UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Profesor/a de Educación Secundaria

SUMA Y RESTA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS A TRAVÉS DE UN JUEGO: ESTUDIO DE VIABILIDAD

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

LORENA VILLAR MORENO

Tutorizada por:

Dr. Bernardo Gómez Alfonso

Departamento de Didáctica de las matemáticas

Valencia, 22 de junio de 2015

Ficha técnica

Máster: Máster en Profesor/a de Educación Secundaria por la Universitat de València

Especialidad: Matemáticas

Autor: Apellidos: Villar Moreno
Nombre: Lorena

Título de la memoria: Suma y resta de los números negativos a través de un juego: Estudio de Viabilidad

Tutor 1: Apellidos: Gómez Alfonso
Nombre: Bernardo
Departamento: Didáctica de las matemáticas

Fecha de defensa:

Calificación:

Palabras clave:
Números negativos, suma y resta, juego, comprensión de la adición, metáforas

Keywords:
Negative numbers, addition and subtraction, game, addition comprehension, metaphors.

Códigos Unesco 5803.02 (Formación de profesores), 12 (Matemáticas) y 1299 (Didáctica de las Matemáticas)

Resumen:

Tradicionalmente se han utilizado metáforas o modelos conceptuales sobre fenómenos físicos conocidos para explicar nuevos conceptos abstractos. Así, la forma convencional de introducir a los alumnos los números negativos ha sido mediante el empleo metáforas sobre ascensores, movimientos de saldo bancario y temperaturas, que actúan de nexo entre estos conceptos, familiares para los alumnos, y los nuevos conceptos matemáticos.

Sin embargo, muchos autores han puesto de manifiesto que esta técnica puede resultar perjudicial puesto que ninguno de los modelos comentados logra explicar todas las propiedades de los números negativos y las situaciones en que estos aparecen; tal es el caso de la resta de números negativos.

El presente trabajo se centra en averiguar si, las metáforas o modelos conceptuales pueden contribuir de manera favorable a la comprensión de la resta de números negativos, en caso de tratarse de metáforas completas en relación a este tema (metáforas o modelos que logren explicar completamente la resta de números negativos), o bien cuando los alumnos conozcan sus limitaciones.

Los datos experimentales se recogieron en el IES Sorolla, de Valencia, en una clase de 1º ESO, formada por un total de 30 alumnos. Como modelo matemático completo se eligió un juego de cartas, derivado del Plus-Minus Game, desarrollado por el proyecto PALMA (Project for the Analysis of Learning and Achievement in Mathematics). En una primera fase los alumnos jugaron al juego de cartas. Posteriormente respondieron un cuestionario con preguntas cuya resolución requería de la suma y resta de números negativos, la simplificación de paréntesis y el encadenamiento de operaciones. Se les pidió que incluyeran en sus respuestas el razonamiento que habían seguido para la resolución. Finalmente se analizaron los resultados focalizado en los tipos de razonamiento aplicado.

Todos los alumnos que razonaron los ejercicios y problemas a partir del juego en el que acababan de participar, respondieron acertadamente en todas las preguntas, al igual que aquellos que combinaron razonamiento aritmético y metafórico; los primeros habían aplicado un modelo matemático completo, mientras que los segundo habían aplicado uno incompleto pero siendo conscientes de sus limitaciones. Los alumnos que respondieron razonando exclusivamente de forma aritmética o que eligieron modelos incompletos (alguno de los tres citados) sin conocer sus limitaciones, obtuvieron peores resultados. Este hecho deja patente que un modelo matemático completo puede jugar un papel claramente beneficioso en la comprensión de un nuevo concepto matemático por parte de los alumnos.

Abstract:

For a long time, metaphors and conceptual models related to physic and known phenomenons have been used to make sense of new abstract concepts. Thus, negative numbers have been introduced to students through metaphorical models, such as elevator-models, balance-debt models, and temperatures, acting as a link between known and unknown mathematical concepts.

However, a great number of researches had highlighted that, the negative number conceptualizing through metaphors, could have a damaging effect, as none of the previous models is able to explain all properties of negative numbers and situations they are involved in; such as the subtraction of negative numbers.

Present research project is targeted at analyzing if, metaphors and conceptual models can be considered always helpful when understanding the subtraction of negative numbers, as long as, we were dealing with complete metaphors with regard to this task (metaphors or models able to explain the subtraction of negative numbers consistently) or providing students were aware of the limitations of the model.

Empirical data were collected in the Sorolla Secondary School of Valencia, from a seventh's degree class of 30 students. The chosen complete mathematical model was a card game, coming from the Plus-Minus Game, developed by the PALMA Project (Project for the Analysis of Learning and Achievement in Mathematics). At a first stage students played the game. Secondly they were given a test of 6 questions involving calculation tasks of addition and subtraction of negative numbers, parentheses simplification and concatenation of linked calculations. They were asked to include the reasoning they have follow-up to solve the task. At the later stage, results were analyzed, focusing on the reasoning they had used.

Interestingly, we noticed that all the students who made use of the new card game to solve the tasks, performed satisfactory all the questions, as well as the students who combined arithmetic and metaphorical reasoning; the first group had applied a complete mathematical model while, the second group had used an incomplete model after understanding its limitations and contractions. Students who developed an arithmetic reasoning or the ones who used an incomplete model (one of the previously referred) ignoring its limitations, performed worse results and calculation errors. This finding indicates that a complete metaphor or mathematical model can develop a useful role when understanding and learning a new mathematical concept by the students.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETO DE ESTUDIO

De entre los nuevos conceptos matemáticos que los alumnos aprenden al llegar a secundaria, uno de los que mayores problemas de comprensión generan es el campo de los números negativos. Este hecho es debido, entre otros motivos, a que no pueden asociarlos con ningún concepto o idea del mundo real, físico y material que ellos conocen. A diferencia de los números naturales, que pueden entenderse como unidades u objetos independientes (sillas, coches, manzanas), y de las fracciones, que pueden ser entendidas como partes de un todo (porción de pastel…), los números negativos requieren de ellos mayor capacidad de abstracción, que están ahora aprendiendo a desarrollar, puesto que, a priori, no tienen ninguna conexión con el mundo real.

De hecho, experiencias de profesores a lo largo de los años han demostrado que cuando los alumnos de secundaria disponen de modelos físicos que asociar a los conceptos matemáticos, la comprensión de dichos conceptos se vuelve más sencilla para ellos. Bajo esta visión, se han empleado tradicionalmente metáforas basadas en temperaturas, balances económicos y ascensores para explicar en las aulas los números negativos y la forma de operar con ellos. Pero, la pregunta que se plantea en el presente trabajo es hasta qué punto el empleo de estas metáforas es útil para que los alumnos aprendan a razonar con números negativos (lo que se podría llamar, pensamiento metafórico):

¿Las operaciones con números negativos asociadas una realidad física (metáforas) son resueltas satisfactoriamente por los alumnos con mayor facilidad que las operaciones enunciadas en forma de ejercicio matemático puro? ¿Cómo emplean los alumnos las metáforas o contextos a la hora de abordar los problemas con números negativos? ¿En qué medida el pensamiento metafórico desarrollado en algunos problemas les ayuda a entender los números negativos y resolver satisfactoriamente otras operaciones no contextualizadas o asociadas a un contexto diferente? ¿Cómo afecta el hecho de que estas metáforas no sean completas y no puedan explicar todos los problemas con números negativos?

2. CONTEXTUALIZACIÓN

A continuación se lleva a cabo una contextualización de los números negativos a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Para ello, se aportan las referencias a los números negativos contenidas en las disposiciones legales estatales y autonómicas, del currículo de Educación Secundaria Obligatoria, publicadas en el Documento Oficial de la Generalitat Valenciana y en el en el Boletín Oficial del Estado.

Así mismo, se aportan las disposiciones sobre números negativos contenidas en el proyecto de centro del IES Sorolla, centro en que esta alumna ha realizado el Practicum. Y, finalmente, se recogen las disposiciones sobre números negativos contempladas en el libro de matemáticas de 1º de ESO de la editorial Anaya, por ser el libro de texto seguido en el IES Sorolla en 1º ESO, curso en el que se ha llevado a cabo el experimento práctico del presente Trabajo Fin de Master.

2.1. LEGISLACIÓN AUTONÓMICA Y ESTATAL

2.1.1. LEGISLACIÓN AUTONÓMICA

En cuanto a la legislación autonómica, a pesar de que ya ha sido publicada la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad de la Enseñanza, LOMCE, aún no se dispone de su transposición a la legislación autonómica.

Por ello, por el momento, se continúa con las directrices marcadas por la anterior Ley de enseñanza, Ley Orgánica de Educación, a través del Decreto de su trasposición.

Por lo que respecta a los contenidos del currículo básico de Educación Secundaria y Bachillerato, en la Comunidad Valenciana, se siguen por el momento, las directrices marcadas por el Decreto publicado en el DOGV el 24 de julio de 2007, que se adjunta en el Anexo I (apartado 8.1.)

2.1.2. Legislación Estatal

En cuanto a la legislación estatal, a partir de la publicación de la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad de la Enseñanza, LOMCE, y siguiendo sus directrices, el sábado 3 de enero de 2015 se publicó el Real Decreto que regula los contenidos del currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Este Real Decreto no ha sido aún transpuesto a la legislación autonómica, por lo que constituye la única información disponible sobre las referencias en la LOMCE a de los números negativos, en el currículo básico de ESO y Bachillerato. En el Anexo II (apartado 8.2.) se adjunta este Real Decreto.

2.2. PROYECTO DE CENTRO. IES SOROLLA

En el Anexo III del TFM completo se recogen las disposiciones acerca de los números negativos contenidas en el Proyecto de Centro del IES Sorolla de Valencia, en el que esta alumna realizó el Practicum. Las disposiciones recopilan la información de los cuatro cursos de educación secundaria obligatoria, las dos ramas de Bachillerato de Ciencias y la especialidad de Taller de Matemáticas. Por ser de carácter interno del centro no han podido ser incorporada en este trabajo.

2.3. LIBRO DE TEXTO

En el Anexo IV del TFM se aportan las disposiciones sobre números negativos contenidas en el libro de la editorial Anaya de 1º ESO, utilizado en el IES Sorolla en el que esta alumna realizó las prácticas del master. Por ser un documento de propiedad intelectual ajena no ha podido ser incorporada en este trabajo.

2.4. SÍNTESIS COMPARATIVA DE LAS FUENTES ANTERIORES

Como se ha comentado, en la actualidad nos encontramos en un período de transición entre dos leyes educativas, desde la aún vigente Ley Orgánica de Educación (LOE) de 2006, hacia la próxima Ley Orgánica de Mejora de la Calidad de la Enseñanza (LOMCE), debido a que esta última no ha sido transpuesta aún a la Legislación autonómica.

Se ha llevado a cabo un análisis comparativo de las dos legislaciones para determinar los cambios, en especial en el tema particular de los números negativos y enteros, que se producirán tras la futura entrada en vigor de la LOMCE. Los más relevantes son:

- Especialización del alumnado.

  Una de las grandes diferencias entre la LOMCE y la LOE es el curso en el que tiene lugar la especialización del alumnado. La actual LOE dispone que sea en cuarto curso de ESO cuando los alumnos escojan entre dos orientaciones diferentes de la asignatura de matemáticas, Matemáticas A, con un enfoque más práctico y adecuada para aquellos alumnos que no volverán a cursar esta asignatura, y Matemáticas B, con un enfoque más formal, abstracto y empleando lenguaje simbólico, adecuada para aquellos cuyo futuro continuará ligado a la asignatura. Es decir, que es en el último curso de secundaria cuando se produce esta elección, y, hasta entonces, todos los alumnos han estudiado todos los aspectos matemáticos en común.

