulo α que forma el radio vector con una dirección inicial; dicha condición tomará, pues, la forma:

$$\int_0^{2\pi} mva \, d\alpha = 2\pi mva = nh.$$

Eliminando v entre esta igualdad y la anterior, resulta para el radio de la trayectoria el valor:

$$a = \frac{n^2 h^2}{4 \pi^2 e^2 m},$$

cuyo mínimo corresponde a $n = 1$, y que supone posibles solamente una serie de trayectorias discontinuas cuyo radio crece con el cuadrado de la serie de los números naturales, trayectorias que forman los distintos pisos K, L, M....., sobre los cuales puede moverse el electrón del átomo de hidrógeno.

Calculemos la energía cinética que le corresponde en cada una de estas trayectorias.

$$E_{\text{cinética}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{2 \pi^2 m e^4}{n^3 h^2} \quad (7)$$

después de eliminar v y a por medio de las fórmulas 4 y 6. La energía cinética del electrón que gira en el átomo de hidrógeno puede tener una serie discreta de valores, representados por

la fór. 7, donde n puede ser cualquiera de la serie de los números naturales correspondientes a los pisos K, L,.....

Las dos condiciones, la mecánica y la cuantística, enunciadas fijan un número discreto de trayectorias y de valores para la energía cinética del electrón; pero no dicen nada sobre la posibilidad del paso de una trayectoria a otra, ni del destino que tiene la diferencia entre la energía potencial perdida y la energía cinética en este posible salto. La teoría electromagnética permite asegurar, en cambio, que la energía potencial perdida es igual, por partes iguales, a la energía cinética ganada, más la energía radiante emitida en el salto de una trayectoria a otra. De las posibilidades de este salto, de cómo se verifica, y del tiempo que dura, no indica nada ni dicha teoría ni la de Bohr.

Frecuencia de una radiación

Por lo dicho, la energía cinética ganada al pasar de una trayectoria a otra es igual a la energía radiante emitida en este mismo paso. El valor de la primera será, entre dos trayectorias, la inicial de orden p y la final de orden n :

$$\frac{2 \pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right).$$

Para hallar el valor de la segunda admitiremos que en el momento de la emisión de la energía radiante se cumple la misma relación de Einstein que para el efecto fotoeléctrico en el momento de absorción, o sea que esta energía vale νh , donde ν es la frecuencia de la radiación emitida. Igualando este valor con el anterior, sale para la frecuencia de dicha radiación:

$$\nu = \frac{2 \pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right); \text{ o bien: } \nu = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right), \quad (8)$$

si se designa por R el factor fuera del paréntesis.

La fórmula obtenida es la misma que obtuvo Ridberg a partir de las rayas espectrales del hidrógeno. En ella, si se da a n el valor 2, es decir, se toma como piso final de caída

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

el piso L , y a p la serie sucesiva de números enteros a partir de 3, es decir, se toma como piso de partida cualquiera de los pisos sucesivos M, N, \dots , se obtiene una serie discreta de frecuencias, correspondientes a la serie de rayas de Balmer, situada dentro del espectro visible. Del mismo modo se obtienen las otras dos series contenidas en el siguiente cuadro y comprobadas experimentalmente.

- $n = 1; p = 2, 3, 4, \dots$ serie de Lympmann, en el ultravioleta
- $n = 2; p = 3, 4, 5, \dots$ serie de Balmer, en el espectro visible
- $n = 3; p = 4, 5, 6, \dots$ serie de Páschen, en el ultrarrojo
- $n = 4; p = 5, 6, 7, \dots$ serie de Brackett, en el ultrarrojo.

§ 5. *Aplicación a otros átomos.*—Aunque el problema mecánico, no el matemático, está ya agotado en su fondo al estudiar el átomo de hidrógeno, es necesario indicar cómo se aplica al resto de los átomos. Si se trata de un átomo de helio ionizado, que tiene, por tanto, un solo electrón en su corteza, como el hidrógeno, el problema no tiene más variación frente al anterior que la doble carga del núcleo. En la fuerza centrífuga aparecerá un 2 que arrastrado en el cálculo se convertirá un $2^2 = N^2$, llamando N al número atómico. Por tanto las frecuencias del espectro del helio ionizado vienen dadas por la fórmula

Espectro del helio

$$\nu = R 2^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad (9)$$

Lo mismo puede decirse para el litio doblemente ionizado, que posee un solo electrón en su corteza y cuyo número atómico vale 3. Pero para los otros cuerpos, de números atómicos 4 y 5..., lo suficientemente ionizados hasta quedarse con un solo electrón, si bien la teoría es aplicable, la experimentación es imposible por ahora.

El caso general del movimiento de un electrón sometido a la atracción electrostática del núcleo a la vez que a la atracción de los restantes electrones corticales, es de difícil-

tades insuperables. (Recuérdese solamente las dificultades que en Mecánica ordinaria presenta el problema de los tres cuerpos.) Pero hay un caso que se ha prestado a simplificaciones: es el caso de los rayos X. Estos se producen siempre que, por el choque con una partícula o por la acción de una radiación, se arranca un electrón de piso K de un átomo y el lugar vacante que deja pasar a ocuparlo un electrón de un piso superior. En el momento que este último da el salto del piso a que pertenece al piso K, se produce la emisión del cuanto de rayos X. En este caso la acción de los electrones corticales sobre el electrón que da el salto es repulsiva y contrarresta en parte la del núcleo; puede demostrarse que el resultado de sumar esta repulsión con la atracción del núcleo equivale a la atracción de un número atómico inferior en una unidad actuando sobre un electrón aislado.

Cuándo se emiten rayos X

Un razonamiento análogo al seguido para deducir la fórmula 9 nos dará para la frecuencia de los rayos X el siguiente valor:

$$\nu = R(N - 1)^2 \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{p^2} \right).$$

El denominador i significa que el piso de llegada del electrón debe ser siempre el piso K.

Si consideramos el problema del movimiento en el átomo de hidrógeno con todo el rigor, debemos observar que el movimiento del electrón no se verifica alrededor del núcleo sino que él y el protón giran alrededor del centro de gravedad del sistema formado por ellos, aunque éste está muy próximo del centro del núcleo a causa de la gran masa del mismo. Teniendo en cuenta esta consecuencia, el cálculo, que aunque fácil queremos evitar, demuestra una pequeña desviación para la frecuencia de las rayas espectrales emitidas comprobada por la experimentación.

El movimiento circular como resultado de la atracción de forma newtoniana es un caso particular; generalmente el movimiento resulta elíptico con el núcleo en el foco. La

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

trayectoria no es, pues, perpendicular al radio vector y la condición no es aplicable. Para aplicar la regla de Sommerfeld es preciso descomponer el elemento AB de trayectoria en otros dos AC y AD, radial el primero y normal al radio el segundo. Para el segundo la regla de Sommerfeld será análoga a la 5:



$$\int_0^{2\pi} mva \, d\alpha = n_1 h.$$

*Movimiento
elíptico*

Para el primero conviene elegir como coordenadas conjugadas canónicas el radio r y el impulso en la dirección del radio, p_r ,

$$\int_0^{2\pi} p_r \, dr = n_2 h.$$

Hecho el cálculo sale como valor de la energía cinética:

$$E = \frac{2 \pi^2 m e^4}{h^2 (n_1 + n_2)^2},$$

es decir, la misma fórmula 7 que resulta para la trayectoria circular, sustituyendo el número cuántico n por la suma de los números $n_1 + n_2$. La frecuencia emitida al pasar de una trayectoria elíptica dada por los números cuánticos p_1 y p_2 a otra dada por los números n_1 y n_2 , será por la misma razón

$$\nu = R \left(\frac{1}{n_1 + n_2} - \frac{1}{p_1 + p_2} \right) \quad (10)$$

fórmula análoga a la 8 si se sustituye $n_1 + n_2$ por n y $p_1 + p_2$ por p , o sea, que los dos números cuánticos supuestos se funden en uno solo, llamado cuanto *total* o *principal*.

Como por la condición de Sommerfeld los números n_1 y n_2 , p_1 y p_2 son enteros, la fórmula 10 dará las mismas frecuencias que la 8: el movimiento elíptico del electrón alrededor del núcleo es indiscernible del circular, resultado

conforme a la hipótesis de Sommerfeld puesto que la misma periodicidad simple tiene un movimiento elíptico que uno circular: ambos están regidos por un solo número cuántico.

No obstante, en ciertas condiciones de disimetría, como veremos, aparecen las consecuencias espectrales de la forma elíptica. Busquemos, pues, las distintas elipses que pueden corresponder a un mismo número cuántico total n . Para ello tengamos en cuenta que a los números azimutal y radial que lo forman sólo se les exige que su suma valga n , pero a la vez se supone que n_1 no puede valer cero porque esto equivale a suponer la carencia absoluta de movimiento angular o sea que el movimiento es rectilíneo, con lo que el electrón en su trayectoria se vería precisado a atravesar el núcleo, lo que se considera como absurdo, aunque con la penetrabilidad que admite el principio de incertidumbre no lo sea. Lo dicho puede resumirse, pues, en las dos condiciones

$$n_1 + n_2 = n \quad ; \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots, n$$

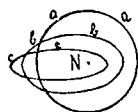
lo que exige

$$n_2 = (n - 1), (n - 2), \dots, 1, 0.$$

Tomemos como ejemplo $n = 3$. Da las siguientes posibilidades:

$$a \begin{cases} n_1 = 3 \\ n_2 = 0 \end{cases} \quad b \begin{cases} n_1 = 2 \\ n_2 = 1 \end{cases} \quad c \begin{cases} n_1 = 1 \\ n_2 = 2 \end{cases}$$

correspondientes a las trayectorias a, b, c , de la figura, las tres con el mismo eje mayor (la primera un círculo) pero con distinta excentricidad, determinada por el cuanto total $n = 3$.



§ 6. Estructura fina; dos números cuánticos.—

Por lo dicho, las distintas frecuencias que pueden producir las trayectorias elípticas solamente corresponden al salto del electrón entre dos elipses de distinto cuanto total n , o sea de distinta longitud en el eje mayor, independientemente de

su excentricidad. Pero si tenemos en cuenta la teoría de la Relatividad (*) el movimiento del electrón alrededor del núcleo posee doble periodicidad: una correspondiente al giro sobre la elipse y otra correspondiente al tiempo en que el eje de la elipse da una rotación completa, sin que ambos periodos sean comensurables. Al existir dos periodicidades se necesitarán dos condiciones de Sommerfeld o sea las dos condiciones del párrafo 2, pero tales que los números n_1 y n_2 ya no entrarán simétricamente en las fórmulas de la energía y, en consecuencia, de la frecuencia emitida al saltar el electrón de una trayectoria a otra. Dicha frecuencia quedará caracterizada por dos números y no por la suma de los mismos números correspondientes a la longitud del eje de la elipse y a su excentricidad. Habrá, pues, doble serie de rayas: una serie correspondiente a la longitud del eje mayor de las elipses que la originan y un desdoblamiento de cada término de la serie según el número de combinaciones posible entre las distintas elipses que se originan por sus distintas excentricidades. La diferencia de frecuencia entre estos términos desdoblados es muy pequeña, no fácilmente perceptible en el espectroscopio, y origina la llamada *estructura fina*.

§ 7. *Tres números cuánticos. Reglas de selección.*—Fácil será ahora estudiar el caso de una triple periodicidad. Esta existe, por ejemplo, cuando el electrón se mueve sometido a un campo exterior superpuesto al campo del núcleo. En tal caso la trayectoria puede ser alabeada (campo eléctrico) y su proyección sobre los tres ejes coordenados puede estar representada por tres movimientos periódicos con periodos no comensurables. Entonces es preciso aplicar tres veces la condición de Sommerfeld a los movimientos componentes, en cualquiera que fuesen elegidos: el movimiento estará regido por la Mecánica ordinaria a la vez que por tres números cuánticos que suponen tres condiciones restrictivas. El primitivo movimiento circular del átomo de Bohr queda disocia-

(*) La relatividad exige que el perihelio de la elipse se traslade en rotación alrededor del centro.

do en una multiplicidad de trayectorias; el salto del electrón entre todos los pares posibles de éstas podrá producir una porción de rayas procedentes de la disociación o desdoblamiento de las obtenidas cuando no existe campo exterior. Este es el efecto llamado de Stark.

