UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Profesor/a de Educación Secundaria

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS TÉRMINOS LITERALES POR PARTE DE LOS ALUMNOS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

SILVIA GALLEGO VIÑAS

Tutorizada por:

Dr. Luis Puig Espinosa

Departamento de Didácticas de la Matemáticas

Valencia, 3 de julio de 2017

Ficha técnica

Máster: Máster en Profesor/a de Educación Secundaria por la Universitat de València

Especialidad: Matemáticas

Autor: Apellidos: Gallego Viñas

Nombre: Silvia

Título de la memoria: Análisis e interpretación de los términos literales por parte de los alumnos de la Educación Secundaria.

Tutor: Apellidos: Puig Espinosa

Nombre: Luis

Departamento: Didáctica de las Matemáticas

Fecha de defensa:

Calificación:

Palabras clave: Aprendizaje del álgebra, didáctica de las matemáticas, interpretación de los términos literales, errores algebraicos, comprensión algebraica, secundaria.

Keywords: Algebra learning, mathematics' didactic, interpretation of the literal tems, algebraic mistakes, algebraic understanding, secundary.

Códigos Unesco: 12, 120199 (Didáctica del álgebra), 610401

Resumen: El objetivo de este estudio es describir y analizar las interpretaciones de los términos literales algebraicos que realiza una muestra de 27 alumnos y alumnas entre 15 y 16 años de un instituto de la ciudad de Valencia. Se les administró un test basado en investigaciones del Dr. Küchemann entre finales de los años 70 y principios de los años 80. Se realizó un análisis detallado de las dificultades y errores que presentaron así como de alguno de los ítems que se utilizaron para identificar dichas interpretaciones. Posteriormente se entrevistó de modo individual a 2 alumnos para conocer la justificación de sus respuestas. La mayor parte de los alumnos mostraron dificultades en la interpretación de la letra como incógnita específica, como número generalizado y como variable. En un futuro sería conveniente desarrollar estrategias enfocadas a la mejora del entendimiento de estas variables entre los alumnos.

Abstract: The aim of this study is to describe and analyze the interpretation of algebraic literal terms made by a sample of 27 students between 15 – 16 years old of a Secondary school of Valencia. A test, based on Dr. Küchemann's research (carried out between the end of seventies and early eighties), was distributed. A detailed analysis

of experienced difficulties and made mistakes, as well as some of the items used to identify the cited interpretations, was performed. Afterwards, two students were interviewed individually in order to know the justification of their answers. Most of the students showed difficulties to interpret a letter as a specific unknown, as a generalised number or a variable. In future, it would be suitable to develop strategies focused on improving the understanding of these variables by students.

Índice

Introducción

La notación algebraica tal y como la conocemos no comenzó a desarrollarse hasta aproximadamente el 1600 por parte de Vieta, separándose del lenguaje común. Como dice Freudenthal (1983), el lenguaje algebraico es un lenguaje formal que permite expresar relaciones con una estructura clara. Por tanto, como lenguaje, las letras en matemáticas tienen un significado, son como símbolos que representan algo explícitamente, al contrario que el lenguaje común. Este último puede ser mucho más ambiguo ya que una misma palabra puede tener multiplicidad de significados.

A pesar de la claridad del lenguaje algebraico, los estudiantes encuentran difícil la comprensión de esta rama matemática. Alguno de los factores que posiblemente les condicionen en el proceso son, entre otros, el tener la aritmética como una referencia y llevar a cabo el paso de una a la otra, la comprensión e interpretación del lenguaje y la estructura del mismo, la interpretación de los términos literales o la generalización.

Con este trabajo se pretende ayudar, tanto a otros profesores como a mí misma, a entender el porqué de esas dificultades y tener un punto de partida para intentar trabajar en las posibles soluciones. Para ello nos vamos a centrar en identificar y analizar las interpretaciones y usos que hacen y los errores que cometen los alumnos de secundaria del lenguaje algebraico. Concretamente trabajaremos con un grupo de alumnos de 4º de la ESO.

Para poder realizar este trabajo nos hemos basado en los materiales y recursos que realizó Küchemann (1981), los cuales atendían la parte algebraica de un programa de investigación llamado *Concepts in Secundary Mathematics and Science (CSMS)*, realizado por *The CSMS Mathematics Team* en los años setenta-ochenta. La finalidad de esta parte del estudio era analizar la interpretación de las letras, estableciendo las comparaciones pertinentes, que ofrecía la población estudiantil inglesa comprendida entre los 12 y 15 años al contestar dicho test. En la actualidad, en España, concordaría con realizar el test a alumnos de secundaria.

Antes de continuar cabe destacar que con este Trabajo Final de Máster no se pretende simular el estudio exhaustivo realizado por Küchemann (1981) sino más bien hacer una aproximación al mismo, dado que no disponemos ni del tiempo necesario, ni de los recursos y tampoco un conocimiento tan profundo sobre el tema. Por tanto, la finalidad de este trabajo es continuar con el estudio, hecho a pequeña escala, que ya han realizado otros compañeros del máster en cursos anteriores con la intención de recoger el tipo de interpretación que le dan jóvenes a los términos literales. De este modo se pretende obtener el material necesario para poder sacar conclusiones más próximas a la realidad. En mi caso, el estudio se ha realizado en el IES Benlliure, de Valencia, centro en el que realicé las prácticas durante los meses de febrero y marzo de 2017. Como se ha comentado anteriormente, el test fue pasado a alumnos de 4º ESO de enseñanzas académicas, es decir, aquellos alumnos que en principio seguirán cursando Bachiller.

Veamos, antes de desglosar el tema, cuál es la estructura utilizada en el presente trabajo. Como se puede apreciar hemos dividido el trabajo en tres capítulos. En el primero se hace una breve revisión bibliográfica sobre este tema, viendo tanto el origen de las investigaciones, los errores más comunes cometidos por los alumnos, como del estudio realizado por Küchemann en los años ochenta y a principios del actual siglo.

Cabe destacar que, pese a existir mucha más información acerca de la didáctica de las matemáticas y en concreto del álgebra, en este trabajo no nos vamos a extender haciendo una revisión bibliográfica, sino que nos vamos a centrar en unas pocas referencias elegidas por Luis Puig Espinosa. Éstas hacen referencia al panorama de investigación de la época en la que se realizó el estudio por parte de Küchemann. La referencia más actual con la que estamos trabajando en este trabajo es de Caroline Kieran en el año 2006.

En el segundo capítulo nos centraremos en el estudio de campo realizado. Para ello comenzaremos viendo, igual que se hizo cronológicamente en la realidad, cuál es la metodología utilizada, para pasar a conocer la población de estudio y el contexto en el que se encuentra. Con estos datos podremos diseñar el test apropiado, basado en el realizado por Küchemann (1981) en su investigación, el cual adaptaremos al contexto actual y necesidades de los alumnos, pero ciñéndonos lo máximo posible a la estructura original utilizada por su autor. Este test lo encontramos en el Anejo A. Tras la aplicación del test y la recopilación de los resultados recogidos en varias tablas contenidas en el Anejo B, se hará un análisis de las dificultades con las que los alumnos se han encontrado y los errores que han cometido. En el presente trabajo se presenta un resumen de dicho análisis mientras que en el Anejo C se encuentra desarrollado por completo. Una vez se conozcan los resultados por individual de los alumnos, se pasará a hacer un estudio agrupándolos según el tipo de interpretación que hagan de los términos literales y las respuestas correctas que sean capaces de contestar. Con esta clasificación por grupos se proceden a realizar una serie de entrevistas con el fin de conocer mejor y analizar más profundamente el tipo de interpretación de las letras que han realizado los alumnos.

En el último capítulo se recoge un resumen y una recopilación de los resultados y conclusiones del estudio llevado a cabo.

Por último, comunicar que las encuestas realizadas a los alumnos se encuentran transcritas en el Anejo D.

Capítulo 1. Antecedentes

1. Inicio de las investigaciones en álgebra y fuentes de significado de los conceptos.

Desde finales de los años setenta y durante más de 30 años, las investigaciones realizadas por el *International Group of the Psychology of Mathematics Education* (PME) acerca de la didáctica del álgebra se centran, como comenta Kieran (2006), en la transición de la aritmética al álgebra, en las variables y las incógnitas, las ecuaciones y cómo resolverlas y los problemas algebraicos de palabra. A mediados de los años ochenta se unieron a estos temas de investigación otros que también reflejaban un interés en el álgebra como fueron la generalización, el uso de las nuevas herramientas tecnológicas de aprendizaje y la focalización en múltiples representaciones. Después, la investigación del PME incorporó, a mediados de la década de los noventa, temas relativos ya no sólo a la forma de pensar de los alumnos acerca del álgebra sino también a la forma que el profesor tenía de enseñarla. Todo ello hizo que el grupo de investigadores del PME se plantearan cuáles son las fuentes a partir de las cuales los alumnos construyen su propio significado de los conceptos.

De acuerdo con la adaptación que hizo Kieran (2006), citando lo que había dicho Radford (2004), el significado del álgebra para los estudiantes es producido por la "intersección de diversos sistemas semióticos, matemáticos o no-matemáticos" y se considera que proviene de tres fuentes primarias:

- La estructura algebraica en sí misma.
- El contexto del problema.
- El exterior del contexto del problema (por ejemplo: la actividad lingüística, los gestos y el lenguaje del cuerpo, las metáforas, las experiencias vividas, etc.).

Continuando con el texto de Kieran (2006), vemos que existe una comparación de esta clasificación con la triple perspectiva del significado matemático en la educación, ofrecida por Noss y Hoyles (1996):

- Significados de los objetos matemáticos.
- Significados de la resolución de problemas.
- Significados construidos individualmente por el alumno.

Lo cual le sugiere a Kieran (2006) que la primera fuente de significado, "la estructura algebraica en sí misma", podría ser dividida en dos partes: el significado a raíz de la estructura algebraica en sí misma, incluyendo la forma de la letra o símbolo y el significado debido a las múltiples representaciones.

Por otro lado, Socas (1997, 2007) citado en el artículo publicado por Ruano, Socas, y Palarea (2015) considera que el origen de los errores puede tener tres procedencias distintas y no disjuntas como son:

- Las actitudes afectivas de los alumnos hacia el álgebra.
- La ausencia de sentido (desencadenando errores debido a arrastrar problemas de otras áreas de la matemática o a las propias características del lenguaje algebraico).
- Los obstáculos (dando lugar a errores como la omisión del paréntesis o consideración de que 2x es igual que 2 + x, entre otros).

Dado que, como hemos visto, existe una gran diversidad de orígenes que pueden atribuir el significado a un concepto, los alumnos cometen errores y tienen dificultades muy dispares, las cuales han sido concepto de estudio en muchas investigaciones. A continuación se recogen los errores más destacables.

2. Errores comunes.

Como hemos comentado anteriormente, debido a la variedad de orígenes que existen para asimilar un concepto, los errores cometidos son muy dispares. Nos centraremos en este apartado en alguno de los comentados por Kieran y Filloy (1989) como son: la aritmética como marco de referencia por un lado y las expresiones, ecuaciones y su resolución por otro.

- **La aritmética como marco de referencia.**

  El estudio del álgebra comienza una vez los jóvenes ya tienen consolidados muchos conceptos aritméticos. Esto provoca que la transición de pasar de un modo informal de representación y resolución de problemas (aritmética) a uno formal (álgebra) resulte dificultoso para muchos. Estos alumnos no entienden que el álgebra no es una generalización de la aritmética y que lo que realmente requiere es un cambio de pensamiento por su parte, pasando de las situaciones numéricas concretas a otras más generales sobre números y operaciones. No producir este cambio provoca que su forma de afrontar el álgebra sea aplicando los métodos que sí les funcionaban en la aritmética, desencadenando las siguientes dificultades:

  <u>Forma de ver el signo igual</u>: debido a la concepción aritmética del signo, este sigue viéndose como una señal para realizar una operación y no como una equivalencia entre lados.

  <u>Dificultades con las convenciones de notación</u>: por un lado aparece la dificultad de entender que la concatenación en aritmética representa la adición ($29 = 20 + 9$) mientras que en aritmética denota multiplicación ($5a = 5 \cdot a$). Por otro lado, suelen tener problemas en el uso del paréntesis y el orden de los cálculos, pues no consideran que los paréntesis sean necesarios para denotar cuál es el orden en el que hay que realizar las operaciones.

  <u>Métodos de simbolizar</u>: surge la falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que utilizan para resolver un problema, así como el reconocimiento de que en muchas ocasiones el procedimiento es la respuesta, al contrario que ocurre en la aritmética donde la respuesta es siempre numérica. Por

ejemplo: el resultado de sumar 5 y b es 5 + b. Este dilema es nombrado como “proceso – producto” por Matz y Davis o como “aceptación de la falta de cierre” por Collis, ambos citados en Kieran y Filloy (1989).

Interpretación de variables: por un lado, Kieran y Filloy (1989) citan a Küchemann (1981) cuando dice que la mayoría de alumnos tratan los términos literales de las expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como variables o números generalizados, es decir, los tratan como etiquetas. Además, utilizan las letras como variables sin tener el concepto de variable adquirido, es decir, de poder ver lo general en lo particular.

- **Expresiones, ecuaciones y su resolución.**

Por un lado, en cuanto a las expresiones, reaparece el problema de considerar la expresión algebraica como la solución del problema y se le añade el creer que carece de sentido una expresión si no forma parte de una igualdad. Este último problema provoca tanto que los alumnos necesiten expresar la solución como una igualdad como que no sean capaces de resolver una expresión por no estar igualada.

Por otro lado, en lo que se refiere a las ecuaciones, los alumnos, procedentes de la primaria, están acostumbrados a verlas fuera de contexto, por lo que su compresión se dificulta. Esto a su vez dificulta que sean capaces de hallar la ecuación de un problema de palabra y, por tanto, lo que hacen para solventarlo es resolverlo de cabeza y después intentar transcribir en una ecuación los pasos seguidos, es decir, las operaciones realizadas. Usualmente este proceso conlleva a que no aparezca la incógnita y que el resultado siempre aparezca a la derecha del igual. Además, muchos no conciben la idea de que puedan aparecer letras a ambos lados de la igualdad ya que siguen pensando que el álgebra es unidireccional y que la respuesta se escribe en el lado derecho de la igualdad.

En lo que respecta a la resolución de ecuaciones, debido a muchas investigaciones realizadas por los miembros del PME, se ha llegado a la conclusión de que existen tres enfoques para la resolución de ecuaciones:

Enfoque intuitivo, donde se incluye la utilización de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento. Kieran y Filloy (1989) citando a Petitto (1979) comenta que los estudiantes que utilizan técnicas intuitivas a menudo no las generalizan –como en las ecuaciones en que aparecen números negativos-, y además, que quienes utilizaban una combinación de procesos formales e intuitivos resolvían mejor las ecuaciones que quienes solo utilizaban uno de los procesos.

Enfoque de sustitución por tanteo, como su propio nombre indica lo que se hace es tantear la solución, es decir, ir sustituyendo valores hasta cercar el correcto. En el que más tiempo y memoria de trabajo necesita por lo que cuando los alumnos aprenden otros métodos más formales de resolución tienden a abandonarlo. Sin embargo, como comenta Lewis (1980) citado por Kieran y Filloy (1989) también lo abandonan a la hora de comprobar su solución. Según Kieran (1988) citado en el mismo artículo los alumnos que tienen desarrollado este enfoque tienen una concepción más certera de la equivalencia entre el lado derecho y el izquierdo de una igualdad que el resto de estudiantes que nunca utilizan este método.

Enfoque formal, en el que los alumnos incluyen la transposición de los términos, ejecutando la misma operación a ambos lados de la igualdad. Sin embargo, no ven la simetría de la ecuación. Según Filloy y Rojano (1985a, 1985b) nombrados por Kieran y Filloy (1989) los estudiantes que se centran en la utilización de este método lo hacen siempre, incluso cuando sería más fácil resolverlo haciendo uso de métodos intuitivos.

Además de esta clasificación de los enfoques, otros estudios se han centrado en el conocimiento que tienen los estudiantes acerca de la estructura de las ecuaciones y su resolución. En ellos aparece que muchos alumnos tienen dificultades al tratar expresiones con muchos términos como una sola unidad puesto que no perciben la estructura superficial (Wagner, Rachlin y Jensen (1984) en Kieran y Filloy (1989)). Otro aspecto relativo a la estructura es la relacón entre las operaciones, sus inversas las expresiones equivalentes a esas relaciones, dado que muchos aspectos que se dan por sabidos no son tan obvios para los alumnos. El último aspecto relativo a la estructura es el conocimiento de restricciones de equivalencia.

A parte de estos errores ahora citados, los alumnos cometen numerosos errores al hacer una interpretación incorrecta de las letras. Es por ello que Küchemann (1981) realizó diversas investigaciones para estructurar el significado que los estudiantes de álgebra asignan a los términos literales.

3. La investigación realizada por Küchemann.

Dietmar Küchemann es un matemático inglés que ha dedicado, y dedica, su vida a estudiar el comportamiento de los alumnos frente las matemáticas, especialmente ante el aprendizaje del álgebra. A finales de los años setenta formó parte, junto con otros matemáticos, de un proyecto de investigación llevado a cabo por el CSMS cuya finalidad era desarrollar, para once temas matemáticos, una jerarquía de entendimiento en matemáticas que proporcionara información tanto a los profesores y como a quienes desarrollan el currículo (Küchemann, 1981). Actualmente participa en el proyecto desarrollado por *Increasing Competence and Confidence in Algebra and Multiplicative Structures* (ICCAMS) en el cual se investigan formas de aumentar el éxito y compromiso de los estudiantes mediante la valoración formativa, para informar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria (ICCAMS, 2008).

3.1. A finales de los años 70 y principios de los 80.

La investigación llevada a cabo por Küchemann (1981) sobre la parte algebraica del proyecto fue estudiada, mediante la realización de un test y una posterior entrevista personal, en alumnos de edades comprendidas entre los 13 y los 15 años de diferentes centros de Inglaterra entre 1976 y 1978. Con esta investigación se pretendía analizar los niveles de entendimiento que dichos alumnos tenían sobre el álgebra, viendo cómo interpretaban los términos literales. Para ello se desarrolló un test con diferentes ítems que posteriormente se pasó a estos estudiantes. Inicialmente este test constaba de 51 ítems, pero dado que su largaría dificultaría su puesta en práctica, se decidió que era necesario acortarlo. Para ello se siguieron dos criterios: la complejidad estructural de los ítems y el significado que se le podía dar a las letras. De este modo se redujo a 30 preguntas, eliminando las que eran similares o tenían la misma finalidad. Además, se evitó utilizar palabras técnicas que pudieran dificultar la comprensión del enunciado por parte de los alumnos. De este modo se consiguió que fuera más sencillo determinar el nivel de entendimiento de los alumnos.

Además, como ayuda en dicha clasificación, se realizaron una serie de entrevistas personales a una muestra lo suficientemente grande de los alumnos participantes. Así consiguieron darle un mayor sentido a los resultados obtenidos.

Durante la investigación, Küchemann identificó seis categorías diferentes de uso e interpretación de las letras por parte de los alumnos. Las tres primeras categorías describen maneras de esquivar la generalización aritmética y generalmente indicaban un nivel bajo de respuesta, pudiendo ser argumentadas por estudiantes que no tenían realmente ningún tipo de entendimiento sobre el uso de las letras como una incógnita específica, al menos cuando la estructura del ítem era sencilla. A continuación se describen las seis categorías:

- **Letra evaluada**: esta categoría corresponde a asignarle un valor numérico a la letra para no tener que trabajar con ella como una incógnita específica, simplificando de este modo los cálculos. También se refiere a ítems donde se pregunta a los alumnos que hallen un valor específico para una incógnita, pero de nuevo sin tener que operar con esta primero.

- **Letra ignorada**: los alumnos no han de utilizar la letra, o mejor dicho, han de admitir que existe pero sin darle un significado. Los ítems que se incluyen son aquellos a los que se puede contestar si se centra la atención en otros aspectos y se ignora la letra. Además también hace referencia a cuando para los alumnos parece que no exista la letra.

- **Letra como objeto**: la letra es considerada como una taquigrafía o como un objeto en sí mismo. Esta categoría ha sido muy estudiada en el contexto de cálculo de perímetros, pudiendo ser las letras consideradas como la forma de nombrar a los lados de las figurasen vez de como incógnitas específicas. El hecho de tratar las letras como un objeto, lo cual en muchos casos se reduce a tratar el significado de las letras como algo mucho más concreto y real y no como algo abstracto, provoca que muchos alumnos contesten correctamente a las preguntas, las cuales no hubieran realizado bien de no ser por tratarlas así. De todos modos, esta simplificación del significado frecuentemente ocurre cuando no es apropiado usarla. Esto ocurre particularmente con los ítems que se refieren a “objetos” como lápices, horas, pesos, etc., resultando frecuentemente difícil para los alumnos distinguir entre los objetos en sí mismos y su número.

- **Letra como una incógnita específica**: los alumnos consideran la letra como un único número específico pero desconocido, con el que pueden operar directamente. Aparece la idea de incógnita específica en sí misma, aunque todavía de una forma primitiva.

- **Letra como número generalizado**: la letra es vista como representante de varios valores o al menos con la posibilidad de tomarlos, y no sólo de uno como ocurría en el caso anterior. Además, estos valores no se pueden tomar simultáneamente.

- **Letra como variable**: se visualiza la letra como la representante de un rango de valores que no están especificados y entre los cuales existe una relación sistemática. Muy pocos niños llegan de entre 13 y 15 años llegan a alcanzar el nivel de entendimiento suficiente requerido para interpretar una letra como variable.

Además de la clasificación según el uso que se le da a los términos literales, Küchemann (1981) ordenó los 30 ítems en cuatro grupos diferentes. Cada grupo se ocupaba de cubrir un rango de habilidades de comprensión basándose en la complejidad estructural de los ítems y la naturaleza de sus elementos. Estos grupos se pueden consideran como representantes de los diferentes niveles de entendimiento d la generalización algebraica. Veamos cuáles son estos niveles de entendimiento (entre paréntesis veremos a qué ítems se corresponden con el test realizado en el presente trabajo):

- **Nivel 1**: a este nivel pertenecen los ítems que son puramente numéricos (8a', 8b', 9a', 9b', 21a, 21b, 22 y 24a) y aquellos que tienen una estructura sencilla y pueden resolverse si se considera la letra como objeto (13a y 23a), como evaluada (2, 17a y 26a) o como ignorada (15a).

- **Nivel 2**: estos ítems se diferencian de los del primer nivel en que ven aumentada su complejidad. En este nivel se encuentran los ítems cuya letra es ignorada (9a'', 9b''' y 15b), evaluada (1, 10, 16a, 16b y 17b) o utilizada como objeto (5, 8a'', 8b'', 13d, 21c, 23b y 23c). En este nivel los alumnos, aunque están más familiarizados con la notación algebraica, todavía no son capaces de entender las letras como incógnitas específicas, números generalizados o variables.

- **Nivel 3**: en este nivel los alumnos ya son capaces de trabajar con estructuras simples de las letras como incógnitas específicas. En este nivel encontramos los ítems que consideran la letra como incógnita especifica (3, 4, 8a''', 13h, 14a, 15c, 18, 23d, 24b y 25), como objeto (13b, 13c, 13g y 13i) y como número generalizado (19).

- **Nivel 4**: los alumnos que han alcanzado este nivel son capaces de trabajar con las letras con una estructura compleja como incógnitas especificas (6, 9b'', 12, 13e, 13f, 20a, 20b, 21d, 26a, 27, 28 y 29) aun cuando alguna de los ítems podría ser tratado como objeto. Por último, también son capaces de trabajar tanto con la letra como número generalizado complejo (14b) como con la letra como variable (11).

Por tanto, se puede resumir en que los ítems de los niveles 1 y 2 no suponen una gran complejidad y pueden ser resueltos sin tener en cuenta las incógnitas, mientras que los ítems que pertenecen a los niveles 3 y 4 necesitan un mayor conocimiento algebraico dado que han de trabajar con los términos literales como incógnitas específicas, números generalizados e incluso como variables.

En el Anejo B se ha incluido la tabla B.1 en la que se muestra la clasificación de los ítems del test realizado en función de los niveles de entendimiento y su interpretación mínima requerida. Se han subrayado los ítems han sido analizados en profundidad en el apartado 6.3. del trabajo.

3.2. Treinta años más tarde.

Como se ha comentado en la introducción de este apartado, Küchemann ha seguido trabajando sobre este tema. Treinta años más tarde de haber realizado la primera investigación, Küchemann sigue trabajando en conocer cuál es el nivel de comprensión que tienen los alumnos de edades comprendidas entre los 11 y los 14 años, tanto en el álgebra como en el razonamiento multiplicativo. Con ello sigue queriendo mejorar el proceso de aprendizaje de los jóvenes, dado que siguen teniendo considerables dificultades con esto temas. En sus publicaciones encontramos varias que tratan del tema. Para este trabajo nos centraremos en un proyecto de 4 años de duración que analiza los cambios de entendimiento por parte de los alumnos treinta años después, usando la mayoría de resultados de test en la actualidad así como una serie de entrevistas. Como se ha comentado anteriormente forma parte de la ICCAMS (Küchemann, Hodgen, Brown y Coe, 2009).

El proyecto se dividió en dos fases. La primera fase consistía en realizar una encuesta a niños ingleses de entre 11 y 14 años sobre su conocimiento algebraico y razonamiento multiplicativo (consistía tan solo en las partes de Álgebra, Ratio y Decimales del test de 1976 realizado por el CSMS). A esta fase le seguía una segunda en la que se llevaba a cabo una investigación colaborativa para poder examinar como la evaluación formativa puede ser usada para mejorar la actitud y el éxito, y finalmente poder llevarlo a una escala mayor. En esta última fase colaboraban investigadores y profesores, los cuales utilizaban los resultados de la primera fase en sus propias clases. De este modo, la primera fase proporciona información acerca de cómo los estudiantes comprenden el álgebra y el razonamiento multiplicativo, mientras que la segunda sirve para que los profesores puedan mejorar en su manera de formar a los estudiantes en esta materia.

La realización del proyecto comenzó en el verano de 2008, en el cual se administró la parte algebraica del test a 2043 alumnos que provenían de 90 clases de 11 escuelas diferentes. Parte de estos alumnos fueron seguidos longitudinalmente, al igual que en 1976, y testeados en los veranos de 2009 y 2010.

Para la realización de este test se basaron en el que ya había sido cuidadosamente diseñado en los años 70 y de igual modo, posteriormente se clasificó a los alumnos según su nivel de entendimiento alcanzado. Además, como parte de esta investigación los test del CSMS fueron comparados con la versión de ese momento del currículo nacional, viendo, como era de esperar, que dado que el primer estudio había influenciado en el contenido del currículo de 1989 y que éste no había cambiado demasiado en esas áreas, el test seguía ajustándose.

El primer año que se puso en marcha la segunda fase de la investigación se trabajó en explorar, con todos los miembros de la investigación, el proyecto en las escuelas basado en actividades y en informar al equipo de las discusiones. Las actividades incluían observar a los alumnos en sus respuestas en las clases de álgebra, realizar pequeñas entrevistas y probar innovaciones y otra clase de actividades como herramientas de diagnóstico.