  Contrariamente, la futura LOMCE dispone que la especialización en la materia de matemáticas se produzca en el 3er curso de educación secundaria, eligiendo entre Matemáticas Aplicadas (el equivalente a la actual Opción A) y Matemáticas Académicas (el equivalente a la actual Opción B). Este hecho conllevará inevitablemente que conceptos básicos y troncales en matemáticas, incluyendo los números negativos y enteros (que pueden ser de gran ayuda para comprender fenómenos de cambio de estado y movimiento, entre otros), no sean estudiados de forma completa, o no con la suficiente intensidad, por aquellos alumnos que opten por las enseñanzas aplicadas. La pregunta es si este hecho será un lastre para su futuro académico que, por otra parte, los propios alumnos están muy lejos de tener claro.

- Disposiciones para Primer y Segundo curso.

  Otra diferencia importante entre ambas reglamentaciones es la referencia a los cursos de primero y segundo de ESO. Frente a la anterior LOE, que contempla de forma independiente cada uno de ellos, dando las disposiciones en materia de objetivos y criterios de evaluación por separado, la futura LOMCE realiza un tratamiento conjunto de ambos cursos.

  Esto se traduce en que queda a decisión de las comunidades autónomas, mediante la transposición de la Ley, el determinar los conceptos que se verán en primero, y el grado en que se verán, y aquellos que quedarán pendientes para segundo curso.

- Valor absoluto y opuesto de un número entero.

  Otra de las diferencias entre ambas regulaciones reside en los conceptos de “valor absoluto” y “opuesto de un número entero”. Mientras que en la aún vigente LOE estos conceptos aparecen diluidos como dos aspectos más a tratar dentro del tema de los números enteros, la nueva LOMCE les otorga una importancia especial, y los cita como uno de los criterios a emplear para la evaluación de los alumnos.

Por lo que respecta al Proyecto Didáctico del Departamento de Matemáticas del IES Sorolla, en el que realicé mis prácticas, pese a ser un proyecto trazado bajo la luz de la LOE (cuando se elaboró la LOMCE no existía), hay algunos puntos del mismo que están más próximos a la nueva LOMCE que a la ley en vigor; por ejemplo, respecto a los aspectos comentados previamente de "valor absoluto" y "opuesto de un número entero". Ambos conceptos se citan de forma específica en el proyecto didáctico del instituto, como parte de los contenidos a impartir y como criterio que considerar en la evaluación de los alumnos, pese a que la actual LOE no marca ninguna disposición en este sentido.

Sin embargo, lo que más llama la atención es el tratamiento que dan al empleo de la calculadora. Ambas legislaciones, LOE y LOMCE, disponen que los alumnos comiencen a trabajar con calculadoras en el primer curso de ESO, para ayudarse a la realización de los cálculos mecánicos; además, prevén que los niños se entrenen en la elección del método de cálculo más adecuado (mental, escrito o con calculadora) según el tipo de problema, aspecto que tienen en cuenta en la evaluación. Sin embargo, el IES Sorolla dispone que los alumnos comiencen a emplear la calculadora en los cálculos y resolución de los ejercicios en tercer curso de ESO, es decir, dos cursos por detrás. Este hecho se traduce en gran cantidad de tiempo que los alumnos habrán invertido, a lo largo de los dos cursos anteriores, en realizar cálculos puramente mecánicos, cuya resolución manual no les aporta nuevos aprendizajes en el tema que se estaba tratando.

En la línea de estos comentarios están los referidos al libro de texto de la editorial Anaya, de la asignatura de Matemáticas de 1º ESO. En este libro, la comprensión y manejo del "valor absoluto de un número entero" se consideran complementos importantes a los conocimientos que el alumno debería adquirir (aunque no son considerados parte de estos conocimientos mínimos), de acuerdo con la LOE.

Por otro lado, el empleo de la calculadora en la realización de cálculos con números enteros, se considera un aspecto de profundización del temario, reservado para los alumnos que quieran y puedan ir un paso más allá, pero no como tema a tratar con el grupo general de alumnos ni como estándar mínimo o como complemento a éstos. Este planteamiento se desmarca de la línea de la LOE, que dispone su utilización en primer curso de educación secundaria.

3. DELIMITACIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

3.1. MARCO TEÓRICO

3.1.1. INVESTIGACIONES PRECEDENTES SOBRE NÚMEROS NEGATIVOS

La comprensión de la existencia de números negativos supone el cambio de un razonamiento basado en realidades físicas y palpables a un concepto cuya representación mental es difícil de evocar en los alumnos. Numerosos son los investigadores que han estudiado este fenómeno y en sus trabajos han identificado cuatro aspectos (algunos autores han considerado solo los tres primeros) claves en la comprensión de los números negativos:

- Dirección y multitud
- Operaciones aritméticas con números enteros
- El significado del signo menos
- Modelos matemáticos suficientes en sí mismos

El primero de los aspectos supone la comprensión del "lugar" en que se encuentra un número negativo y su "valor verdadero" (Reys and Reys, 1995, cit. Kilhamn 2008).

En concreto, la dirección se refiere a la posición relativa del número a lo largo de la recta de números reales, es decir, su ubicación a la derecha o a la izquierda del número cero, lo que requiere a su vez de la comprensión del sistema numérico general y del número cero (Ball, 1993; Kullberg, 2006; Martínez, 2006, cit. Kilhamn 2008).

Por otro lado, la multitud se refiere al tamaño del número, de forma independiente a su colocación en la recta de números reales, es decir, el concepto de valor absoluto.

Comprender que un número negativo es menor que otro número negativo cuando su valor absoluto (multitud) es mayor (Ball, 1993, cit. Kilhamn 2008).

En cuanto a la aritmética con números reales, la pregunta es en qué medida los alumnos comprenden los algoritmos de las operaciones aritméticas con números negativos y son capaces de realizarlas con destreza (Chacón, 2005; Vlassis, 2004, cit. Kilhamn 2008). Las operaciones en cuestión son suma, resta, multiplicación y división. La suma de números negativos no presenta grandes dificultades; la multiplicación y la división, además de aparecer posteriormente (cuando el concepto de número negativo ya se ha asentado lo suficiente), se realizan de forma análoga en números enteros y en números naturales, a excepción de la operativa de signos.

Por ello, la resta de números negativos es la operación aritmética que supone un mayor reto para los alumnos. De hecho, algunos autores consideran que se puede afirmar que un alumno ha comprendido e interiorizado el concepto de número negativo cuando es capaz de realizar restas de números negativos sin dificultad (Sfard, 1994, cit. Hattermann 2014). La resta de números negativos puede ser entendida por los alumnos como una comparación de dos números (significado estructural) o bien como una operación de "quitar unidades" (resta) a un número dado (Gallardo, 1995, cit. Kilhamn 2008). En este último sentido, algunos autores han demostrado que a los alumnos les es fácil entender el concepto de restar un número negativo dado, como sumar el número opuesto al dado, una vez han practicado esta operación a través de un ábaco (Linchevski and Williams, 1999, cit. Kilhamn 2008).

Por lo que respecta al significado del signo menos, los problemas se producen porque este signo se emplea, en el lenguaje matemático actual, para representar dos conceptos distintos, con dos significados diferentes, significado operacional y significado estructural (Gallardo, 1995; Kilborn, 1979; Kullberg, 2006; Vlassis, 2004, cit. Kilhamn 2008).

Por un lado, el signo menos describe una operación aritmética (significado operacional), la resta, que es el único significado con el que los alumnos están familiarizados al llegar a secundaria.

Por otro lado, el signo menos puede ser visto como algo propio e identificativo de un número negativo (significado estructural). En este último caso, el hecho de que el signo aparezca separado del número introduce muchos más errores que cuando los alumnos perciben claramente la unión entre ambos, como por ejemplo con el número escrito entre paréntesis (Herscovics and Linchevski, 1991; Vlassis, 2002, cit. Kilhamn 2008).

Las investigaciones experimentales realizadas por autores como Ball, han demostrado que emplear signos diferentes para cada uno de los dos significados reduce considerablemente la confusión de los alumnos y con ello, el porcentaje de errores en la aritmética con números negativos (Ball, 1993, cit. Kilhamn 2008).

Finalmente, el cuarto de los aspectos que plantea a los alumnos problemas a la hora de comprender y asimilar el concepto de número negativo es la inexistencia de modelos matemáticos suficientes en sí mismos (Kilhamn, 2008). El empleo de modelos basados en conceptos conocidos nos ayuda en la compresión de los conceptos desconocidos. El problema radica en que, dado que se trata de un "modelo", nunca llega a ser completamente representativo del concepto que trata de explicar. Las dificultades para los aprendices aparecen cuando tratan de aplicar este modelo a todos los casos, incluidos aquellos en los que el modelo no tiene validez, lo que les conduce a resultados erróneos y confusiones.

Por ello, para que la utilidad de los modelos matemáticos en la explicación de los números negativos sea totalmente útil, es necesario que junto a la explicación del modelo y su aplicación, se transmita a los alumnos (y estos comprendan e interioricen) sus limitaciones. El presente trabajo trata de clarificar un poco este último aspecto de la comprensión de los números negativos.

3.1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE ENSEÑANZA

Comprender un concepto matemático supone interiorizarlo de tal forma que se obtengan resultados correctos al realizar diferentes operaciones con éste, enfrentarse a situaciones desconocidas de forma satisfactoria y además, estar seguro de que las respuestas son correctas.

En el aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos, se busca una comprensión real de estos en lugar de la simple memorización; en estos casos es de gran utilidad recurrir al empleo de metáforas o modelos. Aunque existen multitud de investigadores que hablan de la diferencia entre unos y otras (Fischbein, 1989, cit. Kilhamn 2008; Kilhamn, 2008; Kövecses, 2002, cit. Kilhamn 2008), en el presente trabajo vamos a asociar ambos a un mismo concepto: los modelos matemáticos basados en metáforas de la realidad.

Poder "traducir" los nuevos conceptos que tratamos de aprender a otros ya conocidos nos ayuda a asimilar la naturaleza, propiedades y formas de operar con ellos, de la misma forma que lo haríamos con los conceptos conocidos "similares", conectando con nuestras experiencias previas.

Estas metáforas o modelos matemáticos basados en metáforas son herramientas que nos ayudan a relacionar conceptos y experiencias desconocidas con otras conocidas, permitiéndonos comprender conceptos nuevos a partir de otros que no son nuevos para nosotros, y los cuales comprendemos.

Así, el razonamiento metafórico se puede definir como el empleo de un modelo matemático concreto y conocido para razonar sobre un nuevo concepto matemático, pero en términos de este concepto conocido, considerando idénticas la naturaleza, propiedades y formas de tratar de ambos. Sin embargo, conceptos conocidos y desconocidos raras veces son idénticos, por lo que las metáforas o modelos matemáticos no alcanzan a explicar los nuevos conceptos al cien por cien (Ball, 1993, cit. Kilhamn 2008).

Uno de los métodos empleado por algunos autores para solventar esta discrepancia entre el modelo conocido y el concepto original desconocido, ha sido el empleo de varios modelos matemáticos de metáforas de forma simultánea (Kilborn, 1979, cit. Kilhamn 2008; Lakoff and Johnson, 1980, cit. Chiu 2002), de forma que se complementaran entre sí, para explicar el concepto a aprender; aquel aspecto del nuevo concepto que no recogía uno de los modelos matemáticos era recogido por el otro modelo.

