UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

DOCTORAT EN DIDÀCTIQUES ESPECÍFIQUES

LA RE-CONSTITUCIÓN DEL OBJETO MENTAL “RELATIVAMENTE” EN FUTUROS MAESTROS

Tesis Doctoral

PRESENTADA POR:

Javier Monje Parrilla

DIRIGIDA POR:

Bernardo Gómez Alfonso

València 2017

Bernardo Gómez Alfonso, Catedrático de Universidad del área de conocimiento de “Didáctica de la Matemática” de la Universidad de Valencia.

CERTIFICA

Que el presente trabajo titulado:

“La re-constitución del objeto mental “relativamente” en futuros maestros”

ha sido realizado bajo mi dirección por el doctorando Javier Monje Parrilla, y constituye su memoria de Tesis Doctoral para optar al grado de doctor por la Universidad de Valencia.

Dicho trabajo se ha realizado a mi entera satisfacción y, por tanto, **informo favorablemente** del mismo a todos los efectos oportunos.

Para que así conste, y en cumplimiento de la legislación vigente, se presenta esta memoria de Tesis Doctoral firmando el presente certificado en Valencia a 11 de mayo de 2017.

Director de la tesis

Fdo: Bernardo Gómez Alfonso

Este trabajo de investigación se enmarca dentro del proyecto del Plan Nacional EDU2012-35638 “Modelos de enseñanza y competencia de la modelización y la resolución de problemas aritmético-algebraicos: Análisis histórico y usos de entornos interactivos de aprendizaje”, en la línea de investigación “Pensamiento Numérico y Algebraico” (PNA) que viene desarrollando el grupo de investigación “Análisis didáctico, histórico y epistemológico de las matemáticas escolares – ADHEME” de la Universidad de Valencia.

A Patri, Noemí y Josué.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Bernardo Gómez Alfonso, director de esta tesis, por la profunda dedicación en este trabajo y el apoyo y consejos recibidos durante mi formación como investigador.

Gracias a la Dra. Mirela Rigo Lemini por su implicación, colaboración, apoyo y acogida durante mi estancia en México.

Agradezco a todos los integrantes del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia las sugerencias y apoyo recibidos.

Gracias a todos los profesores y amigos del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en especial al Dr. Enrique Castro, por ayudarme en mis inicios en la labor de investigación.

A mis compañeros de Departamento por todo el ánimo y apoyo recibido en esta etapa final de mi trabajo.

A todos los estudiantes de magisterio y profesores que han participado en este estudio. Sin su participación desinteresada no hubiera sido posible llevar a cabo este trabajo.

A mis padres, por ser mi modelo a seguir y siempre apoyarme en los momentos difíciles. A Jessy que siempre estás cuando te necesito. A mi familia, por darme la esperanza para seguir a delante.

Y por último, aunque no por ello menos importante, quiero dar las gracias a Patri. Siempre has estado a mi lado, me has empujado, apoyado y sabido guiar en este duro y largo camino. Gracias por ser mi luz.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Investigaciones precedentes manifiestan que muchos estudiantes para maestro no adquieren adecuadamente los conceptos de razón y proporción (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012; Livy y Vale, 2011; Valverde, 2012). Estos estudiantes parecen no tener bien constituidos ciertos objetos mentales que, de acuerdo con Fernández (2009), pueden considerarse precursores de estos conceptos. Esto puede ser debido a que este tópico no se enseña bien, que parece asentarse con un enfoque precario, pobre y breve desconectado de la realidad (Streefland, 1985).

En este sentido, esta tesis doctoral estudia el ensayo de una experiencia didáctica con futuros maestros, centrada en la resolución de una tarea donde interviene implícitamente el objeto mental “relativamente” con el fin de que sean capaces de re-constituirlo.

Esta experiencia se fundamenta en prácticas metacognitivas y los principios de la Mayéutica Socrática. Una característica de la mayéutica es la promoción de un conflicto cognitivo, cuando el alumno se enfrenta a las contradicciones que emergen de su respuesta errónea al problema planteado, y otro metacognitivo, cuando se ve orillado a reconocer su ignorancia acerca de un tema que creía saber. Esto conduce a una de-construcción y posterior re-construcción de su respuesta al problema planteado.

Para la promoción en los estudiantes de estos dos tipos de conflictos, el cognitivo y metacognitivo, es necesario conocer los patrones de respuesta ante un problema. En nuestro caso, diseñamos una tarea de comparación de razones del tipo "¿Cuál es la mejor compra?" (Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 2007) involucrando el objeto mental "relativamente".

Para conocer los patrones de respuesta ante esta tarea de los estudiantes para maestro de educación primaria, analizamos las resoluciones de 339 futuros maestro. Esto ha servido de punto de partida para el planteamiento, no improvisado, de una experiencia didáctica que posteriormente se ha implementado y analizado.

Como ocurre a menudo con las tareas utilizadas por la investigación educativa, la que en esta investigación se analiza no sólo es pertinente como herramienta de evaluación, (en nuestro caso, del pensamiento relativo y del desarrollo del razonamiento proporcional del estudiante), sino que también lo es como actividad para la formación de profesores. Esto es debido a que promueve en ellos la reflexión metacognitiva sobre sus propios procesos cognitivos y sobre la complejidad didáctica de la tarea y de los contenidos matemáticos implicados.

Para facilitar al lector una mejor comprensión de las partes que integran este trabajo, en este apartado se elabora un esquema del trabajo de investigación (Figura 0.1), y se realiza una breve descripción de cómo se ha desarrollado.

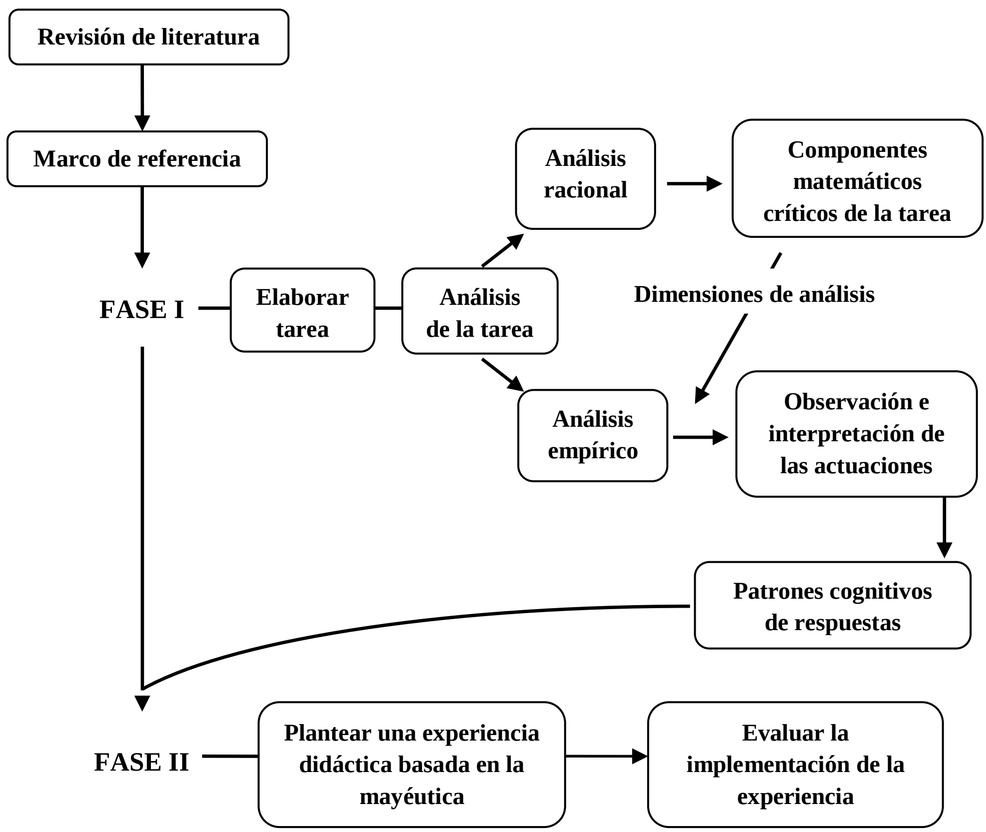


Figura 0.1. Esquema de la investigación

En la primera fase (Fase I), la tarea es sometida a un análisis para distinguir el estudio de lo que hacen los estudiantes (análisis empírico) del examen del contenido matemático de la tarea (análisis racional).

Del marco teórico así como del análisis racional de la tarea, se derivan las dimensiones de análisis que nos permiten interpretar las actuaciones de los estudiantes. Los resultados obtenidos se han organizado en esquemas de categorías y subcategorías que dan cuenta detallada de los patrones cognitivos de respuesta a la tarea planteada.

Una vez observadas las formas de pensamiento que hace emerger este tipo de tareas en los estudiantes para maestro y cuáles son las dificultades que entrama su resolución, se procede al planteamiento de una experiencia didáctica estructurada en torno a principios tomados de la mayéutica.

Esta experiencia utiliza los patrones cognitivos de respuesta categorizados en la Fase I, ya que para su diseño se han tenido en cuenta diferentes ejemplos prototípicos que sustentan las diversas resoluciones posibles, con el fin de poder anticiparse a las respuestas a la tarea de un grupo cualquiera de futuros maestros. De esta manera se planean los conflictos cognitivos y metacognitivos que interesa promover en aquellos estudiantes con dificultades de acuerdo con el método mayéutico.

Este es un enfoque, donde lo que interesa de la tarea no es tanto aprender a resolverla de una determinada manera, sino aprender cómo se puede resolver de la mejor manera una vez conocidos sus métodos de resolución; y a la inversa, aprender como el mismo método se puede usar a veces para resolver problemas diferentes. El fin último es guiar a los estudiantes en la necesidad de re-constituir el objeto mental "relativamente".

Una vez planteada, la experiencia fue implementada en un grupo de estudiantes para maestro de la Universidad de Valencia y posteriormente analizada. Esto conforma la segunda fase de nuestro trabajo (Fase II).

Partiendo de que la Fase I es necesaria para llevar a cabo la Fase II y pensando en facilitar al lector la comprensión de esta investigación, la organización de los capítulos atiende al orden cronológico de realización del mismo. De este modo, tras una introducción general y descripción de los referentes teóricos y antecedentes que sustentan el trabajo, se describe la metodología, resultados y conclusiones primero de la Fase I y posteriormente de la Fase II para concluir con una serie de consideraciones finales.

Siguiendo este esquema, la redacción de esta memoria se estructura en ocho capítulos, seguido del listado de referencias consultadas y el listado de anexos con su contenido. A continuación se ofrece una breve descripción de cada uno de estos capítulos.

En el primer capítulo se recoge el planteamiento del problema y se establecen los objetivos del estudio.

En el segundo capítulo se establece el marco teórico y comprende una revisión bibliográfica de los trabajos relevantes a tenor de la problemática que abordamos. El marco de referencia adoptado permite establecer una base teórica sobre la que analizar y describir la información obtenida en las dos fases que conforman la investigación.

El tercer capítulo trata de la metodología empleada en la Fase I del estudio y se describen los resultados del análisis empírico a la tarea propuesta. En este capítulo se describen en primer lugar los participantes en esta primera fase, el instrumento de recogida de datos y el proceso de análisis adoptado. Seguidamente se presentan los resultados del análisis empírico. Estos resultados se han agrupado en categorías y subcategorías que permiten dar cuenta de los patrones cognitivos de respuesta de los participantes.

Las conclusiones y discusión de los resultados obtenidos en esta primera fase de la investigación se presentan en el capítulo cuarto.

En el capítulo quinto se desarrolla el método utilizado en la Fase II de la investigación. En este apartado se describen los participantes en esta fase, la estructura de la experiencia didáctica planteada, el procedimiento de implementación de la misma y cómo posteriormente se ha analizado.

Los resultados de la experiencia didáctica se muestran en el capítulo sexto. Éstos se han organizado en distintos episodios atendiendo al desarrollo de la experiencia. Las conclusiones y discusión de los resultados obtenidos se presentan en el séptimo capítulo.

Finalmente, en el capítulo octavo se hace una reflexión sobre el grado en que se han cumplido los objetivos planteados en esta investigación, considerando algunas limitaciones y posibles líneas de continuación para futuros trabajos.

CAPÍTULO 1.
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción y justificación del problema

En el ámbito de la formación de profesores, se ha constatado que los estudiantes para maestro tienen un conocimiento pobre acerca de la razón y proporción, y este es a menudo técnico, esquemático, desconectado e incoherente (Ben-Chaim, Ilany y Keret, 2002; Streefland, 1985). Desarrollar en los futuros docentes un conocimiento adecuado de los contenidos y procesos matemáticos relacionados con la razón y proporción es necesario para la enseñanza de este tópico en su práctica futura (Valverde, 2012).

En el ámbito de la enseñanza, el tema de razón y proporción no se enseña bien y a menudo lo que se fomenta es la manipulación sin sentido de símbolos y fórmulas (Hoffer, 1988). Streefland (1985) señala además que la enseñanza de estos conceptos tiene un enfoque precario, pobre y breve por su desconexión con la realidad.

En la enseñanza de la razón y proporcionalidad, Freudenthal (1983) considera necesaria la constitución de ciertos objetos mentales que permitan compeler al estudiante la adquisición de estos conceptos. Este autor, resalta la importancia de considerar el objeto mental "relativamente", especialmente en los contextos de comparación de parejas de cantidades relativas. Basándose en este estudio, Fernández (2009) y Fernández y Puig (2002; 2003) consideran la relativización de las comparaciones como precursora de los conceptos de razón y proporción.

"Una pulga puede saltar —relativamente— *más* alto que un hombre" (p. 193), es uno de los ejemplos que presenta Freudenthal para dar cuenta de los contextos que requieren del objeto mental "relativamente".

La capacidad para pensar las cantidades "en relación con" amplía el rango de ciertas palabras que inicialmente se han asociado a los conceptos aditivos, como sucede con la palabra "más", que en el contexto del ejemplo mencionado tiene dos significados, uno absoluto o aditivo y otro relativo o multiplicativo, ambos pertinentes y con sentido.

En la vida diaria es frecuente encontrar situaciones que impliquen cantidades relativas; estas cantidades tienen un significado relacional que resulta de la comparación multiplicativa de dos cantidades. Sin embargo, en muchas ocasiones, para abordar estas situaciones se hace uso de estrategias aditivas, no solo por parte de los niños sino también en el caso de los adultos.

Es frecuente observar cómo algunos estudiantes para maestro recurren a formas de razonamiento aditivo cuando no encuentran otros métodos adecuados para resolver ciertas situaciones multiplicativas (Sowder et al., 1998). De acuerdo con Lamon (1993b):

> Los estudiantes no sólo necesitan reconocer la comparación relativa como una alternativa a su punto de vista aditivo del mundo, sino que también tienen que desarrollar criterios con los que juzgar cuál de las perspectivas es apropiada en una situación dada. (p. 58)

En esta investigación y considerando la anterior problemática, utilizamos contextos de comparación de cantidades relativas. Con ello pretendemos contribuir en el uso de un pensamiento relativo centrándonos en la re-constitución por parte de los estudiantes para maestro del objeto mental "relativamente", precursor de los conceptos de razón y proporción.

1.2. Objetivos

Teniendo en cuenta las consideraciones precedentes, en este trabajo nos planteamos como objetivo general ensayar con futuros maestros una experiencia didáctica centrada en la re-constitución del objeto mental "relativamente".

Para llevar a cabo esta experiencia un método que parece adecuado y potente es la mayéutica. Para implementar este método es necesario (como se detallará más adelante) conocer de antemano las repuestas de los estudiantes a cierta tarea diseñada ex profeso. Por este motivo, y teniendo en cuenta el objetivo general planteado, desarrollamos dos fases relacionadas, de las cuales se desprenden los objetivos específicos (OE) que a continuación se detallan:

Fase I: Aportar una tarea, científicamente fundamentada para una experiencia mayéutica, que involucre el objeto mental "relativamente".

OE1: Elaborar una tarea que implique el objeto mental "relativamente"

OE2: Obtener los patrones cognitivos de respuesta a la tarea diseñada

Fase II: Ensayar una experiencia didáctica basada en la mayéutica y centrada en la re-constitución del objeto mental "relativamente" en un grupo de estudiantes para maestro de educación primaria.

OE3: Plantear la experiencia utilizando los patrones cognitivos de respuesta a la tarea diseñada

OE4: Evaluar la implementación de la experiencia

CAPÍTULO 2.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Tomaremos en consideración como antecedentes y referente teórico en este trabajo diferentes estudios que se centran en la evaluación del razonamiento proporcional y otros estudios que ahondan en los aspectos formales del término razón.

Organizaremos el siguiente capítulo desarrollando en primer lugar los elementos que constituyen nuestro marco de referencia que son los utilizados por Fernández (2009) y Gómez (2016). En segundo lugar realizaremos una revisión de aquellos trabajos relevantes que pretenden observar el desarrollo cognitivo de los estudiantes al resolver problemas de razón y proporción. Para la revisión, tendremos en cuenta los siguientes aspectos: los tipos de problemas utilizados, las estrategias descritas por los estudiantes y las variables de tarea que influyen en sus decisiones.

2.1. El significado propio de razón.

La razón es considerada como uno de los constructos o significados que se le asigna a la fracción, cuando ésta representa un número racional (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Kieren, 1976; 1980; Lamon, 2007). En particular, estos autores proponen los siguientes significados al número racional: parte-todo, cociente, medida, operador y razón. Lamon (2007) atribuye un peso específico al de razón, considerando necesario el estudio previo de la razón a la introducción de los números racionales. De hecho Block (2008) la considera como precursora del número racional. Fernández (2009), en el sentido de Freudenthal (1983), califica la razón en un "nivel más elevado que el de número, fracciones y otros conceptos con los que los alumnos han tropezado previamente en su escolaridad" (p. 32), puesto que organiza una propiedad intensiva y no una propiedad extensiva de objetos o conjuntos de objetos.

En el ámbito educativo, en particular en los libros de texto escolares, la razón suele presentarse como un número que resulta de un cociente de dos cantidades y aparece expresado con una fracción (Gairín y Escolano, 2009; Oller, 2012). Además, como afirman estos autores, la práctica docente parece prestar poca atención a la naturaleza de las magnitudes implicadas y sus correspondientes unidades de medida, ocupándose solamente de los aspectos numéricos sin atender a la magnitud resultante. Éstas son, en buena medida, algunas de las causas de la consideración por parte de los estudiantes de la razón como fracción, lo que puede llevarles confusión e interpretaciones erróneas (Norton, 2005; Smith 2002; Ramírez y Block, 2009).

En esta investigación, la razón se entiende como "una función de un par ordenado de números o valores de magnitud" (Freudenthal, 1983, p. 180). De acuerdo con este autor, el verdadero significado de la razón, lo que la hace valiosa, no es el de cociente de enteros, el cual resulta de considerar a la razón como una fracción y de interpretarla algorítmicamente. El significado propio es el de igualdad o desigualdad de razones sin saber qué tan grande es la razón; es poder decir con sentido "*a* es a *b*" como "*c* es a *d*", sin anticipar que "*a* es a *b*" se puede reducir a un número que es el mismo al que puede reducirse "*c* es a *d*".

En este sentido, la razón $a : b$ se lee "*a* es a *b*" y la igualdad (=) se lee "como" con lo que los significados cambian para esos signos (Fernández y Puig, 2002). En este trabajo entendemos que si la razón $a : b$ es la misma que la razón $c : d$ entonces los cuatro valores de magnitud *a, b, c, d* forman una proporción y se escribe $a : b = c : d$, o bien, $a : b :: c : d$.

2.2. Maneras de formar una razón

En una situación de comparación hay que tener en cuenta que una persona puede comparar dos cantidades aditivamente creando una diferencia o comparar dos cantidades multiplicativamente para crear una razón (Thompson, 1994). Actuar de la primera forma conduce a un tratamiento absoluto de las cantidades y la segunda forma a un tratamiento relativo de las cantidades. Por ejemplo, consideremos que se pregunta a un alumno en que tienda es más ventajoso comprar unos caramelos: en la tienda A, que ofrece 5 caramelos por 3€, o en la tienda B, que ofrece 6 por 4€. Una posible actuación del alumno es comparar multiplicativamente las cantidades para crear las razones, 5c : 3€ y 6c : 4€, y posteriormente decidir. O bien, el alumno puede considerar que le da igual comprar en la tienda A que en la tienda B ya que la diferencia de las cantidades es la misma.

Como indican Sowder et al. (1998) es frecuente observar este tipo de actuaciones no sólo en alumnos de primaria y secundaria sino también en futuros profesores. Pensar "en relación con" requiere de una mayor abstracción que pensar en una adición o diferencia de cantidades; esta forma de pensar permite crear cantidades más complejas (Lamon, 2012). Explorar estas dos formas de actuar en futuros maestros en una situación multiplicativa es tomada en consideración en esta investigación.

Hay dos maneras de formar una razón: una es comparando dos cantidades multiplicativamente y la otra es juntándolas para crear una unidad compuesta, cuya iteración o equipartición preserva la relación multiplicativa (Lobato y Ellis, 2011).

Un ejemplo del primer caso es cuando decimos que una cosa es tantas veces mayor o menor que otra. Un ejemplo del segundo caso es cuando una persona corre 900 metros en 5 minutos, o equivalentemente, 90 m. en 30 s, o 9 m. en 3 s. De esta manera, para crear otras razones equivalentes tomaremos una razón como una unidad compuesta de dos cantidades, entonces si una de las cantidades es multiplicada o dividida por un factor arbitrario, la siguiente cantidad debe multiplicarse o dividirse por el mismo factor para que se conserve la relación multiplicativa.

2.3. Estructura de las cantidades, tipos de razones y esquemas de pensamiento.

En el sentido de Puig y Cerdán (1988), entendemos que una cantidad puede definirse como un par ordenado (x, u) en el que x es un número y u una unidad de una magnitud, como por ejemplo: 5 metros, 2 €/kg, etc. Dada la naturaleza (discreta o continua) y la relación entre cantidades, se puede distinguir entre cantidades “extensivas” e “intensivas” (Schwartz, 1988).

Una cantidad extensiva “expresa la extensión de una entidad o substancia y se refiere a un conjunto, montón o trozo de esa entidad o substancia” (Puig y Cerdán, 1988, p. 5). La cantidad extensiva puede ser continua o discreta, como “5 euros” o “2 botellas”. Dos cantidades extensivas pueden utilizarse para crear una cantidad intensiva, como “5 euros por 2 botellas”, “3 kilómetros en 2 horas” o “2 partes de aceite por 5 partes de agua”.

Las cantidades intensivas son por tanto razones, que surgen de la comparación multiplicativa de dos cantidades extensivas. Éstas aparecen conceptualizadas y utilizadas de dos maneras: como una “tasa” (rate) o como una “razón” particular (Kaput y West, 1994). Algunos ejemplos de “tasa” son la “velocidad”, “densidad” o “precio unitario”. Y algunos ejemplos de “razón” particular son “5 niñas por cada 3 niños”, “3 niños de cada 8 alumnos” o la escala “1:300”. Así, según la casuística, existe una distinción dual entre los términos “razón” y “tasa”. Vergnaud (1983) sustenta esta distinción en el carácter funcional o escalar de la relación multiplicativa entre las cantidades, según sea entre dos espacios diferentes de medida o de un mismo espacio de medida respectivamente.

Como afirman Fernández y Puig (2002), según sea la relación con las magnitudes hablaremos de razones internas o externas. La razón interna se crea de la relación de cantidades en un mismo espacio de medida (sistema o magnitud). Dentro de un sistema, como afirma Lamon (2012), se pueden llevar a cabo comparaciones que comparan la medida de una parte de un conjunto con la medida de la otra parte del conjunto (parte-parte) o que comparan la medida de un subconjunto con la medida del conjunto del cual es parte (parte-todo). Como señalan Singer y Resnick (1992), este tipo de comparaciones pueden admitir expresiones coloquiales del tipo "de cada" o "por cada" que llaman a un razonamiento basado en los esquemas parte-todo o parte-parte, como en "3 de cada 7 personas fuman" o "hay 3 fumadores por cada 4 no fumadores". Esto implica que la primera forma es directamente convertible a fracción: "3/7 de las personas fuman" pero la segunda no, ya que las cantidades forman partes separadas de un todo, una no está contenida en la otra. No obstante, se puede pasar de parte-parte a parte-todo y de ahí a fracción cambiando el referente. Por ejemplo, contestando a la pregunta: ¿qué parte de las personas fuman?, que en "2 fumadores por cada 3 no fumadores" es 2/5.

La razón externa se crea de la relación de cantidades entre diferentes espacios de medida (sistemas o magnitudes). Al plantearse la razón entre elementos de distintos espacios de medida, estas situaciones no admiten un razonamiento basado en los esquemas parte-todo ni parte-parte, aunque admiten expresiones coloquiales como las anteriores (Singer y Resnick, 1992). Es el caso, por ejemplo, del precio o de la velocidad, pero en general a estas relaciones no se les llama "razón" sino "tasa" como afirman (Karplus, Pulos y Stage, 1983a).

Fernández (2009) afirma que si se interpreta la razón como cociente, entonces la razón interna es un escalar que se obtiene como cociente de cantidades de la misma magnitud, como "euros/euros", pero que como son de la misma naturaleza desaparecen en la escritura de las unidades. En cambio, la razón externa es una magnitud derivada, como "velocidad", que se obtiene al ser cociente de cantidades de distinta magnitud y por tanto conserva la relación constante entre los referentes (espacio/tiempo).

Dado que la razón permite expresar relaciones multiplicativas entre magnitudes, en las situaciones de proporcionalidad surgen aspectos de equivalencia cuantitativa, en el sentido de Kieren (1988), o de dependencia lineal. La equivalencia cuantitativa se refiere a la igualdad de razones entre cantidades homogéneas (de una misma magnitud, especie o espacio de medida). La dependencia lineal se refiere a la existencia de una ley de variación que liga el cambio de cantidades heterogéneas: las de una magnitud con las de otra.

En otras palabras, en una proporción, la razón de dos cantidades homogéneas es equivalente a la razón de sus imágenes: $x_i/x_j= f(x_i)/f(x_j)\ \forall_{i,\,j} \in \mathbb{N}$ (aunque dicha razón puede diferir de la que se forme entre otra pareja x_r/x_s del mismo espacio de medida). Freudenthal (1983) se refiere a esta "conservación de la razón" como "invarianza de razones internas" (p. 184). En la proporcionalidad también hay una cantidad que no cambia, que permanece constante y que surge como resultado de la razón generada por una cantidad de un espacio de medida y su imagen: $f(x_i)/x_i=k;$ a la cantidad k se la conoce como constante de proporcionalidad. A esa propiedad de las razones externas, Freudenthal la denomina “constancia de razones externas” (p. 184).

Representaremos con un diagrama la anterior situación utilizando los esquemas de Vergnaud (1983), para este caso tomaremos dos espacios de medida (M_1 y M_2) y la función f que relaciona dichos espacios (véase, Figura 2.1).

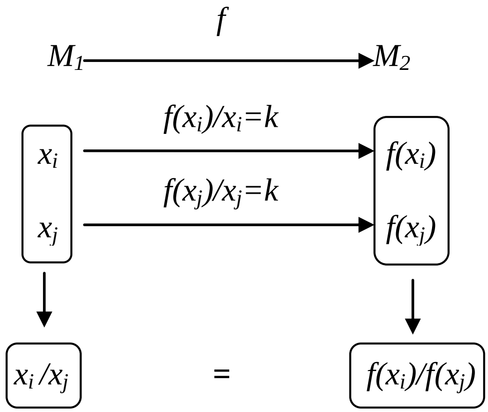


Figura 2.1. Invarianza de razones internas y constancia de razones externas

En esta investigación distinguiremos las relaciones “razón” y “tasa” establecidas por los estudiantes basándonos en la consideración escalar o funcional de las relación multiplicativa de las cantidades según sean dentro de un espacio de medida o entre espacios de medida distintos. En las relaciones establecidas en una magnitud consideraremos los esquemas de pensamiento que se derivan del tipo de comparación (parte-parte o parte-todo) utilizado por los futuros maestros.

2.4. Contextos: parejas de exposiciones y composiciones

Según Freudenthal (1983) la razón debe considerarse en un contexto más amplio que el de las relaciones en una magnitud y entre magnitudes. El autor sitúa la extensa variedad de fenómenos que son susceptibles de relativizar y normalizar en la comparación de parejas de exposiciones, composiciones y constructos; estas últimas son para situaciones preferentemente geométricas, como las escalas y semejanza. Particularmente, en esta investigación hablaremos de parejas de exposiciones y composiciones, para ello consideraremos los trabajos de Fernández (2009), Fernández y Puig (2002) y Gómez (2016) que desarrollan cuidadosamente el estudio fenomenológico elaborado por Freudenthal.

Una exposición o una composición es una terna (Ω, M, ω) donde Ω es un conjunto, y a cada uno de sus elementos se le asocia una magnitud o una medida en M mediante una función ω. Lo que diferencia a las exposiciones de las composiciones es que en un caso el conjunto lo forman objetos, y en el otro, clases o partes de un universo. Un ejemplo de exposición es por ejemplo un conjunto de artículos a los cuales se les asocia un precio. Un ejemplo de composición puede ser una mezcla o una aleación.

A menudo las exposiciones aparecen por parejas, definidas sobre el mismo conjunto, y entonces la razón se usa para comparar cantidades relativas, es decir, otras razones. Por ejemplo, sea Ω un conjunto de artículos y sean las funciones ω_1 y ω_2 las que a cada artículo le asignan un precio y su peso, $\omega_1: \Omega \rightarrow M_1$ (precio) y $\omega_2: \Omega \rightarrow M_2$ (peso). Definiremos la función $f: M_1 \rightarrow M_2$ que relaciona el precio de cada artículo con su peso, esto es, $\forall_x \in \Omega$ tenemos que $f\,[\omega_1\,(x)] = \omega_2\,(x)$. Ilustraremos esta situación con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dd, "f"] \\
\Omega \arrow[ur, "\omega_1"] \arrow[dr, "\omega_2"'] & \\
 & M_2
\end{tikzcd}$$

La razón externa $\omega_1\,(x) : \omega_2\,(x)\ \forall_x \in \Omega$ representa la relación del precio y el peso de cualquier artículo. La comparación de razones externas de diferentes artículos permite afirmar si el precio de un artículo es mayor, menor o igual al precio de otro artículo "en proporción" a los pesos. Consideremos que tenemos un conjunto con dos artículos $\Omega = \{x_1;\ x_2\}$, a cada uno de los artículos les asignamos su precio mediante la función ω_1, $\omega_1\,(x_1) = 3€$ y $\omega_1\,(x_2) = 1€$, y su peso mediante la función ω_2, $\omega_2\,(x_1) = 5kg$ y $\omega_2\,(x_2) = 2kg$. Si tomamos la función *f* que relaciona el precio de cada artículo con su peso, podemos establecer las siguientes razones externas (3€ : 5 kg y 1€ : 2kg). Si las comparamos podemos afirmar si el precio del artículo x_1 es mayor, menor o igual al precio del artículo x_2 "en proporción" a los pesos.

Las composiciones, al igual que las exposiciones, también suelen presentarse por parejas en las que el conjunto de ambas Ω está formado por elementos (componentes o clases) que se representan de la misma forma. Por ejemplo, sean Ω_1 y Ω_2 dos conjuntos con los mismos elementos (cobre y zinc) cuya aleación es el bronce, y las funciones ω_1 y ω_2 que asocian a cada elemento de cada conjunto su masa. Como los conjuntos son iguales podemos considerar la función *j* entre Ω_1 y Ω_2, tal que a cada elemento de Ω_1 le hace corresponder el de la misma representación en Ω_2. Esta función *j* permite asociar la "masa de cobre en Ω_1" con la "masa de cobre en Ω_2" y la "masa de zinc en Ω_1" con la "masa de zinc en Ω_2", con lo que *j* permanece inactiva mientras que no actúe ω_1 o ω_2.

Sea la función *f* definida entre M_1 y M_2, de forma que $f \circ \omega_1 = \omega_2 \circ j$. Por tanto, $\forall_x \in \Omega$ la imagen por *f* de *x* en M_1 por ω_1 le corresponde la imagen por *j* del mismo elemento en M_2 por ω_2, es decir, $f\,[\omega_1\,(x)] = \omega_2\,[\,j\,(x)]\ \forall_x \in \Omega$. Utilizaremos el siguiente diagrama para representar la anterior situación:

$$\begin{tikzcd}
\omega_1 : \Omega_1 \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & M_1 \arrow[d, "f"] \\
\omega_2 : \Omega_2 \arrow[r] & M_2
\end{tikzcd}$$

Si tomamos los elementos de la población (cobre y zinc) tenemos que:

$$\begin{array}{rcl}
M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\
\omega_1\,(\text{cobre}) & \longrightarrow & \omega_2\,[\,j\,(\text{cobre})] \\
\omega_1\,(\text{zinc}) & \longrightarrow & \omega_2\,[\,j\,(\text{zinc})]
\end{array}$$

Consideremos que 40 kg de bronce están formados por 30 kg de cobre y 10 kg de zinc y 7 kg de otra aleación de bronce se compone de 5kg de cobre y 2kg de zinc, entonces se tiene que:

$$\begin{array}{rcl}
M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\
\omega_1\,(\text{cobre}) = 30\text{kg} & \longrightarrow & \omega_2\,[\,j\,(\text{cobre})] = 5\text{kg} \\
\omega_1\,(\text{zinc}) = 10\text{kg} & \longrightarrow & \omega_2\,[\,j(\text{zinc})] = 2\text{ kg}
\end{array}$$

En este caso, la comparación de las razones internas, 30 : 10 y 5 : 2, nos permite decir qué conjunto tiene relativamente más, menos o igual cobre que zinc.

La tarea que hemos diseñado involucra ambos contextos (parejas de exposiciones o composiciones) y en ella se deben crear diferentes cantidades relativas que han de compararse. Según el contexto, se favorece la creación de una cantidad relativa o razón que permite comparar multiplicativamente las cantidades involucradas, permitiendo decir de qué cantidad hay "tantas veces más, menos o igual".

2.5. Relativizar y normalizar

Relativizar, a través del uso de expresiones como "en relación con" y la normalización o tipificación, a través del uso de expresiones como "por cada" o "de cada" son identificados por Fernández y Puig (2003) como precursores de los conceptos de razón y proporción. Estos autores, llaman precursor de un concepto a "los objetos mentales que organizan determinados fenómenos y que favorecen la constitución de buenos objetos mentales del concepto en cuestión" (Fernández, 2009, p.56).

La idea de objeto mental es introducida por Freudenthal (1983) para hablar de la relación entre los conceptos u objetos matemáticos (noúmenos) y las situaciones o contextos que el objeto matemático organiza (fenómeno). Tanto los conceptos como los objetos mentales se constituyen como medios de organización de fenómenos, pero se pueden diferenciar en que los objetos mentales pertenecen a la mente de las personas y los conceptos al mundo de las matemáticas (Puig, 1997). Así, como afirma Fernández (2009):

> Una persona tendrá un objeto mental inicial en relación con un concepto dependiendo del contexto en el que están los fenómenos que se les

> presentan inicialmente. A medida que se varían los fenómenos y los contextos, el objeto inicial cambiará, irá enriqueciéndose, y será mejor, en el sentido de que podrá organizar más fenómenos. (Fernández, 2009, p.31)

Como afirma Freudenthal, en el sistema educativo debe prevalecer la constitución de objetos mentales sobre la adquisición de los conceptos. Para Puig (1997), la constitución de un objeto mental conlleva poder dar cuenta con él de todos los usos en todos los contextos o poder organizar todos los fenómenos correspondientes, y la adquisición del concepto implica examinar cómo ha sido establecido en las matemáticas organizado local o globalmente en un sistema deductivo.

El objeto mental "relativamente" permite dar sentido a una situación comparativa entre cantidades. En el presente trabajo entendemos que el término relativizar hace referencia a poner algo "en relación con", como expresión de una comparación multiplicativa. En esta investigación se asume que relativizar es entender en términos de razón una comparación entre cantidades.

Freudenthal (1983) presenta diferentes ejemplos que dan cuenta de los contextos que requieren la comparación relativa entre cantidades. Como indica este autor, en ellos puede faltar o aparecer explícito el término relativamente, como en el caso de "una pulga puede saltar —relativamente— más alto que un hombre" (p.193). En este caso se guía al lector hacia un pensamiento relativo, en el que puede considerar un criterio comparativo, como por ejemplo, el salto "en relación con" el tamaño. Si en el ejemplo anterior, el término relativamente no está explícito, el contexto planteado puede hacer aflorar un tipo de pensamiento absoluto en que el lector pudiera pensar en el valor absoluto de la altura saltada como resultado.

Consideramos importante ayudar a los futuros maestros a desarrollar criterios para distinguir la conveniencia o no del uso de estos tipos de pensamiento en contextos que involucren la constitución del objeto mental "relativamente". En particular, en esta investigación, se ha diseñado una tarea en la que no aparece el término relativamente en el enunciado, pero para abordarla con éxito es necesario llevar a cabo criterios de comparación en términos relativos.

En diferentes situaciones, como en las ofertas comerciales que ofrecen descuentos, éstos suelen aparecer mediante cantidades relativas que suelen ser razones, a menudo normalizadas en porcentajes que son "una particular manera de cuantificar una relación multiplicativa" (Parker y Leinhardt, 1995, p. 437).

Relativizar y normalizar son procesos útiles para facilitar la visualización y comparación de razones con referentes distintos. Normalizar es un proceso de "reconceptualización de un sistema en relación a una unidad fijada o estándar" (Lamon, 1994, p.94); es, por tanto, un complejo de técnicas que permiten visualizar ciertas razones transformando el referente (Freudenthal, 1983). Fernández (2009) distingue dos maneras para normalizar razones, "una en la que se cambian los referentes mediante escalas de manera que las magnitudes o tamaños resulten normales o familiares y otra en la que se unifican los antecedentes o los consecuentes de las razones para favorecer la comparación" (p.52).

Centrándonos en la unificación de antecedentes o consecuentes, este autor considera que la normalización se puede ligar a la unidad, bien sea simple o múltiple, como en las verbalizaciones "uno de cada…", "dos de cada…", "por cada…", etc. También se puede ligar al sistema de numeración decimal, en este caso el consecuente de la razón suele ser 100 y la razón un porcentaje o un decimal.

La normalización está supeditada a la flexibilidad de pensamiento lo cual permite elegir a conveniencia la forma de representar a la razón: fracción, decimal, porcentaje o razón compuesta. Pero las normalizaciones también son susceptibles de error, por ejemplo, cuando "un significado absoluto se atribuye a datos que dependen de una normalización, en particular, cuando los datos derivados de normalizaciones distintas se comparan sin volverlos a normalizar" (Freudenthal, 1983, p.197). Por ejemplo, un alumno puede dar un significado absoluto a los porcentajes sin tener en cuenta el referente: "si la población de Alicante ha aumentado su población un 30% en verano y la población de Valencia ha aumentado un 20% en las mismas fechas, entonces el aumento total en ambas provincias es del 50%", sin tener en cuenta el referente del porcentaje.

Es entre otras, por estas razones, que en la investigación que se documenta en este trabajo, las técnicas o algoritmizaciones de la normalización también se incluyen entre las dimensiones de análisis de las respuestas de los estudiantes.

2.6. El razonamiento proporcional

Puesto que la habilidad para pensar en términos relativos en lugar de absolutos es uno de los cambios de pensamiento requeridos para el desarrollo del razonamiento proporcional (Lamon, 2012), pasaremos a hablar del significado otorgado al razonamiento proporcional, pero antes conviene hacer una distinción con el significado de la proporcionalidad.

Como indican Karplus et al. (1983a), "los conceptos de razón y proporción son aplicados ampliamente en las matemáticas, la ciencia y la vida cotidiana" (p. 219), y a su vez como afirma Valverde (2013), "el razonamiento proporcional juega un papel importante en muchos escenarios del mundo real, así como también en muchos conceptos matemáticos avanzados" (p. 128). Dada la estrecha vinculación de ambos significados conviene no confundirlos al hablar de ellos. Como afirma Lamon (2012) la proporcionalidad juega un papel relevante en el dominio de principios físicos, como por ejemplo, la fuerza, la óptica o el sonido y el razonamiento proporcional es un prerrequisito para comprender contextos y aplicaciones basados en la proporcionalidad. En este sentido, el razonamiento proporcional se centra en medir la comprensión de ideas matemáticas elementales y la proporcionalidad permite la fundamentación de ideas matemáticas más complejas.

Algunas investigaciones han dado su particular definición de lo que significa el razonamiento proporcional. Para Karplus et al. (1983a), el razonamiento proporcional es un "término que denota el razonamiento en un sistema de dos variables entre las cuales existe una relación de función lineal" (p.219). Norton (2005) utiliza este término para "describir los conceptos y pensamiento requeridos para comprender las tasas, la razón y la proporcionalidad incluyendo las escalas" (p. 17).

Lesh, Post y Behr, (1988) definen el razonamiento proporcional como "una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de co-variación[1] y de múltiples comparaciones, y la habilidad para almacenar y procesar mentalmente varias piezas de la información. El razonamiento proporcional está muy relacionado con inferencia y predicción e implica ambos métodos de pensamiento cualitativo y cuantitativo" (p.93). Una caracterítica principal que estos autores consideran del razonamiento proporcional es el "reconocimiento de la similitud estructural e invariancia[2] en un sistema matemático simple" (Fernández, 2009, p. 70).

El término razonamiento proporcional, lo utilizaremos en el sentido de Lamon (2007), que considera que éste se produce cuando una persona es capaz de demostrar que comprende las relaciones estructurales entre cuatro cantidades en un contexto que involucra simultáneamente covarianza de cantidades e invarianza de razones o productos; esto podría consistir en la habilidad para identificar una relación multiplicativa entre dos cantidades así como también la habilidad para extender la misma relación a otro par de cantidades.

---

[1] El sentido de co-variación se refiere al cambio simultáneo de dos cantidades entre las cuales existe una relación, es decir, si una cantidad cambia, la otra también cambia de una manera particular con respecto a la primera y viceversa.

[2] Por invariancia, en términos de Freudenthal (1983), se refieren a la conservación de razones internas en una proporción.

Es importante señalar que "no toda persona que resuelve un problema que involucre proporciones necesariamente utiliza el razonamiento proporcional" (Lesh et al., 1988, p. 93). Como afirma Lamon (2012):

> La palabra *razonamiento* sugiere que usemos el sentido común, buen juicio y un enfoque reflexivo de los números en la resolución de problemas, en lugar de arrancar los números y resolver los problemas utilizando reglas y operaciones a ciegas. En general, no asociamos el razonamiento con los procedimientos de reglas guiadas o mecanizadas, sino más bien, con procesos mentales que fluyen libremente y que requieren del análisis consciente de las relaciones entre cantidades. (p. 4)

En los siguientes apartados realizamos una revisión de los trabajos que consideramos relevantes para el propósito de nuestro estudio.

2.7. Trabajos sobre razón y proporción

En didáctica de la matemática, dentro del campo de las investigaciones sobre razón y proporción, existen trabajos que ahondan en los aspectos formales de dichos conceptos. De especial interés en esta investigación es el análisis fenomenológico de los conceptos razón y proporción llevado a cabo por Freudenthal (1983). Desde esta perspectiva, el autor profundiza en el significado propio de razón y en los diferentes contextos (exposiciones, composiciones y constructos) que son organizados por dicho concepto e introduce la idea de "objeto mental" en la relación entre los fenómenos y la adquisición de los conceptos, lo que nos permite hablar de la necesidad de constituir ciertos objetos mentales —como “relativamente”— como necesarios en la adquisición del propio concepto de razón. En este marco, destacamos los aspectos del análisis fenomenológico de Puig (1997), así como los aportes teóricos de Fernández (2009) quien profundiza y desarrolla el estudio fenomenológico de Freudenthal en torno a elementos precursores de los conceptos de razón y proporción con estudiantes de primaria, concretamente aborda la relativización de las comparaciones, las comparaciones cualitativas, la normalización o tipificación, y la visualización de algunas situaciones.

