ANALES DE LA UNIVERSIDAD DE VALENCIA

ALFONSO M. RODRIGUEZ RODRIGUEZ

Profesor de la Facultad de Ciencias Políticas,
Económicas y Comerciales

SOBRE LA CONSTRUCCION DE UNA TEORIA MATEMATICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

SECRETARIADO DE PUBLICACIONES, INTERCAMBIO CIENTIFICO
Y EXTENSION UNIVERSITARIA
1970

Sobre la construcción de una teoría matemática de las operaciones financieras

Por ALFONSO M. RODRIGUEZ RODRIGUEZ

Catedrático de Matemática Financiera
Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas
de la Universidad de Valencia

SUMARIO

PRIMERA PARTE

El antecedente empírico: Las operaciones financieras

SEGUNDA PARTE

Construcción formal: La axiomática

TERCERA PARTE

Sistemas y leyes financieras

6. El factor financiero: Sus propiedades.
7. La expresión analítica del factor financiero.
8. La expresión analítica de la ecuación de equivalencia financiera: Las leyes financieras.
9. El precio unitario de financiación: Su expresión analítica.
10. Los sistemas financieros: Estacionario y dinámico.

CUARTA PARTE

Teoría y realidad: Las leyes financieras y los regímenes financieros

11. Los regímenes financieros: Sus clases.
12. Regímenes financieros prácticos:
    - A) Régimen financiero de interés simple.
    - B) Régimen financiero de interés simple anticipado.
    - C) Régimen financiero de descuento simple comercial.
    - D) Régimen financiero de descuento simple racional.
13. Regímenes financieros racionales:
    - A) Régimen financiero de capitalización compuesta.
    - B) Régimen financiero de descuento compuesto.
    - C) Régimen financiero dinámico.

SOBRE LA CONSTRUCCION DE UNA TEORIA MATEMATICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Por **Alfonso M. Rodríguez Rodríguez.**

Catedrático de Matemática Financiera,
Doctor en Ciencias Económicas.

0. Introducción

Toda disciplina científica empírica acota un grupo de fenómenos reales que convierte en objeto de su investigación y análisis, desde un determinado ángulo de observación característico de la misma. Este peculiar enfoque de su campo de observación, al propio tiempo que determina los límites de la investigación, dota de unidad conceptual al mismo.

A nosotros nos interesa estudiar un grupo de fenómenos o modalidades de la actividad económica, que suelen denominarse "operaciones financieras", las cuales se someten, regularmente, a determinados principios básicos que justifican su estudio independiente, principios que definen su "racionalidad". Toda operación financiera que no sea racional, es decir, que se realice al margen de los principios básicos aceptados, será excluible del campo de la teoría elaborada, no pudiendo ser explicada por la misma. La existencia de operaciones financieras no racionales en ningún modo contraviene la teoría formulada, pero son claro exponente de en qué medida la teoría explica la realidad.

Determinadas ciencias empíricas admiten una construcción matemática. Ello es posible cuando los principios que informan toda la teoría pueden condensarse en un reducido número de postulados que, de forma independiente, compatible y completa, enuncien las relaciones primitivas entre los conceptos iniciales de la disciplina, relaciones que, juntamente con las de la Lógica, permiten el desarrollo total de la teoría. Llegado este grado, la ciencia se ha formalizado, queriéndose indicar con ello que las conclusiones lógico-deductivas que se obtengan son siempre verdaderas en relación con los conceptos elaborados y los postulados admitidos.

Pues bien, la disciplina que estudia las operaciones financieras, como racionales, es susceptible de formalización matemática, a nuestro juicio, precisamente por ser tal racionalidad formulable a través de un sistema de postulados o axiomas que caracterizan, totalmente, los entes primitivos obtenidos por conceptualización de los reales, así como las relaciones sustantivas entre ellos.

Ello justifica que, en cuanto sigue, tratemos de:

1.° Describir los fenómenos económicos denominados "operaciones financieras", tratando de destacar en ellos sus características regulares.

2.° Conceptualizar los elementos primitivos y formular, en un grupo coherente y suficiente de postulados, las relaciones básicas entre los mismos.

3.° Deducir de tal axiomática, como manifestación más relevante de la teoría matemática de las operaciones financieras así construida, los tipos de leyes financieras implicados.

4.° Contrastar la teoría formulada con la realidad existente, a través de los regímenes financieros que en ella se manifiestan, a fin de obtener el valor explicativo de tal teoría.

PRIMERA PARTE

EL ANTECEDENTE EMPIRICO: LAS OPERACIONES FINANCIERAS

1. Las operaciones financieras: Elementos personales

Son las operaciones financieras manifestaciones de la actividad económica mediante las que se produce la financiación de los planes económicos temporales, sean éstos de consumo o producción. Financia un plan económico quien proporciona los medios precisos para su ejecución. Es financiado el sujeto económico del plan, empresario o consumidor. Ambos son los sujetos o elementos personales, activo y pasivo, de la operación financiera.

El primero realiza la función ahorradora en el sistema económico. Dispone de bienes o medios porque no los ha consumido anteriormente o, puesto que en una economía monetaria se desenvuelve, donde el dinero es medio de atesorar valor, dispone de la capacidad adquisitiva necesaria para la consecución de aquellos medios o bienes necesarios para la ejecución del plan económico. Se halla dispuesto a prescindir, temporalmente, de tales bienes, medios o capacidad adquisitiva; a prescindir de su capacidad de consumo; a financiar con su ahorro la actividad económica prevista en el plan, recobrando a su término la disponibilidad cedida en la forma que se conviniere y percibiendo un precio por el servicio financiero realizado, que recibe el nombre de interés, y es, a la vez, retribución a su esfuerzo ahorrador y participación en los resultados de la actividad financiada.

El segundo, sujeto pasivo de la financiación, ejerce una función inversora o desinversora en el acontecer económico, según que sus planes sean de producción o consumo de bienes duraderos, o de consumo inmediato. En el primer caso se adscriben bienes y medios no consumidos a la obtención de futuros bienes o, al menos, se difiere su consumo. En el segundo se realiza un consumo con medios que se compromete el consumidor a ahorrar en un futuro, reduciéndose el ahorro presente de la comunidad y, por tanto, la inversión. En este sentido podemos decir que el sujeto financiado es inversor, aceptando el doble signo. Este recibe los bienes, medios o capacidad adquisitiva precisa para la ejecución del plan, comprometiéndose a su restitución futura en la forma convenida y a soportar el coste de la financiación percibida.

Las operaciones financieras cumplen, entonces, la importante función de transformar el ahorro en inversión, al financiar la actividad temporal de los sujetos económicos. Son, en definitiva, los modos o formas mediante los cuales el ahorro financia la inversión. Esta es, a nuestro juicio, la acepción más general de las mismas y, al propio tiempo, la más sustantiva, entroncando a las operaciones financieras en el acontecer económico como una de sus funciones más fundamentales.

Eventualmente puede surgir la confusión personal entre ambos sujetos de la operación financiera, diciéndose que existe autofinanciación. Las operaciones de autofinanciación dan lugar a una problemática peculiar, diferente a las de financiación normal, por su gestación fuera del mercado financiero. La teoría matemática de las operaciones financieras proporciona, en tales operaciones, llamadas simplemente de inversión, criterios de decisión muy relevantes.

2. Elementos objetivos de la operación financiera: Los capitales financieros

Los elementos materiales, objetivos o reales, de la operación financiera son los bienes, medios o capacidad adquisitiva transferida con motivo de la misma, entre los que se halla el precio de la financiación o interés. Les es común a todos hallarse dotados de valor económico. Los denominamos "capitales financieros".

Puesto que todo capital financiero entraña una manifestación de valor económico, es conveniente hacer algunas precisiones sobre las diferentes concepciones del mismo. La actividad económica, objeto de estudio de las ciencias de este nombre, es considerada como actividad electiva de medios escasos, de usos alternativos, para el cumplimiento de fines. Tal actividad de elección se halla impregnada de un hondo sentido evaluatorio. Valorados los medios empleados y los fines alcanzables, el criterio de máxima economicidad que rige la actividad electiva exige un resultado neto máximo. La fijación de los criterios de valoración de medios y fines es de la máxima trascendencia en la selección del programa económico a seguir.

La valoración de medios empleados y bienes obtenidos no es única. Conviene distinguir entre la valoración subjetiva, que responde al particular aprecio que muestre el sujeto económico y está relacionada con su psicología, organización productiva, nivel de riqueza, expectativas, etc., y la valoración objetiva, consecuencia de la competencia de mercado, en los sistemas capitalistas, impuesta por la autoridad económica, en las economías centralizadas o dirigidas, o, finalmente, resultado de ambas fuerzas en los sistemas eclécticos. Las desviaciones entre ambos criterios de valor, subjetivo y objetivo, son el motor de las transacciones económicas, en las que el equilibrio de valor objetivo es compatible con el beneficio subjetivo de ambas partes que intervienen.

A la ciencia económica es la valoración objetiva y las leyes que la rigen lo que interesa primordialmente, pues sólo ella tiene los caracteres de generalidad y universalidad que informan el pensamiento científico. La valoración subjetiva queda en un trasfondo, justificando la actividad económica y construyendo la propia valoración objetiva como resultante de las valoraciones subjetivas de los individuos integrantes del sector económico, resultante que escinde al grupo en dos subgrupos: el de aquellos para los que el valor objetivo excede al personal, u oferentes, y el de aquellos otros para los cuales el valor subjetivo supera al objetivo, o demandantes.

El término "capital", en su acepción más amplia, designa el fondo de valor objetivo que corresponde a un bien, medio o conjunto de ellos, abstracción hecha de sus características cualitativas de composición, locacionales o de emplazamiento físico y temporales que afectan al "instante-valor" o momento de la valoración. El capital es un fondo de valor objetivo que prescinde de cuál sea su origen, si bien esté influido decisivamente por él en su determinación.

Pero en una economía monetaria existe un bien, el dinero, que entre otras funciones cumple la de ser medida de valor de los restantes bienes. Pese a su deficiencia como metro de valor, por su falta de estabilidad, la unidad monetaria es el denominador común en que se expresa el valor de todo bien o conjunto de ellos. La expresión monetaria de un capital, es decir, del fondo de valor que representa, la denominamos "cuantía" del mismo.

Si un sujeto ostenta la plena propiedad del capital, esto es, es titular con plena capacidad de ejercicio de todos los derechos que ésta incorpora, la cuantía es medida del valor objetivo atribuible a tal sujeto. Pero si surgen limitaciones a la plena propiedad en favor de tercero, es decir, si los derechos que la plena propiedad incorpora son atribuibles a diferentes sujetos, la cuantía del capital no es suficiente ya para expresar el valor atribuible a uno de ellos.