Sin embargo, algunos autores han comprobado que explicar a los alumnos un concepto nuevo apoyándose en varios de estos modelos de forma simultánea, puede causarles confusión y llevarles a errores en el trabajo, si los alumnos no tienen un criterio claro para saber qué modelo matemático de entre los aprendidos conviene aplicar a una situación o problema concreto. El empleo de varios modelos matemáticos de forma simultánea, por lo tanto, no sirve de mucho, si los alumnos no tienen claros los requisitos que deben cumplirse para poder aplicar cada uno de ellos, y las limitaciones de su aplicación (Kilhamn, 2008).

Por lo que respecta a los números negativos, éstos suponen un concepto nuevo y complicado de entender para los alumnos, en especial por los cuatro aspectos citados en el apartado anterior (dirección y multitud, operaciones aritméticas con números enteros, el significado del signo menos, modelos matemáticos insuficientes en sí mismos).

Tradicionalmente se ha recurrido a diferentes modelos matemáticos basados en realidades conocidas, para tratar de explicarlos:

- Termómetros, donde la temperatura puede variar entre un número negativo y uno positivo, lo que además puede asociarse con la recta de los números reales.
- Ascensores, en donde se puede bajar desde el ático (valor más positivo) a la planta baja (cero) e ir descendiendo hasta el último de los sótanos (valor más negativo).
- Dinero, con aumentos de saldo en la cuenta, disminuciones de saldo y deudas (números negativos).

Sin embargo, ninguno de ellos explica completamente el concepto de número negativo, pues no pueden aplicarse en todas las situaciones.

Por ello, en caso de que los alumnos interioricen uno como totalmente útil y bueno y traten de aplicarlo a todas las situaciones y problemas, llevarán a confusiones y errores, en los casos en que el modelo adoptado no sea representativo del comportamiento de los números negativos.

A efectos del presente trabajo se distinguirán dos posibles formas de servirse de las metáforas para para la comprensión y manipulación de los números negativos, que determinarán dos tipos de pensamiento y actuación diferentes:

- Metáforas como reproducciones perfectas de la realidad

  Este tipo de pensamiento es puramente metafórico. Realiza una plena identificación entre el modelo y el nuevo concepto. Esta forma de pensar solo llevará a soluciones correctas en los aspectos en que modelo y concepto nuevo tengan idéntico comportamiento. No supone una comprensión real del nuevo concepto, sino la identificación de los aspectos que son comunes en ambos casos y la comprensión del concepto conocido.

- Metáforas como analogías de la realidad

  Este tipo de pensamiento parte de un modelo metafórico para poder comprender los nuevos conceptos, e identifica los aspectos en que este modelo es útil (y podrá aplicar el modelo para resolver los problemas relacionados) y aquellos en los que no lo es, y por tanto requerirá de la aplicación de otro de los modelos disponibles o de la aplicación de reglas matemáticas directamente para la solución del problema. En este caso el aprendiz podrá saber en qué casos aplicar el modelo y en cuales no hacerlo, es decir, conocer las limitaciones y requisitos del modelo. Supone haber alcanzado una comprensión real del concepto nuevo, asimilado las diferencias entre concepto a aprender y modelo, puesto que lo que se ha interiorizado han sido las reglas matemáticas asociadas a él.

3.2. DESCRIPCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

¿Metáforas sí? ¿Metáforas no? Metáforas, ¿cómo y para qué? Parece que la mayoría de los autores se ponen de acuerdo en dotar a las metáforas o modelos matemáticos basados en metáforas de cierta utilidad. La pregunta que se plantea en el presente trabajo es ¿en qué medida puede resultar útil emplear un modelo matemático basado en metáforas, para comprender un nuevo concepto, en concreto, los números negativos?

Para responderla, se ha realizado un doble análisis, centrado en los problemas que tienen los alumnos en la operación de resta con números negativos y en la forma en que estos alumnos emplean las metáforas para enfrentarse a ellos:

- Comprobación de la utilidad del pensamiento metafórico

  Consiste en comprobar que los alumnos son capaces de resolver satisfactoriamente operaciones con números negativos para los que a priori no sabían hallar la solución, gracias a su "contextualización". Se trata de explicar a los alumnos un modelo matemático basado en metáforas, que les ayude a comprender como restar números negativos y ver si, una vez comprendido este modelo, son capaces de resolver problemas que antes no eran asequibles para ellos (en los que el modelo elegido es válido).

- Comprobación de que el pensamiento metafórico no es suficiente por sí mismo

  Consiste en comprobar que para que el modelo metafórico empleado sea siempre realmente útil en las operaciones con números negativos, el alumno necesita haber comprendido las reglas matemáticas que rigen la operativa con números negativos (aprendidas a través del modelo), interiorizar cuándo es posible aplicarlo y cuando no lo es, y por tanto, hacer uso de las reglas matemáticas aprendidas. Para ello el alumno debe apreciar las carencias del modelo metafórico elegido según las situaciones planteadas.

En definitiva, el análisis realizado consiste en comprobar que los modelos matemáticos basados en metáforas ayudan al alumno en las situaciones en que su comportamiento se asemeja con la realidad, y que le llevan a engaños cuando no son capaces de explicar la situación a la que se enfrenta el alumno, pero éste no es consciente de ello. Así mismo se trata de comprobar, tras introducir un nuevo modelo metafórico completo (aplicable a todas las situaciones), la utilidad que éste representa para los alumnos.

4. METODOLOGÍA

4.1. DISEÑO DEL EXPERIMENTO

Para realizar la investigación sobre números negativos y su resta, en la que se centra el presente trabajo fin de master, se diseñó un experimento o actividad con alumnos compuesta por varias etapas:

- Se comenzó por evaluar el conocimiento previo que los alumnos que participaron en la actividad tenían sobre la suma y la resta de números negativos, conceptos estudiados por ellos en un tema anterior del curso, y ver lo que recordaban, tal y como se explica en el punto 4.1.1.
- A continuación se introdujo a los alumnos un nuevo modelo matemático basado en metáforas, el Pseudo Plus-Minus Game.
  Este modelo, a diferencia de los que ellos habían aprendido hasta el momento, es un modelo completo respecto a la resta de números negativos, es decir, que logra responder satisfactoriamente a todas las situaciones que implican suma y resta con números negativos. Para ello se ha realizó una dinámica con el juego de cartas Pseudo Plus-Minus Game, como se explica en el punto 4.1.2.
- En tercer y último lugar, se pasó a los alumnos un cuestionario, con preguntas relativas a sumas y restas de números enteros, algunas sin contextualizar y otras dentro de contexto, como se explica en el punto 4.1.3.

Para el diseño de la actividad que materializa la investigación, han servido de especial ayuda los trabajos previos de dos autores, Kilhamn (2008) y Hattermann (2014).

- El trabajo de Kilhamn ha servido de base para la clasificación de los diferentes tipos de razonamiento matemático encontrados en los alumnos. Se ha partido de los tipos de razonamiento propuestos en su trabajo y se han contrastado y ampliado con los detectados durante la realización del experimento. Los resultados han sido muy coherentes con las conclusiones que la propia autora extrajo.

- Por otro lado, el trabajo de Hattermann se ha empleado para encontrar un modelo metafórico completo en el tema de los números negativos, que transmitir a los alumnos, y para encontrar una dinámica, un juego de cartas, con la que explicar dicho modelo. La introducción del mismo ha permitido apreciar resultados que los trabajos anteriores no pudieron mostrar, como es qué ocurre cuando el modelo metafórico que emplean los alumnos en su razonamiento con números negativos es un modelo completo.

SONDEO PREVIO DE EVALUACIÓN DEL NIVEL DE LOS ALUMNOS

Se creyó oportuno empezar el experimento evaluando el grado de comprensión y el conocimiento previo que los alumnos tenían sobre la suma y la resta de números negativos antes de participar en la actividad, así como también, lo que recordaban de estos conceptos. Los números negativos fueron estudiados en el tema de números enteros, que la programación de la asignatura ubica a principios de curso, y del que se examinan a principios de diciembre. Se trata ahora de determinar, casi 5 meses después, lo que recuerdan de aquello que aprendieron.

Las preguntas para este sondeo inicial fueron dos, formadas por operaciones encadenadas, con y sin paréntesis, de números negativos y positivos. Ambas se extrajeron del examen que los alumnos realizaron al concluir la parte del temario correspondiente a los números negativos, con fecha de 10 de diciembre de 2014.

La realización de este sondeo previo respondió a la intención de:

- Forzar a que los alumnos pusieran en práctica sus mecanismos de recordatorio y evocación de conceptos, para evitar repetir los posibles errores que cometieron la primera vez que se enfrentaron a estas operaciones.
- Ayudar a determinar, en la fase de análisis del post-test, el tipo de razonamiento aplicado por el alumno, en los casos en que hubiera dudas a priori del grupo en el que este razonamiento se enmarca.
- Mostrar el grado en que el nuevo modelo explicado (el juego de cartas Pseudo Plus-Minus Game) ayudó al alumno a razonar correctamente en los problemas de restar con números negativos o si, por el contrario, no tuvo ningún efecto.

Las preguntas del sondeo inicial fueron:

Pregunta 0

Resuelve: a. $-150 - 8 + 3 =$ b. $[1 + (6-9)] - (8 - 12) =$

4.1.1. DINÁMICA: PSEUDO PLUS-MINUS GAME

El segundo paso fue introducir a los alumnos un modelo matemático basado en metáforas que fuera un modelo completo en relación a la suma y la resta con números negativos.

Se partió del Plus-Minus Game, un juego de cartas aportado por Hattermann y Holfe en su trabajo sobre números negativos (Hattermann and Holfe, 2014). A efectos del presente trabajo, se han realizado algunas adaptaciones del juego original pensado por los autores:

- Las cartas del juego original eran rojas y verdes. En este trabajo las cartas son rojas y azules, de forma que los alumnos pueden identificar más claramente que se trata de cosas (valores) contrarios. [1]
- En el juego original hay 11 cartas de cada signo y color, y cada participante comienza con una sola carta en su haber. En este trabajo, el juego consta de 12 cartas de cada color y cada participante empieza con una carta de cada uno de los colores (la partida se hace ligeramente más larga).
- Finalmente, también se han cambiado los colores de las caras del dado, esto último simplemente por comodidad.

Por ello, de cara a respetar el trabajo original de los autores, el presente trabajo se referirá al juego de cartas empleado en la dinámica bajo el nombre de Pseudo Plus-Minus Game. A continuación se describe el juego de cartas en cuestión.

PSEUDO PLUS-MINUS GAME. DESCRIPCIÓN DEL JUEGO.

Objetivo:

El juego consiste en ir robando cartas y pasarlas a los compañeros o recibirlas de ellos, siguiendo las instrucciones que se comentan más adelante. El objetivo de cada jugador es haber acumulado la máxima puntuación posible en el momento en que acaba la partida.

La dinámica y reglas del juego requieren de los alumnos la realización de sumas y restas con números negativos, involucrando situaciones de “+ (+)”, “+ (-)“, “- (+)” y “- (-)“.

