SUMA 52
Junio 2006, pp. 23-31

Aplicación de la matemática borrosa a la gestión deportiva

En estas últimas décadas la gestión de las actividades relacionadas con el deporte ha tomado un papel relevante para las instituciones deportivas. La matemática borrosa, aporta un conjunto de algoritmos que permiten establecer la idoneidad del deportista, el cual ha de reunir ciertas cualidades que lo hagan adecuado para la posición o posiciones que debe ocupar en un determinado equipo. Bajo estos preceptos, hay que resaltar que la Teoría de Conjuntos Borrosos no es un segmento de la Matemática emergente en nuestros días si no que, tiene sus inicios en la década de los años 20, siendo en la de los 50, donde sentó sus bases.

In the latter decades the management of the activities related to sport has taken a relevant role for the sports institutions. The blurred mathematics, contributes a set of algorithms that allow to establish the suitability of the sportsman, who has to assemble certain qualities that make him suitable for the position or positions which he must occupy in a certain team. Under these rules, it is necessary to highlight the fact that the Theory of Blurred Sets is not a segment of the emergent Mathematics in our days but, it has its beginnings in the decade of the 20s, being in that of the 50s, when it sat its bases.

En estas últimas décadas la gestión de las actividades relacionadas con el deporte ha tomado un papel relevante para las instituciones deportivas, dado el creciente interés mostrado por la sociedad en general (sobre el fichaje de sus deportistas) y los medios de comunicación en particular. Frecuentemente las cantidades pagadas pueden producir verdaderos escalofríos, los cuales pueden llegar a agudizarse al pensar que quizás el candidato elegido no dará el rendimiento suficiente para compensar los costes asociados a su contratación. A la luz de este razonamiento, la matemática borrosa aporta un conjunto de algoritmos que permiten establecer en gran medida la idoneidad del deportista, el cual ha de reunir ciertas cualidades que lo hagan adecuado para la posición o posiciones que debe ocupar en un determinado equipo.

Metodología general

El procedimiento que se propone es sencillo, y permite ser aplicado de manera inmediata en infinidad de situaciones. Este método se sustenta en cuatro fases:

1. Establecer el *perfil idóneo* de cada posición en el equipo.

2. Buscar para cada una de estas posiciones los deportistas susceptibles de ocuparlas, los cuales previamente pueden ser sometidos a una serie de exigencias anteriormente preestablecidas. Así, se dispondrá de diversos candidatos para cada posición a cubrir.

3. Realizar las pruebas convenientes para obtener el perfil concreto de cada deportista. Ello estará en función del perfil concreto de cada uno de los deportistas que optan a cada una de las posiciones del equipo.

4. Determinar el grado de cercanía entre los perfiles idóneos para cada posición y los de cada candidato. El sujeto que se encuentre más próximo al ideal buscado para cada posición será el más adecuado para prestar sus servicios en el futuro Club. Cuanto más lejos se halla el perfil del deportista del perfil *idóneo*, menos conveniente resultará ser desde una perspectiva técnica. De ahí que la colaboración de aquellas personas expertas en la materia tenga un peso relativo relevante en todo el proceso. Son los llamados *expertos* y son los que conocen bien a fondo las cualidades de cada deportista.

Los descriptores de las cualidades que permiten decidir la adquisición de los servicios de un deportista por parte de un Club Deportivo, entre otros, podrían ser:

Alfredo Juan Grau Grau
IES La Milagrosa. Cullera. Valencia

- Aspectos psico-sociales: actitud ganadora, nivel de disciplina, capacidad de liderazgo, nivel intelectual y cultural, fortaleza mental, facilidad de adaptación a la cultura y clima del país, fidelidad al club, etc.

- Aspecto físicos: resistencia al dolor, velocidad media, potencia muscular, nivel de aceleración, fuerza y contundencia, propensión a contraer enfermedades, nivel de recuperación después del esfuerzo, rapidez en la aparición del cansancio, etc.

- Aspectos técnicos: posiciones atacantes (velocidad con y sin balón, potencia de tiro con pierna izquierda y derecha, visión de juego, etc.), posiciones defensivas (contundencia en la defensa, protección del balón, carácter resolutivo, etc.) y posiciones mixtas (manera de centrar con pierna derecha o izquierda, potencial de cabeza, trabajo en equipo, transmisión de tranquilidad, etc.)

Seguidamente resulta imperante el establecimiento del *perfil idóneo* de un deportista, y para ello se recurre a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos. El número de cualidades exigidas es igual a n (número finito), las cuales formarán un conjunto llamado E:

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \qquad [1]$$

Cuando se tienen establecidas las cualidades inherentes a la actividad a desarrollar por el deportista, se solicita la opinión de varios expertos para que indiquen el nivel óptimo[1] que debería poseer el *deportista idóneo*. Así pues, para las cualidades $e_1, e_2, \ldots, e_n$, se establecen unos niveles $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ respectivamente, es decir $\mu_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. De manera que, el descriptor del deportista idóneo puede ser representado mediante el subconjunto borroso $D=\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$, y disponiendo sobre la mesa del conjunto de m candidatos en posesión de las cualidades requeridas, se inicia una de las tareas clave para el éxito del proceso, que consiste en asignar a cada uno de ellos los niveles para cada una de las cualidades mediante P_j. A estos efectos, los expertos han de tener amplio conocimiento de las aptitudes del deportista objeto de análisis, obteniéndose así un subconjunto borroso con tales características. La matriz de cualidades sería:

	e_1	e_2	e_3	…	e_{n-1}	e_n
$\underset{\sim}{D} =$	μ_1	μ_2	μ_3	…	μ_{n-1}	μ_n
$\underset{\sim}{D} =$	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	$\mu_3^{(j)}$	…	$\mu_{n-1}^{(j)}$	$\mu_n^{(j)}$

en donde $\mu_i^{(j)} \in [0, 1]$ representa el nivel de la cualidad i, $i = 1, 2, \ldots, n$, poseída por el deportista candidato j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

La distancia de Hamming
El siguiente paso va a permitir una primera aproximación al proceso óptimo de decisión. Ahora se determina un orden de prelación entre los deportistas candidatos; desde el más idóneo hasta el menos deseable. Esto será posible gracias al concepto de *distancia* o grado de *alejamiento* existente entre el perfil idóneo y el que describe a cada uno de los deportistas susceptibles de ocupar un puesto.