En los estudios sobre razón, el razonamiento proporcional puesto en juego por estudiantes de distintas edades y niveles al resolver problemas sobre razón y proporción es a menudo el foco de atención (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; Buforn y Fernández, 2014; Cramer y Post, 1993; Fernández, 2009; Fernández, 2010; Inhelder y Piaget, 1958; Karplus et al., 1983a, 1983b; Lamon, 1993b, 1994, 2007; Lesh et al., 1988; Noelting, 1980a, 1980b; Tourniaire y Pulos, 1985; Valverde, 2013).

Estos estudios nos permiten identificar diferentes tipos de problemas empleados en la evaluación del razonamiento proporcional; distinguir las estrategias y métodos para comparar razones; así como conocer algunas categorías utilizadas para describir las actuaciones de los estudiantes de algunos trabajos precedentes. En los siguientes apartados profundizaremos en los anteriores aspectos e indicaremos distintas variables en los problemas de razón y proporción que afectan en su resolución.

2.8. Tipos de problemas en el estudio del razonamiento proporcional

En las investigaciones sobre razón y proporción, tradicionalmente los aspectos cognitivos del razonamiento proporcional se manifiestan en las actuaciones hacia tres tipos de problema: valor perdido, comparación numérica y comparación cualitativa (Cramer y Post, 1993; Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001).

En los problemas de valor perdido, se presentan tres valores conocidos de una cuarta proporcional o de una proporción. Para resolver el problema se pide al estudiante que encuentre el valor que falta; por ejemplo: si 3 botellas cuestan 4€, entonces ¿cuánto costarán 12 botellas? Cramer y Post (1993) señalan como ejemplo representativo, el problema de *"Mr. Short and Mr. Tall"* de Karplus, Pulos y Wollman, (1972), del que podemos encontrar distintas versiones utilizadas en las investigaciones (véase, Fernández, 2009; Hart, 1984; 1988; Rivas, Godino y Castro, 2012).

En los problemas de comparación numérica se dan las cantidades de dos razones y se debe averiguar si las dos razones son iguales o cuál es mayor o menor que la otra. Los datos de las razones pueden estar dados de forma explícita o implícita y una respuesta numérica al problema no es requerida (Cramer y Post, 1993). Un ejemplo conocido de este tipo de problemas es la serie de problemas de Noelting (1980a) denominada "Rompecabezas del jugo de naranja" (Orange Juice Puzzle) en que se compara el sabor de naranja relativo a dos bebidas formadas por un cierto número de vasos de zumo de naranja y un cierto número de vasos de agua. En la Figura 2.2 se ilustra el ejemplo empleado por Cramer y Post (1993).

Los problemas de comparación cualitativa requieren una comparación que no depende de valores numéricos específicos. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente: “Si Nick ha mezclado menos limón con más agua que ayer su bebida tendrá un sabor: a) más fuerte b) más suave, c) exactamente el mismo sabor, d) no hay suficiente información para responder a la pregunta” (Cramer y Post, 1993, p.405). Estos autores afirman que este tipo de situaciones requiere de los estudiantes una comprensión del significado de proporciones. En cambio, para la resolución de problemas de valor perdido y comparación numérica, los estudiantes pueden emplear procesos mecánicos o memorísticos.

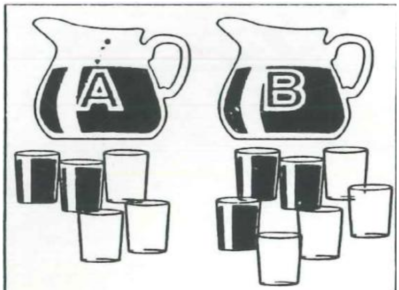


Fig 2
Noelting's orange-juice task (1980) Which pitcher will have juice that has the strongest taste? Why? Reprinted with permission of Kluwer Academic Publishers.

Figura 2.2. La tarea del jugo de naranja de Noelting (1980)

Como hemos indicado, los problemas de valor perdido, comparación numérica y comparación cualitativa son los utilizados con frecuencia para evaluar el razonamiento proporcional. En particular en este estudio trabajamos con una tarea de comparación numérica.

Existen otras investigaciones que, pese a utilizar en su estudio alguno de estos tres tipos de problemas, ofrecen su particular clasificación atendiendo a distintos aspectos, tales como el tipo de razonamiento que involucran, el contexto o la semántica. Para ofrecer una visión al respecto, a continuación mencionaremos algunos de estos trabajos.

Tourniaire y Pulos (1985), atendiendo al contexto, agrupan en cuatro categorías las tareas y problemas que utilizan distintas investigaciones en el estudio del razonamiento proporcional. Las categorías que mencionan son: *tareas de física, problemas de tasa (rate), problemas de mezclas y tareas de probabilidad*. Lesh et al. (1988), atendiendo a distintas áreas temáticas en las que se plantean situaciones de razón y proporción, identifican siete modalidades de problemas: *problemas de valor perdido; problemas de comparación; problemas de transformación; problemas de valor medio; proporciones que implican conversión de razones a tasas (rates) o fracciones; proporciones que implican tanto etiquetas unitarias como numéricas; y problemas de traslación "between-mode".* Estos autores consideran que las últimas cinco modalidades no son tomadas en cuenta por la instrucción ni por la investigación.

Singer y Resnick (1992) clasifican los problemas atendiendo al uso de las relaciones y esquemas de razonamiento "parte-todo" y "parte-parte", agrupando los problemas en dos tipos ("por cada" y "de cada"). Estos autores, señalan que los problemas de tasas se presentan en situaciones similares a "por cada", sin embargo, no admiten un razonamiento parte-parte ni parte-todo porque las cantidades que se relacionan no son homogéneas. Otra clasificación, realizada por Lamon (1993b), atiende a la semántica de los enunciados en problemas de proporcionalidad y en ella se identifican cuatro tipos de problemas: *problemas bien compactados (Well-chunked measures)*; *problemas parte-parte-todo; conjuntos asociados; y ampliadores y reductores.* En un contexto con futuros profesores, Ben-

Chaim et al. (2007) señalan como "auténticas" tareas de investigación para evaluar el uso del razonamiento proporcional las siguientes cinco: *tareas introductorias, tareas de tasas, tareas de razones, tareas de escala y tareas indirectas*. Según estos autores, estas tareas se llaman auténticas en el sentido de que son genuinas, presentando problemas en relación con la vida cotidiana. La resolución de estas tareas "requieren de comparaciones cuantitativas y cualitativas entre razones y la búsqueda del valor perdido" (p. 335).

2.9. Actuaciones de los estudiantes ante los problemas de razón y proporción

En la resolución de problemas de razón y proporción, distintos investigadores han identificado las diferentes estrategias llevadas a cabo por los estudiantes con la finalidad de categorizarlas en un mayor o menor uso del razonamiento proporcional. En este apartado hablaremos de las estrategias correctas e incorrectas frecuentes en la literatura y mostraremos las categorías empleadas por algunos investigadores para describir el razonamiento proporcional de los estudiantes.

2.9.1. Estrategias correctas.

Del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en problemas de valor perdido y de comparación, Cramer y Post (1993) identifican diferentes estrategias correctas: *tasa unitaria* (unit-rate)*; factor de cambio* (factor of change)*; estrategia de la fracción* (fraction estrategy) *y producto cruzado* (cross product). Para ejemplificar estas estrategias haremos uso del siguiente problema "Si 4 botellas de vino cuestan 20 €, ¿cuánto costarán 12 botellas de vino?"

- La estrategia de la tasa unitaria (unit-rate) responde a la pregunta, "¿cuánto por uno?" Para resolver el problema anterior el estudiante se pregunta ¿cuánto pago por una botella? y encuentran la tasa unitaria 5 € / 1 botella. Después resuelve: entonces 12 botellas de vino costarán [5 € / 1 botella] × 12 botellas =60 €.
- En la estrategia del factor de cambio (factor of change) denominada también "tantas veces como" (time as many) los estudiantes razonan de la siguiente manera "si 12 botellas es el triple de 4 botellas entonces costarán el triple de dinero, por tanto 12 botellas de vino costarán 60€". Como indican los autores el uso de esta estrategia está ligado a los valores numéricos del problema, la utilización de números no enteros dificulta el uso de este método.
- En la estrategia denominada de la fracción (fraction strategy), los estudiantes consideran la tasa como una fracción y aplican reglas de equivalencia olvidando las etiquetas de las cantidades. Así en el problema anterior, el estudiante multiplica por 3 el numerador y el denominador de la tasa 20€ / 4 botellas, (20x3/4x3) y obtiene como resultado 60€.
- El algoritmo del producto cruzado es un proceso mecánico utilizado con frecuencia para resolver problemas de proporcionalidad. Los estudiantes crean una proporción formando un producto cruzado y el resultado es la solución de una ecuación por división (véase Figura 2.3).

$$\frac{20\ €}{4\ \text{botellas}} = \frac{?\ €}{12\ \text{botellas}}$$

$$20\ €\ \text{x}\ 12\ \text{botellas} = ?\ €\ \text{x}\ 4\ \text{botellas}$$

$$\frac{20\ €\ \text{x}\ 12\ \text{botellas}}{4\ \text{botellas}} = ?\ €$$

$$60\ € = ?\ €$$

Figura 2.3. La estrategia del producto cruzado

Lesh et al. (1988) consideran el producto cruzado como un método para resolver problemas de proporción y sugieren que la utilización de este método no implica un uso del razonamiento proporcional por sí mismo.

Según Tournaire y Pulos (1983) *las estrategias multiplicativas* y las de *construcción progresiva* son las que destacan en los trabajos sobre razón y proporción.

- En las estrategias multiplicativas los términos de una razón se relacionan multiplicativamente y esta relación se extiende a la otra razón. En unos casos la relación se establece entre el numerador y el denominador de una razón o entre los numeradores y denominadores a través de las razones. En otros casos las relaciones multiplicativas se establecen mediante el producto cruzado.
- La estrategia de construcción progresiva (building-up) consiste en establecer una relación de una razón y extenderla a la otra por adición (Hart, 1981). Esta investigadora ilustra esta estrategia mediante el siguiente problema: Si en una tienda de dulces 2 caramelos cuestan 8 céntimos, ¿Cuánto cuestan 6 caramelos? El estudiante hace lo siguiente: 8 céntimos para 2 caramelos, 8 céntimos más son 16 céntimos para 4 caramelos, y 8 céntimos más son 24 céntimos para 6 caramelos.

La anterior estrategia está condicionada por las relaciones de los datos. Si la relación multiplicativa de los datos del problema es no entera pocos estudiantes utilizan esta estrategia con éxito (Hart, 1981).

Entre los métodos para comparar razones, Hoffer (1988) destaca los siguientes: *método de la unidad y método del común múltiplo*.

- El método de la unidad consiste en el escalamiento de ambas razones para obtener razones que son equivalente en términos de una unidad simple, si es posible.
- El método del común múltiplo consiste en la búsqueda de un múltiplo común y establecer una comparación con los otros valores de las dos razones.

En diversas investigaciones (Freudenthal, 1983; Karplus et al., 1983a; Lamon, 1993b; Noelting, 1980b; Vergnaud, 1988) el tipo de unidad utilizado por los estudiantes o la manera en la que los estudiantes establecen las relaciones entre las cantidades es considerada para caracterizar las diferentes actuaciones en situaciones de valor perdido o de comparación de razones.

Noelting (1980b), de la resolución del problema "Rompecabezas del jugo de naranja" (véase Figura 2.2), distingue dos tipos de estrategias que usan los estudiantes: *dentro* (within) y *entre* (between).

- Cuando los estudiantes forman la razón (cantidad de naranja/cantidad de agua) de cada una de las jarras y después las comparan, llevan a cabo la estrategia "dentro".

- Si los estudiantes forman la razones (cantidad de naranja de la jarra A/ cantidad de naranja de la jarra B) y (cantidad de agua de la jarra A / cantidad de agua de la jarra B) y finalmente las comparan, usan la estrategia “entre”.

Sin embargo, algunos autores (Karplus et al., 1983a; Lamon, 1993b, 1994, 2007; Vergnaud, 1983) sustentan esta distinción en el carácter escalar o funcional de la relación multiplicativa que se da entre las cantidades ya sea de un mismo espacio de medida, o bien de dos espacios de medida diferentes.

- Si los alumnos relacionan multiplicativamente cantidades homogéneas en un mismo espacio de medida o sistema, entonces la estrategia utilizada es “escalar” o “dentro”. En este caso, los alumnos hacen uso de razones internas.
- Si los estudiantes relacionan cantidades de distintos espacios de medida o sistemas, entonces la estrategia manejada se denomina “funcional” o “entre”. En este caso, los alumnos hacen uso de razones externas.

Si volvemos al problema de Noelting (1980a), y utilizamos esta última terminología, entendemos que si el estudiante relaciona litros de jugo de naranja con litros de jugo de naranja, al relacionar cantidades homogéneas la estrategia sería “dentro”. Y si relaciona los litros de jugo de naranja con litros de agua, la estrategia utilizada sería “entre”. Dado que esta terminología es controvertida y para no dar lugar a confusión, tomaremos en consideración las indicaciones de Lamon (2007), que propone especificar "dentro (within) o entre (between) sistemas" o "dentro (within) o entre (between) espacios de medida" (p. 634).

Según el tipo de unidad utilizada por los estudiantes al resolver un problema de valor perdido, Lamon (1993a) identifica las siguientes estrategias: *estrategia de la unidad simple, estrategia de la unidad compuesta y construcción progresiva*. De esta última ya hemos hablado anteriormente.

- En la estrategia de la unidad simple, el estudiante en el problema "Si 4 botellas de vino cuestan 20 €, ¿cuánto costarán 12 botellas de vino?", toma el valor de una botella (unidad simple) y lo multiplica por el número de botellas para encontrar la solución.
- En la estrategia de la unidad compuesta, el estudiante se percata que 12 botellas es 3 veces la unidad compuesta (4 botellas), de esta manera encuentra el coste de las 12 botellas.

Ambas estrategias pueden identificarse con la estrategia de "tasa unitaria" y de "factor de cambio" que describen Cramer y Post (1993).

Lamon (1994), emplea el término *unitizing*[3] para referirse a la habilidad para construir una unidad o un todo unitario que resulte familiar o manejable y entonces, poder reinterpretar la situación en términos de esta nueva unidad. Es decir, unitizing se refiere al proceso de construir o agrupar "paquetes de elementos" de una cantidad, el número de elementos utilizados

[3] La traducción literal de este término –unitización- no tiene un significado según el Diccionario de la Real Academia Española (2014). Uno de los significados que puede vincularse a unitizing puede ser el de "unificar" que es "hacer de muchas cosas una o un todo" (DRAE, 2014). En este trabajo, escribiremos el término literal para no dar lugar a confusión.

determina la unidad de referencia (simple o compuesta). Por ejemplo, si pensamos en 24 latas de refresco, una persona puede considerar las 24 latas como objetos individuales (unidad simple) o crear unidades de unidades (unidades compuestas) como 2 paquetes de 12 latas, 3 paquetes de 8 latas, etc. Una vez fijada la unidad (simple o compuesta) la situación dada se reinterpreta en términos de esta unidad. Como afirma esta autora, "Freudenthal (1983) utiliza el término de normalización para describir este proceso de reconceptualización de un sistema en relación con una unidad fijada o estándar" (p. 135).

Además de las estrategias (unidad simple y unidad compuesta), Lamon (1993a) considera otra estrategia más sofisticada dentro del proceso de unitizing y es el que consiste en tomar una "razón como unidad" y reinterpretar la situación en función de esta razón.

Veamos un ejemplo del uso del proceso unitizing en el siguiente problema de comparación de razones: Supongamos que se reparten 12 botellas de agua entre 5 niños y 5 botellas de agua entre 2 niñas, ¿Quién recibe más cantidad de agua, los niños o las niñas? Un estudiante puede tomar como unidad la razón (5 : 2) e intentar ver cuántas veces esta razón está dentro de (12 : 5). Para ello el estudiante realiza agrupamientos tomando de referencia la razón (5 : 2) dentro de la razón (12 : 5) y finalmente comparan (2 : 1) con (5 : 2) y concluye que las niñas tienen más cantidad de agua (véase Figura 2.4).

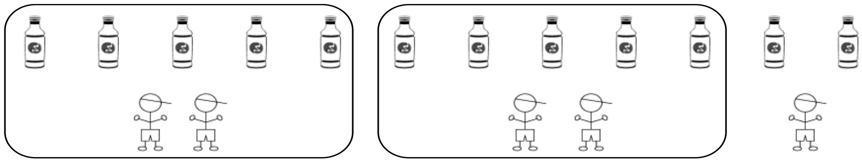


Figura 2.4. El uso de la razón como unidad

En el anterior problema, un estudiante puede hacer uso de la normalización para que las razones a comparar resulten familiares. De esta manera, puede tomar las razones (12 botellas / 5 niños) y (5 botellas / 2 niñas) y fijar una unidad compuesta de referencia (60 botellas) que es múltiplo común de dichas razones (Hoffer, 1988) para crear otras razones que resulten "normales". Así, puede obtener las tasas (60 botellas / 25 niños) y (60 botellas / 24 niñas), y decidir que las niñas reciben más cantidad de agua.

Para Lamon (2007) la estrategia de construcción progresiva y la normalización no parecen ser buenos indicadores del razonamiento proporcional porque la utilización frecuente de estos métodos puede dificultar el reconocimiento de todas las relaciones estructurales en una proporción.

2.9.2. Estrategias incorrectas.

En general las estrategias erróneas aparecen por un uso incorrecto de alguna estrategia apropiada o por el uso de estrategias no adecuadas (Tourniaire y Pulos, 1985).

Una estrategia incorrecta recogida en la literatura (Fernández, 2009; Karplus et al., 1983a; Tourniaire y Pulos, 1985) en problemas de comparación de razones es *ignorar parte de los datos de un problema*. En este caso, los estudiantes "intentan resolverlo comparando únicamente los antecedentes (o los consecuentes) de las dos razones y toman la decisión mediante un razonamiento de tipo directo (o inverso)" (Fernández, 2009, p. 69).

En problemas por ejemplo de valor perdido, realizar *operaciones aleatorias* utilizando parte de los datos para obtener una solución numérica es una estrategia errónea destacada en distintas investigaciones (Cramer y Post, 1993; Fernández, 2009; Lamon, 1993a).

Tanto en problemas de valor perdido como de comparación de razones, la utilización de la *estrategia aditiva* o de *diferencia constante* aparece con frecuencia en la literatura (Cramer y Post, 1993; Fernández, 2009; Fernández y Llinares, 2012; Hart, 1988; Kilpatrick et al., 2001; Lesh et al., 1988; Modestou y Gatgatsis, 2009; Tourniaire y Pulos, 1985; Valverde, 2013). Como indican Tourniaire y Pulos (1985), "en esta estrategia, la relación interna en una razón es cuantificada por substracción de un término con el otro, y entonces la diferencia es aplicada a la segunda razón" (p. 186). Así, un estudiante que utiliza esta estrategia en un problema de comparación de razones, compara la diferencia entre los términos de una razón con la diferencia entre los términos de otra razón y de esta manera decide entre las razones. Como ejemplo, consideremos el siguiente problema "En rebajas, Marta en una tienda A paga 2€ de 5€ y en otra tienda B Mario paga 5€ de 8€, ¿Quien tiene un mejor descuento?" Un estudiante que aplica la estrategia aditiva errónea considera en términos absolutos las cantidades del problema. En este sentido, calcula la diferencia de las cantidades y las compara (5€-2€=3€ y 8€-5€=3€) considerando que los descuentos son iguales. Esto lo hace en lugar de relacionar esta diferencia con el coste inicial "a Marta le descuentan 3€ de cada 5€ y a Mario le descuentan 3€ de cada 8€, por tanto Marta tiene un mejor descuento".

2.9.3. Categorías de análisis del razonamiento proporcional.

Las categorías para evaluar el razonamiento proporcional que utilizan diferentes investigaciones en general tienen en cuenta desde los aspectos cualitativos hasta los meramente cuantitativos en cuanto al manejo de las razones y proporciones. En ellas se observa la agrupación de patrones de respuestas de índole absoluto o aditivo como previas en la transición a las de tipo multiplicativo.

A continuación mencionaremos dos trabajos que consideramos relevantes en la categorización del razonamiento proporcional.

Karplus et al. (1983a) ante una situación de comparación de razones agrupan las actuaciones de los alumnos en las siguientes categorías:

- Categoría I (incompleta, ilógica). Adivina por intuición y no da explicaciones, utiliza de manera inapropiada los datos o realiza un uso inapropiado de operaciones numéricas.
- Categoría Q (cualitativa). Realiza una comparación cualitativa de los datos, utilizando expresiones como: "más", "menos", o equivalentes.
- Categoría A (aditiva). Utiliza los datos para calcular y obtener la respuesta mediante la estrategia aditiva.
- Categoría P (proporcional). Utiliza los datos para calcular y comparar relaciones proporcionales, aunque haya errores aritméticos. Esta categoría la dividen en tres: Pb (between) uso de la relación externa

funcional, Pw (within) uso de la relación interna o escalar, y Pu (unclassificable) uso de otro tipo de comparación.

Otra categorización es la que realiza Lamon (1993b) en su análisis del pensamiento de los niños al resolver distintos tipos de problemas de razonamiento proporcional, considerando las siguientes dimensiones:

- Uso de pensamiento relativo o absoluto.
- Tipo de representación (verbal, pictórica o tabular).
- Estructura de la cantidad (unidad simple, unidad compuesta).
- Sofisticación de la estrategia (estrategia incorrecta, razonamiento pre-proporcional, razonamiento cualitativo proporcional o razonamiento cuantitativo proporcional).

Esta autora, incluye dentro del razonamiento pre-proporcional los métodos informales que dan lugar a soluciones correctas sin entender las relaciones escalares y funcionales. En el razonamiento proporcional incluye las actuaciones que demuestran comprensión de las relaciones escalares y funcionales entre dos espacios de medida, en las que los estudiantes pueden o no representar simbólicamente estas relaciones.

2.10. Variables en los problemas de razón y proporción que afectan en las actuaciones.

Según Tourniaire y Pulos (1985), en los problemas de razón y proporción, existen dos variables que afectan en el desempeño de los estudiantes: la estructura del problema y el contexto del problema. Como afirma Fernández (2009), "la estructura del problema influye en las actuaciones de los estudiantes, pues toda tarea de razonamiento proporcional simple implica dos razones y por tanto relaciones entre cuatro datos numéricos" (p.72). A su vez, el contexto de los problemas es considerado por Alatorre y Figueras (2005) como una de las principales causas en el uso del razonamiento proporcional.

Atendiendo a la estructura del problema, la presencia o ausencia de razones enteras, el tamaño de los datos usados y el orden en que se presentan los datos en el enunciado influyen en las actuaciones de los estudiantes (Karplus et al., 1983a; Lesh et al., 1988; Noelting, 1980a; Tourniaire y Pulos, 1985).

Tanto en problemas de comparación como de valor perdido, la consideración de que las relaciones entre los datos sean enteras favorece la resolución de los problemas; incluso el uso de razones no enteras puede favorece el empleo de la estrategia aditiva incorrecta (Karplus et al., 1983b; Hart 1981). En particular, en situaciones en las que la relación de las cantidades es no entera se observa que la presencia del valor unitario entre los datos permite representar relaciones unitarias que resultan más sencillas a los estudiantes. Dentro de estos casos resultan más sencillos aquellos que contienen la razón 1:2 que aquellos que utilizan razones 1: n (Hart, 1981; Tourniaire y Pulos, 1985). En este sentido, expresiones como "dos veces" o "tres veces más grande" resultan más fáciles que otro tipo de relación no entera (Smith, 2002). A su vez, este autor considera el tamaño de los números un factor importante, siendo más sencillos aquellos problemas que involucran números más pequeños.

En los problemas de comparación, un aspecto a tener en cuenta es si las razones a comparar son iguales o no. La comparación de razones desiguales resulta más difícil que la comparación de razones iguales (Karplus et al., 1983a, 1983b). Esto puede deberse a que las situaciones de desproporción requieren de un razonamiento más sofisticado que las de proporción. Según estos autores, en las comparaciones de razones desiguales se tiene que establecer por qué una relación es mayor que otra, lo que supone una inferencia adicional sobre las situaciones de igualdad.

Otro factor a considerar es el orden en el que se presentan los datos en problemas de valor perdido, es decir, atendiendo al lugar que ocupa el valor desconocido podemos considerar unos problemas más difíciles que otros (Lesh et al., 1988).

Centrándonos en el contexto del problema, Tourniaire y Pulos (1985) consideran las siguientes variables: la presencia de una mezcla, la familiaridad con el contexto y la presencia de cantidades continuas. Estos autores afirman que los problemas de mezcla resultan más difíciles que los de tasa pues en ellos se forman nuevos objetos: la mezcla de vasos de zumo de naranja con vasos de agua produce un cambio en el sabor a naranja. Esta afirmación parece no convencer a algunos autores debido a que en problemas de tasas también se generan nuevos objetos, como por ejemplo, la velocidad (Harel, Behr, Post y Lesh, 1991). Alatorre y Figueras (2005) comprueban que los problemas de tasa son los más fáciles de resolver y los problemas de probabilidad los más difíciles, mientras que los problemas de mezcla se ubican en una categoría media entre ellos. A este respecto, Fernández (2009) considera que “el análisis funcional que hemos hecho de las exposiciones (problemas de tasas) y de las composiciones (problemas de mezclas) nos permite suponer que la afirmación de Tourniaire y Pulos es plausible" (p. 73).

La familiaridad con el contexto del problema parece ser otro factor importante que afecta en las actuaciones de los estudiantes (Alatorre y Figueras, 2004; Cramer y Post, 1993; Heller, Ahlgren, Post, Behr y Lesh, 1989; Smith, 2002). Cramer y Post (1993) afirman que las escalas resultan significativamente más difíciles que otros contextos y consideran que "la instrucción debería comenzar con contextos más familiares y extenderse a los menos familiares" (p. 407). Heller et al. (1989) observan que los contextos de compra al ser más familiares parecen resultar más fáciles que los contextos sobre velocidad y consumo.

La naturaleza de las cantidades, discretas o continuas, presentes en los problemas de razón y proporción es otra variable de contexto tomada en consideración por diferentes investigadores (Behr et al., 1992; Fernández 2009; Karplus et al., 1983a; Lo y Watanabe, 1997). Diversos autores consideran que los contextos con cantidades discretas mejoran el desempeño en los problemas de razón y proporción (Behr et al., 1992; Tourniaire y Pulos, 1985). Así, Behr et al. (1992) señalan que una posible causa es que los contextos en que las cantidades son discretas favorecen el desarrollo de buenos procedimientos de conteo en los estudiantes y esto no sucede con las cantidades continuas. En cambio, otros trabajos observan que en problemas análogos de proporcionalidad, unos con cantidades continuas y otros con discretas, en las situaciones continuas los estudiantes obtienen un mejor desempeño y razonamiento sobre proporciones (Singer-Freeman y Goswami, 2001; Spinillo y Bryant, 1991).

Otra variable de contexto, anteriormente no mencionada que es tomada en consideración por algunos autores, es la presencia de determinadas expresiones verbales en los problemas (Fernández, 2009; Kaput y West, 1994). Estos autores observan que el uso de expresiones normalizadas del tipo “de cada” o “por cada” al igual que expresiones como “relativamente” o “en relación con” en los enunciados de los problemas facilitan su resolución.

CAPÍTULO 3.
PRIMERA FASE

En este capítulo describiremos la metodología empleada en la primera fase de la investigación y los resultados obtenidos del análisis empírico.

En primer lugar describiremos la muestra de participantes, el instrumento empleado para la recogida de datos (la tarea), el proceso de aplicación del mismo y el modo en que van analizarse los datos. Para poder dar información sobre este análisis es necesario describir los componentes críticos de la tarea (extraídos del análisis racional) y las dimensiones de análisis adoptadas en el análisis empírico (que se fundamentan tanto en los referentes teóricos de la investigación como en los componentes críticos descritos).

Seguidamente hablaremos de los resultados obtenidos del análisis empírico. Recordemos que este análisis se basa en el estudio de las estrategias empleadas por los estudiantes para maestro a la tarea empleada para la recogida de datos. Los resultados se han organizado en esquemas de categorías y subcategorías que dan cuenta de los patrones cognitivos de respuesta.

3.1. Muestra

Para llevar a cabo esta primera fase, se utilizó una muestra de conveniencia formada por 339 estudiantes del grado universitario para maestro de la universidad de Valencia, en el comienzo del curso 2013-2014, en su grupo y en tiempo normal de clase (40-50 estudiantes).

3.2. Instrumento

Se ha elegido una tarea "realista", del tipo "¿Cuál es la mejor compra?" (Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 2007), que resulta de la unión de tres ofertas extraídas de folletos comerciales corrientes de los supermercados. La tarea, denominada "el descuento", consiste en tres ofertas que se enuncian por medio de razones expresadas de forma diferente: "3x2", "-70% en la 2ª unidad" y "2ª unidad a mitad de precio", en la que se pregunta qué descuento es el mejor (ver Figura 3.1).

Observa las tres ofertas y contesta a la pregunta: ¿Qué descuento es el mejor? Razona tu respuesta…

Figura 3.1. Tarea "el descuento".

La primera y tercera ofertas se acompañan del producto al que se aplica: botellas de vino de “Rioja” y “Extremadura”. Para mayor comodidad y evitar cálculos aritméticos al cliente las ofertas 1 y 3, que son las que se aplican a un vino determinado, incluyen los precios antes y después del descuento (3.72€ y 5.58€ la unidad; 4.87€ la 2ª unidad y 9.47€, la unidad). La segunda oferta: “-70% en la 2ª unidad”, es genérica y no se menciona a qué producto se aplica ni de qué precio. Para mayor detalle se puede consultar la tarea diseñada en el Anexo A.1.

3.3. El análisis racional. Los componentes críticos de la tarea.

La tarea se puede caracterizar por su "fenomenología" como pareja de exposiciones o de composiciones, ambas involucrando el objeto mental “relativamente” y las técnicas de normalizar. Por su tipología es una tarea de comparación numérica multiplicativa, en donde hay que juzgar cuál de las razones son mayores o menores, o tal vez iguales.

La demanda de la tarea consiste en comparar las tres ofertas. Para determinar qué cantidades deben ser comparadas hay que tener en cuenta con qué objetos están relacionadas o a qué objetos se refieren. Es lo que comúnmente se llama “el referente”. La primera oferta se diferencia de las otras dos por el referente: por una parte, el referente alude al número ordinal de la unidad a la que se aplica el descuento, ya sea la segunda o la tercera botella; por otra parte, el referente está relacionado con el número cardinal de botellas: mientras en la primera oferta están involucradas tres botellas en las restantes sólo se incluyen dos.

Adicionalmente, las tres ofertas brindan un descuento que viene dado mediante cantidades relativas o razones que están normalizadas de modo diferente: una como fracción, otra como porcentaje y otra como razón compuesta, lo cual también las hace diferentes.

Esto determina dos componentes críticos de la tarea: los referentes y las normalizaciones, ya que para su resolución resulta necesaria una actividad de homogeneización o unificación.

De las dos ofertas que tienen como referente del descuento la segunda unidad, una está normalizada a fracción y la otra a porcentaje. Como para comparar es más útil usar porcentajes que fracciones, y "segunda unidad a mitad" es fácilmente normalizable en "segunda unidad al 50%", y como inmediatamente se ve que un descuento del 70% es más ventajoso que uno del 50%, la cuestión planteada en la tarea se reduce a la comparación de solo dos de las tres ofertas: "3x2" y "-70% en la 2ª unidad", que como hemos dicho antes tienen referentes y normalizaciones distintos: 3 botellas en "3x2" y 2ª unidad en "-70%".

Los componentes críticos de la tarea permiten descomponer su proceso de resolución en dos sub-procesos de unificación. En el primero, relacionado con los referentes, se reformulan las relaciones entre cantidades en términos de la cantidad de botellas o euros que me descuentan o que pago, y la cantidad de botellas que compro. En el segundo se normaliza esa relación mediante algún procedimiento algorítmico, ya sea del cociente, regla de tres, fracciones equivalentes, múltiplo común o construcción progresiva para expresarlas de la misma forma, bien como porcentajes, decimales o fracciones.

Una manera de visualizar estos dos sub-procesos consiste en plantear la tarea como una pareja de exposiciones o composiciones. Por ejemplo:

- Pareja de exposiciones (véase Tabla 3.1): Tomamos un conjunto Ω con las dos ofertas, Ω = {3x2, -70% 2ª unidad} y consideremos la función ω_1 que asigna a cada elemento de Ω la cantidad que se paga (en ítems o euros), o alternativamente la que se descuenta, y ω_2 la función que asigna a cada elemento de Ω la cantidad total que se compra (en ítems o euros). Las cantidades relativas que se forman vienen dadas por las razones ω_1/ω_2: pago/compro o descuento/compro. Para su comparación las razones ω_1/ω_2 se pueden normalizar por un proceso algorítmico por cociente cuyo resultado es un valor decimal y cuya fracción decimal es un porcentaje.

Tabla 3.1
Tarea "el descuento" como pareja de exposiciones

Ω	**3x2**	**-70% (2ª u.)**	**Ω**	**3x2**	**-70% (2ª u.)**
ω_1: Ω →pago	2	1.3	**ω_1: Ω →descuento**	1	0.7
ω_2: Ω →compro	3	2	**ω_2: Ω →compro**	3	2
$\omega_1(x_i)$ / $\omega_2(x_i)$ pago / compro	$\frac{2}{3}$	$\frac{1.3}{2}$	**$\omega_1(x_i)$ / $\omega_2(x_i)$ descuento / compro**	$\frac{1}{3}$	$\frac{0.7}{2}$

En los casos donde las relaciones realizadas se encuentran dentro de un mismo espacio de medida, por ejemplo ítems que pago / ítems totales que compro, el esquema de pensamiento es parte-todo, o "de cada". En los casos en los que las relaciones que se establecen son entre espacios de medida diferentes se crea una tasa que no admite estos tipos de pensamiento, por ejemplo € que pago / ítems totales que se compran.

- Pareja de composiciones (véase, Tabla 3.2): Tomamos para las dos ofertas los siguientes elementos Ω_1 = {descuento, pago} para la oferta del 3x2 y Ω_2 = {descuento, pago} para la oferta del “-70% en la segunda unidad” y las funciones ω_1 y ω_2 asignan a cada elemento de cada conjunto su valor en la oferta correspondiente. En este caso, ω_1 asigna a cada elemento de Ω_1 el valor que le corresponde en la oferta 3x2, y de la misma manera, ω_2 asigna a cada elemento Ω_2 el valor que le corresponde en “-70% en la segunda unidad”. Ambas cantidades son partes complementarias de la cantidad total que se compra. El esquema de pensamiento es parte-parte, o “por cada”, y las cantidades relativas que se forman vienen dadas por las razones ω_i/ω_i: descuento/pago. Para su comparación las razones ω_i/ω_i se pueden normalizar por cociente dando una relación escalar que responde a cuántas veces es mayor, menor o igual lo que se descuenta en proporción a lo que se paga.

Tabla 3.2
Tarea “el descuento” como pareja de composiciones

$\Omega_{1,2}$={descuento, pago}	**descuento**	**pago**	**$\omega_i(x_1)/\omega_i(x_2)$ descuento/pago**
ω_1: $\Omega_1 \rightarrow$ (1,2)	1	2	$\frac{1}{2} = 0.5$
ω_2: $\Omega_2 \rightarrow$(0.7, 1.3)	0.7	1.3	$\frac{0.7}{1.3} = 0.54$

3.4. Procedimiento de aplicación

El instrumento se presentó a los alumnos en el formato de lápiz y papel, en una hoja de trabajo individual. La asignatura donde se impartió el cuestionario era la de Didáctica de la Aritmética y la Resolución de Problemas, que se imparte en el tercer curso del Grado de maestro/a de Educación Primaria. En el curso anterior cursaron la asignatura Matemáticas para Maestros, donde ya trabajaron la razón y proporción.

Fueron los profesores encargados de la asignatura los que pasaron el cuestionario siguiendo las indicaciones oportunas de los investigadores. Las indicaciones fueron que los estudiantes resolvieran de manera individual el cuestionario, que podían usar calculadora, pero que si la usaban no olvidaran escribir las operaciones y justificaciones en el documento y que no disponían de tiempo límite para realizarlo. Los profesores sólo podían responder a dudas que hicieran referencia al enunciado de la tarea.

3.5. Dimensiones del análisis empírico

Para organizar y caracterizar las actuaciones de los estudiantes se utilizan dimensiones de análisis derivadas del marco teórico pero también de los componentes críticos de la tarea identificados en el examen racional antes descrito, así como distintas estrategias y métodos que surgen de la revisión de literatura, a saber:

- ✓ Relativización: uso del pensamiento relativo o absoluto
- ✓ Naturaleza de la razón: uso de “razón” o “tasa”.
- ✓ Esquema de pensamiento en “razón”: uso de parte-todo o parte-parte
- ✓ Referentes. Presentación de la relación entre cantidades: uso de pago/compro, descuento/compro, o descuento/pago

- ✓ Técnica de normalización o algoritmos: uso del algoritmo del producto cruzado, estrategia de la fracción, cociente, tasa unitaria, construcción progresiva y sus métodos asociados para comparar razones: método de la unidad y método del común múltiplo.

Otros aspectos que merecen atención son: el uso de herramientas heurísticas como "la descomposición del problema en partes" para reducir la comparación de las tres ofertas a dos; la influencia de los precios a la hora de determinar qué cantidades se comparan así como las condiciones de aplicación de las ofertas que se optimizan al comprar un número de ítems múltiplo de 2 y 3.

En los siguientes apartados, se describen los resultados obtenidos del análisis empírico.

3.6. Categorías y subcategorías del análisis empírico

Considerando las dimensiones del análisis empírico descritas en el apartado 3.5, las respuestas de los estudiantes se han agrupado, en un primer nivel de análisis, en tres categorías.

i) *Comparaciones relativas.* Se agrupan en esta categoría las respuestas que contienen evidencias de que los estudiantes interpretan el descuento como una cantidad relativa. En ésta se han incluido dos subcategorías: las que presentan respuestas relativas y las que presentan sólo una tendencia relativa (Figuras 3.2 y 3.3).

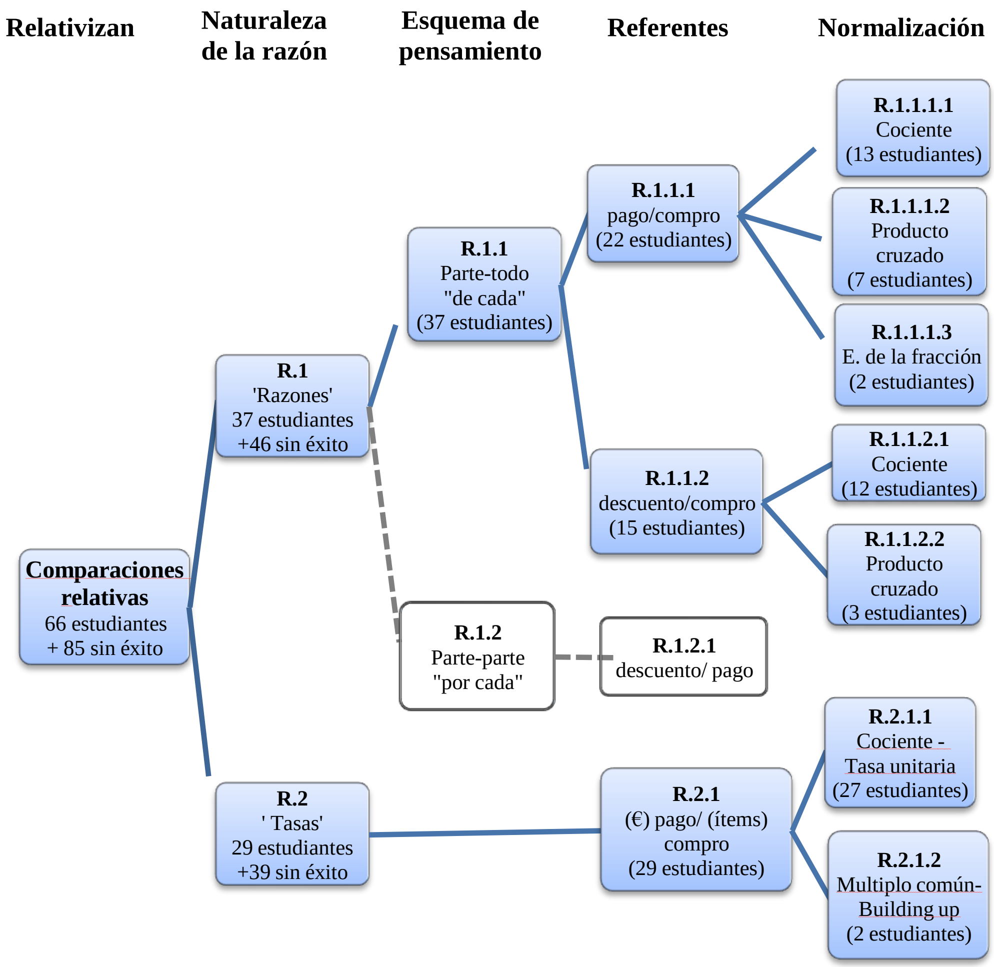


Figura 3.2. Esquema de interpretación de las respuestas que reflejan pensamiento relativo (respuestas relativas).

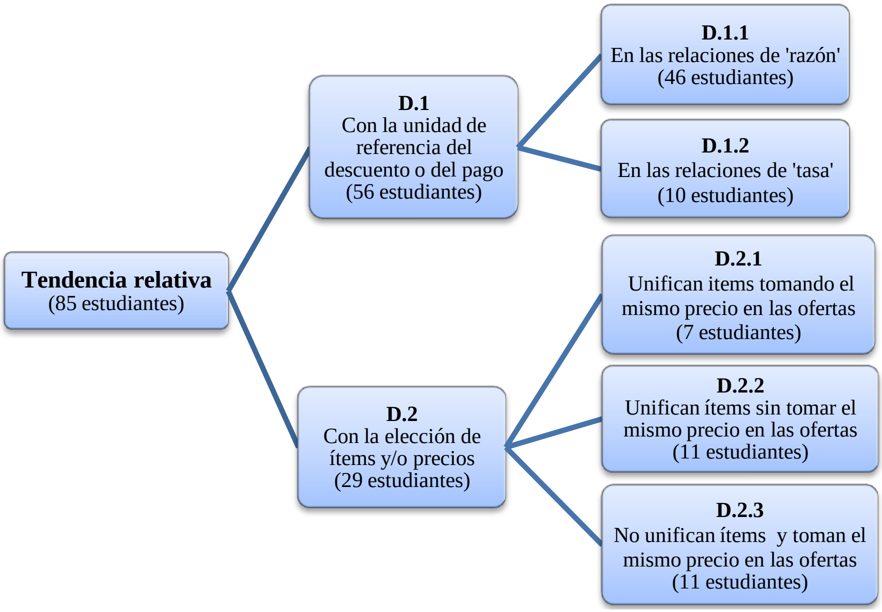


Figura 3.3. Esquema de interpretación de las respuestas que reflejan algunas dificultades con las cantidades relativas (tendencia relativa)

ii) *Comparaciones no relativas.* Se incluyen aquí las respuestas de los estudiantes que no relativizan, o bien porque comparan diferencias de cantidades absolutas o bien porque se centran sólo en una parte de los datos (Figura 3.4).

iii) *Otras respuestas.* Se recogen aquí las respuestas incompletas, imprecisas, inadecuadas o en blanco (Figura 3.5).