Como resultado de esta investigación, vamos a ver cómo cambió la proporción de alumnos en los diferentes niveles de entendimiento entre 1976 y 2008. Los alumnos que pertenecen al Nivel 0 es porque no cumplen los requisitos del Nivel 1. Los alumnos de 12-13 años son los que cursan en el sistema inglés el Year 8, y los de 13-14 años los que cursan el Year 9.

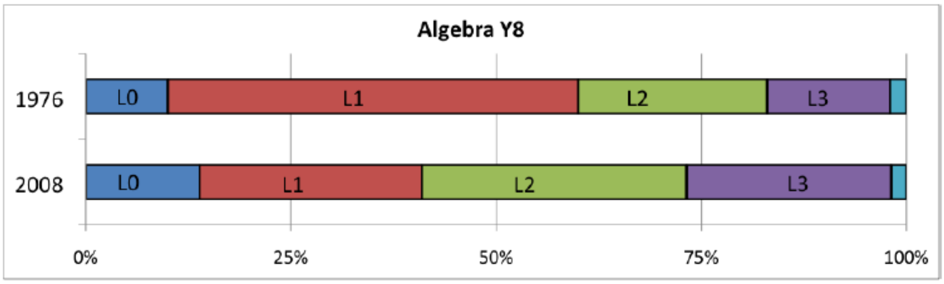


Ilustración 1. Proporción de estudiantes del Year 8 que cumplen los diferentes niveles en álgebra del CSMS en 1976 y 2008 [N = 757 (2008), 1128 (1976)] **(Küchemann, Hodgen, Brown y Coe, 2009)**

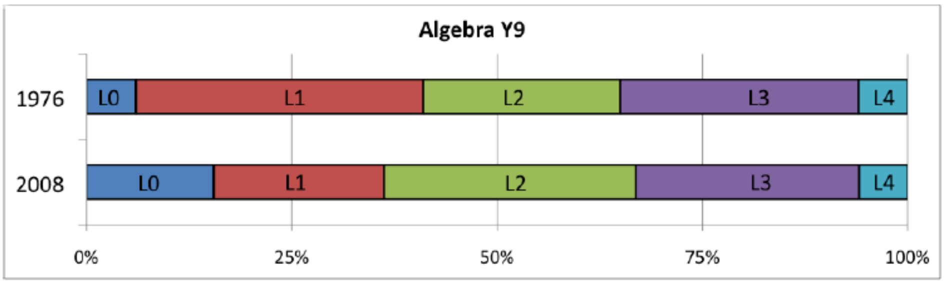


Ilustración 2. Proporción de estudiantes del Year 8 que cumplen los diferentes niveles en álgebra del CSMS en 1976 y 2008 [N = 757 (2008), 1128 (1976)] **(Küchemann, Hodgen, Brown y Coe, 2009)**

Como se puede apreciar, los resultados en 2008 fueron generalmente mejores que los que se habían obtenido en 1976.

Cabe destacar que la publicación en la que nos estamos basando fue realizada en 2009, cuando todavía se estaba llevando a cabo la investigación, por lo que los resultados no representaban a la perfección la realidad, por lo que no era apropiado sacar muchas más conclusiones en ese momento.

Capítulo 2. El test en la actualidad

4. Descripción general y metodología utilizada en el estudio.

Tras la asignación del tema para el Trabajo Final de Máster, comenzó la búsqueda de información sobre las interpretaciones que los alumnos de Educación Secundaria le dan a los términos literales, la cual ha quedado brevemente reflejada en el Capítulo 1. Una vez conocidos los antecedentes se procedió a plantear la experiencia en el instituto IES Benlliure de Valencia durante el periodo en el que estaba realizando las prácticas (febrero – marzo 2017). Gracias a la colaboración de mi tutor y los alumnos de 4º ESO ésta se pudo llevar a cabo.

Esta parte del estudio constaba de dos partes, una en la que se les pasaba un test a los alumnos de esta clase y otra en la que, a la vista de los resultados obtenidos, se les realizaba una encuesta a alguno de ellos para poder analizar e interpretar mejor los resultados obtenidos.

Como se ha ido comentando a lo largo del trabajo, todo el estudio está basado en una investigación realizada por Küchemann a finales de los años 70 cuando formaba parte de *The CSMS Mathematics Team*. Es por ello que el test utilizado forma parte de una selección de preguntas sacadas y adaptadas a la actualidad de dicha investigación.

En la adaptación de estas preguntas, por un lado, además de traducir los enunciados ya que se hallaban en inglés, se modificó alguno de los enunciados de los problemas a contextos más actuales. Por otro lado, también se consultó el currículo vigente, tanto de 4º ESO como cursos anteriores, por si algún ítem preguntaba por temas no incluidos en lo estudiado hasta el momento (CEICE, 2015). Cabe destacar que durante el periodo de prácticas los alumnos de este curso estaban trabajando el bloque de álgebra y que, antes de la realización del test, vieron todos los contenidos excepto las inecuaciones. Sin embargo, este último punto no se tuvo en cuenta a la hora de escoger las preguntas idóneas para el test ya que, aunque existieran ítems en los que podían hacer uso de las inecuaciones, podían ser resueltos si tenían otros conocimientos previos.

En lo referente a la forma de presentar el test, se intentó mantener la estructura utilizada por Küchemann (1981) en sus investigaciones, mientras que en la redacción de los enunciados se optó por utilizar vocabulario sencillo, el cual no supusiera dificultades de comprensión por parte de los alumnos.

Una vez se tuvieron escogidos y adaptados los ítems se procedió a pasárselo a los alumnos en dos partes, suministrando cada una un día diferente. De este modo se quería conseguir que los alumnos no se cansaran por su extensión y dejaran de pensar a la hora de contestarlo.

Tras esto, los alumnos fueron clasificados en diferentes grupos. Para ello se realizó un minucioso análisis de sus respuestas en el que se estudiaban, entre otros, los errores que cometían, las dificultades con las que se habían encontrado y el tipo de interpretación que le daban a los términos literales.

Después se escogió de cada grupo un representante al que se le realizaría una entrevista personal. Éstas nos servirían para constatar los resultados obtenidos del test y no precipitarnos en las conclusiones. Dado que contábamos con cuatro grupos, las entrevistas debían ser hechas a cuatro personas, pero, debido a problemas personales, finalmente se retrasaron y únicamente pudieron realizarse a dos de los representantes. Estas entrevistas fueron grabadas para posteriormente poder volver a escucharlas y analizarlas.

5. Contexto y población de estudio.

Los alumnos con los que se trabajó para realizar este estudio son los que pertenecen a la clase de 4º ESO de enseñanzas académicas del Instituto de Educación Secundaria Benlliure. El grupo está formado por 30 alumnos, sin embargo, el test fue realizado a 27 alumnos, dado que 2 de ellos faltaron el primer día y otro faltó ambos. Cabe destacar que hay un alumno (el número 18) que faltó el primer día pero sí le dio tiempo a realizar las dos partes el segundo día.

Antes de continuar y como se ha comentado anteriormente, con este único trabajo no se pretende complementar la investigación de Küchemann dado que estamos hablando de una muestra muy pequeña de la población. Por tanto, los resultados que se obtengan no son comparables con los de su investigación.

Respecto a los alumnos del grupo, se trata de un grupo con el que se puede trabajar perfectamente, dado que muestra una actitud participativa en clase. Muchos de ellos se conocen del colegio y prácticamente el resto desde que empezaron el instituto, por lo que hay un gran compañerismo entre ellos. Es destacable que el número de chicas supera los dos tercios. En cuanto a los resultados académicos en matemáticas, en general son buenos, aunque existen alumnos que destacan por encima de la media y otros que van un poco más justos. Seis de estas alumnas participaron en la Olimpiada Matemática en el grupo de segundo ciclo de la ESO que organiza la SEMCV (Societat d'Educació Matemàtica Al-Khwarizmi).

Como se ha comentado anteriormente, los alumnos habían terminado de estudiar el bloque de álgebra cuando se les realizó el test (a excepción de haber visto la parte de inecuaciones). Para conocer los contenidos de este bloque el profesor había combinado su explicación haciendo uso de la pizarra con los contenidos que se recogen en el libro de Anaya para 4º ESO. El bloque está dividido en dos temas, los cuales son:

- Polinomios y fracciones algebraicas: polinomios y operaciones con polinomios, regla de Ruffini, raíces de un polinomio y búsqueda de las mismas, factorización de polinomios y fracciones algebraicas.

- Ecuaciones, inecuaciones y sistemas: ecuaciones, sistemas de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones no lineales e inecuaciones de una incógnita.

Como ya se ha dicho, cuando realizaron el test habían visto ya todo el bloque de álgebra a falta de estudiar las inecuaciones. Además, desde que entraron en la Educación Secundaria han ido tratando temas relativos al álgebra, aumentando progresivamente la dificultad, por lo que las preguntas del test no les crean perplejidad a la hora de afrontarlas. Es decir, estos alumnos ya tienen unas nociones y técnicas básicas con las que hacer frente a estos ítems.

Por último, destacar que las entrevistas se llevaron a cabo a final de curso, por lo que los alumnos ya habían adquirido todos los conocimientos esperados y por tanto, en muchas ocasiones eran capaces de darse cuenta de donde estaba el error que habían cometido y autocorregirse, así como de mostrar razonamientos más avanzados.

6. Test.

6.1. Diseño y aplicación.

Como se ha ido comentando a lo largo del trabajo, esta pequeña investigación se ha llevado a cabo basándose en la parte de álgebra del proyecto *Concepts in Secundary Mathematics and Science* llevado a cabo por Küchemann (1981). Por este motivo, para realizar el test con el que se analizan las interpretaciones de los términos literales de los alumnos de 4º ESO nos hemos basado en el que Küchemann realizó para dicha investigación.

Para hacer la elección de los ítems adecuados se disponía de varias versiones, tanto de las realizadas por Küchemann como de las utilizadas por otros compañeros del máster que llevaron a cabo el mismo tipo de estudio (Ortega Pons, 2012). Para seleccionar los ítems adecuados se tuvo en cuenta tanto el nivel de los alumnos como el procurar elegir aquellos ítems de los que posteriormente se pudiera extraer una mayor información. Por ejemplo, al igual que hizo Küchemann a finales de los 70, se optó por incluir el ítem 11 en el que la letra es interpretada como variable, hecho que resulta difícil de conseguir con un único ítem. Finalmente se decidió que el test constara de 29 ítems, que divididos en subapartados hacían un total de 59 preguntas. Este test se puede consultar en el Anejo A.

Tras elegir los ítems adecuados y adaptarlos, se hizo una clasificación siguiendo los cuatro niveles de entendimiento establecidos por Küchemann. Para ello nos basamos en las posibles interpretaciones que se le podían dar a los términos literales así como en la complejidad estructural que presentaban. Cabe destacar que se intentó seguir el formato que había utilizado Küchemann en su investigación. Un ejemplo es el ítem 15, como se aprecia se ha colocado bajo cada ecuación la que se quería que realizaran, dejando el espacio necesario para que los iguales queden a la misma altura.

15. Responde los siguientes apartados:

a. Si $a + b \quad = 43$
$a + b + 2 =$ ______

b. Si $n - 246 = 762$
$n - 247 =$ ______

c. Si $e + f \quad = 8$
$e + f + g =$ ______

Ilustración 3. Ítem 15 (Elaboración propia)

El cambio más destacable que se realizó fue modificar la forma de plantear el ítem 10. Originalmente se planteaban una serie de expresiones algebraicas ($n + 1, n + 4, n - 3, n, n - 7$) y se pedía cuál de ellas es la mayor y cuál la menor. Para este test se pensó que era mejor como había sido planteado por Ruano, Socas y Palarea (2015), por ello se decidió incluir, por un lado, que explicaran por qué era esa su elección y, por otro, un tercer apartado en el que se les pedía que si no se podía contestar a las primeros dos apartados (cuál era mayor, cuál menor y por qué) explicaran los motivos. Como veremos más adelante esto confundió a los alumnos.

Para mayor comodidad de los alumnos, el test se dividió en dos partes, las cuales se realizaron en días diferentes. La primera parte se llevó a cabo el 22 de marzo y la segunda el día 23 de marzo. De este modo se quería conseguir que los alumnos no se agobiaran por la extensión del test, así como que tuvieran el tiempo necesario para su correcta y completa realización.

La primera parte del test constaba de un total de 14 ítems en los que se trabajaban los cuatro niveles de entendimiento. Se incluye algún ítem puramente numérico (ítems 8a', 8b', 9a' y 9b') y otros donde se interpreta la letra como evaluada (ítems 1, 2 y 10), como incógnita específica (ítems 3, 4, 6, 7, 9a''', 9b'', 12, 13e, 13f, 13h y 14a), como objeto (ítems 5, 8a'', 8b'', 13a, 13b, 13c, 13d, 13g y 13i), como ignorada (ítems 9a'' y 9b'''), como variable (ítem 11) y como número generalizado (ítem 14b). Dentro de estas preguntas encontramos algunas en las que se pide realizar operaciones como sustituir, traducir o simplificar, otras en las que se pide ordenar las expresiones algebraicas y una en la que se combina el álgebra con la geometría. En ellas o bien el alumno tiene que dar la respuesta o bien tiene que señalar cuáles son las soluciones a partir de una serie de opciones dadas.

La segunda parte está formada por los 15 ítems restantes. Al igual que en el primero, se plantean ítems que corresponden a los cuatro niveles de entendimiento. En este se incluyen ítems puramente numéricos (ítems 21a, 21b, 22, 24a y 26b), ítems donde la letra es evaluada (ítems 16a, 16b, 17a y 17b), como incógnita específica (ítems 15c, 18, 20a, 20b, 21d, 23d, 24b, 25, 26a, 27, 28 y 29), como objeto (ítems 21c, 23a, 23b y 23c), como ignorada (ítems 15a y 15b) y como número generalizado (ítem 19). En estas preguntas se les pide que resuelvan operaciones algebraicas, trabajen de nuevo con la geometría combinando el cálculo de áreas y perímetros y con enunciados verbales, incluidos la mayoría en contextos reales.

Junto con el test se les dio una hoja de instrucciones, incluida en el Anejo A junto al test, donde se explicaban algunos detalles que se tenían que tener en cuenta. Por ejemplo que lo realizaran en bolígrafo, que dejaran todas las operaciones indicadas o que intentaran contestar al máximo número de preguntas, entre otros.

Al final de cada parte del test se incluyó una hoja en blanco para que los alumnos pudieran comentar qué les había parecido el test (dificultad, tiempo empleado…) y qué problemas le habían surgido al contestarlo. Dichas respuestas fueron:

- Alumnos 1, 13 y 21: "Me ha parecido rápido y fácil."
- Alumna 2: "El test no me ha parecido muy difícil, menos el 10c, que me ha liado y al que no he encontrado respuesta. Pero seguro que el test era más difícil de lo que parecía y me he confiado demasiado respondiendo deprisa."
- Alumno 3: "Algunas preguntas eran difíciles porque no me acordaba de lo que había que hacer."

- Alumna 15: “Es un test muy sencillo.”
- Alumna 19: “Me ha parecido fácil aunque el 10c y el 11 un poco más [difíciles] pero no mucho.”
- Alumna 26: “El test me ha parecido fácil, menos una pregunta que no la he contestado. Son cosas básicas que todos tenemos que saber sobre el álgebra.”
- Alumna 28: “Había algunas preguntas que eran más complicadas que otras, espero en sí me ha parecido bastante fácil. Sobre el tiempo me ha parecido que estaba bien, ya que lo hemos dividido en dos y no se me ha hecho pesado.”
- Alumna 29: “No lo veo un test difícil, veo que es lioso, porque te confunde mucho y te quedas en blanco con algunas cosas.”

Como se puede apreciar, a la vista de los alumnos no ha resultado un test excesivamente difícil, excepto por alguna pregunta que podía resultar liosa, ya que se ha trabajado con alumnos del último curso de la secundaria, los cuales tienen bastante asentados algunos conceptos algebraicos.

Para distinguir e identificar a los alumnos pero mantener su anonimato en todo momento se decidió que la mejor opción era asignarles su propio número de clase, al igual que habían hecho compañeros en trabajos anteriores. Además, al igual que hizo Küchemann (1981) en sus investigaciones, se les pidió que indicaran su fecha de nacimiento y su sexo, por si la información resultaba relevante en algún momento. Dado que hubo alumnos que faltaron el primer día (o ambos) y no les dio tiempo a acabar el test el segundo día, se tiene información de 27 alumnos, pero los números van del 1 al 30, faltando los alumnos cuyo número son 5, 8 y 20.

Para realizar el test se dispuso de algo más de media clase cada día, es decir, 30 minutos. De este modo el profesor explicaba algo de materia y, cuando había pasado la mitad, recogían y se les administraba el test.

Antes de empezarlo se leyeron las instrucciones y se les indicó que esa era la primera parte y que al día siguiente realizarían la segunda. Se les dijo que escribieran “no sé” si alguna de las preguntas no sabían contestarla, en vez de dejarla en blanco. De este modo se podría hacer un mejor estudio de sus contestaciones. De igual modo se les dijo que dejaran indicadas todas las operaciones que realizaran. También se les explicitó que contestaran el máximo número de preguntas posibles, pero que no se agobiaran y pasaran a la siguiente si alguna no eran capaces de realizarla. Por último, se les ofreció la posibilidad, como se ha dicho anteriormente, de dejar sus propias impresiones sobre el test al final del mismo.

Los resultados del test se encuentran en la tabla B.2 del Anejo B. En esta tabla se ha indicado con una B si la pregunta está bien respondida, con una M si está mal, con una I si está incompleta, con un NS si el propio alumno ha escrito “No sé” en ese ítem y con un guion si, pese a las indicaciones dadas, el alumno la ha dejado en blanco.

Las respuestas en las que el alumno podría haber simplificado se han dado por buenas, ya que realmente lo son, porque se supone que no lo ha hecho porque no lo ha creído conveniente. Las que se han indicado con la I de respuesta incompleta ha sido porque el alumno contesta parcialmente a la pregunta, es decir, no ha contestado correctamente a lo que se le pedía pero no va mal encaminado ni tampoco ha cometido ningún error.

Para obtener una visión global de las respuestas dadas por los alumnos según el ítem se puede consultar la tabla B.1 y para visualizar los resultados por ítem, por alumno y por alumno y tipo de letra conjuntamente se pueden observar las tablas B.3, B.4 y B.5, respectivamente, todas incluidas en el Anejo B.

6.2. Dificultades y errores.

En este apartado vamos a ver un resumen del análisis de las dificultades con las que los alumnos se han encontrado a la hora de completar el test, así como una interpretación de las posibles causas que han podido desencadenar estos errores. El análisis completo lo encontramos en el Anejo C.

También se pueden consultar las tablas B.3 y B.6 del Anejo B. En ellas se puede observar los resultados (correcta, incorrecta, incompleta, no sabe o en blanco) de cada uno de los ítems y porcentaje de errores y qué contestación han dado los alumnos, respectivamente.

A grandes rasgos se observa que las preguntas que menos dificultades presentan son las puramente numéricas a excepción de la 24a ya que se trataba de un problema verbal, junto con los ítems 8 y 9, posiblemente por estar familiarizados a esta forma de planteamiento.

Por el contrario, las preguntas que mayores dificultades presentan son las que tratan las letras como número generalizado (dos ítems con 11 y 3 respuestas correctas, respectivamente) y como variable (1 ítem con 0 respuestas correctas). Cabe recordar que los alumnos todavía no habían estudiado las inecuaciones cuando realizaron este test.

Vamos a ver cuáles han sido las dificultades y los errores más destacables. En muchos de los casos coincidirá este análisis con el realizado en el Anejo C.

- Alrededor de un 25% de los alumnos no contestaron correctamente al ítem en el que se pedía el significado de $5n$. Los que dieron una respuesta incompleta fue porque no señalaron como correcta la opción $n + n + n + n + n$ y daban como solución válida únicamente $5 * n$. Esto es debido a no considerar que $5n$ significa 5 veces n y verlo tan solo como un producto.

  La única respuesta incorrecta que se dio a este ítem fue dada por la alumna 14 que consideró que $5n$ significaba $5\ y\ n$, debido probablemente, como afirman Kieran y Filloy (1989), a extender la generalización sobre la base de lo que era correcto en aritmética debe serlo en el álgebra, es decir, en aritmética la concatenación significa adición mientras que en álgebra es multiplicación.

- En el siguiente ítem se pedía lo mismo, pero esta vez la letra estaba colocada delante el número. Este hecho dio lugar a que aumentara el número de alumnos que no visualizaba $e3$ como $e + e + e$ (la mayoría sí había contestado correctamente que $5n$ es $n + n + n + n + n$). Por tanto, este cambio de posición hizo que aumentara la dificultad, posiblemente debido a que están acostumbrados a visualizar la letra siempre detrás en los libros de texto. Es destacable la respuesta que da el alumno 17, el cuál si había respondido correctamente el ítem anterior, y esta vez escribe como otra posible respuesta $e * e * e$. Este error es debido seguramente a que los alumnos están acostumbrados a visualizar el número detrás cuando se trata de una potencia, sobre todo si se escribe en ordenador y no se tiene cuidado de redactar correctamente y colocarlo como un superíndice.

También es destacable la respuesta del alumno 3, el cual había contestado correctamente el ítem de qué significa $5n$, pero en este caso señala $e3$ como $e\, y\, 3$, mostrando una confusión entre la concatenación como adición en aritmética y no como multiplicación en álgebra.

- La interpretación de nm, a pesar de presentar una mayor dificultad de la que estamos trabajando con dos números desconocidos, la mayoría de los alumnos responden correctamente. Esto puede ser debido a que en ninguna de las opciones mostradas se les especifica que hay n veces m o m veces n, es decir, $n * n * \dots (m\ veces)$ o $m * m * \dots (n\ veces)$. El error que han cometido todos los alumnos que no han contestado correctamente a la pregunta ha sido considerar que nm significa $25 * 26$. En las entrevistas se les preguntó a estos alumnos por su respuesta y dijeron que nm podía adoptar otros valores y que éstos no tenían por qué ser necesariamente consecutivos. La alumna 14 ha seguido cometiendo el error de generalizar la aritmética y considerar que nm significa $n\ y\ m$.

- En el ítem donde se pregunta por las expresiones que escribiría para representar $e + 2\ multiplicado\ por\ 3$ ha habido dos errores claramente diferenciados. Por un lado están los alumnos que no terminan de completarla porque no desarrollan el producto y por tanto no señalan $3e + 6$ como respuesta correcta (once de los veintisiete alumnos), por lo tanto, o no están reconociendo la propiedad distributiva o no dan un paso más en la operación y se quedan con el producto sin realizar como resultado correcto. El otro grupo de alumnos no contesta correctamente a la pregunta (tres alumnos) porque al leer $e + 2\ multiplicado\ por\ 3$ han creído que la multiplicación únicamente afectaba al 2 y no a la suma por completo, por lo que han dado respuesta del tipo $e + 6$ y $e + 2x3$.

- Tan solo un cuarto de los alumnos han sido capaces de responder al ítem 7. Casi un 60% la ha contestado bien parcialmente, dado que han dado como válidas las opciones $5a + 2$ y $2 + 5a$, pero no han señalado como correcta la opción $5a\ más\ 2$. Puede ser que la dificultad con la que se han encontrado sea el hecho de no estar acostumbrados a que se presenten las expresiones junto con palabras del lenguaje común, por lo que consideran que esta no es una posibilidad.

- El ítem en el que se pedía que imitaran la regla indicada produjo mucha controversia a la hora de ser contestada ya que los alumnos no entendían lo que se les pedía. Esta posible dificultad ya se había tenido previamente en cuenta pues en otras ediciones de este test ya había surgido este problema, por lo que a la hora de realizar el test se intentó ser lo más claro posible y ceñirse a la forma de plantearlo que había utilizado Küchemann (1981). Debido a esta dificultad, tuve que explicitar a los alumnos que lo que se les pedía era que imitaran la operación que se realizaba en la primera fila. Tras ser solucionada la duda prácticamente todos los alumnos la resolvieron correctamente.

- El cambio estructural que se produjo en el ítem 10, siguiendo lo visto en el artículo de Ruano, Socas y Palarea (2015) provocó que muchos alumnos contestaran correctamente a cuál de las expresiones era la mayor y cuál la menor, pero dieran respuestas como "*No se pueden contestar los apartados a. y b. porque …*" con "… no se.", "*… no sabemos qué número es n, sólo que es el mismo en todos.*", "*… no sabemos a qué equivale n y la ecuación [debería poner expresión] no está igualada a ningún valor.*", etc. Por tanto, podemos deducir que estos alumnos sustituyen ciertos valores para n pero que, debido a que normalmente se han de contestar todas las preguntas de un test con algún tipo de razonamiento, tienen la necesidad de que el apartado c tenga una solución diferente a "$sí\ se\ puede$", lo que les hace dudar y contestar lo escrito anteriormente. Esto puede ser provocado por la continua repetición de los libros de texto de problemas donde todos los apartados tienen una solución intuitivamente correcta. Por último, comentar que el alumno que dice que no se puede saber ya que no está igualado a nada es una de las dificultades que comentan Kieran y Filloy (1989), donde los estudiantes ven como imcompletas las expresiones al no estar igualadas a nada y por tanto necesitan igualarlas para darle sentido.

  La mayoría de los alumnos que la contestan correctamente es porque le han dado valores a n y de ahí han deducido qué expresión es mayor y cuál es menor, interpretándola como letra evaluada.

- El único ítem en el que la letra se interpreta como variable no ha sido contestado bien por ningún alumno. Cabe destacar que, como se ha comentado anteriormente, cuando realizaron el test todavía no habían estudiado las inecuaciones, factor que puede afectar en sus contestaciones.

  De los que han dado una respuesta incompleta han argumentado que o depende del valor que se le dé a n o han ido probando valores, en la mayoría de los casos números enteros positivos. Los que han contestado mal han dicho que $2n$ es superior ya que se realiza una multiplicación, bien por observación de la operación o por sustitución de un valor.

- El ítem en el que se pide la simplificación de expresiones ha ocasionado varias dificultades, sobre todo cuando había un paréntesis con el que trabajar. Al tener que simplificar $3a-(b+a)$ varios alumnos han ignorado que la resta afecta a todo el paréntesis, dando por resultado $4a-b$. Otra de las dificultades más llamativas es el considerar por parte de unas pocas alumnas que $(a+b)+(a-b)$ se asemeja a una identidad notable y, por tanto, debían reducirla a ella.

- Más de la mitad de los alumnos ha contestado que nunca podría ser igual la expresión $L + M + N = L + P + N$. Esto es debido, según indican Kieran y Filloy (1989), a que los estudiantes usan los términos literales mucho antes de conceptualizarlos como variables, es decir, de ver lo general a partir de los particular.

- En el ítem en el que se dice que "$si\, e + f = 8$, cuánto es $e + f + g$", dos alumnas, la número 10 y la 24, han contestado como resultado $8g$ (una de ellas ha indicado que son posibles $8g$ y $8 + g$). Esto nos hace pensar que o bien entienden que $8g$ y $8 + g$ es lo mismo o que quieren dar como resultado un monomio ya que es a lo que están acostumbradas. Además, parece que tienen una cierta reticencia a que el procedimiento sea la respuesta, tal y como indican Kieran y Filloy (1989). Por último, hay tres alumnos que responden que la solución es 12. Tras darle vueltas al porqué se ha llegado a la conclusión de que, posiblemente, lo que estos alumnos pensaron fue que si $e + f = 8 \rightarrow e = f = 4$ y por tanto, como hay tres letras, g también es 4, por lo que $4 + 4 + 4 = 12$.