A nosotros nos interesa referirnos, ahora, a una limitación a la plena propiedad que supone un derecho contrapuesto, consistente en el compromiso adquirido en un momento dado, denominado "instante-origen", de entregar el capital a un tercero en otro momento posterior, denominado "instante-vencimiento" o, simplemente, "vencimiento". Designamos como "diferimiento" del capital sometido a esta limitación en su plena propiedad al plazo o intervalo temporal existente entre el "instante-origen" en que se conviene su entrega y transmisión aplazada y el "vencimiento" en que se consuma ésta.

Observamos que los elementos reales de la operación financiera, que hemos denominado "capitales financieros", son capitales afectados de diferimiento, es decir, capitales que han de ser transmitidos en un vencimiento no coincidente, necesariamente, con el instante-origen en que se conviene la operación. Los caracteres determinantes de tales capitales financieros son, pues, cuantía y diferimiento, con el significado que ya les hemos atribuido.

Esta concepción del capital financiero que acabamos de establecer difiere de aquella otra, muchas veces mantenida, que lo considera como capital referido a su vencimiento, o bien expresión monetaria del valor de un bien o conjunto de bienes, referida al instante de su disponibilidad. Según ella, el capital financiero se identifica con la cuantía referida a su instante-valor cuando el instante-valor coincide con el vencimiento.

Dos aspectos hay que destacar en tal concepción: Uno, la coincidencia entre el instante-valor y el vencimiento, que es habitual en las operaciones en que los capitales transferidos son dinerarios, pero no necesaria si se trata de bienes diferentes. En todo caso, tal coincidencia es irrelevante si, como es frecuente, se hacen hipótesis de estabilidad monetaria y económica en el transcurso de la operación financiera, pues en tal caso la cuantía es la misma cualquiera que fuere el instante-valor. El otro aspecto es la referencia al vencimiento. Pero éste, por sí solo, no tiene trascendencia financiera, sino meramente coyuntural, si no es por señalar el fin del diferimiento, que se inicia en el instante-origen en que se concierta la operación desde el cual es contemplado el vencimiento, aunque esto no se manifieste explícitamente en la concepción que comentamos.

Por ello, un "capital en *t*" no tiene sentido financiero preciso si no está referido a un determinado instante-origen.

Nosotros entendemos que en la consideración económica de un capital financiero hay que computar su cuantía, que puede sobreentenderse determinada en un instante-valor coincidente con el vencimiento, y todos y cada uno de los instantes que comprende el diferimiento, desde el instante-origen hasta el vencimiento, cuya influencia en la apreciación del capital financiero es inevitable, si bien la consideración financiera se limite a observar la extensión del diferimiento.

Diremos, finalmente, que cuando se considera el capital financiero como cuantía con referencia al vencimiento, no nos parece adecuada la simbolización del mismo por el complejo (C, t), sino por el escalar temporal C_t ya que t no es una referencia cuantitativa, sino meramente cualitativa del instante-vencimiento e instante-valor.

3. El elemento convencional de la operación financiera: El equilibrio o equivalencia financiera

La operación financiera se muestra como un acuerdo de voluntades, propio de un acto de mercado, en el que los sujetos convienen una transacción mutua de capitales financieros que es presidida por un equilibrio o equivalencia de las aportaciones según una consideración objetiva de valor.

La naturaleza de este equilibrio merece un detenido análisis, pues caracteriza a las operaciones financieras como objeto de estudio independiente del de otras operaciones de mercado y permite la construcción de una teoría matemática de las mismas. Ya hemos dicho que el criterio de valoración, en el que deba apoyarse el equilibrio de las prestaciones, ha de ser objetivo, esto es, fundado en determinadas características de las prestaciones y del mercado en que la operación se realiza, independientes de los sujetos activo y pasivo de la misma. Ello es debido a que la operación financiera se contempla como un acto de mercado y no como una transacción aislada. La investigación económica, en este punto, trata de explicar qué principios rigen la valoración objetiva de los capitales financieros que integran las prestaciones de la operación, que es tanto como explicar el propio equilibrio.

Dos direcciones cabe seguir para caracterizar tal equivalencia en las operaciones financieras: Una, directa, consistente en observar qué factores influyen en ella y con qué propiedades. Otra, indirecta, fundada en el estudio de la formación del precio de la financiación o interés que, al intervenir en la operación, equilibra ambas prestaciones. Ambas van a ser desarrolladas seguidamente.

A) *Características de la equivalencia financiera*

Resumimos las que, a nuestro entender, se manifiestan regularmente en las operaciones financieras:

a) La equivalencia entre dos capitales financieros reúne las propiedades lógicas de reflexividad, reciprocidad y transitividad. Otra cosa sería incompatible con la estabilidad del mercado financiero.

b) La equivalencia entre dos capitales financieros cumple una relación cuantitativamente exacta que liga sus cuantías y la extensión de sus diferimientos.

c) De dos capitales financieros equivalentes, corresponde siempre mayor cuantía al capital con mayor diferimiento. Es consecuencia del principio económico conocido por "preferencia por el tiempo", enunciado por Fisher, según el cual entre capitales de la misma cuantía es más apreciado el que tenga vencimiento más próximo. Tiene su antecedente en la "ley de la subestimación de las necesidades futuras", que, para el consumo, enunció Böhm Bawerk, y en la llamada "productividad temporal" en la teoría de la producción.

d) Si dos capitales financieros son equivalentes, también lo son aquellos otros que, con los mismos diferimientos, mantienen la proporcionalidad entre sus cuantías.

e) Un conjunto de capitales financieros equidiferidos es equivalente a un capital único que, con el mismo diferimiento, tenga cuantía suma de las de aquellos que integran el conjunto.

B) *Características del precio financiero o interés*

Dos tipos de condicionantes determinan el precio de la financiación o interés. Externas unas, que se manifiestan a través del mercado financiero, como resultado de la coyuntura y expectativas futuras. Internas a la operación las otras, que son la cuantía de disponibilidad de financiación proporcionada por la operación, en íntima dependencia de las cuantías de los capitales financieros que en ella intervienen, y el plazo de financiación durante el cual tal disponibilidad se cede, dependiente, a su vez, de los diferimientos de los capitales antedichos. El estudio de las primeras corresponde a la teoría económica general y son un dato para la operación financiera. Son las segundas las que deberemos analizar aquí.

La influencia de la cuantía de disponibilidad y su plazo, en el precio de financiación, se estima uniforme u homogénea en las operaciones financieras que consideramos racionales. Este principio, que nosotros denominamos "Postulado clásico de la Matemática Financiera", se puede sintetizar diciendo que "el interés es proporcional a la cuantía y al plazo de financiación". El tanto de proporcionalidad, llamado tanto de interés, es el dato para la operación financiera que recoge aquellas influencias externas del sistema económico y que se condensan en el mercado financiero.

No parece difícil justificar la influencia uniforme u homogénea de la cuantía de disponibilidad cedida, mediante la operación, en el precio de la financiación, en general. Si así no fuera, cabría obtener diferentes costes financieros fraccionando en varias una operación de financiación, lo cual produciría una acusada inestabilidad en el equilibrio del mercado financiero.

No tan sencillo es aceptar la homogeneidad del plazo. Parece razonable en ambiente de estabilidad económica o desarrollo uniforme y equilibrado. No así si se prevén desequilibrios o bruscas alteraciones en la actividad económica durante el plazo de financiación. Ahora bien, las operaciones financieras que se realizan en tal ambiente de inestabilidad tienen características especulativas que se superponen a las puramente financieras, no debiendo ser explicadas por una teoría general de las mismas. Ello justifica la hipótesis de uniformidad u homogeneidad del plazo, en cierto modo, sinónima de estabilidad o desarrollo equilibrado durante el mismo, que contiene el postulado clásico. En el modelo matemático que construiremos de nuestra disciplina, nosotros no recogeremos con generalidad la hipótesis que comentamos, como más adelante comprobaremos.

La aparente simplicidad del postulado clásico no debe confundirnos, pues es tan sólo intuitiva, no operativa. Ello es debido a que el precio del servicio financiero se devenga con la prestación del mismo, es decir, continuamente durante el plazo de financiación. Las anticipaciones o aplazamientos que se produzcan en el pago de tal precio modifican la cuantía de la disponibilidad de financiación, suponiendo una reducción o ampliación de la financiación otorgada.

El postulado clásico encierra un criterio de valoración de capitales financieros que caracteriza la equivalencia de la operación, más restrictivo, como comprobaremos, que aquel que se deduce de las características resaltadas, directamente, de la equivalencia financiera, del cual puede considerarse un caso particular.

4. Las operaciones financieras aleatorias

Ya hemos dicho que los caracteres que determinan un capital financiero son cuantía y diferimiento. Estos pueden venir definidos en términos ciertos o determinísticos, o bien en términos de probabilidad. Esto último sucede cuando la cuantía, el diferimiento, o ambos, toman su valor en dependencia del acaecimiento de un suceso impreciso en el instante-origen, del que sólo su distribución de probabilidad se conoce. Denominamos "capital financiero aleatorio", en contraposición a los capitales financieros ciertos, a aquel que está definido en términos de probabilidad para alguna o todas sus componentes.

Aquellas operaciones financieras en las que alguna de las prestaciones contiene algún capital financiero aleatorio se denominan "operaciones financieras aleatorias" u "operaciones actuariales". También en ellas se muestra el equilibrio de prestaciones o equivalencia financiera, pero supeditada a un criterio convencional al que nos vamos a referir.

Definamos, primeramente, como "capital financiero medio probable" de otro aleatorio al que representa el centro de gravedad de la variable aleatoria bidimensional que simboliza aquel capital financiero aleatorio. Es decir, el capital financiero cierto cuya cuantía y diferimiento son los correspondientes valores medios de tales variables marginales.

Entonces, la equivalencia ya caracterizada de las operaciones financieras ciertas resulta extendida a las operaciones financieras aleatorias, con la adición de esta nueva característica:

f) Todo capital financiero aleatorio es equivalente a su capital financiero medio probable.

SEGUNDA PARTE

CONSTRUCCION FORMAL: LA AXIOMATICA

5. Definiciones y postulados

En la parte anterior hemos presentado la realidad económica, objeto de nuestro estudio, señalando las características o principios que en tal grupo de fenómenos se manifiestan con regularidad. Ello nos permitirá, ahora, la construcción de una teoría de las operaciones financieras, que realizaremos como matemática, esto es, estableciendo los conceptos primitivos y sus propiedades básicas mediante definiciones y postulados que constituirán su axiomática, obteniendo así un modelo matemático de aquella realidad que tratamos de explicar.

