FACULTAT DE FILOSOFIA I CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

PROGRAMA 3117 RD 99/2011 DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

LÍNEA: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN, EVALUACIÓN, ORIENTACIÓN Y DIAGNÓSTICO EN EDUCACIÓN

La dimensión de razonamiento matemático. Desarrollo de un instrumento diagnóstico dirigido a múltiples niveles educativos y modelización de su estructura

TESIS DOCTORAL

Presentada por

Mario Marín Sánchez

Directores de Tesis:

Dr. Jesús M. Suárez Rodríguez

Dr. Gonzalo Almerich Cerveró

Diciembre, 2017

Contenido

1. INTRODUCCIÓN

I.1 Panorama general

El contexto de globalización y competitividad del mundo de hoy demanda ciudadanos con capacidades individuales y colectivas muy elaboradas, algunas inimaginables hace apenas 20 años Inrie (2010). El ciudadano contemporáneo debe adaptarse a un entorno que, empujado por muy diversos intereses, cambia vertiginosamente. La ciencia y la tecnología arrastran la dinámica de nuestras sociedades hacia escenarios profesionales cada vez más complejos y competitivos.

El profesional y en general el ciudadano del mañana deberán asumir funciones y tareas que requieren de habilidades cada vez más elaboradas, quizá la afirmación de Kegan (1982, citada por Brendel, Kolbert y Foster, 2002, p. 225), acerca de que las profesiones contemporáneas se convierten cada vez más en un "clamor por el pensamiento que en una demanda por la adquisición de ciertas herramientas particulares" tenga cada día más sentido.

En el año 2000, Kavir Shaikh como Vicepresidente de la Commonwealth Association of Science, Technology and Mathematics Educators (CASTME) y Director de Education Bournemouth, UK. afirmaba "la prosperidad, tanto industrial como económica, sólo será posible si el país cuenta con un número apropiado de científicos y tecnólogos" (Shaikh, 2006, p.1). A esta afirmación se pueden agregar dos comentarios. El primero tiene que ver con el hecho de que la creación de un sustento científico, en un país que busque promover el desarrollo de la ciencia, es un problema complejo y demanda muchas y muy variadas acciones. Sin duda, una educación adecuada es la piedra angular dentro de este esquema, pero también lo es la identificación y el desarrollo temprano de los futuros profesionales que serán el talento científico que defina y lleve adelante los proyectos en ciencia y tecnología. El segundo, la prosperidad social, quizá más importante aún, también será posible solamente cuando los países tengan un colectivo mayoritario de ciudadanos con mayor acceso a las oportunidades que la educación ofrece y con ello más preparados para entender y analizar su entorno y así transformarlo positivamente.

Estos dos aspectos refuerzan la idea de que la mejor manera de lograr que las sociedades de cada país o región se impliquen de manera positiva en la prosperidad, es a través de una educación oportuna y de muy alta calidad. En esta llamada sociedad del conocimiento, la educación, está obligada a convertirse en el factor fundamental para cerrar la brecha entre países y entre las personas.

Para Finn y col. (2014) “una meta fundamental de la educación es dotar a los estudiantes con el conocimiento y herramientas necesarias para el pensamiento crítico, la resolución de problemas y ser exitosos en la sociedad y la economía del siglo veintiuno. La medición de ese conocimiento y esas herramientas es fundamental para dar seguimiento al desarrollo de los estudiantes y para evaluar las políticas y las prácticas educativas” (p.1)

A pesar de esta importancia manifiesta resulta preocupante el hecho de que la educación pueda convertirse en un factor de exclusión y empobrecimiento de algunos sectores sociales. Diversas investigaciones revelan el efecto que tiene la educación matemática de alejar a los y las estudiantes de carreras con perfiles científico tecnológicos, haciendo que porciones importantes de la población estudiantil con acceso a la educación superior no aspiren a carreras de esta naturaleza (Shaikh, 2006) lo cual disminuye sus posibilidades de acceder a mejores oportunidades educativas y en consecuencia a mejores oportunidades de empleos y de calidad de vida. Esta es una oscura realidad que afecta con mayor fuerza a los países en desarrollo y dentro de ellos a las poblaciones que no pueden aspirar a la educación primaria y secundaria privadas, usualmente de mayor calidad.

Costa Rica no escapa a esta realidad, según datos del estado de la educación, a la educación superior tanto pública como privada asiste sobre todo población proveniente de hogares de mayor ingreso. Mientras que solamente un 4.4% de la matrícula universitaria total corresponde con el 20% de la población más pobre, un total del 40% proviene del 20% de la población más rica. (Estado de la educación, 2015, p. 198).

En los procesos de admisión del año 2012 a la Universidad de Costa Rica, la más grande del país, de los estudiantes de colegios privados que realizaron el examen de admisión y resultaron elegibles y que además concursaron a carrera, un 47% obtuvieron un cupo. Mientras tanto, en el caso de los colegios públicos, la cifra se reduce en más de la mitad: solo 23% de quienes provenían de esos centros tuvo éxito. (artículo de la nación, por Alejandro Fernández - Actualizado el 21 de octubre de 2012)

El Dr. Leonardo, ministro de educación en el periodo del 2006 al 2014, achaca esta situación a las desigualdades económicas y no tanto a la disparidad de los sistemas educativos privado y público. Esta posición contrasta con la de autoridades de la Universidad de Costa Rica. Para la vicerrectora de vida estudiantil de esta universidad al momento de la publicación el mayor problema es la asimetría en la calidad de la formación que reciben los jóvenes de instituciones privadas respecto a la de colegios públicos. (artículo de la nación, por Alejandro Fernández - Actualizado el 21 de octubre de 2012)

Dentro de este rol de la educación, la matemática es una materia fundamental para fomentar la incorporación de los estudiantes a las carreras con ciertos perfiles científicos. Para Imrie (2010) la matemática es importante porque mejora las oportunidades de las personas en muchos aspectos de su vida. De tal modo que se tornan determinantes en las aspiraciones de desarrollo tanto del individuo como de los países porque abren o cierran puertas a muchas posibilidades. También, en el contexto de la importancia del razonamiento matemático en niños y haciendo referencia a propuestas de la NCTM Varol y Farran (2006) afirman: "En este mundo cambiante aquellos que entiendan y puedan hacer matemáticas tendrán oportunidades y opciones significativamente mejores para forjar su futuro. Las competencias matemáticas abren puertas a futuros productivos. Una carencia de estas competencias las mantiene cerradas" (p. 381).

Toda esta situación, que se trae a discusión con mucha frecuencia en nuestros países, debería traducirse en una determinación de acciones que permitan abordar sistemáticamente las causas de las fallas que se identifiquen. En el caso de la formación matemática, hay dos elementos que deben ser considerados como fundamentales. El primero está directamente relacionado con la definición de las competencias deseables en los futuros ciudadanos, las cuales dependen de diversos factores; unos globales, dictados por las tendencias de desarrollo dominantes, sobre los que vale decir que mal entendidos pueden resultar negativos, por ejemplo la importación de modelos educativos o estándares ajenos a la realidad específica, muchas veces inviables;

otros particulares ligados a las condiciones generales del país y la interpretación que sus políticos, no siempre sabios, estimen adecuadas para el desarrollo. El segundo, a partir de ciertas decisiones y mediciones, establecer acciones para lograr los objetivos propuestos en la educación formal. Acciones que obligan a tener herramientas confiables que permitan dimensionar aquellos aspectos centrales de la formación del estudiante y que sirvan como insumo para determinar y delinear las acciones para esa formación de calidad orientada al desarrollo y el bienestar en nuestras sociedades.

Se enfatiza que la determinación de acciones no es suficiente, hay que definir parámetros que permitan valorar su efecto, no sólo para dimensionar el nivel de desarrollo en que se encuentran éstos en el colectivo estudiantil, sino también para medir el efecto que puedan tener sobre el desarrollo de éstos las acciones de intervención educativa que se propongan e implementen.

Para países en desarrollo esta meta es fundamental para lograr un mejor uso de los recursos invertidos en la educación y para ir cerrando las brechas sociales que genera una educación inapropiada.

I.2 Sobre el valor de la formación matemática

El desarrollo de la capacidad de razonamiento, además de ser necesario en todas las ciencias y áreas de conocimiento en general, ayuda a la capacidad integral del individuo y por lo tanto es un elemento esencial en la esfera laboral y social, además promueve un ciudadano capaz de entender su entorno para que pueda actuar con formación sólida, con confianza y autoestima que le permitan ir más allá de sus propias fronteras para convertirse en un profesional que se adapta a los cambios.

Sin embargo, lograr el desarrollo de esta capacidad de razonamiento es una tarea compleja que demanda distintas acciones de evaluación y de intervención.

En un escenario como el costarricense, donde los recursos son limitados y las prioridades de desarrollo no son necesariamente las mismas de otros países, resulta necesario establecer mediciones científicas y validadas que permitan, como se dijo en el párrafo anterior, tener información de las condiciones que prevalecen y medir la efectividad de las acciones que puedan desarrollarse.

Desde hace muchos años, se ha reconocido la importancia que la educación matemática reviste en el desarrollo de los países. Es a través de ésta que se transmiten a los niños y jóvenes ciertas conductas y saberes que orientan sus acciones dentro de la cultura misma y, en los últimos años, un mecanismo para que las sociedades preparen a sus miembros para ser parte de una cultura científica globalizada. En medio de este anhelo, la educación matemática se va constituyendo como una amalgama compleja de intereses, fines, creencias, percepciones e intervienen diversas organizaciones, todos en busca de un desarrollo del individuo, donde se tienen diferentes perspectivas y concepciones de lo que es deseable, de acuerdo a los países, los valores y las prioridades. Recientemente la relevancia de la educación matemática se ha evidenciado más por el desarrollo en todos los ámbitos de las tecnologías en general y las de información en particular y por la creciente demanda de recursos humanos diversos, de hecho, la mayor parte de la demanda laboral se concentra en profesionales y técnicos de las ingenierías, las ciencias y la medicina, los que requieren para un adecuado cumplimiento sólida formación matemática. No es casualidad que desde hace varios siglos ya hayan existido notables escuelas y organizaciones dedicadas al desarrollo y promoción de esta disciplina.

Sin duda, el razonamiento matemático ha sido y seguirá siendo un promotor de desarrollo de las ciencias y por tanto de las sociedades y también una preocupación constante de aquellos que con mucha razón buscan potenciar el conocimiento. Para Steen (1999) existe una dualidad reconocida al razonamiento, es central para la matemática y constituye la piedra angular para trabajar matemáticamente a través del pensamiento lógico. Diezmann (2004, p.1) agrega, haciendo referencia a posiciones del NCTM, que el razonamiento es la herramienta conceptual para entender matemáticas de los mundos real y abstracto. Al final de cuentas, es un medio que facilita la aprehensión de conceptos en otras ciencias o ingenierías.

La formación matemática pareciera inclinarse hacia lograr que los estudiantes entiendan con profundidad conceptos, fomentar la resolución de problemas, estimular las capacidades de razonamiento para que con ello se acerquen al conocimiento científico y puedan incorporarse en carreras más relacionadas con las ciencias. Para Rico (1995) el docente de matemática moderno reconoce en la enseñanza de la matemática, entre otras características, un núcleo importante de conceptos y saberes que forman parte del bagaje de conocimientos básicos que debe dominar el ciudadano medio; por ello las matemáticas no pueden ser un filtro sino un elemento de promoción y homologación de los alumnos.

A toda esta discusión sobre el rol de la formación matemática debe agregarse un elemento fundamental: los procesos de aprendizaje y de enseñanza. Vygotsky expresa que el desarrollo de las capacidades matemáticas sería más productivo si se sometiera al niño a nuevos aprendizajes precisamente en la zona del desarrollo próximo (Ivic, 1994). Se coincide con la importancia de la noción de andamiaje extrapolada al contexto general de planificación de la educación, y una prueba (un instrumento de medición) que permita ubicar de alguna manera la zona de desarrollo próximo respecto al razonamiento matemático sería fundamental para lograr una estructuración formativa apropiada, siempre en los términos de Vygotsky. Todo esto con la finalidad de planificar tareas que ayuden al estudiante a hacer las conexiones entre las ideas que le ayuden a incrementar ciertas habilidades para que gradualmente puedan desarrollar tareas de razonamiento más complejas.

Existen muchos factores que se relacionan con el desarrollo del razonamiento y sería ingenuo pensar en circunscribirlo a algunas cuantas reglas. Los avances en Psicología alertan acerca de la complejidad del tema, esto representa, ante todo, una motivación para realizar un trabajo como el que se propone y que busca contribuir con algunos elementos que ayuden a entender mejor la diversidad de aspectos que se relacionan con el razonamiento matemático y para que se pueda avanzar en dimensionar el abstracto mismo y el efecto de las acciones que se realicen para transformarlo.

Se asumen como principios básicos los siguientes:

- En mayor o menor nivel todos los y las estudiantes tienen capacidades de razonamiento matemático. Se pueden identificar y diferenciar dos niveles (Hogarth, 2001) llamados pensamiento tácito o deliberado y pensamiento intuitivo. El primero estrechamente ligado con las experiencias previas, el segundo, también conocido como pensamiento innato, que depende más de las características individuales.

- El razonamiento matemático puede verse afectado por el nivel de disposición o predisposición de la persona a involucrarse en un proceso de pensamiento, así como por otros factores de tipo personal.
- Dentro de ciertos límites, esta capacidad es desarrollable mediante acciones concretas ya sean estímulos formales como los que provienen del medio o informales como los que provienen del entorno y la familia.
- La determinación del nivel de desarrollo de esta capacidad, por tener un trasfondo cultural, es un tema fundamentalmente local y que no resulta del todo acertado acogerse, sin una valoración apropiada, a propuestas desarrolladas en contextos sociales, culturales y educativos ajenos a la realidad de interés.

Aunque se comparte completamente el hecho de que existe una fuerte componente innata, respecto a ciertas capacidades relacionadas con la inteligencia humana, también el grado en que se presentan en el individuo no necesariamente tiene una determinación genética determinista, falta mucho que investigar aún para poder dimensionar el efecto de las acciones, deliberadas o no, sobre las mismas y es más que racional pensar que cada individuo debe tener las mejores posibilidades de desarrollarse.

También es fundamental tener en cuenta a los estudiantes talentosos. Para Diezmann y Watters (2002) para que toda la retórica, sobre desarrollo de la ciencia y la tecnología en los países, se acerque a la realidad es necesario reconceptualizar el concepto de formación matemática poniendo énfasis a los estudiantes talentosos, tanto detectarlos como desarrollarlos, sin desatender por su puesto, otros grupos o niveles que requieren otro tipo de formación. En un sentido similar se expresa De Guzmán (2001).

Con base en lo expuesto anteriormente, el planteamiento general de esta investigación es estudiar el contexto sobre el razonamiento matemático y desarrollar pruebas que permitan medir el nivel de razonamiento mostrado por estudiantes de escuela y colegio entre 11 y 17 años y reconocer elementos estructurales asociados. Se utiliza como punto de partida la información disponible de tres años de una prueba de carácter internacional llamada Canguro Matemático, aplicada en Costa Rica desde el año 2011.

I.3 Investigación en Educación Matemática relacionada

La década de los sesentas del siglo pasado marcó un cambio importante en las discusiones sobre el tema de la matemática y su enseñanza, las que se extienden hasta el día de hoy (Artigue, Douady, Moreno & Gómez, 1995). Ya en 1969, Hans Freudenthal ponía de relieve la necesidad de establecer la educación matemática no sólo como un campo de práctica y reflexión sobre la práctica, sino también como un campo de investigación (Artigue, 2014).

De Guzmán (1992, p.31) afirmaba que "la educación matemática es una actividad interdisciplinar extraordinariamente compleja, que ha de abarcar saberes relativos a las ciencias matemáticas y a otras ciencias básicas que hacen uso de ella, a la psicología, a las ciencias de la educación, ... Sólo en tiempos muy recientes se ha ido consolidando la Educación Matemática como un campo, con tareas de investigación propias, difíciles y de repercusiones profundas en su vertiente práctica". Adaptando una expresión de Godino (2014) al rol de la investigación, conviene decir que: se precisa elaborar teorías educativas que articulen teorías curriculares, teorías de aprendizaje y diseño instruccional.

La educación matemática es hoy día un área de indagación dinámica y diversa. Durante los últimos 50 años se ha generado mucha investigación en torno a la educación matemática. Han emergido elementos novedosos, unos productos de los avances de la tecnología, por ejemplo, el rol las Tecnologías de Información y Comunicación en la educación; otros, producto de la investigación en áreas relacionadas como la psicología o la medicina y más en general producto de la reflexión sobre el tema de la educación matemática. Temas como creencias, visiones y concepciones de los docentes y cómo inciden en sus prácticas docentes (Ekmekci, Corkin & Papakonstantinou, 2015; Ernest, 1989; Schoenfeld, 1989), conocimientos y competencias necesarias en el docente (Darling-Hammond & Richardson, 2009; Hill, Rowan & Ball, 2005), relaciones entre la teoría y la práctica (Gómez-Chacón, García-Madruga, Vila, Elosúa & Rodríguez, 2014; Korthagen, Kessels, Koster, Lagerwerf & Wubbels, 2001), entre otras, son líneas de investigación muy activas. Para Sánchez (2011) las nuevas tendencias en educación matemática incluyen la enseñanza de matemática en línea, diseño y rol de la tarea en los procesos de enseñanza, educación y desarrollo de profesores, entre otras. Esto en una visión orientada por elementos de la acción didáctica. Desde la perceptiva de las habilidades o competencias a desarrollar en el estudiante la meta general es ayudar al estudiante a desarrollar su competencia matemática (Jonsson, Norqvist, Liljekvist & Lithner, 2014).

Para Grozdev (2007), la educación matemática, en comparación con la matemática misma, que lleva cientos de años de desarrollo, es una ciencia comparativamente joven. Y es además muy compleja. Según De Guzmán (1992) esta dificultad radica en sus fines dado que debe materializar las asignaciones que el medio que la circunscribe le asigne haciendo referencia a lo más profundo de la persona a conformar. Esta complejidad se acentúa si tomamos en cuenta que el fenómeno educativo no es neutral al individuo y, por tanto, debe entenderlo y reconocer sus características para poder transformarlo.

Se puede situar el siglo anterior como fundamental en el crecimiento y proliferación de estudios e investigación sobre el tema. A principios de siglo se dio un movimiento de renovación en la educación en Europa. En esto influyó mucho el interés de Felix Klein (1849-1925), prestigioso matemático alemán, quien defendió, en el 1911, su tesis doctoral en problemas de la educación matemática y con sus lecciones sobre matemática elemental desde un punto de vista superior publicadas en 1908 (De Guzmán, 1992; Grozdev, 2007).

Pero no solo Klein, también otros matemáticos de gran renombre, como Jacques Hadamard (1865–1963), Henry Poincare (1854–1912) y muchos otros (Grozdev, 2007). Como dato interesante, que resalta el interés sobre el desarrollo del pensamiento matemático, Hadamard y Poincare escribieron sobre la creación matemática. Primero Poincare en su libro *The Foundation of Science* en 1913, y luego Hadamard en su libro *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field* en 1954.

Esto sin duda pone de manifiesto la profunda necesidad en la comunidad científica del momento, de investigar y conocer mejor, aquellos elementos que inciden en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. También hacen claro lo dinámica que es la ciencia de la investigación en educación matemática en la cual, el sustrato de conocimientos (saberes matemáticos) es estable pero el sociológico (factores sociales y culturales) que determina los métodos y acciones tiene un gran dinamismo.

Esta corta reflexión acentúa la constante evolución de la investigación en educación matemática. El centro del tema es desarrollar la capacidad de razonamiento y algunas habilidades en los estudiantes. En medio de esta complejidad esta investigación busca conocer mejor un factor que siendo de los más valorados en la formación matemática también es de los más complejos de lograr: la habilidad del razonamiento matemático.

I.4 Contexto sociopolítico de la investigación

El escenario en que se realiza esta experiencia es Costa Rica, un país con una población que apenas pasa de los 5 millones de habitantes, con evidentes desigualdades sociales y económicas que se extienden a todas las esferas, muy marcadamente en la educación. Existen en el país cerca de 400000 estudiantes entre 7 y 12 años y una cantidad similar entre 13 y 17 años (Programa Estado de la Nación, 2015a).

A continuación, se presentan una serie de datos, tomados en su mayoría de un proyecto llamado Estado de la Nación [1] en el apartado de Educación (Programa Estado de la Nación, 2015b). Este programa presenta con alguna frecuencia una evaluación en materia de educación y otros índices de desarrollo en el país. Ayudará a contextualizar la población sobre la que se desarrolla esta experiencia.

Costa Rica es un país que tiene una alta valoración de la educación y el rol de la misma como instrumento de desarrollo social ha sido importante, aunque los resultados en las últimas décadas parecieran indicar que una alta cantidad de estudiantes no logra adquirir los conocimientos básicos que se proponen.

[1] El programa estado de la nación en Costa Rica es una plataforma de información y análisis sobre desafíos, logros y rezagos en materia de desarrollo humano sostenible.

La Constitución Política costarricense establece en su artículo 78 que “la educación preescolar, general básica y diversificada son obligatorias y, en el sistema público, gratuitas y costeadas por la Nación”.

Aun con este enunciado constitucional, en Costa Rica un extenso grupo de personas asisten a centros educativos en desventaja debido a su origen social y cuentan con menores posibilidades de culminar con éxito su formación básica, lo que hace que se presenten importantes diferencias en rendimiento entre estudiantes de centros privados y semiprivados y los estudiantes de los centros públicos. Este mismo informe revela información importante sobre los niveles de desarrollo de ciertas habilidades entre los estudiantes (Programa Estado de la Nación, 2015a)

Datos del Departamento de Análisis Estadístico del MEP (2013) registran a 364.654 estudiantes asistiendo a educación secundaria, de estos un 88,5 % asisten a centros públicos, un 7,9 % a centros privados y el restante 3,6 % a instituciones privadas subvencionadas por el Estado. La situación en primaria es similar.

En cuanto al nivel de desempeño académico de los estudiantes costarricenses, es claro que el país está por debajo del promedio general en varios contextos de evaluación en los que se participa. Por ejemplo, en los estudios comparativos con pruebas estandarizadas como PISA, casi dos tercios de los estudiantes costarricenses, II ciclo en el 2012, estaban ubicados en el nivel de desempeño 1, que está relacionado con los procesos o habilidades básicos (Programa Estado de la Nación, 2015a, p. 15)

De manera complementaria, el Dr. Leonardo Garnier Rímolo, ministro de educación pública costarricense en el período de 2006 a 2014, en su presentación sobre los nuevos programas de matemática para la educación primaria y secundaria costarricense, reconoce que la matemática es la materia con mayor fracaso escolar en las pruebas diagnósticas que aplican los estudiantes al culminar los distintos ciclos del programa educativo. Y que, además, en las pruebas internacionales, SERCE o PISA, las matemáticas son las pruebas en las que se obtienen los resultados más débiles.

Esta es una realidad preocupante y son varios los aspectos que la caracterizan. Primero, los resultados sobre rendimiento en estas pruebas internacionales muestran una realidad alarmante, no sólo para Costa Rica, sino también para otros países iberoamericanos. Concretamente, en los países latinoamericanos participantes en las pruebas PISA 2012, porcentajes muy bajos de estudiantes muestran habilidades matemáticas en el nivel alto en la prueba y porcentajes muy altos de estudiantes se sitúan en los niveles de menor competencia (Guadagni, Lasanta & Álvarez, 2014). Para Costa Rica, aproximadamente uno de cada 200, (0.06 %), estudiantes mostró niveles altos, superiores al nivel 4, mientras que 6 de cada diez (59.9 %) no alcanzaron superar el nivel 1. En las pruebas 2012 el promedio mundial es de 12.6 % en el nivel más alto y 23,1 % en el más bajo.

Un segundo aspecto se asocia con los bajos resultados en el escenario costarricense en tres años consecutivos de las pruebas internacionales Canguro Matemático, una prueba sobre razonamiento en la que participan millones de estudiantes de más de 60 países del mundo y diseñada con una fuerte orientación hacia el razonamiento matemático.

Tercero, el grado de dificultad que tuvo la prueba aplicada en la investigación en la que los promedios de respuestas correctas son muy bajos, inclusive en ítems que fueron valorados como fáciles por los expertos en el tema.

Cuarto, los resultados acerca de la percepción que tienen los docentes sobre las capacidades de razonamiento, así como de los aspectos contextuales incluida familia y la actitud del estudiante. Estos elementos por un lado acentúan los problemas de desempeño en tareas de razonamiento pero también colocan sobre el tapete otros problemas relacionados que sin duda deberán atenderse.

Se deriva de los resultados obtenidos en estas pruebas, así como de los análisis de otros elementos citados, que la atención del desarrollo del razonamiento en el escenario costarricense requiere una intervención específica e integral. Más allá de programas o de lineamientos los procesos deben ser más específicos y orientados hacia aspectos concretos como los que se derivan de esta experiencia.

Un aspecto que sin duda constituye un elemento de motivación en esta experiencia, y que da impulso a esfuerzos como éste, se centra en que los nuevos programas aprobados por el Consejo Superior de Educación en el año 2012 plantean la intención clara de promover ciertas habilidades importantes en el razonamiento matemático, pero dejan completamente de lado aspectos de evaluación y de diagnóstico, estableciendo una metodología general que en opinión del autor no constituye un elemento fundamental al definir los procesos de enseñanza aprendizaje. Desde esta perspectiva la experiencia de esta tesis puede ofrecer un aporte valioso al revelar elementos que puedan contribuir al desarrollo de las habilidades estratégicas que los niños, niñas y adolescentes del país necesitan para desempeñarse con éxito en la nueva sociedad del conocimiento. Esta motivación se ve reforzada en los retos declarados para la educación entre los que se propone promover el desarrollo de habilidades y destrezas que los niños, niñas y adolescentes requieren para desempeñarse en la sociedad del siglo XXI. (Programa Estado de la Nación, 2015a)

I.5 Percepciones de docentes costarricenses sobre el tema

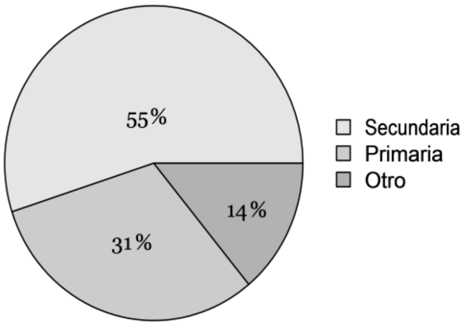
La valoración del razonamiento en cualquier contexto se ve influenciada por diversos factores. Uno de ellos, y muy importante, son las percepciones que tengan los docentes sobre el contexto en el que se desarrollan los procesos, así como su percepción general del estudiante. Una valoración mal dimensionada de las capacidades o actitudes del estudiante puede interferir con los procesos desarrollados por los docentes e incidir en los estudiantes (Begeny, Eckert, Montarello & Storie, 2008)

1.5.1 Valoración contextual por maestros

Como parte de la búsqueda de datos que nos permitan entender los resultados de los estudiantes en las pruebas de razonamiento matemático, se realizó una encuesta a docentes para valorar algunos aspectos del contexto. En la encuesta se recabó información sobre la percepción de los docentes en varios aspectos que parecieran tener una alta relación con el desempeño en pruebas que involucren razonamiento matemático. El instrumento se organiza en una serie de segmentos de preguntas que buscan entrelazar ciertas percepciones. Es una dualidad entre lo que el profesor considera que es deseable o idóneo y lo que, él, realmente percibe en el entorno.

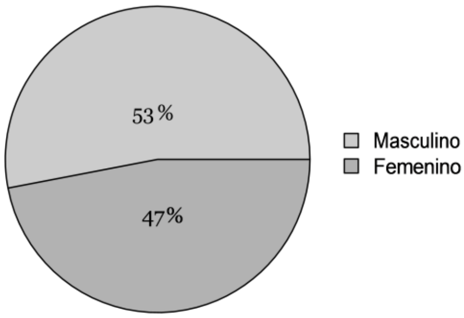
1. Composición de la población encuestada según nivel educativo en el que se desempeña.

La primaria corresponde con 6 niveles de primer grado a sexto grado, niños de 6 a 12 años respectivamente, el total de maestros de primaria fue de 37. El nivel secundaria corresponde con 5 grados de sétimo a undécimo, de 13 a 17 años, 63 profesores participaron. Algunos de los encuestados se reportan en la categoría otros, esto corresponde con maestros o profesores que en este momento desempeñan labores académico administrativas. Los maestros de primaria son generalistas, es decir, dan todas las materias mientras que los de secundaria son específicos de enseñanza de la Matemática.



2. Distribución de la población encuestada entre hombres y mujeres

Hay un ligero predominio de hombres en la muestra. Sin embargo, la diferencia no es significativa.

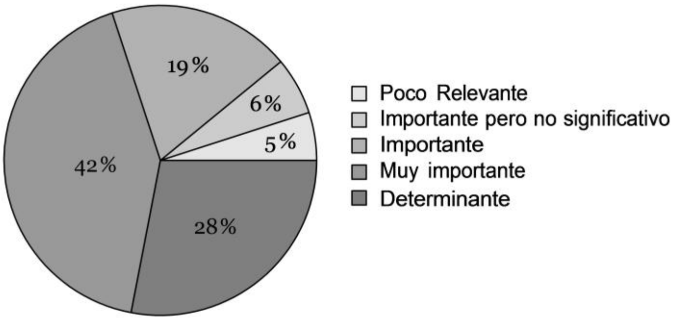


3. Para conocer la percepción sobre el rol de la familia al momento de motivar o promover el desarrollo del razonamiento se preguntó:

En su opinión el efecto contexto familiar, visto como la actitud de apoyo y motivación de los padres y la familia, para incentivar la importancia del desarrollo de esquemas de razonamiento matemático en el estudiante es un factor:

- Poco relevante

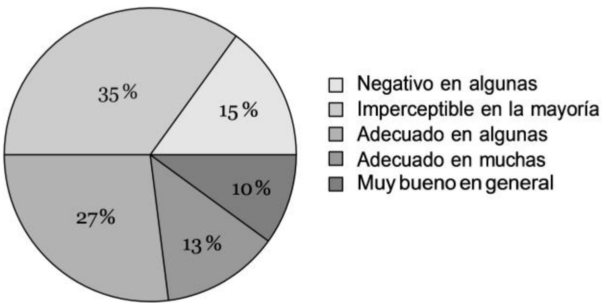
- Importante pero no significativo
- Importante
- Muy Importante
- Determinante



4. La pregunta anterior se contrasta con otra para dimensionar cómo perciben los docentes el apoyo que las familias dan al estudiante para ayudarle a desarrollar esta habilidad. Se planteó la pregunta:

   En su opinión la actitud de la familia para motivar al estudiante a desarrollar actividades que fomenten las habilidades de razonamiento matemático es

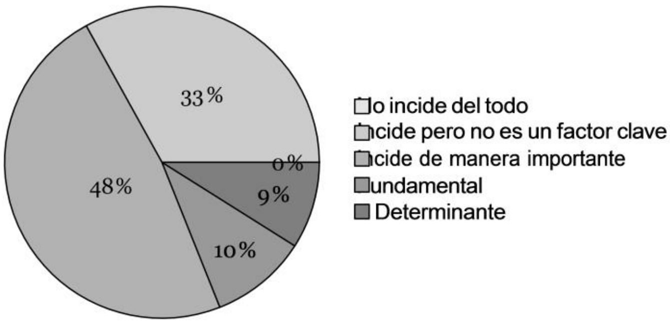
- Negativa en algunas
- Imperceptible en la mayoría
- Adecuada en algunas
- Adecuada en muchas
- Muy buena en general



5. El entorno que rodea al estudiante, amigos, compañeros de estudio y el ambiente también se quiso evaluar en la encuesta la primera pregunta fue sobre la percepción del docente respecto al rol que tiene ese entorno. Se planteó la pregunta:

En su opinión el entorno de amigos y compañeros que rodean al estudiante incide en sus actitudes hacia el desarrollo de actividades académicas, por ejemplo, el razonamiento matemático

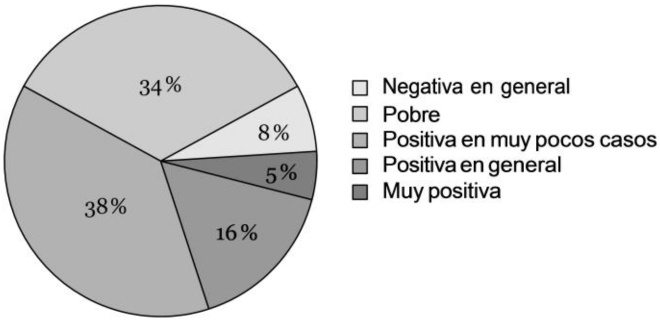
- No incide del todo
- Incide, pero no es un factor clave
- Incide de manera importante
- Fundamental
- Determinante



6. Para contrastar se pregunta la percepción que ellos tienen sobre el efecto real de ese entorno. La pregunta planteada fue:

En su opinión en el entorno de amigos y compañeros que rodean al estudiante la actitud hacia actividades que impliquen razonamiento matemático es

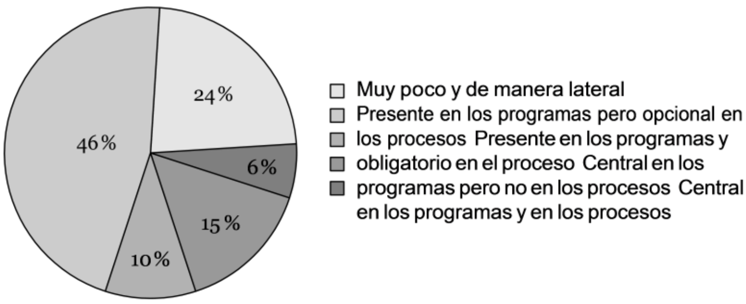
- Negativa en general
- Pobre
- Positiva en muy pocos casos
- Positiva en General
- Muy positiva



7. Se quiso conocer la percepción de los docentes sobre el rol del razonamiento matemático en los programas educativos oficiales hasta antes del 2012. Debe destacarse que ese año 2012 se planteó un cambio de programas. La pregunta específica fue:

En su opinión, los programas educativos oficiales para las escuelas hasta antes del 2012, incorporan el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes.

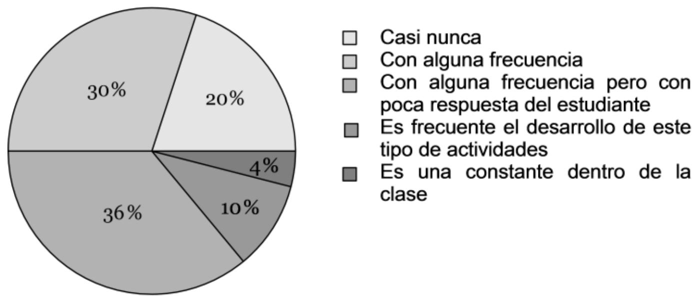
- Muy poco y de manera lateral
- Como un elemento presente en los programas, pero opcional en el proceso
- Como un elemento presente en los programas y obligatorio en el proceso
- Como un elemento central en los programas, pero no en los procesos
- Como un elemento central tanto en los programas como en los procesos



8. Para contrastar esta percepción teórica con algo más práctico se planteó una pregunta que reflejara lo que se hace en el aula tratando de no incluir el factor actitud del docente para evitar sesgos por implicación directa. La pregunta planteada fue:

En su opinión las condiciones imperantes hasta antes del 2014 permitían al docente el desarrollo de actividades en clase tendientes a promover del razonamiento matemático en los estudiantes.

- Casi nunca
- Con alguna frecuencia
- Con alguna frecuencia, pero hay poca respuesta del estudiante
- Es frecuente el desarrollo de este tipo de actividades
- Es una constante dentro de la clase



9. Para entender un tanto mejor cómo se perciben los maestros a sí mismos como promotores del desarrollo del pensamiento en sus estudiantes se plantearon dos preguntas extras relacionadas con la formación y la capacitación. La primera pregunta fue:

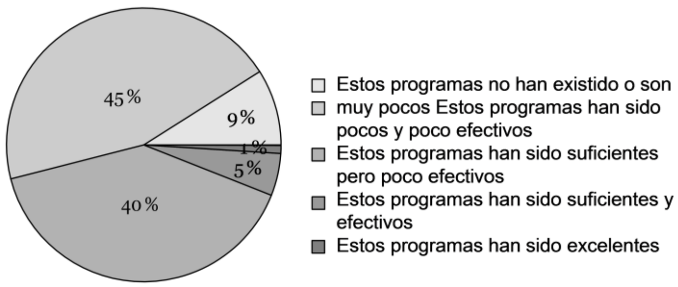
En general la formación que tienen los educadores para promover el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes es

- Es muy deficiente
- Es deficiente
- Es buena, pero debe mejorarse
- Es muy buena
- Es excelente

10. En la parte de los programas de capacitación se preguntó:

En su opinión los programas de capacitación a docentes del MEP han favorecido o favorecen la preparación del docente para facilitarle el promover el desarrollo del razonamiento matemático entre los estudiantes

- Estos programas no han existido o han sido muy pocos
- Estos programas han sido pocos y poco efectivos
- Estos programas han sido suficientes, pero poco efectivos
- Estos programas han suficientes y efectivos
- Estos programas han sido excelentes

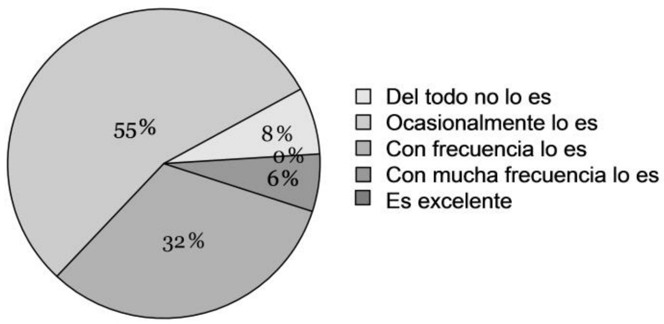


11. Se quiso conocer también cómo se percibe el ambiente de la escuela y se planteó la siguiente pregunta. También se pensó aquí en tener un elemento de contraste con otras dos preguntas previas. Se preguntó:

El ambiente general de la clase y de la escuela es apropiado para el desarrollo de actividades que ayuden al desarrollo de esta habilidad

- Del todo no lo es
- Ocasionalmente lo es

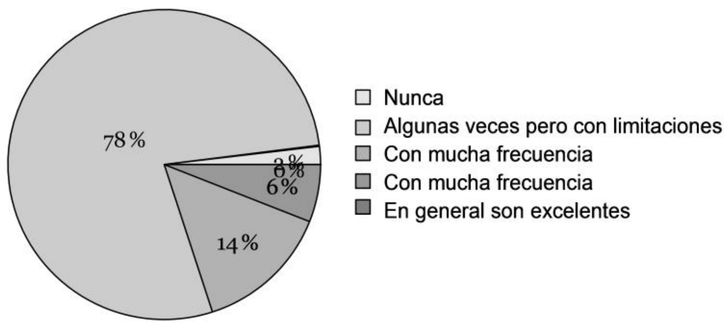
- Con frecuencia lo es
- Con mucha frecuencia lo es
- Es excelente



12. Se trató de conocer la opinión del docente respeto a las condiciones generales que se dan para el desarrollo de esta habilidad con la pregunta:

Las condiciones generales del educador, programas, horarios y motivación le permiten la ejecución de actividades tendientes a favorecer el desarrollo de esta habilidad.

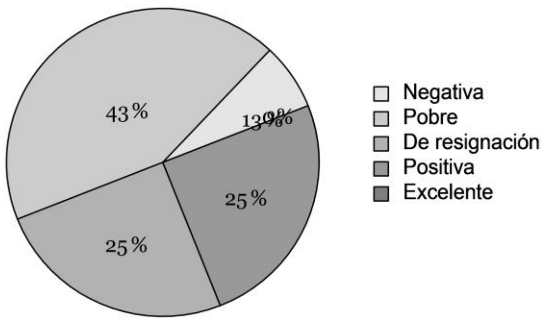
- Nunca
- Algunas veces, pero con limitaciones
- Con frecuencia
- Con mucha frecuencia
- En general son excelentes



13. También se quiso conocer la opinión o valoración de los docentes sobre los estudiantes. La primera pregunta de este grupo fue:

En general la actitud del estudiante ante actividades de desarrollo del pensamiento lógico matemático es

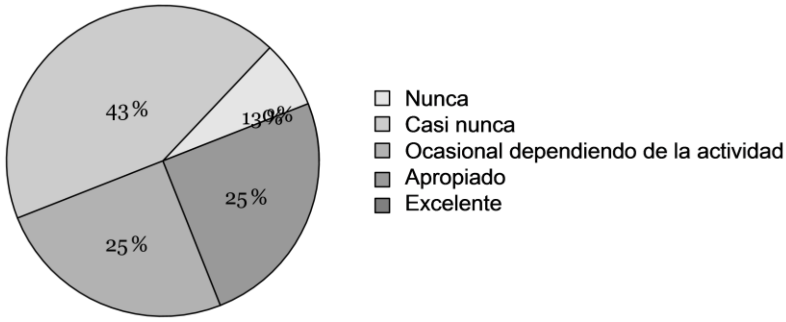
- Negativa
- Pobre
- De resignación
- Positiva
- Excelente



14. Esta pregunta es sin duda una doble valoración de una percepción, plantea lo mismo básicamente del punto anterior, pero en una escala diferente.

Cuando se desarrollan actividades que involucren el desarrollo del pensamiento lógico matemático el nivel de participación del estudiante es el adecuado

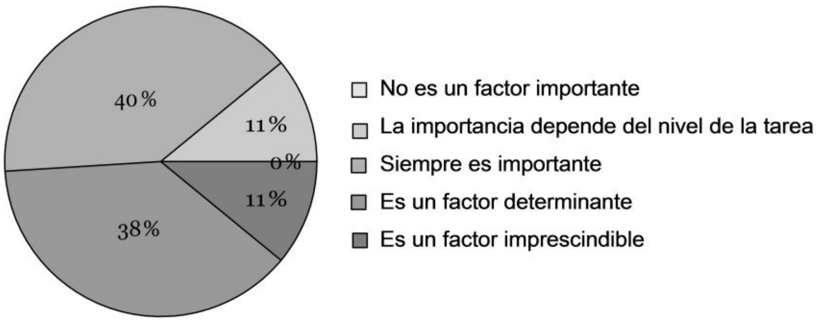
- Nunca
- Casi nunca
- Ocasional dependiendo de la actividad
- Apropiado
- Excelente



15. Las dos preguntas siguientes recogen la percepción sobre la actitud del estudiante como factor que puede incidir en el desempeño:

Considera usted que la actitud del estudiante hacia actividades que involucren el desarrollo del pensamiento lógico matemático afecta su desempeño

- No es un factor importante
- La importancia depende del nivel de la tarea
- Siempre es importante
- Es un factor determinante
- Es un factor imprescindible

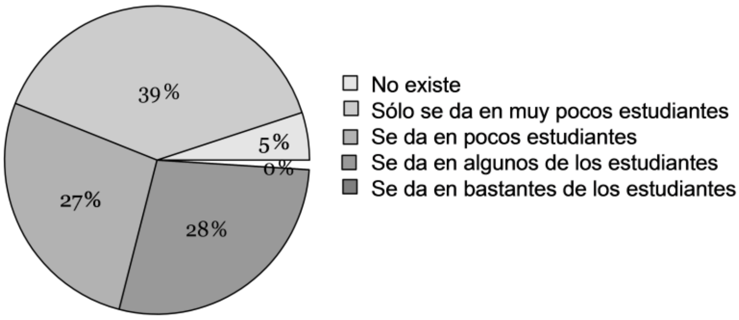


16. Pregunta:

El compromiso del estudiante por realizar a conciencia evaluaciones o tareas que no tienen incidencia con las notas del curso.

- No existe
- Sólo se da en muy pocos estudiantes
- Se da en pocos estudiantes

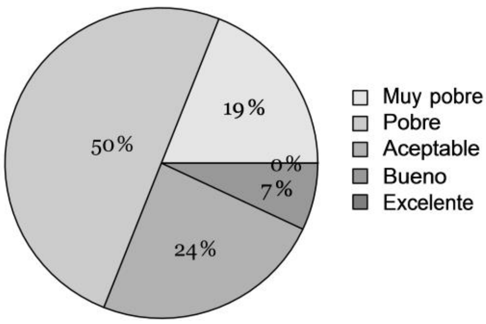
- Se da en algunos de los estudiantes
- Se da en bastantes de los estudiantes



17. Una pregunta relacionada con los resultados esperados en una prueba de razonamiento matemático:

Si los estudiantes fueran evaluados en una prueba de razonamiento matemático básico que estuviera a su nivel y en la cual los resultados no fueran tomados en cuenta, el nivel de compromiso que asumirían sería.

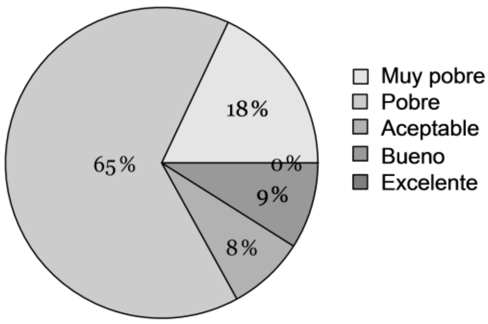
- Muy pobre
- Pobre
- Aceptable
- Bueno
- Excelente



18. Para cerrar esta encuesta se pide a los docentes una valoración general sobre cuál estiman que sería el desempeño de los estudiantes en una prueba de este tipo:

En las condiciones actuales si usted tuviera que valorar el desempeño general del estudiante, de 12 a 14 años, en pruebas de razonamiento matemático, el resultado que esperaría sería.

- Muy pobre
- Pobre
- Aceptable
- Bueno
- Excelente



a) Análisis de resultados encuesta percepción.

Rol de la Familia (3–4). El primer binomio de preguntas planteadas sobre el rol de la familia recoge una opinión ciertamente alarmante. Aunque un porcentaje muy alto (89 %) de los maestros y docentes estima que el rol de la familia es un agente muy importante para motivar del pensamiento o razonamiento en los estudiantes, solamente un (23 %) estima que se da en un nivel adecuado o muy bueno. Los estilos de familia parecieran tener un impacto determinante en el desarrollo de las competencias cognitivas y sociales del individuo (Yee & Eccles, 1988). Los valores, los comportamientos, los estándares y las expectativas sin duda son aspectos que inciden en el desempeño escolar y especialmente en un área tan sensible como el razonamiento.

Rol de entorno (5–6). Se establecen dos preguntas de opinión en el mismo sentido del caso anterior. Ver hasta dónde los maestros estiman que el entorno puede afectar el desempeño de los estudiantes al momento de asumir tareas o labores que demanden competencias como el razonamiento. Se quiere valorar si el entorno puede o debe ser un factor que afecte. Los resultados indican que un (67 %) de los entrevistados consideran que sí es un factor que afecta y además consideran que en el caso costarricense (79 %) lo hace de manera negativa o pobre. Esta percepción no es nueva, hay mucha bibliografía sobre cómo la organización social de las clases y escuelas y la interacción con pares y maestros tiene una influencia importante en la motivación del estudiante al involucrarse en tareas escolares (Wigfield, Eccles, & Rodríguez, 1998; Kindermann, 1993)

Elemento razonamiento en los programas oficiales y en el aula (7–8–11–12). Este núcleo de ítems nuevamente busca la opinión de los docentes en dos puntos fundamentales en el desarrollo de la habilidad de razonamiento: ver si ellos perciben que el entorno administrativo abre posibilidades para hacer un trabajo adecuado en ese sentido y valorar el entorno del aula. Ante la pregunta 7 sobre su percepción acerca del elemento razonamiento matemático en los programas oficiales hasta el año 2012, solamente un (6 %) estima que esta es una actividad central en los procesos y un 70 % considera esta actividad presente en los programas. Esta pregunta se contrapone con la siguiente para ver si los profesores perciben que en el entorno del sistema es posible el desarrollo de actividades para promover el desarrollo del razonamiento. Sólo un (20 %) de los encuestados opina que casi nunca es posible y se complementa con la pregunta 12 en donde más de un 90 % opina que las condiciones generales del educador permiten ejecutar actividades que favorezcan el desarrollo del razonamiento matemático. Por otra parte, en la pregunta 11, sobre el entorno de la clase, consideran que ocasionalmente es apropiado para el desarrollo del razonamiento sólo un (8 %) opina que nunca es apropiado

De alguna forma los maestros sienten que sí hay un eje del razonamiento en los programas oficiales y que al menos ocasionalmente hay espacio para desarrollarlo en el contexto de la clase. También opinan que al menos ocasionalmente el ambiente de clase y escuela es apropiado para el desarrollo de este tipo de actividades y un alto porcentaje de los entrevistados opina que ocasionalmente, aunque con limitaciones, las condiciones generales como programas, horarios y motivación permitirían el desarrollo de actividades tendientes al desarrollo del razonamiento en los estudiantes.

Desde una óptica positiva se podría pensar que existen condiciones mínimas aceptables para trabajar en el desarrollo de esta capacidad, este clúster de preguntas revela que de haber problemas no son exactamente en las condiciones del sistema, programas o aula.

Formación del docente 9–10. La primera pregunta sobre la preparación del docente para desarrollar este tipo de actividad revela alguna deficiencia importante en la misma. Solamente un (16 %) de los entrevistados considera que esta preparación es muy buena o excelente. De igual manera estiman que los programas de capacitación que ha ofrecido el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica han sido nulos o poco efectivos; un (94 %) opina de esta forma.

Motivación y compromiso 13–14. La primera pregunta de este grupo trata de identificar la percepción del docente sobre la actitud del estudiante al ser expuesto a situaciones que impliquen el desarrollo del pensamiento lógico matemático. Un (79 %) estima que es negativa, pobre o de resignación, es decir, una motivación deficiente. La otra pregunta del grupo se confronta con la anterior, es la misma planteada en términos distintos y se obtiene que ante el desarrollo de actividades relacionadas con el pensamiento lógico matemático el nivel de involucramiento es condicional y depende de la actividad sólo (11 %) asume una actitud apropiada.

Rol de la motivación 15-16. En esta parte se quiso conocer la valoración que tiene el docente de la relación motivación desempeño. La primera pregunta es directa, una valoración del efecto de la actitud del estudiante. Un (89 %) considera que es de importante a determinante mientras que (72 %) de los participantes estiman que este compromiso o motivación se da en pocos o muy pocos estudiantes.

Creencias del docente 17-18. El último clúster de preguntas se orienta a conocer las creencias o valoraciones que el docente tiene sobre los estudiantes y su desempeño en relación con el rendimiento. De manera inmediata se pregunta sobre cómo perciben ellos, los docentes, el nivel de compromiso de sus estudiantes si fueran sometidos a una prueba básica de razonamiento matemático que no vinculara a ningún apartado de evaluación sumativa, la respuesta es que sólo (31 %) asumiría un compromiso aceptable o bueno.

Mientras que al pedirles que hagan una valoración del desempeño que los maestros esperarían de sus estudiantes solo un (17 %) esperaría un resultado aceptable o bueno.

b) Anotaciones finales

A pesar de que es una muestra pequeña de maestros se pueden notar algunas situaciones que pueden ser alarmantes en el contexto educativo costarricense.

Familias que en general no ofrecen un aporte relevante a los estudiantes, un contexto social que no favorece el desarrollo de la capacidad de razonamiento en los estudiantes y un cuerpo docente que pareciera desmotivado, poco preparado y con una valoración pobre sobre el posible desempeño de los estudiantes conforman un escenario nada prometedor respecto al desempeño de los niños y niñas costarricenses en tareas académicas tendientes a medir sus capacidades de razonamiento. Parte de esta dinámica se refleja en los resultados que presentan los estudiantes costarricenses en pruebas de pensamiento matemático que se discuten en la siguiente sección

I.6 Rendimiento Matemático en el contexto costarricense

Los conceptos de rendimiento matemático, razonamiento matemático y resolución de problemas, así como su medición, son difíciles establecer con claridad. Para Barbera, Niebla, López y Ortega (2012) no existe un acuerdo en la literatura especializada al definir el rendimiento académico, ya que la definición que le ha sido otorgada varía en función de los distintos marcos referenciales desde los que se ha efectuado. Para Martín y Payo (2012) existen distintos elementos que pueden afectar el rendimiento académico en pruebas internacionales, específicamente considerando variables macroeconómicas y socioeconómicas, o estructura del sistema educativo, y el estado de bienestar. Tampoco hay claridad sobre la resolución de problemas en el contexto educativo. Arrieta y Gallastegui (1989) señalaban como carencias en este sentido la falta de un tronco común en aspectos como: ¿Qué es la resolución de problemas?, ¿cómo se mide el rendimiento en esa área? y ¿qué variables influyen en las conductas asociadas?

A pesar de ese vacío conceptual, es posible establecer algunos indicadores generales. La prueba PISA, sin adentrarse a valorar sus características internas, es una prueba estandarizada con un carácter global a la cual decenas de países del mundo se han acogido, con la intensión, entre otras, de tener parámetros para valorar integralmente elementos de la educación matemática que ofrecen de sus jóvenes. Para Else-Quest, Hyde y Linn (2010) la prueba PISA es una evaluación con retos superiores, requiriendo un entendimiento profundo de la matemática. La prueba en sus últimos tres niveles evoca procesos en el dominio de razonamiento, requiere elementos de un pensamiento y razonamiento matemáticos avanzados. Esa visión es similar a la de Fleischman, Hopstock, Pelczar y Shelley (2010), que agregan como habilidades asociadas a PISA el conceptualizar, generalizar, modelar, usar operaciones simbólicas y generar estrategias para la resolución de problemas.

Los resultados sobre rendimiento en estas pruebas internacionales muestran una realidad complicada para Costa Rica: muy bajos rendimientos si se comparan con otros países. Por ejemplo, en la prueba de matemática 2009 Costa Rica ocupó el lugar 55 del mundo con un promedio de 409 puntos (Fernández, 2012).

Los resultados de estas pruebas han generado discusiones y análisis con un impacto importante en los países. Ertl (2006) reporta que los efectos en el contexto alemán se dan en el discurso político, en los procesos de desarrollo del currículo y en el discurso académico en la educación. Situaciones similares se han generado en países como Dinamarca, México o Italia (Arzarello, Garuti & Ricci, 2015; Dolin & Krogh, 2010; Martínez Rizo, 2006). Costa Rica no ha escapado a esta realidad, en los últimos años se han generado una serie de cambios incluidos nuevos programas para la educación matemática aprobados en el 2012 (Ministerio de Educación Pública, 2012).

Junto con los indicadores PISA aparecen más factores que alertan sobre las dificultades de razonamiento matemático en el escenario costarricense. Un indicador significativo se evidencia en los resultados de pruebas nacionales de bachillerato. Estas citas de Barrantes (2014) muestran en parte esta realidad.

- Ni el empujón de nueve puntos de curva que regaló el Ministerio de

Educación Pública (MEP) en todas las materias, mejoró la promoción de graduados de bachillerato este año.

- De 38.340 estudiantes que hicieron las pruebas, 12.299 las perdieron. Esto representa un 32% de aplazados.
- En comparación con el 2013 empeoró, porque el año pasado, el porcentaje de reprobados fue de 30%. Con ello, esta es la promoción más baja de los últimos tres años.

Estas referencias apuntan a la existencia de un problema en el escenario educativo costarricense. En general, los estudiantes costarricenses no muestran desempeños adecuados en pruebas de habilidad matemática internacionales ni en pruebas de razonamiento matemático. En el capítulo sobre análisis de resultados posteriores se evidencia parte de esta situación en los resultados de las pruebas Canguro realizadas durante tres años.

En este contexto la investigación plantea explorar algunos elementos asociados con esta situación y que pueden contribuir a planificar procesos de intervención adecuados.

I.7 Preguntas de investigación

La investigación se fundamenta en las siguientes interrogantes:

1. ¿Existe evidencia que permita dimensionar el nivel de desarrollo de la habilidad razonamiento matemático en el escenario educativo costarricense?
2. ¿La evidencia teórica sustenta una descomposición del constructo razonamiento matemático en dimensiones específicas?
3. ¿Existe evidencia teórica que justifique extrapolar métodos generales, usados para explicar la inteligencia, a métodos específicos que permitan explicar el razonamiento matemático?
4. ¿Es sustentable, a partir de la investigación estadística, la hipótesis sobre la existencia de un modelo de medida para el razonamiento matemático? Es decir, un modelo que ayude a explicar las diferencias en razonamiento matemático que se base en habilidades diferenciables.

5. ¿La idea del factor general para la inteligencia será factible, en algún sentido, en el constructo del razonamiento matemático. ¿Es decir, permitirá esta investigación brindar evidencias razonables sobre la existencia de un factor general de razonamiento matemático?
6. ¿Cómo se manifiesta la diferencia de edad y de sexo en el razonamiento matemático?
7. ¿Existe una relación sistémica estructural de interrelaciones entre las dimensiones en que se descompone el razonamiento matemático?

Para atender estas interrogantes se plantea un análisis de literatura especializada para establecer un posible modelo, el desarrollo de una prueba o test que permita recabar información que se convierta en un elemento probatorio para luego, mediante herramientas apropiadas, recabar las evidencias que correspondan. El análisis estadístico se centra en modelos de ecuaciones estructurales y modelos de múltiples indicadores múltiples causas, MIMIC (Bollen, 1984). Se incorporan elementos fundamentales de análisis multivariado y en la parte de la definición de la prueba se utiliza como apoyo información proveniente de análisis factoriales exploratorios.

2 MARCO TEÓRICO

2.1. Enfoques de la Inteligencia

2.1.1 Reflexiones preliminares sobre inteligencia

Por décadas la Psicología y la Medicina han estudiado y tratado de comprender y explicar la inteligencia humana (Duncan y col., 2000; Evans, Floyd, McGrew & Leforgee, 2002; Gottfredson & Saklofske, 2009). En las últimas décadas de este período ha predominado una diversidad de teorías y opiniones la mayoría consistentes entre sí, aunque descritas en términos distintos y en general con cierta dispersión, bastante entendible por la complejidad del concepto cuya evolución va de la mano con un entendimiento de las capacidades cognitivas del ser humano, pasando de visiones muy restrictivas hacia otras más generales. Pero el proceso de evolución ha sido largo. Por ejemplo, 1892 en un periódico llamado el progreso matemático en Zaragoza el catedrático de la universidad de Barcelona Lauro Clariana escribía "obsérvance en la inteligencia humana ciertas irregularidades que desdicen el noble fin á que debe dirigirse, y que se acentúan cuando se trata de que dicha inteligencia siente sus reales en el terreno de la matemática" (Clariana,1892, p. 328) o casi un siglo después Horn (1991, p. 198) decía que "los temas irresolubles deben aceptarse como irresolubles, y definir la inteligencia humana es un tema irresoluble" y apunta como razones la vastedad y lo dinámico y cambiante del concepto.

Como referencia de interés hay bastantes artículos que abordan el desarrollo de estas teorías. Por ejemplo, en referencias complementarias (Gottfredson & Saklofske, 2009; Hoelzle, 2008; Horn, 1991) se hacen contextualizaciones de la inteligencia y de los test de inteligencia desde una perspectiva histórica, teórica y basadas en evidencias que permiten dimensionar la complejidad y el interés por el tema durante más de un siglo. Aquí se presenta una revisión más somera y orientada hacia el enfoque de interés de la investigación.

Históricamente ha existido cierta confusión entre la inteligencia misma, como un concepto latente, y los test de inteligencia o las manifestaciones de la misma, así como en sus conceptualizaciones (Neisser y col., 1996). La lista de modelos para la estructura de las habilidades cognitivas es extensa y variada. Nombres como Burt, Spearman o Vernon, asociados con los modelos que postulan un factor general, o Catell, Guilford, Horn o Thurstone que proponen varios factores o los contrastes entre modelos que proponen estructuras de habilidades jerárquicos y los que no (Gustafsson, 1984).

Entre los primeros test de inteligencia se reconocen los trabajos de Binet y Simon (1907) a principios del siglo anterior y el punto de partida en el estudio teórico de la inteligencia pareciera situarse en el trabajo de Spearman, también a principios de siglo. En su investigación, Spearman (1904) basándose fundamentalmente en la correlación positiva que encontró sobre el hecho de que las personas que hacen bien alguna tarea intelectual tienden a hacer bien otras tareas intelectuales distintas, redujo la actividad intelectual del individuo a un único factor explicativo que llamó factor (*g*). Con este factor él trata de explicar la correlación del éxito que encontró en diversas formas de la actividad cognitiva. Este factor g es llamado también inteligencia general (Duncan y col., 2000).

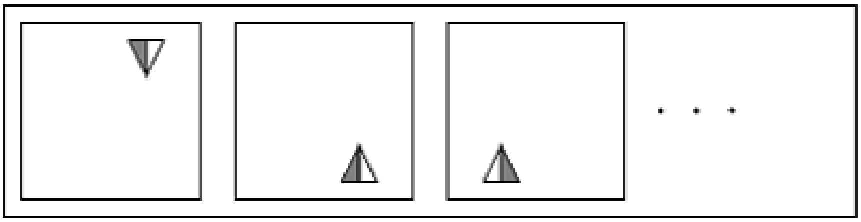
Desde allí, pasando por diversas posiciones como la de Thurstone (1938) que contrapone una teoría que explica la capacidad intelectual en la existencia de un conjunto de habilidades básicas que se combinan, muchos especialistas coinciden hoy en un modelo que podría considerarse el estado del arte respecto a los factores que miden las capacidades cognitivas. Este modelo se conoce como el modelo CHC (Alfonso Flanagan y Radwan, 2005; McGrew, 2009; Woodcock, 2002)

El modelo CHC, que es más bien una taxonomía, es el producto de un refinamiento de diversas propuestas sobre la medición de la capacidad intelectual, concepto que hoy se reconoce como diverso y complejo (Horn, 1991). Este mismo autor Horn, (1991, p.198) cita una afirmación de Sternberg y Detterman (1986) acerca de que la inteligencia es una cosa maravillosa, es algo en que se coincide universalmente, pero se carece de una definición común sobre qué es. En McGrew (2009) se hace una descripción detallada de la evolución de los conceptos hasta la propuesta CHC que se describe y detalla cuidadosamente.