- Cuando se pregunta por c si se sabe que $c + d = 10$ y $c < d$ más de la mitad de los alumnos dan como solución los valores $0, 1, 2, 3\ y\ 4$ (solo un 11% incluye el 0), destacando que c ha se ser entero y positivo. Volvemos a destacar que los alumnos todavía no han visto el tema de inecuaciones.

  Los tres alumnos (17, 23 y 29) que han realizado bien esta pregunta son parte de los que no han realizado excesivamente bien el test. Esto nos hace dudar de si realmente, al dar su respuesta como $c < 5$, están pensando en toda clase de números y no solo en los números naturales.

  Otros cinco alumnos más dan como respuesta un número concreto, comprendido entre los nombrados anteriormente, por ejemplo $c = 1$. Posiblemente porque crean, como sus compañeros, que puede tomar un número entre el rango arriba indicado pero que no es necesario explicitarlo y que con eso queda contestada la pregunta. Con esto queda presente que los alumnos suelen pensar en números enteros cuando quieren darle un valor a una incógnita.

- En el ítem 20 algunos alumnos confunden $aumentar$ 2 con que sea el doble. Esta es otra de las preguntas que ha resultado dificultosa para los estudiantes encuestados. Destacable es la respuesta dada por la alumna 28 que considera que el que $aumente$ 2 en un lado de la igualdad provoca que $disminuya$ 2 en el otro lado, debido posiblemente a que ha pensado que cuando quieres despejar en una ecuación, lo que está sumando en una parte pasa restando a la otra.

- El hecho de que los ítems 21 y 23 sean parecidos, al aparecer figuras geométricas en ambos y estar cerca uno del otro, ha hecho que un par de alumnos se confundan y calculen el área cuando se pedía el perímetro y viceversa.

  Además, el último apartado del ítem 23 es el que más errores ha ocasionado. Debido a que se pide calcular el perímetro de una figura que no está completa, de la cual únicamente conocemos que todos sus lados miden 2 y que hay n lados.

Cuatro alumnos, los número 4, 10, 14 y 25, la dejan en blanco y el alumno 3 sigue contestando que no sabe hacerla. Dos alumnos, el 1 y el 23, contestan que el perímetro es $26 * 2$, debido a que han considerado posiblemente que la figura que falta debe ser simétrica a la dada (la figura dada consta de 14 lados de longitud 2, por lo que la figura completa debería ser el doble). Este hecho quedó destacado en la entrevista realizada al alumno 1, en la cual se le encaminó a que cambiara de opinión y dedujera la respuesta correcta. El alumno número 7 ha contestado $26 + 2n$, dado que seguramente haya considerado que la figura tiene n lados más de los dibujados y no n en total como indica el enunciado. Por último, la alumna 23 ha contestado $n = (2 *$.

- El ítem puramente numérico que más problemas ha ocasionado es el de calcular el número de diagonales de una figura. Quizá es debido a que se da la explicación de palabra y los alumnos tienen que leerla y entenderla. El error que cometen en el primer apartado lo explican en el segundo. Las contestaciones que dan son: que tiene 3078 diagonales, por la alumna 23, resultado de hacer $k(k-3)$; 22 diagonales, por el alumno 17, resultado de hacer $k * \frac{2}{5}$ (saca la razón entre el número de lados de la figura del ejemplo, 5, y el número de diagonales, 2). Otro alumno, el número 3, contesta que tiene 140 diagonales y n diagonales, sin dar mayor explicación. Otro de los alumnos, el número 13, contesta 27 al primer apartado y $\frac{k-3}{2}$ al segundo.

- Uno de los ítems más controvertidos es el 26. En él se pide que traduzcan a lenguaje algebraico un enunciado verbal. La controversia aparece cuando veintidós de los veintisiete alumnos contestan correctamente al apartado puramente numérico pero solo ocho no son capaces de hallar la ecuación que describe lo que está ocurriendo. Alguna de las respuestas que dan los catorce que responden bien la parte numérica y mal la de hallar la ecuación son: $W + h = 100 + 5h$; $W + 5h; W + h; 100W + 5h$; $W + \frac{5}{h}$. La primera de estas respuestas fue estudiada por Kieran y Filloy (1989), donde comentaban que podía ser consecuencia de que los alumnos interpretan el signo igual en el sentido de tarea a realizar y no como simetría entre ambos lados.

  Destacable es también la respuesta de un alumno que dijo no saber cuál era la ecuación pero sí supo resolver correctamente la parte numérica.

- También resultó dificultoso el ítem de los pasteles y los bollos en el que se requería interpretar qué se estaba diciendo en un enunciado verbal. Las respuestas erróneas más destacables fueron del tipo "*compran* 4 *pasteles y* 3 *bollos*" o "*la suma de bollos y pasteles*". Puede que estas respuestas se deban, como ha comentado Küchemann (1981), a leer literalmente la expresión 4p+3b, 4 pasteles y 3 bollos.

Por tanto, como se ha ido observando, aparecen errores y dificultades de todo tipo, algunos de los cuales posiblemente derivados de las mismas causas. Para conocer realmente las causas que provocan estos errores se debería hacer un estudio más exhaustivo de cada una de las preguntas realizadas. Sin embargo, no se puede pasar por alto que estos errores son cometidos por muchos estudiantes, no solo los del estudio, ya que investigaciones anteriores han dado resultados similares.

Tras haber analizado y detallado los errores que cometen los alumnos que realizaron el test se procede a hacer un análisis de las causas que pueden provocar estas dificultades. Para ello nos centraremos en el uso e interpretación que los alumnos dan a los términos literales.

6.3. Análisis de las diferentes interpretaciones de las letras.

Como se ha ido comentando a lo largo del trabajo, una de las causas que producen los errores anteriormente comentados es la incorrecta atribución o interpretación de los términos literales. Muchos de los alumnos de secundaria, e incluso cursos superiores, que utilizan las letras no comprenden los significados más abstractos ni saben utilizarlas según el contexto. Esto provoca que se cometan errores, los cuales podrían ser solventados si se detecta su origen y se trabaja para solucionarlo, tanto en alumnos que ya tienen el error asentado como en los alumnos que todavía no han empezado a estudiar el álgebra.

Para estudiar la interpretación que se hace de los términos literales vamos a centrarnos en los analizados por Küchemann (1981) en su investigación. El resto de ítems que no se van a tratar en este apartado presentan características similares a los analizados, tanto de significado que los alumnos pueden atribuir como de complejidad estructural.

Dentro del apartado 3.1 en el que se han comentado las investigaciones llevadas a cabo por Kücheman a finales de los años 70 y principios de los 80 ya se ha hablado de una clasificación donde se distribuyen los ítems de forma ordenada según los diferentes usos e interpretaciones de los términos literales. Esta clasificación se ordenó basándose en el nivel de entendimiento y abstracción requerido para contestar el ítem, de menor a mayor dificultad. En el Anejo B encontramos la tabla B.3 en la que se recoge el tipo de interpretación de la letra y el nivel de entendimiento al que corresponde cada ítem.

Este análisis nos servirá para posteriormente clasificar a los alumnos en diferentes grupos, de modo que se escoja un representante al que realizar la encuesta. Veamos, por tanto, cuáles son las interpretaciones que los alumnos hacen de los ítems que se analizan:

Letra evaluada

En el test aparecen un total de siete cuestiones en los que la letra debería interpretarse, como mínimo, como evaluada. Estas preguntas presentan una menor o mayor dificultad según el número de ecuaciones y de letras que se utilicen. En este apartado vamos a tratar tres de ellas.

- **Ítem 1**

Este ítem fue realizado correctamente por todos los alumnos entrevistados, por lo que le dieron el valor indicado al término literal y operaron sin términos desconocidos, es decir, interpretaron la letra como evaluada. Algunos dejaron indicados la operación que habían realizado y otros dieron directamente el resultado.

- **Ítem 16**

Esta pregunta se resolvía, igual que el ítem anteriormente mencionado, evaluando la letra para poder dar la respuesta correcta. Pese al incremento de dificultad, debido posiblemente al hecho de utilizar dos términos literales en lugar de uno, este ítem fue resulto correctamente por todos los alumnos (excepto el apartado b por un alumno). Esto deber ser por el nivel de razonamiento algebraico que han alcanzado estos alumnos, ya que se encuentran en el último curso de la secundaria y han trabajado este tipo de preguntas durante varios años.

En otras ediciones del test donde se ha realizado la encuesta a alumnos más jóvenes, todos no han sido capaces de resolverlo satisfactoriamente (Küchemann, 1981; Ortega Pons, 2012). Sin embargo, estos alumnos podrían haber optado por dale valores a los términos literales en ambas ecuaciones e ir ajustando la respuesta a base de prueba y error. Este método resultaría útil para alumnos que todavía no tuvieran las nociones básicas algebraicas, aunque resultara costoso y, en caso de no encontrar la solución, no exitoso.

- **Ítem 17**

Este ítem se divide en dos apartados, en el primero la incógnita aparece tan solo en un lado de la igualdad, mientras que en el segundo aparece en ambos. Este hecho ha provocado que prácticamente el total de los alumnos realice correctamente el primero y casi la mitad se equivoque en el segundo.

El primero de los apartados se podía resolver sin utilizar la letra como evaluada y tan solo contando desde cinco hasta ocho. Otro método que se podía haber utilizado es darle valores a a hasta que se cumpliera la igualdad. Este último método también podría haberse utilizado para resolver el apartado b.

Una respuesta del primer apartado que muestra el enfoque de resolución intuitivo, tal y como indican Kieran y Filloy (1989), es dada por una alumna, que da como solución $3 + 5 = 8$, en lugar de $a = 3$ como han hecho el resto de sus compañeros.

Es posible que alguno de los alumnos no hayan interpretado la letra como evaluada, sino que hayan despejado la ecuación como hacen usualmente para resolver ecuaciones. Este hecho podría haber provocado el aumento de fallos en el apartado b, es decir, que no hayan sabido despejar y de ahí sus errores.

Otro de los factores que puede estar relacionado con las dificultades cuando se evalúa la letra es la de interpretar el signo igual como una tarea a realizar (uso aritmético) y no como una equivalencia entre lados (uso algebraico), como comenta Freudenthal (1983).

Letra ignorada

En el test aparecen cinco cuestiones que se pueden resolver correctamente si no se hace uso del término independiente. Veamos cuatro de ellas, pertenecientes a dos ítems diferentes:

- **Ítems 9a'' y 9b'''**

Tanto el apartado 9a'' como el apartado 9b''' podían resolverse si no se tenía en cuenta la letra. En el primero se pedía que se sumara 4 a $n+5$, por lo que no era necesario trabajar con el término independiente para resolverlo. Todos los alumnos, a excepción de una alumna, contestaron correctamente. En el segundo se pedía multiplicar por 4 la expresión $3n$, como se ha comentado, no hacía falta fijarse en el término literal para poder responder correctamente al apartado ya que solamente era necesario realizar la multiplicación numérica. La mayoría de los alumnos han respondido correctamente al apartado, ignorando la letra y fijándose tan solo en los números. Quienes no lo han hecho ha sido, principalmente, por errores en las operaciones y no por no ignorar la letra.

- **Ítems 15a y 15b**

Las dos primeras cuestiones del ítem 15 pueden ser resueltas ignorando los términos literales. El apartado a, de nivel de entendimiento 1, es más sencillo, a pesar de que en él se utilicen dos letras. Estas pueden ser eliminadas si se focaliza únicamente en $+2$ y se suma esto a 43. Posiblemente debido a ello el total de los alumnos lo realizaron correctamente. Esta parte, además de ignorando la letra, podría haberse resuelto sustituyendo el $a+b=43$ en la segunda ecuación.

El segundo apartado se puede resolver del mismo modo, ignorando la letra. Pero esta vez resultaba más complicado debido a, por un lado, tratarse de un número más largo, y por otro, por la operación implícita (-1) y contra intuitiva. Esto podía provocar que algunos alumnos primero evaluaran la letra, es decir, probaran valores. Hecho que podía desencadenar errores aritméticos debido a que se está trabajando con un número alto.

Además, el hecho de que 247 sea mayor que 246 podía hacer que algunos alumnos añadieran 1 a 762 en lugar de quitárselo, como le pasó a la alumna 14. Esta alumna fue una de las entrevistadas y durante la misma se percató de su error y supo corregirse viendo que debía ser un número menor el resultado.

Letra como objeto

Un total de trece cuestiones repartidas en cinco ítems requieren una interpretación de la letra como objeto para ser resueltas.

- **Ítems 13a, 13b, 13c, 13d, 13g y 13i**

Algunas de las cuestiones que aparecen en el ítem 13, como son la *a, b, c, d, g* e *i* pueden ser simplificadas por los alumnos si tratan a sus términos independientes como taquigrafías u objetos en sí mismos. Como comenta Küchemann (1989), los alumnos pueden entender que estas letras se refieren en un sentido abreviado a, por ejemplo, manzanas y plátanos (apples y bananas en inglés, que concuerda con a y b). Por lo que $2a + 5b + a$ puede significar 2 manzanas junto con 5 plátanos y otra manzana, es decir 3 manzanas y 5 plátanos en total. O también destaca que pueden entender las letras como objetos en sí mismos, es decir: $2a(s), 5b(s) y\ otra\ a$. De este modo, se trabaja con objetos y no con incógnitas específicas, siendo más sencillo resolverlo.

El hecho de usar la letra como un objeto, lo cual muchas veces se reduce a darle un significado concreto y "real" a algo bastante abstracto, provoca que muchos alumnos sean capaces de contestar correctamente a preguntas que no hubieran sido capaces de realizar si hubieran tenido que usar el significado intencionado de la letra. El error ocurre cuando utilizan esta interpretación de la letra no es apropiada y aun así la utilizan. Por ejemplo, en el ítem 27 en el que se hablaba de pasteles y bollos, algunos alumnos han interpretado $4p + 3b$ como 4 pasteles y 3 bollos, sin tener presente qué significaban realmente los términos literales.

- **Ítems 23a, 23b y 23c**

Los tres primeros apartados de este ítem pueden ser resueltos tratando la letra como un objeto. En este caso, al tratarse del cálculo de perímetros los alumnos pueden interpretar directamente que las letras se refieren al nombre que reciben los lados de las figuras y no a las longitudes desconocidas. Los apartados se van dificultando conforme se avanza en el ítem ya que primero se trabaja tan solo con un único término literal, en el segundo se mezclan dos términos literales y en el tercero se utiliza un término literal junto con números. Este hecho ha provocado que más alumnos cometan errores a la hora de resolverlos conforme se avanza en el ítem.

Letra como incógnita específica

Con un total de veintitrés cuestiones se trata de la interpretación más repetida a lo largo del test. Interpretar la letra como incógnita específica requiere tener un nivel de entendimiento superior, es decir, 3 o 4, ya que aparece la idea de incógnita específica en sí misma, aunque todavía de una forma primitiva. Vamos, por tanto, a ver alguno de los ítems en los que aparece esta interpretación:

- **Ítems 9a''' y 9b''**

En los apartados 9a''' y 9b'' se pide que se sume 4 a $3n$ y se multiplique $n + 5$ por 4, respectivamente. En el primero, como comenta Küchemann (1981), la respuesta $3n + 4$ es muy simple, pero insatisfactoria por el mismo motivo. Es por ello que algunos alumnos responden $7n$, en el caso de nuestra investigación únicamente una alumna, combinando los números e ignorando o dejando de lado la letra.

En el apartado 9b'' es más complicado ya que tiene una mayor complejidad estructural. La multiplicación debe realizase a ambos elementos de la expresión $n + 5$. En cambio algunos alumnos, en nuestro caso solo uno, multiplican tan solo el término literal. Este error puede ser debido, como comenta Küchemann (1981) en su investigación, a un error de notación como es el no uso del paréntesis, puesto que muchos niños no alcanzan a ver cuándo se tienen que utilizar y cuándo no.

- **Ítem 12**

Este ítem se considera de nivel 4 de entendimiento ya que requiere identificar la letra como incógnita específica y cuenta con una estructura compleja. Se podría pensar que se considera la letra como objeto debido a que es una parte de la longitud, pero el hecho de no ser longitud total hace no poder considerarla como tal. Esto provoca, además, que se tenga que hacer uso del paréntesis para poder solventar cuál es el área de la figura.

Debido a que muchos alumnos de secundaria no tienen clara cuál es la función del paréntesis y cuándo es necesario utilizarlo, como comenta Freudenthal (1983), se cometen errores del tipo $6p + 2$.

Además, otros alumnos dan respuestas del tipo $6(2p)$, $(2p)6$ y $p2 * 6$, por lo que entendemos que estos sí han interpretado la letra como objeto, es decir, que toman como la longitud que mide en total: $2p$.

- **Ítems 13e, 13f y 13h**

Dentro de este ítem encontramos tres apartados en los que se debe hacer una interpretación del término literal como incógnita específica. Se trata de los ítems *e, f y h*. En ellos aparecen signos negativos, por lo que no es suficiente con darles un significado "real" ya que podría no tener sentido en el mundo real. Por ejemplo, siguiendo el ejemplo comentado anteriormente, no tendría sentido tener $(a - b) + b$, es decir, tener una manzana menos un plátano junto con otro plátano. Por tanto, hay que trabajar con ellas como incógnita específica.

Los dos primeros apartados han sido fallados por más alumnos que el tercero, pero seguramente no se deba a la interpretación que han hecho los alumnos de la letra sino al hecho de que aparezcan paréntesis en los dos primeros, pese a que en uno de ellos sea un mero distractor. El uso del paréntesis no está muy claro por parte de los alumnos, lo que provoca confusión y que cometan más errores.

- **Ítem 15c**

En el apartado c de este ítem se pregunta por $e + f + g$ sabiendo que $e + f = 8$. En este caso, como se había hecho en el resto de ítems de este apartado, se podía seguir trabajado emparejando, pero solo se irían e y f en este caso, por lo que los alumnos tienen que seguir trabajando con g, lo que requiere que se utilice como una incógnita específica. Algunos alumnos del test presentan errores de desconocimiento algebraico como es entender que $8 + g$ y $8g$ son lo mismo. Otros, sin embargo, necesitan darle un valor a los términos literales para poder trabajar con ellos, es decir, evaluarlos. Por ello dan respuestas del tipo 12 (entendiendo que han hecho $4 + 4 + 4 = 12$).

Además, cabe destacar que muchos alumnos suelen tener cierta reticencia a que el procedimiento sea la respuesta, tal y como indican Kieran y Filloy (1989) y por tanto no creen que sea correcto dar como resultado $8 + g$.

- **Ítem 18**

En este ítem se pide que se diga que se puede decir de r si $r = s + t$ y $r + s + t = 30$. Esta pregunta puede resolverse sustituyendo la primera ecuación en la segunda, pero aun así se debe trabajar con una letra. En este caso podría trabajarse con r como letra incógnita específica.

Debido a que algún alumno ha interpretado la letra como evaluada ha dado como respuesta $r = 20$. Otra alumna, tras sacar por el primer procedimiento el valor de r decide que es necesario darle valores también a s y t, trabajando con estas letras como evaluadas también.

- **Ítem 29**

En esta cuestión se pregunta por la relación que existe entre la cantidad de lápices azules, denominado b, y la cantidad de lápices rojos, denominada r, sabiendo el precio unitario de cada uno de ellos y lo que se ha pagado en total. En este problema las letras representan el número de objetos de un tipo y no el tipo de objeto en sí mismo. Esto desencadena en que algún alumno cometa el error de responder $b + r = 90$, pues están considerando las letras como objetos.

En este ítem los términos literales podrían interpretarse tanto como incógnitas específicas como números generalizados. Ninguna de ellas por sí sola da la verdadera relación que existe entre b y r, por lo que hay que trabajar con ambas a la par.

Si, como los alumnos que han realizado el test, tratan las letras como incógnitas específicas, la relación $5b + 6r = 90$ se cumple para unos valores particulares de parejas de números. Como dice Küchemann (1981), esta expresión es estática, no envuelve la idea del cambio. Sin embargo, pese a que ningún alumno lo haya resuelto de este modo, si las letras son tratadas como números generalizados, la expresión puede tomar como valores únicamente $(6,10)\ y\ (12,5)$. Citando de nuevo a Küchemann (1981, p. 110) “este punto de vista envuelve la idea de que los valores de b y r pueden cambiar, pero no indican en sí mismo cómo cambian, por lo que es necesario comparar los valores con otros de algún modo.”

Letra como número generalizado

En el test aparecen dos ítems en los que se requiere interpretar la letra como número generalizado, es decir, ver que dependiendo del valor que tomen los términos literales se dará o no la igualdad.

- **Ítem 14b**

Algo más de la mitad de los alumnos no ha sido capaz de percatarse de que a veces sí se puede cumplir la igualdad $L + M + N = L + P + N$, contestando a la pregunta que nunca se podría cumplir, por lo que no estaban interpretando las letras como números generalizados sino como incógnitas específicas que no pueden tener el mismo valor. Uno de los alumnos, que contestó inicialmente $nunca$ en el test, en la entrevista se corrigió y contestó correctamente tras ser guiado levemente y pensarlo un poco.

- **Ítem 19**

En este ítem se tiene que tener en cuenta que las letras c y d pueden tomar distintos valores, es decir, se deben considerar como números generalizados.

La mitad aproximadamente de los alumnos da respuestas incompletas ya que muestra una serie de valores que puede tomar c pero éstos son siempre enteros positivos. Este hecho hace intuir que sí están considerando los términos literales como números generalizados, pero que no son capaces de pensar en todos los valores. Como se ha ido comentando a lo largo del trabajo, estos alumnos no habían trabajado todavía el tema de inecuaciones, hecho que podía influenciar en sus contestaciones.

Tan solo tres alumnos han contestado que $c < 5$, hecho que provoca que pensar que o bien están interpretando la letra como variable pues son capaces de ver todos los valores que es capaz de tomar el término independiente o bien que la han interpretado como número generalizado al igual que sus compañeros pero que han decidido expresarlo de este modo.

Durante las entrevistas los alumnos fueron capaces de darle varios valores a las letras, por tanto, siendo capaces de interpretarlas como número generalizado.

Letra como variable

Tan solo el ítem 11 necesita interpretar el término independiente como variable para poder contestarlo.

- **Ítem 11**

Como se ha comentado anteriormente en este test, este ítem fue creado exclusivamente por Küchemann (1981) para comprobar si los alumnos eran capaces de reconocer que el tamaño de las expresiones $2n$ y $n + 2$ depende del valor de n y para qué valores es una u otra superior.

Como ya se ha analizado anteriormente, posiblemente debido a que todavía no habían trabajado con inecuaciones, algo más de la mitad de los alumnos sí fueron capaces de reconocer que dependía del valor que se le asignase a n, pero no sabían acotar en qué momento se produce el cambio, dado que se limitaban a trabajar con la letra como incógnita específica o como número generalizado y lo que hacían era sustituir valores, generalmente enteros positivos.

Hubo otro grupo grande de alumnos que respondió que $2n\ es\ mayor\ que\ n + 2\ porque\ está\ multiplicando$, por tanto, estaban utilizando la letra como objeto si únicamente se fijaban en la operación o como incógnita específica o número generalizado si previamente probaban un único valor con el que $2n$ resultaba superior.

7. Análisis de los casos y clasificación de los alumnos.

En este apartado vamos a clasificar la muestra de estudiantes con la que estamos trabajando en cuatro grupos diferentes y un caso especial. Esta clasificación se hará en función de las respuestas que dieron al contestar el test, teniendo en cuenta las respuestas correctas según el tipo de interpretación y uso que hicieron de los términos literales.

Cabe destacar que los alumnos que están clasificados en un mismo grupo ha sido porque han contestado correctamente a aproximadamente el mismo número de ítems de un mismo tipo de interpretación literal, pero no quiere decir que los hayan resuelto idénticamente ni tampoco que haya sido a los mismos. En resumen, son alumnos que presentan unas características similares y por tanto, se les puede clasificar en un mismo grupo.

También resaltar que no se ha tenido en cuenta a la hora de hacer la clasificación la interpretación de la letra como variable puesto que ningún alumno ha sido capaz de contestar correctamente al ítem, debido posiblemente a que a esa altura del curso todavía no habían estudiado las inecuaciones.

Antes de continuar, pese a que es evidente, cabe añadir que esta clasificación no es completamente exhaustiva ya que no se ha podido entrevistar a todos los alumnos encuestados, de modo que pudieran argumentar el porqué de sus respuestas. De haber sido así, la clasificación hubiera sido mucho más rigurosa. Además, los alumnos cumplen unos criterios para su clasificación pero la línea que separa unos grupos de otros es fina, por lo que en general tienen unas características comunes con los de su grupo, pero a su vez pueden estar compartiendo modos de razonamiento con otros alumnos clasificados en otros grupos.

Con ayuda de las tablas contenidas en el apartado B.5 del Anejo B la clasificación queda del siguiente modo:

Grupo A

En este grupo encontramos doce alumnos, los número 2, 6, 7, 9, 11, 15, 16, 19, 21, 22, 26 y 27. Estos alumnos presentan una capacidad de interpretación de las letras superior a la del resto de sus compañeros, ya que son capaces de empezar a intuir el significado de la letra como una incógnita específica. Las similitudes en sus resultados del test que han hecho clasificarlos en este grupo son:

- Han sido capaces de contestar a todas las preguntas de tipo numérico, excepto la alumna 27 que se ha equivocado en el ítem 24 donde se pedía calcular el número de diagonales pues al tratarse de un enunciado verbal no alcanzó a comprenderlo. Este hecho ha provocado que calcule erróneamente el número de diagonales, pero el error no es provocado por la falta de conocimiento aritmético sino por la comprensión lectora. Por tanto, en general este grupo parece entender y dominar la aritmética.

- También han contestado bien prácticamente todos los alumnos cuando se trabajaba con la letra como evaluada. La alumna 2 ha contestado en el ítem 16b que $m = 7/3$, debido posiblemente a haber sustituito n en $m = \frac{n}{3} + 1$ en lugar de la expresión que se daba, pero dado que ha resuelto correctamente el resto de ítems de este tipo, parece más bien un error cometido por hacerlo rápido que no por no saber tratar la letra como evaluada. Los alumnos 16 y 26 no son capaces de resolver la cuestión 17b, posiblemente debido al aumento de dificultad debido a la complejidad estructural de la pregunta. En ella aparece el término literal a ambos lados de la expresión, por lo que no son capaces de asignarle un valor numérico con el que se cumpla la igualdad.

- Algo más de la mitad de los alumnos clasificados en este grupo han contestado bien al total de los ítems donde se requería ignorar la letra. La pregunta 10 es única de este tipo de interpretación que ha presentado dificultades, debidas seguramente a, como ya se ha comentado a lo largo del trabajo, la forma en la que se planteó el ítem. El hecho de preguntar por la expresión mayor, la menor y si no se podía contestar que dijeran porqué hizo que los alumnos se confundieran, dado que por un lado daban un razonamiento correcto diciendo que "dado que n es siempre el mismo valor, sumar (o restar) x número iba a dar el resultado mayor (menor).", pero después respondían "no sé" a si no se podía. Como ya se ha comentado anteriormente, los alumnos están acostumbrados a que todos los apartados tengan una respuesta intuitivamente lógica, por lo que responder que sí se puede no suele ser una de sus opciones. Este hecho es provocado seguramente por los libros de texto, los cuales siempre tienen una solución concreta y acorde a lo esperado.