De este modo conseguimos dotar de la máxima racionalidad a la teoría de las operaciones financieras, destacando los supuestos básicos sobre los que se funda la misma. El desarrollo de las propiedades que de éstos se derivan, en relación con los diferentes tipos de operaciones financieras, permitirá establecer una sólida base en que se asiente un cálculo financiero que facilite el estudio técnico de las mismas.

Pasamos, pues, a la exposición de la axiomática de la matemática de las operaciones financieras que estamos elaborando en el presente trabajo:

Definición 1.ª

Denominamos *capital financiero* a un ente representable por un complejo de dos componentes reales, no negativas, llamadas *cuantía* y *diferimiento*. Lo simbolizamos (C, T) y representamos por F al conjunto de todos los posibles estados de tal magnitud o capitales financieros concretos.

Definición 2.ª

Variación entre dos capitales financieros es la diferencia entre sus cuantías. *Diferimiento* entre ellos es la diferencia entre sus diferimientos.

Siendo (C, T) y (C', T') dos capitales financieros, variación y diferimiento entre los mismos los representamos así:

$$\Delta C = C' - C$$

$$\Delta T = T' - T$$

Definición 3.ª

Denominamos *relación de equivalencia financiera* a toda relación de equivalencia en el conjunto F, definida mediante una ecuación que ligue las componentes de los elementos de F equivalentes, tal que, además de cumplir las propiedades lógicas de reflexividad, reciprocidad y transitividad, que caracterizan toda relación de equivalencia, presente las siguientes de naturaleza financiera:

a) Si dos capitales financieros son equivalentes, lo son también todos aquellos que, con los mismos diferimientos, mantengan invariante la proporcionalidad o razón entre sus cuantías (principio de homogeneidad de la equivalencia respecto a las cuantías).

b) La variación y el diferimiento entre capitales financieros equivalentes son, siempre, del mismo signo (principio de positividad del interés).

Una relación de equivalencia financiera, entonces, viene definida por una ecuación del tipo:

$$E(C, C', T, T') = 0; \qquad C, C', T, T' \geqslant 0$$

con las siguientes propiedades:

1.ª Para todo $C, T \geqslant 0$, es $E(C, C, T, T) = 0$.

2.ª Si $E(C, C', T, T') = 0$, es $E(C', C, T', T) = 0$.

3.ª Si $E(C, C', T, T') = 0$ y $E(C', C'', T', T'') = 0$, es

$$E(C, C'', T, T'') = 0$$

4.ª Si $E(C, C', T, T') = 0$ y es k cualquier número real no negativo, es

$$E(k \cdot C, k \cdot C', T, T') = 0$$

5.ª Si $E(C, C', T, T') = 0$ y es $\Delta C = C' - C$ y $\Delta T = T' - T$, es

$$\text{signo } \Delta C = \text{signo } \Delta T$$

La equivalencia de dos capitales financieros la representaremos

$$(C, T) = (C', T')$$

Postulado I

Existencia de la equivalencia financiera entre capitales ciertos.

"En el conjunto *F* se pueden definir relaciones de equivalencia financiera."

Definición 4.ª

Dado un conjunto de capitales financieros equidiferidos —subconjunto de *F*—, denominamos *suma* del mismo al capital del mismo diferimiento, y cuantía suma de las de aquellos que integran el conjunto. Simbólicamente,

$$\sum_{i=1}^{n} (C_i, T) = (\sum_{i=1}^{n} C_i, T)$$

Suma de diferimiento *T* de un conjunto de capitales financieros cualesquiera es la suma del conjunto de capitales equidiferidos, con diferimiento *T*, equivalentes a aquéllos. Simbólicamente:

$$\sum_{i=1}^{n} (C_i, T_i) = \sum_{i=1}^{n} (C'_i, T) = (\sum_{i=1}^{n} C'_i, T),$$

donde hemos considerado $(C'_i, T) = (C_i, T_i)$, para todo $i = 1, 2 \ldots n$.

La definición de suma con diferimiento *T* puede extenderse a conjuntos unitarios de capitales financieros, con tal de considerar como tal el capital financiero equivalente de diferimiento *T*.

Teorema de Compatibilidad

Todas las sumas de un conjunto de capitales financieros son equivalentes.

Demostración:

De la homogeneidad de la ecuación de equivalencia financiera respecto a las cuantías, deducimos:

$$E\left(1, \frac{C'}{C}, T, T'\right) = 0,$$

y, explicitando la razón C′/C, que denominaremos "factor financiero" más adelante, obtenemos:

$$\frac{C'}{C} = e(T, T'),$$

que permite determinar la cuantía de todo capital equivalente a *(C, T)*, para todo diferimiento *T'*,

$$C' = C \cdot e\,(T, T')$$

Consideremos, ahora, un conjunto de capitales financieros

$$\{(C_1, T_1), (C_2, T_2) \ldots (C_n, T_n)\}$$

y sean (C', T') y (C'', T'') sus sumas en dos diferimientos cualesquiera T' y T''. Siendo

$$(C_i, T_i) = (C'_i, T') = (C''_i, T'')$$

para $i = 1, 2 \ldots n$, es

$$C' = \sum_{i=1}^{n} C'_i \quad \text{y} \quad C'' = \sum_{i=1}^{n} C''_i.$$

Pero sabemos que

$$\begin{aligned} C''_1 &= C'_1 \cdot e\,(T', T'') \\ C''_2 &= C'_2 \cdot e\,(T', T'') \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \\ C''_n &= C'_n \cdot e\,(T', T'')\,; \end{aligned}$$

sumando ordenadamente:

$$\sum_{i=1}^{n} C''_i = \sum_{i=1}^{n} C'_i \cdot e\,(T', T''),$$

o bien:

$$C'' = C' \cdot e\,(T', T'')\,;$$

luego como queríamos demostrar:

$$(C', T') = (C'', T'').$$

Este teorema hace compatible con el anterior el siguiente

Postulado II

Extensión de la equivalencia financiera a conjuntos de capitales ciertos.

"Todo conjunto de capitales financieros es equivalente a su suma."

Siendo $(C, T) = \sum_{i=1}^{n} (C_i, T_i)$, podemos escribir

$$\{(C_1, T_1), (C_2, T_2) \ldots (C_n, T_n)\} = (C, T).$$

En este postulado se halla implícita la definición de una relación de equivalencia en el conjunto $R(F)$, formado por todas las partes o subconjuntos del F. En efecto, dos conjuntos de capitales financieros son equivalentes si lo son sus sumas, pues la transitividad de la relación de equivalencia permite escribir: si es

$$\{(C_1, T_1), (C_2, T_2) \ldots (C_n, T_n)\} = (C, T)$$

$$\{(C'_1, T'_1), (C'_2, T'_2) \ldots (C'_n, T'_n)\} = (C', T')$$

siendo equivalentes las sumas

$$(C, T) = (C', T'),$$

resulta ser

$$\{(C_1, T_1) \ldots (C_n, T_n)\} = (C, T) = (C', T') = \{(C'_1, T'_1) \ldots (C'_n, T'_n)\}$$

Es fácil comprobar que tal relación de equivalencia entre conjuntos cumple las propiedades reflexiva, recíproca y transitiva, que la caracterizan como tal.

Definición 5.ª

Denominamos *capital financiero aleatorio* a un ente representable por una variable aleatoria bidimensional, en el campo complejo de componentes reales no negativas, designando a las variables marginales *cuantía aleatoria* y *diferimiento aleatorio*, respectivamente, y definida por su correspondiente función de distribución.

El centro de gravedad de tal variable aleatoria representa un capital financiero cierto que denominamos *capital financiero medio probable* del correspondiente aleatorio.

Simbolizamos el capital aleatorio (ξ, η) y su capital medio $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, donde $\bar{\xi} = E(\xi)$ y $\bar{\eta} = E(\eta)$.

Postulado III

Extensión de la equivalencia financiera a capitales aleatorios o conjuntos de ellos.

"Todo capital financiero aleatorio, o conjunto de ellos, es equivalente al correspondiente capital financiero medio, o conjunto de aquéllos."

Simbólicamente,

$$(\xi, \eta) = (\bar{\xi}, \bar{\eta})$$

o bien

$$\{(\xi_1, \eta_1), \ldots (\xi_n, \eta_n)\} = \{(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1) \ldots (\bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n)\}$$

Si representa $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los capitales financieros aleatorios, que comprende los ciertos como caso particular de variable aleatoria con distribución causal, y $R(\mathcal{F})$ el conjunto de todas las partes de $\mathcal{F}$, este postulado introduce una relación de equivalencia en el conjunto $R(\mathcal{F})$. Serán ahora equivalentes dos conjuntos de capitales financieros aleatorios si lo son las sumas de los correspondientes conjuntos de capitales financieros medios.

La comprobación de que tal relación cumple las características lógicas de reflexividad, reciprocidad y transitividad, que la califican de equivalencia, resulta trivial.

Definición 6.ª

Denominamos *operación financiera* a toda identidad entre conjuntos de capitales financieros. Acompañándole el calificativo de *aleatoria* cuando en alguno de los conjuntos, o en los dos, se manifiesta un capital financiero de este carácter. Tal identidad entraña la previa definición de una relación de equivalencia financiera en el conjunto $\mathcal{F}$, a la que está referida.

Las seis definiciones anteriores han introducido los conceptos elementales que precisa la teoría y los tres postulados establecen las propiedades básicas que los caracterizan, formalizando, de este modo, una teoría matemática de las operaciones financieras.

Alguna de las propiedades exigidas a la relación de equivalencia financiera, como la homogeneidad respecto a las cuantías o la positividad del interés, o ambas, podrían ser excluidas. Con ello se habría conseguido una teoría más amplia, con cabida para otro tipo de operaciones financieras. Pero ello no supone mejora alguna si tales operaciones carecen de sentido económico o suponen excepciones que no deben ser explicadas por la teoría general, como sucede con las operaciones financieras de tipo especulativo. En este caso, la mayor amplitud de la teoría sólo se consigue con merma de su capacidad explicativa de la realidad que interpreta, lo cual perjudica, evidentemente, a la misma.

Asimismo, el criterio de equivalencia entre capitales financieros aleatorios expuesto, que se funda en los valores medios de las correspondientes variables marginales, pudo apoyarse en los valores más frecuentes, en sus medianas o en otras posibles características de la variable aleatoria. La teoría resultante de esta modificación puede, en algunos casos, ofrecer mayor fidelidad interpretativa. Sin embargo, una teoría general de la gran masa de operaciones financieras habituales creemos debe responder a los postulados seleccionados, reflejo conceptual de sus caracteres normales.