Tomando como base el resto de las dimensiones de análisis recién expuestas, en un segundo nivel de análisis se han agrupado las respuestas de los estudiantes en subcategorías. En las Figuras 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 se da cuenta de las frecuencias identificadas en las respuestas agrupadas en cada subcategoría. En la Figura 3.2, además de las respuestas relativas, se han incorporado las frecuencias de las respuestas de tendencia relativa o sin éxito (aunque posteriormente se describen en la Figura 3.3) para facilitar al lector una mejora en la comprensión.

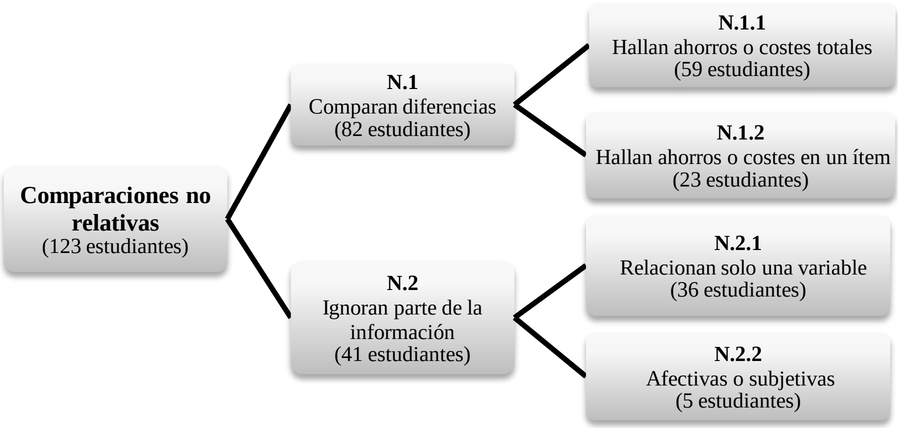


Figura 3.4. Esquema de interpretación de las respuestas que reflejan pensamiento no relativo

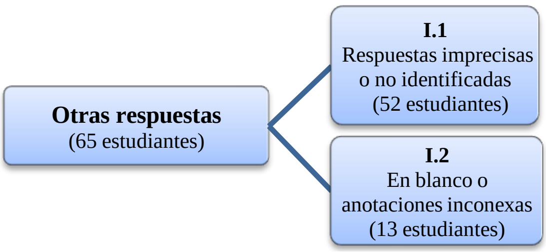


Figura 3.5. Esquema de interpretación de “otras respuestas”.

3.7. Descripción de las actuaciones

A continuación se describen e ilustran con ejemplos las actuaciones de los estudiantes que son más representativas de las categorías y subcategorías que conforman los esquemas de análisis e interpretación de las respuestas a la tarea. Para ilustrar las distintas actuaciones, en este apartado haremos uso de transcripciones de ejemplos de estudiantes que se incluyen en el Anexo B.

Como hemos explicado anteriormente, en la categoría denominada "comparaciones relativas" se incluyen las respuestas relativas (Figura 3.2) y las que presentan una tendencia relativa (Figura 3.3). En los apartados 3.7.1 y 3.7.2 se describen estas dos subcategorías con sus respectivas clases y subclases que dan cuenta de los procesos cognitivos de aquellos estudiantes que, para resolver la tarea "el descuento", interpretan el descuento como una cantidad relativa. Las categorías "comparaciones no relativas" y "otras respuestas" se describen respectivamente en los apartados 3.7.3 y 3.7.4.

3.7.1. Respuestas relativas.

En esta subcategoría se encuentran las respuestas que reflejan pensamiento relativo. Atendiendo a la naturaleza de la relación multiplicativa empleada por los estudiantes, estas actuaciones se han agrupado en dos clases: "R.1. Ratios" y "R.2. Tasas".

R.1. Ratios.

Se incluyen aquí las respuestas de los estudiantes que relacionan cantidades homogéneas, definidas en el mismo espacio de medida. En esta clase, podrían darse dos esquemas de comparación: parte-todo o "de cada" (R.1.1) y parte-parte o "por cada" (R.1.2); pero solo se ha observado el primero, por eso en la Figura 1 esa posibilidad aparece con líneas punteadas.

R.1.1. Parte-todo o "de cada".

Se trata de actuaciones que se fijan en el descuento o en el pago como partes de la cantidad total (que es el todo). Aquí se observa la unificación de los referentes elegida por los estudiantes usando dos relaciones entre cantidades diferentes: una es la relación pago/compro: "pago x … de cada y que compro" (R.1.1.1), y la otra es la relación descuento/compro: "me descuentan x … de cada y que compro" (R.1.1.2).

En la relación pago/compro (R.1.1.1) se observan tres técnicas de algoritmización: cociente, producto cruzado y fracción. Las dos primeras llaman a la estrategia del método de la unidad y la tercera al método del múltiplo común (Hoffer, 1988). Los siguientes ejemplos ilustran estas tres técnicas:

R.1.1.1.1. Cociente.

Con esta algoritmización los estudiantes obtienen una expresión decimal del pago o descuento que responde a la pregunta ¿Cuánto por uno?, concretamente responden a cuánto pago por unidad (ver Tabla 3.3). Aunque se podría decir que es la estrategia de la tasa unitaria estrictamente hablando no lo es, ya que lo que se entiende por la tasa unitaria es una relación entre cantidades heterogéneas, como en "precio por unidad" (Lamon, 2012).

Tabla 3.3
Ejemplo R.1.1.1.1. Cociente (alumno A21M)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
Pagas 2 enteras y coges 3	*Pagas 1 entera y la segunda un 30%. O sea pagas 1.3*	*Pagas 1 entera y la segunda un 50%*
2:3=0.66 por unidad	*1.3:2=0.65 por unidad*	*0.75 por unidad*

R.1.1.1.2. Producto cruzado.

Esta técnica la aplican los estudiantes para obtener la cantidad que pagan referida a 100 como denominación del todo (ver Tabla 3.4).

Tabla 3.4
Ejemplo R.1.1.1.2. Producto cruzado (alumno A8O)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
3 — 100 *2 — x*	*2 — 100* *1.3 — x*	*2 — 100* *1.5 — x*
66.6%	*65%(mejor descuento)*	*75%*

R.1.1.1.3. Estrategia de la fracción.

En esta estrategia se consideran las relaciones de las cantidades como fracción. Los estudiantes buscan fracciones equivalentes a las dadas, pero con igual denominador, para hacer posible la comparación. Es un método basado en el múltiplo común. Como ejemplo véase la Tabla 3.5.

Tabla 3.5
Ejemplo R.1.1.1.3. Estrategia de la fracción (alumno A1A)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{40}{60}$	$\frac{13}{20} \rightarrow \frac{39}{60}$	$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{45}{60}$
	Pagas 39 partes de 60	

En la relación descuento/compro (R.1.1.2) sólo se han observado dos algoritmizaciones: *cociente* (R.1.1.2.1) y *producto cruzado* (R.1.1.2.2).

R.1.1.2.1. Cociente.

Con esta algoritmización los estudiantes también responden a la pregunta ¿Cuánto por uno*?*, pero ahora responden a cuánto me descuentan por unidad (Tabla 3.6).

Tabla 3.6
Ejemplo R.1.1.2.1. Cociente (alumno A21P)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
Te regalan 1 de 3 productos. Por cada 1 te descuentan 1/3	*Te regalan 0.7 de 2 productos. Por cada 1 te descuentan 0.35*	*Te regalan 0.5 de 2 productos. Por cada 1 te descuentan 0.25*
Observamos que el mayor descuento tiene lugar en la oferta del -70% en la 2ªunidad, puesto que es en la que mayor importe te regalan por cada producto.		

R.1.1.2.2. Producto cruzado.

Esta técnica la aplican los estudiantes para obtener los porcentajes que responden a la pregunta cuánto me descuentan por unidad (ver Tabla 3.7).

Tabla 3.7
Ejemplo R.1.1.2.2. Producto cruzado (alumno A16P)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
Sin oferta, 3 botellas cuestan 16.74€ *Si compras 3→te ahorras 5,58€* $\left.\begin{matrix} 16{,}74 \text{—} 100\% \\ 5.58 \text{—} x \end{matrix}\right\}$ *x = 33,3 %...*	*(1 unidad: 100€)* *Sin oferta, las dos unidades = 200€,* *Con oferta te ahorras 70€* $\left.\begin{matrix} 200 \text{—} 100\% \\ 70 \text{—} x \end{matrix}\right\}$ *x = 35%*	*Sin oferta 2 unidades=19,48€* *Con oferta te ahorras 4,87€* $\left.\begin{matrix} 19{,}48 \text{—} 100\% \\ 4{,}87 \text{—} x \end{matrix}\right\}$ *x = 25%*
La mejor oferta es el -70%, porque el ahorro es mayor		

R.2. Tasas.

En esta clase se incluyen las respuestas de los estudiantes que relacionan cantidades de diferentes espacios de medida, en este caso euros con ítems (R.2.1). En esta relación se han observado las siguientes estrategias: "R.2.1.1. Cociente-Tasa unitaria" y "R.2.1.2. Múltiplo común-Building up".

R.2.1.1. Cociente-Tasa unitaria.

Aquí, los estudiantes unifican el precio eligiendo un valor arbitrario común. Calculan el coste de la compra para ese precio, y normalizan por cociente las relaciones "€ que pago/nº ítems que compro", obteniendo un valor unitario que responde a la pregunta ¿Cuánto pago por unidad? (ver Tabla 3.8). Esta estrategia es identificada por Cramer y Post (1993).

Tabla 3.8
Ejemplo R.2.1.1. Cociente-Tasa unitaria (alumno A28P)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
(Precio: 10€) 20€ por 3 productos ... 6.6€ por unidad	*(Precio: 10€) 13€ por 2 productos ... 6.5€ por unidad*	*(Precio: 10€) 15€ por 2 productos ... 7.5€ por unidad*

R.2.1.2. Múltiplo común-Building up.

Aquí los estudiantes unifican el número de botellas y el precio. Con ese número expresan la razón como unidad compuesta (nº ítems que compro, € que pago), después la extienden por adición hasta encontrar un múltiplo común al número de botellas (ver Tabla 3.9). Esta manera de extender la razón es propia de la estrategia *Building up* identificada por Hart (1981).

Tabla 3.9
Ejemplo R.2.1.2. Múltiplo común-Building up (alumno A5P)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
(Precio: 10€) 3 botellas por 20€ ... Compramos 6 botellas 40€/6botellas	*(Precio: 10€) 2 botellas por 13€ ... Compramos 6 botellas 39€/6botellas*	*(Precio:10€) 2 botellas por 15€ ... Compramos 6 botellas "descarta esta oferta"*

3.7.2. Respuestas con tendencia relativa.

Los estudiantes que no tienen éxito en su tentativa de comparar las cantidades relativas tropiezan con dificultades que están ligadas al referente del descuento o del pago (D.1), y a la elección de los ítems y/o precios (D.2). No consideramos las dificultades que se pueden atribuir a descuido o falta de atención.

D.1. Dificultades con la unidad de referencia del descuento o del pago.

De esta clase se extraen dos subcategorías que corresponden a las dificultades con la unidad de referencia en las relaciones o bien de "razón" (D.1.1) o bien de "tasa" (D.1.2).

D.1.1 En las relaciones de "razón".

En la Tabla 3.10, aparece la actuación de un estudiante que calcula el pago porcentual en la oferta del "3x2", de él saca el descuento porcentual y lo compara con los descuentos porcentuales, sin percatarse de que los referentes de los descuentos son distintos, en un caso el referente son 3 ítems, y en el otro dos. Nótese que este estudiante realiza el cálculo en 3x2 sobre las cantidades totales cuando no es necesario por la invariancia de la razón: $\frac{16{,}77=3\times 5.58}{11{,}16=3\times 3{,}72}=\frac{5{,}58}{3{,}72}=\frac{100}{x}$

Tabla 3.10
Ejemplo D.1.1. Dificultades en las relaciones de "razón" (alumno A1M1)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
5.58×3=16.77 *3.72×3=11.16* *16.77→100%* *11.16→66.54%* *33.45% de descuento*	*→70%*	*→50%*
El mejor descuento es -70% en la 2ª unidad porque en la primera oferta sólo es un 33.45% de descuento y en la tercera un 50%.		

La Tabla 3.11 describe la actuación de otro estudiante, que en este caso pierde de vista el conjunto total de ítems que intervienen para cada oferta. Calcula el coste en tanto por uno en la oferta del "3x2" obteniendo el coste para cada unidad. Por otro lado, en el resto de ofertas calcula el coste en tanto por uno sólo para la segunda unidad. Compara los resultados, pero lo hace confundiendo el coste con el descuento (once estudiantes manifestaron esta confusión).

Tabla 3.11
Ejemplo D.1.1. Dificultades en las relaciones de "razón" (alumno A16M2)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
5.58—1 *3.72—x*	*10—1* *3—x*	*9.74—1* *4.87—x*
x=0.6 de descuento	*x= 0.3 de descuento*	*x=0.5 de descuento*
El mejor descuento es en la primera oferta ya que te hacen un descuento de 0.6€		

D.1.2 En las relaciones de "tasa".

El estudiante del ejemplo transcrito en la Tabla 3.12 unifica los precios y calcula el coste por unidad al aplicar el descuento en las ofertas del "3x2" y "2ª unidad a mitad de precio", pero no en la oferta del "-70% en la 2ª unidad" en la que sólo calcula el descuento en una de las dos unidades. A continuación compara los resultados obtenidos sin percatarse de que son normalizaciones con distinto referente.

Tabla 3.12
Ejemplo D.1.2. Dificultades en las relaciones de "tasa" (alumno A8L)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
(Precio: 5.58€) *La unidad sale a 3.72€*	*(Precio:5.58€)* $5.58\cdot\cdot\frac{70}{100}$*=3.906€* *La unidad sale a 3.906€*	*(Precio: 5.58€)* *5.58€÷2=2.79* *5.58+2.79=8.37* *8.3÷2= 4.18€* *La unidad sale a 4.18€*
Por lo tanto la mejor oferta sería la de "3x2"		

D.2. Dificultades con la elección de ítems y/o precios

Para normalizar razones podemos proceder con la unificación de los antecedentes o los consecuentes para favorecer la comparación (Fernández, 2009). En las relaciones de "tasa" (€ / ítems), la elección del número de ítems y de un precio común es fundamental para una comparación exitosa. Se incluyen aquí las respuestas de los estudiantes para los que, o bien la elección inadecuada del número de ítems o bien la unificación de los precios, actúan como condicionantes en la comparación de los descuentos, lo que desvirtúa la ventaja de alguna oferta. Tres subclases se han identificado en esta clase. A continuación describiremos cada una de ellas e ilustraremos algunos ejemplos.

D.2.1. Unifican el número de ítems y los precios

En esta subclase se agrupan las actuaciones que, pese a tomar el mismo precio en las distintas ofertas, unifican el número de ítems a un valor que desvirtúa el sentido de alguna oferta (3 ítems), creando unas cantidades relativas o tasas "no eficaces" que utilizan para dar respuesta a la tarea. Se observan dos tipos de comparaciones: las que se realizan tras reducir a la unidad dichas tasas (comparando tasas unitarias) o las que se realizan directamente.

El ejemplo descrito en la Tabla 3.13, muestra la respuesta de un estudiante que compara los costes unitarios que obtiene al unificar el número de ítems a tres. Toma como precio común a las tres ofertas el precio del 3x2. Después, aplica el descuento a los tres ítems en el "3x2", y en las otras dos ofertas sólo lo aplica a un segundo ítem. Con ello desvirtúa el sentido de estas ofertas que sólo se ofrecen comprando dos ítems.

Tabla 3.13
Ejemplo D.2.1.Unifican el número de ítems y los precios (alumno A20P)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
(Precio: 5.58€)	*(Precio: 5.58€)*	*(Precio: 5.58€)*
Unidad al comprar 3: 3.72€	$\frac{5.58 \times 30}{100} = 1.67€$ $1.67 + 5.58 \times 2 = 12.83€$ $12.83 \div 3 = 4.27€$ *Unidad al comprar 3: 4.27€*	$5.58 \div 2 = 2.79€$ $2.79 + 5.58 \times 2 = 13.95€$ $13.95 \div 3 = 4.65€$ *Unidad al comprar 3: 4.65€*

El estudiante cuya resolución se muestra en la Tabla 3.14, después de igualar a tres el número de ítems y tomar como precio común 10€, compara directamente las tasas creadas. Como sucede con el estudiante del ejemplo anterior, no se beneficia de la oferta con el descuento del “-70% en la 2ª unidad”.

Tabla 3.14
Ejemplo D.2.1. Unifican el número de ítems y los precios (alumno A17M2)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
(Una botella son 10€) 3 botellas cuestan 20€	*(Una botella son 10€) La segunda botella saldría a 7€ (70% de 10€) pero la tercera botella costaría su valor total. 3 botellas serían 27€*	*“la descarto ya que la mitad de precio es un descuento menor que el 70%”*
	La mejor oferta es el “3x2”	

D.2.2. Unifican el número de ítems pero no los precios

Al no unificar los precios, aquí los estudiantes en vez de contestar a qué descuento es mejor contestan a la pregunta de qué oferta ofrece el producto más barato o más caro por unidad o al comprar un mismo número de botellas (en estos casos utilizan 3 botellas).

En la Tabla 3.15, se recoge la actuación de un estudiante que calcula los costes unitarios sin unificar los precios. Toma los precios dados en las ofertas “3x2” y “2ª unidad a mitad de precio”. Como la oferta del “-70% en la 2ª unidad” no tiene un precio explícitamente dado le atribuye el mismo precio que a la oferta del “3x2”. Después compara los resultados para valorar qué producto es más barato o caro por unidad.

Tabla 3.15

Ejemplo D.2.2. Unifican el número de ítems pero no los precios (alumno A43A)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
5.58×2=11.16€	*70% de 5.58€=3.906*	*50% de 9.74=4.87*
11.16÷3=3.72€	*5.58-3.906=1.674*	*9.74-4.87=4.87*
3.72€/unidad	*5.58+1.674=7.254*	*9.74+4.87=14.61*
	7.254÷2=3.627€/unidad	*14.61÷2=7.305€/unidad*

En el siguiente ejemplo mostrado en la Tabla 3.16, el estudiante responde con el mismo criterio que el anterior, pero compara el coste total de cada oferta que obtiene al comprar el mismo número de botellas (3 ítems).

Tabla 3.16

Ejemplo D.2.2. Unifican el número de ítems pero no los precios (alumno A7P)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
(Precio: 5.58€)	*(Precio: 5.58€)*	*(Precio: 9.74€)*
Comprando 3, el total es 11.16€	*Comprando 3, el total sería 13.06€*	*Comprando 3, el total sería 24.35€*
	Sale más barato la oferta de 3x2	

D.2.3. No unifican ítems y toman el mismo precio en las ofertas

Se agrupan en esta subclase las actuaciones de algunos estudiantes que para crear las tasas utilizan el mismo precio en cada oferta y las comparan sin unificar el número de ítems, lo que desvirtúa el criterio para elegir el descuento.

En la Tabla 3.17, aparece la actuación de un alumno que utiliza el mismo precio en cada oferta (20 €), creando las correspondientes tasas (€

pago / ítems totales) que utiliza para la comparación. La respuesta de este estudiante puede estar condicionada a que en la oferta del "-70% en la 2ª unidad" y "2ª unidad a mitad de precio" al comprar 3 botellas no se puede beneficiar del descuento y por tanto pagaría más que en el 3x2.

Tabla 3.17
Ejemplo D.2.3. No unifican ítems y toman el mismo precio en las ofertas (alumno A17L)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
(Precio:20€)	*(Precio: 20€)*	*(Precio: 20€)*
Si me llevo 3 pago 40€	*Pagamos 26€ y sólo me llevo 2*	*Pagamos 30€ y sólo me llevo 2*
	El mejor descuento es el del 3x2	

3.7.3. Comparaciones no relativas.

En los apartados que mostramos a continuación se describen las subcategorías y clases de la categoría "Comparaciones no relativas".

Recordemos que en esta categoría se agrupan las resoluciones que reflejan un pensamiento no relativo. Dentro de ella distinguimos las siguientes subcategorías: "Comparan diferencias" (N.1) e "Ignoran parte de la información" (N.2).

N.1. Comparan diferencias.

En esta categoría se incluyen las respuestas de los estudiantes que comparan las cantidades en términos absolutos. Miran las diferencias entre cantidades de la misma variable, por ejemplo el dinero que me ahorro en cada oferta o al hacer el total de la compra o en un solo ítem. Como la oferta del "-70% en la 2ª unidad" no tiene asignado precio, los estudiantes tienen que asignarle un precio arbitrario ficticio, o repetir uno de los precios de las otras ofertas. En esta subcategoría se distinguen las siguientes clases: "Hallan ahorros o costes totales" (N.1.1) y "Hallan ahorros o costes en un ítem" (N.1.2).

N.1.1. Hallan ahorros o costes totales.

Los estudiantes agrupados en esta clase calculan y comparan el coste, el descuento o el ahorro en toda la compra utilizando precios diferentes. En el ejemplo recogido en la Tabla 3.18, el alumno asigna el mismo precio a la oferta del "-70% en la 2ª unidad" que a la de "2ª unidad a mitad de precio". Calcula el coste total antes y después del descuento, y halla la diferencia entre ambos valores obteniendo el ahorro total en cada oferta que es lo que compara para dar respuesta a la tarea.

Tabla 3.18
Ejemplo N.1.1. Comparan el ahorro o coste total en cada oferta (alumno A15I2)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
(Precio: 5.58€)	*(Precio: 9.74€)*	*(Precio: 9.74€)*
5.58×3=16.76	*9.74×2=19.48*	*9.74×2=19.48*
3.72×3=11.16	*9.74+2.84=12.58*	*9.74+4.87=14.61*
16.76-11.16=5.6€ ahorro	*19.48-12.58=6.9€ ahorro*	*19.48-14.61=4.87€ ahorro*
El mayor ahorro se consigue con la oferta del "-70% en la segunda unidad"		

N.1.2. Hallan ahorros o costes en un ítem.

Esta clase reúne las actuaciones de aquellos sujetos que calculan y comparan el coste, el descuento o el ahorro en un solo ítem utilizando precios diferentes en cada oferta. Estos estudiantes comparan el coste de la segunda unidad, en las ofertas que establecen ese descuento, con el coste de una cualquiera de las unidades en la oferta del “3x2”. O sea que sólo miran las diferencias entre las cantidades de la misma variable.

La Tabla 3.19 muestra la resolución de un alumno que asigna un precio arbitrario de 15€ a la oferta del “-70% en la 2ª unidad” al carecer de precio en el enunciado, aplica el descuento a una unidad, calcula el coste al que resulta y lo interpreta erróneamente como “lo que te ahorras”. Lo compara con lo que te ahorras en las otras ofertas en una sola unidad.

Tabla 3.19
Ejemplo N.1.2. Comparan el ahorro o coste en un solo ítem de cada oferta (alumno A23A)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
(Precio:5.58€)	*(Precio: 15€)*	*(Precio: 9.74€)*
5.58-3.72=1.86	*15-10.5=5.5*	*9.74-4.87=4.87*
1.86€ te ahorras	*5.5€ te ahorras*	*4.87€ te ahorras*
	En la segunda oferta te ahorras más	

N.2. Ignoran parte de la información.

Esta subcategoría agrupa las diferentes respuestas de los estudiantes que se centran sólo en una variable del problema (en el número ítems) o en aspectos afectivos o subjetivos. Las clases que distinguimos en esta subcategoría son: “Relacionan sólo una variable” (N.2.1) y “Respuestas afectivas a los datos numéricos y preguntas” (N.2.2).

N.2.1 Relacionan sólo una variable

La denominación de esta estrategia está tomada de Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto y Miller (1998) quienes la identificaron con estudiantes de 7º grado en problemas de comparación numérica de razones. Los estudiantes que aplican esta estrategia deciden cuál es el mejor descuento fijándose solo en una de las variables del problema. En el caso del ejemplo mostrado en la Tabla 3.20 elige se centra en el número de ítems de cada oferta, en este caso 3 y 2 botellas, ignorando el resto de la información que aporta el enunciado.

Tabla 3.20
Ejemplo N.2.1. Relacionan sólo una variable (alumno A36I1)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
La del "3x2" en el caso de que desees llevarte 3 productos o múltiplos de este. En tal caso pagas dos productos y te llevas 3, mientras que en los otros dos pagas 2 y la parte proporcional del descuento aplicado. *Sí sólo deseas 2 productos o múltiplos de este, la mejor oferta es la del descuento del 70%.*		

N.2.2. Respuestas afectivas a los datos numéricos y preguntas.

Aquí se incluyen las respuestas de los estudiantes que dan respuestas subjetivas a la tarea usando, por ejemplo, argumentos que tienen que ver con los gustos o preferencias individuales, como por ejemplo la calidad del producto (véase Tabla 3.21). La denominación de esta estrategia también está tomada de Ben-Chaim et al. (1998).

Tabla 3.21
Ejemplo N.2.2. Respuestas afectivas a los datos numéricos y preguntas (alumno A8P)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
Considero mejor el primer descuento siempre que te guste el vino de Extremadura. En primer lugar porque por un precio estimado de 10€ te llevas 3 botellas, en cambio, la otra oferta del vino, en principio, relacionando calidad-precio, es un Rioja, y por tanto puede que sea una buena oferta, pero si lo que quieres es un vino barato, resulta que este vale el primero ya casi 10€ y comprando dos gastas alrededor de 15€.		

3.7.4. Otras respuestas

En esta categoría se incluyen las respuestas imprecisas o no identificadas (I.1), y las respuestas en blanco o con anotaciones inconexas (I.2). En la Tabla 3.22 se muestra un ejemplo del primer tipo. En él el estudiante no deja suficientes rastros para interpretar su resolución.

Tabla 3.22
Ejemplo I.1. Respuestas imprecisas o no identificadas (alumno A13O)

3x2	**-70% (2ª unidad)**	**Mitad de precio (2ª unidad)**
El mejor es el del -70% en la segunda unidad ya que se hace una mayor rebaja que en las otras dos ofertas.		

CAPÍTULO 4.
CONCLUSIONES, DISCUSIÓN E IMPLICACIONES.
PRIMERA FASE

En el capítulo 3 se ha expuesto un análisis racional exhaustivo de una tarea que involucra el objeto mental "relativamente ". Adicionalmente, este análisis nos ha permitido conocer su riqueza conceptual y los componentes críticos a tener en cuenta para su resolución. Esto nos ha sugerido, su utilización para conocer el criterio para establecer comparaciones relativas entre cantidades que desarrollan un grupo de futuros maestros y observar si estas componentes críticas de la tarea son condicionantes en la comparación de cantidades relativas. En una aproximación a la problemática, hemos realizado el análisis empírico de la tarea con el uso de diferentes dimensiones que hemos extraído del marco teórico y del estudio racional de la tarea. A continuación discutiremos los resultados de este análisis empírico y estableceremos las implicaciones que se derivan de estos resultados.

4.1. Conclusiones y discusión

El análisis empírico nos ha permitido conocer el desempeño de 339 estudiantes para profesor de educación primaria en esta tarea, concretamente en relación con su criterio (absoluto o relativo) para establecer comparaciones y con otras dimensiones de análisis derivadas del estudio teórico y del análisis racional de la tarea.

Atendiendo al criterio relativo o absoluto para comparar cantidades, los datos apuntan a que la mayoría de los estudiantes evidencian un escaso desarrollo del pensamiento relativo. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en trabajos precedentes como el de Valverde y Castro (2012). Si se ignoran las 65 respuestas no identificadas, del total de las respuestas que se han podido analizar sólo 66 estudiantes de 274 (24%) compararon cantidades relativas satisfactoriamente. Casi la mitad de las 274 respuestas, 123 (44%), corresponden a estudiantes que no hicieron uso de un pensamiento relativo. Estos estudiantes hicieron comparaciones propias de un pensamiento absoluto (82 estudiantes calcularon diferencias entre cantidades con independencia de sus referentes) o ignoraron una parte relevante de la información, ya que dieron respuestas centradas en una sola variable (36 estudiantes), o de carácter afectivo o subjetivo (5 estudiantes). En la Tabla 4.1 se resume las frecuencias de las respuestas a la tarea "el descuento".

Algo más de la mitad de los estudiantes, 151 (55%) dieron indicios de un pensamiento relativo, no obstante más de la mitad de ellos 85 (56%) tropezaron con dificultades.

Tabla 4.1
Frecuencias de las respuestas a la tarea "el descuento"

Comparan cantidades relativas		**No comparan cantidades relativas**	**No identificadas o en blanco**
Con éxito	Con dificultad		
66	85	123 estudiantes	65 estudiantes
151 estudiantes			

Es significativo que las dificultades de los estudiantes no radicaron en los aspectos formales (definición y propiedades) y algorítmicos propios de las razones y de su normalización, sino que radicaron principalmente en el manejo de los referentes de los descuentos (56 estudiantes) o en la elección del número de los ítems y/o el precio de las ofertas (29 estudiantes). Específicamente tuvieron dificultades con los referentes de las razones normalizadas a porcentajes mediante las que se expresan los descuentos, como en "-70% en la 2ª unidad", porque ignoraron las cantidades a comparar y no las unificaron.

La dificultad en el manejo de los referentes de las razones normalizadas a porcentajes concuerda con lo señalado por Parker (1997). Este autor afirma que "cuando los estudiantes pierden de vista la naturaleza comparativa del porcentaje, a menudo desarrollan procedimientos erróneos basados en los tamaños de los números más que en las relaciones del problema" (p. 406). En este sentido, hubo un número significativo de estudiantes que confundieron las razones descuento/compro con pago/compro o a la inversa (11/56 estudiantes).

En cuanto a la naturaleza de las relaciones multiplicativas (ver Tabla 4.2), los estudiantes optaron indistintamente por las relaciones "tasa" y "razón", con una ligera preferencia por la relación "razón".

Tabla 4.2
Frecuencias de las respuestas relativas

Comparaciones relativas				
En las relaciones de "razón"			En las relaciones de "tasa"	
Con éxito		Con dificultad	Con éxito	Con dificultad
37		46	29	39
Pago/compro	Descuento/compro			
22	15			
83 estudiantes			68 estudiantes	

Las dificultades halladas se dieron con frecuencias similares en las relaciones de "razón" (46/83= 55%) y en las relaciones de "tasa" (39/68= 57%). Todos los estudiantes que optaron por las relaciones de "razón" optaron por el esquema de pensamiento parte-todo (37 estudiantes), con preferencia por la relación pago/compro, no dándose en ningún caso el esquema parte-parte, cuya concreción es la relación descuento/pago. Esto se puede interpretar como una señal del escaso tratamiento en la enseñanza de la razón con el significado parte-parte, que queda oscurecido por el trato predominante dado a la razón como fracción, y es que "muchos autores de libros de texto muestran ejemplos de razones descontextualizados de las representaciones parte-parte y parte-todo sin mencionar por qué dos conceptos diferentes pueden representarse con la misma notación" (Clark, Berenson y Cavey, p. 312). De acuerdo con estos autores, parece que "la introducción de las fracciones como una notación de la razón, desconectado de los estudiantes de la experiencia previa con fracciones, parece inhibir su capacidad en la resolución de problemas" (p.313).

Por lo que se refiere a las técnicas de normalización de los estudiantes que contestaron satisfactoriamente, la preferencia fue la *estrategia del cociente,* que es la que da lugar al valor unitario, seguida del *producto cruzado,* ambas estrategias dominantes en el modelo de enseñanza. Estos datos obtenidos permiten inferir conclusiones que tienen que ver con el efecto del modelo de enseñanza dominante que parece priorizar los aspectos procedimentales, en concordancia con aportes de otros investigadores (Ben-Chaim et al., 2002; Ilany, Keret y Ben-Chaim, 2004, Parker, 1997). Apenas es significativo el número de estudiantes que usaron *la estrategia de la fracción* o el *múltiplo común.* A pesar de ello se puede inferir que estas estrategias se asocian a esquemas de pensamiento y a relaciones entre cantidades diferentes: la estrategia de la fracción a una "razón parte-todo" y el múltiplo común a una "tasa" exclusivamente, lo que es coherente con una visión de fracción de la "razón", y una visión como unidad compuesta de "tasa".

En relación con el uso de herramientas heurísticas como la "descomposición del problema en partes" para reducir la comparación de las tres ofertas a dos, los datos muestran que hay un significativo número de estudiantes que arrastraron las tres ofertas hasta el final de sus procesos de resolución. Eso se puede interpretar en el sentido de que no hacen una reflexión previa sobre cuál es la mejor manera de abordar el problema.

Además más de la mitad de los estudiantes que resolvieron con éxito la tarea mostraron un comportamiento precio-dependiente para determinar qué cantidades hay que comparar (40 de 66 estudiantes). Este comportamiento, aunque es innecesario y complica los cálculos, guía sus actuaciones incluso en la oferta donde el precio no es un dato ("-70% en la segunda unidad"), a la que le asignan uno arbitrario o tomado de las otras tareas.

El hecho de que las ofertas se optimizan al comprar un número de ítems múltiplo de 2 y 3, apenas tuvo repercusión en el razonamiento de los estudiantes.

4.2. Implicaciones

De la discusión de los resultados obtenidos se desprende que la tarea "el descuento" que se documenta en este trabajo, permite una evaluación del pensamiento relativo de los estudiantes y hace emerger sus criterios para establecer y desarrollar los procesos comparativos con cantidades relativas, así como sus rigideces y dificultades que, como producto de la enseñanza previamente recibida, les han pasado desapercibidas.

En concreto, el estudio empírico nos ha aportado conocimiento bien fundamentado sobre el desempeño de los estudiantes en este tipo de tareas y nos ha permitido observar que existe un grupo importante de futuros maestros que optan por un criterio absoluto para dar respuesta a la tarea. Este criterio para manejar las cantidades no es erróneo pero no es el pertinente. Este aspecto pone en evidencia la falta de competencia de muchos estudiantes para maestro en relación con la comparación de cantidades relativas que tienen que ver con las decisiones de compra, cuando como consumidores en los supermercados les presentan distintos tipos de descuento.

En esta primera fase de la investigación, se ha constatado que para la mayoría de los futuros profesores no es fácil hacer las comparaciones cuando las ofertas se presentan con razones desiguales, diferentemente normalizadas y con referentes distintos. Esto concuerda con el trabajo de Karplus et al. (1983ab) quienes afirman que cuando las razones no son iguales, como en este caso, los problemas son considerados en general más difíciles de comparar que aquellos con razones iguales.

Alrededor del 80% de los futuros maestros no fueron capaces de dar una respuesta satisfactoria a la tarea. Estos resultados muestran que los estudiantes para maestro no tienen bien constituido el objeto mental "relativamente".

Por estos motivos consideramos necesario el uso de esta tarea en la formación de futuros maestros a través de una experimentación en el aula que se centre en la re-constitución del objeto mental "relativamente" y en las dificultades para comparar cantidades relativas que se desprenden de los resultados del estudio empírico.

La descripción, experimentación y análisis de la experiencia didáctica diseñada corresponden a lo que hemos denominado Fase II de la investigación.

CAPÍTULO 5.
SEGUNDA FASE

En este capítulo hablaremos de la metodología utilizada en la segunda fase de la investigación. Esta fase tiene como propósito ensayar una experiencia didáctica basada en la mayéutica y centrada en la re-constitución del objeto mental “relativamente” en un grupo de estudiantes para maestro de educación primaria.

En este apartado se describe la experiencia didáctica, para la que hemos utilizado los patrones cognitivos de respuesta a la tarea “el descuento” categorizados en la Fase I. La información obtenida en esta categorización permite centrar la experiencia en las formas de pensamiento (absoluto-relativo) y en las dificultades que tienen los alumnos al comparar cantidades relativas.

Una vez planteada la experiencia la hemos implementado y posteriormente analizado. Este análisis se llevará a cabo mediante una metodología cualitativa de corte interpretativo que pretende identificar si la implementación de manera intencional de la experiencia produce cambios de reelaboración del objeto mental relativamente en los estudiantes para maestro.

A continuación, describiremos los participantes, la estructura de la experiencia didáctica, el procedimiento de implementación seguido y cómo se ha analizado esta experiencia.

5.1. Muestra

Para llevar a cabo esta segunda fase, se utilizó una muestra de conveniencia formada por 36 estudiantes de la asignatura Didáctica de la Aritmética y la Resolución de Problemas correspondiente al tercer curso del grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Valencia, en una sesión ordinaria de clase del mes de febrero de 2013.

5.2. La experiencia didáctica

La experiencia didáctica está integrada por la tarea “el descuento” acompañada por preguntas iniciales de tipo afectivo y una intervención didáctica con propósito de enseñanza. Posteriormente, la tarea es utilizada también para evaluar la efectividad de la intervención didáctica.

Esta experiencia se articula conforme a ideas provenientes de la mayéutica y la ayuda de prácticas metacognitivas, que conducen al estudiante hacia el conocimiento, control y gestión de la propia actividad cognitiva (Monje, Pérez-Tyteca y Gómez, 2013; Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo, 2013).

La mayéutica es un método pedagógico concebido por Sócrates y expuesto en el diálogo platónico de Menón, que consiste en "propiciar en el alumno un aprendizaje a partir del auto-reconocimiento de su ignorancia" (Rigo, 2011, p.523).

Inspirados en el propio diálogo, Rigo y Gómez (2012) identifican tres momentos claves que inspiran la estructura de esta experiencia didáctica, que son:

> *Construcción*: El docente plantea una tarea de la que conoce de antemano las dificultades o limitaciones que va a ocasionar en sus estudiantes. Éstos formulan una conjetura para resolverla que en muchos casos resulta errónea.
>
> *De-construcción*: El docente rebate la conjetura dada por los estudiantes enfrentándolos a su error, haciéndoles conscientes de la existencia de un conflicto cognitivo y propiciando que reflexionen sobre las estrategias adoptadas en la resolución de la tarea.
>
> *Re-construcción*: El docente guía a los estudiantes en la construcción de una solución que les permita comprender lo que hasta ahora desconocían en relación a la tarea propuesta.

Desde la perspectiva de este trabajo, la pretensión última de la mayéutica es la promoción de un aprendizaje a través de un conflicto cognitivo, a partir del cual se produce una de-construcción y nueva construcción de conocimientos en el estudiante. Por este motivo este es un método que, a nuestro parecer, se ajusta al propósito de esta investigación, ya que en ella se pretende trabajar la re-constitución del objeto mental "relativamente" por parte de los futuros maestros.

En lo que sigue se detallan los componentes principales de la experiencia didáctica- la tarea con las preguntas iniciales y la intervención didáctica - así como el procedimiento de implementación de la misma.

5.2.1. La tarea con las preguntas iniciales.

Conocer previamente las dificultades y modos de resolución que manejan los estudiantes es esencial para llevar a cabo con éxito la mayéutica. Es necesario contar con tareas adecuadas, las cuales denominaremos "tareas mayéuticas". La creación de un conflicto cognitivo es clave en el proceso mayéutico, por tanto, la tarea ha de ser rica en interpretaciones y significados; rica en conceptos matemáticos; debe prestarse a ser resuelta de diversos modos; resultar familiar y cercana; y aunque en un primer momento parece accesibles, debe generar dificultades y dudas al resolverla.

Los análisis racional y empírico de la tarea "el descuento" nos proporcionó una visión de la riqueza conceptual de esta tarea, la diversidad de estrategias y métodos para resolverla, así como las rigideces y dificultades que una amplia muestra de futuros maestros encontraron en su resolución.

Para comprobar si la tarea diseñada resulta cercana y familiar para los participantes y si su resolución genera algún tipo de duda, incorporamos una serie de preguntas que pretenden obtener esta información y que los sujetos contestaron al resolver la tarea.

En la sesión donde se implementó la experiencia primeramente pedimos que resolvieran la tarea y acto seguido procedimos a discutir distintas resoluciones de ejemplos prototípicos derivados del análisis empírico previo. De este modo, sin necesidad de comprobar de qué manera concreta han resuelto la tarea los sujetos del grupo, podemos anticiparnos a sus respuestas y favorecer la discusión con los estudiantes al identificarse con alguna resolución.

En el momento de construcción, se plantea la tarea con una serie de cuestiones acerca de ella. Las cuestiones que se plantean hacen alusión al grado de seguridad que tienen en la respuesta dada, la dificultad que le otorgan antes y después de resolverla y cómo se sienten durante y después de la resolución (ver Anexo A.2). Todas estas son condiciones necesarias para comprobar si la tarea diseñada resulta ser mayéutica.

5.2.2. La intervención didáctica.

La mayéutica se implementó en una sesión de aula. Por este motivo, a partir del análisis de las resoluciones obtenidas en el pilotaje previo (primera fase de la investigación), se seleccionaron algunas de ellas atendiendo a diferentes aspectos que se pretendían trabajar en cada momento de la intervención.

La intervención didáctica versó sobre la necesidad de entender el descuento como una cantidad relativa centrándose en distintas resoluciones de la tarea “el descuento”. A su vez se abordaron distintas dificultades al comparar cantidades relativas previamente observadas en la primera fase de la investigación.

En la intervención didáctica, se trabajan los momentos de de-construcción y re-construcción mayéuticos. La organización general de la sesión consistió en ir mostrando a los estudiantes un ejemplo prototípico de las resoluciones identificadas en la Fase I para, a partir de cada una de ellas, generar en el aula un debate- siempre guiado por el profesor- sobre sus características, conveniencia, deficiencias, etc. De este modo, los sujetos que se sienten identificados con la resolución mostrada, tienen la oportunidad de intervenir para defenderla y aquellos que no la consideran adecuada pueden rebatirla. Este debate, unido al hecho de ir mostrando estrategias cada vez más avanzadas, pretende promover y remover conflictos conceptuales y generar auto-reflexión por parte de los estudiantes de los alcances de sus estrategias.

Dado que la tarea propuesta es de comparación de razones, su abordaje requiere relativizar cantidades con el fin de que la comparación tenga sentido. Por tanto, puesto que los resultados del análisis empírico han mostrado que un gran número de alumnos trabaja con las cantidades de manera absoluta, el objetivo principal de la intervención es favorecer en estos sujetos una transición que vaya desde este pensamiento absoluto a uno relativo.

De igual modo, la fase previa de pilotaje (Fase I) ha evidenciado una serie de dificultades en algunos estudiantes que, pese a manejar cantidades relativas, no son capaces de dar una respuesta adecuada a la tarea. Estas dificultades están contempladas en la intervención didáctica y para generar discusión sobre ellas se escogieron, en algunos casos, ejemplos prototípicos que las contienen y en otros se optó por mostrar estrategias eficientes que superan dicha dificultad para que sean los propios estudiantes los que se percaten del error.

Además, una característica de la tarea en cuestión es que puede ser resuelta de manera eficiente por medio de diferentes estrategias. Mostrar la existencia de diferentes caminos para resolverla y reflexionar sobre las semejanzas y diferencias entre ellos también fue uno de los objetivos de la intervención.

A continuación describimos y justificamos la organización de la intervención didáctica y los aspectos que se pretenden trabajar en cada momento.

5.2.2.1. Organización de la intervención didáctica.

La intervención didáctica parte de un ejemplo prototípico, en el que un estudiante interpreta el descuento como una cantidad no relativa, para ir progresando hasta resoluciones con interpretaciones relativas.

Se comienza mostrando una estrategia de un estudiante que compara en términos absolutos el ahorro total en cada oferta usando diferentes precios (ver Figura 5.1). Esta estrategia se seleccionó para, a partir de ella, comenzar la discusión sobre los siguientes aspectos: la transición de un pensamiento absoluto a uno relativo y qué conviene hacer con los precios y las botellas de las ofertas.