La taxonomía de Cattell-Horn–Carroll (CHC) es una teoría psicométrica para conceptualizar y medir estructuras cognitivas y académicas. Sin duda, la más difundida y sustentada empíricamente. Como se cita en McGrew y Wendling (2010), los orígenes de esta taxonomía se remontan a los años 40 con los trabajos de Raymond Cattell (Cattell, 1941) quien a su vez se basa en los trabajos previos de Thurstone sobre la teoría de los factores analíticos (Thurstone, 1938). En su propuesta inicial, Cattell plantea una teoría dicotómica que resalta dos factores que explican la inteligencia, llama a estos factores Inteligencia fluida (Gf) e inteligencia cristalizada (Gc). La inteligencia fluida se refiere a la "habilidad para razonar y resolver problemas nuevos independientemente de conocimientos previos, es crítica para una amplia gama de tareas cognitivas" (Jaeggi, Buschkeehl, Jonides & Perrig, 2008, p. 6829). Por ejemplo Nusbaum y Silvia (2011) reportan estudios que asocian la inteligencia fluida con la habilidad para generar y seguir estrategias. La inteligencia fluida incluye las habilidades inductivas y razonamiento deductivo y desde la interpretación de algunos autores ésta depende de factores biológicos y neurológicos (Jaegii y col., 2008), así como de aprendizaje incidental proveniente de la interacción con el medio, esta visión es bastante aceptada en el dominio de la inteligencia. Por su parte, la inteligencia cristalizada incluye fundamentalmente habilidades cognitivas adquiridas, mediante un proceso de aculturación que incluye la escuela como agente importante. Para Sternberg (2012) la inteligencia implica habilidades que se aprenden y cambian. Desde la interpretación del investigador es válido establecer que hay una parte de este aprendizaje que es incidental e incluye valores y actitudes que se transmiten y adquieren y otra que es intencional a través de mecanismos formales o informales. Un elemento significativo importante de resaltar es la posibilidad de mejorar la inteligencia fluida a través de mejorar otras habilidades por ejemplo la memoria de trabajo (Jaegii y col., 2008)

Un aspecto relevante en esta división es lo difícil que puede resultar establecer fronteras entre dos conceptos tan abstractos, que fácilmente tienden a confundirse en algunas de sus manifestaciones, especialmente se pueden interpretar como una manifestación de inteligencia fluida algunas que corresponden con inteligencia cristalizada que ya han alcanzado niveles de "instintivas" en el individuo. Para mostrar un caso, supóngase que se desea medir la respuesta de un individuo cuando es sometido a una actividad específica: descubrir un patrón de comportamiento, por ejemplo, una secuencia geométrica relacionada con una secuencia numérica.

A partir de la secuencia de formas que se muestra a continuación, la cual se continúa, siguiendo el mismo esquema elegir de entre 4 opciones cuál es la figura que ocupará el lugar 2016.



Para un individuo que nunca haya sido confrontado con una “situación similar”, el descubrimiento del patrón y la deducción de una respuesta puede ser una actividad cognitiva superior en el dominio de la inteligencia fluida, pero si un individuo ya ha sido expuesto a situaciones “cercanas cognitivamente”, es probable que ésta sea una actividad de nivel inferior en la inteligencia fluida o inclusive una actividad cognitiva en el dominio de la inteligencia cristalizada. Un individuo con experiencia o entrenado busca regularidades usando una guía que incluye ver reflexiones, rotaciones, traslaciones o combinaciones de ellas.

Los dos factores expuestos por Cattell (1941) fueron ampliados en distintos momentos (Lansman, Donaldson, Hunt & Yantis, 1982). En los sesentas John Horn agrega al modelo (Gf-Gc) cuatro nuevos factores o habilidades que llama percepción visual o procesamiento visual (Gv), memoria de corto plazo (Gsm), memoria de largo plazo (Glr) y velocidad de procesamiento (Gv). Con el paso del tiempo se refinan las especificaciones de algunas de las habilidades ya planteadas y se agregan otras tales como la capacidad de procesamiento auditivo (Ga), el tiempo de reacción (Gt) y finalmente la habilidad cuantitativa (Gq) y las habilidades de lectura escritura (Grw).

Toda esta taxonomía de Cattell-Horn se complementa con el trabajo de Carrol a principios de los 90 acerca del modelo de los tres estratos de Cattell, un enfoque que busca organizar las habilidades cognitivas del individuo no sólo en función de la estructura y el desarrollo, sino que también en términos de sus acciones, para producir una propuesta más robusta y completa. Para McGrew (2009), el verdadero logro de este análisis está en que, fundamentándose en una organización sistemática y extensiva de diversos y reconocidos estudios de análisis factoriales, en los cuales se analizó la estructura de las habilidades del conocimiento en el individuo, se estructura y presenta en una forma simple una taxonomía para las habilidades cognitivas con el valor agregado de sostenerse en resultados de diversas y reconocidas investigaciones y datos producidos en décadas de desarrollo en el área.

Para resumir, la propuesta de Carroll, conocida como modelo jerárquico de los tres estratos, (Carroll,1997) tiene fuertes similitudes con la propuesta de Cattell-Horn y el modelo CHC resulta de la fusión de modelos o propuestas preliminares que hacen del mismo quizá el más prominente y usado en la elaboración y análisis de test de inteligencia (McGrew, 2009).

El modelo es una estructura jerárquica para el análisis de las capacidades cognitivas humanas que consiste en tres estratos. Un nivel superior el estrato III, o inteligencia general, donde se reconoce que hay un factor general de inteligencia factor (g). En una instancia segunda a esta inteligencia general, aparecen dos niveles o estratos adicionales. El estrato II que se conoce como habilidades cognitivas generales (Factores Amplios) y el estrato I conocido como habilidades cognitivas específicas. Un resumen puede verse en McGrew (2009), como también en Bacal (2010) donde se hace un recorrido histórico y una presentación muy completa de la dinámica de desarrollo de la teoría. En Gustafsson (1984) se hace un análisis que permite posicionar los diversos enfoques de abordaje del tema.

Un comentario final es que, desde su creación hasta la actualidad, las pruebas para evaluar la inteligencia, que son en algunos casos vistas como las manifestaciones más tangibles de la inteligencia misma, han recibido varias críticas; una de las principales es que favorecen a los niños y adultos blancos de clase media o alta y por ello se plantea que es absurdo evaluar con pruebas similares a personas con marcadas diferencias culturales y sociales (Gross, 1998, citado en Benatuil, 2012). Este es un comentario a tener en cuenta en el tanto que, si aceptamos que la inteligencia es un concepto tan complejo y esquivo, en el cual intervienen probablemente factores genéticos y culturales, también debemos aceptar que su medición tenga sesgos de ésta y otras naturalezas. Lo importante es revelar que existen evidencias para tomar acciones que permitan dimensionar de manera más objetiva tales diferencias y si es el caso realizar las adaptaciones oportunas.

2.1.2 La propuesta Cattell, Horn y Carroll (CHC)

En la propuesta integrada que amalgama los trabajos de estos grandes investigadores: Cattell, Horn y Carroll, se reconoce que hay un factor de inteligencia general factor *g* que se descompone en 10 habilidades generales o factores que son: razonamiento fluido (Gf), razonamiento cristalizado (Gc), la memoria de corto plazo (Gsm), el procesamiento visual (Gv), el procesamiento auditivo (Ga), la memoria de largo plazo (Glr), la velocidad de procesamiento (Gs), capacidad de lectura escritura (Gwr), conocimiento cuantitativo (Gq), velocidad de decisión (Gt) y, tentativamente, se ha propuesto otras posibilidades para factores generales (McGrew, 2009). Cada una de estas habilidades generales se descompone en otras tantas habilidades específicas.

A continuación, se presentan estas diez habilidades cognitivas generales o factores amplios. Se usa como referencia las presentaciones independientes (Primi, 2003; Mcgrew, 2009):

El Razonamiento Fluido (Gf) corresponde con el uso deliberado de operaciones mentales de razonamiento en la solución de situaciones nuevas que no se pueden realizar automáticamente. Tiene poca o muy poca dependencia de conocimientos previos. Se manifiesta en habilidades como hacer inferencias, relacionar ideas, inducir conceptos abstractos, comprender implicaciones, reorganizar información, generar y probar hipótesis, comprender relaciones, resolver problemas, extrapolar y transformar información. En general, los razonamientos inductivo y deductivo son indicadores centrales de razonamiento fluido. Es un factor altamente complejo y se asocia con el uso de un arreglo amplio y diversificado de procesos cognitivos elementales. Se manifiesta en habilidades específicas como razonamiento (deductivo) secuencial general, inducción, razonamiento cuantitativo, razonamiento Piagetiano, velocidad de razonamiento y la comprensión del conocimiento.

Razonamiento cristalizado (Gc), es un factor ligado con la extensión y profundidad de los conocimientos adquiridos, depende del lenguaje, de ideas o esquemas aprendidos. Se asocia al conocimiento declarativo como hechos, ideas y conceptos y al conocimiento procedimental, es decir, estrategias o enfoques. En resumen, es conocimiento declarativo y procedimental adquirido a través de la maduración de otras habilidades durante el proceso de educación formal o informal y durante experiencias de vida. Se manifiesta en habilidades específicas como desarrollo del lenguaje, conocimiento léxico, habilidad para escuchar, información general (verbal), información acerca de la cultura, habilidad de comunicación, fluencia y producción oral, sensibilidad gramática, habilidad en el manejo de otros lenguajes, aptitud hacia otros lenguajes.

La *memoria de corto plazo (Gsm)* se interpreta como la capacidad de aprehender y mantener deliberadamente una cantidad limitada de información. La dinámica de esta información es regida fundamentalmente, por la atención a una situación específica y temporal. Es un sistema limitado de almacenamiento que puede hacer una recuperación rápida y que también olvida información rápidamente. Esto cuando el foco de atención en la situación específica desaparece.

El procesamiento visual (Gv) está asociado con la capacidad de percibir, almacenar, recuperar, analizar, procesar y transformar imágenes visuales. Se manifiesta en el desempeño de tareas que requieren la percepción y transformación de imágenes y o tareas que requieren un sentido de orientación espacial al mirar o imaginar objetos que se mueven en el plano o el espacio.

El procesamiento auditivo (Ga) está ligado al análisis de patrones sonoros como lenguaje y música. Incluye un amplio rango de habilidades involucradas en la interpretación y organización de sonidos.

La memoria de largo plazo (Glr) es la capacidad manifiesta en dos procesos que son el almacenamiento y consolidación de nueva información en la memoria de largo plazo y la recuperación de manera fluida de esa información (nombres, conceptos, ideas) a través de asociaciones, es decir, estímulos.

La velocidad de procesamiento (Gs) se asocia con la capacidad de realizar tareas cognitivas simples y bien aprendidas de manera rápida y automática y con alta eficiencia mental.

Capacidad de lectura escritura (Gwr) es la comprensión de textos, la capacidad de decodificar textos, la comprensión de lectura o de historias. Comprensión de lectura y capacidad para escribir un ensayo, por ejemplo.

Conocimiento cuantitativo (Gq), amplitud y profundidad adquiridas en el almacenamiento de información declarativa y procedimental cuantitativa o conocimiento numérico. Representa un repositorio personal de conocimiento matemático adquirido, no es el razonamiento que pueda hacerse con este conocimiento. Y la palabra matemático no forma parte de la literatura general al respecto y es específica al punto de interés de este estudio.

Velocidad de decisión (Gt), que se refiere a la reacción rápida en las situaciones que implican procesamiento y toma de decisiones.

2.1.3 Teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner

Los estudiosos de la inteligencia, muchos y muy diversos, pueden agruparse en distintas categorías de acuerdo con su interpretación de la inteligencia ya sea como característica o como habilidad y en especial de su manifestación en los individuos. Los puristas, entre ellos Spearman, ven la inteligencia como una habilidad única; los pluralistas, que son los que más prevalecen hoy y desde algunas décadas atrás, que ven la inteligencia como una habilidad que resulta de la composición de elementos separados de un todo. Ambos grupos muy orientados por operatividad de la inteligencia y por los test, y parecen regidos por un fin evaluativo.

Por otro lado, la inteligencia puede verse más como una característica multifacética en el individuo. Esta visión corresponde a la propuesta de Gardner (1995) acerca de las inteligencias múltiples. En principio, la propuesta de inteligencias múltiples de Gardner, en palabras del mismo Gardner, evita los credos psicológicos de operacionalización y evaluación (Gardner, 1999, p.4). Establece que en el ser humano hay al menos ocho tipos de inteligencia (Gardner, 1993), la *inteligencia lógico matemática* (la más apreciada en la escuela, especialmente por los que miden el éxito en términos de test de inteligencia), *la lingüística-verbal, la musical, la espacial, la cinética-corporal, la naturalista, la interpersonal y la intrapersonal.* Todos los seres humanos poseen en menor o mayor medida estas inteligencias y son como una huella digital, es decir, la configuración de ellas es individual y probabilísticamente irrepetible. También, estima que las diferencias individuales tienen su origen en aspectos hereditarios accidentales, el medio y las interacciones que tenga o haya tenido el individuo.

La teoría de las inteligencias múltiples de Gardner ofrece una interpretación más modular a la inteligencia humana. Ciertamente es una propuesta más gustada por muchos, quizá porque es más abierta, más popular y más inclusiva.

Esta última afirmación no debe interpretarse como que no sea correcta, mi percepción general, es que existen en el fondo muchas similitudes entre las diversas propuestas y con un concepto tan valorado y complejo, como lo es la inteligencia, que se torna un concepto evasivo en su conceptualización y en su medición y es completamente natural la diversidad y cierto nivel de difusidad en sus distintas interpretaciones. Una de las críticas que parecen más interesantes a la propuesta de Gardner (Lohman, Colangelo & Assouline, 1998) con la cual tiendo a coincidir, es que esta teoría no falla en reconocer o explicar qué tipos de inteligencia existen y que están correlacionadas, más bien falla al tratar de establecer cómo esta correlación induce una jerarquía. En palabras de Lohman y col. (1998, p. 222) “no explica por qué algunas inteligencias son más inteligentes que otras”.

En la propuesta de las inteligencias múltiples, la inteligencia lógico matemática incluye la capacidad de usar números de manera efectiva en distintos contextos y la capacidad de razonar bien. Esta inteligencia incluye sensibilidad hacia patrones lógicos y relaciones, instrucciones y proposiciones (si ocurre esto entonces ocurrirá aquello es decir relaciones causa efecto), funciones y otras abstracciones relacionadas (Armstrong, 2009). La clase de procesos usados en el desempeño de esta inteligencia incluyen categorización, clasificación, inferencias, generalización, cálculos y pruebas de hipótesis. Para una descripción completa véase Armstrong (2009).

2.1.4 Elementos previos a la definición de un modelo para razonamiento matemático.

Es evidente que este estudio no tratará de medir la inteligencia. Pero sí busca medir uno de los aspectos más valorados de la inteligencia, especialmente en el área de las ciencias. Este aspecto es el razonamiento matemático y tiende a manifestarse en ciertas capacidades asociadas con actitudes y aptitudes para enfrentar situaciones nuevas, cuya solución no es directa o inmediata e involucra capacidades matemáticas diversas.

Las teorías sobre la inteligencia, tanto el modelo Catell-Horn-Carroll como la de inteligencias múltiples sostienen la importancia de este aspecto, aunque tienden a dimensionarlo diferente.

Desde la propuesta de las inteligencias múltiples hay evidencias acerca de estudios de razonamiento lógico matemático, no obstante, algunos de los autores de las mismas reconocen algunas deficiencias especialmente de carácter operativo y funcional. García, García, Sains, Prieto y Sánchez (2008) señalan que "... las evaluaciones que señala Gardner, no pueden sustituir por completo los test normalizados que tanto critican, pueden proporcionar una visión complementaria que revele capacidades más desatacadas de cada niño. Además, llevar a cabo este modelo implica mucho tiempo, esfuerzo y prudencia...". (p. 221)

El modelo Catell-Horn-Carroll es una taxonomía más clara y orientada por objetivos, lo que la hace mucho más adecuada para una evaluación, en este caso del razonamiento. Además de la génesis del modelo, otras razones que inclinan a usar la taxonomía Catell-Horn-Carroll como referente se exponen a continuación.

Cada una de las habilidades identificadas en el modelo apunta a aspectos complementarios, factores que explican la inteligencia en mayor o menor medida. Hay estudios previos que justifican que este modelo es apto para el desarrollo e interpretación de las pruebas. Floyd, Evans y McGrew (2003) hace referencia a la existencia de diversos estudios que examinan la relación entre habilidades generales del modelo CHC y el desempeño matemático. Citan Floyd y col. (2003) investigaciones de McGrew y Hessler (1995) en las que se examinan las relaciones entre las medidas de las habilidades cognitivas amplias y específicas de esta taxonomía y los logros matemáticos en las pruebas conocidas como Woodcock-Jhonson Psyco-Educational Battery, desarrolladas siguiendo la taxonomía CHC. Reporta también importantes relaciones, en particular una fuerte relación entre el factor razonamiento cristalizado (Gc) y el clúster matemático para individuos mayores de 5 años. Igualmente Floyd y col. (2003) citan una relación de fuerte a moderada entre el razonamiento fluido (Gf) y los dos conglomerados matemáticos en la prueba. Complementa con otras referencias sobre estudios semejantes que permiten sostener que los factores Gc y Gf, entre otros, son buenos predictores del éxito matemático. En el mismo sentido, se pueden encontrar referencias en Bacal (2010). En esta misma línea Proctor, Floyd y Shaver (2005) hacen referencia a trabajos de Floyd y col. (2003) y de McGrew y Hessler (1995) quienes concluyeron que los clústeres comprensión del conocimiento, razonamiento fluido, y velocidad de procesamiento mostraron relaciones consistentes con las mediciones de destrezas de cálculo y razonamiento matemático.

El modelo CHC se genera como resultado de sintetizar análisis factoriales conducidos por investigadores independientes y usando diferentes tipos de test o poblaciones. Además, este modelo consiste en una clasificación detallada de habilidades cognitivas y académicas. Esta clasificación de los test de habilidades cognitivas y académicas, ayudará a identificar mediciones y a acceder mediante ellas varios aspectos de las habilidades generales relacionadas con el razonamiento matemático, tales como razonamiento fluido (Gf), razonamiento cristalizado (Gc), conocimiento cuantitativo (Gq) y capacidad de lectura escritura (Grw) descritas en la teoría CHC y correlacionadas de manera moderada y alta con la capacidad de razonamiento (Bacal, 2010; Proctor y col., 2005).

El modelo a proponer no necesariamente va a capturar estas habilidades ni en la forma ni en la estructura de CHC. En el fondo si se vale de esta descomposición para interpretarla a la luz del objetivo propuesto y formular un modelo para el razonamiento matemático con ciertas similitudes. La percepción es que conocer mejor qué test mide qué habilidades puede ayudar a organizarlos en grupos relevantes al constructo a medir. Es decir, aquellos factores que explican la varianza del constructo abstracto razonamiento matemático.

Un tercer factor, que se cita en Alfonso y col. (2005), para la elección de este enfoque es la clasificación específica de las habilidades cognitivas y académicas que ofrece. El uso de estas habilidades específicas se hace necesario para garantizar que las evaluaciones que caracterizan el constructo estén bien representadas y evitar en la medida de lo posible errores al dejar por fuera variables que pueden ser importantes.

La calidad de una prueba, sin duda termina por reducirse a la relación que ésta permite establecer entre los resultados que la prueba brinde. Es decir, un valor cuantitativo, y la valoración que podamos hacer de estos resultados para establecer una medición de aquello que queremos evaluar; en este caso razonamiento matemático. La prueba de manera directa o indirecta debe traducirse a baremos que caractericen de la mejor manera posible el objeto de medición.

El concepto de inteligencia es esquivo y apasionante, no sólo porque representa una cualidad humana muy valorada sino porque, sin duda identificar mejor los aspectos que la conforman o definen es un anhelo ya viejo en nuestra sociedad.

Existe una percepción bastante establecida de que la inteligencia es un atributo relativamente estable en el individuo que tiene un importante componente de orden genético y, además, se desarrolla como una interacción entre la herencia y el medio (Sternberg, 1999). Esto puede transmitir la idea de que, respecto a la inteligencia, lo esencial es conocerla y dimensionarla pero no pareciera posible hacer mucho por mejorarla. Esta última afirmación es absolutamente discutible e implícitamente ignorada por muchos de los estudiosos del tema. Basta con mirar el abrumador número de publicaciones que abordan la atención de problemas cognitivos en niños y niñas para darse cuenta que tal afirmación no es exactamente un axioma. Pero, en general, los límites entre herencia o desarrollo por influencia del medio siguen siendo difusos y podríamos decir, que en el tanto no se defina hasta dónde el factor herencia sea determinante, aislado de los otros componentes como el medio o la educación, resulta fundamental buscar esquemas que permitan comprender mejor las distintas facetas de la inteligencia, específicamente una tan importante en las estructuras de desarrollo predominantes en nuestros tiempos, como lo es el razonamiento matemático.

Quizá las intenciones que motivaron los trabajos iniciales de Binet o Spearman acerca de los test de inteligencia revelan la profunda necesidad de explorar la inteligencia para poder potenciar, a través de ella, distintos proyectos que van desde el orden económico, militar y el que motiva este trabajo, el educativo. Hablar de inteligencia es hablar de una aptitud valorada tanto en el contexto grupal como el contexto individual. Hay muchas maneras de enfocarla lo cual es bueno, porque de alguna manera, permite valorar mejor la diversidad del ser humano. Esta es una característica positiva de las propuestas de las inteligencias múltiples. Sin embargo, dimensionar las capacidades de razonamiento como punto de partida de otras acciones, es vital porque permite optimizar esfuerzos y resultados. Las ciencias en general, así como el desarrollo de un importante segmento de la humanidad, se nutren de buenos científicos y de ciudadanos con profundas habilidades matemáticas. Es fundamental brindar a todos los estudiantes primero una formación matemática básica para enfrentar la vida, más allá de aprender unos cuantos algoritmos debemos enseñarlos a razonar. También es necesario descubrir y dar seguimiento al talento pensando en cuadros científicos futuros, así como descubrir alternativas que permitan ofrecer a aquellos que lo necesiten, enfoques educativos y atenciones apropiadas que potencien su desarrollo integral.

La medición de la inteligencia sigue siendo un problema complejo. Por ejemplo, Sternberg (1999) pone en duda las mediciones de la inteligencia a través de los tradicionales test y sugiere una medición alternativa basada en lo que llama experticia. Un proceso de desarrollo en la adquisición y consolidación de un conjunto de herramientas necesarias para tener un nivel de maestría en uno o más dominios del desempeño en la vida. Este enfoque, probablemente, converge más con el enfoque de las inteligencias múltiples.

2.1.5 Estructura general del modelo que se adopta

Esta corta sección es un adelanto del modelo de razonamiento que se propondrá posteriormente y sirve como elemento que permite explicar el capítulo siguiente. En concordancia con las propuestas Catell-Horn-Carroll se asume un modelo jerárquico. Una dimensión general que se llamará razonamiento matemático, que no es sinónimo de inteligencia. Luego, cuatro habilidades generales de segundo orden. Estas habilidades de segundo orden se miden a través del desempeño mostrado por el estudiante en actividades específicas. Es decir, un factor general razonamiento matemático y cuatro habilidades generales, algunas de ellas relacionadas con habilidades generales paralelas del modelo CHC, pero no necesariamente equivalentes.

Se reconoce que estas habilidades generales pueden incluir elementos de varias habilidades específicas más tangibles, relacionadas con resolución de tareas concretas que son al final de cuentas los elementos de medición. Para efectos de este estudio no interesa estudiar una división específica de estas habilidades dado que el interés se centra el en rol de la habilidad como tal en el razonamiento matemático.

En resumen el razonamiento matemático visto como una estructura jerárquica similar a los modelos de inteligencia CHC una dimensión razonamiento matemático en la cúspide y cuatro dimensiones generales como manifestaciones del razonamiento matemático.

2.2. Sobre el Razonamiento Matemático

2.2.1 Aspectos generales

Es claro, para empezar, que es sumamente difícil encontrar una definición de qué entender por razonamiento matemático. Al igual que la inteligencia, este es un factor latente complejo.

Para Proctor y col. (2005) el razonamiento matemático se refiere a la habilidad de resolver problemas usando conocimientos acerca de las operaciones matemáticas y axiomas, relaciones numéricas y conceptos cuantitativos. En Polya (1998) es un proceso dotado de reglas sin dejar de lado cierto grado de aleatoriedad en los procesos cognitivos de abordaje, esa aleatoriedad en los procesos recibe una mayor atención y se habla de heurísticos.

Para Ross (1998, citado por Lithner, 2000), el término razonamiento es definido como una línea de pensamiento, una manera de pensar, adoptada para producir aserciones y llegar a conclusiones.

Para Lithner (2000) enseñar a los estudiantes razonamiento lógico es una de las metas más sobresalientes de los cursos de matemática. En los mismos términos se expresan muchos otros autores. Por ejemplo, Stein, Grover y Henningsen (1996) hacen una reflexión sobre pensamiento y razonamiento y apuntan que los movimientos de reforma en la enseñanza de la matemática en los Estados Unidos han puesto sobre el tapete una serie de metas ambiciosas para el aprendizaje de los estudiantes. Para estos autores documentos publicados por la National Council of Teachers of Mathematics, por la Mathematical Association of America y por el National Research Council señalan la importancia de que los estudiantes desarrollen un conocimiento profundo e interconectado de los conceptos, procedimientos y principios matemáticos y no simplemente la habilidad de memorizar fórmulas o aplicar procedimientos. Se da un creciente énfasis no sólo en la capacidad del estudiante para entender la sustancia de la matemática, sino también en la capacidad de hacer matemáticas.

El mismo grupo, Stein y col. (1996), indican que en los años recientes tanto matemáticos como educadores y pensadores han argumentado convincentemente que un entendimiento pleno de la matemática es más que el conocimiento de los conceptos, principios y estructura de la disciplina, fundamentándos en los trabajos de Lakatos (1976), Kitcher (1984) y Schoenfeld (1992). A partir de los trabajos de estos investigadores anteriores, se desprende que un entendimiento completo de la matemática incluye la capacidad de involucrarse en procesos de pensamiento matemático, en esencia crear y resolver problemas, descubrir patrones, hacer conjeturas, hacer inferencias de datos, abstraer, explicar, inventar y justificar, todos ellos procesos ciertamente deseables y complejos.

En un contexto más general todos los modelos de inteligencia hacen su propia interpretación de las capacidades de razonamiento general y lógico matemático en específico. Uno importante es el modelo triárquico de Sternberg (Horn, 1991; Sternberg, Castejón, Prieto, Hautamäki & Grigorenko, 2001) que puede ser de utilidad al objeto de estudio de este proyecto. En este modelo se reconocen para la inteligencia tres subteorías:

- La subteoría componencial: que relaciona la inteligencia y el medio interno del sujeto. Esto es lo que se llama inteligencia analítica.
- La subteoría experiencial: que intenta entender la inteligencia en términos de relación entre el individuo y su experiencia.
- La subteoría contextual: que considera la inteligencia en función de las relaciones del individuo con su mundo externo.

Se acepta uno de los componentes como el más ligado al razonamiento matemático, la teoría componencial, y dentro de éste se reconocen tres componentes definitorios: los metacomponentes, los componentes de rendimiento y los de adquisición de conocimiento.

Resultan de interés los metacomponentes que son procesos ejecutivos de orden superior que se usan para planificar una actividad, controlar y evaluar el resultado. Específicamente:

- Reconocer y definir un problema.
- Seleccionar una serie de componentes de orden inferior para resolverlo.
- Seleccionar la estrategia más apropiada y eficaz para combinar dichos componentes.

- Representar mentalmente la información para tener una imagen clara de la eficacia de la estrategia.
- Localizar las fuentes para resolver el problema.
- Controlar los procesos de solución del problema.

Agrega Delgado (1995) que esos metacomponentes ayudan a entender las diferencias en inteligencia general entre los sujetos y que el uso de los mismos es imprescindible para adquirir conocimientos y rendir.

También, desde la perspectiva de las Inteligencias Múltiples (Gardner, 1985), la inteligencia lógico matemática, que es el concepto más cercano al razonamiento lógico, es la capacidad de construir soluciones y resolver problemas, estructurar elementos para realizar deducciones y fundamentarlas con argumentos sólidos (Ferrándiz y col., 2008).

Desde la experiencia más cercana a la matemática misma, el concepto de razonamiento matemático también ha recibido bastante atención, quizá con un enfoque un tanto complementario al psicológico. Por ejemplo, Godino y Recio (1997) en un artículo acerca del significado de la demostración en la educación matemática, cuyo objetivo no se centraba en evaluación del razonamiento, hacen referencias que pueden ayudarnos a dimensionar el concepto. Citan a Balacheff (1987, p.148) quien define el razonamiento como la "actividad intelectual, la mayor parte del tiempo no explícita, de manipulación de informaciones para producir nuevas informaciones a partir de datos". Luego, citando a Poincaré (1902), complementan:

> ¿Cuál es la naturaleza del razonamiento matemático? ¿Es realmente deductivo como ordinariamente se cree? Un análisis profundo nos muestra que no es así; que participa en una cierta medida de la naturaleza del razonamiento inductivo, y que por eso es fecundo (p.15)

Dos elementos resultan centrales en todas estas propuestas. Primero, razonar es transformar información. En el caso del razonamiento matemático formal, esta transformación se da a partir de procesos intelectuales explícitos, pero ésta requiere de una apropiación preliminar de la información. Segundo, en estos procesos de transformación participan componentes inductivos que orientan la búsqueda de un objetivo y la presencia de esquemas matemáticos formales que puede ser implícita y no consciente. El individuo común, en este caso el estudiante, al hacer razonamiento matemático no suele tener conciencia de procesos deductivos formales que realiza.

Para los más estrictos, el razonamiento matemático es un proceso para organizar el pensamiento con reglas ciertamente definidas aunque flexibles. Una visión muy formal es ver al razonamiento como una forma del pensamiento inferencial, es decir, partiendo de juicios verdaderos o premisas llegamos a una conclusión. Este proceso se basa en ciertas reglas de inferencia. Una referencia como ésta, hace cierta reducción del razonamiento lógico a una formalidad y deja por detrás la dimensión intelectual que es capaz de generar ideas ante un determinado desafío y se contrapone completamente con la visión heurística o inductiva de pensadores como Polya o Kilpatric o retrocediendo un poco en el tiempo el mismo Poincaré (1913, citado por Tall, 1991), que alerta sobre el estudio del pensamiento matemático y afirma que es imposible estudiar los trabajos de los grandes matemáticos, aún de aquellos menores, sin percibir y distinguir dos tendencias opuestas, más que eso dos clases de mentes enteramente distintas. Una preocupada sobre todo con la lógica, otra más guiada por la intuición.

Un par de referentes adicionales que sin ser exclusivos son muy importantes son el National Councilium of Teachers of Mathematics (NCTM) y el proyecto PISA/OCDE.

El proyecto PISA/OCDE resume la intención de la formación matemática en el concepto de Competencia Matemática. En pocas palabras, las habilidades mostradas por el individuo al ser expuesto a situaciones específicas. Según Rico (2007) las competencias o procesos generales elegidos por el proyecto PISA /OECD en el 2004, son:

- pensar y razonar
- argumentar
- comunicar
- modelar
- plantear y resolver problemas
- representar
- utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

- usar herramientas y recursos.

Solamente dos de estos procesos son factibles a ubicarse fuera del contexto de razonamiento y resolución de problemas y son comunicar y usar herramientas y recursos y se dice que es posible porque son muchos los contextos en los que ambos procesos podrían ubicarse en el razonamiento y la resolución de problemas. El mismo autor, Rico (1995), encadena las capacidades de comunicación y expresión como una parte importante de la capacidad de razonamiento. Llama la atención también que los niveles de desarrollo superiores que se pueden identificar en los estudiantes, los dos últimos niveles, según este reporte, se centran en la capacidad de un razonamiento más elaborado para resolver problemas con mayor nivel de dificultad.

Desde el lado de frente, por decirlo de alguna manera, el asunto no cambia significativamente. El NCTM define y encapsula los procesos y estándares para la educación matemática en 5 áreas bien definidas:

- Resolución de problemas.
- Razonamiento y pruebas.
- Comunicación.
- Conexiones.
- Representación.

Acerca de las partes de razonamiento incorpora como manifestaciones del dominio del proceso: que genera e investiga conjeturas, evalúa y da seguimiento a razonamientos matemáticos, puede seleccionar y usar distintos tipos de razonamientos y métodos de pruebas. Agrega que el desarrollo integral de esta habilidad se manifiesta en la facilidad para reconocer patrones estructuras o similitudes en problemas con situaciones reales o simbólicas o descubrir si éstos son accidentales o responden a un patrón y en ese caso conjeturar y probar.

De manera equivocada, podría pensarse que el tema del razonamiento matemático y el desarrollo del mismo es una tarea sencilla. Nada más lejano de la verdad que esto. A principios del siglo pasado, Henry Poincaré, citado entre otros por Gardner (1985), lanza una intrigante pero sugestiva pregunta: *¿Si la matemática solamente involucra reglas lógicas, que son presumiblemente aceptadas por toda mente humana normal, nadie debería tener problemas para* *entenderla?.* Él mismo aclara que la matemática va mucho más allá de conocer principios y yuxtaponerlos en cierto orden. Existe una intuición o predisposición a saber cómo ordenar esas cadenas de conclusiones simples que conducen a la resolución de una situación–problema. ¿Podríamos llamar a está "intuición" capacidad de razonamiento matemático?

A modo de resumen, el razonamiento matemático se entenderá en este documento y para los efectos de esta tesis como un conjunto de habilidades, que pueden ser genéticas, producto de los procesos evolutivos o bien aprendidas o potenciadas externamente, que se manifiestan en el desempeño mostrado por el individuo al abordar holísticamente una situación específica y especial que implica comprensión, análisis y resolución de lo que llamaremos problemas de razonamiento.

2.2.2 Conductas asociadas al razonamiento matemático

Esta diversidad de enfoques deberá hacerse converger en la definición de alguna estrategia para abordar la medición de este constructo en cualquier propuesta que se desee, particularmente la que propone este estudio. Lo más práctico pareciera ser el establecer algunas conductas tangibles que recojan los factores comunes que dan forma al razonamiento matemático. Con el riesgo, por demás omnipresente en la investigación, de sacrificar la diversidad en función de la medición científica realista, es importante aclarar, aunque podría sobrar decirlo, que no nos referimos aquí, en general, al razonamiento matemático del matemático puro, sino más bien al razonamiento que puede manifestarse en cómo el niño o el adolescente da indicios de tener criterios, predisposición, y en algunos casos un bagaje de saberes técnicos y no técnicos tales como heurísticos, que permitan establecer su habilidad para razonar y resolver exitosamente situaciones que podemos clasificar como de razonamiento.

Hay varios componentes que parecieran ser determinantes en la capacidad de razonamiento. Entre los especialistas no hay acuerdo en hasta dónde se diferencian o si son lo mismo. Sin embargo, desde la perspectiva evaluativa que se busca en este trabajo es importante diferenciarlos y luego quizá cuantificar su aporte en la valoración que buscamos.

Primeramente, siguiendo el enfoque Cattell-Horn-Carroll, es común encontrar una fuerte asociación entre la inteligencia fluida y el razonamiento matemático. La inteligencia fluida es aceptada como la capacidad de usar deliberadamente operaciones mentales para resolver problemas novedosos, problemas que trascienden la aplicación de reglas o procedimientos aprendidos. Esta habilidad incluye la posibilidad de realizar operaciones mentales como inferir regularidades a partir de algunos datos, identificar relaciones, formar conceptos, clasificar, generar y verificar hipótesis, comprender y usar implicaciones, extrapolar y transformar información y resolver problemas (Primi, Ferrão & Almeida, 2010), muchos de ellos elementos citados de manera directa o indirecta en los párrafos previos. Esta asociación ofrece un primer acercamiento a una posible descomposición del razonamiento matemático usando como punto de partida las distintas habilidades asociadas a la inteligencia fluida. Si bien el razonamiento matemático no es la inteligencia fluida, muchos de las habilidades asociadas con ésta serán replanteadas en un factor asociado con el razonamiento matemático.

En forma más general, el conjunto de operaciones mentales complejas asociadas con la inteligencia fluida así como habilidades espaciales elementales y la habilidad de manejar adecuadamente información conforman un conjunto de habilidades que combinadas contribuyen a la caracterización de lo que podemos llamar razonamiento matemático, en el entendido de razonamiento matemático como la capacidad de abordar adecuadamente y resolver situaciones matemáticas contextualizadas o no y que sean novedosas o representen retos al pensamiento del individuo.

Para Jonassen (2000) las actividades centrales de razonamiento están ligadas a la resolución de problemas. Enfatiza que hay operaciones críticas en el proceso. Primero, la representación del problema. Se construye un modelo mental, el cual responde a una representación multimodal consistente de conocimiento estructural, conocimiento procedural, conocimiento reflexivo, entre otros elementos. Segundo, requiere de la manipulación de esa representación, a la que él llama espacio del problema.

En el caso de la matemática, estas habilidades se combinan en otras más específicas que tienen que ver con aspectos como:

1. La habilidad para usar variables para representar datos o información y relaciones cuantitativas entre ellos. Estas representaciones pasan por la determinación de relaciones numéricas, simbólicas, geométricas o bien combinaciones de ellas. Por ejemplo, la representación de una situación a través de un gráfico ofrece a ciertos individuos la posibilidad de percibir relaciones no evidentes en una descripción oral, o por ejemplo, el poder observar el comportamiento de una serie numérica específica puede caer en el dominio de la representación concreta que liga lo cualitativo con lo cuantitativo, esta representación no necesariamente es explícita. Además, es probable que las representaciones tengan un valor específico individualizado y no general. Hay un sello personal en la representación ligada al razonamiento del individuo.

Uno puede preguntarse ¿qué hace la diferencia entre la capacidad de un estudiante sin entrenamiento para poder resolver exitosamente una o ambas de las siguientes preguntas?

- Seleccionar de una lista un valor que complete la secuencia que se muestra:

1	4	3	16	5	36	?	. . .

- Un recipiente contiene 5 litros de agua, se extrae un litro de agua y se sustituye con leche. Luego de mezclar el líquido, nuevamente se extrae un litro del contenido del recipiente y se sustituye con un litro de leche. ¿Qué cantidad de leche queda en el recipiente?

En el primer caso, el éxito se sustenta en cierta capacidad de establecer relaciones cualitativas y cuantitativas, al factorizar características distintivas en dos segmentos de la serie, para luego descubrir patrones en cada subsecuencia. Es decir, una representación mental que permite al sujeto visualizar adecuadamente partes en un todo. En el segundo caso, descubrir las partes cambiantes dentro del problema para luego elegir la representación que permita resolverlo. Los procesos de representaciones, en ambos casos, son complejos y ciertamente aleatorios.

Sin duda, un problema complejo y poco probable de resolver, es encontrar qué representación usa el individuo, –un gráfico, un modelo mental, una variable u cualquier otro medio–. Es indiscutible que en el estudiante escolarizado hay en el proceso de incorporación de ideas, que lo lleven a adoptar como suyas representaciones ajenas. Por un lado, esto puede ayudarle, pero también, este puede ser uno de los resultados negativos de la escuela formal, si se piensa que esto es una camisa de fuerza al razonamiento del individuo. Esto, sin duda, es un problema muy complejo.

2. La habilidad para establecer relaciones de segundo orden en una manera lógica y coherente, según los modelos individuales de representación. Identificar antecedentes y consecuentes de una manera coherente con los requerimientos del problema.

3. La habilidad de manipulación y representación visual. Un pensamiento dinámico que permita una organización de la información que sea fluida y conducente, una visualización concreta y en proyección que permita inferir o generalizar, es decir tener una estrategia.

Estas habilidades ligadas todas a los razonamientos deductivos, inductivos, espacial y, adicionalmente, a un elemento no clasificable dentro de estos tres que se citan, que además pareciera volverse fundamental en el análisis de los procesos de razonamiento: la memoria de trabajo (Daneshamooz, Alamolhodaei & Darvishian, 2012).

El concepto conocido como capacidad de memoria de trabajo (MT), originalmente presentado por Alan Baddeley (Working Memory), se entiende como un sistema cerebral que provee el almacenamiento temporal y la manipulación de la información necesaria para tareas cognitivas complejas como comprensión de lenguaje, aprendizaje y razonamiento. Según Raghubar, Barnes y Hetch (2010) la memoria de trabajo es el espacio mental involucrado en controlar, regular y mantener activa información para realizar tareas cognitivas complejas.

Para Raghubar y col (2010) esta capacidad es esencial en habilidades cognitivas incluido el razonamiento, la comprensión y la resolución de problemas.

Este punto de vista es compartido por muchos otros autores (Ashcraft & Krause, 2007; Meyer, Salimpoor, Wu, Geary & Menon, 2010).

Si comparamos esta definición de memoria de trabajo con el concepto de Inteligencia Fluida citado en el capítulo anterior, se hace difícil establecer la diferencia entre ambos conceptos. Para algunos autores estos constructos latentes están fuertemente correlacionados (Colom, Jung & Haier, 2007; Heitz, Unsworth & Engle, 2005); otros en cambio piensan y evidencian en sus investigaciones que no son lo mismo aunque estén relacionados de maneras que aún no se entiendan (Kane, Hambrick & Conway, 2005). Desde esta experiencia de trabajo, se asume que son constructos distintos aunque muy relacionados entre sí. La capacidad de trabajo se compone, desde esta perspectiva, de una actitud y una habilidad. La habilidad sin actitud no se puede manifestar plenamente; igualmente una actitud conveniente sin el amparo de ciertas habilidades de memoria de trabajo no será productiva. Entendida fundamentalmente como la capacidad de almacenamiento temporal eficiente de información y su manipulación adecuada, la memoria de trabajo, junto con los otros tres constructos citados, será sometida a prueba para determinar si incide en los esquemas de razonamiento mostrados por el individuo.

Se busca, como primer paso, evidenciar esta habilidad general a través de otras habilidades específicas concretas medibles, en el mismo sentido del modelo Cattell-Horn-Carroll con las habilidades específicas, aunque no necesariamente las mismas. En particular se prestará especial atención a los factores relacionados con deducciones, inducciones y habilidades espaciales así como aspectos relacionados con la Memoria de Trabajo. Es claro que la escuela afecta el desempeño del individuo al ir fijando experiencias estructuradoras del pensamiento, que pueden ayudarlo a desarrollar habilidades relacionadas con la Inteligencia Cristalizada o inclusive dentro de la Inteligencia Fluida. Esto debido a la interacción con pares o con el medio. Medir de alguna manera ese efecto será también uno de los objetivos de este trabajo valiéndose del estudio de la evolución del razonamiento en los estudiantes como efecto de la edad y la escuela.

Como comentario adicional, aunque este rol estructurador de la Escuela no es el tema que interesa, si sugiere algunos elementos de investigación futura interesantes, por ejemplo, analizar el comportamiento en el razonamiento en niños de 12 años comparando el desempeño de dos grupos provenientes de Escuelas públicas donde la formación es mucho más elemental y estudiantes de Escuelas privadas en las cuales existe una mayor atención al desarrollo temprano de las actividades de razonamiento en el niño, todo esto en el escenario costarricense.

2.2.3 Razonamiento matemático un enfoque integral

El razonamiento matemático es considerado un elemento esencial en la educación matemática. Por ejemplo, la CCSSM (Common Core State Standards for Mathematics) propone una serie de lineamientos que refuerzan el rol del razonamiento. Bajo el nombre de estándares para la práctica matemática propone, dar sentido a problemas y perseverar en su solución, razonar abstractamente y cuantitativamente, construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros, establecer modelos a través de las matemáticas, uso apropiado de herramientas estratégicas, atender elementos de precisión, buscar y usar patrones o estructuras. De manera similar esta tendencia es visible en los estándares de proceso de la NCTM o las competencias matemáticas en PISA. Sin duda, en las últimas décadas se han revitalizado planteamientos estructurales de fondo respecto a las habilidades matemáticas que deben desarrollar los estudiantes y en buena medida parte de ese replanteamiento se centra en aspectos relacionados con la resolución de problemas y con ello en los procesos de razonamiento matemático.

El razonamiento matemático se ve en general como una dimensión abstracta que además es muy valorada dentro de las habilidades matemáticas. Sin embargo prevalece una visión limitada y limitante para el razonamiento matemático, el cual, en muchos casos termina por asociarse con un sinónimo de su manifestación, resolver problemas. La estructura propuesta es un enfoque más apropiado para entender, desde la perspectiva de la intervención educativa, el constructo al ofrecer una visión factorizada.

Se busca adicionalmente, en esta tesis ofrecer una visión alternativa para instrumentos específicos que midan el razonamiento matemático. Si bien es cierto que existen diversas pruebas de inteligencia que dimensionan este tipo de razonamiento, como una entre varias dimensiones, no se encontró ninguna específica al razonamiento matemático y que minimizara el efecto de los concomimientos o la inteligencia cristalizada.

Para Kontoyianni, Kattou, Pitta-Pantazi y Christou (2013), específicamente en el área del talento matemático, los procesos de identificación se han conducido a través de test de inteligencia enriquecidos con elementos que incorporan talento matemático. Para Miller (1990) el talento matemático es una habilidad específica, mientras que los puntajes asociados con el coeficiente de inteligencia representan un resumen de distintas habilidades, solamente algunas de ellas ligadas a la habilidad matemática. De manera similar en Taub, Benson y Szente (2014), respecto a un estudio sobre los efectos de ciertas habilidades cognitivas en el desempeño en matemática entre estudiantes escolares, concluyen que la inteligencia general solamente tiene efectos indirectos sobre el desempeño matemático para edades entre 14 y 19 años y en general solo es observable a través del efecto directo sobre habilidades específicas como las inteligencias fluida y cristalizada.

Se agrega a este escenario otros elementos vigentes e importantes. En el contexto de las exigencias actuales en educación, evaluar las capacidades de razonamiento matemático se vuelve fundamental no sólo por los aspectos citados previamente, también para atender con éxito particularidades individuales que muchas veces quedan rezagadas en el colectivo o necesidades especiales tales como atención a las dificultades en matemática (Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012) o el talento tan valorado sí realmente se quiere participar productivamente del desarrollo de las ciencias y la tecnología (Grozdev, 2007; Kontoyianni & col., 2013). Ya se enunciaba en el preámbulo de este documento la dualidad que circunscribe a la educación matemática, por un lado ofrecer una educación oportuna y de calidad, de acuerdo con los estándares vigentes, y por otro atender los casos particulares, es decir aquellos estudiantes con dificultades especiales y atender los estudiantes talentosos para ir forjando los cuadros científicos que el país requiere.

2.2.4 Problemas de razonamiento matemático

La resolución de problemas de matemática es la manifestación por excelencia del razonamiento matemático y uno de los fines de la enseñanza de la matemática. Para Wilson, Fernández y Hadaway (1993, p. 16) "…el énfasis en la resolución de problemas en la clase de matemática crece y hay más presión por la necesidad de instrucción y evaluación del progreso en el tema". Para algunos autores el razonamiento matemático es un sinónimo de esta habilidad, por ejemplo para Diezman (2004, p. 1) "en la resolución de problemas se involucra la identificación de premisas a partir de información sobre el problema y hacer las inferencias necesarias para alcanzar la solución del problema".

a) Contexto general

El libro *The Psychology of Problem Solving* (Davidson & Sternberg, 2003), editado por Janet Davidson y Robert Sternberg, inicia estableciendo que casi toda cosa que hacemos en la vida está relacionada con resolver problemas, y sin duda esta apreciación es verdadera. Los problemas son parte de la naturaleza humana. Pero más allá de esa presencia permanente de los problemas en la vida, en la educación existe una dualidad medio y fin que hace de los problemas un sistema perpetuo de evolución, desarrollo y crecimiento del conocimiento humano. Uno de los fines de la educación matemática es enseñar a los estudiantes a resolver problemas y uno de los métodos que se usan por excelencia es la solución de problemas. Como ejemplo, desde hace ya unos años, se habla de los programas (PBL, por la siglas en inglés) de aprendizaje basados en problemas (Savery, 2015) y específicamente propuestas orientadas hacia las matemáticas (Roh, 2003).

La resolución de problemas ha ocupado una buena parte del pensamiento productivo de la humanidad (Tainter, 2000). Ya sean problemas originados en necesidades concretas como los que probablemente debieron resolver algunas culturas a lo largo de la historia de la humanidad, y se siguen resolviendo hoy día, o bien problemas nacidos a la luz del conocimiento humano y la necesidad permanente de ir siempre más allá de las fronteras del mismo, como es el caso de la matemática; específicamente puede citarse el desarrollo de la geometría Euclidea. Este rol de la resolución de problemas como un elemento central en el desarrollo ha hecho evidente la necesidad de promoverlo en las sociedades y eso ha generado que su estudio sea de gran interés tanto para psicólogos como para educadores durante el último siglo (Jonassen, 2000).

En un sentido general la resolución de problemas no es sólo una actividad científica, también ha evolucionado a un tipo de tarea educativa que ha ocupado una posición central dentro de la educación formal. Por ejemplo, en los nuevos programas de matemática para la educación costarricense destacan la resolución de problemas como medio para organizar la acción de aula y promover el aprendizaje de estrategias para la resolución de problemas en distinta áreas de la matemática (Ministerio de Educación Púbica, 2012).

La bibliografía especializada sobre el tema es vasta y muestra un escenario recurrente, aunque enriquecido con visiones cada vez más generales. Para Gagne (1980, citado por Jonassen, 2000), el punto central de la educación es enseñar a la gente a pensar, a usar su potencial intelectual para convertirse en mejores solucionadores de problemas. De manera similar para Frederiksen (1983) una de las herramientas más importantes que la escuela debe enseñar a los estudiantes es la habilidad para resolver problemas. Garret (1987, p. 224) apunta que “hay una antigua y amplia creencia de que resolver problemas es una actividad fundamental en la ciencia”, citando trabajos que datan de las décadas de 1940 y 1950 donde se referencia ya esta percepción, además de señalar que esta forma de pensar respondía a la idea de un aprendizaje más significativo. Hiebert y col. (1996) plantean que antes de la década de 1930 ya se daban evidencias en ese mismo sentido, y Sweller (1988) remonta los orígenes de estas ideas a los trabajos de Dewey (1910, 1916).

Para Wilson y col. (1993, p. 57) “la resolución de problemas es de especial importancia en el estudio de la matemática. La meta principal de los procesos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática es desarrollar la habilidad de resolver una amplia variedad de problemas matemáticos complejos”

Al igual que ellos, muchos educadores vemos en la solución de problemas uno de los aspectos más importantes en el desarrollo académico de las personas y en la vida misma.

Esta importancia otorgada a la resolución de problemas ha generado mucha investigación en el tema. Para Castro Martínez (2008) existía una considerable masa de investigación en resolución de problemas, cuya completa sistematización no se había concluido. Hacía referencia además al hecho de que el estudio de la resolución de problemas estuvo presente en trabajos de filósofos (Dewey, 1989), psicólogos (Bell, Fischbein y Greer, 1984; Mayer, 1986; Newell y Simon, 1972; Sternberg, 1994; Vernaud; 1983), matemáticos profesionales (Hadamard, 1947; Poincaré, 1963) y especialistas en la educación matemática (Carrillo, 1995; Cobo y Fortuny, 2000; Kilpatrick, 1967; Schoenfeld, 1985,1987,1994; Rico, 1988; Rico y otros, 1994; Socas, 2001)

En una revisión de investigaciones, Romberg (1969) destaca la resolución de problemas como uno de los campos sistemáticos de investigación en matemática en la década de los 60. De igual forma Begle (1979) incluye en su revisión de investigaciones en educación matemática la resolución de problemas como una de sus categorías más productivas, ambos citados por Castro Martínez (2008). Para Ernest (1992) la resolución de problemas puede ser rastreada al menos hasta los trabajos de Polya (1945) y Brownell (1942), probablemente mucho antes.

En la década de los 80 la resolución de problemas cobra una relevancia especial en educación en parte por influyentes reportes entre ellos la agenda de acción del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1980), el reporte Cokcroft (1982), los estándares de la NCTM (1989) y el National Curriculum of Mathematics (NCC, 1989). Todos ellos promueven fuertemente el enfoque de la resolución de problemas en la escuela (Castro Martínez, 2008; Ernest, 1992). Esta tendencia se dio no solo en Estados Unidos y el Reino Unido, también en Europa (Garret, 1987), España (Castro Martínez, 2008; Nieto y Lizarazo, 2013) y México (Santos Trigo, 1996). Se puede afirmar que en las últimas décadas este pensamiento ha afectado una gran cantidad de países. Toda esta evidencia muestra una arraigada tendencia a visualizar la resolución de problemas como un elemento central en los procesos de educación matemática.

Para dar una idea de la complejidad que puede conllevar el estudio de este tema puede citarse a Goldin (1998) para quien un modelo unificado para la enseñanza de la matemática y la resolución de problemas debe ser capaz de caracterizar y facilitar el análisis de lo siguiente:

> "…medidas de comportamiento incluyendo patrones de comportamiento que podrían verse como algorítmicos, basados en reglas o en estrategias; ambientes estructurales externos; estructura para problemas matemáticos formales y su interacción con el comportamiento, la estructura y uso de heurísticos para resolver problemas, habilidades matemáticas, meta conocimiento y auto referencia por los aprendices y resolvedores de problemas, estados de desarrollo en el aprendizaje, estructuras cognitivas y esquemas, razonamiento verbal y proposicional, imaginación y visualización, distinguir entre conocimiento automático y significativo, conocimiento de estructuras matemáticas, procesos mediante los cuales se construye el conocimiento, afecto, interacciones afecto y cognición, aspectos sociales y culturales del conocimiento matemático y su influencia." (p. 139)

De manera más resumida Osborne (2013, p. 266), refiriéndose al Simposio del National Research Council (2012), cita que "… es importante desarrollar tres dominios de competencia en el individuo, el cognitivo, el intrapersonal y el interpersonal ". Dentro del primero de ellos rescata como central desarrollar la habilidad de enfrentar procesos cognitivos de razonamiento complejo que incluyen pensamiento crítico, solución de problemas no rutinarios, construir y evaluar evidencia basada en argumentos. Más recientemente la OEDC (2015) acerca de lo que se debe evaluar en educación científica agrega la habilidad para explicar fenómenos científicamente, evaluar y diseñar indagación científica; e interpretar datos y evidencias científicamente.

La investigación en resolución de problemas como metodología para educación matemática ha sido muy diversa. Santos Trigo (1996) cita que Schoenfeld (1987) mencionó que para entender los procesos llevados a cabo por quienes resuelven problemas matemáticos y poder proponer líneas a seguir en la instrucción matemática, es necesario tomar en cuenta, la disciplina, la dinámica del salón de clases, y el aprendizaje junto con el proceso de pensar. Esto significa incorporar conocimientos de los procesos detrás del pensamiento del matemático, de los profesores de matemática, educadores y especialistas en ciencias cognitivas.

Para Lester y Charles (1992), el desarrollo de terorías para la instrucción en resolución de problemas se debería convertir en una prioridad fundamental para la educación matemática. Agregan que sólo adoptando perpectivas de esa naturaleza podremos hacer avances significativos en el tema de la enseñanza para la resolución de problemas.

Para Ernest (1992), al entender algunos de los conceptos de resolución de problemas se deben contemplar aspectos relacionados con los actores involucrados: el problema, el alumno y el contexto o situación en que se da o, viéndolo desde la perspectiva de la investigación el objeto de indagación (situación), el proceso de indagación (búsqueda de soluciones) y la indagación desde la perspectiva pedagógica (relaciones docente estudiante en el proceso de construcción del conocimiento). También Lester (1983, citado por Castro Martínez 2008), propone varias líneas prioritarias de investigación relacionadas con la naturaleza del problema; factores del sujeto o características de la persona que resuelve el problema; factores del proceso y conductas individuales durante la resolución de problemas entre otros.

Gardner (1985) sugiere que para entender el proceso de resolver problemas se tiene que considerar información de áreas como la psicología, filosofía, inteligencia artificial, lingüística y antropología.

Castro Martínez (2008) resume las agendas de investigación en grandes temas: naturaleza del problema, esquemas de resolución, características de sujeto, entrenamiento, meta cognición y afectos/creencias que agrupa en dos grandes líneas enseñar a resolver problemas y reconocer cómo pensamos al resolver problemas.

Esto evidencia la necesidad de conceptualizar a la resolución de problemas en matemática como un tema multidimensional y complejo cuya comprensión implica diversos factores entre esos los factores cognitivos. Para Frederiksen (1984) la mayor parte de las teorías sobre los procesos de resolución de problemas se basaban, en las teorías del procesamiento de la información. Dentro de ellas, la memoria es un elemento básico. Distinguía, en ese momento, tres elementos en la memoria como son el búfer sensorial, la memoria de largo plazo y la memoria de corto plazo. Estos tres elementos interactúan y se complementan en los procesos de procesamiento de la información. El buffer sensorial registra y mantiene por periodos muy cortos estímulos dando tiempo a que la memoria de trabajo reconozca, clasifique y almacene temporalmente o bien ignore. Una vez que la información sea incorporada a la memoria de trabajo se vuelve accesible para atender procesos cognitivos relacionados con lo que se está atendiendo en el momento. La memoria de largo plazo es un repositorio permanente de información ya sea hechos o datos o procedimientos en formas muy variadas.

La memoria de trabajo mantiene una representación de lo que está pasando. Esta capacidad, sin embargo, es limitada a una cantidad pequeña de ítems de información. Frederiksen (1984. p. 366) citando a (Shiffrin, 1975) apunta:

> "Así la memoria de trabajo contiene la información que está siendo usada en el momento y el procesamiento de información consiste de controlar el flujo de información que entra o sale de la memoria de trabajo por procesos como recuperar información de la memoria de corto plazo y recibir información del búfer sensorial, mediante el reconocimiento, la comparación y la manipulación de símbolos en la memoria de trabajo y el almacenamiento de la información en la memoria de largo plazo"

Swanson y Beebe-Frankenberger (2004) y Swanzon (2006), citados por (Fuchs y col. 2008) identifican que la memoria de trabajo es una habilidad que contribuye a un fuerte desempeño a través de las dos áreas de la cognición en matemática relacionadas con las herramientas para el cálculo y la resolución de problemas. Para Fuchs y col. (2008, p. 16), en un estudio en que estudia las habilidades de cálculo en contraposición con las habilidades de resolución de problemas, afirman "los resultados univariados del presente estudio corroboran el rol de la memoria de trabajo, tanto verbal como mumérica, en las dificultades en el cálculo y en la resolución de problemas"

También en la teoría de Newell-Simon (1972) de resolución de problemas emergen dos conceptos importantes: ambiente de la tarea y el espacio del problema (Frederiksen,1984). El ambiente de la tarea es la estructura de hechos, conceptos y las interrelaciones que lo conforman y el espacio del problema es una representación mental sobre el ambiente de la tarea de quien lo resuelve. La resolución de problemas puede ser vista como la búsqueda de una ruta que lleva del estado inicial del problema al estado meta posiblemente a través estados intermedios (Lovet & Anderson,1996). Los elementos básicos que conforman un problema son proposiciones que describen un estado inicial, información relacionada en la memoria de largo plazo, una meta, y un conjunto de relaciones entre estos elementos (Frederiksen, 1984).

Dentro de este contexto, quizá implícitamente, se han estudiado y desarrollado propuestas para entender los procesos de resolución de problemas. Interesa porque de alguna manera de ellos se derivan, desde la perspectiva del autor, procesos cognitivos asociados con la resolución de problemas. La mayor parte de las veces estos procesos se establecen como acciones o procesos cognitivos. En general los procesos de resolución de problemas involucran muchos y muy variados aspectos, por ejemplo aspectos de los modelos mentales o representaciones, procesos de resolución, heurísticos, enfoques orientados por tareas o acciones o procesos orientados por aspectos cognitivos. Y dependiendo de estos enfoques se desarrollan teorías o propuestas.

Un modelo muy influyente ha sido el de Polya (1945). Éste se puede resumir en cuatro estados que son entender el problema, trazar un plan, implementarlo y hacer una visión retrospectiva (Chamot, 1992). Esta visión incluye heurísticos como estar seguro de que el problema dado, las condiciones y la meta se entienden claramente, reformular el problema, pensar en problemas análogos conocidos, generalizar el problema, considerar casos particulares (Frederiksen, 1984). Esta es una visión desde la perspectiva didáctica enfocada en describir cómo el maestro puede orientar el desarrollo de las capacidades de resolución de problemas en sus estudiantes. Este modelo se orienta más hacia aspecto de comportamientos deseables y no hace alusión de manera directa a procesos cognitivos.

Para Schoenfeld (1980), una estrategia para resolución de problemas se ajusta con un modelo de: análisis del problema (compreder , simplificar, reformular), diseño (estructurar argumentos, descomponer), implementación (ejecución) y verificación.

Para Jonassen (1997) la resolución de problemas es una actividad más compleja que la suma de sus partes. Esta habilidad require integrar una variedad de componentes cognitivos de diversa índole. Elementos como información proposicional, conceptos, reglas y principios, todos ellos elementos del domino del conocimiento. Sin embargo, también involucra lo que califica como conocimiento estructural, donde se ubican entre otras habilidades los modelos mentales, de igual manera require de herramientas cognitivas y metacognitivas sin dejar de lado componentes de carácter personal como actitudes y motivación y componentes socioculturales

Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, y Sriraman (2005) proponen un modelo que supone editar información cuantitativa, seleccionar información cuantitativa, comprender y organizar esta información, transformar información cuantitativa de un estado a otro.

Singer y Voica (2013) proponen un proceso más general que, en resumen, incluye la decodificación, representación, procesamiento e implementación. La decodificación incluye reconocer el fondo del problema (de qué se trata), se caracteriza por identificar uno o más parámetros, los datos que son valores asociados con los parámetros, los esquemas de operación que son las acciones sugeridas por el problema, restricciones generales sobre datos y operadores. La representación que se caracteriza por un modelo mental que es un ensamblaje estructurado de las representaciones mentales inducidas por la redacción del problema. El procesamiento que pasa del modelo mental al modelo matemático y finalmente la solución.

Cyert (1980, citado por Frederiksen,1984), en referencia a un trabajo de Rubenstein (1975) sobre un curso sobre resolución de problemas presenta 10 recomendaciones al solucionador que son:

- Obtener una visión general del problema, no pierda ningún detalle
- Retener juicios. No dar por terminado el problema muy pronto
- Crear modelos para simplificar el problema, usando palabras, representaciones gráficas, símbolos o ecuaciones
- Intentar cambiar la representación del problema
- Replantear verbalmente las preguntas, haciendo en otra la forma de pregunta
- Ser flexible, valorar la credibilidad de sus premisas
- Usar razonamiento inverso
- Proceder de manera que pueda obtener resultados parciales

- Usar analogías y metáforas
- Conversar sobre el problema

El mismo Frederiksen (1984) después de la revisión de mucha literatura sobre el tema concluye que el solucionador del problema puede empezar por codificar el enunciado del problema, y construir algún grado de representación del problema. La formulación de hipótesis empieza a darse muy temprano en el proceso de solución y la representación del problema puede eventualmente tomar la forma de árbol, donde el troco representa categorías generales de hipótesis y las ramas hipótesis más específicas. Las hipótesis pueden ser directamente sugeridas por los ítems de información incluidos en la descripción del problema, pueden provenir de búsquedas generales en la memoria de largo plazo, o pueden involucrar inferencias basadas en la información del problema o en la memoria de largo plazo.