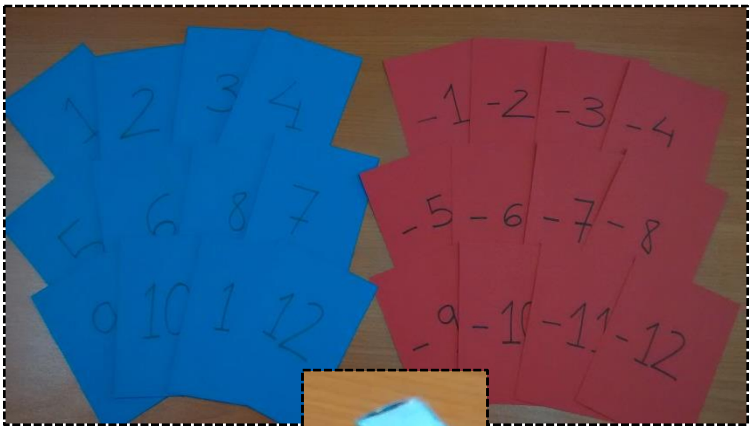
[1] Era muy importante de cara al trabajo que los alumnos comprendieran la oposición entre los signos “+” y “–“ son, por lo que se hizo especial hincapié en que apreciaran esta oposición en las propias cartas del juego. Durante la etapa de preparación del juego, en una clase anterior a la que tuvo lugar la dinámica, se entabló un diálogo informal con los alumnos acerca de la oposición de los colores, citando como ejemplos el negro-blanco y el rojo-verde. Fueron los mismos alumnos los que, en ese momento, mostraron su opinión contraria al respecto, declarando que el color opuesto al rojo es el verde y al contrario. Dada esta identificación tan palpable de oposición entre rojo y azul, por parte de los alumnos, se decidió emplear el color azul para crear las cartas de números positivos.

Por ello, a diferencia del resto de modelos sobre números negativos que conocían (temperaturas, ascensores y saldos bancarios), que son incompletos, este nuevo modelo sí es un modelo completo, puesto que les servirá para explicar tanto la suma como la resta de números enteros, en todas las ocasiones.

Materiales:

Los materiales del juego para cada grupo de jugadores son:

- 12 cartas rojas, numeradas de (-1) a (-12)
- 12 cartas azules, numeradas de 1 a 12
- 1 dado con 6 caras de diferentes colores: rojo, verde, azul, naranja, amarillo y blanco



Instrucciones:

Las cartas se barajan. Cada jugador coge una carta de cada color y la deja delante de él, destapada. Los dos montones restantes se depositan en la mesa, boca abajo. El jugador que va primero en la lista de clase empieza a jugar y el sentido del juego es hacia la derecha.

En cada turno, el jugador que esté jugando tira el dado. En función del color de la cara del dado que quede hacia arriba, el jugador que está en el turno seguirá una de las siguientes instrucciones:

- ROJO: Roba una carta del montón rojo.
- AZUL: Roba una carta del montón azul.

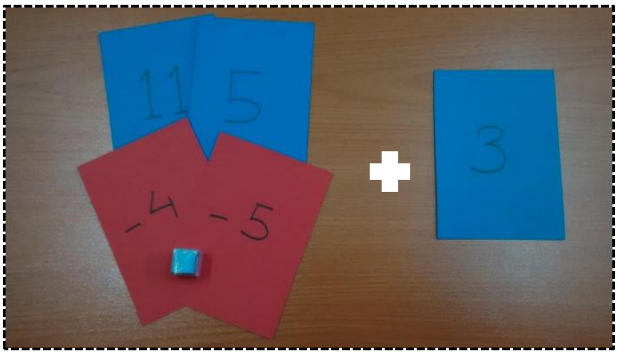
- VERDE: Da una carta azul, a su elección, al compañero de la derecha.
- AMARILLO: Da una carta roja, a su elección, al compañero de la derecha.
- BLANCO: Da la carta de menor valor al compañero de la derecha.
- NARANJA: Da la carta de mayor valor al compañero de la derecha.

Si un jugador se queda sin cartas, en su turno tira el dado; si le toca robar una carta, lo hace y sigue jugando; si le sale otra opción, pasa turno hasta que en el dado salga rojo/azul (robar una carta) o hasta que a su compañero de la izquierda le salga verde/amarillo/blanco/naranja (pasar una carta al compañero de la derecha).

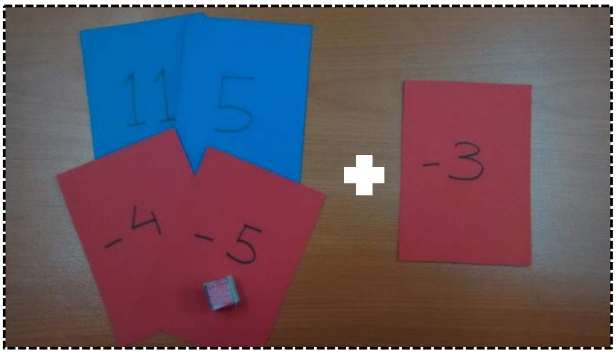
El juego acaba cuando los dos montones de cartas que están sobre la mesa se acaban, y, como se ha comentado, gana el jugador que tiene más puntuación en ese momento.

A lo largo de la partida se presenta una gran variedad de situaciones que implican la realización, por parte de los alumnos, de sumas y restas con las cuatro combinaciones de signos citadas al comienzo del apartado. Un ejemplo de cada uno de los casos sería:

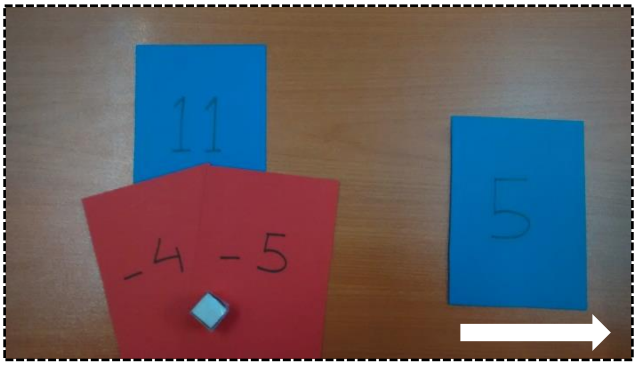
- Ejemplo 1. Un alumno tiene una puntuación de 7 en un momento de la partida, contando todas las cartas que tiene en la mano. En su turno, el alumno tira el dado y sale la cara de color azul. Roba una carta del montón azul, que resulta ser +3. El alumno debe calcular su nueva puntuación como (+7) + (+3) = +10. Situación de "+ (+)".



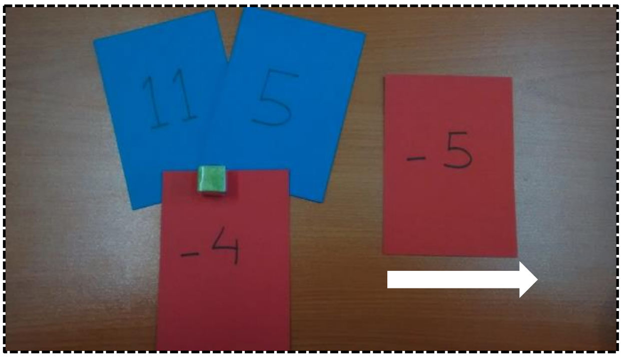
- Ejemplo 2. Un alumno tiene una puntuación de 7 en un momento de la partida, contando todas las cartas que tiene en la mano. En su turno, el alumno tira el dado y sale la cara de color rojo. Roba una carta del montón rojo, que resulta ser -3. El alumno debe calcular su nueva puntuación como (+7) + (-3) = +4. Situación de "+ (-)".



- Ejemplo 3. Un alumno tiene una puntuación de 7 en un momento de la partida, contando todas las cartas que tiene en la mano, siendo esas cartas (11, 5, -4, -5). En su turno, el alumno tira el dado y sale la cara de color verde “dar una carta de color azul, a tu elección, al compañero de la derecha”. Da a su compañero el “5”. El alumno debe calcular su nueva puntuación como (+7) - (+5) = +2. Situación de “-(+)”.



- Ejemplo 4. Un alumno tiene una puntuación de 7 en un momento de la partida, contando todas las cartas que tiene en la mano, siendo esas cartas (11, 5, -4, -5). En su turno, el alumno tira el dado y sale la cara de color blanco “dar la carta de menor valor al compañero de la derecha”. Da a su compañero el “-5”. El alumno debe calcular su nueva puntuación como (+7) - (-5) = +12. Situación de “- (-)”.



4.1.2. CUESTIONARIO

Concluido el juego se pidió a los alumnos que respondieran un cuestionario con un total de 6 preguntas relativas a sumas y restas de números negativos. Las preguntas se inspiraron en los artículos de Hattermann y de Kilhamn (Hattermann and Holfe, 2014; Kilhamn, 2008), con algunas particularidades.

Fueron un total de seis preguntas:

- La primera de las preguntas planteaba un caso hipotético pero posible del juego de cartas previo. El objetivo era que los alumnos practicaran la forma de traducir aquello que habían estado haciendo de forma inconsciente con el juego (nuevo modelo basado en metáforas) al lenguaje aritmético de números reales y su operativa. Esta pregunta se creó expresamente para el presente trabajo TFM.

> ***Pregunta 1***
>
> *En el juego anterior yo tenía dos cartas, de valores "5" y "-6", y al tirar el dado sale el color blanco (da la carta de menor valor al compañero de la derecha). ¿Cuál será mi nueva puntuación?*

En las siguientes preguntas del cuestionario podemos comprobar si habían incluido la operativa con números enteros en su bagaje de conocimientos y lo aplicarían a partir de ahora en sus razonamientos o no.

- Las preguntas 2 y 3 planteaban operaciones aritméticas sencillas con números negativos. Adicionalmente, se pidió a los alumnos que expresasen su grado de confianza en la solución que habían obtenido así como el razonamiento que habían seguido para llegar hasta ella. La pregunta 2 se extrajo del artículo de Hattermann (Hattermann, 2014) mientras que la pregunta 3 se extrajo del artículo de Kilhamn (Kilhamn, 2008)

> ***Pregunta 2***
>
> *Resuelve:* *a.* $(-5)+(-7) =$ *b.* $(-9)-(-4) =$
>
> *Imagina que un compañero tuyo no ha venido a clase el día que se explicó como sumar y restar números negativos. Cuenta cómo le explicarías la forma de resolver las operaciones anteriores. Puedes hacerlo sin ejemplos, con tus propias palabras, utilizar el juego de cartas o utilizar cualquier otro ejemplo que conozcas.*

Pregunta 3

Resuelve: *(-3)-(−8) =*

¿Cómo de seguro estas de tu respuesta?

.....muy seguro .....Un poco seguro ..... Un poco inseguro ..... Inseguro

Estas preguntas fueron empleadas para discernir los patrones de razonamiento matemático aplicados por los alumnos, tomando como base los determinados por Kilhamn en un trabajo previo. El análisis de sus respuestas en los diferentes apartados, los aciertos y los errores, nos permitieron clasificar el razonamiento matemático aplicado en cuatro tipos (razonamiento aritmético puro, razonamiento aritmético-metafórico, razonamiento metafórico puro y sin razonamiento aparente, como se verá posteriormente).

- Las preguntas 4, 5 y 6, fueron tres problemas típicos de los que se suelen plantear a los alumnos para practicar números negativos: variaciones de nivel de un depósito, variaciones de temperatura y variaciones de saldo bancario. Las preguntas 4 y 5 se crearon expresamente para el presente trabajo, inspiradas en los ejercicios del libro de texto de los alumnos que participaron en la actividad, mientras que la pregunta 6 se extrajo del artículo de Hattermann (Hattermann, 2014).

Pregunta 4

Un día, el nivel de agua de una piscina es de 150cm. Al día siguiente baja 8 cm. Al tercer día sube 3 cm. ¿Cuál es el nivel después de esta última subida? Explica cómo lo has calculado.

Pregunta 5

Un día del mes de febrero el termómetro en Londres marca -3º C de temperatura a las 8 de la mañana. A las 2 del mediodía la temperatura ha subido 10 grados. ¿Cuál es la nueva temperatura? Explica cómo lo has calculado.