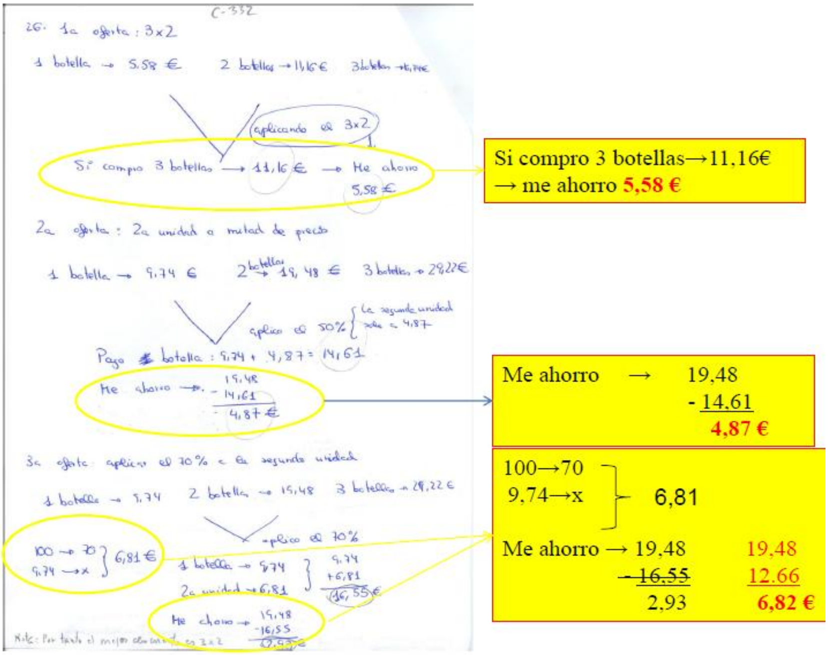


Figura 5.1. Estrategia de pensamiento absoluto

Aquí el estudiante en la oferta del “3x2” utiliza el precio de 5,58 € para calcular la diferencia de lo que se paga al comprar 3 botellas sin descuento (16.74 €) con lo que se paga con descuento al comprar las 3 botellas (11,16 €) obteniendo el ahorro absoluto (5,58 €). En el resto de ofertas procede de la misma manera. En estos casos utiliza el mismo precio (9,74 €) obteniendo en la oferta de “segunda a mitad de precio” el ahorro de 4,87 € y en la oferta de “segunda unidad al 70% de descuento” el ahorro de 2,93 €. Estas diferencias (5,58 €; 4,87 € y 2,93 €) son las que el estudiante utiliza para comparar afirmando que “por tanto el mejor descuento es 3 x 2”. La ruta que describe esta actuación y que aparece en el esquema del análisis empírico (descrito en el capítulo 3) es la ruta N.1.1 que se muestra en la figura 5.2.

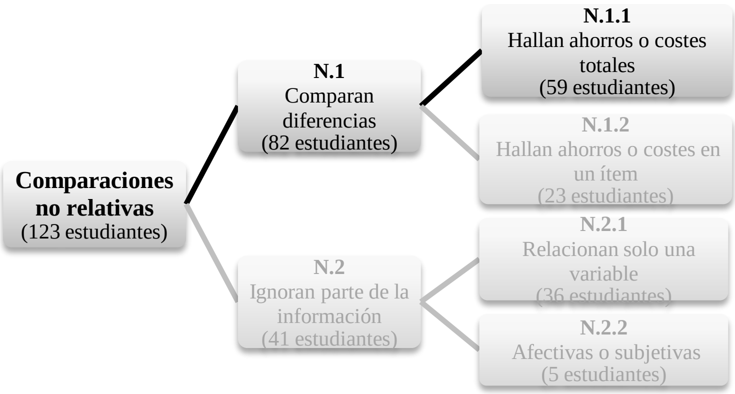


Figura 5.2. Ruta N.1.1

Con el fin de generar discusión sobre los anteriores aspectos se seleccionó un segundo ejemplo prototípico en el que se parte de un precio común y se unifica el número de botellas a 3. Esta es una estrategia de tendencia relativa que manifiesta dificultades en la elección del número de ítems, ya que se escoge una cantidad inadecuada de botellas en la compra lo que provoca la pérdida de los beneficios de dos de las tres ofertas (Figura 5.3).

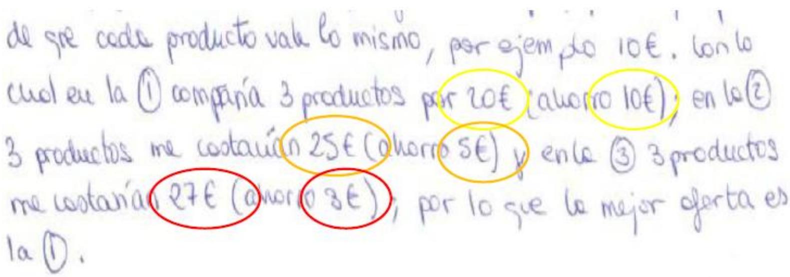


Figura 5.3. Estrategia de tendencia relativa

En este caso, el estudiante toma el valor de 10 € en cada una de las ofertas, afirmando que en la primera oferta (“3 x 2”) “compraría 3 productos por 20 € (ahorro 10 €)”, en la segunda oferta (“segunda unidad a mitad de precio") "3 productos me costarían 25 € (ahorro 5 €)" y en la tercera oferta afirma que "3 productos me costarían 27 € (ahorro 3 €)". Estos costes obtenidos al comprar tres productos en cada oferta los compara afirmando que "la mejor oferta es la primera". Esta estrategia corresponde a la ruta D.2.1 descrita en el esquema de interpretación de las actuaciones con dificultad de los estudiantes, como se muestra en la Figura 5.4.

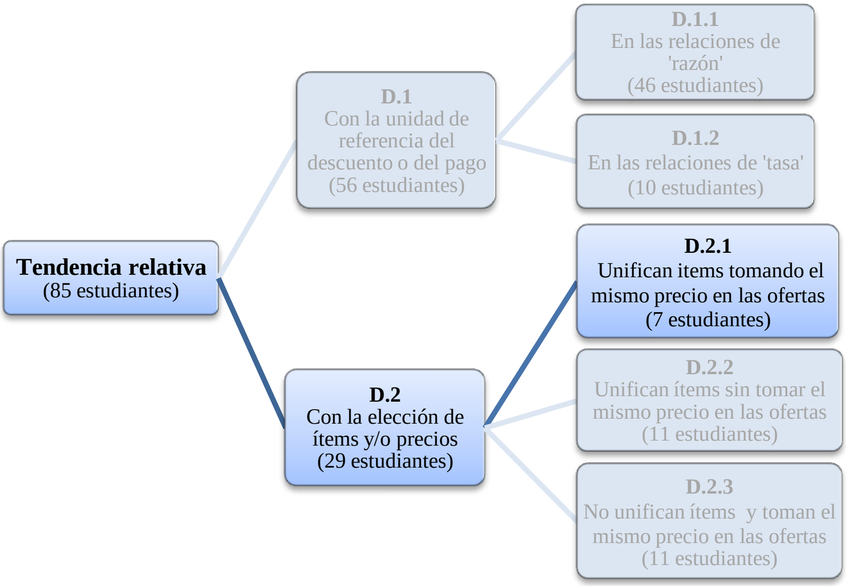


Figura 5.4. Ruta D.2.1

En tercer lugar se elige una estrategia de comparación relativa (ver Figura 5.5). En ésta el resolutor relativiza el ahorro final en la compra con respecto al coste total sin descuento. La selección de este ejemplo se hizo bajo la premisa de que este último paso diera lugar a la discusión sobre la necesidad de relativizar las cantidades para de este modo poder compararlas. En particular, además de encontrar el ahorro total de la compra aplicando el descuento correspondiente en cada oferta, como sucede con la estrategia con la que se comienza el protocolo, este estudiante lo relaciona con el coste total de la compra. Hace uso de la estrategia del producto cruzado, obteniendo de esta forma el descuento relativo en tanto por cien de cada oferta.

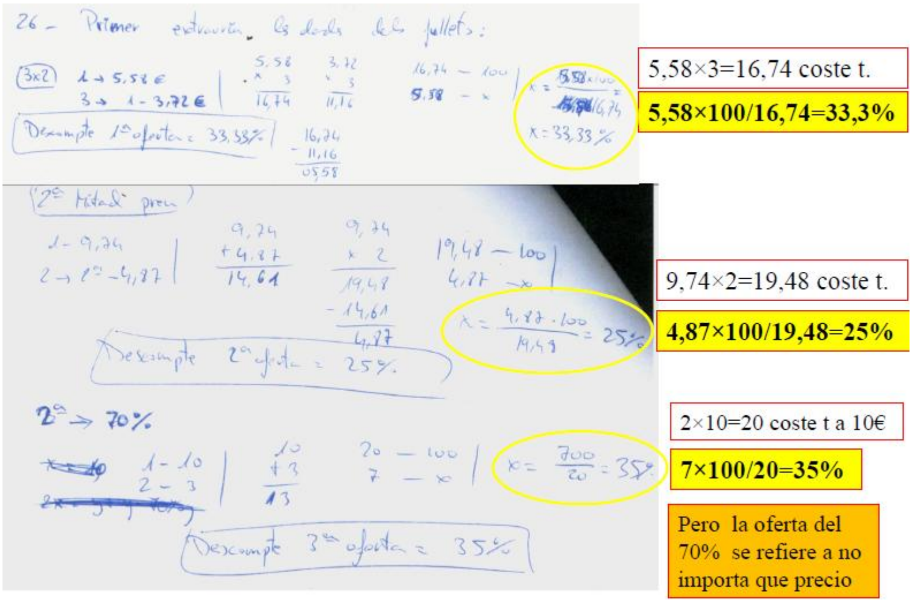


Figura 5.5. Estrategia de comparación relativa

En la oferta del "3 x 2" utiliza los precios del anuncio (5,58 €) calculando el coste de comprar tres botellas sin descuento (16,74 €). Este valor lo relaciona con el valor de 5,58 € (cantidad descontada) en tanto por cien utilizando la estrategia del producto cruzado, de este modo obtiene que el descuento es el 33,3%. En la oferta de "segunda unidad a mitad de precio" el estudiante procede de la misma manera, en este caso utiliza el valor de 9,74€ y calcula el coste al comprar dos botellas (19,48 €) y la cantidad descontada (4,87 €) en la oferta. Relacionando estas cantidades en tanto por cien mediante el producto cruzado obtiene el porcentaje de descuento (25

%). Con la oferta de "70% de descuento en la segunda unidad" el estudiante emplea el valor de 10 € y calcula el coste de la compra sin descuento (20 €), la cantidad descontada en este caso es 7 €. Estos valores los relaciona en tanto por cien con el producto cruzado obteniendo así el descuento del 35%. En la Figura 5.6 se muestra la ruta R.1.1.2.2 que describe la actuación de este estudiante.

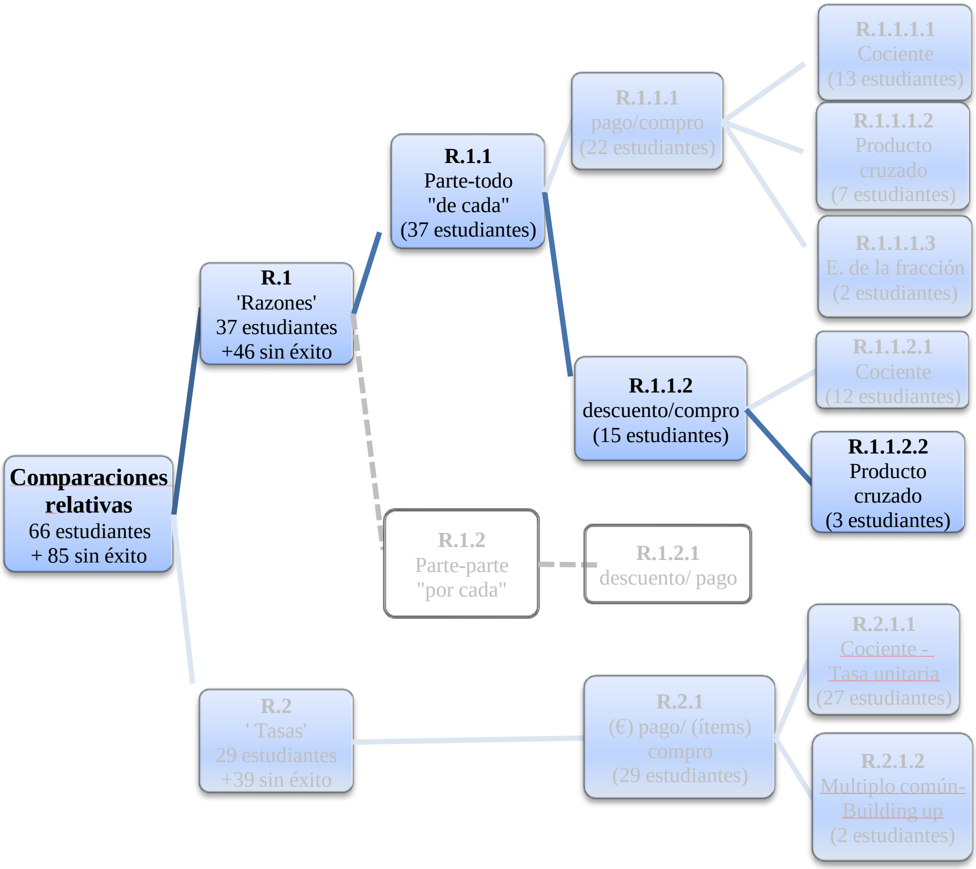


Figura 5.6. Ruta R.1.1.2.2.

Por si este debate no diera el resultado esperado, se preparó un ejemplo para mostrar en el aula. En este ejemplo se realizan dos compras (de un televisor y un microondas) de modo que el ahorro en el televisor es mayor en términos absolutos pero relativamente menor que el ahorro en el microondas, como puede verse en la Figura 5.7. De este modo, se pretende guiar la reflexión hacia el camino del objeto mental "relativamente".

Figura 5.7. Ejemplo del descuento de un televisor y un microondas

Una vez que queda establecida la necesidad de relativizar las cantidades implicadas en la tarea, consideramos pertinente incorporar en esta intervención una de las principales dificultades que afloraron en el análisis del pilotaje previo: el referente del descuento. Esta dificultad conlleva comparar el descuento, por ejemplo en el caso del 3x2, con sólo la unidad rebajada en los otros dos casos.

Para este caso se eligió una resolución relativa eficiente, como aparece en la Figura 5.8, donde sí se han unificado correctamente los referentes con el fin de que los estudiantes con dificultad en este aspecto se percaten por sí mismos de su error. Elegimos esta estrategia, porque consideramos que el hecho de ver el uso de los cocientes 50 % / 2 y 70 % / 2 para obtener el descuento relativo puede propiciar el auto-reconocimiento de su error en aquellos alumnos que no los habían realizado.

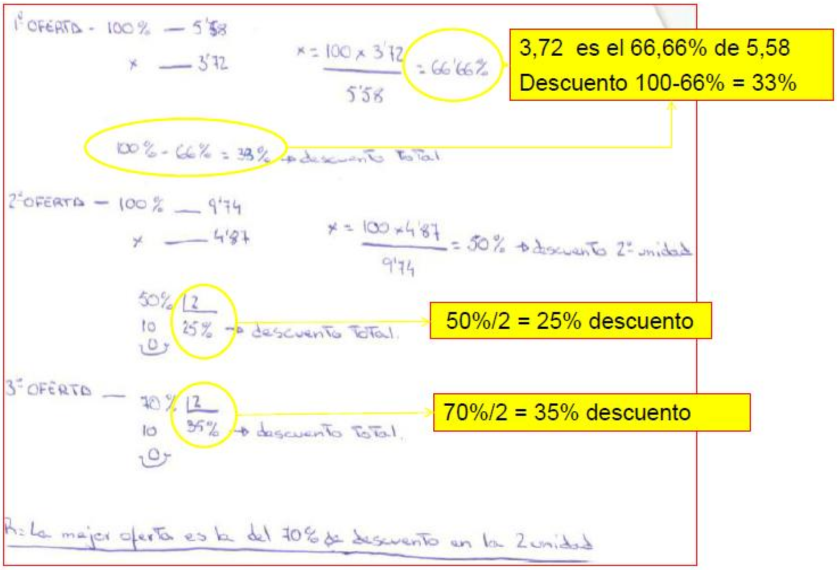


Figura 5.8. Ejemplo para trabajar el referente del descuento

Además, el hecho de llegar al mismo porcentaje de descuento que en la estrategia elegida en tercer lugar (Figura 5.5) muestra que los precios son vehículos para llegar al porcentaje, que obtendremos el mismo descuento al tomar toda la compra o cada botella, y por tanto la razón es invariante respecto a los precios. En este caso el estudiante en la oferta del “3 x 2” en primer lugar calcula el porcentaje que se paga en cada producto al relacionar que 3,72 € es el 66,6% de 5,58 € (utilizando el producto cruzado) y así calcula el porcentaje de descuento (100% - 66% = 33%). Para el resto de ofertas establece el cociente del porcentaje de descuento en relación a los productos que se compran (50 % / 2 y 70% / 2) con lo que obtiene el descuento relativo en estas ofertas. La ruta que describe este estudiante es la R.1.1.2.1 extraída del esquema de interpretación de las actuaciones que comparan cantidades relativas (Figura 5.9).

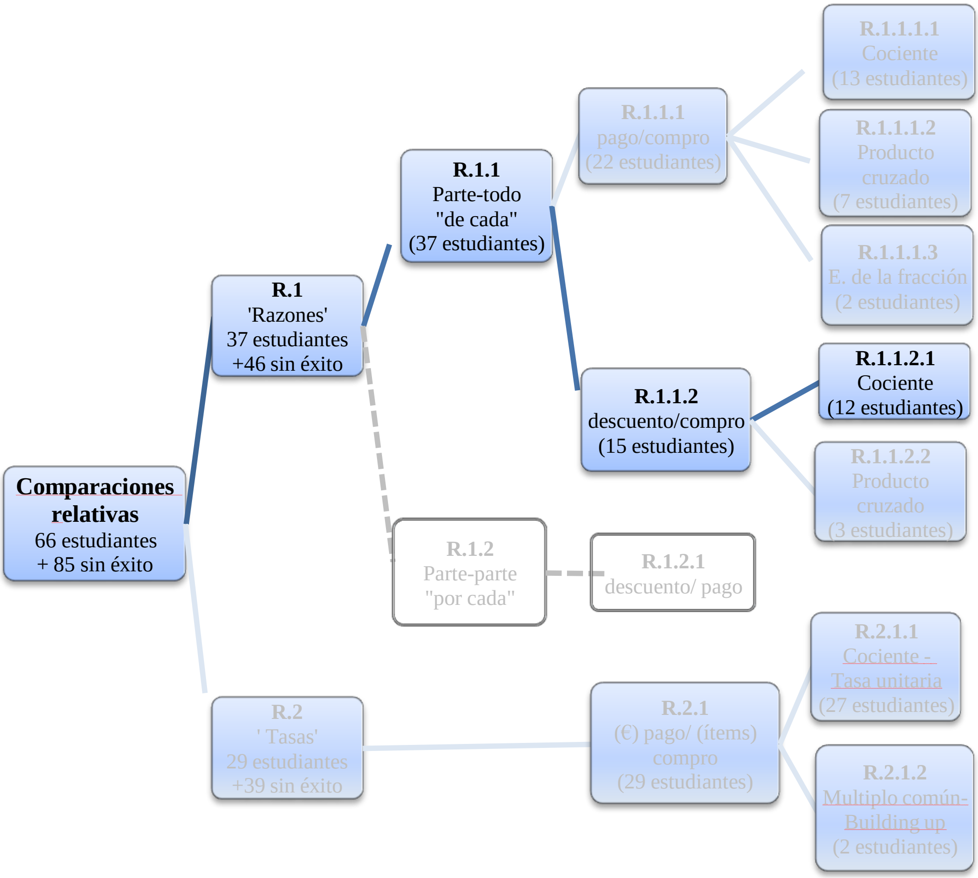


Figura 5.9. Ruta R.1.1.2.1

A partir de este momento se pretende mostrar a los estudiantes una diversidad de estrategias adecuadas para trabajar la flexibilidad con respecto a que existen distintas resoluciones correctas equivalentes.

El quinto ejemplo escogido, que aparece en la Figura 5.10, corresponde a una estrategia en la que se trabaja directamente con porcentajes, sin utilizar en ningún momento los precios de las ofertas. En este punto, la intención fue lanzar la discusión sobre si es necesario en la oferta del 3x2 partir de los precios del anuncio, cosa que ocurría hasta el momento en todas las estrategias mostradas. En el ejemplo, el estudiante calcula el descuento por botella en cada oferta realizando el cociente de los porcentajes (100% / 3; 70% / 2; 50% / 2) obteniendo de esta forma los descuentos por botella de cada oferta (33%; 35%; 25%). La ruta que describe es la R.1.1.2.1, que corresponde a la misma del ejemplo anterior lo que pretendía incitar la discusión en este sentido.

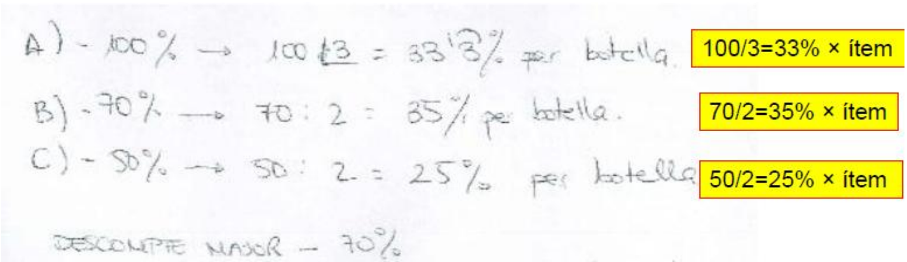


Figura 5.10. Estrategia de comparación relativa que no utiliza precios

En la Figura 5.11, se muestra la resolución escogida en sexto lugar. Esta actuación, parte de un precio común arbitrario y calcula el coste unitario. En este caso utiliza el valor de 5 € para cada producto y calcula la tasa unitaria al aplicar el descuento en cada oferta. Así, en la oferta del "3 x 2" divide 10 € / 3 productos y obtiene 3,3 € por producto; en la oferta de "segunda unidad a mitad de precio" divide 7,5 € / 2 productos para obtener 3,76 € por producto; y en la oferta del "70% de descuento en la segunda unidad" divide 6,5 € / 2 productos obteniendo como resultado 3,25 € por producto. La séptima resolución es equivalente a la anterior, partiendo de un precio arbitrario que resulta más sencillo operar, en este caso 1 €, como aparece en la Figura 5.12.

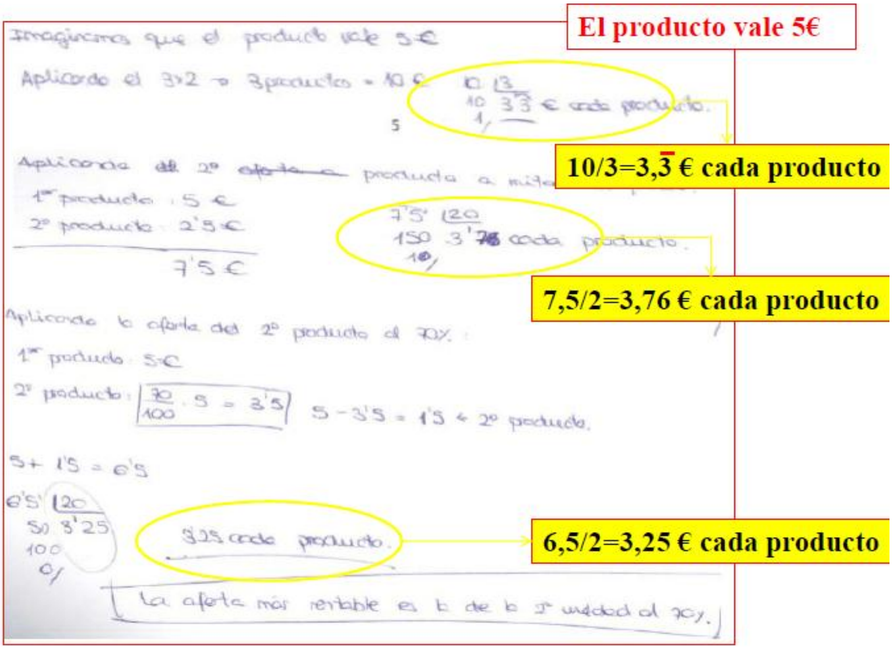


Figura 5.11. Comparación relativa utilizando tasas unitarias

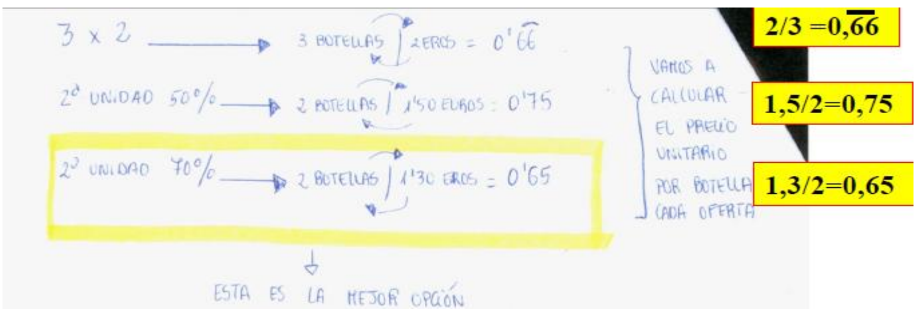


Figura 5.12. Comparación relativa utilizando tasas unitarias

Estas actuaciones se escogieron con el fin de mostrar que también existen resoluciones adecuadas basadas en la comparación de costes o ahorros relativos (a diferencia de las anteriores que establecen comparaciones en porcentajes) y reflexionar sobre la elección del precio de partida ya que en estos casos se tiene que establecer una tasa en cada oferta utilizando el mismo precio para que la comparación tenga sentido. Estos ejemplos, son estrategias descritas por la ruta R.2.1.1 (Figura 5.13).

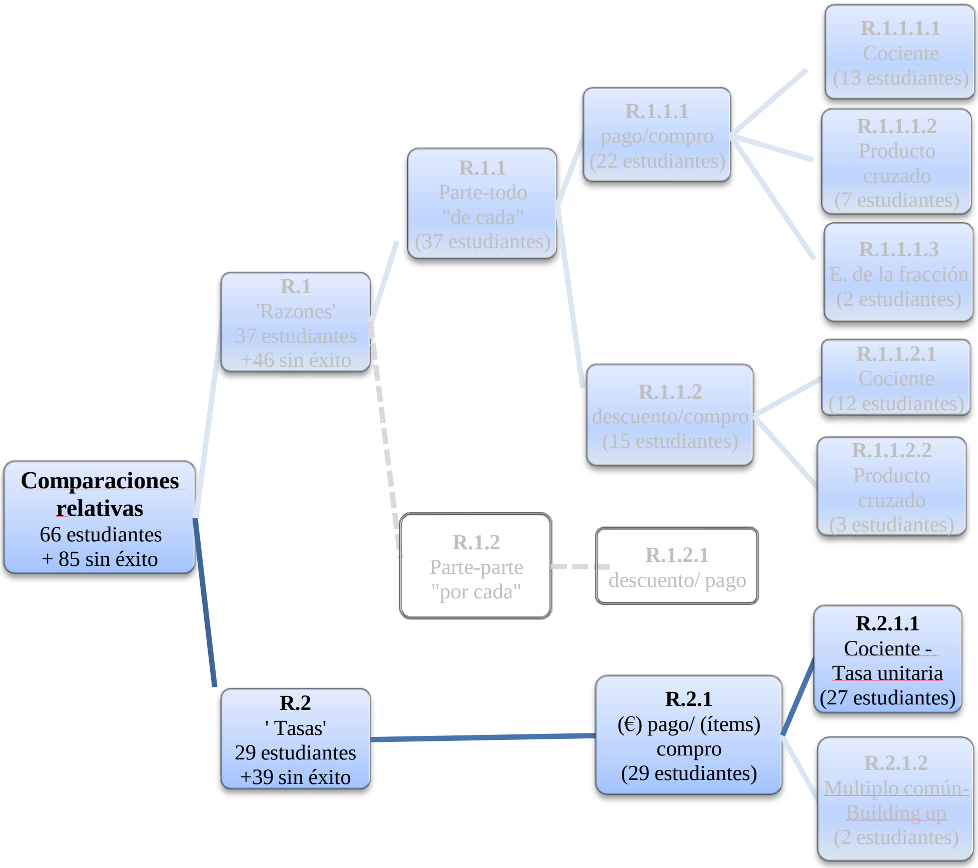


Figura 5.13. Ruta R.2.1.1

En la figura 5.14, aparece la octava resolución, en la que el estudiante, partiendo de un precio común para cada oferta, unifica el número de botellas que se compran a un múltiplo común de 3 y 2. Con esta estrategia, se pretende discutir sobre la necesidad de escoger una cantidad de botellas que tenga sentido dentro del contexto de compra que ofrece la tarea creando una tasa adecuada en el sentido de las ofertas. Así, se procura dar respuesta a la dificultad planteada con el segundo ejemplo utilizado en la intervención, donde un estudiante elige 3 botellas en cada oferta desvirtuando el sentido de las ofertas en las que es necesario elegir dos productos.

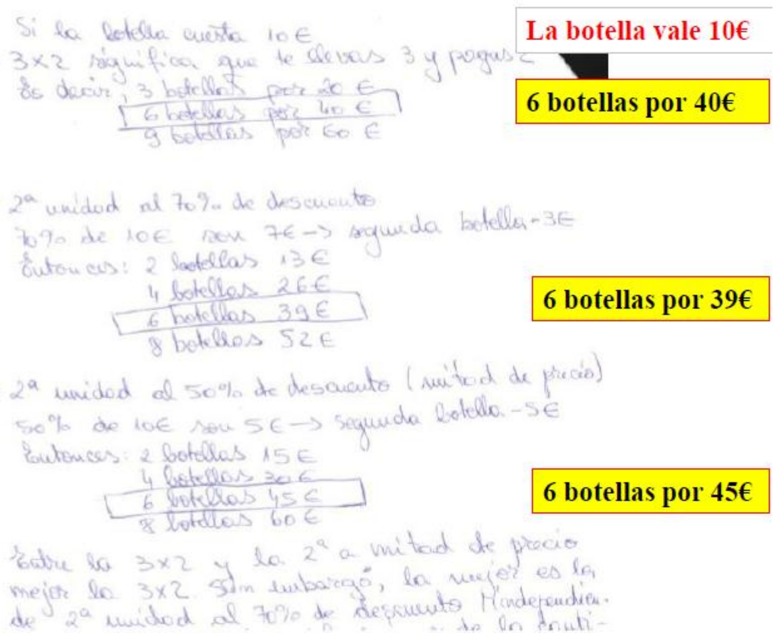


Figura 5.14. Comparación de tasas utilizando un múltiplo común de botellas

Aquí el estudiante utiliza el precio de 10 € para una botella en cada oferta y construye las tasas como razones compuestas de forma progresiva. En la oferta del “3x2” el estudiante afirma que “3 botellas por 20 €; 6 botellas por 40€; 9 botellas por 60 €”. En la oferta de “segunda unidad al 70%” señala “2 botellas 13 €; 4 botellas 26 €; 6 botellas 39 €; 8 botellas 52€”. Del mismo modo en la oferta de “segunda unidad a mitad de precio” obtiene que “2 botellas 15 €; 4 botellas 30 €; 6 botellas 45 €; 8 botellas 60 €”. De esta manera compara las tasas con el mismo múltiplo común de botellas (6 botellas por 40€; 6 botellas 39 €; 6 botellas 45 €) para afirmar que "la mejor es la de 2ª unidad al 70% de descuento". La ruta de este estudiante es la R.2.1.2 que se muestra en la Figura 5.15.

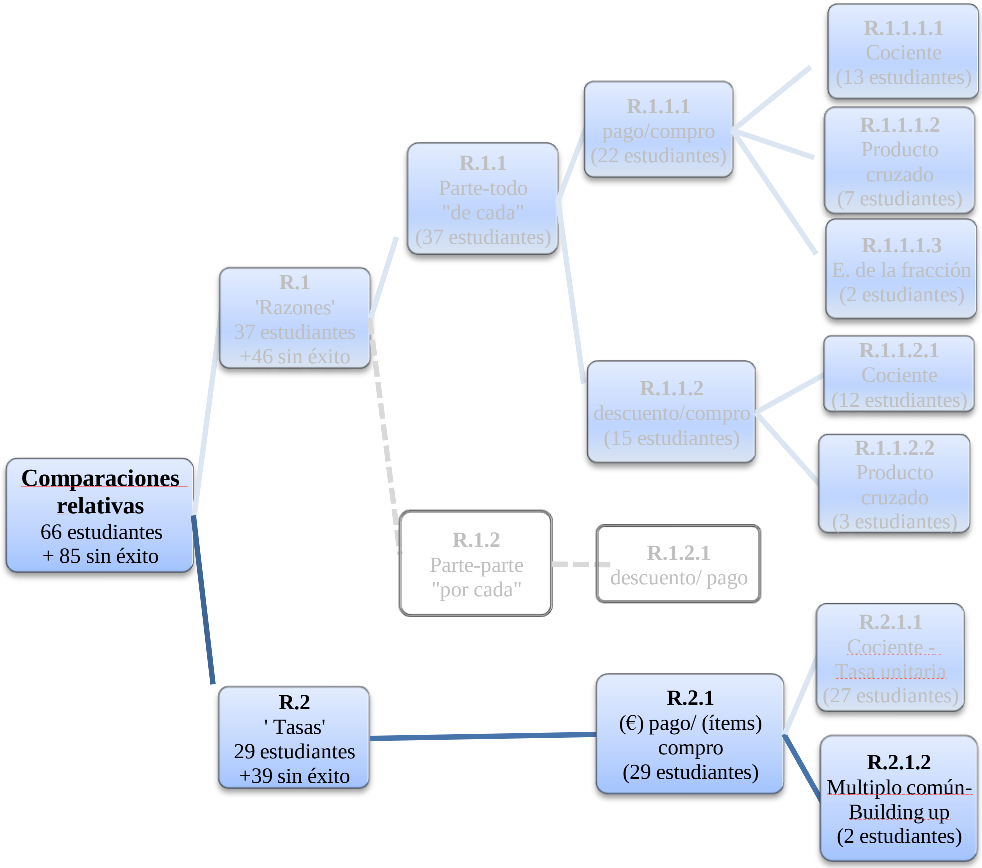
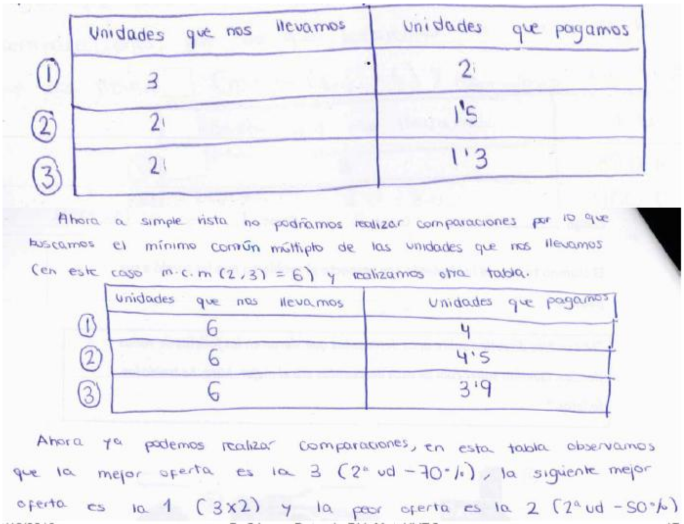


Figura 5.15. Ruta R.2.1.2

Siguiendo en la línea de la unificación del número de botellas a un múltiplo común de 3 y 2 (6 en este caso), la última estrategia seleccionada calcula la cantidad de botellas que se pagan de cada 6 botellas que se lleva el consumidor. En este caso el estudiante define razones en un mismo espacio de medida (ver Figura 5.16).



	Unidades que nos llevamos	Unidades que pagamos
1	3	2
2	2	1'5
3	2	1'3

Ahora a simple vista no podríamos realizar comparaciones por lo que buscamos el mínimo común múltiplo de las unidades que nos llevamos (en este caso m.c.m (2,3) = 6) y realizamos otra tabla.

	Unidades que nos llevamos	Unidades que pagamos
1	6	4
2	6	4'5
3	6	3'9

Ahora ya podemos realizar comparaciones, en esta tabla observamos que la mejor oferta es la 3 (2ª ud − 70%), la siguiente mejor oferta es la 1 (3x2) y la peor oferta es la 2 (2ª ud − 50%)

Figura 5.16. Comparación de “razones” unificando el número de botellas

El interés de trabajar este ejemplo radica en que hasta el momento con el fin de comparar cantidades relativas, o bien las tres ofertas se han transformado en tasas (€/u) unitarias o no unitarias, o bien la oferta expresada con la razón “3x2” (botellas que pagas con respecto a las que te llevas) se ha normalizado a porcentaje y las tres ofertas se comparan en relación a los porcentajes. En esta ocasión, son las ofertas expresadas inicialmente en porcentajes las que respectivamente se normalizan a razones homogéneas a la razón expresada con el “3x2” (2x1,5 y 2x1,3). En el ejemplo, el estudiante mediante una tabla de doble entrada relaciona las unidades que pagamos con las que nos llevamos en cada una de las ofertas obteniendo las siguientes razones: “3 unidades que nos llevamos por 2 unidades que pagamos; 2 unidades que nos llevamos por 1,5 unidades que pagamos; 2 unidades que nos llevamos por 1,3 unidades que pagamos”. Una vez establecida las razones homogéneas para cada oferta, señala que “a simple vista no podríamos realizar comparaciones por lo que buscamos el mínimo común múltiplo de las unidades que nos llevamos". Este estudiante hace un tratamiento de las razones como si se tratasen de fracciones. Hace uso del múltiplo común para unificar las unidades que se lleva el consumidor creando razones equivalentes a las iniciales. En este caso, crea las siguientes razones que permiten su comparación: "6 unidades que nos llevamos por 4 unidades que pagamos; 6 unidades que nos llevamos por 4,5 unidades que pagamos; 6 unidades que nos llevamos por 3,9 unidades que pagamos" y entonces afirma que "la mejor oferta es la tercera (segunda unidad al 70% de descuento)". La ruta que describe su actuación es la R.1.1.1.3, como aparece en la Figura 5.17.

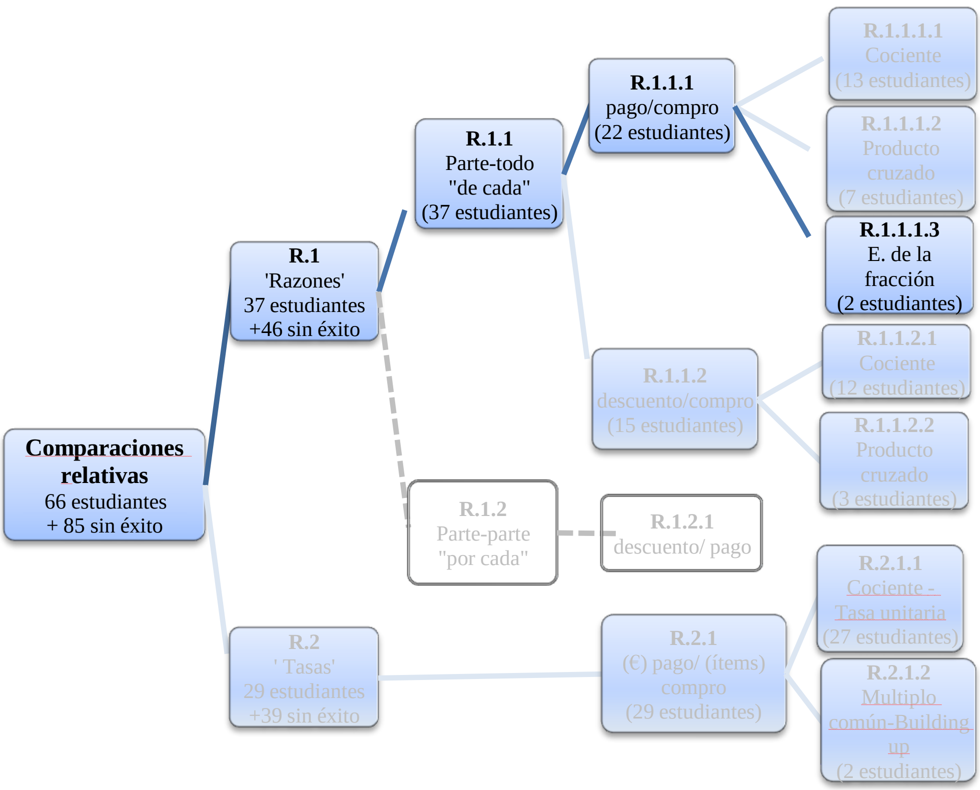


Figura 5.17. Ruta R.1.1.1.3

Además, en la fase de planificación de la intervención didáctica preparamos un par de ejemplos para trabajar la comparación de descuentos con distinto número de productos. Estos son ejemplos más sencillos que nuestra tarea donde la manera usual de comparar es obteniendo el precio unitario. Uno está basado en la compra de botellas de refresco y otro en la compra de paquetes de cd´s (ver Figura 5.18). De este modo perseguimos que los alumnos piensen si esa misma estrategia es extrapolable a nuestro ejemplo, cuando el problema con el que se encuentran es el número de productos en cada oferta.

Figura 5.18. Ejemplos de comparaciones relativas con distinto número de productos

5.3. Procedimiento de implementación

La experiencia didáctica se realizó en un grupo que no había participado en la primera fase de la investigación. La profesora oficial de la clase estuvo presente durante toda la sesión que duró la experiencia.

Antes de comenzar la sesión, se informó y se solicitó a los estudiantes su consentimiento para la colaboración en la investigación. Seguidamente se colocaron las cámaras de vídeo en el aula y se repartió la tarea y las preguntas sobre ella.

La tarea se presentó a los alumnos en el formato de lápiz y papel, en una hoja de trabajo individual. Se pidió que lo contestaran de manera individual justificando su resolución, no estableciendo límites de tiempo en su resolución. Sólo se aclaraban dudas de enunciado. Una vez resuelto y recogidas las respuestas a las preguntas planteadas se pasó a la intervención didáctica.

En la intervención didáctica estuvieron presentes dos miembros del equipo investigador, uno impartió la intervención y el otro en un extremo del aula como observador, tomaba notas y participaba en momentos del debate. Para la grabación se utilizaron dos cámaras de vídeo situadas en los extremos de la clase. La duración de la intervención fue de aproximadamente 1 hora y 20 minutos. En la Figura 5.19 aparece un dibujo de la distribución en el aula.

Figura 5.19. Distribución en el aula

Para evaluar la efectividad de la intervención, la tarea se volvió a administrar al mismo grupo una semana después de la sesión mayéutica. Del mismo modo, no se estableció límite de tiempo para la resolución y se les pidió a los participantes que contestaran individualmente justificando su resolución. La profesora del grupo fue quien se encargó de repartirla y recogerla.

5.4. Análisis de datos

La intervención de aula se grabó en vídeo, para su posterior análisis. Como elemento de apoyo en el análisis del vídeo se efectuó su transcripción (ver Anexo C).Como afirma Planas (2006), recurrir a la grabación de vídeo para analizar situaciones de aula o entornos de interacción social, es una práctica utilizada por muchos investigadores.

Para extraer información de la intervención didáctica se llevó a cabo un análisis interpretativo de los procesos cognitivos y metacognitivos que se promovieron en la sesión de clase con el fin de observar los cambios en las cogniciones de los futuros maestros.

