MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 10 (2), 2017 doi: 10.4995/msel.2017.6680.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Análisis de los procesos de resolución de tres tareas de modelización

Analysis of the resolution processes of three modeling tasks

César Gallart Palau
Universitat Cardenal Herrera CEU.
gallartcesar@uchceu.es
L. M. García-Raffi
Universitat Politècnica de València
lmgarcia@mat.upv.es

Irene Ferrando Palomares
Universitat de València.
irene.ferrando@uv.es

Abstract

En el presente artículo presentamos un análisis comparado del proceso de resolución de tres tareas de modelización por parte de alumnos de 3º ESO (13-14 años), diseñadas a partir de tres perspectivas distintas: las Modelling-Eliciting Activities, el proyecto LEMA, y los Problemas Matemáticos Realistas. El objetivo de este análisis es obtener una caracterización metodológica de las mismas que permita al profesor de secundaria una adecuada selección y secuenciación de las tareas para su implementación en el aula.

In this paper we present a comparative analysis of the resolution process of three modeling tasks performed by secondary education students (13-14 years), designed from three different points of view: The Modelling-eliciting Activities, the LEMA project, and the Realistic Mathematical Problems. The purpose of this analysis is to obtain a methodological characterization of them in order to provide to secondary education teachers a proper selection and sequencing of tasks for their implementation in the classroom.

Palabras clave: modelización matemática; tareas de modelización; competencia matemática; educación secundaria
Keywords: mathematical modeling; modeling tasks; mathematical competence; secondary education.

1. Introducción

Maaß (2010, p. 287) afirma que: "Modelizar significa comprender un problema realista, establecer un modelo del problema y encontrar una solución trabajando matemáticamente sobre el modelo". Desde el trabajo seminal de Pollack (1969), la modelización matemática ha tenido una fuerte influencia en los sistemas educativos actuales. El informe PISA y la introducción de las competencias clave de la OCDE en la enseñanza (OCDE, 2004), en particular de la competencia matemática, fundamentada en la denominada flor de KOM (Niss, 2003 y 2004), ha contribuido a aumentar la necesidad de prácticas en el aula que tengan que ver con la realidad y que permitan potenciar la aplicabilidad y funcionalidad de las matemáticas.

Una de las dificultades con las que el profesor de secundaria puede encontrarse a la hora de poner en marcha una actividad basada en la modelización es diseñar las propias tareas de modelización. Maaß (2006, p. 115) define las tareas de modelización como "problemas auténticos, complejos y abiertos, relacionados con la realidad", auténticos, en el sentido de pertenecientes al mundo real o a una realidad inventada pero plausible, complejos, en el sentido de que el proceso de resolución no es conocido de antemano sino que requiere de un proceso previo de reflexión, y abiertos, en el sentido de puede haber más de una vía de resolución posible.

Podemos encontrar en la literatura ejemplos de prácticas de modelización en la educación secundaria en las llamadas Modelling-Eliciting Activities (abreviadamente MEAs, en Lesh y Doerr, 2003, y Ärlebäck y Doerr, 2015), el proyecto europeo LEMA (acrónimo en inglés de Learning and Education in and through Modelling and Applications, descrito en Maaß y Gurlitt, 2011), o en los Proyectos matemáticas realistas (abreviadamente PMR, en Sol, 2008).

En una experiencia realizada a lo largo de varios cursos con alumnos de 3ºESO, hemos trabajado con distintas tareas de modelización, adaptadas o diseñadas a partir de estas perspectivas, con el objetivo de desarrollar habilidades específicas de modelización y resolución de problemas reales (ver Gallart, 2016). En esta comunicación queremos presentar un análisis comparado de los procesos de resolución de tres de estas tareas: El mejor colegio, basada en las MEAs; La carrera, adaptada del proyecto LEMA; y La sombra en el patio de recreo, en línea con las tareas propuestas en los PMR (ver Tabla 1, el enunciado completo de estas tareas puede verse en el Anexo I). Con este objetivo, en el siguiente apartado, realizaremos una breve revisión de la modelización desde las tres perspectivas citadas, para posteriormente centrarnos en el diseño de la experiencia y en la descripción de la herramienta de análisis utilizada.

Tarea	Situación	Fuente
El mejor colegio	Se propone que, a partir de la información cualitativa y cuantitativa relativa a ciertos aspectos de diferentes colegios, se determine cuál es el mejor de ellos.	MEAs
La carrera	Se propone una prueba de Educación Física. Se colocan diez conos a los largo de la línea lateral de una pista de baloncesto. Cada corredor sale desde la esquina opuesta, rodea un cono y corre hasta tocar la canasta del otro lado. Se debe escoger qué cono rodear entre los diez que hay, y dónde situar un nuevo cono para obtener ventaja en la carrera.	LEMA
La sombra en el patio de recreo	Se plantea la necesidad de plantar nuevos árboles en el patio del colegio con el fin de mejorar la zona de sombra a la hora del recreo.	Propia, en línea con los PMR

Tabla 1: Tareas propuestas.