Diremos, finalmente, que el modelo matemático así creado no es, a nuestro juicio, restrictivo, pues permite considerar, como veremos, una amplia clase de operaciones financieras de acusado sentido dinámico, hoy todavía infrecuentes.

TERCERA PARTE

SISTEMAS Y LEYES FINANCIERAS

6. El factor financiero: Sus propiedades

Al demostrar el teorema de compatibilidad, en la precedente parte, observamos cómo de la homogeneidad de la ecuación definidora de la equivalencia financiera, respecto a las cuantías, se deducía la expresión

$$C' = C \cdot e(T, T'),$$

siendo $e(T, T')$ una función real de dos variables reales, no negativas, que denominamos "factor financiero".

El factor financiero permite, entonces, obtener fácilmente la cuantia de todo capital equivalente al (C, T), con el diferimiento T'.

Estudiemos, seguidamente, cuáles son las propiedades del factor financiero que se desprenden de aquéllas de la equivalencia financiera postulada entre capitales.

Propiedad 1.ª

Teniendo presente que $e(T, T') = C'/C$, se deduce inmediatamente que para todo C y C′ no negativos

$$e(T, T') > 0$$

Propiedad 2.ª

Escribamos la variación entre las cuantías de dos capitales financieros equivalentes del siguiente modo:

$$\Delta C = C' - C = C \cdot e(T, T') - C = C\,[e(T, T') - 1]$$

De la reflexividad de la relación de equivalencia deducimos que $\Delta C = 0$ si $T' = T$. Del principio de positividad del interés se desprende que $\Delta C \gtrless 0$ si $T' \gtrless T$. Es decir, reuniendo ambos resultados, $\Delta C \gtreqless 0$ para $T' \gtreqless T$.

Entonces,

$$e(T, T') \gtreqless 1 \qquad \text{para} \qquad T' \gtreqless T\,.$$

Propiedad 3.ª

La reciprocidad de la relación de equivalencia determina que si $(C, T) = (C', T')$, es $(C', T') = (C, T)$.

Entonces

$$e(T, T') = \frac{C'}{C} \qquad \text{y} \qquad e(T', T) = \frac{C}{C'},$$

luego

$$e(T, T') = e(T', T)^{-1}$$

o bien

$$e(T, T') \,.\, e(T', T) = 1\,.$$

Propiedad 4.ª

La transitividad implica que si $(C, T) = (C', T')$ y $(C', T') = (C'', T'')$, es $(C, T) = (C'', T'')$.

Entonces

$$e(T, T') = \frac{C'}{C}, \qquad e(T', T'') = \frac{C''}{C'} \qquad \text{y} \qquad e(T, T'') = \frac{C''}{C},$$

luego

$$e(T, T') \,.\, e(T', T'') = e(T, T'')$$

o bien, considerando que $e(T, T'') = e(T'', T)^{-1}$,

$$e(T, T') \,.\, e(T', T'') \,.\, e(T'', T) = 1$$

propiedad circular que recibe el nombre de "escindibilidad financiera" y es consustancial con la relación de equivalencia financiera definida.

Propiedad 5.ª

Si aceptamos que la función $e(T, T')$ sea continua y derivable respecto a sus dos variables, se verifica que

$$\frac{\delta e(T, T')}{\delta T'} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\delta e(T, T')}{\delta T} < 0 .$$

En efecto,

$$\frac{\delta e(T, T')}{\delta T'} = \lim_{\Delta T' \to 0} \frac{e(T, T' + \Delta T') - e(T, T')}{\Delta T'} =$$

$$= \lim_{\Delta T' \to 0} \frac{e(T, T') \cdot e(T', T' + \Delta T') - e(T, T')}{\Delta T'} =$$

$$= e(T, T') \cdot \lim_{\Delta T' \to 0} \frac{e(T', T' + \Delta T') - 1}{\Delta T'} > 0$$

puesto que $e(T, T') > 0$ y $e(T', T' + \Delta T') - 1$ tiene el signo de $\Delta T'$ (propiedades 1.ª y 2.ª).

Del mismo modo,

$$\frac{\delta e(T, T')}{\delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{e(T + \Delta T, T') - e(T, T')}{\Delta T} =$$

$$= \lim_{\Delta T \to 0} \frac{e(T + \Delta T, T') - e(T, T + \Delta T) \cdot e(T + \Delta T, T')}{\Delta T} =$$

$$= \lim_{\Delta T \to 0} e(T + \Delta T, T') \cdot \lim_{\Delta T \to 0} \frac{1 - e(T, T + \Delta T)}{\Delta T} < 0$$

ya que $\lim\limits_{\Delta T \to 0} e(T + \Delta T, T') = e(T, T') > 0$ y $1 - e(T, T + \Delta T)$ es de signo contrario a ΔT.

7. La expresión analítica del factor financiero

Las anteriores propiedades nos permiten determinar la forma analítica del factor financiero, como veremos seguidamente.

Definamos previamente, para ello, la función auxiliar

$$f(T, T') = |e(T, T')^{\frac{1}{T'-T}}|$$

es decir,

$$e(T, T') = f(T, T')^{T'-T}$$

función real uniforme, no negativa, definida para todo $T' \neq T$.

Para $T' = T$, aceptada la continuidad y derivabilidad de $e(T, T')$ respecto a sus variables, tenemos:

$$f(T, T) = \lim_{\Delta T' \to 0} |e(T, T + \Delta T)^{\frac{1}{\Delta T}}| = e^{\lim\limits_{\Delta T \to 0} \frac{e(T, T + \Delta T) - 1}{\Delta T}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{\Delta T \to 0} \frac{e(T, T + \Delta T) - e(T, T)}{\Delta T}} = e^{\left[\frac{\delta e(T, T')}{\delta T'}\right]_{T' = T}}$$

Luego la función $f(T, T')$ se halla definida para todo valor no negativo de T y T'.

Comprobemos, ahora, que la función $f(T, T')$ es simétrica respecto a sus variables. Partiendo de la propiedad 3.ª del factor financiero

$$e(T, T') = e(T', T)^{-1}$$

deducimos

$$f(T, T')^{T'-T} = f(T', T)^{T'-T};$$

es decir,

$$f(T, T') = f(T', T)$$

como tratábamos de probar.

Tratemos, ahora, de determinar la forma analítica que debe corresponder a la función $f(T, T')$. Partamos de la propiedad 4.ª del factor financiero

$$e(T, T') \cdot e(T', T'') = e(T, T'')$$

o, bien,

$$f(T, T')^{T'-T} \cdot f(T', T'')^{T''-T'} = f(T, T'')^{T''-T}; \qquad [1]$$

derivando respecto a T' ambos miembros, obtenemos

$$\left[f(T, T')^{T'-T} \ln f((T, T') + (T' - T) f(T, T')^{T'-T-1} \frac{\delta f(T, T')}{\delta T'} \right]$$

$$. f(T', T'')^{T''-T'} + f(T, T')^{T'-T} .$$

$$\left[-f(T', T'')^{T''-T'} \ln f(T', T'') + (T'' - T') f(T', T'')^{T''-T'-1} \frac{\delta f(T', T'')}{\delta T'} \right] = 0 ,$$

que debe cumplirse para todo T' no negativo y, en particular, para $T' = T$ y para $T' = T''$, resultando

$$\ln \frac{f(T, T)}{f(T, T'')} + (T'' - T) \left[\frac{\delta \ln f(T', T'')}{\delta T'} \right]_{T' = T} = 0$$

$$\ln \frac{f(T, T'')}{f(T'', T'')} + (T'' - T) \left[\frac{\delta \ln f(T, T')}{\delta T'} \right]_{T' = T''} = 0$$

y como, por la simetría de la función, es

$$\left[\frac{\delta \ln f(T', T'')}{\delta T'} \right]_{T' = T} = \left[\frac{\delta \ln f(T, T')}{\delta T'} \right]_{T' = T''}$$

resulta

$$\ln \frac{f(T, T)}{f(T, T'')} = \ln \frac{f(T, T'')}{f(T'', T'')}$$

y, por tanto,

$$\frac{f(T, T)}{f(T, T'')} = \frac{f(T, T'')}{f(T'', T'')} ;$$

luego

$$f(T, T'') = [f(T, T) . f(T'', T'')]^{1/2} ,$$

y también

$$f(T, T') = [f(T, T) . f(T', T')]^{1/2}$$

$$f(T', T'') = [f(T', T') \; f(T'', T'')]^{1/2}$$

y sustituyendo estas expresiones en [1]:

$$[f(T, T)\, f(T', T')]^{\frac{T'-T}{2}} \; [f(T', T')\, f(T'', T'')]^{\frac{T''-T'}{2}} =$$
$$= [f(T, T)\, f(T'', T'')]^{\frac{T''-T}{2}}$$

simplificando

$$f(T, T)^{T'-T''}\, f(T', T')^{T''-T}\, f(T'', T'')^{T-T'} = 0$$

que debe cumplirse para todo T' y T'' no negativos y, en particular, para $T' = 1$ y $T'' = 0$, de donde

$$f(T, T) = f(0, 0) \left[\frac{f(1, 1)}{f(0, 0)} \right]^{T} = A \cdot B^{T},$$

donde hemos considerado $A = f(0, 0)$ y $B = \dfrac{f(1, 1)}{f(0, 0)}$.

Entonces,

$$f(T, T') = [f(T, T)\, f(T', T')]^{1/2} = [A \cdot B^{T}\, A \cdot B^{T'}]^{1/2} =$$
$$= A \cdot B^{1/2(T+T')}.$$

De la propiedad 5.ª del factor financiero

$$\frac{\delta\, e(T, T')}{\delta T'} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\delta\, e(T, T')}{\delta T} < 0$$

deducimos

$$f(T, T')^{T'-T} \ln f(T, T') + (T' - T) \cdot f(T, T')^{T'-T-1} \frac{\delta f(T, T')}{\delta T'} > 0$$

$$-f(T, T')^{T'-T} \ln f(T, T') + (T' - T) \cdot f(T, T')^{T'-T-1} \frac{\delta f(T, T')}{\delta T} < 0$$

o bien

$$f(T, T')^{T'-T} \left[\ln f(T, T') + (T' - T) \frac{\delta \ln f(T, T')}{\delta T'} \right] > 0$$

$$f(T, T')^{T'-T} \left[\ln f(T, T') - (T' - T) \frac{\delta \ln f(T, T')}{\delta T} \right] > 0$$

y siendo el primer factor de ambas expresiones $e(T, T') > 0$, deberán ser positivos los segundos, esto es:

$$\ln A + 1/2\,(T + T') \,.\, \ln B + 1/2\,(T' - T) \,.\, \ln B =$$
$$= \ln A + T' \ln B > 0\,,$$

$$\ln A + 1/2\,(T + T') \,.\, \ln B - 1/2\,(T' - T) \,.\, \ln B =$$
$$= \ln A + T \,.\, \ln B > 0\,,$$

condiciones que sólo se cumplen, para todo T' y T no negativos, si $\ln A > 0$ y $\ln B \geqslant 0$, o bien $A > 1$ y $B \geqslant 1$.