El análisis de la intervención didáctica atiende a la interpretación por parte de los investigadores de lo acontecido durante la sesión mayéutica. Este análisis pretende extraer evidencias empíricas de los cambios de pensamiento y actuaciones de los estudiantes en un entorno de aula intencional donde tiene lugar la actividad matemática.

Siguiendo el esquema adoptado en investigaciones precedentes (Rigo, Páez y Gómez, 2010), para el análisis del vídeo se atiende a diferentes episodios acordes a los momentos mayéuticos y a la organización previa de la intervención de aula. En estos episodios se tienen en cuenta las intervenciones entre profesor y estudiante, así como entre pares de estudiantes.

CAPÍTULO 6.

RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

En este capítulo expondremos y describiremos los resultados del análisis de la experiencia didáctica impartida en un grupo de estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria. Este análisis pretende observar diferentes cambios de pensamiento en los estudiantes y profundizar en las dificultades y rigideces de sus actuaciones en la tarea "el descuento".

Los resultados del análisis de la experiencia didáctica se desglosan en tres partes relacionadas: los relativos a la primera resolución de la tarea con las preguntas iniciales, los obtenidos de la propia intervención didáctica y los que hacen referencia a la segunda resolución de la tarea.

Para facilitar al lector una mejor visualización de los resultados de la intervención didáctica, éstos se organizan en secuencias que llamaremos episodios. Estos episodios describen lo acontecido en la intervención de aula durante intervalos de tiempo establecidos por los momentos en que se organizó a priori la intervención. En la descripción se tiene en cuenta el papel principal del profesor durante la sesión y las intervenciones entre los agentes (estudiantes y profesor) que participan en las discusiones.

Para la interpretación de los resultados a la tarea "el descuento" se ha tenido en consideración el esquema de categorías de las actuaciones de los estudiantes obtenido en la primera fase de la investigación.

6.1. Tarea con las preguntas iniciales. Resultados

En la tarea "el descuento" incluimos varias preguntas que hacen alusión a las características mayéuticas de la tarea. En la Tabla 6.1 se recogen las frecuencias de las respuestas a estas cuestiones.

Tabla 6.1.
Frecuencias de las respuestas a las preguntas de afecto

La comprenden	Es ambigua	Es familiar	Faltan conocimientos	Fácil (antes)
34/36	16/36	36/36	17/36	20/36

Del análisis de las respuestas a estas preguntas se desprende que la tarea es de tipo mayéutica. De entrada para todos los estudiantes resulta familiar y prácticamente la mayoría afirma entender lo que se les pide en ella. Aun así, para casi la mitad de ellos el enunciado es ambiguo porque los productos, cantidades ofertadas y precios son diferentes.

La resolución de la tarea genera dudas (sólo 4 estudiantes están completamente seguros de su respuesta), dificultades (13 de los estudiantes que la consideraban fácil a priori la consideran difícil después de resolverla) y casi la mitad de los estudiantes (17/36) creen que les faltan conocimientos matemáticos para afrontar la tarea.

Los resultados indican que al resolver la tarea 26/36 de los sujetos se sienten regular o mal. Este sentimiento predomina entre aquellos estudiantes que tienen dificultad para resolver la tarea. Una vez resuelta la mayoría afirman sentirse un poco mejor (la hayan resuelto correcta o incorrectamente) aunque casi nadie se siente 100% seguro de su respuesta. En los sujetos que no han sabido terminar la tarea predominan los sentimientos de impotencia.

Las frecuencias correspondientes a las actuaciones en la primera resolución se recogen en la Tabla 6.2. En esta tabla aparecen las frecuencias obtenidas atendiendo al esquema de categorías de la primera fase del estudio.

Tabla 6.2.
Frecuencias correspondientes a las actuaciones en la primera resolución

Respuestas de los estudiantes en la primera resolución					
Comparaciones relativas		Comparaciones no relativas			Otras respuestas
Con éxito	Con dificultades	Comparan diferencias		Ignoran parte de la información	No identificadas o en blanco
		Ahorros o costes totales (N.1.1)	Ahorros o costes en un ítem (N.1.2)	Relacionan solo una variable (N.2.1)	
7 estudiantes	13 estudiantes	8 estudiantes	2 estudiantes	2 estudiantes	4 estudiantes

Observamos cómo un importante número de estudiantes establece comparaciones no relativas (12 estudiantes). En este grupo destacan las respuestas que comparan cantidades en términos absolutos (10 alumnos).

Entre ellos predomina el perfil (N.1.1), que hacer referencia a aquellos sujetos que se fijan en las diferencias de lo que se ahorran en cada oferta al hacer el total de la compra. También encontramos dos estudiantes que ignoran parte de la información de la tarea para establecer las comparaciones. Estos casos se han centrado en la variable "número de botellas" para dar respuesta a la tarea.

Un grupo importante de estudiantes muestran dificultades en el manejo de las cantidades relativas (13 estudiantes). Las respuestas se reparten entre los que tropiezan con dificultades en la unidad de referencia del descuento (7 estudiantes) y en la elección de los ítems y/o precios (6 estudiantes). Todos los estudiantes que muestran dificultades con el referente del descuento aparecen en las relaciones de "razón" (D.1.1). Las actuaciones con dificultades en la elección de los ítems y/o precios se reparten en los diferentes perfiles (ver Tabla 6.3).

Tabla 6.3.
Frecuencias correspondientes a las actuaciones con dificultad en la elección de los ítems y/o precios en la primera resolución

Dificultades en la elección de los ítems y/o precios		
Unifican ítems tomando el mismo precio en las ofertas (D.2.1)	Unifican ítems sin tomar el mismo precio en las ofertas (D.2.2)	No unifican ítems y toman el mismo precio en las ofertas (D.2.3)
2 estudiantes	3 estudiantes	1 estudiante

El resto de estudiantes se clasifican del siguiente modo: 4 no terminan la tarea —los cuales se incluyen en el perfil I.1 que recoge las respuestas no identificadas— y 7 estudiantes emplean una estrategia eficiente. En la tabla

6.4 se recogen las frecuencias en relación a los patrones de respuesta de las actuaciones que establecen comparaciones relativas con éxito.

Tabla 6.4.
Frecuencias correspondientes a las actuaciones con éxito en la primera resolución

Comparaciones relativas			
Establecen "razones"			Establecen "tasas"
En la relación pago/compro	En la relación descuento/compro		En la relación pago/compro
Producto cruzado (R.1.1.1.2)	Cociente (R.1.1.2.1)	Producto cruzado (R.1.1.2.2)	Cociente - Tasa unitaria (R.2.1.1)
1 estudiante	2 estudiantes	1 estudiante	3 estudiantes

6.2. Intervención didáctica. Resultados

Recordemos que dicha intervención se estructuró en torno a la mayéutica y la promoción de procesos metacognitivos en los estudiantes para maestro y consistió en ir mostrando distintos ejemplos prototípicos de respuestas a la tarea "el descuento" según el esquema de categorías y subcategorías de la primera fase del estudio. Estas resoluciones se escogieron para ir guiando a los futuros maestros en la necesidad de relativizar e ir profundizando en las dificultades recogidas en la primera fase de la investigación.

A continuación describimos los resultados organizados en tres episodios vinculados al diseño a priori de la intervención didáctica. En particular, en los dos primeros episodios se recogen diferentes evidencias del proceso de re-constitución del objeto mental "relativamente" de algunos estudiantes. En el episodio tercero se muestra el proceso de re-construcción de una nueva solución a la tarea expuesto durante la sesión.

6.2.1. Episodio 1. De la transición del pensamiento absoluto al relativo.

Siguiendo la organización de la intervención de aula, este episodio inicia con una actuación de comparación no relativa, seguida de una resolución de tendencia relativa y concluye con una actuación de comparación relativa. En este episodio además de mostrar dificultades con la elección de los ítems y/o precios, se pretende confrontar las dos maneras de ver el descuento; desde un punto de vista absoluto (mirar únicamente la cantidad que te ahorras) o desde un punto de vista relativo (mirar la cantidad que te ahorras en relación a lo que compras).

Como ya se indicó en el capítulo 5, la actuación de comparación no relativa es un ejemplo de un estudiante que utiliza distintos precios en cada oferta para calcular el ahorro absoluto en cada oferta y compara estas cantidades para dar respuesta a la tarea. La resolución de tendencia relativa es de un estudiante que para resolver manifiesta dificultades en la elección del número de ítems, desvirtuando el beneficio de alguna oferta. En este caso, toma el valor de 10€ y compra 3 botellas en cada oferta. El último ejemplo de este episodio es la resolución de un estudiante que relativiza el ahorro final de la compra con respecto al coste total sin descuento.

6.2.1.1. Evidencias del proceso de re-constitución. Episodio 1.

Algunos estudiantes explicitaron en este episodio sus procesos de reflexión. Este hecho, unido al cambio observado en su segunda resolución nos permite inferir que realizaron un proceso de re-constitución del objeto mental "relativamente".

A continuación mostramos el caso de una estudiante, codificada como "Alumna37". Previamente a la intervención de la alumna 37, interviene una compañera (alumna 8). La alumna 8 argumenta que la resolución de comparación no relativa no sería adecuada. Esta estudiante parece distinguir entre el ahorro (lo que costaría más barato) y el descuento, quizás como porcentaje, afirmando que el coste más barato con precios diferentes en cada oferta no responde la pregunta de la tarea.

(…)

18- Profesor: (…) Vamos a discutir el proceso. ¿Qué os parece el proceso?

19- Alumna8: Yo en cuanto al proceso creo que el proceso no es el adecuado para sobre este tipo de problema porque él ha supuesto precios de botellas le ha aplicado porcentaje a esos precios, entonces yo creo que no lo puede hacer sobre el precio porque simplemente está preguntando que si tú fueras a comprar qué descuento sería el mejor y si le aplicas al precio tú estás diciendo cuanto te costaría… que te costaría más barato en este supuesto, pero los precios tampoco son los mismos.

(…)

Seguidamente el profesor fuerza la intervención de la alumna 37. Su respuesta parece estar influenciada por la contestación anterior (alumna 8) porque utiliza el mismo verbo suponer.

La alumna 37 se identifica con la resolución mostrada cuando explicita que ha supuesto precios diferentes en las ofertas. Muestra inseguridad en su respuesta y el profesor le pregunta sobre su inseguridad. Ésta se percata de que su resolución no ha sido correcta. Esta estudiante toma consciencia de su propia ignorancia en cuanto a la resolución de la tarea. Este es el primer paso en la re-construcción de una solución que le permita comprender la necesidad de relativizar.

(…)

20- Profesor: ¿Alguno de vosotros ha hecho algo así?... Me podéis contestar (dirigiéndose a la alumna37, que asiente) ¿O no te atreves?

21- Alumna37: No…sí… yo lo he hecho así suponiéndolo pero…

22- Profesor: ¿No estás segura?

23- Alumna 37: Que luego cuando lo he entregado me he dado cuenta de que no lo he hecho bien.

(…)

Un poco más tarde, el profesor plantea diferentes preguntas a los estudiantes para confrontar la postura de la alumna 8 con algunos estudiantes que se identifican con la actuación del ejemplo. Cuando se pregunta al alumno 6 para que intente dar argumentos a favor de lo que ha realizado y así reflexionar en torno a la conveniencia del ejemplo, la alumna 37 interviene manifestando que está mal la utilización del método mostrado por el profesor.

(…)

La alumna 37 comienza a articular una justificación de por qué su resolución no es adecuada.

32- Profesor: ¿Hubieras hecho esto?...Y tu método… ¿por qué crees que ella (refiriéndose a la alumna8) no está de acuerdo con tu método?

33- Alumna37: Es que también… bueno…

34- Alumno6: Es lo primero que he pensado y me pareció… me pareció lo correcto

35- Profesor: No te atreves a defenderte

Aquí la alumna empieza a ser capaz de rebatir su propia resolución aunque todavía no expone un argumento sólido ya que todavía maneja ideas relacionadas con el pensamiento absoluto. La estudiante parece percatarse de que la utilización de distintos precios condiciona el descuento. Esto le genera un conflicto que evidencia cuando afirma que "el descuento va a variar según el precio de cada cosa, entonces eso pues está mal" y que "[me molesta] que los precios son diferentes".

36- Alumna37: el descuento también o sea cada imagen tenía un precio entonces el descuento también va a variar según el precio según de cada… de cada cosa, entonces eso pues está mal porque si tienes el precio más elevado a lo mejor, o sea en función del descuento te saldrá más económico o menos, o sea que no se puede…

(…)

55- Profesor: O sea que tú aquí dices "las botellas están molestando", el número de botellas, y a ti (dirigiéndose a la alumna 37) te molestaba otra cosa

56- Alumna37: Que los precios son diferentes

(…)

Al terminar el debate sobre la primera resolución, el profesor realiza una serie de preguntas para ver si surge de manera espontánea la idea de la necesidad de relativizar.

(…)

61- Profesor: (…) Estas personas son sensibles a la magnitud del descuento, lo que les importa es la cantidad que se ahorran, punto. Aquí me ahorro tanto… ¿Habéis ido de rebajas alguna vez? ¿Qué hacéis? ¿Qué miráis?

62- Alumnos: Lo que te ahorras

63- Profesor: Lo que te ahorras… (dirigiéndose a la alumna 38) ¿Tú qué miras?

64- Alumna38: Lo mismo

65- Profesor: Lo que te ahorras… ¿Alguno mira otra cosa?

66- Alumno3: lo que te ahorras en función del producto

(…)

70- Alumno11: Ha escogido precios diferentes, entonces no es orientativo lo que está ahorrando… Es como si compras un coche y tres manzanas y dices: Yo he comprado dos coches y me he ahorrado 100000€ y compro 3 manzanas y me ahorro 1€, pues el de los coches es mejor…

(…)

Este es un momento clave del transcurso de la sesión ya que por primera vez surge el pensamiento relativo espontáneamente en algunos estudiantes, que lo defienden confrontándolo con el pensamiento absoluto que mostraba la primera resolución.

Más adelante, el profesor enseña el ejemplo de una resolución donde un estudiante compara cantidades relativas. Al mostrar esta resolución, el alumno 9 espontáneamente argumenta por qué este método es correcto, lo que parece convencer a algunos compañeros.

(…)

131- Alumno9: Yo he hecho este y creo que es el bueno, que es el que está bien teniendo en cuenta que… a ver cómo lo digo…que no importa lo que pagues al final sino lo que te ahorres con respecto a lo que pagues

(…)

El ejemplo mostrado originó discusión en torno a la utilización de otras estrategias diferentes que posteriormente se pretendían trabajar durante la intervención.

(…)

142- Profesor: ¿Para ti está mal el método?

143- Alumno16: No… Ese es el que he utilizado

144- Profesor: Ese está bien… ¿Ese es el tuyo?

145- Alumno16: Si

146- Profesor: Pero ¿Has puesto un precio o no?

147- Alumno16: No, ¿para qué?

148- Profesor: ¿No te hace falta?

149- Alumno16: No

150- Alumna8: Yo he hecho los porcentajes pero sin usar los precios

151- Profesor: Los tres porcentajes… pero eso es otro método

152- Alumna8: Sí

(…)

Tras estas discusiones, y valorando este método, la alumna 37, que se identificaba con el primer método mostrado, interviene al ser preguntada.

Por sus respuestas interpretamos que la estudiante comienza a re-construir una solución adecuada a la tarea.

No sólo parece percatarse de que la solución mostrada es adecuada sino que toma consciencia de la existencia de distintos métodos adecuados para resolver la tarea. Esta contestación parece estar mediada por el debate acontecido en el aula.

(…)

153- Profesor: ¿Alguien quiere hablar?... Vamos a ponerle nota.. ¿Qué nota le ponemos? Tú (dirigiéndose a la alumna37) ¿qué nota le pondrías?

154- Alumna37: ¿Yo?

155- Profesor: Sí

156- Alumna37: Pues un aprobado

157- Profesor: ¿Y al tuyo?

158- Alumna37: Suspenso

159- Profesor: ¿Ahora ya has cambiado de opinión?

160- Alumna37: Sí

(…)

200- Alumna37: Pero es que para llegar al resultado… existen varios métodos

(…)

De estos resultados se desprende que la estudiante ha pasado por un momento inicial de de-construcción que propicia su reflexión en torno a su resolución. A raíz de esta reflexión, comienza a re-construir una nueva solución e incluso va más allá cuando admite que existen varios métodos para llegar al resultado. Corrobora esta re-construcción su actuación en su segunda resolución. La estudiante unifica los precios creando una tasa unitaria en cada oferta. Construye una nueva solución comparando cantidades relativas por esto inferimos que re-constituye el objeto mental "relativamente".

Como se indicó en el capítulo 5, se tenía preparado un ejemplo para dar pie a la reflexión en torno a la necesidad de relativizar. Este hecho no fue necesario dada las intervenciones de los estudiantes durante este episodio.

6.2.2. Episodio 2. De la dificultad con los referentes.

Este episodio comprende aquellos acontecimientos que tuvieron lugar cuando se presentaron dos ejemplos de actuaciones de comparación relativa que describen la ruta R.1.1.2.1. Mostrar estas estrategias pretendía, además de discutir otros métodos de comparación de cantidades relativas, trabajar la dificultad con los referentes que muchos de los sujetos manifiestan en sus actuaciones.

Como se indicó en el capítulo 5, el primer ejemplo de este episodio es el de un estudiante que en la oferta del 3x2 utiliza un precio para hallar el porcentaje de descuento por botella. En el resto de ofertas, como los porcentajes (50% y 70%) tienen por referente la segunda unidad, el estudiante normaliza esa relación mediante un procedimiento algorítmico por cociente (50%:2 y 70%:2) para encontrar el porcentaje de descuento por botella respectivamente (25% y 35%). En el segundo ejemplo de este episodio, al igual que en el caso anterior, el estudiante utiliza el mismo procedimiento para obtener 25% y 35% respectivamente. Se muestra esta estrategia porque no se utilizan los precios como medio para encontrar el porcentaje de descuento en la oferta del "3x2". El estudiante divide 100% entre 3 para encontrar el 33% de descuento y compararlo con los anteriores.

6.2.2.1. Evidencias del proceso de re-constitución. Episodio 2.

A continuación se describen algunas evidencias del proceso de re-constitución de algunos estudiantes que tenían dificultad con el manejo de los referentes.

Varios estudiantes que mostraron en su resolución dificultades con el referente, intervinieron en la sesión haciendo explícito su proceso de reflexión. Un ejemplo es el estudiante codificado como "alumno27" que se detalla a continuación.

	(...)
Como podemos observar este estudiante se percata de su error con el referente una vez mostrado el primer ejemplo.	325- Alumno27: A ver, yo lo he hecho parecido pero creo que equivocándome 326- Profesor: Ya, pero ¿tu idea era esa? 327- Alumno27: Es que se me ha olvidado

Estos estudiantes son de tendencia relativa, percatarse de este error es necesario para una comparación relativa exitosa.

De esta intervención, inferimos que la decisión de mostrar resoluciones eficientes para abordar los problemas con el referente fue una decisión acertada. Este estudiante en su segunda resolución normaliza por cociente los porcentajes del 50% y 70% y los compara. Por tanto, consideramos que este alumno completa el proceso de re-constitución del objeto mental “relativamente”.

dividirlo luego por las botellas que tienes

328- Profesor: ¿Se te ha olvidado dividir por dos?

329- Alumno27: Bueno… se me ha olvidado… que no me he dado cuenta…

330- Profesor: ¿Pero dividir por dos?

331- Alumno27: Yo lo he hecho a ojo… He cogido y he visto… el segundo tiene un descuento del 70%, que te lo ponía, el tercero, como era la mitad de precio, del 50% y el primero a ojo le he puesto un 30, en vez de un 33

332- Profesor: ¿El de las tres botellas? ¿El del 3x2?

333- Alumno27: Sí

334- Profesor: Te has imaginado que el 3x2 equivale a un 30%...

335- Alumno27: Sí

336- Profesor: Por lo demás… ¿esto lo has calculado bien? (señalando en la resolución proyectada la parte de las ofertas del 70% y 50%)

337- Alumno27: No, porque no lo he dividido entre dos

338- Profesor: No lo has dividido por dos…

Aunque este es uno de los pocos alumnos que mostró evidencias del proceso de re-constitución, los resultados en la segunda resolución muestran una reducción a la mitad en el número de estudiantes con dificultad con el referente.

O sea que tú has calculado porcentajes…

339- Alumno27: Olvidándome del número de botellas

340- Profesor: Olvidándote de que este 50 se refiere a la segunda unidad, y este 70 se refiere a la segunda unidad… Eso no lo has tenido en cuenta….

341- Alumno27: (Niega con la cabeza)

(…)

A raíz de intervenciones como la anterior, el debate se centró en esta problemática. Algunos estudiantes que también son de tendencia relativa no parecen convencerles el ejemplo y explicitan sus argumentos. A continuación se muestra las justificaciones ofrecidas por la estudiante codificada como "alumna8".

La alumna 8 plantea que el descuento del 50% y del 70% es en el "pack" y que por tanto no se ha de dividir entre el número de botellas.

(…)

468- Alumna8: Sí. Pero mi planteamiento era cuando me preguntas que cual hace más descuento yo entiendo descuento o sea que en cuál de todos los pack al final te hacen más descuento, ¿vale?... Es lo que yo he entendido, que no sé si está bien o no, pero es lo que yo he entendido. Entonces el segundo que es

Consideramos relevante la discusión entre esta alumna y el alumno 11, para tratar de comprender cómo parece pensar algunos estudiantes que han resuelto el cuestionario de esta manera.

La alumna 8 se limita a defender su propia resolución. Esta estudiante no llega a de-construir, pese a que el alumno 11 le ofrece argumentos de su error.

lo que ha hecho Diana lo he dejado en 50% porque el descuento que te hacen a ti de ese pack es el 50%

469- Profesor: ¿Del pack? ¿De las dos botellas o de una?

470- Alumna8: De una pero si tú te coges a esa oferta, ¿vale? al final, o sea es el 50 porque la primera la vas a pagar

471- Alumno11: Entonces pagas el 25, o sea el descuento es 25…

472- Alumna8: no porque tú de la primera pagas el 100%

473- Alumno11: Si tú pagas una a un euro y tú compras dos y la segunda va al 50% te va a subir medio, entonces uno y medio de dos euros es 25%

474- Alumna8: De dos euros no, yo he dicho no he tenido en cuenta el precio de…

475- Alumno11: Ya, pero yo te ejemplifico para que veas que el descuento es del 25 y no del 50

(…)

478- Alumna8: La primera botella he supuesto que tú pagas el 100% de la primera botella y de la segunda botella tú pagas la mitad del precio que es el 50%, ¿vale? Luego por lo que te están vendiendo la segunda

Observando la segunda resolución de la alumna 8, confirmamos que esta estudiante no realiza el proceso de re-constitución del objeto mental "relativamente". La estudiante vuelve a resolver con el mismo procedimiento que defiende durante la intervención didáctica.

botella que es la que está en oferta de alguna manera es del 50%, el tercero el 70 por ciento. Y el primero lo que he hecho es, bueno he relacionado directamente el 100% del precio, digamos, según el descuento en la botella, que son tres con algo, creo que era… el 100% es ese, entonces para saber qué porcentaje me quitarían, o sea, lo he relacionado, el 100% de los 5 euros, con el % que me saldría en la botella con 3 euros

479- Observador: Lo que ha hecho él (señalando la resolución proyectada) ¿no?

480- Alumna8: Sí, pero luego el porcentaje que me ha salido por botella lo he multiplicado por 3 porque te llevabas… porque el pack…

(…)

6.2.3. Episodio 3. Discusión de otros métodos.

En este último episodio se describen las discusiones sobre otros métodos de resolución presentados en la sesión de clase. Estos métodos corresponden a las actuaciones sexta a novena de la intervención didáctica. Los primeros dos ejemplos de este episodio comparan tasas unitarias en cada oferta y el tercer ejemplo compara tasas no unitarias empleando un múltiplo común de botellas (6 botellas). El último método utilizado es de una actuación que relaciona la cantidad de botellas que se pagan con las que te llevas. Con estos métodos se pretende discutir el procedimiento utilizado y la conveniencia en la elección adecuada de los precios y las botellas. Para concluir y terminar la sesión se presenta otra tarea con otras dos ofertas en la que se pide lo mismo que en el cuestionario inicial.

6.2.3.1. Evidencias del proceso de re-construcción de la solución. Episodio 3.

A continuación se recogen evidencias del proceso de re-construcción de la solución de algunos estudiantes.

Cuando se diseñó el protocolo mayéutico, esta última parte de la sesión tenía un doble objetivo. Por un lado conseguir que, una vez trabajada la re-constitución del objeto mental "relativamente" (ya que ya han visto resoluciones eficientes), los estudiantes completaran su construcción de la solución a la tarea al percatarse de que existen distintas estrategias que llevan a una solución adecuada. Por otro lado, se pretendía generar discusión en torno a la elección adecuada del número de botellas. En el transcurso de la sesión, como se mostrará en este epígrafe se consiguieron estos objetivos y además, el debate sobre la elección del número de botellas derivó en una amplia discusión sobre si era o no necesario tener en cuenta las preferencias del consumidor. Esta discusión fue guiada, en gran medida, por uno de los estudiantes (alumno11) que pese a no haber tenido en cuenta este aspecto en su resolución inicial lo hizo tras realizar un proceso de reflexión que explicitó durante la intervención didáctica. Consideramos que es interesante detallar los argumentos que defendió este estudiante, ya que, además de mostrar el proceso metacognitivo que llevó a cabo, éstos tuvieron una importante influencia sobre la cognición de sus compañeros, como hemos podido comprobar al analizar la segunda resolución de la tarea.

Seguidamente se recogen distintas evidencias de la asistencia ofrecida por el alumno 11 favoreciendo la re-construcción de una solución a la tarea de algunos compañeros.

El alumno 11 explicita en clase una condición necesaria para poder comparar los descuentos de las ofertas "3x2" y "-70% en segunda unidad". Este estudiante se adelanta a la siguiente estrategia que pretende mostrar el profesor.

(…)

674- Alumno11: Que, si hemos calculado que el precio en el 70% y en el 3x2… el 70% es un poco inferior, podemos llegar a que, en algún momento que compremos la cantidad que podamos aplicar a ambas ofertas, es decir, si compramos 6, podemos aplicar el 3x2 y la segunda unidad al 70%

(…)

Una vez mostrado el siguiente método, la discusión se centró en el número adecuado de botellas a comprar para no desvirtuar las ofertas. La alumna 23 ha tomado consciencia de la existencia de diferentes métodos

[El profesor muestra la resolución de un estudiante que compra un múltiplo común de botellas (6 botellas)]

777- Profesor: Se queda con la del 70%... llevándose 6 botellas… Di (dirigiéndose a la alumna23)

778- Alumna23: Que siempre vamos a parar a lo mismo, a que la mejor es la del adecuados para resolver la tarea. Este hecho parece consecuencia de mostrar diversas estrategias durante la intervención didáctica.

Para algunos estudiantes, la variable "número de botellas" influye en la toma de decisión del descuento. En esta discusión, el alumno 11 considera adecuado este método, al igual que los anteriores ejemplos mostrados en clase.

Aunque este estudiante utilizó la estrategia del cociente (usando los porcentajes) en su primera resolución, es consciente de que existen varias estrategias equiparables. A pesar de ello, ahora no las considera "completas" ya que este estudiante ha re-construido una nueva solución a la tarea tomando en consideración las posibles preferencias del

70%

779- Alumna38: No, si te llevas 3, la mejor la del 3x2

780- Alumno16: Y si te llevas 8, pues la del 70 sale…

781- Alumno35: ¿Y si te llevas 9?

782- Profesor: O sea, que si no te llevas 6…cambian las cosas (Le da la palabra al alumno11)

783- Alumno11: ¿Te digo mi conclusión?

784- Profesor: No, espérate. La conclusión al final… ¿Qué os parece este método? (Dirigiéndose a toda la clase)… ¿Qué os parece?

785- Alumno11: Yo lo veo bien pero incompleto también

(…)

833-Profesor: Bueno… (dirigiéndose al alumno11) Concluye

834- Alumno11: Lo que hemos sacado aquí en petit comité… [ha estado reflexionando con el alumno14] Vamos a ver… nosotros hemos dicho que el 70% siempre es mejor menos cuando compramos cantidades múltiplos de tres, impares… es decir, 3, 9…

consumidor. Esta nueva solución aúna la resolución matemática y las posibles interpretaciones que pueden ofrecerse en un contexto de compra. El alumno 11 en su segunda resolución, utiliza el mismo método para resolver que en la inicial incorporando este punto de vista. Por tanto podemos decir que ha re-construido su solución.

Esta re-construcción de la solución es el producto de un proceso de reflexión del que este estudiante ha ido mostrando evidencias a través de sus diversas intervenciones. Hemos podido comprobar que estas intervenciones han influido en los procesos reflexivos de algunos estudiantes, como ocurre con la alumna 2. Esto se ve claramente reflejado en las segundas resoluciones en las que, como se detallará en el próximo epígrafe,

835- Profesor: O cinco

836- Alumno11: ¿Eso es múltiplo de 3?

837- Profesor: No, pero 5…

838- Alumno11: Entonces te sale mejor el 70%

(…)

841- Alumna2: Que según la cantidad que te lleves

842- Profesor: ¿Eh?

843- Alumna2: Yo estoy con David (alumno11), que según la cantidad que te lleves te vendrá mejor el del 3x2 o el del 70%

844- Alumno11: Y ya está

845- Alumno9: Es mejor el del 70

846- Alumna38: No, si compras 3 no

847- Alumno11: Pues si yo te he dicho… va a salir siempre mejor la oferta del 70% menos cuando compramos cantidades de 3, múltiplos, o sea…

848- Alumna2: Múltiplos de 3…

849- Alumno11: Impares

850- Alumna2: Impares…

(…)

aumenta el número de estudiantes que tienen en cuenta las preferencias del consumidor.

Dada la gran discusión que se generó en torno a las preferencias del consumidor. Para finalizar la sesión se utilizó un ejemplo en otro contexto de compra. Esto se hizo con el fin de generar un conflicto en torno a la necesidad de condicionar la resolución de la tarea al número de unidades que desea comprar el consumidor. La tarea muestra la imagen de una caja con 6 cd's que cuesta 39 € y otra con 7 cd's que cuesta 40€, y se pregunta cuál será el mejor descuento.

(…)

857- Profesor: Si en la tienda me dan 7 por 40€ y en la otra me dan 6 por 39€, ¿de qué dependerá el resultado?

858- (En el aula se oye: del precio por cd)

859- Profesor: ¿Cuál será la mejor?

860- Alumna38: La de 7 cds (la alumna2 también lo dice)

(…)

864- Observador: Pero ahí ya no está diciendo que depende de si necesito 7 o necesito 6

865- Alumna8: Depende del precio por cd

866- Observador: Ahora ya depende del precio por cd…

867- Profesor: Ya no depende de las que me llevo ni depende de… ya no depende de nada

868- Alumna2: Es el precio por cd

869- Observador: Independientemente de la cantidad…

870- Alumno6: Sí, no… tiene que ver la cantidad para sacar el precio por cd

871- Observador: Sí, sí pero no tenemos que poner la coletilla de "el precio por cd sale mejor, pero si necesito 7… según…"

872- Alumna2: Cuanto me llevo… no

(…)

Con esta tarea, la mayoría de la clase está de acuerdo en que hay que calcular el precio unitario para poder comparar y las preferencias del consumidor en cuanto al número de artículos que desea llevarse no tiene influencia para la resolución. Vemos que esto, contradice el argumento que algunos estudiantes han adoptado en la resolución de la tarea "el descuento". Así, ante las dos situaciones de compra mostradas, en una de ellas para saber cuál es el mejor descuento hay que tener en cuenta las preferencias del consumidor pero no en la otra. Cuando se preguntó al gran grupo el motivo de ello, no fueron capaces de dar una respuesta clara y unánime. Esto nos lleva a inferir que ha surgido un nuevo conflicto en los estudiantes que será el punto de partida de una reflexión en torno a si realmente es necesario considerar las preferencias del consumidor para dar respuesta a la tarea "el descuento".

6.3. Segunda resolución de la tarea. Resultados

Para observar el impacto de la intervención en el aula, en el transcurso de una semana se volvió a pasar la tarea en el mismo grupo. Ese día asistieron 31 estudiantes de los 36 que participaron en la primera resolución de la tarea. De este modo, los resultados a los que se hace referencia en el presente epígrafe son los obtenidos con los participantes de la segunda resolución.

En la Tabla 6.5 se recogen las frecuencias de las respuestas en la segunda resolución según el esquema de categorías de la primera fase del estudio.

Dentro de la categoría "otras respuestas" encontramos 6 actuaciones no identificadas o en blanco. De éstas hay 5 que se incluyen en las no identificadas ya que en la actuación no aparecen indicios de cómo resuelven la tarea. En general estos estudiantes se limitan a decir qué descuento es mejor sin mostrar una resolución.

Tabla 6.5.
Frecuencias de las respuestas en la segunda resolución

Respuestas de los estudiantes en la segunda resolución					
Comparaciones relativas		Comparaciones no relativas			Otras respuestas
Con éxito	Con dificultades	Comparan diferencias	Ignoran parte de la información		No identificadas o en blanco
		Ahorros o costes totales (N.1.1)	Relacionan solo una variable (N.2.1)	Afectivas o subjetivas (N.2.2)	
11 estudiantes	7 estudiantes	1 estudiante	5 estudiantes	1 estudiante	6 estudiantes

Como se muestra en la tabla 6.5, aparecen 7 estudiantes que establecen comparaciones no relativas (en la primera resolución de la tarea surgen 12 estudiantes). En esta categoría, predominan aquellos estudiantes que ignoran parte de la información y establecen relaciones en una variable, en particular con el número de botellas que el consumidor desea comprar (5 estudiantes). La comparación de diferencias en términos absolutos parece no tener incidencia en las actuaciones de los estudiantes en la segunda resolución, al pasar de 10 estudiantes a 1 estudiante.

De entre las actuaciones que comparan cantidades relativas (18 estudiantes) observamos que hay un mayor número de estudiantes que comparan con éxito que de estudiantes que comparan con dificultad. En la resolución primera de la tarea aparecen 13 estudiantes con dificultades en la comparación de cantidades relativas, frente a los 7 estudiantes de la segunda resolución. Aquellos estudiantes con dificultades en la segunda resolución se reparten entre quienes muestran dificultad con los referentes (4 estudiantes) o con la elección de los precios e ítems (3 estudiantes). En la Tabla 6.6 se indican los distintos patrones de respuestas de estos estudiantes.

Tabla 6.6.
Frecuencias de las respuestas con dificultad en la comparación de cantidades relativas en la segunda resolución

Dificultades en la comparación de cantidades relativas		
Dificultad con el referente		Dificultades en la elección de los ítems y/o precios
En las relaciones de "razón" (D.1.1)	En las relaciones de "tasa" (D.1.2)	No unifican ítems y toman el mismo precio en las ofertas (D.2.3)
3 estudiantes	1 estudiante	3 estudiantes

Entre los estudiantes que resuelven con éxito, en la segunda resolución, encontramos 6 estudiantes que establecen "razones" y 5 que establecen "tasas". Para mayor detalle, en la Tabla 6.7 se recogen las diferentes rutas utilizadas por estos estudiantes

Tabla 6.7.
Frecuencias de las respuestas que comparan cantidades relativas con éxito en la segunda resolución

Comparaciones relativas con éxito				
Establecen "razones"			Establecen "tasas"	
En la relación pago/compro	En la relación descuento/compro		En la relación pago/compro	
Cociente (R.1.1.1.1)	Cociente (R.1.1.2.1)	Producto cruzado (R.1.1.2.2)	Cociente - Tasa unitaria (R.2.1.1)	Múltiplo común-Building up (R.2.1.2)
1 estudiante	3 estudiantes	2 estudiantes	4 estudiantes	1 estudiante

CAPÍTULO 7.
DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES. SEGUNDA FASE

En este capítulo se discuten los resultados relativos a la experiencia didáctica y se presentan las conclusiones extraídas a partir de ellos.

Al comparar los resultados referentes a los cuestionarios inicial y final se han observado algunos cambios que consideramos interesante mencionar. Recordemos que en el cuestionario inicial participan 36 estudiantes y en el cuestionario final 31 estudiantes.

El número de los estudiantes que comparan cantidades relativas no cambia significativamente: en el cuestionario inicial 20 estudiantes y en el final 18 estudiantes. Pasamos pues de un 55,6% a un 58,1%, que supone una ligera mejoría. Destacamos la diferencia de los que resuelven con éxito siendo mayor en el cuestionario final. Además se produce una disminución en el cuestionario final a la mitad de aquellos que muestran dificultades con la comparación de las cantidades relativas. Quienes muestran dificultades con los referentes pasan de 7 estudiantes a 4 y aquellos que muestran dificultades en la elección de ítems y/o precios pasan de 6 estudiantes a 3.

Los resultados muestran un cambio significativo en cuanto al número de estudiantes que comparan diferencias en términos absolutos pasando de 10 estudiantes en el cuestionario inicial a 1 estudiante en el final. Pensamos que este hecho es un efecto muy positivo de la sesión mayéutica.

Entre los estudiantes que no comparan cantidades relativas, se observa un aumento de estudiantes que ignoran parte de la información. Principalmente el aumento aparece en aquellos que relacionan una sola variable para dar respuesta a la tarea. En nuestro caso aparecen 3 estudiantes adicionales (inicialmente eran 2 estudiantes) que relacionan solo la variable "número de botellas" para dar respuesta a la tarea. Inferimos que la discusión en torno a esta variable en el aula medió en las actuaciones de estos estudiantes.

En cuanto a la implementación de la intervención didáctica podemos concluir que ésta favoreció en diferentes futuros maestros la explicitación en voz alta de reflexiones de sus propias actuaciones y la toma de conciencia de distintos métodos de resolución correctos e incorrectos.

Mostrar diferentes métodos de resolución posibilitó la presencia y confrontación de diversas opiniones entre los participantes. El profesor era quien guiaba mediante preguntas las discusiones en el aula y en la sesión no reveló su postura en cuanto a los métodos mostrados. Su papel se basó en cuestionar las actuaciones expuestas y la de los propios estudiantes que participaban en el debate. Esta forma de actuar permitió que los estudiantes reflexionaran sobre sus propias actuaciones y algunos se percataran de sus errores.

La sesión mayéutica propició discusión en torno a los aspectos problemáticos de la tarea que se pretendían trabajar. Así, se abordó la necesidad o no de utilizar precios para resolver la tarea; el número adecuado de botellas para poder comparar tasas; la dificultad con el referente del descuento y la necesidad de comparar cantidades relativas.

A este respecto, surgieron ideas como que existen estrategias de resolución en las que no es necesario utilizar los precios y otras en las que se deben unificar los precios escogidos. Mostrar ejemplos de actuaciones que dividían los porcentajes de descuento en la segunda unidad propició que algunos estudiantes con dificultades con el referente se percataran de su error.

En cuanto al número adecuado de botellas se reflexionó sobre qué cantidad de botellas convenía elegir para llevar a cabo la comparación y la conveniencia de que este número debe ser igual en los tres casos y un múltiplo de 3 y 2 para no desperdiciar las ventajas que ofrece cada oferta. A partir de esta reflexión se produjo la intervención del alumno 11 (para mayor detalle véase capítulo 6) quien sugiere tomar en consideración las preferencias del consumidor para resolver la tarea.

Los argumentos de este estudiante convencieron a algunos de sus compañeros que pasaron a condicionar la solución de la tarea a esta variable (preferencias del consumidor). Resulta llamativo que estos mismos estudiantes, que consideran imprescindible saber cuántos artículos desea adquirir el comprador en esta tarea, no apliquen el mismo razonamiento en otras situaciones de compra similares (para más detalle véase el capítulo 6). Bajo nuestro punto de vista, esto es indicativo de que este es un argumento falto de fuerza que ha surgido en la tarea "el descuento" como consecuencia de que los folletos comerciales que aparecen en ella ejemplifican los descuentos con productos concretos de un precio considerable. Puede que esto haya desviado la atención de estos alumnos haciendo que se centren en ver qué oferta de las presentadas era más ventajosa para el cliente en lugar de contestar a lo que se les pedía, esto es, qué descuento era mejor.

Pese a que existen estudiantes que no han cambiado su postura errónea inicial (véase el caso de la alumna 8 descrito en el capítulo 6) esta intervención didáctica permitió obtener evidencias de la reflexión de algunos estudiantes que habían mostrado un pensamiento absoluto en torno a la necesidad de relativizar las cantidades involucradas de la tarea. Cabe destacar que esta reflexión apareció de forma espontánea en los estudiantes, por lo que el profesor no tuvo que presentar el ejemplo preparado sobre relativización ya que fueron algunos de los alumnos los que plantearon ejemplos para convencer a sus compañeros.

Un caso de la reflexión que estamos mencionando fue la explicitada por parte de la alumna 37. Esta alumna interviene en la sesión mayéutica identificándose con la resolución de pensamiento absoluto y a lo largo de la misma realizó varias intervenciones en la que fue explicitando el proceso de reflexión que iba llevando a cabo. Esta estudiante pasó por un momento inicial de de-construcción que propició su reflexión en torno a su resolución. A raíz de esta reflexión construye una nueva solución (momento de re-construcción). En su resolución posterior, la estudiante unifica los precios creando una razón unitaria en cada oferta (re-constituye el objeto mental "relativamente"). Además, durante el transcurso de la sesión, admite que existen varios métodos adecuados para resolver la tarea.

Casos como el anterior corroboran que el método mayéutico ha ayudado a algunos estudiantes a progresar en su aprendizaje, que era el propósito principal de la experiencia. Consideramos que este es un resultado muy positivo ya que lo que se pretendía en esta sesión es ayudar a los alumnos a superar las dificultades que surgen en problemas donde se han de comparar cantidades relativas ya que, como se ha reportado en la literatura (Ben-Chaim et al., 2012), el criterio absoluto es uno de los obstáculos que impide el éxito en este tipo de problemas.

CAPÍTULO 8.
CONSIDERACIONES FINALES

El presente trabajo de investigación tenía como objetivo general ensayar con futuros maestros una experiencia didáctica centrada en la re-constitución del objeto mental "relativamente".

Dado que se tenía pensado trabajar esta re-constitución, un método que se ajustaba a este propósito es la mayéutica. La implementación de este método requiere conocer las respuestas de los estudiantes a una tarea diseñada ex profeso.

Por tanto, para la consecución de este objetivo, se han realizado dos fases relacionadas en el presente trabajo. Una primera fase, cuya finalidad era aportar una tarea, científicamente fundamentada para una experiencia mayéutica, que involucre el objeto mental "relativamente".

Esta primera fase tenía como objetivos específicos los siguientes:

OE1: Elaborar una tarea que implique el objeto mental "relativamente"

OE2: Obtener los patrones cognitivos de respuesta a la tarea diseñada

Y una segunda fase cuyo propósito era el ensayo de una experiencia didáctica basada en la mayéutica y centrada en la re-constitución del objeto mental "relativamente" en un grupo de estudiantes para maestro de educación primaria. Esta fase tenía los siguientes objetivos específicos:

OE3: Plantear la experiencia didáctica utilizando los patrones cognitivos de respuesta a la tarea diseñada

OE4: Evaluar la implementación de la experiencia didáctica

En relación al objetivo específico OE1 de la primera fase de la investigación se ha elegido una situación de la vida real como contexto para el diseño de la tarea. La tarea diseñada, que hemos denominado "el descuento", presenta una comparación de tres ofertas comerciales en las que aparecen diferentes descuentos recogidos de folletos comerciales y en la que se pregunta a los estudiantes qué descuento es el mejor. Esta tarea es del tipo "¿Cuál es la mejor compra?" (Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 2007). Por su tipología es una tarea de comparación numérica multiplicativa, en donde hay que juzgar cuál de las razones es mayor o menor, o tal vez sean iguales.