Para Woditsch (1991, citado por Kelly, Lang y Plagiaro, 2003), aspectos importantes para ser exitoso en la resolución de problemas son la atención selectiva, análisis sostenido, hacer analogías, persistencia y auto censura.

Para Schoenfeld (1992) tener una disposición matemática se caracteriza por actividades tales como buscar y explorar patrones para entender la estructuras matemáticas y las relaciones subyacentes; usando efectivamente los recursos disponibles y formulando y resolviendo adecuadamente problemas; dando sentido a las ideas matemáticas, pensando y razonando en formas flexibles; conjeturando, generalizando, justificando, y comunicando ideas matemáticas; y decidiendo sobre la razonabilidad de resultados matemáticos

También en la línea de procesos Sweller (1988) cita una posición de Greeno (1978) que postula que casi todos los problemas matemáticos consisten de un estado inicial, una meta y unos operadores válidos para resolver problemas. Y la técnica es usar esos operadores para reducir la distancia entre el estado actual y el estado meta. Agrega, basado en Larkin, McDermott y Simon (1980), que los novatos suelen usar un tipo de razonamiento inverso, que a diferencia del proceso anterior se basa en transformar la meta en estados más cercanos al estado inicial.

Para Montague, Krawec, Enders y Dietz (2014, p. 470) la resolución de problemas tiene dos fases, representación y ejecución. Afirman que esas son las fases que reflejan la estructura actual para la resolución de problemas en PISA.

> "El proceso de representación es necesario para comprender e integrar la información, mantener una imagen mental del problema en memoria de trabajo y desarrollar una ruta de solución viable, con el objetivo de construir una representación mental coherente de la situación problema".
>
> "Así esta representación requiere que el estudiante traduzca la información lingüística y numérica del problema en representaciones verbales, gráficas, simbólicas y cuantitativas que muestren cómo están relacionadas a las informaciones en el problema".

La fase de ejecución del problema "requiere que el estudiante realice los cálculos apropiados y verifique que estén correctos. La ejecución del problema requiere que los estudiantes trabajen de manera directa o inversa valiéndose del enfoque de pruebas de ensayo y error para resolver el problema." (Montague y col., 2014, p. 470)

Proponen estos mismos autores siete procesos cognitivos necesarios para resolver que son leer (releer, identificar información relevante o irrelevante), parafrasear, visualizar (transformar la información del problema en representaciones que muestren las relaciones entre las partes del problema), hacer hipótesis (establecer un plan para resolver el problema decidiendo el tipo y orden de operaciones), estimar (predecir la respuesta con en la pregunta o meta), hacer cálculos y chequear (Montague y col., 2014). La OCDE identifica cuatro procesos (binomios) involucrados en resolver problemas de matemática que deben considerarse en evaluaciones para PISA. Estos procesos son explorar y entender, representar y formular, planear y ejecutar y finalmente, monitorear y reflejar (Montague, 2014)

A un nivel más granular el razonamiento involucra habilidades cognitivas y de actitud bien definidas. Tanto para Lakatos como para Polya las observaciones inductivas y las generalizaciones deductivas son características de la actividad matemática (Lampert, 1990). El razonamiento deductivo lleva a conclusiones ciertas si las premisas lo son, el inductivo puede llevar a conclusiones falsas

(Knauff, Frangmeier, Ruff & Jhonson-Laird, 2003). El razonamiento en general implica generar hipótesis, simplificaciones, interpretaciones y con base en ellas concluir. Es un proceso muy elaborado que depende del razonamiento deductivo y del inductivo, pero es más complejo.

En Anderson (1982) y Neves y Anderson (1981) se describe una teoría acerca de la adquisición de experticia en la resolución del problema. Destacan tres estados que son declarativo (adquisición de herramientas), conocimiento (conocimiento convertido en procedimientos) y procedural (procesos autónomos del individuo).

A pesar de tener ya varias décadas en la discusión el tema de resolución de problemas en la educación matemática sigue siendo complejo y requiere atención en distintas dimensiones. Para Santos Trigo (2008) resulta padadójico que a pesar de la presencia intensa de la resolución de problemas en las agendas de investigación y reformas curriculares su definición e identidad siga siendo tema de discusión en la educación matemática. Desde su perpectiva es importante

> … la idenficación de los principios que le dan sustento a la resolución de problemas y caracterizar el desarrollo o construcción del conocimiento matemático…. Conviene también delimitar el dominio y los alcances de la resolución de problemas en las prácticas de instrucción (p. 2)

Sin duda esta delimitación debería incluir elementos congitivos relevantes a los procesos detrás de la resolución de problemas que son escencialmente aspectos relacionados con el razonamiento.

La resolución de problemas ha constituido un elemento central en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Costa Rica no escapa de esta dinámica y en estos años se ha iniciado una importante reforma curricular en matemática, completamente regida por estas ideas.

Esta ebullición ha generado gran cantidad de estudios sobre la temática y la diversidad de enfoques sólo son comparables con la complejidad del tema mismo. Sobre el tapete aparecen con mayor o menor fuerza aspectos como el papel de la meta cognición, las creencias, el afecto, el contexto social, la autoconfianza para citar algunos (Gil, Blanco & Guerrero, 2005; Gómez-Chacón, Op’t Eynde &

De Corte, 2006; Schoenfeld, 1992). Todos ellos valorados en el contexto de conocer mejor los procesos de resolución de problemas.

Hay que aclarar que, el contexto general de problema es mucho más amplio que el concepto de problema matemático. La vida real presenta muchos y muy variados problemas: decidir unas vacaciones, resolver una situación financiera, encontrar pareja para la vida son problemas del día a día, hacer un diagnóstico de una enfermedad, ayudar a un paciente a enfrentar sus fobias o entender la estructura organizacional de un conglomerado humano son problemas que enfrentan cada día los profesionales. Algunos problemas son bien estructurados y claros aunque con restricciones y otros no necesariamente bien estructurados y sin solución o al menos sin instrumentos para medir la calidad de la solución que se encuentre. Pero todos tienen un ciclo de influencia bastante similar, conciencia del problema, decisión de abordarlo, análisis, solución y evaluación.

Entender el rol de los problemas y caracterizar de forma clara la naturaleza de los mismos, los procedimientos y los saberes o habilidades detrás de ellos, es sin duda un paso central para definir y plasmar una visión de la enseñanza dirigida más hacia el desarrollo de la creatividad y el aprendizaje interactivo, crítico y significativo como se propone hoy día.

b) Resolución de problemas

Se desprende de la sección previa que la resolución de problemas es un proceso complejo de describir que involucra la coordinación de diversos elementos, algunos tangibles como saberes concretos pero otros no lo son, como representaciones o procesos de encadenamientos lógicos, en la búsqueda de una respuesta o solución que no se conoce y que tampoco se sabe una manera directa de alcanzar.

Muchos son los factores que inciden en la resolución de problemas y es, de alguna manera arriesgado tratar de ser exhaustivo en la determinación de éstos, por no decir que puede ser imposible hacerlo. Estos factores o procesos no implican un orden de acción, pero si es probable definir una jerarquía entre ellos. Sin embargo, los métodos de abordaje pueden ser ciertamente caóticos y cambiantes y sus fronteras no son necesariamente absolutas. Además, no existe ninguna regla sobre cuáles o cómo usar estos factores. Cada sujeto, reconoce el problema y establece su representación y métodos. La observación, el análisis, la representación y las transacciones son elementos fundamentales que cada persona organiza acorde con un modelo propio o cristalizado de experiencias previas.

De manera general, es posible identificar, con variantes en la descripción o en el nivel de granularidad, algunos factores o etapas en el proceso de resolución de un problema.

- Comprensión del problema. Identificar en términos generales qué es el problema y lo que requiere ser resuelto. De alguna manera puede explicarse a sí mismo el problema, identificar qué hipótesis básicas o premisas se tienen, cuáles relaciones explícitas existen y cuáles son los resultados o conclusiones que darán el problema por resuelto, es decir dónde debo llegar. La meta de problema.

  Esto implica comprensión de lectura, identificación de elementos claves en la descripción y una comprensión general de la situación. No se refiere esto a memorizar el problema, aunque la memoria resulta central en aspectos como recordar elementos y relaciones dadas.

  Por ejemplo en el problema siguiente:

  Si un recipiente contiene 5 litros de agua y una persona extrae un litro de agua del recipiente y lo reemplaza con uno de leche después de mezclar bien vuelve a extraer un litro del líquido en el recipiente y lo sustituye por leche, ¿qué cantidad de agua extrajo del recipiente?

  La comprensión de este problema debe implicar que el estudiante reconozca el proceso con claridad, la cantidad de líquido en el recipiente no cambia, pero si cambia la composición del líquido contenido en el recipiente al mezclarse con leche. Hay un proceso que cambia las relaciones entre los componentes. En otras palabras, el estudiante debe darse cuenta de que el mismo proceso genera relaciones distintas. Esto nos lleva a la segunda etapa.

- Apropiación del problema. Establecer las relaciones implícitas y una representación del problema que le permita al estudiante un abordaje del mismo. En esto entran factores como la experiencia, es decir elementos de inteligencia cristalizada, así como la actitud de búsqueda y exploración.

- En referencia al problema anterior, es en esta etapa donde el estudiante hace una reflexión no necesariamente consciente que lo lleva a descubrir aspectos o relaciones centrales al problema, por ejemplo en el primer paso sólo se extrae agua pero en el segundo paso, una parte del líquido extraído es agua y otra parte es leche. Así que la clave es determinar ¿qué cantidad de agua y leche se extrae en la segunda parte del proceso?
- Probablemente es en esta etapa en la que el estudiante adopta una representación que puede ser creada o adaptada de otro contexto. Un dibujo, una variable implícita o explícita son elementos usuales pero no exclusivos, en muchos casos la representación es abstracta. Si bien no es posible establecer fronteras estrictas en estos procesos cognitivos, esta parte se ubicaría dentro de la memoria de trabajo.
- Análisis y búsqueda. Se observan relaciones, se exploran representaciones, se identifican relaciones importantes, se conjetura se hacen inferencias y resuelve. Inducción- deducción.
- Validación. Un proceso de confrontación de la solución con el problema para determinar su validez.

Con base en la reflexión expuesta en los secciones previas se plantean los elementos teóricos centrales que fundamentan la tesis. La inteligencia y sus enfoques y los conceptos asociados al razonamiento matemático ofrecen un marco apropiado para fundamentar un modelo de estructura para el razonamiento matemático. Algunos elementos se pueden resaltar. La primero es que a pesar de existir una profusa literatura sobre el rol de la resolución de problemas en los procesos de enseñanza aprendizaje en la matemática, el autor encontró pocas experiencias que evalúen las habilidades propuestas en un modelo de factores. Por otro lado, al analizar los procesos de resolución de problemas en la literatura emergen una serie de habilidades. Para efectos de la investigación se propone reducirlas a un conjunto razonable, a sabiendas de la simplificación que esto representa. Con esta fundamentación teórica del razonamiento matemático el siguiente paso es establecer el modelo teórico y la prueba.

2.2.5 Habilidades específicas de interés en el razonamiento matemático

¿Existe una sola forma de razonamiento matemático o hay varias? ¿Son comunes los factores que las limitan o presentan diferencias según las características individuales de cada estudiante?

Hay dos perspectivas en esto: una desde la interpretación de los matemáticos y educadores de la matemática y otra la de los psicólogos. Estas maneras de plantearlo, sin ser contradictorias se basan en elementos con características distintas. En una de ellas se tiende a medir por resultados, en la otra por procesos.

Con respecto a la primera interrogante, empezaremos por citar que en el pensamiento matemático clásico se pueden identificar tres líneas de pensamiento definidas por Tall (1991): el intuicionismo, representado por Kronecker que se caracteriza de manera muy simple con la frase “Dios nos dio los números enteros, el resto es obra del hombre”; el formalismo, abanderado por Hilbert, donde la matemática es vista como la manipulación con sentido de notas sin sentido escritas en papel; y la logicista, con Bertrand Russel, en que la matemática consiste en deducciones usando las reglas de la lógica.

Sin ser el interés de este trabajo adentrarse en el plano filosófico que circunscribe estas líneas de pensamiento, resultan interesantes porque en estas propuestas se describen enfoques diferentes sobre los procesos centrales alrededor del desarrollo de la matemática y por tanto, de alguna manera del razonamiento matemático. Resolver un problema implica la actividad de tener información básica y a partir de la misma crear alternativas de solución, ideas diversas alrededor del problema. Una segunda instancia es, sin duda, una parte de formalización, esas ideas se materializan en representaciones que pueden ser mentales o escritas mediante símbolos que expresen relaciones o estados, para luego transformarlos a través de ciertas reglas de inferencias que pueden ser formales o no: las reglas lógicas. Con ello cualquier división entre los pensamientos es compleja.

Analizado de manera muy superficial, a nivel de razonamiento matemático, el intuicionismo se nutre de creatividad, de apropiarse de una situación descrita para moldearla y transformarla en nuevas situaciones. El pensamiento formalista manipula adecuadamente representaciones para obtener nuevas representaciones más cercanas a verdades propuestas y el logicista es el medio deductivo tradicional. Desde una visión pragmática tres elementos son centrales: percibir, representar y resolver.

La visión de la Psicología dimensiona el pensamiento desde la perspectiva de las conductas que influencian y son influidas por el constructo. Un enfoque que persigue representarlo mediante algunas conductas o habilidades específicas.

Este trabajo, como muchos proyectos de medición en educación, tiene un carácter exploratorio y confirmatorio acerca del desempeño de estudiantes en la resolución de problemas como medio para medir el constructo latente razonamiento matemático. Es probable que las habilidades específicas relacionadas con el constructo razonamiento sean muchas, pero en general pareciera poco práctico, por no decir imposible, dimensionarlas en su totalidad. Así que se acepta como suficiente algunas de ellas, las más comunes en la bibliografía o evidenciadas en el proceso. La idea general es que a mayor granularidad de medición, más dificultad en los instrumentos de medición y la interpretación. Por eso se opta por un modelo más parsimonioso.

Para iniciar este apartado podemos definir que las tareas específicas por medir se van a agrupar en razonamiento inductivo-deductivo, tareas de construcción, es decir, integración de elementos dentro de una configuración con ciertas características y planeamiento, coincidiendo con Süß, Oberauer, Wittmann, Wilhelm y Schulze (2002). Es claro que una separación absoluta es impensable. Estos elementos como punto de partida permitirán delinear qué conductas medir, para luego definir cómo medirlas. Llama la atención que los razonamientos inductivo y deductivo en esta referencia se unen en un binomio. Sin embargo, la propuesta sugiere una medición separada de ambos a efecto de obtener una factorización más clara. Como apunta Klauer (2001, citado en Christou & Papageorgiou, 2007) las inferencias deductivas conducen a conclusiones que son implícitas de la información dada mientras que las inductivas agregan información.

Las secciones siguientes ofrecen un resumen, ciertamente disponible en muchos documentos, de cuatro elementos que resultan centrales en el razonamiento matemático, tres de ellos comunes entre matemáticos y psicólogos y uno más cercano con las teorías cognitivas descritas capítulos anteriores.

Se espera construir un instrumento que permita medir al menos cuatro factores, todos ellos parecieran ser buenos descriptores del constructo razonamiento matemático, son medianamente simples y se pueden asociar bastante bien con algunas habilidades específicas del modelo CHC, específicamente en la inteligencia fluida, pero no son lo mismo. A continuación se detallan estas habilidades.

2.2.5.1 Razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo es el proceso de inferir una regla general por observación y análisis de casos particulares (Haverty, Koedinger, Klahr & Alibali, 2000). Para De Koning, Sijtsma y Hamers (2003) es la comparación sistemática y analítica de objetos con el ánimo de descubrir regularidades en el caos aparente o irregularidades en el orden aparente. Esta visión es compartida con Klauer y col. (2002). Es a través del razonamiento inductivo que descubrimos regularidades, reglas que caracterizan un fenómeno y nos permite establecer conjeturas que luego convertimos en verdades matemáticas durante el proceso de deducción. Estos descubrimientos o reglas pueden sustentarse en aspectos geométricos o topológicos, numéricos u otros posibles agrupamientos dentro del campo de la matemática.

Como se ha citado ya, el razonamiento inductivo se considera central en el desarrollo de la capacidad matemática del individuo. Para Haverty y col. (2000) el razonamiento inductivo facilita la resolución de problemas, el aprendizaje y el desarrollo de la experticia. Referencian además, citando a Pellegrino y Glaser (1984), que el factor inductivo que se extrae de la mayoría de los test de aptitud y de inteligencia es el factor simple que mejor predice el desempeño académico y logros en los test. Agregan, citando a Klauer (1996), que la resolución de problemas requiere el uso del razonamiento inductivo. Para Klauer y col. (2002), al menos cuatro influyentes tendencias de investigación han contribuido al conocimiento acerca de la relación entre razonamiento inductivo e inteligencia. Citan por ejemplo, que Spearman estaba fuertemente convencido de que su factor g quedaba determinado por el pensamiento inductivo, bajo el término de educación de relaciones. De igual manera las propuestas de Thurstone, las de Catell y el modelo ampliado CHC conceden una gran importancia a esta habilidad.

Este tipo de razonamiento se asocia con la capacidad de resolver problemas relacionados con algunos aspectos de la inteligencia, que se pueden agrupar en el término inteligencia matemática o fluida o analítica, según el modelo que la referencie. Esa inteligencia faculta en el estudiante la habilidad para el análisis fecundo en la resolución de situaciones desconocidas y que representen retos al pensamiento. Esta fecundidad, se traduce en generación de hipótesis, análisis para el discernimiento de procesos e información.

Como comentario adicional, la experiencia de muchos años de trabajo con estudiantes indica que las distintas capacidades de razonamiento inductivo en resolución de problemas de distintos temas, no necesariamente correlacionan alto entre ellas. Es común encontrar estudiantes con un desempeño excelente en cierto tipo de problemas pero más limitado en otros. Específicamente, se identifican estudiantes con habilidades de razonamiento mucho más cargadas, por ejemplo, hacia problemas de conteo donde predomina la atención a los detalles y un alto valor en la predicción o hacia problemas geométricos donde la visualización espacial se convierte en un factor determinante.

Es natural asumir que es imposible medir todo el ciclo implicado en el proceso de razonamiento inductivo con una prueba de selección. Sin embargo, aspectos como el análisis sistemático, la intuición, el descubrimiento de reglas, y la verificación rápida de intuiciones, así como la generación de hipótesis, pueden medirse con preguntas adecuadamente seleccionadas.

En Santiago (2007) se hace una presentación apropiada del concepto desde diferentes perspectivas. Destaca, referenciada en trabajo de diversos investigadores, la importancia del razonamiento inductivo en el aprendizaje de los escolares. Por ejemplo cita a De Koning y Hamers (1999), Holland, Holyoak, Nisbett y Thagard (1986), Klauer (1996), Sternberg (1998) y a Sternberg y Gardner (1983). Esa importancia la justifica por razones relacionadas con el desarrollo de la inteligencia, la resolución de problemas, la lectura o la escritura, lo que ha llevado a considerar el proceso de razonamiento inductivo como un dominio específico de conocimiento.

Sin duda, hay coincidencia entre los investigadores en que el razonamiento inductivo constituye un aspecto central en el funcionamiento intelectual en matemática (De Koning y col., 2003; Klauer, Willmes & Phye, 2002).

De alguna manera el razonamiento inductivo suele asociarse mucho con la generalización a partir de casos particulares o el descubrimiento de patrones como es el caso de las matrices de Raven. En (Csapó, 1997), se establece que el razonamiento inductivo es medido usualmente por pruebas consistentes de clasificaciones, analogías, series y matrices.

Sin embargo, hay diversos elementos o destrezas que pueden implicarse dentro de esta forma de razonamiento. Destaco algunas citadas por García de Cajén, García-Rodeja Fernández y Domínguez Castiñeiras (2002), como son comparar y establecer relaciones, anticipar resultados, elaborar conjeturas y formular hipótesis, entre otras. O bien " la inducción está involucrada en un rango de actividades cognitivas como categorización, establecer juicios probabilísticos, razonamiento analógico, inferencia científica y toma de decisiones" (Hayes, Heit & Swendsen, 2010, p. 278). En el contexto de las pruebas aplicadas en esta investigación se usará esta perspectiva que es más general y que aporta suficientes elementos que permiten medirlo.

2.2.5.2 Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo es, de cierta manera, lo que da sentido a la matemática formal, porque le da forma, unidad y coherencia a través de las formalizaciones imprescindibles. Pero en una visión más general, el razonamiento deductivo forma un binomio con el razonamiento inductivo, que se constituye en la esencia de la matemática y del pensamiento matemático y por tanto, elementos fundamentales en el razonamiento matemático mismo. El uno (el inductivo) alumbra los caminos por los cuales la matemática puede o debe ir – porque es creatividad, intuición, proyección y descubrimiento– el otro (el deductivo) porque permite convertir verdades intuitivas en verdades matemáticas y abrir el camino hacia nuevos conocimientos.

El razonamiento deductivo es un término amplio que se usa para describir el proceso de representar y combinar algunos hechos o premisas mediante reglas formales, explícitas o implícitas, para derivar otros hechos. Para Watters y

English (1995) se trata de un proceso de derivación lógica de hechos, resultados y consecuencias. Es un proceso puramente abstracto que deja el estado de las representaciones concretas para caer en la construcción de hipótesis cuya verdad o falsedad depende de otras proposiciones asumidas. Algunas veces esas verdades asumidas no tienen un valor empírico; es decir, son suposiciones que de manera conveniente no se cuestionan pero se asumen. El razonamiento deductivo requiere de habilidades para construir argumentos que funcionen como eslabones en la búsqueda de demostrar una hipótesis, las más de las veces obtenida inductivamente como consecuencia esperada de ciertas premisas, en este caso como una especie de intuición matemática.

Es posible establecer dos diferentes enfoques del razonamiento deductivo (Ayalon & Even, 2010), uno que es el descrito en el párrafo anterior como la acción formal de inferir conclusiones a partir de premisas usando reglas de lógica formal. El otro enfoque, si se quiere, ofrece una interpretación más suave del concepto y más cercana a lo que se espera de estudiantes en edades tempranas. En este segundo enfoque se entiende y acepta el razonamiento deductivo como una manera sistemática de resolver problemas paso a paso. En este proceso, no se presta atención detallada a aspectos de validez formal o a las reglas formales de inferencia usadas, si se quiere un proceso más intuitivo de razonamiento deductivo orientado por la meta de resolver un problema. Es natural que este proceso sea mucho más propenso a errores, tanto conceptuales como lógicos.

Un aspecto que resulta interesante en relación con esta habilidad es la divergencia respecto al origen de la misma y del rol de la educación en su desarrollo. Se trae esto a colación, en tanto los estudiantes normalmente presentan historiales de desarrollo social y educativo distintos y esto puede afectar, de una u otra manera, los resultados de los test de evaluación que traten de dimensionarla. Desde la propuesta Piagetiana (Inhelder & Piaget, 1958, citados por Ayalon & Even, 2010), se propone que el razonamiento lógico se da de manera natural y la educación formal no tiene una influencia significativa sobre ello. Otros investigadores, tales como Vygotsky (1978), sostienen que el razonamiento lógico no se desarrolla naturalmente y que la enseñanza es una condición esencial para su desarrollo. Finalmente algunos autores como (Cheng, Holyoak, Nisbett & Oliver, 1986; Lehman & Nisbett, 1990), citados por los mismos autores, defienden una propuesta más equilibrada al aceptar que existen aspectos cuyo desarrollo es natural pero que la educación formal juega un rol importante en mejorar esas habilidades, posición que considero más apropiada.

La dualidad inductivo deductivo ha sido muy analizada. En Hayes y col. (2010) se menciona que hay que distinguir entre inducción y deducción dependiendo del enfoque, ya sea como problema o como proceso. Desde la visión de problema, la inducción y la deducción se refieren a actividades de razonamiento distintas. Un problema es deductivo si los argumentos que lo definen son lógicamente válidos de acuerdo con reglas bien definidas en alguna lógica. Si eso no se da, el problema es inductivo. En un problema deductivo los procesos o argumentos y la conclusión son 100% válidos. En uno inductivo hay un margen probabilístico razonable de validez. Reconocen Hayes y col. (2010) que a nivel de procesos de razonamiento esa diferenciación es más frágil y apunta que algunos investigadores han sugerido que tanto la inducción como la deducción dependen de los mismos procesos cognitivos.

En el caso de test matemáticos, es común que se haga un uso cruzado de elementos inductivos y deductivos para resolverlo. Ante un ítem un estudiante debe poner en acción uno de varios elementos en los dominios inteligencia fluida, memoria, capacidad de trabajo entre otros, al servicio de resolver el problema. Por ejemplo, mediante un enfoque integrado, por medio del razonamiento inductivo y ciertos elementos de intuición, el estudiante hace un acercamiento a cuál es la respuesta y trata de verificarla o bien, analiza las implicaciones de las hipótesis para deducir un resultado.

Finalmente, en el modelo CHC (McGrew, 2009) se reconoce dentro de la habilidad de la inteligencia fluida (Gf) los conceptos relacionados con razonamiento deductivo. Cita específicamente el razonamiento secuencial, la inducción, el razonamiento cuantitativo, el razonamiento piagetiano y la velocidad de procesamiento.

Para Evans y col. (2002) los juicios que provienen del razonamiento inductivo están particularmente influenciados por procesos heurísticos que se fundamentan en información asociativa acerca del contexto y similitudes que no necesariamente son válidas lógicamente. Mientras que aquellos juicios que provienen de razonamiento deductivo están fuertemente influenciados por procesos de pensamiento más deliberativos y exactos. El contraste inductivo–deductivo se centra más en los procesos que en los problemas mismos-.

Hay enfoques más integrados que se han propuesto, como Simon (1996) que estima que más allá de los procesos inductivo o deductivo están los procesos transformacionales. Estos procesos corresponden con el análisis que implica el prever tanto transformaciones matemáticas como los resultados de las mismas. De alguna manera este autor establece que las separaciones inductivo deductivo pasan a un segundo plano ante procesos que sin duda tienen elementos comunes de un orden superior. En el contexto de esta tesis, la descomposición en constructos atiende esta particularidad separando el razonamiento deductivo a una de sus manifestaciones básicas que es la deducción directa y pondera en el binomio inductivo deductivo en los procesos integrados.

2.2.5.3 Razonamiento espacial

Este término se relaciona con los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren ver o imaginar mentalmente los objetos geométricos, en el plano o el espacio, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos (Fernández, Cajaraville Pegito & Godino, 2008; Fernández, 2013), aspectos como los procesos de representación y manipulación de información presentada en formato visuales tales como diagramas, dibujos y símbolos.

No hay mucha coincidencia respecto a la carga de la habilidad espacial y el desempeño en matemáticas, autores como Diezmann Watters (2000) o Hegarty y Kozhevnikov (1999) reportan estudios que sugieren una correlación entre esta inteligencia y el desempeño en matemática. Por otro lado, autores como Bishop (1980) reconocen la existencia de estudios contradictorios al respecto y desde la visión de este autor, el cuestionamiento sobre si la habilidad espacial es clave en la determinación de la habilidad matemática sigue sin dimensionarse pero sí existe.

Muchos de los ejercicios usados en pruebas como el Canguro Matemático tienen un alto componente de razonamiento espacial. La experiencia del autor de esta tesis apunta a que el razonamiento espacial, entendido como la habilidad de modelar y comprender relaciones y transformaciones de objetos geométricos, incluyendo proyectar resultados de transformaciones tales como rotaciones, reflexiones, doblados o cortes, son parte de los factores que aportan en un concepto de razonamiento matemático en general, pero no necesariamente hay una correlación fuerte entre este tipo de habilidad y otras habilidades de razonamiento matemático.

2.2.5.4 Memoria de trabajo

La memoria de trabajo se refiere al espacio mental encargado de controlar, regular y mantener activa temporalmente información relevante asociada con la realización de tareas cognitivas complejas, como razonamiento matemático. En Gathercole, Pickering, Knight y Stegmann (2004), aparece una buena descripción y caracterización del constructo. Diversos autores reportan una fuerte correlación entre capacidad de memoria de trabajo y el razonamiento fluido, por ejemplo Kane y col. (2005) o Süß y col. (2002) haciendo referencia a trabajos de otros autores (Engle, Tuholski, Laughlin, & Conway, 1999; Fry & Hale, 1996; Kyllonen, 1993; Kyllonen & Christal, 1990; Salthouse, 1992; Salthouse, Babcock, Mitchell, Palmon, & Skovronek, 1990). En el mismo sentido se expresan Raghubar y col. (2010). En Gathercole y col. (2004a), se reporta una batería para medir esta capacidad basada en dos actividades, recordar dígitos y en hacer asociaciones o recordar listas de palabras. Pareciera razonable pensar que una batería basada en esas dos habilidades específicas ofrezca una medición sesgada de una habilidad que pareciera ser tan rica y diversa, no quiere decir que no sea suficiente, a la postre podría serlo, pero no se encontraron estudios que evidenciaran correlación entre esas dos habilidades y otras relacionadas con la memoria de trabajo. Igualmente Süß y col. (2002), hacen una descripción bastante completa del constructo basado en lo que llaman facetas, una funcional y otra de tareas con la cual diseñan un modelo de evaluación que rescata diversas propuestas parciales preliminares. Es una descripción muy detallada y la descomposición que ofrecen es bastante específica no obstante ya a ese nivel de descripción, como ellos mismos detallan, las tareas que explicitan la habilidad tienden a confundirse con las que miden la inteligencia.

Como se cita en Raghubar y col. (2010), la competencia matemática relaciona una variedad de herramientas complejas que involucran distintos contenidos y procedimientos. La resolución de problemas usualmente implica que se deba recibir una descripción en lenguaje ordinario o bien una combinación de lenguaje ordinario, objetos matemáticos abstractos y relaciones lógicas. Toda esta información es capturada por el individuo y representada en su memoria de corto plazo, es de esperarse que como una estructura organizada de información, procedimientos y relaciones. Una vez completado este proceso, la resolución del problema radica en establecer nuevas relaciones y nueva información en un proceso guiado por lo que llamamos Memoria de Trabajo. Para Bisanz y col. (2005, citados por Raghubar y col., 2010), este proceso se aplica tanto para los procesos informales de resolución de problemas matemáticos, por ejemplo lo que hacen los niños en edades tempranas, como para los procesos de razonamientos matemáticos más complejos que realizan los niños mayores y los adultos, incluye tareas complejas como procedimientos con varios pasos, aritmética con varios dígitos, resolución de problemas verbales y estimación numérica.

Por ejemplo, pensemos qué se requiere para que un niño resuelva exitosamente un problema como el siguiente:

> “Alejandro y Carlos tienen edades que en este momento suman 20 años y además la suma de sus edades corresponde con dos tercios de la edad de su padre. Determine cuántos años deben pasar para que entre ambos sumen la edad de su padre”

Se requiere que identifique tres valores que cambian, puede que asuma que son enteros, es posible que algunos lo asuman así, especialmente niños de edades inferiores. También necesita una representación que puede ser concreta, por ejemplo un dibujo, o abstracta, mediante variables. En resumen, algunos números desconocidos y las relaciones entre ellos –a saber dos suman 20 y una relación para la edad del padre. Luego debe descubrir una relación transicional entre esos números que exprese cómo cambia la relación inicial entre ellos. Todo esto puede darse mediante una representación de la información más cercana al mundo de lo concreto, por ejemplo una tabla:

Edad acumulada de hijos	Edad Padre
20	30
22	31
24	32

O simplemente deducir la relación de que: cada año las edades acumuladas de Alejandro y Carlos se acercan en uno a la edad que tendrá su padre y de allí obtener la solución. Es decir hay un dependencia de la representación, por lo que también es importante tener en cuenta que las posibles representaciones inciden en el proceso de solución y están muy relacionadas con los niveles de desarrollo del niño. Durante la niñez y la adolescencia, es probable que la memoria de trabajo se desarrolle porque la inteligencia cristalizada, producto de los procesos de educación formal o no, integra nuevos elementos en los esquemas de representación y razonamiento.

Una variante de este problema puede obligar a una representación mucho más compleja y afinar los recursos necesarios. “Alejandro y Carlos tienen edades que suman en este momento dos tercios de la edad de su padre, determine cuál es la relación entre la edad del padre hoy y la edad del padre en el momento en que entre ambos hijos sumen la misma edad de su padre”.

La representación explícita, usando o no variables, así como la transición de las variables es similar, lo cual da cierta ventaja al niño con mayores elementos de inteligencia cristalizada, pero para un niño que no haya cristalizado representaciones formales como las variables y aun habiéndolo hecho este problema es mucho más complejo en tanto no hay ningún tangible que referencie un punto de partida, como en el primer caso.

Una diferencia que parece emerger al trabajar con distintos tipos de estudiantes, tiene que ver con un elemento subyacente en los procesos de razonamiento y que pareciera residir más en la memoria de trabajo que en la inteligencia fluida. Este factor tiene que ver con cierta capacidad de organizar y encadenar más eficientemente las piezas de información. Con esto me refiero a secuenciar y predecir resultados, descubrimientos atribuibles a la inteligencia fluida. En general en algunos estudiantes este encadenamiento es fluido y pareciera hasta natural, en otros surge de una actitud explícita del estudiante es decir, media una intencionalidad controlada de parte del mismo, eso tiende a hacer una diferencia marcada en los desempeños.

Una reflexión final surge de la dificultad que hay en separar constructos complejos como estos. La bibliografía es vasta no sólo sobre la importancia de ambos conceptos en el pensamiento matemático, sino también, sobre sus múltiples interpretaciones.

Para cerrar este capítulo se establece que los cuatro elementos discutidos aquí, a saber, razonamiento inductivo, razonamiento deductivo, razonamiento espacial y memoria de trabajo, no serán sometidos a prueba en sus versiones más generales en la literatura especializada, dado que son muy elaboradas y complejas. En cambio se va evaluar aspectos más operativos y simplificados de cada una de ellos.

2.3 Elementos esenciales definitorios de una prueba de medición del razonamiento matemático

Hay varios pasos en la solución de un problema en educación y que parecieran ser naturales. 1. Cobrar conciencia del problema, 2. dimensionarlo integralmente, 3. plantear soluciones y 4. evaluar el impacto de las mismas para replantear o cambiar. Si un país como Costa Rica, o cualquier otro, deja de lado los puntos 2 y 4 de este proceso corre el riesgo de perder recursos y tiempo valiosos si es que realmente quiere impactar en los problemas que detecte.

Se parte de una revisión bibliográfica detallada de planteamientos psicológicos que estudian la inteligencia desde una perspectiva dimensional y es contrastada con otros enfoques sobre esta temática, con propuestas provenientes de la matemática que interpretan distintos procesos o habilidades que determinan la capacidad de razonamiento.

Es decir, una investigación documental que proviene de fuentes secundarias, libros de textos e investigaciones que hacen referencia a los temas tratados. La mayor parte de lo anterior se ha expuesto en las secciones previas.

Con base en los hallazgos encontrados se planteará un modelo explicativo del razonamiento matemático desde una perspectiva dimensional así como instrumentos pertinentes a la investigación.

Se complementa esta investigación con un elemento relacionado la edad a partir de la cual se planifica la experiencia.

A partir de este modelo se creará un instrumento de medición. Éste se basa en usar como insumo fundamental una experiencia internacional que busca promover el desarrollo del pensamiento matemático entre los jóvenes llamada Canguro Matemático. Esta prueba se aplica en Costa Rica desde el 2011 y en el mundo desde hace más de 20 años.

2.3.1 La edad como reflejo del proceso evolutivo del Razonamiento Matemático

La selección del rango de edad para las pruebas se da entre los once y los diecisiete años, con base en una serie de argumentos dados por varios autores, tales como se expone:

- Para Piaget (1991) hacia los once o los doce años, se produce una transformación fundamental en el pensamiento del niño es en esta época de la vida donde se da el paso del pensamiento concreto al pensamiento formal o pensamiento hipotético-deductivo.

  En Piaget por hipotético-deductivo se entiende que los procesos deducción ya no están guiados o referidos a realidades percibidas sino a enunciados hipotéticos. En el pensamiento formal hay una inversión de la dirección del enfoque de pensamiento en el individuo entre lo real y lo posible. La posibilidad ya no aparece meramente como una extensión de una situación empírica o de acciones realizadas que ahora pasan al segundo plano de la posibilidad, opera con hallazgos que se descubren y evalúan. Para Tall (1991) en el pensamiento de Piaget el niño va alcanzando la adultez a través de una serie de estados de equilibrio, cada uno de ellos más rico que el anterior, el senso-motor, el pre-operacional, el de las operaciones concretas y el de las operaciones formales en el cual las conclusiones del tipo *si entonces* se vuelven posibles.

- Para Ojose (2008), en este estado final del desarrollo de las operaciones formales, los niños desarrollan la habilidad de pensar en abstracto y metacongitivamente, así como de razonar hipotéticamente. Se identifican cuatro etapas. Primero la clarificación, que incluye identificar y analizar elementos del problema, permitiendo que el individuo descifre la información necesaria. Segundo la inferencia, tanto a nivel de inducción como de deducción. Finalmente dos etapas más, no tan relacionadas con el contexto de esta experiencia evaluativa, que son la evaluación, como la valoración sobre la adecuación de la solución dada y la aplicación, que es el establecimiento de conexiones entre conceptos matemáticos y situaciones de la vida real. Nuevamente emergen de manera implícita distintos componentes del razonamiento.

En la propuesta sobre el desarrollo de la cognición en Piaget se establecen dos premisas:

- Los cambios en el desarrollo de la cognición ocurren durante la adolescencia temprana
- Las estructuras cognitivas asociadas con la adolescencia temprana, operaciones formales, constituyen el estado final del desarrollo de la misma y abren las puertas a estructuras más avanzadas.

Ambas premisas son sujeto de debate y probablemente lo serán por mucho tiempo, especialmente con los cambios en las estructuras de desarrollo de los niños producto de los cambios en el entorno que los determina (Ojose, 2008).

A pesar de ello esta es la edad en que se acepta que en general los niños inician el proceso de independizar sus pensamientos de los objetos cotidianos; se manifiesta mejor su capacidad de aislar los conceptos de lo concreto para abstraer y entender su significado y poder manipular verdades temporales para construir sobre ellas nuevas verdades. Es importante resaltar que el mismo Piaget modificó sus posiciones originales, manteniendo que habría que esperar hasta los 20 años para que el pensamiento formal estuviera consolidado (Villagrán, Guzmán, Pavón y Cuevas, 2002).

De igual manera, en el enfoque detrás de las propuestas de Vygotsky (D'Amore, Fandiño & Marazzami, 2003), y situándolo al escenario costarricense, a los 12 años se asume, no explícitamente pero si de hecho con los programas oficiales para matemática, que los niños costarricenses han desarrollado una zona efectiva en la cual manejan con propiedad las operaciones elementales y algunos esquemas inductivos básicos como el reconocimiento de patrones. Esta situación hace razonable pensar que a partir de esta edad se pueda asumir que los estudiantes están en una zona de desarrollo próximo hacia la zona potencial de razonamiento matemático.

Para Blakemore y Choudhury(2006) los adolescentes desarrollan una capacidad de mantener en mente más conceptos multidimensionales y por tanto, capaces de pensar de una manera más estratégica. Este elemento es fundamental en el razonamiento matemático.

Esta convergencia de eventos, ciertamente hipotéticos, nos llevó a elegir como rango de edad para esta experiencia entre los dos últimos años de escuela y el ingreso a la universidad, es decir, una población concentrada entre los 11 y 17 años con una preponderancia importante de individuos en el extremo inferior del rango. Esto permitió valorar las diferencias en el rango de edad y los ítems que se usan están originalmente pensados para estudiantes de 12 años que corresponden con el último grado de la educación primaria en Costa Rica.

Hay un factor más que justifica la elección de este rango de edad y tiene que ver con la actitud del estudiante. Autores como Kunda (1990) refuerzan el hecho de que el razonamiento en las personas es mucho más efectivo cuando hay motivación por hacerlo y mi experiencia coincide con este planteamiento, esta sensación la siento reflejada en una cita de Margaret Donaldson, que quizá con algún dramatismo, al referirse a la Escuela comenta: que durante los primeros años de Escuela todo parece ir muy bien, los niños ávidos por aprender, vivaces, felices, espontáneos, dispuestos a explorar pero algo sucede al pasar de esa niñez a la adolescencia, aparece la deserción y la frustración de no haberse convertido en personas que disfrutan del ejercicio de una inteligencia plena (Donaldson, 1979). En este sentido el rango de la población elegida incluye niños que aún manifiestan estas actitudes emocionales en una mayor proporción.

En resumen, son dos los factores principales que justifican la elección de este rango de edad. Uno de ellos, como se ha citado, es que el desarrollo de las estructuras mentales de niños y niñas alcanza cierta madurez. A partir de los once o los doce años el pensamiento formal se hace posible, y las operaciones lógicas empiezan a ser transpuestas del plano de la manipulación concreta al de las meras ideas, expresadas en cualquier tipo de lenguaje (el de las palabras, el de los símbolos matemáticos o las representaciones). Esta supuesta flexibilidad incide directamente en la validez de contenido de la prueba pues la posibilidad de tener ítems más accesibles a todos los niños es sin duda fundamental.

Y por otro lado, en un segmento de la muestra, entre los 11 y 13 años, el nivel de desarrollo emocional mantiene aún rasgos de la niñez lo que da un valor agregado al estudio porque el entusiasmo y flexibilidad característico del grupo permite una mayor identificación con las actividades que emprendan y, si se quiere, una mayor fiabilidad al identificarse plenamente con las tareas que implique cualquier esquema de evaluación. Esto aporta elementos importantes a la prueba en el tanto se reduce el efecto de factores externos como la falta de interés. Además, el estudio incluye un rango de población que permite valorar la influencia de la escuela en el razonamiento matemático. De la misma manera incluir estudiantes que han sido admitidos a la universidad busca medir sobre una población en la que prevalece el interés por los aspectos académicos entre ellos el razonamiento. Es decir el perfil de población elegida busca una muestra que tenga actitud correcta ante este reto, esta decisión sin duda encuentra su justificación en el estudio sobre valoración del contexto que alertaba, al menos intuitivamente, sobre aspectos relacionados con la actitud de los estudiantes ante este tipo de reto.

Para cerrar, algunos estudios sostienen que se han observado diferencias en la aptitud matemática entre mujeres y hombres con experiencias educacionales básicamente similares (Benbow, 1980). También se sostiene la hipótesis de que estas diferencias están más relacionadas con la influencia del medio y que ningún estudio sostiene la diferenciación en las actividades para ambos grupos. No es el objetivo central hacer una diferenciación de la prueba en ese sentido, no obstante la muestra del estudio pueda brindar alguna información al respecto.

2.3.2 La prueba de Razonamiento Matemático

La prueba se desarrollará usando como base los resultados, en el escenario costarricense, de tres años consecutivos de la Prueba Internacional Canguro Matemático. El uso de ésta aporta un valor fundamental porque nos permitirá conocer preliminarmente elementos que conduzcan a identificar modelos posibles de organización de los ítems en factores. Esto tiene un valor agregado dado que estas poblaciones suelen incorporar estudiantes con niveles de autoestima matemática altos. Esto es de esperar, es garantía de un abordaje serio y comprometido de los participantes para la prueba y un elemento fundamental en la validez de los resultados.

La experiencia de las pruebas Canguro Matemático se inició en Costa Rica en el año 2011, y desde allí a la fecha siempre se ha aplicado. En el escenario costarricense, esta prueba la aplican solamente aquellas instituciones que así lo deseen. Cada institución decide cómo será su participación. En algunas instituciones participan todos los estudiantes, pero en otras lo hacen solo los estudiantes que tengan interés en realizarla. Las pruebas se aplican durante la segunda semana de mayo, pero en algunos países la fecha puede variar. Las pruebas se publican un par de meses después de su aplicación.

En el caso costarricense, aparte de cambios en algunas palabras que tienen interpretaciones diferentes, las pruebas se aplican tal y como se aprueban en la reunión internacional. No obstante, existe la posibilidad de que los países puedan variar o adaptar algunos ítems. En Costa Rica la mayor parte de los participantes provienen de colegios privados: en promedio 90% de los participantes son de instituciones de esa naturaleza.

En general, los resultados obtenidos por los estudiantes costarricenses en estas pruebas son bajos en algunos casos bastante discretos. Aunque existe una premiación a nivel nacional por nivel estos resultados se busca que sean usados como insumos para valorar internamente las escuelas participantes.

2.3.2.1 La prueba Canguro Matemático

La prueba Canguro Matemático es una prueba que se hace a nivel internacional en la que participan más de 50 países y varios millones de estudiantes. Cada año el grupo de profesores propone una cantidad importante de preguntas, más de una centena por cada nivel, y durante un periodo de tres días un equipo de 150 o más docentes de distintos países analizan las pruebas en aspectos como pertinencia para medir el razonamiento, nivel de dificultad y adecuación con la edad y con los temas del currículo.

En la elaboración de la prueba internacional el único elemento de equilibrio es la experiencia de los participantes. Los criterios implícitos que se siguen son:

- Primero, los ítems elegidos deben ser accesibles a estudiantes de acuerdo con cada uno de los grupos de edades.
- Segundo, se da prioridad a la parte de razonamiento sobre los contenidos aunque esto no siempre es posible

- Tercero, la división en los ítems en tres niveles permite una distribución adecuada de los mismos, en la cual los primeros 20 pueden considerarse más básicos en los procesos de razonamiento.

En general se busca que en la definición de las pruebas se minimice el efecto entrenamiento en los estudiantes, esto se logra seleccionando ítems que admitan soluciones más orientadas por el razonamiento que por el conocimiento, aunque no sean excluyentes. También se utiliza como criterio extra la posibilidad que presente el ejercicio de distintos enfoques de solución.

2.3.2.2 Características de la prueba a elaborar

En el caso de la prueba que se confeccionará, se contempla que los problemas sean lo más neutros posible, es decir, que los elementos de solución no sean dependientes de manera directa de contenidos sino de esquemas de pensamiento lógico. Veámoslo con un ejemplo. Un problema como el siguiente:

> *Un hombre tiene cierta cantidad de dinero para gastar que decide compartir con sus dos hijos. Al hijo mayor le da la mitad de lo que tiene y al segundo hijo un tercio de lo que queda dejando para sí mismo 600 000 colones. ¿Cuánto dinero tenía ese hombre para gastar?*

Este es un problema en principio técnico para un estudiante avanzado que conozca de ecuaciones. Si x es el total de dinero que tenía entonces se debe resolver una ecuación.

Pero para un estudiante de edades inferiores que sólo maneje el concepto de fracción, este puede ser un problema con un razonamiento complejo no técnico, más de pensamiento lógico. Al dar a su hijo la mitad queda la mitad, como, de lo que queda, da un tercio al otro hijo entonces está dando realmente un sexto del total y el padre se reserva dos sextos que son 600000. Es decir cada sexto es 300000 y el total es 1800000. De preferencia un problema de esta naturaleza no se contempla dentro del esquema de la prueba, Si bien tiene una solución bastante neutra lo cierto es que favorece aspectos de inteligencia cristalizada por encima del razonamiento más neutro.

2.3.3 Características generales de medición y la población

El razonamiento es una coordinación deliberada o no de inferencias, basadas en conocimientos de hechos o de procedimientos o en condiciones individuales, para un fin: resolver un problema, hacer un plan, plantear una situación u otras.

En general se acepta la propuesta presentada por Moshman (1998, p.953) que ve el pensamiento como una forma avanzada de la intuición, el razonamiento como una forma avanzada del pensamiento, que el pensamiento es general y específico y que el razonamiento es el lugar primario donde se dan los cambios en la cognición, principalmente en etapas intermedias del desarrollo.

Para Moshman (1998, p. 952) la inferencia, es un proceso de generación de nuevos saberes a partir de conocimientos antiguos, es automática e inconsciente y que se da en un contexto de interacciones externas e internas en el individuo. Para, Hilton (1995, citado por Moshman, 1998), la interacción social es un flujo continuo de inferencias relacionadas con estados de ánimo, interpretaciones e intenciones de aquellos con quienes interactuamos.

El pensamiento no se restringe a etapas avanzadas de la adolescencia y jamás reemplaza la inferencia, es decir los niños muy chicos pueden inferir y pensar y conforme se avanza en el desarrollo, estos procesos pueden darse de forma automática e inconsciente.

Se entiende aquí el razonamiento como un uso deliberado del pensamiento, que se vale de intuiciones, conocimientos y ciertas capacidades individuales para resolver situaciones problema. Una situación problema requiere de un manejo de información, de deducciones, de inducciones y que puede estar influenciada por muchos factores, entre ellos algunos relacionados con el contexto de desarrollo sociocultural del individuo, otros con capacidades genéticas y otros con aspectos de educación formal.

Se tratará de dimensionar en esta tesis la capacidad de razonamiento matemático en estudiantes costarricenses del sistema educativo público. Entendida ésta como la capacidad manifiesta en la resolución de distintas tareas de razonamiento que involucran diversos factores. Se aceptan como factores cognitivos que tienen una carga importante en la explicación del constructo, aspectos relacionados con la inteligencia fluida y la velocidad de procesamiento adaptados a una interpretación más cercana al objetivo de la investigación En resumen, memoria de trabajo y razonamiento espacial, razonamientos inductivo y deductivo. La tabla 1 ofrece una breve descripción de elementos descriptivos de los factores que se consideran.

Por otra parte la población sobre la que se practica el estudio tiene algunas características particulares, una de ellas es que no ha mostrado, por razones que no se conocen, una habilidad alta en la resolución de problemas, por ejemplo en pruebas PISA. Además, de acuerdo con el estudio entre docentes podría ser que no tengan una actitud ni un entorno idóneos para el desarrollo de esta habilidad, esto lejos de ser una limitación aporta un valor contextual importante porque dimensiona el constructo en un nivel muy general y si se quiere mucho más aleatorio en lo que respecta a las capacidades del individuo en el razonamiento matemático.

En lo que tiene que ver con la formación de estos estudiantes se puede decir que en los años escolares iniciales se acostumbra que los problemas y actividades se orienten fundamentalmente a fortalecer los vínculos entre las operaciones y los conceptos con situaciones laboratorio que simulan escenarios reales. Una excepción en el caso costarricense la constituye la introducción del reconocimiento de patrones que por demás está decir, califica entre las habilidades que pasan al dominio de la inteligencia cristalizada con muy poco entrenamiento y son difíciles si no hay un referente previo. Esta experiencia hace que el niño desarrolle con mayor facilidad la habilidad de abordar este tipo de problema y facilita la transición hacia la abstracción a casos más generales, es lo que Hogarth (2001) identifica como la incorporación de una habilidad aprendida en el sistema de instintos.

Para contextualizar esta situación se citan algunos párrafos textuales de los programas oficiales de estudio para Matemáticas en números y geometría. (Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012).

Para el primer ciclo que incluye niños de 7, 8 y 9 años

- Números: ´…se abarcan los números naturales menores que 100000 y sus relaciones, las operaciones de suma, resta, multiplicación, y división. Además, habilidades relacionadas con el cálculo y la estimación´

- Geometría “… desarrollar la capacidad de visualizar las formas geométricas y algunas de las relaciones entre ellas….así como iniciar el proceso de abstracción geométrica´´

Para el segundo ciclo, 10,11 y 12 años:

- Números ´´…fortalecimiento del cálculo operatorio de los números naturales, fracciones y decimales.
- Geometría ´´… avanzar en el conocimiento de más figuras…profundizar en el estudio de triángulos y cuadriláteros esto incluye estimación y cálculo de áreas y perímetros…un estudio elemental de la circunferencia y se avanzará en el conocimiento de otros sólidos´

Se incluyen como habilidades abstraer propiedades de figuras geométricas, identificar relaciones mediante giros y traslaciones, entre otras.

Siempre sobre estos programas, en la sección de relaciones y álgebra incluyen analizar patrones geométricos o numéricos, pasar de representaciones verbales a numéricas, representar relaciones entre variables, usar letras para representar variables, aplicar regla de tres y porcentajes para resolver problemas, plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

Si bien estos programas no estaban vigentes antes del 2012, lo cual es una limitación al momento de caracterizar la población, los programas previos mantenían una estructura similar a nivel de contenidos.

2.3.4 Algunos modelos de referencia del razonamiento matemático.

Un modelo interesante es el propuesto por DeGuiere (1985) en el que la autora trata de clarificar las estructura de las habilidades matemáticas. Después de una revisión detallada y reanálisis, en algunos casos, de 48 análisis factoriales sobre habilidad matemática concluye, con algunas limitaciones, elementos muy importantes como la aparición de una estructura jerárquica de las habilidades matemáticas y el haber encontrado un factor matemático. En general, partir de la comparación en seis factores: general, numérico, analítico, razonamiento, espacial, verbal y matemático plantea hallazgos reveladores. En lo que llama familia de factores generales incluye factores asociados con la inteligencia fluida y la cristalizada. Llama la atención la familia de factores de razonamiento entre los que incluye inducción, deducción, razonamiento general, juicio e integración. Otros factores van asociados con el alcanzar o evaluar conclusiones. Concluye DeGuiere (1980, p.18) sintetizando un modelo jerárquico con un nivel general en el que coloca las inteligencias fluida y cristalizada dejando abierta la pregunta sobre otras capacidades, y colocando como habilidades específicas el razonamiento espacial, el razonamiento, las habilidades numéricas y las verbales. Propone una asociación de las habilidades espaciales, numéricas y verbales únicamente con ciertas tareas matemáticas, la asociación de las habilidades de razonamiento, la inteligencia fluida y la cristalizada con muchas tareas matemáticas. Y propone una asociación no explorada entre otras habilidades y ciertas tareas matemáticas. No encuentra un claro ajuste entre la estructura y la estructura tríadica de Cattell pero sí algunas similitudes.

Más recientemente Taub, Keith, Floyd y McGrew (2008) sostienen que el razonamiento fluido pareciera ser relevante para algunos de los constructos más significativos en la resolución de problemas y en las estrategias implicadas en el desempeño en tareas matemáticas, citan como soporte trabajos similares realizados por Cummins (1991), Fuchs y col. (2006), Lemaire y Siegler (1995), Swanson y Beebe-Frankenberger (2004). Agregan que la inteligencia cristalizada demuestra un efecto directo de moderado a alto sobre el razonamiento cuantitativo. Reportan también algunas diferencias en los efectos en distintos grupos de edad. Estos resultados son consistentes con hallazgos previos en el sentido de que hay un efecto robusto del razonamiento fluido, el razonamiento cristalizado, la memoria de trabajo y la velocidad de procesamiento con el desempeño matemático. Este enfoque de Taub y col. (2008) es muy frecuente hoy día (Finn y col., 2014; Salthouse, 2014). En resumen estos modelos refuerzan la asociación entre algunas habilidades del modelo CHC y el razonamiento y sin duda se convierten en experiencias que sustentan la coherencia de modelos de naturaleza jerárquica para el razonamiento matemático.

a) El modelo de descomposición del razonamiento de Carroll

En el libro de John B.Carroll Human Cognitive Abilities a survey of factor-analytic studies, este autor hace una revisión profunda de diversos estudios relacionados con el razonamiento. Lo primero que refleja esta revisión es lo profundamente complejo y diverso que puede ser el tema. También, resulta importante para la propuesta que se presentará aquí, las conclusiones y planteamientos a las que llega el autor.

Empieza por aclarar que tradicionalmente las habilidades de razonamiento son consideradas el corazón de lo que ordinariamente se acepta como significado de inteligencia.

La conclusión que más nos interesa, en este apartado del estudio, es que hay evidencia para aceptar la existencia de tres habilidades en el dominio del razonamiento. Se presentan aquí, basados en las descripciones de Carroll (1993), estas habilidades.

1. *Razonamiento secuencial (deductivo)*. Este factor opera en tareas o preguntas que requieren que el individuo haga inferencias, es decir a partir de premisas establecidas, reglas, o condiciones se involucre en un proceso de hacer inferencias para alcanzar las conclusiones que se puedan seguir de ellas, esto de manera lógica y apropiada. Las características dominantes de los factores específicos a este dominio enfatizan la habilidad de razonar y llegar a conclusiones a partir de condiciones o premisas base, frecuentemente en una secuencia de dos o más pasos. Los estímulos o material de evaluación puede ser casi de cualquier tipo: literal, verbal (semántico), numérico, pictórico o asociado con figuras. Las operaciones en el proceso de razonamiento pueden ser de muchos tipos involucrando comparaciones de estímulos en términos de atributos continuos o pertenencia a clases, percepción de relaciones de causalidad, implicación, etc. Identifica al menos tres subtipos de tareas a saber: asociadas con silogismos categóricos, silogismos lineales y actividades de razonamiento general. En esta última coloca el resolver problemas establecidos verbalmente, algunas veces acompañados de diagramas o figuras, que implican uno o varios pasos deductivos.

2. Razonamiento inductivo. Este factor opera en tareas o preguntas que exponen al sujeto con la inspección de materiales para que, a partir de ésta, se induzca una o más reglas implícitas que los gobierna, o bien inducir o esclarecer las características comunes o diferencias en que se basan. Las tareas inductivas son aquellas que requieren que el individuo inspeccione una clase de materiales o estímulo (casi siempre con más de una instancia) para después inferir (induce, educe) una característica común inherente a esos materiales – un concepto, pertenencia a una clase –, una regla, un proceso, una tendencia, o una relación causal por ejemplo. Aclara el autor que una tarea inductiva siempre implica al menos un paso deductivo para llegar a una conclusión, clasificación y u otra respuesta requerida. Como factores tenemos clasificación, formación de conceptos, inducción entre otros.

3. *Razonamiento cuantitativo*. Se asocia a tareas que requieren del individuo razonar con conceptos que involucran relaciones cuantitativas, en particular relaciones que pueden ser descritas matemáticamente con el fin de llegar a conclusiones correctas. Estos procesos de razonamiento pueden ser inductivos, deductivos o ambos pero su característica principal es que requieren de apreciación de conceptos y relaciones cuantitativas. Es particularmente asociado a tareas matemáticas.

En general los factores que tienen cargas significativas sobre razonamiento cuantitativo son aquellos que requieren razonamiento basado en propiedades y relaciones matemáticas. Puede ser inductivo o deductivo o una combinación de ambos. Algunos test que usualmente tienen cargas altas en este factor son de razonamiento aritmético y de aptitud matemática. Típicamente los test asociados presentan una variedad de problemas de razonamiento matemático tales como problemas verbales (resolver problemas matemáticos establecidos verbalmente), series numéricas, problemas que requieren una selección de operaciones aritméticas apropiadas.

2.4 Componentes y características del modelo de estructura del Razonamiento Matemático

Basta una mirada rápida a las secciones previas para darse cuenta que plantear un modelo explicativo para el razonamiento matemático es un ejercicio difícil y ambicioso y obliga a adoptar algunas simplificaciones. Por un lado están los aspectos de la complejidad de un dominio del cual no hay una definición o caracterización absoluta. Por otro, está la variedad de conductas o habilidades específicas que diferentes autores estiman que conforman el razonamiento matemático, decenas en algunos casos (Carroll, 1993; DeGuire, 1985). Estos dos factores se complementan para crear un escenario retador al definir un posible modelo.

El elemento elegido para abordar esta complejidad proviene de modelos de ecuaciones estructurales. Los modelos SEM, como se conocen en la literatura, emergen como una metodología para explicar la estructura dimensional de constructos (Bollen, 1984). Han cobrado vigencia importante en la investigación en diversas áreas de las ciencias educativas, por ejemplo modelos de Inteligencia (Floyd, Evans & McGrew, 2003; Kyllonen & Cristal, 1990), tecnologías de información y comunicación (Suárez-Rodríguez, Almerich, Gargallo López & Aliaga, 2013), entre otros campos.

Un planteamiento a través de un modelo de ecuaciones estructurales involucra, como es sabido, someter al análisis una o varias hipótesis estadísticas complejas. A partir de un conjunto de variables observables, agrupadas en algunos factores, se busca medir las relaciones estructurales entre esos constructos. Además, es de interés analizar la posibilidad de dimensiones generales (Chen, West & Sousa, 2006), que expliquen la dinámica de las relaciones entre las variables latentes en un concepto de orden superior.

También determinar relaciones de causalidad entre esas variables latentes y las relaciones con otras variables de contexto como sexo y años de escolaridad. Esto último a través de un modelo en el que se analizan múltiples indicadores y múltiples causas (MIMIC, Jöreskog & Goldberger, 1975). Para Muthen (1989) modelos que contemplen elementos de heterogeneidad de la población que pueden tener efectos sobre los modelos y las interpretaciones derivadas.

Con este panorama en mente, en esta sección se discute y contextualiza un posible modelo con la esperanza de que a través del mismo se conozcan mejor las características más relevantes del constructo.

Para Tall (1991, p.1) los psicólogos buscan extender las teorías de los procesos de pensamiento a un dominio de conocimiento más complejo, los matemáticos con una visión hacia los procesos de pensamiento creativo con la esperanza, quizá, de mejorar los procesos de enseñanza o investigación. Una cita que refleja esta dualidad proveniente de Jacques Hadamard resaltando la dificultad de discutir la naturaleza de la psicología de la matemática avanzada "...la materia involucra dos disciplinas, psicología y matemática, y puede requerir, para ser tratada adecuadamente, que uno sea ambos: psicólogo y matemático. Debido a la ausencia de este equipo compuesto, la materia ha sido investigada por matemáticos de un lado, y por psicólogos del otro..." (Tall, 1991, p. 1).

Cabe aquí destacar que esta propuesta no es exclusivamente de psicológica ni matemática; más bien corresponde a la lectura que como estudioso de la formación y en la función de profesor de estudiantes en el área de la matemática, el autor hace sobre elementos de dos disciplinas para llegar a un modelo de representación del constructo.

La resolución de problemas verbales complejos, entendidos como problemas de razonamiento que resultan novedosos, que implican retos al alcance de quien los resuelve, que implican leer y comprender un enunciado verbal en el que se describe una situación matemática a resolver, que incluye manejo de datos o hipótesis, relaciones o implicaciones y una meta, es esencialmente el medio por el cual se van a medir las diferentes habilidades secundarias, constructos, relacionados con el razonamiento matemático. Es común tratar de medir el razonamiento matemático usando problemas de esta naturaleza (Geary, 2006; Schoenfeld & Herrmann, 1982)

En la resolución de este tipo de problemas intervienen distintos factores. Para Geary (2006), la resolución de problemas verbales complejos está relacionada con factores intraindividuales y extraindividuales.