Pregunta 6

Mis padres tienen 450 euros en la cuenta del banco. Compran un móvil y pagan con la tarjeta. Su cuenta del banco se queda en -300 euros ¿Cuánto valía el móvil? Explica cómo lo has calculado.

Se trataba de ejercicios aritméticos de sumar y restar con números enteros, planteados en forma de problemas en que entraba en juego alguno de los modelos metafóricos de los números negativos. El objetivo de estas preguntas era comprobar, si los alumnos eran capaces de comprender el enunciado, plantear la operación y dar una respuesta correcta, cuando la suma y la resta de números enteros estaban contextualizadas, es decir, cuando a los alumnos se les daba un "problema cotidiano".

4.2. IMPLEMENTACIÓN

4.2.1. CONTEXTO (CURSO, CLASE, TIEMPO)

El concepto de número negativo y la transición de números naturales a números enteros, se introduce a los alumnos en 6º primaria, pero no es hasta el curso siguiente, 1º ESO cuando se les ejercita en la manipulación y las operaciones con estos "nuevos" números. Por este motivo el test se ha realizado en 1º ESO, a una clase de 30 alumnos.

En cuanto a la temporalización, la actividad global se realizó, según se había programado, en 1 hora. Los primeros 10 minutos los alumnos se enfrentaron al cuestionario de evaluación inicial con números negativos, comentado previamente. Los siguientes 30 minutos los alumnos jugaron al juego de cartas, Pseudo Plus-Minus Game, que habíamos adaptado para este trabajo a partir del original. Los 20 minutos finales los alumnos realizaron el test de evaluación de conceptos.

La actividad tuvo durante una de las sesiones de tutorías de aula por varios motivos:

- Al no ser una actividad "esperada" o previsible, los alumnos no tuvieron tiempo de repasar, lo que les llevó, necesariamente, a poner en juego lo que recordaban de los temas anteriores del curso, es decir, lo realmente aprendido y asimilado.

- Era importante que los alumnos no relacionaran el experimento con una nota más de las calificaciones de la asignatura de matemáticas, de las que puntúan para la nota de la evaluación, para que afrontaran la actividad de la forma más relajada posible, en lugar de estar nerviosos por un posible examen o una puntuación.
- También por el mismo motivo, tanto durante el test previo al juego como en el post-test se informó a los alumnos de que los documentos eran anónimos, y se insistió en que respondieran lo que ellos creyeran, sin consultar con los compañeros, pues no había respuestas correctas ni erróneas.

4.2.2. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Antes de comenzar la actividad, se dieron, unas premisas:

- Se anunció a los alumnos en que la participación en ella era voluntaria, pero todos ellos quisieron participar, sabiendo que una de las partes de la dinámica era un juego de cartas.
- Se recordó a los alumnos que ambos cuestionarios eran anónimos y no se iban a puntuar, por lo que se esperaban respuestas sinceras.
- Se remarcó que, al realizar los cuestionarios, las preguntas debían abordarse por orden sin importar el tiempo que emplearan en cada una; si no llegaban al final del test no pasaría nada.

Para la realización de la dinámica se distribuyó a los alumnos en grupos de 4, de forma que todos pudieran participar lo suficiente en el juego de cartas.

En los primeros momentos, mientras se explicaba la dinámica del juego de cartas, algunos alumnos se asustaron al ver escritas “tantas” reglas y se oyeron comentarios acerca de lo complicado de la dinámica; sin embargo, en cuanto comenzaron a jugar, todo fluyó satisfactoriamente.

En alguna de las mesas, durante las primeras tiradas de dados, alguno de los alumnos tuvo dudas sobre la instrucción a aplicar, pero, en tal caso, los otros tres jugadores de la mesa le supieron orientar sobre la forma de proceder. Transcurridos cinco minutos todos los alumnos habían comprendido el juego y se divertían practicándolo. Estaban emocionados, nerviosos y no podían evitar chillar por la excitación que sentían.

Finalmente, las quejas se sucedieron en todos los grupos cuando les informé de que el tiempo de juego había concluido. Todos los alumnos supieron calcular la puntuación con que habían llegado al final del juego y, por tanto, el miembro de la mesa que era el ganador del Pseudo Plus-Minus Game.

Llamaba la atención el hecho de que los alumnos realizaran los cálculos de las puntuaciones mentalmente, sin necesitar calculadora, papel y bolígrafo, ni ningún otro medio auxiliar, llegando a un resultado correcto.

Mientras los alumnos respondían a las preguntas del cuestionario, se estuvo observando las respuestas aportadas. En los casos en que el razonamiento para la resolución no quedaba suficientemente claro o no se explicaba, se procedió a pedir una aclaración en ese mismo momento. Esta aclaración, en algunas ocasiones fue escrita en el propio cuestionario y en otras fue expresada de viva voz.

5. RESULTADOS

5.1. RECOPLIACIÓN DE RESULTADOS

La primera de las preguntas fue resulta correctamente (respuesta: nueva puntuación es 5) por el 100% de los alumnos. Esto nos permite deducir que los alumnos conocen y manejan el concepto de valor absoluto del número entero. También nos permite suponer que el modelo de números negativos explicado (el Pseudo Plus-Minus Game) fue entendido por los alumnos.

En cuanto al segundo grupo de preguntas, preguntas 2 y3, en la siguiente tabla se recogen los resultados obtenidos a modo de resumen:

Pregunta	Pregunta 2.a			Pregunta 2.b				Pregunta 3		
Respuesta	**-12***	+2	-2	**-5***	5	-13	13	**5***	-5	-11
Alumnos que responden	26	2	2	20	6	2	2	11	13	6
Alumnos desagregados	**12,5,9**	**2**	**2**	**12,5,3**	**2,2,2**	**2**	**2**	**3,5,3**	**11,2**	**6**

Tabla 1. Resumen de resultados de las preguntas 2 y 3 del cuestionario

- En la primera de las filas se indica pregunta de que se trata.
- En la segunda de las filas se encuentra la respuesta dada por los alumnos, remarcando la que constituye la opción correcta (*).
- En la tercera de las filas se recoge el total de alumnos que dieron esta respuesta.
- Finalmente, en la cuarta de las filas se recoge también el total de alumnos que dieron esta respuesta, pero desagregado, separando a los alumnos que dan cada respuesta según los tipos de razonamiento encontrados (explicados en el siguiente apartado).

En la siguiente tabla se recogen los resultados a las preguntas 4, 5 y 6, con la misma información que en la tabla anterior, a excepción de las respuestas desagregadas, que en este caso no se consideran necesarias, puesto que el propio enunciado fuerza a aplicar un modelo conceptual y a desarrollar un razonamiento metafórico:

Pregunta	Pregunta 4		Pregunta 5		Pregunta 6	
Respuesta	**145***	139	**7***	13	**750***	150
Alumnos que responden	29	1	17	13	17	13

Tabla 2. Resumen de resultados de las preguntas 4,5 y 6 del cuestionario

5.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.2.1. RAZONAMIENTOS MATEMÁTICOS DETECTADOS Y TRASCRIPCIÓN DE RESPUESTAS

En la evaluación y análisis del cuestionario que se pasó a los alumnos al concluir la dinámica se detectaron tres tipos de razonamiento matemáticos, según la forma en la que se hacía uso de los modelos metafóricos, tanto de los modelos que los alumnos ya conocían como del nuevo que aprendieron con el juego de cartas:

- Razonamiento aritmético puro (respuestas marcadas en rojo en la tabla 1).
- Razonamiento aritmético-metafórico (respuestas marcadas en azul en la tabla 1).
- Razonamiento metafórico puro (respuestas marcadas en verde en la tabla 1).

Finalmente, también se encontraron algunas respuestas en las que no fue posible reconocer ningún tipo de razonamiento (respuestas marcadas en naranja en la tabla 1).

A continuación se explica en qué consiste cada uno de los modos de razonamiento detectados y se aportan transcripciones de algunos ejemplos de respuestas derivadas de cada tipo.

También se dan ejemplos de algunas de las respuestas en las que no se identificó ninguno de los tipos de razonamiento, bajo el título de “Sin razonamiento claro”.

Razonamiento aritmético puro

Es el puesto en práctica por aquellos alumnos que respondieron aplicando solamente las reglas aritméticas aprendidas (suma y resta de números enteros).

Dio lugar a respuestas correctas cuando los alumnos habían aprendido y recordaban bien las reglas aritméticas de cálculo (3 de 14), y a respuestas incorrectas, cuando las reglas se aprendieron mal o no eran recordadas completamente (11 de 14).

Tipo de razonamiento: Aritmético puro	**Total de alumnos: 14 de 30**
Pregunta 2.a. Respuestas correctas aplicando este razonamiento: 12 de 14	
(-5)+(−7) = - (5 + 7) = -12 . *Se suman el 5 y el 7 ya que son negativos y se tienen que sumar* (la operación que pide el ejercicio)*. El resultado que dé, se le pone un "-" delante porque los dos números que se han sumado son negativos*	
……………………..Respuestas incorrectas aplicando este razonamiento: 2 de 14	
(-5)+(−7)=+2: 5 - 7 = 2 y "- + - = +"	

Pregunta 2.b. Respuestas correctas aplicando este razonamiento: 12 de 14	
(-9) – (-4) = -9+4 = -5. *Pues como sé que "-" y "-" es "+" pues lo que me queda es -9+4 y parece que es una suma pero es como si fuera una resta porque entonces puedo cambiar el orden y tengo 4-9, que me da -5*	
(-9) – (-4) = -9+4 = -5. *Pues sé que "-" + "-" es "+" y lo que me queda es -9+4. Y para sumar dos números uno negativo y otro positivo tengo que restarlos y poner el signo del mayor de los dos al número que me salga*	
(-9) – (-4) = -9+4 = -5. *Pues "-" por "-" es "+" y me queda -9+4 y como sé que sumar un número negativo es como restar el opuesto, lo que me queda es 4 – (+9) = -5*	
9-4 = 5; -5. *Pues como es una resta y los dos números son negativos, pues los resto y me da 5 y le pongo su signo que es menos porque eran negativos* (5 alumnos) (* ver 5.2.2)	
9-4 = 5; -5. *Porque es una resta entonces resto los 2 números y me da 5 y al resultado le pongo el signo del mayor de los dos, que es 9, y que lleva menos, y entonces me queda -5* (4 alumnos) (*ver 5.2.2)	
……………………..Respuestas incorrectas aplicando este razonamiento: 2 de 14	
(-9)-(−4)=-5: 9 - 4 = 5 y "- - - = -". *Es una resta entonces hago 9-4=5. Y con los signos, lo que hay es "- - -" que es "-"* (Aclaración verbal que realizó el alumno al pedir que explicara su forma de calcularlo*)*	

Pregunta 3.a. Respuestas correctas aplicando este razonamiento: 3 de 14
(-3) – (-8) = -3+8 = 5. *Pues primero quito el paréntesis y como sé que "-" por "-" es "+" pues me queda es -3+8 y parece que es una suma pero es como si fuera una resta porque entonces puedo cambiar el orden y tengo 8-3, que me da 5*
(-3) – (-8) = (-3)+8 = 5. *Quito el paréntesis y como sé que "-" por "-" es "+" pues lo que me queda es (-3)+8. Y para operar un número negativo y un positivo se restan y en el resultado tendrá que ponerse el signo* (del) *de mayor valor.*
(-3) – (-8) = -3+8 = 5. *Yo sé que "-" por "-" es "+" entonces cuando quito el paréntesis lo que me queda es -3+8. Pero eso es como tener -3 + 3 + 5, y los 3 se van y me queda 5.*
……………………..Respuestas incorrectas aplicando este razonamiento: 11 de 14
(-3) – (-8) = 3-8 = -5. *Porque "-" por "-" es "+" y el menos del 3 y el del 8 se me van y me queda 3-8, que es -5* (2 alumnos)
8-3 = 5; -5. *Pues primero lo he restado y luego le he puesto el signo menos porque son negativos.* (5 alumnos)
8-3 = 5; -5. *Pues como es una resta resto los dos números y me da 5 y al resultado le pongo el signo del mayor de los dos, que es 8, y que lleva un menos, y entonces me queda -5* (4 alumnos)

Tabla 3. Trascripción de respuestas a preguntas 2 y 3. Razonamiento aritmético puro

Razonamiento aritmético-metafórico

Es el puesto en práctica por aquellos alumnos que respondieron atendiendo a las reglas aritméticas aprendidas (suma y resta de números enteros, orden de operaciones, influencia del paréntesis,…), complementadas con metáforas. Los alumnos que lo aplicaron este tipo de razonamiento obtuvieron respuestas correctas en todas las preguntas.