Consideramos que se ha abordado el OE1 con el análisis racional de la tarea realizado y descrito en el capítulo 3. Este análisis, desde un punto de vista fenomenológico, nos ha permitido caracterizar la tarea como pareja de exposiciones o de composiciones, ambas involucrando el objeto mental "relativamente" y las técnicas de normalización. A su vez, este análisis exhaustivo de la tarea nos ha permitido determinar dos componentes críticas asociadas a su resolución como son los referentes y las normalizaciones de los descuentos donde es necesaria una actividad de unificación u homogeneización de los mismos para poder compararlos.

Para abordar el objetivo específico OE2, se han utilizado diferentes dimensiones de análisis que nos han permitido categorizar las actuaciones en rasgos comunes observables al resolver la tarea. Las dimensiones de este análisis empírico son extraídas del propio análisis racional de la tarea y del marco de referencia adoptado en la investigación. Este análisis empírico nos ha permitido conocer el desempeño de 339 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Valencia. Estos resultados se han organizado en diferentes categorías y subcategorías que atienden a sus criterios de pensamiento (absoluto o relativo) y a sus dificultades con las comparaciones de cantidades relativas. De la interpretación de los resultados se desprende un escaso desarrollo del pensamiento relativo. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en investigaciones precedentes (Ben-Chaim et al., 2002; Lamon, 2012; Sowder, et. al., 1998).

También, se obtiene que entre quienes comparan cantidades relativas existe un número importante de estudiantes que tienen dificultades con la interpretación del referente del descuento. Esta dificultad ya aparecía en el trabajo de Parker (1997). Además se contemplan dificultades en la elección adecuada de ítems y/o precios en la comparación de razones lo que desvirtúa el sentido de la oferta.

Por todo lo anterior, en esta fase se ha constatado la falta de competencia que muchos estudiantes para maestro muestran en relación con la comparación de cantidades relativas. Esto concuerda con diferentes trabajos de investigación (Rivas et al., 2012; Valverde, 2012). En nuestra opinión, este hecho puede ser debido a una enseñanza de la razón que parece priorizar los aspectos procedimentales. Como afirman Sowder et al. (1998) "la distinción entre situaciones aditivas y multiplicativas no está explorada. Consecuentemente, no debe sorprendernos cuando los futuros profesores, que son el mismo producto de los textos, cometen el mismo error que los estudiantes de grado medio" (p. 130).

A tenor de lo expuesto, consideramos cumplido el propósito de esta primera fase de la investigación, ya que se ha diseñado una tarea que involucra el objeto mental "relativamente" y se han analizado las actuaciones de estudiantes para maestro al resolverla. De este análisis se desprende que los futuros maestros tienen dificultades en su desempeño y ofrecen un tratamiento limitado del pensamiento relativo en la tarea diseñada.

Con la intención de propiciar una transición en la forma de pensamiento de los estudiantes en la constitución del objeto mental "relativamente", para el cumplimiento del OE3, se ha utilizado esta misma tarea para plantear una experiencia didáctica basada en las dificultades observadas en la primera fase de la investigación. Esta experiencia se estructuró en torno a principios tomados de la mayéutica socrática basándose en diferentes momentos (construcción, de-construcción y re-construcción) identificados por Rigo y Gómez (2012). La pretensión del uso de la mayéutica en este trabajo, fue la promoción de un desequilibrio cognitivo que ayudara en la necesidad de aprender un nuevo conocimiento. Para producir este desequilibrio era necesario contar con una tarea rica en interpretaciones, familiar y cercana, y que además de prestarse a diferentes métodos de resolución mostrara cierto grado de inseguridad en sus respuestas. El cuestionario inicial evidenció esta serie de condiciones en un grupo de 36 estudiantes y emergieron las dificultades descritas en la primera fase de la investigación.

Evaluar la implementación de la anterior experiencia didáctica es uno de los objetivos específicos marcados en este trabajo (OE4). A este respecto podemos decir que el uso de resoluciones prototípicas durante el desarrollo de la intervención didáctica permitió profundizar en las dificultades mostradas por los estudiantes y originó discusión sobre sus propias actuaciones. Hemos obtenido evidencias de que, como se pretendía, la experiencia propició procesos metacognitivos de algunos estudiantes que pasaron de un pensamiento absoluto a uno relativo mediante una primera fase de de-construcción en la que los futuros maestros se percataron de su error y una segunda fase en la que construyeron una nueva solución eficiente (re-construcción).

Además, el análisis de la segunda resolución de la tarea muestra que esta resolución es estable en el tiempo. Así, se redujo a la mitad el número de estudiantes que resuelven con dificultad al comparar cantidades relativas y prácticamente desaparecieron los estudiantes que para resolver emplean una estrategia absoluta. Estos resultados refuerzan la idea de que la mayéutica puede ser potente como método educativo para la formación de futuros profesores. Esto concuerda con las conclusiones a las que llega Rigo (2011), que observa modificaciones positivas de profesores de secundaria en algunos estados de convencimiento o seguridad en contenidos matemáticos.

De lo descrito anteriormente se desprende que se ha alcanzado el cometido de la segunda fase de la investigación que consistía en el ensayo de una experiencia didáctica —asentada en ideas provenientes de la mayéutica— centrada en la re-constitución del objeto mental "relativamente" en un grupo de estudiantes para maestro de educación primaria.

Así pues, realizadas las dos fases del trabajo podemos concluir que queda cubierto el objetivo general del presente trabajo de investigación.

8.1. Limitaciones

Pese a haber abordado los objetivos propuestos en esta investigación somos conscientes de que hemos contado con algunas limitaciones que han condicionado en cierta medida el trabajo. Pasamos a continuación a describirlas.

La experiencia didáctica se diseñó para trabajarla en una sesión habitual de clase. Esto motivó que participaran un número grande de alumnos lo que pudo ocasionar que algunos de ellos no se implicara en la discusión. Con un número menor de alumnos quizás podríamos haber promovido de manera más directa los procesos de reflexión de alguno de ellos.

El hecho de que en el enunciado aparezca la palabra "mejor", que tiene muchas connotaciones personales, provocó que la discusión en una parte de la sesión girara en torno a las preferencias del consumidor. Quizá este distractor puede evitarse modificando ligeramente el enunciado.

Aún haciendo referencia la palabra “descuento” a una cantidad relativa, el uso que hacemos de ella en el lenguaje cotidiano (con matices absolutos), puede haber llevado a algunos alumnos a pensar inmediatamente en la cantidad de euros descontada como respuesta a la tarea.

8.2. Posibles líneas de continuación

En este epígrafe se indican algunas sugerencias para futuras líneas de continuación de este trabajo.

Una línea de continuación de este estudio podría ser replicarlo utilizando, en lugar de una sola tarea, diferentes fenómenos relacionados con el objeto mental “relativamente” con el fin de comparar resultados. Consideramos que para la incorporación de otras tareas con el uso de la mayéutica es conveniente un análisis racional exhaustivo de las mismas cumpliendo las condiciones mayéuticas. En este aspecto se está profundizando en otros trabajos recientes (Gómez y Garcia, 2014; 2015)

Pensamos que otra línea de continuación puede ser la profesionalización de este método en futuros maestros dado el potencial que puede tener en el aprendizaje de contenidos matemáticos.

Consideramos que sería interesante realizar un estudio comparativo sobre la experiencia de aula llevada a cabo y un método tradicional de enseñanza. Esta podría ser otra posible vía de continuación.

REFERENCIAS

Alatorre, S., y Figueras, O. (2004). Proportional reasoning of quasi-illiterate adults. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28*th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 2-9). Bergen, Norway: PME.

Alatorre, S., y Figueras, O. (2005). A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks. En Chick, H. L. y Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 25-32). Melbourne, Australia: PME.

Ben-Chaim, D., Ilany, B. S., y Keret, Y. (2002). Mathematical and pedagogical knowledge of pre-and in-service elementary teachers before and after experience. in proportional reasoning activities. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 81-88). Norwich, U.K.: PME

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto C., y Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular. experiences. *Educational Studies in Mathematics, 36* (3), 247–273.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., e Ilany, B. (2007) Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 333–340.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion. research and teaching in mathematics teachers' education (pre- and in-service mathematics teachers of elementary and middle school classes).* Rotterdam: Sense Publishers.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). Nueva York: Macmillan Publishing.

Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp. 495-512). México: Díaz de Santos de México, Clame. A. C.

Buforn, A., y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema*, *28*(48), 21-41.

Cramer, K., y Post, T. (1993). Proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404-407.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria.* Valencia, España: Universidad de Valencia.

Fernández, A., y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *5*(2), 397-416.

Fernández, A., y Puig, L. (2003). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. En Murillo, J., Arnal, P. M., Escolano, R., Gairín, J. M. y Blanco, L. (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 29-46). Logroño: SEIEM.

Fernández, C. (2010). *Características del desarrollo del razonamiento proporcional. Estrategias y mecanismos constructivos* (Tesis doctoral). Universidad de Alicante, Alicante, España.

Fernández, C., y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 30*(1), 129-142.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Gairín, J. M., y Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma*, *62,* 35-48.

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón. En Castro, E., Castro, E., Lupiáñez, J. L., Ruíz, J. F., y Torralbo, M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 165-174). Granada: Editorial Comares.

Gómez, B., y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Gómez, B., y García, A. (2015). What is a better buy? Rationale and empirical analysis of unequal ratios tasks in commercial offers contexts. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 266-273). Praga, República Checa: ERME.

Gómez, B., Monje, J., Pérez-Tyteca, P., y Rigo, M. (2013). Performance on ratio in realistic discount task. En B. Ubuz, Ç. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 293-302). Ankara, Turquía: ERME.

Harel, G., Behr, M., Post, T., y Lesh, R. (1991). Variables affecting proportionality: Understanding of physical principles, formation of quantitative relations and multiplicative invariance. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 125–133). Assisi, Italia: PME.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray Publishers Ltd.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Londres: The NFER-Nelson Publishing Company, Ltd.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert, y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-219). Reston, VA: NCTM.

Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M., y Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type and problem setting. *Journal for Research in Science Teaching*, *26*(1), 205-220.

Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. En: T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods.* (pp. 285-313). Boston: Allyn and Bacon.

Ilany, B. S., Keret, Y., y Ben-Chaim, D. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio & proportion in pre-service teacher education. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 3, pp 81–88). Bergen, Noruega: PME.

Inhelder, B., y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* Londres: Routledge y Kegan Paul.

Kaput, J., y West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-287). Nueva York: State University of New York Press.

Karplus, R., Karplus, E., y Wollman, W. (1974). Intellectual development beyond elementary school. IV: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics*, *74,* 476-482.

Karplus, R., Pulos, S., y Stage, E.K. (1983a). Early adolescents’ proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233.

Karplus, R., Pulos, S., y Stage, E.K. (1983b). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 45-90). Nueva York: Academics Press, INC.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101–144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–149). Columbus, OH: ERIC.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 162–181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington: National Academy Press.

Lamon, S. J. (1993a). Ratio and proportion: children's cognitive and metacognitive processes. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 131-156). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (1993b). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, N.Y: Sunny Press.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers, 3rd edition*. Nueva York: Routledge Taylor y Francis Group.

Lesh, R., Post, T, y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, V. A.: Lawrence Erlbaum y National Council of Teachers of Mathematics.

Livy, S., y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development*, *13*(2), 22-43.

Lo, J., y Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 216-236.

Lobato, J., y Ellis, A. (2011). *Developing essential understanding of ratios, proportions and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Modestou, M., y Gagatsis, A. (2009). Porportional reasoning: The strategies behind the percentages. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, *9*, 25-40.

Monje, J., Pérez-Tyteca, P., y Gómez, B. (2013). Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 393-401). Bilbao: SEIEM.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I—Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II—problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 331-363.

Norton, S. J. (2005). The construction of proportional reasoning. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Melbourne: PME.

Oller, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Parker, M., y Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*,*65*(4), 421-481.

Parker, M. (1997). The ups and downs of percent (and some interesting connections). *School Science and Mathematics, 97*(8), 406-412.

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación Matemática, 18*(1), 37-72.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE-Horsori.

Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Ramírez, M., y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática, 21*(1), 63-90.

Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española (23.ª ed.)*. Consultado en http://www.rae.es

Rigo, M. (2011). La Mayéutica y su aplicación a un cuestionario dirigido a docentes. En M. Rodríguez, G. Fernández, L. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 523–532). Ciudad Real, España: SEIEM.

Rigo, M., y Gómez, B. (2012)."The Maieutical doggy": A workshop for teachers. En Tso, T. Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 11-18). Taipei, Taiwan: PME.

Rigo, M., Páez, D., y Gómez, B. (2010). Prácticas metacognitivas que el profesor de nivel básico promueve en sus clases ordinarias de matemáticas. Un marco interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 405-416.

Rivas, M. A., Godino, J. D., y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Singer, J. A., y Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: are children part-part or part-whole reasoners?. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 231-246.

Singer-Freeman, K. E., y Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development, 16,* 811– 829.

Smith, J. P. (2002). The Development of students' Knowledge of ratios. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *2002 Yearbook of the NCTM* (pp. 3–17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., y Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education,1*(2), 127-155.

Spinillo, A. G., y Bryant, P. E. (1991). Children's proportional judgments: The importance of "half". *Child Development, 62,* 427-440.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards...a theory). *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75–94. doi:10.1007/BF00354884.

Thompson., P. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Tourniaire, F., y Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Valverde, G., y Castro, E. (2012). Prospective Elementary School Teachers Proportional Reasoning. *PNA, 7*(1), 1-17.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Nueva York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum y National Council of Teachers of Mathematics.

ANEXOS

Anexo A. Cuestionarios

A.1. La tarea “el descuento”.

Observa las tres ofertas y contesta a la pregunta: ¿Qué descuento es el mejor? Razona tu respuesta…

A.2. Preguntas sobre afecto.

Responde ahora a las siguientes cuestiones.

1. ¿Has entendido la pregunta? SI NO

2. ¿Te parece ambigua la pregunta? SI NO (Explica por qué)

3. ¿Te resulta familiar? SI NO

4. ¿Crees que te faltan conocimientos matemáticos para resolverla? ¿De qué nivel?

a. Primaria
b. Secundaria
c. Bachillerato
d. No me faltan conocimientos

5. ¿Cuál es tu grado de seguridad en la respuesta?

25% 50% 75% 100%

6. En cuanto a la dificultad, ¿qué te ha parecido la pregunta?

Antes de resolverla:	Fácil	Difícil
Después de resolverla:	Fácil	Difícil

7. ¿Cómo te has sentido durante el proceso de resolución?

Muy mal	Mal	Regular	Bien	Muy bien

Explícalo con tus propias palabras

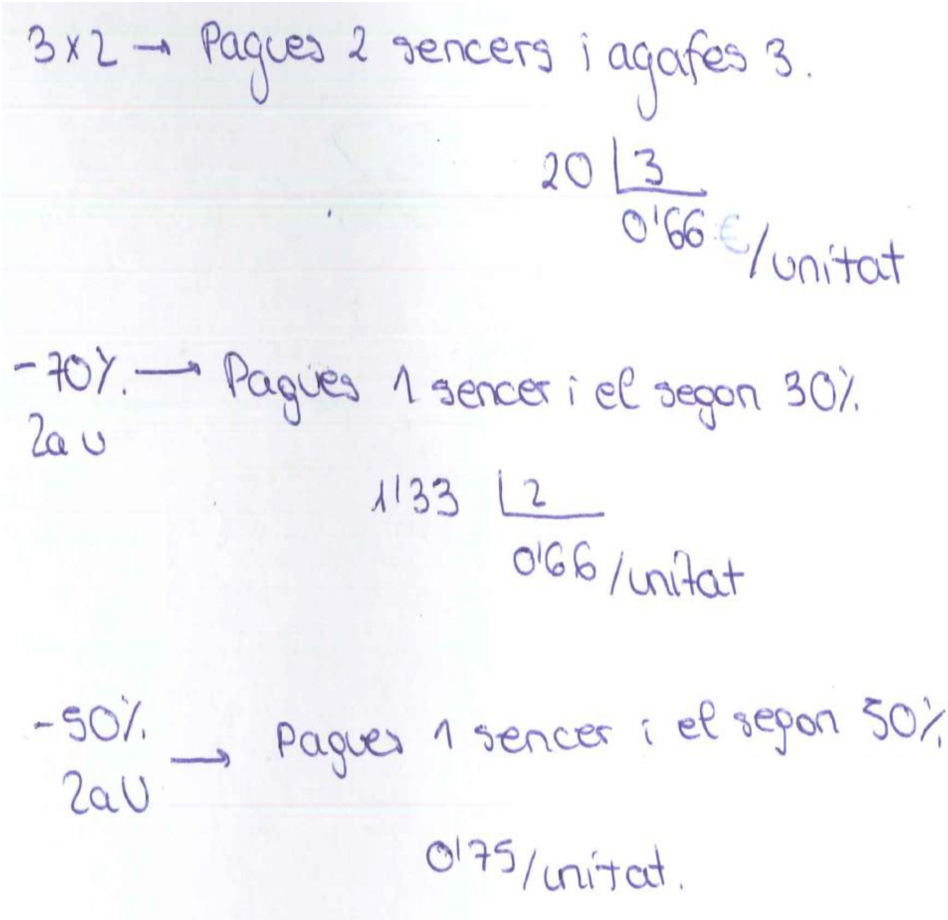
8. Una vez que la has resuelto ¿Cómo te sientes?

Muy mal	Mal	Regular	Bien	Muy bien

Explícalo con tus propias palabras.

Anexo B. Ejemplos utilizados en las transcripciones del análisis empírico

B.1. Ejemplo R.1.1.1.1. Cociente (alumno A21M)



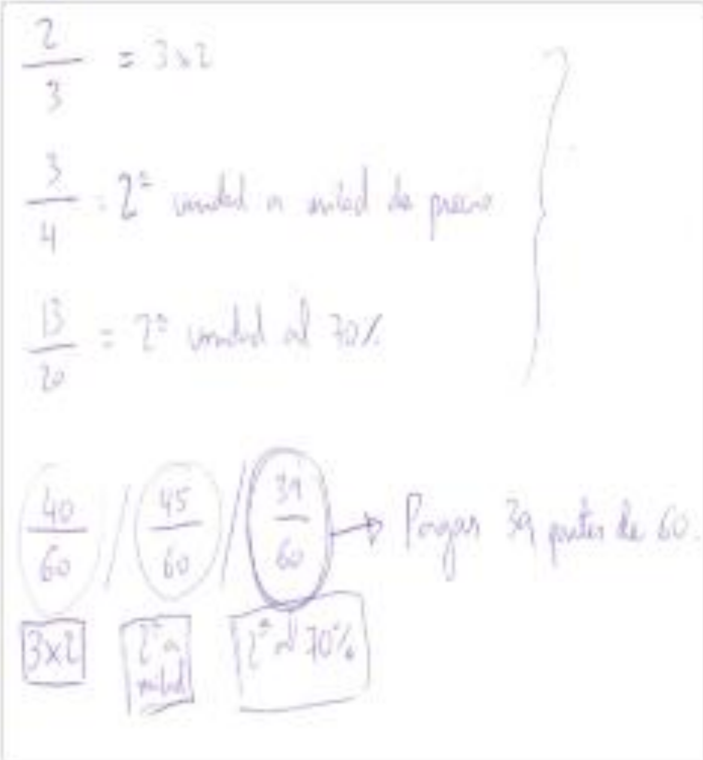
B.2. Ejemplo R.1.1.1.2. Producto cruzado (alumno A8O)

3x2 ⇒ $\left.\begin{array}{l} 3P — 100 \\ 2P — x \end{array}\right\rbrace \boxed{66'6\%}$

2ª ud al 70% ⇒ $\left.\begin{array}{l} 2P — 100 \\ 1'3P — x \end{array}\right\rbrace \boxed{65\%}$ ⇒ mejor oferta/descuento

2ª ud al 50% ⇒ $\left.\begin{array}{l} 2P — 100 \\ 1'5P — x \end{array}\right\rbrace \boxed{75\%}$

B.3. Ejemplo R.1.1.1.3. Estrategia de la fracción (alumno A1A)


$\frac{2}{3}$ = 3x2

$\frac{3}{4}$ = 2ª unidad a mitad de precio

$\frac{13}{20}$ = 2ª unidad al 70%

$\frac{40}{60}$ / $\frac{45}{60}$ / $\frac{39}{60}$ → Pongo 39 partes de 60.

$\boxed{3x2}$ $\boxed{2^a \text{ a mitad}}$ $\boxed{2^a \text{ al } 70\%}$

B.4. Ejemplo R.1.1.2.1. Cociente (alumno 21P)

te regalan de productos

0'7 → 2 → por cada 1 te descuentan 0'35

1 → 3 → por cada 1 te descuentan 1/3

0'5 → 2 → por cada 1 te descuentan 0'25

Observamos que el mayor descuento tiene lugar en la oferta de -70% en la 2ª unidad, puesto que es en la que mayor importe te regalan por cada producto.

B.5. Ejemplo R.1.1.2.2. Producto cruzado (alumno A16P)

A) 3x2 → Sin oferta, 3 botellas cuestan 16'74 €

Si compras 3 → te ahorras 5'58 €

16'74 € — 100 %
5'58 — X

$x = \frac{558}{16'74} = 33'3\%$

B) 1 unidad : 100 €

Sin oferta, las 2 unidades = 200 €

Con oferta, te ahorras 70 €

200 — 100 %
70 — X

$x = \frac{7000}{200} = 35\%$

C) Sin oferta, las 2 unidades = 19'48 €

Con oferta, te ahorras 4'87 €

19'48 — 100 %
4'87 — X

$x = \frac{487}{19'48} = 25\%$

La mejor oferta es el "-70%" porque el ahorro es mayor

B.6. Ejemplo R.2.1.1. Cociente – Tasa unitaria (alumno A28P)

Según el ejemplo que he hecho bajo, poniendo el mismo precio a los productos y aplicándoles estas ofertas, he sacado el precio que nos saldría cada unidad y la mejor oferta sería la del -70% en la segunda unidad.

En el caso en el que todos los productos cuesten lo mismo:

Precio x unidad

1. 20€ x 3 productos → 6'66 €
2. 13€ x 2 productos → 6'5 €
3. 15 € x 2 productos → 7'5 €

B.7. Ejemplo R.2.1.2. Múltiplo común – Building up

→ botella de vino.

Si partimos de que un ~~imp~~ producto x tiene un valor de 10€, vamos a calcular cual de las tres ofertas es la mejor.

1. En el caso del 3x2, tendríamos tres botellas de vino por 20€. (Lo que quiere decir que habría una ahorro de 10€).

2. En el caso de la 2ª unidad a mitad de precio, tendríamos dos botellas de vino por 15 €, por lo que haríamos un ahorro de 5 €.

3. En el tercero de los caseo, el descuento del 70% en la segunda unidad, podríamos comprar dos botellas de vino por 13€, y, ~~por~~ tanto, el ahorro serían 7€.

Teniendo en cuenta el ahorro en cada situación, parece que la opción más rentable sea la de 3x2, però no es comparable puesto que no hay la misma cantidad de objetos comprados en ~~cada~~ todas las ofertas. Si cogemos la hipótesis de que compramos 6 unidades:

→ 3x2 ➡ 20·2 = 40€ /6 botellas de vino

→ -70% segunda unidad ➡ 13·3 = 39 € / 6 botellas de vino.

-70% en la 2ª unidad es la mejor oferta.

áctica de la aritmética
po

B.8. Ejemplo D.1.1 Dificultades en las relaciones de "razón" (alumno A1M1)

Observa las tres ofertas y contesta a la pregunta: ¿Qué descuento es el mejor? Razona tu respuesta -70% en la 2ª unidad. Porque en la primera oferta solo es un 33'45% de descuento y en la tercera un 50%

5'58 × 3 = 16'77

3'72 × 3 = 11'16

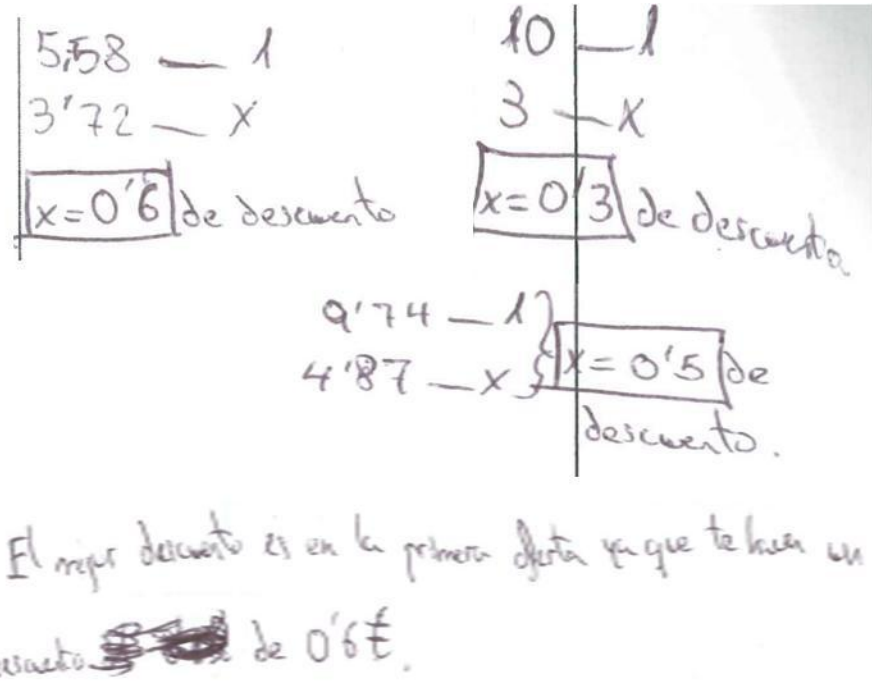
$$\left.\begin{array}{l} 16'77 \text{ ——— } 100\% \\ 11'16 \text{ ——— } 66'54\% \end{array}\right\} 33'45\% \text{ de descuento}$$

$$\frac{100 \cdot 11'16}{16'77} = 66'54$$

100 - 66'54 -

→ 70%   → 50%

B.9. Ejemplo D.1.1. Dificultades en las relaciones de "razón" (alumno A16M2)



5'58 — 1
3'72 — x
$\boxed{x = 0'6}$ de descuento

10 — 1
3 — x
$\boxed{x = 0'3}$ de descuenta

9'74 — 1
4'87 — x
$\boxed{x = 0'5}$ de descuento.

El mejor descuento es en la primera oferta ya que te hacen un descuento de 0'6 €.

B.10. Ejemplo D.1.2. Dificultades en las relaciones de "tasa" (alumno A8L)

En el hipotético caso de que aplicaramos la oferta del 70% al vino seria:

$5,58 \cdot \frac{7\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 3,906$ €. Por tanto la unidad sale a 3,906 € mientras que con el 3x2 sale a 3,72, así como con la última oferta "a mitad de precio" saldria a:

$$\begin{array}{r|l} 5,58 & 2 \\ \hline 15 & 2,79 \\ 18 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 5,58 \\ +\,2,79 \\ \hline 8,37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8,37 & 2 \\ \hline 03 & \boxed{4,18 \text{ €}} \\ 17 & \end{array}$$

Por lo tanto la mejor oferta seria la de $\boxed{\text{"3 x 2"}}$

B.11. Ejemplo D.2.1. Unifican el número de ítems y los precios (alumno A20P)

Operaciones: (aplicando como precio original común el caso A → 5'58€)

(A) Unidad al comprar 3 → 3'72 €

(B) " " " " → $\frac{5'58 \times 30}{100}$ = 1'67€

1'67 + 5'58 x 2 = 12'83 €

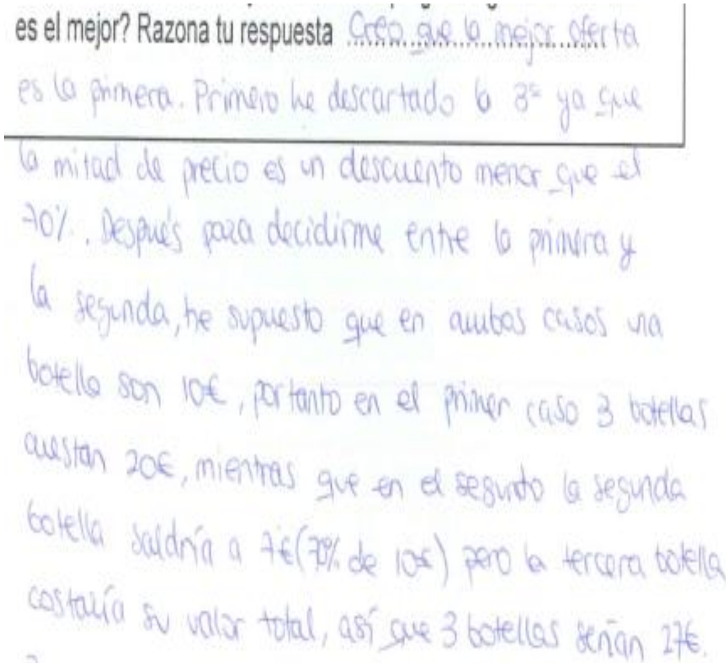
12'83€ : 3 = 4'27€

(C) " " " " → 5'58 : 2 = 2'79€

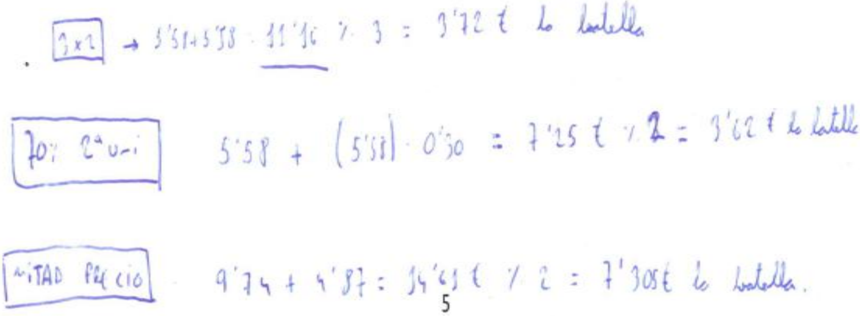
2'79 + 5'58 x 2 = 13'95€

13'95 : 3 = 4'65€

B.12. Ejemplo D.2.1. Unifican el número de ítems y los precios (alumno A17M2)


es el mejor? Razona tu respuesta Creo que la mejor oferta es la primera. Primero he descartado la 3ª ya que la mitad de precio es un descuento menor que el 70%. Después para decidirme entre la primera y la segunda, he supuesto que en ambos casos una botella son 10€, por tanto en el primer caso 3 botellas cuestan 20€, mientras que en el segundo la segunda botella saldría a 7€ (70% de 10€) pero la tercera botella costaría su valor total, así que 3 botellas serían 27€.

B.13. Ejemplo D.2.2. Unifican el número de ítems pero no los precios (alumno A43A)


3x2 → 5'58+5'58 = 11'16 / 3 = 3'72 € la botella

70% 2ª uni 5'58 + (5'58) · 0'30 = 7'25 € / 2 = 3'62 € la botella

MITAD PRECIO 9'74 + 4'87 = 14'61 € / 2 = 7'305€ la botella.

5

B.14. Ejemplo D.2.2. Unifican el número de ítems pero no los precios (alumno A7P)

3x2 → Comprando 3 ~~[illegible]~~ el total es ~~[illegible]~~ 11'16€

- 70% → ~~[illegible]~~ 1 botella 5'58€, la segunda alrededor de 1'90€. la tercera sería sumar otra vez 5'58€ el total sería 13'06€

2ª unidad → 9'74€ la 1ª botella. La segunda 4'87€, la tercera otra vez 9'74€. TOTAL = 24'35€.

Sale más barato ~~[illegible]~~ la oferta de 3x2.

B.15. Ejemplo D.2.3. No unifican ítems y toman el mismo precio en las ofertas (alumno A17L)

El mejor descuento es el de "3×2".

Si ponemos el precio de 20£ todos los productos, y aplicamos el descuento correspondiente, podemos observar que cada botella de vino valdra 20 y si me llevo 3, pago 40€. Pero, si aplicamos la oferta del 70% en la segunda unidad, pagaremos en total 26€ y solo me llevo 2. Y si aplicamos el 50% a la segunda unidad en la tercera oferta que nos ofrecen pagamos 30€ y solo me llevo 2 también.

B.16. Ejemplo N.1.1. Comparan el ahorro o coste total en cada oferta (alumno A15I2)

1a oferta

$5'58 \times 3 = 16'76$ $\quad 16'76 - 11'16 = 5'6$ €

$3'72 \times 3 = 11'16$ $\quad$ ahorro.

2a oferta

$9'74 \times 2 = 19'48$ $\quad 19'48 - 14'61 = 4'87$ €

$9'74 + 4'87 = 14'61$ $\quad$ ahorro.

3a oferta

caso en la 3a oferta no hay productos con precios utilizamos el producto de la segunda oferta.

$9'74 \times 2 = 19'48$

con la oferta del -70% la segunda unidad cuesta 2'84 €, y los dos productos $9'74 + 2'84 = 12'58$ €

$19'48 - 12'58 = \boxed{6'9 \text{ € ahorro}}$

Didáctica de la aritmética
Grupo

El mayor ahorro se consigue con la 3a oferta.

B.17. Ejemplo N.1.2. Comparan el ahorro o coste en un solo ítem de cada oferta (alumno A23A)

① ~~5'72~~ 5'58 − 3'72 = 1'86   En el primer article t'estalvies 1'86€

② Si la primera unitat et costa 15€ i la segona et descompten el 70% → $\frac{70}{100}$ de 15 → 10'5€ et costa la segena

15 − 10'5 = 05'5€ t'estalvies al segon article.

③ 9'74 − 4'87 = 4'87 → t'estalvies al segon article la meitat

Respesta → en la segona oferta t'estalvies més que en les altres ja que la segona unitat et resulta un 70% més barata que la primera.

B.18. Ejemplo N.2.1. Relacionan sólo una variable (alumno A36I1)

Observa las tres ofertas y contesta a la pregunta: ¿Qué descuento es el mejor? Razona tu respuesta La del "3x2" en el caso de que desees llevarte 3 (~~o múltiplos de este, ya q~~) productos o múltiplos de este. En tal caso pagas dos productos y te llevas 3, mientras que en los otros dos pagas 2 y la parte proporcional al descuento aplicado. Si sólo deseas 2 (~~o múltiplos de este~~) productos o múltiplos de este, la mejor oferta es la del descuento del 70%.

B.19. Ejemplo N.2.2. Respuestas afectivas a los datos numéricos o preguntas (alumno A8P)

Observa las tres ofertas y contesta a la pregunta: ¿Qué descuento es el mejor? Razona tu respuesta Considero mejor el primer descuento siempre que te guste el vino de Extremadura. En primer lugar porque por un precio estimado de 10 e te lleves 3 botellas, en cambio, la otra oferta del vino, en principio, relacionando calidad-precio, es un Rioja, y por tanto puede que sea una buena oferta, pero si lo que quieres es un vino barato, resulta que este vale el primero solo ya casi 10e y comprando dos gastas alrededor de 15 e.

B. 20. Ejemplo I.1. Respuestas imprecisas o no identificadas (alumno A13O)

Observa las tres ofertas y contesta a la pregunta: ¿Qué descuento es el mejor? Razona tu respuesta ..El mejor es el del -70%
en la segunda unidad ya que se hace una mayor
rebaja que en las otras dos ofertas.

Anexo C. Transcripción de la intervención didáctica

1- Profesor: Voy a explicar…esta es la respuesta de un compañero o compañera nuestra, esta persona… esta persona ha hecho… aquí está la primera parte del trabajo para cada oferta ha hecho un cálculo, ha hecho unas operaciones. En la primera oferta sabéis que el coste de la botella es 5.58, dos botellas… 11.16, 3 botellas lo que sea y luego dice como tengo que aplicar 3 por 2 pues si compro 3 botellas pago 11,16 me ahorro una, total dice me ahorro 5,58. ¿Alguna duda… en la resolución? ¿Está claro, no? Lo mismo va a hacer en los tres casos. En el segundo caso hace el mismo tipo de operación segunda unidad a mitad de precio, una botella vale 9,74 segunda botella le aplico el 50 por 100 me da 4,87 por tanto, pago, 14,61 pero me descuentan… me ahorro 4,87. ¿Esta clarito? ¿Seguro? ¿Seguro?

2- Alumno1: Desde un principio el problema está mal planteado y ahora te explico por qué…

3- (risas alumnos)

4- Profesor: ¿te puedes esperar a que acabe la explicación?

5- Alumno1: Bueno, va… aguanto, aguanto….

6- Profesor: en la tercera oferta tiene un problema, la tercera oferta no tiene un referente, no tiene botella ni precio, pone 70 por 100 en segunda unidad a secas, ¿Qué es lo que hace este estudiante? Usa el precio más caro 9,74, ha elegido un precio y dice "lo voy a aplicar al más caro" y ahora hace lo mismo que el de arriba… que aquí arriba... lo mismo, una botella vale 9,74, la segunda unidad a mitad de precio, calcula el 70 por 100… perdón no es a mitad de precio calcula 70 por 100 se equivoca y lo usa como si fuera… como si fuera… él dice una botella vale 9,74 la segunda botella vale 6,82. No es verdad, se ha equivocado, el descuento es el 70 por 100 no el coste, el coste sería el 30 por 100 pero se ha equivocado no pasa nada y esta suma le da el coste que tendría que pagar. En realidad tendría que pagar esto. Luego la diferencia es lo que se ahorra, él cuenta que lo que se ahorra es esto… en realidad lo que se ahorra es esto. Finalmente compara y dice ¿cuál es el mejor descuento? Hombre, este ¿no? ¿eh? Este es la más grande. ¿Sí o no? Aunque debería ser este, pero ese es su método. Pregunta (dirigiéndose a la alumna2), ahora luego te doy la palabra (al alumno1).

7- Alumna2: Que no es ese, el que más descuento da…

8- Profesor: Porque él se ha equivocado

9- Alumna2: Porque su respuesta es …

10- Profesor: ¿Has entendido el proceso?

11- Alumna2: Si

12- Profesor: Eso es lo que importa… ¿Habéis entendido el proceso?

13- Alumnos: Sí

14- Profesor: como profesores podéis pensar… ahora vosotros pensad como profesores… que lo único que tengo que hacer es corregirle esto, o decirle no… lo que has hecho está mal porque… lo que sea. Y es lo que quiero plantear ahora. ¿Creéis que el método está bien o no? Esa es la pregunta para empezar el debate. Y ahora ya tú dime lo que quieres decir.

15- Alumno1: ¿Pero respondo la pregunta?

16- Profesor: Primero lo que querías decir ¿no?

17- Alumno1: Ah! Vale, bueno, pues lo que quería decir es que desde el principio está mal planteado por vuestra parte… empezando porque desde un principio pone si es necesario utiliza la parte de atrás del folio. Tendría que poner, utiliza, no si te es necesario, porque si no, como me ha pasado a mí o a otra gente, lo podía haber hecho en otro folio. Tendría que poner "escribe tu respuesta en este mismo folio". Eso por una parte y por otra es que las imágenes están puestas una, la otra a la derecha y la otra abajo, cuando tendría que estar una encima de la otra o encuadrada cada una individualmente porque si no no se sabe si la del 70% se refiere a la de arriba o la de debajo o de donde sale la botella a la que se aplica el descuento. Por otra parte lo que provoca ya desde el principio que no sepamos cómo salir y no nos concentremos en los resultados sino en cómo entender el ejercicio y… es eso.

18- Profesor: ahora vamos al proceso, eso es una cosa que te ha influido a tí… vamos a discutir el proceso. ¿Qué os parece el proceso?

19- Alumna8: Yo en cuanto al proceso creo que el proceso no es el adecuado para sobre este tipo de problema porque él ha supuesto precios de botellas le ha aplicado porcentaje a esos precios entonces yo creo que no lo puede hacer sobre el precio porque simplemente está preguntando que si tú fueras a comprar qué descuento sería el mejor y si le aplicas al precio tú estás diciendo cuanto te costaría… que te costaría más barato en este supuesto, pero los precios tampoco son los mismos.

20- Profesor: ¿alguno de vosotros ha hecho algo así?... Me podéis contestar (dirigiéndose a la alumna37, que asiente) ¿O no te atreves?

21- Alumna37: No…sí… yo lo he hecho así suponiéndolo pero…

22- Profesor: ¿No estás segura?

23- Alumna37: Que luego cuando lo he entregado me he dado cuenta de que no lo he hecho bien.

24- Profesor: Y tú ¿qué opinas? (Dirigiéndose a la alumna38, que también había asentido)

25- Alumna38: Yo he aplicado el mismo precio a los tres para así ver así la diferencia

26- Profesor: Pero, no has hecho esto, ¿o sí?

27- Alumna38: Sí lo he hecho

28- Profesor: Pero has cambiado los precios…

29- Alumna38: Sí, creo que sí.

30- Profesor: ¿alguien más ha hecho esto? (Dirigiéndose al alumno6) Tú, y ¿qué te parece?

31- Alumno6: Yo lo he aplicado en los dos porque el tercero no me ha dado tiempo, entonces si me hubiera dado tiempo a hacer el tercero me habría salido esto…

32- Profesor: ¿Hubieras hecho esto?...Y tu método… ¿por qué crees que ella (refiriéndose a la alumna8) no está de acuerdo con tu método?

33- Alumna37: Es que también… bueno…

34- Alumno6: Es lo primero que he pensado y me pareció… me pareció lo correcto

35- Profesor: No te atreves a defenderte

36- Alumna37: el descuento también o sea cada imagen tenía un precio entonces el descuento también va a variar según el precio según de cada… de cada cosa, entonces eso pues está mal porque si tienes el precio más elevado a lo mejor, o sea en función del descuento te saldrá más económico o menos, o sea que no se puede…

37- Profesor: ¿Nadie más ha hecho este tipo de cosas?... Vamos a darle la palabra (refiriéndose al alumno1)

38- Alumno1: Yo…

39- Profesor: O sea ¿Qué al final sí que has sabido hacerlo?

40- Alumno1: No no, yo he hecho "si compro una botella este precio, si compro dos…"

41- Profesor: Espera, espera…¿has hecho este método?

42- Alumno1: Sí, pero, pero… bueno… He hecho, lo repito, "si compro una botella esto, si compro dos esto y si compro tres esto… de los tres descuentos, pero al final me he quedado mirando y digo "vale, he sacado esto pero no sé resolver y he puesto: no he sabido la respuesta"

43- Profesor: ¿Nadie más ha hecho este tipo de cosas?

44- Alumna37: Sí, a mí me ha pasado como a él… Yo lo he intentado pero luego no me salía nada

45- Profesor: bueno, ¿nadie más? Bueno es que me extraña porque en el otro grupo sí ha salido. Mirad aquí, la clave para este estudiante… lo que ha pensado es, ¿qué es el descuento? ¿Qué es el descuento?... Vamos a ver si nos ponemos de acuerdo…

46- Alumno14 : Reducir el precio

47- Profesor: La cantidad que te quitan… la cantidad que te quitan, ¿no? Y después ha hecho esos números… aquí me quitan esto, aquí me quitan esto y aquí me quitan esto, y ha comparado. ¿Mejor descuento? Donde más me quitan ¿vale? ¿Es correcto o no? ¿Tú has hecho esto? (Dirigiéndose a la alumna 31)

48- Alumna31: Yo he hecho… en el primero y segundo si, y lo de 70 por 100 no he sabido hacerlo

49- Profesor: Vale, pero tu idea era esta..

50- Alumna31: Sí

51- Profesor: Como el 70 por 100 no tiene precio, no sé qué hacer, pero tu idea es esa…

52- Alumna15: Pero es que en uno te llevas 3 botellas y en el otro…

53- Profesor: ¿Perdona?