> Los factores extraindividuales incluyen cantidad y calidad de práctica e instrucción y otros factores curriculares. Cita entre los factores intraindividuales la Memoria de Trabajo (Geary & Widaman, 1992; Tronsky

> & Royer, 2002), herramientas de cálculo básicas, conocimiento de tipos de problemas y esquemas, la habilidad para crear representaciones viso espaciales de relaciones entre características de los problemas (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Lewis & Mayer, 1987) así como aspectos relacionados con la auto motivación, la autoeficacia y la tendencia a persistir con los esfuerzos para la resolución del problema (Fuchs y col. 2003) (p. 799).

En ese sentido el resultado final del modelo a proponer se concluye con un test de problemas de razonamiento matemático, ambos aspectos tanto el modelo base como la prueba que se deriva se tornan fundamentales.

2.4.1 Elementos del modelo propuesto

Si bien no es posible establecer una definición común de lo que se llama razonamiento matemático, para efectos de esta investigación se parte de la siguiente caracterización, debe entenderse que no se trata de razonamiento matemático experto sino una forma más básica de abordar situaciones complejas que involucren pensamiento matemático. El objetivo del modelo que se presenta se resume en:

> Establecer algunas relaciones entre factores de segundo orden y la capacidad de los individuos para enfrentar con éxito la resolución de problemas matemáticos que trasciendan la aplicación de una regla definida o algoritmo conocido con anticipación. Estos problemas es usual que requieran de un proceso complejo de manejo de información más de tipo procedural que factual, visualización de hipótesis, relaciones o características y comprensión de caracterizaciones, unido a un proceso de inferencia no formal pero regido por reglas de la lógica inferencial a nivel de una o varias inferencias encadenadas.

Vale la pena destacar que todos los modelos estudiados hacen separaciones que de una u otra manera recogen comportamientos similares, parte del ejercicio académico de esta tesis se centró en sintetizar un modelo que reúna elementos pertinentes, en cantidad y representatividad, para convertirse en un buen predictor de capacidades individuales de razonamiento matemático, y, a través del test resultante del modelo, obtener un elemento de comprobación de las relaciones hipotetizadas entre los factores o habilidades específicas consideradas.

En Taub y col. (2014) se afirma que quizá sea necesario ver más allá del factor *g* mismo al explicar la habilidad de razonamiento en los niños. Estos mismos autores estudiando el efecto de las habilidades generales y especificas del modelo CHC en el logro matemático afirman que “El conocimiento de habilidades cognitivas específicas importantes para el éxito matemático tiene el potencial de impactar el desarrollo del currículo y la instrucción” (p.3) y más allá de esto citan como sub habilidades importantes para el razonamiento matemático la deducción y la inducción. Y apuntan que, el estudio realizado los lleva a reconocer que el desarrollo de ciertas habilidades específicas tiene un efecto directo sobre el desempeño en matemática.

Se procede con una exploración más detallada de los factores para el razonamiento matemático.

2.4.2 Memoria de trabajo

La memoria de trabajo ha sido ampliamente analizada como un dominio específico para las habilidades matemáticas (Robinson, Abbott, Berninger & Busse, 1996). También Kane y col. (2004) afirman que la memoria de trabajo está fuertemente relacionada con el factor general de la inteligencia fluida y puede estar entre los factores críticos de la habilidad fluida general.

El término memoria de trabajo se refiere al sistema cerebral que provee el almacenamiento temporal y la manipulación de la información necesaria para tareas cognitivas complejas como comprensión de lenguaje y razonamiento (Baddeley, 1992). Este sistema entonces, hace referencia a la capacidad de almacenamiento, de hacer asociaciones y procesamiento de información asociada con la realización de una tarea compleja. Está muy ligada a los procesos cognitivos superiores entre ellos el razonamiento matemático (Schoenfeld, 1992).

Un riesgo que de plano se evita está relacionado con la evolución que ha tenido el concepto. El mismo Baddeley (2012) reconoce que hay modelos diversos de la memoria de trabajo, en general consistentes con una estructura de multicomponentes, aunque con énfasis y terminologías distintas. La memoria de trabajo ha sido igualada en muchos estudios con el factor g mismo, por ejemplo Ackerman, Beier y Boyle (2005) hacen referencia a estudios distintos que llegan a esa conclusión, Jensen (1998), Engle (2002) y Kyllonen (2002). Sin embargo, después de un análisis muy completo de distintos enfoques llega a concluir que no son los mismo y concluye que, la memoria de trabajo se interpreta mejor como una habilidad cognitiva de orden inferior que como una de orden superior como el razonamiento, en la misma línea se expresan Conway, Kane y Engle (2003). En algunos casos, el concepto se especializa a nivel de confundirse con otros elementos por ejemplo en (Kane y col., 2005; Süß y col., 2002). De la investigación realizada se concluye que la memoria de trabajo es un elemento central en el razonamiento matemático que resume capacidades fundamentales al atender exitosamente la resolución de problemas de razonamiento matemático. El concepto se asume en una interpretación básica con el objetivo de hacer operativa su medición.

Para Gómez-Chacón y col. (2014) en los procesos resolución de problemas, la memoria de trabajo, es responsable al menos de tres procesos centrales. Primero, como almacén de información y trabajo, retiene información ya sea proveniente de la descripción o de procesos intermedios. Segundo, Permite conexiones cognitivas entre distintas piezas de información almacenadas agregando información y dando forma a un modelo mental de la situación. Tercero, es la responsable de conectar los recursos cognitivos o de procedimiento implicados en la atención de la tarea de razonamiento.

La memoria de trabajo es vista en este contexto, como una capacidad de dos componentes entrelazados. Uno de ellos, el más rígido, permite al individuo incorporar información específica sobre una situación problema ya sean hechos o relaciones y enlazarlos o asociarlos con conocimientos del mismo tipo que ya posee, el otro, más dinámico, es un sistema ejecutivo capaz de generar procesos que permiten establecer encadenamientos productivos de información para lograr nueva información relevante a una tarea o problema.

En el mismo sentido descrito anteriormente es fácil caer en la tentación de asumir a la memoria de trabajo como responsable de procesos de inferencia complejos y del razonamiento mismo, basta dar una ojeada a los distintos análisis exploratorios presentados en el capítulo titulado selección final de la prueba, para darse cuenta de una tendencia a agrupar en un factor una cantidad predominante de ítems cuyos procesos de solución pueden ajustarse con lo descrito en el párrafo anterior. Pero en aras de reconocer factores precursores del razonamiento se estima oportuno en el contexto de esta tesis restringir el concepto de memoria de trabajo a los elementos básicos.

Debe ponderarse esta decisión en el contexto de la finalidad de una investigación como la que aquí se presenta. Y en ese sentido, la posibilidad de segmentar en elementos más simples, es sin duda justa y necesaria, si lo que se busca es encontrar elementos que puedan ajustarse al momento de hacer intervenciones en educación.

Se plantea en el modelo la capacidad de memoria de trabajo como variable fundamental, entendida en el sentido sugerido por Baddeley (1992) que se resume en la capacidad manifiesta de percibir información ya sea textual o visual, procedimientos y/o procesos, dados de forma explícita o implícita, y hacer una gestión razonable de esa información en el contexto de una meta establecida. En el contexto de esta propuesta la memoria de trabajo se circunscribe a la habilidad de captar información, almacenarla, discriminarla, clasificarla y convertirla en insumo para realizar algunas inducciones o inferencias. Bajo esta premisa los ítems sobre los que incide esta habilidad se eligen de manera que correspondan con la comprensión de un concepto, proceso o premisa y con base en ellos se establezca una conclusión o verificación de primer nivel.

En resumen, comprender el problema, es decir, captar la información relevante, tanto de hechos como de relaciones simples y hacer encadenamientos de primer orden. Por ejemplo, relaciones del tipo que impliquen piezas de información simples: A mide a, B mide b, y relaciones simples del tipo C es igual a la diferencia entre A y B, para luego poder obtener el valor de C. Esta información presentada en formato visual o verbal. Esos razonamientos pueden ser mucho más elaborados.

Su medición se realiza a través de elementos granulares que evocan los tres procesos citados en el párrafo previo, eso sí con una visión más orientada hacia el contexto matemático. Esto en contraposición con diversos enfoques que miden la memoria de trabajo a través de otros elementos asociados, por ejemplo:

recuerdo serial de dígitos y palabras, test de matrices o test de memoria visual figurativa (Alsina, 2001).

2.4.3 Razonamiento espacial

Muchas tareas matemáticas obviamente tienen prerrequisitos espaciales, la habilidad de imaginar una figura o visualizar en ella propiedades, abre posibilidades para enfrentar problemas o para atenderlos de manera más eficiente (Friedman, 1992). Como se referencia en Hegarty y Kozhevnikov (1999) donde se cita que muchos investigadores coinciden en la importancia de las representaciones visuales porque facilitan una visión intuitiva y el entendimiento de muchas áreas de la matemática, Hegarty y Kozhevnikov (1999) citan a (Krutetskii, 1976; Usiskin, 1987) como referentes. Agregan que, hay una relación significativa entre la habilidad espacial y el desempeño en matemáticas. Criterios similares son externados por Schoenfeld y Herrmann (1982).

Shea, Lubinski y Benbow (2001), en referencia a la propuesta de Carroll (1993), apuntan que a esta propuesta del conocimiento de la estructura y la organización de las habilidades humanas le falta al menos una dimensión, la habilidad espacial. Más contundente es la afirmación de Kell, Lubinski, Benbow y Steiger (2013) acerca de que la habilidad espacial no sólo juega un rol único en la asimilación y utilización del conocimiento, también juega un rol único en el desarrollo de nuevo conocimiento, de igual manera reporta investigaciones de más de 20 años que ofrecen evidencias, al menos parciales, sobre el rol de las habilidades espaciales en relación con las habilidades matemáticas y verbales. Esto sin duda justifica la incorporación de esta habilidad como central.

Una referencia importante proviene de Geary, Saults, Liu y Hoard (2000) al reportar que las habilidades espaciales contribuyen en las diferencias individuales al resolver problemas de razonamiento. En su investigación se plantean algunos análisis estructurales que no son concluyentes del todo, pero si muestran indicios valiosos que justifican la hipótesis de que el razonamiento espacial contribuye en la explicación del razonamiento general. Para Linn y Petterson (1985) la competencia espacial se asocia con la capacidad de representar, generar, recordar y transformar información. Identifican tres categorías percepción espacial, rotación mental y visualización. Esta última incluye generar imágenes mentales y hacer transformaciones sobre la misma. En el contexto de esta tesis esta capacidad se asocia con la habilidad para la representación y manipulación mental de estas representaciones con el fin de resolver problemas de razonamiento. Así mismo con la habilidad de visualización de elementos concluyentes en el contexto de representaciones dadas. Comparar, rotar, imaginar son tareas que se estiman importantes dentro de la dimensión.

Recapitulando la habilidad de visualización geométrica se convierte en un aliado en el pensamiento matemático por dos razones fundamentales. La primera de ellas tiene que ver directamente con la solución de problemas en los cuales hay un elemento geométrico explícito, es decir, problemas cuya índole sea geométrica. Segundo la habilidad geométrica abre oportunidades de representaciones o enfoques distintos en la resolución de problemas y esto sin duda potencia las habilidades de razonamiento, máxime en este tipo de situaciones en los que suelen caracterizarse por diversos enfoques de solución.

Las otras dimensiones consideradas son más clásicas dentro de los esquemas de razonamiento matemático y son razonamiento deductivo y razonamiento inductivo. No obstante, se incorporan variantes significativas respecto a conceptualizaciones convencionales presentes en la literatura sobre cada una de ellas. Como apuntan Goel, Gold, Kapur y Houle (1997) ambos procesos tienen la misma estructura lógica pero difieren en el contenido. Ambas se discuten en los apartados siguientes.

2.4.4 Razonamiento deductivo

El abordaje del concepto desde esta tesis ha sido desde la perspectiva cognitiva. Se ve la deducción como una competencia interiorizada en el individuo que funciona como un regla de inferencia formal, una premisa válida permite una conclusión válida, mientras que la inducción se ve más bien como una forma de generación y prueba de hipótesis.

En este sentido entonces, factor razonamiento deductivo incluido relaciona la habilidad deductiva, entendida ésta en su expresión más simple. La habilidad de realizar deducciones simples del tipo sí se cumple esta condición entonces tengo esta conclusión. Se incluye además dentro de esta categoría la aplicación de reglas que corresponden con un predicado que se aplica a uno o varios objetos relacionados. En la línea expuesta por Ward y Overton (1990) esta capacidad radica en los juicios del estudiante acerca del grado de significancia de la relación antecedente consecuente. El uso de esta simplificación se apega a hallazgos como los reportados por estos mismos autores que concluyen que la familiaridad del estudiante con contenidos definidos en términos de relaciones relevantes entre antecedentes y consecuentes es un factor importante en la determinación del desempeño en el razonamiento y no coincide con propuestas, comunes en la literatura, como de Gómez-Chacón y col. (2014) que cobija bajo el término elementos más complejos. Para estos mismos autores la solución de problemas deductivos hace especial uso de recursos cognitivos eficientes en una serie de tareas que requieren control y regulación de procesos de resolución de problemas, esta habilidad se asocia con otro factor en esta propuesta.

Se concluye como importante usar una forma reducida de la habilidad en el sentido de dimensionar hasta dónde el estudiante posee elementos básicos deductivos que resultan importantes en sí mismos y en la determinación de otros procesos más complejos.

2.4.5 Razonamiento Inductivo

Finalmente a habilidad más elaborada a considerar es lo que se llama razonamiento inductivo. Ésta implica creación y uso de representaciones abstractas, relaciones cuantitativas y cualitativas entre variables, hacer inferencias, inducir conceptos abstractos, comprender implicaciones, hacer deducciones no evidentes, reorganizar información. Como lo describe Ayalon y Even (2010) una manera sistemática, paso a paso, de resolver problemas, en la que no necesariamente se presta atención a aspectos de validez o lógica formal, al menos no estrictamente.

Esta es la habilidad más elaborada en el sentido que reúne elementos comunes de las otras tres y está presente en todos los modelos de manera directa o indirecta. En CHC se asocia con elementos de razonamiento fluido, con la capacidad de pensar lógicamente y resolver problemas en situaciones nuevas que no dependen de conocimientos adquiridos y con la velocidad de procesamiento (Wright, Matlen, Baym, Ferrer & Bunge, 2007). Taub y col. (2008) en un estudio sobre los efectos de las habilidades general y específicas del modelo CHC, reportan que el razonamiento fluido , la inteligencia cristalizada y el velocidad de procesamiento son fundamentales en el desempeño matemático, agrega que los modelos explicativos que no incluyan medidas de esas tres habilidades cognitivas podrían quedar limitados al proveer una explicación de los componentes cognitivos responsables del desempeño matemático.

En las teorías de inteligencias múltiples la visión del razonamiento es un más restrictiva pero se defina la inteligencia lógico-matemática como la capacidad para construir soluciones y resolver problemas, estructurar elementos para realizar deducciones y fundamentarlas con argumentos sólidos (García, García, Sainz, Prieto & Sánchez, 2008). En el modelo triárquico de Sternberg, en la teoría componencial, recoge elementos se asocian con esta habilidad (Horn, 1991).

En la misma línea que Kemp y Jern (2014) se toma una definición general para razonamiento inductivo la siguiente. De manera simplificada un razonamiento es inductivo si las conclusiones no se siguen deductivamente de las premisas, de forma directa. Kemp y Jern (2014) ofrece una taxonomía detallada del razonamiento inductivo. El razonamiento inductivo evoca hacer conclusiones, anticipar y por eso es más profundo que el deductivo, va más allá de la aplicación información dada, requiriendo transformaciones, interpretaciones y uso selectivo y secuencial de la misma incluyendo generación de hipótesis intermedias.

Esta definición se acerca a los procesos transformacionales de Simon (1996) o a elementos de los factores secuencial e inductivo del modelo de razonamiento de Carroll (1993) y se amplía completamente con respecto la definición tradicional orientada hacia la generalización a partir de casos particulares. Esta es esencialmente la interpretación que se adopta.

2.5 Modelo Teórico que se someterá a prueba

Tanto las investigaciones teóricas preliminares como los análisis exploratorios de las pruebas realizadas por estudiantes durante los años 2011, 2012 y 2014 permiten conjeturar que la habilidad de razonamiento matemático se ve fuertemente influenciada por el desempeño de los individuos en 4 áreas fundamentales, estas áreas se han clasificado como Memoria de Trabajo, Razonamiento Espacial (RE) y Razonamiento Deductivo y Razonamiento Inductivo.

Si bien existe bastante dificultad en la determinación de un conjunto de variables latentes que puedan ser consecuencia del razonamiento matemático y a la vez convertirse en predictores del mismo, es razonable establecer un modelo estructural parsimonioso que ofrezca evidencia relevante sobre una estructura de antemano compleja.

La finalidad es un modelo de medida del constructo con sus posibles relaciones y con base en el modelo propuesto, predecir el nivel de desarrollo del razonamiento matemático de un estudiante.

El modelo se plantea con base en la existencia de cuatro variables latentes predictores que hacen operativas las clasificaciones expuestas en las secciones previas. Estas son la memoria de trabajo, entendida en el contexto expresado en las secciones anteriores, el razonamiento hipotético deductivo o cuantitativo también delimitado en las secciones anteriores y que se descompone en dos elementos complementarios y el razonamiento espacial, todos ellos influyen de manera directa o indirecta sobre el nivel de razonamiento matemático.

El modelo plantea que la memoria de trabajo es una variable precursora que incide indirectamente a través de las variables razonamiento espacial y razonamiento inferencial en el inductivo y juntas delinean un factor general de razonamiento matemático.

3 PARTE EMPIRICA

3.1 Objetivos de la investigación

3.1.1 Objetivo general

Establecer una propuesta basada en elementos teóricos que sustenten la existencia de una estructura dimensional en el Razonamiento Matemático.

3.1.2 Objetivos específicos

- Desarrollar una prueba para valorar el Razonamiento Matemático y sus componentes.
- Verificar la existencia de una estructura dimensional del Razonamiento Matemático desde la perspectiva teórica.
- Establecer un modelo de medida básico de las dimensiones que componen el Razonamiento Matemático.
- Conocer si el Razonamiento Matemático se ajusta a un modelo jerárquico a partir de las dimensiones que lo componen definiendo una dimensión general.
- Determinar un modelo de influencia de los factores personales y contextuales sobre la estructura de medida del Razonamiento Matemático.
- Delimitar modelos estructurales más allá del modelo de medida, respecto a la dinámica interna entre las dimensiones componentes del Razonamiento Matemático.

3.2 Metodología de validación del Instrumento de Razonamiento Matemático

En la metodología de validación del instrumento de Razonamiento Matemático se han seguido dos fases. La primera es el diseño del instrumento y la segunda la validación de la estructura interna del mismo.

En la primera fase, el diseño del instrumento se fundamentó en un proceso tanto empírico como lógico, dada la complejidad del constructo. El procedimiento seguido en esta fase de desarrollo del instrumento es la elaboración de los ítems, mediante la combinación del estudio de las pruebas Canguro Matemático y el criterio del experto, que juega un rol fundamental. Tras la elaboración de los ítems de la prueba se ha validado el contenido de la prueba mediante la revisión del mismo por parte de expertos.

En cuanto a la elaboración de los ítems, la propuesta ante este reto se basa en tres pilares fundamentales. Primero, se vuelve fundamental el criterio del experto que diseña la prueba ante un constructo tan complejo. El empleo de ítems de pruebas aplicadas en contextos internacionales, como lo es la prueba Canguro Matemático, es un buen punto de partida. Los ítems de esta prueba reflejan la percepción de decenas de expertos en esta temática acerca de tareas adecuadas para que el estudiante exprese su capacidad de razonamiento en las matemáticas. Esta decisión, como insumo al perfilar los componentes para medir los constructos, es un elemento crucial. Segundo, en general los ítems de la prueba Canguro Matemático tienen características particulares que los hacen adecuados para medir habilidades matemáticas que provocan la intuición, el pensamiento y el razonamiento matemático. Un aspecto negativo es, sin duda, que estos ítems no están necesariamente asociados a uno u otro de los constructos citados. Tercero, la disposición de resultados de aplicaciones de estas pruebas a grupos de estudiantes abre la posibilidad de realizar cierta minería de datos. La realización de un análisis factorial exploratorio permite la “exploración de la naturaleza de las escalas y las interrelaciones entre los ítems” (Osborne y Fitzpatrick, 2012, p. 2), además de que facilita la clasificación de los ítems en habilidades y la confrontación de las mismas con los factores ya citados en apartados anteriores de esta tesis. Si a esto unimos una simplificación adecuada de los constructos, como se ha citado, el planteamiento de los ítems que conforman la prueba se convierte en más sencilla. Toda esta estructuración de los ítems debe complementarse con una elección adecuada de los mismos, bajo la mirada crítica del experto que se convierte en fundamental.

Además, en esta fase la revisión por expertos en la temática permite dilucidar si el contenido del test representa adecuadamente el dominio de contenido definido (Sireci y Faulkner-Bond, 2015).

En la segunda fase, para la validación de la estructura interna del instrumento, se ha realizado una administración de la prueba diseñada a una muestra de estudiantes costarricenses de distintos años de escolaridad que permiten la comprobación del mismo, mediante el análisis factorial confirmatorio. Finalmente, se han propuesto modelos que proporcionan la estructuración de las dimensiones del Razonamiento Matemático.

3.3 Diseño y desarrollo del Instrumento de Razonamiento Matemático

El diseño del instrumento requiere la elaboración de ítems y su revisión por expertos, que se determina en este apartado.

3.3.1 Elaboración de los ítems

En la elaboración de los ítems se atiende, como se ha señalado anteriormente, tanto a una vertiente empírica –basada en el análisis de los ítems- como a una lógica –basada en el criterio experto sobre el Razonamiento Matemático-. Por tal motivo, se ha realizado un estudio fundamentado en la minería de datos, exploraciones usando elementos reconocidos en estadística como análisis factoriales, combinado con una selección orientada por los hallazgos de los estudios previos y fundamentalmente por el criterio del experto en esta temática. Todo esto está encaminado a ofrecer una propuesta de una prueba que atienda la dimensión global de Razonamiento Matemático y, al mismo tiempo, a los componentes esenciales del mismo: Memoria de Trabajo, Razonamiento Inductivo, Razonamiento Deductivo y Razonamiento Espacial

En el caso de esta prueba conviene inclinarse por una validación de criterio basada en lo que Messick (1990) llama modelo basado en criterios, fundamentado en el desempeño observable en una muestra de individuos en el universo de medida. Es evidente que esta valoración a partir de criterios presenta igualmente subjetividad porque requiere alguna valoración del desempeño, pero para el caso de esta prueba esta deficiencia pareciera aceptable al contemplar los resultados de la prueba Canguro Matemático como una evaluación de la población objeto de estudio.

Más específicamente, para la elaboración del instrumento se dispone de los resultados de tres ediciones de Canguro Matemático realizadas en los años 2011, 2012 y 2013. En general estas pruebas son tomadas por un buen número de estudiantes que sus profesores consideran tienen capacidades de razonamiento lógico matemático aceptables, lo cual da una muestra adecuada de individuos representativos del universo a medir. Junto a ello, se encuentra la valoración y criterio del experto en matemáticas que permite una evaluación más precisa y especializada de las pruebas.

Por otra parte, cada una de estas ediciones de las pruebas Canguro Matemático dispone de 30 ejercicios, pudiéndose tomar como criterio de valoración del desempeño los resultados obtenidos. Cabe aquí la salvedad de que el Razonamiento Matemático no es exactamente una habilidad de dominio general entre los estudiantes, así que se debe aceptar que de previo la prueba tiene un nivel de dificultad alto. Por ello, el razonamiento no pareciera una tarea simple, al menos no una que el sistema educativo logre en la mayoría de los estudiantes, como en el caso costarricense. Dado que esta prueba presenta niveles de dificultad crecientes se decide excluir en la tres ediciones los ítems entre el 21 y 30, puesto que en general presentan un nivel de dificultad mucho más elevado. Esto es coherente con la prueba internacional, la cual al ser estructurada incluye ejercicios más difíciles para este segmento de la prueba.

Por consiguiente, el proceso de elaboración y selección de ítems que constituirán la prueba de Razonamiento Matemático se rige por el siguiente procedimiento:

- En primer lugar, se realiza un análisis de los ítems, fiabilidad y estructuración de los ítems en factores acerca de las primeras 20 preguntas en cada uno de los tres años considerados. Estos análisis se toman como punto de partida en la definición de los factores explicativos. Para la estructuración de los ítems en factores se utiliza el análisis factorial exploratorio para detectar en cada año agrupamientos de los ítems, buscando una estructura lo más cercana posible con las cuatro dimensiones del Razonamiento Matemático que se proponen, con el propósito de “proporcionar una indicación de modelos posibles para una investigación más rigurosa” (Purdie y Hattie, 2002, p. 20). Por ello, en cada edición se corre un análisis factorial exploratorio con el método de componentes principales para analizar su ajuste al modelo teórico de los cuatro factores propuestos. Se estima que una cantidad alta de factores no necesariamente es incorrecto o inconveniente, especialmente en un constructo tan complejo. Se reconoce en general, acerca de la inteligencia como un todo y el Razonamiento Matemático como un elemento relacionado, que existan varias habilidades definitorias cuya evidencia es compleja de separar. Es decir, es poco probable obtener una factorización muy clara sin sacrificar algo de la diversidad de manifestaciones del concepto. Sin embargo, dado que el modelo teórico de medida se decanta por cuatro variables latentes o habilidades generales se realiza el análisis factorial forzado a cuatro factores, que es la propuesta más acorde con el modelo teórico propuesto. Por consiguiente, se trata de determinar elementos comparativos entre los ítems de cada prueba y abrir la posibilidad de establecer los tipos de preguntas que mejor miden el desempeño mostrado por los estudiantes durante esos años y que mejor se adapten a la factorización teórica propuesta. Seguidamente, se analizará los ítems que definen cada uno de estos factores para determinar si existen características comunes en resultados o procesos que ellos implican para clasificarlos según las cuatro variables latentes establecidas previamente. En principio, esto ofrecerá una primera aproximación a los ítems que conformarán la prueba. Por todo ello, en el análisis factorial exploratorio realizado se ha decidido utilizar la rotación Varimax, con la finalidad de poder forzar a los ítems dentro de una dimensión del Razonamiento Matemático.

- Con los resultados de esta primera etapa, se eligen prioritariamente aquellos ítems que hayan resultado con anclajes aceptables a los factores respectivos, que permitan un nivel razonable de dificultad en la prueba y que permitan completar los ítems propuestos en las cuatro dimensiones propuestas. En principio se respeta la clasificación ofrecida por los análisis factoriales realizados, pero a partir del criterio experto y basado en la experiencia del mismo en determinados casos justificados y por las características del ítem es posible la recalificación del mismo en otra dimensión.

- Finalmente, una vez seleccionados los ítems candidatos, se presentan a jueces expertos en la temática para que los evalúen, para determinar la validez de contenido del constructo a partir del criterio de los mismos.

Se destaca que, a pesar de que la población que se considera la prueba tiene un rango de edad más alto, los resultados preliminares alertan a tener un poco de cautela y usar para efectos de la medición únicamente ítems del nivel de la prueba Canguro Internacional para estudiantes de 11 y 12 años.

Además, es clara la dificultad que implica clasificar un ítem dentro de una u otra dimensión. Es común encontrar ítems que tienen elementos de varias de ellas, de hecho lo contrario es la excepción. A pesar de ello es estrictamente necesario definir, con la mayor claridad posible, criterios que permitan clasificar los ítems. En la tabla 1 se recogen de manera general los criterios que orientarán la clasificación, según las definiciones de las dimensiones del Razonamiento Matemático propuestas.

Implícitamente esta clasificación presupone una simplificación de los constructos a elementos concretos y más básicos. Por ejemplo, hacer operativa la medición de uno u otro constructo. También son inevitables las agrupaciones comunes de ítems a factores y posibles dependencias, a nivel teórico, entre los constructos. Esto no atenta para nada con las ideas y objetivos de esta investigación en la cual las fronteras entre los constructos no parecieran exactamente definidas.

Tabla 1. Criterios acomodo técnico de los factores

Factor	Descripción
Factor 1. Memoria de Trabajo	Recoge aquellas preguntas en las que se debe tener un control adecuado en el flujo y uso de información granular. Captar información, toma de decisiones con base en algún análisis u objetivo. Estas decisiones no tienen estrictamente un carácter inferencial sino más bien analítico operativo, elegir una entre varias opciones para satisfacer una meta, proceso o ambos. De alguna manera se debe valorar el efecto de las decisiones o analizarlas para ver cuál es la adecuada. Se identifican piezas de información que pueden ser claves en la resolución del problema. En resumen, la habilidad trata de reconocer y operar elementos de información de carácter granular que se dan en forma explícita o implícita y se usan para alcanzar una meta. Estos elementos pueden ser informativos, evaluativos o de proceso
Factor 2. Razonamiento Deductivo	Se imponen elementos de tipo inferencial para obtener conclusiones. Se pueden hacer conclusiones o implicaciones a partir de una hipótesis. Se restringe a casos donde la hipótesis es clara o bastante simple. Por ejemplo comprender y aplicar una regla, reconocer una hipótesis directa o sencilla de obtener y usarla para hacer una conclusión. Esta reducción es drástica respecto a lo elaborado que se hace el concepto en general.
Factor 3. Razonamiento Inductivo	Si se quiere, de alguna forma, un elemento unificador del razonamiento. Análisis de una situación para descubrir datos o hipótesis pertinentes a la solución de un problema. Esto incluye la habilidad de formular estas hipótesis. Encierra cuestionamientos del tipo: qué información puedo o debo obtener para resolver un problema, qué conclusiones intermedias me permite la información disponible. Ver un patrón e inducir una regla es una de las formas habituales de plantear el constructo. De esta manera se reconoce como problema inductivo general aquel cuya solución implica descubrir posibles hipótesis y reconocer entre varias hipótesis las que son pertinentes a la resolución de un problema y realizar los encadenamientos deductivos pertinentes.
Factor 4 Razonamiento espacial	Razonamiento relacionado fuertemente con el manejo de elementos visuales. Las conclusiones y los análisis se basan en los elementos visuales tales como rotaciones, reflexiones, o descubrimiento de hipótesis o relaciones que dependen de objetos espaciales

3.3.2 Análisis de la prueba Canguro Matemático de 2011

La prueba de Canguro Matemático en el año 2011 –ver apéndice I- se llevó a cabo en Costa Rica con 214 estudiantes de 11 y 12 años. El análisis de esta prueba permitirá poder dilucidar qué ítems se pueden seleccionar para componer la prueba de Razonamiento Matemático. De esta prueba sólo se consideraron para el análisis los primeros 20 ítems, por estimarse que son los más accesibles a estudiantes sin entrenamiento. El proceso por seguir es, como se apuntó anteriormente, un análisis de los ítems, considerando la dificultad de los ítems y la discriminación de los mismos.

Seguidamente se realiza un análisis de la fiabilidad mediante el índice α de Cronbach, siempre teniendo en cuenta que este índice suele tender a infravalorar la fiabilidad (Revelle y Zinbarg, 2009), y más en pruebas de rendimiento.

Finalmente, una vez desarrollada esta etapa, se hace un análisis factorial exploratorio a partir del cual se identifican grupos o conglomerados de ítems que permitan identificar factores y asociarlos con las dimensiones teóricas propuestas.

a) Análisis de los ítems y fiabilidad

La prueba tiene un nivel de dificultad alto como se refleja en la tabla 3. Solamente 5 ítems tienen promedios por encima del 50%. Acorde con los resultados obtenidos en el análisis, específicamente los mostrados en la tabla 3, la eliminación de algunos de los ítems se justificaría porque tienen coeficientes de discriminación negativos, específicamente los ítems 9, 14, 18,19 y 20. No obstante, dado el carácter exploratorio de esta fase se determina no eliminarlos.

El α de Cronbach de la prueba entera es de 0,44. Este índice es esperable, pues dadas las características de la prueba no es de esperar una fiabilidad muy alta. Si se considera la eliminación de los ítems, en general no presenta una mejora del índice, así como si se tienen en cuenta los ítems con discriminación negativa tampoco supone una incremento de la consistencia interna razonable.

Tabla 2. Medias y Varianzas

Pregunta	Media	Varianza	Desviación Estándar	Correlación elemento corregida	Alfa de Cronbach si se elimina elemento
1	0,73	0,20	0,45	0,18	0,42
2	0,81	0,15	0,39	0,11	0,44
3	0,16	0,13	0,37	0,15	0,43
4	0,59	0,24	0,49	0,25	0,40
5	0,26	0,19	0,44	0,25	0,40
6	0,60	0,24	0,49	0,13	0,43
7	0,41	0,24	0,49	0,29	0,39
8	0,30	0,21	0,46	0,09	0,44
9	0,16	0,14	0,37	-0,06	0,47
10	0,23	0,18	0,42	0,22	0,41
11	0,29	0,21	0,46	0,13	0,43
12	0,19	0,15	0,39	0,10	0,44
13	0,47	0,25	0,50	0,21	0,41
14	0,17	0,14	0,38	-0,02	0,46
15	0,24	0,18	0,43	0,10	0,44
16	0,19	0,15	0,39	0,27	0,40
17	0,28	0,20	0,45	0,13	0,43
18	0,10	0,09	0,30	0,00	0,45
19	0,10	0,09	0,30	-0,08	0,46
20	0,07	0,07	0,26	-0,05	0,46

b) Análisis factorial exploratorio

El análisis factorial se realiza sobre los 20 ítems con el método de componentes principales. La medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin es de 0,551 y la prueba de esfericidad de Bartlett ofrece una probabilidad de 0,000. Dado el propósito exploratorio del mismo en esta fase se determina la utilidad del mismo para la agrupación de los ítems en factores.

Este análisis preliminar muestra que no es posible la unidimensionalidad del constructo, lo cual es ciertamente esperable, en tanto la fundamentación teórica antecedente apunta hacia diversas habilidades específicas que determinan el constructo y no necesariamente una. En concreto, según se muestra en la tabla 4 se han encontrado 8 factores, con una varianza explicada del 55,711%.

Tabla 3. Varianza total explicada 2011

	Autovalores Iniciales			Suma de las saturaciones Extracción		
Componente	Total	% de varianza	% acum	Total	% varianza	% acum
1	2,077	10,387	10,387	2,077	10,387	10,387
2	1,581	7,903	18,29	1,581	7,903	18,29
3	1,446	7,232	25,522	1,446	7,232	25,522
4	1,383	6,917	32,439	1,383	6,917	32,439
5	1,285	6,426	38,865	1,285	6,426	38,865
6	1,187	5,936	44,801	1,187	5,936	44,801
7	1,124	5,62	50,421	1,124	5,62	50,421
8	1,058	5,29	55,711	1,058	5,29	55,711
9	0,970	4,852	60,563			
10	0,922	4,608	65,171			
11	0,901	4,507	69,678			
12	0,851	4,256	73,934			
13	0,794	3,97	77,904			
14	0,756	3,782	81,686			
15	0,720	3,602	85,288			
16	0,682	3,411	88,699			
17	0,610	3,048	91,747			
18	0,601	3,003	94,75			
19	0,552	2,758	97,508			
20	0,498	2,492	100			

Finalmente, para analizar la posibilidad de una mejor definición de los factores se realiza un análisis factorial reducido a 4 factores y con rotación Varimax, que representa una explicación de la varianza del 32,439%, los resultados se muestran en la tabla 5.

Los cuatro factores y sus correspondientes ítems son los siguientes:

- Factor 1. Memoria de Trabajo, que agrupa a los ítems 4, 5, 7, 11, 16 y 17.

- Factor 2. Razonamiento Inductivo, que agrupa a los ítems 1, 13, 19 y 20.

- Factor 3. Razonamiento Deductivo, que agrupa a los ítems 2, 9, 14 y 15.

- Factor 4. Razonamiento Espacial, que agrupa a los ítems 3, 6, 8, 10, 12 y 18.

Tabla 4. Matriz de Componentes forzada a 4 factores 2011 y rotada

Pregunta	1	2	3	4
1	,109	**,482**	,075	-,138
2	,115	*,372*	**,474**	-,139
3	,095	*,361*	-,214	**,393**
4	**,483**	,015	,333	-,082
5	**,379**	,332	,110	-,022
6	*,394*	,199	,004	**-,515**
7	*,567*	-,026	,166	,166
8	,092	,185	**-,358**	**,441**
9	-,046	-,061	**-,360**	-,025
10	,252	,102	,108	**,585**
11	**,479**	-,022	-,212	,048
12	,186	-,026	,132	**,441**
13	,066	**,675**	,075	,110
14	-,106	-,092	**,544**	,140
15	-,029	,134	**,534**	,027
16	**,622**	-,074	-,110	,187
17	**,322**	,037	-,059	,013
18	,138	,164	**-,328**	**-,379**
19	,210	**-,406**	-,165	-,129
20	-,304	**,460**	-,232	-,015

El acomodo de los factores que indica en la tabla 5 es un referente valioso. No obstante hay elementos que se deben tener en cuenta, como el tamaño de la muestra no es necesariamente grande y el contraerlo a cuatro factores implica una agrupación más forzada. Estos son sin duda aspectos que se deben considerar. A pesar de ello sí es un elemento útil a efectos de agrupar los ítems previo a definir la prueba final. También pareciera evidente que la complejidad del constructo no facilita una factorización muy clara. Algunas preguntas son más conflictivas porque tienen cargas similares en varios factores lo que es natural dada la diversidad de elementos conceptuales que se involucran en la solución de algunos problemas.

3.2.2 Análisis de la prueba Canguro Matemático de 2012

La prueba de Canguro Matemático en el año 2012 –ver apéndice II- se llevó a cabo en Costa Rica con 262 estudiantes de 11 y 12 años. Al igual que en el caso anterior sobre esta prueba sólo se va a considerar para análisis los primeros 20 ítems, que son los que se estiman más accesibles a estudiantes sin entrenamiento. El proceso a seguir es el mismo –análisis de los ítems, análisis de fiabilidad y análisis factorial exploratorio- por lo que sólo se presentarán las discusiones pertinentes.

a) Análisis de los ítems y fiabilidad

La prueba tiene un nivel de dificultad alto y preguntas con niveles de dificultad elevados, como se refleja en la tabla 8. Únicamente se producen 4 ítems con promedios por encima del 50%. En cuanto al índice de discriminación, la prueba no presenta ningún ítem como negativo.

El α de Cronbach de la prueba entera es de 0,63, con poca mejora en el mismo si se produce la eliminación de los ítems como se contrasta en la tabla.

Tabla 5. Medias y Varianzas Población 2012

Pregunta	Media	Varianza	Desviación Estándar	Correlación elemento corregida	Alfa de Cronbach si se elimina elemento
1	0,60	0,24	0,49	0,22	0,62
2	0,68	0,22	0,47	0,31	0,61
3	0,35	0,23	0,48	0,23	0,62
4	0,50	0,25	0,50	0,40	0,59
5	0,34	0,23	0,48	0,17	0,63
6	0,23	0,18	0,42	0,22	0,62
7	0,45	0,25	0,50	0,26	0,61
8	0,24	0,19	0,43	0,11	0,63
9	0,24	0,19	0,43	0,26	0,61
10	0,28	0,20	0,45	0,30	0,61
11	0,66	0,23	0,47	0,21	0,62
12	0,03	0,03	0,18	0,14	0,63
13	0,29	0,21	0,46	0,25	0,62
14	0,47	0,25	0,50	0,33	0,60
15	0,18	0,15	0,38	0,23	0,62
16	0,08	0,08	0,28	0,16	0,63
17	0,15	0,12	0,35	0,08	0,63
18	0,09	0,08	0,28	0,05	0,63
19	0,46	0,25	0,50	0,27	0,61
20	0,12	0,11	0,32	0,13	0,63

b) Análisis factorial exploratorio.

El análisis factorial se realiza sobre los 20 ítems con el método de componentes principales. La medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin es de 0,645 y la prueba de esfericidad de Bartlett muestra una probabilidad de 0,000, que sustentan la conveniencia de usar un modelo factorial en el análisis exploratorio de estos datos.

Se sigue el plan de actuación similar al del caso 2011. En primer lugar, el número de factores extraídos es de 8, con una varianza explicada del 55,06%. Posteriormente, se ha realizado una factorización forzada a 4 factores con rotación Varimax, que explican el 33,001% de la varianza.

Tabla 6. Varianza total explicada 2012

	Autovalores iniciales			Suma de las saturaciones Extracción		
Componente	Total	% varianza	% acumul.	Total	% varianza	% acum.
1	2,61	13,048	13,048	2,61	13,048	13,048
2	1,48	7,4	20,448	1,48	7,400	20,448
3	1,303	6,517	26,965	1,303	6,517	26,965
4	1,209	6,044	33,009	1,209	6,044	33,009
5	1,186	5,931	38,940	1,186	5,931	38,940
6	1,115	5,576	44,516	1,115	5,576	44,516
7	1,070	5,350	49,866	1,070	5,350	49,866
8	1,038	5,189	55,055	1,038	5,189	55,055
9	0,993	4,963	60,018			
10	0,905	4,525	64,543			
11	0,871	4,353	68,897			
12	0,835	4,175	73,072			
13	0,804	4,018	77,089			
14	0,783	3,915	81,005			
15	0,751	3,757	84,762			
16	0,736	3,681	88,443			
17	0,701	3,506	91,949			
18	0,599	2,994	94,943			
19	0,535	2,677	97,62			
20	0,476	2,38	100			

Los cuatro factores y sus correspondientes ítems son los siguientes:

- Factor 1. Memoria de Trabajo, que agrupa a los ítems 1, 2, 4, 9, 12 y 19.

- Factor 2. Razonamiento Inductivo, que agrupa a los ítems 5, 6, 13, 15, 16 y 18.

- Factor 3. Razonamiento Espacial, que agrupa a los ítems 3, 7, 10, 11 y 14.

- Factor 4. Razonamiento Deductivo, que agrupa a los ítems 8, 17 y 20.

Tabla 7. Matriz de Componentes forzada a 4 factores y rotada 2012

Pregunta	1	2	3	4
1	**0,489**	0,133	-0,005	-0,303
2	**0,56**	0,174	-0,149	0,291
3	0,008	**0,41**	0,23	0,157
4	**0,695**	0,192	-0,083	0,117
5	0,267	-0,008	**0,306**	-0,218
6	0,057	0,037	**0,643**	0,104
7	0,121	**0,656**	-0,038	-0,045
8	-0,035	0,134	0,195	**0,232**
9	**0,483**	-0,04	0,116	0,143
10	0,165	**0,553**	-0,019	0,366
11	0,096	**0,486**	0,063	-0,104
12	**0,428**	-0,348	0,319	-0,149
13	0,268	0,162	**0,272**	-0,093
14	0,269	**0,44**	0,255	-0,182
15	0,014	0,085	**0,656**	0,147
16	0,018	0,087	**0,496**	-0,086
17	0,074	-0,091	0,051	**0,599**
18	0,027	-0,179	**0,24**	0,146
19	**0,454**	0,119	0,123	0,061
20	0,115	0,019	0,005	**0,623**

Matriz Rotada Varimax-Kaiser

Las preguntas que conforman el factor 1, con la posible excepción de la 19, se califican de manera definida como Memoria de Trabajo, pues responden a análisis simples, pero en este casi no triviales, discriminación y sacar cuentas. La pregunta 9 es una pregunta bastante técnica para estudiantes que se hayan entrenado. El factor 3 recoge una serie de preguntas en las cuáles hay un proceso de Razonamiento inductivo muy claro, se presenta una situación interesante con la pregunta 11, que es un razonamiento mas espacial. El resto todas requieren de habilidades relacionadas con descubrir alguna o algunas hipótesis relevantes para concluir. El factor 3 agrupa ítems que requieren una componente espacial fuerte. Se salen de la regla dos preguntas una de ellas completamente inductiva, la 14 y la otra es es el ítem 5, que de alguna manera asocia con manejo de información temporal y se asocia con el factor espacial. Finalmente el factor 4 recoge ítems que parecieran unirse mas por un factor de dificultad que por una asociación de otra naturaleza, es probable que requieran de un mayor análisis pero esta fuera de los alcances de esta exploración preliminar.

3.3.4 Análisis de la prueba Canguro Matemático de 2013

La prueba de Canguro Matemático en el año 2013 –ver apéndice II- se llevó a cabo en Costa Rica con 163 estudiantes de 11 años 112 estudiantes de 12 años. Además, este año 2013 presenta una particularidad y es que es el primer año en que se hace una distinción entre estudiantes de 11 y de 12 años; la prueba coincide únicamente en los primeros 14 ítems. Sin embargo, ofrece una oportunidad interesante de confrontar las medias en los desempeños entre ambas edades. Los resultados de las medias y varianzas se muestran en la Tabla 9. Evidencia que en general los estudiantes de mayor edad tienen mejores promedios que los de menor edad. Para los análisis se usará la población de más edad. En corta sección sólo se analizan los aspectos relevantes a la selección de la prueba. Igual que antes, el proceso es el análisis de los ítems, el análisis de fiabilidad y el análisis factorial exploratorio.

Tabla 8. Medias y Varianzas Poblaciones 2013

	5to grado			6to grado		
Pregunta	Media	Varianza	Desviación Estándar	Media	Varianza	Desviación Estándar
1	0,94	0,05	0,23	0,91	0,08	0,29
2	0,49	0,25	0,50	0,61	0,24	0,49
3	0,45	0,25	0,50	0,48	0,25	0,50
4	0,36	0,23	0,48	0,43	0,24	0,50
5	0,37	0,23	0,48	0,39	0,24	0,49
6	0,33	0,22	0,47	0,63	0,23	0,49
7	0,47	0,25	0,50	0,55	0,25	0,50
8	0,06	0,06	0,24	0,11	0,10	0,31
9	0,23	0,18	0,42	0,30	0,21	0,46
10	0,58	0,24	0,49	0,63	0,23	0,48
11	0,23	0,18	0,42	0,28	0,20	0,45
12	0,17	0,14	0,37	0,25	0,19	0,43
13	0,48	0,25	0,50	0,45	0,25	0,50
14	0,22	0,17	0,42	0,11	0,10	0,31

a) Análisis de los ítems y fiabilidad

La prueba tiene un nivel de dificultad alto y preguntas con niveles de dificultad elevados, como se refleja en la tabla 10. Únicamente se producen 5 ítems con promedios por encima del 50%. En cuanto al índice de discriminación, la prueba sólo presenta el ítem 14 como negativo.

El α de Cronbach de la prueba entera es de 0,58, con poca mejora si se produce la eliminación de los ítems.

Tabla 9. Medias y Varianzas Población 2013

Pregunta	Media	Varianza	Desviación Estándar	Correlación elemento corregida	Alfa de Cronbach si se elimina elemento
1	0,91	0,08	0,29	0,12	0,57
2	0,61	0,24	0,49	0,15	0,57
3	0,48	0,25	0,50	0,33	0,54
4	0,43	0,24	0,50	0,13	0,57
5	0,39	0,24	0,49	0,40	0,53
6	0,63	0,23	0,49	0,33	0,54
7	0,55	0,25	0,50	0,18	0,56
8	0,11	0,10	0,31	0,10	0,57
9	0,30	0,21	0,46	0,20	0,56
10	0,63	0,23	0,48	0,12	0,57
11	0,28	0,20	0,45	0,33	0,54
12	0,25	0,19	0,43	0,10	0,58
13	0,45	0,25	0,50	0,07	0,58
14	0,11	0,10	0,31	-0,02	0,59
15	0,16	0,13	0,37	0,12	0,57
16	0,20	0,16	0,40	0,35	0,54
17	0,37	0,23	0,48	0,26	0,55
18	0,07	0,07	0,26	0,11	0,57
19	0,33	0,22	0,47	0,23	0,56
20	0,12	0,10	0,32	0,08	0,58

b) Análisis factorial exploratorio.

El análisis factorial se realiza sobre los 20 ítems con el método de componentes principales. La medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin es de 0,522 y la prueba de esfericidad de Bartlett ofrece una probabilidad de 0,000, lo que permite el empleo del análisis factorial con propósitos exploratorios.

Se sigue el plan de actuación similar al del caso 2011 y 2012. En primer lugar, el número de factores extraídos es de 9 como se muestra en la tabla 11, con una varianza explicada del 66,09%. Posteriormente, se ha realizado una factorización forzada a 4 factores con rotación Varimax, que explican el 36,286% de la varianza, los resultados se muestran en la tabla 12.

Los cuatro factores y sus correspondientes ítems son los siguientes:

- Factor 1. Memoria de trabajo, que agrupa a los ítems 1, 4, 5 y 16.

- Factor 2. Razonamiento inductivo, que agrupa a los ítems 7, 11, 14, 19 y 20.

- Factor 3. Razonamiento deductivo, que agrupa a los ítems 3, 6, 8, 9 y 18.

- Factor 4. Razonamiento espacial, que agrupa a los ítems 2, 10, 12, 13 y 17.

Tabla 10. Varianza total explicada 2013

	Autovalores iniciales			Suma de las saturaciones extracción		
Componente	Total	% varianza	% acumul.	Total	% varianza	% acum.
1	2,540	12,701	12,701	2,540	12,701	12,701
2	1,727	8,637	21,338	1,727	8,637	21,338
3	1,557	7,786	29,124	1,557	7,786	29,124
4	1,433	7,165	36,289	1,433	7,165	36,289
5	1,396	6,979	43,268	1,396	6,979	43,268
6	1,331	6,657	49,925	1,331	6,657	49,925
7	1,162	5,808	55,733	1,162	5,808	55,733
8	1,065	5,324	61,057	1,065	5,324	61,057
9	1,007	5,033	66,090	1,007	5,033	66,090
10	0,936	4,682	70,772			
11	0,847	4,235	75,007			
12	0,775	3,875	78,882			
13	0,765	3,824	82,706			
14	0,725	3,624	86,330			
15	0,617	3,084	89,414			
16	0,505	2,524	91,938			
17	0,493	2,464	94,402			
18	0,437	2,186	96,588			
19	0,383	1,916	98,504			
20	0,299	1,496	100,000			

Tabla 11. Matriz de Componentes forzada a 4 factores 2013

Pregunta	1	2	3	4
1	**0,558**	*-0,434*	-0,017	-0,039
2	0,215	-0,112	-0,023	**0,442**
3	0,275	0,122	**0,490**	0,099
4	**0,398**	0,033	-0,064	-0,1
5	**0,722**	0,258	0,085	-0,048
6	*0,353*	0,007	**0,457**	0,158
7	0,071	**0,442**	0,114	0,012
8	-0,006	0,059	**0,492**	-0,287
9	0,029	0,133	**0,481**	0,158
10	*0,377*	-0,054	0,152	**-0,386**
11	*0,403*	**0,596**	-0,034	0,064
12	-0,140	0,240	-0,032	**0,641**
13	-0,086	-0,125	0,204	**0,491**
14	0,094	**-0,417**	0,071	0,106
15	-0,138	-0,109	**0,477**	0,205
16	**0,679**	0,011	0,020	0,227
17	*0,354*	-0,001	0,115	**0,453**
18	-0,097	0,020	**0,614**	-0,163
19	0,123	**0,764**	0,121	-0,078
20	-0,094	**0,346**	0,060	0,242

Matriz Rotada Varimax-Kaiser

3.4 Selección de Ítems por constructo para la prueba de Razonamiento Matemático

En esta etapa se trata de diseñar la prueba final de Razonamiento Matemático, seleccionando adecuadamente los ítems que la formarán. Se considera que la prueba ha de estar compuesta por un total de 20 preguntas. Se estima un tiempo promedio de 3 minutos por pregunta para ser respondido, apreciando que es adecuado para una prueba de esta naturaleza puesto que se aplicará en una sola sesión. Esta decisión responde a diversas razones, como el hecho de que la prueba se realizara con estudiantes escolares y una sesión normal toma 70 minutos, dos lecciones. Por lo tanto, es un periodo razonable para el maestro que cederá sus estudiantes y para que los estudiantes mantengan la concentración.

La estructura de la prueba estará compuesta por cinco ítems en cada una de las cuatro dimensiones establecidas: Memoria de Trabajo, Razonamiento Inductivo, Razonamiento Deductivo y Razonamiento Espacial. Las preguntas son seleccionadas usando como criterio la valoración del experto apoyada en la información que proviene de los análisis factoriales exploratorios anteriormente realizados. Se reitera que esta decisión se fundamenta en la posible fragilidad de un juicio basado exclusivamente en los resultados producidos por el análisis factorial exploratorio.

Por consiguiente, las decisiones e interpretaciones realizadas en las secciones anteriores constituyen el insumo central para delinear la prueba que se desarrollará. Los análisis factoriales exploratorios en si no están llamados a convertirse en los indicadores absolutos sobre la definición de los indicadores de cada dimensión. No obstante, son un elemento que aporta información en la toma de decisiones que termina por ser responsabilidad de quien plantee la teoría tanto a nivel de modelos como de instrumentos. Estos análisis factoriales exploratorios ofrecen información sobre eventuales asociaciones entre ítems en ciertos constructos si bien existen aspectos que es fundamental resaltar.

En primer lugar, los análisis factoriales exploratorios realizados en si brindan información importante, pero al corresponder a distintas muestras de sujetos y distintos exámenes la interpretación que ofrecen debe valorarse cuidadosamente. Esta es una razón para preferir que la configuración de la prueba se guíe más por el juicio del experto, usando como criterio técnico de apoyo lo que brindan estos análisis factoriales. Se trata de un proceso combinado de análisis empírico con análisis lógico, a partir de la reflexión del experto.

En segundo lugar, los análisis factoriales exploratorios forzados a cuatro factores agregan elementos de tensión en la estructura. Este efecto, unido a que ciertos ítems tienen elementos fuertes de distintos constructos, hace necesario un análisis de los elementos cognitivos del ítem previo a su clasificación.

A continuación se establecen las justificaciones acerca de la construcción de la prueba, con los comentarios adecuados que respaldan la elección de los ítems finales en cada una de las dimensiones del Razonamiento Matemático. De este modo, en la tabla 12 se recogen las distintas agrupaciones factoriales encontradas en las tres ediciones de la Prueba Canguro Matemático. A partir de ellas se hace una inspección preliminar para definir las cinco preguntas de cada una de las dimensiones. Por ello, en primer lugar se presenta el análisis lógico de cada uno de los ítems en las tres ediciones de la prueba Canguro Matemático de cada dimensión a partir del análisis factorial, para finalmente determinar los cinco ítems que corresponde a cada dimensión en la prueba final.

Tabla 12. Descripción de Factores y correspondientes ítems en las tres ediciones de la prueba Canguro Matemático

	Memoria de Trabajo	Razonamiento Espacial	Razonamiento Inductivo	Razonamiento Deductivo
2011	4, 5, 7, 11, 16, 17	3, 6, 8, 10, 12, 18	1, 13, 19, 20	2, 9, 14, 15
2012	1, 2, 4, 9, 12, 19	5, 6, 13, 15, 16 18	3, 7, 10, 11, 14	8, 17, 20
2013	1, 4, 5, 16	2, 10, 12, 13, 17	7, 11, 14, 19, 20	3, 6, 8, 9, 18

3.4.1 Dimensión Memoria de Trabajo

a) Análisis lógico de las ediciones en la dimensión Memoria de trabajo

Edición 2011. Para el año 2011 en la habilidad general memoria de trabajo se recogen las preguntas 4, 5, 7, 11, 16 y 17.

- La pregunta 4, dificultad general 0,5935, índice de discriminación específico 0,246. Es una pregunta de conteo elemental que implica hacer una proyección del impacto de decisiones o bien la exploración orientada por metas. Sí está bien ubicada
- Pregunta 5, dificultad general 0,2617, índice de discriminación específico 0,250. Organización de información y cuentas con restricciones. Tiene una restricción interesante. Recoge bien los elementos que clasifican al constructo.
- Pregunta 7, dificultad general 0,4065, índice de discriminación específico 0,290. Organización de información, manejo de fracciones, presenta elementos de interpretación visual muy básicos. Se resuelve correctamente con sólo captar la información y una relación muy simple.
- Pregunta 11, índice de dificultad general 0,2944, índice de discriminación específico 0,133. Discriminar con base en información. El proceso de

solución es algo elaborado. Apunta hacia una asociación dividida entre varios factores.

- Pregunta 16, índice dificultad general 0,1916, índice de discriminación específico 0,270. Conteo sistemático, análisis de información no presente. Específicamente identificar el efecto de un error y corregirlo. Esta es una pregunta que se clasifica de manera inadecuada en el constructo. Es más del tipo deductivo.
- Pregunta 17, índice de dificultad general 0,2757, índice de discriminación específico 0,127. Análisis de información. Es un problema que favorece el conjeturar y luego verificar.

Edición 2012. Para el año 2012, se aplica un análisis similar, los ítems que agrupan son 1, 2, 4, 9, 12 y 19. No obstante, y al igual que en el caso anterior, algunas de estas preguntas deben ser valoradas ya sea por presentar asociaciones inapropiadas al constructo o porque tienden a agruparse en varios factores.

- Pregunta 1, índice de dificultad general 0.5954, índice de discriminación específico 0,218. Es un problema bien clasificado. Conteo y clasificar a niveles elementales.
- Pregunta 2, dificultad genera: 0,6756, índice de discriminación específico 0.306. Es una pregunta simple y por sus características muy bien definida en el factor.
- Pregunta 4, índice de dificultad general 0,5038, índice de discriminación específico 0,400. Es básicamente un problema de contar, teniendo en cuenta alguna información que restringe el conteo, muy bien ubicada en el factor.
- Pregunta 9, índice de dificultad general 0,2443, índice de discriminación específico 0,255. Es una pregunta muy adecuada para estudiantes entrenados.
- Pregunta 12, índice de dificultad general 0,344, índice de discriminación específico 0,142. reconoce una condición y la aplica, califica bien en el factor.

- Pregunta 19, índice de dificultad general 0,4618, índice de discriminación específico 0,270. Manejo de información visual, comparación y análisis topológico elemental. Es una pregunta que incorpora muchos elementos y su clasificación Razonamiento Espacial es mas natural pero podría entrar en el Razonamiento Inductivo también.

Edición 2013. Se consideran dentro de la habilidad las preguntas 1, 4, 5, y 16.

- La pregunta 1, índice de dificultad general 0,9107, índice de discriminación específico 0,117. Pregunta elemental sólo hay que organizar datos con base en una meta.
- La pregunta 4, índice de dificultad general 0,4286, índice de discriminación específico 0,131. Exploración y toma de decisiones.
- La pregunta 5, dificultad general 0,3929, índice de discriminación específico 0,404. Control de cambio simultáneo en dos variables. Muy asociada con Memoria de Trabajo.
- La pregunta 16, índice de dificultad general 0,1964, índice de discriminación específico 0,352. Entender la situación como primer paso y luego un análisis visual. Esta pregunta se agrupa en Memoria de Trabajo pero corresponde más a Razonamiento Espacial.

b) Elección de ítems que conforman la dimensión de Memoria de Trabajo

Para conformar la prueba se eligen cinco preguntas usando como referencia esta organización factorial y criterios sobre diferentes elementos al organizar la información. Un ítem se toma de otro factor atendiendo razones técnicas.

- Pregunta número 4 del 2011. Bastante sencilla y muy representativa, presentó un nivel de dificultad apropiado, 0,5953 y una carga factorial en la Memoria de Trabajo satisfactoria de 0,483. Implica entender una situación y hacer una exploración guiada por una meta. Tiene muy poca dependencia de conocimientos.
- Pregunta número 5 del 2013. Pregunta que depende de una atención muy importante a relaciones entre variables. En sencillo perderse si no se tiene un manejo adecuado de la información. Se vinculó en Memoria de Trabajo con una carga factorial de 0,722.

- Pregunta 4 del 2012. Se elige porque aporta un condicional importante al momento de resolverla. Se debe considerar una excepción en cierta regla para resolver el problema. Se vinculó en Memoria de Trabajo con una carga factorial de 0,695.
- Se incorpora la pregunta 2 del 2012, que en el análisis vincula con el factor Memoria de Trabajo con una carga de 0,560. El proceso detrás de la solución de la pregunta se reduce a descubrir una pieza de información y usarla en la respuesta.
- Pregunta 19 del 2013. Información muy plana es resuelta, probablemente, analizando casos. A pesar de no haber vinculado en Memoria de Trabajo se estima pertinente la recalificación porque la pregunta es ante todo una búsqueda mediante exploración guiada por una meta y eso se ha establecido en el modelo como Memoria de Trabajo.

3.4.2 Dimensión Razonamiento Espacial

a) Análisis lógico de las ediciones en la dimensión Razonamiento Espacial

Edición 2011. Son varios los ítems entran en este factor en esta prueba 2011.

- Pregunta 3, índice de dificultad general 0,1589, índice de discriminación específico 0,154. Análisis de casos particulares para obtener una conclusión. Requiere una habilidad exploratoria muy abierta, con algo de lateralidad.
- Pregunta 6, índice de dificultad general 0,5936, índice de discriminación específico 0,333. Requiere de una visualización espacial adecuada para determinar la forma que completa la figura. Manejo de rotaciones y reflexiones.
- Pregunta 8, índice de dificultad general 0,2991, coeficiente de discriminación específico 0,085. No es realmente una pregunta fuerte en Razonamiento Inductivo. Sacar cuentas pero es fácil confundirse.
- Pregunta 10, índice de dificultad general 0,2290, índice de discriminación específico 0,216. Organización de información y fracciones elementales. Esta pregunta es mucho más del Razonamiento Inductivo.

- Pregunta 12, índice de dificultad general 0,1869, índice de discriminación específico 0,103. Propiedades de los números, representación. Ligeramente sesgado hacia inteligencia cristalizada.
- Pregunta 18, índice de dificultad general 0,0981, coeficiente de discriminación específico -0,002. Es una pregunta difícil que requiere un pensamiento quizá no bien desarrollado a estas edades. Es fácil encontrar un punto solución lo cual puede ser un distractor para el estudiante, el punto es que tiene tres casos idénticos pero es complicado verlos.