Esta idea que gira en torno al concepto de distancia se puede cuantificar según las aportaciones de Kaufmann y Gil Aluja (82, 87 y 93) mediante la *distancia relativa de Hamming*, la cual penaliza tanto al jugador que no llega al nivel exigido como al que posee niveles superiores a los demandados, y cuya expresión analítica propone:

$$\delta(\underset{\sim}{D},\underset{\sim}{P}_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i - \mu_i^{(j)}\right| \qquad [2]$$

Si consideramos los jugadores P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 una vez halladas las distancias entre el perfil idóneo y los perfiles de cada uno nos encontramos en disposición de establecer un orden. Aquél que exprese un grado de alejamiento *menor* con respecto al *idóneo* será el candidato más cercano al óptimo. Así se optaría por conseguir los servicios del jugador P_2; de no poder ser, los de P_4, y así sucesivamente, a saber:

$$\delta(\underset{\sim}{D}_Z,\underset{\sim}{P}_2) < \delta(\underset{\sim}{D}_Z,\underset{\sim}{P}_4) < \delta(\underset{\sim}{D}_Z,\underset{\sim}{P}_1) < \delta(\underset{\sim}{D}_Z,\underset{\sim}{P}_5) < \delta(\underset{\sim}{D}_Z,\underset{\sim}{P}_3) \quad [3]$$

Dado que las cualidades pueden tener una importancia relativa distinta, cabe introducir la posibilidad de asignarles unos pesos distintos a cada una de ellas, dentro del intervalo [0,1]. Estos coeficientes vienen determinados por ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, y será el equipo técnico quien valorará esos pesos. Siendo: $v_1=\omega_1/\Sigma\omega_i$, $v_2=\omega_2/\Sigma\omega_i$, …, $v_n=\omega_n/\Sigma\omega_i$, la distancia de Hamming será sustituida por la nueva expresión:

$$\pi(\underset{\sim}{D}_Z,\underset{\sim}{P}_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i\left|\mu_i - \mu_i^{(j)}\right| \qquad [4]$$

donde $j = 1, 2, \ldots, m$, y además se volvería a acometer la operación descrita en [3].

Aportaciones del coeficiente de adecuación
Hasta ahora subyace el razonamiento que implica sancionar de la misma manera no llegar al nivel exigido en cada cualidad, como sobrepasarla. En contraposición, en muchos casos sí es conveniente penalizar cuando para una cualidad no se alcanza el nivel requerido (no recompensando ni castigando cuando se supera). Con el afán de poder acercarse a este últi-

mo postulado surge el llamado *coeficiente de adecuación*. Se construye para cualquier deportista P_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, a un puesto del equipo D, cuando se exigen las características e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Se representa por $\mu_i^{(d)}$ y formula los siguientes supuestos:

Si $\mu_i^{(j)} \geq \mu_i^{(d)}$, $i = e_1, e_2, \ldots, e_n$, $j = P_1, P_2, \ldots, P_n$, entonces se hará:
$k_i\,(j \to d) = 1$ [5]

Si $\mu_i^{(j)} < \mu_i^{(d)}$, $i = e_1, e_2, \ldots, e_n$, $j = P_1, P_2, \ldots, P_n$, se asumirá que
$k_i\,(j \to d) = 1 - \mu_i^{(d)} + \mu_i^{(j)}$ [5]

Se describe el coeficiente de adecuación $k\,(j \to d)$ referente a un deportista P_j, como:

$$k(j \to d) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i(j \to d) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 \wedge \left(1 - \mu_i^{(d)}\mu_i^{(j)}\right)\right] \quad [6]$$

Cabe recordar que $j = P_1, P_2, \ldots, P_m$, y que la jerarquía de prelación es contraria con la expuesta en [3], es decir ahora de mayor a menor.

Índice de máximas facultades. Índice de máximo y mínimo nivel

Existe paralelamente a estas conjeturas otra concepción distinta que penaliza progresivamente el alejamiento de la posición de *máximas facultades* en todas y cada una de las cualidades. Esto implica considerar que el perfil idóneo fuera el de un deportista superdotado que posee todas las propiedades del nivel más alto. El nuevo subconjunto borroso y distancia de Hamming vendrán dados respectivamente por:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$\underset{\sim}{D} =$	μ_1	μ_2	μ_3	...	μ_{n-1}	μ_n

$$\eta\left(\underset{\sim}{D}_Z, \underset{\sim}{P}_j\right) = 1/n\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \mu_i^{(j)}\right)\right] \qquad [7]$$