Por lo dicho parece que el movimiento más general de un electrón está regido por la Mecánica clásica y tres condiciones restrictivas dependientes de tres números cuánticos, uno por cada coordenada. Pero observemos que un movimiento puede representarse por múltiples sistemas de coordenadas. ¿Cuáles son entonces los números cuánticos correspondientes? Razones de orden teórico y experimental que nos llevarían un poco lejos, indican que deben tomarse como números cuánticos los tres siguientes, con la interdependencia y serie de restricciones que a continuación citamos:

cuanto principal $= n = n_1 + n_2$; puede valer 1, 2, 3, 4, ..., ∞
 cuanto azimutal, llamado $l = n_1 - 1$; puede tener los valores 0, 1, 2, 3, ..., $(n-1)$
 cuanto magnético, llamado m ; puede tener los valores siguientes:

$$m = l, l - 1, l - 2, l - 3, \dots, 0, -1, -2, \dots, -l.$$

El primer número cuántico n es el definido en el párrafo 2. El segundo l es una unidad inferior al n_1 , o azimutal, que por lo expuesto anteriormente debe ser inferior siempre a n , por lo que puede tomar únicamente los valores $(n-1)$, $(n-2)$, ... 1, 0; equivale, pues, al momento del impulso ($mv \times a$), representable por un vector perpendicular al plano osculador de la trayectoria.

El tercero m , se refiere a la *componente* del momento del impulso sobre la dirección del campo magnético actuante y significa que esta componente sólo puede tener valores enteros. Se comprende que cuando el momento del impulso coincide con la dirección del campo magnético, la componente citada vale l y cuando es antiparalela vale $-l$. Entre estos valores podrá obtener, pues, los demás que le hemos atribuido.

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

§ 8. *Electrón rotatorio o spin.*—Los tres números cuánticos antes citados, no son suficientes para explicar algunos fenómenos experimentales puestos de relieve principalmente en los átomos alcalino-térreos; la teoría de Bohr resulta, pues, incompleta. Para explicar estos resultados experimentales se ha supuesto que el electrón posee un movimiento de giro de toda su carga-masa alrededor de un eje que pasa por su centro, movimiento que está sometido también a una cuantización, con su número cuántico correspondiente que llamaremos σ . La experimentación, sin ningún apoyo teórico en lo que hasta ahora llevamos sentado, indica que este número sólo puede adoptar dos valores: $0,5$ y $-0,5$ correspondientes a dos direcciones: paralela al momento del impulso o antiparalela al mismo, si no existe campo magnético exterior o éste es muy débil. Cuando es fuerte el paralelismo se refiere a él. Aunque el cuanto σ es fraccionario, los pasos de un estado a otro suponen variaciones de h igual a la unidad, porque $0,5 - (-0,5) = 1$.

§ 9. *Ley general del movimiento de un electrón.*—Lo expuesto en los párrafos anteriores se puede resumir diciendo que el movimiento de un electrón obedece a las leyes generales de Mecánica y a tres condiciones de Sommerfeld, correspondientes a los tres números cuánticos citados, y además al efecto rotatorio o spin. Estas condiciones imponen que el electrón posea un número entero n de cuantos h por su movimiento total, un número entero p de cuantos por su movimiento azimutal, un número entero m de cuantos por su movimiento frente al campo magnético y un número, $0,5$ ó $-0,5$, de cuantos por su movimiento de rotación, con las condiciones de interdependencia antes citadas que constituyen *las reglas de selección*.

Cuando se trata de un átomo cualquiera que, por tanto, Principio de Pauli posee más de un electrón en la corteza, las condiciones citadas deben completarse con el *postulado de exclusión de Pauli* que, por ahora, ha sido confirmado por los hechos: *no es posible que un átomo posea a la vez dos electrones corticales regidos por idénticos valores numéricos de los cuatro números cuánticos.*

§ 10. *Distribución de los electrones corticales del átomo valencia química.*—Las leyes anteriormente enunciadas nos permiten establecer la distribución de los electrones corticales en los distintos átomos, así como iniciar una nueva teoría de la *valencia química*.

El helio posee dos electrones en el piso K. Ambos, en virtud de lo dicho en § 7, poseerán el mismo número $n = 1$, el mismo $l = 0$ y el mismo $m = 0$. En virtud del principio de Pauli no pueden poseer el mismo σ ; de lo que resulta que si un electrón posee una rotación tal que $\sigma = 0'5$, al otro le corresponde una rotación antiparalela tal que $\sigma = -0'5$, completando todas las posibilidades. No caben, pues, más electrones en el piso K so pena que poseyeran los mismos números cuánticos en contra del principio de Pauli.

Por medio de este principio de exclusión podremos determinar el número de electrones en un piso cualquiera. Sea un piso dado por el número n de su cuanto principal.

Una teoría de la valencia apoyada en los números cuánticos

Resulta (§ 7) que pueden existir electrones que posean un l cuyo valor vaya desde $n - 1$ a 0. A su vez, a cada valor particular de l corresponde $2l + 1$ valores distintos del número m (que son $l, l - 1, \dots, 0, -1, \dots, -l$). Y finalmente a cada valor distinto de m podrán pertenecer dos electrones con distinto σ , $0'5$ y $-0'5$. De ahí que el número de electrones con el mismo n y l será $2(2l + 1)$ y el número de electrones con el mismo n o sea pertenecientes al piso n será el número anterior repetido para $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$, o sea

$$2(2 \cdot 0 + 1) \quad 2(2 \cdot 1 + 1) \quad 2(2 \cdot 2 + 1) \dots 2(2(n - 1) + 1) = \\ 2(1 + 3 + 5 + 7 \dots (2n - 1)) = 2n^2.$$

Esto da para los distintos pisos los números siguientes:

$$2n^2 = 2, 8, 18, 32, \dots$$

que determinan el mayor número de electrones que puede contener una capa o piso por razones cuantísticas. Demos

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

como ejemplo para el segundo piso de un átomo de número atómico 10 los valores de los cuatro números, teniendo en cuenta el principio de Pauli.

$n = 2$	$l = 0$	$m = 0$	$\sigma = -0.5$
2	0	0	+ 0.5
2	1	- 1	- 0.5
2	1	- 1	+ 0.5
2	1	0	- 0.5
2	1	0	+ 0.5
2	1	+ 1	- 0.5
2	1	+ 1	+ 0.5

El spin y la valencia.—Se llaman electrones *apareados* aquellos que teniendo los mismos valores numéricos para n , l y m , poseen distinto σ . Todo electrón no apareado se llama solitario. Parece que *la valencia de un átomo coincide con el número de electrones solitarios que hay en su corteza*. Por ejemplo, en el caso anterior no existe ningún electrón solitario, por lo que el cuerpo es un gas noble. Si imaginamos una corteza con un electrón de menos (flour), entre los siete electrones restantes quedará uno solitario con un σ positivo o negativo. Tendrá, pues, una valencia unidad. Este electrón, al combinarse el flour, se apareará con otro solitario de otro átomo que tenga un spin negativo o positivo, que puede ser el mismo flour.

Imagínese el cloro con sus siete electrones en su tercer piso. Las combinaciones posibles, distribuyéndolos entre los 18 lugares cuánticos que permite el principio de Pauli, dan como posibles números de electrones solitarios: 7, 5, 3, 1, que coinciden con las valencias observadas para el cloro. No es nuestro objeto profundizar este asunto, tanto más porque nuevas teorías no cristalizadas vienen a complicarlo.

CAPÍTULO III

MECÁNICA ONDULATORIA

Lo expuesto en el capítulo anterior supone que toda radiación es emitida o absorbida discontinuamente por cuantos de acción. ¿Cómo se compagina esta discontinuidad con ciertos experimentos de Física, entre ellos los de interferencia, verificados con rayos que alcanzan diferencias de marcha superiores a un centímetro, no explicables atribuyendo a las radiaciones un carácter ondulatorio que impone una absoluta continuidad? Esta aparente contradicción está resuelta hoy por varias teorías con distinto aspecto formal y de contenido de momento algo ambiguo porque cambian profundamente una porción de conceptos que estaban enraizados en la conciencia científica de este último siglo. En este capítulo nos ocuparemos únicamente de la que tiene forma más sencilla, de la Mecánica ondulatoria.

§ II. *Idea fundamental de Broglie.*—Consiste en atribuir a cualquier partícula de masa m una frecuencia de vibración de *algo* indeterminado, sin saber qué es lo que vibra. Esta frecuencia de vibración ν está ligada a la masa de la partícula por la relación:

$$E = mc^2 = \nu h \quad (1)$$

donde c representa la velocidad de la luz y h el cuanto de Plank.

El primer miembro de (1) representa la energía total que contiene la partícula y el segundo tiene la misma forma que la relación de Einstein para el efecto fotoeléctrico vista en el capítulo anterior (§ I), o sea, según la idea de Broglie, *toda partícula, y mejor, todo electrón, posee una energía total, mc^2 , que vale $h\nu$, lo mismo que para un fotón.* Por esta

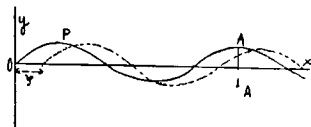
Frecuencia de vibración de toda partícula material

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

idea de Broglie se establece cierta simetría entre el concepto de radiación y el de masa material. Del mismo modo que aquella está formada de una concentración de energía, llamada *fotón* y de valor $h\nu$, acompañada de una onda, ésta supone una concentración de materia (energía según relatividad) equivalente a una cantidad de energía mc^2 , acompañada de una vibración que da origen a una onda cuya frecuencia satisface la relación 1.

§ 12. *Mecánica ondulatoria.*—La idea matriz de ésta consiste en atribuir a todo punto material o sistema de puntos una onda asociada cuyo estudio nos da las propiedades del movimiento del sistema, onda que no es otra cosa, salvo diferencias de carácter analítico, que la onda de Broglie.

Pero antes de pasar adelante será preciso primero hacer alguna indicación respecto a la teoría clásica de la *ecuación fundamental de las ondas* para el caso más sencillo, el de una onda a lo largo de una cuerda. Indiquemos, pues, cómo se representa matemáticamente una onda y su propagación. Sea la cuerda de la figura (línea de trazo continuo) sometida a una vibración transversal armónica que se propaga. La forma de la cuerda está representada en el instante cero por la fórmula



Ecuación fundamental de ondas

$$y = a \text{ sen. } w' x, \quad \left(w' = \frac{2 \pi}{\lambda} \right) \quad (2)$$

donde a es la amplitud y λ la longitud de onda (distancia PA).

A su vez, el movimiento vibratorio transversal de la cuerda, del punto A, por ej., viene dado por la expresión

$$y = a \text{ sen. } wt, \quad \left(w = \frac{2 \pi}{T} \right) \quad (3)$$

donde T representa el período de vibración. Si escribimos la expresión

$$y = a \text{ sen. } (wt - w' x) \quad (4)$$

se puede ver que es equivalente a las dos juntas, es decir, representa la ordenada y de un punto de la cuerda de abscisa x en el instante t . Finalmente la expresión

$$y = a \text{ sen. } (wt - w'x - \varphi) \quad (4')$$

representa la misma tomando como origen de abscisas un punto situado a una distancia $\frac{\varphi}{w'}$ del punto 0, o bien una onda que va adelantada con esta misma *diferencia de fase* respecto a la primera

Derívese ahora (2) dos veces con respecto a x y (3) dos veces con respecto a t , o bien hágase las mismas operaciones con la fór. 4, y se obtienen los resultados siguientes:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -w'^2 y \quad ; \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = -w^2 y.$$

Igualando las y de ambos resultados, expresando las derivadas en parciales porque tendremos dos variables independientes, t y x , teniendo en cuenta que llamando v la velocidad de propagación de la onda se tiene siempre la relación $\lambda = vT$, resulta:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5)$$

ecuación que representará, pues, una condición expresada en derivadas parciales a la cual debe satisfacer el movimiento vibratorio dado. Pero este movimiento vibratorio tiene tres parámetros arbitrarios (dos si tenemos en cuenta que existe siempre la ecuación de condición $\lambda = vT$) que son a , w' y w . Pues bien: los tres parámetros desaparecen en la condición (5) lo que nos indica que es una ecuación a la cual satisfacen la doble infinidad de movimientos vibratorios que pueden imaginarse, haciendo variar dichos parámetros. Ahora bien: si dos movimientos vibratorios satisfacen la ecuación 5, tam-

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

bién la satisfará su suma y, en general, la suma de n movimientos vibratorios, tal como la

$$Y = \sum_n a_n \text{ sen. } (w_n t - w'_n x) \quad (6)$$

donde las a , y las w se refieren a un valor cualquiera asignado al sumando número n , satisfará también la ecuación (5). Se dice que la ecuación 4 es una solución particular de 5, y 6 es una solución general.