Tipo de razonamiento: Aritmético-metafórico	**Total de alumnos: 5 de 30**
Pregunta 2.a. Respuestas correctas aplicando este razonamiento: 5 de 5	
(-5)+(−7) = - (5 + 7) = -12 . *Pues para sumar dos números que tienen el mismo signo, los sumo y a lo que me salga le pongo el signo que toca. Como son negativos, pues a lo que me da le pongo el menos. Es como bajar al sótano 5 y luego bajas 7 sótanos más, que llegas al sótano 12* (2 alumnos)	
(-5)+(−7) = - (5 + 7) = -12 . *Pues como son 2 números negativos que tienen el mismo signo, los sumo como si fueran positivos y a lo que sale le pongo el signo menos. Que es que tú estás en cero y hacer 5 rayitas a la izquierda y luego otras 7 rayitas a la izquierda que te quedas en 12 rayitas a la izquierda.* (3 alumnos).	

Pregunta 2.b. Respuestas correctas aplicando este razonamiento: 5 de 5
(-9) – (-4) = -9+4 = -5. *Pues lo primero que hago es quitar los paréntesis y como sé que "-" por "-" es "+"me queda es -9+4. Y esto es como cuando alguien te debe 9 euros y te da cuatro, pero aún te sigue debiendo 5 y lo escribes como -5*

(-9) – (-4) = -9+4 = -5. *Tengo que quitar el paréntesis y como sé que “-“por “-“ es “+” pues lo que me queda es -9+4. Es como si estás en el centro de la clase, y caminas 9 pasos a la izquierda y luego cuatro a la derecha. Y ¿ves? Si cuentas, ahora está realmente 5 a la izquierda solo. (*El alumno no había explicado el resultado de la operación “-9+4” y al pedirle que lo explicara, se levantó y realizó las anteriores acciones*).*
(-9) – (-4) = -9+4 = -5. *Pues como sé que “-“por “-“es “+” pues me queda -9+4. Y esto es como estar en el sótano 9 del corte inglés y subir 4 pisos, que no llegas al piso 4 porque subes desde el sótano 9; llegas al sótano 5 y entonces da 5 (*el alumno dibujó la recta numérica en vertical y marcó los puntos correspondientes a -9, -5 y 0 y los cuatro pisos que subía*).*
(-9) – (-4) = -9+4 = -5. *“-“y “-“= “+”. Y luego, lo he calculado de cabeza pensando en el termómetro -5.* (2 alumnos*)*

Pregunta 3.a. Respuestas correctas aplicando este razonamiento: 5 de 5
(-3) – (-8) = -3+8 = 5. *Pues quito el paréntesis y como sé que “-“por “-“es “+” pues lo que me queda es -3+8. Y esto es como cuando alguien te debe 3 euros y te da ocho, que ahora tienes 5 de más que tienes que devolverle*
(-3) – (-8) = -3+8 = 5. *Pues es lo mismo que te he puesto en la pregunta de antes. Que como sé que “-“y “-“es “+” y lo que me queda es -3+8. Y luego pues es como si estás en el centro de la clase, y caminas 3 pasos a la izquierda y luego ocho a la derecha. Y si cuentas, ahora estás realmente 5 a la derecha del cero.* (Se trata del alumno que realizó la explicación física de la pregunta 2.b, que en esta respuesta lo ha escrito).
(-3) – (-8) = -3+8 = 5. *Porque “-“por “-“es “+” y me queda es -3+8. Tú pon que estás en el sótano 3 de un edificio que tenga 3 sótanos y subes 8 pisos, que llegas a la planta baja y sigues subiendo hasta el piso 5* (el alumno dibujó la recta numérica en vertical y marcó los puntos correspondientes a 3, 0 y 5 y los 8 pasos).
(-3) – (-8) = -3+8 = 5. *Lo he calculado mentalmente; “- - = +”; (-3) – (-8) = -3+8 = 5; Primero he puesto el “+” y luego lo he pensado con el ascensor y he subido 8 pisos hasta el 5.*
(-3) – (-8) = -3+8 = 5. Porque *“-“ por “-“ es “+” y al operar queda -3+8 que es como tener 8-3 y eso es como cuando tienes 8 cartas y te quitan 3, que te quedas con , o sea una resta.*

Tabla 4. Trascripción de respuestas a preguntas 2 y 3. Razonamiento aritmético-metafórico

Los alumnos aplicaron este tipo de razonamiento lo hicieron de dos formas:

- Algunos aplicaron primeramente las reglas matemáticas para simplificar el problema y después se sirvieron de uno de los modelos metafóricos conocidos previamente por ellos, cuando el problema simplificado ya podía ser resuelto aplicando tales metáforas.
- Otros, sin embargo, resolvieron las operaciones aplicando exclusivamente las reglas aritméticas conocidas; no obstante, decidieron después emplear modelos metafóricos para dar una explicación física a los cálculos realizados y las respuestas obtenidas.

Razonamiento metafórico puro

Es el puesto en práctica por aquellos alumnos que respondieron razonando exclusivamente con metáforas.

Los alumnos que aplicaron metáforas que ya conocían (termómetro, ascensor o saldo bancario), obtuvieron respuestas erróneas (por emplear modelos incompletos en casos en que estos no eran útiles), mientras que los alumnos razonaron siguiendo el ejemplo del juego de cartas, respondieron correctamente:

Tipo de razonamiento: Metafórico puro	**Total de alumnos: 9 de 30**
Pregunta 2.a. Respuestas correctas aplicando este razonamiento: 9 de 9	
(-5)+(−7) = - (5 + 7) = -12 . *Pues si saco un -7 y un -5 tienes que sumar a ver lo que te da; en este caso daría -12*	

Pregunta 2.b. Respuestas correctas aplicando este razonamiento: 3 de 9
(-9) – (-4) = -9+4 = -5. *Pues si tengo 2 cartas, un -5 y un -4, que son -9 y sale el dado rojo y le doy -4 a miguel son - 9 – 4 = -5* (3 alumnos)
…………………….. Respuestas incorrectas aplicando este razonamiento: 6 de 9
9-4=5. *Pues si tengo 9 caramelos que me ha dado mi hermana y me quitan 4 me quedan 5 caramelos.* (2 alumnos)
(-9) – (-4) = -9+(-4) = -13. *Pues si estoy a -9 grados y baja 4 grados más la temperatura (porque restar es bajar) entonces estamos a 4 grados menos, o sea, a -13 grados* (2 alumnos)
(-9) – (-4) = -9+(-4) = 13. *Pues como restar es como deber dinero, si debo 9 y luego debo 4 más, pues en total debo que se escribe -13* (2 alumnos)

Pregunta 3.a. Respuestas correctas aplicando este razonamiento: 3 de 9
(-3) – (-8) = -3+8= 5. *Pues si tengo 2 cartas que suman -3 y una es -8 y me lo quito de encima entonces es como si me regalaran 8 puntos más; entonces los tengo que sumar a lo que tengo que es -3, y me da que tengo 5, y gano*
…………………….. Respuestas incorrectas aplicando este razonamiento: 6 de 9
-3-8=11. Pues si tengo 3 caramelos y me quitan 8, (+3) – (-8) me quedarían -3 caramelos (4 alumnos)
(-3) – (-8) = -3+(-8) =-11. *Pues si estoy a -3 grados y baja 8 grados más la temperatura (porque restar es bajar) entonces estamos a 8 grados menos, o sea, a -11 grados* (2 alumnos)

Tabla 5. Trascripción de respuestas a preguntas 2 y 3. Razonamiento metafórico-puro

Sin razonamiento aparente

Dos alumnos del total de participantes mostraron respuestas en las que no fue posible identificar ningún tipo de razonamiento (en las preguntas 2a, 2b y 3a del cuestionario).

En las tres preguntas el resultado proporcionado por ambos alumnos fue erróneo, cosa que, por probabilidad, en caso de haber respondido al azar, resulta extraña.

Este hecho nos lleva a pensar que, tal vez, sí aplicaron algún tipo de razonamiento interno que, ni ellos han sido capaces de expresar (se les preguntó posteriormente), ni nosotros de averiguar. Las respuestas dadas por estos alumnos fueron las siguientes:

Tipo de razonamiento: -	**Total de alumnos: 2 de 30**
Pregunta 2.a. Respuestas incorrectas aplicando este razonamiento: 2 de 2	
(-5)+(−7) = - 2 . *Lo he calculado de cabeza*	
Pregunta 2.b. Respuestas incorrectas aplicando este razonamiento: 2 de 2	
(-9) – (-4) = -9+4 = 5. *No podría explicarlo*	
Pregunta 3.a. Respuestas incorrectas aplicando este razonamiento: 2 de 2	
(-3) – (-8) = -5. *Cuento con los dedos*	

Tabla 6. Trascripción de respuestas a preguntas 2 y 3. Sin razonamiento aparentemente

En la siguiente tabla se presentan algunos ejemplos de respuestas emitidas por los alumnos a las preguntas 4, 5 y 6. No se han desagregado por tipos de razonamiento porque ya en el propio enunciado de las preguntas se obligaba a los alumnos a trabajar sobre uno concreto de los modelos. Por ello, los alumnos que emitieron respuestas erróneas mostraron que no comprendían el modelo metafórico del que hablaba el enunciado.

Pregunta 4 Respuestas correctas 29 de 30
150-8=142; 142+3=145. *Lo he restado y lo he sumado* (15 alumnos)
150-8=142; 142+3=145. *Pues es como bajar 8 rayitas y subir luego 3* (14 alumnos)
……………………..Respuestas incorrectas 1 de 30
150-8-3=142; 142-3=139. *Pues restado* (1 alumno)

Pregunta 5 Respuestas correctas 17 de 30
-3+10 = 7. *Pues a -3 le he sumado + 10* (3 alumnos)
-3+10 = 7. *Pues es como estar 3 rayitas bajo del 0 y subir luego 10 rayitas.*(Algunos de los alumnos dibujaron un termómetro) (14 alumnos)
……………………Respuestas incorrectas 13 de 30
-3+10= 13. *Da positivo porque el mayor número es +10. Calculo mentalmente.*(11 alumnos)
-3+10= 13. *Lo aprendí así* (2 alumnos)

Pregunta 6 Respuestas correctas 17 de 30
-450 -300 = -750 →+750. *Pues eso es todo lo que he perdido.* (3 alumnos)
450 +300 = +750. *Vale 750 euros. Lo he sumado de cabeza* (10 alumnos)
-450 -300 = -750. *Entonces son 750 euros. Porque pierden los 450 euros que tenían y además necesitan 300 euros más, y eso es una suma y son 750 euros en total* (4 alumnos)
……………………Respuestas incorrectas 13 de 30
450 -300= 150. *Da positivo porque 450 es mayor que 300* (11 alumnos)
450 -300= 150. *Queda 150 con una resta* (2 alumnos)

Tabla 7. Trascripción de respuestas a las preguntas 4, 5 y 6 del cuestionario

5.2.2. Razonamiento Aritmético Puro

Los alumnos que razonaron de forma matemática exclusivamente, solo dieron respuestas correctas a todas las preguntas del cuestionario en un 21% de los casos (3 de 14). Este hecho podría ser debido a que, en el momento en que se enfrentaron al cuestionario (1ºESO) los números negativos eran un concepto relativamente nuevo para ellos por lo que el aprendizaje de la forma adecuada de manipularlos aún no había sido fijado firmemente entre sus conocimientos.