54- Alumna15: Que en el primer caso te llevarías 3 botellas y en los otros 2 botellas, entonces realmente no podrías saber tampoco lo que te ahorras, porque en una te llevas más

55- Profesor: O sea que tú aquí dices “las botellas están molestando”, el número de botellas, y a ti (dirigiéndose a la alumna 37) te molestaba otra cosa

56- Alumna37: Que los precios son diferentes

57- Profesor: Que los precios son diferentes, es decir, o sea dos elementos están molestando: número de botellas diferente; precios diferentes. Si no fuera así sería muy fácil el problema

58- Alumna8: Yo lo que digo que como son precios diferentes se tendría que hacer otra…

59- Profesor: Ya te entiendo… tú dices que se tiene que hacer otra cosa

60- Alumna38: Yo es que lo he cambiado todo, o sea, he puesto el mismo precio para todo y he comprobado las tres cosas

61- Profesor: Vale, ¿alguien más quiere hablar de este método? Ni quiere… vamos a ver otro método… ¿nadie más quiere hablar de este método?…Estas personas son sensibles a la magnitud del descuento, lo que les importa es la cantidad que se ahorran, punto. Aquí me ahorro tanto… ¿Habéis ido de rebajas alguna vez? ¿Qué hacéis? ¿Qué miráis?

62- Alumnos: Lo que te ahorras

63- Profesor: Lo que te ahorras… (dirigiéndose a la alumna 38) ¿Tú qué miras?

64- Alumna38: Lo mismo

65- Profesor: Lo que te ahorras… ¿Alguno mira otra cosa?

66- Alumno3: lo que te ahorras en función del producto

67- Profesor: En función del producto, es decir, el ahorro relativo a lo que compro… el ahorro relativo a lo que compro. Son dos maneras de mirar. Vamos a ver otra respuesta. ¿Pasamos a otro método?... ¿Qué nota le ponemos a este?

68- Alumno11: Hombre, se ha equivocado, entonces suspenso

69- Profesor: Bueno, a ver, yo no lo suspendo por un error de cálculo… ¿Es un error de cálculo?

70- Alumno11: Ha escogido precios diferentes, entonces no es orientativo lo que está ahorrando… Es como si compras un coche y tres manzanas y dices: Yo he comprado dos coches y me he ahorrado 100000€ y compro 3 manzanas y me ahorro 1€, pues el de los coches es mejor…

71- Profesor: Vale. Pero, no sé si les has convencido

72- Alumno11: A precios diferentes descuentos diferentes, el ahorro va a a ser diferente siempre…

73- Profesor: ¿Por qué a ti no te convence? (Dirigiéndose a la alumna30)

74- Alumna13: Porque tendríamos que mirar los porcentajes, yo me he fijado en los porcentajes

75- Alumno11: ¡Hombre! Claro yo me refiero aquí que si coges precios diferentes el ahorro no va a ser orientativo en cuanto al porcentaje que te descuentan…

76- Profesor: Es que lo que pasa es que hay mucha gente callada que no se atreve a hablar. Estoy seguro que más gente ha hecho eso y allí (señalando los cuestionarios que acaba de rellenar el grupo) están las pruebas… ¿Alguno de vosotros (dirigiéndose a un lado de la clase) ha hecho esto?

77- (Silencio)

78- Profesor: Sois un grupo muy listo…
79- Alumna37: Yo he reconocido que he hecho esto pero cuando he entregado me he dado cuenta de que está mal.

80- Profesor: Bueno, vamos a ver otra resolución… Sois diferentes al grupo de al lado… En el grupo de al lado más de la mitad de la gente ha hecho esto. ¿Tú qué opinas? (Dirigiéndose a una alumna que está callada) Que tú lo has hecho, ¿no?... pero estabas callada… en la retaguardia... (la alumna asiente). Alguien más debe estar callado…

81- Profesora del grupo: (dirigiéndose al profesor) hace un par de semanas hicimos en clase un ejercicio de descuentos que no era como este, pero sí tuvieron que inventarse un precio para resolverlo… eso puede ser significativo de que…

82- Profesor: ¡Claro! Ya está contaminado el… el…Bueno vamos a ver otro, la pregunta es, que no tiene en cuenta, como decías tú (señalando al alumno11), ahorra eso pero pago eso y ahorra aquello pero pago eso… Lo que pago es diferente en cada caso, ahora sé lo que ahorro pero no he tenido en cuenta lo que pago, eso es para que penséis… si debemos o no tener en cuenta lo que se paga, ¿o no?

83- Alumno9: Y lo que te llevas

84- Profesor: Esa es otra… hay que tener en cuenta, lo que pagas y lo que te llevas dos variables, eso hace que el problema sea más difícil, ¿no? ¿Verdad que si? Bueno vamos a ver otro tipo de respuesta. Aquí hay una persona que ha dicho, no se complica la vida, cada producto vale lo mismo… Voy a suponer que cada producto vale lo mismo. Tú por ejemplo, ¿no? Tú también, tú también. ¿Esto tiene algo que ver con tu clase? (Dirigiéndose a la profesora del grupo)

85- Profesora del grupo: No lo sé

86- Profesor: Entonces ¿qué ocurre? Se olvida de los precios que hemos dado, porque no le importa o porque lo que quiere es mirar… ¿Qué quiere mirar?... Entonces dice, por ejemplo que vale 10 euros, entonces comprando tres, pago 20, me ahorro 10, en la segunda oferta comprando 3 pago 25 me ahorro 5 y en la tercera oferta comprado 3 pago 27 y me ahorro tres y dice “ya está… 3, 5, 10… mejor oferta… 3x2”

87- Alumna4: Pero…

88- Profesor: Un momento, un momento… Su preocupación para comparar 3 botellas, comprar el mismo número de botellas. Vale, ahora te doy la palabra

89- Alumna4: Es que yo lo que he hecho es calcular cuánto pago por cada producto… en cada botella

90- Profesor: O sea, ¿esto de aquí, 25, 20 y 27?

91- Alumna4: Claro, pero luego he dividido el de 3 productos entre 3, el de los 2 productos entre 2 y mi respuesta era que salía más económico el de 70% de descuento, pero como en el primero te llevabas tres productos…

92- Profesor: en definitiva tú no has hecho eso. Has empezado pero no has seguido, has ido por otro sitio… vale

93- Alumno11: Un momento, ¿cuál es el descuento del 70?

94- Alumnos: El último…

95- Alumno11: Pero está mal….

96- Profesor: El 27, cada botella vale…

97- Alumno11: Será 23

98- Profesor: Claro, a este le vuelve a pasar lo que le ha pasado al anterior, que han confundido el 70 por 100 con el descuento. 70% es… perdón, 70% es el descuento, de 10 el descuento son 7 no 3, también se ha equivocado en lo mismo. Cuando 2 personas… 3 4 5 6 se equivocan en lo mismo… ya no es un descuido, ya es un error sistemático, hay mucha gente que comete ese tipo de errores. Con el 50 por 100 no se nota pero con el 70 por 100 si se nota, gente que confunde la frase. Bueno no importa… se ha equivocado, está mal, le hubiera salido como respuesta… ¿Qué hubiera salido si lo hubiera hecho bien?

99- Alumnos: 23

100- Profesor: ahorro 7, ahorro 5, ahorro 10, hubiera salido 3 por 2, ¿no? En cambio antes hubiera salido 70%... No hay nadie aquí que haya hecho esto ¿verdad? Seguro que no… Bueno, lo que quería señalar es que aquí lo que le ha preocupado es comprar el mismo número de botellas. Ese es el referente, ¿eh?...Vamos a ver este otro método. Aquí está la primera parte…yo os lo explico… Todos estos cálculos en definitiva a lo que le llevan es… 3 botellas valen esto, el ahorro es este, lo pasa a porcentaje, dice si de 16 me ahorro 5 de 100 me ahorraré x y dice 33 por 100…¿Repito?...Compara lo que se ahorra con el coste…Compara lo que se ahorra con el coste… El de antes sólo calculaba el ahorro pero este compara lo que se ahorra con el coste… Está poniendo el ahorro en relación con el coste y lo pone en porcentaje. Aquí hace lo mismo, segunda… 25 por 100, ¿qué ha hecho? El coste de 2 botellas, aquí es el costo de 3 botellas y aquí es el coste de 2 botellas… El coste de 2 botellas es esto y ahora hace… pone en relación el ahorro con el coste de dos botellas, lo pasa a porcentaje…el 25%... ¿Entendéis lo que ha hecho?

101- Los alumnos asienten

102- Profesor: Finalmente en el tercer caso se inventa un precio, dice… que valga 10, y dice… el coste es 20, y hace lo mismo; el ahorro son 7… acordaos, el 70% sobre 10, el ahorro son 7… compara el ahorro 7 con el costo total 20 y lo pasa a porcentajes. Aquí es muy sofisticado, no solo hace un cálculo poniendo el ahorro en relación al costo, sino que además usa porcentajes. ¿Qué os parece? ¿Te gusta? (Dirigiéndose a una alumna del fondo) ¿Es el tuyo? Más o menos ¿no?... (Ahora dirigiéndose al alumno7) ¿El tuyo también?

103- Alumno7: Yo he empezado haciendo lo mismo lo que pasa es que a ultima… en el tercero ya no he calculado… es que me he dado cuenta que lo que estaba haciendo no tenía ni pies ni cabeza y he dicho…

104- Profesor: O sea, que has intentado hacer eso pero no lo has sacado

105- Alumno7: si he… los dos primeros si los he hecho pero en el último ya…

106- Profesor: Pero en el tercero como no hay precio…

107- Alumno7: Porque yo he visto que lo que ha comentado mi compañero (refiriéndose al alumno11)… que está por un lado la variable del porcentaje y por otra la variable de lo que te ahorras y es que en el problema no lo específica, dice a ver qué porcentaje es mejor… que descuento perdón, pero ¿mejor desde que punto de vista? Desde la variable del precio o desde la variable del porcentaje… porque si ahora, por ejemplo toman manzana 2 por 1 y una manzana cuesta 60 céntimos… vale, es la mitad, el 50%, o sea, 30 céntimos, pero si ahora un coche que vale 10mil euros te descuentan un 10 por 100 entonces el porcentaje es menor pero te ahorras 1000 euros, entonces… (Duda un rato) Yo creo que deberían haber especificado…

108- Profesor: ¿Qué está mal enunciado el problema?

109- Alumno7: Desde mi punto de vista si

110- Profesor: Tendría que ser más claro ¿no? ¿Cómo lo hubieras puesto tú? ¿Qué hubieras preguntado?

111- Alumno7: Hubiera preguntado… ¿Desde el punto de vista del porcentaje con que descuento ahorras más dinero? O ¿desde el punto de la variable del dinero con que descuento ahorras más dinero?

112- Profesor: Que es el primer caso que hemos visto…

113- El alumno7 duda

114- Profesor: ¿Cómo lo preguntarías como profesor a tus alumnos? ¿Cómo les pondrías la tarea?

115- Alumno7: Con estos descuentos, ¿en qué caso ahorro más dinero?

116- Profesor: ¿En lugar de qué descuento es mejor, donde te ahorras más dinero?

117- Alumno7: Sí

118- Profesor: ¿Tú has ido a Carrefour alguna vez?

119- Alumno7: Sí

120- Profesor: ¿Y cómo aparece el descuento? ¿Te pone allí “desde el punto de vista…” o qué te pone…3x2?

121- Alumno7: (Asiente)

122- Profesor: Vale

123- Alumna8: El problema que yo veo de preguntar cuánto dinero te ahorras con este descuento es lo que estábamos hablando antes, que no tiene en cuenta los distintos productos que tú quieres, porque si… si a ti te dicen, un 70% ¿Cuánto estás pagando?... Un 100% por el primer producto y un 30% por el segundo

124- Profesor: Ahora, ¿tú crees que ahora este (señalando la resolución que acaba de explicar) está teniendo en cuenta eso que tú dices?

125- Alumna8: Sí que lo tiene en cuenta pero según diferentes precios y cuando llega al tercer precio, como ya no te lo pone, que solo dice que la segunda unidad al 70%, ya tienes que poner tú un precio para sacar un porcentaje, entonces ya no es tan real como si directamente lo haces desde el porcentaje… O sea, vale, segunda unidad al 70%, pues sí…

126- Profesor: O sea, que no te convence

127- Alumna8: No del todo

128- Profesor: Vale

129- Alumna8: Más que los otros, pero del todo no

130- Profesor: Vale… ¿Alguno de vosotros…? (Dirigiéndose al alumno9, que tiene la mano alzada) Dí…

131- Alumno9: Yo he hecho este y creo que es el bueno, que es el que está bien teniendo en cuenta que… a ver cómo lo digo…que no importa lo que pagues al final sino lo que te ahorres con respecto a lo que pagues

132- Profesor: Vale, muy bien… Eso es lo que él (señalando al alumno9) piensa… ¿Y tú? (Señalando a la alumna8)

133- Alumna8: Sí, yo estoy de acuerdo con eso pero que…

134- Profesor: Pero no estás de acuerdo con algo más…

135- Alumna8: No estoy de acuerdo con… con el hecho de tomar precios cuando no te pone precios, sino trabajar directamente con porcentajes sin usar el precio que te inventas…

136- Alumno9: (Replicando) Pero yo no he cogido ningún precio… Simplemente he hecho el 100% de x y el 70% de x, sin tocar ningún precio… que no hace falta tocar ningún precio.

137- Profesor: (Dirigiéndose al alumno16, que quería intervenir) ¿Qué querías decir?

138- Alumno16: Que yo he resuelto con este método pero pienso lo mismo que él (señalando al alumno9), que para qué quieres saber el precio si lo que realmente te importa es…

139- Alumno9: El porcentaje

140- Alumno16: Claro, pagas x por este, te ahorras el 70% del otro y ya está, tampoco tienes que mirar si compro tres botellas del otro, porque la oferta son dos…

141- Alumna: no estoy de acuerdo con tomar precios cuando no te pone precios.

142- Profesor: ¿Para ti está mal el método?

143- Alumno16: No… Ese es el que he utilizado

144- Profesor: Ese está bien… ¿Ese es el tuyo?

145- Alumno16: Si

146- Profesor: Pero ¿Has puesto un precio o no?

147- Alumno16: No, ¿para qué?

148- Profesor: ¿No te hace falta?

149- Alumno16: No

150- Alumna8: Yo he hecho los porcentajes pero sin usar los precios

151- Profesor: Los tres porcentajes… pero eso es otro método

152- Alumna8: Sí

153- Profesor: ¿Alguien quiere hablar?... Vamos a ponerle nota.. ¿Qué nota le ponemos? Tú (dirigiéndose a la alumna37) ¿qué nota le pondrías?

154- Alumna37: ¿Yo?

155- Profesor: Sí

156- Alumna37: Pues un aprobado

157- Profesor: ¿Y al tuyo?

158- Alumna37: Suspenso

159- Profesor: ¿Ahora ya has cambiado de opinión?

160- Alumna37: Sí

161- Profesor: ¿Y tú? (Dirigiéndose a la alumna38)

162- Alumna38: ¿Yo? Aprobado también

163- Profesor: Pero ¿y al anterior?

164- Alumna38: El anterior… ¿el del mismo precio?

165- Profesor: El que hace "lo que me ahorro…"

166- Alumna38: Suspendido

167- Profesor: Pero, ¿has cambiado de opinión?

168- Alumna38: Es que yo no lo he hecho de ninguna manera de todas…

169- Profesor: Pues a ver si sale el tuyo… (Dirigiéndose a toda la clase) ¿Alguna intervención más? Que por aquí (el lado de la clase que menos interviene) estáis en silencio… ¿no tenéis nada que decir? ¿Tú estás de acuerdo? (Dirigiéndose a la alumna13)

170- Alumna13: (Asiente)

171- Profesor: ¿Y tú? (A la alumna31)

172- Alumna31: No lo sé

173- Alumno9: Yo he dicho que he hecho este método pero en verdad tampoco he cogido precios, he cogido porcentajes solo, sin precios

174- Profesor: ¿Arriba (refiriéndose al caso del 3x2) también?

175- Alumno9: En el primero (refiriéndose al caso del 3x2) el único

176- Profesor: El único en el primero que has cogido precios… O sea que tú lo que estás pensando es que (señalando la resolución) es igual que el tuyo aunque no sea exactamente igual…

177- Alumno9: Claro

178- Profesor: ¿Nadie más quiere decir nada?

179- Alumno11: Yo he sacado porcentajes sin tener que hacer a operación matemática… en el primero pagas el 300 y luego te descuentan el 100…

180- Profesor: no expliques el método porque va a salir

181- Alumno11: Bueno, pues eso… He sacado porcentajes como está aquí pero luego tienes que tener en cuenta cuántos productos quieres comprar para…

182- Profesor: Pero mi pregunta es ¿este método está bien o no?... ¿Qué problema tiene este método?

183- Alumno11: Que son precios diferentes pero al fin y al cabo vas a llegar al porcentaje del descuento igualmente…

184- Profesor: ¿Qué nota le pones?

185- (El alumno11 se queda pensativo y no contesta)

186- Profesor: ¿Está bien o mal?

187- Alumno11: Hombre… está incompleto

188- Profesor: Ah! Incompleto… luego no le pones un 10

189- Alumno11: No

190- Profesor: Porque no es el tuyo…

191- Alumno11: Claro

192- (Risas de toda la clase)

193- Alumno11: Bueno, si el profesor es el que dice si está bien o mal…

194- Profesor: Tú eres el profesor…

195- Alumno11: Bueno, tú

196- Profesor: No, no… Aquí somos todos lo mismo… Aquí este alumno, como no es el mío, como no es mi método, no le pongo una buena nota, ¿no es eso?

197- Alumno11: Si yo quiero que lleguen a este punto… (La alumna12 habla a la vez y el profesor le da la palabra)

198- Alumna12: Que por intentarlo, aunque no sea tu método…

199- Alumno11: No, yo no… claro, pero si quiero que lleguen a conseguir una cosa que no consiguen por ellos mismos pensando… pues no les voy a poner la máxima nota.

200- Alumna37: Pero es que para llegar al resultado… existen varios métodos

201- Profesor: ¿Por qué no votamos a mano alzada? Porque estáis muy callados… vamos a votar… Los que crean que hay que ponerle la máxima nota

202- (Tres alumnos levantan la mano)

203- Profesor: Dos nada más… tres nada más… O sea, que para los demás no está del todo bien… Bueno, vale

204- Alumno11: Es que para mí hay ahí valores pero no está el resultado… no contesta a la pregunta

205- Profesor: Sí, hombre… Él dice "descuento tercera oferta, 35%"

206- Alumno11: ¿Y qué?

207- Profesor: Ha contestado… ¿Por qué crees que no ha contestado a la pregunta?

208- Alumno11: Porque te dice qué descuento… ¿qué te dice, qué descuento el mejor? No te ha puesto cuál es mejor, él te dice cuál te descuenta más según la oferta

209- Alumna13: Si lo miras así, mira: de cada 100 te descontarían 35; en el otro de cada 100 te ahorrarías 25 y en el otro de cada 100, 33

210- Alumno11: Vale, pero tú no puedes comprar 100, tú compras o 2 o 3, según las que quieras comprar

211- Profesor: Ah! Él (refiriéndose al alumno11) está… Vale, va por ahí, va por ahí…

212- Alumno11: Yo he sacado eso y luego depende lo que compres…

213- Alumna13: Sí, sí… lo entiendo… como la pregunta tampoco especifica cantidades…

214- Alumno14: (Este alumno está al lado del alumno11 y se pasan la clase comentando, reflexionando y organizando sus ideas para llegar a una conclusión final que más adelante darán) El problema… el problema de ese método es que no especifica o no tiene en cuenta la cantidad

215- Profesor: De botellas, ¿no?... Que no tiene en cuenta la cantidad de botellas

216- Alumno14: Claro… es importante

217- Profesor: (A toda la clase) Ese es el problema de ese método… para ellos… A ti (dirigiéndose a la alumna13) te da igual

218- Alumna13: Sí, a mi me da igual

219- Profesor: ¿Nada más?

220- Alumno9: Yo sigo pensando que está bien… que sí tiene en cuenta el número de botellas porque en el 3x2 o te llevas 3, o 6, 9… y te vas a seguir ahorrando siempre lo mismo. No por llevarte 6 botellas te ahorras más que si te llevas 3, entonces el porcentaje siempre es el mismo, el que te ahorras

221- Profesor: No va a variar porque te cambie el número de botellas…

222- Alumno9: No

223- Profesor: Y él (refiriéndose al alumno14) dice que sí

224- Alumna8: Yo creo que él (refiriéndose al alumno14) se refiere a que en el descuento… que, por ejemplo… en el primero tú te tienes que llevar… o sea, si quieres coger el pack tienes que llevarte tres…

225- Alumno14: Claro…

226- Alumna8: En el segundo, como es la segunda unidad al 50%, te tienes que llevar 2, no te puedes llevar 3 porque si no, no te entra en la oferta. Y el del 70% te tienes que llevar 2

227- Profesor: (A toda la clase) ¿Habéis entendido lo que ha dicho?

228- (Algunas alumnas asienten)

229- Alumno9: Yo no

230- Profesor: (A la alumna8) ¿Quieres repetirlo porque él no lo ha entendido?

231- Alumna8: Que no es cuestión de que te lleves un pack, dos packs o tres packs… Es cuestión de que en la primera oferta, del 3x2, te tienes que llevar, o sea, tres botellas seguro. En el segundo ya no te tienes que llevar tres, ya te tienes que llevar dos, entonces si tú haces el descuento por unidad no es lo mismo en tres botellas que en dos porque la segunda unidad te sale a mitad de precio

232- Profesor: A ver si resumo yo tu explicación (dirigiéndose a la alumna8)… En el 3x2 necesariamente te has de llevar tres para tener el descuento. ¿Es eso?

233- Alumna8: Sí

234- Alumna15: Hombre, te puedes llevar 2… te costaría lo mismo

235- Profesor: Pero no te aplican el descuento…

236- Alumna15: Te dejarías la otra… Sería de regalo, o sea, si no quieres el regalo de la otra botella… pues no te la lleves, pero… Carrefour te la regala (Risas de los compañeros) Si no la quieres, llévate 2 solo pero te dice que te regala otra… la tercera

237- Profesor: Para ti es irrelevante, pues… lo que dice ella (refiriéndose a la alumna8) ¿Es eso? Lo que dice ella no tiene…

238- Alumna15: Yo pienso que la cantidad de botellas es esencial, o sea, que no puede comparar… llevarse tres botellas con dos

239- Profesor: O sea que tú estás con ella (refiriéndose a la alumna8)…

240- Alumna8: Sí, porque para ver el mayor descuento, que te dice, el 3x2, ¿cuánto descuentan? Es suponiendo que te llevas ese pack, no que te llevas una botella y media…

241- Alumno16: Respecto a la cantidad de botellas creo que nos estamos obcecando todos en coger tres en cada pack y no es necesario… En la primera oferta nos están diciendo que son tres y estamos generalizando que en la segunda oferta tengo que coger tres por huevos, y en la tercera igual…

242- Profesor: No dicen eso…

243- Alumno16: No, la solución… antes han dicho que llevándote tres botellas te hacen descuento, y que para sacar el descuento tengo que llevarme tres botellas del segundo y tres del tercero…

244- Profesor: Ese es el de antes… el método de antes… no os ha gustado

245- Alumno16: Y en alguna de las respuestas están “no pero si es la cantidad, de precio unidad”… y ¿por qué te tienes que llevar tres de las otras dos ofertas?... Es como decir que tú ahora, en los otros descuentos tienes pares de unidades, por así decirlo, me quiero llevar cuatro en vez de tres… en la primera oferta saldrías perdiendo y en las otras dos saldrías ganando, entonces… por así decirlo, contestar a la gente que quiere tres botellas de cada cosa

246- Alumno9: (Alza la mano y el profesor le da la palabra) Ahora yo pienso que hay varias respuestas posibles porque cuando yo he puesto que la tercera es la mejor, lo he justificado diciendo que es sin tener en cuenta el precio y la cantidad de botellas que te llevas… Si haces, a lo mejor, el primer método diciendo que te tienes que llevar… espérate, me he rallado (por sus gestos se deduce que se ha liado, no consigue poner en orden sus ideas)

247- (Risas en el aula)

248- Profesor: A ver, me gustaría que tomáramos una decisión para ponerle nota

249- Alumno11: Es que cada uno pone la suya… Cada uno, según lo que piensa le pondrá una nota

250- Profesor: Pero yo quiero saber lo que opina la mayoría. Ya sé lo que opináis unos pocos… Los demás están callados. ¿Tú quieres hablar? (Dirigiéndose a la alumna17, que aún no ha intervenido)

251- Alumna17: Que aunque a lo mejor ha fallado, a lo mejor al final ¿no?... en lo que es la respuesta…

252- Profesor: ¿Aquí ha fallado? (Señalando la resolución proyectada?

253- Alumna17: A ver, no… en anteriores casos sí… que a lo mejor no ha tenido en cuenta variables que nosotros estamos diciendo pero como el proceso lo ha ido haciendo bien, aunque sea por el proceso yo sí que le aprobaría

254- Profesor: Pero ¿este te gusta? ¿Te parece que está bien hecho?

255- Alumna17: ¿Cómo?

256- Profesor: ¿Este está bien hecho para ti? ¿Este estudiante ha contestado correctamente a la pregunta? ¿Ha resuelto correctamente el problema?

257- Alumna17: Yo creo que sí

258- Profesor: Eso es lo que quiero saber… Tú estás de acuerdo con eso… ¿Y tú (dirigiéndose al alumno1) qué dices?

259- Alumno1: Yo también

260- Profesor: Este te gusta, ¿no?

261- Alumno1: Es que… si me dices que va a salir otro después, igual me gusta más el de después

262- (Risas en el aula)

263- Profesor: (Dirigiéndose a la alumna18, que aún no ha intervenido) ¿Qué opinas?

264- Alumna18: De los tres, este es el mejor

265- Profesor: Este es el mejor de los tres… Los otros no estaban mal

266- Alumna18: Yo pensaba que no estaban mal, pero cuando ves este… y yo había hecho el segundo y ese es peor

267- Profesor: ¿Tú habías hecho el segundo, el de las tres botellas?

268- Alumna18: Sí pero a medias… el principio sí, pero luego ya no

269- Profesor: Vale… ¿Allí (señalando a una porción de la case que no ha intervenido) no tenéis nada que decir vosotras?

270- Alumna19: Hombre, yo pienso que mal no está…

271- Profesor: ¿Pero bien tampoco?

272- Alumna19: Está incompleto

273- Profesor: ¿Qué le falta?

274- Alumna19: Pues tener en cuenta todas las variables, como ya han dicho (señalando donde están sentados el alumno11 y el alumno14)

275- Profesor: ¿Va a cambiar el resultado si las tienes en cuenta? ¿O no?

276- Alumna19: No sé

277- Profesor: ¿Y cómo las tendrías en cuenta?

278- Alumna19: No sé… es que no he hecho el problema… me he perdido un poco…

279- Profesor: Vale, ¿y tú? (a la compañera de al lado, la alumna20)

280- Alumna20: Yo es que no he hecho esta parte, o sea, no lo he hecho así, entonces…

281- Profesor: Pero ¿qué te parece?

282- Alumna20: No sé… que bajo el punto de vista del alumno…

283- Profesor: Tú, tú.. tú lo ves y ¿qué? ¿qué te parece?

284- Alumna20: Yo no, no, no creo que esté bien

285- Profesor: No crees que esté bien… ¿Y tú? (a la compañera de al lado, la alumna21)

286- Alumna21: Tampoco creo que esté bien

287- Profesor: No crees que esté bien… ¿Y el tuyo está mejor?

288- Alumna21: No

289- Profesor: (Dirigiéndose a otra alumna de al lado, que igual que las anteriores, todavía no ha intervenido ninguna vez) ¿Y el tuyo está mejor?

290- Alumna22: Igual

291- Profesor: Igual ¿qué?

292- Alumna22: Igual que ella (señalando a la alumna21)

293- Profesor: ¿Y tú? (a otra alumna, la alumna23, que tampoco ha hablado todavía)

294- Alumna23: Yo creo que sí que está bien… Yo es que lo he hecho parecido pero no es así… Yo lo que hecho es sacar el…

295- Vale, vale… Luego a ver si sale el tuyo… A ver si sale el tuyo… Pero…

296- Alumna23: Pero yo creo que mal no está

297- Profesor: Mal no está… y si no está mal, hay que ponerle buena nota…

298- Alumna23: Es que es eso… no va a variar, siempre…

299- Profesor: Vale, de acuerdo… que no va a afectar. Por lo tanto hay que ponerle buena nota…

300- Alumna23: Yo creo que sí

301- Profesor: ¿Tú qué opinas? (Dirigiéndose a la alumna24, que está al lado)

302- Alumna24: Que está bien, pero yo creo que la cantidad de botellas para mí sí que influye

303- Profesor: Pero entonces no puede estar bien

304- Alumna24: Yo lo he hecho así, pero luego, con mis compañeros, que están diciendo lo de las botellas, pues…

305- Profesor: Y eso te hace pensar que lo tuyo no está bien, ¿eh?

306- (La alumna24 asiente)

307- Profesor: ¿Cambias de opinión?

308- Alumna24: Sí

309- Profesor: ¿Y tú? (Dirigiéndose a otra alumna que aún no ha intervenido, la alumna25)

310- Alumna25: Pues yo he seguido más o menos esta línea, pero en la segunda y tercera oferta no he cogido precios, entonces… estaría bien… no sé… por esa línea

311- Profesor: Vale

312- Profesor: Bueno… ¿pasamos a otro? A ver lo que ha hecho este tipo. Directamente calcula que porcentaje es 3,72 de 5,58, luego este es el porcentaje que paga por eso resta de 100 y saca el porcentaje de descuento. La botella, la unidad en el 3 por 2 al final le cuesta 3,72, cada botella, cada botella por eso lo que hace es, en cada botella el ahorro es de 33 por 100 por botella ya no está relacionándolo al precio total como antes sino ahora por botella, ¿abajo que ha hecho en el segundo caso? Divide 50 por 100 entre 2 y dice 25 de descuento por botella… ¿Te gusta eh? (Dirigiéndose a la alumna26, que aún no ha intervenido)

313- Alumna26: Sí

314- Profesor: ¿Es el tuyo?

315- Alumna26: No

316- Profesor: En el tercer caso ¿qué ha hecho? Divide 70 por ciento entre 2; 35 por ciento por botella. Aquí sí se ha preocupado por el número de botellas… ¿Sí verdad? ¿Eh? ¿Qué os parece?

317- Alumno7: Pero si en el de arriba en vez de 3 o 6 cojo 5 botellas…ya el descuento no surte igual

318- Profesor: Lo que no ha tenido en cuenta es lo que dice él… ¿Lo habéis oído?

319- Alumnos: No

320- Profesor: (Dirigiéndose al alumno7) Vuélvelo a decir

321- Alumno7: Es que él está diciendo que cada descuento es por botella pero claro, los dos de abajo sí porque es cada dos botellas pero en el de arriba si coges 5 botellas por ejemplo solo tienes un descuento de 33% en las tres primeras,… en las otras dos pagas el coste total, el coste…, el 100%

322- Profesor: Una, dos, tres manos… A ver... ¿quién quiere hablar?... Le voy a dar la palabra a ella (señalando a la alumna23) primero, porque es la que menos ha hablado

323- Alumna23: A ver…yo he hecho eso pero, no lo he hecho por botellas, he hecho el ahorro general

324- Profesor: Entonces tampoco has hecho esto… Luego veremos si sale el tuyo, ¿vale?... Aparte de ellos dos que han intervenido todas las veces ¿alguien quiere decir algo más?

325- Alumno27: A ver, yo lo he hecho parecido pero creo que equivocándome

326- Profesor: Ya, pero ¿tu idea era esa?

327- Alumno27: Es que se me ha olvidado dividirlo luego por las botellas que tienes

328- Profesor: ¿Se te ha olvidado dividir por dos?

329- Alumno27: Bueno… se me ha olvidado… que no me he dado cuenta…

330- Profesor: ¿Pero dividir por dos?

331- Alumno27: Yo lo he hecho a ojo… He cogido y he visto… el segundo tiene un descuento del 70%, que te lo ponía, el tercero, como era la mitad de precio, del 50% y el primero a ojo le he puesto un 30, en vez de un 33

332- Profesor: ¿El de las tres botellas? ¿El del 3x2?

333- Alumno27: Sí

334- Profesor: Te has imaginado que el 3x2 equivale a un 30%...

335- Alumno27: Sí

336- Profesor: Por lo demás… ¿esto lo has calculado bien? (señalando en la resolución proyectada la parte de las ofertas del 70% y 50%)

337- Alumno27: No, porque no lo he dividido entre dos

338- Profesor: No lo has dividido por dos… O sea que tú has calculado porcentajes…

339- Alumno27: Olvidándome del número de botellas

340- Profesor: Olvidándote de que este 50 se refiere a la segunda unidad, y este 70 se refiere a la segunda unidad… Eso no lo has tenido en cuenta….

341- Alumno27: (Niega con la cabeza)

342- Profesor: (Dirigiéndose a toda la clase) ¿Alguna cosa más?

343- Alumna21: Yo lo he hecho parecido

344- Profesor: ¿Parecido qué quiere decir?

345- Alumna21: Que yo me he fijado en el descuento y no he tenido en cuenta ni las botellas ni nada

346- Profesor: Pero ¿cómo has calculado?... ¿Esto lo has hecho? ¿Has hallado el descuento? ¿Lo has dividido por dos?

347- Alumna21: No, no lo he dividido por dos

348- Profesor: Has mirado porcentajes…

349- Alumna21: He mirado porcentajes…

350- Profesor: Y has comparado

351- Alumna21: Y he comparado

352- Observador: yo tengo una pregunta para ella (dirigiéndose al profesor)… En el caso de 3 por 2 ¿qué has hecho?

353- Alumna21: He hallado… o sea… Ay! ¿cómo era?...

354- Observador: Es que en los otros casos, el porcentaje has dicho que lo has tenido en cuenta pero como en el 3 por 2 no te dan porcentaje… ¿qué…?

355- Alumna21: He multiplicado las tres botellas… Si me costaran el precio normal y las tres botellas si me costaran lo de la unidad y entonces el porcentaje de esa lo he comparado con los demás

356- Alumno9: Yo lo que no veo es la diferencia de esta al de antes, porque la mía se parece más a este que al de antes…

357- Profesor: ¿El tuyo se parece más a este?

358- Alumno9: He dicho que era como el de antes pero con otras cosas, entonces… pero y no veo la diferencia de este… ¿cuál es la diferencia?

359- Profesor: Vamos a ver los números… (Mira la resolución proyectada) 25, 35 y 33 ¿no?

360- (Los alumnos asienten)

361- Profesor: Vamos a ver el de antes… (proyecta la resolución anterior) 35, 25 y 33… o sea el resultado es el mismo…

362- Alumna8: Yo creo que el primero toma en cuenta el precio pero como luego va a sacar el porcentaje, aunque le ponga…, o sea, en el último caso, da igual que le ponga 10 euros que le ponga 20 euros la botella porque como lo que hay que mirar es el porcentaje, el precio le da igual… O sea, los ha utilizado pero no le sirven para nada

363- Profesor: Ha utilizado el precio pero es irrelevante

364- Alumna8: no le sirven para nada porque el porcentaje ha salido igual. Y en el otro, directamente no ha utilizado precios, directamente ha sacado porcentajes

365- Profesor: Vale. (Dirigiéndose al alumno16) ¿Qué querías?

366- Alumno16: La última parte la ha dicho ella (refiriéndose a la alumna8). En los dos casos ha utilizado el precio como un medio para obtener porcentajes… el precio le da igual

367- Profesor: O sea que para vosotros el precio es irrelevante, pero aquí sí que lo usa (señalando la parte del 3x2 en la resolución proyectada)

368- Alumno16: Pero solo para llegar al porcentaje

369- Profesor: Y aquí ya no lo necesita… ya puede comparar los porcentajes

370- Alumna8 y Alumno 16: Sí

371- Profesor: ¿Está bien resuelto entonces?

372- Alumno11: No

373- Profesor: No está bien resuelto… ¿Está bien resuelto? (Mirando a la alumna4)

374- Alumna4: A mí sí que me gusta…

375- Profesor: ¿A alguien más le gusta?

376- (Levantan manos; entre ellos el alumno9, la alumna8 y el alumno16)

377- Profesor: A ti también te gusta… a ti también… Pero tú (dirigiéndose a la alumna13) eras de la de antes…

378- Alumna13: Bueno, yo era mezcla…

379- Profesor: Ah!, vale, vale, vale, vale… Y ahora vamos a ver el que ha dicho que no (señalando al alumno11)

380- Alumno11: Yo… Ahí te está diciendo, claro, te está sacando el porcentaje que te descuenta según cada oferta pero no te está razonando en qué ocasiones va a ser mejor una oferta u otra porque si compras dos, me va a venir mejor el 70%, si compro tres, me va a venir mejor el 3x2, si compro múltiplos de tres que no son pares será el 3x2 pero si son múltiplos de tres que son pares, es decir, si compro 6, me va a salir más barato el 70% que el 3x2…

381- Profesor: Vale, ¿Está en la línea de lo que decías tú? (Dirigiéndose al alumno7)

382- Alumno7: Sí

383- Profesor: Tú estás con él… Y tú también (en el vídeo no se ve a quién se refiere)

384- Alumno29: Hay una vía que no puedes comprar tres botellas… es lo que dicho David (que es el alumno11)

385- Profesor: ¿Hay una vía que no puedes comprar tres botellas?

386- Alumno29: La del 70% en la segunda unidad, si tú coges tres no…, te quedarías con…

387- Profesor: Con una botella que no te descuentan nada

388- Alumno29: Sí, claro

389- Profesor: Por tanto este método no te gusta…

390- Alumno29: No, que va…

391- Profesor: (Señalando a varios) A ti tampoco, a ti tampoco… Ya tengo tres, y uno aquí cuatro…

392- Alumna4: Hace falta comparar… lo que ha dicho él (señalando al alumno11), el número de botellas que te llevas… hay que tenerlo en cuenta

393- Profesor: O sea, que ahora incorporas un nueva variable…

394- Alumna4: No, sí, claro…

395- Profesor: ¿Y tú? (A la alumna2)

396- Alumna2: Sí, yo desde un principio estaba diciendo que a mí también me gustaba, pero lo que hay que tener en cuenta es el pack total, no el descuento por botella, sino el conjunto de la oferta

397- Profesor: Muy bien. Una, dos, tres, cuatro… (Dirigiéndose al alumno11). Les has liado, ¿eh?

398- Alumna2: No, si yo mi respuesta fue siempre eso, depende de lo que nos saldría cada unidad pero luego hay que tener en cuenta el número de botellas que te llevas, entonces según el número de botellas que te llevas tendrás ese descuento o no

399- Profesor: ¿Quieres decir que esto (refiriéndose a la resolución proyectada) es… entonces esto no está bien?

400- Alumna2: Falta algo

401- Profesor: Falta algo… ¿Con esto no puedo contestar?

402- Alumno11: Falta el razonamiento…

403- Profesor: Falta algo más….

404- Alumna 8: A ver, mi opinión es que si te preguntan cuánto descuento, o sea, que qué oferta de todas te viene mejor, yo creo que tienes que ceñirte al descuento que te hacen en el pack y ya está porque es que si empiezas "compraría 4, compraría 6…" tendrás infinitas combinaciones y no puedes demostrar todas a ver cuál… ¿y si compras 8? ¿y si compras 8 y media?

405- Profesor: Bueno, ¿tú estás de acuerdo con esta? ¿Para ti está bien?

406- Alumna8: Sí pero no del todo

407- Profesor: Sí pero no del todo… ¿Qué falta?

408- Alumna8: Porque está hecho como el descuento según, o sea, según el número de botellas por el esto, pero no como en el pack general, que es lo que ha dicho antes Mabel…

409- Profesor: (Dirigiéndose a la alumna25) Tú querías hablar también, ¿no?

410- Alumna25: No, era lo mismo, que ahí no tienes que fijarte en si compras una botella, o dos o tres, porque si compras tres, es lo que ha dicho Frano, te quedas sin descuento, entonces realmente en lo que te tienes que fijar es en el pack

411- Entonces, falta eso… falta eso… ¿Y tú cómo lo averiguarías?

412- Alumna25: Sin dividir el pack

413- Profesor: Ah! Sin dividir…

414- Alumna25: Claro porque tú ahí estás…

415- Profesor: Sin dividir, ¿dónde?

416- Alumna25: En la segunda y tercera, realmente lo que…

417- Profesor: ¿Y qué pondrías? ¿70%?

418- Alumna25: No, ahí no… Ahí el 50 y el 70… y averiguaría lo de arriba

419- Profesor: ¿Y compararías con el 70?

420- Alumna25: Compararía con… averiguaría el porcentaje de la primera. La segunda y la tercera lo dejaría en 50 y 70%

421- Profesor: O sea que, ¿aquí qué sacarías? (refiriéndose al caso del 3x2) ¿33?

422- Alumna25: 66

423- Profesor: ¿Aquí sacarías 76?

424- Alumna25: 66

425- Profesor: 66…

426- Alumna25. Porque es el descuento…

427- Profesor: Espera, espera… ¿compararías 66…

428- Alumna25: Con 50 y con 70

429- Profesor: … 70 y 50?

430- Alumna25: Exacto

431- Alumno14: Pero no tiene nada que ver una con otra…

432- Alumna25: ¿Cómo que no?

433- Alumno14: O sea, 70 es el descuento, 66 lo que pagas…

434- Alumna8: No, que yo estoy con ella en ese sentido pero porque tú sacas el descuento del pack… tú al comprar este pack te ahorras el 70%

435- Profesor: Perdona, ¿tú compararías 66, 70 y 50?

436- Sí, pero no sé si es 66

437- Alumno16: Yo pienso que 66 es coste, no descuento

438- Observador: A parte de que el 66 pueda ser coste o descuento… (dirigiéndose a la alumna8) ¿tú dices que ese 33% es el descuento del pack? ¿O es el descuento de cada botella?

439- Alumna8: No, no, yo he dicho que estoy de acuerdo con ella en dejar el segundo en 70

440- Observador: Sí, sí, en 70 y en 50, ¿y el primero?

441- Alumna8: Pero yo el primero no lo he hecho así, lo he hecho de otra manera

442- Observador: ¿Y cómo lo has hecho?

443- Alumna8: Es que… es lo mismo que Mabel…

444- Profesor: (A la clase en general) No sé si entendéis la discusión que tienen…

445- Alumno11: (Dirigiéndose a la alumna8) Es que, no sé qué has sacado en el primero… El 3x2 para ti, ¿es bueno o no?

446- Alumna8: Sí, para mí es el que más…

447- Alumno11. ¿Es el mejor?

448- Alumna8: Sí

449- Alumno11: ¿Qué te están descontando en el 3x2?

450- Alumna8: No sé, que a lo mejor lo he hecho mal, pero que…

451- (El profesor le da la palabra al alumno7)

452- Alumno7: Yo creo que para que se entienda mejor se puede preguntar "contando el número de botellas qué porcentaje resulta más…" y ahí ya puedes…

453- Profesor: Contando el número de botellas, cuál…

454- Alumno7: Claro y en el problema le pones… Que como ha comentado David, depende del número de botellas, calculando los distintos descuentos ya vas a saber cuál resulta más efectivo o no, por lo tanto si en el problema pone "comprando 5 botellas, o 7, u 8" o las que sean ya sí que podríamos tener un hilo conductor de donde queremos llegar…

455- Profesor: O sea, tú crees que el enunciado es ambiguo

456- Alumno7: Sí

457- Profesor: Y el problema está en la manera de enunciar el problema…

458- Alumno7: Está en el aire

459- Profesor: … por eso no hay manera de salir de aquí, ¿no?