§ 13. *Ecuación de Jacobi.*—Hace ya un siglo que Jacobi descubrió una ecuación representativa del movimiento de un sistema de puntos que sintetizaba grandemente los problemas de Mecánica. La ecuación de Jacobi se distingue de las que le precedieron con el mismo fin, porque en ella figura una función S que tiene las dimensiones de una acción, mientras que en las ecuaciones de Hamilton, a las cuales ésta es equivalente, figuraba la energía. A la vez, la ecuación de Jacobi fué un primer paso analítico en la representación de un movimiento material por medio de ondas pero sin sentido físico alguno.

*Cómo aparece la
magnitud acción
en el análisis*

La ecuación de Jacobi puede plantearse fácilmente cuando se trata del movimiento de un punto material, por ej., un electrón, en un espacio libre de toda fuerza no procedente de este punto, si se prescinde de la corrección del relativismo. Sea m la masa del electrón, que se mueve a lo largo del eje de las x con la velocidad u , constante ésta por la ausencia de campo y E_{cin} su energía cinética; mu será su impulso. El momento del impulso con respecto al origen de coordenadas será mux ; sus dimensiones son de una acción, S . Se podrá escribir, pues:

$$dS = mu dx;$$

de donde, designando el impulso por p

$$\frac{dS}{dx} = mu = p_x \quad (6')$$

relación de la cual tendremos que hacer uso otras veces. Cuadrando, se obtiene:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = m^2 u^2 = 2 m m \frac{u^2}{2} = 2 m E_{\text{cin.}} \quad (7)$$

cuyos miembros extremos igualados representan la forma más sencilla de la ecuación de Jacobi.

Generalizando esta ecuación se puede aplicar a un sistema de puntos sometido a un campo exterior que tenga función potencial, V. Para tal sistema se tiene: $E_{\text{cin.}} = E - V$, representando por E la energía total del sistema. Como la representación del movimiento requerirá tres ejes coordenados, se comprende, por generalización de la ecuación 7, que en este caso adoptará la forma

$$\left(\frac{\delta S}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta S}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta S}{\delta z}\right)^2 = 2 m (E - V) \quad (7')$$

como Jacobiana referida a un sistema cualquiera de puntos en un campo de fuerzas, ecuación de la que haremos uso más adelante.

Volviendo a insistir sobre la acción de un electrón en movimiento uniforme, se obtiene, de 6', integrando:

$$S = \text{mux.} \quad (8)$$

La acción de un electrón o de un punto material en movimiento crece paralelamente con su distancia al origen.

Nos encontramos con un resultado contradictorio con la esencia de la teoría de los cuantos, que la acción de un punto en movimiento varía con continuidad y no por saltos de h ; pero ello es debido a que esta relación no es correcta, pues falta todavía someterla a la condición necesaria para que este movimiento sea representable por una onda. Las relaciones que ello introduce nos llevarán finalmente al prin-

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

cipio de incertidumbre y, como consecuencia, a considerar la falta de sentido que supone el tratar la coordenada x como una magnitud continua, siendo así que, como veremos, es indiscernible dentro de ciertos intervalos.

§ 14. *Onda asociada al electrón u onda de fase.*—Veamos ahora, siguiendo la idea matriz de la Mecánica ondulatoria, cómo podemos asociar una onda a un electrón en movimiento; por ej., la representada por la fig. 4, entendiéndose que es una onda que se mueve en la misma dirección que el electrón. Claro que esta onda no puede representarse por una ordenada, y , variable senoidalmente, porque no existe variación de ordenada alguna, pero sí que existe variación senoidal de cierta magnitud, que llamaremos ψ , magnitud desconocida, por ahora, como desconocemos del mismo modo a que corresponde esta frecuencia ν de vibración. Más adelante daremos interpretación de esta magnitud. Por ahora la representaremos, análogamente que la ordenada de una cuerda vibrante, por una función senoidal:

$$\psi = \psi_0 \text{ sen. } (w t - w' x). \quad (9)$$

Ahora bien: en vez de referirse esta onda a las variables t y x puede referirse a la variable t y a una variable S , o sea a la variable acción. Para lograrlo téngase en cuenta que en la fórmula anterior (9) el segundo término del paréntesis vale $\frac{2\pi x}{\lambda}$ y de otro lado (8) se puede escribir $\frac{x}{\lambda} = \frac{S}{\lambda m u}$.

Sacando el valor de m de la relación fundamental de Broglie (1) y sustituyendo sale: $\frac{x}{\lambda} = \frac{S}{\lambda u} \frac{c^2}{h \nu}$.

Para que la sustitución en 9 dé dimensiones nulas; como corresponde a todo argumento, es necesario que el segundo miembro se reduzca a S/h , donde h representa una constante que tiene las dimensiones de una acción destinada únicamente a neutralizar las dimensiones de S , cuyo valor numérico aceptamos, ya que es igual al de la constante de Plank o podemos decir que la experimentación nos lo con-

firmará. La expresión 9 en función de la variable acción, S, será:

$$\psi = \psi_0 \text{ sen. } \left(u t - 2 \pi \frac{S}{h} \right) \quad (9')$$

para ello es preciso que $\frac{c^2}{uv} = \lambda$ o sea, teniendo en cuenta que $\lambda = vT = v/v$, representando v la velocidad de propagación de la onda, sale finalmente:

Velocidad de la onda de fase

$$vu = c^2.$$

Como se ve, pues, la velocidad de la onda de fase es siempre superior a la de la luz, puesto que siempre $u < c$. La onda de fase que acompaña a todo punto material en su movimiento tiene siempre una velocidad superior a la de la luz, tanto mayor cuanto más pequeña sea la velocidad del punto material.

§ 15. *Realidad de la onda asociada.* La onda asociada no ha sido hasta ahora más que un simple artificio matemático que nos permitirá, en el párrafo siguiente, la deducción de la ecuación de Schrödinger; pero antes queremos indicar que cuando la Mecánica ondulatoria, que tiene por base analítica esta onda, estaba ya consagrada por sus éxitos, se ha descubierto la realidad de dichas ondas en cuanto se portan, en condiciones adecuadas, en experimentos de interferencia y de difracción, lo mismo que las radiaciones hasta ahora conocidas. El primer experimento demostrativo, de Dávison, se reduce a enviar un chorro de electrones frente a una lámina de níquel, obteniéndose manchas de Laue. Hoy el manejo de la difracción e interferencia de los rayos de electrones constituye ya una técnica experimental. El valor de la longitud de onda sacado de la experimentación coincide con el teórico. Este último se calcula fácilmente teniendo en cuenta que, dada la velocidad u de los electrones, se puede escribir, recordando la última igualdad:

$$\lambda v = v = \frac{c^2}{u} = \frac{m c^2}{m u};$$

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

y como, por la hipótesis de Broglie, se tiene $mc^2 = h\nu$

$$\lambda\nu = \frac{h\nu}{m u} ; \quad \lambda = \frac{h}{m u}.$$

La última relación da longitudes de onda del orden de las de los rayos X.

§ 16. *Ecuación de Schrödinger.*—Esta onda, asociada al movimiento de la partícula, debe satisfacer la ecuación 5 entre derivadas parciales que, como vimos, es requisito de toda onda que se propaga. El primer miembro de 5, cambiando la y por ψ se expresa del siguiente modo: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \Delta \psi$ y el segundo, efectuando la doble derivación en ρ , resulta valer:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \psi = -\frac{2^2 \pi^2}{T^2 v^2} \psi = -\frac{4 \pi^2 \nu^2}{v^2} \psi.$$

Por tanto, la ecuación 5 supone la condición:

$$\Delta \psi = \frac{4 \pi \nu^2}{v^2} \psi \quad (10)$$

que debe cumplir la onda supuesta.

Ahora téngase en cuenta que, por ser

$$v u = c^2 \quad \text{y} \quad E = mc^2, \text{ resulta } v = \frac{E}{m u}$$

y, por otra parte,

$$E_{\text{cin.}} = E - V = \frac{m u^2}{2}; \text{ de donde: } u = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V)}.$$

Sustituyendo el valor de u en el de v , sale para este:

$$v = \frac{E}{\sqrt{2 m (E - V)}}.$$

Finalmente, sustituyendo en 10 el valor de v y el de ν resulta:

$$\Delta \psi + \frac{8 \pi^2 m (E - V)}{h^2} \psi = 0 \quad (11)$$

que es la ecuación fundamental de Schrödinger.

La deducción de esta ecuación ha sido hecha para un electrón que se mueve sin campo exterior; el haber introducido a última hora el potencial V no ha cambiado el rigor. Igualmente hemos prescindido de la corrección relativista de la masa como si se tratara de velocidades u muy pequeñas, aunque parezca ilógico que a la vez usemos la relación $mc^2 = E$. Todo ello ha sido en beneficio de la sencillez. Por demás, la ecuación de Schrödinger es aplicable a un campo cualquiera y para una velocidad cualquiera, para cuyo caso la m representa la masa en reposo; también es aplicable a un número de masas cualquiera en movimiento generalizando primero su forma.

Al regir la ecuación de Schrödinger el movimiento de una onda ψ asociada al movimiento de un punto, indica que la ψ expresada en 9 debe ser una solución de la ecuación 11. El estudio analítico de dicha ecuación nos dirá las particularidades que debe presentar este movimiento. La consecuencia más importante de este estudio analítico consiste en que la expresión 9 es una solución de 11 únicamente para una serie discontinua de valores del parámetro E (tén-gase en cuenta que E entra en 9 por la relación de E con ν y de éste con w) *es decir que el movimiento de la partícula sólo puede tener realidad cuando su energía E cumpla ciertas restricciones.*

Ejemplo del volante Ejemplo: Un primer ejemplo nos dará idea sencilla de estas restricciones. Sea un giróscopo o mejor un volante, de momento de inercia I , constituido por una llanta infinitamente delgada de radio r . Es un movimiento que no tiene energía potencial. El valor del paréntesis de 11, que es la energía cinética, se reduce a $\frac{I\alpha'^2}{2}$, donde α' es la velocidad an-

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

gular y α el ángulo descrito por el volante. En el primer miembro, como se trata de un movimiento de rotación, se debe cambiar la coordenada x por la s , contada sobre la circunferencia del volante, de modo que

$$\Delta \psi = \frac{d^2 \psi}{d s^2}.$$

Sustituyendo el valor de $ds^2 = r^2 d\alpha^2$ y el valor de α , y teniendo en cuenta que $v = r \alpha'$ resulta la siguiente forma para la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{d^2 \psi}{d \alpha^2} + \frac{8 \pi I E}{h^2} \psi = 0. \quad (11')$$

Ahora bien: para que una onda de la forma 9 sea una solución de esta ecuación se deben cumplir las condiciones analíticas que antes hemos previsto; fácil es hallarlas para este caso sencillo.

La onda será ahora, poniendo en vez de x el ángulo α

$$\psi = \psi_0 \text{ sen. } (\omega t - \omega' \alpha)$$

o mejor, para un instante dado, $t = 0$:

$$\psi = \psi_0 \text{ sen. } \omega' \alpha$$

y acompañará al volante en su movimiento. Resalta inmediatamente, que si nos fijamos en un punto cualquiera del volante corresponde a la vez a un ángulo α y a la serie de ángulos que se obtienen sumándole $n 2 \pi$ (n , número entero). Por tanto si ω no es entero, esta serie de ángulos no dará el mismo valor para la fase correspondiente a un mismo punto del espacio, lo que es un absurdo. Para que ésto no ocurra es preciso que ω' sea un número entero, es decir, $\omega' = 2 \pi / \lambda = 1, 2, 3, \dots$ o sea la longitud de la onda de fase debe ser un divisor exacto de la circunferencia del volante.