  Aparte de estos alumnos, los número 12, 13 y 21 también contestaron correctamente a este ítem, hecho por el que se les podría incluir en este grupo. Pero estos alumnos no cumplieron otros de los requisitos que se establecieron, como veremos más adelante, para pertenecer al mismo, por lo que se decidió no incluirlos.

- Todos los alumnos de este grupo han contestado correctamente a, al menos, diez de los trece ítems donde la letra ha de interpretarse como objeto. Un tercio de los alumnos ha contestado correctamente a todos los ítems de este tipo. Del resto, la mayoría ha fallado al contestar el ítem 13 en el que se pedía simplificar las expresiones dadas. Dado que la mayoría de los errores se concentran en las cuestiones 13c y 13i nos hace pensar que son debidos realmente a que aparecen paréntesis. Esto provoca que, a la vista de los alumnos, el ítem aumente su complejidad estructural, pese a que los paréntesis en ambos casos eran meros distractores.

  Además, cabe destacar de este grupo que en el ítem 5 donde se pedía cuál era el significado de nm, solo una alumna ha señalado como posible respuesta $25 * 26$, la cual ha añadido como otras posibles respuestas $6 * -1'5$ y $\sqrt{2} * \pi$, por lo que comprende que no es necesario que sean esos números ni que estos sean consecutivos.

- Otra de las características que comparten los alumnos que se encuentran en este grupo es que han contestado bien a, al menos, dieciséis de los ítems donde la letra es interpretada como incógnita específica. Dado que de este tipo de interpretación es de la que más ítems hay, se ha considerado un mayor margen de error.

  Todos los alumnos de este grupo han sido capaces de darle significado a $5n$ y únicamente dos alumnos (7 y 21) no han sabido reconocer que $e3$ es igual a $e + e + e$, condicionados seguramente por la inversión de posición de la letra y el número. Estos alumnos también han sido capaces de calcular el área de un rectángulo cuando se combinaba en uno de los lados un término literal y un número, haciendo un correcto uso del paréntesis y dejando, en la mayoría de caso la operación indicada sin llegar a realizar el cálculo.

  Sin embargo, en el ítem 20 en el que se aumentaba en dos unidades b y se preguntaba qué pasaría con a, tan solo un tercio de los alumnos han sido capaces de hacerlo bien. Uno de los tercios restantes ha contestado correctamente al primer apartado, debido a que era algo más sencillo estructuralmente pues b estaba multiplicado por la unidad, pero tenían problemas cuando la estructura de hacía más compleja (g estaba multiplicado por 3 y se decía que aumentaba 2 también). La mayoría del tercio restante tenía problemas en ambos apartados ya que consideraba que "aumentara en dos" era lo mismo que "el doble".

  Once de los doce alumnos incluidos supo calcular correctamente el perímetro de la figura incompleta dada en el ítem 23d. El único alumno que falló en su cálculo, la alumna 7, lo hizo porque consideró que n eran los lados que faltaban en la figura y no los totales, por lo que contestó $26 + 2n$, contando los 14 lados dibujados y multiplicándolos por su longitud y añadiéndole n lados más de longitud 2. Esto muestra que esta alumna sí estaba considerando la letra como incógnita específica pero que no entendió correctamente el enunciado.

  Destacable es que seis de los siete alumnos que han contestado correctamente al apartado a del ítem 26, en el que se pedía la ecuación del sueldo total que gana María a la semana, son de este primer grupo. Además, todos son capaces de sacar la ecuación que relaciona el número de canicas que tienen entre Juan y Pedro, así como interpretar a partir del enunciado y la ecuación $4p + 3b$ lo que significa. Demostrando con ello que reconocen el término literal como una incógnita en sí misma con la que pueden operar y a la que dotan de significado.

- En cuanto a la interpretación de la letra como número generalizado, ninguno de los alumnos ha sido capaz de contestar correctamente a los dos ítems que se preguntan con este tipo de interpretación, ya que, como veremos más adelante, solo tres alumnos sí han contestado correctamente, los cuales cuentan con su propio grupo.

  Además, los alumnos de este grupo han respondido al ítem 19 dando únicamente dando una serie de valores naturales (1, 2, 3, 4), debido posiblemente a que están acostumbrado a trabajar con estos valores y no suelen pensar en el conjunto de todos los números. Tan solo un alumno de este grupo ha incluido, además, el 0 como posible solución.

Grupo B

Los alumnos considerados en este grupo, un total de nueve (1, 3, 4, 10, 12, 13, 18, 24, 25 y 28) presentan unas características bastante similares a las del grupo A. Sin embargo, en algunos tipos de interpretaciones, como objeto o como incógnita específica, presentan mayores dificultades que el grupo predecesor. Es por ello que se ha considerado necesario repartir en dos grupos a estos alumnos y hacer una distinción entre ellos. Las características que los diferencian son:

- Tanto en los ítems puramente numéricos como en los que se requería una interpretación de la letra como evaluada, número generalizado o en los que había que ignorarla estos alumnos presentan las mismas características que el grupo anterior.

- Cuando hay que interpretar el término literal como objeto, estos alumnos presentan mayores dificultades. Se refleja en el ítem 13 en el que prácticamente todos han tenido problemas, debido a la complejidad estructural que se presenta al hacer uso del paréntesis. Debido a esto, muchos de estos alumnos han confundido el hecho de que apareciera un paréntesis con la multiplicación. Por tanto, no presentan tanto un problema de interpretación como objeto de la letra sino como un error en el reconocimiento de la función del paréntesis.

- Este error del uso del paréntesis se aprecia también cuando son ellos los que tienen que utilizarlo. En los ítems 12 y 21d, en los que se pedía calcular el área de un rectángulo compuesto por dos lados únicamente numéricos y otros dos en los que aparecía una letra y un número, la mitad de los alumnos de este grupo no son capaces de percatarse que la base es la letra junto el número. Es por ello que, posiblemente estén concibiendo la letra como un objeto en sí mismo y no como una incógnita específica. Es decir, en el momento aumenta la abstracción del término literal tienen más dificultades en entenderlo.

- En general presentan mayores dificultades a la hora de interpretar la letra como incógnita específica, es decir, no han alcanzado un nivel de entendimiento de los términos literales como el alcanzado por el grupo A.

  Esto queda reflejado al contestar los ítems 26a y 27, ya que la mayoría de los componentes de este grupo no son capaces de resolver estos problemas que presentan una estructura y nivel de entendimiento más complejos. En ellos se pide trabajar con letras que no significan directamente lo que el alumno espera, es decir, el alumno interpreta que W es el sueldo base de María y no el sueldo total (ítem 26a), así como $4p + 3b$ lo traducen directamente como 4 pasteles y 3 bollos en lugar del precio total a pagar (4 pasteles por su precio más 3 bollos por su precio). Este último error fue comentado por Küchemann (1981), debido a la lectura literal de la expresión en lugar de tener en cuenta el significado de los términos literales.

Grupo C

En este grupo encontramos dos alumnos, los número 14, y 30. Estos alumnos no han llegado a alcanzar los requisitos mínimos que se pedían para poder ser considerados del grupo anterior y además presentan unas características similares en sus respuestas. Algunas de ellas son:

- No reconocen $n+n+n+n+n$ ni $e+e+e$ como significado de $5n$ y $e3$, respectivamente. Además, una de ellas confunde este tipo de expresiones con $5\ y\ n$, problema derivado de la generalización aritmética cuando se trabaja con el álgebra, como indican Kieran y Filloy (1989).

- Son capaces de trabajar con las letras como objetos y como incógnitas específicas más sencillas como las del ítem 9, pero tienen mayores problemas cuando se trata de simplificar las expresiones en el ítem 13, debido seguramente al aumento de complejidad estructural derivado del uso de los paréntesis.

- Tienen problemas en ignorar la letra. Por un lado, en el ítem 10 dado que, como explican en el apartado c, no conocen el valor de n explican que no pueden saber cuál es la expresión mayor y cuál la menor. Así como en el ítem 14, donde no son capaces de ver en qué momento las igualdades serán iguales. Poniendo de manifiesto que les cuesta trabajar cuando hay que ignorar la letra y, aunque la traten como evaluada y le den valores, no terminan de entenderlo.

- Son capaces de entender expresar qué significa $4p+3b$ pero de un modo literal, es decir, contestan que "es el número de pasteles por su precio más el precio de los bollos por los bollos que hay", por lo que son capaces de interpretar la letra como incógnita específica en este caso pero no son capaces de darle un sentido más general y se quedan solo en la lectura literal de la expresión.

- Para contestar al ítem 28 una de ellas ha ido probando valores hasta que ha encontrado uno que le daba la solución correcta mientras que la otra ha hecho la operación en el lateral, por lo que parece que también ha probado valores, pero después ha indicado que no sabe por qué es ese valor. Esto da a entender que no han comparado las expresiones ya que estructuralmente parecían complicadas.

- Haciendo una visión global de sus respuestas, se ve una tendencia a emplear la letra como evaluada, ya que tienden a darle valores a los términos literales para que sea más cómodo trabajar con ellos. Por lo que muestran un nivel de entendimiento inferior, al recurrir a utilizar este tipo de interpretación que simplifica los cálculos pero que no siempre es útil y que puede llevar a resultados erróneos.

Grupo D

A este grupo pertenecen tres alumnos, los número 17, 23 y 29. Estos tres alumnos son los únicos que han contestado correctamente a los dos ítems en los que se pedía un nivel superior de entendimiento de los términos literales ya que tenían que hacer uso de la letra como número generalizado. A la pregunta 14b contestan que es posible que sean iguales las igualdades si $M = P$ y a la 19 dicen que c tiene que ser menor que 5. Sin embargo, estos mismos alumnos presentan dificultades a la hora de darle sentido a las letras con otros tipos de interpretación, las cuales se consideran de un nivel de entendimiento menor. Este hecho, además hace que no puedan incluirse ni en el grupo A ni en el grupo B.

Para entender mejor cómo razonan estos alumnos hubiera sido necesario entrevistar, como mínimo, a uno de ellos, pero esto no pudo hacerse. Por ello únicamente podemos deducir, a la vista de los resultados, que puede que tengan más desarrollada la interpretación del término literal como número generalizado y que, como veremos a continuación, presenten errores derivados de arrastrar problemas aritméticos, geométricos y de comprensión lectora. Algunos casos pueden verse a continuación:

- Uno de los alumnos, el número 17, presenta un patrón similar a los alumnos del grupo B en cuanto a la interpretación de las letras. Por ejemplo, en el ítem 13, tanto en los casos en los que hay que interpretar la letra como incógnita específica como cuando hay que tratarla como objeto, se confunde cuando aparecen paréntesis, al igual que hacían los compañeros de dicho grupo. De igual modo se comporta igual en el ítem 27 donde hace una lectura literal de las letras en lugar de darles su significado.

  Sin embargo, las respuestas que hacen que este alumno no cumpla los criterios establecidos para ser del grupo B son en las puramente numéricas en las que había que interpretar el enunciado, por lo que parece que los errores que comete son derivados de la falta de comprensión lectora.

- La alumna 23 es capaz de trabajar con la letra como evaluada, ignorada y como objeto pero presenta mayores dificultades cuando se enfrenta a cuestiones en las que la letra ha de ser tratada como incógnita específica. Por ejemplo, no es capaz de reconocer que $5n$ o $e3$ son $n + n + n + n + n$ o $e + e + e$, respectivamente. En el ítem donde se pide la expresión para $e + 2\ multiplicado\ por\ 3$ escribe en un lateral del papel la expresión correcta pero necesita darle un valor a e para poder trabajar con él, es decir, necesita que la letra sea tratada como evaluada. Asimismo, deja en blanco los ítems 18, 27, 28 y 29, en los cuales la letra también requería ser tratada como incógnita específica y además presentaban una complejidad estructural y de entendimiento superior. Los tres últimos ítems del test nombrado no sabemos si realmente fueron dejados en blanco por no saber hacerlos o por falta de tiempo. Como ya se ha dicho, hubiera sido necesario entrevistarle para poder conocer el porqué.

- La alumna 29 trabaja comete algún pequeño error cuando la letra es tratada como evaluada o como ignorada cuando la complejidad estructural se incrementa, pero en general domina este tipo de interpretación. Sin embargo, tiene mayores dificultades cuando se tiene que tratar como objeto o como incógnita específica, debido seguramente a que se requiere un mayor dominio del concepto del término literal y nivel de abstracción. Por ejemplo, en el ítem 9 entiende que $n + 5$ y $5n$ son lo mismo y, por tanto, da como resultado en ambos casos un monomio. También presenta dificultades en el ítem 13 cuando aparecen paréntesis, puesto que los que como algo fijo que no se puede quitar y por tanto, esas expresiones no se pueden simplificar.

- Por último, presenta dificultades arrastradas de la geometría ya que en el ítem en el que se pide calcular el perímetro de varias figuras hace un mix entre el cálculo del área y el del perímetro.

Los criterios que se han empleado para clasificar a los alumnos se recogen en esta tabla. Como ya se ha comentado, no ha sido fácil establecer una línea divisoria entre los diferentes grupos ya que en muchos casos las diferencias eran mínimas. Por tanto, si se quisiera tener una clasificación más rigurosa se debería haber hecho un análisis más exhaustivo donde se hubiera entrevistado a cada uno de los alumnos.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Grupo A</th><th>Grupo B</th><th>Grupo C</th><th>Grupo D</th></tr>
<tr><td colspan="2">Puramente numérico</td><td>≥ 7</td><td>≥ 6</td><td rowspan="5">No ha alcanzado alguno de los criterios del grupo B</td><td rowspan="5">Ha contestado correctamente los dos ítems donde la letra había que interpretarse como número generalizado</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Interpretación de la letra como…</td><td>evaluada</td><td>≥ 6</td><td>≥ 6</td></tr>
<tr><td>ignorada</td><td>≥ 4</td><td>≥ 4</td></tr>
<tr><td>objeto</td><td>≥ 10</td><td>≥ 8</td></tr>
<tr><td>incógnita específica</td><td>≥ 16</td><td>$10 \leq x \leq 15$</td></tr>
</table>

Cabe destacar que los grupos no son homogéneos y por tanto no son comparables con los porcentajes de alumnos por grupo del estudio de Küchemann (1981) debido a que en nuestro trabajo hemos trabajado con una muestra pequeña de la población.

8. Entrevistas.

Como se ha ido comentando a lo largo del trabajo, con el fin de analizar las respuestas dadas por los alumnos y conocer qué tipo de interpretación de los términos literales han hecho los alumnos se han llevado a cabo una serie de entrevistas a alguno de ellos. Además, con ellas se quería ayudar a los alumnos a comprender dónde y por qué habían cometido los errores, con el fin de que mejoraran sus conocimientos algebraicos.

Pese a que hubiera sido adecuado realizar las entrevistas lo más próximas a la fecha en la que realizaron el test, debido a problemas personales, éstas tuvieron que ser aplazadas hasta final de curso. Finalmente se llevaron a cabo el último día de clase, 15 de junio. Motivo por el cual tan solo se pudo entrevistar a dos alumnos, uno del grupo B y otra del grupo C. Se procuró que los alumnos seleccionados fueran de grupos diferentes para poder observar las diferencias en sus interpretaciones de las letras. Debido a la falta de tiempo, no se pudo entrevistar a más alumnos, pero hubiera sido conveniente realizarles las entrevistas a un alumno del grupo A y a otro del grupo D para tener, al menos, un representante de cada uno de los grupos y ver cómo evoluciona la interpretación de los términos literales.

Estas entrevistas, que duraron aproximadamente media hora cada una, fueron grabadas con el fin de hacer un análisis exhaustivo de sus respuestas, pudiéndolas escuchar nuevamente y transcribir. Esta transcripción se encuentra en el Anejo D del presente trabajo.

Como las entrevistas se llevaron a cabo una vez los alumnos habían acabado el curso y, por tanto, habían visto todo el temario, se aprecia qué respuestas se ven afectadas. En algunos casos los alumnos son capaces de autocorregirse, a veces ellos solos y otras veces con un poco de ayuda que les guía a la respuesta correcta.

Alumno 1 (Representante grupo B)

Como era de esperar, debido a que la entrevista se realizó cuando ya los alumnos habían dado todo el temario destinado a ese curso, este alumno había mejorado notablemente sus conocimientos algebraicos.

Esta vez supo contestar correctamente y dar una explicación razonada, en algunas ocasiones con un poco de ayuda, a todos los ítems puramente numéricos, a aquellos donde la letra debía ser ignorada, donde debía tratarse como un objeto y como número genérico e incluso fue capaz de dar respuesta al de tipo variable. Además, sus argumentaciones concordaban con este tipo de interpretación de las letras. Veamos, por ejemplo, la dada en el ítem 14b, donde debía tratarse la letra como número genérico. En ella, tras pensar un rato en por qué $a\ veces$ si podían ser iguales las expresiones, es capaz de deducir que las letras iguales siempre serán el mismo número y que la expresión será la misma cuando M y P sean iguales.

Únicamente se queda atascado en dos cuestiones, las cuales cuentan con una estructura más compleja. Por un lado, en el ítem 17b en el que aparecía el mismo término literal a ambos lado de la igualdad, el alumno sigue sin ver la necesidad de darle más sentido a b que el que se obtiene de despejar la ecuación. Como se ha observado a la lo largo de la encuesta, el alumno tiene tendencia a despejar las ecuaciones para resolver lo que se le pide, es decir, está acostumbrado a trabajar con ecuaciones y sabe cómo tiene que despejar para resolverlas. La otra cuestión que no ha conseguido resolver correctamente es la 23d, en la que se pedía el perímetro de una figura incompleta. Este alumno, posiblemente condicionado por una falta de visión del objeto, es decir, por no ser capaz de imaginárselo, no veía cómo podía saber cuál era el perímetro de la figura. Por ello, no podemos suponer que no sepa trabajar con las letras como incógnitas específicas sino que más bien le ha faltado juntar el enunciado verbal con la imagen, es decir, tener una imagen general de lo que se le pedía, pues parece ser que de haberlo entendido, a la vista del resto de respuestas que ha dado, sí hubiera sido capaz de dar con la respuesta correcta.

Cabe destacar también que el alumno sigue teniendo tendencia a dar valores enteros positivos cuando se le pide que dé un valor para un término literal, pero acepta que éstos también pueden tener otros valores, incluso es capaz en algunas ocasiones de proponer un valor negativo para la solución.

Por tanto, este alumno ha mostrado una evolución desde que se le pasó el test a finales de marzo a cuando se le realizó la entrevista a mediados de junio, llegando a resolver ítems que Küchemann (1981) considera de nivel de entendimiento 4.

Alumna 14 (Representante grupo C)

Al igual que su compañero, esta alumna ha mejorado notablemente sus conocimientos algebraicos debido a que la entrevista fue realizada el último día del curso, aunque su modo de razonamiento seguía mostrando un nivel de entendimiento algo más bajo, ya que necesitaba ser más guiada para entender algunas cuestiones.

Parece que la alumna arrastra algunos problemas derivados de la aritmética, como trabajar con números negativos (que ella misma admite durante la entrevista que *"no se le da bien"*) o entender qué significa realmente una multiplicación. Este hecho puede observarse en la entrevista al preguntarle por ítem 3, en el que no reconoce $n + n + n + n + n$ como una posible solución hasta que no se le explica con un ejemplo concreto. Tras entenderlo no tiene problemas en utilizarlo en otros contextos. También le ocurre en el ítem 6 que no es capaz de entender por qué $3e + 6$ es solución de la pregunta hasta que no se le explicita que haga el paréntesis.

A su vez esta alumna tiene tendencia a utilizar la letra como evaluada, ya que le resulta más cómodo y fácil de entender. Esto muestra que todavía le cuesta comprender los términos literales en su totalidad, abarcando todos los tipos de interpretaciones. Además, suele pensar únicamente en valores enteros positivos, aunque sí concibe los negativos como una posible solución si se le incita a pensar en ellos. En el ítem 11, en el que se trabaja con el término literal como variable, tras ser algo guiada es capaz de hallar valores para los que $2n$ es superior y otros para los que lo es $n + 2$, pero no consigue encontrar en qué momento ocurre el cambio.

No tiene problemas derivados de la geometría, pero si los tiene a la hora de traducir enunciados a términos algebraicos. En el ítem 26 no es capaz de hallar la ecuación que represente el sueldo total semanal de María, no por no saber trabajar con la letra como incógnita específica, sino porque no es capaz traducirlo al lenguaje algebraico. Esta dificultad fue comentada por Kieran y Filloy (1989), los cuales hacían referencia a que los alumnos procedentes de la primaria están acostumbrados a ver las ecuaciones fuera de contexto y que, para solventar este tipo de problemas, lo que hacen es resolverlo de cabeza y después intentar transcribir en la ecuación los pasos seguidos. Generalmente provoca que los alumnos o bien olviden la incógnita o, como recalca la alumna 14, ésta tenga que aparecer a la izquierda del igual.

En resumen, esta alumna es capaz de resolver ítems de nivel de entendimiento 1, 2 y 3 donde la letra es interpretada como evaluada, como objeto o es ignorada. Con algo de ayuda y guía es capaz de resolver ítems de nivel de entendimiento 3 y 4 en los que la letra es interpretada como incógnita específica. Sin embargo, en lugar de trabajar con la letra como número generalizado o variable, le resulta más sencillo trabajar con la letra como evaluada dándole un valor concreto al término literal. Esto provoca que en alguna ocasión no sea capaz de dar con la respuesta correcta por completo.

Capítulo 3. Resumen de los resultados y conclusiones

Una vez realizado el análisis del uso e interpretación que hacen los alumnos de los términos literales, tanto individualmente como por grupos, vamos a finalizar con un resumen de los resultados y con las conclusiones que se pueden extraer de ellos.

A la vista de las diferentes respuestas dadas por los alumnos, podemos destacar que resulta sorprendente como en una misma clase exista esta variedad, es decir, tan solo en una muestra de veintisiete alumnos pertenecientes al mismo grupo hemos encontrado razonamientos y formas de interpretación de lo más dispares. Es por ello que cabe destacar el papel del profesor en el aula, que debe lidiar con la variedad que en ella existe. Su función es la de encontrar el modo de que el conocimiento llegue a todos los alumnos, bien estos consigan interpretar la letra como variable o se queden en tratarla como un objeto. Debido a esto tiene que tomar unas medidas, para las cuales resulta útil conocer el nivel de entendimiento y la forma de interpretación de los términos literales que tienen los alumnos, pudiendo focalizar en los puntos donde más dificultades tienen y donde más errores cometen. Además, resulta interesante conocer el origen de los errores, ya que en algunas ocasiones éstos provienen de otras ramas de la matemática y deben ser tratados anteriormente para que no sean arrastrados.

Con los resultados obtenidos del test cabe destacar que aproximadamente todos supieron contestar los ítems de tipo numérico, en los que la letra debía ser evaluada o ignorada. Tuvieron alguna dificultad en los que presentaban un nivel de entendimiento superior pues la letra debía ser tratada como objeto o incógnita específica. Así como es destacable que ninguno de los alumnos supo interpretar la letra como variable y que tan solo tres supieron tratarla como número generalizado. Hubiera sido interesante realizar la entrevista a, al menos, uno de estos tres alumnos para poder conocer realmente si había interpretado el término literal como número generalizado o había hecho como sus compañeros y lo había tratado como evaluado pero su forma de expresarlo daba a entender lo contrario.

Resulta muy positivamente destacable el hecho de que, como se ha comprobado gracias a las entrevistas, los alumnos entrevistados, y podemos suponer que prácticamente el resto de sus compañeros también, han mejorado notablemente su razonamiento algebraico a final de curso. Durante las entrevistas los alumnos han sido, en varias ocasiones, capaces de autocorregirse sin ayuda en ítems que cuando realizaron el test no habían hecho bien o habían dejado incompletos. En otras ocasiones han necesitado algo de ayuda y guía, proporcionada a través de las preguntas hechas por la entrevistadora, para poder contestar bien o completar su respuesta. Por ejemplo, el alumno 1, que inicialmente era capaz de contestar prácticamente bien a todos los ítems donde la interpretación de la letra era evaluada, como objeto o ignorada y a aproximadamente la mitad de donde el término literal era tratado como incógnita específica, a final de curso ha sido capaz de trabajar con la letra también como número generalizado o variable, además de mejorar cuando el término literal se interpreta como incógnita específica.

También cabe destacar que los alumnos entrevistados, con sus contestaciones han demostrado alcanzar niveles de entendimiento superiores, pero que este nivel no es el mismo. Como se ha comentado anteriormente, en una misma clase existen una gran variedad de razonamientos y, pese a que todos mejoren, generalmente sigue habiendo una diferencia entre ellos.

Cabe resaltar que varios de los errores cometidos no parecen deberse a una incorrecta interpretación de los términos literales sino al uso incorrecto del paréntesis, a errores derivados de la aritmética o la geometría y a dificultades en la interpretación de enunciados verbales, como se aprecian en el ítem de la simplificación de expresiones, en el del significado de $5n$, en los de cálculos de perímetros o áreas y en los últimos en los que hay que traducir a lenguaje algebraico, respectivamente.

Es curioso como muchos de los errores y dificultades con los que nos hemos encontrado corrigiendo el test ya habían sido comentados por otros investigadores del tema, como son Küchemann en su estudio de finales de los años 70 y Kieran y Filloy en su artículo de 1989. Este hecho debería poner de manifiesto que es preciso que los profesores trabajen sobre ellos para corregirlos desde su origen.

Referencias bibliográficas

CEICE. (2015). *Currículo Matemáticas Aplicadas 4º ESO.* Obtenido de Conselleria d´educació, investigació, cultura i esport: goo.gl/FUVmbg

Freudenthal, H. (2001). El lenguaje algebraico. En *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. Traducción, notas e introducción de Luis Puig. 2ª edición ampliada.* (pp. 65 - 102). México: CINVESTAV.

Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M. y Coe, R. (2010). Secundary students' understanding of mathematics 30 years on. *BERA*.

ICCAMS. (2008). *Increasing Competence and Confidence in Algebra and Multiplicative Structures*. Recuperado en junio de 2017, de http://iccams-maths.org/

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Pyicology of Matheatics Education: Past, Present and Futur* (pp. 11 - 49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7* (3), 229 - 240.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. M. Hart, M. Brown, D. E. Küchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney, *Children´s Understanding of Mathematics: 11 - 16* (pp. 102 - 119). London: John Murray.

Ortega Pons, M. (2012). *Anàlisi de la interpretació dels termes literals per alumnes de Secundària.* Trabajo Fin de Máster, especialidad Matemáticas. Valencia: Universitat de València. Recuperado en febrero de 2017, de http://roderic.uv.es/handle/10550/25776

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2015). El proceso de la generalización en alumnos de secundaria. *Uno* (68), 18 - 29.