Edición 2012. Muchos ítems de esta prueba entran en este factor: 5,6,13,15,16 y 18

- Pregunta 5, índice de dificultad general 0,167, índice de discriminación específico 0,149. Una pregunta más de análisis temporal que espacial lo cual es interesante, es compleja.
- Pregunta 6, índice de dificultad general 0,6250, índice de discriminación específico 0,333. Exploración. Es fácil identificar la asociación.
- Pregunta 13, índice de dificultad general 0,3939, índice de discriminación específico 0,272. Califica en este factor, pero es también cercana a la Memoria de Trabajo.
- Pregunta 15, índice de dificultad general 0,1794, índice de discriminación específico 0,234. Esta bien ubicada en el factor espacial, evoca algunos conceptos cristalizados como área y perímetro y también algunas deducciones, es una pregunta con una dificultad alta que integra varios elementos.
- Pregunta 16, índice de dificultad general 0,0840, índice de discriminación específico 0,162. Requiere un uso elaborado de elementos de visualización espacial pero más que eso de una comparación sistemática y paso a paso de las figuras lo que la hace mas del Razonamiento Inductivo que del Razonamiento Espacial.
- Pregunta 18, índice de dificultad general 0,0878, índice de discriminación específico 0,053. Presenta en efecto un razonamiento que requiere de mucha ubicación espacio tiempo. Es probable que descubra el esquema pero tiene detalles que pueden afectar la respuesta.

Edición 2013. Los ítems entran en este factor son

- La pregunta 2, índice de dificultad general 0,6071, índice de discriminación específico 0,149. Visualizar y contar para ver las piezas que faltan. Muy claro Razonamiento Espacial.
- La pregunta 10, índice de dificultad general 0,6339, índice de discriminación específico 0,121. Similar al caso de la pregunta 2.
- Pregunta 12, índice de dificultad general 0,2500, coeficiente de discriminación específico 0,102. Requiere de una visualización espacial adecuada para comparar perímetros. Manejo de asociaciones visuales.
- Pregunta 13, índice de dificultad general 0,4464, índice de discriminación específico 0,071. Es una pregunta que califica pobremente en Razonamiento Espacial. No es un buen indicador.
- Pregunta 17, índice de dificultad general 0,3661, índice de discriminación específico 0,261. Es una pregunta que califica muy adecuadamente como indicador del constructo.

b) Elección de ítems que conforman la dimensión de Razonamiento Espacial

Se eligen para la prueba igual 5 ítems según se detalla. Nuevamente la regla es un equilibrio entre distintas habilidades específicas. Se incorporan dos preguntas de otros constructos por razones de equilibrio en la prueba.

- Pregunta 6 del 2012. Muy sencilla, incorpora hacer un trazo mental o concreto para descubrir el objeto geométrico que obtiene. Es interesante porque se puede hacer trazando directamente o bien imaginando la maya que se obtiene. Su carga factorial al Razonamiento Espacial fue de 0,643
- Pregunta 12 del 2013. Completamente visual, se analiza y compara. Su carga factorial a Razonamiento Espacial fue de 0,742.
- Pregunta 15 del 2012. Lleva elementos visuales basados en conceptos como perímetro y área. Tiene un importante elemento de análisis que obliga a reconocer una cierta jerarquía de pasos en la solución. Se vinculó en Razonamiento Espacial y tuvo una carga factorial de 0,656.
- Pregunta 11 del 2013. Esta pregunta no vinculó en Razonamiento Espacial, sin embargo, su solución se basa en explorar y tener la habilidad

de incluir como posible opción la rotación. Esta particularidad fue un aspecto para incluirla.

- Pregunta 16 del 2013. Al igual que en el caso anterior la pregunta implica un tipo de pensamiento espacial distinto. Recurre a la posibilidad de abstraer una representación por un lado y usar elementos posicionales como referentes. Se eligen estas preguntas, básicamente, porque incluyen un tipo de razonamiento espacial no presente en la otras tres incluidas previamente.

3.4.3 Dimensión Razonamiento Inductivo

a) Análisis lógico de las ediciones en la dimensión Razonamiento Inductivo

Edición 2011. Cuatro ítems entran en este factor en esta prueba

- Pregunta 1, índice de dificultad general 0,729, índice de discriminación específico 0,181. Hay que hacer cuentas pero hay un comportamiento cíclico básico. La clasificación del problema es inadecuada.
- Pregunta 13, índice de dificultad general 0,4673, índice de discriminación específico 0,207. Análisis de casos lleva a la respuesta, basta con ver los resultados de las unidades.
- Pregunta 19, índice de dificultad general 0,0981, índice de discriminación específico - 0,079. Este es un problema muy deductivo que resulta bastante complejo para los estudiantes.
- Pregunta 20, índice de dificultad general 0,0748, coeficiente de discriminación específico -0,047. Es una pregunta muy inductiva porque realiza un análisis simple para luego llegar al caso general.

Edición 2012. Cinco ítems entran en este factor en esta prueba: 3, 7, 10, 11 y 14.

- Pregunta 3, índice de dificultad general 0,3473, índice de discriminación específico 0,225. La pregunta requiere un manejo de información apropiado, requiere una extrapolación no trivial y es una pregunta compleja.
- Pregunta 7, índice de dificultad general 0,4504, índice de discriminación específico 0,264. Es más, de inteligencia cristalizada.

- Pregunta 10, dificultad general 0,2824, índice de discriminación específico 0,302. Tiene muchos elementos que la colocan en el Razonamiento Inductivo pues requiere explorar información generar una conclusión intermedia y resolver.
- Pregunta 11, índice de dificultad general 0,6603, índice de discriminación específico 0,205. Requiere hacer ciertas proyecciones y un uso de memoria visual de corto plazo, se ajustaría mejor con el factor espacial.
- Pregunta 14, índice de dificultad general 0,4656, índice de discriminación específico 0,325. Bien ubicada y compleja.

Edición 2013. Los ítems que se clasifican en este factor son 7, 11, 14, 19 y 20

- Pregunta 7, índice de dificultad general 0,5536, índice de discriminación específico 0,182. No es una pregunta excelente, igual podría incluida en la Memoria de Trabajo .
- La pregunta 11, índice de dificultad general 0,2768, índice de discriminación específico 0,329. Explorar, rotar y contar. Esta pregunta es bastante buena para medir las capacidades espaciales y será reclasificada a ese factor.
- Pregunta 14, índice de dificultad general 0,1071, índice de discriminación específico -0,021. Hay que descubrir una relación no es directa y luego deducir. Califica bastante bien en Razonamiento Inductivo.
- Pregunta 19, índice de dificultad general 0,3304, índice de discriminación específico 0,228. Analizar opciones, es más cercana a Memoria de Trabajo .
- Pregunta 20, índice de dificultad general 0,1161, índice de discriminación específico 0,077. Es una pregunta que califica pobremente en Razonamiento Espacial. No es un indicador adecuado.

b) Elección de ítems que conforman la dimensión de Razonamiento Inductivo

Las preguntas que conforman esta habilidad se eligieron con la premisa de tener una dificultad equilibrada y representatividad de distintos procesos a costa de forzar un tanto los resultados de los factoriales. En este constructo las preguntas son más complejas al incluir, probablemente encadenamientos de hipótesis o deducciones.

- Pregunta 10 del 2011. Se vinculó en Razonamiento Espacial originalmente. Hay una hipótesis condicional y un proceso también condicional. Proceso que obliga a hacer deducciones parciales para luego integrar. Puede tener soluciones más elaboradas pero sigue en la línea de Razonamiento Inductivo. Se valora como una pregunta sencilla.
- Pregunta 13 del 2011. Originalmente esta pregunta se vinculó en el Razonamiento Inductivo con una carga factorial de 0,675. La solución implica reconocer una meta por lograr, probablemente hacer alguna simplificación y luego resolver. Conlleva una exploración a partir de alguna conjetura inteligente.
- Pregunta 16 del 2012. Originalmente se vinculó en Razonamiento Espacial. Cualquier proceso de solución que se use, ya sea comparación o algebraica requiere de una organización elaborada de elementos más simples. Es una pregunta con un grado de dificultad más alto y más cercana a Razonamiento Inductivo.
- Pregunta 10 del 2012. Tres hipótesis distintas deben acoplarse para obtener la solución. Este tipo de encadenamientos son lo que se ha clasificado como Razonamiento Inductivo, vinculó con eso mismo factor con una carga de 0,553. Por sus características es una buena pregunta para en este factor.
- Pregunta 17 del 2012. Se vinculó en Razonamiento Deductivo. Pregunta cuya solución es muy elaborada y requiere la integración de generación de hipótesis seguida de comprobación, estas características justifican su recalificación.

3.4.4 Dimensión Razonamiento deductivo

a) Análisis lógico de las ediciones en la dimensión Razonamiento Deductivo

Edición 2011. Cuatro ítems entran en este factor en esta prueba

- Pregunta 2, índice de dificultad general 0,8084, índice de discriminación general 0,181. Es más un ejercicio que un problema.

- Pregunta 9, índice de dificultad general 0,1636. Análisis de diversas opciones comparar y decidir, no califica fuertemente en ninguno de los factores.
- Pregunta 14, dificultad general 0,1729, índice de discriminación específico -0,018. Organización de información no presente, observación. Presenta elementos de conteo más elaborados.
- Pregunta 15, dificultad general 0,2430, índice de discriminación específico 0,099. Descubre y aplica un patrón, el concepto más clásico de Razonamiento Inductivo. Quizá el ser algo normalmente entrenado le cambie un poco el perfil.

Edición 2012. Tres ítems entran en este factor en esta prueba: 8, 17 y 20 pero no son buenos representantes de acuerdo con la especificación de habilidades que caracterizan el Factor Deductivo.

- Pregunta 8, índice de dificultad general 0,2443, índice de discriminación específico 0,108. Se trata de analizar el recorrido de la moneda que rota sobre la otra moneda para determinar la rotación general. Es una pregunta difícil y hay mucho mejores preguntas de este tipo.
- Pregunta 17, índice de dificultad general 0,1450, índice de discriminación específico 0,078. Muy inductiva requiere exploración conjeturar y verificar. A pesar de su índice de dificultad y pobre índice de discriminación es una pregunta bastante representativa del factor inductivo.
- Pregunta 20, índice de dificultad general 0,1183, índice de discriminación específico 0,131. Es compleja y elaborada en su solución, a pesar de haber agrupado en este factor es de Razonamiento Espacial.

Edición 2013. Varios ítems entran en este factor.

- Pregunta 3, índice de dificultad general: 0,4821, índice de discriminación específico 0,331. Una hipótesis visual y un cálculo.
- Pregunta 8, índice de dificultad general ,1071, índice de discriminación específico 0,101. Extrapola una situación a un nuevo entorno.

- Pregunta 9, índice de dificultad general 0,3036, índice de discriminación específico ,198. Requiere descubrir ciertas condiciones elementales para luego hacer cuentas. Es un problema que tiene un fuerte elemento deductivo, se comprende una característica y se usa para el conteo o determinación de todos los casos.
- Pregunta 18, índice de dificultad 0,0714, índice de discriminación específico 0,106. Análisis muy deductivo.

b) Elección de ítems que conforman la dimensión de Razonamiento Deductivo

La elección de estos ítems fue la más meditada de todas, según la clasificación propuesta a efectos de esta prueba se quiere reducir lo deductivo a deducciones muy básicas del tipo si tengo esta hipótesis entonces puedo tener esta conclusión o bien a la aplicación de una regla general simple a casos particulares . Por esta razón en este constructo se incluyen ítems más cercanos a estas caracterizaciones y no tanto a las factorizaciones base.

- Pregunta 7 del 2011. A partir de una descripción básica se deduce un resultado. Hay un elemento de identificación sobre la aplicación de una regla. Esta razón y la simplicidad de la tarea motivan a elegir la pregunta a pesar de no haberse situado en la dimensión de razonamiento Deductivo inicialmente.
- Pregunta 18 del 2013. Reconoce una caracterización y la aplica. Tiene una dificultad media, comúnmente causa de muchos errores que los números sean de dos dígitos. En el Análisis Factorial se vinculó con el conjunto de ítems de Razonamiento Deductivo con carga factorial de 0,614.
- Pregunta 9 del 2013. Comprende un predicado y lo aplica, es una cuestión general que se debe derivar a casos particulares. Se vinculó a la dimensión de Razonamiento Deductivo con carga factorial de 0,481.
- Pregunta 16 del 2011. Se situó en la dimensión de Memoria de Trabajo . En base a la información ofrecida se plantea una operación medianamente sencilla, implica coordinar dos procesos simples.

- Pregunta 14 del 2011. Vinculada a la dimensión de Razonamiento Deductivo con una carga de 0,544. Es una pregunta que involucra ver un detalle y concluir.

3.5 Características generales de los ítems seleccionados en las dimensiones

Los ítems que caracterizan al Razonamiento Espacial tienen un alto contenido del mismo. Requieren de una apropiación adecuada del objeto geométrico para poder transformarlo o visualizarlo y resolver el problema. Diversidad de puntos de vista, análisis de opciones, visualización son palabras claves en este factor. Se incluyen varios tipos de enfoques.

Todas las preguntas que forman el Razonamiento deductivo requieren de una fase preliminar de exploración de la información para establecer una especie de rasgo característico ya sea descriptivo o hipótesis y luego establecer la solución en un paso deductivo o aplicando una regla.

Los ítems en el Razonamiento Inductivo reflejan un enfoque de razonamiento que implica un manejo complejo de la información en cierta jerarquía operativa, qué piezas son más importantes en qué momentos. Una pieza de información o una combinación abre el camino hacia la resolución del problema.

Los ítems de la Memoria de Trabajo representan retos simples que requieren concentración y buen manejo de información.

Cualquier modelo teórico quedaría reducido a un ejercicio de reflexión si los instrumentos que deben mostrarlo no logran recoger evidencias concluyentes. En la conformación de esta prueba se ha buscado, desde la experiencia y juicio experto del investigador, incorporar una cantidad razonable de elementos de medida que permitan representar la mayor diversidad de conductas específicas posibles. Cada dimensión incluye ítems con cargas factoriales apropiadas y se complementa con otros que ayudan a conformar una medición equilibrada.

3.6 Valoración de la prueba de razonamiento matemático por expertos

La validación del contenido de los ítems es la siguiente etapa del proceso de validación de la prueba de Razonamiento Matemático. Para ello, una vez diseñado se pretende la valoración del contenido de la misma por parte del juicio de expertos.

Para tal finalidad se aplicó un cuestionario –ver apéndice IV- a 8 expertos para que evaluaran la prueba. Este cuestionario, que adopta un escala Likert con cuatro categorías de respuesta, incluía valoraciones sobre elementos de las preguntas como son la pertinencia de la pregunta en la dimensión, la claridad del enunciado y la relevancia de la pregunta. La documentación para la evaluación por los expertos fue entregada directamente a cada evaluador por parte del investigador, los resultados se presentan en la tabla 13 y se discuten en los siguientes párrafos.

Respecto a la valoración sobre si el ítem es pertinente para medir la capacidad de Razonamiento Matemático en los niños, 11 de ellos fueron valorados como muy adecuados, 4 de ellos como adecuados y los cinco restantes se valoraron entre adecuado y muy adecuado. La interpretación general es que los docentes estiman que los ítems utilizados son apropiados para medir el Razonamiento Matemático en niños en el rango de edad que se administrará.

Sobre la claridad del enunciado, es decir que el estudiante reconozca las hipótesis o el problema a resolver, se estima que 10 de los ítems tienen una redacción muy clara en el sentido descrito y 8 tienen una redacción entre muy clara y clara. Los expertos señalaron dos ítems, el 8 y el 18, cuya redacción se considera poco clara y con alguna dificultad. Ambos fueron corregidos.

Finalmente, en relación con la relevancia de los ítems que conforman la prueba, vista ésta como la valoración sobre los procesos mentales que involucra la resolución del problema, se tiene que 15 de los ítems son de una relevancia muy alta al momento de medir procesos de razonamiento. Los expertos clasifican 3 de alta relevancia y los restantes dos ítems entre alta y muy alta.

En general se puede decir que a criterio de los ocho expertos consultados, los ítems utilizados son adecuados para medir el Razonamiento Matemático en estudiantes de la edad de la prueba, disponen de una redacción clara y los procesos mentales que requiere su solución son muy relevantes al constructo, ver tabla 13.

Tabla 13. Valoración Expertos

Ítem	Pertinencia	Enunciado	Relevancia
1	3,5	4	3
2	4	4	3.5
3	4	4	3
4	4	4	4
5	4	4	4
6	3.5	3.5	3
7	3.5	4	4
8	3	2.5	3.5
9	3.5	3.5	4
10	3.5	3.5	4
11	3	3	4
12	4	4	4
13	4	3	4
14	4	4	4
15	3	3	4
16	3	3	4
17	4	4	4
18	4	2	4
19	4	4	4
20	4	4	4

Nota. Escala Likert 1 a 4.

Finalmente, y de manera complementaria, se solicitó al asesor de matemática de una de las regiones educativas del país hacer una valoración sobre la dificultad de la prueba. Se eligió esta persona para evaluar, pues tiene mucha experiencia en el trabajo con niños talentosos y ha hecho durante más de 10 años Olimpiadas Matemáticas regionales con mucho éxito. A partir de su juicio, 11 ítems los considera fáciles, 5 con una dificultad intermedia y 4 con una dificultad elevada, la valoración del experto se presenta en la tabla 14.

Tabla 14. Valoración Dificultad de los ítems por el experto

Fácil	Intermedio	Difícil
1, 2, 3, 4, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 19	6, 7, 8, 10 y 18	5, 11, 15 y 20

3.7 Validación de la prueba de razonamiento matemático y estructura de la misma

En este apartado, se presenta la validación de la prueba, junto una estructuración de las dimensiones que componen el Razonamiento Matemático.

Previamente se exponen las principales características de los participantes y el procedimiento de realización de la prueba.

3.7.1 Participantes y procedimiento de la prueba

a) Participantes

La muestra quedó constituida por 1932 estudiantes de Costa Rica. En cuanto al sexo, se compone por un 47% (900) de mujeres y un 53% (1032) de hombres (53 %). Las edades mayoritariamente oscilan entre los 11 y 18 años.

Los estudiantes provienen de tres niveles educativos distintos que corresponden con 7 años de escolaridad, con un total de 909 estudiantes (30 %); 8 años de escolaridad 613 estudiantes (47 %); y 11 años de escolaridad 410 estudiantes (21 %). La tabla 15 resume los la distribución de la muestra poblacional.

Tabla 15. Distribución de la Muestra

Distribución	Mujeres	Hombres	Total
Escuela – Final(a)	463	446	909
Colegio – Inicial(b)	295	318	613
Universidad – Inicial(c)	142	268	410
Total	900	1032	1932

Fuente: elaboración propia

Nota. Años de escolaridad aproximados.

a Años escolaridad 7. b Años escolaridad 8. C Años escolaridad 11.

Si consideramos el porcentaje dentro de cada nivel de escolaridad en el grupo de 7 años de escolaridad el 50,9% son mujeres y el 49,1% son hombres. En el grupo de 8 años de escolaridad el 48,1 son mujeres y el 51,9% son hombres.

Finalmente, en el grupo de 11- universidad- el 34,6% son mujeres y el 65,4% son hombres. Por lo tanto, se presenta una mayor cantidad de hombres en el segmento de universidad inicial lo cual es consistente con la distribución entre mujeres y hombres entre la población estudiantes de la universidad que se utilizó para la muestra.

b) Proceso de selección de los participantes

El proceso de selección de los participantes se realizó mediante un muestreo no probabilístico intencional, basado en el criterio de seleccionar instituciones educativas –escuelas y universidad- con estudiantes con un desarrollo matemático adecuado a su edad.

En el caso de los estudiantes de primaria, se solicitó apoyo de asesores regionales de matemática para que ayudaran a identificar escuelas, en la que existía algún tipo de personal con liderazgo y con cierta vocación hacia el desarrollo de la matemática en los estudiantes. Una vez recibida la recomendación se realizó una invitación a las direcciones de cada una de las escuelas a participar en la experiencia. Cada escuela que participó fue visitada por el investigador y se realizó una presentación con el director y con el maestro coordinador. En esta reunión se presentó el proyecto y se dieron las pautas de aplicación de la prueba. Cada coordinador gestionó la aplicación de la prueba en los distintos grupos. En la experiencia participaron 12 escuelas de zonas rurales, 10 de zonas urbanas fuera del casco de la capital y 5 escuelas de cabecera de provincia. En algunos casos las escuelas pertenecían a distritos muy alejados y sólo contaban con grupos muy reducidos de estudiantes. Cada escuela participante incluyó la totalidad de la población. Únicamente tres escuelas rurales participaron con grupos parciales. Esta muestra incluyó dos escuelas privadas que aportaron un 5 % de los estudiantes en este rango. La elección de las escuelas priorizó instituciones de zonas rurales o urbanas fuera de las zonas urbano marginales, la razón de esta decisión fue la mayor disposición de los maestros de este tipo de escuela a involucrarse en el proyecto.

Los estudiantes de primer año de educación media fueron elegidos de la misma manera. Las instituciones participantes fueron visitadas e informadas del proyecto y su objetivo.

Finalmente los estudiantes de primer año de universidad fueron tomados aleatoriamente de la población del Instituto Tecnológico de Costa Rica, considerando grupos completos.

3.7.2 Materiales

La prueba a aplicar es la anteriormente diseñada, con 20 ítems de selección única y teóricamente dividido en 5 preguntas por cada una de las dimensiones o constructos previamente establecidos: Memoria de Trabajo (MT), Razonamiento Inductivo (RI), Razonamiento Deductivo (RD) y Razonamiento Espacial (RE).

3.7.3 Procedimiento para la aplicación de la prueba

El test fue aplicado por los docentes de cada uno de los grupos de estudiantes participantes. Cada escuela contó con un profesor coordinador quien recibió la información sobre la prueba y su finalidad, así como los materiales de aplicación. Adicionalmente cada docente recibió una carta explicativa y coordinó la aplicación en la institución.

Se utilizó el instrumento con 20 preguntas de selección única y una hoja de respuestas en la que los estudiantes consignaban sus respuestas. En el proceso de codificación de los datos, en los niveles inferiores, fue necesario recurrir a la información que los estudiantes consignaban dentro de la prueba. La codificación fue manual en Excel.

4. Análisis de los resultados. Validación de la estructura interna de la prueba

La validación de la prueba se centra en primer lugar en el análisis de los ítems. En segundo lugar, se realiza la validación de la prueba mediante la comprobación del modelo de medida y de una dimensión general. En tercer lugar, la fiabilidad de la prueba, a partir del modelo de medida propuesto. Finalmente, se presenta el análisis diferencial de la prueba mediante un modelo MIMIC con dos variables externas.

4.1. Análisis de los ítems

Los descriptivos generales básicos expuestos en la tabla 16 muestran una prueba que resultó con un alto grado de dificultad, dado que la mayoría de los ítems presentan porcentajes de acierto bajos. El índice de dificultad de 10 ítems se encuentra por debajo o igual a un valor de 0,30, con extremos los ítems 4, 11, 15 y 20. Los ítems con mayores niveles de acierto han sido 1, 2, 3, 12 y 14.

La variabilidad de las respuestas es elevada en la mayoría de los ítems, dado que en el valor de la varianza se sitúa por encima de 0,20 en un grado elevado. Los ítems 4, 11, 15 y 20 presentan valores de la varianza por debajo de 0,2, lo que apunta cierta homogeneidad de las respuestas.

Referente al índice de discriminación, los valores de los mismos son adecuados en general. En cuanto al ítem 11, el índice de discriminación presenta un valor cercano a 0,0, con lo cual es un ítem que requiere la eliminación. Además, en entrevistas con algunos maestros sobre las incidencias de la prueba, estos manifestaron que algunos estudiantes captaron incorrectamente lo que se preguntaba en el ítem 11. Se planteó una revisión del mismo, controlando las anotaciones de los estudiantes en el documento de trabajo y sus respuestas, y se determinó que si existió, en demasiados casos, procesos correctos pero a la hora de responder interpretaron mal la pregunta. Esta razón, junto al valor del índice de discriminación, condujo a la eliminación del ítem 11 en los análisis relacionados con los modelos de estructura. En el caso del ítem 9, dado que el índice de discriminación es cercano a 0,20 se decide mantenerlo teniendo en cuenta también el índice de dificultad, la varianza y que los maestros no manifestaron ninguna incidencia respecto al mismo. En el caso del ítem 15 se toma la misma decisión considerando el índice de dificultad, la varianza y la falta de incidencias por parte de los maestros.

Tabla 16. Descriptivos generales de la prueba

	Media	Varianza	Desviación típica	Índice de discriminación
Item1	0,62	0,24	0,49	,227
Item2	0,50	0,25	0,50	,503
Item3	0,69	0,21	0,46	,406
Item4	0,14	0,12	0,35	,225
Item5	0,32	0,22	0,47	,410
Item6	0,37	0,23	0,48	,312
Item7	0,44	0,25	0,50	,489
Item8	0,28	0,20	0,45	,247
Item9	0,27	0,20	0,44	,187
Item10	0,27	0,20	0,44	,340
Item11	0,22	0,17	0,41	,045
Item12	0,55	0,25	0,50	,447
Item13	0,37	0,23	0,48	,331
Item14	0,48	0,25	0,50	,314
Item15	0,24	0,18	0,43	,122
Item16	0,33	0,22	0,47	,503
Item17	0,30	0,21	0,46	,549
Item18	0,30	0,21	0,46	,473
Item19	0,29	0,21	0,45	,264
Item20	0,18	0,15	0,38	,216

4.2 Modelo de Medida de la Prueba de Razonamiento Matemático

El análisis de los ítems permite seguir con el análisis del modelo de medida de la prueba de Razonamiento Matemático. Por este motivo, en este apartado se presenta el modelo de medida básico de la prueba, así como la existencia de una dimensión general del Razonamiento Matemático.

4.2.1 Modelo de medida básico

El modelo de medida básico del Razonamiento Matemático ha sido comprobado mediante un análisis factorial confirmatorio. El método de estimación del modelo de medida ha sido realizado mediante el procedimiento de máxima verosimilitud robusta, dada la naturaleza categórica de los ítems (0 es error y 1 es acierto).

Referente a la evaluación del ajuste del modelo se ha utilizado la χ^2 ajustada mediante la propuesta de Satorra-Bentler (S-B), así como la raíz del error medio cuadrático de aproximación (RMSEA) junto con su intervalo de confianza al 90% y su probabilidad, la raíz del promedio de los residuos al cuadrado estandarizada (SRMR), el índice de ajuste comparativo (CFI) y el índice de bondad del ajuste en su versión ajustada (AGFI), como sugieren Byrne (2006) y Mueller y Hancok (2010). A partir de estos autores se presenta en la tabla 17 los valores de referencia de un buen ajuste del modelo

Tabla 17. Valores de referencia de buen ajuste del modelo

X^2 S-B	RMSEA			SRMR	CFI	AGFI
	Valor	Int 90%	Pclose			
p>0,05	< 0,05	0,00-0,005	>0,05	< 0,05	>0,95	0,90

Previamente a la comprobación del modelo de medida se ha seguido el procedimiento de replicabilidad de Osborne y Fitzpatrick (2012). Ambos autores sugieren que las prácticas de replicabilidad de los modelos dan más confianza sobre el comportamiento posterior de la escala. En este sentido se sigue el proceso de replicabilidad interna de Osborne y Fitzpatrick (2012) consistente en dividir la muestra aleatoriamente en dos mitades. De esta forma, antes de iniciar los procesos de análisis se opta por una prueba de validación dimensional de la escala en dos submuestras, mediante una división aleatoria del total de la muestra. Además, esta división contempla valores equiparables en cuanto a las proporciones en las variables estructurales, clave tanto por años de escolaridad como por sexo.

a) Modelo de medida del grupo 1

Para el grupo 1 el modelo de medida muestra claramente un buen ajuste, como se puede observar en la Tabla 18. Todos los indicadores de ajuste del modelo son excelentes, a excepción de la χ2 ajustada con el procedimiento de Satorra-Bentler, si bien se ha de apuntar que este indicador es sensible al tamaño de la muestra y suele dar probabilidades menores de 0,05 en muestras grandes (Hair, Black, Babin y Anderson, 2010).

Tabla 18. Índices de Ajuste Modelo de Media en el grupo 1

X^2 S-B			RMSEA					
X^2S-B	g.l.	P	RMSEA	Int 90%	Pclose	CFI	SRMR	GFI
770,16	146	0,00	0,021	0,014—0,027	1,0	0,99	0,048	0,92

Las cargas factoriales estandarizadas se reportan en la figura 1. Casi todas ellas muestran valores satisfactorios, excepto el ítem 15 y el ítem 9. Si consideramos la relación entre las cuatro dimensiones del Razonamiento Matemático, todas ellas muestran unos valores de interrelación elevados.

Por lo tanto, estos resultados muestran que el modelo de medida sometido a prueba ajusta en la estructura dimensional, con una representación adecuada de los indicadores considerados en las dimensiones.

b) Modelo de medida del grupo 2

Con respecto a los resultados para el grupo 2 las cosas no cambian en nada. Los indicadores de ajuste de modelo que se reportan en la tabla 19 son excelentes, a excepción de la χ2 ajustada con el procedimiento de Satorra-Bentler, como anteriormente.

Las cargas factoriales estandarizadas –ver figura 2- muestran valores satisfactorios, siendo en este grupo mejores en el ítem 15 y en el ítem 9. La interrelación entre las cuatro dimensiones es elevada.

Por lo tanto, estos resultados señalan que el modelo de medida en el grupo 2 sometido a prueba ajusta en la estructura dimensional, con una representación adecuada de los indicadores considerados en las dimensiones.

Tabla 19. Índices de Ajuste Modelo de Medida (grupo 2)

X^2S-B			RMSEA			CFI	SRMR	GFI
X^2S-B	g.l.	P	RMSEA	Int 90%	Pclose			
925,70	146	0,000	0,025	0,018—0,031	1,0	0,99	0,052	0,91

c) Modelo de medida básico en el conjunto de la muestra

Los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores confirman de manera apropiada la validez dimensional de los datos, dado que al ser sometidos al mismo análisis por mitades, aleatoriamente conformadas, reportaron resultados completamente consistentes entre las partes. Con la validación de la dimensionalidad estructural realizada, el escalamiento natural es verificar la estructura de medida del conjunto de datos completo. Esto es básico en los procesos de análisis que siguen y nos permitirá analizar la existencia de una estructura de medida en los mismos.

Respecto del modelo conjunto de datos, los indicadores de ajuste de modelo que se reportan en la tabla 20 son excelentes, a excepción de la $\chi 2$ ajustada con el procedimiento de Satorra-Bentler, como ha sucedido anteriormente.

Las cargas factoriales estandarizadas –ver figura 3- muestran valores nuevamente satisfactorios, con saturaciones algo bajas en el ítem 9 y en el ítem 15. Los valores de la interrelación entre las cuatro dimensiones del razonamiento matemático es óptima, lo que sugiere la relación entre todos ellos.

Estos resultados apuntan que la estructura dimensional propuesta del Razonamiento Matemático es satisfactoria en las cuatro dimensiones, además de ser estable. Asimismo, los indicadores representan adecuadamente a las dimensiones -ver tabla 20-.

Tabla 20. Índices de Ajuste Modelo de Media

X^2S-B			RMSEA			CFI	SRMR	GFI
X^2S-B	g.l.	P	RMSEA	Int 90%	Pclose			
1091,82	146	0,000	0,023	0,020—0,027	1,0	0,99	0,040	0,94

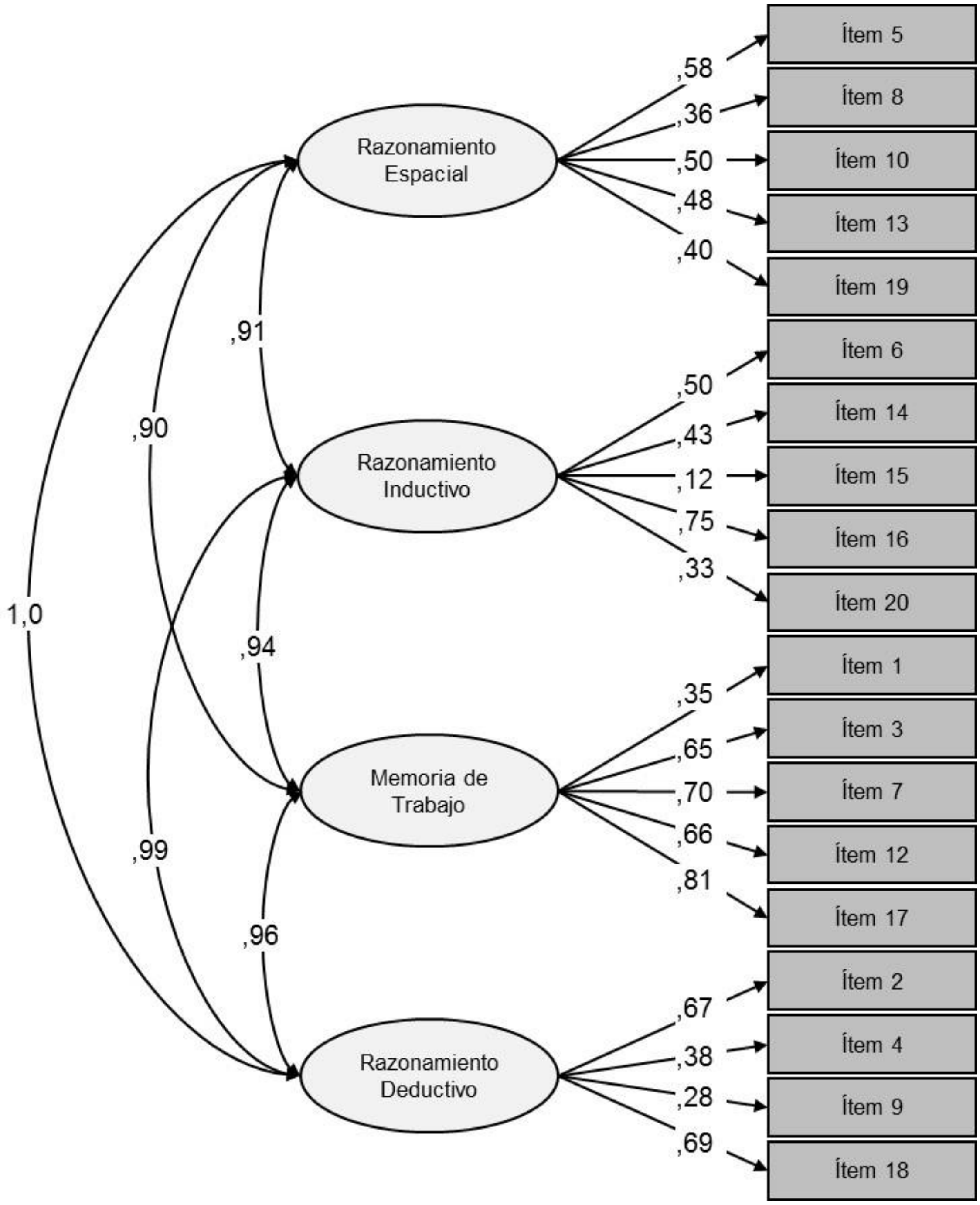


Figura 1: Modelo Medida Grupo 1

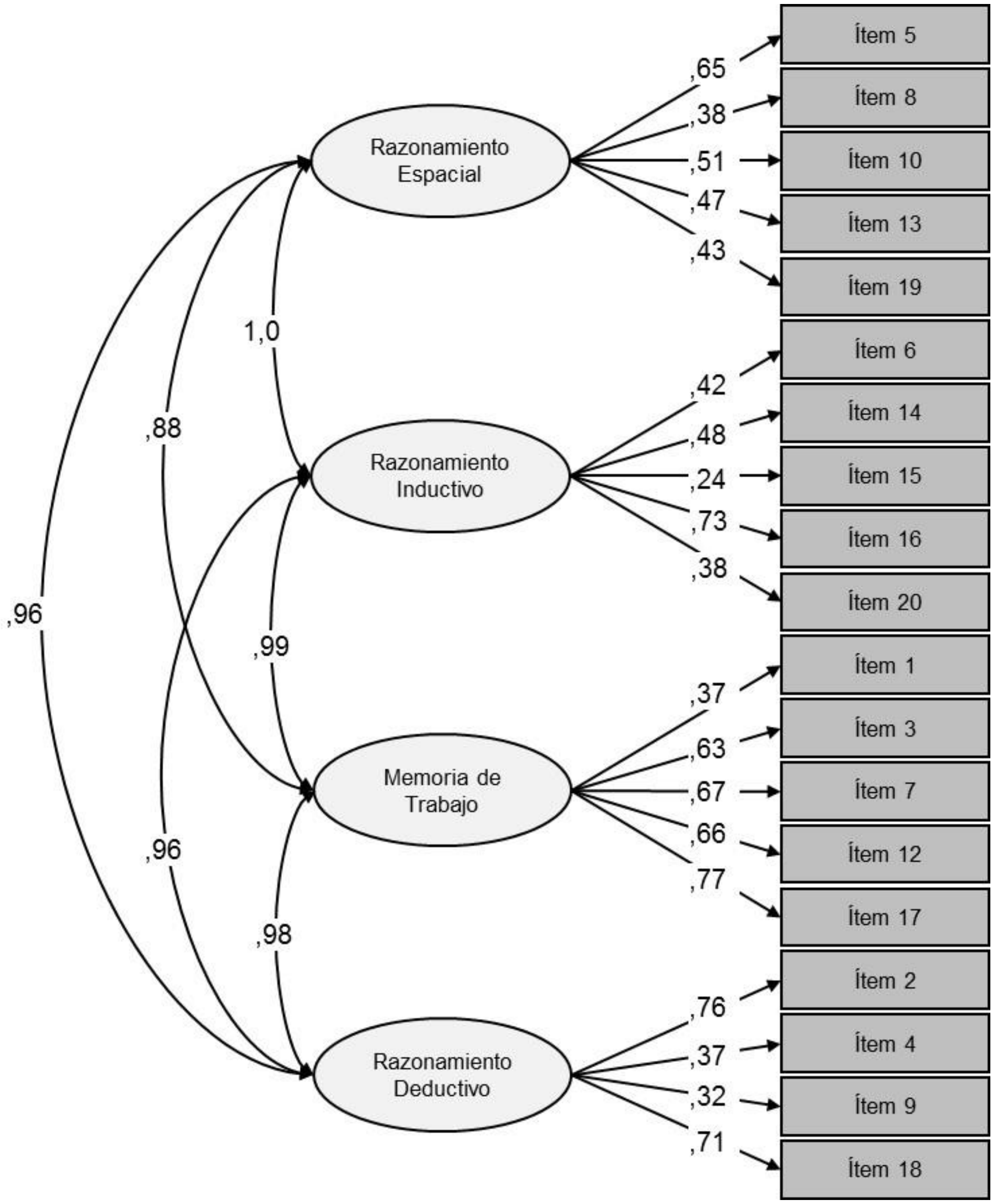


Figura 2: Modelo Medida Grupo 2

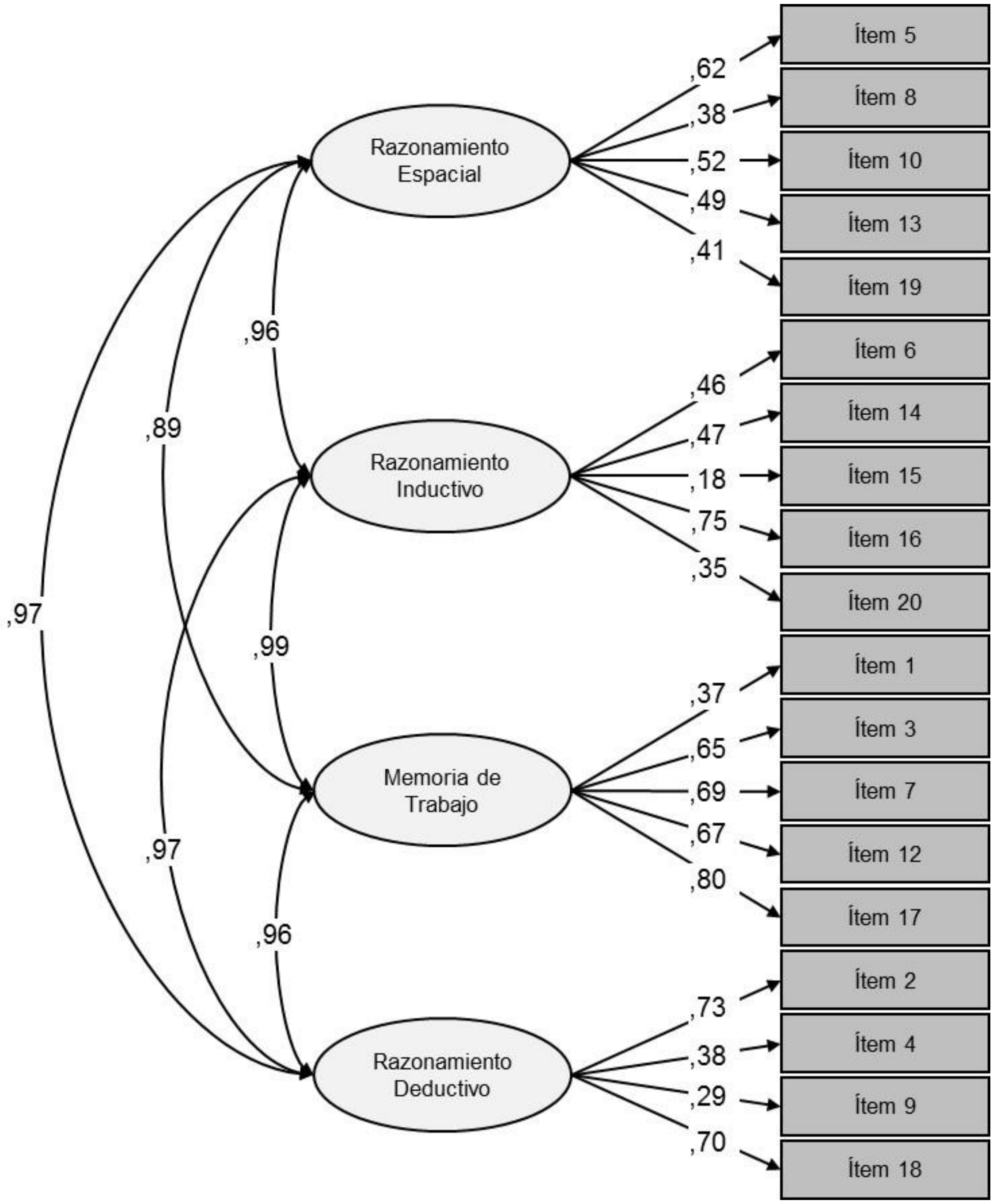


Figura 3: Modelo Medida Básico

4.3 Dimensión general del razonamiento matemático

Otra de las cuestiones a considerar es ¿hasta qué punto la estructura dimensional de la muestra permite identificar una dimensión general del Razonamiento Matemático? Se pondrá a prueba la hipótesis sobre la existencia de una dimensión subyacente a las cuatro dimensiones establecidas, es decir, una dimensión general de Razonamiento Matemático.

Esto se hará con un modelo de medida jerárquico que incorpora una nueva variable latente, el Razonamiento Matemático, sobre la que se proponen asociaciones hacia cada una de las dimensiones del mismo.

El modelo jerárquico de Razonamiento Matemático propuesto presenta un buen ajuste. De este modo, los distintos indicadores de ajuste de modelo que se han considerado –ver tabla 21- son excelentes, a excepción de la $\chi 2$ ajustada con el procedimiento de Satorra-Bentler, como ha acaecido anteriormente.

En cuanto al modelo de medida, las cargas factoriales estandarizadas –ver figura 4- muestran valores satisfactorios en casi todos los ítems. Nuevamente el ítem 9 y el 15 presentan saturaciones algo bajas. Por ello, los indicadores suponen una representación adecuada de las dimensiones.

La relación entre la variable Razonamiento Matemático y las dimensiones que las componen presentan valores altos, lo que sugiere la dimensionalidad general del Razonamiento Matemático.

Por lo tanto, se confirma la existencia de la estructura general del Razonamiento Matemático. De esta forma, se ha podido comprobar uno de los objetivos propuestos el factor general, pues los datos evidencian la existencia de este factor general que se ha denominado como Razonamiento Matemático.

Tabla 21. Indicadores de ajuste modelo dimensión general

X^2 S-B			RMSEA					
X^2 S-B	g.l.	P	RMSEA	Int 90%	Pclose	CFI	SRMR	GFI
1102,13	148	0,000	0,023	0,020—0,027	1,0	0,99	0,040	0,94

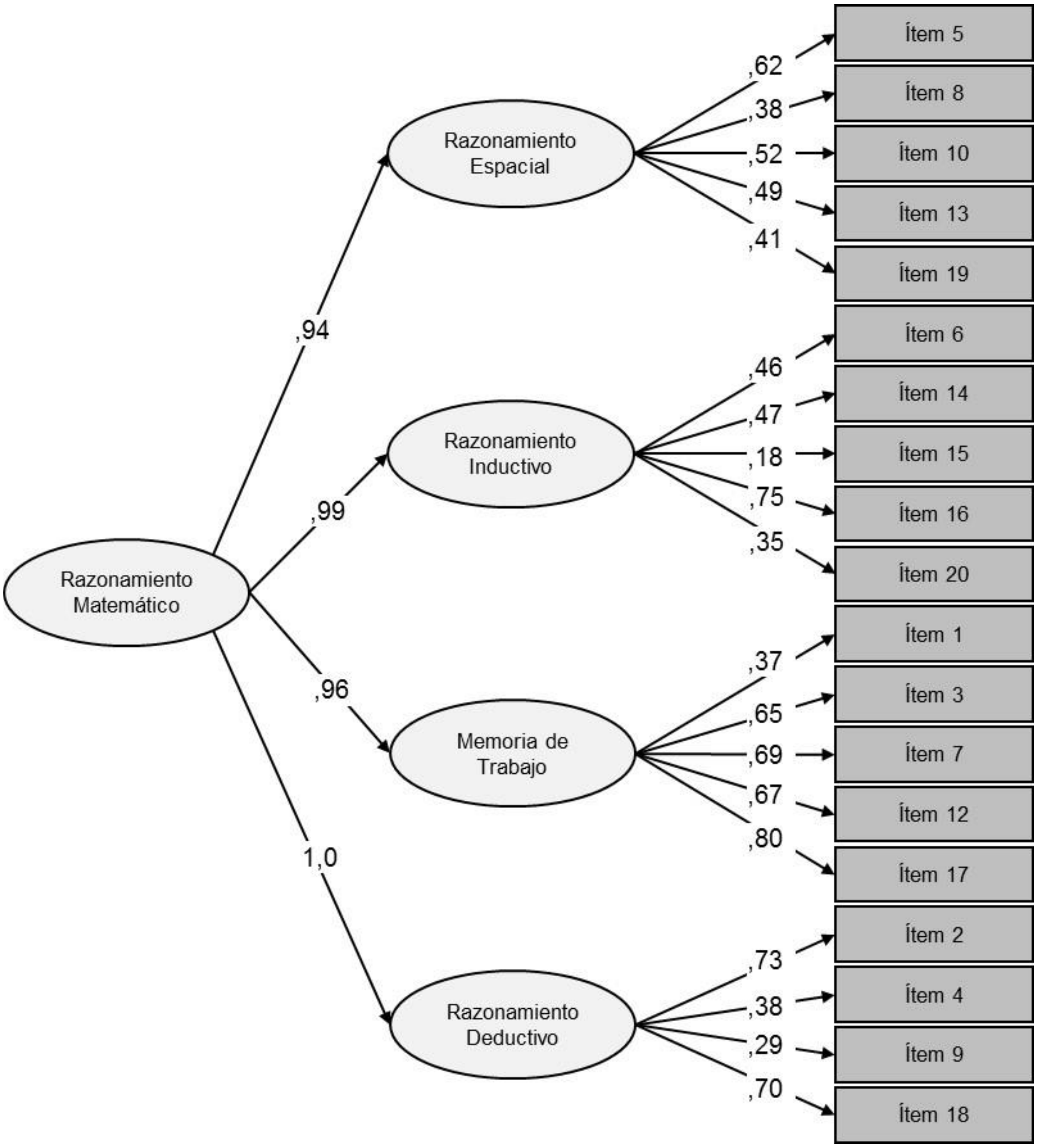


Figura 4: Modelo Dimensional con Factor General

4.4 Fiabilidad de la prueba de Razonamiento Matemático

Una vez comprobada la dimensionalidad del Razonamiento Matemático se estudia la fiabilidad de la prueba. Para este propósito se han utilizado tres índices:

- el α de Cronbach
- el α de Cronbach estandarizado, a partir de la matriz de correlación tetracórica.
- el índice ω de McDonald

Se decidió utilizar los tres índices para desde diversos indicadores y formas de cálculo proporcionar un ajuste más completo de la fiabilidad de la prueba (Revelle & Zinbarg, 2009). Asimismo, antes de comentar el valor de los diversos índices se ha de apuntar que el α de Cronbach presenta un valor menor que los otros dos índices, dado que se ha calculado a partir de la matriz de varianzas-covarianzas. Por eso, a partir de este momento nos centramos en el α de Cronbach estandarizado y el ω de MacDonald.

Respecto a la dimensión general, Razonamiento Matemático, se ha de señalar que el valor del α de Cronbach estandarizado (,87) y el ω de MacDonald (,87) presentan un valor en ambos casos excelente, lo que apunta la consistencia de la prueba en la medición del constructo considerado.

Si se consideran las cuatro dimensiones del Razonamiento Matemático, en el caso de la Memoria de Trabajo presenta un valor en ambos índices –ver tabla 22- adecuado. Tanto el valor del Razonamiento Deductivo como el Razonamiento Espacial son apropiados en ambos casos en relación con la consistencia de la prueba. En el caso del Razonamiento Inductivo el valor de ambos índices es satisfactorio.

Si consideramos la fiabilidad en las cuatro dimensiones a partir de la eliminación de los ítems, en general se produce un decremento de ambos índices, lo que indica la idoneidad de los mismos. En el caso de la Memoria de Trabajo es la dimensión donde menor influencia tiene esta eliminación, resaltando que en el caso del ítem 1 se produce un leve incremento. En la dimensión Razonamiento Espacial en todos los ítems se produce una disminución del valor de ambos índices, siendo especialmente destacado en el caso del ítem 5.

Tabla 22. Fiabilidad de la escala, de las dimensiones y si se suprime un ítem en las distintas dimensiones

	Ítems	α de Cronbach	α de Cronbach estandarizado	ω de MacDonald
General		**,77**	**,87**	**,87**
Razonamiento Espacial		**,45**	**,60**	**,61**
	5	,35	,50	,51
	8	,43	,59	,59
	10	,38	,53	,54
	13	,38	,54	,55
	19	,41	,57	,58
Razonamiento Inductivo		**,39**	**,54**	**,56**
	6	,32	,47	,49
	14	,32	,46	,48
	15	,42	,58	,59
	16	,26	,40	,40
	20	,37	,50	,53
Memoria de Trabajo		**,64**	**,78**	**,79**
	1	,64	,80	,80
	3	,57	,72	,73
	7	,56	,73	,74
	12	,56	,72	,73
	17	,59	,74	,75
Razonamiento Deductivo		**,44**	**,61**	**,63**
	2	,32	,51	,51
	4	,42	,58	,62
	9	,43	,61	,64
	18	,28	,46	,46

En la dimensión Razonamiento Deductivo, a excepción del ítem 9 en el que se produce un ligero incremento del valor de ambos índices, el valor de ambos índices es menor si se elimina el ítem. Esto último es especialmente relevante en referencia al ítem 18. En el caso del ítem 9 el incremento de ambos índices de la fiabilidad no es tan relevante como para considerar la eliminación del mismo de la prueba.

En la dimensión Razonamiento Inductivo la eliminación de ítems supone un decremento del valor de ambos índices de la fiabilidad en los ítems 6, 14, 20 y 16, especialmente relevante en este ítem. En el caso del ítem 15, la eliminación del mismo supone un ligero incremento del valor de ambos índices, sin la significatividad necesaria para la eliminación del mismo.

4.5 Influencia de variables personales-contextuales en el modelo dimensional del Razonamiento Matemático

En este apartado se explora la influencia de dos variables personales-contextuales como son el sexo y los años de escolaridad sobre las dimensiones propuestas de Razonamiento Matemático.

Para ello en primer lugar se ha realizado un MANOVA, tanto en relación con el sexo como con los años de escolaridad. Luego se ha llevado a cabo un análisis conjunto de ambas variables en las dimensiones a través de un modelo de Múltiples Indicadores y Múltiples Causas (MIMIC).

4.5.1 Influencia del sexo

El perfil multivariado de las distintas dimensiones del Razonamiento Matemático en función del sexo resulta significativo – Lambda de Wilks =.970; $F_{(4,1927)}$= 14.786, p=.000-, con un tamaño del efecto pequeño (Cohen, 1977), dado que supone una explicación de un 3% – η^2 parcial= 0,03– de las diferencias observadas en la muestra.

Tabla 23. ANOVA dimensiones Razonamiento Matemático en función del sexo

Dimensiones	Sexo	Media	Desviación típica	*F*	*gl*	*gl*	Sig.	*η²* *parcial*
Memoria de Trabajo	Mujer	0,48	0,29	24,972	1	1930	0,000	,013
	Hombre	0,55	0,32					
Razonamiento Inductivo	Mujer	0,28	0,22	39,026	1	1930	0,000	,020
	Hombre	0,35	0,26					
Razonamiento Deductivo	Mujer	0,26	0,24	37,837	1	1930	0,000	,019
	Hombre	0,33	0,28					
Razonamiento Espacial	Mujer	0,27	0,23	30,087	1	1930	0,000	,015
	Hombre	0,33	0,27					

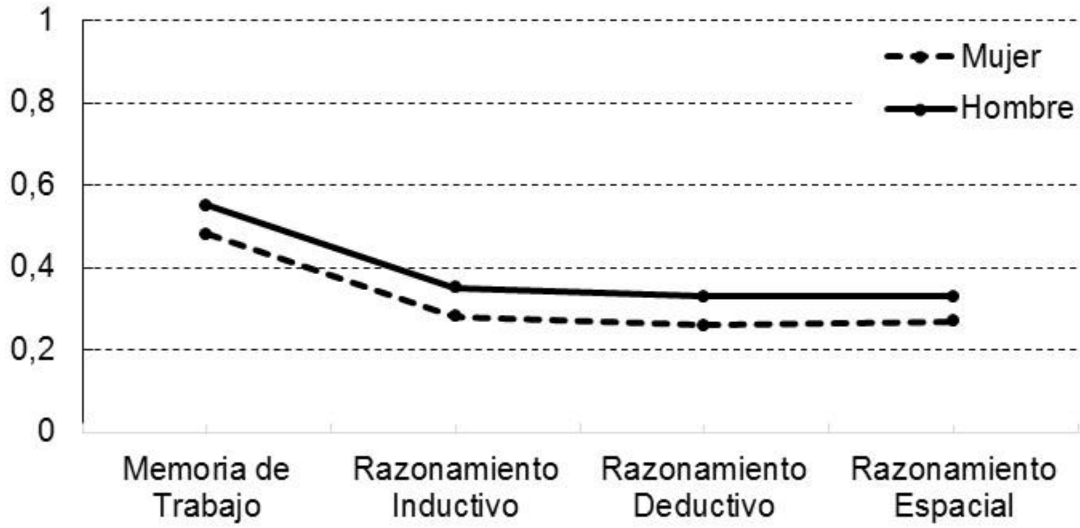


Gráfico 1. Medias de la dimensiones del razonamiento matemático por sexo

Si consideramos cada una de las dimensiones por separado en función del sexo, se puede señalar que en las cuatro dimensiones el ANOVA realizado es significativo –ver tabla 23-, con todos los casos con un tamaño del efecto pequeño.

En relación con las medias –ver tabla 23 y gráfico 1-, se puede apreciar que en todas las dimensiones del Razonamiento Matemático las mujeres presentan una media inferior a los hombres. El perfil que describen tanto hombres como mujeres es el mismo. La dimensión que presenta un valor medio mayor es la Memoria de Trabajo, siendo casi igual los valores medios en las restantes dimensiones y con puntuaciones medias claramente menores.

4.5.2 Influencia de los años de escolaridad

El perfil multivariado de las distintas dimensiones del Razonamiento Matemático, en función de los años de escolaridad resulta significativo – Lambda de Wilks =0,520; $F_{(8,3852)}$= 186,325, p=,000-, con un tamaño del efecto grande (Cohen, 1977), puesto que supone una explicación de un 27,9% – η^2 parcial= ,279– de las diferencias observadas en la muestra. Es evidente que los años de escolaridad tienen un efecto importante en las diferencias observadas.

Si consideramos cada una de las dimensiones por separado en función de los años de escolaridad, se puede señalar que en las cuatro dimensiones el

ANOVA realizado es significativo –ver tabla 24-. En todos las dimensiones el tamaño del efecto es grande. Además, las comparaciones múltiples –mediante el método de Scheffe- nos señalan que las diferencias se producen entre todos los grupos de escolaridad en todas las dimensiones del Razonamiento Matemático.

En relación con las medias –ver tabla 24 y gráfico 2-, se puede apreciar que en todas las dimensiones del Razonamiento Matemático los estudiantes del grupo de escolaridad 11 presentan un valor mayor que los otros dos grupos, así como el grupo de escolaridad 8 mayor que el grupo de escolaridad 7.

Por otra parte, el perfil que describen todos los años de escolaridad es el mismo en todas las dimensiones. La dimensión que presenta un valor medio mayor es la Memoria de Trabajo, con las restantes con menor valor. Asimismo se puede observar que los valores medios en las dimensiones Razonamiento Inductivo y Razonamiento Espacial en el grupo de escolaridad 7 y 8 la distancia se mantiene igual. En el caso del Razonamiento Deductivo se produce mayor distanciamiento por un leve incremento del grupo de 8 y disminución del grupo de 7.

Por lo tanto, la pertenencia a un grupo de escolaridad tienen efectos relevantes en la diferenciación en las cuatro dimensiones: Memoria de Trabajo, Razonamiento Inductivo, Razonamiento Deductivo y Razonamiento Espacial.

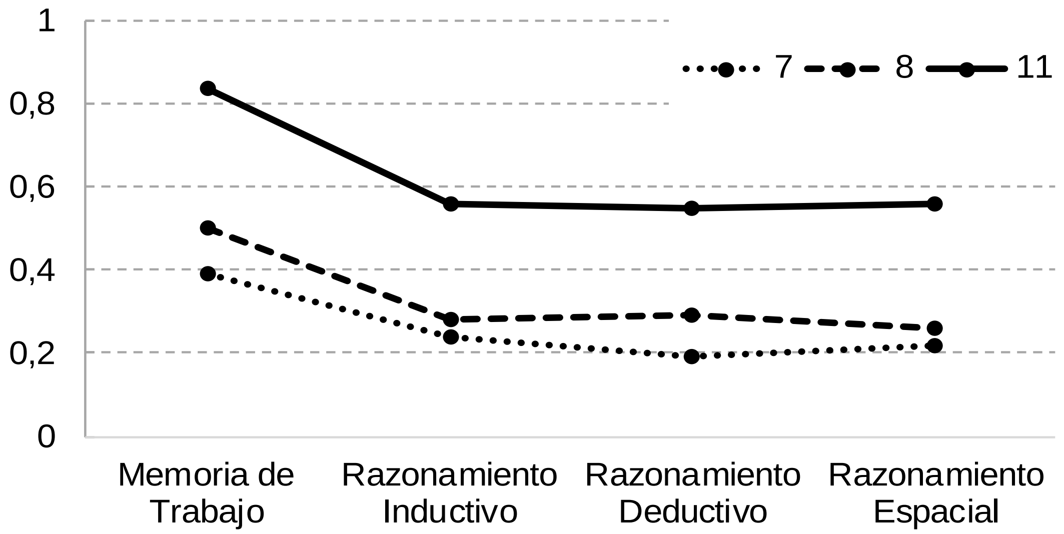


Gráfico 2. Medias de las dimensiones del razonamiento matemático por niveles educativos

Tabla 24. ANOVA dimensiones Razonamiento Matemático en función de los años de escolaridad

Dimensiones	Años escolaridad	Media	Desviación típica	*F*	*gl*	*gl*	Sig.	*η* [2] *parcial*	*Comparaciones múltiples (Scheff)*	
Memoria de Trabajo	7	0,39	0,26						7-8	0,000
	8	0,50	0,29	442,995	2	1929	0,000	,315	7-11	0,000
	11	0,84	0,18						8-11	0,000
Razonamiento Inductivo	7	0,24	0,19						7-8	0,000
	8	0,28	0,22	357,248	2	1929	0,000	,270	7-11	0,000
	11	0,56	0,24						8-11	0,000
Razonamiento Deductivo	7	0,19	0,20						7-8	0,000
	8	0,29	0,25	344,518	2	1929	0,000	,263	7-11	0,000
	11	0,55	0,25						8-11	0,000
Razonamiento Espacial	7	0,22	0,19						7-8	0,000
	8	0,26	0,22	353,300	2	1929	0,000	,268	7-11	0,000
	11	0,56	0,27						8-11	0,000

4.5.3 Influencia conjunta del sexo y de los años de escolaridad

La comprobación de la influencia conjunta del sexo y de los años de escolaridad en el Razonamiento Matemático se ha realizado mediante un modelo de Múltiples Indicadores y Múltiples Causas –MIMIC – (Muthen, 1989), en el que las dimensiones del Razonamiento Matemático se explican o modifican en parte a través de la influencia de las variables contextuales.

Por lo tanto, se trata de comprobar si el modelo de medida básico, formado por las cuatro dimensiones del Razonamiento Matemático, se encuentra influido al incorporar las dos variables contextuales anteriores, el sexo y los años de escolaridad de los sujetos en la muestra. Además, en el modelo se considera que ambas variables contextuales no tienen relación, son teóricamente independientes.

El modelo muestra un ajuste excelente–ver tabla 25-. A excepción de la χ2 ajustada con el procedimiento de Satorra-Bentler que no se ajusta adecuadamente, como ha sucedido anteriormente, los otros indicadores de ajuste del modelo son excelentes.

Tabla 25. Índices de Ajuste modelo con covariadas sexo y años de escolaridad

X^2S-B			RMSEA			CFI	SRMR	GFI
X^2S-B	g.l.	P	RMSEA	Int 90%	Pclose			
1256,81	177	0,000	0,024	0,021—0,028	1,0	0,99	0,042	0,94

En cuanto al modelo de medida, como se observa en la figura 5, los indicadores que componen cada una de las cuatro dimensiones los representan apropiadamente, remarcando la baja saturación de los ítems 9 y 15. Por lo tanto, los datos permiten afirmar que la estructura de medida es satisfactoria.

En cuanto a los efectos del sexo y los años de escolaridad sobre cada una de las dimensiones del Razonamiento Matemático permite señalar, a partir de los distintos efectos –ver tabla 26 y figura 5-, que el sexo presenta poca relevancia en la diferenciación del constructo, mientras que los años de escolaridad sí que supone una gran influencia en el Razonamiento Matemático.