Ahora ya podemos precisar la expresión analítica del factor financiero como

$$e(T, T') = f(T, T')^{T'-T} = A^{T'-T},\; B^{1/2\,(T'^2-T^2)}$$

siendo $A > 1$ y $B \geqslant 1$.

8. La expresión analítica de la ecuación de equivalencia financiera: Las leyes financieras

Es inmediato deducir la forma analítica de la ecuación definidora de una equivalencia financiera, a partir de la ya estudiada para el factor financiero. Efectivamente,

$$E(C, C', T, T') = C' - C \,.\, e(T, T') =$$
$$= C' - C \,.\, A^{T'-T},\; B^{1/2\,(T'^2-T^2)} = 0$$

siendo A y B parámetros tales que $A > 1$ y $B \geqslant 1$.

También resultan definidas las relaciones de equivalencia financiera por la función implícita en aquella ecuación

$$C' = C \,.\, A^{T'-T},\; B^{1/2\,(T'^2-T^2)}\,.$$

Las diferentes relaciones de equivalencia financiera definibles surgen al dar valores concretos a los citados parámetros A y B, dentro de las limitaciones señaladas para ellos. Reciben el nombre de "leyes financieras", aunque, a nuestro juicio, su naturaleza no es tanto la de una ley económica, sustentadora de un principio general explicativo de un grupo de fenómenos, como consecuencia o resultado en sí de las leyes económicas que rigen el mercado financiero, siendo su naturaleza económica la de un precio de mercado.

9. El precio unitario de financiación: Su expresión analítica

Hemos dicho que la relación de equivalencia financiera o ley financiera es exponente del precio resultante de un equilibrio de mercado, del precio de la financiación. De diferentes modos puede definirse un precio. Puede fijarse el precio total o, si el bien al que se refiere es de naturaleza homogénea, el precio por unidad del mismo o precio unitario. Es preciso, también, para que la definición del precio sea completa señalar la forma de pago. Si nada se indica, se sobreentiende que el pago del precio debe ser inmediato.

La ley financiera supone una forma muy peculiar de fijación del precio del servicio financiero, que vamos seguidamente a estudiar. Para cada instante-origen, en que la operación financiera se concierta, el servicio financiero que ésta incluye se estima homogéneo en cuanto a sus características: cuantía de la disponibilidad cedida y plazo otorgado. Ello deriva de la consideración cuantitativa de ambos, de los que sólo se recoge su extensión, lo cual proviene, a su vez, de la abstracción realizada respecto al capital financiero, al ser considerado tan sólo por su cuantía y extensión del diferimiento. Tal homogeneidad permite definir un precio por unidad de financiación, considerando como tal una unidad monetaria de disponibilidad cedida durante una unidad temporal de plazo. A tal precio unitario de financiación lo denominaremos "tanto real de interés", reservando el término "interés" para designar el precio total.

Conocida la expresión analítica de una ley financiera, nos interesa determinar la del tanto real de interés con el que biunívocamente se corresponde. Observemos, para ello, la operación financiera representada por la identidad

$$(C, T) = (C', T') ,$$

que implica una financiación de cuantía inicial C, durante el plazo $\Delta T = T' - T$.

La cuantía C' supone la restitución en T' de C y, además, el pago del interés, representado por la variación de cuantías $\Delta C = C' - C$. El interés o precio total de esta financiación es el capital financiero $(\Delta C, T')$.

Para la determinación del precio unitario o tanto real de interés encontramos una dificultad, cual es que la disponibilidad financiera facilitada durante el plazo es variable, ya que a la cuantía inicial C se acumula, sucesiva e ininterrumpidamente, al precio devengado del servicio de financiación que se está realizando y cuyo pago se aplaza al final de la operación, engrosando, de este modo, la disponibilidad concedida durante la misma.

Si $\rho(T, T')$ designa el precio unitario de financiación que rige en el mercado en el instante-origen, para operaciones realizables en el plazo (T, T'), siendo $T' > T$, podemos escribir

$$\Delta C = \rho(T, T') . C . \Delta T + O(\Delta T) . C ;$$

es decir, el interés total es suma del que corresponde por la cesión de la disponibilidad inicial C más el que proceda por los incrementos de disponibilidad facilitados como consecuencia del aplazamiento en el pago del precio de la financiación que se está realizando, siendo $O(\Delta T)$ el interés que, por este motivo, corresponde a una unidad monetaria.

Entonces, el precio unitario para operaciones en el plazo (T, T'), es

$$\rho(T, T') = \frac{\Delta C}{C \cdot \Delta T} - \frac{O(\Delta T)}{\Delta T}$$

Para plazos muy reducidos de financiación, la influencia de la acumulación de intereses en la disponibilidad puede considerarse despreciable, y ésta, por tanto, constante e igual a C. Puede estimarse entonces $O(\Delta T)$ como un infinitésimo de orden superior a ΔT.

Pasando a límite, cuando $\Delta T \to 0$, y considerando la expresión de ΔC en función del factor financiero, tenemos

$$\rho(T) = \lim_{T' \to T} \rho(T, T') = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{C\,[e(T, T + \Delta T) - 1]}{C \cdot \Delta T} =$$

$$= \lim_{\Delta T \to 0} \frac{e(T, T + \Delta T) - e(T, T)}{\Delta T} = \left[\frac{\delta e(T, T')}{\delta T'}\right]_{T' = T}$$

y también, teniendo presente que $e(T, T') = f(T, T')^{T' - T}$;

$$\rho(T) = \left\{ e(T, T') \left[\ln f(T, T') + (T' - T)\,\frac{\ln f(T, T')}{T'} \right] \right\}_{T' = T} =$$

$$= \ln f(T, T)$$

y como sabemos que $f(T, T') = A \cdot B^{1/2(T + T')}$, resulta ser

$$\rho(T) = \ln(A \cdot B^{T}) = \ln A + T \cdot \ln B .$$

El tanto real de interés $\rho(T)$, denominado instantáneo, representa el precio unitario de financiación que se señala en el instante-origen para la financiación en el plazo $(T, T + \Delta T)$ cuando ΔT es infinitamente pequeño, es decir, para la financiación en el instante $\underline{T}$ (mediante el símbolo $\underline{T}$ designamos el instante final del diferimiento T).

Las consideraciones que venimos haciendo en el presente epígrafe sólo han servido para justificar la interpretación económica del elemento conceptual que vamos a definir a continuación y que pertenece a la teoría y no a la realidad interpretada.

Definición:

Denominamos "tanto instantáneo de interés en $\underline{T}$" correspondiente a la relación de equivalencia financiera determinada por los parámetros A y B a la expresión

$$\rho(T) = \ln A + T \cdot \ln B .$$

Conocido el tanto instantáneo $\rho(T)$, se sigue inmediatamente la relación de equivalencia financiera o ley financiera con que biunívocamente se corresponde. En efecto, del sistema de ecuaciones

$$\rho(T) = \ln A + T \,.\, \ln B$$

$$\rho(T') = \ln A + T' \,.\, \ln B$$

se deduce

$$A = e^{\frac{T'\rho(T) - T\rho(T')}{T' - T}} \qquad \text{y} \qquad B = e^{\frac{\rho(T')\ \rho(T)}{T' - T}}$$

siendo la expresión del factor financiero

$$e(T, T') = A^{T'-T}\, B^{1/2(T'^2 - T^2)} = e^{1/2[\rho(T) + \rho(T')](T'-T)}$$

10. Los sistemas financieros: Estacionario y dinámico

Las diferentes relaciones de equivalencia financiera o leyes financieras posibles, dentro de los postulados aceptados y el orden de racionalidad creado por ellos, pueden clasificarse en dos grandes apartados o sistemas financieros.

El primero de ellos, de parámetro único, viene caracterizado por agrupar las leyes financieras en las que $B = 1$. El factor financiero es, entonces, de la forma

$$e(T, T') = A^{T'-T} = A^t\,; \qquad A > 1$$

donde t ha simbolizado el diferimiento entre los capitales. El tanto instantáneo de interés es

$$\rho(T) = \ln A\,.$$

El segundo de los sistemas, en el que figuran dos parámetros, engloba las restantes leyes financieras en las que $B > 1$. Ahora, el factor financiero es

$$e(T, T') = A^{T'-T}\, B^{1/2(T'^2 - T^2)} = A^t\, B^{1/2(T+T')t}\,; \quad A > 1,\ B > 1\,;$$

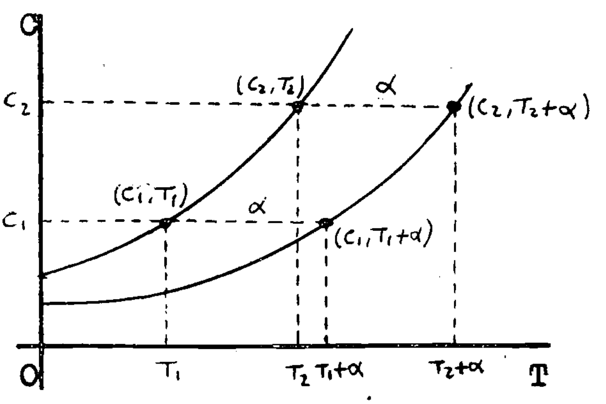
siendo el tanto instantáneo de interés

$$\rho(T) = \ln A + T \,.\, \ln B\,.$$

Hemos introducido en nuestro estudio el tanto instantáneo de interés para que nos facilite la interpretación económica de ambos sistemas financieros, cuyas diferencias formales son evidentes: En el primero, el tanto es constante, lo cual puede entenderse así: el mercado fija en el instante-origen el mismo precio para la financiación en cualquier otro instante futuro. Las expectativas son, entonces, de estabilidad absoluta y la confianza que se deposita en ellas se mantiene invariable, aunque se aleje en el tiempo el instante al que se refiere. Tal sistema puede calificarse de "estacionario" y su vigencia parece que no debería exceder de los plazos corto y medio.