Así, se vieron en algunas respuestas, ciertas confusiones que los alumnos que acaban de "conocer" los números enteros tienen al operar con ellos:

- Confundieron producto y resta.
- No tenían claro el signo "-", al principio de una expresión, a qué términos afecta.
- No tenían claro, en general, el algoritmo de la resta de números enteros.

De hecho, entre las transcripciones de las respuestas siguiendo este tipo de razonamiento, que se han aportado, hay dos casos de dos respuestas a la pregunta 2.b, que ofrecen un resultado correcto, “especiales”.

Esto es debido a que, aunque el número dado como resultado de la operación es correcto, leyendo la explicación dada por el alumno se comprueba que el razonamiento aplicado era erróneo y el acierto numérico fue pura casualidad. (*)

Además, los anteriores tres alumnos que respondieron correctamente a todas las preguntas del test, fueron los tres únicos alumnos que dieron un resultado correcto a las preguntas del pre-test de control; el resto de clase emitió respuestas erróneas.

Es llamativo ver que todos los alumnos que siguieron un razonamiento exclusivamente matemático, incluidos los que erraron las respuestas, estaban muy seguros de la corrección de su resultado, lo que lleva a deducir el gran perjuicio que supone fijar erróneamente un algoritmo matemático en la mente de un alumno.

Podemos deducir que, cuando hablamos de un grupo de “expertos” en un concepto matemático (lo que en relación a los números negativos se correspondería con alumnos de 4º ESO en adelante), éstos pueden razonar correctamente a partir de las propias operaciones aritméticas únicamente.

Para ellos, los números negativos, y los enteros en general, y las relaciones entre ellos (operaciones) tienen significado por sí mismos, significado que ellos comprenden y conocen, y no necesitan recurrir a modelos conceptuales o metáforas para alcanzar la solución correcta.

Sin embargo, cuando quienes se enfrentan al problema son alumnos novatos en el concepto matemático (lo que en relación a los números negativos se correspondería con alumnos de 6º de Primaria, 1º ESO, e incluso en ocasiones 2º ESO) necesitan de justificaciones “significativas” de las operaciones matemáticas, es decir, que necesitan dotar a estas operaciones de significado para alcanzar la solución correcta.

En un futuro, cuando los alumnos novatos se conviertan en expertos, puede esperarse que esto ya no ocurra, y que sean capaces de razonar con destreza concentrándose exclusivamente en las reglas aritméticas pero, en este primer estadio de contacto con los números negativos, recurrir tan solo a estas reglas ha demostrado no ser el mejor método para llegar a la solución correcta.

5.2.3. RAZONAMIENTO METAFÓRICO PURO

Es interesante ver que aproximadamente la mitad de los alumnos se encontraron más cómodos razonando, en el caso de los números negativos, con modelos conceptuales o metáforas, en lugar de recurrir exclusivamente a las reglas matemáticas estrictamente, bien de forma exclusiva, o bien mediante combinación con las reglas de cálculo que conocían.

En cuanto a los alumnos que razonaron de forma metafórica exclusivamente, se encontraron con problemas cuando el modelo elegido no pudo responder a todas las situaciones planteadas en las preguntas.

Este es el caso de los alumnos que respondieron pensando en los modelos metafóricos tradicionales (temperaturas, saldos económicos y ascensores), que han demostrado ser incompletos y no útiles para resolver las preguntas 2 y 3 planteadas en este test.

Los alumnos que recurrieron a ellos, un 20% del total de alumnos (6 de 30), no eran conscientes de que estos modelos eran incompletos y no les servían en este caso para llegar a la solución correcta (o bien no sabían proceder de otra forma) y, al aplicarlos, se vieron obligados a "improvisar" para dar alguna respuesta. Por otro lado, los alumnos que respondieron aplicando el modelo conceptual del juego de cartas, un 10% del total (3 de 30), que es un modelo completo, llegaron en todos los casos a la solución correcta.

Los alumnos que se sirvieron de modelos incompletos (porque no podían explicar ciertas situaciones, como por ejemplo aquellas que implicaban restar números negativos), respondieron que estaban poco o nada seguros de sus respuestas, probablemente porque en el momento de aplicar el modelo, fueron conscientes de que algo no acababa de encajar.

Este hecho es positivo en la medida en que, pensando que su respuesta no es correcta, el alumno podría continuar buscando alguna técnica de resolución que le ofrezca resultados correctos. Frente a estos, los alumnos que aplicaron el modelo conceptual del juego de cartas se mostraron seguros y uno de ellos incluso añadió "pero si es lo que acaba de pasar antes en la partida". Probablemente, este convencimiento es debido a que cuando estaban razonando las respuestas, pensando en el juego de cartas, y se encontraron con que la equivalencia entre el problema y la metáfora era completa y, a partir de ésta, números negativos y operaciones aritméticas cobraban sentido en su mente.

5.2.4. Razonamiento Aritmético-Metafórico

Finalmente, el grupo más grande de respuestas correctas está formado por los alumnos que siguieron un razonamiento mixto, es decir, que aplicaron razonamientos matemáticos complementados con razonamientos metafóricos. Estos alumnos acertaron en todos los casos, un 17% del total de alumnos (5 de 30). Aparentemente, se dieron cuenta de que no podían llegar a las similitudes necesarias entre las operaciones aritméticas planteadas en los enunciados y ninguna de las metáforas conocidas, por lo que los modelos tradicionales no podían ser aplicados directamente para resolver estas operaciones.

Todos ellos partieron de reglas aritméticas para simplificar los enunciados, pero procedieron de dos formas diferentes, según el caso.

Algunos de los alumnos, una vez simplificado el enunciado hasta un punto tal que pudieran encontrarse suficientes similitudes entre los números y operaciones planteadas y la metáfora elegida, completaron la resolución aplicando un razonamiento metafórico. Procedieron, en primer lugar, simplificando la expresión y transformándola en otra más simple, cuya equivalencia con una metáfora fuera fácil de encontrar.

Posteriormente, realizada la equivalencia, números y operaciones cobraron significado en su mente y los alumnos razonaron de forma metafórica con el modelo elegido.

Sin embargo, otro grupo de alumnos procedió de forma aritmética hasta el final, pero completó la resolución con una explicación "física" sobre el porqué del método aplicado. Esta forma de actuar muestra que el alumno aplicó reglas matemáticas dotándolas de sentido en ese mismo instante, de forma que todo adquirió coherencia en su mente.

Cabe decir que, los alumnos que aplicaron este razonamiento se mostraron bastante seguros de sus respuestas, probablemente porque, al igual que los que razonaron con el juego de cartas, cuando estaban razonando, operaciones aritméticas y metáforas casaban perfectamente, la equivalencia era total, y los resultados tenían sentido "físico" para ellos.

6. CONCLUSIONES

Una vez analizados los resultados del experimento, se han extraído las siguientes conclusiones:

Podemos deducir que el razonamiento metafórico es adecuado en la resolución de un problema aritmético, para los alumnos novatos en el tema de que trate, puesto que para ellos, números negativos (y por extensión enteros) y operaciones carecen de sentido por sí mismas, y es a través de los modelos conceptuales o metáforas cuando estas operaciones cobran significado "físico".

No obstante, para que la utilidad de estos modelos convencionales sea plena, deben ser utilizados "con cabeza", es decir, que en el momento de la aplicación de un modelo conceptual concreto, el alumno debe ser consciente de las limitaciones de éste (operaciones y situaciones en que el modelo no será capaz de responder correctamente a priori).

Teniendo en cuenta estas limitaciones, el alumno podrá transformar los problemas o enunciados dados, en otros (más sencillos) para los cuales puede encontrar una equivalencia plena con alguno de los modelos metafóricos convencionales; razonando sobre ellos llegará a la solución completa y correcta del problema.

Es más, a la luz de las respuestas de los alumnos en relación a su grado de seguridad sobre la respuesta ofrecida, y teniendo en cuenta el tipo de razonamiento aplicado, se ha visto que el empleo de metáforas en el razonamiento es muy útil, no solo para dotar de significado a las operaciones aritméticas (y los números negativos) y resolverlas, sino también para juzgar si la solución alcanzada tiene sentido o no. Tal es el caso de los alumnos que aplicaron un razonamiento mixto o un razonamiento metafórico correcto (con un modelo completo); se dieron cuenta de que la aplicación del modelo era coherente y de que la solución tenía sentido.

Al mismo tiempo, los alumnos que aplicaron un razonamiento metafórico erróneo (con un modelo convencional, incompleto) también se dieron cuenta de que la aplicación del modelo no era coherente y de que la solución no parecía tener sentido.

Frente a estos dos grupos, los que razonaron de forma puramente aritmética, desconocían totalmente si la respuesta alcanzada era correcta o no.

La introducción de un modelo metafórico completo (porque logra explicar la suma y la resta de números negativos en todas las situaciones), el Pseudo Plus-Minus Game, extraído del trabajo de Hattermann, ha permitido estudiar casos que los anteriores autores no habían podido contemplar, en relación a la resta de números negativos, como es analizar lo que ocurre cuando el modelo metafórico aplicado por los alumnos es un modelo completo, y efectivamente logra explicar todos los problemas o situaciones. El resultado ha sido que este modelo (completo) es realmente útil para que los estudiantes noveles puedan alcanzar las respuestas correctas, siempre que lo comprendan.

Todo ello nos lleva a concluir que, explicar un concepto nuevo, como es la resta de números negativos, con modelos conceptuales, puede resultar útil o no para su aprendizaje y entendimiento por parte de los alumnos, en función del empleo que se haga del mismo.

Resultará muy útil, siempre que, o bien este modelo sea completo (Pseudo Plus-Minus Game), y por tanto pueda resolver todas las situaciones planteadas, o bien se informe a los alumnos en el momento de la explicación del modelo, de que se trata de un modelo incompleto (temperaturas, saldos económicos y ascensores). En tal caso, se debe informar de que no podrá responder adecuadamente a todos los problemas matemáticos, y especificar también en qué situaciones ocurrirá esto; en el conocimiento de esta información radica la potencialidad de los modelos metafóricos.

La conclusión alcanzada en el presente trabajo de investigación está en la línea de los trabajos de Chiu (2001) y de Kilhamn (2008). En mi opinión, el debate no debería ser si utilizar modelos metafóricos o no, puesto que la utilidad de estos ya ha sido probada. En su lugar, se debería analizar el tipo de modelo al que recurrir, completo o incompleto, y, en el segundo caso, informar a los alumnos de sus limitaciones y de la forma de "preparar" matemáticamente los problemas para poder aplicarlos.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

7.1. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Chiu, M. (2002). Metaphorical Reasoning: Novices and Experts Solving and Understanding Negative Number Problems. *Educational Research Journal, 17(1)*, 19-41.