En referencia al sexo, el efecto directo es pequeño en todas las dimensiones, particularmente en la Memoria de Trabajo. Además, los hombres (codificado como 1) presentan un valor más alto que las mujeres en todas las dimensiones (codificado como 0). El efecto total es ligeramente más alto que el efecto directo si bien sigue siendo pequeño, dado que el efecto indirecto es bajo. El patrón reseñado entre hombres y mujeres es el señalado anteriormente en el efecto total.

Tabla 26. Efectos estandarizados de las variables covariadas sobre las dimensiones del Razonamiento Matemático

	Covariadas	Efecto Directo	Efecto Indirecto	Efecto total
Memoria de Trabajo	Sexo	0.03*	0.06	0.09
	Años Escolaridad	0.26*	.45	0.71
Razonamiento Inductivo	Sexo	0.07*	.08	0.15
	Años Escolaridad	0.35*	.41	0.76
Razonamiento Deductivo	Sexo	0.08*	.03	0.11
	Años Escolaridad	0.53*	.19	0.72
Razonamiento Espacial	Sexo	0.07*	.05	0.12
	Años Escolaridad	0.44*	.27	0.71

*p <.001.

En cuanto al grupo de escolaridad, el efecto directo sobre la Memoria de Trabajo es menos determinante de lo que es en las otras tres dimensiones. Es en la dimensión del Razonamiento Deductivo en el que la influencia del grupo de escolaridad es mayor. Por otra parte, a diferencia del sexo en el que el efecto indirecto era escaso, en el grupo de escolaridad los efectos indirectos son relevantes, incluso superior en su valor en las dimensiones Memoria de Trabajo y Razonamiento Inductivo. Por ello, la influencia del grupo de escolaridad en función del efecto total es muy significativo, con valores apreciablemente altos y semejantes en todas las dimensiones. Esto informa sobre la naturaleza explicativa del grupo de escolaridad sobre el Razonamiento Matemático. En cuanto al patrón encontrado se puede señalar, dado el valor positivo, que cuando mayor es el grupo de escolaridad mayor es la puntuación del Razonamiento Matemático.

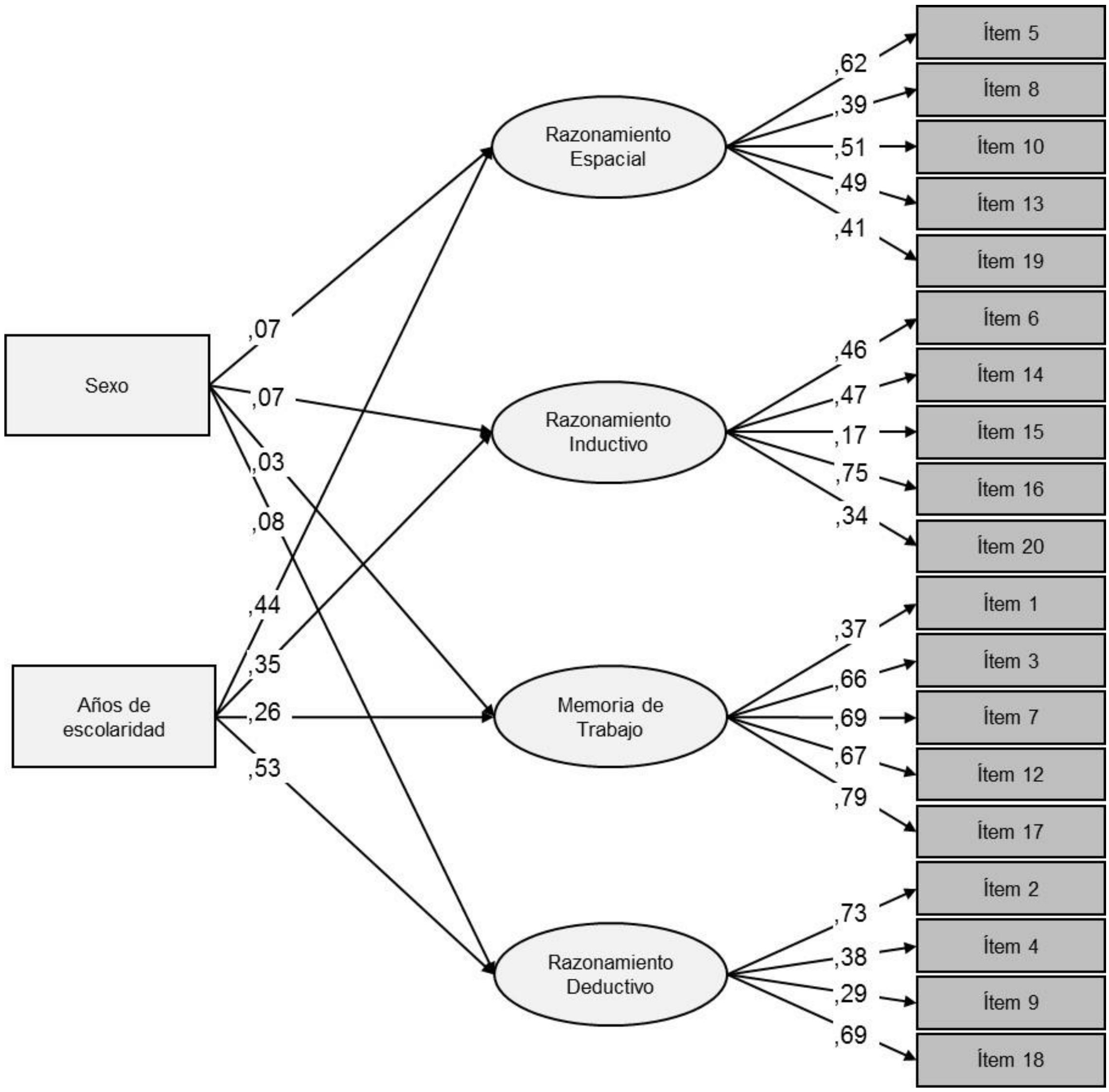


Figura 5: Modelo estandarizado de Múltiples Indicadores y Múltiples Causas

4.6 Modelo estructural del razonamiento matemático

Hasta ahora hemos completado los pasos de análisis que se detallan. Primero, la verificación de la existencia de un modelo de medida básico, compuesto por las cuatro dimensiones citadas. Segundo, la comprobación de un modelo que sostiene la existencia de una dimensión general. Tercero, se ha complementado lo anterior con un análisis diferencial del Razonamiento Matemático y sus dimensiones. El siguiente paso y final en esta experiencia es llevar cabo análisis de modelos que permitan conocer la estructura interna de las dimensiones del Razonamiento Matemático.

El modelo de Razonamiento Matemático propuesto se basa en cuatro dimensiones: Memoria de Trabajo, Razonamiento Inductivo, Razonamiento Deductivo y Razonamiento Espacial. Se planteó anteriormente la existencia de algunos modelos estructurales que colocan a la Memoria de Trabajo como una variable antecedente, que influencia de manera directa o indirecta a las otras tres dimensiones. A partir de allí se ponen a prueba dos modelos de las relaciones, tomando como premisa que la Memoria de Trabajo incide sobre las otras dimensiones.

Tabla 27. Varianza explicada Ítem Variable Latente

RE					RI				
5	8	10	13	19	6	14	15	16	20
.38	.15	.27	.24	.17	.21	.23	.03	.57	.12
RD					MT				
2	4	9	18		1	3	7	12	17
.54	.15	.09	.48		.14	.43	.47	.45	.63

Note. Todas son significativas.

*p <.05. **p <.01.

4.6.1 Modelo 1

En este primer modelo las dimensiones Razonamiento Inductivo, Razonamiento Deductivo y Razonamiento Espacial están directamente condicionadas por la Memoria de Trabajo. Además, se estima que existe una relación de dependencia entre el Razonamiento Inductivo y el Razonamiento Deductivo con el Razonamiento Espacial, influyendo el último sobre los otros dos –ver figura 6-.

El modelo presenta un ajuste excelente –ver tabla 28-. Los indicadores de ajuste del modelo considerados son excelentes, a excepción de la $\chi 2$ ajustada con el procedimiento de Satorra-Bentler que es significativa, como ha sucedido anteriormente.

Tabla 28. Indicadores de ajuste modelo estructural 1

X^2S-B			RMSEA			CFI	SRMR	GFI
X^2S-B	g.l.	P	RMSEA	Int 90%	Pclose			
1116,85	147	0,000	0,024	0,020—0,028	1,0	0,99	0,041	0,94

Respecto del modelo de medida, como se puede observar en la figura 6, las dimensiones se representan adecuadamente por los indicadores considerados, con la consideración del ítem 9 y del ítem 15. Consiguientemente, la estructura de medida es satisfactoria en las cuatro dimensiones.

En cuanto al modelo estructural, la Memoria de Trabajo, como dimensión antecedente, presenta una relación significativa sobre los otros tres constructos con una marcada diferencia sobre el Razonamiento Espacial, dado que el valor estandarizado es de 0,90. Esta relación entre Memoria de Trabajo y Razonamiento Espacial no pareciera extraña dado que ambas habilidades están relacionadas con la atención y el manejo de información.

Se comprueba también que la Memoria de Trabajo influye de manera importante a los constructos Razonamiento Inductivo y Razonamiento Deductivo, ligeramente superior en este último.

Por último, se puede ver que el Razonamiento Espacial influye significativamente tanto en el Razonamiento Deductivo como en el Razonamiento Inductivo, que presenta con este último una mayor relación.

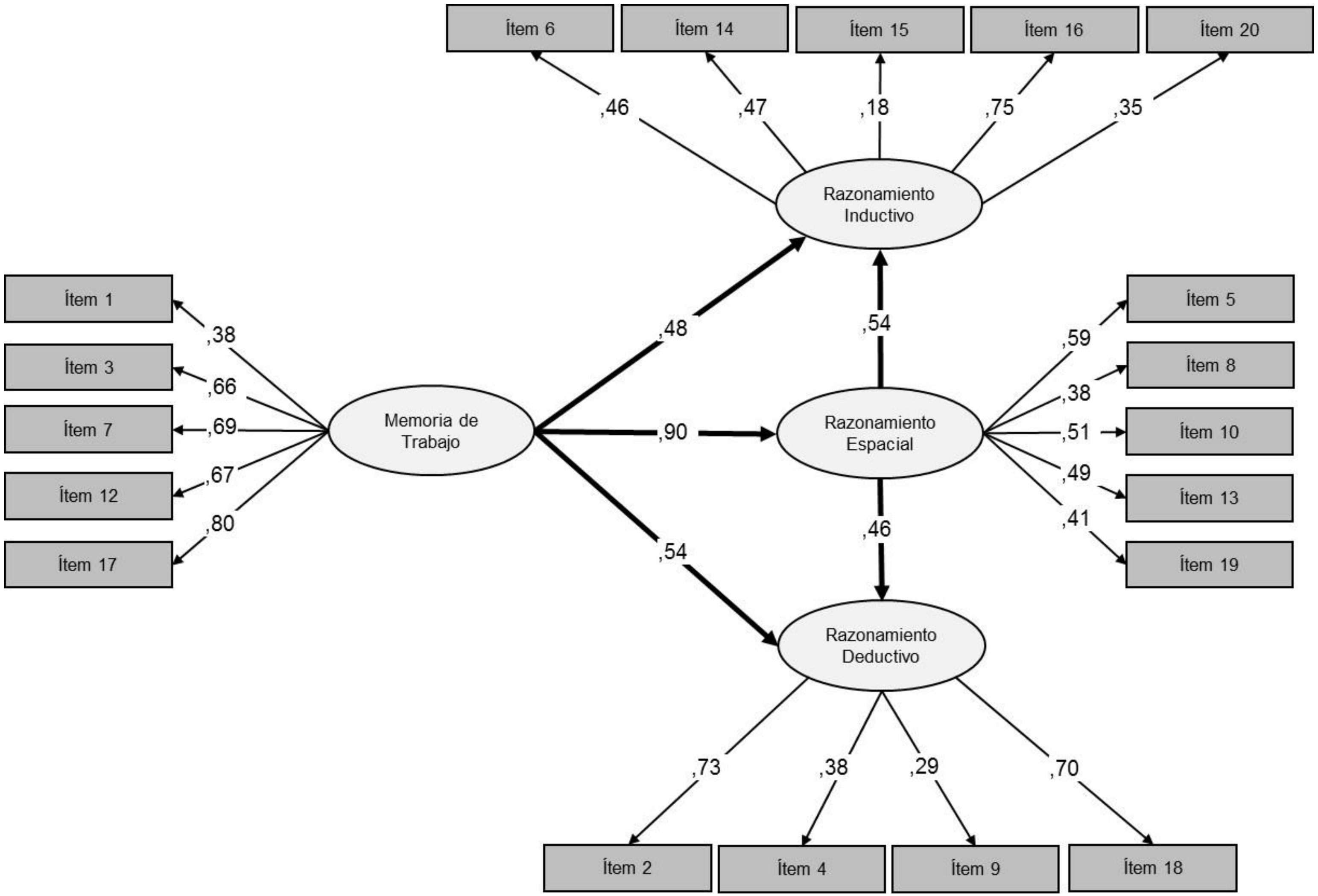


Figura 6: Modelo Estructural

4.6.2 Modelo 2

El segundo modelo –ver figura 7- es un tanto más restrictivo y postula que el Razonamiento Inductivo recibe influencias directas tanto del Razonamiento Espacial como del Deductivo. A su vez, la Memoria de Trabajo está incidiendo tanto en el Razonamiento Espacial como en el Razonamiento Deductivo.

Este segundo modelo sometido a prueba es mucho más interesante y adecuado con los planteamientos de la investigación propuestos. En la simplificación hecha de los constructos se confiere al Razonamiento Espacial y al Razonamiento Deductivo niveles inferiores respecto al Razonamiento Inductivo. De esta forma, el Razonamiento Inductivo refleja, según el planteamiento del modelo, un uso coordinado de Memoria de Trabajo, Razonamiento Deductivo y Razonamiento Espacial para ejecutar procesos más elaborados que incluyen generar hipótesis, discriminar aquellas que puedan ser útiles al contexto y realizar pasos deductivos para alcanzar conclusiones.

El ajuste del modelo es excelente –ver tabla 29-, como se puede comprobar a partir de los indicadores de ajuste del modelo considerados, a excepción de la $\chi 2$ ajustada con el procedimiento de Satorra-Bentler que es significativa, como ha sucedido anteriormente.

Tabla 29. Indicadores de Ajuste modelo estructural 2

X^2S-B			RMSEA			CFI	SRMR	GFI
X^2S-B	g.l.	P	RMSEA	Int 90%	Pclose			
1117,37	148	0,000	0,024	0,020—0,028	1,0	0,99	0,041	0,94

El modelo de medida representa las dimensiones adecuadamente a partir de los indicadores considerados, con la apreciación de los ítems 9 y 15. Por lo tanto, la estructura de medida es satisfactoria en las cuatro dimensiones.

En cuanto al modelo estructural, la Memoria de Trabajo presenta cargas muy altas sobre el Razonamiento Deductivo y el Razonamiento Espacial. Asimismo, estas dos dimensiones influyen significativamente sobre el Razonamiento Inductivo, con un mayor peso por parte del Razonamiento Deductivo que por parte del Razonamiento Espacial, visto el Razonamiento Inductivo como el más representativo en la estructura.

El suprimir la dependencia directa de la Memoria de Trabajo hacia el Razonamiento Inductivo, reservando su influencia a través de las otras habilidades, tiene un impacto significativo en la comprobación del modelo propuesto.

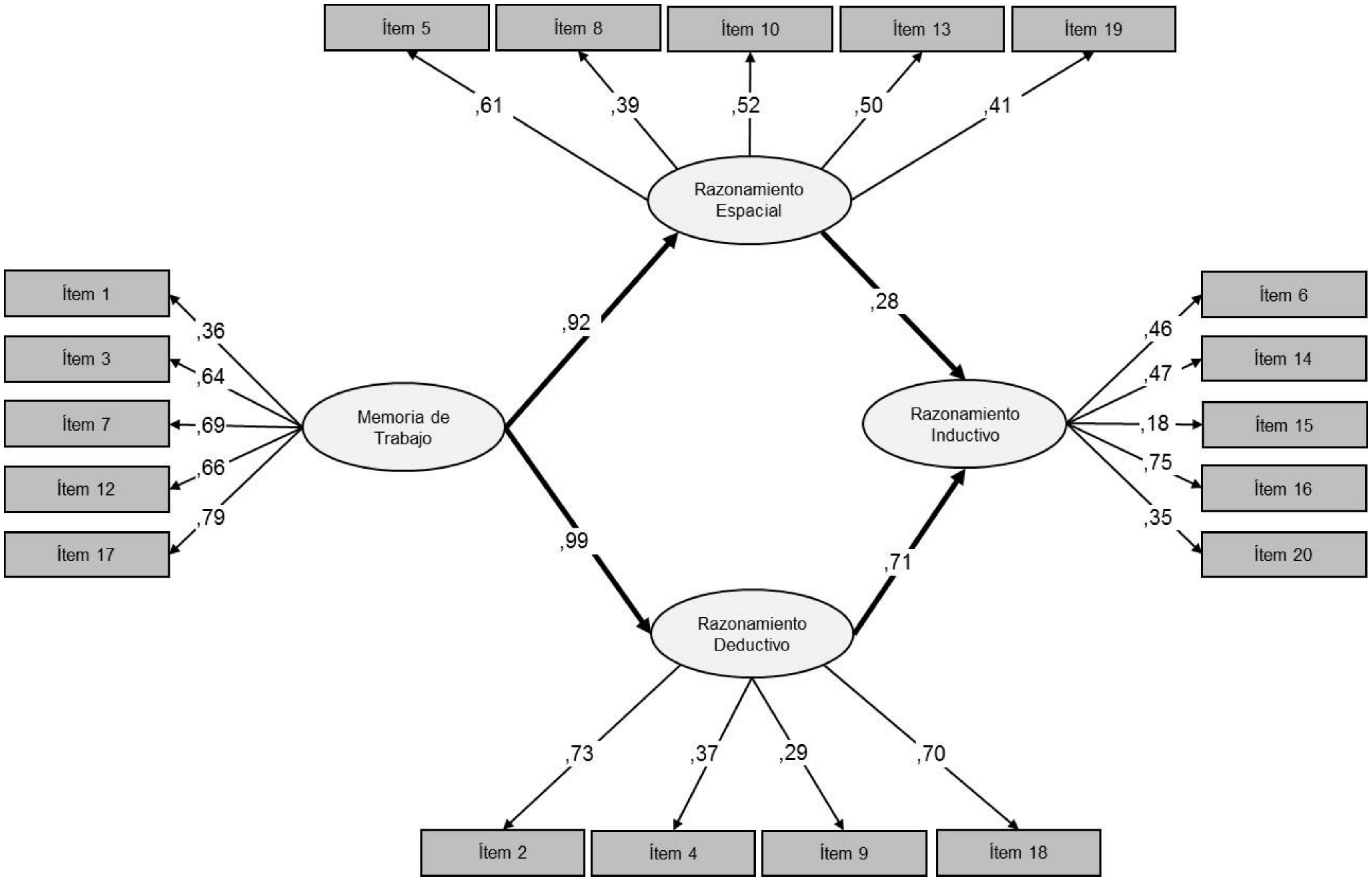


Figura 7: Modelo estructural 2

En conclusión, ambos modelos tienen niveles de ajuste excelentes. Los dos sostienen modelos de estructura que, sin ser excluyentes, explican relaciones importantes entre las dimensiones que se han propuesto. Es bueno reiterar que existen distintas perspectivas de los conceptos de razonamiento inductivo y deductivo. Como se ha dicho antes, se adopta una propuesta que proviene de una línea de pensamiento en psicología sobre los modelos cognitivos (Goel, Gold, Kapur & Houle, 1997), y en estos modelos cognitivos los constructos inductivo y deductivo se consideran distintos. Esta distinción la basan en reconocer que atienden aspectos de razonamiento diferenciados. El primero más asociado con la generación y prueba de hipótesis, el segundo asociado con mecanismos de deducción, en esta interpretación un tanto más mecánicos.

Los mismos autores reconocen que tanto el RI como el RD requieren de la memoria de trabajo, en distintos niveles. Por otro lado, la bibliografía es abundante sobre el tema de la memoria de trabajo y distintas formas de razonamiento (Meyer y col., 2010). El punto central de la simplificación hecha se centra en una reducción de lo deductivo, respecto a la diversidad que se le confiere, restringiendo éste a la parte inferencial y una interpretación más amplia de lo inductivo.

Para cerrar este análisis es interesante la estabilidad que ofrece el modelo de medida original al ser sometido a estas pruebas estructurales. Las dimensiones se mantienen bastante estables al agregar las dependencias, esta robustez también queda acentuada por la similitud en los índices de ajuste en cada modelo, lo que refleja una consistencia entre los datos y los modelos que a partir de ellos se comprueban.

5. CONCLUSIONES, LIMITACIONES y TRABAJO FUTURO

5.1 Conclusiones

En el razonamiento inductivo el conocimiento se plantea a partir del análisis de la información y las evidencias que se tiene a mano, siempre hay un riesgo latente de cometer errores de interpretación o llegar a conclusiones ligeramente difusas, más aún, si las evidencias cambian también podrían variar las conclusiones; esa lógica también aplica en estudios de disciplinas como el objeto de esta investigación.

Sin embargo esa posible debilidad de un estudio tiende a convertirse en una fortaleza cuando los datos provenientes de diversas fuentes respaldan sólidamente las inferencias que se plantean. En el contexto de esta investigación tanto los datos obtenidos en la muestra como los aportes de expertos apuntalan una serie de conclusiones importantes.

La educación demanda desarrollo de capacidades de razonamiento matemático adecuadas y éstas sólo se lograrán entendiendo mejor la estructura de las habilidades cognitivas y su relación con el razonamiento matemático. Como apuntan Taub y col. (2014) si bien la inteligencia general es un buen predictor del éxito académico, el conocimiento del IQ de un individuo no es un insumo fundamental en los procesos de instrucción y desarrollo del currículo, excepto para estudiantes en los extremos de la distribución. La planificación del currículo y los procesos de formación serán mejores si se entiende mejor las habilidades cognitivas de los estudiantes.

De manera complementaria, se ha expuesto previamente que existen debilidades manifiestas en esta habilidad en el entorno educativo costarricense. Y ante la debilidad la posición asumida por las autoridades políticas costarricenses ha sido atender la situación apuntalando dos aspectos calificados por ellos mismos como muy importantes: los programas de matemática y la forma en que se enseña matemática en Costa Rica. Sin ahondar en este par de elementos, esta propuesta corre el riesgo de ser una “silla de dos patas” al no contemplar otros elementos de equilibrio. Esas patas faltantes deben atender preguntas importantes, cuya respuesta es central para lograr un efecto significativo que genere las transformaciones necesarias, específicamente, dimensionar adecuadamente el problema para tener una mejor toma de decisiones y evaluar adecuadamente el impacto de esas decisiones. Los resultados de esta tesis permiten orientar estas dos tareas. Por un lado la descomposición planteada reduce el constructo a aspectos más granulares. Algunos de ellos, como la memoria de trabajo, se pueden incorporar en un plan de capacitación docente y más que capacitación en crear conciencia en el docente sobre el valor determinante que podría tener esta habilidad en el desempeño de los estudiantes en matemática. Por ejemplo promover más capacitaciones e investigación de aula, más desarrollo de habilidades de los docentes para reconocer estas habilidades y fomentarlas en la medida que sea posible entre los estudiantes.

Respecto a la medición de razonamiento matemático también parece haber un vacío importante. Los estudiantes tienen rendimientos débiles en razonamiento matemático, eso es un abstracto, y no es claro en qué consisten los fallos. No equivale a que no piensen o que no sean inteligentes, más bien es un elemento de desconocimiento de la naturaleza específica de las debilidades que pueden presentar. Hay un problema de fondo con la conducta vista en una forma general. En este sentido, los resultados de esta tesis ofrecen alternativas de evaluación orientadas por la descomposición planteada. Si, a partir de este punto, se añade investigación extra, parece posible facilitar la toma de decisiones tanto individuales como colectivas, lo cual es un elemento sumamente importante.

Desde esta perspectiva los alcances de esta tesis y las conclusiones que de ella derivan revisten especial importancia no sólo por su esencia, al abrir la posibilidad de convertirse en un insumo valioso en procesos de intervención educativa en el área de la matemática, sino también porque la solidez de los modelos queda evidenciada empíricamente por los expertos y por los resultados que emanan de los datos de la muestra.

Respecto a un modelo para el razonamiento matemático el análisis de la literatura permitió destilar a una propuesta compuesta por cuatro habilidades específicas. La misma ofrece la posibilidad de tener una representación parsimoniosa y coherente con lo que prevalece en la literatura. Propone cuatro habilidades secundarias definitorias del razonamiento matemático: Memoria de Trabajo (MT), Razonamiento Deductivo (RD), Razonamiento Espacial (RE) y Razonamiento Inductivo (RI). Estas habilidades sintetizan un sinnúmero de elementos presentes en la literatura especializada.

A pesar de no encontrar un modelo similar de las dimensiones, específicamente formulado en la literatura, a nivel general, el modelo propuesto es coherente con muchas aproximaciones relacionadas. Desde una perspectiva histórica muchos autores reconocen una estructura razonamiento matemático a nivel de los procesos que determinan el éxito en la resolución de problemas. Por ejemplo redescubrimiento instintivo, aplicación deliberativa y deducción formal en Freudenthal (Grozdev, 2007) o formalizar y diferenciar, generalizar, operar con símbolos y valores, para razonar asociado con pruebas y conclusiones, para recordar y para el pensamiento espacial en el pensamiento de Krutetskii (Grozdev, 2007), o Mason y col.(1980), citado por (Tall,1991), en la misma línea del pensamiento de Polya sugieren fases clarificación del problema e identificación de posibles formas de atacar el problema seguida de una fase de “ataque”, donde entran en juego técnicas que son usadas creativamente. Evidentemente estas propuestas son más acerca de cómo una persona enfrenta un problema y no de los aspectos cognitivos, pero si denotan una visión de fases organizada de cierta jerarquía. Más recientemente, y en la misma línea de esta investigación, Aiken (1972) hace referencia a estudios de (Coleman, 1956) y (Skemp, 1961) que reconocen que la habilidad matemática no es un concepto unitario sino que tiene una estructura dimensional, de igual manera en (Carrol, 1993) se evidencia una estructura de habilidades diferenciadas para la inteligencia, dos enfoques con similitud son abordados en (Geary, 2011) que reconoce 3 factores uno general la inteligencia y dos más específicos la memoria de trabajo y la velocidad de procesamiento.

En tiempos más recientes, con el afianzamiento del modelo CHC, han aparecido propuestas similares en la línea de proponer una descomposición de la inteligencia. La separación de factores: inductivo, deductivo, razonamiento fluido y cristalizado, velocidad de procesamiento, razonamiento espacial, memoria de trabajo, aunque difieren en la especificación, sustentan la propuesta de la separación de los factores para el razonamiento matemático y la intensión es muy consistente con esta literatura. (Carroll, 1993; Lohman, Colangelo y Assouline 1998; Floyd, Evans & McGrew, 2003; Haverty, Koedinger, Klahr & Alibali, 2000; Kim, Cho & Ahn, 2004; Proctor, Floyd & Shaver, 2005; Finn y col., 2014; Ritchie, 2015). Igualmente para Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando y

Prieto (2008) en las teorías de Inteligencias múltiples de Gardner IM, en el razonamiento lógico matemático se proponen tres habilidades: razonamiento cuantitativo, razonamiento lógico y razonamiento espacial. En Gómez-Chacón y col. (2014) se mencionan como factores de los que depende la competencia matemática: conocimiento matemático, métodos heurísticos entre otros. También Kontoyianni y col. (2013) propone un modelo de componentes de la habilidad matemática compuesto por cuantitativo–analítico, cuantitativo–relacional, causal-experimental, espacial–imaginario y verbal– posicional.

Todas estas conceptualizaciones modernas del razonamiento reconocen la multidimensionalidad del mismo y la similitudes expuestas son concluyentes acerca de la conveniencia de tener modelos explicativos para el razonamiento matemático similares a los modelos CHC (McGrew, 2009; McGrew & Wendling, 2010; Primi, 2003). En Taub y col.(2014), en un estudio sobre las habilidades cognitivas importantes en el entorno de la dinámica de la enseñanza de la matemática, se reconoce como factores que se deben considerar el suplementar la enseñanza tradicional con actividades que enfaticen en el estudiante el uso de herramientas viso espaciales, así como el desarrollo de estrategias instruccionales que ayuden al estudiante con el manejo de la información lingüística para construir el modelo y representación del problema a resolver. También, puntualiza como dos sub tareas importantes en el razonamiento las que incluyen los razonamientos inductivos y deductivos. Esta propuesta es bastante similar a la que se destiló para esta tesis que agrega la variable latente memoria de trabajo como factor fundamental.

A nivel más específico, la propuesta es coherente con otras presentes en la literatura especializada en cada una de las dimensiones. Respecto a la memoria de trabajo es frecuente, en los modelos de inteligencia en general, colocarla como elemento explicativo importante (Ashcraft & Krause, 2007; Kane, Hambrick & Conway, 2005; Lohman & col., 1998; Meyer, Salimpoor, Wu, Geary & Menon, 2010; Süß, Oberauer, Wittmann, Wilhelm & Schulze, 2002; Taub & col., 2008).

En todos ellos, sin ser específicamente modelos del razonamiento matemático, la memoria de trabajo se convierte en un elemento fundamental en los procesos. Para Geary (2011) la memoria de trabajo tiene influencias en el desempeño matemático más allá de la inteligencia y esto es concordante con la propuesta planteada en esta tesis de que la memoria de trabajo es un dominio específico y determinante en el razonamiento matemático. Para Gatherhole y col. (2004b), en un estudio sobre desempeño escolar, las operaciones mentales requeridas en matemática están limitadas por la capacidad general de memoria de trabajo. Las evidencias provenientes de la literatura especializada, tanto el marco teórico como en las referencias previas, soportan ampliamente la decisión de incluir la Memoria de Trabajo como un factor explicativo del constructo Razonamiento Matemático

Otra dimensión incluida es el razonamiento deductivo. La inclusión de esta es coherente con las investigaciones de diversos autores. Para Ward y Overton (1990) la familiaridad del estudiante con contenidos definidos en términos de relaciones relevantes entre antecedentes y consecuentes es un factor importante en la determinación del desempeño en el razonamiento. Esta dimensión con variantes respecto a la amplitud de su interpretación es común en la bibliografía sobre el tema.

Respecto a la coherencia de la dimensión espacial, el elemento visual espacial aparece reiterativamente en distintos enfoques. Por ejemplo Hegarty y Kozhevnikov (1999) muestran que algunas representaciones visuales y espaciales ayudan, y otras pueden obstruir, el éxito al resolver problemas. Por su lado Shea, Lubinski y Benbow (2001) apuntan que la estructura y la organización de las habilidades humanas requiere de esta dimensión, la habilidad espacial. Más contundente es la afirmación de Kell y col. (2013) acerca de que la habilidad espacial no sólo juega un rol único en la asimilación y utilización del conocimiento, también juega un rol único en el desarrollo de nuevo conocimiento. De igual manera reportan investigaciones que ofrecen evidencias, al menos parciales, sobre el rol de las habilidades espaciales en relación con las habilidades matemáticas y verbales y más allá (Gohm & col., 1998; Gottfredson, 2003; Webb, Lubinski, & Benbow, 2007). Esto sin duda justifica la incorporación de esta habilidad en el entramado del Razonamiento Matemático.

Otra referencia importante que da coherencia a la inclusión de esta habilidad proviene de Geary, Saults, Liu y Hoard (2000) al reportar que las habilidades espaciales repercuten significativamente en las diferencias individuales al resolver problemas de razonamiento.

La habilidad más elaborada que se concluyó fundamental en el modelo es lo que se llama razonamiento inductivo. Ésta implica creación y uso de representaciones abstractas, relaciones cuantitativas y cualitativas entre variables, hacer inferencias, inducir conceptos abstractos, comprender implicaciones, hacer deducciones no evidentes, reorganizar información. Como lo describen Ayalon y Even (2010) constituye una manera sistemática, paso a paso, de resolver problemas, en la que no necesariamente se presta atención a aspectos de validez o lógica formal, al menos no estrictamente. Esta habilidad está presente de manera indirecta o directa en todos los modelos de inteligencia y se presenta como fundamental al explicar el razonamiento matemático. Para Carroll (1993) es una parte general de la inteligencia humana que permite el desempeño en tareas cognitivas complejas en diversas áreas.

El modelo de explicación que se ofrece es específico al razonamiento matemático y coherente con otros modelos explicativos y en cierto sentido es más estructurado. Por ejemplo, en CHC se asocia con elementos de razonamiento fluido, la capacidad de pensar lógicamente y resolver problemas en situaciones nuevas que no dependen de conocimientos adquiridos (Wright, Matlen, Baym, Ferrer & Bunge, 2007). En las teorías de inteligencias múltiples la visión del razonamiento es aún más restrictiva, pero se define la inteligencia lógico-matemática como la capacidad para construir soluciones y resolver problemas, estructurar elementos para realizar deducciones y fundamentarlas con argumentos sólidos (García, García, Sainz, Prieto & Sánchez, 2008). En el modelo triárquico de Sternberg en la teoría componencial recoge elementos que se asocian con estas habilidades (Horn, 1991).

En conclusión, si bien no existe un modelo igual en la literatura, el propuesto con sus cuatro dimensiones es coherente con la literatura especializada y resume, simplificando en algunos casos y reagrupando en otros, un conjunto de habilidades que dimensionan teóricamente el constructo razonamiento matemático y nos llevan a un modelo teórico para la explicación del razonamiento matemático. Se puede concluir que la teoría respalda un modelo explicativo dimensional para el razonamiento matemático con el valor agregado de unificar en un modelo explicativo 4 elementos considerados como centrales en la literatura especializada. Un trabajo con una idea similar se presenta en (Cirino, Morris & Morris, 2007) al concluir un modelo explicativo del razonamiento matemático con tres componentes propuestos previamente en (Geary, 1993) a saber: Recuperación Semántica, Ejecutiva Procedural y Viso Espacial.

Este modelo, que se concluye como complemento entre la experiencia, la información revelada por la pruebas y la literatura especializada, acentúa su pertinencia al ser sometido a las evidencias que ofrecen los datos. La información que ofrecen las pruebas estadísticas a las que se somete el modelo y con base en la muestra justifican la coherencia del modelo teórico propuesto al evidenciar un modelo de medida que reporta índices de ajuste excelentes. Es decir, la estructura latente propuesta en el instrumento es apropiada tanto en el número de factores propuestos como en las relaciones ítem factor, presentando en cada factor ítems con cargas factoriales de buenas a excelentes e índices de ajuste global excelentes en los modelos considerados.

También, las cuatro variables latentes, Memoria de Trabajo, Razonamiento Inductivo, Razonamiento Espacial y Razonamiento Deductivo, se representan bien por los indicadores elegidos. El modelo de medida propuesto brinda una estructura de medida adecuada para las cuatro variables latentes propuestas que permiten dimensionar el constructo. Por tanto, el instrumento, como test de Razonamiento Matemático, es coherente con el modelo propuesto. La problemática de los ítems con baja saturación en las dimensiones está influida probablemente por su nivel de complejidad, o la comprensión de los mismos por parte de los estudiantes, hecho que ya apuntaron en algún caso jueces externos al valorar la dificultad de los ítems.

Otro elemento que se valora como muy importante se plantea alrededor de corroborar la existencia de una dimensión general llamada Razonamiento Matemático. Al someter a prueba este elemento las diferentes evidencias obtenidas en la muestra sostienen perfectamente la hipótesis de la existencia de la dimensión Razonamiento Matemático, a mayor puntuación en la dimensión Razonamiento Matemático mayor puntación en cada uno de los factores. Las asociaciones de las diversas variables latentes con el Razonamiento Matemático son altas y bastante equilibradas, y en todos los casos son altamente significativos. El Razonamiento Matemático puede ser caracterizado como una estructura de componentes cognitivos altamente interrelacionados. En resumen la dimensión general propuesta es coherente con los datos y afecta y es afectada de manera importante por cada dimensión incluida en el modelo.

Los resultados obtenidos son congruentes con lo expuesto por Lohman y col. (1998) respecto al hecho de que las habilidades cognitivas más que correlacionadas están organizadas jerárquicamente. Otro tanto sucede con reportes citados preliminarmente en ese mismo sentido (Acevedo & Martínez, 1995; Taub & col., 2008).

Respecto a las diferencias relativas a las variables contextuales, sexo y años de escolaridad, en cada una de las dimensiones del Razonamiento Matemático, los resultado previos del modelo general lineal evidenciaron diferencias en las varianzas relacionadas con el sexo y los años de escolaridad. Estas variables de contexto indicaron diferencias significativas pero con diferentes niveles de relevancia respecto al Razonamiento Matemático.

Los resultados obtenidos en el modelo general lineal apuntan a que tanto el sexo como los años de escolaridad muestran efectos estadísticos significativos en cada una de las dimensiones Memoria de Trabajo, Razonamiento Espacial, Razonamiento Inductivo y Razonamiento Deductivo, con un efecto mayor, al momento de explicar las diferencias, de la variable personal años de escolaridad. Los hallazgos, respecto a la variable edad son coherentes con investigaciones relacionadas respecto al factor edad en la explicación de diferencias en el desempeño en la resolución de problemas, por ejemplo, (Swanzon & Beebe-Frankenberger, 2004) no sólo reportan cambios relacionados con la edad sino también reportan que el ejecutivo central es un predictor importante en el desempeño de niños en la resolución de problemas, de manera similar (Ghatercole & col., 2004a) reportan que la memoria de trabajo crece en las capacidades funcionales de sus componentes a través de la escuela primaria, media y la adolescencia. También, respecto a la escolaridad, Primi & col. (2012), al investigar los efectos de los años de escolaridad y la edad sobre habilidades cognitivas asociadas con el rendimiento matemático como los son la inteligencia fluida y la cristalizada, enfatizan que estas inteligencias son influenciadas por la educación y por la madurez cognitiva y que entre éstas hay una fuerte correlación.

Por otro lado los efectos de las diferencias atribuibles a la variable sexo, aunque muy cuestionados y controvertidos por diversas razones (Spencer, Steele & Quinn, 1999), son recurrentes en la bibliografía especializada señalando diferencias en desempeño en ciertas tareas matemáticas complejas a favor de los hombres (Benbow, Lubinski, Shea, & Eftekhari-Sanjani, 2000; Ganley & Vasilyeva, 2011; Doris, O'Neill & Sweetman, 2013) .

En detalle, un resultado que salta a la vista en estos modelos es la tendencia creciente de las medias en la variable latente memoria de trabajo tanto en los grupos separados hombres y mujeres y de manera consistente en el general. Los datos reflejan que conforme los años de escolaridad aumentan también lo hacen las medias que reflejan el rendimiento en esta variable. Es decir los años de escolaridad, según los datos de la muestra, muestran un papel consistente y con tendencia creciente en el rendimiento en la variable memoria de trabajo, esto es concordante con la literatura que reportan este crecimiento durante los años de escuela y la adolescencia. También se manifiesta cierta tendencia a obtener mejores promedios los hombres que las mujeres en las distintas edades.

Ambas tendencias son similares en los cuatro constructos latentes siendo la memoria de trabajo la que muestra mejores promedios y el razonamiento espacial la más baja. La diferencia en hombres mujeres parece hacerse menos significativa en el primer segmento de escolaridad pero en general los datos evidencian esta diferencia por el factor sexo. Otros estudios consistentes con esta temática son (Cetin, Corlu, Capraro & Capraro, 2015; Geary & col., 2000; Benbow, 1980,1983; Yee & Eccles, 1988)

Con la finalidad de ampliar esta evidencia se sometió a prueba una verificación adicional del modelo de medida incluyendo estas variables contextuales como explicativas. Los resultados de ajuste del modelo son excelentes, identificándose efectos significativos en ambas covariadas. Respecto al sexo se concluyen diferencias estadísticamente significativas pero moderadas en magnitud a favor de los hombres, esto en cada una de las variables latentes. Respecto a los años de escolaridad la influencia es significativa y además de gran magnitud en todas las dimensiones del Razonamiento Matemático.

De manera coherente se complementan tres elementos: lo encontrado en los análisis MANOVA , la literatura general al respecto y los resultados del modelo de medida que incluye las variables contextuales sexo y años de escolaridad. Un estudio realizado por Keith, Reynolds, Patel y Ridley (2008), sobre diferencias debidas al sexo en habilidades cognitivas, reporta resultados que predominantemente apuntan a diferencias que favorecen a los hombres en aspectos específicos de la habilidad espacial, tales como percepción espacial, rotación mental, visualización espacial o memoria visual. El estudio citado sugiere además diferencias a favor de los hombres y consistentes a lo largo de la edad en algunas habilidades cognitivas, razonamiento cuantitativo y viso espacial, esto es consistente con lo obtenido en el contexto de esta tesis.

De igual forma en Keith y col. (2008), respecto al razonamiento fluido, que incorpora elementos de razonamientos deductivo e inductivo, se reportan diferencias a favor de los hombres, especialmente cuando el razonamiento fluido es medido a través de Test de Matrices Progresivas. También se señalan diferencias a favor de los hombres en el razonamiento cuantitativo, muy ligado al razonamiento matemático.

Respecto a la segunda covariada, los resultados obtenidos muestran que los años de escolaridad tienen un impacto significativo y grande sobre cada una de las habilidades medidas. Todas ellas se incrementan significativamente con la escolaridad, con valores de efecto total similares.

Esta conclusión es coherente con investigaciones preliminares. Por ejemplo en Gathercole, Pickering, Ambridge y Wearing (2004a) se concluye que la memoria de trabajo se manifiesta a los seis años -o incuso antes- y crece linealmente hasta la adolescencia. Madruga y Corte (2008) informan la existencia de estudios que muestran que la memoria de trabajo se incrementa con la edad, específicamente en (Elosúa y col., 1997). En términos más generales, los resultados son consistentes con posiciones que sostienen que la inteligencia mejora con la escuela (Nisbett y col., 2012). Un enfoque más general y que involucra la memoria de trabajo, la inteligencia fluida y la velocidad de procesamiento es propuesto por Fry y Hale (1996; 2000) que reportan que la velocidad de procesamiento, la memoria de trabajo y la inteligencia fluida presentan un crecimiento no lineal en función de la edad, además, sobre el rol predominante de la memoria de trabajo indican que mucho del efecto del crecimiento en los puntajes de test de inteligencia, relacionado con la edad, pueden ser atribuidas al crecimiento en las capacidades de la memoria de trabajo.

En lo relativo a la estructura del ámbito que se aborda y define, inicialmente, como el ámbito de medida del Razonamiento Matemático con sus diversos componentes, en esta propuesta se amplía la propuesta con la exploración y contraste de modelos estructurales más allá del modelo de medida. En estos modelos adicionales, las dimensiones del Razonamiento Matemático juegan un rol interno no simétrico, incorporando un entramado de influencias entre las mismas. Todo ello amplía el espectro explicativo del modelo incorporando algunas relaciones de causalidad ya implícitas en la misma formulación del mismo, y en la literatura en el contexto de la inteligencia. Se sometieron a verificación dos modelos estructurales en los cuales, de manera absolutamente coherente con la descripción previa del modelo, la memoria de trabajo es la habilidad que influencia las otras tres. El primer modelo coloca a la Memoria de Trabajo como punto de partida que incide de manera directa sobre el Razonamiento Deductivo, el Razonamiento Espacial y el Razonamiento Inductivo, y propone un efecto directo de la latente espacial sobre la inductiva y la deductiva y un efecto indirecto de la memoria de trabajo, a través de la espacial, sobre las otras dos latentes, Razonamiento Inductivo y Razonamiento Deductivo. Como se ha dicho antes es un modelo que se establece sobre la base, ampliamente discutida, de que la memoria de trabajo afecta directamente a cada una de las latentes y adicionalmente explora si la relación o efecto del razonamiento espacial sobre razonamiento inductivo y el deductivo se puede diferenciar, como se ha citado, un segmento de la literatura especializada es recurrente sobre el efecto diferenciado del factor visual en los modelos de inteligencia humana.

Los ajustes del modelo son excelentes, los efectos totales, directos e indirectos, de la memoria de trabajo sobre las otras tres latentes es muy alta y similar, también se evidencia el efecto diferenciado del razonamiento espacial sobre cada uno de los factores inductivo y deductivo. Las derivaciones del modelo que se puso a prueba son consistentes con la literatura especializada, y citada previamente, que colocan a la memoria de trabajo como precursor de componentes de la inteligencia fluida asociados con el razonamiento matemático y el rol diferenciado de la dimensión espacial.

En el segundo modelo se plantea nuevamente un modelo causal, pero con un efecto directo del factor Memoria de Trabajo sobre los razonamientos deductivo y espacial e indirecto, a través de éstos, sobre el Razonamiento Inductivo. Es un modelo explicativo alternativo con la intensión de dimensionar mejor el rol del Razonamiento Inductivo que en la formulación propuesta en esta tesis y en la literatura especializada se interpreta como la habilidad más elaborada en el contexto del razonamiento matemático. Los ajustes del modelo son nuevamente excelentes. El total de efecto de la Memoria de Trabajo sobre el Razonamiento Deductivo es similar que en el primer modelo y el efecto sobre el espacial similar al caso previo, mientras que el efecto directo del componente espacial sobre el inductivo es más discreto que en el primer modelo pero el efecto del deductivo sobre el inductivo es muy alto y el efecto total Memoria de Trabajo sobre el inductivo es similar al primer modelo.

Sobre los dos modelos vale destacar que la decisión de valorarlos usando modelos estructurales así como la coherencia de los resultados que derivan de ellos se sustentan tanto a nivel de resultados como de métodos de análisis en diversas fuentes de la literatura. Como referencia, desde la perspectiva del uso de esta metodología, puede citarse a Unsworth, Fukuda, Awh & Vogel (2014) en un estudio para explicar las relaciones entre componentes de la memoria de trabajo e inteligencia fluida, vista como la habilidad de resolver problemas de razonamiento novedosos. En dicha investigación, mediante modelamiento por ecuaciones estructurales analizan el efecto de algunas componentes básicas de la memoria de trabajo sobre la misma y el efecto de la memoria de trabajo sobre la inteligencia fluida, en el mismo sentido (Süb y col., 2002; Oberauer, Süß, Schulze, Wilhelm & Wittmann. 2000) plantean investigaciones sobre la relación entre componentes de la memoria de trabajo con contrapartes de la inteligencia usando modelos de medida para los constructos mismos y modelos de ecuaciones estructurales para valorar las dependencias, similarmente (Engle & col.,1999). Estudios con enfoques metodológicos similares se han usado para estudiar el efecto de entrenamiento del razonamiento inductivo sobre la inteligencia fluida (Klauer, Willmes & Pyne, 2002). Desde este perspectiva, el uso de estas técnicas de análisis, incluyendo modelos de medida y modelos de influencia se concluyen apropiados y consistentes con investigaciones similares en el área de estudio de interés de esta tesis. Desde la perspectiva de los modelos estudiados, tanto a nivel de medida como de estructura, se perfilan como elementos explicativos que integran distintos hallazgos en modelos explicativos comunes en la literatura especializada y discutidos ampliamente con anterioridad y tienen el valor agregado de integrarlos en modelos que a partir de ser coherentes con la literatura permiten una explicación del constructo que integra distintos factores y con ajustes adecuados.

Un análisis mas detallado ayudará a dimensionar mejor los aportes de esta tesis. El razonamiento inductivo se relaciona con la inteligencia fluida. Esta habilidad correlaciona con herramientas cognitivas importantes como comprensión, resolución de problemas y aprendizaje (Catell, 1971) citado por Unsworth y col. (2014). Estos investigadores, usando distintos modelos, entre ellos de medida y modelos de ecuaciones estructurales, estudian relaciones memoria de trabajo inteligencia fluida. Entre sus conclusiones destacan correlaciones entre memoria de trabajo e inteligencia fluida, advirtiendo que esto es consistente con muchos estudios previos (p.18), justifican que quizá esta fuerte relación memoria de trabajo inteligencia fluida se deba a la habilidad de controlar la atención. De igual manera para Lohman y col. (1998) la inteligencia fluida es el fundamento para la habilidad de razonamiento inductivo y la investigación en cognición establece a la memoria de trabajo como el núcleo de las habilidades de razonamiento, incluida la inteligencia fluida. Otro referente muy importante es el trabajo de Süß y col. (2002), estos autores plantean un estudio detallado de la memoria de trabajo primero -a nivel más general- ésta como un excelente predictor del factor inteligencia y en un segundo estrato como predictor de habilidades intelectuales, para explicar la varianza en la habilidad de razonamiento, asociada con la inteligencia fluida en los modelos CHC. La propuesta se basa en una adaptación de un modelo para inteligencia conocido como BIS (Berlin Intelligence Structure Model) desarrollado por Jäger(1982, 1984) a la memoria de trabajo y, a criterio de los autores,- con lo cual coincido- la misma ofrece una descripción apropiada de la memoria de trabajo al estructurarla por medio de dos facetas: contenidos y funciones. Se intuye que es un estudio muy bien llevado y resalta el hecho que con el uso de modelos de ecuaciones estructurales predicen los factores de la inteligencia de los factores de la memoria de trabajo. Resaltando que, aunque con estudios correlacionales como el realizado no se puede decidir entre distintas direcciones de causalidad, la dirección de predicción en los modelos encontrados apuntan a la memoria de trabajo como factor causal de la inteligencia y no en la dirección contraria. En el estudio citado se analiza, a la luz de los datos, modelos de medida para la inteligencia (BIS), modelos estructurales para la memoria de trabajo y resaltan diversos modelos confirmatorios para las relaciones entre memoria de trabajo e inteligencia. La sugerencia planteada por los autores más consistente con el trabajo realizado parte de que los recursos de memoria de trabajo, en contraposición a una capacidad general, son factores limitantes de factores contraparte en la estructura de habilidades mentales. Remarcando una mayor influencia sobre aquellas relacionadas con el razonamiento. Esta investigación, cuya intensión y alcances son distintos a los propuestos en la tesis, ofrece resultados muy consistentes con los resultados aquí obtenidos. Referencias similares acerca de la memoria de trabajo como un fuerte predictor de la inteligencia fluida aparecen en (Kane & col., 2004; Kane & col., 2005).

Sobre la carga directa del razonamiento espacial sobre el inductivo es común en la literatura relacionada reportar correlaciones moderadas, pero sí se reconocen que el razonamiento espacial incide en la resolución de problemas de razonamiento (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Lean & Clements, 1981). Los resultados obtenidos también son coherentes en este sentido.

Un análisis detallado de los modelos permite hacer observaciones interesantes. En el primer modelo la magnitud del efecto total de la memoria de trabajo sobre cada uno de las habilidades es alto, hecho coherente con el discurso acerca de la relación de la memoria de trabajo al convertirse en capacidad limitante de la inteligencia fluida. Sin lugar a duda la influencia de la memoria de trabajo sobre las otras componentes del Razonamiento Matemático acentúa la pertinencia del modelo propuesto y abre oportunidades para nuevas investigaciones orientadas a dar mayor solidez al mismo, por ejemplo qué componentes de la memoria de trabajo tienen mayor relación con el desempeño en el razonamiento. Respecto al razonamiento deductivo los resultados del modelo son consistentes con hallazgos en la literatura especializada, por ejemplo (Barroillet & Lecas, 1999) en una investigación sobre modelos mentales apuntan que a mayor capacidad en ciertas componentes de la memoria de trabajo mejores capacidades en el manejo de modelos que sustentan interpretaciones condicionales, de igual forma (Goodwin & Johnson-Laird, 2005) citando a (Baddeley, 1986; Klauer, Stegmaier & Meiser, 1997) resaltan que, para estos autores la capacidad limitada memoria de trabajo es una limitante en la deducción. Finalmente en este mismo modelo la fuerte influencia de la memoria de trabajo sobre el razonamiento espacial también se reporta en fuentes como (Vooght,1997) al afirmar que los individuos construyen representaciones espaciales con el soporte de los recursos viso espaciales de la memoria de trabajo. Los resultados de esta tesis parecen soportar que estas representaciones en sí mismas son un elemento de razonamiento y que también lo son como un elemento central en los esquemas de razonamiento matemático general al ser condicionantes de los razonamientos inductivos y deductivos. Para (Van Garderen & Montague, 2003) la investigación sobre la relación entre las representaciones viso espaciales y la resolución de problemas matemáticos ha sido equivocada, citan estudios que contrastan por un lado (Hegarty & Koshevnikov, 1999) que reportan que no hay correlaciones significativas y por otro (Barratt, 1953; Campbell, Collis, & Watson; 1995; Lean & Clements, 1981) que si reportan relaciones. Estos autores, en su estudio, encuentran que el uso de representaciones viso espaciales correlaciona de manera positiva y significativa con el desempeño en la resolución de problemas de razonamiento matemático.

Recapitulando los modelos de influencias puestos a prueba en esta tesis permiten, de manera consistente con literatura especializada, afirmar una estructura de influencias en la que el factor Memoria de Trabajo no sólo es parte fundamental del modelo de medida para el Razonamiento Matemático, también, es un factor limitante de otras dimensiones en Modelo de Razonamiento, esto es coherente con hallazgos similares respecto a su influencia en habilidades generales del modelo CHC. Los modelos de estructura reafirman la fuerte influencia de la Memoria de Trabajo vista como capacidad limitante de las otras tres de manera directa. Si bien ambos modelos permiten identificar una estructura explicativa adecuada se puede agregar que el modelo 1 permite diferenciar la influencia de la variable Razonamiento Espacial sobre los razonamientos Deductivo e Inductivo, visión defendida por muchos investigadores acerca del rol diferenciable de la dimensión espacial sobre las manifestaciones del razonamiento. Para efectos de una posible intervención el primer modelo ofrece una descomposición más adecuada en el tanto el factor Razonamiento Espacial se visualiza como limitante de las dos habilidades tradicionalmente asociadas con el desempeño en razonamiento matemático: Deducción e Inducción, y a su vez es limitado por la Memoria de Trabajo.

El segundo modelo ofrece una explicación alternativa que, acorde con lo planteado en el marco de esta tesis, coloca a la memoria de trabajo como la variable independiente que limita a las otras y al razonamiento inductivo como la variable mayormente determinada por las anteriores. Manteniendo los hallazgos que ofrece el primer modelo y en concordancia con algunas propuestas que apuntan una relación cercana entre el razonamiento y la inteligencia fluida (Klauer, Willmes, Phye; 2002) y entre ésta y el desempeño en matemática (Primi, y col, 2010), referenciados en trabajos de (Ackerman, & Cianciolo, 2002; Blair, 2006; Busse, Berninger, Smith, & Hildebrand, 2001; Geary, 1993, 2007; Heitz y col., 2005; Kane col., 2005; Primi, 2002; Snow y col., 1984; Swanson y col., 2008) este modelo explica el razonamiento inductivo de manera indirecta por la memoria de trabajo a través de la mediación de dos variables más cercanas a la matemática misma como lo son el razonamiento deductivo y el espacial. Por un lado separa de manera más clara el rol del razonamiento deductivo como central en el inductivo y mantiene básicamente las mismas cargas e interpretaciones respecto al razonamiento espacial, un elemento que surge es la reducción del efecto directo del razonamiento espacial sobre el inductivo.

Ambos modelos corresponden con interpretaciones apropiadas de las relaciones causa efecto planteadas, explican la memoria de trabajo como elemento central en los procesos y que, de acuerdo al modelo planteado, permiten representar mejor el rol del razonamiento deductivo.

En resumen, la experiencia desarrollada permite comprobar dos modelos explicativos de la estructura del razonamiento matemático que colocan a la memoria de trabajo como habilidad fundamental que incide en habilidades asociadas con el razonamiento matemático. Esto es concordante con diversos estudios en la literatura especializada que colocan a la memoria de trabajo como factor explicativo de capacidades de razonamiento (Süß y col, 2002; Lohman y col, 1998), en el mismo sentido en un estudio acerca de los roles, a lo largo de la edad, de la memoria de trabajo y la velocidad sobre la inteligencia fluida (Demetriou y col., 2014) someten a prueba relaciones estructurales entre la edad, velocidad de procesamiento, la memoria de trabajo y la inteligencia fluida, bajo la hipótesis que la edad de manera directa e indirecta a través de la velocidad y la memoria de trabajo, explican varianza en la inteligencia fluida, este estudio considera más de una decena de estudios previos con algunas similitudes basados en el mismo tipo de análisis estructural, lo cual refuerza la coherencia de los análisis planteados. Es difícil comparar estos modelos explicativos, especialmente por lo complejo de un constructo como es el razonamiento matemático, pareciera más factible recurrir a ellos de acuerdo al uso que se les quiera dar. Del primero se puede rescatar la importancia de cada una de las componentes del modelo y la pertinencia de prestar atención especial a la memoria de trabajo y a la componente espacial en el entramado del razonamiento en general, especialmente al momento de promover intervenciones que tiendan a mejorarlo. El segundo modelo se centra más en el análisis de una jerarquía para las componentes propuestas. Estos modelos, que parten de un planteamiento general de la memoria de trabajo, interpretada como se plantea en la tabla 2, reafirman a la memoria de trabajo como limitante de las capacidades de razonamiento matemático y aportan un elemento valioso al rol del manejo de inferencias como mediador entre las capacidades relacionadas con la memoria de trabajo y el razonamiento fluido. Es decir la relación de efecto deductivo inductivo manifiesta en el modelo, reafirma la importancia de la manejo de relaciones tipo modus ponens al momento de realizar razonamientos matemáticos así como el rol del razonamiento espacial.

A modo de cierre cada una de las preguntas que generan esta tesis fueron respondidas. Hay evidencias manifiestas de problemas con el desempeño en razonamiento matemático en los estudiantes costarricenses. La literatura permite justificar un modelo estructural para el razonamiento. La datos evidencian, satisfactoriamente, la validez del modelo de medida, su estructura jerárquica y modelos oportunos de tipo causales. También los datos evidencian, reconocidas diferencias respecto a variables contextuales sexo y años de escolaridad.

Asimismo, los resultados obtenidos respecto a la fiabilidad de las dimensiones derivadas de la prueba, tanto la ω de Macdonald como el Alpha de Cronbach modificado, revelan índices altos que permiten valorar el instrumento en la toma de decisiones individuales respecto al razonamiento. Este es un resultado significativo y de gran utilidad futura en dimensionar el razonamiento matemático en los estudiantes a efecto de identificar sus debilidades. También fundamental al evaluar el efecto de programas específicos.

Desde luego, al igual que en los modelos que explican la inteligencia, el camino en estas investigaciones es largo y dinámico. A pesar de ello, el aporte de la investigación es fundamental porque contribuye, con una propuesta concreta y bien fundamentada, a comprender mejor un aspecto central en la educación matemática. Así, se facilitan dos elementos claves, una mejor evaluación formativa de la habilidad y la definición de procesos de intervención educativa más oportunos.

En general y a pesar de que los expertos valoraron que la dificultad de algunos los ítems no era alta, los resultados muestran otra cosa. Los ítems usados resultaron difíciles para los estudiantes lo que demuestra que el problema del bajo rendimiento tanto en pruebas PISA como en Canguro Matemático reflejan una situación real: Los estudiantes en la muestra presentan esquemas de razonamiento matemático débiles en términos comparados a los estándares de su nivel en otros contextos sociales.

Un trabajo que podría mejorar el nivel predictivo individual de la prueba, y probablemente los resultados, consiste en replantear algunos ítems de manera que la dificultad no sea un elemento preponderante tratando de mantener la estructura ya encontrada. Aunque para los efectos del estudio la dificultad no representó una limitación determinante, una mejor graduación ayudaría a hacer más robusta la herramienta y más apropiada para la toma de decisiones individuales.

Queda mucho trabajo por hacer, pero el avance logrado es significativo. Contrario a la tendencia general en la educación matemática de clasificar los problemas por los criterios de contenidos, es decir geometría, álgebra, teoría de números, etcétera, y por su carácter de razonamiento (lógica) o aplicación (recordar procesos o técnicas) esta propuesta ofrece un enfoque completamente diferente que contempla una clasificación más orientada por los elementos cognitivos detrás de los procesos de resolución de los problemas y ese sentido más adecuada respecto a los procesos de desarrollo del pensamiento en los estudiantes. Encontramos aquí una estructura que ha demostrado ser apropiada para el razonamiento matemático y que permite identificar acciones concretas para atender integralmente el tema de razonamiento matemático.

En el caso costarricense los programas que rigen los procesos de enseñanza aprendizaje desde el 2012, adolecen de consideraciones de carácter cognitivo que contemplen algunas diferencia individuales como elemento que permita mejorar los procesos.

En la propuesta vigente se identifican procesos generales básicamente copiados de las experiencias y ejes internacionales. Emerge el eje de la resolución de problemas como eje principal del currículo, entendiendo como central la habilidad de plantear y resolver problemas desde el lado de los estudiantes y la resolución de problemas como estrategia metodológica principal para los docentes. Pero esto conlleva una limitación intrínseca al carecer de una orientación más granular sobre aspectos clave convirtiendo este eje en una caja negra y dejando a los docentes buena parte de la interpretación en aspectos medulares del tema, como son los aspectos cognitivos. Como se ha dicho anteriormente, los resultados aquí obtenidos ofrecen elementos para organizar la intervención educativa atendiendo aspectos preliminares que inciden en la habilidad considerada como ámbito de trabajo.

5.2 Limitaciones y dificultades.

Una gran limitación en las investigaciones de esta naturaleza, y citada anteriormente, es la carencia de claridad sobre distintos conceptos usados en la disciplina, por ejemplo resolución de problemas, razonamiento inductivo, razonamiento deductivo entre otros. Esto sin duda tiene implicaciones importantes al valorar los resultados de esta tesis.

Teóricamente la amplitud de enfoques sobre la inteligencia y sobre los factores asociados con la resolución de problemas obligan a realizar simplificaciones fuertes de constructos. Por ejemplo, la memoria de trabajo se simplifica a sus conceptos más básicos, y conceptos como razonamiento deductivo e inductivo, tan estudiados y relacionados, se reorganizan para efectos de los modelos propuestos. Esta es una limitación conceptual necesaria, no obstante eventualmente hay que analizar la pertinencia de los nombres dados a las variables a la luz de concepciones comunes en la literatura.