Dando a ω' la serie de valores indicados se obtienen las

distintas funciones que expresan la multiplicidad posible de ondas asociadas que puede poseer el volante:

$$\psi_0 \text{ sen. } \alpha, \psi_0 \text{ sen. } 2\alpha, \psi_0 \text{ sen. } 3\alpha \dots$$

correspondientes a las longitudes

$$\lambda = 2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \dots$$

*Funciones propias
y valores propios*

Esta serie de funciones posibles se llaman *fundamentales o propias* correspondientes al volante. Derivemos ahora dos veces con respecto a α y comparando con la última ecuación de Schrödinger se obtiene para w' el valor $w'^2 = \frac{8\pi I E}{h^2}$; o sea para E caben únicamente los valores $E = \frac{h^2}{8\pi^2 I} w'^2$, dando a w los valores 1, 2, 3, ... Estos valores de la energía son los llamados *valores propios* correspondientes a las distintas *funciones propias*. El volante en cuestión sólo puede poseer aquellos valores de la energía que sean iguales al valor $\frac{h^2}{8\pi^2 I}$ multiplicado por la serie de números naturales.

Sustituyendo por mv^2 a E resultan como valores posibles para la velocidad lineal del volante

$$v = \frac{h}{4\pi \sqrt{I m}} \times (1, 2, 3, \dots);$$

la velocidad puede poseer valores múltiples de esta fracción. Sensiblemente ninguno de estos valores puede medirse experimentalmente con la exactitud necesaria para ser comprobados, porque la pequeñez de h supone una pequeñísima diferencia entre dos de ellos sucesivos; para que esta diferencia sea observable, es preciso acudir a otros ejemplos, como los que da el análisis espectral. Pero si que se podrá hacer la afirmación siguiente: si la velocidad del volante

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

posee valores discontinuos, el crecimiento de la misma puede hacerse únicamente por saltos bruscos, lo que resulta un absurdo si no se tiene en cuenta la imprecisión que en la determinación de la velocidad introduce el principio de incertidumbre.

Lo dicho para este ejemplo es generalizable a cualquier otro, de modo que, en el caso general, la ecuación de Schrödinger sólo tiene soluciones para ciertos valores de la energía E llamados *propios*, a cada uno de los cuales le corresponde una solución que será la función *fundamental* o *propia*.

§ 17. *Aplicación al oscilador elemental.*—Sea un oscilador armónico lineal que vibra sobre el eje de las x , según la expresión

$$x = x_0 \text{ sen. } \omega t.$$

Como sabemos, este movimiento está producido por una fuerza proporcional a la elongación, que vale:

$$F = - m \omega^2 x.$$

La energía potencial, cuando el móvil se encuentra en una elongación x valdrá

$$V = - \int_0^x F dx = - \int_0^x - m \omega^2 x dx = \frac{m \omega^2 x^2}{2} = 2 m \pi^2 \nu^2 x^2.$$

Por tanto, la ecuación de Schrödinger, en este caso particular, tendrá la forma

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} + \frac{8 \pi^2 m}{h^2} (E - 2 \pi^2 \nu^2 m x^2) \psi = 0$$

ecuación que es del tipo

$$y'' + (c - x^2) y = 0$$

cuya integración se verifica por medio de unas funciones

llamadas de Hermite, que se designan por $H_n(x)$, formadas por ciertos polinomios de grado n . Las *funciones fundamentales* obtenidas, en este caso con mayor dificultad que para el volante, tienen la forma:

$$\psi_n(x) = A e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

donde A es una constante y H_n el polinomio de Hermite de grado n ; a estas funciones les corresponden los *valores propios* siguientes de la energía

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h \nu$$

donde n representa la serie de los números naturales.

Por lo que se ve los valores que puede tener la energía de un oscilador se diferencian en múltiplos de $h \nu$, igual consecuencia que nos había dado la aplicación de la condición de Sommerfeld, con la diferencia de que el valor más pequeño que puede tomar la energía es, para $n=0$, $E_0 = h \nu / 2$, mientras que allí era 0. Las medidas resultados de los calores específicos, principalmente a bajas temperaturas, confirman más bien el resultado de la ecuación de Schrödinger frente a la de Sommerfeld.

§ 18. *Electrón con trayectoria circular plana.*—Este caso, equivalente al tipo del primitivo modelo atómico de hidrógeno de Bohr, se resuelve sustituyendo en II el valor de $E_{\text{cin.}}$ en vez de $E - V$, y teniendo en cuenta, como ya dijimos al tratar del átomo de Bohr, que $E_{\text{cin.}} = -V/2$, y que, a su vez, $V = -e^2/r$, resulta $E_{\text{cin.}} = e^2/2r$; sustituyendo dx^2 por $r^2 d\alpha^2$.

$$\frac{d^2 \psi}{d\alpha^2} + \frac{8 \pi^2 m e^2 r^2}{2 r h^2} \psi = 0$$

e introduciendo nuevamente la energía cinética:

$$\frac{d^2 \psi}{d\alpha^2} + \frac{2 \pi^2 m e^4}{h^2 E_{\text{cin.}}} \psi = 0.$$

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

La solución de esta ecuación es también una función fundamental, de la misma forma que para el volante:

$$\psi = \psi_0 \text{ sen. } w' \alpha,$$

es decir, una onda que se propaga a lo largo de la trayectoria circular del electrón. Del mismo modo que para el volante, veríamos que esta onda no puede tener una longitud cualquiera para que ψ no sea multiforme. Es preciso, pues, que se verifique la relación $w' = 1, 2, 3, \dots$ o sea, las funciones propias quedan convertidas en

$$\psi = \psi_0 \text{ sen. } (n \alpha) \quad (12)$$

donde n es un número entero cualquiera. Teniendo en cuenta que $w' = 2\pi/\lambda$, esto significa que la longitud de onda debe ser un divisor exacto de la longitud de la trayectoria.

Derivando dos veces con respecto a α se obtendría, comparando el resultado con la última ecuación diferencial:

$$w'^2 = n^2 = \frac{2 \pi^2 m e^4}{E_{\text{cin.}} h^2}; \text{ de donde } E_{\text{cin.}} = \frac{2 \pi^2 m e^4}{h^2} \frac{1}{n^2};$$

esta es la misma expresión que hemos encontrado anteriormente, por medio de la condición de Sommerfeld, para los posibles valores de la energía del electrón, es decir, para sus valores propios: La Mecánica ondulatoria coincide con la teoría de Bohr, para este caso.

§ 19. *Caso de trayectoria cualquiera.*—Para este caso fué preciso anteriormente aplicar las tres condiciones de Sommerfeld con tres números cuánticos correspondientes, cuyas relaciones mutuas y restricciones se descubrieron con un criterio no muy preciso, más bien apoyándose en hechos experimentales. La aplicación de la ecuación de Schrödinger conduce, en cambio, directamente al descubrimiento teórico de estos tres números y sus relaciones. Para resolver esta ecuación en este caso, es preciso un aparato matemático algo más complicado. Conviene expresar el movimiento del

Los cuantos n, l y m , como consecuencia teórica

electrón por las tres coordenadas esféricas usuales, r , θ , φ y dar, por consiguiente, dicha ecuación en estas tres coordenadas. La integración se verifica sustituyendo en esta ecuación una solución particular de la forma

$$\psi = f_1(r) f_2(\theta) f_3(\varphi)$$

formada del producto de tres funciones de r , de θ , y de φ únicamente, para las cuales se halla las formas R_{nl} , $P_{lm}(\cos. \theta)$ y $e^{im\varphi}$, respectivamente.

La primera lleva incluido un polinomio de Laguerre, con dos parámetros numéricos, l y n , correspondientes a los números cuánticos antes hallados y sometidos a las mismas relaciones que allí. La segunda es una función de Legendre con los números l y m correspondientes también a los números cuánticos ya citados; la tercera contiene únicamente el cuanto magnético. Toda *función fundamental propia* tendrá, pues, la forma general

$$\psi = R_{nl}(r) P_{lm}(\cos. \theta) e^{im\varphi} \quad (13)$$

Para encontrar todas las funciones propias posibles, por tanto, es necesario dar las tres series de valores posibles a n , l y m con las restricciones indicadas en el párrafo 7.

La Mecánica ondulatoria halla, pues, los tres números cuánticos como consecuencia analítica de la ecuación de Schrödinger. En cambio, el efecto o cuanto spin no aparece en la Mecánica ondulatoria; es preciso para ello llegar a la ecuación de Dirac.

§ 20. *Interpretación de las funciones propias.* — Hemos dejado, hasta ahora, como arbitraria la significación de la función ψ ; no sabemos qué magnitud representa. Sólo podemos decir que en cada punto del espacio tiene un valor numérico, sin concretar a qué se refiere este valor numérico. Toda interpretación de la misma es puramente hipotética, puesto que hasta ahora únicamente ha servido para que los valores propios del parámetro E que contiene nos diera los posibles valores numéricos de la energía de un sistema, es

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

decir, nos ha servido como medio de análisis. No obstante, cabe atribuirle una significación directa siempre que se eleve al cuadrado (o se multiplique por su conjugada si fuese imaginaria). Efectivamente: la función ψ elevada al cuadrado permite, por un lado, enunciar ciertas reglas de selección y, por otro lado, permite explicar los experimentos de difracción e interferencia de electrones, admitiendo que la intensidad de la energía es proporcional al cuadrado de ψ , análogamente a las interferencias luminosas donde la intensidad es proporcional al cuadrado de uno de los vectores, eléctrico o magnético.

Para buscar la significación de ψ será útil un pequeño ejemplo de cálculo de probabilidades: Sea una caja que contiene dos bolas blancas y una negra; si sacamos una de ellas, la probabilidad de que sea la negra vale $1/3$. Sea otra caja con tres bolas blancas y una negra; la misma operación supone una probabilidad para la negra que vale $1/4$. Generalizando ahora el concepto de densidad, podremos decir que la densidad de bolas negras frente al total de bolas que existen en la primera caja vale $1/3$; igual definición para la segunda da $1/4$. Finalmente, la probabilidad de sacar a la vez una bola negra de ambas cajas, vale $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$. En este ejemplo, por tanto, densidad y probabilidad significan lo mismo.

*Probabilidad
como densidad*

Análogamente, si ψ_n y ψ_m son dos funciones fundamentales, el valor $\psi_n(x, y, z) dx dy dz$ representará la densidad de la función ψ_n en el volumen $d\tau = dx dy dz$, y $\psi_m(x, y, z) dx dy dz$ tendrá significación idéntica. Ahora bien: el producto

$$\psi_n \psi_m d\tau$$

referido al elemento $dx dy dz$, significará la probabilidad de coincidencia de las dos funciones $\psi_n \psi_m$ en dicho elemento, probabilidad abstracta porque dichas funciones no representan ninguna magnitud. Pero si formamos el producto

$$e \psi_m \psi_n d\tau,$$

donde e es la carga eléctrica del electrón, dicha probabilidad tiene las dimensiones de una carga eléctrica. El valor de esta expresión es lo que estimaremos como *densidad eléctrica* en el elemento de espacio $d\tau$, correspondiente a los estados de energía que nos dan ψ_n y ψ_m , o sea a sus valores propios, E_n y E_m .

*Dilución de la
carga eléctrica*

Por esta definición se ve que la carga eléctrica posee una densidad que se distribuye por todos los puntos del espacio donde no se anule el producto $\psi_n \psi_m$. Pues bien: la carga total será la integración de esta densidad en todo el espacio. Resulta entonces que, llamando e_1 la carga total distribuida en el espacio, vale:

$$e_1 = e \int \psi_n \psi_m d\tau. \quad (14)$$

Se puede demostrar que si $n = m$ la integral vale la unidad y si n es desigual a m la integral vale cero. (Nota matemática 1). Significa esto que la carga total del electrón está distribuida en todo el espacio en forma de una misma función ψ_n , cuya integral al valer la unidad nos da el mismo valor e para la carga total del espacio.

Resulta, pues, que existe una densidad del electrón en los distintos puntos del espacio. Será, pues, interesante el estudio de la densidad de las funciones ψ que le dan origen, así como de los productos $\psi_m \psi_n$; pero este estudio es de gran dificultad, por lo que nos limitaremos a citar los resultados para el átomo de Bohr.