Por otra parte, no siempre los expertos aceptan que para todas las cualidades, el excedente de capacidad del deportista sobre el nivel exigido deba ser castigado (tesis de Hamming). Por ello, resulta prioritario considerar tan bueno si se llega a dicho nivel como si se sobrepasa, pudiendo utilizar el coeficiente de adecuación sin reservas añadidas. Esto introduce la consideración no sólo del máximo nivel sino también de un mínimo nivel. Tomando nuevamente las cualidades e_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, y considerando un grupo de I aspirantes, y recabadas las informaciones sobre el descriptor del *jugador idóneo*, los subconjuntos borrosos serán los que a continuación se describen:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$\underset{\sim}{I} =$	$\mu_I(e_1)$	$\mu_I(e_2)$	$\mu_I(e_3)$	...	$\mu_I(e_{n-1})$	$\mu_I(e_n)$
$\underset{\sim}{D} =$	$\mu_{P_r}(e_1)$	$\mu_{P_r}(e_2)$	$\mu_{P_r}(e_3)$	...	$\mu_{P_r}(e_{n-1})$	$\mu_{P_r}(e_n)$

en donde $r = 1, 2, \ldots, m$, y además se supone que las m cualidades, $u = a, b, \ldots, p$, precisan estos requisitos. Intuitivamente $(a, b, \ldots, p) \in [0, 1]$. Para el resto de cualidades $v = c, d, \ldots, s$ (*Cual.* u + *Cual.* $v = m$), así cuando un deportista no llega al nivel exigido en el perfil idóneo es penalizado. En cambio, cuando sobrepasa dicho nivel no sufre penalización alguna, pero tampoco es primado. Obtendremos de esta forma dos expresiones, una primera cercana a aquellas características más descriptivas de las cualidades deseadas aplicando así la distancia relativa de Hamming y el segundo grupo que se identifica con un índice de alejamiento del perfil idóneo. Tendremos así las siguientes ecuaciones:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{P}_r\right) = \frac{1}{Cual.u}\sum_{u=a}^{p}\left|\mu_{\underset{\sim}{I}}(E_u) - \mu_{\underset{\sim}{P}_r}(E_u)\right| \quad [8.a]$$

$$\zeta\left(\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{P}_r\right) = \frac{1}{Cual.v}\sum_{v=c}^{s}\left\{0 \vee \left[\mu_{\underset{\sim}{I}}(E_v) - \mu_{\underset{\sim}{P}_r}(E_v)\right]\right\} \quad [8.b]$$

Cabe destacar, que integrando estas dos expresiones en una se obtiene el *índice de máximo y mínimo nivel*, y tomaremos el mismo orden que en [3]:

$$\sigma\left(\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{P}_r\right) = \frac{\left[\varphi\left(\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{P}_r\right) + \zeta\left(\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{P}_r\right)\right]}{Cual.u + Cual.v} \quad \text{donde } Cual.u + Cual.v = m \; [9]$$

<u>Supuesto 1</u>: Fichaje de un extremo izquierda (EI)

Apliquemos un caso práctico que paulatinamente irá realizando los cálculos matemáticos descritos. Supóngase que se trata de cubrir la posición de *extremo izquierda* en un equipo de fútbol. Según los expertos, este puesto ha de cumplir seis cualidades (a, b, ..., f), cuyo conjunto borroso se determina con la matriz 1 (siguiente página).

Notación matriz:
a=buena complexión física
b=depurada técnica
c=juego de cabeza
d=buen regate
e=dureza en el juego
f=visión conjunta del juego

	a	b	c	d	e	f	*perfiles*
$\underset{\sim}{D}_{EI}$	μ_a=0,5	μ_b=1	μ_c=0,8	μ_d=1	μ_e=0,3	μ_f=1	*dep. idóneo*
$\underset{\sim}{A}$	$\mu_a^{(A)}$=0,7	$\mu_b^{(A)}$=0,8	$\mu_c^{(A)}$=0,4	$\mu_d^{(A)}$=0,9	$\mu_e^{(A)}$=0,8	$\mu_f^{(A)}$=0,5	*Candidato A*
$\underset{\sim}{B}$	$\mu_a^{(B)}$=0,4	$\mu_b^{(B)}$=0,9	$\mu_c^{(B)}$=0,6	$\mu_d^{(B)}$=0,7	$\mu_e^{(B)}$=0,2	$\mu_f^{(B)}$=0,9	*Candidato B*
$\underset{\sim}{C}$	$\mu_a^{(C)}$=0,8	$\mu_b^{(C)}$=1	$\mu_c^{(C)}$=0,9	$\mu_d^{(C)}$=0,6	$\mu_e^{(C)}$=0,9	$\mu_f^{(C)}$=0,7	*Candidato C*

Matriz 1

$\underset{\sim}{D}_{EI}$ =Perfil idóneo.

$\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ y $\underset{\sim}{C}$ =Perfiles propios de los tres jugadores.

Aplicando la distancia de Hamming propuesta en [4], y suponiendo los pesos: ω_a=0,2, ω_b=1, ω_c=0,6, ω_d=0,9, ω_e=0,3 y ω_f=0,8 ($\Sigma\omega_i$=3,8); las puntuaciones para los deportistas *A*, *B* y *C*, considerando ν_a=0,05, ν_b=0,26, ν_c=0,15, ν_d=0,24, ν_e=0,8 y ν_f=0,21, serían:

$$\pi\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{A}\right)=0{,}05\ |0{,}5-0{,}7|+0{,}26\ |1-0{,}8|+0{,}15\ |0{,}8-0{,}4|+$$
$$+0{,}24\ |1-0{,}9|+0{,}08\ |0{,}3-0{,}8|+0{,}21\ |1-0{,}5|\ =0{,}29$$

Para abreviar se facilita que

$$\pi\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{B}\right)=0{,}16$$

$$\pi\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{C}\right)=0{,}22$$

con lo cual,

$$\pi\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{B}\right)<\pi\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{C}\right)<\pi\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{A}\right)$$

conduce a decantarse por el jugador *B*, ya que es el más cercano al *perfil idóneo*. En este caso se castiga igualmente al jugador que no llega al citado perfil, como al que lo sobrepasa.