460- Alumno7: Yo creo que no

461- Alumno29. Yo estoy con él (refiriéndose al alumno7)… el número de botellas (las siguientes palabras no se entienden) con el descuento. En Carrefour y eso, ponen el descuento en una botella de 50 litros, pero luego la de 60 litros, te ponen… o sea que es la cantidad… son cantidades diferentes. Hay que coger vino por litros… litros de vino, no botellas… hay botellas de litro y medio y botellas de un litro, las cambias y ya… te estaría dando más cosas…

462- Alumna8: Yo voy a intentar explicarme

463- Profesor: A ver, vamos a escucharla por favor

464- Alumna8: puede ser la resolución la tenga mal

465- Profesor: ¿Esta?

466- Observador: No, la que ha hecho ella (refiriéndose a la alumna8)

467- Profesor: La tuya

468- Alumna8: Sí. Pero mi planteamiento era cuando me preguntas que cual hace más descuento yo entiendo descuento o sea que en cual de todos los pack al final te hacen más descuento, ¿vale?... Es lo que yo he entendido, que no sé si está bien o no, pero es lo que yo he entendido. Entonces el segundo que es lo que ha hecho Diana lo he dejado en 50% porque el descuento que te hacen a ti de ese pack es el 50%

469- Profesor: ¿Del pack? ¿De las dos botellas o de una?

470- Alumna8: De una pero si tú te coges a esa oferta, ¿vale? al final, o sea es el 50 porque la primera la vas a pagar

471- Alumno11: Entonces pagas el 25, o sea el descuento es 25…

472- Alumna8: no porque tú de la primera pagas el 100%

473- Alumno11: Si tú pagas una a un euro y tú compras dos y la segunda va al 50% te va a subir medio, entonces uno y medio de dos euros es 25%

474- Alumna8: De dos euros no, yo he dicho no he tenido en cuenta el precio de…

475- Alumno11: Ya, pero yo te ejemplifico para que veas que el descuento es del 25 y no del 50

476- Alumna8: Ya pero si tú aplicas… da igual… o sea, yo estoy explicando mi planteamiento y he dicho que a lo mejor está mal

477- Alumno11: Sigue, sigue, sigue…

478- Alumna8: La primera botella he supuesto que tú pagas el 100% de la primera botella y de la segunda botella tú pagas la mitad del precio que es el 50%, ¿vale? Luego por lo que te están vendiendo la segunda botella que es la que está en oferta de alguna manera es del 50%, el tercero el 70 por ciento. Y el primero lo que he hecho es, bueno he relacionado directamente el 100% del precio, digamos, según el descuento en la botella, que son tres con algo, creo que era… el 100% es ese, entonces para saber qué porcentaje me quitarían, o sea, lo he relacionado, el 100% de los 5 euros, con el % que me saldría en la botella con 3 euros

479- Observador: Lo que ha hecho él (señalando la resolución proyectada) ¿no?

480- Alumna8: Sí, pero luego el porcentaje que me ha salido por botella lo he multiplicado por 3 porque te llevabas… porque el pack…

481- Profesor: Entonces ¿no has hecho esto? No te preocupes ¿no has hecho esto?

482- Alumna8: no

Aquí termina el vídeo 1.1

483- Profesor: Eh… bueno vamos a ponerle nota ya y pasamos a otro… ¿qué nota le ponemos a este?

484- Alumnos: un 7…

485- ¿Le ponemos la nota máxima a este?... A ver, mano alzada, mano alzada, ¿quién le pondría nota máxima? (Cuenta las manos) Dos nada más… ¡Toma ya!... ¿Alguien lo suspendería? (Silencio) Nadie… Vosotros sois generosos y aprobáis siempre…

486- Alumna23: Es que no está mal pero tampoco…

487- (Murmullo general)

488- Profesor: ¿Un notable?

489- Alumna23: (Asiente)

490- Un notable… ¿igual que éste? (refiriéndose a la resolución proyectada anteriormente) ¿Un notable? No puede ser que los dos tengan la misma nota…

491- Alumno11: Este está más sucio

492- Profesor: ¿Este está más sucio? Menos limpio, menos nota….

493- Alumno1: Pero si no sé resolverlo ni yo ¿cómo voy a saber qué nota le pongo?

494- (Risas en la clase)

495- Profesor: ¿No te parece bien el método?

496- Alumno1: Pero si yo no sé resolverlo…

497- Profesor: Pero… estás mirando cómo lo ha resuelto él. ¿Te convence?

498- Alumno1: Si me convence el de antes, que he dicho que le pondría lo máximo, no ´se por qué, pues este que está un pelín mejor pues… bien también

499- Profesor: Lo único que has de decidir es si el estudiante lo ha hecho bien… Tú con tu criterio y tu inteligencia dices "hombre, pues sí, está bien; es razonable lo que ha hecho" ¿no?... Más bonito que el otro. Pues al otro un 9 y a este un 10. ¿Vale? ¿Estás de acuerdo con eso?

500- Alumno1: Bien

501- Profesor: No sé qué os parece, ¿eh?... Vamos a ver otro, a ver qué pasa… (Proyecta la siguiente resolución)… Este tipo, este… es muy telegráfico, me gusta porque es telegráfico, el del 3 por 2 le pone aquí un 100 y divide por 3. Vamos a ver si lo entendemos… En el 70% divide por 2 y en el 50% divide por dos y comprara y mirad el resultado… le sale lo mismo que al anterior… ¿Por qué habrá puesto ahí 100?

502- Alumno11: Porque es un producto entero el que te regalan

503- Profesor: Te regalan una unidad entera, el 100% de una unidad. Y lo que te regalan lo divide por tres

504- Alumno11: Son las que compras…

505- Profesor: Porque has comprado tres… tres unidades… el descuento es por dos unidades (señalando la segunda oferta en la resolución proyectada), divide por dos y el descuento es por dos (señalando la tercera oferta en la resolución proyectada)… Vale… Bonito, ¿eh?... Elegante… Breve, ¿sí o no?... ¿Te gusta? (dirigiéndose a la alumna4)

506- (En el aula se oye: "a ella le gustan todos" y risas a continuación)

507- Profesor: (A la alumna4) ¿Te gusta o no?

508- Alumna4: Pero le falta lo del pack

509- Profesor: Le falta el pack… (Se dirige ahora a la alumna2) ¿Qué te parece?

510- Alumna2: Pues que ha salido el mismo resultado que el de antes

511- Profesor: Entonces, ¿si este está bien los otros están bien?

512- Alumna2: No, digo… Si el de antes estaba incompleto, este también

513- Profesor: A ver ¿tú qué opinas? (dirigiéndose a la alumna31)

514- Alumna31: ¿Yo? (Se encoje de hombros)

515- Profesor: Que te da igual uno que otro…

516- Alumna31: No, creo que está bien

517- Profesor: ¿Y los otros?

518- Alumna31: También

519- Profesor: También… Están todos bien… (Ahora señala a la alumna32 que todavía no ha hablado)

520- Alumna32: Yo también, igual

521- Profesor: Igual ¿qué?

522- Alumna32: Que está bien, este y los otros

523- Profesor: (Señala a la alumna33, que aún no ha intervenido) Y tú… no lo tienes claro…

524- Alumna33: Como están todos mejor de lo que yo he hecho…

525- Profesor: Hombre, pero ¿a ti te convence?

526- Alumna33: Sí… más que lo que yo he hecho me convencen

527- Profesor: Bueno, a ver si luego sale el tuyo. ¿Y tú qué opinas? (dirigiéndose a la alumna20)

528- Alumna20: Yo es que como no sé cuál es la respuesta buena, pues no sé…

529- Profesor: No sabes cuál es la respuesta buena… vale… (Se dirige ahora al alumno11 y al alumno14) ¿Seguís pensando lo mismo… que esto no es?

530- Alumno11: Llegas a la misma conclusión, que te dice el porcentaje que te ahorras en cada producto pero no tiene en cuenta los que te estas llevando, entonces… nos quedamos igual… está incompleto para mí

531- Profesor: (Dirigiéndose a la alumna38) ¿Tú qué opinas?

532- Alumna38: También pero por lo menos éste explica un poco que depende del producto y eso

533- Profesor: Depende del número de botellas, ¿no?

534- Alumna38: Sí

535- Alumno7: Lo que pasa es que… ahí (señalando la resolución proyectada)… el 33% es por pack y las dos de abajo por botella

536- Profesor: Él dice que se ahorra el 33% por botella

537- Alumno7: Es por pack porque…

538- Profesor: Pero él dice que lo que ha calculado es por botella

539- Alumno7: Ya, ya… Sí, sí

540- Profesor: Y a ti no te gusta porque en realidad no ha de ser por botella sino por pack

541- Alumno7: (Asiente) Sino por pack (termina la frase a la vez que el profesor)

542- Profesor: ¿Y por aquí cómo vais? (preguntando a los alumnos de alrededor del alumno7)

543- Alumno34: Pues eso que…

544- Profesor: Que sigues con él (señalando al alumno7)

545- Alumno34: Sí

546- Profesor: Va por… va por… este criterio va por… (señalando y haciendo alusión a que es compartido por los alumnos de una misma zona del aula)… ¿Os dais cuenta que va como por equipos?... ¿Qué te parece? (señalando al alumno27)

547- Alumno27: ¿Yo? Creo que no está mal del todo

548- Profesor: No está mal… ¿Y el anterior?

549- Alumno27: También

550- Profesor: ¿Y el anterior del anterior?

551- Alumno27: También porque los dos anteriores es parecido a como lo he hecho yo

552- (El profesor le da la palabra a la alumna4)

553- Alumna4: Que yo creo que puede que esté bien pero cuando contestas tienes que decir “descuentan, por ejemplo, el 35% pro llevándote 2 y el otro descuenta el 33% llevándote 3”

554- Profesor: Que no lo dice, ¿no?... Dice (leyendo en la resolución proyectada) “descuento mejor depende del producto y de las circunstancias del cliente”… Es como ha acabado. Hace una resolución matemática y dice “esto para ti, para que veas que sé hacerlo” pero su opinión es que depende de las circunstancias del cliente… ¿Tú qué piensas? (dirigiéndose al alumno7)

555- Alumno7: (Primero levanta los hombros y luego asiente)

556- Profesor. Si, ¿eh? Muy bien, ¿eh?... Depende de las circunstancias del consumidor

557- Alumno7: (Sigue asintiendo)

558- Profesor: (Dirigiéndose ahora a toda la clase) El mejor descuento depende de las circunstancias del cliente… ¿Sí verdad?

559- (Se oye un “sí” en el aula)

560- Profesor: Es decir, que si no llevas dinero… ¿Es eso? Depende del dinero que tengas

561- Alumno1: O según que le guste el vino…

562- Profesor: O si le gusta el vino…

563- Alumno1: Claro

564- Profesor: (Dirigiéndose ahora a toda la clase) O sea, que el mejor descuento… no existe ese concepto… depende de ti, depende de ti… no es un concepto absoluto… Bueno, ¿le ponemos nota a este entonces?

565- (Silencio)

566- Profesor: ¿Hay muchos que opinen esto… que depende del cliente… que todo lo demás es…que esto son matemáticas pero que a la hora de la verdad lo que cuenta es esto?... ¿Hay mucho que opinen esto?

567- (Silencio)

568- Profesor: ¿Nadie contesta?

569- Alumna37: Influyen las dos variables

570- Profesor: Pero ¿cómo contestamos a la pregunta?… ¿No podemos contestar a la pregunta?

571- (Silencio)

572- Alumno11: Es que el cliente te da igual para la oferta…

573- Profesor: La oferta es la oferta… ¿Cómo quedamos? ¿La oferta es la oferta o es del cliente?

574- Alumna33. Hombre, ahí no te preguntaba que qué pensaba el cliente

575- Profesor: ¿Perdón?

576- Alumna33: Que en el problema no te preguntaba que qué preferiría el cliente

577- Profesor: Pero, depende de si el cliente tiene 60 años, o tiene 30… No te preguntan…

578- Alumno11: Hombre, lo único que puede depender…

579- Alumno35: Del número de botellas

580- Alumno11: …de si quiere comprar dos cosas o quiere comprar tres

581- Alumno35: Yo opino lo mismo

582- Profesor: (Dirigiéndose al alumno35) Tu ahora te has quedado con la copla de que todo depende del número de botellas

583- Alumno35: Hombre, todo del número de botellas no, el porcentaje es este, pero luego no depende de las circunstancias del cliente sino del número de botellas que se lleva

584- Profesor: ¿Tú has hecho alguno de estos métodos?

585- Alumno35: Es que yo he sacado el número de botellas, o sea, lo que vale cada botella pero con la oferta, sin contar lo de tres o dos…

586- Profesor: ¿Ninguno de los que ha salido es el tuyo?

587- Alumno35: Parecido

588- Profesor: ¿Parecido qué quiere decir?

589- Alumno35: O sea, yo no he sacado el porcentaje. Yo lo que he sacado es cuánto costaba cada botella

590- Profesor: ¿El coste?

591- Alumno35: Sí

592- Profesor: Vale

593- Alumno9: Entonces ¿para el 70% te lo has inventado?

594- Alumno35: he puesto el mismo… la misma cantidad a todos

595- Profesor: Te has inventado un precio, para todos el mismo…

596- Alumno35: Sí, el más bajo de todos lo he cogido

597- Profesor: (Dirigiéndose a toda la clase) Bueno, vamos a ver más… ya quedan pocas, eh!... Vamos a ver otra… vamos a ver esta… Aquí no hace decimales, este viene a hacer lo mismo. Dice "imaginemos que el producto vale 5, en cualquier oferta"… Le va a poner 5 euros a las botellas, ¿vale? Esta es como lo que está diciendo él (señalando al alumno35, y se dirige a él). Te he leído el pensamiento, ¿eh?... (Ahora otra vez se dirige a toda la clase) Y dice, bueno, tres botellas valen 10… ¿sí o no?... Si vale 5 una, tres botellas 10 porque me regalan una, y divide 10 entre tres y dice "3,3 euros cada botella si valieran 5". En el otro divide, la primera botella 5, la segunda dos y medio, la suma siete y medio y divide entre dos… Ese cero tiene que ver con los decimales que está dividiendo por dos… Divide por dos y dice que cada producto vale eso. El tercer caso igual, calcula… una vale 5, el 70% es tres coma cinco…

598- Alumna15: Que está mal…

599- Profesor: No, ahora resta

600- Alumna15: Ah! Vale, vale…

601- Profesor: Resta 5 menos 3,5 y dice "lo que me cuesta la segunda botella es 1,5, por tanto el coste ahora es 6,5", divide por dos, 3,25 y compara este con este y con este (señalando en la resolución los resultados que ha ido sacando). Es decir, le ha puesto un precio a las botellas y con eso ha jugado. (Se dirige ahora al alumno35) ¿Es lo que tú has hecho?

602- Alumno35: Sí, con otro... en vez de 5 he cogido el más bajo

603- Profesor: No importa, otro número…. Podría haber cogido 10, que es más facilito, podría haber cogido 1 euro… pero bueno, ha querido 5… cada uno…. Y… curioso, no hace porcentajes… decimales. ¿Qué tal? ¿Eh? (Lanza la pregunta en general)

604- Alumna4: Yo he hecho eso…

605- Profesor: ¿Este es el tuyo?

606- Alumna4: Sí

607- Profesor: Al fin…

608- Alumna4: Pero después cuando he contestado digo… segunda unidad el 70% es el mejor descuento pero tengo en cuenta que en aquel caso te llevas tres productos… En el 3x2 te llevas tres productos

609- Profesor: Pero tú te has olvidado de los precios de partida, ¿eh? Son los mismos precios, o sea que lo que te preocupa es el pack

610- Alumna4: Sí, claro

611- Profesor: El pack, pero no el precio

612- Alumna4: No

613- Profesor: Porque el precio lo cambias… (Dirigiéndose ahora al alumno11) ¿Qué ibas a decir?

614- Alumno11: No no no… estoy pensando…

615- Profesor: (Dirigiéndose a toda la clase) ¿Qué os parece?

616- Alumno35: Yo este…

617- Profesor: Tú le das buena nota, a este

618- Alumno35: Claro

619- Profesor: (Dirigiéndose a la alumna4) Tu también le pondrás buena nota… pero lo que pasa es que tú… te han gustado todos… perdona. (Se dirige ahora a la alumna31) ¿Lo has entendido?

620- Alumna31: Sí

621- Profesor: ¿Te gusta?

622- Alumna31: Es el que más me gusta

623- Profesor: Es el que más te gusta… mira… (cuenta las personas que han dicho que les gusta) Una, dos, tres… (Se dirige a la alumna8) ¿A ti te gusta este?

624- Alumna8: Yo es que no lo sé, pero yo creo que para que los niños entiendan el sentido del descuento de cada cosa, es más fácil hacérselo ver con la cantidad de…

625- Profesor: Pero estamos resolviendo este problema…

626- Alumna8: Sí, sí, pero yo te estoy dando la justificación de por qué me gusta o no

627- Profesor: ¿Pero te gusta?

628- Alumna8: No más que hacerlo por porcentajes

629- Profesor: Vale, eso es lo que me importa a mí… ¿Alguien más quiere decir algo? (Dirigiéndose al alumno7) ¿Este qué te parece?

630- Alumno7: Es que no lo he terminado de…

631- Profesor: Léelo, léelo… Le pone un precio ficticio (señalando la resolución proyectada)

632- Alumno7: Sí

633- Profesor: Y con este precio calcula los tres…

634- Alumno7: Ah! Vale

635- Profesor: Calcula los tres… descuentos… los tres descuentos por botella… por cada producto… Está calculando costes (dirigiéndose ahora a toda la clase), no ahorro… Dice “el coste por botella, el coste por botella y el coste por botella” (señalando la resolución proyectada) No ahorro… ¿El ahorro qué sería?... El ahorro no lo ha calculado ¿no? ¿eh? (Dirigiéndose a la alumna4) ¿Tú has calculado coste o ahorro?

636- Alumna4: El coste

637- Profesor: Costes… pero te preguntan el ahorro…

638- Alumna8: Puedes llegar al ahorro por el coste o por el ahorro

639- Profesor: ¿Cómo?

640- (Ahora las intervenciones de los alumnos 4 y 11 se producen simultáneamente, hablan a la vez)

641- Alumna4: Quiero decir, puedes calcular en cuál te ahorras más y en cuál te gastas menos

642- Alumno11: Son dos caminos para llegar al mismo sitio

643- Profesor: O sea, tú ves que este es más barato… como ves que es más barato… como partes del mismo precio, pues es la diferencia, no es lo mismo… De acuerdo… ¿Alguna…?

644- Alumno7: Pero en el de arriba sigue teniendo el mismo problema, ¿no?

645- Profesor: No compra el pack… No tiene en cuenta…

646- Alumna7: Si compra 4 no me sale 3,3 euros cada producto

647- Profesor: Si compras 4 es eso

648- Alumna4: Pero es que… claro, tú pones… teniendo en cuenta el pack

649- Profesor: ¿Cómo que teniendo en cuenta el pack?

650- Alumna4: La solución es que teniendo en cuenta el pack…

651- Alumno7: Pero eso él no lo ha puesto… él ha puesto "la oferta más rentable es la de la segunda unidad"… no ha puesto "teniendo en cuenta el pack"

652- Profesor: Todos estos se refieren a una botella… Están contando por botella… No tienen en cuenta el pack

653- Alumna4: Pero por botella teniendo en cuenta el pack

654- Alumna2: Pero dentro del pack

655- Profesor: Dentro del pack

656- Alumno7: Pero eso él no lo ha indicado… él igual no ha pensado que si compra 4 no le sale a 3,3 euros

657- Profesor: (Acercándose a un grupo de alumnas poco participativas y dirigiéndose a ellas) ¿A vosotras os gusta este? ¿A ti te gusta también? ¿A vosotras dos? ¿Tenéis algo que decir?

658- Alumna36: (Esta alumna todavía no había intervenido) ¿La pregunta qué era? ¿cuál es la mejor oferta?

659- Profesor: Sí

660- Alumna36: Es que si te desmarcas de lo que valen los productos…

661- Profesor: No te oigo…

662- Alumna36: Que si te desmarcas de lo que valen las otras botellas y tal… si te fijas sólo en la oferta, el 3x2, el 50% o el 70%... estaría bien… No sé, es que es diferente

663- Profesor: Es que no te oigo… estás lejos y no te oigo

664- Alumna36. Que si la pregunta es la oferta, que cuál de las tres es mejor, sin tener el cuenta el precio, como él se ha inventado precio…

665- Profesor: No te gusta que se invente precio…

666- Alumna36: No me acaba de convencer

667- Profesor: Vale…vale,vale… ¿Queréis decir algo por ahí?

668- Alumno29: Que hay que calcular el precio por litro de vino y ya está… (Risas en el aula). Todo lo demás es perderse

669- Profesor: Que hay que contar el precio por litro y lo demás es perderse…

670- Alumno29: Estáis comparando, lo que habéis dicho, unos con otros, cosas diferentes, cantidades diferentes y…

671- Profesor: Vale… Bueno, a ver, di (dirigiéndose al alumno11)

672- Alumno11: Yo, el polémico… Yo quiero decir…

673- Profesor: Me queda una o dos nada más, pero vamos a ver… (le da la palabra)

674- Alumno11: Que, si hemos calculado que el precio en el 70% y en el 3x2… el 70% es un poco inferior, podemos llegar a que, en algún momento que compremos la cantidad que podamos aplicar a ambas ofertas, es decir, si compramos 6, podemos aplicar el 3x2 y la segunda unidad al 70%

675- Profesor: Ya sé lo que quieres decir… Eso va a salir ahora, así que no adelantes la estrategia… A ver (dirigiéndose a toda la clase), ¿queréis decir algo de esta estrategia? ¿Vamos a ponerle nota? ¿Qué nota le ponemos?... (Murmullo en el que algunos alumnos dicen la nota que le pondrían) Un 8 por allí, ¿por aquí qué nota le ponemos? Un 9, un 8… eh… o sea que de todo lo que ha salido, una tenía un 9, un 10… ¿Una tenía un 9, la otra un
8 y esta otro 8? ¿O cambiamos todas las notas?... ¿Cambiamos todas las notas? ¿De todas cuál es la mejor?... ¿Cuál es la mejor?

676- Alumno16: El mejor método, será

677- Profesor: El mejor método… ¿Ninguna está bien para ti? (Lo mira mientras el alumno16 dice algo que no se entiende) Todas están bien… bueno, todas menos la…

678- Alumno16: Todas las que dan que el 70% es la mejor…

679- Profesor: Todas las que usan estos números (señalando la resolución proyectada)

680- Alumno16: Las que digan que la oferta es la del 70, esas están bien

681- Profesor: Todas las que dicen que la mejor oferta es el 70% para él están bien… ¿Les ponemos la misma nota?

682- Alumno16: No

683- Profesor: Este no hace porcentajes

684- Alumno16: Ya

685- Profesor: ¿Qué tal?

686- Alumno11: Porque ya los ha hecho antes

687- Profesor: ¿Dónde los ha hecho?

688- Alumno11: En, en… da igual

689- Alumno16: El porcentaje lo aplica para llegar al coste… Es como antes, que utilizaba el precio para llegar al porcentaje. Aquí utiliza el porcentaje para llegar al coste

690- Profesor: ¿Dónde está el porcentaje? (Mira la resolución proyectada) Ah! Bueno… lo aplica, lo aplica, el porcentaje para llegar al coste

691- Alumno16: Claro

692- Profesor: Pero no compara porcentajes…

693- Alumna2: No

694- Alumno16: No, porque compara costes

695- Profesor: No le hace falta comparar porcentajes

696- Alumna2: No, porque compara precios

697- Profesor: Compara precios…

698- Alumna2: (Asiente)

699- Profesor: Compara precios… ¿Da igual? ¿Da igual? (Mira a la alumna2, que no contesta)… No sabes si da igual comparar costes que porcentajes

700- Alumno16: Porque en todos los casos utiliza los dos, así que…

701- Alumno11: Al fin y al cabo, sale diciendo que, como hemos visto, el 35% te lo aplican en la segunda al 70%, entonces te sale un poco más barata… igual que en la segunda que te aplicaban el 33%, un poquito superior, y la otra te aplicaban el 25, entonces, lo mismo que en porcentajes pero ahora con precios

702- Profesor: (Mientras habla el alumno11 se acerca a un sector de la clase que no está interviniendo) Vosotras, ¿por qué os dejáis amedrentar por aquéllos? (señalando el lado del aula donde están los que sí intervienen) y solo hablan aquellos… ¿no tenéis nada que decir?

703- Observador: (interrumpe al profesor), es que ella (refiriéndose a la alumna8, que lleva buen rato con la mano alzada) lleva pidiendo la palabra un buen rato y por ahí la gente habla sin levantar la mano… vamos a dejar que hable…

704- Alumna8: Que yo creo que lo de… que lo de que qué método es mejor y todo eso es muy relativo, que siempre que el niño tenga un procedimiento lógico de ese problema…

705- Profesor: ¿Está bien o mal?

706- Alumna8: Esta bien, y los anteriores también están bien, y todos tendrían la misma nota porque todos están bien…

707- Profesor: Vale

708- Alumna8: El problema es que si tú se lo pides a primaria, por qué método crees que es mejor… suponiendo que tenga que enseñárselo a los niños… si tú vas a hacer un problema de descuentos, es por qué método el niño va a entender mejor el concepto de descuento, si por el de llegar al coste, o sea… si mediante el coste llegar al descuento o si directamente por el descuento… Entonces da igual, o sea, da igual la nota de este que el anterior o el anterior, si tú das la respuesta correcta y el razonamiento es lógico está bien igualmente

709- Profesor: Vale, muy bien, ya está… ¿Alguna cosa sobre este más? ¿Pasamos a otro? Vamos acabando… A ver este qué os parece… Queda uno más, este y otro y ya está… Este también en muy breve… Mirad lo que ha hecho… 3x2, tres botellas valen 2 euros; 2 euros es el 0,66 periodo. Segunda unidad al 50%, dos botellas valen 1,50; 1,50 es el 0,75. Y segunda unidad al 70%, dos botellas es 1,30 euros, que es el 0,65… Decimales y ha acabado

710- Alumna2: Ha hecho lo mismo

711- Profesor: Lo mismo

712- Alumna2: Pero con 1 euro

713- Profesor: Con 1. Valor unitario… vale 1 euro… más facilito no puede ser… ¿Te gusta este? (dirigiéndose a la alumna4)

714- Alumna4: (Niega con la cabeza)

715- Profesor: No te gusta, ¿eh? (Dirigiéndose al sector del otro lado de la clase) ¿Qué? ¿Qué os parece este?

716- Alumna31: Bien. Es igual que el de antes

717- Profesor: Más clarito, ¿no?

718- Alumna31: Sí

719- Profesor: Más clarito, ¿no?... Entonces, ¿le ponemos un 10? ¿O un 9?

720- Alumna2: Lo mismo que a los otros

721- Profesor: Lo mismo ¿no? ¿La misma nota?

722- Alumna2 y Alumna4: (Al unísono) Sí

723- Profesor: Este es más claro… ¿la misma nota? Pero sigue sin tener en cuenta el pack

724- Alumna2: ¿Cómo que no? Sí que se tiene en cuenta…

725- Alumna8: Segunda unidad al 70%, es si tú coges el pack

726- Alumna2: Claro. Ahí sí que lo está aplicando… 3x2

727- Profesor: Si coges el pack pagas eso ¿no?

728- Alumna2: Sí

729- Profesor: Y aquí pagas esto, y aquí pagas esto

730- Alumna2: Claro, sí

731- Profesor: Luego está comparando packs. Está comparando el precio de los packs

732- Alumna8: No, el precio de la botella si tú coges el pack

733- Profesor: El precio de la botella si coges el pack… Luego este es el mejor…

734- Alumna2: Seguro que hay otro mejor…

735- Profesor: No, no lo sé, no lo sé…

736- Alumno7: Es lo mismo que los otros, es que… yo, para mí es lo mismo

737- Profesor: O sea, no está bien…

738- Alumno7: Tú, los dos de abajo (refiriéndose a la resolución proyectada), compras una botella, compras dos, compras siete, va a ser siempre el mismo descuento, pero en el de arriba, si coges cuatro, no es el mismo descuento que los…

739- Alumno8: En los de abajo tampoco

740- Alumno7: En los de abajo siempre… si cojo una botella me van a regalar otra, si cojo dos me van a regalar…

741- Alumna4: ¿Pero si coges tres?

742- Alumno7: Pues te regalan tres…

743- Alumna8: No, no…

744- Alumna4: Te regalan una…

745- Alumna7: Vale, pero en los de abajo no… siempre me van a hacer el 70% de descuento, o el 50

746- Alumna4: Pero tienes que coger dos…

747- Alumna2: En la segunda unidad…

748- Alumno7: Yo digo que en las dos de abajo sí que es válido el resultado con la unidad… arriba no

749- Profesor: Voy a decir una cosa que a mí me molesta… A mí me molesta de todo esto que estamos comparando uno que se lleva tres botellas con uno que se lleva dos botellas

750- Alumna2: ¡Claro!

751- Profesor: Yo eso no lo veo claro

752- Alumna15: Yo tampoco

753- Profesor: ¿Eh?

754- Alumna15: Yo tampoco lo veo claro

755- Profesor: Hombre, uno puede pensar… Mejor llevarme 3 botellas, ¿no?... Aunque el descuento sea un poco… mejor llevarme 3 botellas… ¿Tú qué opinas? (dirigiéndose a la alumna38)

756- Alumna38: Yo es que he hecho en los tres, 3 botellas, para así verlo…

757- Profesor: Por eso tú has elegido 3 botellas siempre… Pero claro, 3 botellas, estos (señalando en el proyector el caso del 50% y del 70%) hay una botella que no les hacen descuento

758- Alumna8: Por eso estamos diciendo que es sobre el pack… que si te pones a contar… ahora me llevo 8 y una botella de no se qué, claro, así ya tienes infinitos casos que no vas a ir al supermercado a comprar…

759- Profesor: Bueno, entonces si no está claro comparar el que se lleva 3 botellas con el que se lleva 2 botellas, todos están mal… todos están mal…

760- Alumno9: Yo sí que lo veo claro

761- Profesor: Tú sí que lo ves claro

762- Alumno9: Aquí, cuando saca… en todos estos que hemos hecho al final están bien porque sacamos el precio por botella dentro del pack…

763- Profesor: Sí

764- Alumno9: …En el primer pack son 3 botellas, en el segundo 2 y en el tercero 2… igual te da llevarle al final 2 que 3 botellas

765- Profesor: Sí… ¿Igual te da?

766- Alumno9: Es decir, igual te da…

767- Alumna2: No…

768- Alumno9: A ver, no, igual te da… Tú as a coger el que más barata te salga la botella, pero sabiendo que si te compras uno te cuesta… te tienes que llevar 3 y en los otros 2

769- Alumna2: Claro, es que él (señalando al alumno9) lo ha dicho, dice… Si te quieres llevar la botella más barata te llevarás el del 70% pero si te quieres llevar más botellas, te llevarás el del 3x2

770- Alumno16: No, porque te llevas más botellas con el del 70… Te sale más barato que el de 3x2

771- Alumno7: Si te coges 3 botellas al 70%...

772- Profesor: O sea, estos han calculado el descuento por botella… El descuento por botella es una cosa y otra cosa es dónde gano más, me conviene… todas esas cosas porque en uno me llevo 2 botellas y en otro 3… No se tiene en cuenta eso

773- Alumna15: Pues cogemos 6 botellas que sí que podemos aplicarle las 3 ofertas, aplicamos las 3 ofertas… y ya está

774- Profesor: Espera… espera un momento… porque voy a ponerlo… Vamos a ver lo que ha hecho este… Aquí hay un tipo que ha dicho "me llevo 6 botellas"… "y voy a calcular sobre 6 botellas". Seis botellas es el mínimo común múltiplo. Si me llevo 6 botellas, le podré aplicar el descuento del 3x2 y el descuento del 2… segunda unidad con descuento… Dice "voy a hacer los números sobre las 6 botellas"… Dice "6 botellas a 10 euros, son 40 euros… 6 botellas a… segunda unidad al 70%, las dos botellas, cuatro, seis… las 6 botellas son 39 euros y 6 botellas son 45 euros". ¿Con cuál se queda?

775- Alumna2: La del 70

776- Alumno16: Con la del 70

777- Profesor: Se queda con la del 70%... llevándose 6 botellas… Di (dirigiéndose a la alumna23)

778- Alumna23: Que siempre vamos a para a lo mismo, a que la mejor es la del 70%

779- Alumna38: No, si te llevas 3, la mejor la del 3x2

780- Alumno16: Y si te llevas 8, pues la del 70 sale…

781- Alumno35: ¿Y si te llevas 9?

782- Profesor: O sea, que si no te llevas 6…cambian las cosas (Le da la palabra al alumno11)

783- Alumno11: ¿Te digo mi conclusión?

784- Profesor: No, espérate. La conclusión al final… ¿Qué os parece este método? (Dirigiéndose a toda la clase)… ¿Qué os parece?

785- Alumno11: Yo lo veo bien pero incompleto también

786- Profesor: Incompleto también… ¿Qué os parece por ahí? (Al sector que menos interviene de la clase)

787- Alumna33: Pero es que tampoco te está preguntando… Ahí te pregunta por lo que te pone ahí, que son 3 botellas, 2 y 2… no te pregunta…

788- Profesor: Pero, ¿cuál es la pregunta del problema?

789- Alumna15: Qué descuento es mejor, ¿no?

790- Alumna33: Que descuento es…

791- Profesor: ¿Qué descuento es mejor?

792- Alumna33: Pero en ese caso… En 3x2, 70…

793- Profesor: ¿Qué descuento es mejor para ti?

794- Alumna33: ¿Qué descuento ahora es mejor?

795- Profesor: Después de todo lo que has visto…

796- Alumna33: El del 70

797- Profesor: ¿Y bajo qué argumento?

798- (Silencio)

799- Profesor: De todos los métodos ¿cuál es el que te parece más eficiente?... Más razonable.. lo más lógico

800- Alumna33: A mí el de antes…

801- Profesor: Te gusta más que este… Este no te gusta….

802- Alumna33: No, sí

803- Profesor: Mira, no ha hecho porcentajes, ¿verdad que no? (Dirigiéndose ahora a toda la clase) Eh… no ha hecho decimales… ¿Qué es lo que ha hecho?... Sumar… Este es de sumar

804- Profesora del grupo: Hombre, sí que hace porcentajes, (dirigiéndose al profesor), ¿no? Cuando saca el tanto por cien de 10

805- Profesor: ¿Dónde? ¿dónde? ¿dónde?

806- Profesora del grupo: El 70% de 10 son 7… el 50% de 10 son 5

807- Profesor: Aquí ¿no?... ¿eh? Aquí aplica porcentajes… Eh… ¿Qué os parece este? (Dirigiéndose hacia el lado que menos interviene de la clase)

808- Alumno29: Yo, lo que dice Ainhoa (la alumna33), que en igualdad de condiciones… es que no hay igualdad de condiciones

809- Profesor: Aquí se ve la igualdad. Este es fuerte, ¿no?

810- Alumno29: Pero es que si en el papel te pone 3x2… no te está diciendo “compra todas las que quieras”

811- Profesor: Acabas de descubrir que con 6 unidades se acaba el problema que tenías

812- Alumno29: Cuando vas a comprar no compras 6, compras las que necesitas… Cuando mi madre va a comprar no trae 6 botellas de detergente

813- (Risas en el aula)

814- Profesor: Bueno, la última y acabamos… Vamos a la última y así llegamos a la hora en punto… Este… este dice… mira… lo que pago… parte… parte del coste… Lo que pago es, de 3 pago 2, de 2 pago uno y medio y de 1 pago uno con tres… Eso es lo que pago… Luego, si me voy a 6, pago cuatro, pago cuatro y medio y pago tres y medio… tres coma nueve… Este es igual que el de antes, pero más breve, más telegráfico, ¿no?

815- Observador: No, y son unidades que pago, no pone precio

816- Profesor: No pone precios… Uhm… este es el…

817- Observador: Unidades que pago

818- Profesor: No pone precios… le da igual el precio. Para contestar a la pregunta le da igual el precio… A este (señalando la resolución proyectada)… Aah… Cerramos… queda un minuto, dos minutos… Cerramos la discusión… ¿Hemos alumbrado la verdad?

819- (Se oye en el aula: No…. no… depende)

820- Profesora del grupo: (dirigiéndose al profesor), una pregunta… ¿Nadie… ningún alumno contestaba por casos?

821- Profesor: Sí

822- Profesora del grupo: Por ejemplo, qué pasa cuando compro 5… cuando compro 5, a lo mejor me interesa una oferta y otra

823- Profesor: A ver… Voy a, voy a… a decir… hay algunas respuesta pero no han salido en este nivel… en otro nivel académico han salido… hubo un alumno que dijo… varios dicen…

824- Alumno11: Pero…

825- Profesor: Perdón, y acabo… Dicen "el 70% y el 50%, lo tengo claro… siempre es mejor el 70%"... Luego en realidad el problema se reduce a comparar dos cosas

826- (La clase en general dice: Sí…. sí…)

827- Profesor: Eso no sé si ha salido entre vosotros porque no lo he visto pero en los grupos anteriores no han salido… Solo he de comparar el 70 con el 3x2… ¿Cómo lo puedo comparar si se refieren a número de botellas diferente, si uno está en porcentaje y el otro no? Eh?... Eso reduce el abanico de posibilidades… Tengo dos posibilidades: pasar el 3x2 a porcentaje o pasar el 70% en la segunda unidad a unidades, a trabajar costes o lo que sea… jugar con eso… es lo único que puedo hacer

828- Profesora del grupo: ¿Pero ninguno piensa qué pasa cuando compro, por ejemplo, 5?

829- Profesor: Sí, sí… hay gente que lo hace, lo que pasa es que… pasa lo mismo que con el que compra 3

830- Alumno9: Eso no nos preocupa, porque no está en ninguna oferta, el 5

831- Profesor: El que compra 3, va a tener productos a los que no le aplica ningún beneficio

832- Observador: Pero sí hay resoluciones de compro dos, dos, dos… otro de compro tres, tres, tres… Otro que tiene en cuenta los dos casos y otro que "si compro uno, si compro dos, si compro tres…" hasta el cinco, creo que llega

833- Profesor: Bueno… (dirigiéndose al alumno11) Concluye

834- Alumno11: Lo que hemos sacado aquí en petit comité… (ha estado toda la sesión reflexionando con el alumno14) Vamos a ver… nosotros hemos dicho que el 70% siempre es mejor menos cuando compramos cantidades múltiplos de tres, impares… es decir, 3, 9…

835- Profesor: O cinco

836- Alumno11: ¿Eso es múltiplo de 3?

837- Profesor: No, pero 5…

838- Alumno11: Entonces te sale mejor el 70%

839- Profesor: Lo único que puedo concluir de lo que he visto es que los procedimientos… que hay muchos procedimientos… que al final sale el mismo resultado… el 70%... Hay varias maneras de resolver este problema que llegan a la misma conclusión… el 70% es lo mejor… Es lo único que puedo concluir… ¿Eso es lo único que puedo concluir? ¿Es lo único que se os ocurre después de esta discusión?

840- Alumno11: No

841- Alumna2: Que según la cantidad que te lleves

842- Profesor: ¿Eh?

843- Alumna2: Yo estoy con David, que según la cantidad que te lleves te vendrá mejor el del 3x2 o el del 70%

844- Alumno11: Y ya está

845- Alumno9: Es mejor el del 70

846- Alumna38: No, si compras 3 no

847- Alumno11: Pues si yo te he dicho… va a salir siempre mejor la oferta del 70% menos cuando compramos cantidades de 3, múltiplos, o sea…

848- Alumna2: Múltiplos de 3…

849- Alumno11: Impares

850- Alumna2: Impares…

851- Profesor: Han salido métodos que reducen a la unidad el… dicen "coste por unidad", "descuento por unidad" y hay otros que lo relativizan comparando con el coste total, con toda la compra. Son las dos opciones… las dos opciones… coste en relación con la compra o coste por unidad y ambas llegan a la misma conclusión… 70% es lo mejor… Luego está decir, bueno, de todo esto yo no me quedo con ninguna porque al final no me convence, no me ha dado respuesta al problema… No sé qué pensaréis pero ahí se queda… No da tiempo… Podría aún seguir con tareas…

852- Alumno11: Pero a mí no me ha quedado claro cómo concluyes entonces

853- Profesor: Pues mira, yo concluyo…

854- Alumno11: Porque yo te estoy dando mis datos y mis estadísticas y me estás diciendo que…

855- Profesor: Concluyo poniéndote varios ejemplos y a partir de estos ejemplos, qué puedes concluir

856- (Se proyecta el ejemplo de los 6 cds por un precio y 7 cds por otro precio)

857- Profesor: Si en la tienda me dan 7 por 40 y en la otra me dan 6 por 39, ¿de qué dependerá el resultado?

858- (En el aula se oye: del precio por cd)

859- Profesor: ¿Cuál será la mejor?

860- Alumna38: La de 7 cds (la alumna2 también lo dice)

861- Profesor: ¿Cómo lo sabes?

862- Alumna38: Porque por 1 euro tienes un cd más

863- Profesor: (Mira el ejemplo proyectado)… No me había dado cuenta… tendré que cambiar los números

864- Observador: Pero ahí ya no está diciendo que depende de si necesito 7 o necesito 6

865- Alumna8: Depende del precio por cd

866- Observador: Ahora ya depende del precio por cd…

867- Profesor: Ya no depende de las que me llevo ni depende de… ya no depende de nada

868- Alumna2: Es el precio por cd

869- Observador: Independientemente de la cantidad…

870- Alumno6: Sí, no… tiene que ver la cantidad para sacar el precio por cd

871- Observador: Sí, sí pero no tenemos que poner la coletilla de "el precio por cd sale mejor, pero si necesito 7… según…"

872- Alumna2: Cuanto me llevo… no

873- Alumna8: Dependerá directamente de la diferencia

874- Profesor: Entonces la discusión de antes… te llevas 2 botellas, o te llevas… ¿Qué pasa aquí?

875- Alumna2: Ya no ponemos esa pega

876- Alumno16: No, es que ahora nadie va a decir ¿y si compro nueve?

877- Profesor: ¿Entonces cuál es la mejor oferta?

878- (Barullo en la clase, los alumnos hablan y no se entiende, pero están razonando)

879- Profesor: ¿Aquí está claro cuál es la mejor oferta ¿no?

880- (Se oye en la clase: Sí…)

881- Profesor: ¿Por qué aquí sí y antes no?... Amigo…

882- Alumno14: No, pero ¿y si quiero comprar 5 cds?

883- Alumna2: Es lo que estaba diciendo la chica (refiriéndose a Observador)

884- Profesor: Pues mira que ha sido rápida ella (refiriéndose a la alumna38)

885- Alumna37: Pero es que la diferencia entre los otros precios era… eran muy diferentes los precios y en uno no te ponía precio… aquí se va 1 euro

886- Profesor: Pero este… este entra en la discusión del número de botellas

887- Alumno11: Pero bueno, este, es… con las ofertas que tienes aquí (refiriéndose a la tarea de los vinos) puedes comprar todas las cantidades que quieras… ahí no puedes (refiriéndose al ejemplo de los cds)

888- Profesor: ¿No? Puedo comprar 12

889- Alumno11: Pero no puedes comprar 5, no puedes… Yo quiero 5 y no puedo comprar 5

890- Alumna38: Bueno, pues te llevas uno más

891- Alumno11: Bueno, pero es que no estamos en eso

892- Profesor: Bueno, gracias por vuestra colaboración, ¿eh? y… ahora (hace un gesto como… os toca pensar y reflexionar sobre todo esto)

FIN DE LA SESIÓN