2. Marco teórico

La modelización, desde la perspectiva de las MEAs, se define como una actividad de resolución de problemas, construidos a partir de una serie de principios instruccionales (que pueden verse en detalle en Lesh, Hoover, Hole, Kelly y Post, 2000, p. 591-645), donde los alumnos deben desarrollar un modelo a partir de la situación propuesta que pueda aplicarse también a otras situaciones similares (Lesh y Doerr, 2003). Entre las tareas que podemos encontrar dentro de las MEAs destacamos las actividades de obtención de estructuras (Lesh, 1997), en las que se incluye El mejor colegio. En este tipo de tareas el alumno debe cuantificar cierta información (cuantitativa y cualitativa) para tomar una decisión razonada, pudiéndose resolver en una o dos sesiones de aula.

LEMA es un proyecto financiado por la Unión Europea, desarrollado entre el año 2006 y 2009, con el objetivo de facilitar un cambio en las prácticas docentes a fin de incluir la modelización en la enseñanza de las matemáticas (Maaß y Gurlitt, 2011). Las tareas que el proyecto LEMA propone presentan una situación real de la que se derivan diferentes cuestiones que los alumnos deben abordar. La carrera es precisamente una adaptación de una tarea propuesta en LEMA y que puede verse también en Galbraith y Stillman (2006).

En los PMR los alumnos deben, a partir de una situación real, concretar el problema a resolver. Son tareas pensadas como proyectos de investigación de larga duración, donde los alumnos toman especial protagonismo en su formulación y diseño (Vilatzara, 2001a y 2001b, ver también Sol, 2008). La sombra en el patio de recreo está diseñada en línea con las tareas propuestas en los PMR.

Las tres perspectivas descritas nos ofrecen pues un amplio abanico en lo que respecta a las tareas de modelización, desde la menos estructuradas, como son los PMR, hasta las más estructuradas, como son las MEAs, y que, a diferencia de las primeras, no son vistas como proyectos de aula de larga duración. Todas ellas se resuelven en pequeños grupos, con una fase final de comunicación, en la que los alumnos deben debatir y revisar su trabajo, razonar y justificar sus decisiones con el resto de compañeros. De la descripción de la experiencia nos ocuparemos en el siguiente apartado en detalle.

3. Diseño de la experiencia

La experiencia se llevó a cabo en varios grupos completos de 3ºESO (13-14 años). Ninguno de los alumnos había trabajado anteriormente en actividades de este tipo, siguiendo, hasta el momento, una enseñanza tradicional basada en los problemas clásicos de los libros de texto. La actividad se desarrolla en pequeños grupos (2-3 alumnos), formados libremente por ellos, siendo además los propios alumnos los que escogen la tarea a realizar entre las diferentes tareas propuestas (un total de nueve tareas en las que se encuentran las tres descritas en este artículo y que pueden verse en Gallart, 2016), a lo largo de cinco sesiones de clase, entre las que se incluye una sesión inicial de presentación por parte del profesor (descripción de la metodología y criterios de evaluación, formación de los grupos de trabajo y selección de la tarea a realizar), una sesión final de exposición de los trabajos, y tres sesiones de trabajo para la resolución de la tarea escogida.

Siguiendo las recomendaciones que se recogen en las tres perspectivas descritas, durante la resolución de la tarea es el alumno el que asume el papel protagonista, trabajando de forma autónoma e independiente, con la mínima ayuda del profesor, que solo interviene en caso de auténtico bloqueo y a petición del alumno (para más detalle sobre el papel que debe jugar el profesor durante una actividad basada en la modelización, ver Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2015).

Durante toda la experiencia se recogió una serie de documentación, en la que se incluye: el diario del alumno, donde describen su resolución de la tarea en el día a día del aula; el diario del profesor-investigador, en el que se recogen sus impresiones sobre el trabajo de los diferentes grupos; grabaciones en audio de los debates entre los alumnos y el profesor; y la exposición final de los distintos grupos, realizada mediante diapositivas digitales. A partir esta documentación, y mediante una herramienta propia de análisis, hemos podido realizar una reconstrucción de las producciones de los distintos grupos de alumnos. De esta herramienta de análisis hablaremos en el siguiente apartado.