Aprovechando el recurso del coeficiente de adecuación, que permite sancionar no alcanzar el nivel deseado pero ni se premia ni se castiga el sobrepasarlo, y utilizando las relaciones [5] y [6], se obtendrán los siguientes resultados:

$$k_a(A\rightarrow D_{EI})=1\wedge(1\text{-}0{,}5+0{,}7)=1$$
$$k_b(A\rightarrow D_{EI})=1\wedge(1\text{-}1+0{,}8)=0{,}8$$
$$k_c(A\rightarrow D_{EI})=1\wedge(1\text{-}0{,}8+0{,}4)=0{,}6$$
$$k_d(A\rightarrow D_{EI})=1\wedge(1\text{-}0{,}5+0{,}7)=0{,}9$$
$$k_e(A\rightarrow D_{EI})=1\wedge(1\text{-}0{,}5+0{,}7)=1$$
$$k_f(A\rightarrow D_{EI})=1\wedge(1\text{-}0{,}5+0{,}7)=0{,}5$$

De igual modo, se calculan estos previos para los jugadores *B* y *C*, y prosiguiendo se tendrá:

$$k(A\rightarrow D_{EI})=1/6(1+0{,}8+0{,}6+0{,}9+1+0{,}5)=0{,}48$$
$$k(B\rightarrow D_{EI})=0{,}51$$
$$k(C\rightarrow D_{EI})=0{,}53$$

Bajo este criterio es el jugador *C* el que resultaría más interesante.

Recordemos que adicionalmente se propuso otro supuesto de exigencia de máximas facultades que penalizaba el alejamiento de la posición de máximas cualidades, con respecto a la unidad. Realizando nuevamente los cálculos pertinentes en base a la ecuación [7], se tendría que:

$$\eta\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{A}\right)=\frac{1}{6}(1\text{ - }0{,}7+1\text{ - }0{,}8+1\text{ - }0{,}4+1\text{ - }0{,}9+$$
$$+1\text{ - }0{,}8+1\text{ - }0{,}5)=0{,}32$$

$$\eta\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{B}\right)=0{,}38$$

$$\eta\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{C}\right)=0{,}18$$

Así pues, según el orden:

$$\eta\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{C}\right)<\eta\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{A}\right)<\eta\left(\underset{\sim}{D}_{EI},\underset{\sim}{B}\right)$$

de nuevo el jugador idóneo es el *C*.

Se complementan estos resultados calculando también los índices de máximo y mínimo nivel, respectivamente. La ecuación [8.a] agrupa las tres primeras cualidades (*Cual. u* = buena complexión física, depurada técnica y juego de cabeza) y no conviene sobrepasar el nivel óptimo. Por el contrario la ecuación [8.b] indica que es indiferente que el jugador sobrepase los niveles exigidos para las restantes cualidades (*Cual. v* = buen regate, dureza en el juego y visión conjunta del juego). Llevando todo esto a la práctica, se analiza para el jugador *A* que:

$$\varphi_a\left(D_{EI},A\right)=|0{,}5-0{,}7|=0{,}2$$

$$\varphi_b(D_{EI},A)=|1-0{,}8|=0{,}2$$

$$\varphi_c(D_{EI},A)=|0{,}8-0{,}4|=0{,}4$$

se corresponden con la cualidades del primer grupo y

$$\zeta_c(D_{EI},A)=0\vee(1-0{,}9)=0{,}1$$

$$\zeta_e(D_{EI},A)=0\vee(0{,}3-0{,}8)=0$$

$$\zeta_f(D_{EI},A)=0\vee(1-0{,}5)=0{,}5$$

con las del segundo. Idénticamente esto se repite para los jugadores *B* y *C*; y sustituyendo sus valores en [9] se obtiene el índice de máximo y mínimo nivel, es decir:

$$\sigma(D_{EI},A)=\frac{1}{6}(0{,}2+0{,}2+0{,}4+0{,}1+0+0{,}5)=0{,}23$$

$$\sigma(D_{EI},B)=0{,}15$$

$$\sigma(D_{EI},C)=0{,}18$$

Estos valores numéricos conducen a opinar que el jugador idóneo es el *B*.

Asignación óptima de un conjunto de candidatos a los distintos puestos vacantes

Hasta el momento disponíamos de un puesto a cubrir y varios candidatos. En este apartado abordaremos la posibilidad de atribuir distintos puestos entre todos los candidatos disponibles.

Partimos de la base de que existen un número limitado de puestos del equipo a cubrir *m*, por un número también limitado de deportistas que optan por un puesto en el equipo titular *r*, en donde $m\leq r$. Es evidente que un número igual a $r-m\geq 0$ constituirán los deportistas *suplentes* del equipo. También será necesario considerar un número (también limitado) *n* de cualidades.

Hemos definido así tres conjuntos de elementos de naturaleza bien diferenciada:

$$T=\left\{t_j \;/\; j=1,2,\ldots,m\right\} \qquad [10]$$

que comprende los m puestos a ocupar:

$$P=\left\{p_i \;/\; i=1,2,\ldots,r\right\} \qquad [11]$$

pertenecientes a todos los candidatos que postulan por las plazas:

$$E=\left\{e_h \;/\; h=1,2,\ldots,n\right\} \qquad [12]$$

E recoge el conjunto de cualidades y características exigidas en la asignación, y a partir de los tres conjuntos descritos iniciamos así el proceso con la descripción de los *perfiles idóneos* de cada una de las posiciones del equipo, utilizando como descriptores *m* subconjuntos borrosos, tales como:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$\underset{\sim}{t}_j =$	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	$\mu_3^{(j)}$	...	$\mu_{n-1}^{(j)}$	$\mu_n^{(j)}$

donde $\mu_h^{(j)}\in[0,1]$, $h=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$

Describimos seguidamente cada uno de los *r* deportistas que aspiran a la titularidad mediante los subconjuntos borrosos, así como las *n* cualidades. Presentamos así, los *r* subconjuntos borrosos siguientes:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$\underset{\sim}{p}_i =$	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	$\mu_3^{(j)}$	...	$\mu_{n-1}^{(j)}$	$\mu_n^{(j)}$

donde $\mu_h^{(j)}\in[0,1]$, $h=1, 2, \ldots, n$, $i=1, 2, \ldots, r$

El procedimiento para detallar el acercamiento o alejamiento de cada uno de los candidatos con respecto a los puestos descritos, se llevará a cabo con la: distancia de Hamming, coeficiente de adecuación, índices de máximas facultades y máximo y mínimo nivel, con la salvedad de que ahora disponemos de *m* puestos a cubrir.