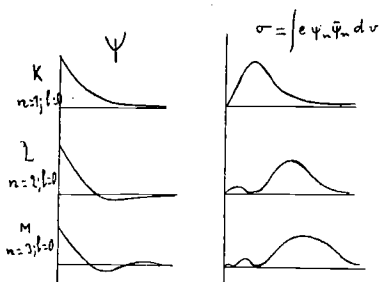
Para el tipo primitivo del átomo de Bohr, la densidad de función propia vendrá representada por una función senoidal (12) a lo largo de la trayectoria del electrón con uno o n nodos, según sea l o n el número de esta función fundamental. La densidad eléctrica representante de este electrón no está reducida a un punto, sino que se esparce sobre toda la trayectoria en función cuadrática del seno del ángulo, como la intensidad de energía correspondiente a la vibración de una cuerda en onda estacionaria se cuenta a lo largo

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

de la misma en función cuadrática de su amplitud (N. matemática 1).

Esta sencilla distribución o dilución de la carga eléctrica es sólo aplicable al caso citado. Es suficiente una pequeña generalización, como la que corresponde al electrón del átomo de hidrógeno con trayectoria cualquiera para que el cálculo resulte difícil. En el caso que citamos será preciso hacer uso de las funciones dadas por la fórmula 13. Expresando los resultados del cálculo de estas funciones por un gráfico, resultan las curvas de

la figura. De ellas, las tres de la izquierda se refieren a los números cuánticos $n = 1, l = 0$; $n = 2, l = 0$; $n = 3, l = 0$ y corresponden a la distribución radial. Más interesante es el gráfico de densidades, también en su relación con respecto a la distancia al centro del átomo. La figura de la derecha representa la densidad correspondiente a los mismos números cuánticos.



Como se ve, la densidad eléctrica no se acumula en un punto del espacio sino que se diluye en todas sus dimensiones, presentando, eso sí, como se ve en la figura, distintos máximos. Esta dilución de la carga del electrón significa dos cosas: o bien que su carga está repartida por todo el espacio de modo que según el estado cuántico en que se encuentra obtiene distintas formas, lo mismo que ocurre a una masa de humo que sin variar la cantidad total de polvillo de carbón que contiene cambia de forma y de concentración de unos puntos a otros del espacio que ocupa; o también significa que el electrón, con una carga reducida a un volumen muy pequeño, puede encontrarse en un punto cualquiera del espacio, *con una probabilidad de estar situado en un punto determinado dada por la ordenada de la curva que representa la densidad.*

Cualquiera de las dos interpretaciones no permite hablar

en concreto de la posición del electrón más que como densidad de carga en un punto o como probabilidad de que se encuentre en dicho punto. Por ej., la fig. 4 indica que la densidad del electrón que posee el cuanto $n = l$ y $l = m = 0$ tiene un máximo muy acusado a una distancia r_0 , densidad que decrece por ambos lados, no sin ocupar un espacio relativamente grande comparado con las dimensiones del átomo; también se puede interpretar diciendo que la posición de mayor probabilidad del electrón corresponde a la abcisa r_0 , de ordenada máxima, lo que no excluye que en un momento dado este electrón, sin cambiar sus números cuánticos, puede encontrarse a una distancia r cualquiera del centro del átomo con una probabilidad dada por la ordenada correspondiente a esta abcisa r .

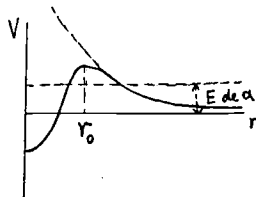
Estas consecuencias del significado dado por Schrödinger a las funciones fundamentales, tienen su confirmación en ciertos experimentos de desintegración de la materia.

La interpretación de Schrödinger comprobada por la desintegración artificial de la materia y por los fenómenos radiactivos

Para que un ión pueda penetrar en el interior de un núcleo atómico arrastrando con él en su salida a protones de éste, produciendo con ello una desintegración, es preciso, según la teoría, disponer de un voltaje de varios millones de voltios. Pues bien: sin llegar a este voltaje se ha conseguido la mencionada penetración. La explicación de este hecho y otro observado por el físico Gamow, que reseñaremos después, reside en lo siguiente: el núcleo de un cuerpo radiactivo produce un potencial en el espacio, dado por la curva de trazo continuo. Para entender esta curva hay que tener en cuenta que a distancias relativamente grandes del núcleo en relación a su radio, r_0 , el potencial del mismo tiene la forma newtoniana, $\frac{e}{r}$ (e , carga del núcleo), cuya curva representativa hemos puesto de trazos. A distancias pequeñas, en cambio, el núcleo deja sentir su heterogeneidad eléctrica y, una vez en su interior, el potencial es decreciente hacia el centro, o sea, el campo eléctrico en esta región es atractivo, pues de otro modo no se concibe cómo pueden ser retenidas las partículas α que son positivas. En

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

total, se forma una curva representativa de la variación del potencial con la distancia (la de trazo continuo en la figura), que presenta un máximo para r_0 y un mínimo en el centro del núcleo. De ello resulta que, para que una partícula α salga de un núcleo radiactivo, debe rebasar este máximo de potencial a costa de su energía (cinética, p. e.).



Pero es evidente que una vez pasada la cúspide, al final de la pendiente, recobrará la energía perdida; pues bien: experimentos que no citamos aquí demuestran que la energía que posee la partícula α , ya libre del núcleo atómico, es inferior al potencial que atraviesa en el punto r_0 . Cosa análoga puede decirse para las partículas que, siguiendo una marcha inversa, producen la desintegración: la energía que llevan, por causa del poco potencial disponible, no es bastante para vencer la cúspide mencionada y, sin embargo, la experimentación atestigua que dicha cúspide es atravesada. ¿Cómo se explica, pues, esta paradoja que una partícula pueda escalar una pendiente para la cual no posee bastante energía?

La paradoja expuesta tiene su origen en el hecho, hasta ahora axiomático, de que la masa de la partícula ocupaba un volumen muy reducido, casi puntual. Si, en cambio, admitimos la interpretación dada en la página anterior, la masa de la partícula diluida en una nubecilla, de forma desconocida, puesto que desconocemos su función fundamental, representante del movimiento de dicha partícula, ocupará a la vez la parte anterior y posterior de la cresta de potencial; atravesar esta cresta no significa, pues, *sobrepasarla*, sino pasar de un lado a otro la parte de nube (o carga) que está dentro.

Otra forma de salvar la paradoja consiste en la interpretación probabilística. Significa ésta que no existe seguridad respecto al punto donde se encuentra una partícula; no conocemos más que la probabilidad de que se encuentre en determinado punto, de distancia r al centro, que viene dada

por el producto $\psi_n^2 dr$ (Ver Nota matemática I); como este producto es muy pequeño fuera de la cresta r_0 , significa que, en un momento dado, serán muy pocas las partículas que se encuentran al otro lado de la cresta; pero, aunque pocas, serán lo suficientes para producir, en un caso, la desintegración y, en otro, la salida de la partícula radiactiva por la misma pendiente descendiente del potencial.

§ 21. *Paso de un estado a otro.*—Un elemental razonamiento nos puede explicar el paso de un estado a otro, o sea de una función fundamental ψ_1 a otra ψ_2 , que llevando anejo una variación, $E_2 - E_1$, en la energía del sistema, cede esta energía en forma de radiación de frecuencia tal, ν , que se debe cumplir la relación de Broglie (§ 1). ¿Pero cómo se verifica el paso de un estado a otro, de una función a otra? Vamos a probar de explicárnoslo.

El paso de un estado a otro significa una incertidumbre en el valor de la energía del sistema

Las soluciones que hasta ahora hemos dado de II se refieren a un instante dado; por tanto, no contienen a t . Pero si queremos expresar la solución en un instante cualquiera será necesario que figure la t . Basta para ello multiplicar por $\cos. \omega t$ y seguirán siendo solución de II, como se puede comprobar. Por tanto, la función fundamental ψ_1 , que depende de x, y, z , podrá expresarse de la siguiente manera:

$$\psi_1(x, y, z) \cos. \pi \nu_1 t$$

(para corroborar lo dicho basta fijarse que la solución 4' de una cuerda vibrante se puede transformar también en un producto de factores función de x y de t ; este producto se obtiene inmediatamente desarrollando el coseno) donde ν_1 es la frecuencia del movimiento que corresponda al átomo emisor, de modo que, si E_1 es el *valor propio* de su energía, se tiene $E_1 = \nu_1 h$. La función ψ_1 es la función propia correspondiente.

Pero la teoría de ecuaciones enseña que ψ_1 puede ser también imaginaria, de modo que también será una solución la siguiente:

$$\psi_1(x, y, z) i \text{ sen. } 2 \pi \nu_1 t \quad (i = \sqrt{-1})$$

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

La suma de estas dos soluciones será también otra solución

$$\psi_1 (\cos. 2 \pi \nu_1 t - i \text{sen. } 2 \pi \nu_1 t) = \psi_1 \exp. 2 i \pi \nu_1 t$$

(Se sabe por Mat. que $e^{ix} = \cos. x - i \text{sen. } x$).

La teoría de ecuaciones demuestra que a toda solución imaginaria le corresponde otra imaginaria conjugada (la conjugada de ψ se expresa por $\bar{\psi}$). Luego otra solución será:

$$\bar{\psi}_1 \exp. - i 2 \pi \nu_1 t$$

correspondiente al mismo valor propio E_1 . Para otro valor propio de la energía, E_2 , se obtendrá por el mismo razonamiento las siguientes soluciones:

$$\psi_2 \exp. i 2 \pi \nu_2 t \quad \text{y} \quad \bar{\psi}_2 \exp. - i 2 \pi \nu_2 t.$$

La suma del par de soluciones, ψ_1 y ψ_2 , en virtud de lo dicho en el párrafo 12, será otra solución que designaremos por ψ , y la suma del otro par, $\bar{\psi}_1$ y $\bar{\psi}_2$ será otra que designaremos por $\bar{\psi}$. El producto $\psi \bar{\psi}$, que expresa la densidad, viene dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \psi \bar{\psi} &= (\psi_1 \exp. i 2 \pi \nu_1 t + \psi_2 \exp. i 2 \pi \nu_2 t) \\ &(\bar{\psi}_1 \exp. - i 2 \pi \nu_1 t + \bar{\psi}_2 \exp. - i 2 \pi \nu_2 t) \end{aligned}$$

que, verificadas las operaciones, queda convertida en

$$\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 + \psi_1 \bar{\psi}_2 \exp. 2 \pi i (\nu_2 - \nu_1) t + \bar{\psi}_1 \psi_2 \exp. 2 \pi i (\nu_1 - \nu_2) t \quad (14)$$

que consta de un término independiente del tiempo y otro variable, *equivalente a una pulsación de frecuencia $\nu_1 - \nu_2$* . La frecuencia ν , de esta pulsación viene dada, haciendo uso de la relación fundamental, por la igualdad siguiente:

$$\nu(2, 1) = \nu_2 - \nu_1 = \frac{1}{h} (E_2 - E_1).$$

Esta es precisamente la frecuencia de la radiación emitida al pasar de la función fundamental dada por el valor propio E_2 a la dada por el valor E_1 .

Si examinamos la expresión (14) observaremos que la densidad eléctrica por ella representada no está claramente determinada, puesto que existen términos con un factor variable con el tiempo (lo mismo ocurriría si se considerasen todas las soluciones posibles de la ecuación 11).

§ 22. *Reglas de selección y de polarización.*—La clásica teoría electromagnética permite calcular la intensidad y estado de polarización de una radiación emitida por una carga e que posee aceleración. El cálculo de la misma da una emisión proporcional al cuadrado de la aceleración. Descomponiendo la aceleración en dos direcciones, normales entre sí y a la dirección de propagación del campo, y llamando I_x e I_y las intensidades, se puede escribir, designando por a_x y a_y las aceleraciones correspondientes:

$$I_x \propto e^2 a_x^2 \qquad I_y \propto e^2 a_y^2.$$

Teniendo en cuenta, si se trata de vibraciones harmónicas del tipo

$$x = r \text{ sen. } (2\pi\nu t - x)$$

que la aceleración x'' viene dada por

$$x'' = 4\pi^2\nu^2 x.$$

La intensidad valdrá:

$$I_x \propto (e\nu^2 x)^2; \qquad I_y \propto (e\nu^2 y)^2,$$

y lo mismo podrá decirse para los distintos harmónicos que forman la vibración compleja.