4. Metodología

Con el fin de realizar un análisis del proceso de resolución de las tareas propuestas (objetivo del presente artículo), hemos realizado una reconstrucción de las producciones de tres grupos de alumnos (un grupo por cada una de las tareas propuestas), utilizando para ello una herramienta de análisis basada en el denominado ciclo de modelización. El ciclo de modelización está constituido por las fases por las que un resolutor transitaría en el proceso de resolución de una tarea de modelización (Borromeo-Ferri, 2006), proceso que puede resultar muy enmarañado, en el sentido de no secuencial. En línea con lo afirmado por Maaß (2006), la importancia del ciclo de modelización radica en el hecho de que nos da un marco de referencia para describir las acciones que se dan en la resolución de una tarea de modelización.

De los diferentes ciclos de modelización propuestos (y que pueden verse en Borromeo-Ferri, 2006), hemos extraído un listado de acciones vinculadas con las transiciones entre las fases del ciclo: comprensión, formulación, simplificación/estructuración, matematización, resolución matemática, interpretación, validación y comunicación. Basándonos en estas acciones, diseñamos una serie de preguntas que nos permiten analizar el proceso de modelización seguido por los alumnos. Estas preguntas suponen nuestra herramienta de análisis, tal y como se recoge en la Tabla 2 (para más detalles sobre esta herramienta ver Gallart, 2016).

Pregunta	Acción
¿Se formula un problema que pueda dar respuesta, total o parcial, a la situación original propuesta?	Comprender la situación en la que se enmarca la tarea, tomando decisiones, elaborando hipótesis y supuestos que lleven al planteamiento de un problema o sub-problemas.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?	Simplificar y seleccionar los elementos y relaciones relevantes, identificando las matemáticas que subyacen en la realidad.
¿Se usan representaciones?	Utilizar representaciones (gráficos, dibujos, esquemas,...) para codificar la realidad en términos matemáticos e interpretar los resultados obtenidos.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?	Utilizar el lenguaje formal y simbólico para codificar la realidad en términos matemáticos, resolver el problema, e interpretar los resultados obtenidos.
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?	Trabajar con las herramientas y procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema planteado.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	Validar las soluciones matemáticas en la realidad, reflexionando sobre el modelo utilizado y llegando a conclusiones razonadas.

Tabla 2: Herramienta de análisis de las producciones de los alumnos .

En el siguiente apartado pasaremos a analizar el proceso de resolución seguido en cada una de las tres tareas.

5. Reconstrucción del proceso de modelización

Mediante nuestra herramienta de análisis, y a partir de la documentación recogida durante la experiencia, hemos realizado la reconstrucción del proceso de resolución seguido por un grupo de alumnos en cada una de las tres tareas presentadas, que puede verse en detalle en las Tablas 3 (para La sombra en el patio de recreo), 4 (para La carrera) y 5 (para El mejor colegio). Pasamos a describir esta reconstrucción para cada una de las tareas, incluyendo comentarios (entrecomillados y en cursiva), dibujos, gráficas, tablas y cálculos de los alumnos extraídos de sus diarios.

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?	Determinar el árbol que mayor sombra proyecta. Una vez escogido el modelo de árbol a plantar, se formulan nuevos sub-problemas: calcular el área de la sombra proyectada por este árbol; determinar la superficie del patio a sombrear; el número de árboles necesarios para hacerlo; y finalmente su disposición óptima en el patio.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?	Estudian el caso de un único árbol. La sección plana de la copa del árbol y su sombra se idealizan mediante figuras geométricas conocidas: triángulo, rectángulo, círculo. Pasan de un sólido tridimensional, la copa del árbol, a una figura plana, su sección plana. La razón entre el área de la figura que representa la copa y la de su sombra se estudia a partir de modelos geométricos a escala en 2D (Figura 1). Establecen que la disposición de los árboles en el patio depende de la longitud de la sombra que proyectan, pues las sombras no deben superponerse.
¿Se usan representaciones?	Utilizan distintos tipos de representaciones: modelos geométricos que simulan los árboles en 2D (Figura 1); idealizaciones de la realidad mediante las figuras planas elementales para justificar el uso de estos modelos (Figura 3); esquemas para mostrar las medidas del colegio o la disposición final de los árboles en el patio (Figura 5).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?	Los resultados obtenidos a partir de sus mediciones se recogen y ordenan en tablas (Figura 2). La relación entre el número de árboles, el área a sombrear y el área de la sombra proyectada, se expresa mediante una fórmula (Figura 4).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?	Para resolver el primer problema planteado obtienen la relación entre el área de la sección plana del árbol y la de su sombra. Para ello realizan mediciones a partir de sus modelos a escala y aplican las fórmulas conocidas para el cálculo del área. Utilizan la razón obtenida para el círculo para calcular la sombra proyecta por un ombú. La obtención del número de árboles se obtiene determinando el porcentaje de la superficie del patio a sombrear, y la manipulación de la fórmula que han planteado. La longitud de la sombra proyecta se obtienen mediante semejanza y la aplicación de la regla de tres.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	La elección del ombú se realiza en base a razonamientos matemáticos. El número de ombúes necesarios se obtiene a partir de su fórmula, y lo consideran razonable (5 ombúes), en relación con el área del patio. La distancia a la que deben plantarse (11 metros unos de otros) es compatible con las dimensiones del patio.