Veamos a continuación cómo se describen todos estos procedimientos:

a. Utilización de la distancia de Hamming

Implicaba penalizar tanto al jugador que no llegaba a las cualidades exigidas como al que las sobrepasaba. Podemos considerar que todas las cualidades tienen el mismo interés o por el contrario adjudicarles un *grado* o *peso* de importancia relativa en el segmento [0, 1], es decir:

$$W_h^{(j)} \in \left[0,1\right], \; j=1,2,\ldots,m, \; h=1,2,\ldots,n$$

Hallaremos los pesos $V_h^{(j)}$ que satisfagan[2]:

$$V_h^{(j)} = \frac{W_h^{(j)}}{\sum_{h=1}^{n} W_h^{(j)}}, \quad j=1,2,\ldots,m, \quad h=1,2,\ldots,n \quad [13]$$

Ya calculados los h x j pesos aplicamos la distancia de Hamming a partir de la siguiente fórmula, así como la obtención de la respectiva matriz de valores:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{t}_j, \underset{\sim}{p}_i\right) = \sum_{h=1}^{n} \nu_h^{(j)} \left| \mu_h^{(j)} - \mu_h^{(i)} \right|, \; i=1,\ldots,r, \; j=1,\ldots,m \quad [14]$$

$$\left[\underset{\sim}{D}\right] = \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{p}_1 & \underset{\sim}{p}_2 & \underset{\sim}{p}_3 & & \underset{\sim}{p}_{r-1} & \underset{\sim}{p}_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} \varphi\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_1\right) & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_2\right) & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_3\right) & \cdots & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_{r-1}\right) & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_r\right) \\ \varphi\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_1\right) & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_2\right) & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_3\right) & \cdots & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_{r-1}\right) & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_r\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_1\right) & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_2\right) & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_3\right) & \cdots & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_{r-1}\right) & \varphi\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_r\right) \end{pmatrix} \end{array}$$

[15]

b. Utilización del coeficiente de adecuación

Penalizamos cuando en una cualidad el nivel poseído por un candidato es inferior al exigido en el perfil idóneo de la posición descrita, pero no se penaliza ni bonifica, si sobrepasa el nivel exigido (es negativo no llegar y consideramos igualmente favorable llegar o superarlo).

Siguiendo en la misma línea de adjudicar niveles a las distintas cualidades, para $W_h^{(j)}$, con j = 1, 2, ..., m, h = 1, 2, ..., n, se obtienen los pesos $V_h^{(j)}$, con j = 1, 2, ..., m, h = 1, 2, ..., n para la correspondiente ponderación convexa, y obtenemos así el procedimiento:

$$\lambda\left(\underset{\sim}{t}_j, \underset{\sim}{p}_i\right) = \sum_{h=1}^{n} V_h^{(j)} \left[1 \wedge \left(1 - \mu_h^{(j)} + \mu_h^{(i)}\right)\right], i=1,2,\ldots,r; j=1,2,\ldots,m \quad [16]$$

La correspondiente matriz de valores adoptará la siguiente estructura:

$$\left[\underset{\sim}{K}\right] = \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \underset{\sim}{p}_1 & \underset{\sim}{p}_2 & \underset{\sim}{p}_3 & & \underset{\sim}{p}_{r-1} & \underset{\sim}{p}_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_1\right) & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_2\right) & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_3\right) & \cdots & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_{r-1}\right) & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_1,\underset{\sim}{p}_r\right) \\ \lambda\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_1\right) & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_2\right) & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_3\right) & \cdots & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_{r-1}\right) & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_2,\underset{\sim}{p}_r\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_1\right) & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_2\right) & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_3\right) & \cdots & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_{r-1}\right) & \lambda\left(\underset{\sim}{t}_m,\underset{\sim}{p}_r\right) \end{pmatrix} \end{array}$$

[17]

La aplicabilidad de las matrices [D] o [K] nos permitirá abordar una gran diversidad de posibilidades para dar solución a situaciones que la actividad deportiva pueda plantearnos. El uso de la tercera hipótesis (índices de máximo y mínimo nivel) vamos a pasarla por alto, puesto que su desarrollo es similar al descrito. La utilización de un método u otro dependerá única y exclusivamente del grado de adecuación de las hipótesis a la percepción que el sujeto decisor tenga de la realidad y necesidades de cada momento.

Existe una amplia variedad de metodologías[3] empíricas para poner en práctica nuestras pretensiones. En el caso que nos ocupa vamos a centrarnos en un método muy concreto que consiste en la eliminación consecutiva de filas y columnas.

Algoritmo de asignación por eliminación de filas y columnas

Para llevarlo a la práctica tendremos que seguir las siguientes etapas:

1. Partimos eligiendo cualquiera de los conjuntos borrosos

$$\left[\underset{\sim}{D}\right] o \left[\underset{\sim}{K}\right]$$

y buscamos el elemento con el valor más elevado.

2. El elemento seleccionado se corresponde con una fila y columna concreta. El punto de cruce se corresponde con el candidato idóneo para ocupar el puesto en cuestión.

3. Eliminamos la fila y columna de la etapa anterior, correspondiente al deportista seleccionado y posición en el equipo, quedando así una relación borrosa de orden inferior.

4. A partir del conjunto borroso, resultante de eliminar una fila y una columna, volvemos a repetir todo el proceso anterior buscando como siempre el mayor valor.