En el segundo sistema financiero el tanto instantáneo de interés es variable. El alejamiento del instante al que se refiere la financiación, respecto del instante-origen, produce el encarecimiento de la financiación por un recargo en el precio proporcional a tal diferimiento. La situación podría interpretarse de este modo: Si las expectativas son de estabilidad, la confianza depositable en ellas decrece con el tiempo de modo uniforme, provocando una compensación en el precio. También puede recoger la presencia de cualquier circunstancia adversa que se intensifica uniformemente en el transcurrir del tiempo, como pudiera ser la progresiva devaluación monetaria. Se puede denominar a este sistema "dinámico" y parece más adecuado para regir operaciones que deban realizarse a largo plazo.

En el sistema financiero estacionario, la equivalencia depende sólo del diferimiento entre los capitales $t = T' - T$, por lo que si T' y T sufren el mismo desplazamiento, la equivalencia se mantiene. Ello implica que, si representamos una relación de equivalencia a través de un mapa de curvas de indiferencia financiera, las diferentes curvas se obtengan por desplazamiento horizontal de una cualquiera de ellas:



En el sistema financiero dinámico la equivalencia depende no sólo del diferimiento entre capitales, sino de los propios diferimientos de éstos, como puede apreciarse en la expresión general de la equivalencia del sistema

$$C' = C \, . \, A^{T'-T} \, B^{1/2(T+T')\,(T'-T)} = C \, \{A \, . \, B^{1/2(T+T')}\}^{t}$$

siendo $t = T' - T$. Ello indica que las leyes financieras correspondientes al sistema financiero dinámico no sólo consideran la extensión del plazo de financiación, sino también el emplazamiento o situación temporal de tal plazo, recogida a través del instante central del mismo en su distancia al instante-origen: $1/2\,(T + T')$.

Finalmente, hemos de hacer ver que en las relaciones de equivalencia financiera o leyes financieras que se manifiestan en la teoría de las operaciones financieras construida, se muestran las siguientes influencias:

1.º La del instante-origen, recogida en el parámetro A.

2.º La extensión del plazo de financiación, variable t.

3.º La localización temporal del citado plazo, variable $1/2\,(T + T')$, y su consideración en el origen, parámetro B.

CUARTA PARTE

TEORIA Y REALIDAD: LAS LEYES FINANCIERAS Y LOS REGIMENES FINANCIEROS

11. Los regímenes financieros: Sus clases

Nos propusimos, en la primera parte de este trabajo, la descripción de las operaciones financieras como modalidades de la actividad económica dotadas de peculiaridades propias que justificaban un estudio independiente. En la segunda hemos procurado construir una teoría matemática que las explicase racionalmente. Se dedicó la tercera a deducir la expresión analítica de las posibles leyes financieras que satisfacen tal teoría, clasificándolas en dos sistemas financieros: estacionario y dinámico. Ahora, en esta cuarta parte, volvemos a la realidad de que partimos para analizar las equivalencias financieras que se producen en ésta y contrastarlas con las teóricas de nuestro modelo matemático, probando, de este modo, el valor interpretativo de la teoría elaborada.

En la práctica financiera, el que hemos denominado tanto real de interés, que es el precio unitario de financiación, no se conviene explícitamente. Tampoco la estricta relación de equivalencia financiera que ha de regir la operación. Ambos resultan indirectamente recogidos en el régimen financiero de la operación acordado por los sujetos de la misma, consistente en la fijación por ellos de las cuantías y vencimientos de los capitales que deben transferirse con motivo de la operación financiera, bien relacionándolos expresamente, bien mediante la adopción de un criterio o convenio que permita determinarlos.

A diferencia de otros mercados, que se regulan por el precio unitario, en el financiero éste resulta inoperante por la imposibilidad material de ser satisfecho en su continuo devengo, durante el plazo de la financiación, y la consiguiente necesidad de concertar, por las partes, un régimen financiero que suponga aplazamientos o anticipaciones en el pago del precio o interés, con la inevitable consecuencia de ininterrumpida modificación de la disponibilidad de financiación otorgada, por la acumulación del precio devengado y no satisfecho o la detracción del satisfecho anticipadamente a su devengo. No quiere decir ello que la fijación del precio unitario o tanto real de interés, en nuestra terminología, no permita determinar la cuantía de los pagos a realizar en los vencimientos que se convinieren, pero el mercado financiero exige cálculos más sencillos y simples que aquellos a los que este camino conduce, aún más si se consideran las formas habituales a las que la gestación histórica de las operaciones financieras ha abocado.

Del mismo modo, la relación de equivalencia que ha de regir una operación financiera no se define expresamente al concertarse ésta, sino las formas de pago del interés y reintegro de la disponibilidad de financiación transferida, lo cual hemos designado como "régimen financiero" de la operación. Por ello, éste no debe confundirse con la ley financiera, si ésta es sinónimo de equivalencia financiera, aunque la implique, como al precio unitario, más o menos perfectamente.

Como veremos seguidamente en el estudio de los regímenes financieros más frecuentes, no todos se corresponden estrictamente con una ley financiera o equivalencia, sino que algunos se limitan a su aproximación práctica, por razones de simplicidad en el señalamiento del régimen, ventaja que compensa un mayor rigor en su formulación. Esta característica nos va a inducir a clasificar los regímenes financieros en "racionales" y "prácticos", en atención a cuál sea su adaptación a la equivalencia financiera que suponen.

A continuación abordamos el estudio individual de diferentes regímenes financieros que son habituales.

12. Regímenes financieros prácticos

No pretendemos, ahora, realizar un estudio completo de los diferentes regímenes financieros, racionales o prácticos, más frecuentes, sino tan sólo tratar de analizar la relación de equivalencia o ley financiera que implican, para contrastar si puede estimarse que tienen adecuada interpretación en el modelo.

A) *Régimen financiero de interés simple*

El interés se satisface, en un solo pago, al finalizar el plazo de financiación y juntamente con la restitución de la disponibilidad percibida. Su cuantía se determina mediante un tanto de proporcionalidad, denominado tanto de interés, a la disponibilidad y al plazo de financiación.

Considerado el tanto de interés como precio unitario de financiación, esto es, como tanto real de interés, el régimen financiero de interés simple supone el aplazamiento de pago del precio de financiación devengado al fin de la operación, pero despreciando la acumulación a la disponibilidad financiera concedida que tal aplazamiento supone. Ello restringe la aplicación de este régimen a operaciones de financiación de plazo muy reducido, en las que puede, sin gran error, estimarse invariable la disponibilidad de financiación, despreciando la variación introducida por el aplazamiento citado.

Estudiemos ya la equivalencia que tal régimen establece. Si es

$$(C, T) = (C', T')\ ; \qquad T' > T\ ,$$

siendo *i* el tanto de interés, debe cumplirse

$$C' = C + i \, . \, C \, . \, (T' - T) = C\,[1 + i \, . \, (T' - T)] = C\,(1 + i \, . \, t)$$

por lo que el factor financiero que señala este régimen financiero es

$$e^*(T, T') = 1 + i \, . \, (T' - T) = 1 + i \, . \, t\ ,$$

siendo el tanto real de interés o precio unitario que le corresponde

$$\rho^*(T) = \left[\frac{\delta\, e\,(T, T')}{\delta\, T'} \right]_{T' = T} = i\ .$$

Si consideramos que éste coincide con el del modelo, es decir, que

$$\rho\,(T) = \rho^*(T)\ ,$$

el régimen financiero de interés simple implica una equivalencia cuyo antecedente teórico en el modelo es una ley financiera de tanto constante, es decir, perteneciente al sistema estacionario. En efecto,

$$\rho\,(T) = \ln A = i\ ,$$

de donde

$$A = e^i\ ;$$

luego

$$e\,(T, T') = A^t = e^{i \, . \, t}$$

y, por tanto,

$$C' = C \, . \, e^{i \, . \, t} = C \, . \, e^{i\,(T' - T)}\ ,$$

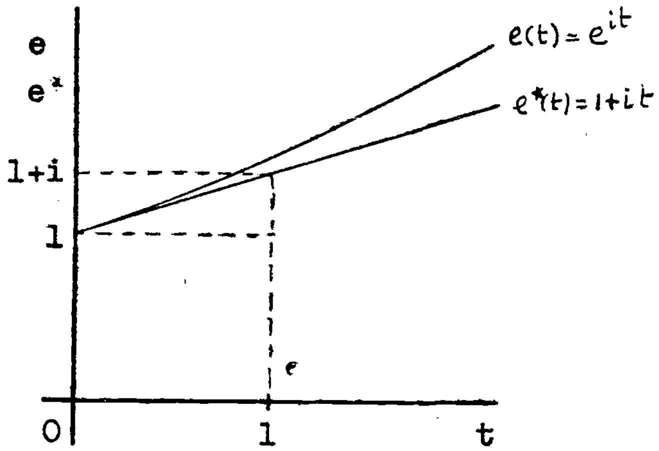
debiendo considerarse el factor financiero empírico $e^*\,(T, T')$ una aproximación práctica del teórico $e\,(T, T')$, cuya desviación podríamos desarrollar del siguiente modo:

$$e\,(T, T') - e^*(T, T') = e^{i \, . \, t} - (1 + i \, . \, t) =$$

$$= 1 + \frac{i \, . \, t}{1\,!} + \frac{i^2\, t^2}{2\,!} + \frac{i^3\, t^3}{3\,!} + \ldots - (1 + i \, . \, t) = \frac{i^2\, t^2}{2\,!} + \frac{i^3\, t^3}{3\,!} + \ldots\ ,$$

desviación que representa el interés despreciado de la financiación suplementaria que supone el atraso en el pago del precio de financiación devengado, correspondiente a una unidad monetaria de disponibilidad transferida.

Representando en coordenadas cartesianas ambos factores financieros, observamos que la aproximación práctica del régimen financiero a la ley financiera es la de la tangente a la curva, o bien la de la diferencial al incremento de la función $e^{i \cdot t}$, en el origen del plazo:



No parece necesario recalcar que esta interpretación del régimen de interés simple difiere de aquella otra que lo considera aproximación práctica de la ley financiera, cuyo factor es la función $(1 + i)^t$, diferente a la que nosotros hemos señalado.

B) *Régimen financiero de interés simple anticipado*

Se calcula el interés, como en el régimen anterior, mediante un tanto de proporcionalidad a la disponibilidad concedida y al plazo de financiación, llamado tanto de interés, pero su pago, en vez de realizarse en el instante final del plazo, se hace en el inicial, reduciendo la disponibilidad de financiación en su cuantía.

Considerado el tanto de interés, tanto real, es decir, precio unitario de la financiación, este régimen supone una anticipación de pago del interés, respecto a su devengo, que merma la disponibilidad efectivamente transferida, haciéndola variable durante el plazo. No obstante, dicho régimen financiero desprecia esta circunstancia, en beneficio de la sencillez del cálculo, lo que condiciona su aplicación a plazos reducidos, donde el error cometido no es significativo.