Tabla 3: Análisis del proceso de resolución de La sombra en el patio de recreo.

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?	Identificar el cono que minimice la distancia total recorrida. Situar un nuevo cono que minimice esta distancia.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?	Dividen en dos tramos (segmentos rectilíneos) el recorrido de la carrera. La velocidad del corredor es la misma en estos dos tramos. Relacionan estos segmentos con la hipotenusa de dos triángulos rectángulos. La distancia total recorrida será la suma de estos dos segmentos.
¿Se usan representaciones?	Los cálculos iniciales se realizan a partir de un esquema (Figura 6). Se representa la gráfica de la función planteada mediante el programa Graph (Figura 9).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?	Se realizan cálculos aritméticos para determinar la distancia total de la carrera para cada cono. Obtienen una función para calcular esta distancia (Figura 8).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?	Se aplica el Teorema del Pitágoras para calcular la distancia total de la carrera para cada cono. Se utiliza una sucesión de intervalos encajados para determinar la posición del nuevo cono que minimice la distancia recorrida en la carrera (Figura 7). Finalmente, se relaciona la distancia total recorrida en la carrera con la distancia a la que se encuentra el cono del fondo de la pista mediante una expresión algebraica (Figura 8).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	Se utilizan dos procedimientos distintos (intervalos encajados y gráfica de su función) para situar el cono que minimice la distancia a recorrer en la carrera. Las soluciones obtenidas en ambos procedimientos son muy similares.

Tabla 4: Análisis del proceso de resolución de La carrera.

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?	Escoger el mejor colegio a partir del diseño de un sistema de puntuación de los datos proporcionados.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?	Se reasignan los valores de las variables para cada colegio, desde 6 (el mejor) hasta 1 (el peor). Posteriormente esta escala sobre 6 se transforma en una escala sobre 10, más usual. Se da un peso, en forma de porcentaje, a cada variable, según su importancia (Figura 10). La puntuación final de cada colegio será la suma de su puntuación en cada variable (Figura 11).
¿Se usan representaciones?	No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?	Se utilizan tablas para ordenar y mostrar los datos (Figuras 10 y 11).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?	Se reasignan los valores de cada variable según la escala correspondiente, en algunos casos siguiendo un criterio de proporcionalidad. Se realizan cálculos con porcentajes para obtener las puntuaciones de cada variable, según su peso. Se realizan cálculos aritméticos para obtener las puntuaciones totales de los colegios y se cambia de escala: de una puntuación sobre 6 se pasa a una sobre 10.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	Se basan en su propia opinión para categorizar y dar un peso a cada una de las variables.

Tabla 5: Análisis del proceso de resolución de El mejor colegio.

En La sombra en el patio de recreo, la situación de partida requiere de un proceso de simplificación previo que lleve a la formulación de distintos sub-problemas, encontrándose diferencias entre los sub-problemas planteados por los diferentes grupos de alumnos que han resuelto esta misma tarea. En el caso del grupo que aquí analizamos, los problemas son escoger el tipo de árbol que produce una mayor sombra, según la forma idealizada de la sección plana de su copa; calcular la superficie del patio a sombrear; el número de árboles del tipo escogido necesarios para hacerlo; y cómo distribuirlos de forma óptima para que sus sombras no se superpongan. La situación real propuesta ofrece, por tanto, una gran riqueza de en cuanto a los aspectos que deben ser considerados al realizar el planteamiento de los diferentes sub-problemas, y precisa de un proceso de simplificación y estructuración mediante el que se seleccionan los elementos relevantes necesarios para su resolución. El estudio de un único árbol supone una simplificación necesaria para poder abordar el problema, así como pasar de una forma tridimensional, la copa del árbol, a una forma bidimensional, la sección plana de la copa, idealizada con figuras planas elementales (triángulo, círculo, cuadrado), mediante modelos geométricos en 2D (Figura 1), que les permitirá estudiar la relación entre el área de la sección plana de la copa y la de la sombra proyectada (Figura 2) y escoger el árbol que plantarán en el patio (Figura 3), cuyo número determinarán a partir de una fórmula que ellos mismos han planteado (Figura 4).