5. Se repite este procedimiento hasta agotar toda la relación borrosa. Si el número de deportistas fuera superior al número de puestos a cubrir, los que no resultaran seleccionados pasarían a formar parte del grupo de jugadores *suplentes*.

Con la finalidad de comprobar la sencillez de esta metodología veamos un ejemplo práctico de gran utilidad.

<u>Supuesto 2</u>: cubrir tres posiciones con cinco jugadores

Supongamos que se nos plantea el problema de asignación de cinco jugadores de fútbol ($p_1, p_2, p_3, ..., p_5$) a tres posiciones en el equipo (t_4, t_6 y t_{10}). Limitamos a ocho el número de cualidades ($e_1, e_2, e_3, \ldots, e_8$). Los descriptores de los perfiles ideales[4] vendrán dados por la siguiente matriz:

$$[\underset{\sim}{T}] = \begin{array}{c} \\ \underset{\sim}{t}_4 \\ \underset{\sim}{t}_6 \\ \underset{\sim}{t}_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 1 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los cinco jugadores de que se disponen para cubrir los tres puestos descritos en la matriz anterior pueden ser detallados por los subconjuntos borrosos también proporcionados en la siguiente matriz:

$$[\underset{\sim}{P}_j] = \begin{array}{c} \\ \underset{\sim}{p}_1 \\ \underset{\sim}{p}_2 \\ \underset{\sim}{p}_3 \\ \underset{\sim}{p}_4 \\ \underset{\sim}{p}_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}6 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para obtener resultados, y así tomar decisiones óptimas, tanto podríamos aplicar el procedimiento que propone Hamming como el del coeficiente de adecuación, para calcular las distancias que se producen entre los perfiles de los jugadores con respecto al idóneo. Para no alargar excesivamente esta cuestión nos decantamos por el segundo método y además ponderando las cualidades[5].

En primer lugar hagamos el cálculo de los *pesos* mediante la expresión [13] y posteriormente las operaciones necesarias para hallar los primeros elementos de la relación borrosa $[\underset{\sim}{K}]$, es decir:

$$[V_h^{(j)}] = \begin{array}{c} \\ t_4 \\ t_6 \\ t_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}16 & 0{,}07 & 0{,}12 & 0{,}11 & 0{,}18 & 0{,}09 & 0{,}14 \\ 0{,}10 & 0{,}12 & 0{,}15 & 0{,}17 & 0{,}12 & 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}13 & 0{,}14 & 0{,}10 & 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}14 & 0{,}09 & 0{,}14 \end{pmatrix} \end{array}$$

Finalmente obtenemos la siguiente relación borrosa[6] aplicando la expresión [17]:

$$[\underset{\sim}{K}] = \begin{array}{c} \\ t_4 \\ t_6 \\ t_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}919 & 0{,}935 & 0{,}895 & 0{,}800 & 0{,}833 \\ \boxed{0{,}967} & 0{,}938 & 0{,}888 & 0{,}872 & 0{,}938 \\ 0{,}877 & 0{,}880 & 0{,}862 & 0{,}732 & 0{,}812 \end{pmatrix} \end{array}$$

Escogemos la cifra más elevada y se corresponde con (t_6, p_1) con un valor

$$\lambda\left(\underset{\sim}{t}_6, \underset{\sim}{p}_1\right) = 0{,}967$$

Se asigna de esta manera el deportista p_1 a la posición t_6. Al eliminar la fila t_6 y la columna p_1 resulta una nueva relación borrosa, a saber:

$$[\underset{\sim}{K}] = \begin{array}{c} \\ t_4 \\ t_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{0{,}935} & 0{,}895 & 0{,}800 & 0{,}833 \\ 0{,}880 & 0{,}862 & 0{,}732 & 0{,}812 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ahora procede eliminar la posición (t_4, p_2), con un valor observado

$$\lambda\left(\underset{\sim}{t}_4, \underset{\sim}{p}_2\right) = 0{,}935$$

Seguidamente será el jugador p_2 el que ocupará la posición t_4. Al eliminar columna y fila primeras el subconjunto borroso se reduce a la siguiente expresión:

$$[\underset{\sim}{K}] = t_{10} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{0{,}862} & 0{,}732 & 0{,}812 \end{pmatrix} \end{array}$$

Será el jugador p_3 el que ocupará la posición t_{10}, con un valor

$$\lambda\left(\underset{\sim}{t}_{10}, \underset{\sim}{p}_3\right) = 0{,}862$$

Una vez adjudicadas las posiciones se aprecia que los deportistas p_4 y p_5 quedarán como suplentes.

Tratamiento de los jugadores polivalentes

En este apartado abordaremos la posibilidad de identificar si de entre los distintos jugadores, se puede discriminar aquellos candidatos que disponen de la capacidad de desarrollar varias posturas en el campo de juego. Lo que denominaremos a partir de ahora como *jugadores idóneos polivalentes*; y por sus implicaciones económico-financieras y técnicas estarán en el ojo del huracán y será de vital importancia desarrollar todos los procedimientos que nos permitan localizarlos.

La metodología que vamos a implementar se identifica con el concepto de coeficiente de adecuación[7] que tan asiduamente hemos utilizado. La base de este método consiste en construir un subconjunto borroso que describa al deportista idóneo polivalente, tomando el mayor nivel entre los fijados en los perfiles de cada posición.