Anejo A. Test

Para realizar el test hay que seguir las siguientes instrucciones: - Escribe con bolígrafo. - En *Nº alumno* indica tu número en la lista de clase. - Deja indicadas todas las operaciones realizadas. - Explica por qué dejas alguna pregunta en blanco. - Intenta contestar el máximo número de preguntas. - Al final del test hay una cara en blanco, utilízala para comentar qué te ha parecido el test (dificultad, tiempo empleado…) y qué problemas te han surgido al contestarlo.

Parte I

1. Si $a = 2$ y $b = 3$, ¿qué puedes decir de $a + b$? ______________________________

2. Si $a = 3$, ¿qué puedes decir de $4a$? ______________________________________

3. ¿Qué significa *5n*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.

a. 5 + n
b. 5 y n
c. 5 x n
d. 5 + 5 + 5 + 5 + 5
e. n + n + n + n + n
f. Otra respuesta: ____________________________________

4. ¿Qué significa *e3*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.

a. e x 3
b. e + 3
c. 3 x e
d. 3 + 3 + 3
e. e + e + e
f. e y 3
g. Otra respuesta: ____________________________________

5. ¿Qué significa *nm*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.

a. n y m
b. n x m
c. n + m
d. 25 + 26
e. 25 x 26
f. Otra respuesta: ____________________________________

6. ¿Cuál de las siguientes expresiones escribirías para representar *e + 2 multiplicado por 3*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.

a. e + 6
b. 3 x (e + 2)
c. 3 x e2
d. 3 (e + 2)
e. 3e + 6
f. e + 2 x 3
g. Ninguna es correcta.

7. ¿Cuál de las siguientes expresiones escribirías para representar *2 sumado a 5a*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.

a. 5a más 2
b. 5a + 2
c. 7a
d. 2 + 5a
e. 7
f. 10a
g. (2 + 5)a
h. Ninguna es correcta.

8. Rellena los huecos siguiendo la regla indicada.

a. $x \rightarrow x + 2$
$6 \rightarrow$ _______
$r \rightarrow$ _______

b. $x \rightarrow 4x$
$3 \rightarrow$ _______
$t \rightarrow$ _______

9. Responde los siguientes apartados:

a. *Sumar 4 a n* puede ser escrito como *n + 4*. Suma 4 en cada caso:

8	n + 5	3n

b. *Multiplicar n por 4* puede ser escrito como *4n*. Multiplica por 4 en cada caso:

8	n + 5	3n

10. Dadas las siguientes expresiones:

n + 1 *n + 4* *n – 3* *n* *n -7*

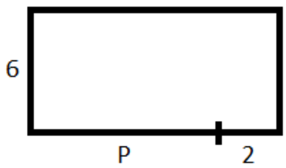
a. La mayor de ellas es ____________________ porque ______________

b. La menor de ellas es ____________________ porque ______________

c. No se pueden contestar las preguntas a. y b. porque ______________

11. ¿Qué es mayor *2n* o *n + 2*? Explica tu respuesta.

12. ¿Cómo escribirías el área de este rectángulo?



Área = ____________________

13. La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada posible las siguientes expresiones. En caso de que no se pueda, escribe **NO**.

a. 2a + 5a = ____________________
b. 2a + 5b = ____________________
c. (a + b) + a = ____________________
d. 2a + 5b + a = ____________________
e. (a – b) + b = ____________________
f. 3a – (b + a) = ____________________
g. a + 4 + a – 4 = ____________________
h. 3a – b + a = ____________________
i. (a + b) + (a – b) = ____________________

14. Señala cuándo son ciertas las siguientes igualdades:

a. A + B + C = C + B + A
   i. Siempre   ii. Nunca   iii. A veces, cuando __________
b. L + M + N = L + P + N
   i. Siempre   ii. Nunca   iii. A veces, cuando __________

Parte II

15. Responde los siguientes apartados:

a. Si $a + b = 43$
   a + b + 2 = _______

b. Si $n – 246 = 762$
   n – 247 = _______

c. Si $e + f = 8$
   e + f + g = ______

16. Responde los siguientes apartados:

a. ¿Qué puedes decir de *u* si $u = v + 3$
   y $v = 1$? ______________________________
b. ¿Qué puedes decir de *m* si $m = 3n + 1$
   y $n = 4$? ______________________________

17. Responde los siguientes apartados:

a. ¿Qué puedes decir de *a* si $a + 5 = 8$? ______________________________
b. ¿Qué puedes decir de *b* si $b + 2 = 2b$? ______________________________

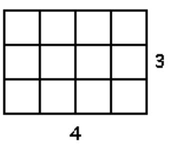
18. ¿Qué puedes decir de *r* si $r = s + t$
   y $r + s + t = 30$? __________________________________

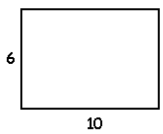
19. ¿Qué puedes decir de *c* si $c + d = 10$
   y *c es menor que d*? ________________________________

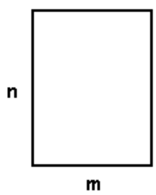
20. Responde los siguientes apartados:

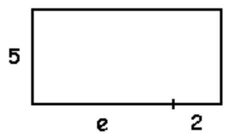
a. Si $a = b + 3$, ¿qué pasa con a si b aumenta en 2?_______________________
b. Si $f = 3g + 1$, ¿qué pasa con f si g aumenta en 2? ______________________

21. Calcula el área de las siguientes figuras:

a.


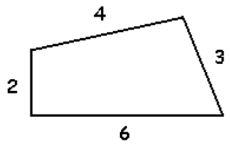
b.


c.


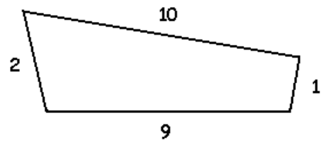
d.


A = ___________   A = ___________   A = ___________   A = ___________

22.

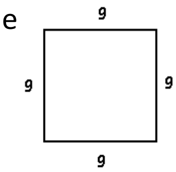


El perímetro de esta figura es igual a 6 + 2 + 4 + 3, por tanto igual a 15.



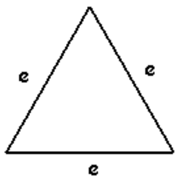
Calcula el perímetro de esta figura.
P = ____________________

23. Este cuadrado tiene los lados de longitud g. Así, su perímetro puede ser escrito como *P = 4g*.

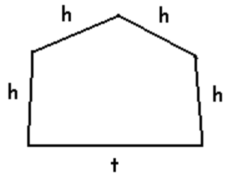


¿Cómo se pueden escribir los perímetros de las siguientes figuras?

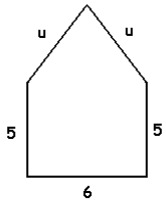
a.



b.



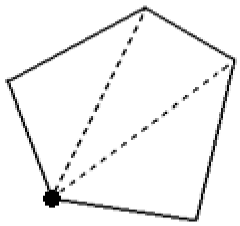
c.



d. Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados, todos de longitud 2.

P = __________ P = __________ P = __________ P = __________

24. En una figura como esta se pueden hallar el número de diagonales que salen de un vértice restando 3 al número de lados. Por tanto, una figura de 5 lados tiene 2 diagonales que salen de cada vértice.



a. Una figura con 57 lados tiene ______ diagonales.
b. Una figura con k lados tiene ______ diagonales.

25. Si Juan tiene J canicas y Pedro tiene P canicas, ¿qué puedes escribir sobre el número de canicas que tienen entre los dos?

____

____

26. El sueldo base de María es de 100€ a la semana. Además le pagan 5€ más por cada hora extra trabajada.

a. Si h es el número de horas extras que trabaja María y W el sueldo total semanal (€). Escribe la ecuación que relaciona W y h: ______________

____

b. ¿Cuál sería el sueldo total de una semana si ha trabajado 4 horas extras?____

27. En una pastelería, cada pastel cuesta p euros y cada bollo cuesta b euros. Si se compran 4 pasteles y 3 bollos, ¿qué significa *4p + 3b*?

____

____

____

28. Si la ecuación → $(x+1)^3 + x = 349$
es cierta cuando $x = 6$.

Entonces, ¿qué valor de x hará que la ecuación → $(3x+1)^3 + 3x = 349$
sea cierta?

x = _______

Explicación:

____

____

29. En una papelería cada lápiz azul cuesta 5 céntimos y cada lápiz rojo cuesta 6 céntimos de euro. Un día, me gasto en total 90 céntimos y compro algunos lápices azules y algunos rojos. Si llamamos b al número de lápices azules y r al número de lápices rojos. ¿Qué puedes escribir sobre b y r?

____

____

____

Anejo B. Tablas de resultados

B.1. Tabla de tipo de interpretación de la letra y nivel de entendimiento.

Tabla en la que se recoge para cada ítem el tipo de interpretación del término literal mínimo requerido y el nivel de entendimiento que supone.

	Puramente numérico	Interpretación de la letra como…					
		evaluada	ignorada	objeto	incógnita específica	número generalizado	variable
Nivel 1	8a', 8b', 9a', 9b', 21a, 21b, 22, 24a, 26b	2, 17a, 26a	15a	13a, 23a			
Nivel 2		1, 16a, 16b, 17b	9a'', 9b''', 10, 15b	5, 8a'', 8b'', 13d, 21c, 23b, 23c			
Nivel 3				13b, 13c, 13g, 13i	3, 4, 9a''', 13h, 14a, 15c, 18, 23d, 24b, 25	19	
Nivel 4					6, 9b'', 12, 13e, 13f, 20a, 20b, 21d, 26a, 27, 28, 29	14b	11

*Los ítems analizados en el apartado 6.3. son los subrayados.

B.2. Tabla de respuestas de los alumnos e ítem.

Se trata de las tablas de las páginas 52, 53 y 54 en las que se ve si los alumnos han contestado correctamente (B), incorrectamente (M), de forma incompleta (I), han respondido “no sé” (NS) o la han dejado en blanco (-).

Alumno/ ítem	1	2	3	4	5	6	7	8a'	8a''	8b'	8b''	9a'	9a''	9a'''	9b'	9b''	9b'''	10	11
1	B	B	I	I	M	M	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M
2	B	B	B	I	B	B	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	I
3	B	B	B	M	M	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	I
4	B	B	B	B	B	M	I	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	M	I
6	B	B	B	I	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	I
7	B	B	I	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M
9	B	B	B	B	B	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	I
10	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M
11	B	B	B	B	B	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	I
12	B	B	B	B	B	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	I
13	B	B	B	B	M	I	I	B	B	B	B	B	B	B	M	M	B	B	M
14	B	M	M	M	M	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	I
15	B	B	B	B	B	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	I
16	B	B	B	B	B	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	I
17	B	B	B	M	B	I	B	M	B	M	B	B	B	B	B	B	B	M	M
18	B	B	B	I	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	I
19	B	B	B	B	B	B	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M
21	B	B	B	I	B	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	I
22	B	B	B	B	B	B	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	I	I
23	B	B	I	I	B	M	I	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	M
24	B	B	B	B	B	I	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	M	M
25	B	B	B	B	B	B	I	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	M	I
26	B	B	B	I	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	NS	M
27	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	NS
28	B	B	I	I	M	B	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M
29	B	B	B	I	M	M	I	B	B	B	B	B	M	M	M	M	B	B	I
30	B	B	I	I	B	M	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M

Alumno/ ítem	12	13a	13b	13c	13d	13e	13f	13g	13h	13i	14a	14b	15a	15b	15c	16a	16b	17a	17b	18
1	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	M	M
2	M	B	B	B	B	B	M	B	B	M	B	M	B	B	B	B	M	B	B	-
3	M	B	B	B	B	B	M	B	B	M	B	M	B	B	M	B	B	B	B	B
4	M	B	B	B	B	B	M	M	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B
6	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
7	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	-
9	B	B	-	-	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
10	-	B	B	M	B	-	-	-	B	-	B	I	B	M	M	B	B	B	B	B
11	B	B	B	-	M	-	B	B	B	M	B	M	B	B	B	B	B	B	B	-
12	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
13	M	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	-
14	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	M	I	B	M	B	B	B	B	-	-
15	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B
16	B	B	B	M	B	M	M	B	B	-	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B
17	B	M	M	B	B	M	M	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M
18	B	B	B	M	M	M	M	M	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
19	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	I
21	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	NS
22	B	B	B	-	B	-	-	-	-	-	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B
23	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	M	-
24	B	B	B	B	M	B	M	B	M	M	B	M	B	B	M	B	B	B	B	M
25	M	B	B	M	B	M	M	B	B	M	B	M	B	B	M	B	B	M	M	M
26	B	B	B	B	B	M	B	B	B	NS	B	M	B	B	B	B	B	B	NS	NS
27	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	-
28	B	B	B	-	B	-	B	B	B	M	B	B	B	B	-	B	B	B	B	-
29	B	B	B	M	B	M	M	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	NS	M
30	M	B	B	B	B	M	M	M	M	M	B	M	B	B	M	B	B	B	M	B

Alumno/ ítem	19	20a	20b	21a	21b	21c	21d	22	23a	23b	23c	23d	24a	24b	25	26a	26b	27	28	29
1	I	M	M	B	B	B	M	B	B	B	B	M	B	B	B	M	B	M	B	B
2	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
3	I	B	M	B	B	B	M	B	NS	NS	NS	NS	M	M	B	M	B	M	B	M
4	M	B	M	B	B	B	M	B	M	M	M	-	-	-	B	M	B	B	-	B
6	I	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B
7	I	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B
9	I	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
10	I	M	M	B	B	B	M	B	B	M	-	-	B	B	B	M	M	I	-	-
11	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	M	B
12	I	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	M	B	B	-	B
13	I	-	-	B	B	B	M	B	B	B	B	M	M	M	B	M	M	M	B	B
14	I	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	-	B	B	B	M	M	B	B	M
15	M	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
16	I	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	-
17	B	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M	B	M	B	M	B	B
18	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
19	I	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B
21	I	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	NS	M	B	B	NS
22	I	B	-	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	-	B
23	B	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	M	B	-	-	-
24	M	I	I	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	M	M	-	-	-
25	I	-	-	B	B	B	M	B	B	B	B	-	B	B	B	-	B	-	-	B
26	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	NS
27	I	M	M	B	B	B	M	B	B	B	B	B	M	M	B	M	B	B	B	B
28	I	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	M	M	M	B	B
29	B	B	NS	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	M	B	B	B	B
30	I	M	M	B	M	M	M	B	B	B	B	B	B	B	M	M	B	I	B	M

B.3. Tabla de resultados e ítem.

Se trata de las tablas de la página siguiente, en las que además de ver para cada ítem si los alumnos han respondido correctamente, incorrectamente, la han dejado incompleta, han contestado “no sé” o la han dejado en blanco, se ha clasificado los ítems según el tipo de interpretación del término literal.

Resultado/ ítem	1	2	3	4	5	6	7	8a'	8a''	8b'	8b''	9a'	9a''	9a'''	9b'	9b''	9b'''	10	11	12
Bien	27	26	21	14	19	10	8	26	27	25	25	27	26	26	25	24	27	12	0	19
Mal	0	1	1	3	8	6	1	1	0	2	2	0	1	1	2	3	0	13	11	7
Incompleto	0	0	5	10	0	11	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	15	0
No Sabe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
En blanco	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Resultado/ ítem	13a	13b	13c	13d	13e	13f	13g	13h	13i	14a	14b	15a	15b	15c	16a	16b	17a	17b	18	19
Bien	26	25	18	23	14	12	22	23	12	26	11	27	25	20	27	26	26	19	11	3
Mal	1	1	5	4	9	13	3	3	11	1	14	0	2	6	0	1	1	5	5	3
Incompleto	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	21
No Sabe	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0
En blanco	0	1	4	0	4	2	2	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	1	8	0

Resultado/ ítem	20a	20b	21a	21b	21c	21d	22	23a	23b	23c	23d	24a	24b	25	26a	26b	27	28	29
Bien	11	5	27	26	26	18	27	25	24	22	18	20	22	26	7	21	17	19	18
Mal	12	16	0	1	1	9	0	1	2	3	4	6	4	1	18	6	5	1	3
Incompleto	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
No Sabe	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	2
En blanco	2	3	0	0	0	0	0	0	0	1	4	1	1	0	1	0	3	7	4

- Puramente numérico
- Letra evaluada
- Letra ignorada
- Letra como objeto
- Letra como incógnita específica
- Letra como número generalizado
- Letra como variable

B.4. Tabla según el resultado y alumno.

Tabla en la que se recoge el número total de respuestas correctas, incorrectas, incompletas, que indicó que no sabía contestar y que dejó en blanco cada alumno, así como el tanto por cien en función del total de preguntas.

Resultado/ alumno	B	B (%)	M	M (%)	I	I (%)	NS	NS (%)	En blanco	En blanco (%)
1	40	67,80	14	23,73	5	8,47	0	0	0	0
2	47	79,66	6	10,17	5	8,47	0	0	1	1,69
3	36	61,02	15	25,42	4	6,78	4	6,78	0	0
4	38	64,41	14	23,73	3	5,08	0	0	4	6,78
6	51	86,44	4	6,78	4	6,78	0	0	0	0
7	48	81,36	7	11,86	3	5,08	0	0	1	1,69
9	50	84,75	2	3,39	5	8,47	0	0	2	3,39
10	37	62,71	10	16,95	3	5,08	0	0	9	15,25
11	46	77,97	5	8,47	5	8,47	0	0	3	5,08
12	48	81,36	5	8,47	5	8,47	0	0	1	1,69
13	38	64,41	14	23,73	4	6,78	0	0	3	5,08
14	38	64,41	13	22,03	5	8,47	0	0	3	5,08
15	50	84,75	5	8,47	4	6,78	0	0	0	0
16	48	81,36	4	6,78	5	8,47	0	0	2	3,39
17	40	67,80	17	28,81	2	3,39	0	0	0	0
18	46	77,97	9	15,25	4	6,78	0	0	0	0
19	50	84,75	5	8,47	4	6,78	0	0	0	0
21	48	81,36	3	5,08	5	8,47	3	5,08	0	0
22	45	76,27	1	1,69	5	8,47	0	0	8	13,56
23	42	71,19	10	16,95	3	5,08	0	0	4	6,78
24	39	66,10	14	23,73	3	5,08	0	0	3	5,08
25	36	61,02	13	22,03	4	6,78	0	0	6	10,17
26	47	79,66	5	8,47	2	3,39	5	8,47	0	0
27	48	81,36	7	11,86	2	3,39	1	1,69	1	1,69
28	41	69,49	9	15,25	5	8,47	0	0	4	6,78
29	40	67,80	13	22,03	4	6,78	2	3,39	0	0
30	34	57,63	20	33,90	5	8,47	0	0	0	0

B.5. Tabla para cada uno de los alumnos según el resultado y el tipo de interpretación del término independiente.

Se trata de las tablas que se encuentran en las páginas siguientes en las que, para cada alumno, se pueden observar sus resultados según el tipo de interpretación de las letras.

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 1	Bien	8	6	4	12	12	0	0
	Mal	0	1	1	1	9	1	1
	Incompleto	0	0	0	0	2	1	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 2	Bien	8	6	4	12	18	0	0
	Mal	0	1	1	1	2	1	0
	Incompleto	0	0	0	0	2	1	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	1	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 3	Bien	7	7	4	8	10	0	0
	Mal	1	0	1	2	10	1	0
	Incompleto	0	0	0	0	2	1	1
	No sabe	0	0	0	3	1	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 4	Bien	7	7	4	9	12	0	0
	Mal	0	0	1	4	7	2	0
	Incompleto	0	0	0	0	1	0	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	1	0	0	0	3	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 6	Bien	8	7	5	12	19	1	0
	Mal	0	0	0	1	3	0	0
	Incompleto	0	0	0	0	1	1	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 7	Bien	8	7	4	13	17	0	0
	Mal	0	0	1	0	4	1	1
	Incompleto	0	0	0	0	1	1	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	1	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 9	Bien	8	7	5	11	19	1	0
	Mal	0	0	0	0	2	0	0
	Incompleto	0	0	0	0	2	1	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	2	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 10	Bien	8	6	4	8	11	0	0
	Mal	0	1	1	2	5	0	1
	Incompleto	0	0	0	0	1	2	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	3	6	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 11	Bien	8	7	5	10	16	0	0
	Mal	0	0	0	2	2	1	0
	Incompleto	0	0	0	0	3	1	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	1	2	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 12	Bien	7	7	5	13	15	1	0
	Mal	1	0	0	0	4	0	0
	Incompleto	0	0	0	0	3	1	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	1	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 13	Bien	6	6	5	11	12	0	0
	Mal	2	1	0	2	7	1	1
	Incompleto	0	0	0	0	1	1	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	3	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 14	Bien	8	4	3	12	12	0	0
	Mal	0	2	2	1	8	0	0
	Incompleto	0	0	0	0	1	2	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	1	0	0	2	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 15	Bien	8	7	5	13	18	0	0
	Mal	0	0	0	0	3	2	0
	Incompleto	0	0	0	0	2	0	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 16	Bien	8	6	5	11	17	1	0
	Mal	0	1	0	1	2	0	0
	Incompleto	0	0	0	0	3	1	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	1	1	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 17	Bien	5	7	4	10	13	2	0
	Mal	3	0	1	3	9	0	1
	Incompleto	0	0	0	0	1	0	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 18	Bien	8	7	4	9	18	1	0
	Mal	0	0	1	4	4	0	0
	Incompleto	0	0	0	0	1	1	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 19	Bien	8	7	4	13	19	0	0
	Mal	0	0	1	0	2	1	1
	Incompleto	0	0	0	0	2	1	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 21	Bien	8	6	5	12	16	1	0
	Mal	0	1	0	1	1	0	0
	Incompleto	0	0	0	0	3	1	1
	No sabe	0	0	0	0	3	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 22	Bien	8	7	5	10	17	0	0
	Mal	0	0	0	0	0	1	0
	Incompleto	0	0	0	0	1	1	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	3	5	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 23	Bien	8	6	5	12	9	2	0
	Mal	0	1	0	1	7	0	1
	Incompleto	0	0	0	0	3	0	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	4	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 24	Bien	8	6	4	9	12	0	0
	Mal	0	1	1	4	5	2	1
	Incompleto	0	0	0	0	3	0	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	3	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 25	Bien	7	6	4	11	10	0	0
	Mal	1	1	1	2	6	1	0
	Incompleto	0	0	0	0	1	1	1
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	6	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 26	Bien	8	6	4	11	18	0	0
	Mal	0	0	0	1	2	1	1
	Incompleto	0	0	0	0	1	1	0
	No sabe	0	1	1	1	2	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 27	Bien	7	7	4	13	17	1	0
	Mal	1	0	1	0	5	0	0
	Incompleto	0	0	0	0	0	1	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	1
	En blanco	0	0	0	0	1	0	0

Alumno 28		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 28	Bien	7	6	5	10	13	1	0
	Mal	1	1	0	2	4	0	1
	Incompleto	0	0	0	0	3	1	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	1	3	0	0

Alumno 29		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 29	Bien	6	6	4	9	13	2	0
	Mal	2	0	1	4	7	0	0
	Incompleto	0	0	0	0	2	0	1
	No sabe	0	1	0	0	1	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

Alumno 30		Puramente numérico	Evaluada	Ignorada	Objeto	Incógnita específica	Número generalizado	Variable
Alumno 30	Bien	7	6	4	10	7	0	0
	Mal	1	1	1	3	12	1	1
	Incompleto	0	0	0	0	4	1	0
	No sabe	0	0	0	0	0	0	0
	En blanco	0	0	0	0	0	0	0

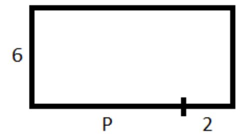
B.6. Tabla de porcentaje de los errores.

Se trata de las tablas que se encuentran a continuación en las que se puede apreciar para cada ítem los errores que se han cometido y en qué tanto por cien han sido hechos. Si el ítem ha sido realizado correctamente por todos los alumnos se indica con un guion.