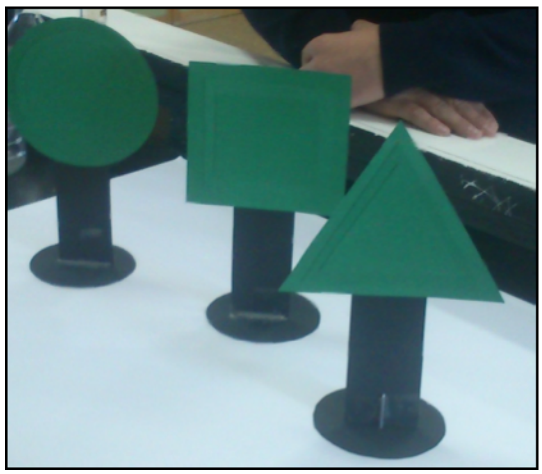


Figura 1: Modelos geométricos de los árboles construidos por los alumnos.

	Círculo	Triángulo	Cuadrado
Área Original	33,18 cm2	38,45 cm2	63,86 cm2
Área Sombra	60,79 cm2	51,7 cm2	72,93 cm2
Relación	1,83	1,34	1,14

Figura 2: Tabla con la razón entre el área de la copa original y el área de la sombra proyectada para cada modelo de árbol.

La validación de la solución se produce por su adecuación a la realidad: el número de árboles obtenidos a partir de su modelo les parece "un número razonable, teniendo en cuenta el tamaño del patio de recreo" (ver Figura 5). Por otra parte, en esta tarea no hay una conclusión clara: los alumnos van añadiendo nuevos sub-problemas a la tarea, que enriquecen su resolución, y que finalizan, bien debido al factor tiempo o bien por que llegan a una solución que consideran satisfactoria.

En el enunciado de La carrera y El mejor colegio se incluye una pregunta directa y cerrada: la comprensión y formulación del problema es por tanto casi inmediata. En ambas tareas la situación inicial es plausible, pero no real, y tiene una complejidad menor que la tarea de la sombra, lo que deriva en planteamientos muy similares por parte de los distintos grupos que

Figura 3: Imagen con el árbol escogido, el Ombú, de forma circular.

$$\frac{\text{Superficie que quieres sombrear}}{\text{Relación sombra * copa de árbol}} = \text{Nª de árboles que necesitas del tipo}$$

Figura 4: Fórmula para calcular el número de árboles necesarios para sombrear el patio.

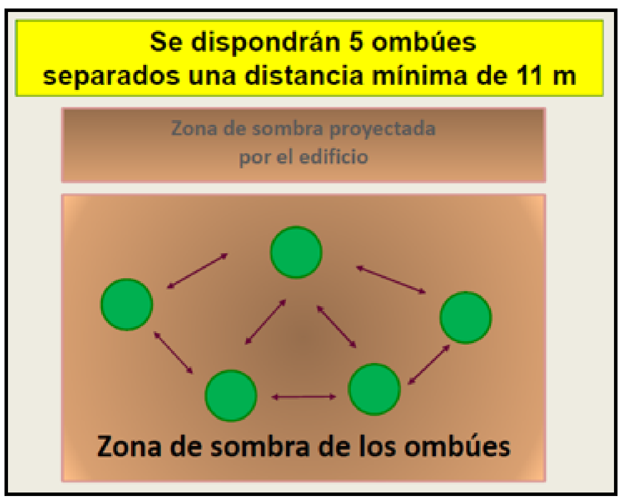


Figura 5: Esquema con la distribución final de los cinco ombúes en el patio.

han realizado la misma tarea. En La carrera es fundamental identificar el elemento clave sin el cual el problema no puede ser resuelto: cada uno de los dos triángulos rectángulos que forman los dos tramos en que se divide la carrera con los laterales y los fondos de la pista de baloncesto (ver Figura 6). Aplicando el Teorema de Pitágoras calculan la longitud de los tramos para cada uno de los diez conos. De esta forma establecen que el cono que deben rodear es el octavo, y que el nuevo cono debe situarse entre el octavo y el noveno, extremos donde la distancia total recorrida es más corta (ver Figura 7).

Repiten este proceso para afinar la situación de este nuevo cono, mediante la construcción de una sucesión de intervalos encajados. Finalmente, relacionan la distancia total recorrida en la carrera con la distancia a la que se encuentra el cono del fondo de la pista mediante una función (ver Figura 8), que representan utilizando el software gratuito Graph (ver Figura 9), instalado en el ordenador del aula, obteniendo el punto mínimo de la gráfica donde situar el nuevo cono (y que mejora la solución obtenida mediante la construcción de los intervalos).