Estas fórmulas dan la intensidad de radiación en dos direcciones normales, lo que incluye en ello el estado de polarización de esta radiación. Naturalmente, estas dos fórmulas no pueden dar resultados exactos, porque en el

cálculo de las mismas no se tuvo en cuenta ninguna condición restrictiva cuantística. Pero si, en vez de tomar la idea de carga como puntual, la conceptuamos como algo que reside en todo el espacio, cuya densidad viene dada por 14, entonces en esta definición de carga va encerrada ya la restricción cuantística. Sustitúyase, pues, la e por su valor según la interpretación de Schrrödinger (§ 20) en los cálculos, y se obtendrá, de una vez, la intensidad, la polarización e incluso las reglas de selección dadas en párrafos anteriores. Los cálculos son muy difíciles.

§ 23. *Paso de la Mecánica clásica a la ondulatoria.*—Recordemos ahora la ecuación de Jacobi:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V - E = 0 \quad (7')$$

La Jacobiana es un caso particular de la ecuación de Schrrödinger

y comparémosla con la de Schrrödinger (11), escribiéndola primero en la forma siguiente:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V - E \right] \psi = 0, \quad (15)$$

de modo que el paréntesis significa la doble derivación de ψ con respecto a las tres coordenadas. Evidentemente, las ecuaciones (7') y (15) tratan de representar analíticamente el movimiento de un punto material de masa m en un campo de potencial constante; La primera representa los hechos con exactitud siempre que se trate de movimientos macroscópicos; la segunda los sigue con rigor para movimientos de partículas eléctricas. La observación de las dos ecuaciones permite descubrir al momento un procedimiento *puramente formal* para pasar de la primera a la segunda: en vez de los impulsos p_x , o de sus iguales $\frac{\partial S}{\partial x}$ (6'), se sustituyen los operadores $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$, y lo mismo para y y z , cam-

biando en orden de derivada lo que allí es potencia, sin variar la significación de $V - E$, con lo que se tiene el operador encerrado en el paréntesis rectangular que aplicado a ψ da la ecuación de Schrrödinger.

Además de esta regla para pasar de una forma a otra de ecuación, cabe demostrar fácilmente que la ecuación de Jacobi no es más que un caso particular de la de Schrrödinger cuando h tiende a cero. Efectivamente: una de las soluciones particulares de la ecuación de Schrrödinger es ψ ; por razones análogas a las del párrafo 21 podemos llegar a una solución de la forma

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} S} = \exp. \frac{2\pi i}{h} S$$

que sustituida en la ecuación de Schrrödinger da:

$$\frac{2\pi i}{h} S'' - \frac{4\pi S'^2}{h^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) = 0.$$

Despreciando el primer término, obtenemos:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + 2m(V - E) = 0$$

es decir, la Jacobiana. Para ello ha sido preciso que el primer término sea muy pequeño frente a los demás: ello exige que o bien h sea muy pequeño o bien que S' lo sea; lo primero significa que de ser h cero, la ecuación de Jacobi sería suficiente para interpretar los hechos con rigor; lo segundo exige que los valores de $E - V$ sean grandes frente a los de S' , como ocurre en los casos concretos de Mecánica ordinaria.

§ 24. *Principio de incertidumbre, de Heisemberg.*—De la Mecánica cuantística de Heisemberg por cuyas dificultades no la podemos plantear aquí, se deduce el principio de indeterminación o incertidumbre. De él ya hemos escrito an-

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

teriormente como consecuencia del mecanismo de percepción del hombre, pero no será superfluo indicar aquí cómo se relaciona con las consecuencias de la Mecánica ondulatoria, así como mencionar algunos casos en que este principio tiene confirmación independientemente de la percepción indicada.

En el párrafo 21 hemos visto que mientras dura el régimen de transición de un estado de energía E_1 a otro de energía E_2 , o sea, para el átomo de hidrógeno, de una trayectoria a otra del electrón, se verifica la relación:

$$E_1 - E_2 = \Delta E = \nu h,$$

donde ν es la frecuencia de pulsación que allí resulta para la superposición de dos estados a la vez que la frecuencia de la radiación emitida. Sustituyendo en vez de su inversa, el período de vibración T , que, por ser pequeño, le llamaremos ΔT , resulta:

$$\Delta E \Delta T = h.$$

Esa es evidentemente una forma del principio de incertidumbre tal como la enunciamos anteriormente, entendiendo que ΔT representa, a la vez, el tiempo que tarda la radiación en ser emitida. La interpretación de esta relación es la misma que allí vimos.

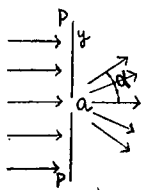
Otro hecho de fácil explicación que confirma el principio de incertidumbre es la difracción de la luz y de una radiación cualquiera. Llega un haz de rayos paralelos R sobre una pantalla P con una rendija de amplitud a . Sabemos que la radiación se difracta con un ángulo α que vale

Incertidumbre en la posición e impulso de los fotones

$$\text{sen. } \alpha = \frac{\lambda}{a} = \frac{c}{\nu a},$$

teniendo en cuenta que $\lambda \nu = c$. Por otro lado, los fotones que proceden de la izquierda de la pantalla y que llevan,

evidentemente, una dirección perpendicular a la misma, al pasar a través de la pantalla no sabemos cuál será su dirección de propagación que puede oscilar por dentro del ángulo α ; desconocemos, por ello, cuál será la componente del impulso según una de las direcciones, la del eje y , por ejemplo. Teniendo en cuenta las relaciones:



$$\text{impulso} = mc; \quad mc^2 = h \nu$$

y observando que la propagación del fotón debe encontrarse limitada por dentro del ángulo α , resulta que el impulso según el eje de las y puede oscilar en un valor de cero a $mc \cdot \text{sen. } \alpha$, por lo que

$$\Delta p_y = mc \text{ sen. } \alpha = \frac{h \nu}{c} \cdot \frac{c}{\nu a} = \frac{h}{a}.$$

También desconocemos el punto de la rendija por donde ha pasado el fotón con un error evidentemente no superior a a ; luego:

$$\Delta y = a \quad ; \quad \Delta p_y \Delta y = h$$

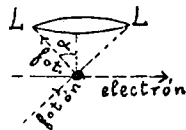
que es la relación que hemos enunciado anteriormente. *La certidumbre con que se conoce el impulso del fotón es inversamente proporcional a la certidumbre con que se conoce su posición.* Como caso límite se conoce con exactitud el impulso del fotón antes de penetrar en la rendija, puesto que sabemos que mueve perpendicularmente a la pantalla y vale mc , pero en este caso el error posible en la apreciación de la posición es infinito, puesto que no sabemos dónde está.

Otro ejemplo interesante lo da el microscopio. El poder separador del mismo equivale, como se sabe, a la mayor longitud apreciable, o sea Δx , cuya fórmula, según la Microscopía, es:

$$\Delta x = \frac{c}{2 \nu \text{ sen. } \alpha}$$

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

representando por ν la frecuencia de la luz utilizada y por α la abertura con que los rayos penetraran en el objetivo. Por otro lado, la visión de una partícula supone que un rayo de luz, o mejor un fotón, ha sido desviado de su camino, desviación que viene regulada por el efecto Compton que indica que esta desviación del fotón produce una variación de velocidad en la partícula y con ello una variación en su impulso. La mayor variación en este impulso corresponde al caso en que el fotón encuentra la partícula según un ángulo α y es dispersado con el mismo ángulo. En este caso, el impulso de la partícula, según Compton, viene determinado por un error no superior a:



$$\Delta p_x = \frac{2 h \nu}{c} \text{sen. } \alpha.$$

El producto de este valor por el anterior da el resultado:

$$\Delta p_x \Delta x = h$$

conforme al principio de incertidumbre: *Todo aumento del poder separador de un microscopio supone una pérdida de precisión en la percepción de la velocidad de la partícula observada.*

Hemos visto en el § 16 que la velocidad del volante, allí representado por una onda, crece a saltos bruscos y lo mismo puede decirse de la velocidad de otro punto o cuerpo móvil que se represente. Evidentemente, repugna admitir un salto brusco en la velocidad; pero bien entendido este salto no existe, porque su valor, en cualquier medición que pueda hacerse con los aparatos más precisos, es siempre inferior a la Δv fijado por el principio de incertidumbre.

Lo mismo puede decirse a los valores discontinuos que en los ejemplos anteriores sale para la energía. Evidentemente el valor de ésta no varía bruscamente; lo que ocurre es que la diferencia entre dos valores sucesivos cae dentro de los límites del principio de incertidumbre.

CAPÍTULO IV

ECUACIÓN DE DIRAC

*Cómo se introduce
el relativismo en
Mecánica ondula-
toria*

La ecuación de Schrödinger permite deducir los tres números cuánticos, n , m , l , que a su vez son resultados experimentales. Pero queda sin justificar el cuarto número cuántico, σ , el Spin, que dicha ecuación no contiene, por lo que resulta incompleta para representar los hechos. ¿Será esto debido a que, hasta ahora, no hemos tenido en cuenta los efectos de la Relatividad restringida y generalizada? La primera porque cuenta con una variación de masa con la velocidad y añade una cuarta coordenada, ct , para la descripción de los fenómenos, y la segunda porque da una forma tensorial lo mismo a la materia que a la radiación, permitiendo incluir ambas aditivamente en las ecuaciones de Dinámica.

Trataremos, pues, de incluir el relativismo especulando sobre los resultados a que nos conduce, para el caso sencillo del movimiento de un electrón, primero en un espacio libre de fuerzas y después en un campo electromagnético.

En Mecánica se obtiene como expresión de la Jacobiana correspondiente a un electrón en movimiento sin campo exterior, y teniendo en cuenta que la energía total vale:

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} c^2,$$

(m_0 = masa en reposo; m = masa en movimiento; $\beta = \frac{v}{c}$ donde v representa la velocidad del electrón), la expresión:

$$m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0.$$

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

A esta expresión puede dársele una forma que recuerde mejor la relativista. Para ello recordaremos que, análogamente a que

$$p_x = m \frac{dx}{dt},$$

y otras expresiones en y y en z , se puede escribir un cuarto impulso referido a la coordenada ct :

$$p_{ct} = m \frac{d(ct)}{dt} = mc$$

y, teniendo en cuenta que $E = mc^2$ (§ 11), resulta, para esta componente del impulso, el valor $p_{ct} = \frac{E}{C}$, lo que sustituido en la última expresión da:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_{ct}^2 + m_0^2 c^2 = 0$$

o bien la forma más abreviada:

$$\sum_i^4 p_i^2 + m_0^2 c^2 = 0 \quad (1)$$

que es la expresión de la Jacobiana para un electrón teniendo en cuenta la relatividad restringida.

Esta expresión obtiene una forma más generalizada cuando el electrón se mueve en un campo de fuerzas o sea un campo electromagnético, porque las otras fuerzas posibles, las gravitatorias, no tienen importancia frente a las primeras. Para lograr esta expresión recordaremos que la ley fundamental de Dinámica, que contiene como caso particular la ley de Newton y las leyes de Fluido-dinámica, es

$$\frac{\partial (T^{k\mu} + S^{k\mu})}{\partial x^k} = 0$$

donde T es el tensor material y S el tensor electromagnético. Esto nos interesa en cuanto nos dice que en Relativismo se presentan la materia y la radiación sumadas, aparejadas, en el sentido que, cuando nos encontramos un problema resuelto para la materia aislada o una ecuación referida a ello, será suficiente sumar el tensor electromagnético al material para obtener la ecuación referida a la materia y a la radiación a la vez.