Ítem 1: Si *a = 2* y *b = 3*, ¿qué puedes decir de *a + b*?	**Ítem 2:** Si *a = 3*, ¿qué puedes decir de *4a*?	**Ítem 3:** ¿Qué significa *5n*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.	**Ítem 4:** ¿Qué significa *e3*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.	**Ítem 5:** ¿Qué significa *nm*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.	**Ítem 6:** ¿Cuál de las siguientes expresiones escribirías para representar *e + 2 multiplicado por 3*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.
-	$a = 3/4$ (3’7%)	$5\ y\ n$ (3’7%) Falta: $n + n + n + n + n$ (18’5%)	$e * e * e$ (3’7%) $e\ y\ 3$ (7’4%) Falta: $e + e + e$ (37%)	$25 * 26$ (25’9%) $n\ y\ m$ (3’7%)	$e + 6$ (7’4%) $e + 2 * 3$ (11’1%) Falta: $3e + 6$ (40’7%)

Ítem 7: ¿Cuál de las siguientes expresiones escribirías para representar *2 sumado a 5a*? Señala **todas** las respuestas que creas que son correctas.	**Ítem 8a’:** Rellena los huecos siguiendo la regla indicada. x → x + 2 6 →	**Ítem 8a’’:** Rellena los huecos siguiendo la regla indicada. x → x + 2 r →	**Ítem 8b’:** Rellena los huecos siguiendo la regla indicada. x → 4x 3 →	**Ítem 8b’’:** Rellena los huecos siguiendo la regla indicada. x → 4x t →	**Ítem 9a’:** *Sumar 4 a n* puede ser escrito como *n + 4*. Suma 4 … a 8.
7a (3’7%) Falta: $5a\ más\ 2$ (59’3%)	4 (3’7%)	-	$4/3$ (3’7%) $6x$ (3’7%) $3x$ (3’7%)	tx (3’7%)	8 (3’7%)

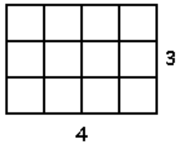
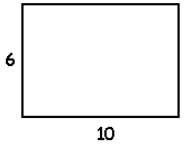
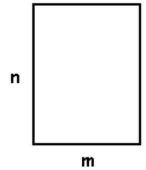
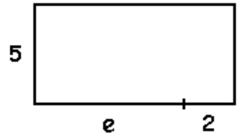
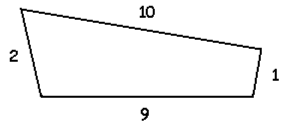
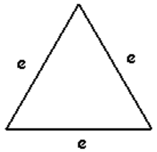
Ítem 9a'': *Sumar 4 a n* puede ser escrito como *n + 4*. Suma 4 … a n + 5.	**Ítem 9a''':** *Sumar 4 a n* puede ser escrito como *n + 4*. Suma 4 … a 3n.	**Ítem 9b':** *Multiplicar n por 4* puede ser escrito como *4n*. Multiplica 4 … por 8.	**Ítem 9 b'':** *Multiplicar n por 4* puede ser escrito como *4n*. Multiplica 4 … por n + 5.	**Ítem 9b''':** *Multiplicar n por 4* puede ser escrito como *4n*. Multiplica 4 … por 3n.	**Ítem 10:** Dadas: n + 1; n + 4; n – 3; n; n -7. Indica cuál es la mayor, la menor, por qué y si no se puede contestar, di por qué.
$9n$ (3'7%)	$7n$ (3'7%)	8 (3'7%) $4n + 8$ (3'7%)	$32(n + 5)$ (3'7%) $8(n + 5)$ (3'7%) 20n (3'7%)	-	Contestan la mayor, la menor y "no sé" a si no se puede. (33'3%) $n\ es\ cualquier\ número.$(11'1%) $n\ puede\ ser\ positivo\ o\ negativo.$ (3'7%)

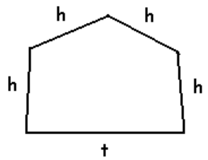
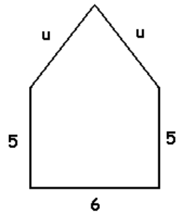
Ítem 11: ¿Qué es mayor *2n* o *n + 2*? Explica tu respuesta.	**Ítem 12:** ¿Cómo escribirías el área de este rectángulo?  	**Ítem 13a:** La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada: 2a + 5a	**Ítem 13b:** La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada: 2a + 5b	**Ítem 13c:** La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada: (a + b) + a	**Ítem 13d:** La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada: 2a + 5b + a
$2n$ por ser una multiplicación (37%)	$6(2p); (2p)6; p2 * 6$ (11'1%) $6p$ (3'7%) $6p + 2$ (3'7%) $6^2 + 2^2 = 40$ (3'7%)	$6a$ (3'7%)	$a + \frac{5}{2}b$ (3'7%)	$a^2 + ba$ (3'7%) $No\ se\ puede$ (14'8%)	$3a + 5$ (3'7%) $3a + b$ (3'7%) $No\ se\ puede$ (3'7%) $2a^2 + 5b$ (3'7%)

Ítem 13e: La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada: (a – b) + b	**Ítem 13f:** La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada: 3a – (b + a)	**Ítem 13g:** La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada: a + 4 + a – 4	**Ítem 13h:** La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada: 3a – b + a	**Ítem 13i:** La expresión *a + 3a puede ser escrita de forma simplificada como 4a*. Escribe de la forma más simplificada (a + b) + (a – b)	**Ítem 14a:** Señala cuándo son ciertas las siguientes igualdades A + B + C = C + B + A Siempre Nunca A veces, cuando ___
$No\ se\ puede$ (14’8%) $a-2b$ (11’1%) $a+b$ (3’7%) $ab-b$ (3’7%)	$No\ se\ puede$ (22’2%) $4a-b$ (18’5%) $b+2a$ (3’7%) $3-b$ (3’7%)	$No\ se\ puede$ (3’7%) $2a+8$ (3’7%) a^2-4 (3’7%)	$No\ se\ puede$ (11’1%)	$No\ se\ puede$ (3’7%) $2a$ (3’7%) $a^2-b^2+(a+b)^2$ (3’7%) $2a+a-b+b+a$ (3’7%) a^2-b^2 (3’7%)	$A\ veces$ (3’7%)

Ítem 14b: Señala cuándo son ciertas las siguientes igualdades L + M + N = L + P + N Siempre Nunca A veces, cuando ___	**Ítem 15a:** Si a + b = 43 a + b + 2 =	**Ítem 15b:** Si n – 246 = 762 n – 247 =	**Ítem 15c:** Si *e + f = 8* e + f + g =	**Ítem 16a:** ¿Qué puedes decir de *u* si *u = v + 3* y *v = 1*?	**Ítem 16b:** ¿Qué puedes decir de *m* si *m = 3n + 1* y *n = 4*?
$Nunca$ (51’9%) $A\ veces$ (sin $explicación$) (7’4%) $Simepre$ (3’7%)	-	76 (3’7%) 763 (3’7%)	$8g$ (7’4%) 12 (11’1%)	-	$m=\frac{7}{3}$ (3’7%)

Ítem 17a: ¿Qué puedes decir de *a* si *a + 5 = 8*?	**Ítem 17b:** ¿Qué puedes decir de *b* si *b + 2 = 2b*?	**Ítem 18:** ¿Qué puedes decir de *r* si *r = s + t* y *r + s + t = 30*?	**Ítem 19:** ¿Qué puedes decir de *c* si *c + d = 10* y *c es menor que d*?	**Ítem 20a:** Si *a = b + 3*, ¿qué pasa con a si b aumenta en 2?	**Ítem 20b:** Si *f = 3g + 1*, ¿qué pasa con f si g aumenta en 2?
$a-3$ (3'7%)	$b\ está\ multiplicado\ por\ 2$ (3'7%) $b+2$ (3'7%) $b+2b+2$ (3'7%) $blog2=2$ (3'7%)	$r=30-(s+t)$ (3'7%) $2r=30$ (3'7%) $r=30-r$ (7'4%) $r=20$ (3'7%) $r\ es\ menor\ que\ s\ y\ t$ (3'7%)	1,2,3,4 (40'7%) 0,1,2,3,4 (11'1%) 1 (7'4%) 4 (11'1%) $c=10-d$ (3'7%) $c\leq 4$ y $d>5$ (3'7%)	$a=2b+3$ (22'2%) $a=5$ (3'7%) $a+b=2b+3$ (3'7%) $2b=2a+6$ (3'7%) $a=b+2$ (3'7%) $a>5$ (3'7%) $a\ disminuye\ 2$ (3'7%)	$f>7$ (3'7%) $Sumar\ 2$ (11'1%) $2f=6g+2$ (7'4%) $f+2=3g+1$ (3'7%) $f=6g+1$ (7'4%) $f=3g+2$ (3'7%) $f+3g=6g+1$ (3'7%) $a\ disminuye\ 2$ (3'7%) $5g=\frac{5}{3}g+\frac{5}{3}$ (3'7%)

Ítem 21a: Calcula el área de:  	**Ítem 21b:** Calcula el área de:  	**Ítem 21c:** Calcula el área de:  	**Ítem 21d:** Calcula el área de:  	**Ítem 22:** Calcula el perímetro de esta figura.  	**Ítem 23a:** Este cuadrado tiene los lados de longitud g. Así, su perímetro puede ser escrito como *P = 4g*. ¿Cómo se pueden escribir los perímetros de: 
-	$12 + 20$ (3’7%)	$(m * 2)(n * 2)$ (3’7%)	$5e + 2$ (3’7%) $5 * 2e$ (18’5%) $(4 + e) + 10$ (3’7%)	-	$\frac{\frac{1}{2}e*h}{2}$ (3’7%)

Ítem 23b: Este cuadrado tiene los lados de longitud g. Así, su perímetro puede ser escrito como *P = 4g*. ¿Cómo se pueden escribir los perímetros de: 	**Ítem 23c:** Este cuadrado tiene los lados de longitud g. Así, su perímetro puede ser escrito como *P = 4g*. ¿Cómo se pueden escribir los perímetros de: 	**Ítem 23d:** Este cuadrado tiene los lados de longitud g. Así, su perímetro puede ser escrito como *P = 4g*. ¿Cómo se pueden escribir los perímetros de:  Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados, todos de longitud 2.	**Ítem 24a:** En una figura como esta se pueden hallar el número de diagonales que salen de un vértice restando 3 al número de lados. Una figura con 57 lados tiene _______ diagonales.	**Ítem 24b:** En una figura como esta se pueden hallar el número de diagonales que salen de un vértice restando 3 al número de lados. Una figura con k lados tiene _______ diagonales.	**Ítem 25:** Si Juan tiene J canicas y Pedro tiene P canicas, ¿qué puedes escribir sobre el número de canicas que tienen entre los dos?
$A =$ (3'7%) $P = 3ht$ (3'7%)	$A =$ (3'7%) $P = 6 + 25 + u^2$ (3'7%)	$26 * 2$ (7'4%) $26 + 2n$ (3'7%) $n = (2 *$ (3'7%)	3078 (3'7%) 22 (3'7%) 140 (3'7%) 27 (3'7%) 4 (3'7%) 53 (3'7%)	$k(k-3)$ (3'7%) $k * \frac{2}{5}$ (3'7%) n (3'7%) $\frac{k-3}{2}$ (3'7%)	JP (3'7%) $J:P$ (3'7%) J^P (3'7%) P^J (3'7%)

Ítem 26a: El sueldo base de María es de 100€ a la semana. Además le pagan 5€ más por cada hora extra trabajada. Escribe la ecuación que relaciona W y h:	**Ítem 26b:** El sueldo base de María es de 100€ a la semana. Además le pagan 5€ más por cada hora extra trabajada. ¿Cuál sería el sueldo total de una semana si ha trabajado 4 horas extras?	**Ítem 27:** En una pastelería, cada pastel cuesta p euros y cada bollo cuesta b euros. Si se compran 4 pasteles y 3 bollos, ¿qué significa *4p + 3b*?	**Ítem 28:** Si la ecuación $(x+1)^3+x=349$ es cierta cuando $x=6$. ¿qué valor de x hará que la ecuación $(3x+1)^3+3x=349$ sea cierta? Explicación:	**Ítem 29:** En una papelería cada lápiz azul cuesta 5 céntimos y cada lápiz rojo cuesta 6 céntimos de euro. Un día, me gasto en total 90 céntimos y compro algunos lápices azules y algunos rojos. Si llamamos b al número de lápices azules y r al número de lápices rojos. ¿Qué puedes escribir sobre b y r?
$W + h$ (18’5%) $W + 5h$ (18’5%) $100W + 5h$ (14’8%) $W + h = 100 + 5h$ (3’7%) $100 + 5/h$ (3’7%) $5h + W = 100 + 5h$ (3’7%) Wh (3’7%)	112 (3’7%) $100W + 4 * 5h$ (3’7%) $4w = 100$ (3’7%) $W + 4h$ (3’7%) $W + 5 * 4$ (3’7%)	$Compran\ 4\ pasteles\ y\ 3\ bollos$ (18’5%)	-	$b + r = 90$ (11’1%) $5b + 6r = 0'90$ (3’7%) $5b + 6r$ (3’7%)

Anejo C. Dificultades y errores

Análisis completo de las dificultades con las que se han encontrado los alumnos y errores que han cometido al realizar el test.

- **Ítem 1.**

Se trata de un ítem donde la interpretación de la letra es como evaluada y el nivel de entendimiento alcanzado para poder contestarla es el 2. Debido a que los alumnos con los que se trabaja ya tienen unos conocimientos bastante asentados del álgebra, todos contestan bien esta pregunta. Algunos responden directamente que el resultado es 5, mientras que algunos dejan indicada la operación $2 + 3$ antes de dar el resultado.

- **Ítem 2.**

Al igual que en el ítem anterior, nos encontramos ante uno cuya interpretación de la letra es evaluada, pero esta vez de nivel 1. Excepto una alumna, el resto de los encuestados ha contestado correctamente a la pregunta dado que están acostumbrados a realizar este tipo de operaciones. La alumna 14, que es quien no lo ha contestado correctamente, lo que hizo fue igualar $4a = 3$ y de ahí despejar a, en lugar de sustituir $a = 3$ en $4a$. Cabe destacar que esta alumna fue una de las entrevistadas y cuando se le preguntó por este ítem supo reconocer su error y modificarlo para contestar correctamente, entendiendo perfectamente dónde se había equivocado y cómo se corregía.

- **Ítem 3.**

Aproximadamente tres cuartos de los alumnos contestaron correctamente este ítem. Los que dieron una respuesta incompleta fue porque no señalaron como correcta la opción $n + n + n + n + n$ y daban como solución válida únicamente $5 * n$. Esto es debido a no considerar que $5n$ significa 5 veces n y verlo tan solo como un producto. La única respuesta incorrecta que se dio a este ítem fue dada por la alumna 14 que consideró que $5n$ significaba $5\, y\, n$, debido probablemente, como afirman Kieran y Filloy (1989), a extender la generalización sobre la base de lo que era correcto en aritmética debe serlo en el álgebra, es decir, en aritmética la concatenación significa adición mientras que en álgebra es multiplicación.

- **Ítem 4.**

Pese a que esta pregunta es igual que la anterior, tan solo la mitad de los alumnos no han tenido dificultades a la hora de contestarla. Este aumento de los errores puede ser debido a que esta vez la letra aparece antes del número, y no detrás como suele ser usual en los libros de texto. Por tanto, este cambio de posición hace que a los alumnos les surjan dificultades a la hora de interpretar qué significa $e3$. Esta vez aumenta el número de alumnos que no visualizan $e3$ como $e + e + e$, siendo que la mayoría sí había contestado correctamente que $5n$ es $n + n + n + n + n$. En concreto es destacable la respuesta que da el alumno 17, el cuál si había respondido correctamente el ítem anterior, que escribe como otra posible respuesta $e * e * e$, error debido seguramente a que los alumnos están acostumbrados a visualizar el número detrás cuando se trata de una potencia y que al hacerlo en ordenador a veces no, si no se redacta correctamente, aparece como un número detrás de la letra y no como un superíndice. También es destacable la respuesta del alumno 3, el cual había contestado correctamente el ítem 3, pero en este caso señala $e3$ como $e\, y\, 3$, mostrando una confusión entre la concatenación como adición en aritmética y no como multiplicación en álgebra.

- **Ítem 5.**

A pesar de que este ítem presenta una mayor dificultad de interpretación debido a que estamos trabajando con dos números desconocidos, la mayoría de los alumnos responden correctamente. Esto puede ser debido a que en ninguna de las opciones mostradas se les especifica que hay n veces m o m veces n, es decir, $n * n * \dots (m\ veces)$ o $m * m * \dots (n\ veces)$. El error que se han cometido todos los alumnos que no han contestado correctamente a la pregunta ha sido considerar que nm significa $25 * 26$. Una de las alumnas la señaló como respuesta correcta y añadió en otras posibles respuestas $6 * -1'5$ y $\sqrt{2} * \pi$, indicando por tanto que no hace falta que sean consecutivos ni esos números concretos. En las entrevistas se les preguntó a los alumnos por su respuesta y dijeron que podía nm podía adaptar otros valores y que éstos no tenían por qué ser necesariamente consecutivos. La alumna 14 ha seguido cometiendo el error de generalizar la aritmética y considerar que nm significa $n\ y\ m$.

- **Ítem 6.**

En esta pregunta, que ya requiere un nivel 4 de entendimiento, ha habido dos errores claramente diferenciados. Por un lado están los alumnos que no terminan de completarla porque no desarrollan el producto y por tanto no señalan $3e + 6$ como respuesta correcta (11 de los 27 alumnos), por lo tanto, o no están reconociendo la propiedad distributiva o no dan un paso más en la operación y se quedan con el producto sin realizar como resultado correcto. El otro grupo de alumnos no contesta correctamente a la pregunta (3 alumnos de 27) porque al leer $e + 2\, multiplicado\ por$ 3 han creído que la multiplicación únicamente afectaba al 2 y no a la suma por completo, por lo que han dado respuesta del tipo $e + 6$ y $e + 2x3$.El alumno 1 es uno de los que cometió dicho error y ha explicado en la entrevista que se debió a ese detalle. Tan solo una alumna (número 30) ha contestado por un lado que es $3\, x\, (e + 2)$ y $3(e + 2)$ pero después ha señalado como correcta $e + 2x3$, este error puede ser debido a haber realiza mal el producto al tener un paréntesis.

- **Ítem 7.**

Tan solo un 25% de los alumnos han sido capaces de responder a esta pregunta correctamente. Casi un 60% la ha contestado bien parcialmente, dado que han dado como válidas las opciones $5a + 2$ y $2 + 5a$, pero no han señalado como correcta la opción $5a\ más\ 2$. Puede ser que la dificultad con la que se han encontrado el hecho de no estar acostumbrados a que se presenten las expresiones junto con palabras del lenguaje común, por lo que consideran que esta no es una posibilidad. Del resto de los alumnos es destacable la respuesta señalada por el alumno 7 ya que contesta que son posibles soluciones $5a + 2$ y $2 + 5a$ junto con $7a$, considerando que se pueden sumar los monomios. Este alumno, sin embargo, contesta correctamente casi por completo al ítem 13 en el que se pedía simplificar las expresiones. Podemos entender por tanto que ha sido un lapsus puntual.

- **Ítem 8a.**

Esta pregunta, junto con el ítem 8b, produjo mucha controversia a la hora de ser contestada ya que los alumnos no entendían lo que se les pedía. Esta posible dificultad ya se había tenido previamente en cuenta pues en otras ediciones de este test ya había surgido este problema, por lo que a la hora de realizar el test se intentó ser lo más claro posible y ceñirse a la forma de plantearlo que había utilizado Küchemann (1981). Debido a esta dificultad, tuve que explicitar a los alumnos que lo que se les pedía era que imitaran la operación que se realizaba en la primera fila.

Pese a esta pequeña dificultad, casi el total de los alumnos ha contestado bien a esta pregunta. Esto es debido a que se trata de un ítem bastante sencillo que combina una parte puramente numérica con otra en la que la letra se interpreta como objeto y, dado que estamos trabajando con alumnos de 4º ESO, conocen la notación algebraica y cómo operar con ella, al menos de manera sencilla. Alguno de los alumnos dejaba indicado que la solución del apartado 8a' era $6 + 2$, debido a que, seguramente, no vieran la necesidad de simplificar el resultado. Tan solo el alumno 17 ha contestado erróneamente este mismo apartado, dando como resultado 4. Cabe destacar que previamente había escrito 8 y que después lo ha tachado y escrito su nueva respuesta. Parece ser que lo que el alumno pretendía era utilizar un valor que sumado a 2 le diera 6. Sin embargo, este mismo alumno sí ha realizado correctamente el apartado 8a''.

- **Ítem 8b.**

Al igual que pasaba con la primera parte del ítem 8, los alumnos tuvieron las mismas dificultades en entenderlo. Una vez subsanadas únicamente 3 alumnos contestaron incorrectamente a este ítem. De nuevo el alumno 17 intenta, en el ítem 8b', buscar un valor para x tal que multiplicado por 4 le dé 3, en lugar de hacer $3 * 4$. Sin embargo, de nuevo vuelve a contestar correctamente al apartado 8b''. Lo mismo le ocurre a la alumno 25, el cual contesta bien al último apartado pero falla en el 8b', donde da por respuesta $6x$. Por último, la alumna 24 se equivoca en todo el apartado, ya que contesta $3x$ a la primera parte y tx a la segunda. Está considerando, por tanto, que la x del apartado anterior es la parte a imitar y no el multiplicar por 4.

- **Ítem 9a.**

Este parte del ítem 9 únicamente la ha respondido mal la alumna 29, que es una de las que mayores dificultades ha tenido a la hora de realizar el test. En este apartado se le pide que sume 4 en cada caso y sus respuestas son: 8 en el que es puramente numérico, por tanto, no está realizando ninguna operación, 9n en el apartado 9a'' donde tenía que sumar 4 a $n + 5$ y, por último, 7n donde había que sumar 4 a $3n$. En estos dos últimos casos su error deriva de sumar los términos independientes y multiplicarlos por el término literal.

Cabe destacar que 8 de los 26 alumnos que han contestado correctamente han dado la solución como $8 + 4$ ó $n + 5 + 4$, respectivamente, las cuales se han dado por correctas ya que lo son. Estos alumnos seguramente no hayan visto la necesidad de simplificar la solución.

- **Ítem 9b.**

El primer apartado, el ítem 9b', lo han realizado incorrectamente dos alumnos pese a ser puramente numérico. La alumna 29 contestando, al igual que en el apartado 9a', que la solución es 8. Por tanto, no está realizando ninguna operación. Y el alumno 13, el cual contesta 4n + 8, pues parece ser que se confunde leyendo el enunciado y cree que hay que sumarle 4n en vez de multiplicar por 4.

El apartado 9b'' lo contestan mal 3 alumnos, los cuales dan respuestas variadas. La alumna 4 responde que la solución es 32 (n + 5), posiblemente condicionada por el apartado anterior donde la solución era 32, por tanto, consideramos que ha sido un fallo puntual y que realmente sabe lo que está haciendo. El alumno 13 contesta inicialmente bien pero después cambia el 20 por un 5. Podemos interpretar que primero hizo la multiplicación, pero después pensó que había que sumar 4n, igual que había hecho en el apartado 9b'', hecho que también realizó mal. Por último, la alumna 29 contesta 20n, siguiendo el mismo procedimiento que había hecho en el apartado 9a'' que es sumar los números y multiplicarlos por la letra.

El apartado 9b''' ha sido realizado correctamente por todos los alumnos. Hecho debido seguramente a que, debido a que estamos trabajando con alumnos de 4º ESO, están muy familiarizados con el producto de un número por una letra, sin tener que realizar ninguna operación más.

- **Ítem 10.**

Esta pregunta, conforme estaba planteada, suscitó muchas dudas. Como se comentó en el apartado *6.1 Diseño y aplicación del test,* se decidió cambiar la forma de plantearla, aproximándola a como lo había hecho en una investigación comentada en el artículo de Ruano, Socas y Palarea (2015). Por ello, además de preguntar cuál de las expresiones era la mayor y cuál la menor, se pedía que dieran, en el caso de que no se pudiera contestar, una explicación.

Este hecho desencadenó que un tercio de los alumnos respondiera cuál era la expresión mayor (apartado a) y cuál la menor (apartado b) y contestara a "*No se pueden contestar los apartados a. y b. porque …*" con "… no se.", "… no sabemos qué número es n, solo que es el mismo en todos.", "… no sabemos el valor de n", "… no se sabe si n es < o > a 0", "… no sabemos a qué equivale n y la ecuación [debería poner expresión] no está igualada a ningún valor.". Por tanto, podemos deducir que estos alumnos sustituyen ciertos valores para n pero que, debido a que normalmente se han de contestar todas las preguntas de un test con algún tipo de razonamiento, ven la necesidad de que el apartado c tenga una solución diferente a "sí se puede", lo que les hace dudar y contestar lo escrito anteriormente. Esto puede ser provocado por la continua repetición de los libros de texto de problemas donde todos los apartados tienen una solución intuitivamente correcta. Por último, comentar que el alumno que dice que no se puede saber ya que no está igualo a nada es una de las dificultades que comentan Kieran y Filloy (1989), donde los estudiantes ven como imcompletas las expresiones al no estar igualadas a nada y por tanto necesitan igualarlas para darle sentido.

Del resto de los alumnos, casi el 50% contesta bien al ítem, pero cabe destacar que una de las alumnas (la número 22) le da únicamente el valor 0 a la n, por lo que obtiene una respuesta correcta para este apartado. Este tipo de razonamiento, como veremos más adelante, no es suficiente para contestar otro tipo de preguntas como es el siguiente ítem. La mayoría de los alumnos le han dado valores a n y de ahí han deducido qué expresión es mayor y cuál es menor, interpretándola como letra evaluada.

Los cuatro alumnos (3, 14, 19 y 30) que contestan mal este ítem ya que únicamente responden al apartado c lo hacen con las respuestas: "n es cualquier número", "tú puedes poner cualquier valor en n para que esa expresión sea mayor que las demás", "n puede ser positivo o negativo" y "a pesar de que haya número negativos más grande que todos, el número mayor va a depender del número que pongas delante", respectivamente. Como podemos observar, la primera y la tercera respuesta van encaminadas a darle cualquier valor a n, pero no han comprobado qué ocurre con ellos. La segunda y la cuarta se centran en el número mayor, haciendo lo mismo que los anteriores.

Por último, la alumna 26 ha dejado en blanco esta pregunta.

- **Ítem 11.**

Ninguno de los alumnos es capaz de contestar correctamente a este ítem, el único que estudia plenamente la letra como variable. Cabe destacar que, como se ha comentado anteriormente, cuando realizaron el test todavía no habían estudiado las inecuaciones, factor que puede afectar en sus contestaciones.

Casi un 56% de los encuestados ha sido capaz de dar una respuesta incompleta a la pregunta. Dentro de estas respuestas se distinguen dos tipos de contestaciones, los que han contestado que depende del valor que se le dé a n (6 de los 15 alumnos que no han dado una respuesta completa) y los que han probado valores y han sido capaces de obtener resultados donde $n + 2$ es mayor y otros donde $2n$ es mayor (9 de los 15 alumnos). En este caso, la mayoría ha utilizado un número positivo lo suficientemente grande para que le salga $2n$ mayor y el número 0 o el 1 para que le salga $n + 2$ superior. Solo los alumnos 6, 9 y 12 le han dado valores negativos a la n.

Prácticamente el resto de los alumnos (10 alumnos de los 27) la ha contestado mal. Estos alumnos han dado por hecho que $2n$ es superior ya que se realiza una multiplicación. Unos lo han deducido por simple observación de la operación (7 de los 10 alumnos) y otros porque han sustituido valores en los esa expresión termina resultando mayor (los 3 restantes).

Cabe destacar la respuesta del alumno 1, que contesta que ninguna es mayor, citando literalmente, "porque si n es $0, 0 * 2$ es $0. 0 + 2$ es 2.". Como vemos en la entrevista este alumno ha sido capaz de dar la respuesta correcta, indicando cuál es el momento en que se hace el cambio de una expresión a la otra. Con ello ha mostrado un dominio superior del álgebra, llegando a realizar este ítem considerado de nivel 4 de entendimiento por Küchemann (1981).

Por último, la alumna 27 contesta que no lo sabe.

- **Ítem 12.**

Esta pregunta tampoco no presenta excesivas dificultades, únicamente 6 de los alumnos se han equivocado al contestarla y una la ha dejado en blanco (la alumna 10). De entre las respuestas erróneas encontramos que el error más frecuente, realizado por 3 alumnos (1, 13 y 25), ha sido contestar $6(2p)$, $(2p)6$ y $p2 * 6$. Gracias a que a uno de estos alumnos es a quien se le realizó la entrevista, pudimos comprobar como a final de curso él mismo supo autocorregirse y dar con la respuesta idónea. Otra de las respuestas incorrectas, dada por el alumno 3, fue contestar que el área era $6p$. Otro de los alumnos, el número 4 contestó $6 * p + 2$, por lo que entendemos que sí tenía las nociones correctas para calcular el área pero que o bien olvidó el paréntesis o bien no creyó necesario su uso. Otra de las respuestas fallidas fue dada por la alumna 30, la cual contestó: $6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40$, ignorando completamente la letra.

- **Ítem 13a.**

Dado que se trata de un ítem sencillo de simplificación y con notación que están acostumbrados a utilizar prácticamente todos los alumnos lo contestaron correctamente. Tan solo el alumno 17 se equivocó contestando 6a en lugar de 7a, por lo que podemos intuir que es un error de cálculo.

- **Ítem 13b.**

Este ítem no se podía simplificar ya que los monomios tenían términos literales diferentes. El alumno 9 deja este apartado en blanco, no se sabe bien si es porque considera que no debe simplificarse (y no escribe “no” como indicaba el enunciado en el caso de que no pudiera simplificarse) o porque no sabe hacerlo. El único alumno que la contesta y falla es el número 17, que en general es uno de los que más problemas presenta en el test. Este alumno da como resultado $a + \frac{5}{2}b$, por lo que se entiende que ha dividido la expresión entre 2 para dejar sola a la a.

- **Ítem 13c.**

Este ítem que se complicaba introduciendo el paréntesis lo han dejado en blanco cuatro alumnos (9, 11, 22 y 28), de los cuales tres (los tres últimos) sí han escrito “no” en otros apartados, por lo que podemos entender que o les ha resultado complicado a primera vista y lo han dejado para repasarlo más adelante, pero después nunca lo hicieron o sabían que se podía simplificar pero no sabían cómo. Otros cuatro alumnos han respondido que no se podía simplificar la expresión. Por último, destacable es la respuesta de la alumna 16 que ha confundido $(a + b) + a$ con $(a + b) * a$ y ha realizado el producto. Se podría entender como un fallo puntual si no fuera porque en el apartado e ha dado una respuesta similar, por lo que podemos entender que esta alumna interpreta el utilizar un paréntesis con tener que realizar una multiplicación.