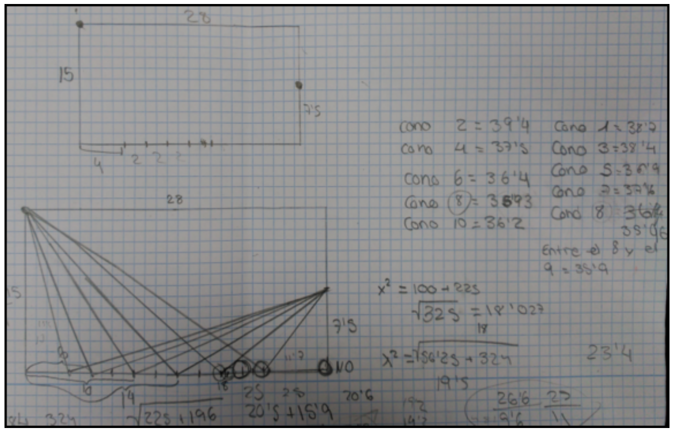


Figura 6: Esquemas y cálculos realizados por los alumnos en La carrera.

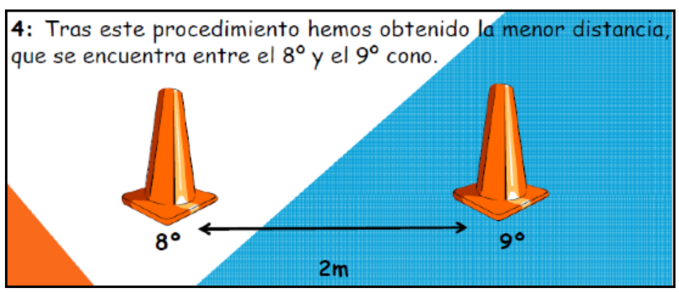


Figura 7: Situación del nuevo cono.

$$d = \sqrt{15^2 + x^2} + \sqrt{(28 - x)^2 + 7{,}5^2}$$

Figura 8: Función donde se relaciona la distancia total recorrida, d, con la distancia a la que se sitúa el cono con respecto al fondo de la pista, x.

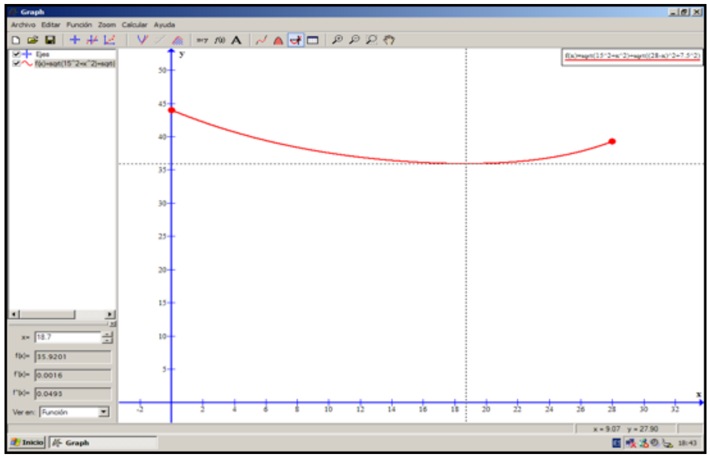


Figura 9: Imagen de la representación gráfica de la función.

En El mejor colegio es necesario construir un sistema de puntuación a partir de la normalización de las variables propuestas (unificando los valores de las distintas variables en una misma escala) y su categorización (mediante la asignación de un peso en forma de porcentaje, en Figura 10), que permita obtener una puntuación final para cada uno de los colegios (Figura 11).

	Aulas de desdoble (10%)	Ordena-dores (5%)	Alumnos (10%)	Superficie (5%)	Nota media de expedien-te (25%)	PAU (20%)	Repetidores (15%)	Presupuesto (10%)
Colegio Chuli	0,1	0,3	0,4	0,25	1,5	0,8	0,45	0,2
Colegio Guay	0,2	0,22	0,3	0,2	1	1	0,3	0,2
Colegio Mola	0,3	0,07	0,6	0,1	1,25	1,2	0,9	0,2
Colegio Tope	0,4	0,15	0,2	0,05	0,25	0,2	0,75	0,4
Colegio Diver	0,5	0,07	0,5	0,3	0,75	0,4	0,6	0,4
Colegio Super	0,6	0,15	0,1	0,15	0,5	0,6	0,15	0,6

Figura 10: Tabla con la puntuación final de cada variable, según su porcentaje.

clasificación	colegios	Puntuación (sobre 6)	Puntuación (sobre 10)
1º	Colegio Mola	4,62	7,7
2º	Colegio Chuli	4	6,6
3º	Colegio Diver	3,52	5,8
4º	Colegio Guay	3,42	5,7
5º	Colegio Super	2,85	4,75
6º	Colegio Tope	2,4	4

Figura 11: Tabla con la puntuación final de los colegios.