Si consideramos como nivel de cualidad E_i, en el perfil idóneo polivalente:

$$\mu_i^{\max} = \mu_i^1 \cup \mu_i^2 \cup \ldots \cup \mu_i^q$$

Bajo esta perspectiva, solo se castigará a los perfiles que superen a μ_i^{max}, pero no cuando el citado nivel se halle entre los idóneos de cada posición y el idóneo de polivalencia, es decir en los tramos:

$$\mu_i^{\max} - \mu_i^1, \mu_i^{\max} - \mu_i^2, \ldots, \mu_i^{\max} - \mu_i^q$$

Se describe mediante una matriz las posiciones susceptibles de ser ocupadas por el deportista elegido:

$$\begin{array}{c} \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad\quad e_{n-1} \quad e_n \\ [\underset{\sim}{T}] = \begin{pmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \mu_3^1 & \ldots & \mu_{n-1}^1 & \mu_n^1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2 & \ldots & \mu_{n-1}^2 & \mu_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^m & \mu_2^m & \mu_3^m & \ldots & \mu_{n-1}^m & \mu_n^m \end{pmatrix} \end{array} \quad [18]$$

El *perfil idóneo polivalente* será en su caso:

$$\begin{array}{c} \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad\quad e_{n-1} \quad e_n \\ \underset{\sim}{T}_{1,2,\ldots,q} = \begin{pmatrix} \mu_1^{\max} & \mu_2^{\max} & \mu_3^{\max} & \cdots & \mu_{n-1}^{\max} & \mu_n^{\max} \end{pmatrix} \end{array} \quad [19]$$

Si disponemos de m deportistas cuyos descriptores vienen dados por:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$\underset{\sim}{D} =$	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	$\mu_3^{(j)}$	...	$\mu_{n-1}^{(j)}$	$\mu_n^{(j)}$

[20]

Con $j = 1, 2, \ldots, n$

Utilizando el coeficiente de adecuación ya definido anteriormente en la relación matemática:

$$k(j \to d) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 \wedge \left(1 - \mu_i^{\max} + \mu_i^{(j)}\right)\right],\ j = P_1, P_2, \ldots, P_m$$

<u>Supuesto 3</u>: Identificación de jugadores polivalentes

Consideraremos nuevamente las tres posiciones (t_4, t_6 y t_{10}) ilustradas en el supuesto 2 con sus respectivas ocho cualidades (e_1, e_2, …, e_8), obteniéndose el subconjunto borroso mediante la matriz descrita en [18]:

$$\begin{array}{c} \quad\quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \quad e_7 \quad e_8 \\ [T] = \begin{array}{c} t_4 \\ t_6 \\ t_{10} \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

El *perfil idóneo polivalente* es ahora según la matriz [19]:

$$\begin{array}{c} \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \quad e_7 \quad e_8 \\ \underset{\sim}{T}_{4,6,10} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los perfiles de cada uno de los cinco jugadores susceptibles de ocupar la plaza polivalente(recordemos que en función de la relación [20]) eran:

$$\begin{array}{c} \quad\quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \quad e_7 \quad e_8 \\ [\underset{\sim}{P}_j] = \begin{array}{c} \underset{\sim}{p}_1 \\ \underset{\sim}{p}_2 \\ \underset{\sim}{p}_3 \\ \underset{\sim}{p}_4 \\ \underset{\sim}{p}_5 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}6 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array}$$

A la luz de toda la información proporcionada obtenemos los pertinentes coeficientes de adecuación:

$$k\,(P_1 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(0{,}7+0{,}9+1+0{,}8+0{,}8+0{,}7+1+1) = 0{,}88$$

$$k\,(P_2 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(0{,}8+0{,}8+0{,}7+0{,}9+1+0{,}8+1+0{,}8) = 0{,}86$$

$$k\,(P_3 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(0{,}5+1+0{,}8+0{,}9+1+0{,}8+0{,}7+0{,}7) = 0{,}81$$

$$k\,(P_4 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(1+0{,}7+0{,}7+0{,}8+0{,}8+0{,}6+1+0{,}1) = 0{,}73$$

$$k\,(P_5 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(1+0{,}6+0{,}9+1+1+0{,}4+0{,}9+0{,}7) = 0{,}83$$

El orden a considerar las hipótesis aceptadas es:

$$k\,(P_1 \rightarrow T_{4,6,10}) > k\,(P_2 \rightarrow T_{4,6,10}) > k\,(P_5 \rightarrow T_{4,6,10}) >$$
$$> k\,(P_3 \rightarrow T_{4,6,10}) > k\,(P_4 \rightarrow T_{4,6,10})$$

Es evidente que el jugador que más se acerca al candidato polivalente es el P_1, siguiéndole muy de cerca el P_2. El orden preferente queda descrito.

Conclusiones finales

A modo de conclusión, se puede afirmar que de una forma sencilla se ha abierto un camino para dar solución a un problema de candente interés que la práctica del deporte reclama insistentemente. Aunque no se trata de la panacea, sí puede proporcionar una eficaz ayuda en la toma de decisiones sobre el fichaje de un deportista; y dada la flexibilidad de estos instrumentos se pueden cubrir infinidad de necesidades. ■

NOTAS

1 El grado o nivel de cada cualidad se cuantificará según la escala semántica endecadaria aplicada en los trabajos de los profesores Kaufmann y Gil Aluja, desarrollados en el campo de la matemática borrosa, especificándose de la siguiente forma: [1] perfecto, [0,9] muy bueno, [0,8] bueno, [0,7] bastante bueno, [0,6] más bien bueno, [0,5] regular, [0,4] más bien malo, [0,3] bastante malo, [0,2] malo, [0,1] muy malo, [0] pésimo.

2 Recuérdese que la suma de todos los pesos ha de ser igual a la unidad.

3 Citemos algunas: 1. Algoritmo de asignación por eliminación de filas y columnas. 2. El algoritmo húngaro de asignación, 3. Algoritmo *branch and bound*, etc.