- **Ítem 13d.**

En este apartado hay cuatro errores diferentes dados por cuatro alumnos. La alumna 11 contesta 3a + 5, cuando la respuesta correcta era 3a + 5b, por lo que posiblemente se deba a que se ha olvidado puntualmente de colocar la letra. El alumno 13 contesta 3a + b, olvidándose del 5, dado que no hay más monomios con b puede haber sido, al igual que en el caso anterior, de un olvido puntual. El alumno 18 sigue considerando que no se puede simplificar más la expresión (a partir de la pregunta 13b ha contestado que no se puede, por lo que quizá se ha cansado de realizar el ejercicio y ha dejado de pensar). La alumna 24 ha contestado $2a^2 + 5b$, confundiendo la suma como un producto, aunque también mal hecho, ya que solo considera que se multiplicarían los términos que tienen la misma letra. Eso o bien que considera que la suma de dos letras da el producto de las mismas, aunque en el resto de apartados no realiza la misma operación.

- **Ítem 13e.**

Esta pregunta es una de las más falladas en este apartado, con un total de nueve respuestas incorrectas y cuatro en blanco. De las respuestas erróneas cuatro se deben a haber considerado que la expresión no se podía simplificar. Entre las malas contestaciones encontramos $a - 2b$ (ó $-2b + a$) dada por los alumnos 14, 17 y 26. Estos alumnos han considerado que el paréntesis afectaba a la b de fuera, por lo que se le cambiaba el signo. Otras de las respuestas incorrectas son $a + b$ dada por la alumna 7 y $ab - b$ dada por la alumna 16.

- **Ítem 13f.**

Este apartado es el que peor han hecho, con un total de catorce respuestas incorrectas y dos en blanco (alumnos 10 y 22), las cuales suponemos que no han sabido contestar aunque posiblemente supieran que sí se podía simplificar, ya que no han escrito "no". Además, el alumno 22 ha contestado correctamente y posteriormente lo ha tachado. Un total de 6 alumnos ha contestado que no se puede simplificar (alumnos 2, 4, 18, 25, 29 y 30). Aunque cabe destacar que el alumno 4 lo había realizado correctamente y posteriormente lo ha tachado. Cinco de los catorce alumnos (3, 12, 15, 17 y 23) han contestado que el resultado era $4a - b$, ignorando que el paréntesis afecta a todo lo que hay en su interior, error muy común y que se arrastra durante muchos años si no se trabaja sobre él. Las otras dos respuestas erróneas han sido contestar $b + 2a$ por la alumna 16 y $3 - b$ por la alumna 24. Ambos fallos pueden deberse a ir con prisa y por un lado olvidarse del signo delante de la b y por otro de la letra a.

- **Ítem 13g.**

Prácticamente todos los alumnos han contestado bien a este apartado. El alumno 18, como ya hemos dicho, parece estar cansado del ejercicio y no querer pensar más en su contestación por lo que sigue contestando que no se puede simplificar. Los alumnos 10 y 22 la han dejado en blanco. La no contestación de la alumna número 10 puede ser debida a que no sepa cómo simplificarlo pese a que sí intuyan que se debe hacer, sin embargo el alumno 22 parece que también se ha cansado y ha decidido dejar gran parte del ejercicio en blanco. La alumna 4 contesta $2a + 8$, ignorando el signo delante del 4, pudiendo ser su error un despiste. Por último, es destacable la contestación dada por la alumna 30 que responde $a^2 - 4$, confundiendo $a + 4 + a - 4$ con la identidad notable ya conocida por los alumnos de este curso $(a + 4)(a - 4)$.

- **Ítem 13h.**

En esta parte del ítem tres alumnos (18, 24 y 30) han respondido que no se podía simplificar. Como se ha comentado, el alumno 18 sigue sin intentar contestar al ejercicio. El alumno 22, siguiendo el mismo patrón, la ha dejado en blanco. El resto de alumnos la ha respondido correctamente ya que se trata de un apartado sencillo en el que se combinan dos letras pero no aparece ningún paréntesis.

- **Ítem 13i.**

Este último apartado es otro de los que más problemas ha ocasionado, tan solo doce de los veintisiete alumnos lo ha respondido bien. Tres alumnos (10, 16 y 22) lo han dejado en blanco, la alumna 26 ha contestado que no sabía cómo responderlo y otros siete alumnos ha respondido que no se puede simplificar. De entre el resto de errores vemos que tanto la alumna 2 como la 24 y la 29 han intentado sacar llegar a una identidad notable, pues han confundido el uso de paréntesis con una multiplicación, es decir, han confundido $(a + b) + (a - b)$ con $(a + b)(a - b)$. Esto puede ser debido a que están acostumbrados a ver el paréntesis solamente para expresar este tipo de identidades notables. El otro error cometido por el alumno 3 ha sido contestar a en lugar de $2a$, posiblemente debido a un error de cálculo al que no hay que prestarle un mayor interés.

- **Ítem 14a.**

Esta parte del ítem 14 la responden sin problemas todos los alumnos encuestados, a excepción de la alumna 14 que contesta “a veces” pero no da ninguna explicación. Justo es a esta alumna a una a las que se le hizo la entrevista. Cuando se llegó a esta pregunta la se quedó pensando cuál podía ser la respuesta correcta y tras divagar un poco, dedujo que eran igual siempre.

- **Ítem 14b.**

Esta pregunta la han contestado correctamente un 41% de los alumnos. Casi la mitad de los alumnos ha respondido que nunca podrían ser iguales las expresiones L + M + N = L + P + N, esto es debido, según indican Kieran y Filloy (1989), a que los estudiantes usan los términos literales mucho antes de conceptualizarlos como variables, es decir, de ver lo general a partir de los particular. Tan solo dos alumnos han sabido que a veces era posible que fueran iguales, pero no han sabido dar la explicación. Uno de ellos (alumna 10), aunque lo ha tachado, ha intentado darle valores a las letras para no tener que trabajar con ellas, la otra (alumna 14) contestó en la entrevista que no se acordaba de por qué había dicho eso, pero, tras pensar un rato, dedujo que lo correcto era decir cuando M = P. Por último, la alumna 30, que como hemos ido viendo, es una de las que mayores dificultades presenta en este test, ha contestado que siempre serán igual.

- **Ítem 15.**

Este ítem se divide en tres apartados, el primero de ellos era muy sencillo ya que se trataba de ignorar la letra, además estaba bien estructurado visualmente, por lo que ningún alumno ha presentado dificultades a la hora de contestarlo.

El segundo apartado se aumentaba un poco la dificultad, en comparación con el anterior, lo cual se refleja en que dos alumnas (10 y 14) han fallado al contestarlo. La primera ha contestado 76, debido posiblemente a pensar en contestar la cifra de las unidades más tarde y olvidándose de ello más tarde. La alumna 14 contestó 763, sumándole una unidad en lugar de restándosela. En la entrevista la alumna supo corregir el resultado y dar el valor que correspondía argumentando que si se restaba uno más, el resultado debía ser uno menos.

El tercer apartado es el que más problemas ha ocasionado de los tres, dado que se aumenta a un nivel 3 de entendimiento y se cambia a tratar la letra como una incógnita específica. Este apartado no han sabido contestarlo dos alumnas, una de ellas (alumna 28) ha dejado en blanco la pregunta mientras que la alumna 30 sí ha indicado que no sabía contestarla. Dos alumnas, la número 10 y la 24, han contestado como resultado 8g (una de ellas ha indicado que son posibles $8g$ y $8 + g$). Esto nos hace pensar que o bien entienden que $8g$ y $8 + g$ es lo mismo o que quieren dar como resultado un monomio ya que es a lo que están acostumbrados. Además, suelen tener cierta reticencia a que el procedimiento sea la respuesta, tal y como indican Kieran y Filloy (1989). Por último, hay tres alumnos que responden que la solución es 12. Tras darle vueltas al porqué se ha llegado a la conclusión de que, posiblemente, lo que estos alumnos pensaron fue que si $e + f = 8 \rightarrow e = f = 4$ y por tanto, como hay tres letras, g también es 4, por lo que $4 + 4 + 4 = 12$. Esta respuesta fue dada por los alumnos 3, 23 y 25, por lo que hubiera sido apropiado realizarles a ellos la encuesta y que nos dieran sus argumentos.

- **Ítem 16.**

Este era un ítem sencillo en el que la letra era interpretada como evaluada. Es por ello que el apartado a lo han realizado correctamente todos los alumnos. El apartado b aumentaba mínimamente incluyendo una multiplicación, es por esto que tan solo lo ha fallado la alumna número 2. Ella ha contestado que $m = \frac{7}{3}$, debido seguramente haber sumado $\frac{4}{3} + 1$ en lugar de $3 * 4 + 1$.

- **Ítem 17.**

Esta pregunta también estaba dividida en dos apartados. El primero, más sencillo, servía para que la letra fuera interpretada como evaluada. El total de los alumnos contestaron bien a este apartado, excepto el alumno 25 que contestó $a - 3$, debido a hacer 8 – 5 y después no saber qué hacer con a. Es destacable también que la alumna

30 dio como solución $3 + 5 = 8$ en lugar de indicar directamente $a = 3$, como habían hecho el resto de sus compañeros, mostrando que utiliza un enfoque de resolución intuitivo, tal y como indican Kieran y Filloy (1989).

El apartado 17b, en el cual se aumentaba la dificultad ya que aparecían términos literales a ambos lados del igual, provocó, como era esperable, un mayor número de errores. La alumna 14 lo dejó en blanco y cuando se le hizo la entrevista, con un poco de ayuda, suyo sacar a qué equivalía b. Tres alumnos más (16, 26 y 29) respondieron que no sabían hacerlo. Otros dos alumnos (23 y 25) se quedan tan solo con uno de los dos lados de la ecuación y responden "b se está multiplicando por 2" y $b + 2$, respectivamente. Por lo que ignoran uno de los dos lados de la igualdad ya que les molesta que aparezca el término literal en ambos lados. El alumno 1 despeja b de la parte izquierda y contesta $b = 2b + 2$. En la encuesta realiza a este alumno, pese a que sus conocimientos son superiores porque el curso ya está acabando, sigue teniendo dificultades para dar otra solución. La respuesta más llamativa la da la alumna 30, la cual contesta $b \log 2 = 2$, debido posiblemente a que acababan de trabajar con logaritmos y lo tiene presente.

- **Ítem 18.**

Este es otro de los ítems que más dificultades presenta, no han sido capaces de resolverlo correctamente ni la mitad de los estudiantes. Antes de comentar las respuestas incorrectas, es necesario comentar alguna de las respuestas correctas, como la dada por la alumna 10 que dice correctamente que $r = 15$ pero que ve necesario darle valores a s y t, por lo que escribe $s = 7$ y $t = 8$, o la dada por la alumna 30 que de nuevo vuelve a mostrar su enfoque de resolución intuitivo indicando que 15 + 15 = 30. Otras respuestas que no están mal del todo son, por un lado, la dada por el alumno 17 que dice que r = 30 – (s + t) pero no llega a sustituir r = s + t, por lo que podemos suponer que no le ha prestado la suficiente atención al enunciado, y la dada por la alumna 19 que deja indicado que 2r = 30, sin terminar de despejar r, posiblemente porque no lo crea necesario. Tanto al alumno 1 como al 29 les ocurre que se equivocan en las operaciones pero no en la sustitución, por lo que indican que $r = 30 - r$ pero después, al equivocarse despejando y aparecerles $r - r = 30$, lo tachan. En la entrevista este alumno 1 supo corregir su error.

Los alumnos 21 y 26 dejan indicados que no saben resolver el ejercicio. Otros siete alumnos lo dejan en blanco, posiblemente por no saber resolverlo tampoco, aunque no lo indiquen. Hay indicios en uno de ellos, el test de la alumna 23, de que ha intentado probar valores, pero como no le ha cuadrado ninguno, lo ha dejado en blanco.

Por último, el alumno 25 contesta que $r = 20$ y la alumna 24 que "r es menor que s y t", deducido posiblemente de pensar únicamente en valores positivos junto con la suma $s + t = r$.

- **Ítem 19.**

Como era de esperar muy pocos alumnos han contestado correctamente a este ítem. Como se ha comentado anteriormente, todavía no habían trabajado con el tema de inecuaciones y para la correcta resolución de esta pregunta era necesario hacer uso del mismo. Además, en este ítem se nota particularmente la clara tendencia que tienen los alumnos de pensar únicamente en los números naturales, dado que son los que más presentes están en sus vidas.

Los tres alumnos (17, 23 y 29) que han realizado bien esta pregunta son parte de los que no han realizado excesivamente bien el test. Esto nos hace dudar en que realmente, al dar su respuesta como $c < 5$ están pensando en toda clase de números y no solo en los números naturales.

Catorce alumnos de los veintisiete responden que c tiene que ser $1, 2, 3\ o\ 4$, y de estos solo tres incluyen también el número 0. Otros cinco alumnos más dan como respuesta un número concreto, comprendido entre estos, por ejemplo $c = 1$. Posiblemente porque crean, como sus compañeros, que puede tomar un número entre el rango arriba indicado pero que no es necesario explicitarlo y que con eso queda contestada la pregunta. Con esto queda presente que los alumnos suelen pensar en números enteros cuando quieren darle un valor a una incógnita.

Destacable es también la contestación de dos alumnos. Por un lado, el alumno 1 responde que $c = d - 10$, resultado de despejar la ecuación dada. Por otro, la alumna 15 indica que $c \leq 4$ y $d > 5$, por lo que se ve que tiene alguna noción sobre inecuaciones pero que todavía no las domina.

- **Ítem 20.**

Este es otra de las preguntas que han resultado dificultosos para los estudiantes encuestados.

El primer apartado del ítem, algo más sencillo, ha sido respondido correctamente por aproximadamente un 41% de los alumnos. Seis de los alumnos (1, 10, 14, 15, 17 y 27) ha interpretado mal el resultado y en vez de aumentar en dos unidades b lo que han hecho ha sido que hubiera el doble de b. Durante las encuestas, se remarcó este punto para que fueran los propios alumnos quienes se dieran cuenta de su error.

Otros errores cometidos han sido sustituir b por 2, como en el caso de la alumna 30, o escribir $a + b = 2b + 3$, por la alumna 12, la cual suma a ambos lados de la igualdad b, por tanto, está aumentando b a ambas partes en lugar de solo b en 2 unidades. Otro alumna, la número 6, ha multiplicado toda la ecuación por 2 y después ha traspuesto los términos, es decir, ha escrito $2b = 2a + 6$. El alumno 9 ha aumentado en 2 unidades b pero parece que se ha olvidado del $+3$ que aparecía en la ecuación. La alumna 23, seguramente condicionada por el ítem 19, ha contestado que $a > 5$, por lo que sí ha añadido dos unidades a b pero no considera que éste pueda tomar valores negativos. Por último, la alumna 28 considera que "a disminuye 2" debido posiblemente a que ha pensado que cuando quieres despejar en una ecuación, lo que está sumando en una parte pasa restando a la otra.

Respecto al apartado 20b, solo un 19% lo ha contestado bien. Esto es debido a que se ha aumentado su dificultad ya que al término que hay que sumarle 2 esta vez está multiplicado por una constante y, por tanto, hay que hacer uso del paréntesis. Los alumnos que habían contestado mal al apartado anterior siguen haciéndolo mal en este, y se le suman unos tantos. La alumna 23 considera que $f > 7$, respuesta que da a entender que solo considera los números naturales, al igual que en el apartado anterior. Tres alumnos (4, 10 y 21) consideran que se le debería sumar 2 para que se siguiera manteniendo la igualdad. Las alumnas 15 y 19 consideran que lo que se pide es multiplicar por 2 toda la expresión. El alumno 3 le suma 2 a f en lugar de a g. Los dos alumnos encuestados, el 1 y la 14, creen que lo que se pide es que g sea el doble. Durante la entrevista se les intentó encaminar a que vieran qué significaba realmente que aumentara en 2. La alumna 9 repite el mismo procedimiento anterior, suma 2 a $3g$ (esta vez de forma errónea ya que era solo a g) y se olvida del $+1$. La alumna 30 también repite el mismo razonamiento que en el apartado anterior y lo que hace es sustituir 2 en la f, además, se equivoca y lo resuelve como $3 * 2 * 1 = 6$. Otra alumna que repite comportamiento es la 12, que lo que hace es sumar a ambos lados de la igualdad $3g$. La alumna 28 también repite su forma de pensar, creyendo que si a la derecha de la igualdad aumenta en 2, a la izquierda ha de disminuir en 2. Dos alumnos, el 17 y la 27 escriben $f = 5g + 1$ resultado de sumar $2g + 3g$. La última respuesta incorrecta es la proporcionada por la alumna 6 que da como resultado $5g = \frac{5}{3}g + \frac{5}{3}$. El alumno 22 la deja en blanco y la alumna 29 contesta que no sabe hacerla.

Dos alumnos (16 y 24) en ambos apartados indican que a y f aumentarían, pero sin especificar cuánto. Los alumnos 13 y 25 la han dejado en blanco.

- **Ítem 21a.**

Pese a combinar el álgebra con la geometría, al tratarse de una pregunta puramente numérica todos los alumnos la han contestado correctamente.

- **Ítem 21b.**

Esta pregunta era muy semejante a la anterior, tan solo cambiaba que no aparecían los cuadrados pintados en la imagen y el tamaño del rectángulo. Sin embargo, una alumna, la número 30, de la cual ya hemos hablado anteriormente, se ha equivocado. Ha contestado diciendo cuál es el perímetro de la figura en lugar de su área, puede que porque no aparezcan las marcas en el dibujo.

- **Ítem 21c.**

Al igual que en los dos apartados anteriores, los alumnos han sabido responder correctamente. En este caso se complicaba un poco el cálculo del área ya que trabajaban con dos valores desconocidos, pero ello no ha supuesto ningún problema. Excepto para la alumna 30 que ha hecho un mix entre calcular el perímetro y el área, dando por resultado $A = (m * 2)(n * 2)$.

- **Ítem 21d.**

Dos tercios de los alumnos han seguido contestando correctamente a este apartado, pese al incremento de su dificultad. Es destacable que en el ítem 12, donde se les preguntaba lo mismo, hubo un alumno más que la contestó correctamente. Esta alumna fue la número 7, quien esta vez ha respondido 2e+5. Otras dos alumnas, la 4 y la 27, no han escrito el paréntesis y por tanto su solución ha sido 5*e+2. Consideramos que sí saben calcular el área pero que no han visto necesario el uso del paréntesis para indicar la prioridad de operaciones. Cinco alumnos (1, 3, 10, 13 y 25) han contestado con 5*2e, posiblemente derivado de querer dar como resultado un monomio. La alumna 30 ha seguido calculando el perímetro.

Cabe destacar que se dieron por buenas respuestas donde no se desarrollaba el paréntesis.

- **Ítem 22.**

Esta pregunta no supuso ningún problema dado que debían calcular el perímetro únicamente con números y basándose en el ejemplo que tenían al lado. Es por ello que la contestaron correctamente el total de los alumnos.

- **Ítem 23a.**

Este apartado del ítem 23 tampoco supuso ningún problema para casi todos los alumnos, ya que se pedía lo mismo que en el ítem anterior. El alumno 4 creyó que debía calcular el área, por lo que contestó $\frac{\frac{1}{2}e*h}{2}$ donde h era la altura del triángulo. El alumno 3 contestó a todo el ítem que no sabía hacerlo.

- **Ítem 23b.**

Este apartado se complicaba un poco dado que introducía una nueva variable, es decir, esta vez aparecían dos términos independientes. Es por ello que a los alumnos 4 (que sigue intentando calcular el área) y 3 que contestó que no sabía hacerlo, se les sumó la alumna 10 que escribió como respuesta $3h * t$.

- **Ítem 23c.**

En este apartado se combina el uso de números con letras, por lo que supuso que algunos alumnos más se equivocaran. Además de los alumnos 3 y 4, repite la alumna 10 que indica que no sabe realizarlo, la alumna 24 que responde $P = 16 + u^2$, cometiendo el error de multiplicar las u en lugar de sumarlas (como bien ha hecho con los números) y la alumna 29 la cual multiplica los números y letras que son iguales entre ellas, dándole por resultado $P = 6 + 25 + u^2$ (como 6 solo aparece una vez en el dibujo no lo multiplica por sí mismo). Este último error puede ser producido de intentar extrapolar lo que había hecho en el apartado 23b donde respondía $P = 4h + t$, pero de manera errónea.

- **Ítem 23d.**

Este es el apartado que más problemas ha ocasionado debido a que se pide calcular el perímetro de una figura que no está completa, de la cual únicamente conocemos que todos sus lados miden 2 y que hay n lados. Cuatro alumnos, los número 4, 10, 14 y 25, la dejan en blanco y el alumno 3 sigue contestando que no sabe hacerla. Dos alumnos, el 1 y el 23, contestan que el perímetro es $26 * 2$, debido a que han considerado posiblemente que la figura que falta debe ser simétrica a la dada (la figura dada consta de 14 lados de longitud 2, por lo que la figura completa debería ser el doble). Este hecho quedó destacado en la entrevista realizada al alumno 1, en la cual se le encaminó a que cambiara de opinión y dedujera la respuesta correcta. El alumno número 7 ha contestado $26 + 2n$, dado que seguramente haya considerado que la figura tiene n lados más de los dibujados y no n en total como indica el enunciado. Por último, la alumna 23 ha contestado $n = (2 *$.

- **Ítem 24.**

En este ítem se pide que calculen el número de diagonales de una figura a partir de un enunciado en el que se explica cómo se hace. Se divide en dos apartados, uno en el que es puramente numérico y otro en el que se utilizan los términos literales.

El primero, pese a ser puramente numérico, presenta mayores dificultades que todos los de este tipo realizados anteriormente. Quizá debido a que se da la explicación de palabra y los alumnos tienen que leerla y entenderla. El mismo error se repite en el segundo apartado, en el cual dan la explicación del cálculo hecho en el primero. Los errores cometidos son contestar que tiene 3078 diagonales, por la alumna 23, resultado de hacer $k(k-3)$; 22 diagonales, por el alumno 17, resultado de hacer $k * \frac{2}{5}$ (saca la razón entre el número de lados de la figura del ejemplo, 5, y el número de diagonales, 2). Otro alumno, el número 3, contesta que tiene 140 diagonales y n diagonales, sin dar mayor explicación. Otro de los alumnos, el número 13, contesta 27 al primera apartado y $\frac{k-3}{2}$ al segundo. Otros dos alumnos se equivocan en el primer apartado, debido seguramente a un error de cálculo, ya que contestan 4 y 53, en lugar de 54, pero sí responden correctamente $k-3$. El alumno 4 la deja en blanco.

- **Ítem 25.**

Dado que los únicos datos que se tienen son J y P, por lo que todos los alumnos identifican estas letras como números específicos y responden $J+P$. Cabe destacar que la alumna 30 contesta, además de eso, $J * P$; $J{:}P$; $J^P \ y \ P^J$, dando a entender que realmente no ha entendido el enunciado y qué no sabe qué significa ni J ni P y lo que hace es escribir todo lo que se le ocurre.

Otro hecho destacable es que ocho de los veintisiete alumnos han necesitado igualar $J+P$ a algo, ya se x, $número\ total\ de\ canicas$, etc. Por lo que están presentando el comportamiento descrito por Kieran y Filloy (1989) en el que los alumnos ven la respuesta incompleta si no es parte de una igualdad.

- **Ítem 26.**

Este ítem se divide en dos partes, el apartado a en el que se pide que escriban la ecuación que relaciona el sueldo total semanal y el número de horas extras que trabaja María, y el apartado b en el que se pide que calculen el sueldo total de una semana si ha trabajado 4 horas extra.

Pese a que el apartado b depende del apartado a, catorce de los veintisiete alumnos contestan correctamente al puramente numérico pero no son capaces de hallar la ecuación que resuelve el primero. Por lo que parece que sí están acostumbrados a trabajar con números pero les cuesta traducir a lenguaje algebraico enunciados verbales. Alguna de sus respuestas fueron: $W + h = 100 + 5h$; $W + 5h$; $W + h$; $100W + 5h$; $W + \frac{5}{h}$.

En el apartado b solo lo han contestado cinco alumnos mal, pese a haberse equivocado en el apartado a. Las respuestas dadas por estos alumnos fueron: 112 (resultado de hacer $100 + 3 * 4$); $100W + 4 * 5h$; $4w = 100$; $W + 4h$ y $W + 5 * 4$. Estas respuestas son debidas a que se basaron en lo que había contestado en el apartado a.

Un alumno puso que no sabía resolver correctamente el primer apartado pero sí resolvió correctamente el segundo.

Por tanto, deducimos que la mayoría de los alumnos no comprendió el enunciado y que pensaron que W se refería al sueldo base, en lugar de los 100€.

- **Ítem 27.**

Este ítem, dado que también requería interpretar qué se estaba diciendo en un enunciado verbal, resultó dificultoso para los alumnos. Tres de ellos la dejaron en blanco, cuatro dieron resultados incompletos (se ha considera que la respuesta está incompleta si han dado respuestas similares a “es el precio de un pastel cuatro veces más el precio de un bollo tres veces, ya que no hacen referencia a que es el precio total a pagar). Cinco alumnos dieron respuestas incorrectas como “compran 4 pasteles y 3 bollos” o “la suma de bollos y pasteles”. Puede que estos últimos respondan, como ha comentado Küchemann (1981), a consecuencia de leer literalmente la expresión $4p + 3b$, 4 pasteles y 3 bollos.

- **Ítem 28.**

Tan solo siete de los veintisiete encuestados dejaron en blanco esta pregunta. El resto la contestaron correctamente utilizando algún tipo de razonamiento y no resolviendo directamente la ecuación de tercer grado.

Dieciséis de estos alumnos argumentaron que $x = 2$ porque había que dividir 6 entre 3 para que siguiera siendo el mismo valor, otra alumna contestó “no sé” pese a que escribió la ecuación con el valor correcto en el lateral de la hoja. Los otros tres alumnos que respondieron correctamente dijeron que habían ido probando con la calculadora hasta que hallaron el valor correcto.

- **Ítem 29.**

Esta pregunta ha presentado bastantes dificultades para los alumnos, debido a tratarse de un ítem donde tienen que comprender e interpretar el enunciado. Dos tercios de los alumnos ha dado una respuesta parcialmente correcta contestando $5b + 6r = 90$ ó $0{,}05b + 0{,}06r = 0{,}90$. Debido posiblemente a que creyeran que con esta ecuación estaban contestando a la pregunta y no se necesitaba acotar más la solución dando los pares de valores concretos posibles.

Seis de los nueve alumnos restantes la dejaron en blanco. Los tres alumnos que la contestaron incorrectamente utilizaron las siguientes expresiones: $b + r = 90$, olvidando el precio que cuesta cada bolígrafo o pensando que estaba incluido en la b y la r, $5b + 6r = 0{,}90$, trabajando a la par con céntimos y euros, confusión posiblemente derivada de estar acostumbrado a tratar con decimales y no prestarle especial atención al enunciado. La otra alumna que contestó mal puso $5b + 6r$ sin igualarlo a nada, posiblemente porque no viera la necesidad de hacerlo.