Otra limitación de carácter tanto metodológico como operativo viene de la imposibilidad de incorporar elementos contextuales o actitudinales que permitan mejorar la calidad de los estudios. Por ejemplo, el instrumento no incorpora en su medición aspectos relacionados con el compromiso del estudiante al hacer la prueba o aspectos como ambiente o motivación. Aspectos muy comunes en la literatura técnica al respecto.

Hay limitaciones provenientes del muestreo. Un acierto, que tiene un impacto importante, es la heterogeneidad de la población en el sentido de incluir estudiantes sin distinguir sus habilidades matemáticas eso da generalidad al estudio, la limitación proviene de no haber usado una técnica de muestreo más adecuada al contexto país. Estas experiencias dependen de la voluntad de quienes colaboran y se debe luchar con esta limitación.

La limitación más significativa, a juicio del investigador, fue el no haber contado con una población más homogénea en el rango de edad.

También puede considerarse como limitación el tipo de prueba que se utiliza la cual al ser de selección no permite una evaluación más granular de las capacidades.

5.3 Trabajo Futuro.

El área de la investigación en educación es muy dinámica y sensible no solo a los cambios antropológicos en el individuo, también los es a los nuevos hallazgos que permiten comprender mejor su funcionamiento cognitivo. Los problemas en educación deben entenderse para luego resolverlos en una dinámica recursiva, el proceso de entender el problema suele abrir nuevos y más retadores problemas. En este sentido como cualquier tesis doctoral las nuevas inquietudes que surgen suelen sobrepasar las preguntas de investigación que se respondan. Concluyo con algunas líneas de trabajo y acciones futuras interesantes que derivan de esta experiencia.

Escalar los resultados de esta experiencia a otros conglomerados de jóvenes en poblaciones con características distintas, por ejemplo estudiantes de instituciones privadas, en las que se da mayor impulso al desarrollo del razonamiento matemático, o de otros países. Esta posibilidad de poder contrastar los resultados arrojados por los datos usados en el contexto de la tesis, con resultados en otros contextos es una extensión natural del proyecto. En el caso de Costa Rica una alternativa interesante podría ser usar poblaciones conformadas con los estudiantes de algunas regiones educativas o provincias.

También pareciera más que necesario aplicar esta prueba y sus respectivos análisis a una población que incluya un rango más continuo de años de escolaridad, esto con la finalidad de dimensionar mejor este efecto y tener mayor heterogeneidad en esa variable. De manera similar es posible replicar un estudio de esta naturaleza con pruebas de desarrollo en las cuales se puedan establecer mediciones más granulares con el objeto de confrontar los resultados con los obtenidos en la experiencia de esta tesis.

Como sugieren (Goel y Dolan, 2004), el razonamiento inductivo es más sensible al conocimiento factual que a las formas lógicas. Diversas investigaciones, citadas en el corpus de esta tesis, reportan a la inteligencia cristalizada como elemento que afecta el razonamiento. Una de las ventajas del razonamiento matemático está relacionada con la posibilidad que ofrece de evaluarlo con actividades que pueden minimizar el efecto escolaridad, por ejemplo en la parte de razonamiento espacial actividades como torres de hanoi ofrece retos cognitivos cuyo abordaje tiene poca dependencia de conocimientos adquiridos, de igual forma es posible establecer mediciones del razonamiento deductivo a través de actividades que minimicen estos efectos. Un problema interesante es plantear un modelo similar al establecido en esta tesis que permita separar el efecto de la inteligencia cristalizada sobre cada una de las dimensiones o al menos sobre las dimensiones intermedias que se han clasificado como deductiva y espacial. En este sentido, el estudio planteado en esta tesis puede mejorarse incorporando elementos que permitan medir mejor el efecto inteligencia cristalizada o conocimientos adquiridos en el razonamiento matemático para poder separar mejor, y con ello medir mejor, los aspectos medulares del mismo. Por ejemplo un test o un apartado de contenidos que permita identificar el nivel de conocimientos que ha cristalizado el estudiante y que podrían incidir, como variable contextual o como una dimensión más en el modelo.

Una alternativa de trabajo futuro directo se traduce en tamizar el test usado para valorarlo y o mejorarlo como instrumento de evaluación robusto en sentido descrito por Tenko Raykov: Scale Construction and Development Using Structural Equations Modelling (Hoyle, 2012). Esto si se quiere es una tarea fundamental en el escenario costarricense y un aporte significativo que podría dar el Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC) a la educación costarricense.

Una de las conclusiones importantes de esta tesis, fundamentadas en los resultados de los análisis estructurales planteados, indica que la memoria de trabajo es un factor que tiene una alta influencia en las otras habilidades. Un trabajo de investigación que emerge de manera natural radica en estudiar la posible mejora de ciertas habilidades intermedias para el razonamiento matemático a través de mejorar la memoria de trabajo. Ya hay mucho en la literatura sobre el tema pero no orientado hacia la matemática específicamente. Dada la importancia manifiesta de la memoria de trabajo en los procesos de razonamiento, no sólo comprobada en esta tesis sino que ampliamente sustentada (Colom y col., 2007; Floyd & col., 2003; Heitz y col., 2005; Kane & col., 2005; Lohman & col., 1998; Redick & col., 2015) se requiere profundizar estudios tendientes a crear, evaluar y ejecutar proyectos educativos que ayuden a mejorar la memoria de trabajo. Sin dejar de lado observaciones como la planteada por Süb y col. (2002) al afirmar que si bien la capacidad memoria de trabajo es aceptada como un recurso importante y limitado para la cognición, el tema de qué factores de la memoria de trabajo afectan qué factores de la cognición no se ha resuelto aun y mas allá, qué factores de la memoria de trabajo afectan el constructo razonamiento matemático. En este sentido una alternativa mas de trabajo futuro es complementar la propuesta planteada en el sentido de instrumentos que permitan valorar el rol de las componentes de la memoria de trabajo con los distintos elementos del razonamiento matemático. En el contexto de esta tesis la memoria de tabajo se asume como una habilidad cognitiva limitada, escencialmente envuelta en mantener y transformar la información relativa a la tarea cognitiva de resolver un problema, esta es una redución necesaria en el contexto de la experiencia desarrollada, no obstante, aportes en la literatura sobre el tema sugieren un efecto diferenciado de distintos componentes de la memoria de trabajo sobre elementos cognitivos como el razonamiento deductivo y el desempeño espacial (Handley, Capón & Harper, 2002).

Ante este rol fundamental de la memoria de trabajo, inclusive por encima del IQ mismo, como apuntan Alloway y Alloway (2010), se hace fundamental explorar mucho mejor esta habilidad, especialmente si se busca, a través de ella, generar procesos de intervención en educación. Si bien existe mucha investigación en el tema (Alsina & Sáiz, 2004; Ariës, Groot Brink, 2015; Klingberg, 2010), incluso programas comerciales para ese fin por ejemplo (Klingberg, 2010), parecieran necesarias muchas más experiencias en este sentido, fundamentalmente por la profunda influencia que tiene la memoria de trabajo en el desempeño de los estudiantes. Específicamente es urgente traer y validar parte de esta experiencia el escenario educativo costarricense, así como, profundizar en investigaciones en el sentido que apunta (Ackerman y col., 2005), realizando múltiples estudios o test sobre habilidades específicas. Reitero que, aun cuando ya existen trabajos en el sentido de mejorar ciertas capacidades o habilidades de razonamiento a través de mejorar la capacidad de memoria de trabajo, hay cuestionamientos importantes que atender (Melby-Lervåg & Hulme, 2013; Shipstead, Redick, & Engle, 2012), en especial, plantear investigaciones que permitan aclarar afirmaciones acerca de que estos procesos tienen un efecto en los test pero que no es realmente significativo en la conducta y si es el caso nvestigar alternativas para hacer un mejor abordaje de los procesos de maduración de esta habilidad en los estudiantes. Algunos autores estiman que esto no es cierto y que es posible mejorar la conducta a través de programas específicos (Ariës y col., 2015; Beatty & Vartanian, 2015; Jaeggi, Buschkuehl, Jonides & Perrig, 2008). Por ejemplo en Jaeggi y col. (2008) se exponen resultados interesantes respecto a la posibilidad de mejorar la inteligencia fluida a través de mejorar a memoria de trabajo. También (Beatty & Vartanian, 2015) reconocen la existencia de intervenciones para mejorar la memoria de trabajo y sugieren que, teóricamente hay razones para suponer que esas intervenciones que mejoran las herramientas y o las capacidades de MT podrían mejorar la capacidad de razonamiento deductivo. Aunque estas investigaciones son incipientes los hallazgos son interesantes.

También es común que los test que miden el segmento memoria de trabajo lo hagan con elementos que no necesariamente evocan un contexto matemático y en esta experiencia se optó por una medición orientada hacia el manejo y procesamiento de información con un alto componente asociado con el razonamiento matemático, un proyecto que explore y permita reconocer relaciones entre mediciones de memoria de trabajo tradicionales y mediciones que tengan una orientación asociada con los requerimientos propios la matemática así como posibles asociaciones entre componentes básicas de la memoria de trabajo y el elemento asociado con el manejo de la infomación matemática se torna fundamental.

Contrastar correlaciones entre esta prueba y pruebas de carácter general usadas para medir la inteligencia o aptitud para ingreso a universidades como la prueba de aptitud del Instituto Tecnológico de Costa Rica, por ejemplo. Este es un trabajo en principio sencillo con un poco de voluntad de las autoridades pues cada año se dispone centenares nuevos estudiantes de los cuales ya se conoce el resultado de las pruebas de admisión estandarizadas.

Crear protocolos de para obtener información sobre los procesos cognitivos usados por los estudiantes al desarrollar actividades razonamiento matemático, específicamente en la resolución de problemas y aislar de ser posible los componentes para obtener valoraciones de avance y evitar los problemas debidos a variables dicotómicas y con ello mejorar la medición. Este es otro proyecto idóneo para una tesis de licenciatura.

Con los hallazgos de este estudio es factible plantear una investigación sobre efectos contextuales de tipo socioeconómicos, tipos de escuelas, tipos de familias, aspectos motivacionales como autoestima o confianza sobre el razonamiento matemático.

Esto sin duda hace pensar que aparte de los factores de razonamiento básico, es probable que emerja un factor debido al entorno, el cual se carga hacia la inteligencia cristalizada, no se planeó hacer ninguna evaluación al respecto, pero sin duda es un factor susceptible al análisis.

El trabajo futuro más importante de la perspectiva del investigador se centra en dos líneas: robustecer este instrumento mediante otras experiencias similares y desarrollar un material de apoyo con el cual se pueda apoyar a los maestros sobre estrategias para enfrentar el desarrollo del razonamiento en los estudiantes un tema muy complejo e importante en el escenario educativo costarricense y ciertamente desatendido.

Cada una de estas tareas de investigación perfectamente pueden ser desarrollada como tesis de licenciatura en la carrera de enseñanza de la matemática asistida por computadora en la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

6. REFERENCIAS

Acevedo, J. & Martínez, J. M. O. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de psicología general y aplicada: Revista de la Federación Española de Asociaciones de Psicología*, 48 (3), 339-351.

Ackerman, P. L., & Cianciolo, A. T. (2002). Ability and task constraint determinants of 408 complex task performance. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 8, 194−208

Ackerman, P. L., Beier, M. E. & Boyle, M. O. (2005). Working memory and intelligence: the same or different constructs? *Psychological bulletin*, 131 (1), 30.

Aiken, L. R. (1972). Language factors in learning mathematics. *Review of Educational Research*, 359-385.

Alfonso, V. C., Flanagan, D. P. & Radwan, S. (2005). The impact of the Cattell-Horn-Carroll theory on test development and interpretation of cognitive and academic abilities. *Contemporary intellectual assessment: Theories, tests and issues*,185-202

Alloway, T. P. (2009). Working memory, but not IQ, predicts subsequent learning in children with learning difficulties. *European Journal of Psychological Assessment*, 25 (2), 92-98.

Alsina, À. (2001). *La intervención de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo aritmético*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona,

Alsina, Á. & Sáiz, D. (2004). ¿es posible entrenar la memoria de trabajo?: un programa para niños de 7–8 años. *Infancia y aprendizaje*, 27 (3), 275-287.

Anderson, J. R. (1990). *Cognitive psychology and its implications* (3rd ed.). New York: Freeman.

Armstrong, T. (2009). *Multiple intelligences in the classroom*. Alexandria: Ascd.

Ariës, R. J., Groot, W. & Brink, H. M. (2015). Improving reasoning skills in secondary history education by working memory training. *British Educational Research Journal*, 41 (2), 210-228.

Arrieta Gallastegui, J. (1989). La resolución de problemas y la educación matemática. hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular. *Enseñanza de las ciencias,* 7(1), 63-71.

Artigue, M. (2014). La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: resultados, desafíos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemátic*a, 11, 43-59.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Arzarello, F., Garuti, R. & Ricci, R. (2015). The Impact of PISA Studies on the Italian National Assessment System. En R. Turner & K. Stacey (Eds.), *Assessing mathematical literacy* (pp. 249-260). New York: Springer

Ashcraft, M. H. & Krause, J. A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. *Psychonomic Bulletin & Review*, 14 (2), 243-248.

Au, J., Sheehan, E., Tsai, N., Duncan, G. J., Buschkuehl, M., & Jaeggi, S. M. (2015). Improving fluid intelligence with training on working memory: a meta-analysis. *Psychonomic bulletin & review*, *22*(2), 366-377.

Ayalon, M. & Even, R. (2008). Deductive reasoning: in the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (3), 235-247.

Ayalon, M. & Even, R. (2010). ¿mathematics educators? views on the role of mathematics learning in developing deductive reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8 (6), 1131-1154.

Bacal, E. (2010). *The woodcock-johnson three and math learning disabilities* (Tesis doctoral, Arizona State University).

Baddeley, A. (1986). *Working memory*. Oxford, England: Clarendon Press.

Baddeley, A. (1992). *Working memory*. *Science*, 255 (5044), 556-559.

Baddeley, A. (2012). Working memory: theories, models, and controversies. *Annual review of psychology*, 63, 1-29.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics, 18*(2), 147-176.

Barbera, C. G., Niebla, J. C., López, K. D. & Ortega, M. L. (2012). Rendimiento académico y factores asociados: aportaciones de algunas evaluaciones a gran escala. *Bordón. Revista de pedagogía*, 64 (2), 51-68.

Barrantes, A. (16 de Diciembre del 2014). Bachillerato empeoró a pesar de empujon de 9 puntos del MEP. *La Nación.*

Barratt, P. E. (1953). Imagery and thinking. *Australian Journal of Psychology*, 5, 154–164

Barrouillet, P., & Lecas, J. F. (1999). Mental models in conditional reasoning and working memory. *Thinking & Reasoning*, *5*(4), 289-302.

Beatty, E. L. & Vartanian, O. (2015). The prospects of working memory training for improving deductive reasoning. *Frontiers in human neuroscience*, 9, articulo 56.

Begeny, J. C., Eckert, T. L., Montarello, S. A., & Storie, M. S. (2008). Teachers' perceptions of students' reading abilities: An examination of the relationship between teachers' judgments and students' performance across a continuum of rating methods. *School Psychology Quarterly*, *23*(1), 43-55.

Begle, E. G. (1979). *Critical Variables in Mathematics Education: Findings from a Survey of the Empirical Literature*. Washington, DC: Mathematical Association of America/National Council of Teachers of Mathematics.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational studies in Mathematics*, *15*(2), 129-147.

Benatuil, D., Solano, A. C. & Torres, A. (2012). Inteligencia práctica: un instrumento para su evaluación. *Revista de Psicología, 23*(2), 174-200.

Benbow, C. P. (1980). Sex differences in mathematical ability: fact or artifact. *Science*, 210 (12), 1262-1264.

Benbow, C. P., & Stanley, J. C. (1983). Sex differences in mathematical reasoning ability: More facts. *Science*, *222*(4627), 1029-1031.

Benbow, C. P., Lubinski, D., Shea, D. L., & Eftekhari-Sanjani, H. (2000). Sex differences in mathematical reasoning ability at age 13: Their status 20 years later. *Psychological science*, *11*(6), 474-480.

Benatuil, D., Solano, A. C. & Torres, A. (2012). Inteligencia práctica: un instrumento para su evaluación. *Revista de Psicología*, 23(2), 174-200.

Bhattacharjee, A., & Choudhury, L. (2015). An Analysis of Deductive Reasoning: A Review Supported by Neuro-Physiological Evidences. *Journal of the Indian Academy of Applied Psychology*, *41*(1), 118.

Binet, A. & Simon, T. (1907). Le développement de l'intelligence chez les enfants. *L'Annee psychologique*, 14(1), 1-94.

Bisanz, J., & LeFevre, J. A. (1990). Strategic and nonstrategic processing in the development of mathematical cognition. En D. F. Bjorklund (Ed.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development* (pp. 213-243). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Bisanz, J., Sherman, J. L., Rasmussen, C., & Ho, E. (2005). Development of arithmetic skills and knowledge in preschool children. En J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 143−162). New York: Psychology Press.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education—A review. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 257-269.

Blakemore, S. J., & Choudhury, S. (2006). Development of the adolescent brain: implications for executive function and social cognition. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *47*(3-4), 296-312.

Blair, C. (2006). How similar are fluid cognition and general intelligence? A 418 developmental neuroscience perspective on fluid cognition as an aspect of 419 human cognitive ability. *Behavioral and Brain Sciences*, 29, 109−160. 4

Bollen, K. A. (1984). Multiple indicators: internal consistency or no necessary relationship? *Quality and Quantity*, 18 (4), 377-385.

Bossé, M. J., Lee, T. D., Swinson, M., & Faulconer, J. (2010). The NCTM process standards and the five Es of science: Connecting math and science. *School science and mathematics*, *110*(5), 262-276.

Brendel, J. M., Kolbert, J. B. & Foster, V. A. (2002). Promoting student cognitive development. *Journal of Adult Development*, 9(3), 217-227

Brownell, W.A. (1942). Problem Solving. En N. Henry (Ed). *The psychology of learning* (pp. 415-443) . Chicago: University of Chicago Press.

Buehner, M., Krumm, S., Ziegler, M. & Pluecken, T. (2006). Cognitive abilities and their interplay: reasoning, crystallized intelligence, working memory components, and sustained attention. *Journal of Individual Differences*, 27 (2), 57-72.

Busse, J., Berninger, V., Smith, D. R., & Hildebrand, D. (2001). Assessment for math talent and disability: A developmental model. *Handbook of psychoeducational assessment: Ability, achievement, and behavior in children*, 225-253.

Byrne, B.M. (2006). Structural equation modelling with EQS. Basic Concepts, Aplications and Programing. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

Campbell, K. J., Collis, K. F., & Watson, J. M. (1995). Visual processing during mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 177–194

Cattell, R. B. (1941). Some theoretical issues in adult intelligence testing. *Psychological Bulletin*, 38, 592.

Cattell, R. B. (1971). *Abilities: Their structure, growth, and action*. Boston: Houghton Mifflin

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones* (Doctoral dissertation, Tesis doctoral. Universidad de Sevilla).

Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: a survey of factor-analytic studies*. New York: Cambridge University Press.

Carroll, J. B. (1997). Psychometrics, intelligence, and public perception. *Intelligence*, 24(1), 25-52.

Castro Martínez, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Cerda, G., Ortega Ruiz, R., Pérez Wilson, C. E., Flores, C. & Melipillán, R. (2011). Inteligencia lógica y rendimiento académico en matemáticas: un estudio con estudiantes de educación básica y secundaria de Chile. *Anales de Psicología*, 27(2), 389-398.

Cetin, S. C., Corlu, M. S., Capraro, M. M. & Capraro, R. M. (2015). A longitudinal study of the relationship between mathematics and science scores: the case of texas. *International Journal of Contemporary Educational Research*, 2 (1), 13-21.

Chamot, A. U., Dale, M., O'Malley, J. M., & Spanos, G. A. (1992). Learning and problem solving strategies of ESL students. *Bilingual Research Journal*, *16*(3-4), 1-28.

Chen, F. F., West, S. G. & Sousa, K. H. (2006). A comparison of bifactor and second order models of quality of life. Multivariate *Behavioral Research*, 41 (2), 189-225.

Cheng, P. W., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E., & Oliver, L. M. (1986). Pragmatic versus syntactic approaches to training deductive reasoning. *Cognitive Psychology,* 18, 293-328.

Cirino, P. T., Morris, M. K., & Morris, R. D. (2007). Semantic, executive, and visuospatial abilities in mathematical reasoning of referred college students. *Assessment*, *14*(1), 94-104.

Clariana L. (1982). El progreso Matemático, II(23), 328-382

Cobo, P., & Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(2), 115-140.

Cockcroft, W.H. (1982). *Mathematics Counts*. London: HMSO.

Cohen, J. (1977). *Statistical power analysis for behabioral sciences*. New York: Academic Press.

Coleman, R. H. (1956). An analysis of certain components of mathematical ability, and an attempt to predict mathematical achievement in a specific situation (Tesis doctoral).

Colom, R. & Flores-Mendoza, C. (2001). Inteligencia y memoria de trabajo: la relación entre factor g, complejidad cognitiva y capacidad de procesamiento. *Psicología: teoría e pesquisa*, 17 (1), 37-47.

Colom, R., Jung, R. E. & Haier, R. J. (2007). General intelligence and memory span: evidence for a common neuroanatomic framework. *Cognitive Neuropsychology*, 24 (8), 867-878.

Conway, A. R., Kane, M. J. & Engle, R. W. (2003). Working memory capacity and its relation to general intelligence. *Trends in cognitive sciences*, 7 (12), 547-552.

Corte, E. D. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied psychology*, 53 (2), 279-310.

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*, 17(1), 55-66.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149-158.

Csapó, B. (1997). The development of inductive reasoning: Cross-sectional assessments in an educational context. *International Journal of Behavioral Development*, 20(4), 609-626.

Cummins, D. D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and instruction*, *8*(3), 261-289.

Cyert, R. M. (1980). Problem solving and educational policy. En D. Tuma & F. Reif (Eds.), *Problem solving and education: Issues in teaching and research* (pp. 3-8). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Daneshamooz, S., Alamolhodaei, H. & Darvishian, S. (2012). Experimental research about effect of mathematics anxiety, working memory capacity on students? mathematical performance with three different types of learning methods. *ARPN Journal of Science and Technology*, 2(4), 313-321.

Darling-Hammond, L. & Richardson, N. (2009). Research review/teacher learning: what matters. *Educational leadership, 66* (5), 46-53.

Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (2003). *The psychology of problem solving*. Cambridge University Press.

De Guzmán, M. y col. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Olimpíada Matemática Argentina.

De Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, (19), 5-25.

De Guire, L. J. (1985). The Structure of Mathematical Abilities: The View from Factor Analysis. Comunicación presentada en el congreso annual de the American Educational Research Association, Chicago, IL.

De Koning, E. y Hamers J. H. M. (1999). Teaching inductive reasoning: Theoretical background and educational implications. En J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit y B. Csapó (Eds.), *Teaching and learning thinking skills* (pp. 156-188). Lisse: Swets & Zeitlinger.

De Koning, E., Sijtsma, K., & Hamers, J. H. (2003). Construction and validation of test for inductive reasoning. *European Journal of Psychological Assessment*, *19*(1), 24.

de la Nación, P.E. [ProgramaEstado].(2015a*).Quinto informe del estado de la educación costarricense*. Consejo Nacional de Rectores.

de la Nación, P. E. [Programa Estado]. (2015b). Vigésimo primer informe estado de la nación en desarrollo humano sostenible. *San José, Costa Rica: Programa Estado de la Nación.*

Delgado, B. L. D. (1995). Introducción al estudio de la inteligencia: teorías cognitivas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, (23), 149-162.

Demetriou, A., Spanoudis, G., Shayer, M., Van der Ven, S., Brydges, C. R., Kroesbergen, E., ... & Swanson, H. L. (2014). Relations between speed, working memory, and intelligence from preschool to adulthood: Structural equation modeling of 14 studies. *Intelligence*, *46*, 107-121.

Dewey, J. (1910). *How we think*. Boston: Heath.

Dewey, J. (1916). Method in science teaching. *Science Education*, 1, 3-9.

Diezmann, C. M., & Watters, J. J. (2000). Identifying and supporting spatial intelligence in young children. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *1*(3), 299-313.

Diezmann, C. M. & Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. En Proceedings 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 219-226, Auckland.

Diezmann, C. M. (2004). The role of operating premises and reasoning paths in upper elementary students' problem solving. T*he Journal of Mathematical Behavior, 23*(1), 63-73.

Dolin, J. & Krogh, L. B. (2010). The relevance and consequences of pisa science in a Danish context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(3), 565-592.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Marazzani, I. (2003). Ejercicios anticipados" y "zona de desarrollo próximo": comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas. *Epsilon*, *57*, 357-378.

Doris, A., O'Neill, D., & Sweetman, O. (2013). Gender, single-sex schooling and maths achievement. *Economics of Education Review*, *35*, 104-119.

Donaldson, M. (1979). *La mente de los niños*. Ediciones Morata.

Duncan, J., Seitz, R. J., Kolodny, J., Bor, D., Herzog, H., Ahmed, A., .Emslie, H. (2000). A neural basis for general intelligence. *Science, 289* (5478), 457-460.

Ekmekci, A., Corkin, D. & Papakonstantinou, A. (2015). The relationship between teacher related factors and mathematics teachers' educational beliefs about mathematics. *En Proceedings of the 42nd annual meeting of the research council on mathematics learning*, 146-154.

Elosúa, M. R., Madruga, J. A. G., Gutiérrez, F., Luque, J. L., & Garate, M. (1997). Un estudio sobre las diferencias evolutivas en la memoria operativa:¿ Capacidad o eficiencia?. *Estudios de psicología*, *18*(58), 15-27.

Else-Quest, N. M., Hyde, J. S. & Linn, M. C. (2010). Cross-national patterns of gender differences in mathematics: a meta-analysis. *Psychological bulletin*, 136 (1), 103.

Engle, R. W., Tuholski, S. W., Laughlin, J. E., & Conway, A. R. (1999). Working memory, short-term memory, and general fluid intelligence: a latent-variable approach. *Journal of experimental psychology: General*, *128*(3), 309.

Engle, R. W. (2002). Working memory capacity as executive attention. *Current directions in psychological science*, 11 (1), 19-23.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of the art (*pp. 249- 254). London: Falmer Press.

Ernest, P. (1992). Problem Solving: Its Assimilation to the Teachers's Perspective. En J.P. Ponte, J.F. Matos, J.N. Matos, J.M. & D. Fernandes (Eds.) M*athematical problem solving and new information technologies* (pp. 287-300). Berlin Heidelberg: Springer.

Ertl, H. (2006). Educational standards and the changing discourse on education: the reception and consequences of the pisa study in Germany. *Oxford Review of Education*, 32 (5), 619-634.

Evans, J.J., Floyd, R.G., McGrew, K.S. & Leforgee, M.H. (2002).The relations between measures of Cattell-Horn-Carroll (CHC) cognitive abilities and reading achievement during childhood and adolescence. *School Psychology Review, 31* (2), 246-262

Fernández, A., (21 de octubre de 2012), Alumnos de colegios privados con más opciones de ingresar a la UCR, Nación.

Fernández, T., Pegito, J. A. C., & Godino, J. D. (2008). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. In *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007* (pp. 189-198). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, N. Climent, A. Estepa (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII*. (XVII Simposio de SEIEM), (19-42). Bilbao: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Ferrándiz, C., Bermejo, M. R., Sainz, M., Ferrando, M. & Prieto, M. D. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de psicología*, 24 (2), 213-222.

Finn, A. S., Kraft, M. A., West, M. R., Leonard, J. A., Bish, C. E., Martin, R. E., ... Gabrieli, J. D. (2014). Cognitive skills, student achievement tests, and schools. *Psychological science, 25*(3), 736-744.

Fleischman, H. L., Hopstock, P. J., Pelczar, M. P. & Shelley, B. E. (2010). Highlights from PISA 2009: performance of us 15-year-old students in reading, mathematics, and science literacy in an international context. NCES 2011-004. National Center for Education Statistics.

Floyd, R. G., Evans, J. J. & McGrew, K. S. (2003). Relations between measures of Cattell-Horn-Carroll (CHC) cognitive abilities and mathematics achievement across the school-age years. *Psychology in the Schools, 40* (2), 155-171.

Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *ETS Research Report Series*, *1983*(1), 363-407.

Fry, A. F. & Hale, S. (1996). Processing speed, working memory, and fluid intelligence: evidence for a developmental cascade. *Psychological science*, 7 (4), 237-241.

Fry, A. F., & Hale, S. (2000). Relationships among processing speed, working memory, and fluid intelligence in children. *Biological psychology*, *54*(1), 1-34.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., ... & Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, *98*(1), 29.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C. L., Owen, R., & Schroeter, K. (2003). Enhancing third-grade student'mathematical problem solving with self-regulated learning strategies. *Journal of educational psychology*, *95*(2), 306.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Stuebing, K., Fletcher, J. M., Hamlett, C. L., & Lambert, W. (2008). Problem solving and computational skill: Are they shared or distinct aspects of mathematical cognition?. *Journal of educational psychology*, *100*(1), 30.

Friedman, L. (1992). *A meta-analysis of correlations of spatial and mathematical tasks* (Report No. TM 018 973). Chicago: University of Chicago.(ERIC Document Reproduction Service No. ED 353270).

Gagné, R.M. (1980). *The conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart, & Winston.

Ganley, C. M., & Vasilyeva, M. (2011). Sex differences in the relation between math performance, spatial skills, and attitudes. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *32*(4), 235-242.

García de Cajén, S., García-Rodeja Fernández, E., & Domínguez Castiñeiras, J. M. (2002). Razonamiento y argumentación en ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(2), 217-228.

García, C. F., García, M. R. B., Sainz, M., Prieto, M. F. & Sánchez, M. D. P. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de psicología*, 24(2), 213-222.

Gardner, H. (1985). Frames of mind: the theory of multiple intelligences. New York: Basic Books.

Gardner, H. (1993). Inteligencias multiples. La tería en la práctica. Barcelona: Paidós.

Gardner, H. (1995). Inteligencias múltiples. Buenos Aires: Paidós.

Gardner, H. (1999). Who owns intelligence?. *The Atlantic Monthly*, 283(2), 67-76.

Garrett, R. M. (1987). Issues in science education: problema solving, creativity and originality. *International Journal of Science Education*, *9*(2), 125-137.

Gathercole, S. E., Pickering, S. J., Ambridge, B. & Wearing, H. (2004a). The structure of working memory from 4 to 15 years of age. *Developmental psychology*, 40 (2), 177-190.

Gathercole, S. E., Pickering, S. J., Knight, C., & Stegmann, Z. (2004b). Working memory skills and educational attainment: Evidence from national curriculum assessments at 7 and 14 years of age. *Applied Cognitive Psychology*, *18*(1), 1-16.

Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological bulletin*, *114*(2), 345-362.

Geary, D. C. (2007). An evolutionary perspective on learning disability in mathematics. *Developmental neuropsychology*, *32*(1), 471-519.

Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: a 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, 47 (6), 1539-1552.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L. & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: a five- year prospective study. *Journal of Educational Psychology*, 104 (1), 206-223.

Geary, D. C., Saults, S. J., Liu, F. & Hoard, M. K. (2000). Sex differences in spatial cognition, computational fluency, and arithmetical reasoning. *Journal of Experimental child psychology*, 77 (4), 337-353.

Geary, D. C. (2006). Development of mathematical understanding. En D. Deanna, R.S. Siegler, W. Damon & R.M. Lerner (Eds.) *Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language* (pp. 777-810). Hoboken: John Wiley & Sons Inc.

Geary, D. C., & Widaman, K. F. (1992). Numerical cognition: On the convergence of componential and psychometric models. *Intelligence*, *16*(1), 47-80.

Gil, N., Blanco, L., & Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista iberoamericana de educación matemática*, *2*, 15-32.

Godino, J.D.& Recio, Á. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. *En Proceedings of the 21th international conference of pme* (Vol.2 ,pp. 313-321).

Godino, J. D. (2014). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.

Goel, V. & Dolan, R. J. (2004). Differential involvement of left prefrontal cortexin inductive and deductive reasoning. *Cognition*, 93 (3), B109-B121.

Goel, V., Gold, B., Kapur, S. & Houle, S. (1997). The seats of reason? an imaging study of deductive and inductive reasoning. *NeuroReport*, 8 (5), 1305-1310.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Gohm, C. L., Humphreys, L. G., & Yao, G. (1998). Underachievement among spatially gifted students. *American Educational Research Journal*, 35, 515–531.

Gottfredson, L. S. (2003). The challenge and promise of cognitive career assessment. *Journal of Career Assessment*, 11, 115–135.

Gómez-Chacón, I. M., Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. *La influencia del contexto de clase*. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 24(3), 309–324

Gómez-Chacón, I. M., García-Madruga, J. A., Vila, J. Ó., Elosúa, M. R. & Rodríguez, R. (2014). The dual processes hypothesis in mathematics performance: beliefs, cognitive reflection, working memory and reasoning. *Learning and Individual Differences*, 29, 67-73.

Goodwin, G. P., & Johnson-Laird, P. N. (2005). Reasoning about relations. *Psychological review*, *112*(2), 468-493.

Gottfredson, L. & Saklofske, D. H. (2009). Intelligence: foundations and issues in assessment. *Canadian Psychology/Psychologie canadienne*, *50*(3), 183-195.

Greeno, J. G. (1978). Natures of problem-solving abilities. *Handbook of learning and cognitive processes*, *5*, 239-270.

Grozdev, S. (2007). For high achievements in mathematics: *the bulgarian experience;(theory and practice).* Assoc. for the Development of Education.

Gross, R. D., Sierra, G. P. & López, M. E. G. (1998). Psicología: *la ciencia de la mente y la conducta.* México DF: El Manual Moderno.

Guadagni, A. A., Lasanta, T. I. & Álvarez, M. C. (2014). Otro aplazo en la prueba PISA. Disponible en http://www.ub.edu.ar/centros_de_estudio/cea/cea_numero_17.pdf.

Gustafsson, J.E. (1984). A unifying model for the structure of intellectual abilities. *Intelligence, 8*(3), 179-203.

Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina.

Handley, S. J., Capon, A., Copp, C., & Harper, C. (2002). Conditional reasoning and the Tower of Hanoi: The role of spatial and verbal working memory. *British Journal of Psychology*, *93*(4), 501-518.

Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J. & Anderson, R.E. (2010*). Multivariate data analysis*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Haverty, L. A., Koedinger, K. R., Klahr, D. & Alibali, M. W. (2000). Solving inductive reasoning problems in mathematics: not-so-trivial pursuit. *Cognitive Science*, 24 (2), 249-298.

Hayes, B. K., Heit, E., & Swendsen, H. (2010). Inductive reasoning. *Wiley interdisciplinary reviews: Cognitive science*, *1*(2), 278-292.

Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91 (4), 684-689.

Hegarty, M., Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology*, 87(1), 18-32.

Heitz, R. P., Unsworth, N. & Engle, R. W. (2005). Working memory capacity, attention control, and fluid intelligence. En O. Wilhelm & R.W. Engle (Eds.), *Handbook of understanding and measuring intelligence* (pp. 61-77). London: SAGE.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 524-549.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., ... & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational researcher*, *25*(4), 12-21.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42* (2), 371-406.

Hilton, D. J. (1995). The social context of reasoning: Conversational inference and rational judgment. *Psychological Bulletin, 118*, 248–271.

Hoelzle, J. B. (2008). *Neuropsychological assessment and the Cattell-Horn-Carroll (CHC) cognitive abilities model.* Tesis Doctoral.

Hogarth, R. (2001*). Educar la intuición*. *El Desarrollo del Sexto Sentido*. Barcelona: Editorial Paidós.

Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. y Thagard, P. R. (1986). *Induction: processes of inference, learning and discovery*. Cambridge: The MIT Press.

Horn, J. L. (1991). Measurement of intellectual capabilities: a review of theory. *Woodcock- Johnson technical manual*, 197-232.

Hoyle, R. H. (2012). *Handbook of structural equation modeling*. New York: Guilford Press.

Imrie,J. (2010).Progressing through mathematics. *Mathematical Gazette, 94*(531), 386-400.

Jaeggi, S. M., Buschkuehl, M., Jonides, J., & Perrig, W. J. (2008). Improving fluid intelligence with training on working memory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *105*(19), 6829-6833.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books.

Ivic, I.(1994). Lev Vygotski (1896-1934). *Perspectivas: Revista trimestral de educación comparada*, (3), 773-799.

Jaeggi, S. M., Buschkuehl, M., Jonides, J. & Perrig, W. J. (2008). Improving fluid intelligence with training on working memory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105 (19), 6829-6833.

Jäger, A. O. (1982). Mehrmodale Klassifikation von Intelligenzleistungen. Experimentell kontrollierte Weiterentwicklung eines deskriptiven Intelligenzstrukturmodells (Multimodal classification of intelligence performance. Experimentally controlled development of a descriptive intelligence structure model). *Diagnostica*, 28, 195–226.

Jäger, A. O. (1984). Intelligenzstrukturforschung: Konkurrierende Modelle, neue Entwicklungen, Perspektiven (Intelligence structure research: competing models, new developments, perspectives). *Psychologische Rundschau*, 35, 21 – 35.

Jensen, A. R. (1998). *The g factor: the science of mental ability*. Westport: Praeger.

Jonassen, D. H. (1997). Instructional design models for well-structured and III-structured problem-solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development*, *45*(1), 65-94.

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational technology research and development*, *48*(4), 63-85.

Johnson-Laird, P. N. & Byrne, R. M. (1991). *Deduction*. Hove and London: Lawrence Erlbaum Associates.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 20-32.

Jöreskog, K. G. & Goldberger, A. S. (1975). Estimation of a model with multiple indicators and multiple causes of a single latent variable. *Journal of the American Statistical Association*, 70 (351a), 631-639.

Kane, M. J., Hambrick, D. Z., Tuholski, S. W., Wilhelm, O., Payne, T. W., & Engle, R. W. (2004). The generality of working memory capacity: a latent-variable approach to verbal and visuospatial memory span and reasoning. *Journal of Experimental Psychology: General*, *133*(2), 189-217.

Kane, M. J., Hambrick, D. Z. & Conway, A. R. (2005). Working memory capacity and fluid intelligence are strongly related constructs: comment on Ackerman, Beier, and Boyle (2005). *Psychological bulletin*, 131 (1), 66-71.

Kegan, R. (1982). *The Evolving Self: Problem and Process in human development.* Cambridge: Harvard University Press.

Keith, T. Z., Reynolds, M. R., Patel, P. G. & Ridley, K. P. (2008). Sex differences in latent cognitive abilities ages 6 to 59: evidence from the Woodcock–Johnson III tests of cognitive abilities. *Intelligence*, 36 (6), 502-525.

Kell, H. J., Lubinski, D., Benbow, C. P. & Steiger, J. H. (2013). Creativity and technical innovation spatial ability‘s unique role. *Psychological science*, 24 (9), 1831-1836.

Kelly, R. R., Lang, H. G., & Pagliaro, C. M. (2003). Mathematics word problem solving for deaf students: A survey of practices in grades 6-12. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *8*(2), 104-119.

Kemp, C. & Jern, A. (2014). A taxonomy of inductive problems. *Psychonomic bulletin & review*, 21 (1), 23-46.

Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study. Tesis Doctoral.

Kim, H., Cho, S. & Ahn, D. (2004). Development of mathematical creative problem solving ability test for identification of the gifted in math*. Gifted Education International*, 18 (2), 164-174.

Kindermann, T. A. (1993). Natural peer groups as contexts for individual development: The case of children's motivation in school. *Developmental psychology*, *29*(6), 970-977.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford University Press.

Klauer, K. J. (1996). Teaching inductive reasoning: Some theory and three experimental studies. *Learning and Instruction*, *6*(1), 37-57.

Klauer, K. C., Stegmaier, R., Maiser T., (1997). Working memory involvement in propositional and spatial reasoning. *Thinking & Reasoning*, *3*(1), 9-47.

Klauer, K. J. (2001). Training des induktiven Denkens. *Handbuch kognitives Training*, *2*, 165-209.

Klauer, K. J., Willmes, K., & Phye, G. D. (2002). Inducing inductive reasoning: Does it transfer to fluid intelligence?. *Contemporary Educational Psychology*, *27*(1), 1-25.

Klingberg, T. (2010). Training and plasticity of working memory. *Trends in cognitive sciences*, 14(7), 317-324.

Knauff, M., Fangmeier, T., Ruff, C. C., & Johnson-Laird, P. N. (2003). Reasoning, models, and images: Behavioral measures and cortical activity. *Journal of cognitive neuroscience*, *15*(4), 559-573.

Kyllonen, P. C., & Christal, R. E. (1990). Reasoning ability is (little more than) working-memory capacity?!. *Intelligence*, *14*(4), 389-433.

Kyllonen, P. C. (1994). Aptitude testing inspired by information processing: A test of the four-sources model. *The Journal of General Psychology*, *120* (3), 375-405.

Kontoyianni, K., Kattou, M., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2013). Integrating mathematical abilities and creativity in the assessment of mathematical giftedness. *Psychological Test and Assessment Modeling*, 55, 288-314.

Korthagen, F. A., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. & Wubbels, T. (2001). *Linking practice and theory: the pedagogy of realistic teacher education*. London: Routledge.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school-children*. Chicago: University Of Chicago Press.

Kunda, Z. (1990). The case for motivated reasoning. *Psychological bulletin*,*108*(3), 480-498.

Kyllonen, P. C. (2002). G: knowledge, speed, strategies, or working memory capacity? a systems perspective. En R. Sternberg & E. L. Grigorenko (Eds), *The general factor of inteligence: How general is it?* (pp. 415-445). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Kyllonen, P. C. & Christal, R. E. (1990). Reasoning ability is (little more than) working memory capacity? *Intelligence*, 14 (4), 389-433.

Larrazolo, N., Backhoff, E., Rosas, M., & Tirado, F. (2010). Habilidades básicas de razonamiento matemático de estudiantes mexicanos de educación media superior. En *Congreso Iberoamericano de Educación: Metas* (Vol. 2021).

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Lansman, M., Donaldson, G., Hunt, E. & Yantis, S. (1982). Ability factors and cognitive processes. *Intelligence, 6*(4), 347-386.

Larkin, J. H., McDermott, J., Simon, D. P., & Simon, H. A. (1980). Models of competence in solving physics problems. *Cognitive science*, *4*(4), 317-345.

Lehman, D. R. & Nisbett, R. E. (1990). A longitudinal study of the effects of undergraduate training on reasoning. *Developmental Psychology, 26*(6), 952.

Lean, G. & Clements, M. K. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (3), 267-299.

Leitzel, J. R. (1991). *A call for change: recommendations for the mathematical preparation of teachers of mathematics. an MAA report*. ERIC.

Lehman, D. R., & Nisbett, R. E. (1990). A longitudinal study of the effects of undergraduate training on reasoning. *Developmental Psychology*, *26*(6), 952.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education*, *25*(6), 660-675.

Lester Jr, F. K., & Charles, R. I. (1992). A framework for research on problem-solving instruction. En J.P. Ponte, J.F. Matos, J.N. Matos, J.M. & D. Fernandes (Eds.) M*athematical problem solving and new information technologies* (pp. 1-15). Berlin Heidelberg: Springer.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child development*, 1479-1498.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational studies in mathematics, 41*(2), 165-190.

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, *124*(1), 83-97.

Lewis, A. B., & Mayer, R. E. (1987). Student's mis comprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79, 363–371.

Lohman, D. F., Colangelo, N. & Assouline, S. (1998). Fluid intelligence, inductive reasoning, and working memory: where the theory of multiple intelligences falls short. En N. Colangelo & S. Assouline (Eds.), *Talent development IV: Proceedings from the 1998 Henry B. and Jocelyn Wallace National Research Symposium on talent development* (pp. 219–228). Scottsdale, AZ: Gifted Psychology Press.

Lovett, M. C., & Anderson, J. R. (1996). History of success and current context in problem solving: Combined influences on operator selection. *Cognitive psychology*, *31*(2), 168-217.

Madruga, J. A. G. & Corte, T. F. (2008). Memoria operativa, comprensión lectora y razonamiento en la educación secundaria. *Anuario de psicología/The UB Journal of psychology*, 39 (1), 133-158.

Martín, S. N. & Payo, A. R. (2012). Hacia una mayor comprensión global del rendimiento académico a través de las pruebas pisa: contraste de tres hipótesis a partir de unos datos empíricos. *Educación XX1*, 15 (1).

Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional science*, *26*(1-2), 49-63.

Melby-Lervåg, M., & Hulme, C. (2013). Is working memory training effective? A meta-analytic review. *Developmental psychology*, *49*(2), 270-291.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas.* Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor.

McGrew, K. S. (2009). CHC theory and the human cognitive abilities project: standing on the shoulders of the giants of psychometric intelligence research. *Intelligence,* 37(1), 1-10.

McGrew, K. S. & Wendling, B. J. (2010). Cattell–Horn–Carroll cognitive-achievement relations: what we have learned from the past 20 years of research*. Psychology in the Schools, 47*(7), 651-675.

McGrew, K.S. & Hessler, G.L.(1995).The relationship between the wj-rgf-gc cognitive clusters and mathematics achievement across the life-span. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 13(1), 21-38.

Messick, S. (1990). *Validity of test interpretation and use*. ETS Research Report Series, 1990(1), 1487-1495.

Meyer, M., Salimpoor, V., Wu, S., Geary, D. & Menon, V. (2010). Differential contribution of specific working memory components to mathematics achievement in 2nd and 3rd graders. *Learning and Individual Differences*, 20 (2), 101-109.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent*. ERIC Clearinghouse. Disponible en http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED321487.pdf.

Montague, M., Krawec, J., Enders, C., & Dietz, S. (2014). The effects of cognitive strategy instruction on math problem solving of middle-school students of varying ability. *Journal of Educational Psychology*, *106*(2), 469-481.

Morgan, G. B., Hodge, K. J., Wells, K. E. & Watkins, M. W. (2015). Are fit indices biased in favor of bi-factor models in cognitive ability research?: a comparison of fit in correlated factors, higher-order, and bi-factor models via Monte Carlo simulations. *Journal of Intelligence*, 3 (1), 2-20.

Moshman, D. (1998). Cognitive development beyond childhood. En D. Deanna, R.S. Siegler, W. Damon & R.M. Lerner (Eds.) *Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language* (pp. 947-978). Hoboken: John Wiley & Sons Inc.

Mueller, R.O., & Hancock, G.R. (2010). Structural Equation Modeling. En G.R. Hancock & R.O. Mueller (Eds.), *The reviewer's guide to quantitative methods in the social sciences* (pp. 371-383). Londres: Routledge.

Muthén, B. O. (1989). Latent variable modeling in heterogeneous populations. *Psychometrika*, 54(4), 557-585.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (1989) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Neisser, U., Boodoo, G., Bouchard Jr, T. J., Boykin, A. W., Brody, N., Ceci, S. J., ... Sternberg, R. J. y col. (1996). Intelligence: knowns and unknowns. *American psychologist, 51*(2), 77-101.

Neves, D. M., & Anderson, J. R. (1981). Knowledge compilation: Mechanisms for the automatization of cognitive skills. En J.R. Anderson (Ed.), *Cognitive skills and their acquisition* (pp. 57-84). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Nieto, L. B., & Lizarazo, J. A. C. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto*, *32*(1), 137-156.

Nisbett, R. E., Aronson, J., Blair, C., Dickens, W., Flynn, J., Halpern, D. F. & Turkheimer, E. (2012). Intelligence: new findings and theoretical developments. *American psychologist*, 67(2), 130-159.

Nusbaum, E.C. & Silvia, P.J. (2011). Are intelligence and creativity really so diﬀerent?: fluid intelligence, executive processes, and strategy use in divergent thinking. *Intelligence, 39*(1), 36-45.

Oberauer, K., Süß, H. M., Schulze, R., Wilhelm, O., & Wittmann, W. W. (2000). Working memory capacity—facets of a cognitive ability construct. *Personality and Individual Differences*, *29*(6), 1017-1045.

OECD (2015). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris: PISA, OECD Publishing.

Ojose, B. (2008). Applying Piaget's theory of cognitive development to mathematics instruction. *The Mathematics Educator*, *18*(1), 26-30.

Osborne, J. W. & Fitzpatrick, D. C. (2012). Replication analysis in exploratory factor analysis: what it is and why it makes your analysis better. *Practical assessment, research & evaluation*, 17(15), 1-8.

Osborne, J. (2013). The 21st century challenge for science education: Assessing scientific reasoning. *Thinking Skills and Creativity*, *10*, 265-279.

Pellegrino, J. W., & Glaser, R. (1984). Analyzing Aptitudes for Learning: Inductive Reasoning. En R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology*, Vol. 2 (pp. 269–345). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget, J. (1991). *Seis Estudios de Psicología.* Barcelona: Ariel.

Poincaré, H. (1963). *Ciencia y método*. Madrid: Espasa-Calpe .

Poincaré, H. (1913). *The foundations of science*. The science Press.

Poincaré, H. (2002). Ciencia e hipótesis. Madrid: Espasa-Calpe.

Polya, J. (1998). *Como plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Polya, G. (1945). *How to Solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Preiss, D., Larraín, A., & Valenzuela, S. (2011). Discurso y pensamiento en el aula matemática chilena. *Psykhe (Santiago)*, *20*(2), 131-146.

Primi, R. (2001). Complexity of geometric inductive reasoning tasks: Contribution to the understanding of fluid intelligence. *Intelligence*, *30*(1), 41-70.

Primi, R. (2003). Inteligência: avanços nos modelos teóricos e nos instrumentos de medida. *Avaliação Psicológica*, 2 (1), 67-77.

Primi, R., Ferrão, M.E. & Almeida, L.S. (2010). Fluid intelligence as a predictor of learning: a longitudinal multilevel approach applied to math. *Learning and Individual Differences, 20(5), 446-451*

Primi, R., Couto, G., Almeida, L. S., Guisande, M. A., & Miguel, F. K. (2012). Intelligence, age and schooling: Data from the Battery of Reasoning Tests (BRT-5). *Psicologia: Reflexão e Crítica*, *25*(1), 79-88.

Proctor, B. E., Floyd, R. G. & Shaver, R. B. (2005). Cattell-Horn-Carroll broad cognitive ability profiles of low math achievers. *Psychology in the Schools*, 42 (1), 1-12.

Purdie, N. M., & Hattie, J. (2002). Assessing students' conceptions of learning. *Australian Journal of Educational and Developmental Psychology*, 2, 17-32.

Raghubar, K. P., Barnes, M. A., & Hecht, S. A. (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 110-122.

Redick, T. S., Broadway, J. M., Meier, M. E., Kuriakose, P. S., Unsworth, N., Kane, M. J. & Engle, R. W. (2015). Measuring working memory capacity with automated complex span tasks. *European Journal of Psychological Assessment*, 28(3),164-171.

Revelle, W., & Zinbarg, R. E. (2009). Coefficients alpha, beta, omega, and the glb: Comments on Sijtsma. *Psychometrika*, *74*(1), 145-154.

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista Ema, 1*(1), 4-24.

Rico, L. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rico, L., Castro, E., González, E., & Castro, E. (1994). Two-step addition problems with duplicated semantic structure. En Ponte, J. P.; Mattos, J. F. (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121-128). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Ritchie, S. J., Bates, T. C., & Deary, I. J. (2015). Is education associated with improvements in general cognitive ability, or in specific skills? *Developmental Psychology, 51*(5), 573-582.

Martínez Rizo, F. (2006). Pisa en américa latina: lecciones a partir de la experiencia de méxico de 2000 a 2006. *Revista de educación*, extraordinario 2006,153-167.

Robinson, N. M., Abbott, R. D., Berninger, V. W., & Busse, J. (1996). Structure of abilities in math-precocious young children: Gender similarities and differences. *Journal of Educational Psychology*, *88*(2), 341-352.

Rodríguez, J. M. S., Almerich, G., López, B. G. & Aliaga, F. M. (2013). Las competencias del profesorado en tic: estructura básica. *Educación XX1*, 16 (1), 39-61.

Roh, K. H. (2003). Problem-based learning in mathematics. *ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education*, 2004-3.

Romberg, T. A. (1969). 7: Current Research in Mathematics Education. *Review of Educational Research*, *39*(4), 473-491.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *American Mathematical Monthly*, 105(3), 252-255.

Ruiz, A. (2013). La reforma de la educación matemática en costa rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8, 7-110.

Salthouse, T. A. (1990). Working memory as a processing resource in cognitive aging. *Developmental review*, *10*(1), 101-124.

Salthouse, T. A. (1992). Working-memory mediation of adult age differences in integrative reasoning. *Memory & Cognition*, *20*(4), 413-423.

Salthouse, T. A. (2014). Relations between running memory and fluid intelligence. *Intelligence*, *43*, 1-7.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education*.* *PNA, 5* (4), 129-145.

Santiago, M. C. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

Santos Trigo, L. M. (1996). Principios y Métodos de Ia Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos Trigo, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. In *Investigación en educación matemática XII* (p. 8). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Santos Trigo, L. M. (2014). La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, Matías & L. Blanco, (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Satorra, A. & Muthen, B. (1995). Complex sample data in structural equation modeling. *Sociological methodology*, 25, 267-316.

Savery, J. R. (2015). Overview of problem-based learning: Definitions and distinctions. En A. Walker, H. Leary, C. Hmelo-Silver P. & Ertmer (Eds.), *Essential Readings in Problem-Based Learning: Exploring and Extending the Legacy of Howard S. Barrows* (pp. 5-16). Purdue: Purdue University Press.

Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching problem-solving skills. *The American Mathematical Monthly*, *87*(10), 794-805.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. ERIC. Disponible en https://archive.org/details/ERIC_ED168837.

Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for research in mathematics education*, 20(4), 338-355.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan

Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematics work for all children: issues of standards, testing, and equity. *Educational researcher*, 31 (1), 13-25.

Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H., & Herrmann, D. J. (1982). Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *8*(5), 484.

Schmitt-Stegmann, A. (1997). Child Development and Curriculum in Waldorf Education. ERIC. Disponible en http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED415990.pdf.

Shaikh, K.(2006). Educación científica tecnológica y matemática: una perspectiva global. *UNESCO*, *25(3-4)*, 2-3.

Shea, D. L., Lubinski, D. & Benbow, C. P. (2001). Importance of assessing spatial ability in intellectually talented young adolescents: a 20-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 93 (3), 604-614.

Shipstead, Z., Redick, T. S., & Engle, R. W. (2012). Is working memory training effective?. *Psychological bulletin*, *138*(4), 628-654.

Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in mathematics*, 30 (2), 197-210.

Singer, F. M., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 9-26.

Sireci, S. G. (2007). On validity theory and test validation. *Educational Researcher*, 36(8), 477-481.

Sireci, S. G., & Faulkner-Bond, M. (2015). Promoting validity in the assessment of English learners. *Review of Research in Education*, 39(1), 215-252.

Skemp, R. R. (1961). Reflective intelligence and mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, 31 (P1), 45-55.

Snow, R. E., Kyllonen, P. C., & Marshalek, B. (1984). The topography of ability and learning correlations. En R. Stenberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*, (pp. 47-103). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Socas, M. (2001). Investigación en Didáctica de La matemática via modelos de competência. *Um estúdio em relación com el lenguaje algebraico. Departamento de análises matemático. Universidad de La Laguna*.

Spearman, C. (1904). "General intelligence,.objectively determined and measured. *The American Journal of Psychology, 15*(2), 201-292.

Spencer, S. J., Steele, C. M., & Quinn, D. M. (1999). Stereotype threat and women's math performance. *Journal of experimental social psychology*, *35*(1), 4-28.

Steen, L. A. (1999). *Twenty questions about mathematical reasoning*. En L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp 270-285). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms*. American educational research journal, 33*(2), 455-488.

Sternberg, R. J. (1986). Towards a unified theory of human reasoning. *Intelligence*, 10, 281-314.

Sternberg, R. J. (1998). When will the milk spoil?: Everyday inductive in human intelligence. *Intelligence*, 25(3), 185-203.

Sternberg, R. J. y Gardner, M. K. (1983). Unities in inductive reasoning. *Journal of Experimental Psychology: General*, 112(1), 80-116.

Sternberg, R. J. & Detterman, D. K. (1986). What is intelligence*? Contemporary viewpoints on its nature and definition*. Norwood, NJ: Ablex.

Sternberg, R. J. (1998). *Thinking and problem solving* (Vol. 2). London: Academic Press.

Sternberg, R. J. (1999). Intelligence as developing expertise. *Contemporary educational psychology, 24*(4), 359-375.

Sternberg, R. J. (2012). Intelligence. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science, 38*(5), 501-511.

Sternberg, R. J., Castejón, J., Prieto, M., Hautamäki, J. & Grigorenko, E. L. (2001). Confirmatory factor analysis of the sternberg triarchic abilities test in three international samples. *European Journal of Psychological Assessment, 17*(1), 1-16.

Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and teacher education, 17*(2), 213-226.

Swanson, H. L., & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The relationship between working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *96*(3), 471-491.

Swanson, H. L., Jerman, O., & Zheng, X. (2008). Growth in working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *100*(2), 343-379.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive science*, *12*(2), 257-285.

Süß, H.-M., Oberauer, K., Wittmann, W. W., Wilhelm, O. & Schulze, R. (2002). Working- memory capacity explains reasoning ability and a little bit more. *Intelligence*, 30 (3), 261-288.

Tainter, J. A. (2000). Problem solving: Complexity, history, sustainability. *Population and Environment*, *22*(1), 3-41.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). New York: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2014). Making sense of mathematical reasoning and proof. En M. N. Fried & T. Dreyfus (Eds.), M*athematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (pp. 223-235). Dordrecht: Springer Netherlands.

Taub, G. E., Benson, N. & Szente, J. (2014). Improving mathematics: an examination of the effects of specific cognitive abilities on college-age student‘s mathematics achievement. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, 8 (2), arículo 8.

Taub, G. E., Keith, T. Z., Floyd, R. G. & McGrew, K. S. (2008). Effects of general and broad cognitive abilities on mathematics achievement. *School Psychology Quarterly*, 23 (2), 187-198.

Thurstone, L. (1938). The perceptual factor. Psychometrika, 3(1), 1-17.

Varol, F. & Farran, D. C. (2006). Early mathematical growth: how to support young children's mathematical development. *Early Childhood Education Journal, 33*(6), 381-387.

Tronsky, L. N., & Royer, J. M. (2003). Relationships among basic computational automaticity, working memory, and complex mathematical problem solving: What we know and what we need to know. En J. M. Royer (Ed.), *Mathematical cognition*, (pp. 117-145). Greenwich: Information Age Publishing.

Unsworth, N. & Engle, R. W. (2005). Working memory capacity and fluid abilities: examining the correlation between operation span and raven. *Intelligence*, 33 (1), 67-81.

Unsworth, N., Fukuda, K., Awh, E., & Vogel, E. K. (2014). Working memory and fluid intelligence: Capacity, attention control, and secondary memory retrieval. *Cognitive psychology*, *71*, 1-26.

Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should, and must be an eighth-grade course for average students. *The Mathematics Teacher*, 428-438.

Van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *18*(4), 246-254.

Vallejo Ruiz, M., Torralbo Rodríguez, M., Maz Machado, A. & Fernández Cano, A. (2007). La investigación española en educación matemática desde el enfoque conceptual inserto en sus tesis doctorales. *En Enseñanza de las ciencias*, 25, 259-266.

Varol, F., & Farran, D. C. (2006). Early mathematical growth: How to support young children's mathematical development. *Early Childhood Education Journal*, *33*(6), 381-387.

Vázquez, S. M. & Noriega Biggio, M. (2011). Razonamiento espacial y rendimiento académico. *Interdisciplinaria*, 28 (1), 145-158.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh & M. Landau (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York : Academic Press, 1983.

Vygotsky, L. S. (1964). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. *Readings on the development of children*, *23*(3), 34-41.

Villagrán, M. A., Guzmán, J. I. N., Pavón, J. M. L. & Cuevas, C. A. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, 14 (2), 382-386.

Vooght, A. V. G. D. (1997). Working memory constraints on linear reasoning with spatial and temporal contents. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology: Section A*, *50*(4), 803-820.

Ward, S. L. & Overton, W. F. (1990). Semantic familiarity, relevance, and the development of deductive reasoning. *Developmental Psychology*, 26 (3), 488-493.

Watters, J. J., & English, L. D. (1995). Children's application of simultaneous and successive processing in inductive and deductive reasoning problems: Implications for developing scientific reasoning skills. *Journal of Research in Science Teaching*, *32*(7), 699-714.

Webb, R. M., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2007). Spatial ability: A neglected dimension in talent searches for intellectually precocious youth. *Journal of Educational Psychology*, 99, 397–420.

Wigfield, A., Eccles, J. S., & Rodriguez, D. (1998). Chapter 3: the development of children’s motivation in school contexts. *Review of research in education*, *23*(1), 73-118.

Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. En P. S. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (pp. 57-78). New York: MacMillan.

Woditsch, G. A. (1991). *The thoughtful teachers’ guide to thinking skills*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Woodcock, R. W. (2002). New looks in the assessment of cognitive ability. *Peabody Journal of Education, 77*(2), 6-22.

Wright, S. B., Matlen, B. J., Baym, C. L., Ferrer, E. & Bunge, S. A. (2007). Neural correlates of fluid reasoning in children and adults. *Frontiers in Human Neuroscience*, 1.

Yee, D. K. & Eccles, J. S. (1988). Parent perceptions and attributions for children’s math achievement. *Sex Roles*, 19 (5-6), 317-333.

7. APENDICES

Apéndice 1
Prueba Benjamin 2011

Problemas de 3 Puntos

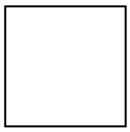
1. Basil quiere pintar la palabra KANGAROO. El pinta una letra cada día, comenzando el miércoles. ¿En qué día pintará la última letra?

(A)Lunes (B)Martes (C) Miércoles
(D)Jueves (E)Viernes

2. Un motociclista recorre una distancia de 28 Km en 30 minutos. Si continúa igual de rápido ¿cuántos kilómetros recorrerá en una hora?

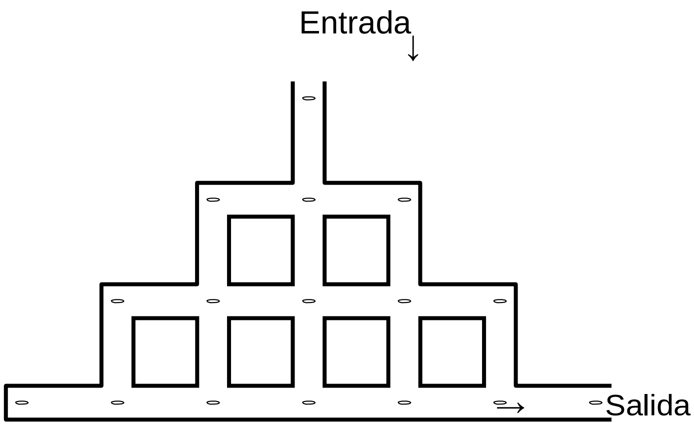
(A)28 (B)36 (C)56 (D)58 (E)62

3. Un cuadrado se corta en línea recta de manera tal que quedan dos pedazos. ¿Cuál de las siguientes figuras no puede ser una de las que resultaron del corte?