A diferencia de lo que ocurre en La sombra en el patio de recreo, en las otras dos tareas no es posible validar la solución por contraste con la realidad: la validación se produce por la comparación entre las soluciones obtenidas mediante los dos procedimientos descritos (La carrera), o por el consenso al que llegan los miembros del propio grupo a la hora de establecer los criterios con los que normalizan y categorizan las variables (El mejor colegio).

6. Conclusiones

Nuestra herramienta de análisis nos ha permitido identificar diferencias entre las tres tareas de modelización implementadas, e inferir una caracterización metodológica de lo que podríamos denominar una tarea de modelización abierta o cerrada, lo cual puede tener interesantes implicaciones. Así, las tareas más estructuradas y cerradas (como El mejor colegio o La carrera) están más indicadas para trabajar con alumnos sin experiencia previa en modelización, ya que tienen una finalización más evidente, están más centradas en las acciones relacionadas con la construcción y resolución matemática del modelo (de hecho, las diferencias observadas en las resoluciones de unos grupos y otros en estas tareas se encuentran principalmente en el mayor o menor uso del lenguaje simbólico y las representaciones que las acompañan), y permiten trabajar conceptos y procedimientos matemáticos concretos. Sin embargo, las tareas más abiertas (como La sombra en el patio de recreo) son más adecuadas para alumnos con cierta experiencia en modelización. Deben ser vistas como proyectos de investigación de larga duración, donde se trabajan de manera más global y completa todas las acciones necesarias para transitar por el ciclo de modelización, incluidas aquellas acciones pertenecientes al mundo real (como el planteamiento de diferentes sub-problemas que den respuesta a la tarea, la selección de los elementos relevantes de la realidad que permitan su resolución, y la validación de la solución), donde los alumnos pueden encontrar mayores dificultades y diferencias con respecto a la resolución de problemas tradicionales, y que permiten una mayor contextualización del conocimiento matemático del alumno.

Referencias

Ärlebäck J. B. y Doerr H. M. (2015).
Moving beyond a single modelling activity.
En G. Stillman, W. Blum y M. S. Biembengut (Eds.), Mathematical Modelling in Education Research and Practice. (pp. 293-303).
Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Blum, W. y LeißD. (2007).
How do students and teachers deal with mathematical modeling problems?
En Haines y otros (Eds.), Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics, (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Borromeo-Ferri, R. (2006).
Theorical and empirical differentiations of phases in the modeling process.
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 41, 453–465.

Calabuig, J.M., y otros (2005).
La modelización como competencia transversal en el sistema educativo español.
UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 69, 44–51.

Galbraith, P. y Stillman, G. (2006).
A Framework for Identifying Student Blockages during Transition in the Modeling Process.
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 143–162.

Gallart C. (2016).
La modelización como herramienta de evaluación competencial.
Tesis doctoral:
https://riunet.upv.es

Gallart C., Ferrando I. y García-Raffi L.M. (2015).
El profesor ante la actividad modelizadora en el aula de secundaria.
SUMA, 79, 9–16.

Lesh, R. (1997).
Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones.
Enseñanza de las ciencias, 15(3), 377–391.

Lesh R. y Doerr H. M. (2003).
Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem-solving.
En R. Lesh y H.M. Doerr (Eds.), Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. (pp. 3-34).
Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lesh R., Hoover M., Hole B., Kelly A. y Post T. (2000).
Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers.
En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. (pp. 591–645).
Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Maaß K. (2006).
What are modeling competencies?
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 38(2), 113–142.

Maaß K. (2010).
Classification scheme for modeling task.
Journal für Didaktik Didaktik, 31, 285–311.

Maaß K. y Gurlitt J. (2011).
LEMA –Professional development of teachers in relation to mathematical modelling.
En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. (pp. 629-639).
Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Niss M. (2003).
Quantitative Literacy and Mathematical Competencies.
En B.I. Madison y L.A. Steen (Eds.), Quantitative Literacy — Why Numeracy Matters for Schools and Colleges. (pp. 215-220).
Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.

Niss M. (2004).
Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom project.
En Gagtsis y Papastavridis (Eds.), 3rd Mediterranean Conference on mathematical education, 3-5 January 2003, Athens, Greece. (pp. 115-124). Athens: The Hellenic mathematical society.

OCDE (2004).
La definición y selección de competencias clave. Resumen ejecutivo.
Obtenido el 2 de septiembre del 2013 en http://www.deseco.admin.ch/bfs/deseco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.DownloadFile.tmp/2005.dscexecutivesummary.sp.pdf

Pollak H. O. (1969).
How can we teach applications of mathematics?
Educational Studies in Mathematics, 2, 393–404.

Sol M. (2008).
Anàlisi De Les Competències I Habilitats En El Treball De Projectes Metemàtics Amb Alumnes De 12-16 Anys A Una Aula Heterogènia.
Tesis Doctoral:
http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200506/memories/1085m.pdf.