Colera, J., Gaztelu, I. Tema 4. Los números enteros. *Matemáticas. 1ºESO*. (pp. 74-95). Salamanca: Anaya.

Consellería de Educación (2007). DECRETO 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana. *Diario Oficial de la Generalitat Valenciana,* DOGV 5562, 30402-30587.

Departamento de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria Sorolla (2014-2015). *Proyecto didáctico del departamento de matemáticas*. Valencia: IES Sorolla. Documento interno no publicado.

Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 257-275). Granada. Universidad de Granada.

Gómez, B. (2015). *Apuntes de la asignatura Aprendizaje y Enseñanza de las matemáticas*. Valencia: Universidad de Valencia.

Hattermann, M., Hofe, R. (2015). Student's argumentation schemes in terms of solving tasks with negative numbers. *Proceedings of the Nineth Congress of European Research in Mathematics Education*, 4-8 de febrero, Praga, República Checa.

Kilhamn, C. (2008). *Making sense of negative numbers through metaphorical reasoning*. Tesis Doctoral, Universidad de Gothenburg (Gothenburg).

Ministerio de Educación (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, BOE-A-2015-37, 169-546.

7.2. BIBLIOGRAFÍA CITADA EN MATERIAL CONSULTADO

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal* (93), 379-397.

Chacón, A. M. A. (2005). Difficulties found by the students during the study of subtraction of integer numbers. In M. Bosch (Ed.), *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, *CERME* 4, pp. 643-651. Spain: http:/ermeweb.free.fr/CERME4/.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of mathematics*, 9(2), 9-14.

Gallardo, A. (1995). Negative numbers in the teaching of arithmetic. In D. Owens, M. Reeds & G. Millsaps (Eds.). *Proceedings of the 17th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education (North America Chapter).* Ohio, USA: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, vol. 1, pp. 158-163.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1991). Pre-algebraic thinking: Range of equations and informal solution processes used by seventh graders prior to any instruction, *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (PME 15). Assissi, Italy: PME, vol. 2, pp. 173-180.

Kilborn, W. (1979). *Ämnesmetodiska processanalyser i matematik inom komvux* (8). Stockholm: Högskolan för lärarutbildning. Institutionen för pedagogik. Forskningsgruppen för vuxenpedagogik och återkommande utbildning.

Kullberg, A. (2006, 7-9 Dec.). From learning study to design study, *Paper of the EARLI SIG 9 Biennial Workshop*. University of Hong Kong.

Kövecses, Z. (2002). *Metaphor, a practical introduction*. New York: Oxford University Press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Linchevski, L., & Williams, J. (1999). Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in childrens extension of their number concept to include negative numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 133-147.

Martínez, A. A. (2006). *Negative math: How mathematical rules can be positively bent*. Princetown, NJ: Princetown University Press.

Reys, B. J., & Reys, R. E. (1995). Perspektiv på number sense och taluppfattning. *Nämnaren*, 22(1), 28-33.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 44-54.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 341-359.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in `negativity´. *Learning and Instruction*, 14, 469-484.

8. ANEXOS

8.1. LEGISLACIÓN AUTONÓMICA

DECRETO 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana. Publicado en el DOGV, con fecha del martes24 de julio de 2017

http://www.docv.gva.es/datos/2007/07/24/pdf/2007_9717.pdf

Primer curso

Contenidos: Bloque 2. Números

- Necesidad de los números negativos para expresar estados y cambios. Reconocimiento y conceptualización en contextos reales.
- Números enteros. Representación gráfica. Operaciones elementales.
- Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.
- Cálculo mental utilizando las propiedades de las operaciones numéricas.
- Utilización de estrategias personales para el cálculo mental, aproximado y con calculadoras.

Criterios de Evaluación

3. Utilizar los números naturales, los enteros, las fracciones y los decimales, sus operaciones y propiedades para recibir y producir información en actividades relacionadas con la vida cotidiana.
4. Elegir, al resolver un determinado problema, el tipo de cálculo más adecuado (mental o manual) y dar significado a las operaciones y resultados obtenidos, de acuerdo con el enunciado
5. Calcular el valor de expresiones numéricas sencillas de números enteros, decimales y fraccionarios (basadas en las cuatro operaciones elementales, las potencias de exponente natural y las raíces cuadradas exactas, que contengan, como máximo, dos operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicando correctamente las reglas de prioridad y haciendo un uso adecuado de signos y paréntesis.

Segundo curso

Contenidos: Bloque 2. Números

- Operaciones elementales con fracciones, decimales y números enteros.
- Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.

- Potencias de exponente natural. Operaciones con potencias. Utilización de la notación científica para representar números grandes.
- Aproximaciones, truncamientos y redondeos. Raíces cuadradas aproximadas.
- Utilización de la forma de cálculo mental, escrito o con calculadora, y de la estrategia para contar o estimar cantidades más apropiadas a la precisión exigida en el resultado y a la naturaleza de los datos.

Criterios de Evaluación

1. Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida.
3. Operar con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales, y utilizarlos para resolver actividades relacionadas con la vida cotidiana.
4. Resolver problemas, eligiendo el tipo de cálculo más adecuado (mental, manual) y dar significado a las operaciones, métodos y resultados obtenidos, de acuerdo con el enunciado.
5. Calcular el valor de expresiones numéricas sencillas de números enteros, decimales y fraccionarios (basadas en las cuatro operaciones elementales, las potencias de exponente natural y las raíces cuadradas exactas, que contengan, como máximo, dos operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicando correctamente las reglas de prioridad y haciendo un uso adecuado de signos y paréntesis.

Tercer curso

Contenidos: Bloque 2. Números

- Potencias de exponente entero. Significado y propiedades. Su aplicación para la expresión de números muy grandes y muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. Uso de la calculadora.
- Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.

Criterios de Evaluación

3. Calcular expresiones numéricas sencillas de números racionales (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente entero, que contengan, como máximo, dos operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicar correctamente las reglas de prioridad y hacer uso adecuado de signos y paréntesis.

Cuarto curso. Opción A

Contenidos: Bloque 2. Números

- Operaciones con números enteros, fracciones y decimales.
- Intervalos: tipos y significado. Representación de números en la recta numérica.

Criterios de Evaluación

3. Utilizar distintos tipos de números y operaciones, con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas de la vida diaria.
4. Calcular el valor de expresiones numéricas sencillas de números racionales (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente entero que contengan, como máximo, tres operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicar correctamente las reglas de prioridad y hacer un uso adecuado de signos y paréntesis.

Cuarto curso. Opción B

Contenidos: Bloque 2. Números

- Iniciación al número real: representación sobre la recta real. Intervalos: tipos y significado.
- Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso.

Criterios de Evaluación

3. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.
4. Calcular el valor de expresiones numéricas de números racionales (basadas en las cuatro operaciones elementales y las potencias de exponente entero que contengan, como máximo, tres operaciones encadenadas y un paréntesis), aplicar correctamente las reglas de prioridad y hacer un uso adecuado de signos y paréntesis.

8.2. LEGISLACIÓN ESTATAL

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Publicado en el BOE, con fecha del sábado 3 de enero de 2015

http://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Especialidad 29: Matemáticas (única)

Primer y Segundo cursos. ESO

Contenidos: Bloque 2. Números y álgebra

- Números negativos. Significado y utilización en contextos reales.
- Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones. Operaciones con calculadora.
- Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.

Criterios de evaluación

1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.
2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.
3. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental.
4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.

Estándares de aprendizaje evaluables

1.1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.
1.2. Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.
1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.
2.1. Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales.
2.5. Calcula e interpreta adecuadamente el opuesto y el valor absoluto de un número entero comprendiendo su significado y contextualizándolo en problemas de la vida real.

Especialidad 27: Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

Tercer curso. ESO

Contenidos: Bloque 2. Números y álgebra

- Potencias de números naturales con exponente entero. Significado y uso. Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. Jerarquía de operaciones.

Estándares de aprendizaje evaluables

1.7. Calcula el valor de expresiones numéricas de números enteros, decimales y fraccionarios mediante las operaciones elementales y las potencias de números naturales y exponente entero aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.

Cuarto curso. ESO

Contenidos: Bloque 2. Números y álgebra

- Representación de números en la recta real. Intervalos.
- Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso.
- Jerarquía de las operaciones.

Criterios de evaluación

1. Conocer los distintos tipos de números e interpretar el significado de algunas de sus propiedades más características: divisibilidad, paridad, infinitud, proximidad, etc
2. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.

Estándares de aprendizaje evaluables

1.1. Reconoce los distintos tipos números (naturales, enteros, racionales e irracionales y reales), indicando el criterio seguido, y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.
1.2. Aplica propiedades características de los números al utilizarlos en contextos de resolución de problemas.
2.6. Compara, ordena, clasifica y representa distintos tipos de números sobre la recta numérica utilizando diferentes escalas.
2.7. Resuelve problemas que requieran conceptos y propiedades específicas de los números.

Especialidad 28: Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas

Tercer curso. ESO

Contenidos: Bloque 2. Números y álgebra

- Potencias de números naturales con exponente entero. Significado y uso. Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica.
- Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.

Estándares de aprendizaje evaluables

1.7. Calcula el valor de expresiones numéricas de números enteros, decimales y fraccionarios mediante las operaciones elementales y las potencias de números naturales y exponente entero aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.

Cuarto curso. ESO

Contenidos: Bloque 2. Números y álgebra

- Interpretación y utilización de los números reales y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso.
- Jerarquía de las operaciones.

Criterios de evaluación

1. Conocer y utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades y aproximaciones, para resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico recogiendo, transformando e intercambiando información.

Estándares de aprendizaje evaluables

1.1. Reconoce los distintos tipos números (naturales, enteros, racionales e irracionales), indica el criterio seguido para su identificación, y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.

1.2. Realiza los cálculos con eficacia, bien mediante cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel o calculadora, y utiliza la notación más adecuada para las operaciones de suma, resta, producto, división y potenciación.

1.5. Compara, ordena, clasifica y representa los distintos tipos de números reales, intervalos y semirrectas, sobre la recta numérica.

Especialidad 26: Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

1er curso de Bachillerato

Contenidos: Bloque 2. Números y álgebra

- Números racionales e irracionales. El número real. Representación en la recta real. Intervalos.
- Operaciones con números reales. Potencias y radicales. La notación científica.

Criterios de evaluación

1. Utilizar los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información, controlando y ajustando el margen de error exigible en cada situación, en situaciones de la vida real.

Estándares de aprendizaje evaluables

1.1. Reconoce los distintos tipos números reales (racionales e irracionales) y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.
1.2. Representa correctamente información cuantitativa mediante intervalos de números reales.
1.3. Compara, ordena, clasifica y representa gráficamente, cualquier número real.

Especialidad: Matemáticas I

1er curso de Bachillerato

Contenidos: Bloque 2. Números y álgebra

- Números reales: necesidad de su estudio para la comprensión de la realidad. Valor absoluto. Desigualdades. Distancias en la recta real. Intervalos y entornos. Aproximación y errores. Notación científica.

Criterios de evaluación

1. Utilizar los números reales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información, estimando, valorando y representando los resultados en contextos de resolución de problemas.

Estándares de aprendizaje evaluables

1.1. Reconoce los distintos tipos números (reales y complejos) y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.
1.5. Conoce y aplica el concepto de valor absoluto para calcular distancias y manejar desigualdades.
1.6. Resuelve problemas en los que intervienen números reales y su representación e interpretación en la recta real.