(A)un cuadrado (B) un rectángulo (C)un triángulo rectángulo (D) un pentágono (E)un triángulo isósceles

4. Spot, el hámster, va hacia el país de la miel y la leche. Antes de que pueda ingresar al legendario país tiene que pasar a través de un sistema de túneles, como se muestra en la figura. No le está permitido regresar a una intersección por donde ya ha pasado. En cada intersección encontrará una semilla de calabaza. ¿Cuál es la máxima cantidad de semillas de calabaza que puede recolectar?

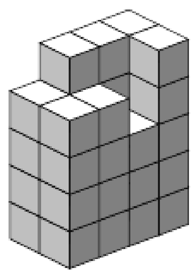


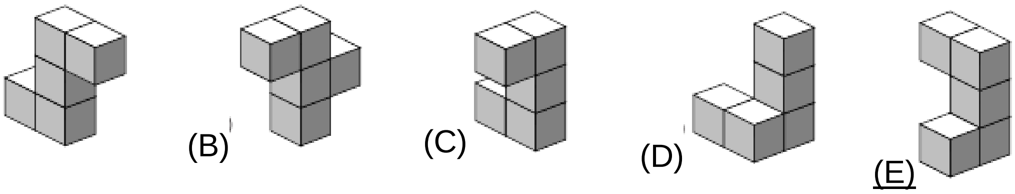
(A)12 (B)13 (C)14 (D)15 (E)16

5. En Villa Loca las casas al lado derecho de la carretera principal se identifican usando números impares. Sin embargo, los habitantes de Villa Loca nunca usan números que contengan el dígito 3. La primera casa al lado derecho de la carretera principal usa el número 1. ¿Cuál es el número que identifica a la quinceava casa?

(A)29 (B)41 (C)43 (D)45 (E)47

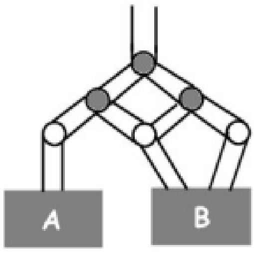
6. ¿Cuál de las opciones representa la figura correcta para completar el cuboide?





(A) (B) (C) (D) (E)

7. Introducimos 1000 L de agua en la entrada de una tubería, en cada cruce dentro de la tubería el agua se divide en dos cantidades iguales. ¿Cuántos litros de agua llegarán al contenedor B?

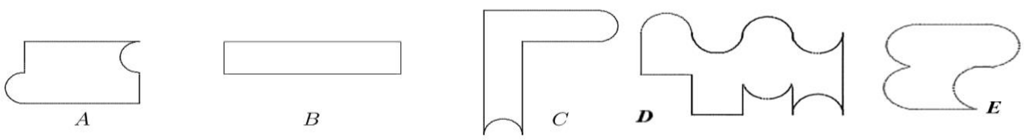


(A)800 (B)750 (C)666,67 (D)660 (E)500

8. La fecha 01-03-05 (1 de Marzo del 2005) consiste de tres números impares consecutivos en orden ascendente. Esta es la primera fecha con esta característica en el siglo 21. Incluyendo la fecha utilizada como ejemplo, ¿Cuántas fechas con exactamente la misma característica (día-mes-año) tendrán lugar en todo el Siglo 21?

(A)5 (B)6 (C)16 (D)13 (E)8

9. ¿Cuál de las 5 opciones representa una figura imposible de crear usando las 4 tarjetas mostradas en la parte superior? Se permite combinar las siguientes tarjetas de diferente forma para formar una figura.



(A)A (B)B (C)C (D)D (E)E

10. Si Liza, la gata, pasa todo el día sin hacer nada y no caza ningún ratón, entonces toma 60ml de leche. Pero si Liza atrapa al menos un ratón en el día, entonces toma un tercio más de leche. Liza ha estado atrapando ratones de día por medio durante las últimas dos semanas. ¿Cuánta leche ha tomado durante ese periodo?

(A)840 ml (B)980 ml (C)1050 ml (D)1120 ml (E)1960 ml

Problemas de 4 Puntos

11. Andrew escribe las letras de la palabra KANGAROO en celdas, una letra por celda. Puede escribir la primera letra en cualquier celda que quiera. Luego escribe las letras siguientes de manera que queden en una celda que tenga al menos una esquina en común con la última letra que escribió. ¿Cuál de las siguientes cuadrículas no puede ser la de Andrew?

(A)

K	*A*
N	*O*
O	*G*
R	*A*

(B)

N	*G*
A	*A*
K	*R*
O	*O*

(C)

O	*O*
K	*R*
A	*A*
G	*N*

(D)

K	*A*
N	*G*
O	*O*
R	*A*

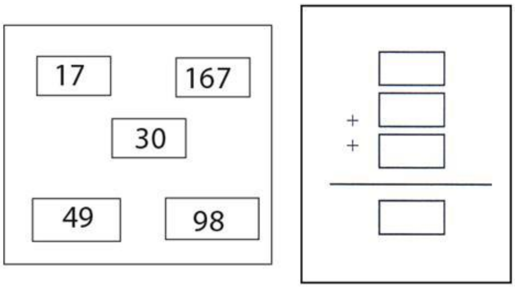
(E)

K	*O*
A	*O*
R	*N*
A	*G*

12. Se escriben en orden creciente todos los números de 4 dígitos, que se pueden formar con los mismos dígitos que 2011. ¿Cuál es la diferencia entre el número que queda después y el número que queda antes del número mencionado?

(A)890 (B)891 (C)900 (D)909 (E)990

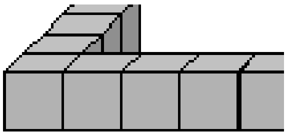
13. Mueva cuatro de los números de la izquierda dentro de las celdas de la derecha de manera que la suma sea correcta.



que numero se mantiene a la izquierda?

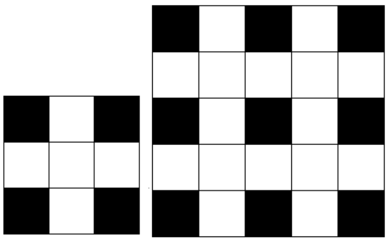
(A)17 (B)30 (C)49 (D)96 (E)167

14. Nina usó 36 cubos idénticos para construir un muro de cubos alrededor de una región cuadrada (Una esquina y parte de dos de los lados se muestra en la imagen de abajo). ¿Cuántos cubos necesitará Nina para rellenar la región mencionada?



(A)36 (B)49 (C)64 (D)81 (E)100

15. Tenemos pisos cuadrados formados con bloques negros y blancos. Pisos de 4 y de 9 bloques negros se muestran en la imagen. Siempre hay un bloque negro en cada esquina del piso, y todos los bloques que lo rodean son blancos. ¿Cuántos bloques blancos se necesitan para un piso que tiene 25 bloques negros?



(A)25 (B)39 (C)45 (D)56 (E)72

16. Paul quería multiplicar un número entero por 301, pero olvidó el cero y en cambió multiplicó por 31. El resultado que obtuvo fue 372. ¿Cuál era el resultado que debía de tener con el número correcto?

(A)3010 (B)3612 (C)3702 (D)3720 (E)30 720

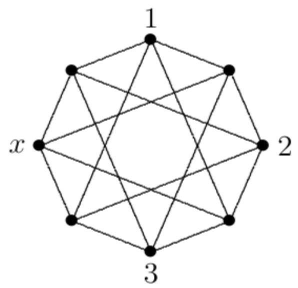
17. En tres partidos de futbol el FC- Barcelona anotó tres goles y recibió una anotación en contra. De esos tres partidos Saprissa ganó uno, empató uno y perdió otro. ¿Cuál fue el resultado del partido que ganó?

(A)2:0 (B)3:0 (C)1:0 (D)4:1 (E)0:1

18. Sobre una hoja de papel, se nos dan 3 puntos que forman un triángulo. Queremos añadir un cuarto punto para formar un paralelogramo. ¿Cuántas posibilidades hay para poner el cuarto punto?

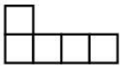
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E) esto depende del triángulo

19. Los números 1, 2, 3 o 4 deberían ser escritos en cada uno de los 8 puntos marcados en la figura de tal manera que los finales de cada línea tengan números diferentes. Ya se han escrito tres números. ¿Cuántas veces deberá aparecer el 4 en la imagen?



(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E) 5

20. Daniel quiere completar un cuadrado utilizando solamente piezas iguales a la de la imagen. ¿ Cuál es el menor número de piezas que puede utilizar?



(A)8 (B)10 (C)12 (D)16 (E)20

Problemas de 5 Puntos

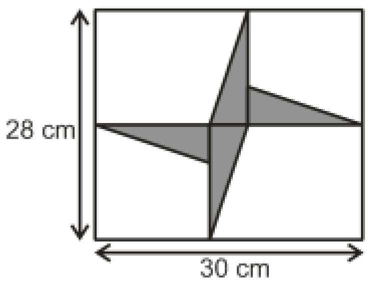
21. Hay 10 estudiantes, entre niños y niñas, en una clase de baile, la maestra tiene 80 confites. Si ella da a cada una de las niñas de la clase la misma cantidad de confites, sobran 3 confites. ¿Cuántos niños hay en la clase?

(A)1 (B)2 (C)3 (D)5 (E)7

22. Una gata tiene 7 gatitos: uno blanco, uno negro, uno rojo, uno blanco con negro, uno blanco con rojo, uno negro con rojo y uno blanco con negro y rojo. Se quiere hacer un grupo de 4 gatos pero que entre esos cuatro gatos si vemos 2 cualesquiera éstos compartan al menos un color. ¿Cuántas posibilidades tengo de hacer ese grupo?

(A)1 (B)3 (C)4 (D)6 (E)7

23. Hay cuatro triángulos rectángulos idénticos dentro de un rectángulo, como se mues- tra en la figura. Encuentre el área total de los 4 triángulos.

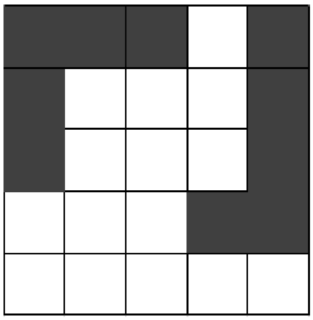


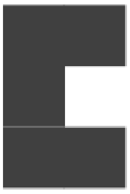
(A) $46\,cm^2$ (B) $52\,cm^2$ (C) $54\,cm^2$ (D) $56\,cm^2$ (E) $64\,cm^2$

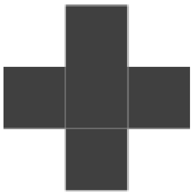
24. Alex dice que Pedro está mintiendo. Pedro dice que Mark está mintiendo. Mark dice que Pedro está mintiendo. Tony dice que Alex está mintiendo. ¿Cuántos varones están mintiendo?

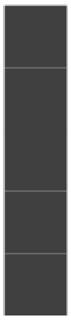
(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4

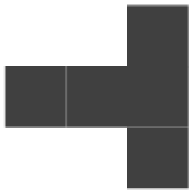
25. Sobre un tablero de 5 × 5 cuadros Sofía coloca, dos piezas como se muestra en la figura. ¿Cuál de las 5 figuras sombreadas puede poner Sofía apropiadamente, de manera que no se puedan acomodar ninguna de las otras cuatro?

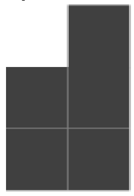


(A)


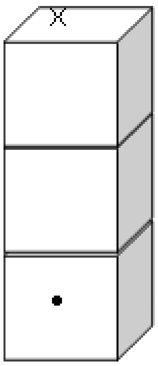
(B)


(C)


(D)


(E)


26. La siguiente figura muestra tres dados regulares uno encima de otro. Un dado regular tiene la propiedad de que la suma de los puntos en las caras opuestas es 7; si los dados se acomodaron de manera que las caras de dados distintos que quedan una al frente de la otra siempre suman 5. ¿Cuál es la cantidad de puntos que tiene la cara superior x?



(A)2 (B)3 (C)4 (D)5 (E)6

27. Quiero dibujar cuatro círculos en la pizarra de manera tal que cualquier par de éstos tengan exactamente un punto en común. ¿Cuál es la mayor cantidad de puntos que pueden pertenecer a más de un círculo?

(A)1 (B)4 (C)5 (D)6 (E)8

28. En un mes hubo 5 sábados, 5 domingos, pero solo 4 viernes y 4 lunes, en el próximo mes se puede decir con certeza que habrá?

(A) 5 jueves (B) 5 miércoles (C) 5 viernes
(D) 5 Sábados (E) 5 domingos

29. Se le dan 4 números mayores que 0 a, b, c y d de manera que $a < b < c < d$. Se le solicita aumentar en 1 alguno de los números que se le dieron de tal forma que después del cambio el producto de los cuatro números sea el menor posible. ¿Cuál número se debería aumentar?

(A)a (B)b (C) c (D)d (E) alguno b o c

30. ¿Cuántos números enteros pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 usando cada dígito solo una vez, de manera tal que, al leerlos de izquierda a derecha, el primer dígito del número sea divisible entre 1, los dos primeros dígitos forman un número divisible entre 2, los tres primeros dígitos forman un número divisible entre 3, los cuatro primeros dígitos forman un número divisible entre 4 y los cinco dígitos forman un número divisible entre 5?

(A) es imposible (B)1 (C)2 (D)5 (E)10

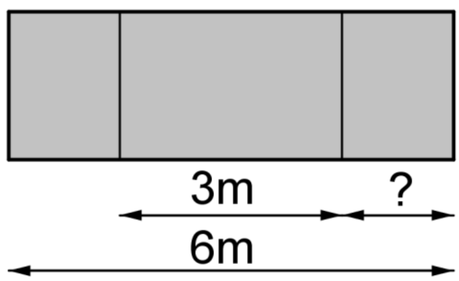
Apéndice 2
Prueba Benjamin 2012

Problemas de tres Puntos

1. Basil pinta el eslogan VIVAT KANGAROO en una pared. Él quiere que las letras diferentes se pinten de colores diferentes y que las letras iguales se pinten del mismo color. ¿Cuántos colores diferentes necesita?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 13

2. Una pizarra de tiza mide 6 m de ancho. El ancho de la parte media es de 3 m, las otras dos partes miden igual. ¿Cuál es el ancho de la parte derecha?



(A) 1 m (B) 1,25 m (C) 1,5 m (D) 1,75 m (E) 2 m

3. Sally puede poner 4 monedas en un cuadrado construido con 4 fósforos (como se muestra en la figura). ¿Cuántos fósforos necesitaría ella para construir un cuadrado que contenga 16 monedas, que no estén unas encima de otras?

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 16

4. En un avión, las filas para pasajeros están numeradas del 1 al 25 pero no hay

fila. La fila 15 tiene solamente 4 asientos y todas las demás tienen 6 asientos. ¿Cuántos asientos para pasajeros hay en este avión?

(A) 120 (B) 138 (C) 142 (D) 144 (E) 150

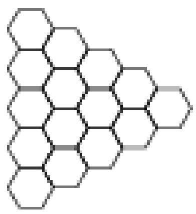
5. Cuando son las 4 de la tarde en Londres, son las 5 de la tarde en Madrid y las 8 de la mañana del mismo día en San Francisco. Ann fue a dormir a las 9 de la noche ayer en San Francisco. ¿Qué hora es en Madrid en ese momento?

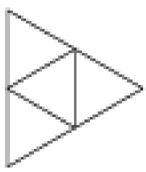
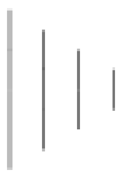
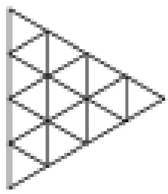
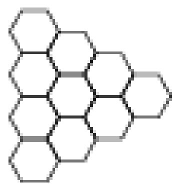
(A) 6 en punto de ayer en la mañana (B) 6 en punto de ayer en la tarde

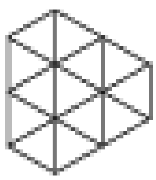
(C) 12 en punto de ayer en la tarde (D) 12 de la noche

(E) 6 en punto de esta mañana

6. En la siguiente figura se dibuja un nuevo patrón al conectar todos los puntos medios de los hexágonos vecinos. ¿Cuál es el patrón que se obtiene?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E)

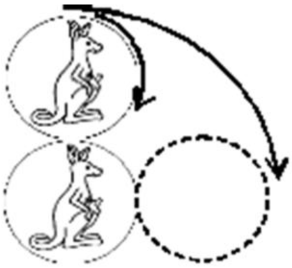


7. Al número 6 le sumamos 3, el resultado lo multiplicamos por dos y luego sumamos

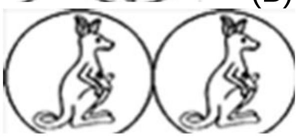
De las expresiones siguientes la que da el mismo resultado es:

(A)$(\mathbf{6}+\mathbf{3}\cdot\mathbf{2})+\mathbf{1}$ (B) $\mathbf{6}+\mathbf{3}\cdot\mathbf{2}+\mathbf{1}$ (C) $(\mathbf{6}+\mathbf{3})\cdot(\mathbf{2}+\mathbf{1})$ (D) $(\mathbf{6}+\mathbf{3})\cdot\mathbf{2}+\mathbf{1}$ (E) $\mathbf{6}+\mathbf{3}\cdot(\mathbf{2}+\mathbf{1})$

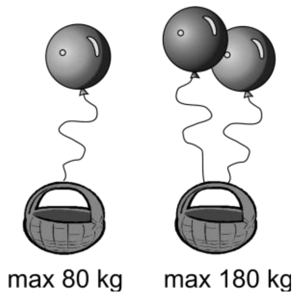
8. La moneda superior es rotada sin deslizarse alrededor de la moneda inferior fija hasta la posición que se muestra en la figura. ¿Cuál es la posición relativa resultante de los Canguros?



(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) depende de la velocidad de rotación

9. Un globo puede alzar una cesta que contiene objetos que pesan hasta 80 kg. Dos de estos globos pueden alzar la misma cesta con objetos que pesan hasta 180 kg. ¿Cuál es el peso de la cesta?



(A) 10 kg (B) 20 kg (C) 30 kg (D) 40 kg (E) 50 kg

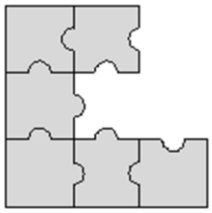
10. Vivian y Miguel tienen manzanas y peras que les dio su abuela. Ellos tienen las 25 frutas juntas en una canasta. De camino a casa Vivian se come una manzana y tres peras, mientras Miguel come 3 manzanas y 2 peras. En la casa

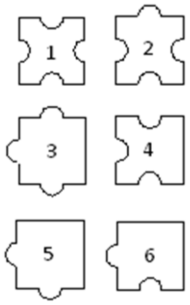
se dan cuenta de que traen la misma cantidad de peras y manzanas. ¿Cuántas peras les dio la abuela?

(A) 12 (B) 13 (C) 16 (D) 20 (E) 21

Problemas de 4 Puntos

11. ¿ Cuáles son las tres piezas numeradas del rompecabezas, que tienen que ponerse a la figura para completar el cuadrado?

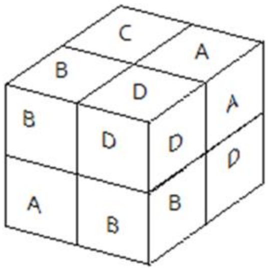




(A) 1, 3, 4 (B) 1, 3, 6 (C) 2, 3, 5 (D) 2, 3, 6 (E) 2, 5, 6

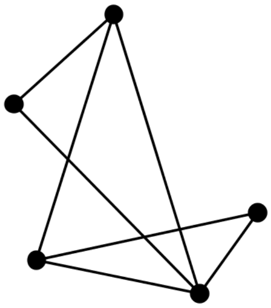
12. Lisa tiene 8 dados con las letras A,B,C y D. La misma letra está en todas las caras de un mismo dado. Ella construye un bloque con los dados (como se muestra en la figura).

Dos dados con caras adyacentes siempre tienen letras diferentes. ¿Cuál es la letra en el dado que no se puede ver en la figura?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) Imposible decir

13. Hay 5 ciudades en el país de las maravillas. Dos ciudades cualquiera están conectadas por un camino, ya sea visible o invisible. En el mapa del país de las maravillas, sólo existen 7 caminos visibles. Alicia tiene lentes mágicos y cuando ve el mapa con los lentes ella sólo puede ver los caminos invisibles. ¿Cuántos caminos invisibles puede ver Alicia?

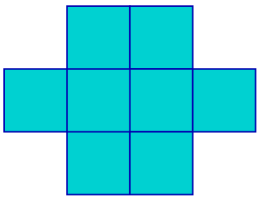


(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 3 (E) 2

14. Los números naturales están pintados de color rojo azul ó verde, donde 1 es rojo, 2 es azul, 3 verde, 4 rojo, 5 azul, 6 verde ... y siguiendo el mismo patrón. ¿Cuál es el color que puede tener el número que resulta de la suma de uno rojo y uno azul?

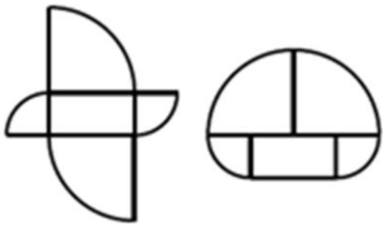
(A) imposible de decir (B) rojo o azul (C) sólo verde (D) s sólo rojo (E) sólo azul

15. El perímetro de la figura siguiente, construida de cuadrados idénticos, y es igual a 42 cm. ¿cuál es el área de esta figura?



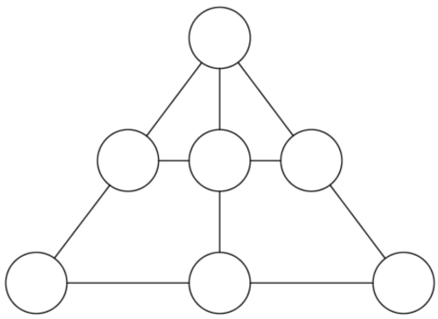
(A) 8 cm^2 (B) 9 cm^2 (C) 24 cm^2 (D) 72 cm^2 (E) 128 cm^2

16. Las siguientes figuras están formadas de las mismas 5 piezas. El rectángulo mide 5×10(cm) y las otras partes son cuartos de dos círculos diferentes. La diferencia entre los perímetros de estas figuras es:



(A) 2.5 cm (B) 5 cm (C) 10 cm (D) 20 cm (E) 30 cm

17. Ponga los números del uno al siete en los círculos de manera que la suma de los números en cada línea sea la misma. ¿Cuál número está en el círculo superior del triángulo?

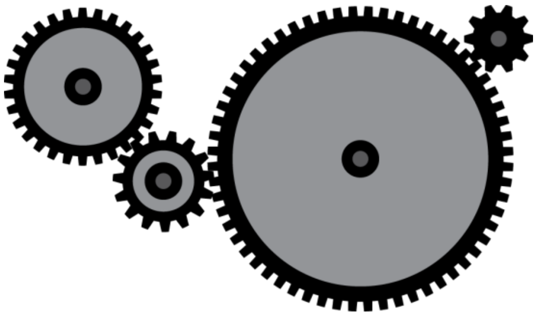


(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

18. Una bola de hule cae desde el techo de una casa que tiene una altura de 10 metros. Después de cada impacto en la tierra rebota 4 de la altura anterior. ¿Cuántas veces aparecerá la bola frente una ventana cuyo marco inferior está a 5 metros del suelo y el marco superior a 6 metros del suelo?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

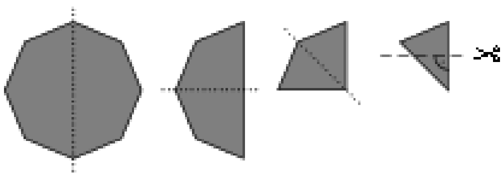
19. Se tienen 4 engranajes juntos. El primero tiene 30 dientes, el segundo 15 dientes, el tercero tiene 60 y finalmente el cuarto tiene 10 dientes. ¿Cuántas vueltas da el último engranaje, cuando el primero da una vuelta?

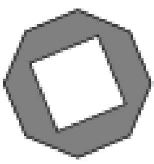
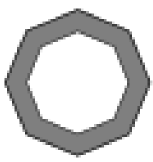
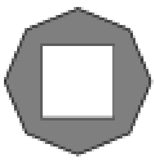


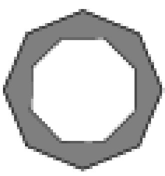
(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

20 Un papel en forma de octágono regular es doblado a la mitad tres veces hasta que se Inmediatamente después una parte del triángulo (que contiene el centro del octágono) es cortada en ángulo recto como se muestra. ¿Cómo se mira el papel después de abrirlo nuevamente?

.



(A)  (B)  (C)  (D) 

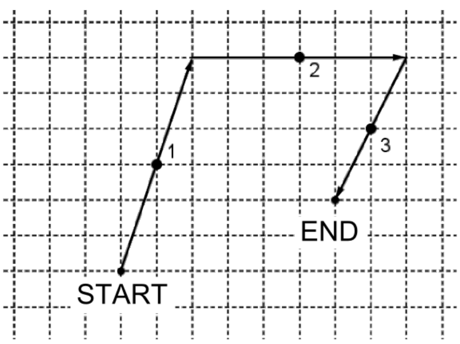
(E) 

Problemas de 5 Puntos

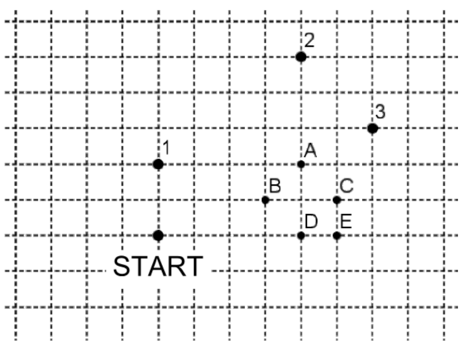
21. En una mezcla llamada Winnie's compuesta de vinagre, vino y agua, el vinagre y el vino están en una proporción 1:2, el vino y el agua en la proporción 3:1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(A) Hay más vinagre que vino.
(B) Hay más vino que vinagre y agua juntos.
(C) Hay más vinagre que agua y vino juntos.
(D) Hay más agua que vinagre y vino juntos.
(E) Lo que menos tiene es vinagre.

22. Los Canguros Hip y Hop juegan a brincar saltándose unas piedras, ellos brincan en línea recta de manera que en cada salto la piedra queda a la mitad del segmento trazado entre el punto de inicio y el punto final del brinco. La figura 1 muestra como Hop saltó tres veces sobre las piedras marcadas 1, 2 y 3. Hip, por otro lado, tiene que brincar las piedras 1, 2 y 3 en orden pero inicia en un lugar diferente como se muestra en la figura
¿Cuál de los puntos A, B, C, D o E es su lugar de llegada.?



PICTURE 1
HOP



PICTURE 2
HIP

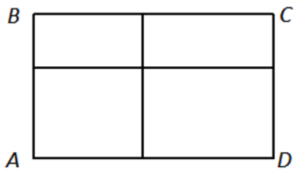
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

23. Habían 12 niños en una fiesta de cumpleaños. Los niños tenían edades de

6, 7, 8, 9 y 10 años. Cuatro de ellos tenían 6 años de edad. El grupo en que más niños hay es el de 8 años. ¿Cuál es el promedio de edad de los 12 niños?

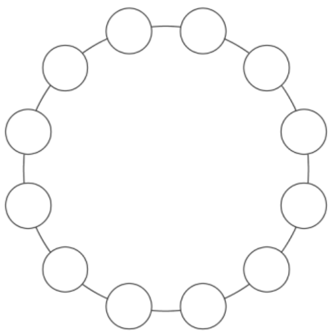
(A) 6 (B) 6.5 (C) 7 (D) 7.5 (E) 8

24. El rectángulo ABCD fue cortado en otros 4 rectángulos pequeños, como se muestra en la figura. Los perímetros de tres de ellos son 11,16 y 19. El perímetro del cuarto rectángulo no es el más grande ni el más pequeño. Encuentre el perímetro del rectángulo original ABCD.



(A) 28 (B) 30 (C) 32 (D) 38 (E) 40

25. Se colocan los números del 1 al 12 en un círculo de manera que cualquier par de números vecinos siempre difieren en una o en dos unidades. ¿Cuáles de estos números tienen que ser vecinos?



(A) 5 and 6 (B) 10 and 9 (C) 6 and 7 (D) 8 and 10 (E) 4 and 3

26. Peter quiere cortar un rectángulo de dimensiones 6 × 7 en cuadrados cuyos lados sean enteros. ¿Cuál es el menor número de cuadrados que puede obtener?

4 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 42

27. Algunas celdas de una cuadrícula de tamaño 4×4 son coloreadas de rojo. El número de celdas rojas en cada fila fue indicado al final de ésta y el número de columnas fue indicado al final de ésta. Después el color rojo fue eliminado. ¿cuál de las tablas siguientes puede ser el resultado?

(A)

				4
				2
				1
				1
0	3	3	2	

(B)

				1
				2
				1
				3
2	2	3	1	

(C)

				3
				3
				0
				0
1	3	1	1	

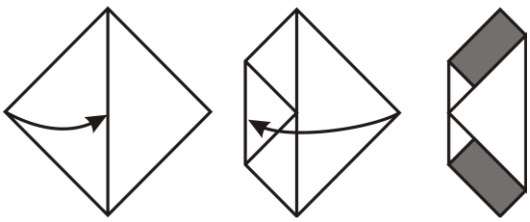
(D)

				2
				1
				2
				2
2	1	2	2	

(E)

				0
				3
				3
				1
0	3	1	3	

28. Un pedazo de papel de forma cuadrada se dobla dos veces como se indica en la figura. Halle la suma de las áreas de los rectángulos sombreados, sabiendo que el área del cuadrado original es de 64 cm2



(A) 10 cm^2 (B) 14 cm^2 (C) 15 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 24 cm^2

29. Los números de las tres casas donde viven mis amigos y yo están formados por los mismos dígitos y son: abc, bc, y c sabiendo que la suma de estos números es 912 encuentre el valor de b..

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 0

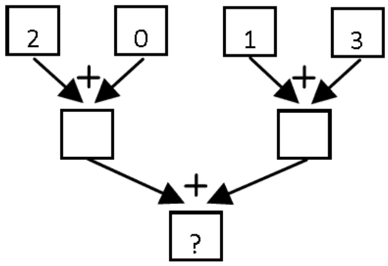
30. Se dieron a Ann y a Bill dos enteros positivos consecutivos (por ejemplo a Ann 7 y a Bill 6) Ellos saben que sus números son consecutivos y conocen su propio número, pero no saben el número de la otra persona. Luego se escuchó la siguiente discusión: Anna dijo “Yo no conozco tu número” Bill respondió “Yo no conozco tu número” Luego Ann le dijo a Bill “Ahora sé cuál es tu número” ¿Cuál es el número de Ann?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Apéndice 3
Prueba Benjamin 2013

Preguntas de 3 puntos

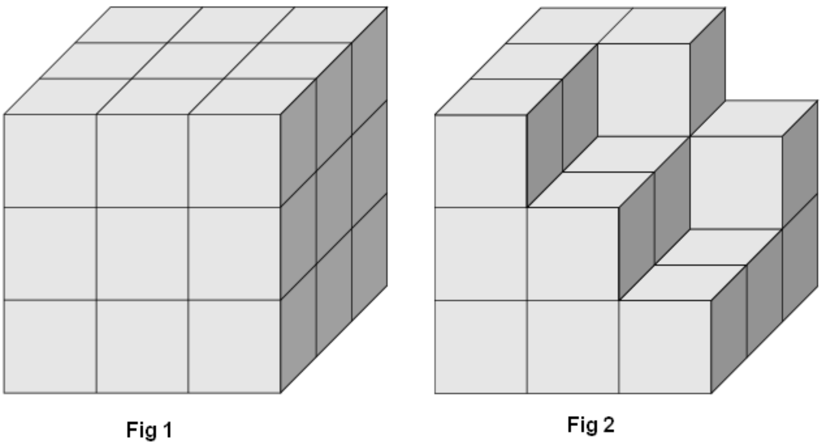
1. Al colocar los números 2, 0, 1, 3 en la máquina que suma.



¿Cuál es el resultado que debe verse en la caja con el signo de pregunta?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

2. Natalia quiere construir un cubo como el que tiene Diana (figura 1). Sin embargo Natalia se quedó sin suficientes cubos pequeños y pudo construir solamente una parte del cubo, como se puede ver en la figura 2. ¿Cuántos cubos pequeños necesita Natalia para completar su cubo?

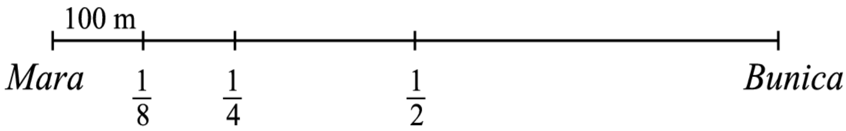


(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

3.

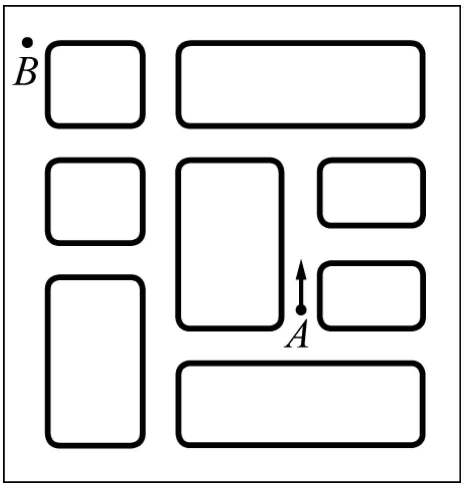
Lucía y Carmen se encuentran en los extremos de una pista como la que se indica.

¿Qué distancia que corre Lucía para llegar donde está Carmen?



(A) 300 m (B) 400 m (C) 800 m (D) 1 km (E) 700 m

4. Nicole está aprendiendo a conducir. Ella sabe cómo girar a la derecha pero no sabe cómo girar a la izquierda. Cuál es la menor cantidad de giros que tiene que dar Nicole para llegar del punto A al punto B?



(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

5. La suma de las edades de Ana, Bárbara y Cristina es de 31 años. ¿Cuál será la suma de sus edades en tres años?

(A) 32 (B) 34 (C) 35 (D) 37 (E) 40

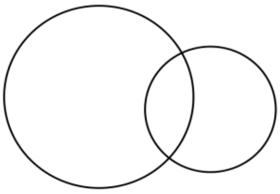
6. Cuál dígito debe colocarse en las tres cajas DD · D = 176, para que la multiplicación funcione?

(A) 6 (B) 4 (C) 7 (D) 9 (E) 8

7. Ronald tiene que tomarse una pastilla cada 15 minutos. Él se tomó la pastilla a las 11 : 05. ¿A qué hora se tomó la cuarta pastilla?

(A) 11:40 (B) 11:50 (C) 11:55 (D) 12:00 (E) 12:05

8. Al dibujar dos círculos, Marvin obtiene una figura, la cual consiste en tres regiones (como se muestra en la gráfica). ¿Cuál es el máximo de regiones podría obtener Marvin dibujando dos cuadrados?

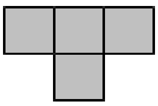


(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

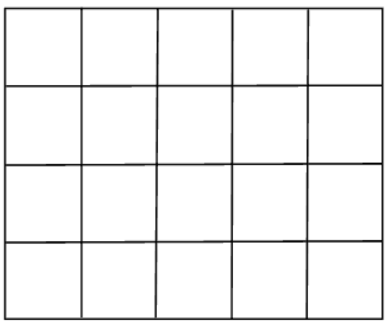
9. El número 36 tiene la propiedad de ser divisible por el dígito en la posición de las unidades, porque 36 es divisible por 6. El número 38 no tiene esta propiedad. ¿Cuántos números entre el 20 y el 30 tienen esta propiedad?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

10. Ana tiene piezas como las que muestra la figura.



Ella trata de poner la mayor cantidad posible en un rectángulo de 4 × 5.

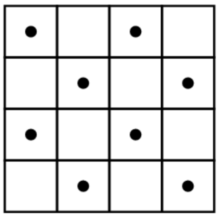


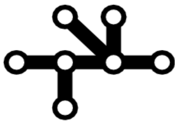
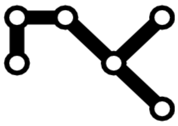
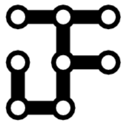
Las piezas no pueden quedar encima de otras piezas. ¿Cuál es la mayor cantidad de piezas que puede poner Ana en el rectángulo?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

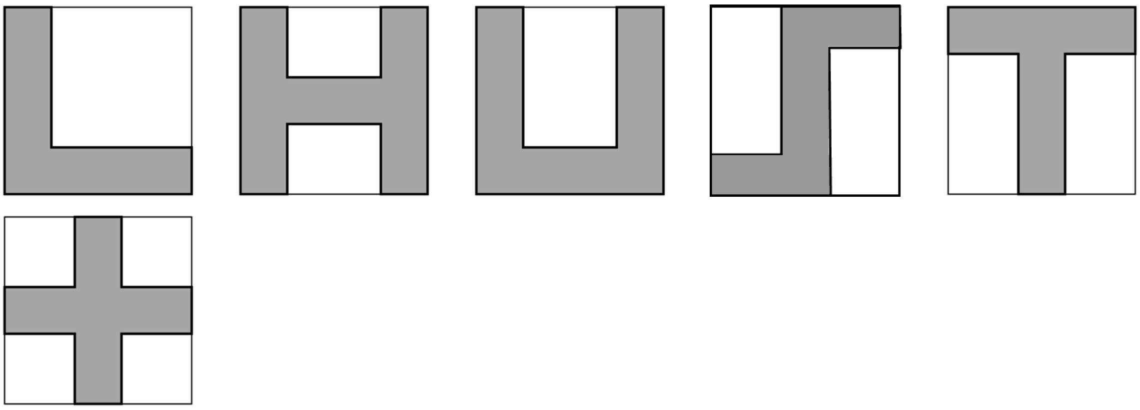
11.

¿Cuál de las siguientes piezas cubre la mayor cantidad de puntos en la tabla?



(A) (B)  (C)  (D)  (E) 

12.Marianela colorea figuras en hojas de papel cuadradas como se muestran abajo.

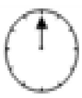
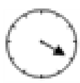


¿Cuántas de estas figuras tienen el mismo perímetro que tiene la hoja de papel?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

13. Ana María conduce su bicicleta en la tarde con una velocidad constante. Ella observa su reloj al principio y al final con el siguiente resultado:

¿Cuál figura muestra la posición de la aguja de los minutos cuando Ana María lleva un tercio del camino?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. Mateo está pescando. Si Mateo hubiera pescado tres veces más pescados de lo que realmente pescó, él tendría 12 peces más. ¿Cuántos peces pescó Mateo?

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

15. En una elección cada uno de los cinco candidatos obtuvo diferente número de votos. Los candidatos recibieron 36 votos en total. El ganador recibió 12 votos. El candidato que obtuvo el último lugar obtuvo 4 votos. ¿Cuántos votos obtuvo el candidato que quedó en segundo lugar?

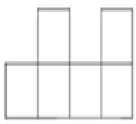
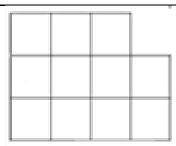
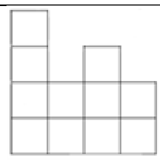
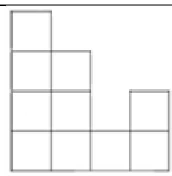
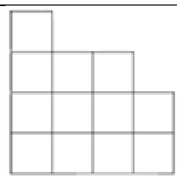
(A) 8 (B) 8 y 9 (C) 9 (D) 9 y 10 (E) 10

16. Jonathan ha hecho un edificio formado con torres de cubos. En la figura podemos ver en cada celda la cantidad de cubos que tiene cada torre. Cuando observas la torre de frente, ¿qué figura ves?

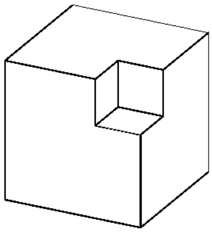
Atrás

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

Adelante

				
A	B	C	D	(E)

17. De un cubo de madera con lado 3 cm se cortó de la esquina un cubo pequeño de lado 1 cm (como se observa en la figura). ¿Cuál es el número de caras del sólido resultante después de haber cortado de cada esquina del cubo grande un cubo como el primero que se cortó?



(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 36

18. El total de pares de números naturales de dos dígitos cuya diferencia es igual a 50 es.

(A) 40 (B) 30 (C) 50 (D) 60 (E) 10

19. La final del torneo de fútbol fue un partido lleno de goles. Se anotaron 6 goles en la primera mitad y el equipo de visita terminó ganando la primera mitad. Después de que el equipo de casa hiciera 3 goles en la segunda mitad, ellos ganaron el partido. ¿Cuántos goles en total hizo el equipo de casa para haber ganado la final?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

20. En los cuadrados de un tablero 4 × 4 se escriben números de manera que difieren 1 de su adyacente. Los números 3 y 9 aparecen en la tabla y el número 3 está ubicado en la esquina superior izquierda, como se muestra.

3			

¿Cuántos números diferentes aparecen en la tabla?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E)

21. Aron, Bernarda y Carlos siempre mienten. Cada uno de ellos tiene una piedra roja o una piedra verde. Aron dice “Mi piedra es del mismo color que la piedra de Bernarda”, Bernarda dice “Mi piedra es del mismo color que la de Carlos”. Carlos dice “Exactamente dos de nosotros tenemos piedras rojas”. ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto?

(A) La piedra de Aron es verde.
(B) La piedra de Bernarda es verde
(C) La piedra de Carlos es Roja
(D) Las piedras de Carlos y Aron son de diferente color
(E) Ninguna de las anteriores es verdadera.

22 66 gatos se han inscrito en el concurso Miss Gato 2013. Después de la primera ronda 21 fueron eliminados por que fallaron al atrapar un ratón. 27 gatos de los que quedaron después de la primera eliminación tienen rayas y 32 tienen una oreja negra. Todos los gatos con raya y oreja negra llegaron a la final. ¿Cuál es el número mínimo de finalistas?

(A) 5 (B) 7 (C) 13 (D) 14 (E) 27

23. Hay cuatro botones en fila como muestra la figura de abajo. Dos de ellos muestran caras felices y dos de ellos muestran caras tristes. Si presionamos en la cara, la expresión cambia a lo opuesto (ejemplo: la cara feliz cambia a triste cuando se presiona). Adicional a esto, los botones adyacentes también cambian su expresión. ¿Cuál es el menor número de veces que se deben presionar los botones para solo obtener caras felices?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

24. 40 niños y 28 niñas se encuentran tomados de la mano y formando un círculo. Exactamente 18 niños le dan la mano derecha a una niña. ¿Cuántos niños le dan su mano izquierda a una niña?

(A) 18 (B) 9 (C) 28 (D) 14 (E) 20

25. Un cubo de $2 \times 2 \times 2$ se construirá usando 4 cubos blancos y 4 cubos negros de $1 \times 1 \times 1$. ¿Cuántos cubos diferentes, de acuerdo con la distribución de colores pueden ser construidos? (Dos cubos no son diferentes si uno puede obtenerse al rotar el otro)

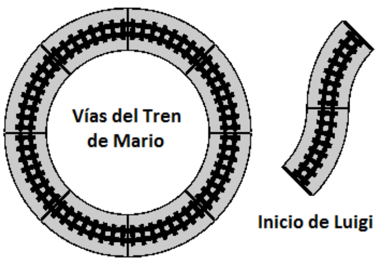
(A) 16 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

26. ¿Cuántos números de 3 dígitos poseen la siguiente propiedad: Después de sustraerle 297 al número, obtenemos un número que tiene exactamente los mismos dígitos que el inicial pero en orden inverso?

(A) 6 (B) 7 (C) 10 (D) 60 (E) 70

27. Cuando Mario y Luigi encontraron su viejo modelo de ferrocarril, Mario muy rápido construyó un círculo perfecto usando 8 piezas iguales para su vía del ferrocarril, Luigi empezó a construir otro camino con dos piezas, como muestra la figura. Él quiere completar una vía de ferrocarril que sea cerrada pero usando la menor cantidad de piezas.

¿De cuántas piezas consistirá su vía?



(A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16

28.Habían 2013 habitantes en una isla. Unos de ellos eran caballeros y otros eran mentirosos. Los caballeros siempre decían la verdad y los mentirosos siempre decían mentiras. Cada día, uno de los habitantes decía: “Después de mi partida el número de caballeros en la isla será igual al número de mentiroso” y se iba de la isla. Después del día 2013 no había nadie en la isla. ¿ Cuántos mentirosos habían en la isla inicialmente?

(A) 0 (B) 1006 (C) 1007 (D) 2013 (E) Es imposible de determinar.

#29. Empezando con una lista de tres números, el procedimiento “cambioporsum” crea una nueva lista sustituyendo cada número con la suma de los otros dos. Por ejemplo, si tenemos {3, 4, 6} y aplicamos “cambiaporsuma” nos queda {10, 9, 7} y al volver a aplicar el procedimiento obtenemos {16, 17, 19}. Si empezamos con la lista {20, 1, 3}, ¿ Cuáles la máxima diferencia entre dos números de la lista después de 2013 aplicaciones de “cambioporsuma”?

(A) 1 (B) 2 (C) 17 (D) 19 (E) 2013

#30. Alicia forma 4 cubos idénticos utilizando un patrón como se muestra en la figura 1. Después ella los pega y forma una barra como la que se muestra en la figura 2. Sólo las caras con números idénticos se pueden pegar juntas. ¿Cuál es la mayor suma que Alicia puede obtener de la superficie de la barra?

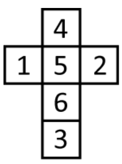


Fig 1

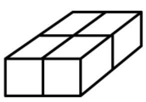


Fig 2

(A) 66 (B) 68 (C) 72 (D) 74 (E) 76

Apéndice 4

TEST RAZONAMIENTO MATEMATICO

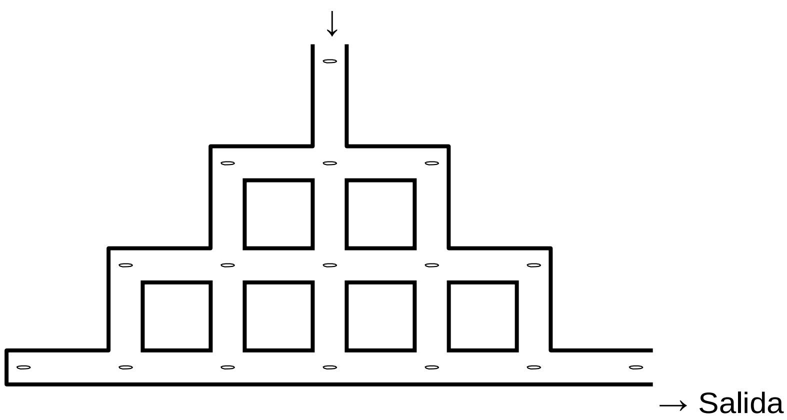
PRUEBA DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Programa de Doctorado: Convenio Instituto Tecnológico de Costa Rica

Universidad de Valencia

COSTA RICA 2012

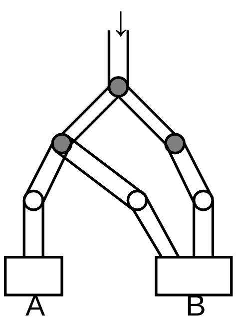
1. Spot, el hámster, va hacia el país de la miel y la leche. Antes de que pueda ingresar al legendario país tiene que pasar a través de un sistema de túneles, como se muestra en la figura. No le está permitido regresar a una intersección por donde ya ha pasado. En cada intersección encontrará una semilla de calabaza. ¿Cuál es la máxima cantidad de semillas de calabaza que puede recolectar?



(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

Comentario. Esta pregunta es la 4 del 2011, agrupó en el factor que se identificó como memoria de trabajo y con una carga factorial de .483. Implica comprender una situación en este caso identificar un objetivo y luego un proceso de toma de decisiones acorde con el objetivo

2. . Introducimos 1000 L de agua en la entrada de una tubería, en cada cruce dentro de la tubería el agua se divide en dos cantidades iguales. ¿Cuántos litros de agua llegarán al contenedor B?

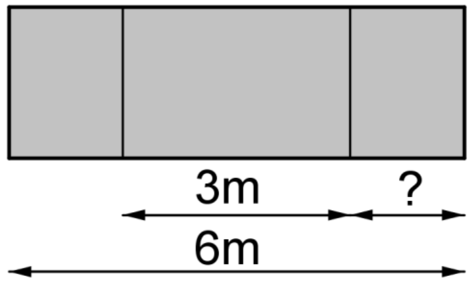


(A) 800 (B) 750 (C) 666.67 (D) 660 (E) 500

Comentario. Esta pregunta es la 7 del 2011, agrupó en el factor que se identificó como memoria de trabajo y con una carga factorial de .567. La pregunta se basa en el manejo apropiado de información.

3. Una pizarra de tiza mide 6 m de largo. El largo de la parte media es de 3 m, las otras

dos partes miden igual. ¿ Cuál es el largo de la parte derecha?



(A) 1 m (B) 1,25 m (C) 1,5 m (D) 1,75 m (E) 2 m

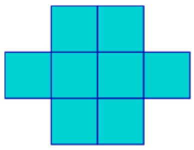
Comentario. Pregunta 2, 2012, agrupó en el factor RD .560. Hay una hipótesis implícita y otra explícita que permiten obtener la respuesta

4. El total de pares de números naturales de dos dígitos cuya diferencia es igual a 50 es.

(A) 40 (B) 30 (C) 50 (D) 60 (E) 10

Comentario. Pregunta 18, 2013, agrupó en RI, .614. Se comprende una caracterización y se aplica, esta pregunta se reclasificó.

5. El perímetro de la figura siguiente, construida de cuadrados idénticos, es igual a 42 cm. ¿Cuál es el área de esta figura?



(A) 8 cm^2 (B) 9 cm^2 (C) 24 cm^2 (D) 72 cm^2 (E) 128 cm^2

Comentario. Pregunta 15, 2012, clasificó en RE, .656. Relación entre propiedades numéricas de un objeto geométrico, conteo apropiado y aplicación de conceptos.

6. Si Liza, la gata, pasa todo el día sin hacer nada y no caza ningún ratón, entonces toma 60*ml* de leche. Pero si Liza atrapa al menos un ratón en el día, entonces toma un tercio más de leche. Liza ha estado atrapando ratones de día por medio durante las últimas dos semanas. ¿ Cuánta leche ha tomado durante ese periodo?

(A) 840 ml (B) 980 ml (C) 1050 ml (D) 1120 ml (E) 1960 ml

Comentario. Pregunta 10, 2011. RI, .585. Comprende una información implícita y la usa para concluir la solución.

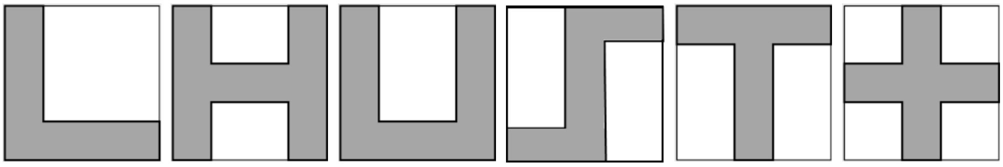
7. La suma de las edades de Ana, Bárbara y Cristina es de 31 años. ¿Cuál será la suma de

sus edades en tres años?

(A) 32 (B) 34 (C) 35 (D) 37 (E) 40

Comentario. Pregunta 5,2013, WM, .722. Manejo de información simple pero es necesario tener en cuenta un cambio en tres valores.

\# 8. Marianela colorea figuras en hojas de papel cuadradas como se muestran abajo.



¿ Cuántas de estas figuras tienen el mismo perímetro que tiene la hoja de papel?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

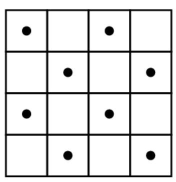
Comentario. Pregunta 12, 2013, RE, .742. Es un razonamiento muy geométrico que requiere visualizar y comparar geométricamente, también podría ser algebraico pero no es frecuente

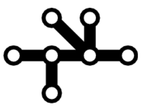
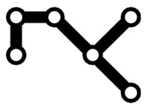
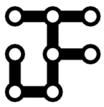
\# 9. El número36 tiene la propiedad de ser divisible por el dígito en la posición de las unidades, porque 36 es divisible por 6. El número 38 no tiene esta propiedad. ¿Cuántos números el 20 y el 30 tienen esta propiedad?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Comentario. Pregunta 9, 2013, RI, .481. Comprende la manera en que se aplica un predicado y lo aplica en un rango declarado de valores. La clasificación teórica de esta pregunta es RD.

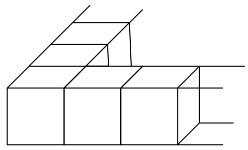
\# 10. ¿Cuál de las siguientes piezas cubre la mayor cantidad de puntos en la tabla?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Comentario. Pregunta 11, 2013, WM, .596. Manejo de información, un proceso, colocar la figura y una meta, y ver cuántos puntos cubre.

\# 11. Nina uso 36 cubos idénticos para construir un muro de cubos alrededor de una región cuadrada (Una esquina y parte de dos de los lados se muestra en la imagen de abajo). ¿ Cuántos cubos necesitará Nina para rellenar la región mencionada?



(A) 36 (B) 49 (C) 64 (D) 81 (E) 100

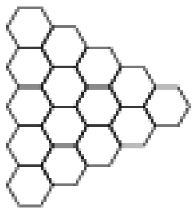
Comentario. Pregunta 14, 2011, RD, .544. Un análisis elaborado permite descubrir una hipótesis para luego ligarla con otra hipótesis dada y concluir

\# 12. En un avión , las filas para pasajeros están numeradas del 1 al 25 pero no hay fila 13. La fila 15 tiene solamente 4 asientos y todas las demás tienen 6 asientos. ¿ Cuántos asientos para pasajeros hay en este avión?

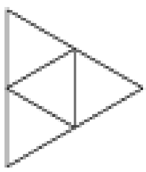
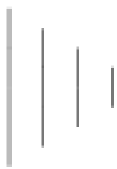
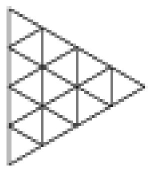
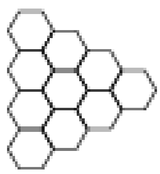
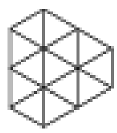
(A) 120 (B) 138 (C) 142 (D) 144 (E) 150

Comentario. Pregunta 4, 2012, WM, .544. Manejo adecuado de información

\# 13. En la siguiente figura se dibuja un nuevo patrón al conectar todos los puntos medios de los hexágonos vecinos.

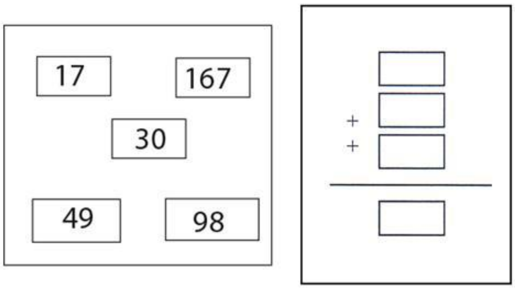


¿Cuál es el patrón que se obtiene?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Comentario. Pregunta 6, 2012, RE, .643. Es una visualización geométrica.

\# 14. Mueva cuatro de los números de la izquierda dentro de las celdas de la derecha de manera que la suma sea correcta.

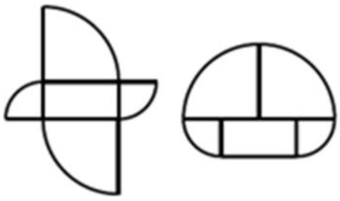


¿El número que queda en la caja de la izquierda es?

(A) 17 (B) 30 (C) 49 (D) 96 (E) 167

Comentario. Pregunta 3, 2011,RD ,675. Análisis discriminatorio para descubrir la colocación de los valores

15. Las siguientes figuras están formadas de las mismas 5 piezas. El rectángulo mide 5 × 10(*cm*) y las otras partes son cuartos de dos círculos diferentes. La diferencia entre los perímetros de las figuras es?



(A) 2.5 cm (B) 5 cm (C) 10 cm (D) 20 cm (E) 30 cm

Comentario. Pregunta 16, 2012, RE, .4. Visualizar y comparar. Es posible que se haga una solución algebraica pero no es común.

16. Vivian y Miguel tienen manzanas y peras que les dio su abuela. Ellos tienen las 25 frutas juntas en una canasta. De camino a casa Vivian se come una manzana y tres peras, mientras Miguel come 3 manzanas y 2 peras. En la casa se dan cuenta de que traen la misma cantidad de peras y manzanas. ¿ Cuántas peras les dio la abuela?

(A) 12 (B) 13 (C) 16 (D) 20 (E) 21

Comentario. Pregunta 10, 2012, RD, .553. Ligar algunas hipótesis explícitas.

17. La final del torneo de fútbol fue un partido lleno de goles. Se anotaron 6 goles en la primera mitad y el equipo de visita terminó ganando la primera mitad. Después de que el equipo de casa hiciera 3 goles en la segunda mitad, ellos ganaron el partido. ¿Cuántos goles en total hizo el equipo de casa para haber ganado la final?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Comentario. Pregunta 19, 2013, RD, .764. Información que se presenta en forma implícita debe primero aclararse para luego resolver

\# 18. Paul quería multiplicar un número entero por 301, pero olvidó el cero y en cambio multiplicó por 31. El resultado que obtuvo fue 372. ¿Cuál era el resultado que debía de tener con el número correcto?

(A) 3010 (B) 3612 (C) 3702 (D) 3720 (E) 30720

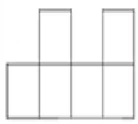
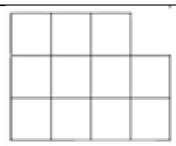
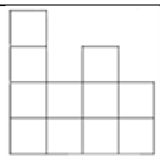
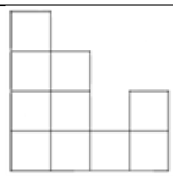
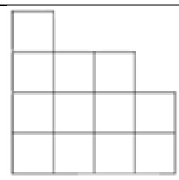
Comentario. Pregunta 16, 2011, WM, .622. Puede ser un problema muy técnico pero requiere reconocer un mecanismo para replantear

\# 19. Jonathan ha hecho un edificio formado con torres de cubos. En la figura podemos ver en cada celda la cantidad de cubos que tiene cada torre. Cuando observas la torre desde adelante, ¿qué figura ves?

Atrás

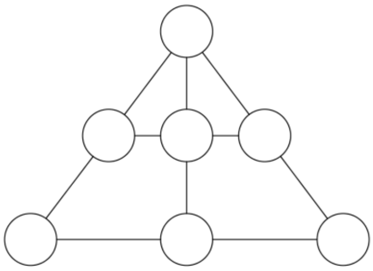
4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

Adelante

				
A	B	C	D	(E)

Comentarios. Problema 16, 2013, WM, .614. Organización de Información visual y análisis

≠ 20. Ponga los números del uno al siete en los círculos de manera que la suma de los números en cada línea sea la misma. ¿Cuál número queda en la parte superior del triángulo?



(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Comentario. Problema 17, 2012. RI, .599. Se debe analizar las condiciones del problema para determinar factores que faciliten la solución. Por ejemplo son cinco sumas que dan igual cada número se suma dos veces excepto una que se suma tres veces

Hoja de respuestas

Nombre:

___

Sexo

___

Fecha Nacimiento:

___

Nombre de la Institución

___

Ocupación del encargado(Padre o Madre o los dos)

___

01.	A	B	C	D	E
02.	A	B	C	D	E
03.	A	B	C	D	E
04.	A	B	C	D	E
05.	A	B	C	D	E
06.	A	B	C	D	E
07.	A	B	C	D	E
08.	A	B	C	D	E
09.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E

11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E
16.	A	B	C	D	E
17.	A	B	C	D	E
18.	A	B	C	D	E
19.	A	B	C	D	E
20.	A	B	C	D	E

Apéndice 5

	I5	I8	I10	I13	I19	I6	I14	I15	I16	I20	I2	I4	I9	I18	I1	I3	I7	I12	I17
I5	1.00																		
I8	0.25	1.00																	
I10	0.35	0.20	1.00																
I13	0.29	0.17	0.23	1.00															
I19	0.22	0.11	0.22	0.28	1.00														
I6	0.32	0.18	0.19	0.24	0.17	1.00													
I14	0.24	0.12	0.18	0.25	0.22	0.25	1.00												
I15	0.18	0.08	0.17	0.09	0.12	0.05	0.08	1.00											
I16	0.42	0.26	0.32	0.34	0.32	0.35	0.36	0.10	1.00										
I20	0.18	0.14	0.21	0.14	0.12	0.16	0.15	0.15	0.25	1.00									
I2	0.43	0.25	0.34	0.34	0.24	0.30	0.33	0.08	0.53	0.22	1.00								
I4	0.29	0.17	0.29	0.19	0.17	0.16	0.16	0.10	0.31	0.14	0.24	1.00							
I9	0.23	0.05	0.18	0.09	0.16	0.12	0.08	0.05	0.20	0.13	0.19	0.23	1.00						
I18	0.43	0.28	0.32	0.27	0.31	0.35	0.35	0.11	0.50	0.23	0.50	0.29	0.25	1.00					
I1	0.19	0.11	0.12	0.11	0.08	0.10	0.14	0.05	0.27	0.09	0.29	0.04	0.05	0.19	1.00				
I3	0.35	0.22	0.22	0.29	0.21	0.24	0.30	0.07	0.45	0.17	0.50	0.08	0.09	0.43	0.32	1.00			
I7	0.39	0.25	0.37	0.33	0.22	0.34	0.28	0.12	0.48	0.23	0.51	0.23	0.17	0.45	0.34	0.48	1.00		
I12	0.29	0.27	0.31	0.33	0.17	0.27	0.30	0.14	0.44	0.22	0.46	0.16	0.14	0.49	0.30	0.57	0.47	1.00	
I17	0.42	0.31	0.42	0.36	0.31	0.35	0.37	0.11	0.63	0.33	0.59	0.32	0.28	0.54	0.25	0.49	0.51	0.49	1.00

Matriz de correlaciones