La Jacobiana relativista

Esto nos permite ampliar la ecuación 1 para cuando existe un campo electromagnético. En este caso la parte material está representada por los impulsos p_k . Debe buscarse, pues, los impulsos correspondientes al campo: Se obtienen fácilmente, análogamente a como lo hemos hecho para el impulso p_{ct} , dividiendo la energía representada por una carga e , en presencia de un campo con potencial, por la velocidad de la luz, c , con que se propaga. El potencial de un campo viene dado por el potencial vector, K, cuyas cuatro componentes son k_x, k_y, k_z, φ . La expresión definitiva de la Jacobiana será, pues, la que se obtenga de la expresión 1 sumando a los impulsos materiales los electromagnéticos:

$$\sum_1^4 \left(p_k + \frac{e K}{c} \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0.$$

Pero a nosotros no nos interesa esta Jacobiana que representa la ecuación del movimiento contando con la Relatividad restringida y generalizada, pero que no contiene el fondo cuántico de los hechos, sino una ecuación que lo resume todo. Eso lo lograremos si generalizamos la regla formal, dada en el § 23, para pasar de la Jacobiana no relativista a una ecuación que podríamos llamar de Schrödinger relativista.

Ecuación de Schrödinger relativista

Al tratar de aplicar la regla formal indicada nos encontramos aquí con un cuarto impulso, p_{ct} , para el cual no dimos allí ninguna regla, pero que generalizado puede decirse que equivale a $-\frac{\partial S}{\partial t}$ y que, a su vez, puede sustituirse

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

por el operador $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$, de modo que la ecuación buscada es

$$\left[\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x, y, z} - \frac{e}{c} k_{x, y, z} \right)^2 - \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c} \varphi \right)^2 + m_0^2 c^2 \right] \psi = 0 \quad (2)$$

donde el paréntesis rectangular significa el operador que se aplica a ψ en el sentido que las potencias se transformen en orden de derivación

§ 26. *Ecuación de Dirac*.—La ecuación (2), no obstante el rigor lógico con que ha sido planteada y su grado de generalidad al haber introducido en ella la energía magnética, no contiene el efecto del electrón rotatorio o *spin*; es insuficiente, pues, para interpretar los hechos. Aparte, además, que es de segundo orden en t , lo que es un inconveniente para una teoría de las transformaciones, de la que nos vemos precisados no hablar.

Para interpretar los hechos experimentales se necesita, por tanto, una ecuación que, además de contener el efecto spin, sea de primer orden en t y en las coordenadas de espacio para que conserve su invariancia frente a una transformación de Lorentz, como exige el Relativismo. Pero la ecuación de Schrödinger, que es de segundo orden en x, y, z , nos ha servido hasta ahora con relativa fecundidad para ordenar los fenómenos, y no puede ser equivalente a una de primero, pero sí a varias de primero. El ejemplo siguiente nos ilustrará: El postulado de Newton $mx'' = -\frac{\partial V}{\partial x}$ está representado por una ecuación de segundo orden y es equivalente a las dos de primero:

$$mx' = \text{impulso}, \quad \frac{d \text{ impulso}}{dt} = -\frac{dV}{dx}.$$

Dirac admite como ecuación adecuada la siguiente

$$(\rho_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m c) \psi = 0 \quad (3)$$

donde las p_i tienen la significación dada anteriormente (§ 23) y las α_i son coeficientes a determinar, procurando que esta ecuación sea equivalente a la 2 en caso de carencia de campo electromagnético, transformándola previamente en una de segundo orden por la aplicación del operador siguiente. (Nota matemática 2).

$$(-p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m c).$$

Determinados estos coeficientes la ecuación 3 obtiene la forma

$$(p_0 + p_1 \sigma_1 p_1 + p_1 \sigma_2 p_2 + p_1 \sigma_3 p_3 + p_3 m c) \psi = 0$$

donde las p_i y σ_i tienen la forma matricial. (Nota matemática 2). Por causa de la forma matricial de estos coeficientes esta última ecuación es equivalente a otras cuatro con coeficientes ordinarios.

Generalizando, como hemos hecho anteriormente, podemos suponer la presencia de un campo electromagnético, por lo que en la ecuación anterior, según expresa la ley general de Relatividad (§ 25) sumaremos a los impulsos p_i las componentes $\frac{e}{c} \varphi_i$ procedentes de este campo, y transformando esta ecuación en otra de segundo orden por la aplicación de un operador, análogamente a como lo hemos hecho antes, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left[- \left(p_0 + \frac{e}{c} \varphi_0 \right)^2 + \sum_k \left(p_k + \frac{e}{c} \varphi_k \right)^2 + m^2 c^2 + \frac{e h}{2 \pi c} \sum_k \sigma_k H_k + \frac{i e h}{2 \pi c} p_1 \sum_k \sigma_k E_k \right] \psi = 0.$$

Esta es la ecuación de Dirac y tiene dos partes: la primera, compuesta de los dos primeros términos, coincide con la ecuación 3, sin coeficiente matricial alguno; la segunda, compuesta de los otros dos términos, tiene coeficientes

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

matriciales y se refieren el uno al campo eléctrico y el otro al campo magnético. El referente al campo eléctrico no tiene significado real porque lleva el coeficiente imaginario i .

Supóngase para mayor sencillez que el campo electromagnético, en donde se mueve el electrón, tiene como única componente un campo magnético en la dirección del eje de las x , designado por H . Entonces el término material se reduce a $\frac{e h}{2 \pi c} \sigma H$, que es el que representa el efecto spin.

Cómo aparece analíticamente el efecto spin

Para demostrarlo recordaremos que el momento magnético, M , de una corriente formada por un solo electrón que describe un círculo de radio r con velocidad v vale $\frac{e r v}{2} = M$, que, en función del impulso mecánico, $p = m v r$, viene dado por:

$$M = \frac{e p}{2 m}$$

Pero en virtud de la cuantización de todo movimiento, es preciso que

$$\int_0^{2\pi} p d\alpha = n h = 2 \pi p ; \text{ o sea: } p = \frac{n h}{2 \pi}$$

Luego, el momento magnético vale $M = \frac{e n h}{4 \pi m}$ y la energía magnética: $M H = \frac{e n h}{4 \pi m} H$.

Comparemos ahora con la última ecuación. Para ello recordaremos que ésta procede de la Jacobiana (7') en la que si se quiere que sus términos tengan las dimensiones de una energía es preciso dividir por el factor $2 m$ que allí aparece. Entonces el tercer término de la ecuación anterior tiene la forma

$$\frac{e h}{4 \pi m c} \sigma_k H_k$$

que coincide con la energía de un electrón circulante en el seno de un campo magnético H , tal cual antes la hemos

calculado, para el valor cuántico $n = 1$, teniendo en cuenta que la c aparece por causa del paso de unidades magnéticas a electrostáticas y la σ_k puede tomar los valores de las matrices (Nota matemática) que son los 1.

De esto se deduce, pues, que la ecuación de Dirac tiene un término que representa la energía de un electrón por causa de su movimiento en un campo magnético, separado de los otros términos y cuantizada, por tanto, independientemente. Pero el resultado de la experimentación es que presenta esta cuantización, pero con un valor la mitad del anterior, o sea $\frac{1}{2}$.

Para subsanar esta anomalía, Uhlenbeck y Goudsmit imaginaron el electrón esférico, con extensión, provisto de carga superficial y masa uniforme girando alrededor de un eje que posee un momento mecánico la mitad de valor del correspondiente al valor de su magnético. De este modo las expresiones anteriores se refieren al electrón *giratorio* y no circulante que según que su eje sea paralelo o antiparalelo el campo magnético posee 0'5 ó - 0'5 de acción, tal como indicamos antes al hablar del spin.

Como se ve, estos resultados se salen de las ideas de la mecánica ondulatoria, pero satisfacen los experimentos. Posiblemente no son todos ellos más que muestras aisladas de una teoría más general que lo sintetice todo.

§ 27.—*Variación brusca del signo y de la masa de una carga eléctrica.*—Una nueva conquista de la ecuación de Dirac resulta de la comprobación de una consecuencia que primeramente pareció absurda y quedó confirmada después. Se trata de saber cuál es la transformación de la ecuación, si imaginamos que ella en vez de una carga e de masa m se refiere a una carga $-e$ con la misma masa. Al hacer esta sustitución resulta exactamente la misma ecuación, como puede comprobarse. Esto indica que las soluciones de una ecuación en $+e$ o en $-e$ son soluciones de una misma ecuación y, como precisamente el fundamento de esta Mecánica consiste en el paso de una solución a otra, resulta que se

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

puede pasar de una solución o estado en $+e$ a otra solución o estado con $-e$, o sea *el signo de una carga eléctrica puede cambiar espontáneamente*. Análogamente puede demostrarse por el mismo camino otra consecuencia más peregrina: que *la masa de una carga eléctrica puede hacerse brusca-mente negativa*; es decir, una masa que adquiere una aceleración de sentido contrario a la fuerza aplicada.

Nota matemática 1. Eligiendo un caso particular quedará comprobado fácilmente. Sea la función $\psi_n = \psi_0 \text{ sen } (n\alpha)$, ya estudiada en un ejemplo anterior. Se tiene, teniendo en cuenta que, en este ejemplo el volumen $d\tau$ será proporcional a $d\alpha$ y que $n = m$

$$\int \psi_n \psi_m d\tau = \int_0^{2\pi} \psi_0^2 \text{ sen.}^2 (n\alpha) d\alpha = \psi_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos. 2n\alpha}{2} d\alpha = \pi \psi_0^2.$$

La densidad viene expresada por un cuadrado de ψ_0 análogamente al electromagnetismo, donde viene expresada por un cuadrado del vector eléctrico o magnético.

Para el caso que n no igual a m se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \text{sen. } n\alpha \text{ sen. } m\alpha d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos. (n-m)\alpha d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos. (n+m)\alpha d\alpha = \frac{1}{2} \left[-\frac{\text{sen.}(n-m)\alpha}{n-m} + \frac{\text{sen.}(n+m)\alpha}{n+m} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Nota 2. Aplicando a la ecuación (3) el operador siguiente

$$(-p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m c)$$

se tiene:

$$(-p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m c) (p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m c) \psi = 0,$$

donde los coeficientes α representan ciertas magnitudes, a determinar, no conmutables, es decir, que cumplen la relación $\alpha_n \alpha_m$ no igual a $\alpha_n \alpha_m$.

La idea de Dirac consiste en transformar la ecuación primera (segundo paréntesis) en otra de segundo orden, mediante la aplicación del operador, y comparar el resultado con la ecuación 2. Como esta última está deducida con rigor lógico a partir del Relativismo y de la ecuación de Schrödinger, al compararla con el resultado de la transformación que buscamos se puede hallar la forma de los coeficientes α y, con ello, la ecuación obtenida arrastrará el valor lógico de la 2.

Haciendo, pues, las operaciones indicadas por el operador, teniendo en cuenta el significado de las p como derivadas (§ 23) y que el producto de dos p indica doble derivación, resultará la ecuación siguiente que presentaremos en tres grandes sumandos:

$$\left\{ \frac{h^2}{4 \pi^2} \left[\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \left(\alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \alpha_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \right] + \alpha_4^2 m c^2 \right\} \psi$$

$$- \frac{h^2}{4 \pi^2} \left[(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + \right.$$

$$\left. + (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \right] \psi$$

$$- \frac{h m c}{2 \pi i} \left[(\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha_2 \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left. + (\alpha_3 \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \psi = 0.$$

Para que esta ecuación pueda ser igual a la 2 en el caso de carencia de campo electromagnético, es suficiente que cada uno de los tres grandes sumandos valga cero, lo que se cumple si

$$\alpha_m \alpha_n + \alpha_n \alpha_m = 0 ; (n \text{ no igual a } m)$$

LOS CUANTOS DE ACCIÓN

para los dos últimos y si $\alpha_n^2 = 1$, para el primero, porque entonces dicho primer sumando se convierte en la ecuación 2. Ahora bien: por un procedimiento muy largo que no sería adecuado explicar aquí, Dirac saca los valores siguientes para que las α cumplan las condiciones que acabamos de hallar.

$$\alpha_1 = p_1 \sigma_1; \alpha_2 = p_1 \sigma_2; \alpha_3 = p_1 \sigma_3; \alpha_4 = p_3$$

donde las p y σ representan las matrices siguientes:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De ahí se pueden sacar los valores de las α , que sustituidos en 3 dan la forma 4 a la ecuación de Dirac.