La equivalencia que establece es la siguiente. Si es

$$(C, T) = (C', T') \; ; \qquad T' > T$$

e i es el tanto de interés, debe cumplirse

$$C = C' - i \, . \, C' \, (T' - T) = C' \, [1 - i \, (T' - T)] = C' \, (1 - i \, . \, t) \; ,$$

o bien

$$C' = C \cdot \frac{1}{1 - i\,(T' - T)} = C \, \frac{1}{1 - i \cdot t},$$

luego el factor financiero correspondiente es

$$e^{*}(T, T') = \frac{1}{1 - i\,(T' - T)} = \frac{1}{1 - i \cdot t}.$$

y el tanto real de interés o precio unitario

$$\rho^{*}(T) = \left[\frac{\delta\, e(T, T')}{\delta\, T'} \right]_{T' = T} = i$$

Si aceptamos que éste coincide con el del modelo,

$$\rho(T) = \rho^{*}(T) = i,$$

volvemos de nuevo a la ley financiera del sistema estacionario, de factor financiero

$$e(T, T') = e^{i \cdot (T' - T)} = e^{i \cdot t},$$

debiendo considerarse el factor empírico $e^{*}(T, T')$ como aproximación práctica del teórico $e(T, T')$.

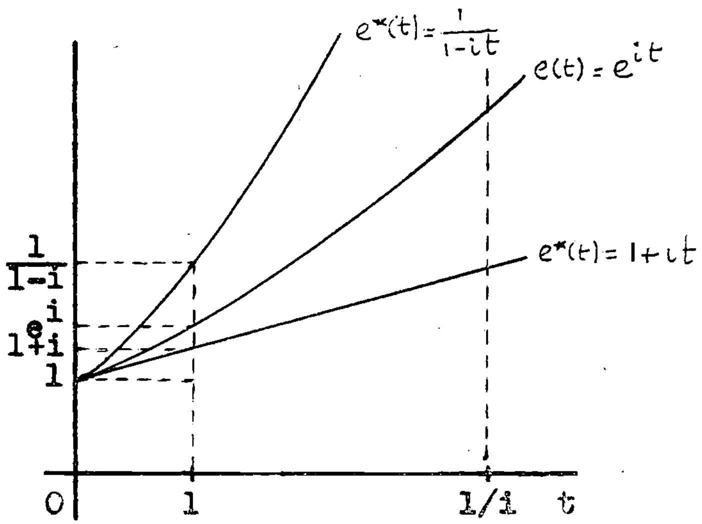
La desviación entre ambos factores representa el exceso de interés satisfecho, por unidad monetaria de disponibilidad de financiación concedida, debido a la anticipación de su pago. Puede expresarse así,

$$e^{*}(T, T') - e(T, T') = \frac{1}{1 - i \cdot t} - e^{i \cdot t} =$$

$$= \frac{1}{1 - i\,t} - 1 - i\,t - \frac{i^2 t^2}{2\,!} - \frac{i^3 t^3}{3\,!} - \ldots =$$

$$= \frac{1 + i\,t}{1 - i\,t} \; \frac{i^2 t^2}{2\,!} - \frac{i^3 t^3}{3\,!} - \ldots$$

Representamos, gráficamente, los dos factores financieros, empírico y teórico, del régimen que estudiamos. Hacemos figurar, también, la representación del factor empírico del régimen de interés simple vencido, para mejor comprender, así, las aproximaciones, por defecto y exceso de la misma ley financiera, que ambos regímenes representan.



Hacemos observar, finalmente, que la coincidencia del tanto real de la ley financiera, con los correspondientes a los regímenes financieros de interés simple vencido y anticipado, implica la tangencia de las tres curvas representativas, en el instante inicial del plazo,

$$\frac{d}{dt}(e^{it})_{t=0} = \frac{d}{dt}(1 + i\,t)_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1 - i\,t}\right)_{t=0} = i$$

cuya pendiente común justifica su valor aproximado para pequeños plazos, es decir, en el entorno del punto cero.

C) *Régimen financiero de descuento simple comercial*

Los regímenes de financiación se denominan de "capitalización" o "descuento", según que se contemple preferentemente el punto de vista del sujeto activo o el pasivo de la correspondiente operación financiera.

El régimen de descuento simple comercial supone que la persona que recibe una disponibilidad financiera anticipada, paga por ello, en el momento de la recepción, un precio, denominado descuento, que se determina mediante un tanto de proporcionalidad a la disponibilidad que se le anticipa y al plazo de anticipación, tanto que recibe el nombre de tanto de descuento.

Comprobaremos, fácilmente, que este régimen de financiación se identifica con el de interés simple anticipado, cuando el tanto de descuento coincide con el tanto de interés. En efecto, la equivalencia

$$(C, T) = (C', T')\,; \qquad T' > T$$

siendo *d* el tanto de descuento, implica

$$C = C' - d\,.\,C'(T' - T) = C'[1 - d(T' - T)] = C'(1 - d\,.\,t)\,,$$

luego

$$C' = C \frac{1}{1 - d(T' - T)} = C \frac{1}{1 - d \cdot t},$$

de donde

$$e^{*}(T, T') = \frac{1}{1 - d(T' - T)} = \frac{1}{1 - d \cdot t},$$

que se identifica con el factor financiero del régimen de interés simple anticipado, cuando $i = d$.

D) *Régimen de descuento simple racional*

Considera este régimen que el tanto de descuento no debe aplicarse a la cuantía del capital que se anticipa, sino al líquido efectivamente anticipado que resulta después de deducir el descuento, que es la disponibilidad financiera realmente facilitada. Según esto, si

$$(C, T) = (C', T'); \qquad T' > T$$

es

$$C = C' - d \cdot C(T' - T) = C' - d \cdot C \cdot t$$

o bien

$$C' = C[1 + d(T' - T)] = C(1 + d \cdot t)$$

coincidente con un régimen financiero de interés simple vencido, siendo $i = d$.

A nuestro juicio, tan poco racional es percibir un precio por una disponibilidad de financiación que nunca se facilitó, como percibirlo, tan solo, por la inicialmente facilitada, sin tener en cuenta las acumulaciones que reciba, a lo largo del plazo de financiación, por aplazamientos en el pago del interés devengado. No nos parece acertado, pues, el calificativo de racional que distingue a este régimen, y es que, como hemos visto, tanto las anticipaciones como los aplazamientos, si no van seguidos de la correspondiente corrección en el cálculo de la cuantía, dan lugar a regímenes financieros prácticos y no racionales.

13. Regímenes financieros racionales

Exponemos los siguientes:

A) *Régimen financiero de capitalización compuesta*

Se conviene acumular a la disponibilidad financiera, transferida en el inicio del plazo, una cantidad periódica en concepto de precio de la financiación por el citado período, no recibido. Esta se determina mediante un tanto de proporcionalidad a la disponibilidad de financiación y a la extensión del período, tanto que suele denominarse "tanto nominal de interés". Al final del plazo de financiación deberá reintegrarse la disponibilidad financiera total acumulada en aquel instante.

Si el número de períodos de capitalización que comprende el plazo de financiación es *n,* que supondremos, en principio, un número natural, el tanto nominal de interés es *i* y la extensión del período *p,* vamos a determinar la equivalencia que implica este régimen. Sea,

$$(C, T) = (C', T')\ ; \qquad T' = T + n \, . \, p,$$

entonces la disponibilidad de financiación de la operación sufre las siguientes variaciones, a lo largo del plazo

Períodos	*Cuantías*
$[T, T + p)$	C
$[T + p, T + 2p)$	$C + i \, . \, C \, . \, p = C(1 + i \, . \, p)$
$[T + 2p, T + 3p)$	$C(1 + i \, . \, p) + i \, . \, C(1 + i \, . \, p) \, . \, p = C(1 + i \, . \, p)^2$
... ...	... ...
$[T + (n - 1)\, p, T')$	$C(1 + i \, . \, p)^{n-1}$
$T' = T + n \, . \, p$	$C(1 + i \, . \, p)^n = C'$

luego es

$$C' = C(1 + i \, . \, p)^n = C(1 + i \, . \, p)^{\frac{T'-T}{p}} = C(1 + i \, . \, p)^{\frac{t}{p}} .$$

siendo el factor financiero

$$e^*(T, T') = (1 + i \, . \, p)^{\frac{T'-T}{p}} = (1 + i \, . \, p)^{\frac{t}{p}}$$

y el tanto real de interés

$$\rho^*(T) = \left[\frac{\delta e(T, T')}{\delta T'} \right]_{T'=T} =$$

$$\left[(1 + i \, . \, p)^{\frac{T'-T}{p}} \, . \, \frac{1}{p} - \ln(1 + i \, . \, p) \right]_{T'=T}$$

$$= \ln(1 + i \, . \, p)^{\frac{1}{p}} .$$

Si consideramos que $\rho(T) = \rho^*(T)$, la ley financiera que interpreta este régimen es estacionaria, por ser el tanto real constante, siendo

$$A = (1 + i \, . \, p)^{\frac{1}{p}}$$

y el factor financiero

$$e(T, T') = A^{T'-T} = (1 + i \, . \, p)^{\frac{T'-T}{p}} = (1 + i \, . \, p)^{\frac{t}{p}}$$

es decir, $e(T, T') = e^*(T, T')$, que nos muestra a este régimen financiero como racional, por definir estrictamente una ley financiera.

En el caso particular de período anual, es $p = 1$ y $t = n$, resultando

$$C' = C(1 + i)^t$$

$$\rho(T) = \ln(1 + i)$$

Observamos que en este régimen financiero el tanto de proporcionalidad no coincide con el tanto real de interés, a diferencia de los regímenes anteriormente estudiados. Por lo tanto, el tanto nominal *i* no refleja el precio de la financiación, sea cual fuere el período de capitalización, sino el tanto real

$$\rho = \ln(1 + i \, . \, p)^{\frac{1}{p}}.$$

Consideremos, ahora, que el plazo de financiación no comprende un número exacto de períodos, sino que viene medido por un número real positivo cualquiera que comprende un número natural de períodos y un resto,

$$t = n \, . \, p + r.$$

La práctica financiera utiliza dos criterios para determinar la cuantía acumulable en el instante *T'*, en concepto de interés de financiación, por el intervalo final de extensión *r*. Suelen designarse "convenio lineal" y "convenio exponencial", respectivamente. Ambos coinciden en que la disponibilidad acumulada, al iniciar tal intervalo, es

$$C(1 + i \, . \, p)^n.$$

Los estudiamos a continuación.