4 Recuérdese que estos perfiles son graduados mediante las opiniones de *expertos* en el tema que nos ocupa.

5 Es decir, la expresión matemática a aplicar sería:

$$\lambda\left(\underset{\sim}{t}_j, \underset{\sim}{p}_i\right) = \sum_{h=1}^{8} V_h^{(j)} \left[1 \wedge \left(1 - \mu_h^{(j)} + \mu_h^{(i)}\right)\right]$$

tomando en consideración que i = 1, 2, 3, 4, 5, y j = 4, 6, 10.

6 Hemos creído conveniente agregar un decimal adicional en esta matriz, puesto que con solo dos decimales, varias cifras eran coincidentes. Los cálculos para esta matriz se han hecho con una hoja de cálculo Excel.

7 Alternativamente también se puede realizar este estudio por cualquiera del resto de metodologías expuestas a lo largo del artículo como son: distancia de Hamming, índices de máximo y mínimo nivel, etc., en función del planteamiento y exigencias que se persigan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GIL ALUJA, J. (2002): "El coneixement en l'incertesa", trabajo publicado en el libro recopilador de la Jornada Académica en recuerdo del profesor Carles Cassú Mellado: *El tractament científic de l'incertesa*, 21-33, Universitat de Girona, Girona.

GIL ALUJA, J. (1998): *Investment in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordretch, London.

GIL ALUJA, J. (1996): *La Gestión Interactiva de los Recursos Humanos en la Incertidumbre*, CEURA, Madrid, 170-172.

GIL ALUJA, J. (1998): *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

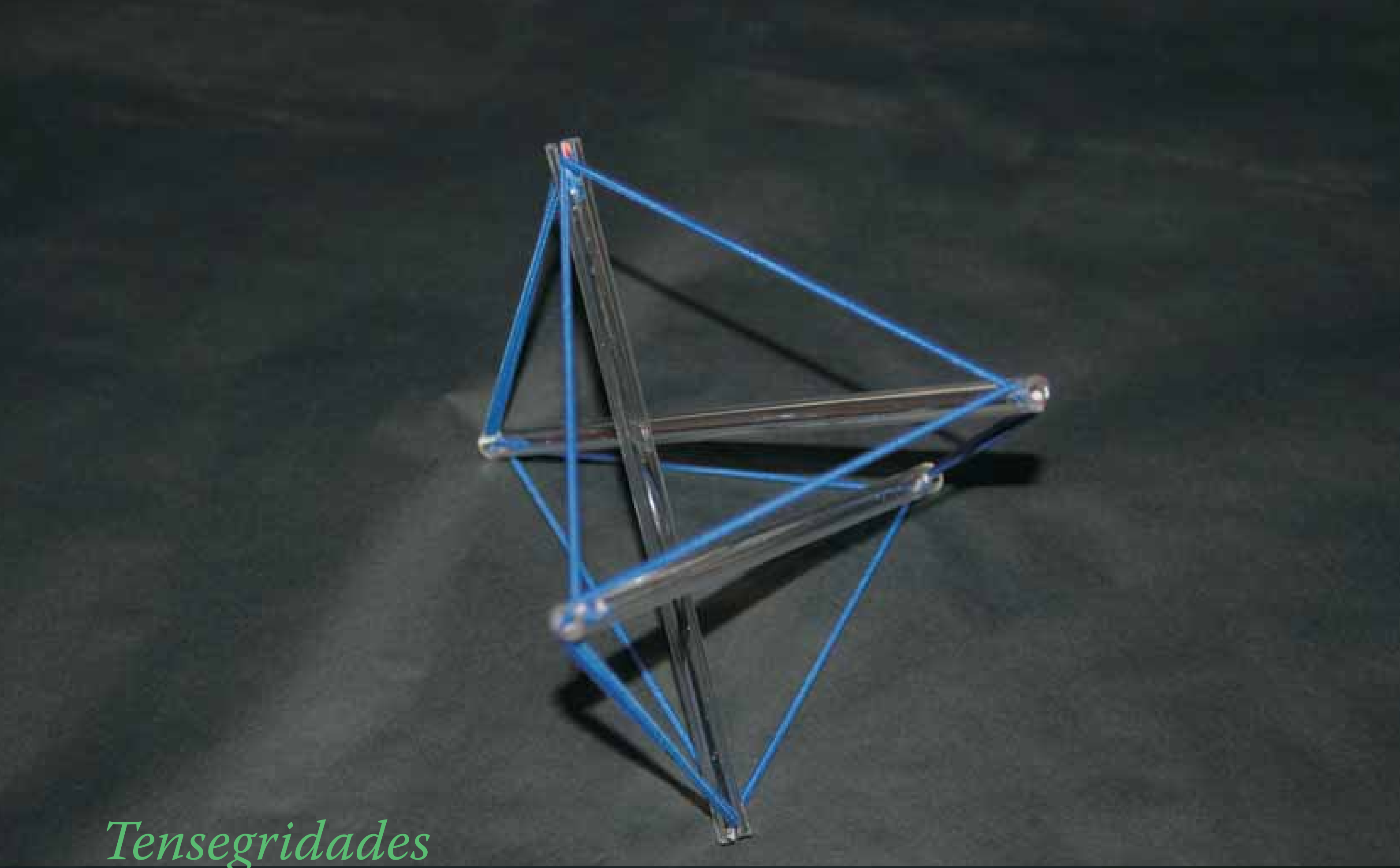
GIL ALUJA, J. (1985): *Selección de personal: El problema de la polivalencia y el de la uniformidad*, CEURA, Madrid.

GIL LAFUENTE, J. (2002): "El Mejor Sistema de Designación Arbitral: el Algoritmo Húngaro", *Congreso Internacional A.C.S.E.G. 2002*, Boulogne-Sur-Mer (Francia), 167-180.

KAUFMANN, A. (1982): *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos*, CECSA.

KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1993): *Técnicas especiales para la gestión de expertos*, Milladoiro, Santiago de Compostela.

KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1987): *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Hispano Europea.



Tensegridades

Objetos y Fotos FMC