*Terminóse la impresión de este Cuaderno
el día 20 de Febrero de 1934*

ANALES DE LA UNIVERSIDAD DE VALENCIA

VOLUMEN I.º * 1920-1921

- CUADERNO 1.º—Nota preliminar.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1920 a 1921, por el Dr. D. Adolfo Gil y Morte, Catedrático de Medicina.—Acuerdos del Claustro de la Universidad referentes a la publicación de estos ANALES.—Asamblea Universitaria: convocatoria.—64 páginas. (2 pesetas.)
- CUADERNO 2.º—Instituto de Idiomas: Antecedentes, Reglamento y Memorias de los Cursos 1919-1920 y 1920-1921.—Instituto de Estudios Actuariuales.—Instituto de Nipiología.—92 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNO 3.º—Don Rafael de Olóriz y sus Fundaciones culturales, por el Doctor D. Joaquín Ros, Catedrático de Derecho.—Asamblea Universitaria.—48 páginas y cinco láminas. (2 pesetas.)
- CUADERNO 4.º—Intercambio Universitario.—Los estudios de Química Biológica en las Universidades de Zaragoza y Valencia: Conferencias de los Doctores Rocasolano y Bermejo y Crónica de los actos realizados.—Profilaxis del Paludismo por el cultivo de las algas caráceas: Conferencia del Dr. Caballero.—140 páginas, dos láminas y un grabado. (4 pesetas.)
- CUADERNOS 5.º A 8.º—Extensión Universitaria.—Facultad de Derecho: Conferencias de los Doctores Villalonga, de Benito, Gallardo, Cabrera y Jordana.—Nota de la Redacción.—Índice del volumen 1.º—178 páginas. (5 pesetas.)

Los ocho Cuadernos correspondientes al Año I (1920-1921) de estos ANALES forman un volumen de 521 páginas, 7 láminas en papel couché y un grabado, que se vende, encuadrado a la rústica, al PRECIO ESPECIAL DE PROPAGANDA DE 15 PESETAS, incluidos los gastos de franqueo en paquete certificado.

VOLUMEN 2.º * 1921-1922

- CUADERNO 9.º—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1921 a 1922, por el Dr. D. Enrique Castell y Oria, Catedrático de Ciencias.—42 páginas. (2 pesetas.)
- CUADERNO 10.—Documentos referentes a la Autonomía Universitaria y su implantación en la Universidad de Valencia.—136 páginas. (5 pesetas.)
- CUADERNO 11.—La Enseñanza de Lenguas Modernas en los Estados Unidos.—Conferencias del Profesor Wilkins.—152 páginas. (7 pesetas.)
- CUADERNOS 12 y 13.—Memorias y Estadísticas de los Cursos 1919-1920 y 1920-1921, preparadas por la Secretaría general de la Universidad de Valencia.—130 páginas. (5 pesetas.)
- CUADERNOS 14 A 16.—Extensión Universitaria.—Facultad de Filosofía y Letras: Conferencias de los Doctores D. Pedro María López, D. Vicente Losada y D. Ramón Velasco y Pajares.—Índice del volumen 2.º—80 páginas. (3 pesetas.)

Los ocho Cuadernos correspondientes al Año II (1921-1922) de estos ANALES forman un volumen de 546 páginas y dos grabados, que se vende al PRECIO ESPECIAL DE PROPAGANDA DE 20 PESETAS, incluidos los gastos de franqueo en paquete certificado.

VOLUMEN 3.º * 1922-1923

- CUADERNO 17.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1922 a 1923, por el Dr. D. Ramón Velasco y Pajares, Catedrático de la Facultad de Filosofía y Letras.—92 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNO 18.—Extensión Universitaria.—Facultad de Filosofía y Letras: Conferencias del Doctor D. Rafael Altamira y sumario de las del Doctor D. José Deleito.—40 páginas. (2 pesetas.)
- CUADERNO 19.—El antiguo patrimonio de la Universidad de Valencia.—Memoria del Dr. D. Carlos Riba.—144 páginas y dos láminas. (6 pesetas.)
- CUADERNOS 20 A 24.—Estudios monográficos y servicios clínicos de la Facultad de Medicina.—Índice del volumen 3.º—228 páginas, un grabado y ocho láminas. (10 pesetas.)

Los ocho Cuadernos correspondientes al Año III (1922-1923) de estos ANALES forman un volumen de 492 páginas, un grabado y diez láminas, que se vende al PRECIO ESPECIAL DE PROPAGANDA DE 20 PESETAS, incluidos los gastos de franqueo en paquete certificado.

VOLUMEN 4.º * 1923-1924

- CUADERNO 25.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1923 a 1924, por el Dr. D. Manuel Cabrera y Warleta, Catedrático de Derecho.—68 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNO 26.—Extensión Universitaria.—Facultad de Derecho: Conferencias de los Sres. Maeztu y Atard González.—48 páginas. (2 pesetas.)
- CUADERNOS 27 Y 28.—Facultad de Derecho: Conferencias de los Doctores Ots Capdequi y de Benito.—La R. P. en Bélgica, por el Doctor D. Mariano Gómez González.—124 páginas. (5 pesetas.)
- CUADERNOS 29 Y 30.—Memorias y Estadísticas de los Cursos 1921-1922 y 1922-1923, preparadas por la Secretaría general de la Universidad de Valencia.—136 páginas. (5 pesetas.)
- CUADERNOS 31 Y 32.—La vida de la Universidad de Valencia desde 1919 a 1924, por el Dr. Deleito y Piñuela.—La Reforma de la Segunda Enseñanza, Ponencia de la Facultad de Filosofía y Letras.—El «Colegio de San Pablo» y el de «Na Monforta».—Índice del volumen 4.º—88 páginas. (5 pesetas.)

Los ocho Cuadernos correspondientes al Año IV (1923-1924) de estos ANALES forman un volumen de 454 páginas y 12 grabados, que se vende al PRECIO DE 20 PESETAS, incluidos los gastos de franqueo en paquete certificado.

VOLUMEN 5.º * 1924-1925

- CUADERNO 33.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1924 a 1925, por el Dr. D. Vicente Peset y Cervera, Catedrático de Medicina.—120 páginas. (5 pesetas.)
- CUADERNO 34.—Don Ignacio Tarazona y el Observatorio Astronómico de la Universidad de Valencia.—54 páginas y 8 láminas. (4 pesetas.)
- CUADERNOS 35 A 38.—Precedentes de la Universidad de Valencia, por el Doctor D. Antonio de la Torre y del Cerro, Catedrático de la Universidad de Barcelona.—128 páginas. (6 pesetas.)
- CUADERNOS 39 Y 40.—Memorias y Estadísticas de los Cursos 1923-1924 y 1924-1925, preparadas por la Secretaría general de la Universidad de Valencia.—Índice del Vol. 5.º—120 págs. (5 pesetas.)

Los ocho Cuadernos correspondientes al Año V (1924-1925) de estos ANALES forman un volumen de 422 páginas y 8 láminas que se vende al PRECIO DE 20 PESETAS, incluidos los gastos de franqueo en paquete certificado.

VOLUMEN 6.º * 1925-1926

- CUADERNO 41.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1925 a 1926, por el Dr. D. Francisco Beltrán Bigorra, Catedrático de Ciencias.—66 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNOS 42 A 44.—Extensión Universitaria.—Facultad de Derecho: Conferencias acerca de «La Organización y las actividades de la Sociedad de las Naciones».—156 páginas y 4 láminas. (8 pesetas.)
- CUADERNOS 45 A 47.—La enseñanza de la Patología General en la Facultad de Medicina de Valencia, por el Dr. D. Ramón Vila y Barberá, Catedrático titular de dicha asignatura.—76 páginas, 3 grabados y 6 láminas. (4 pesetas.)
- CUADERNO 48.—«Premio Olóriz».—Estudio histórico-crítico del Código Penal Argentino de 1922, por D. Elías Izquierdo Maronda, Doctor en Derecho.—El tercero en nuestro sistema hipotecario, por D. José M.^a Casado Pallarés, Licenciado en Derecho.—82 págs. (4 pesetas.)

Los ocho Cuadernos correspondientes al Año VI (1925-1926) de estos ANALES forman un volumen de 384 páginas y 20 láminas que se vende al PRECIO DE 20 PESETAS, incluidos los gastos de franqueo en paquete certificado.

VOLUMEN 7.º * 1926-1927

- CUADERNO 49.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1926 a 1927, por el Dr. D. José Casado y García, Catedrático de la Facultad de Filosofía y Letras.—72 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNOS 50 Y 51.—Memorias y Estadísticas de los Cursos 1925-1926 y 1926-1927, preparadas por la Secretaría general de la Universidad de Valencia.—128 páginas. (5 pesetas.)
- CUADERNOS 52 A 54.—La Representación Profesional en las Asambleas Legislativas, por D. José Medina Echavarría, alumno pensionado por la Universidad de Valencia.—90 páginas. (4 pesetas.)
- CUADERNOS 55 Y 56.—*En preparación.*
-

VOLUMEN 8.º * 1927-1928

- CUADERNO 57.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1927 a 1928, por el Ilmo. Sr. Dr. D. Joaquín Ros y Gómez, Catedrático de la Facultad de Derecho.—62 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNOS 58 Y 59.—Memorias y Estadísticas de los Cursos 1927-1928 y 1928-1929, preparadas por la Secretaría general de la Universidad de Valencia.—122 páginas. (5 pesetas.)
- CUADERNOS 60 A 64.—*En preparación.*
-

VOLUMEN 9.º * 1928-1929

- CUADERNO 65.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1928 a 1929, por el Dr. D. Enrique López Sancho, Catedrático de la Facultad de Medicina.—70 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNOS 66 Y 67.—Biografías de Francisco Pérez Bayer y José Iborra García, por el Dr. D. Francisco Cantó Blasco.—52 páginas y 2 láminas. (3 pesetas.)
- CUADERNOS 68 A 72.—*En preparación.*

VOLUMEN 10 * 1929-1930

- CUADERNO 73.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1929 a 1930, por el Dr. D. José Gascó y Oliag, Catedrático de la Facultad de Ciencias.—62 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNO 74.—La poesía del Cancionero de Uppsala, por Leopoldo Querol Roso.—118 páginas. (5 pesetas.)
- CUADERNOS 75 A 80.—*En preparación.*
-

VOLUMEN 11 * 1930-1931

- CUADERNO 81.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1930 a 1931, por el Dr. D. Juan de Contreras, Marqués de Lozoya, Catedrático de la Facultad de Filosofía y Letras.—56 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNO 82.—Discurso leído por el Excmo. Sr. Conde de Gimeno, en la solemne sesión necrológica que la Facultad de Medicina de Valencia celebró el 6 de Diciembre de 1930, en honor del ilustre sabio español Jaime Ferrán.—34 páginas. (1'50 pesetas.)
- CUADERNO 83.—Facultad de Filosofía y Letras. Seminario de Arte Valenciano. Historia de la Pintura Valenciana. Memoria y Trabajos de los Cursos 1928-1929 y 1929-1930.—152 páginas y 14 láminas. (9 pesetas.)
- CUADERNOS 84 A 88.—*En preparación.*
-

VOLUMEN 12 * 1931-1932

- CUADERNO 89.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1931 a 1932, por el Dr. D. José Castán Tobeñas, Catedrático de la Facultad de Derecho.—120 páginas. (5 pesetas.)
- CUADERNOS 90 A 96.—*En preparación.*
-

VOLUMEN 13 * 1932-1933

- CUADERNO 97.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1932 a 1933, por el Dr. D. Jesús Bartrina Capella, Catedrático de la Facultad de Medicina.—70 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNOS 98 A 104.—*En preparación.*
-

VOLUMEN 14 * 1933-1934

- CUADERNO 105.—Discurso leído en la solemne apertura del Curso de 1933 a 1934, por el Dr. D. Sixto Cámara Tecedor, Catedrático de la Facultad de Ciencias.—84 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNO 106.—Los cuantos de acción, por D. Fernando Ramón y Ferrando, Profesor de Física de la Universidad de Valencia.—72 páginas. (3 pesetas.)
- CUADERNOS 107 A 112.—*En preparación.*
-

OBRA NUEVA

Valencia artística y monumental, por Carlos Sarthou Carreres, con un prólogo de Mariano Gómez * *Guía gráfica de la Ciudad*, publicada por *Anales de la Universidad de Valencia* * Un lujoso volumen de 176 páginas, 132 hermosos grabados, 38 láminas en papel couché y una tricromía de J. Benlliure: **ocho pesetas.**