A1) *Convenio lineal*

Supone una extensión del criterio seguido para el cálculo de la cuantía acumulable al final de cada período, referido, ahora, al intervalo residual.

Intervalos	*Cuantías*
$[T + n.p, T')$	$C(1 + i.p)^n$
$T' = T + n.p + r$	$C(1 + i.p)^n + i.C(1 + i.p)^n r =$
	$= C(1 + i.p)^n (1 + i.r) = C'$

El factor financiero para el citado intervalo residual es, entonces,

$$e_1^* (T, T') = 1 + i.t$$

y el tanto real

$$\rho_1^* (T) = i.$$

Se trata entonces de un régimen financiero semirracional, ya que se comporta como tal para el intervalo $[T, T + n.p]$ y como régimen de interés simple para el resto del plazo.

Rigen, pues, dos precios unitarios: $\ln(1 + i.p)^{1/p}$, estrictamente en el primer intervalo, *i*, aproximadamente, en el resto.

A₂) *Convenio exponencial*

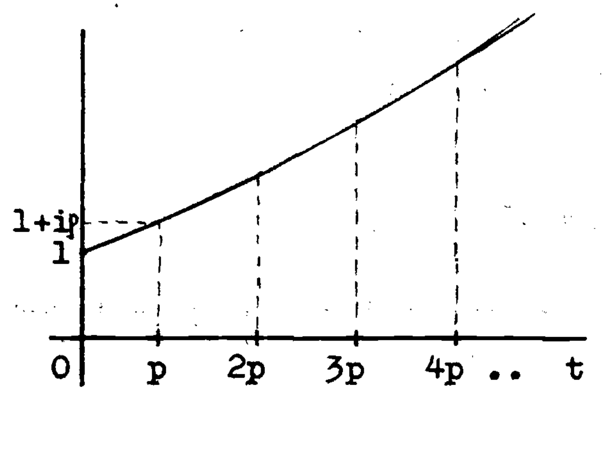
Supone la generalización del factor financiero del régimen de capitalización compuesta a cualquier plazo. Ahora,

Intervalos	*Cuantías*
$[T + n.p, T')$	$C(1 + i.p)^n$
$T' = T + n.p + r$	$C(1 + i.p)^n (1 + i.p)^{\frac{r}{p}} =$
	$= C(1 + i.p)^{\frac{t}{p}} = C'$

Se trata de un régimen financiero estrictamente racional, siendo el precio unitario, para todo el plazo,

$$\rho = \ln(1 + i.p)^{\frac{1}{p}}.$$

Representamos, a continuación, ambos convenios lineal y exponencial, a través de sus respectivos factores financieros, en un sistema cartesiano



B) *Régimen financiero de descuento compuesto*

Como régimen de descuento, contempla la operación financiera desde el punto de vista del sujeto pasivo. Supone, para éste, la anticipación de una disponibilidad futura. El régimen señala, por cada período de anticipación, un precio determinable por un tanto de proporcionalidad a la cuantía descontada y a la extensión del período, que se deduce de la disponibilidad transferible.

Si C' es la cuantía anticipable, p la extensión de cada período, d el tanto de proporcionalidad denominado tanto nominal de descuento y n el número de períodos que comprende exactamente el plazo, tenemos

Períodos	*Cuantías*
$[T', T' - p)$	C'
$[T' - p, T' - 2p)$	$C' - d \cdot C' p = C'(1 - d \cdot p)$
$[T' - 2p, T' - 3p)$	$C'(1 - d \cdot p) - d \cdot C'(1 - d \cdot p) \cdot p = C'(1 - d \cdot p)^2$
... ...	... ...
$[T' - (n - 1)p, T)$	$C'(1 - d \cdot p)^{n-1}$
$T = T' - n \cdot p$	$C'(1 - d \cdot p)^n = C$

La equivalencia, según este régimen financiero,

$$(C, T) = (C', T')\,; \qquad T' > T$$

supone

$$C' = C \cdot (1 - d \cdot p)^{-n} = C \cdot (1 - d \cdot p)^{\frac{-t}{p}} = C \cdot (1 - d \cdot p)^{\frac{T-T'}{p}},$$

luego el factor financiero es

$$e^*(T, T') = (1 - d \cdot p)^{\frac{T-T'}{p}} = (1 - d \cdot p)^{\frac{1}{p}}$$

y el tanto real de interés

$$\rho^*(T) = -\frac{1}{p} \ln(1 - d \cdot p) = \ln(1 - d \cdot p)^{\frac{-1}{p}}.$$

Si aceptamos $\rho(T) = \rho^*(T)$, la ley financiera es estacionaria con factor financiero

$$e(T, T') = (1 - d \cdot p)^{\frac{T-T'}{p}} = (1 - d \cdot p)^{\frac{-t}{p}}$$

que, al coincidir con el empírico, caracteriza a este régimen como racional.

Si el plazo de financiación no es un número exacto de períodos y, por tanto, se compone de éste y un resto

$$t = n . p + r$$

caben, como en régimen financiero anteriormente estudiado, los dos convenios, lineal y exponencial, que conducen a los siguientes resultados.

B1) *Convenio lineal*

Consideraciones similares a las ya vistas en el régimen de capitalización compuesta proporcionan la siguiente equivalencia

$$C' = C . (1 - d . p)^{-n} (1 - d . r)^{-1} ,$$

es decir, a un régimen financiero mixto, de descuento compuesto para el plazo $n . p$ y de descuento comercial para r. El precio de financiación es de $ln (1 - d . p)^{-1/p}$ para la primera parte del plazo y d, aproximadamente, para el resto.

B2) *Convenio exponencial*

Del mismo modo expuesto ya en el régimen anterior llegamos, ahora, a la equivalencia

$$C' = C . (1 - d . p)^{\frac{-t}{p}}$$

que caracteriza al régimen de racional con tanto real, para todo el plazo, de

$$\rho = \ln (1 - d . p)^{\frac{-1}{p}} .$$

Las expresiones obtenidas para este régimen financiero de descuento compuesto se simplifican considerablemente si la extensión del período de descuento coincide con el año. Así, para el convenio lineal regiría la equivalencia

$$C' = C (1 - d)^{-n} (1 - d . r)^{-1}$$

y para el exponencial

$$C' = C (1 - d)^{-t} .$$

Los regímenes financieros estudiados han permitido observar que la teoría matemática construida los explica a través de las leyes financieras, bien estrictamente, con total fidelidad, bien como aproximaciones a ellas, de simplicidad práctica.

Ninguno de los regímenes financieros estudiados se corresponde con alguna ley financiera del sistema que hemos denominado dinámico. Es debido, sin duda, a la hipótesis de estacionalidad que suele implícitamente presidir los regímenes financieros habituales. Sin embargo, a largo plazo, se realizan operaciones como empréstitos, seguros, etc., que no parece natural deban estar regidas por tal hipótesis. La teoría matemática de las operaciones financieras expuesta, que no ha pretendido ser restrictiva, recogiendo supuestos de racionalidad muy generales, deja abierto el camino para posibles regímenes financieros que tengan presente una evolución paulatina.

Nosotros, a modo de simple ensayo, vamos a establecer un régimen financiero que recoja una posible evolución, estimada en el instante-origen de la capacidad adquisitiva monetaria futura, lo cual implicaría una necesaria corrección periódica de la cuantía de disponibilidad financiera facilitada, computable en cada momento del plazo de financiación. Denominemos, al mismo, del siguiente modo:

C) *Régimen financiero dinámico*

Los sujetos de la operación convienen que el precio de financiación incremente la disponibilidad de financiación concedida, hasta el término del plazo, para lo cual determinan un tanto unitario de interés i que capitalizarán anualmente.

Por otra parte, estiman que la capacidad adquisitiva del dinero sufrirá una disminución paulatina, durante el plazo de financiación, por lo que deciden que, al comienzo de cada año, corregirán el saldo financiero anterior, utilizando, para ello, un coeficiente variable con el aplazamiento de su instante de aplicación, obtenido a través del ajuste de una función del tipo $K . B^T$ a los estimados futuros valores del índice general de precio unitario.

Tal régimen financiero da lugar a la siguiente equivalencia, expuesta a través de las cuantías de disponibilidad o saldo financiero, correspondientes a cada período

Períodos	*Cuantías*
$[T, T + 1)$	C
$[T + 1, T + 2)$	$C . K . B^{T+1} (1 + i)$
$[T + 2, T + 3)$	$C . K . B^{T+1} (1 + i) . K . B^{T+2} (1 + i) =$
	$= C . K^2 (1 + i)^2 B^{T+1} B^{T+2}$
... ...	... ...
$[T + n - 1, T + n)$	$C . K^{n-1} (1 + i)^{n-1} B^{T+1} B^{T+2} \ldots B^{T+n-1}$
$T' = T + n$	$C . K^n (1 + i)^n B^{T+1} B^{T+2} \ldots B^{T+n} =$
	$= C . K^n (1 + i)^n B^{n/2} B^{1/2(T+T')n} = C'$

es decir, la equivalencia se muestra en la expresión

$$C' = C\,[K \,.\, B^{1/2}\,(1 + i)]^{n}\, B^{1/2\,(T+T')_{n}}$$

de factor financiero

$$e^{*}\,(T,\, T') = [K \,.\, B^{1/2}\,(1 + i)]^{T'-T}\, B^{1/2\,(T'^{2}-T^{2})}\ ,$$

al que corresponde el tanto real de interés

$$\rho^{*}\,(T) = \ln K \,.\, B^{1/2}\,(1 + i) + T \,.\, \ln B\ .$$

Si aceptamos que $\rho\,(T) = \rho^{*}\,(T)$, la ley financiera que explica este régimen financiero es del sistema dinámico si $B > 1$ y del estático si $B = 1$. Además, el régimen financiero es racional, puesto que coinciden los factores financieros teórico y empírico,

$$e\,(T,\, T') = e^{*}\,(T,\, T')\ .$$

Debemos considerar las limitaciones siguientes en los parámetros: Siendo preciso que

$$A = K \,.\, B^{1/2}\,(1 + i)$$

sea superior a la unidad, debe ser

$$K > \frac{1}{B^{1/2}\,(1 + i)}$$

y, además, $B \geqslant 1$.

K es el factor que refleja la variación proporcional del nivel general de precios en el tiempo, mientras *B* es la base de la variación exponencial. Es *i* el tanto y *(1 + i)* el factor de capitalización, correspondientes al período anual.

Damos fin, con ello, a la exposición de la teoría matemática de las operaciones financieras, propuesta en el trabajo que concluimos.

*

* *