Anejo D. Transcripción de las entrevistas

A continuación se recoge la transcripción de las entrevistas. Se indica el alumno a la que se le ha realizado, así como su fecha de nacimiento y su sexo. Además, se denota con E cuando interviene la entrevistadora y con A cuando lo hace el alumno.

Alumno 1	Fecha de nacimiento: 06/07/2001

- **Ítem 1:**

E: Si a es 2 y b es 5, ¿qué puedes decir de $a\ más\ b$?

A: 2 más $3, 5$.

E: Vale, muy bien.

- **Ítem 2:**

E: En la dos lo que preguntan es que si a es 3, ¿qué puedes decir de $4a$?

A: Pues que 4 por 3, 12.

E: Muy bien.

- **Ítem 3:**

E: Luego, ¿sabes lo que significa $5n$? Osea, de las que has contestado he visto que has puesto $5xn$

A: Sí.

E: ¿Faltaría alguna más?

A: Ah sí, también $5n$ [señalando $n + n + n + n + n$]. Esa me la dejé.

E: ¿Pero entiendes por qué es $n + n + n + n + n$?

A: Sí sí sí.

E: Vale, muy bien.

- **Ítem 4:**

E: En $e3$ has vuelto a cometer el mismo error.

A: Se me habrá olvidado, lo hice rápido.

E: Si si, no pasa nada. ¿Pero entiendes por qué?

A: Si si.

E: Vale, muy bien.

- **Ítem 5:**

E: Luego, en qué significa nm has vuelto a poner nxm, muy bien, y luego señalas que es $25x26$. Tienen que ser… bueno, por ejemplo, ¿en vez de $25x26$ podría haber sido $4x10$?

A: Sí.

E: Osea que no tienen por qué ser números consecutivos.

A: No tienen por qué ser [números consecutivos].

- **Ítem 6:**

E: En la siguiente señalas, osea, es $e + 2\, multiplicado\ por\ 3$, ¿vale? y tú has señalado que es $e + 6$. ¿Ahora volverías a señalar las mismas?

A: No, veo que está tachado.

E: Ya... vale. Porque tenemos $e + 2$, entiendo que es todo entre paréntesis. Lo que entiendo que tú has entendido es que es $e + (2x3)$, ¿no?

A: Sí.

E: Vale, error de comprensión. No pasa nada. Continuamos.

- **Ítem 7:**

E: Dos sumado a 5a, además de las dos que has señalado, la b y la d, ¿hubieras señalado alguna más?

A: 5a más 2 también.

- **Ítem 8:**

E: En la 8, ¿por qué has hecho eso?

A: Pues porque… al principio me lie un poco. ¿Cómo iba esto?

E: Si tenías x luego tenías $x + 2$, si tenías 6 después tenías que hacer lo mismo.

A: Pues por eso $6 + 2$, 8.

E: Y así [has hecho] en todas. ¿Y en estas, en las de $x \rightarrow 4x$?

A: Es por 4.

E: Vale, muy bien.

- **Ítem 9:**

E: En la siguiente, tenías que sumar 4 a las expresiones. ¿Hiciste eso, no?

A: Sí.

E: Vale, y en el número b lo mismo.

A: Sí, había que multiplicar por 4, poniendo paréntesis.

E: Muy bien lo del paréntesis.

- **Ítem 10:**

E: En esta, que te preguntan cuál de todas es mayor y menor. Contestaste que la mayor era $n + 4$, que la menor era $n - 7$ pero luego [pusiste] que no se podía saber. Piénsala otra vez a ver si ahora llegas a alguna conclusión. ¿Qué valores puede tomar n?

A: Ah claro, es que en verdad n puede tomar muchos valores, negativos también, ¿no?

E: Sí, ¿y si toma valores negativos qué pasa?

A: Pero también seguiría siendo lo mismo.

E: Muy bien.

- **Ítem 11:**

E: La siguiente, ¿qué es mayor $2n$ o $n + 2$? ¿Con qué valores de n pasan cosas?

A: Mmm, no sé.

E: Si a n le da un valor positivo el que quieras, ¿cuál es mayor?

A: Es mayor la multiplicación pero solo si n es mayor que 2.

E: Exacto, genial. ¿Cómo has sabido lo de mayor de 2?

A: Porque si al sumar ya hay 2, pues si al multiplicar subes aunque sea 1'5 es menos.

E: Vale. Realmente deberías haber igualado $2n = n + 2$ y de ahí despejar n, pero lo has hecho muy bien.

A: Sí, es verdad.

- **Ítem 12:**

E: En la del área del rectángulo. Has puesto que es $6(2p)$. ¿Ahora pondrías lo mismo?

A: No porque está mal, sería $6 * (2 + p)$.

E: Exacto.

- **Ítem 13:**

E: En esta te pedían simplificar. Vamos a ir viendo una a una. ¿Por qué la primera la has simplificado?

A: Porque la a es la misma y se pueden sumar.

E: Muy bien. ¿Y en la b?

A: No porque no se sabe… bueno, se podría poner $7a * b$, ¿no?

E: No porque no puedes sacar factor común nada, porque a es distinto de b.

A: Sí, por eso puse que no.

E: Vale. La c sí la has simplificado. ¿Por qué?

A: Porque todos son sumas y se puede sumar, a más a se puede sumar.

E: Muy bien, ¿y en la d?

A: Porque a y $2a$ también se puede sumar.

E: Muy bien, ¿y en la e?

A: Porque $-b$ más b te da 0.

E: Te queda la a que quedaba, muy bien. ¿y la f?

A: También son sumas y restas y a se suma a $3a$… ah no no! Hay un menos ahí. Queda $2a$.

E: Muy bien, ¿en la g?

A: Se suman 4 y -4 y queda $2a$.

E: Muy bien, ¿en la h?

A: Pues $3a + a$ y $-b$.

E: Bien, ¿y la i?

A: Pues se resta $b - b$ y se suma $a + a$.

E: Muy bien, pasamos a la 14.

- **Ítem 14:**

E: En la primera $A + B + C = C + B + A$, ¿por qué siempre es lo mismo?

A: Porque en los dos lados son los mismos números aunque estén desordenados.

E: ¿Y en la b?

A: Creo que es a veces.

E: ¿Por qué?

A: Porque son distintos números.

E: ¿El qué?

A: $L + M + N$ es distinto de $L + P + N$.

E: ¿Pero hay alguno que sea igual?

A: Sí, puede ser igual, por ejemplo… no sé. Creo que es $a\ veces$.

E: Sí, pero falta saber cuándo es ese $a\ veces$. ¿Hay algo que sea igual?

A: A ver, L y L tienen que ser lo mismo, P y M también puede ser lo mismo… entonces cuando M y P sean iguales, también será igual.

E: Muy bien, a eso quería llegar.

- **Ítem 15:**

E: Si $a + b = 43$, ¿por qué $a + b + 2$ son 45?

A: Porque $43 + 2$ son 45.

E: Muy bien, ¿y en $n - 246 = 762$, ¿por qué si es $n - 247$ es 761?

A: Porque es uno menos.

E: Muy bien, y en $e + f = 8$, ¿por qué $e + f + g = 8 + g$?

A: Pues $e + f$ que son 8, más g.

- **Ítem 16:**

E: Sí $u = v + 3$ y v es 1. ¿Qué sabes de u?

A: Pues que u es igual $1 + 3$. Implica que u es 4.

E: Vale, ¿y en la siguiente donde $m = 3n + 1$ y $n = 4$?

A: Pues 4 por 3 son 12, más 1, 13.

E: Perfecto.

- **Ítem 17:**

E: Ahora, ¿qué puedes decir de a si $a + 5 = 8$?

A: a es $8 - 5$, entonces son 3.

E: ¿Y de b?

A: Pues que despejas y $b = 2b - 2$.

E: Vale.

- **Ítem 18:**

E: Si tienes que $r = s + t$ y $r + s + t = 30$, ¿podrías sacar alguna conclusión ahora? En su momento la hiciste mal.

A: Puedo pasar $s + t$ al otro lado, entonces… $r - 30 = s + t$… no, me estoy liando.

E: Si, no pasa nada, a ver. Si $r = s + t$, el $s + t$ aquí lo puedes sustituir.

A: ¡Es verdad!

E: ¿Entonces qué tendrías?

A: Pues $2r = 30$.

E: ¿Y entonces qué puedes decir de r?

A: Que $r = 15$.

E: Muy bien.

- **Ítem 19:**

E: Si $c + d = 10$ y $c\ es\ menor\ que\ d$, por un lado puedes decir lo que contestaste que $c = 10 - d$, pero ¿puedes decir algo más? Porque te están diciendo que $c\ es\ menor\ que\ d$.

A: Puedo poner menor en vez de igual. Ah no no. También puedo sustituir 10 por $c + d$ y se me queda $d - d$, así que $c = c$.

E: Si, bueno… pero ¿podrías, por ejemplo, darle valores a c y d para ver qué pasa, sabiendo que $c < d$?

A: Sí, podría. c puede ser 4 y d puede ser 6.

E: ¿Y alguno más?

A: 3 y 7.

E: ¿Alguno más?

A: 2 y 8.

E: ¿Otro?

A: 1 y 9.

E: ¿Alguno más?

A: 0 y 10.

E: ¿Alguno más?

A: 1'5 y 8'5.

E: ¿y c podría ser negativo?

A: Sí.

E: Vale, muy bien.

- **Ítem 20:**

E: En este se pide qué pasa con a si $b\ aumenta\ en\ 2$.

A: Pues... lo que puse pero se ve que está mal.

E: b aumenta en 2 ¿qué quiere decir? Tú lo has interpretado como que es dos veces b.

A: Pues $2 + b$.

E: ¿Y qué pasa con f si $g\ aumenta\ 2$?

A: Pues ¿$2 + 3g$?

E: No, porque lo que aumenta 2 es g y no $3g$.

A: Ah vale. Entonces, $2 * 3g$.

E: No, porque aumentamos en 2 no al doble. Olvídate del 3, antes solo teníamos b y aumentaba en 2.

A: Ahora tendremos $2 + g$, y todo eso multiplicado por 3.

E: Muy bien.

- **Ítem 21:**

E: ¿Cómo calculaste el área del primer rectángulo?

A: 4 por 3.

E: ¿Y del segundo?

A: 6 por 10.

E: ¿Y del tercero?

A: m por n.

E: ¿Y del cuarto? Que en su momento no lo hiciste bien.

A: $5(2 + e)$.

- **Ítem 22:**

E: En esta te piden que calcules el perímetro, ¿cómo lo has calculado?

A: Pues $10 + 2 + 9 + 1$.

E: Muy bien.

- **Ítem 23:**

E: Te piden que calcules los perímetros, ¿cómo lo has hecho en el primer caso?

A: Hice $e + e + e$.

E: ¿En el b?

A: $4h + t$.

E: ¿En el c?

A: $5 + 6 + 5$ más $2u$.

E: ¿Y en el último que te dicen que la figura está incompleta?

A: Pero es que no sé lo que continúa.

E: Ya, ¿entonces hay alguna forma de saberlo?

A: Mmm… No.

- **Ítem 24:**

E: Te dicen que hay 3 diafgonales menos que lados tiene la figura, entonces si tiene 54 lados tiene…

A: $57 - 3$, 54 diagonales.

E: ¿Y si tiene k lados?

A: Tiene $k - 3$.

E: Muy bien.

- **Ítem 25:**

E: En este nos dicen que Juan tiene J canicas y Pedro tiene P, ¿cuántas tienen entre los dos?

A: $J + P$

E: Muy bien.

- **Ítem 26:**

E: Este es el del sueldo de María. [Leemos el enunciado] Si quieres hacemos el apartado b primero, ¿cómo lo has calculado?

A: Pues $100 + 5 * 4$ horas extras, 120.

E: ¿Y eso es igual al sueldo total, no?

A: Sí.

E: Entonces la ecuación del sueldo total, que en su momento no la planteaste bien, ¿cómo la plantearías?

A: A ver… W es 100, ah no. W es el sueldo total. Entonces $W = 100 + 5h$.

E: Muy bien.

- **Ítem 27:**

E: En esta te decían que en una pastelería habían pasteles que costaban p y bollos que costaban b y que se compraban $4p + 3b$. Contestaste que era la suma de bollos y pasteles pero no está bien. Leelo de nuevo y a ver qué contestarías.

A: No sería la suma de bollos y pasteles sería lo que cuestan la suma de bollos y pasteles, lo que compras.

- **Ítem 28:**

E: En esta te daban una ecuación que era cierta para $x = 6$ y luego una muy similar donde en lugar de x aparecía $3x$. ¿Por qué contestaste que es cierto para $x = 2$?

A: Porque… a ver, aquí [señalando la primera] es el triple, entonces… [señalando la segunda] aquí tiene que seguir siendo 6, por tanto $x = 2$.

E: Muy bien.

- **Ítem 29:**

E: Este es el de los lápices azules y rojos. [Leemos el enunciado]. ¿Por qué pusiste que $5b + 6r = 90$?

A: Porque compra b lápices azules a 5 céntimos y r lápices rojos a 6 céntimos y en total se gasta 90 céntimos.

E: Muy bien, muchas gracias por tu colaboración.

Alumna 14	Fecha de nacimiento: 10/04/2001

- **Ítem 1:**

E: En la primera, si a es 2 y b es 3, ¿qué puedes de $a + b$? Contestaste que 5, ¿por qué?

A: Porque yo creía que había que sustituir la a por 2 y la b por 3, porque pone eso y que lo sumes, entonces es 5.

E: Muy bien.

- **Ítem 2:**

E: Ahora, si a es 3, ¿qué puedes decir de $4a$?

A: Es que aquí lo que hice fue igualar $4a$ a 3 y dividirlo [3 dividido 4], pero ahora creo que hay que hacer $4 * 3$ que son 12.

E: Exacto. Muy bien.

- **Ítem 3:**

E: En la siguiente te dicen: ¿Qué significa $5n$?

A: Esta no la puse porque $5 + n$ no… porque está multiplicando. Esta la puse porque $5\ y\ n$, no ponía ningún símbolo…

E: Pero para ti si te presentan $5n$…

A: Es por [multiplicación].

E: Entonces la c la contestas porque es por [multiplicación].

A: Sí.

E: ¿Hubieras contestado alguna más?

A: No.

E: Vale. Ahora esto para que lo entiendas para el futuro: que sea $5n$ es que hay $5\ veces\ n$ o $n\ veces\ 5$, ¿vale? Por ejemplo, $2 * 3$ es porque es $2 + 2 + 2$ o $3 + 3$.

A: Vale, entonces esta también sería [señalando $n + n + n + n + n$] porque tienes $5\ veces\ n$.

E: Exacto.

- **Ítem 4:**

E: En la siguiente que es $e3$.

A: Lo mismo, pero sería $3\ veces\ e$.

E: Exacto, muy bien. Y la que has contestado que es $e\ x\ 3$. Luego…

A: Falta también $3\ x\ e$.

E: Perfecto.

- **Ítem 5:**

A: ¿Qué significa nm? Señala todas las respuestas… Esta ya no [$n\ y\ m$], pero sería este [$n\ x\ m$] porque está multiplicando.

E: Exacto. Esta [$25 * 26$] no es que esté mal pero aparte de $25 * 26$ ¿podría haber sido $5 * 2$?

A: Sí.

E: Osea que sean números consecutivos no tiene nada que ver.

A: No, puede ser cualquier número.

E: Exacto, muy bien.

- **Ítem 6:**

E: En la siguiente te decía el enunciado…

A: ¿Cuál de las siguientes expresiones utilizarías para representar $e + 2\ multiplicado\ por\ 3$?

E: Tú señalaste $3 * (e + 2)$ y $3(e + 2)$. Viéndolas ahora ¿señalarías alguna más?

A: Es que esta a ver... no sé por qué la has señalado [en su momento, al corregir el test había señalado la respuesta correcta].

E: Si resuelves el paréntesis, es decir, multiplicas los términos…

A: Ah vale, ya lo entiendo, es que no lo veía.

E: No pasa nada, muy bien.

- **Ítem 7:**

E: ¿Cómo representarías $2\ sumado\ a\ 5a$?

A: Esta sí que sería [señalando $5a\ más\ 2$], no me di cuenta. Esta que indiqué también [$5a + 2$] y… esta también [$2 + 5a$].

E: Muy bien.

- **Ítem 8:**

E: Este os resultó un poco lioso a todos.

A: Sí.

E: Lo que había que hacer era: tú tenías x y luego tenías $x + 2$, entonces si tenías 6, luego seguías el mismo patrón.

A: Claro, aunque no puse el resultado.

E: Por eso no pasa nada, está bien, hiciste $6 + 2$ y $r + 2$. ¿Y en este? [Señalando el apartado b]

A: Había que multiplicar por 4.

E: Muy bien.

- **Ítem 9:**

E: En el siguiente ejercicio te dicen que sumes 4 en cada caso, entonces ¿qué hiciste?

A: Sumar 4, $8+4$, $n+5+4$, $3n+4$ y ya está.

E: Muy bien. En el apartado b te pedían multiplicar por 4, ¿qué es lo que hiciste?

A: Pues multipliqué $8*4$, $4*(n+5)$ y $4*3n$, pero se podía simplificar también.

E: Vale, muy bien.

- **Ítem 10:**

E: En este que te piden cuál es el mayor y cuál el menor.

A: En este me lie un montón porque claro, dependiendo de donde pongas la n, el número por el que lo sustituyas puede ser mayor o menor.

E: Vale, vamos a probar. Dime un valor para n.

A: No sé, por ejemplo 50.

E: Vale, ¿qué tendríamos?

A: A ver pues $51, 54, 47, 50$ y 43.

E: Entonces, ¿cuál es el mayor?

A: El 54. Ah vale entonces… ¿aunque sustituyas otro valor siempre va dar mayor ese?

E: No sé, te lo pregunto yo a ti. ¿Probamos con otro valor?

A: Vale, con 10. Tenemos $11, 14, 7, 10\ y\ 3$. Entonces sí, este es el mayor [señalando $n+4$].

E: ¿Y puede tomar valores negativos?

A: Si, pero con los negativos me lío bastante.

E: Vamos a probar por ejemplo con el -1.

A: Vale pues $0, 3, -4, -1\ y -8$.

E: Entonces, ¿cuál es el mayor?

A: Este [señalando $n+4$]. Entonces siempre es $n+4$ el mayor.

E: ¿Y el menor? Que no lo hemos estado pensando.

A: El menor es este [señalando $n-7$].

E: Muy bien.

- **Ítem 11:**

E: En esta que te piden cuál es mayor si $2n$ o $n + 2$, ¿cuál crees que es mayor?

A: Yo creo que es $2n$ porque siempre es multiplicar y supongo que dará más valor.

E: Vale, ¿n siempre toma valores positivos?

A: Si tomara valores negativos sería menor.

E: Entonces, ¿siempre que tomas valores positivos $2n$ es mayor y si son negativos es menor?

A: Sí.

E: ¿Siempre siempre?

A: A ver yo pienso que sí.

E: Vale.

- **Ítem 12:**

E: En este el área del rectángulo la escribiste como $6(p + 2)$, ¿por qué?

A: Porque es base por altura y como aquí hay un 2 se lo sumé a la p.

E: Muy bien, genial.

- **Ítem 13:**

E: En este te pedían que simplificaras, ¿por qué sabías que $2a + 5a$ se podía simplificar?

A: Porque son las dos a y se pueden sumar.

E: Muy bien, ¿y en $2a + 5b$?

A: No se puede porque no tienen la misma letra.

E: Muy bien, y seguiste el mismo razonamiento para todos.

A: Sí.

E: Muy bien, pasamos al siguiente.

- **Ítem 14:**

E: En esta, cuándo son iguales $A + B + C$…

A: Aquí me lie mucho.

E: A ver vamos a pensarlo, aquí tenemos…

A: $A + B + C$

E: Y en este otro lado…

A: Lo contrario, $C + B + A$

E: Pero lo contrario…

A: Osea empezando desde atrás.

E: Es decir, desordenados pero los mismos.

A: Sí, exacto. ¡Entonces es siempre la igualdad!

E: Muy bien. ¿Y en el apartado b?

A: Es nunca, ¿no? La L y la N si que coincidirían pero la M y la P nunca…

E: ¿Nunca?

A: Bueno, podría pasar que fueran iguales, que fueran el mismo número…

E: Exacto, entonces nos serviría si M y P fueran el mismo, ¿no?

A: Sí.

E: Muy bien, pasamos a la siguiente hoja.

- **Ítem 15:**

E: Si $a + b = 43$, $a + b + 2$ son…

A: Son 45. Lo puse porque si $a + b$ son 43, le sumé 2 y era 45.

E: Perfecto. Ahora en esta que te decían $si\ n - 246 = 762$, si ahora le restas…

A: A ver yo lo que haría es… ah! 761.

E: ¿Por qué?

A: Porque si $n - 246 = 762$, se supone que al subirle 1 más tiene que ser menor el valor [resultado].

E: Muy bien y ahora en $e + f = 8$, $e + f + g$…

A: Puse $8 + g$ porque no había ningún valor que sustituir al otro lado.

- **Ítem 16:**

E: ¿Por qué supiste que u era 4?

A: Porque $3 + 1$ son 4.

E: Y en esta, $m = 3n + 1$.

A: 13 porque multiplicas $3 * 4$ más 1.

E: Genial.

- **Ítem 17:**

E: En esta, ¿qué puedes decir de a si $a + 5 = 8$?

A: Que tiene que ser 3 preciso porque no hay más valores que puedan serlo.

E: Muy bien, y ahora si $b + 2 = 2b$, ¿qué puedes decir de b?

A: Que b tendría que ser… no tengo ni idea.

E: ¿Puedes despejar?

A: Sí que puedo, se queda $b = 2b - 2$, ¿no?

E: No… antes cuando simplificábamos, podíamos simplificar términos iguales.

A: ¡Ah! Claro, pasas al otro lado la b y quedaría $b = 2$.

E: Eso sí, muy bien.

- **Ítem 18:**

E: En este te dicen que $r = s + t$ y $r + s + t = 30$ y te preguntan por r.

A: A ver… ¡Ya lo sé! $2r = 30$, entonces lo dividirías entre 2 y $r = 15$.

E: Muy bien, genial.

- **Ítem 19:**

E: En esta te dicen que $c + d = 10$ y $c\ es\ menor\ que\ d$. Contestaste que $c = 1$, ¿por qué?

A: Porque con $c = 1$ y $d = 9$ se cumple.

E: ¿Podría tomar algún otro valor?

A: Sí, 2.

E: ¿Alguno más?

A: Sí, 3 o 4. Cero también.

E: ¿Podría ser negativo c?

A: ¡Ay sí! Es verdad, negativo también.

E: Perfecto.

- **Ítem 20:**

E: En este has interpretado el que $b\ aumente\ en\ 2$ es que se multiplica por 2.

A: Sí.

E: Pero si una cosa aumenta en 2…

A: Se suma, entonces es $2 + b$.

E: Exacto, muy bien. Y ahora tenemos $f = 3g + 1$ y $g\ aumenta\ 2$, ¿qué pasa?

A: Aumenta en $2\ g$… entonces si que se multiplicaría, ¿no? No, espera lo que estaría sumado a 2 sería $3g$.

E: Pero lo que aumenta es la g.

A: Ah vale, espera… sería $3(g + 2)$.

E: Genial.

- **Ítem 21:**

E: En este te pedían calcular áreas. ¿Cómo has calculado la primera?

A: Base por altura.

E: Vale, ¿y la segunda?

A: Lo mismo, base por altura.

E: Perfecto, has hecho lo mismo en todas, ¿no?

A: Sí.

- **Ítem 22:**

E: En este te pedían calcular el perímetro.

A: Es sumar todos los lados.

E: Perfecto.

- **Ítem 23:**

E: En este también te pedían calcular el perímetro y has hecho lo mismo, sumar los lados.

A: Sí.

E: Pero llegaste a la última y como te dice que la figura está incompleta…

A: No supe.

E: Vale, vamos a ver. Sabemos que cada lado mide 2 y que hay n lados.

A: Supongo que en esta parte [señalando la que no está dibujada] habrá lo mismo que en esta parte o bueno, no tiene por qué.

E: Vamos a ver el ejemplo este [señalando el cuadrado]. Aquí hay 4 lados de longitud g y el perímetro es $4g$, en la que nos piden hay n lados de longitud 2.

A: ¡Ah vale! El perímetro es $2n$.

E: Sí, perfecto.

- **Ítem 24:**

E: En este te dicen que el número de diagonales que salen de un vértice de un polígono se saca restando 3 al número de lados. Te dan el ejemplo de una figura de 5 lados que tiene 2 diagonales que salen de cada vértice. Te preguntan por una figura de 57 lados.

A: Da 54 porque lo resté, $57 - 3$.

E: Muy bien, y en la de k lados.

A: Pues $k - 3$.

E: Muy bien.

- **Ítem 25:**

E: Te decían que Juan tiene J canicas y Pedro tiene P canicas.

A: Las sumé porque es el número total [de canicas].

E: Muy bien.

- **Ítem 26:**

E: En este te dicen: a la semana María cobra 100€ y por cada hora extra cobra 5€. Te dicen que W es el sueldo total y h el número de horas trabajadas. ¿Cómo calcularías el sueldo total?

A: [Tras pensar un rato] ¿Hay que calcular directamente el total?

E: Tienes que calcular la ecuación general para el total.

A: Vale… no tengo ni idea.

E: Miramos el apartado b a ver si te ayuda. Te dicen que trabaja 4 horas extra, ¿cuánto gana?

A: Sería $4 * 5 + 100$, ¿no?

E: Exacto, vamos a volver al apartado a para intentar ponerlo en una ecuación.

A: Puede ser W abro paréntesis…

E: ¿W qué es?

A: El sueldo total, entonces tiene que estar detrás del igual…

E: Tiene que estar a un lado del igual, sí.

A: Bueno, mejor delante.

E: Vale, y ¿qué sabemos?

A: A ver son $100€$ y W es el total… Madre mía es que no lo veo.

E: No te preocupes, pasamos al siguiente.

[Tras la entrevista se le explicó a la alumna cómo resolverlo]

- **Ítem 27:**

E: En este te decían que cada pastel cuesta p euros y cada bollo b euros, y se compran 4 pasteles y 3 bollos, así que te piden qué significa $4p + 3b$.

A: Pues que son 4 pasteles por el precio que te cuestan más 3 bollos por lo que te cuestan.

E: Entonces es lo que pagas, ¿no?

A: Sí, es lo que pagas.

E: Vale.

- **Ítem 28:**

E: Esta ecuación [Señalando la primera ecuación] te dicen que es válida cuando $x = 6$, y ahora te dicen: ¿sabrías decir para qué valor de x es válida esta? [Señalando la segunda ecuación]

A: Pues sería hacer el paréntesis…

E: A ver tú contestaste $x = 2$, pero no sabías por qué pero sí escribiste un razonamiento muy bueno en el lateral.

A: Creo que fui probando a ver cuál era.

E: Perfecto.

- **Ítem 29:**

E: Vamos a leer el enunciado. [Tras leerlo] Tú contestaste $5b + 6r = 0'90$ que está casi bien, falla un detalle.

A: Habría que haber puesto $0'05b + 0'06r = 0'90$, ¿no?

E: Exacto. Esto es todo, muchas gracias.