Vilatzara, Grup (2001a).
6 Proyectos matemáticos en la ESO: una actividad rica.
UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 27, 21–36.

Vilatzara, Grup (2001b).
Experiencias sobre proyectos e investigaciones matemáticas en secundaria.
Revista Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas.
Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas, 46, 29–46.

Anexo I: Tareas

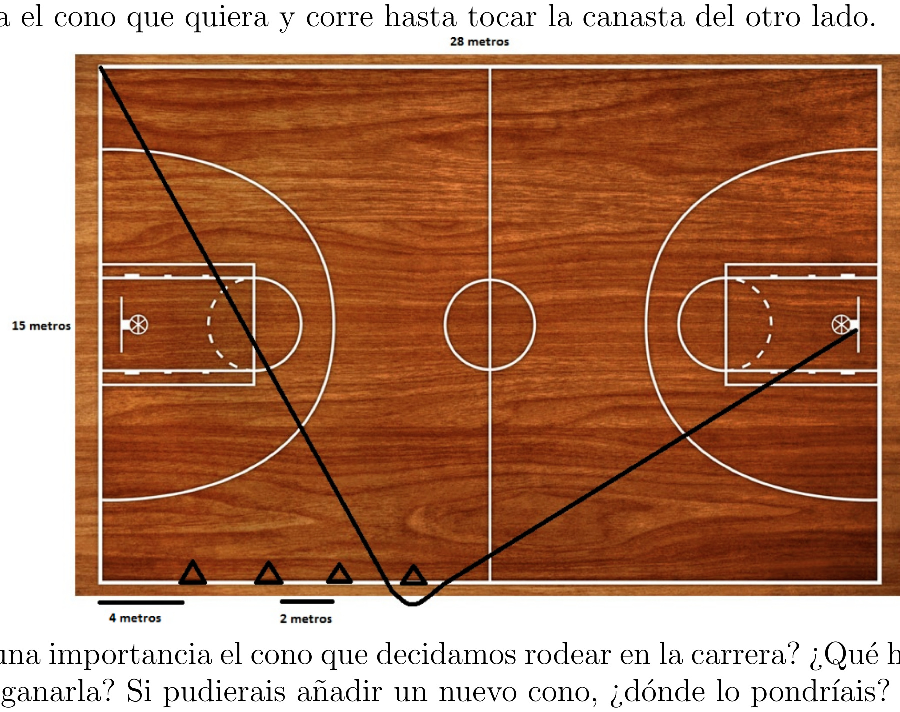
El mejor Colegio

A continuación os presentamos una tabla en la que se recogen una serie de datos pertenecientes a seis Colegios diferentes. ¿Qué Colegio elegiríais para estudiar? Atendiendo a estos datos (o cualquier otro que te parezca relevante) debéis elaborar un procedimiento para establecer la clasificación de estos Colegios (desde el mejor Colegio para estudiar hasta el peor).

	Nº de aulas de desdoble	Ordenadores por alumno	Nº de alumnos por aula	Superficie en metros cuadrados	Nota media del expediente	Nota media en las PAU	Porcentaje de repetidores (por curso)	Presupuesto para el próximo curso
Colegio Chuli	7	0.6	24	13.200	7.7	6.7	5.4%	Menos
Colegio Guay	9	0.4	25	12.600	7.3	7.0	6.1%	Menos
Colegio Mola	11	0.2	20	10.500	7.5	7.1	4.7%	Menos
Colegio Tope	12	0.3	28	9800	7.0	6.5	5.2%	Mismo
Colegio Diver	13	0.2	22	18.100	7.2	6.4	5.3%	Mismo
Colegio Super	14	0.3	29	10700	7.1	6.6	6.9%	Más

La carrera

La profesora de Educación Física ha preparado una nueva prueba de velocidad que consiste en lo siguiente: coloca 10 conos a lo largo de la línea lateral de la cancha de baloncesto, empezando a 4 metros de la línea de fondo y separados entre sí 2 metros. Cada corredor sale desde la esquina opuesta, rodea el cono que quiera y corre hasta tocar la canasta del otro lado.



¿Tiene alguna importancia el cono que decidamos rodear en la carrera? ¿Qué haríais vosotros para intentar ganarla? Si pudierais añadir un nuevo cono, ¿dónde lo pondríais?

La sombra en el patio de recreo

Como os habréis dado cuenta, el picudo ha obligado a talar numerosas palmeras en el patio central del Colegio, con lo que se nos presenta el problema de seleccionar nuevos árboles para plantar en su lugar y de esta manera establecer y mejorar las zonas de sombra de los recreos. Este problema también se plantea a la hora de diseñar un parque o jardín público. ¿Qué decisiones tomarías tú para mejorar la zona de sombra del patio?